



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.004/10

Evolução Cosmológica de Perturbações de Densidade Inhomogêneas

Alberto Sanoja

Orientador

Prof. Dr. Rogério Rosenfeld

Dezembro de 2010

El científico no estudia la naturaleza porque es útil, sino porque le cautiva, y le cautiva porque es bella. Si la naturaleza no fuera hermosa, no valdría la pena conocerla, y si no valiera la pena conocerla, tampoco valdría la pena vivir. Por supuesto, no me refiero aquí a la belleza que estimula los sentidos, la de las cualidades y las apariencias; no es que la desdeñe, en absoluto, sino que ésta nada tiene que hacer con la ciencia. Me refiero a la belleza más profunda, la que procede del orden armonioso de las partes y que puede captar una inteligencia pura.

Henri Poincaré

Agradecimentos

Eu gostaria expressar minha gratidão a Rogério Rosenfeld e Thiago Pereira pelas suas discussões, sugestões e ajuda. Ademais, quero agradecer de forma especial a Almeida Sampson pelo seu apoio, ajuda e valiosos conselhos ao longo da realização deste trabalho. Por último, quero agradecer a CAPES por prover o suporte financeiro para a realização deste trabalho.

Resumo

Fazemos uma revisão do modelo cosmológico padrão, apresentando suas bases observacionais e mostrando os aspectos conceituais mais relevantes. Depois realizamos uma revisão da teoria de inflação, indicando as motivações conceituais que levaram à formulação da teoria, o mecanismo que faz possível a inflação cósmica e como esse processo resolve os problemas clássicos da cosmologia padrão. Após mostrar que a inflação é um mecanismo bem-sucedido para explicar a origem das perturbações de densidade primordiais, concentramo-nos em descrever a evolução das perturbações de densidade cosmológica, tanto na sua fase linear como não-linear. Além disso, mostramos como o campo de perturbações de densidade linear permite prever estatisticamente a abundância e a distribuição das estruturas cósmicas. Posteriormente, consideramos a expansão acelerada do universo e discutimos os candidatos que têm sido propostos para tentar explicar a origem dessa aceleração, especialmente o candidato da energia escura, no qual nos detemos para revisar os modelos básicos propostos com respeito à sua natureza. Adicionalmente, mostramos como sua presença afeta a evolução das perturbações de densidade. Finalmente, baseando-nos no modelo de Lemaître-Tolman-Bondi, fazemos uma generalização do modelo do colapso esférico para estudar a evolução não-linear de perturbações de densidade inhomogêneas, tanto em um universo Einstein-de Sitter como em um universo Λ CDM.

Palavras chaves: Formação de estruturas; modelo de colapso esférico; modelo de Lemaître-Tolman-Bondi, perturbações de densidade inhomogêneas.

Área de conhecimento: Cosmologia.

Abstract

We present a review of the standard cosmological model, showing both its observational basis as well as the most relevant conceptual aspects. Subsequently, we give an overview of the inflation theory, pointing out the conceptual motivations that led to its formulation, the mechanism that allow the cosmic inflation and how that process resolves the classical problems of the standard cosmology. After showing that the inflation theory provides a successful mechanism to explain the origin of the primordial density perturbations, we focus on describing the evolution of the cosmological density perturbations, both in linear and nonlinear phase. On the other hand, we show how the linear density perturbation field allows to predict statistically the abundance and distribution of the cosmic structures. Next, we consider the accelerated expansion of the universe and mention the candidates that have been proposed to try to explain the origin of the acceleration; especially the dark energy candidate, in which we pause to examine the basic models proposed about its nature. Further, we expose how its presence affects the evolution of the density perturbations. Finally, based on the Lemaître-Tolman-Bondi, we make a generalization of the spherical collapse model to study the evolution of inhomogeneous nonlinear density perturbations, both in an Einstein-de Sitter as Λ CDM universe.

Sumário

Introdução	1
1 Modelo Cosmológico Padrão	3
1.1 Bases Observacionais	3
1.1.1 A expansão do universo	3
1.1.2 A abundância de elementos leves	4
1.1.3 A radiação cósmica de fundo (RCF)	4
1.1.4 As estruturas cósmicas	4
1.2 Cinemática do Espaço-Tempo no Modelo Cosmológico Padrão	5
1.2.1 A métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)	5
1.2.2 Movimento de partículas	7
1.2.3 Propagação da luz	7
1.2.4 Tipos de espaço	8
1.2.5 Distância própria	9
1.2.6 Distância de Hubble	10
1.2.7 Distância ao horizonte	11
1.3 Dinâmica do Espaço-Tempo de Friedmann-Robertson-Walker	11
1.3.1 Equações básicas	12
1.3.2 Soluções para $a(t)$ e $\rho(t)$	13
1.3.3 Idade do universo	14
1.4 Termodinâmica do Universo	15
1.4.1 Equilíbrio termodinâmico	15
1.4.2 Entropia	16

2	Teoria da Inflação	18
2.1	Problemas da Cosmologia Padrão	18
2.1.1	Problema do horizonte	19
2.1.2	Problema da planura	19
2.1.3	Problema dos monopolos magnéticos	20
2.1.4	Problema das estruturas	20
2.2	Dinâmica da Inflação	21
2.3	Como Inflação resolve os Problemas da Cosmologia Padrão	25
2.3.1	Problema do horizonte	25
2.3.2	Problema da planura	26
2.3.3	Problema dos monopolos	27
2.3.4	Problema das estruturas	27
3	Descrição das Perturbações de um Campo Escalar	32
3.1	Fluido de um campo escalar homogêneo	32
3.2	Fluido de um campo escalar inhomogêneo	34
4	Formação de Estruturas	38
4.1	Teoria Linear	38
4.2	Os efeitos da expansão acelerada del universo	42
4.3	Modelo do Colapso Esférico	46
4.4	Formalismo de Press-Schechter	52
5	Perturbações de Densidade Inhomogêneas	55
5.1	O caso sem pressão	55
5.2	O caso com pressão	68
	Conclusões	73
	A Soluções Paramétricas	75
	B Tensores	76
	Referências Bibliográficas	78

Introdução

Entender a formação de estruturas em grande escala, como galáxias, aglomerados de galáxias e super-aglomerados de galáxias, é um dos maiores desafios da cosmologia atual. Suas pesquisas serão usadas para determinar os parâmetros cosmológicos fundamentais em futuros levantamentos do desvio para o vermelho de galáxias, tais como o Dark Energy Survey [1], o Large Synoptic Survey telescope [2], o Euclid Survey [3] e DEEP2 Redshift Survey [4]. Além disso, oferece um cenário para a física de partículas testar teorias sobre a natureza da matéria escura e energia escura.

A imagem fundamental para a formação de estruturas em grande escala sugere que pequenas perturbações geradas por flutuações quânticas na fase inflacionária crescem na matéria escura para formar poços de potencial gravitacional onde os bárions caem posteriormente. A parte linear desse processo na matéria escura é bem entendida e descrita pela teoria das perturbações lineares [5, 6]. No entanto, a etapa não linear não admite um tratamento com estes métodos perturbativos, mesmo nos casos em que apenas a matéria escura está presente. Então, usualmente se apela a simulações numéricas de N-corpos com o fim de obtermos a distribuição de massa de grandes halos de matéria escura. Infelizmente, estas simulações são custosas; portanto é desejável uma ferramenta simples para poder determinarmos propriedades de halos de matéria escura. Tal modelo é conhecido como o modelo do colapso esférico [7]. Nesse modelo extremamente simples, uma perturbação esféricamente simétrica e homogênea, chamado perfil de densidade top-hat, evolui dentro de um universo homogêneo em expansão. Os argumentos de simetria mostram que pode-se considerar a região sobredensa como um mini-universo de curvatura positiva. Consequentemente, a equação de continuidade e de Raychadhury podem ser usadas para descrever a evolução da densidade e o raio da perturbação esférica [8, 9]. Quando esta se combina com o formalismo de Press-Schechter [10], este marco fornece uma base estatística para a formação de estruturas, da qual a densidade de número de halos de matéria escura podem ser estimados.

O modelo de colapso esférico tem sido recentemente usado para estudar a formação de estruturas em modelos com uma simples modificação tipo Yukawa da gravidade

[11], em modelos $f(R)$ [12], em cosmologia de branas [13], em modelos que permitem flutuações de energia escura [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24] e em os modelos chamados de camaleão [25].

O objetivo deste estudo é relaxar a suposição de um perfil top-hat e estudar a evolução não-linear de uma perturbação esférica inhomogênea em um marco completamente relativista. Para cumprir com esse objetivo, empregaremos o modelo de Lemaitre-Tolman-Bondi [26, 27, 28], que procura descrever um universo inhomogêneo e isotrópico. Este modelo foi pouco usado desde sua publicação até a descoberta da expansão acelerada do universo [29, 30]. A partir desse momento foi revivido para tentar explicar tais observações [27, 28, 31, 32, 33, 34]. Para nossa finalidade, o aplicaremos não para um universo inteiro, mas para descrever a evolução de perturbações de densidade [35].

Capítulo 1

Modelo Cosmológico Padrão

A cosmologia padrão é uma teoria bem-sucedida, que resulta de aplicar a relatividade geral a um universo homogêneo e isotrópico. Ela fornece uma descrição apropriada do universo observável, desde as primeiras frações de segundo depois do Big Bang até o presente. A cosmologia padrão descreve a origem, a geometria, a evolução, a composição, estrutura e o possível futuro do universo. O conjunto de evidências observacionais que sustentam a teoria são: a expansão do universo, percebida pelo desvio para o vermelho de galáxias distantes, a nucleossíntese primordial, confirmada pela observação da abundância de elementos leves como Hidrogênio, Deutério, Hélio e Lítio, a radiação de fundo de microondas, e a formação de estruturas cósmicas, sua abundância e distribuição.

1.1 Bases Observacionais

1.1.1 A expansão do universo

A expansão do universo é a característica mais fundamental da cosmologia padrão. Foi descoberta em 1929 por Edwin Hubble e joga um papel importante na cosmologia observacional. As galáxias que pertencem a outros aglomerados de galáxias estão se afastando de nós com uma velocidade que é proporcional à distância que se encontram de nós. Este comportamento é revelado pelo red shift do espectro da luz que nos chega dessas galáxias e é expressado pela lei de Hubble. Se todo o espaço se expandir a mesma escala em um intervalo de tempo dado, então as galáxias se expandirão umas com respeito às outras, de maneira que, as galáxias distantes se moverão relativamente mais rapidamente do que as galáxias próximas. A lei de Hubble é o comportamento esperado para um universo homogêneo e isotrópico em expansão, tal como é corroborado pelas observações.

1.1.2 A abundância de elementos leves

A nucleossíntese é a formação de núcleos atômicos leves que resulta da fusão de prótons e nêutrons. Essas reações nucleares tomaram lugar entre os 0,01 segundos e 3 minutos depois do Big Bang, a uma temperatura aproximada de 10 MeV até $0,01\text{ MeV}$, resultando na produção de quantidades substanciais de Deutério, com uma proporção relativa de $\frac{D}{H} \approx 10^{-5}$, de Hélio 3, com $\frac{{}^3\text{He}}{H} \approx 10^{-5}$, de Hélio 4, com $\frac{{}^4\text{He}}{H} \approx 0,24$, e de Lítio 7, com $\frac{{}^7\text{Li}}{H} \approx 10^{-10}$. A abundância predita depende da densidade de matéria presente nesse momento. A comparação e concordância da abundância predita e observada para estes 4 isótopos fornece uma confirmação muito poderosa da cosmologia padrão. A nucleossíntese, de fato, fornece a determinação mais precisa da densidade de bárions a qual é $\Omega_b \approx 0,0449$ [36] .

1.1.3 A radiação cósmica de fundo (RCF)

A teoria do Big Bang prediz que o universo primordial foi um lugar muito quente. Quando o universo se expande, a radiação se esfria; portanto o universo deveria estar permeado por uma radiação que é o calor remanecente deixado desde o Big Bang, chamada a RCF. A RCF fornece a evidência de que o universo começou com um Big Bang quente. A medição do espectro de energia, feitas no presente, são consistentes com a de um corpo negro a $T \approx 2,725\text{ K}$ [37]. Tal temperatura corresponde a uma densidade de número para os fótons de $n \approx 422\text{ cm}^{-3}$. O alto grau de isotropia, $\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-5}$ [37], provê uma evidência forte para o nível de homogeneidade e isotropia em larga escala do universo observável e também fornece uma evidência importante das condições presentes no universo com um red shift de $z \approx 1100$, correspondendo a uma idade do universo de $t \approx 3,8 \times 10^5$ anos. As perturbações de densidade primordiais necessárias para iniciar a formação de estruturas resulta em flutuações de temperatura na RCF. Tais anisotropias da RCF fornecem uma confirmação poderosa das teorias de formação de estruturas.

1.1.4 As estruturas cósmicas

Apesar que o universo é homogêneo para escalas maiores que 100 Mpc , em escalas menores o universo atual é muito inhomogêneo. Este contém inhomogeneidades como galáxias e aglomerados de galáxias. A densidade dentro de uma galáxia é cerca de 10^5 vezes maior que a densidade média do universo e dentro de um aglomerado de galáxias é cerca de 10^3 vezes [38]. A cosmologia padrão fornece um marco para entender a formação de estruturas cósmicas tais como galáxias e aglomerados

de galáxias observados atualmente no universo. Ela assume a existência de pequenas perturbações de densidade presentes no universo, que depois por instabilidade gravitacional amplificaram-se e terminam dando origem a estruturas cósmicas. Os valores preditos pelas teorias de formação de estruturas dentro do marco da cosmologia padrão concordam com os parâmetros associados às estruturas cósmicas observadas e além disso prediz sua abundância e distribuição observada. Este mecanismo de instabilidade gravitacional é uma parte geralmente aceita da cosmologia padrão.

1.2 Cinemática do Espaço-Tempo no Modelo Cosmológico Padrão

1.2.1 A métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

As observações cosmológicas têm demonstrado que o universo observável é estatisticamente homogêneo e isotrópico em largas escalas. A métrica de FRW é a maneira matemática de expressar as noções de homogeneidade e isotropia do espaço-tempo.

Para obter a métrica de FRW fazemos as seguintes considerações:

1. O espaço-tempo é dividido em tri-superfícies com $t = \text{constante}$;
2. Cada tri-superfície é homogênea e isotrópica;
3. Em cada tri-superfície colocamos um sistema de coordenadas comóvel para etiquetar a posição de um objeto com um conjunto de coordenadas $x^i = (r, \theta, \varphi)$;
4. A coordenada t é o tempo próprio do objeto.

O elemento de linha na tri-superfície é

$$d\sigma^2 = f_{ij}(t) dx^i dx^j \quad (1.1)$$

e usando a isotropia espacial

$$f_{ij}(t) = a^2(t) h_{ij} \quad (1.2)$$

na qual h_{ij} é independente do tempo. Portanto, o elemento de linha do espaço-tempo completo é

$$ds^2 = dt^2 - 2g_{0i}dx^0dx^i - a^2(t)h_{ij}dx^i dx^j \quad (1.3)$$

Os elementos g_{0i} são zero porque o vetor \vec{e}_0 é tangente à linha de mundo da galáxia e o vetor \vec{e}_i é tangente à tri-superfície $t = \text{constante}$. Portanto

$$g_{0i} = \vec{e}_0 \vec{e}_i = 0 \quad (1.4)$$

tal que

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)h_{ij}dx^i dx^j \quad (1.5)$$

A métrica h_{ij} descreve a tri-superfície isotrópica ao redor de qualquer ponto, em particular é esféricamente simétrica em torno da origem e portanto escolhemos coordenadas esféricas, de forma que

$$dl^2 = h_{ij}dx^i dx^j = e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.6)$$

Calculando o escalar de curvatura para esta métrica, obtemos

$${}^3R = \frac{2}{r^2} \{e^{-2\lambda(r)} [2r\partial_r\lambda(r) - 1] + 1\} \quad (1.7)$$

Da homogeneidade espacial, tomamos o escalar de curvatura constante, de maneira que

$${}^3R = 6k \quad (1.8)$$

A solução a (1.7) e (1.8) é

$$e^{2\lambda(r)} = \frac{1}{1 - kr^2 + \frac{M}{r}} \quad (1.9)$$

na qual M é uma constante de integração. Pelo princípio de equivalência, $g_{rr} \rightarrow 1$ quando $r \rightarrow 0$, de maneira que $M = 0$. Por conseguinte, a métrica global resulta

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right\} \quad (1.10)$$

a qual é chamada a métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

1.2.2 Movimento de partículas

Considere uma partícula movendo-se com uma quatro-velocidade $u^\alpha = (u^0, u^i)$ com respeito ao sistema comóvel, a qual segue uma geodésica descrita por

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\sigma}^\alpha u^\beta u^\sigma = 0 \quad (1.11)$$

Consideremos a componente $\alpha = 0$; neste caso, a única componente não nula da conexão $\Gamma_{\beta\sigma}^0$ é $\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{R}}{R} h_{ij}$, e como $u^2 = h_{ij} u^i u^j$, a equação (5.76) resulta

$$\frac{du^0}{ds} + \frac{\dot{a}}{a} u^2 = 0 \quad (1.12)$$

Como $(u^0)^2 - u^2 = 1$, então $u^0 du^0 = u du$ e a equação (1.12) pode ser escrita como

$$\frac{1}{u^0} \frac{du}{ds} + \frac{\dot{a}}{a} u = 0 \quad (1.13)$$

Já que $u^0 = \frac{dt}{ds}$, a equação (1.13) resulta $\frac{\dot{u}}{u} + \frac{\dot{a}}{a} = 0$, a qual tem como solução

$$u \propto \frac{1}{a} \quad (1.14)$$

Portanto, para partículas movendo-se livremente no espaço-tempo de FRW, suas velocidades peculiares tendem a desaparecer pela expansão do universo, tendendo ao repouso com respeito ao sistema comóvel.

1.2.3 Propagação da luz

Supúnhamos que um raio de luz que foi emitido em um tempo t_1 por uma galáxia localizada em r_1 é recebido em um instante t_0 . Uma seguinte onda é emitida no tempo $t_1 + dt_1$, a qual é recebida no tempo $t_0 + dt_0$. Já que a luz se propaga sobre a geodésica nula $ds^2 = 0$, temos

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \equiv f(r_1) \quad (1.15)$$

Como dt_1 e dt_0 são pequenos com respeito à escala de tempo da expansão, obtemos

$$\frac{dt_0}{a(t_0)} = \frac{dt_1}{a(t_1)} \quad (1.16)$$

Já que dt_1 e dt_0 são o intervalo de tempo próprio para a emissão e recepção dessas ondas, resulta que o comprimento de onda dos raios de luz é (em unidades $c = 1$) $\lambda_1 = dt_1$ e $\lambda_0 = dt_0$, tal que

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad (1.17)$$

Se nós definirmos o desvio para o vermelho, como $z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}$, resulta que

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad (1.18)$$

Este desvio para o vermelho é um efeito Doppler devido à expansão do espaço.

1.2.4 Tipos de espaço

Pode ser mostrado que a distorsão correspondente do espaço, devido aos efeitos gravitacionais da matéria e a energia, pode ter apenas uma de três formas possíveis. De (5.75), consideremos o elemento de linha da tri-superfície $t = t_0$

$$d\sigma^2 = a^2(t_0) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\} \quad (1.19)$$

Do elemento de linha (1.19) há três tipos diferentes de espaço, correspondendo a diferentes valores de k .

- Caso $k = +1$ o universo fechado.

Fazendo a mudança de variável $r = \sin l$, o elemento de linha (1.19) pode se escrever

$$d\sigma^2 = a^2(t_0) \{ dl^2 + \sin^2 l (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \} \quad (1.20)$$

Este é o elemento de linha de uma tri-superfície esférica cujo volume correspondente é

$$V = \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{g} d^3x = 2\pi^2 a^3(t_0) \quad (1.21)$$

Em um universo fechado há um número finito de galáxias.

- Caso $k = 0$ o universo plano.

O elemento de linha (1.19) resulta

$$d\sigma^2 = a^2(t_0) \{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\} \quad (1.22)$$

Este elemento de linha descreve uma tri-superfície plana cujo volume associado é

$$V = \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{g} d^3x = \infty \quad (1.23)$$

Em um universo plano há um número infinito de galáxias.

- Caso $k = -1$ o universo aberto.

Fazendo a troca de variável $r = \sinh l$, o elemento de linha (1.19) torna-se

$$d\sigma^2 = a^2(t_0) \{dl^2 + \sinh^2 l(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\} \quad (1.24)$$

Esse elemento de linha descreve uma tri-superfície hiperbólica cujo volume correspondente é

$$V = \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{g} d^3x = \infty \quad (1.25)$$

Em um universo aberto há um número infinito de galáxias.

1.2.5 Distância própria

Para $k = +1, 0, -1$ é possível definir a distância entre duas galáxias, chamada distância própria ou física, denotada por $s(t)$. Se etiquetarmos uma galáxia como a origem, com coordenadas $r = 0$, e outra galáxia com coordenadas (r, θ, φ) , ambas no sistema comóvel, então, da métrica (5.75) nós obtemos

$$s(t_0) = a(t_0) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \quad (1.26)$$

- Para $k = +1$, e estabelecendo $r = \sin l$

$$s(t_0) = a(t_0) \arcsin r \quad (1.27)$$

- Para $k = 0$

$$s(t_0) = a(t_0) r \quad (1.28)$$

- Para $k = -1$, e fazendo $r = \sinh l$

$$s(t_0) = a(t_0) \operatorname{arcsinh} r \quad (1.29)$$

Se quisermos a distância própria em qualquer tempo t , escrevemos

$$s(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)} s(t_0) \quad (1.30)$$

Derivando a expressão (1.30) com respeito ao tempo, obtemos

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t_0)} s(t_0) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \left\{ \frac{a(t)}{a(t_0)} s(t_0) \right\} = H(t) s(t) \quad (1.31)$$

na qual $H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ é chamado o parâmetro de Hubble. A relação (1.31) é conhecida como a lei de Hubble.

Esta lei governa para escalas de longitude maiores do que 100 Mpc , na qual o universo é estatisticamente homogêneo e isotrópico. A estas escalas, a velocidade de expansão das galáxias domina qualquer movimento local ou velocidades que elas poderiam adquirir da atração gravitacional de outras galáxias próximas. A escalas menores do que 100 Mpc , o movimento de galáxias próximas é dominado pelas inhomogeneidades no campo gravitacional, o qual leva a movimentos locais que resistem a expansão de Hubble. A velocidade destes objetos relativo ao sistema comóvel é conhecida como velocidade peculiar. Em conclusão, a lei de Hubble é válida apenas para escalas de homogeneidade.

1.2.6 Distância de Hubble

Consideremos a lei de Hubble

$$v(t) = H(t) s(t) \quad (1.32)$$

Esta relação nos diz que a velocidade de recessão de uma galáxia é proporcional à distância própria. Agora, considere uma distância tal que a velocidade da galáxia é a velocidade da luz (em unidades $c = 1$)

$$1 = H(t) s(t) \quad (1.33)$$

Portanto,

$$d_t \equiv s(t) = H^{-1}(t) \quad (1.34)$$

Essa é chamada a distância de Hubble, a qual define o horizonte de Hubble. Toda galáxia localizada na superfície do horizonte de Hubble se afasta de nós à velocidade da luz.

1.2.7 Distância ao horizonte

Um universo em expansão tem um horizonte de partículas [39, 40, 41], uma fronteira além da qual a comunicação causal não pode acontecer. A distância ao horizonte pode ser definida como a distância máxima que a luz tem viajado desde o Big Bang até o presente. A distância ao horizonte define o universo observável.

Considere um raio de luz viajando radialmente desde o Big Bang, o qual tem associado coordenadas $(0, r)$, até o presente, o qual tem associado coordenadas $(t, 0)$. Como os raios de luz descrevem geodésicas nulas, resulta que

$$\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \quad (1.35)$$

e a distância própria desde nós $r = 0$ até o horizonte $r = r_h$ resulta

$$d_h = \int_0^{r_h} \sqrt{g_{rr}} dr = a(t) \int_0^{r_h} \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} \quad (1.36)$$

Se a integral à direita converge no limite $t \rightarrow 0$, nós obtemos um horizonte de partículas. Se diverge, d_h é infinito e o universo completo está causalmente conectado.

1.3 Dinâmica do Espaço-Tempo de Friedmann-Robertson-Walker

Nós mostraremos que o fator de escala $a(t)$ é determinado pelas equações de Einstein, dependendo do conteúdo material do universo que consideremos. Assumimos que a distribuição material no universo é homogênea e isotrópica, representada pelo tensor de energia-momento de um fluido perfeito.

1.3.1 Equações básicas

Consideremos as equações de Einstein

$$G_{ab} = 8\pi G T_{ab} \quad (1.37)$$

na qual

$$T_{ab} = (\rho + p) u_a u_b - p g_{ab} \quad (1.38)$$

é o tensor de energia-momento de um fluido perfeito, ρ é a densidade, p é a pressão, e g_{ab} é a métrica de FRW.

Para a componente $t - t$ obtemos a equação de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (1.39)$$

Para a componente $r - r$ obtemos

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p \quad (1.40)$$

As equações para as componentes $\theta - \theta$ e $\varphi - \varphi$ são iguais à equação (1.40), enquanto as equações para as componentes $0 - i$ são idênticamente zero.

Consideremos a equação de continuidade

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \quad (1.41)$$

Para a componente t obtemos a equação

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (1.42)$$

Podemos combinar a equação (1.39) e (1.40) para obter

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (1.43)$$

a qual é conhecida como a equação de aceleração.

Assumimos também uma equação de estado

$$p = \omega \rho \quad (1.44)$$

onde ω é um parâmetro, que para a radiação tem o valor $\omega = \frac{1}{3}$ e para a matéria $\omega = 0$.

Nós temos quatro equações com as incógnitas $a(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$, tal que o sistema resulta indefinido. Como as equações de Einstein são relacionadas com as equações de continuidade pelas identidades de Bianchi, então é usual escolher as equações (1.39), (1.42) e (1.44).

Dividindo a equação de Friedmann (1.39) por H , podemos rescrevê-la como

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \Omega(t) - 1 \quad (1.45)$$

na qual $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$ é o razão entre a densidade e a densidade crítica $\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$.

Já que $H^2 a^2 \geq 0$, há uma correspondência entre o sinal de k e Ω , as quais são

$$k = +1 \rightarrow \Omega > 1 \quad (1.46)$$

$$k = 0 \rightarrow \Omega = 1 \quad (1.47)$$

$$k = -1 \rightarrow \Omega < 1 \quad (1.48)$$

Portanto, um universo com uma densidade igual à densidade crítica tem curvatura espacial zero.

Definamos o raio físico de curvatura do universo. É claro que os efeitos de curvatura são significativos para $r \sim |k|^{-\frac{1}{2}}$, de maneira que $R_{cur} \equiv a(t) |k|^{-\frac{1}{2}}$. Usando a equação (1.45) obtemos

$$R_{cur} = \frac{H^{-1}}{|\Omega - 1|^{\frac{1}{2}}} \quad (1.49)$$

Um universo com densidade próxima à densidade crítica $\Omega \rightarrow 1$ é quase plano $R_{cur} \rightarrow \infty$.

1.3.2 Soluções para $a(t)$ e $\rho(t)$

Das equações (1.39), (1.42) e (1.44) podemos encontrar as soluções para o fator de escala e a densidade para diferentes conteúdos materiais do universo.

- Universo dominado por radiação

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \rho(t) = \rho_0 \left\{ \frac{a(t)}{a_0} \right\}^{-4} \quad (1.50)$$

- Universo dominado por matéria

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad \rho(t) = \rho_0 \left\{ \frac{a(t)}{a_0} \right\}^{-3} \quad (1.51)$$

Da forma para o fator de escala, e usando as equações (1.34) e (1.36), são obtidas a distância de Hubble e a distância ao horizonte de partículas.

- Para radiação

$$d_l = 2t \quad d_h = 2t \quad (1.52)$$

- Para matéria

$$d_l = \frac{3}{2}t \quad d_h = 3t \quad (1.53)$$

Notemos que na época dominada por radiação, d_l e d_h aumentam à mesma velocidade, de maneira que o horizonte de Hubble concorda com o horizonte de partículas no universo cedo.

Atualmente, o universo observável tem uma distância de Hubble de $13,7 \times 10^9$ anos-luz, e a distância ao horizonte de partículas é de 46×10^9 anos-luz. As galáxias que se encontram entre a esfera de Hubble e o horizonte de partículas estão se afastando de nós com uma velocidade de recessão maior do que a velocidade da luz.

1.3.3 Idade do universo

Os astrônomos estimam a idade do universo de dois modos:

1. Estudando as estrelas mais antigas.
2. Medindo a taxa de expansão do universo.

Usando o segundo modo, a equação (1.39) pode ser integrada para obter a idade do universo em função dos parâmetros cosmológicos atuais.

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{dx}{x \left\{ \sum_i \Omega_i^0 x^{-3(1+\omega_i)} \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (1.54)$$

onde H_0 é o parâmetro de Hubble no presente, Ω_i^0 é o parâmetro de densidade de cada componente no presente, e ω_i é o parâmetro da equação de estado de cada componente. A idade do universo corresponde a $z = 0$. Segundo as observações atuais, a idade do universo corresponde a $t_0 = 13,75 \times 10^9$ anos [36].

1.4 Termodinâmica do Universo

Durante a história passada do universo, a maioria dos constituintes do universo estiveram em equilíbrio térmico.

1.4.1 Equilíbrio termodinâmico

Na cosmologia padrão, o universo primordial é considerado homogêneo e isotrópico, preenchido com um gás em equilíbrio térmico, o qual está constituído por todas as partículas do modelo padrão.

A densidade de energia ρ e a pressão p de todas as partículas em equilíbrio podem ser expressas em termos da temperatura T da radiação eletromagnética [41] como

$$p = \frac{1}{3}\rho = \frac{\pi^2}{90}g_*T^4 \quad (1.55)$$

na qual

$$g_* = \sum_{i=b} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=f} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 \quad (1.56)$$

conta o número total de graus de liberdade sem massa efetiva entre partículas bosônicas e fermiônicas do modelo padrão. A soma corre sobre as partículas com massa $m_i \ll T$, ou seja, partículas relativistas.

Para $T \ll 1 \text{ MeV}$, as únicas partículas relativistas são os três tipos de neutrinos e o fóton, assim que, $g_* = 3.36$;

Para $1 \text{ MeV} \leq T \leq 100 \text{ MeV}$, o elétron e o pósitron são graus de liberdade relativistas adicionais, portanto $g_* = 10.75$;

Para $T \geq 100 \text{ MeV}$, todas as partículas do modelo padrão são relativistas, de maneira que $g_* = 106.5$.

1.4.2 Entropia

A entropia em um volume comóvel provê uma quantidade muito útil durante a expansão do universo. Aplicando a primeira lei da termodinâmica ao volume comóvel $V = a^3(t)$, obtemos

$$TdS = d(\rho V) + pdV \quad (1.57)$$

na qual ρ e p são a densidade e pressão em equilíbrio. Usando a condição de integrabilidade

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} \quad (1.58)$$

resulta que

$$dp = \frac{\rho + p}{T} dT \quad (1.59)$$

Substituindo (1.59) em (1.57), obtemos

$$dS = d \left\{ \frac{\rho + p}{T} V \right\} \quad (1.60)$$

Se compararmos esta equação com (1.42), concluímos que em equilíbrio térmico a entropia por volume comóvel é conservada, portanto a expansão do universo é isentrópica.

Definamos a densidade de entropia como

$$s \equiv \frac{S}{V} = \frac{\rho + p}{T} \quad (1.61)$$

Já que a densidade de entropia é dominada pela contribuição de partículas relativistas, resulta que

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_* T^3 \quad (1.62)$$

Como $S = a^3 s$ é conservada, temos que:

1) $g_* a^3 T^3 = \text{constante}$ durante a expansão do universo, portanto

$$T \propto g_*^{-\frac{1}{3}} a^{-1} \quad (1.63)$$

O fator g_* aparece porque, quando uma partícula torna-se não relativista e desaparece, sua entropia é transferida às partículas relativistas ainda presentes no plasma térmico, causando uma diminuição mais lenta da temperatura. Se g_* for constante se recupera o resultado conhecido $T \propto a^{-1}$.

2) $a^3 \propto s^{-1}$ e como o número de partículas em um volume comóvel é definido como $a^3 n$, onde n é a densidade de número das partículas, é útil definir a magnitude

$$N \equiv \frac{n}{s} \quad (1.64)$$

Se as partículas da espécie não estiverem sendo criadas nem destruídas, então n será constante.

A entropia do universo é

$$S_U = V_U s \approx a^3 T^3 \quad (1.65)$$

De acima, sabemos que $aT = a_0 T_0$, tal que

$$S_U \approx a_0^3 T_0^3 \approx 10^{88} \quad (1.66)$$

O tamanho do horizonte de partículas em uma época dada, é convencionalmente expressa em termos da entropia dentro de um volume de horizonte:

- Durante a época dominada por radiação

A distância ao horizonte de partículas está dada por (1.52) e a densidade de entropia por (1.62), tal que

$$S_h = sV_h \approx s \frac{4\pi t^3}{3} \approx g_*^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{m_p}{T} \right)^3 \quad (1.67)$$

onde m_p é a massa de Planck.

- Durante a época dominada por matéria

A distância ao horizonte está dada por (1.53) e a densidade de entropia por (1.62), tal que

$$S_h = sV_h \approx s \frac{4\pi t^3}{3} \approx 10^{87} (\Omega_0 h^2)^{-\frac{3}{2}} (1+z)^{-\frac{2}{3}} \quad (1.68)$$

Hoje o universo contém uma entropia da ordem de $S_U \approx S_h \approx 10^{88}$, e no universo primordial o horizonte de partículas conteve uma entropia da ordem de $S_h \approx \left(\frac{m_p}{T} \right)^3$. Como veremos no próximo capítulo, esta diferença é problemática para a cosmologia padrão.

Capítulo 2

Teoria da Inflação

A cosmologia padrão é uma teoria bem-sucedida que fornece uma descrição apropriada do universo observável desde os primeiros segundos depois do Big Bang até o presente. No entanto, sugere e deixa aberto um número de perguntas importantes que não podem ser respondidas. Portanto, estes defeitos necessitam ser atendidos. Tentar resolver esses problemas foi a motivação para formular a teoria da inflação. A inflação é uma fase de expansão acelerada de 10^{-35} s do universo primordial quando a gravidade atua de forma repulsiva. Durante esta fase, um domínio homogêneo de 10^{-33} cm cresce até atingir um tamanho maior do que o universo observável [42, 43, 44, 45]. Devido à importância da inflação como um mecanismo para gerar perturbações de densidade no universo primordial, faremos uma revisão das motivações físicas que levaram à teoria de inflação, a dinâmica da teoria para resolver os problemas da cosmologia padrão e apresentamos de um modo heurístico o modo no qual a inflação gera tais perturbações.

2.1 Problemas da Cosmologia Padrão

A cosmologia padrão requer a suposição de condições iniciais muito precisas para ter sucesso, as quais são problemáticas por várias razões. Primeiro, o universo primordial se assume altamente homogêneo, apesar que domínios separados estiveram causalmente desconectados. Segundo, o valor inicial do parâmetro de Hubble deve estar ajustado com extraordinária precisão para produzir um universo tão plano como o universo observado. Terceiro, se assume que o modelo padrão da física de partículas provém de uma teoria de grande unificação; neste caso, uma grande quantidade de monopolos magnéticos teriam sido produzidos no universo primordial, contribuindo demasiadamente à densidade atual do universo. Quarto, é assumido

sem explicação a existência de pequenas perturbações de densidade que posteriormente deram origem às estruturas cósmicas.

2.1.1 Problema do horizonte

O espaço-tempo de FRW é a solução para um universo homogêneo e isotrópico. A indicação mais precisa da homogeneidade do universo é fornecida pela radiação cósmica de fundo, a qual é uniforme uma parte em 10^5 [37]. Se o universo fosse inhomogêneo e a expansão anisotrópica, anisotropias de temperatura comparável existiriam na RCF.

Se o universo completo esteve em contato causal durante a superfície de último espalhamento (SUE), processos microscópicos como o espalhamento de Compton suavizaram qualquer flutuação de temperatura, de maneira que uma RCF com temperatura uniforme teria resultado. No entanto, dentro do contexto da cosmologia padrão isto não pôde haver acontecido devido à existência do horizonte de partículas.

Nós podemos expressar o tamanho do horizonte de partículas antes da recombinação em termos da equação (1.67), e depois da recombinação como (1.68). Observe que a entropia contida dentro do horizonte de partículas em tempos pequenos foi muito menor do que a atual, ao redor de $S_U \approx 10^{88}$. Na época da nucleossíntese, $T \approx 10^{10} \text{ MeV}$, e a entropia dentro do horizonte foi $S_h \approx 10^{63}$. Como a entropia do universo é conservada, significa que o universo observável esteve constituído por 10^{25} domínios causalmente desconectados na nucleossíntese.

Na época da recombinação, $T \approx 0.3 \text{ eV}$, e a entropia dentro do horizonte de partículas foi $S_h \approx 10^{83}$. Isso significa que o universo observável consistiu de 10^5 domínios causalmente desconectados na recombinação. Portanto, a distância de Hubble na recombinação subtende um ângulo de 1 grau sobre o céu de hoje [8, 39, 41]. Portanto, quando nós detectamos RCF com uma separação angular maior do que isso, estamos detectando RCF que nunca esteve em contacto causal. Apesar disso, a RCF é uniforme em todo o céu. Esse é o problema do horizonte.

2.1.2 Problema da planura

As observações atuais conferem um valor a Ω_0 muito próximo à unidade. Além disso, Ω varia com o tempo como

$$|\Omega(t) - 1| = \frac{|k|}{H^2 a^2} \quad (2.1)$$

Essa equação tem implicações profundas se considerarmos o caso $k \neq 0$. Observe que

$$|\Omega(10^{-43} \text{ seg}) - 1| \approx 10^{-60} \quad (2.2)$$

$$|\Omega(1 \text{ seg}) - 1| \approx 10^{-16} \quad (2.3)$$

os quais implicam que

$$R_{cur}(10^{-43} \text{ seg}) \approx 10^{30} d_l \quad (2.4)$$

$$R_{cur}(1 \text{ seg}) \approx 10^8 d_l \quad (2.5)$$

O universo, visto no contexto das condições iniciais, foi muito especial.

Se a quantidade (2.2) for da ordem da unidade, um universo fechado, $k > 0$, teria alcançado seu tamanho máximo na ordem da escala de Planck, e um universo aberto, $k < 0$, teria alcançado uma temperatura de $3 K$ em um tempo de $10^{-11} s$ [41]. Um universo pode sobreviver 10^{10} anos apenas através de ajuste fino do valor inicial de H . Na cosmologia padrão, essa condição inicial incrivelmente precisa deve ser assumida sem explicação. Esse é o problema da planura.

2.1.3 Problema dos monopolos magnéticos

Existe um problema na cosmologia padrão quando assume-se que o modelo padrão da física de partículas provém de uma teoria de grande unificação. Dentro do contexto das teorias de grande unificação, há uma variedade de partículas pesadas e estáveis, as quais teriam sido produzidas no universo primordial e contribuído demasiadamente à densidade de energia atual, $\Omega_x \gg 1$. O exemplo mais notável são os monopolos descobertos por 't Hooft e Polyakov. Estes monopolos têm uma massa 10^{16} vezes a massa do próton. Isto é problemático para a cosmologia padrão, porque é difícil encontrar um mecanismo que erradique estes resíduos que teriam sido produzidos no universo primordial.

2.1.4 Problema das estruturas

O universo atual é estatisticamente homogêneo e isotrópico em escalas maiores do que $100 Mpc$. Em escalas menores está constituído por galáxias e aglomerados de

galáxias, resultando inhomogêneo. Essas estruturas foram criadas a partir de pequenas perturbações de densidade presentes na SUE, as quais começaram a crescer por instabilidade gravitacional, para depois colapsar e formar as estruturas que vemos hoje. Como se originaram essas pequenas inhomogeneidades? A cosmologia padrão somente postula sua existência, porém não oferece um mecanismo físico que origine essas pequenas perturbações de densidade. Esse é o problema das estruturas.

A natureza desses problemas aponta na direção na qual a cosmologia padrão deve assumir condições iniciais muito específicas para descrever o universo. É claro, qualquer tentativa de resolver os problemas que envolva condições iniciais pode ser adiado até entender a cosmologia quântica. Contudo, o propósito da teoria de inflação, uma teoria cosmológica baseada na gravidade clássica, é mostrar que esses problemas podem ser evitados se o universo sofrer uma fase de expansão exponencial extremamente rápida abaixo da escala de Planck, e assim explicar as propriedades do universo atual, independentemente das condições iniciais. Essa fase de expansão exponencial é denominada de inflação.

2.2 Dinâmica da Inflação

A dinâmica do campo escalar é a chave para entender o mecanismo da inflação no universo em expansão. A característica essencial da inflação é a evolução lenta de um campo escalar através de um potencial suficientemente plano, até alcançar seu mínimo e começar a oscilar ao redor deste. Atualmente a maioria dos modelos inflacionários estão baseados sobre este princípio de “slow roll”.

Para analisar a evolução do campo escalar façamos as seguintes considerações:

- Espaço-Tempo FRW de fundo, com uma taxa de expansão

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_\phi \quad (2.6)$$

onde ρ_ϕ é a densidade do campo escalar.

- Campo escalar homogêneo em uma escala d_I , com um valor inicial

$$\phi_i = \sigma \quad (2.7)$$

onde σ está associado com a escala de energia à qual se produz inflação.

- Densidade lagrangeana de um campo escalar homogêneo, dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (2.8)$$

e o tensor de energia-momento para um campo escalar

$$T_\mu{}^\nu = \partial_\mu \phi \partial^\nu \phi - \delta_\mu{}^\nu \mathcal{L} \quad (2.9)$$

com componentes

$$T_0{}^0 = \rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.10)$$

$$-T_i{}^j = \delta_i{}^j p_\phi = \delta_i{}^j \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right) \quad (2.11)$$

- A equação dinâmica para o campo ϕ é obtida da equação de Euler-Langrange

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (2.12)$$

O termo $\Gamma\dot{\phi}$ não provem da densidade lagrangeana (2.8) e necessita uma explicação adicional. As oscilações do campo ϕ ao redor do seu mínimo corresponde a partículas ϕ de massa $m_\phi = V''(\phi)$, a qual decai devido à criação quântica de partículas de otros campos que se acoplam a ϕ . O amortecimento destas oscilações pela criação quântica de partículas é equivalente ao decaimento de partículas ϕ nas outras mais leves à qual elas se acoplam, e a quantidade Γ é a taxa de decaimento das partículas associadas ao campo ϕ e $\tau = \Gamma^{-1}$ é sua vida média [46, 47, 48].

A equação dinâmica (2.12) tem dois regimes diferentes, cada um dos quais tem uma solução analítica.

- Inflação: O campo ϕ move-se lentamente ao mínimo de $V(\phi)$, enquanto o universo primordial sofre uma fase de expansão acelerada extremamente breve, durante a qual a gravidade atua como uma força repulsiva e o universo se esfria.

Durante esta fase o termo de fricção de Hubble é muito grande e portanto o campo evolui lentamente, resultando que o termo $3H\dot{\phi} \gg \ddot{\phi}$ e então a equação dinâmica é dada por

$$3H\dot{\phi} = -V'(\phi) \quad (2.13)$$

Devido à evolução lenta do campo, sua energia cinética será menor do que a sua energia potencial, $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, portanto as expressões (2.10) e (2.11) podem ser reescritas como $p_\phi = -\rho_\phi = -V(\phi)$.

Por outro lado, como o tensor de energia-momento é $T^{\mu\nu} = \rho_\phi g^{\mu\nu}$, o qual satisfaz a lei de conservação $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$, resulta que $\rho_\phi = \text{constante}$.

As condições para desprezar $\ddot{\phi}$ e $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ requerem que

$$\left| V''(\phi) \right| \ll 9H^2 \quad (2.14)$$

$$\left| m_p \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right| \ll (48\pi)^{\frac{1}{2}} \quad (2.15)$$

as quais são conhecidas como condições de slow-roll. Como consequência destas condições obtemos que a taxa de expansão é

$$H^2 \approx \frac{8\pi}{3m_p^2} V(\phi) \quad (2.16)$$

Integrando a equação (2.16) obtemos

$$a(t) \approx a_0 e^{Ht} \quad (2.17)$$

Este estado de expansão exponencialmente rápido do universo é conhecido como inflação.

De (2.13) e (2.16) calculamos o número de e-folds de crescimento no fator de escala quando o campo ϕ desliza sobre seu potencial, desde o valor ϕ_i , o qual é o valor do campo quando começa a inflação, até ϕ_f , o qual é o valor do campo quando as condições de slow-roll são violadas:

$$N(\phi_i \rightarrow \phi_f) \equiv \ln\left(\frac{a_f}{a_i}\right) = -\frac{8\pi}{m_p^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi \quad (2.18)$$

Para o modelo de inflação caótica com um potencial $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$, o universo experimentou um crescimento de $10^{10^{10}}$ vezes seu tamanho original de $l \approx 10^{-33} \text{ cm}$, em apenas 10^{-35} s . Nesta breve fase, o universo atingiu um tamanho de $l \approx 10^{10^{10}} \text{ cm}$, muitas ordens de grandeza maior do que a parte de universo que podemos ver no presente, a qual é de $l \approx 10^{28} \text{ cm}$. Durante este período o campo escalar passou de ter um valor de $\phi_i > 3m_p$ a $\phi_f \approx 0.28m_p$, onde m_p é a massa de Planck [49].

- Reaquecimento: O campo ϕ oscila rapidamente ao redor do mínimo de $V(\phi)$ e perde energia por criar pares de partículas elementares. Essas partículas interagem umas com as outras e atingem um estado de equilíbrio térmico com

temperatura T com a qual o universo é reaquecido. Uma vez finalizada essa fase, o domínio causalmente desconectado pode ser descrito pela cosmologia padrão.

Durante este regime as condições de slow-roll são violadas. Multiplicando a equação (2.12) por $\dot{\phi}$, a mesma pode ser reescrita para este regime como

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\dot{\phi}^2 + \Gamma\dot{\phi}^2 = 0 \quad (2.19)$$

Quando ϕ oscila rapidamente ao redor do mínimo de seu potencial, $\dot{\phi}^2$ oscila e pode ser substituído pela média sobre um ciclo de oscilação, tal que $\langle \dot{\phi}^2 \rangle = \rho_\phi$. Desta maneira, a equação (2.19) resulta

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi + \Gamma\rho_\phi = 0 \quad (2.20)$$

A equação (2.20) governa o decaimento das partículas escalares. A solução desta equação é

$$\rho_\phi = \alpha^4 \left(\frac{a}{a_f} \right)^{-3} e^{-\Gamma(t-t_f)} \quad (2.21)$$

onde f significa o começo das oscilações e α^4 o valor da densidade nesse tempo. Estas oscilações se comportam como partículas massivas não-relativistas ($\rho_\phi \propto a^{-3}$) decaindo ($\rho_\phi \propto e^{-\Gamma t}$).

Suponhamos que os produtos do decaimento destas partículas são fótons e aplique-mos a segunda lei da termodinâmica

$$d(a^3\rho_\gamma) = -p_\gamma d(a^3) - d(a^3\rho_\phi) \quad (2.22)$$

Usando as equações (1.55) e (2.21), podemos reescrever a equação (2.22) como

$$\dot{\rho}_\gamma + 4H\rho_\gamma = \Gamma\rho_\phi \quad (2.23)$$

Uma solução aproximada para a equação (2.23), durante o período dominado por partículas ϕ , o qual vai de $t_f \approx \frac{m_p}{\alpha^2}$ a $t \approx \frac{1}{\Gamma}$, é

$$\rho_\gamma \approx m_p \Gamma \alpha^2 \left\{ 1 - \left(\frac{a}{a_f} \right)^{-\frac{5}{2}} \right\} \left(\frac{a}{a_f} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (2.24)$$

De (2.24) concluímos que:

1. A densidade de energia ρ_γ incrementa-se rapidamente de zero a $m_p \Gamma \alpha^2$ para depois decrescer como $a^{-\frac{3}{2}}$.
2. A temperatura atinge seu máximo em $T_{max} \approx g_*^{-\frac{1}{4}} \alpha^{\frac{1}{2}} (m_p \Gamma)^{\frac{1}{2}}$ e depois decresce.
3. A temperatura ao começo do período de dominação por radiação é $T_r \equiv T\left(\frac{1}{\Gamma}\right) \approx g_*^{-\frac{1}{4}} (m_p \Gamma)^{\frac{1}{2}}$.
4. A entropia por volume comóvel se incrementa como $S \propto a^{\frac{15}{8}}$.
5. A entropia por volume comóvel se estabiliza no tempo $t = \frac{1}{\Gamma}$, porque as partículas escalares decaem rapidamente e o universo começa a ser dominado por radiação.

Por outro lado, a taxa de expansão do universo neste regime está dada pela equação de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_p^2} (\rho_\phi + \rho_\gamma) \quad (2.25)$$

Assim, as equações (2.20), (2.23) e (2.25) governam a evolução de ρ_ϕ , ρ_γ e a , fornecendo uma descrição do processo de reaquecimento. É importante destacar que este processo acontece fora do equilíbrio e a entropia não é conservada. Além disso, durante este processo as partículas ϕ dominam a densidade do universo, de modo que o universo é dominado por matéria.

2.3 Como Inflação resolve os Problemas da Cosmologia Padrão

A expansão exponencial durante a inflação e o enorme crescimento da entropia durante o reaquecimento permitem resolver alguns dos problemas da cosmologia padrão. Conhecendo a dinâmica de inflação de slow roll, é possível calcular a quantidade mínima necessária de inflação N_T para resolver o problema do horizonte e a planura. Além disso, oferece uma solução ao problema dos monopolos e das estruturas.

2.3.1 Problema do horizonte

Antes da inflação, o tamanho do domínio é $d_h = \frac{m_p}{\alpha^2}$, portanto a entropia é

$$S_a \approx d_h^3 T^3 \quad (2.26)$$

Durante a inflação o domínio cresce por um fator e^{N_T} e durante o reaquecimento por $\frac{a_r}{a_f} \approx \left(\frac{\alpha}{T_r}\right)^{\frac{4}{3}}$, portanto, a entropia resultante ao final da inflação é

$$S_d \approx e^{3N_T} \frac{m_p^3}{\alpha^2 T_r} \quad (2.27)$$

Com o propósito de resolver o problema do horizonte, a entropia deve ser maior do que 10^{88} , de maneira que

$$N_T \geq 67 + \frac{1}{3} \ln \frac{\alpha^2 T_r}{m_p^3} \quad (2.28)$$

Se escolhermos α e T_r da ordem de 10^{19} GeV , temos como mínimo $N_T = 67$.

2.3.2 Problema da planura

Consideremos o raio de curvatura do universo antes da inflação como:

$$(R_{cur})_a = \frac{H^{-1}}{|\Omega_a - 1|^{\frac{1}{2}}} \quad (2.29)$$

Já que durante inflação, o domínio cresce por um fator e^{N_T} e durante o reaquecimento por $\frac{a_r}{a_f} \approx \left(\frac{\alpha}{T_r}\right)^{\frac{4}{3}}$, temos que depois da inflação

$$|\Omega_d - 1| = e^{-2N_T} \left(\frac{\alpha}{T_r}\right)^{-\frac{8}{3}} |\Omega_a - 1| \quad (2.30)$$

e o raio de curvatura incrementa-se até ser

$$(R_{cur})_d = \frac{H^{-1}}{|\Omega_d - 1|^{\frac{1}{2}}} = e^{N_T} \left(\frac{\alpha}{T_r}\right)^{\frac{4}{3}} (R_{cur})_a \quad (2.31)$$

depois da inflação, assim que a entropia contida dentro do volume de curvatura é

$$S_{cur} \equiv (R_{cur})_d^3 T_r^3 \approx \left(e^{3N_T} \frac{m_p^3}{\alpha^2 T_r}\right) \frac{1}{|\Omega_a - 1|^{\frac{3}{2}}} \quad (2.32)$$

Como o fator em parêntese é a mesma entropia dentro do domínio depois de inflação e está dividido por o factor $|\Omega_a - 1|^{\frac{3}{2}}$, isto segura que a entropia dentro do volume de

curvatura do universo, a qual será constante depois de inflação, sempre será maior do que a entropia dentro do domínio que chegará a ser o universo observável.

O problema da planura será resolvido se a entropia for maior do que 10^{88} , de maneira que

$$N_T \geq 67 + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\alpha^2 T_r}{m_p^3} \right) + \frac{1}{2} \ln |\Omega_a - 1| \quad (2.33)$$

Por último, a curvatura do universo depois de inflação é

$$|\Omega_d - 1| = e^{-2N_T} |\Omega_a - 1| \quad (2.34)$$

o qual traz como consequência, pela grande quantidade de inflação, que

$$|\Omega_d - 1| \ll 1 \quad (2.35)$$

Portanto, a teoria de inflação prediz que o universo observável é quase exponencialmente plano.

2.3.3 Problema dos monopolos

Assumamos que os monopolos foram produzidos antes de inflação com uma abundância dada por

$$N_i = \frac{n}{s_i} \quad (2.36)$$

Depois de inflação a abundância é reduzida exponencialmente pelo mesmo fator pela qual a entropia incrementou-se, resultando

$$N_f = e^{-3N_T} \left(\frac{n}{s_i} \right) = e^{-3N_T} N_i \quad (2.37)$$

de modo que os monopolos resultariam indetectáveis.

2.3.4 Problema das estruturas

A característica mais atraente da inflação é a de fornecer um mecanismo físico que gere as perturbações de densidade responsáveis da formação de estruturas cósmicas.

Já que no momento da inflação os processos físicos que tomam lugar são mecânico quânticos por natureza, existirão flutuações quânticas no campo do inflaton, que atuarão como sementes das perturbações de densidade presentes na SUE.

As flutuações quânticas no campo escalar são caracterizadas por um comprimento de onda e uma amplitude. O comprimento de onda cresce exponencialmente durante a inflação. Quando o comprimento de onda das flutuações torna-se maior do que H^{-1} , estas flutuações se desacoplam dos processos causais e param de oscilar, de maneira que sua amplitude se congela em algum valor $\delta\phi(\vec{x})$. A amplitude dessa flutuação é preservada intacta durante um longo tempo, enquanto seu comprimento de onda cresce exponencialmente. Portanto, a flutuação congelada é equivalente a um campo clássico $\delta\phi(\vec{x})$. Finalizada a inflação, o universo é dominado por radiação e o comprimento de onda das flutuações cresce como $t^{\frac{1}{2}}$, enquanto o raio de Hubble cresce como t . Desta maneira, existe um instante no qual as flutuações entrarão de novo no horizonte de Hubble em forma de perturbações de densidade clássica que mais tarde se amplificarão para formar galáxias.

Estritamente falando, o que segue é um cálculo aproximado, que ignora muitos detalhes importantes como o backreaction do campo de inflação sobre a geometria do espaço-tempo de fundo, a escolha de gauges e a teoria dos campos quânticos. No entanto, neste caso, toda a física relevante pode ser mostrada heurísticamente.

O ponto de partida para entender como a inflação gera as perturbações de densidade é a amplitude média das flutuações no campo escalar durante um intervalo de tempo H^{-1} . Para obter essa quantidade de grande importância, começamos usando a equação dinâmica para o campo escalar

$$\ddot{\phi}(\vec{x}, t) + 3H\dot{\phi}(\vec{x}, t) - \frac{\nabla^2\phi(\vec{x}, t)}{a^2(t)} + V'(\phi) = 0 \quad (2.38)$$

Expressemos as flutuações $\delta\phi$ do campo escalar como

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi_c(t) + \delta\phi(\vec{x}, t) \quad (2.39)$$

com $\delta\phi(\vec{x}, t) \ll \phi_c(t)$.

Assim, introduzindo (2.39) em (2.38), e considerando que o campo clássico satisfaz a equação dinâmica homogênea, obtemos

$$\ddot{\delta\phi} + 3H\dot{\delta\phi} - \frac{\nabla^2\delta\phi}{a^2} + V''(\phi_c)\delta\phi = 0 \quad (2.40)$$

Agora, representemos a flutuação sobre o campo escalar clássico como o operador de campo

$$\hat{\delta}\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{k} \left\{ \psi_{\vec{k}}(t) a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} + \psi_{\vec{k}}^*(t) a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{x}} \right\} \quad (2.41)$$

Substituindo o operador (2.41) na equação (2.40), obtemos

$$\ddot{\psi}_{\vec{k}}(t) + 3H\dot{\psi}_{\vec{k}}(t) + a^{-2}(t)k^2\psi_{\vec{k}}(t) + V''(\phi_c)\psi_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (2.42)$$

Ao começo de inflação, o comprimento de onda físico das flutuações é menor do que o raio de Hubble, levando a condição

$$k \gg Ha \quad (2.43)$$

De acordo com a condição (2.14), obtemos que

$$|V''| \ll H^2 \ll \left(\frac{k}{a}\right)^2 \quad (2.44)$$

Isto está nos dizendo que, durante a inflação o campo escalar pode ser considerado sem massa, portanto, temos que

$$\ddot{\psi}_{\vec{k}}(t) + 3H\dot{\psi}_{\vec{k}}(t) + a^{-2}(t)k^2\psi_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (2.45)$$

com $a(t) = a_0 e^{Ht}$ durante a expansão inflacionária. Usando a nova variável

$$\eta = -a_0^{-1} H^{-1} e^{-Ht} \quad (2.46)$$

a equação (2.45) resulta

$$\psi_{\vec{k}}'' - 3\eta^{-1}\psi_{\vec{k}}' + k^2\psi_{\vec{k}} = 0 \quad (2.47)$$

A solução geral é dada em termo das funções de Hankel

$$\psi_{\vec{k}}(\eta) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{3}{2}} H \left\{ c_1(k) H_{\frac{3}{2}}^{(1)}(k\eta) + c_2(k) H_{\frac{3}{2}}^{(2)}(k\eta) \right\} \quad (2.48)$$

Retendo a parte de frequências positivas $c_2(k) = 1$ para o caso $k \gg aH$, obtemos para $|\psi_k|^2$

$$|\psi_{\vec{k}}(\eta)|^2 = \frac{H^2}{2k^3} (1 + k^2 a_0^{-2} H^{-2} e^{-2Ht}) \quad (2.49)$$

Agora, o cálculo de $\langle(\delta\phi)^2\rangle$ é obtido cortando a integral em $k = a_0 H e^{Ht}$, porque essa é a condição para o instante em que o comprimento de onda físico atinge o horizonte de Hubble ($\lambda_f = H^{-1}$) e onde a perturbação para de oscilar

$$\langle(\delta\phi)^2\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} |\psi_{\vec{k}}(\eta)|^2 \approx \frac{H^3}{4\pi^2} t \quad (2.50)$$

De maneira que

$$\underline{\delta\phi} = \sqrt{\langle(\delta\phi)^2\rangle} \approx \frac{H}{2\pi} \sqrt{Ht} \quad (2.51)$$

Para uma escala típica de inflação $Ht = 1$, obtemos

$$\underline{\delta\phi} \approx \frac{H}{2\pi} \quad (2.52)$$

Por conseguinte, flutuações no campo ϕ dão origem a perturbações de densidade durante inflação com um contraste de densidade dado por

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \approx \frac{V'(\phi) \delta\phi}{V(\phi)} \quad (2.53)$$

Analisemos o que acontece quando o comprimento de onda das flutuações no campo ϕ atinge e superam o raio de Hubble. Com essa finalidade, expandimos a perturbação em modos de Fourier

$$\delta\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \delta\phi_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \quad (2.54)$$

e depois substituída na equação (2.40), a equação perturbada resulta

$$\ddot{\delta\phi}_{\vec{k}} + 3H\dot{\delta\phi}_{\vec{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_{\vec{k}} + V''(\phi_c)\delta\phi_{\vec{k}} = 0 \quad (2.55)$$

Impondo a condição de slow-roll (2.14) sobre a equação (2.55), esta se simplifica a

$$\ddot{\delta\phi}_{\vec{k}} + 3H\dot{\delta\phi}_{\vec{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_{\vec{k}} = 0 \quad (2.56)$$

Definindo a variável $v_{\vec{k}} = a\delta\phi_{\vec{k}}$ e mudando ao tempo conforme $\tau = -H^{-1}a^{-1}$, a equação (2.56) pode ser reescrita como

$$v_{\vec{k}}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)v_{\vec{k}} = 0 \quad (2.57)$$

Esta equação tem dois limites especiais:

- Quando $k^2 \gg \frac{a''}{a}$, o qual é equivalente a $k \gg aH$, ou seja, escalas inferiores ao raio de Hubble. Neste caso a solução é

$$v_{\vec{k}} \propto \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \quad (2.58)$$

o qual indica que os modos oscilam dentro do raio de Hubble.

- Quando $k^2 \ll \frac{a''}{a}$, o qual é equivalente a $k \ll aH$, ou seja, escalas superiores ao raio de Hubble. Neste caso a solução é

$$v_{\vec{k}} \propto a \Rightarrow \delta\phi_{\vec{k}} = \text{constante} \quad (2.59)$$

indicando que os modos são congelados fora do raio de Hubble. São estes modos de flutuação do campo de inflação, os que serão convertidos em perturbações de densidade clássica afinal da inflação, e terminarão levando à formação de estruturas uma vez entrem no horizonte de Hubble na época de dominação por matéria.

A inflação prediz que uma vez que as perturbações entrem no horizonte de Hubble na época de dominação por matéria, adquirirão o contraste de densidade [49, 50, 51, 52]

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{H^2}{2\pi\dot{\phi}} \quad (2.60)$$

o qual deve imprimir flutuações de temperatura na RCF via o efeito Sachs-Wolfe [53].

Considerando o modelo de inflação caótica com potencial $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ o cálculo do contraste de densidade resulta $\delta \approx \frac{1}{m_p^3}m\phi^2$. Em escalas do horizonte, instante no qual as flutuações param de oscilar, o valor do campo é $\phi \approx 15m_p$ [49]. Para produzir perturbações de densidade de $\delta \approx 10^{-5}$, como a medida pelo COBE [38], o valor da massa do campo deve ser $m \approx 10^{-6}m_p$.

Capítulo 3

Descrição das Perturbações de um Campo Escalar

A descrição de perturbações de densidade em um campo escalar são de grande utilidade em diversas situações cosmológicas. Em particular, se a energia escura é constituída por um campo escalar, então esta pode aglomerar. Neste contexto, o colapso de estruturas, composta de matéria que interage com o campo escalar gravitacionalmente, perturbaria-o, criando zonas subdensas e sobredensas do campo escalar, as quais se propagariam na energia escura.

Aqui apresentamos o modo de abordar e descrever estas perturbações em um universo em expansão.

3.1 Fluido de um campo escalar homogêneo

Nós começamos descrevendo o comportamento de um campo escalar $\varphi_0(\eta)$ homogêneo em um universo FRW com curvatura $k = 0$. Neste caso, a métrica do espaço-tempo em coordenadas cartesianas e tempo conforme $\eta = \int \frac{dt}{a}$ é escrita como

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j] \quad (3.1)$$

A lagrangiana que descreve o campo escalar homogêneo embebido em um universo FRW com métrica \bar{g} é

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_0 \partial_\nu \varphi_0 - V(\varphi_0) \right) \quad (3.2)$$

e a equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu (\sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi_0) + \sqrt{-\bar{g}} V'(\varphi_0) = 0 \quad (3.3)$$

que neste caso para um campo escalar homogêneo e métrica \bar{g} resulta em

$$\frac{d^2 \varphi_0}{d\eta^2} + 2H \frac{d\varphi_0}{d\eta} + a^2 V'(\varphi_0) = 0 \quad (3.4)$$

onde $H = \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta}$ é o parâmetro de Hubble em tempo conforme.

O tensor de energia-momento para o campo escalar é dado por

$$\bar{T}_\mu{}^\nu = \partial_\mu \varphi_0 \partial^\nu \varphi_0 - \delta_\mu{}^\nu \mathcal{L} \quad (3.5)$$

Considerando que o campo escalar é um fluido perfeito, o tensor de energia-momento também está dado por

$$\bar{T}_\mu{}^\nu = (\rho_0 + p_0) \bar{u}_\mu \bar{u}^\nu - p \delta_\mu{}^\nu \quad (3.6)$$

onde \bar{u}^μ é a 4-velocidade do fluido, que em um sistema comóvel com o fluido toma a forma $\bar{u}^\mu = \left\{ (\bar{g}_{00})^{-\frac{1}{2}}, 0 \right\}$.

Igualando (3.5) com (3.6) obtemos a densidade e a pressão do fluido de campo escalar, resultando

$$\rho_0 = \frac{a^{-2}}{2} \left(\frac{d\varphi_0}{d\eta} \right)^2 + V(\varphi) \quad (3.7)$$

$$p_0 = \frac{a^{-2}}{2} \left(\frac{d\varphi_0}{d\eta} \right)^2 - V(\varphi) \quad (3.8)$$

Por outro lado, as equações de hidrodinâmica do fluido de campo escalar são obtidas a partir da conservação do tensor-energia momento:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.9)$$

Para $\mu = 0$ obtemos a equação de continuidade

$$\frac{d\rho_0}{d\eta} + 3H(\rho_0 + p_0) = 0 \quad (3.10)$$

e para $\mu = i$ obtemos a equação de Euler, que neste caso resulta uma identidade $0 = 0$.

3.2 Fluido de um campo escalar inhomogêneo

De acordo com a relatividade geral toda distribuição de matéria e energia produz uma distorção na geometria do espaço-tempo. Essa conexão entre matéria e geometria implica que perturbações em um fluido de campo escalar induzem perturbações na geometria do espaço-tempo de fundo; perturbações que serão relevantes sempre e quando o comprimento de onda associada às perturbações seja da ordem do horizonte de Hubble; portanto, nesse caso a métrica perturbada para ser usada será [39, 54]

$$ds^2 = a^2(\eta) [(1 + 2\Phi) d\eta^2 - (1 - 2\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j] \quad (3.11)$$

sendo Φ uma variável que caracteriza a perturbação métrica escalar e está associada com o potencial gravitacional.

Consideremos o campo escalar perturbado linearmente

$$\varphi(\vec{x}, \eta) = \varphi_0(\eta) + \delta\varphi(\vec{x}, \eta) \quad (3.12)$$

Considerando a equação de Euler-Lagrange (3.3) para o campo φ , substituindo as componentes métricas do elemento de linha (3.11) e a expressão para o campo escalar (3.12) na equação (3.3), conservando os fatores lineares no potencial gravitacional e nas perturbações do campo escalar, e usando a equação dinâmica para o campo escalar homogêneo (3.4) encontramos a equação dinâmica para $\delta\varphi$

$$\ddot{\delta\varphi} - \nabla^2 \delta\varphi - 4\dot{\Phi}\dot{\varphi}_0 + 2a^2\Phi V'(\varphi_0) + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta\varphi} + a^2 V''(\varphi_0) \delta\varphi = 0 \quad (3.13)$$

Os termos três e quatro do lado esquerdo dessa equação provêm das perturbações do espaço-tempo geradas pelas flutuações do fluido de campo escalar.

Agora obteremos as perturbações na densidade e pressão do fluido de campo escalar. Para tal fim, usamos a componente $\mu = 0$ e $\nu = 0$ do tensor de energia-momento (3.5) e desta forma obter a expressão da densidade do fluido

$$\rho = \frac{a^{-2}}{2} (1 - 2\Phi) \dot{\varphi}^2 + \frac{a^{-2}}{2} (1 + 2\Phi) (\vec{\nabla}\varphi)^2 + V(\varphi) \quad (3.14)$$

Substituindo as perturbações $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ e $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$ na expressão (3.14), conservando apenas os fatores lineares nas perturbações e usando a equação homogênea (3.7), a perturbação de densidade resulta

$$\delta\rho = a^{-2} \left(\dot{\varphi}_0^2 \delta\varphi - \Phi \dot{\varphi}_0^2 \right) + V'(\varphi_0) \delta\varphi \quad (3.15)$$

Para obter a pressão exercida pelo fluido de campo escalar, usamos as componentes espaciais $\mu = i$ e $\nu = j$ do tensor de energia-momento (3.7), desta forma

$$p = \frac{a^{-2}}{2} (1 - 2\Phi) \dot{\varphi}^2 - \frac{a^{-2}}{6} (1 + 2\Phi) \left(\vec{\nabla}\varphi \right)^2 - V(\varphi) \quad (3.16)$$

Inserindo $p = p_0 + \delta p$ e $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$ na expressão (3.16), mantendo só os fatores lineares no potencial gravitacional e nas perturbações, e usando a equação homogênea (3.8), obtemos

$$\delta p = \delta\rho - 2V'(\varphi_0) \delta\varphi \quad (3.17)$$

Para conseguir a perturbação na 3-velocidade, trabalhamos com a componente $\mu = 0$ e $\nu = i$ do tensor energia-momento (3.6), que neste caso, $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $p = p_0 + \delta p$ e $u^\alpha = \bar{u}^\alpha + \delta u^\alpha$. Conservando os fatores lineares nas perturbações, resulta

$$T_0^i = -(\rho_0 + p_0) a^{-1} \delta^{ij} \delta u_j \quad (3.18)$$

Por outro lado, trabalhando com a componente $\mu = 0$ e $\nu = i$ do tensor energia-momento (3.5), usando $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$ e conservando fatores lineares conseguimos

$$T_0^i = -a^{-2} (\dot{\varphi}_0 \partial_j \delta\varphi) \delta^{ij} \quad (3.19)$$

Igualando (3.18) e (3.19), obtemos a equação para a perturbação da 3-velocidade do fluido de campo escalar

$$(\rho_0 + p_0) \delta u_j = a^{-1} \dot{\varphi}_0 \partial_j \delta\varphi \quad (3.20)$$

Para obter as equações de hidrodinâmica perturbadas, usamos (3.9). Para $\mu = 0$ obtemos a equação de continuidade. Neste caso, as componentes diferentes de zero a primeira ordem nas perturbações do tensor de energia-momento são

$$T^{00} = a^{-2} (\rho_0 + \delta\rho - 2\rho_0\Phi) \quad (3.21)$$

$$T^{0i} = a^{-1} (\rho_0 + p_0) \delta u^i \quad (3.22)$$

$$T^{ij} = a^{-2} (p_0 + \delta p_0 + 2p_0\Phi) \delta^{ij} \quad (3.23)$$

e as componentes a primeira ordem nas perturbações da conexão são

$$\Gamma^0_{00} = H + \dot{\Phi} \quad (3.24)$$

$$\Gamma^0_{0i} = \partial_i \Phi \quad (3.25)$$

$$\Gamma^0_{ij} = \left(H - 4H\Phi - \dot{\Phi} \right) \delta_{ij} \quad (3.26)$$

$$\Gamma^\nu_{0\nu} = 2 \left(2H - \dot{\Phi} \right) \quad (3.27)$$

$$\Gamma^\nu_{i\nu} = -2\partial_i \Phi \quad (3.28)$$

Substituímos essas componentes na equação de continuidade e mantendo apenas os fatores lineares no potencial gravitacional e nas perturbações, usamos a equação homogênea (3.10), para obter a equação

$$\dot{\delta\rho} = (\rho_0 + p_0) \left\{ 3\dot{\Phi} - a\partial_i \delta u^i \right\} - 3H (\delta\rho + \delta p) \quad (3.29)$$

No caso em que $\mu = i$, a equação (3.9) resulta na equação de Euler. As componentes diferentes de zero para o tensor de energia-momento, são as mesmas que no caso anterior, enquanto as componentes diferentes de zero para a conexão, adicionais ao caso $\mu = 0$, são

$$\Gamma^i_{00} = \delta^{ij} \partial_j \Phi \quad (3.30)$$

$$\Gamma^i_{0j} = \left(H - \dot{\Phi} \right) \delta_i^j \quad (3.31)$$

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^{il} \delta_{jk} \partial_l \Phi - \delta^i_j \partial_k \Phi - \delta^i_k \partial_j \Phi \quad (3.32)$$

Substituindo todas elas na equação de Euler e linearizando no potencial gravitacional e nas perturbações, obtemos

$$\partial_0 \left\{ a^5 (\rho_0 + p_0) \delta u^i \right\} + a^4 \left\{ (\rho_0 + p_0) \delta^{ij} \partial_i \Phi + \delta^{ij} \partial_i \delta p \right\} = 0 \quad (3.33)$$

e aplicando a derivada ∂_i à equação, podemos escrevê-la como

$$\partial_0 \{a^5 (\rho_0 + p_0) \partial_i \delta u^i\} + a^4 \{(\rho_0 + p_0) \nabla^2 \Phi + \nabla^2 \delta p\} = 0 \quad (3.34)$$

Este conjunto de equações permite-nos estudar as perturbações na energia escura e conhecer sua evolução em um universo em expansão.

Capítulo 4

Formação de Estruturas

O universo está constituído por estruturas inhomogêneas como galáxias, aglomerados de galáxias e superaglomerados de galáxias. Aqui, estudaremos os mecanismos básicos oferecidos pela cosmologia padrão para descrever a evolução e formação dessas estruturas. Estas abordagens assumem a existência de pequenas inhomogeneidades presentes no universo primordial sem oferecer uma explicação para sua origem. Neste sentido são modelos incompletos. Para ser considerados completos, o modelo cosmológico deveria produzir também estas inhomogeneidades iniciais mediante algum mecanismo. A inflação fornece um mecanismo bem-sucedido para gerar estas perturbações.

Em um instante $t_i = t_{eq}$, ou desvio para o vermelho $z \approx 3196$, a radiação e a matéria tiveram iguais densidades. A formação de estruturas começa a partir de $t > t_{eq}$, quando o universo é dominado por matéria, já que esse é o instante no qual as perturbações de densidade presentes na componente de matéria podem começar a crescer, porque a taxa de expansão do universo diminui e a matéria se desacopla da radiação. Desta maneira, o tempo de igualdade entre a densidade de matéria e radiação marca o início para a formação de estruturas.

Para $t > t_{eq}$, praticamente todas as perturbações de densidade estarão dentro do horizonte ($\lambda_f < H^{-1}$). Portanto, o efeito da curvatura espacial é pequeno ($\lambda_f < R_{cur}$) e usualmente pode ser desprezado, de maneira que a teoria newtoniana pode ser usada para estudar a evolução das perturbações a partir desse momento.

4.1 Teoria Linear

Desde as observações realizadas pelo satélite COBE, sabemos que as flutuações de temperatura presentes na SUE foram da ordem de 10^{-5} . Por outro lado, também

sabemos que essas flutuações na temperatura foram impressas devido a perturbações de densidade presentes nesse momento via o efeito Sachs-Wolfe [53]. Portanto, perturbações de densidade da mesma ordem estiveram presentes na matéria para esse momento. Essa é uma evidência que faz plausível o uso de uma teoria linear para a evolução das perturbações de densidade ao começo da formação de estruturas. Uma vez que essas perturbações crescem e o contraste de densidade é da ordem da unidade, a teoria linear não é mais apropriada e nós devemos usar outros modelos para estudar sua posterior evolução.

Consideremos a distribuição de matéria no universo acoplada à gravidade newtoniana, de maneira que podemos caracterizar o fluido mediante sua densidade ρ , sua velocidade \vec{v} , sua pressão p e o potencial gravitacional φ . O comportamento dessas grandezas são determinadas pela equação de continuidade, a equação de Euler e a equação de Poisson, complementadas com uma equação de estado

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\nabla} \varphi = 0 \quad (4.2)$$

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho \quad (4.3)$$

$$p = p(\rho) \quad (4.4)$$

Consideremos que cada uma dessas grandezas que caracteriza o fluido provém de uma pequena perturbação sobre uma distribuição de matéria homogênea e isotrópica, de maneira que

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0(t) + \delta\rho(\vec{x}, t) \quad (4.5)$$

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}_0(\vec{x}, t) + \delta\vec{v}(\vec{x}, t) \quad (4.6)$$

$$p(\vec{x}, t) = p_0(t) + \delta p(\vec{x}, t) \quad (4.7)$$

$$\varphi(\vec{x}, t) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(\vec{x}, t) \quad (4.8)$$

onde $\vec{v}_0 = H(t) \vec{x}(t)$. As respectivas perturbações são muito menores do que suas respectivas magnitudes de fundo. Da equação de estado (4.4), podemos escrever na aproximação linear

$$p(\rho_0 + \delta\rho) = p_0(t) + v_s^2 \delta\rho(\vec{x}, t) \quad (4.9)$$

onde $\delta p = v_s^2 \delta\rho$ e $v_s^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}$ é o quadrado da velocidade do som das perturbações na distribuição de matéria. Inserimos o ansatz (4.5), (4.6), (4.8) e (4.9), nas equações (4.1), (4.2) e (4.3). Depois, linearizamos nas perturbações para as equações obtidas, e trabalhando em coordenadas comóveis q , as quais estão relacionadas às coordenadas físicas como $\vec{x} = a(t) \vec{q}$, as equações são simplificadas. Combinando as equações diferenciais de primeira ordem em uma única equação diferencial de segunda ordem para $\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho_0}$, obtemos

$$\ddot{\delta}(\vec{q}, t) + 2H(t) \dot{\delta}(\vec{q}, t) - \frac{v_s^2}{a^2(t)} \nabla^2 \delta(\vec{q}, t) - 4\pi G \rho_0(t) \delta(\vec{q}, t) = 0 \quad (4.10)$$

Tomando a transformada de Fourier com respeito à coordenada comóvel q

$$\delta(\vec{q}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \delta_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\vec{q}} d^3\vec{k} \quad (4.11)$$

nós obtemos

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}}(t) + 2H(t) \dot{\delta}_{\vec{k}}(t) + \left(\frac{v_s^2 k^2}{a^2(t)} - 4\pi G \rho_0(t) \right) \delta_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (4.12)$$

a qual descreve a evolução dos diferentes modos das perturbações de densidade em um universo em expansão. Restringindo a atenção ao terceiro termo da equação (4.12); a quantidade entre parêntese define um número de onda crítico, o número de onda de Jeans, cujo valor k_J é dado por

$$k_J = \frac{a}{v_s} (4\pi G \rho_0)^{\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

Já que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, também se define o comprimento de onda de Jeans, dada por

$$\lambda_J = \frac{v_s}{a} \left(\frac{\pi}{G \rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.14)$$

O comprimento de onda de Jeans λ_J separa os modos de perturbação gravitacionalmente estáveis e instáveis.

Consideremos primeiramente o crescimento de perturbações em um universo sem expansão onde $H(t) = 0$:

- Equação para $\lambda < \lambda_J$

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}}(t) + (k^2 v_s^2 - 4\pi G \rho_0) \delta_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (4.15)$$

cuja solução é

$$\delta_{\vec{k}}(t) \propto e^{\pm i\omega t} \quad (4.16)$$

As perturbações oscilam como ondas de som com frequência $\omega = (k^2 v_s^2 - 4\pi G \rho_0)^{\frac{1}{2}}$.

- Equação para $\lambda > \lambda_J$

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}}(t) - (4\pi G \rho_0 - k^2 v_s^2) \delta_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (4.17)$$

cuja solução está dada por

$$\delta_{\vec{k}}(t) \propto e^{\pm \frac{t}{T}} \quad (4.18)$$

As perturbações crescem o decaem sobre uma escala de tempo $T = (4\pi G \rho_0 - k^2 v_s^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Consideremos agora o crescimento de perturbações em um universo com $H(t) \neq 0$:

- Equação para $\lambda \ll \lambda_J$

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}}(t) + 2H(t) \dot{\delta}_{\vec{k}}(t) + \frac{v_s^2 k^2}{a^2(t)} \delta_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (4.19)$$

Assumindo $a(t) \propto t^n$, a solução é

$$\delta_{\vec{k}}(t) \propto e^{\pm i\omega t} \quad (4.20)$$

Neste caso, as perturbações oscilam como ondas de som com frequência $\omega = \frac{v_s k}{a(t)(1-n)}$.

- Equação para $\lambda \gg \lambda_J$

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}}(t) + 2H(t)\dot{\delta}_{\vec{k}}(t) - 4\pi G\rho_0(t) = 0 \quad (4.21)$$

Como podemos observar, o termo de gradiente de pressão é desprezível, caso que corresponde à matéria. Assumindo $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$, caso de um universo Einstein-de Sitter, a solução é

$$\delta_{\vec{k}}(t) = c_1 t^{\frac{2}{3}} + c_2 t^{-1} \quad (4.22)$$

a qual é uma combinação linear de modos de crescimento e decaimento. Apenas os modos de crescimento contribuem na formação de estruturas. Estes modos crescem proporcionalmente ao crescimento do fator de escala a . Tomando o modo de crescimento e considerando condições iniciais que identificaremos com o tempo t_{eq} , podemos escrever

$$\delta_{\vec{k}}(t) = \delta_{eq} \left(\frac{t}{t_{eq}} \right)^{\frac{2}{3}} = \delta_{eq} \frac{a(t)}{a_{eq}} \quad (4.23)$$

Comparando as soluções (4.18) e (4.23), concluímos que a expansão do universo leva o crescimento das perturbações de uma lei exponencial a uma lei de potência. Portanto, a expansão do universo tem como efeito moderar o crescimento das perturbações de densidade.

De forma geral podemos expressar o crescimento de uma perturbação de densidade como

$$\text{Crescimento} = (\text{Gravidade} - \text{Pressão}) - \text{Expansão} \quad (4.24)$$

O termo de gravidade sempre vai atuar tentando produzir o colapso e formar a estrutura. O termo de pressão sempre funciona como suporte, podendo suprimir a formação da estrutura no caso que $\lambda < \lambda_j$. O termo de expansão sempre vai amortecer o crescimento. Será a atuação conjunta destes fatores que determinarão a evolução da perturbação de densidade.

4.2 Os efeitos da expansão acelerada del universo

No ano de 1998, os grupos Supernova Cosmology Project [29] e High-Z Supernova Team [30], realizando observações de Supernovas tipo Ia (SN Ia) obtiveram evidências da expansão acelerada do universo. Desde esse momento, observações independentes do CMB, LSS e Weak Gravitational Lensing (WGL) tem resultado em mais evidências a favor da expansão acelerada do universo [55].

Os candidatos propostos para explicar o mecanismo físico que gera a recente expansão acelerada do universo têm sido a Energia Escura, teorias de gravidade modificada e a hipótese de um universo não homogêneo.

A Energia Escura é entendida como uma componente exótica que domina a densidade de energia do universo e cuja principal característica é a geração de pressão negativa, uma espécie de repulsão gravitacional que causa a expansão acelerada do universo. Esta proposta concorda muito bem com as observações realizadas até agora [29, 30].

As teorias de gravidade modificada são mudanças à teoria da Relatividade Geral, baseadas na hipótese de que a expansão acelerada do universo é a consequência de uma nova física gravitacional não contemplada na Relatividade Geral e portanto esta teoria deve ser substituída por uma nova teoria que considere os novos efeitos [56, 57, 58, 59].

A teoria de um universo não homogêneo é baseada na hipótese de que a matéria está distribuída de forma não homogênea no universo, formando grandes vazios, ocupando nós o centro de um desses, o qual cria a aparente ilusão da expansão acelerada do universo [27, 28, 31, 32].

Para explicar a natureza da energia escura tem-se proposto diferentes candidatos. Entre os mais conhecidos está a Constante Cosmológica e os Campos Escalares.

Os diferentes modelos distinguem-se pelo parâmetro (w) que relaciona a pressão (p) e a densidade de energia (ρ) na equação de estado ($p = w\rho$) da Energia Escura.

A Constante Cosmológica é associada com a energia do vácuo e tem uma equação de estado constante $\omega = -1$.

O modelo Λ CDM é o modelo conhecido mais simples que concorda com as observações realizadas da CMB, LSS, WGL e SN Ia. Este modelo considera a Energia Escura como uma Constante Cosmológica com um parâmetro de densidade associado $\Omega_\Lambda = 0.73$, a matéria escura fria com $\Omega_{me} = 0.23$ e a matéria atômica com $\Omega_b = 0.04$.

Consideremos a equação de Einstein (1.37). O tensor de Einstein G_{ab} e o tensor de energia-momento T_{ab} satisfazem respectivamente a identidade de Bianchi $\nabla_a G^{ab} = 0$ e a conservação de energia $\nabla_a T^{ab} = 0$. Como $\nabla_a g^{ab} = 0$, temos a liberdade de somar o termo Λg_{ab} à equação de Einstein, onde o fator Λ é conhecido como a constante cosmológica. Desta forma, a equação de Einstein pode ser escrita

$$G_{ab} = 8\pi G \left(T_{ab} + \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{ab} \right) \quad (4.25)$$

definindo

$$\tilde{T}_{ab} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{ab} \quad (4.26)$$

como o tensor de energia-momento do vácuo.

Asumindo um fluido perfeito, a equação de estado da energia do vácuo é

$$p = -\rho = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (4.27)$$

da qual segue-se que $\omega = -1$.

Como o tensor de energia-momento é $\tilde{T}^{ab} = \rho g^{ab}$, o qual satisfaz $\nabla_a \tilde{T}^{ab} = \nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$, resulta que a densidade $\rho = \text{constante}$.

Usando a equação (1.40) e a equação de estado (4.27), vemos que a pressão negativa é a responsável da expansão acelerada do universo.

Veamos a época na qual começa a expansão acelerada do universo. Usando o parâmetro de Hubble, escrito na forma

$$H = H_0 \left\{ \sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+\omega_i)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.28)$$

onde Ω_i^0 é o parâmetro de densidade de uma componente particular no presente, e mediante a equação (1.40), podemos escrever o parâmetro de aceleração $q = -\frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{H^2}$ como

$$q = \frac{1}{2} \frac{\sum_i \Omega_i^0 (1+3\omega_i) (1+z)^{3(1+\omega_i)}}{\sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+\omega_i)}} \quad (4.29)$$

Considerando o modelo Λ CDM, o universo entra em uma fase de expansão acelerada quando $q < 0$ ou um desvio para o vermelho

$$z < \left(\frac{2\Omega_\Lambda^0}{\Omega_m^0} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0,75 \quad (4.30)$$

Desta maneira, concluímos que a expansão acelerada do universo é um fenômeno recente.

A constante cosmológica está dada por $\Lambda = 8\pi G \rho_\Lambda$, além disso, considerando que $\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda^0 \frac{3H_0^2}{8\pi G}$, seu valor observacional é

$$\Lambda = 3\Omega_{\Lambda}^0 H_0^2 \sim H_0^2 \quad (4.31)$$

Segundo o modelo Λ CDM $H_0 \approx 10^{-43} GeV$, obtendo

$$\Lambda \sim 10^{-83} GeV^2 \quad (4.32)$$

e a densidade de energia do vácuo resulta

$$\rho_{\Lambda} \sim 10^{-46} GeV^{-4} \quad (4.33)$$

Como podemos observar, o valor observacional de Λ depende do ajuste da taxa de expansão atual.

O crescimento das perturbações de densidade com contraste de densidade pequeno, em escalas menores que a distância de Hubble, está determinado por

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + 2H\dot{\delta}_{\vec{k}} - 4\pi G\rho\delta_{\vec{k}} = 0 \quad (4.34)$$

A presença da constante cosmológica afeta as estruturas em grande escala pela sua influência sobre a taxa de expansão do universo quando as perturbações de densidade estão crescendo. Esta influência é dada através do termo de amortecimento $2H\dot{\delta}_{\vec{k}}$.

Fazemos esse análise para um universo com matéria e energia escura. Em esse caso, o parâmetro de Hubble resulta

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_t \quad (4.35)$$

onde ρ_t , a densidade total, que resulta de somar a densidade de matéria e energia escura, é dada por

$$\rho_t = \rho_m^{eq} \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^3 + \rho_{ee}^{eq} \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^{3(1+\omega)} \quad (4.36)$$

na qual ρ_m^{eq} e ρ_{ee}^{eq} são as densidades de matéria e energia na época em que a densidade de matéria e energia escura estão nas mesmas proporções; a_{eq} é o fator de escala em essa mesma época, e ω é o parâmetro da equação de estado da energia escura.

A densidade total na época de igualdade das duas componentes é

$$\rho_t^{eq} = 2\rho_m^{eq} = 2\rho_{ee}^{eq} \quad (4.37)$$

Portanto, a densidade total pode ser reescrita como

$$\rho_t = \frac{\rho_t^{eq}}{2} \left\{ \left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^3 + \left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^{3(1+\omega)} \right\} \quad (4.38)$$

Usando como variável de evolução $x \equiv \frac{a}{a_{eq}}$, ao invés de t , e inserindo a expressão (4.35) e (4.38) na equação (4.34), resulta

$$x^2 (1 + x^{-3\omega}) \frac{d^2\delta}{dx^2} + \frac{3}{2}x (1 + \{1 - \omega\} x^{-3\omega}) \frac{d\delta}{dx} - \frac{3}{2}\delta = 0 \quad (4.39)$$

O caso em que a energia escura é a constante cosmológica, o parâmetro da equação de estado é $\omega = -1$. Adicionalmente, se consideramos a época onde a densidade da energia escura domina sobre a densidade de matéria, então $x \gg 1$. Fazendo essas duas considerações, a solução da equação (4.39) é dada por

$$\delta(x) \approx c_1 + c_2 x^{-2} \quad (4.40)$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

De acordo à solução (4.40), uma vez que a expansão acelerada do universo começa o crescimento das perturbações de densidade linear finaliza. Isto é devido a que o tempo de amortecimento de Hubble, $t = \frac{1}{2H}$, torna-se menor do que a escala de tempo para o crescimento das perturbações de densidade, $t = \frac{1}{\sqrt{4\pi G \rho_m}}$.

Visto com uma perspectiva mais física, ocorre que a constante cosmológica atua como anti-gravidade e inibe o crescimento das perturbações de densidade.

4.3 Modelo do Colapso Esférico

Já que a maioria das estruturas observadas no universo apresentam um contraste de densidade maior do que a unidade, a evolução das perturbações de densidade termina sendo entendida apenas com uma teoria não-linear. A versão mais simples da teoria das perturbações não-lineares é conhecido como o modelo de colapso esférico [7]. Este modelo descreve a evolução não-linear de uma perturbação com simetria esférica e densidade uniforme (perfil top-hat), até o momento do colapso gravitacional e formação da estrutura.

Consideremos o campo de densidade para a matéria no tempo $t_i = t_{eq}$

$$\rho(r, t_i) = \rho_0(t_i) + \delta\rho(r, t_i) = \rho_0(t_i) \{1 + \delta(r, t_i)\} \quad (4.41)$$

onde ρ_0 é a densidade do fundo, $\delta\rho$ é a perturção de densidade e δ é o contraste de densidade que caracteriza a perturbação.

O campo de densidade gera um potencial gravitacional

$$\varphi(r, t) = \varphi_0(r, t) + \delta\varphi(r, t) \quad (4.42)$$

onde φ_0 é o potencial gravitacional de fundo e $\delta\varphi$ é a perturbação do potencial gerado pela perturbação de densidade $\delta\rho$.

O potencial gravitacional φ_0 associado ao espaço-tempo de FRW é

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) r^2 \quad (4.43)$$

Usando a equação de aceleração sem pressão

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_0 \quad (4.44)$$

e da expressão para a perturbação do potencial gravitacional

$$\delta\varphi = -G \frac{\delta m}{r} \quad (4.45)$$

obtemos que

$$\varphi(r, t) = \frac{2}{3} \pi G \rho_0 r^2 - G \frac{\delta m}{r} \quad (4.46)$$

onde δm é a massa de uma camada da perturbação.

Fazendo a suposição que cada partícula em uma camada da perturbação não cruza a camada seguinte enquanto a perturbação evolui no tempo, leva a que δm é constante.

Por conseguinte, a equação dinâmica para a perturbação de densidade resulta

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \varphi = -\frac{G}{r^2} (m_0 + \delta m) \hat{r} \quad (4.47)$$

onde m_0 é a massa do fundo e vem dada por

$$m_0 = \frac{4}{3} \pi \rho_0(t) r^3(t) = \text{constante} \quad (4.48)$$

e a massa da perturbação é

$$\delta m = 4\pi\rho_0 \int_0^r q^2 \delta(q, t) dq \quad (4.49)$$

Considerando o anterior obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= -\frac{G}{r^2} \{m_0(t_i) + \delta m(r, t_i)\} \hat{r} \\ &= -\frac{G}{r^2} \left[\rho_0(t_i) \left(\frac{4\pi}{3} r_i^3 \right) \left\{ 1 + \frac{3}{4\pi r_i^3} \int_0^{r_i} 4\pi r^2 \delta_i(r) dr \right\} \right] \vec{r} \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde o contraste de densidade médio está definido por

$$\bar{\delta}_i = \frac{3}{4\pi r_i^3} \int_0^{r_i} 4\pi r^2 \delta_i(r) dr \quad (4.51)$$

Dessa forma pode se reescrever a equação (4.50) como

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{Gm}{r^2} \hat{r} \quad (4.52)$$

onde

$$m = \rho_0 \left(\frac{4\pi}{3} r_i^3 \right) (1 + \bar{\delta}_i) \quad (4.53)$$

A solução da equação (4.52) é

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{Gm}{r} \quad (4.54)$$

onde E é a energia total da perturbação. Quando $E > 0$, a perturbação se expande para sempre, mas se $E < 0$, a perturbação atinge um máximo e depois colapsa. A energia cinética inicial para a perturbação é

$$K_i = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)_{t=t_i}^2 = \frac{H_i^2 r_i^2}{2} \quad (4.55)$$

onde usamos a lei de Hubble dentro da perturbação. A energia potencial inicial para a perturbação é

$$U_i = - \left(\frac{Gm}{r} \right)_{t=t_i} = K_i \Omega_i (1 + \bar{\delta}_i) \quad (4.56)$$

para o qual usamos $\Omega_i = \frac{8\pi G}{3H_i^2}\rho_0$. Por conseguinte a energia total resulta

$$E = K_i \Omega_i \{ \Omega_i^{-1} - (1 + \bar{\delta}_i) \} \quad (4.57)$$

Como nos interessa a formação das estruturas, concentrar-nos-emos no caso $E < 0$, caso para o qual obtemos a condição

$$\bar{\delta}_i > \Omega_i^{-1} - 1 \quad (4.58)$$

Como consequência dessa condição, se o universo for fechado ou plano ($\Omega_i \geq 1$), qualquer perturbação com $\bar{\delta}_i \geq 0$ colapsará em algum momento. Se for aberto ($\Omega_i < 1$), então $\bar{\delta}_i$ deve ser maior do que um valor crítico para colapsar.

A evolução temporal de uma camada da perturbação de densidade pode ser encontrada integrando a equação (4.54). A solução é dada na forma paramétrica:

$$r = A(1 - \cos \theta) \quad (4.59)$$

$$t = B(\theta - \sin \theta) \quad (4.60)$$

onde o parâmetro θ aumenta com o aumento de t e a constante A é relacionada a B por $A^3 = GmB^2$.

Quando a perturbação atinge o tamanho máximo, $\theta = \pi$, $\dot{r} = 0$ e $r = r_{max}$, portanto

$$E = -\frac{Gm}{r_{max}} = -\left(\frac{r_i}{r_{max}}\right) \Omega_i K_i (1 + \bar{\delta}_i) \quad (4.61)$$

Igualando (4.57) com (4.61) obtemos

$$\frac{r_{max}}{r_i} = \frac{(1 + \bar{\delta}_i)}{\{\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1} - 1)\}} \quad (4.62)$$

Já que neste instante $r_{max} = 2A$, a expressão para A resulta

$$A = \frac{r_i (1 + \bar{\delta}_i)}{2 \{\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1} - 1)\}} \quad (4.63)$$

Da relação entre A e B , a expressão para B resulta

$$B = \frac{1}{2H_i \Omega_i^{\frac{1}{2}}} \frac{(1 + \bar{\delta}_i)}{\{\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1} - 1)\}^{\frac{3}{2}}} \quad (4.64)$$

Consideremos o caso de um universo Einstein-de Sitter ($\Omega_i = 1$) a partir de agora. A densidade da perturbação é

$$\bar{\rho}(\theta) = \frac{3}{4\pi r^3} m = \frac{3m}{4\pi A^3 (1 - \cos \theta)^3} \quad (4.65)$$

e a densidade do fundo, usando a equação de Friedmann, resulta

$$\rho_0(t) = \frac{1}{6\pi G t^2} = \frac{1}{6\pi G B^2 (\theta - \sin \theta)^2} \quad (4.66)$$

Portanto, o contraste de densidade não-linear da perturbação é

$$\bar{\delta}(\theta) = \frac{\bar{\rho}(t)}{\rho_0(t)} - 1 = \frac{9(\theta - \sin \theta)^2}{2(1 - \cos \theta)^3} - 1 \quad (4.67)$$

Fazendo $\theta \ll 1$ na equação (4.67) recuperamos o limite linear

$$\bar{\delta}_l(\theta) \approx \frac{3\theta^2}{20} \quad (4.68)$$

No limite linear a solução (4.60) resulta $t \approx \frac{B\theta^3}{6}$, por conseguinte

$$\bar{\delta}_l(t) \approx \frac{3}{5} \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{2}{3}} \bar{\delta}_i \quad (4.69)$$

valor que difere por um fator de $\frac{3}{5}$ do contraste de densidade da teoria linear. Considerando $\bar{\delta}_i \ll 1$, a solução (4.60) e $H_i = \frac{2}{3t_i}$, podemos reescrever o limite linear (4.69) como

$$\bar{\delta}_l = \frac{3}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{2}{3}} (\theta - \sin \theta)^{\frac{2}{3}} \quad (4.70)$$

Agora podemos estimar a exatidão da teoria linear com respeito à teoria do colapso esférico comparando a solução (4.67) com (4.70):

Para $\theta \ll 1$

$$\bar{\delta}_l \approx \bar{\delta} \quad (4.71)$$

Para $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\bar{\delta}_l \approx 0,34 \quad (4.72)$$

$$\bar{\delta} \approx 0,46 \quad (4.73)$$

Para $\theta = \frac{2\pi}{3}$ acontece a transição ao regime não-linear

$$\bar{\delta}_l \approx 0,57 \quad (4.74)$$

$$\bar{\delta} \approx 1,01 \quad (4.75)$$

Para $\theta = \pi$ a perturbação atinge o raio máximo (inversão)

$$\bar{\delta}_l \approx 1,061 \quad (4.76)$$

$$\bar{\delta} \approx 4,54 \quad (4.77)$$

Para $\theta = 2\pi$ a perturbação condensa

$$\bar{\delta}_l \approx 1,686 \quad (4.78)$$

$$\bar{\delta} \approx \infty \quad (4.79)$$

Neste instante, a teoria do colapso esférico sugere que toda a massa colapsa em um ponto. No entanto, antes de que isso aconteça, a aproximação que a matéria está distribuída em camadas esféricas, e que as velocidades aleatórias das partículas são pequenas, deixa de se cumprir, e o objeto colapsante atingirá o equilíbrio virial por um processo conhecido como “violent relaxation” [60]. Durante este processo haverá grandes flutuações no potencial gravitacional, em uma escala de tempo da ordem do tempo do colapso da perturbação $t = (G\rho_0)^{-1}$ permitindo deter o colapso. Neste estado, seu raio tem sido reduzido por um fator de dois em comparação ao raio da perturbação no instante da inversão [8]. É neste estado que pode se dizer que o objeto gravitacionalmente ligado tem sido formado.

Apesar que o modelo do colapso esférico tem o defeito de predizer um colapso pontual, o valor do contraste de densidade linear no instante que o contraste de densidade não linear marca o colapso da perturbação é de grande importância para os modelos que tentam estimar a abundância das estruturas cósmicas. De fato, a maior utilidade do modelo do colapso esférico é precisamente a de fornecer esse valor para o contraste de densidade linear.

Na realidade, a evolução não-linear que leva à formação de estruturas não é entendida totalmente. Portanto, prever as propriedades de uma galáxia particular, localizada em uma coordenada particular \vec{x} , ou conhecer a distribuição de massa exata $\delta(\vec{x})$ do universo, com o objetivo de contrastar a teoria com a observação, não é possível, e mesmo que for possível, os cálculos não-lineares requereriam um esforço descomunal. Por conseguinte a pergunta é, como comparar a teoria com a observação? Predizendo as propriedades estatísticas da distribuição de massa. Na próxima parte, estudaremos o modelo básico que oferece a maneira de fazê-lo.

4.4 Formalismo de Press-Schechter

A teoria das perturbações lineares é uma ferramenta que pode ser usada para realizar previsões aproximadas sobre a abundância das estruturas cósmicas. No entanto, para comparar essas previsões com as observações realizadas, é necessário entender algumas características estatísticas das perturbações de densidade. Nesse contexto foi desenvolvido o formalismo de Press-Schechter [10].

Este formalismo derivou uma relação em 1974 que permite prever a abundância das estruturas sobre um intervalo de massas a partir de um campo de perturbações de densidade aleatório e gaussiano.

Consideremos flutuações em um campo de densidade $\rho(\vec{x})$ descrito pelo contraste de densidade

$$\delta(\vec{x}) \equiv \frac{\rho(\vec{x}) - \rho_0}{\rho_0} \quad (4.80)$$

onde ρ_0 é a densidade de massa média no universo.

Uma quantidade física de interesse é o contraste de densidade suavizado em uma escala comóvel R_W , definido por

$$\delta(\vec{x}, R_W) \equiv \int d^3x' W(|\vec{x}' - \vec{x}|, R_W) \delta(\vec{x}') \quad (4.81)$$

A função $W(x, R_W)$ é chamada função janela e pesa o campo de densidade de uma maneira que é relevante para a aplicação particular.

Press e Schechter assumiram as seguintes hipóteses para estudar a formação de estruturas não-lineares:

- A caracterização das propriedades estatísticas das flutuações de densidade para o tempo $t = t_{eq}$ por uma distribuição de densidade de probabilidade gaussiana

$$p(\delta_l, R_W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\delta_l^2}{2\sigma^2}} \quad (4.82)$$

onde $\sigma(R_W) = (\langle \delta^2(\vec{x}, R_W) \rangle)^{\frac{1}{2}}$ é a desvio padrão da perturbação de densidade linear sobre a escala R_W . Esta distribuição é estabelecida durante a época inflacionária, quando o universo foi dotado de um campo de flutuações de densidade primordial aleatório e gaussiano.

- A evolução das perturbação de densidade é determinada pela teoria de perturbações lineares.
- Os objetos colapsaram em alguma escala R_W , uma vez que o contraste de densidade suavizado $\delta(\vec{x}, R_W)$ sobre essa escala exceda algum valor crítico δ_c . Esse valor crítico para o colapso em objetos virializados é determinada pelo valor do contraste de densidade linear quando o contraste de densidade do modelo do colapso esférico associado com a massa m diverge. Como mostramos acima, esse valor para um universo Einstein-de Sitter é $\delta_c = 1,686$.

Dada a simetria esférica da perturbação, a escolha mais natural para a função janela é

$$W(r, R_W) = \frac{3}{4\pi R_W^3} \Theta(R_W - r) \quad (4.83)$$

O volume da janela será $V_W = \frac{4\pi}{3} R_W^3$ e a massa dentro dessa esfera estará dada por $m = \rho_0 V_W$.

Uma região com contraste de densidade suavizado igual ao valor crítico δ_c , corresponde a um objeto que acabará virializado com massa $m(R_W)$; então a probabilidade acumulada para uma região ter um contraste de densidade suavizado $\delta(\vec{x}, R_W) > \delta_c$, dá a fração de volume ocupado por objetos virializados com $m' > m$

$$F(m) = \int_{\delta_c}^{\infty} p(\delta_l, R_W) d\delta_l = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(m)} \right) \quad (4.84)$$

onde $\operatorname{erfc}(x)$ é a função error.

Para obter a densidade de número comóvel de objetos virializados por unidade de massa, devemos multiplicar a quantidade $\frac{dF(m)}{dm}$ (a qual expressa a quantidade de objetos virializados por unidade de massa) por $\frac{\rho_0}{m}$ (a qual expressa o inverso do volume da região). Desta maneira obtemos

$$\frac{dn(m, z)}{dm} = 2 \frac{\rho_0}{m} \left| \frac{dF(m, z)}{dm} \right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_0}{m^2} \frac{\delta_c(z)}{\sigma(z)} \left| \frac{d \ln \sigma(z)}{d \ln m} \right| e^{-\frac{\delta_c^2(z)}{2\sigma^2(z)}} \quad (4.85)$$

O fator de dois deve-se a que a equação F apenas cobre a metade da massa em objetos virializados, já que não conta regiões subdensas. Press e Schechter argumentaram que as regiões subdensas colapsaram sobre as regiões sobredensas e multiplicaram F por dois com o fim de incluir toda a massa. Um modelo conhecido como Excursion Set derivou de maneira rigorosa o fator de dois [31].

Para conhecer a densidade de número comóvel de objetos virializados em um intervalo de massa, o formalismo de Press-Schechter prediz

$$n(z) = \int_{m_1}^{m_2} \frac{dn(m, z)}{dm} dm \quad (4.86)$$

Embora o colapso gravitacional é mais complexo do imaginado nesta derivação; esta função de massa começou a adquirir interesse na cosmologia a partir de 1988, uma vez que começaram a se realizar simulações de N-corpos, e tais resultados concordavam bastante bem com as previsões da função de massa de Press-Schechter [10].

Capítulo 5

Perturbações de Densidade Inhomogêneas

Como vimos, o modelo do colapso esférico descreve uma perturbação de densidade esfericamente simétrica e uniforme, que evolui dentro de um universo homogêneo e em expansão.

Agora, estudaremos a evolução de perturbações de densidade inhomogêneas no universo de um modo que generaliza de uma forma clara o modelo do colapso esférico. Para esse fim, derivamos uma equação dinâmica para a evolução do contraste de densidade no contexto de um espaço-tempo de Lemaître-Tolman-Bondi e obtemos soluções para a evolução de perturbações de densidade esfericamente simétricas com um perfil radial inicial, embebidas em um universo Einstein-de Sitter e Λ CDM.

Depois, considerando um universo permeado por uma componente material com pressão, empregamos o modelo de Lemaître para estudar a evolução de perturbações de densidade esfericamente simétricas e inhomogêneas, com um dado perfil radial inicial.

5.1 O caso sem pressão

No caso de uma perturbação inhomogênea não é possível usar uma métrica de FRW, a qual é válida somente para uma distribuição de matéria homogênea. A métrica mais geral esfericamente simétrica é dada por

$$ds^2 = e^{A(r,t)} dt^2 - e^{B(r,t)} dr^2 - R^2(r,t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.1)$$

onde t é o tempo cósmico, r é o raio comóvel, θ a coordenada azimutal e φ a coordenada angular. A métrica é determinada por três funções: $A(r,t)$, $B(r,t)$ e

$R(r, t)$, onde esta última função é conhecida como o raio areal, já que a área de uma superfície em um tempo dado t e raio comóvel r é dado por $S = 4\pi R(r, t)^2$. Para uma exposição sobre modelos inhomogêneos com simetria esférica, ver [61].

Nós assumimos um fluido perfeito com tensor de energia-momento dado por

$$T^\mu{}_\nu = (\rho + p) u^\mu u_\nu - p \delta^\mu{}_\nu \quad (5.2)$$

onde ρ é a densidade do fluido, p a pressão e u^μ é a 4-velocidade, que cumpre a condição $u^\mu u_\mu = 1$ e em um sistema de referência comóvel resulta $u^\mu = (e^{-\frac{A}{2}}, 0, 0, 0)$.

Nesta métrica, as equações de Einstein com uma constante cosmológica, $G^\mu{}_\nu = 8\pi G T^\mu{}_\nu + \Lambda \delta^\mu{}_\nu$, podem ser escritas como:

$$G^t{}_t = e^{-A} \left(\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{\dot{B}\dot{R}}{R} \right) - e^{-B} \left(2\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} - \frac{B'R'}{R} \right) + \frac{1}{R^2} = 8\pi G\rho + \Lambda \quad (5.3)$$

$$G^r{}_t = G^t{}_r = e^{-B} \left(2\frac{\dot{R}'}{R} - \frac{\dot{B}R'}{R} - \frac{A'\dot{R}}{R} \right) = 0 \quad (5.4)$$

$$G^r{}_r = e^{-A} \left(2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\dot{A}\dot{R}}{R} \right) - e^{-B} \left(\frac{R'^2}{R^2} + \frac{A'R'}{R} \right) + \frac{1}{R^2} = -8\pi Gp + \Lambda \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} G^\theta{}_\theta = G^\varphi{}_\varphi &= \frac{e^{-A}}{4} \left(4\frac{\ddot{R}}{R} - 2\frac{\dot{A}\dot{R}}{R} + \frac{\dot{B}\dot{R}}{R} + 2\ddot{B} + \dot{B}^2 - \dot{A}\dot{B} \right) - \\ &- \frac{e^{-B}}{4} \left(4\frac{R''}{R} + 2\frac{A'R'}{R} - 2\frac{B'R'}{R} + 2A'' + A'^2 - A'B' \right) \\ &= -8Gp + \Lambda \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde ponto e linhas referem-se a derivadas parciais com respeito ao tempo e ao espaço respectivamente.

A conservação do tensor de energia-momento, $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$, neste espaço-tempo resulta nas seguintes equações:

$$\dot{B} + 4\frac{\dot{R}}{R} + 2\frac{\dot{\rho}}{\rho + p} = 0 \quad (5.7)$$

$$A' + 2\frac{p'}{\rho + p} = 0 \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{1}{R^2} = 0 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (5.10)$$

De acordo às equações (5.9) e (5.10) temos que $p = p(r, t)$.

Para reescrever as equações de Einstein de uma forma simplificada, multiplicamos a equação (5.3) pelo fator $R^2 R'$. Nessa nova equação substituímos o fator \dot{B} obtido da equação (5.4), resultando em

$$\frac{2m'(r, t)}{R^2 R'} = 8\pi G\rho \quad (5.11)$$

Agora multiplicamos a equação (5.5) pelo fator $R^2 \dot{R}$ e na equação resultante substituímos o fator A' obtido da equação (5.4), resultando em

$$\frac{2\dot{m}(r, t)}{R^2 \dot{R}} = -8\pi Gp \quad (5.12)$$

onde $m(r, t) = e^{-A} R \dot{R}^2 - e^{-B} R R'^2 + R - \frac{1}{3} \Lambda R^3$ é conhecida como a massa ativa gravitacional e gera o campo gravitacional.

No caso de matéria sem pressão, obtemos da equação (5.12)

$$\dot{m}(r, t) = 0 \Rightarrow m = m(r) \quad (5.13)$$

Nesse caso, da equação (5.8) obtemos $A = A(t)$ e fazendo a transformação

$$t' = \int e^{\frac{A(t)}{2}} dt \quad (5.14)$$

a qual leva a $A = 0$ no novo sistema de coordenadas.

Considerando $A = 0$ a equação (5.4) resulta $\partial_t \left(2e^{-\frac{B}{2}} R' \right) = 0$, a qual tem como solução

$$e^B = \frac{R'^2}{1 + f(r)} \quad (5.15)$$

onde $f(r)$ é uma função arbitrária e é conhecida como curvatura.

Neste caso a métrica toma a forma da métrica Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) [26, 27, 28]

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2}{1+f(r)} dr^2 - R^2(r,t) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (5.16)$$

Para que a métrica tenha a assinatura correta é necessário que a curvatura $f(r)$ cumpra $f(r) > -1$.

A curvatura está determinada por

$$f(r) = \dot{R}^2 - \frac{2m(r)}{R} - \frac{1}{3}\Lambda R^3 \quad (5.17)$$

Modelos com grandes inhomogeneidades, descritos por uma métrica de LTB, como o modelo da Bolha de Hubble, tem sido usado como uma alternativa para a expansão aparente do universo [62, 63, 64, 65].

A equação dinâmica para o modelo de LTB pode ser escrita como uma generalização da equação de Friedmann

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{2m(r)}{R^3} + \frac{f(r)}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (5.18)$$

e uma generalização da equação de aceleração

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{m(r)}{R^3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (5.19)$$

a qual é independente da curvatura como no caso de FRW.

Até aqui temos trabalhado em unidades onde $c = 1$. Para analisar a função $m(r)$ que aparece em (5.19) recobremos o fator c por um momento. A função $m(r)$ tem unidades de comprimento, de maneira que multiplicada pelo fator $\frac{c^2}{G}$ torna-se uma função massa, chamada massa ativa gravitacional, a qual é a responsável de gerar o campo gravitacional. Integrando a equação (5.11) para o caso em que $p = 0$, obtemos

$$\frac{c^2 m}{G} = 4\pi \int_{r_i}^{r_f} R^2 R' \rho dr \quad (5.20)$$

Agora consideremos a soma da massa das partículas que compõem o corpo gravitante. Para isso, suponhamos que a matéria ocupa uma esfera de volume V , de forma que

$$\frac{c^2 M}{G} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho dV = \int_{\mathbb{R}^3} \rho \sqrt{-g_3} d^3x = \int_{r_i}^{r_f} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{-g_3} dr d\theta d\varphi \quad (5.21)$$

Da parte espacial da métrica LTB obtemos $\sqrt{-g_3} = \frac{R^2 R' \sin \theta}{\sqrt{1+f(r)}}$, resultando

$$\frac{c^2 M}{G} = 4\pi \int_{r_i}^{r_f} \frac{R^2 R' \rho}{\sqrt{1+f(r)}} dr \quad (5.22)$$

Comparando (5.20) com (5.22), observamos que dependendo do sinal da curvatura, M pode ser maior, menor ou igual a m . Essa diferença de massa é conhecida como defeito de massa. Em um sistema ligado ($f < 0$), parte da energia das partículas que compõem o corpo se perde e essa perda de energia é responsável pelo defeito de massa. Este é o caso que nos interessa.

As equações de LTB se reduzem às equações de FRW se estabelecermos

$$R(r, t) = ra(t) \quad (5.23)$$

$$f(r) = -kr^2 \quad (5.24)$$

onde k é a curvatura espacial.

Para descrever a evolução de perturbações de densidade inhomogêneas, definimos o contraste de densidade dentro da perturbação

$$\delta(r, t) = \frac{\rho(r, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)} \quad (5.25)$$

onde $\rho(r, t)$ é a densidade dentro da perturbação e $\bar{\rho}(t)$ é a densidade de fundo em expansão.

A equação dinâmica para $\delta(r, t)$ pode ser deduzida da equação (5.7), que para um fluido sem pressão resulta

$$\dot{\rho} + 3h\rho = 0 \quad (5.26)$$

onde $h \equiv \frac{\dot{b}}{b}$ e $b \equiv (R^2 R')^{\frac{1}{2}}$, junto com a equação de continuidade para o fundo em expansão

$$\dot{\bar{\rho}} + 3H\bar{\rho} = 0 \quad (5.27)$$

na qual $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Tomando a derivada à equação (5.25) com respeito ao tempo, obtemos

$$\dot{\rho} = \dot{\bar{\rho}}(1 + \delta) + \bar{\rho}\dot{\delta} \quad (5.28)$$

a qual pode ser escrita como

$$\dot{\delta} = 3(H - h)(1 + \delta) \quad (5.29)$$

usando as equações (5.26) e (5.27).

Derivando a equação (5.29) com respeito ao tempo, resulta

$$\ddot{\delta} = 3(\dot{H} - \dot{h})(1 + \delta) + 3(H - h)\dot{\delta} \quad (5.30)$$

Usando a equação de Friedmann e a equação de aceleração podemos escrever

$$\dot{H} = \frac{\Lambda}{2} - \frac{3}{2}H^2 \quad (5.31)$$

e combinando as equações (5.3)-(5.6) chegamos a que

$$\dot{h} = 4\pi G\rho + \frac{2}{3R}\left(\frac{f}{R} + \frac{f'}{R'}\right) + \Lambda - 3h^2 \quad (5.32)$$

Substituindo a expressão (5.31) e (5.32) em (5.30) e fazendo um pouco de álgebra, obtemos

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\rho_0\delta(1 + \delta) - \frac{4}{3}\frac{\dot{\delta}^2}{1 + \delta} = \frac{\Lambda}{2} + \frac{2}{3}\left[\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{R}{R'}\right]^2(1 + \delta) \quad (5.33)$$

Para uma perturbação de densidade homogênea com perfil top-hat o raio areal é $R = ra$. O último termo do lado direito da equação (5.33) se anula, de maneira que esta equação se reduz à equação [20] no caso de um único fluido sem pressão.

A equação (5.33) generaliza a evolução de δ para perturbações esféricas com um perfil radial inicial arbitrário. No entanto, para o caso de matéria sem pressão, a solução desta equação pode ser obtida diretamente da equação (5.26) e (5.11), o qual é o que faremos no que segue.

Consideremos inicialmente um perfil de densidade radial expandindo-se com o fundo

$$R_i = ra_i \quad (5.34)$$

o qual está caracterizado por uma função independente do tempo $g(r)$

$$\rho_i(r) = \bar{\rho}_i \{1 + \delta_i(r)\} = \bar{\rho}_i g(r) \quad (5.35)$$

Como a equação (5.11) em LTB é independente do tempo, podemos estabelecer

$$4\pi G R_i^2 R_i' \rho_i(r) = 4\pi G R^2 R' \rho \quad (5.36)$$

Já que $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho} a^3$ e $\rho = \bar{\rho} \{1 + \delta\}$ obtemos

$$\delta(r, t) = a^3(t) \frac{g(r) r^2}{R^2 R'} - 1 \quad (5.37)$$

Definindo um raio areal adimensional

$$\tilde{R} = \frac{R}{r} \quad (5.38)$$

a equação (5.37) resulta

$$\delta(r, t) = a^3(t) \frac{g(r)}{\tilde{R}^2 [\tilde{R} + r\tilde{R}']} - 1 \quad (5.39)$$

o qual é, por suposto, a solução formal para a equação de evolução não-linear (5.33) com as condições iniciais dadas acima.

Antes de encontrar a evolução do contraste de densidade, nós necessitamos resolver as equações dinâmicas do fundo de FRW para $a(t)$ e as equações dinâmicas da perturbação de LTB para $\tilde{R}(r, t)$.

Soluções do modelo LTB para um perfil de densidade inicial dado

Consideramos inicialmente soluções do modelo LTB aplicados a uma perturbação de densidade inhomogênea com um perfil de densidade inicial embebido em um fundo Einstein-de Sitter e Λ CDM.

Fundo Einstein-de Sitter. O primeiro objetivo é estudar a evolução de uma perturbação de densidade inicial esfericamente simétrica em um universo dominado por matéria com um fundo Einstein-de Sitter no contexto da relatividade geral.

Para conhecer $a(t)$ resolvemos numericamente a equação de aceleração reescrita como

$$\frac{d^2 a}{d\tilde{t}^2} = -\frac{1}{2}\Omega_0 a^2 \quad (5.40)$$

com a mudança de variável $\tilde{t} = tH_0$.

A primeira condição inicial é especificada como

$$a(\tilde{t}_i) = a_i \quad (5.41)$$

A segunda condição inicial é fixada usando a equação de Friedmann como

$$\left(\frac{da}{d\tilde{t}}\right)_{\tilde{t}_i=0} = \{\Omega_0 a_i^{-1} - (\Omega_0 - 1)\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.42)$$

Para resolver $\tilde{R}(r, \tilde{t})$ nós assumimos que em um tempo inicial arbitrário $\tilde{t} = \tilde{t}_i$, o universo completo segue a expansão de fundo com $R(r, t_i) = ra(t_i)$, mas tem uma perturbação de densidade pequena inicial especificada por um perfil $g(r)$:

$$\rho(r, t_i) = \bar{\rho}(t_i) g(r) \quad (5.43)$$

onde $\bar{\rho}(t_i)$ é a densidade de fundo homogênea inicial.

Já que $m(r)$ é independente do tempo, esta pode ser calculada como:

$$m(r) = 4\pi G \bar{\rho}_i a^3 \int_0^r dr' r'^2 g(r') \quad (5.44)$$

Definindo

$$h(r) = \frac{3}{r^3} \int_0^r dr' r'^2 g(r') \quad (5.45)$$

podemos escrever

$$m(r) = \frac{1}{2}\Omega_0 H_0^2 r^3 h(r) \quad (5.46)$$

onde foi usado $\bar{\rho}_0 = a_i^3 \bar{\rho}_i$ e $\bar{\rho}_0 = \Omega_0 \frac{3H_0^2}{8\pi G}$.

Usando o tempo em unidades do parâmetro de Hubble hoje $\tilde{t} = tH_0$ e o raio areal em unidades do raio comóvel $\tilde{R} = \frac{R}{r}$ nós resolvemos a equação de aceleração

$$\frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial \tilde{t}^2} = -\frac{1}{2}\Omega_0 \tilde{R}^{-2} h(r) \quad (5.47)$$

para um dado valor de r e condições iniciais

$$\left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{t}}\right)_{\tilde{t}=0} = \sqrt{a_i^{-1}\Omega_0 + (1 - \Omega_0)} \quad (5.48)$$

e $\tilde{R}_i = a_i$.

Dada as condições iniciais, a evolução da perturbação de densidade inhomogênea é completamente determinada pelo seu perfil inicial. Como um exemplo deste método escolhemos um perfil de densidade gaussiano com uma largura dada σ , a qual caracteriza o tamanho comóvel da perturbação:

$$g(r) = 1 + \delta_i e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} \quad (5.49)$$

Começamos a evolução desde $a_i = 10^{-5}$ e escolhemos $\delta_i = 10^{-4.552}$, o qual resulta no colapso no presente ($a = 1$ quando $\tilde{t} = 0.667$) no centro da perturbação. As soluções exatas para as equações dinâmicas de LTB neste caso existem em uma forma paramétrica e as usamos para fazer um check-up do método numérico (ver apêndice A).

Na Fig.(5.1) mostramos a evolução temporal de $\tilde{R}(r, \tilde{t})$ para valores diferentes do raio comóvel r em unidades de σ . Nós podemos ver que camadas diferentes colapsam em tempos diferentes com a camada exterior colapsando depois. Portanto, não há nenhum cruzamento de camadas neste caso, como é esperado, já que o perfil de densidade decresce radialmente.

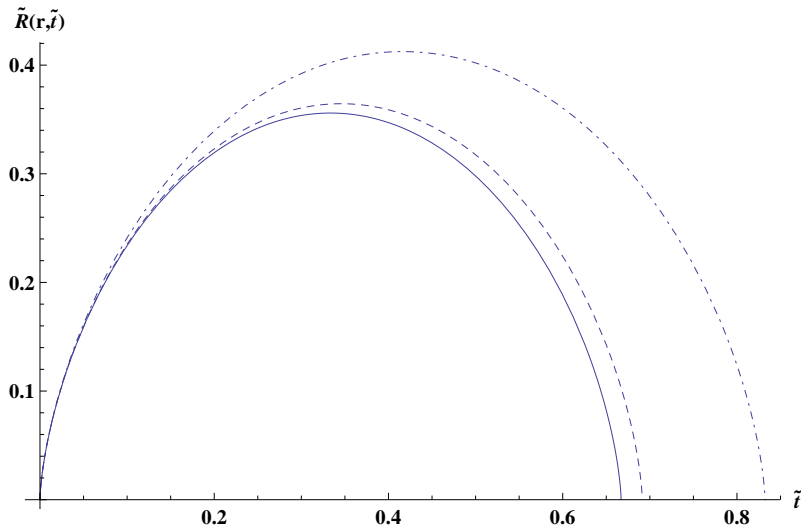


Figura 5.1: Raio areal $\tilde{R}(r, \tilde{t})$ como uma função do tempo \tilde{t} para $\frac{r}{\sigma} = 0$ (linha sólida), 0.2 (linha tracejada) e 0.5 (linha ponto-tracejada).

A presença de uma perturbação de densidade em o universo Einstein-de Sitter, mesmo quando está inicialmente localizada, leva finalmente ao universo inteiro ao colapso. Por exemplo, uma região com um raio comóvel de $r = 2\sigma$ colapsa a $\tilde{t} = 34.1$. Portanto, a taxa de expansão do universo neste raio é levemente diferente do fundo Einstein-de Sitter.

Na Fig.(5.2) mostramos os instantes iniciais da evolução do perfil do contraste de densidade $\delta(r, \tilde{t})$.

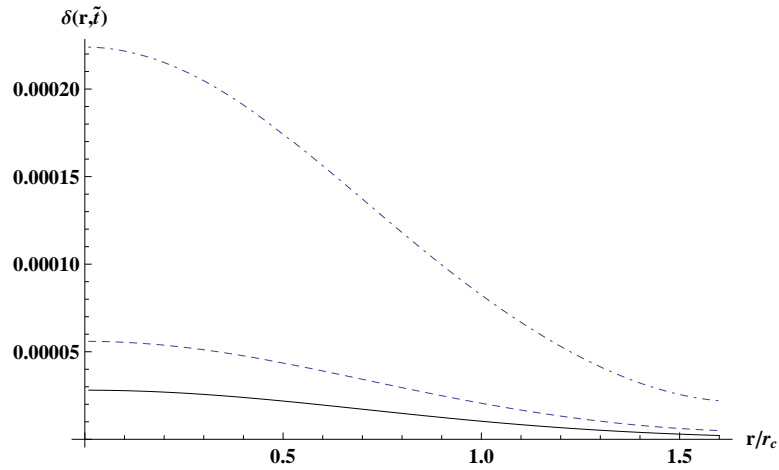


Figura 5.2: Contraste de densidade $\delta(r, \tilde{t})$ como uma função do raio comóvel em unidades de σ para o contraste de densidade inicial (linha sólida), contraste de densidade em $\tilde{t} = 10^{-7}$ (linha tracejada) e $\tilde{t} = 10^{-6}$ (linha ponto-tracejada).

No regime linear, a forma do perfil de densidade não muda significativamente. Para tempos próximos ao colapso do centro, o perfil de densidade se aproxima a um perfil gaussiano com larguras diferentes, como é mostrado na Fig.(5.3).

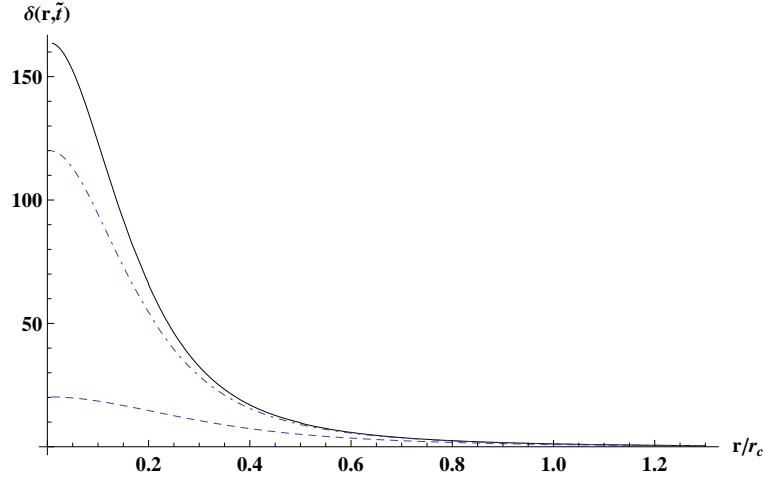


Figura 5.3: Contraste de densidade $\delta(r, \tilde{t})$ como uma função do raio comóvel em unidades de σ para $\tilde{t} = 0.5$ (linha tracejada), contraste de densidade em $\tilde{t} = 0.60$ (linha ponto-tracejada) e $\tilde{t} = 0.61$ (linha sólida).

Fundo Λ CDM. Agora procedemos a estudar a evolução de uma perturbação de densidade esférica e inhomogênea em um fundo com matéria e constante cosmológica, onde $\bar{\rho}(t) = \frac{\bar{\rho}_m^0}{a^3} + \rho_\Lambda$ e $\Omega_m^0 + \Omega_\Lambda^0 = 1$.

Como a constante cosmológica não é perturbada, apenas afeta o comportamento do contraste de densidade através da mudança da evolução de $a(t)$ e $\tilde{R}(r, \tilde{t})$.

Para o caso de fundo, resolvemos a equação de aceleração

$$\frac{d^2 a}{d\tilde{t}^2} = -\frac{1}{2}\Omega_m^0 a^{-2} + \Omega_\Lambda^0 \quad (5.50)$$

com uma condição inicial fixada como

$$a(\tilde{t}_i) = a_i \quad (5.51)$$

e segunda condição inicial especificada, usando a equação de Friedmann

$$\left(\frac{da}{d\tilde{t}}\right)_{\tilde{t}_i=0} = \left\{ \frac{\Omega_0}{a_i} + [1 - (\Omega_m^0 + \Omega_\Lambda^0)] + \Omega_\Lambda^0 a_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.52)$$

Nós resolvemos as equações de LTB com uma constante cosmológica assumindo que em um tempo inicial arbitrário $t_i = 0$, o universo completo segue a expansão de fundo com $R(r, t_i) = ra(t_i)$, mas tem uma perturbação de densidade pequena especificada por o perfil $g(r)$.

A função de massa neste caso resulta

$$m(r) = \frac{1}{2} H_0^2 \Omega_m^0 r^3 h(r) \quad (5.53)$$

Usando o tempo em unidades do tempo de Hubble no presente e raio areal em unidades de raio comóvel, resolvemos a equação

$$\frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial \tilde{t}^2} = -\frac{1}{2} \Omega_m^0 \tilde{R}^{-2} h(r) + \Omega_\Lambda^0 \tilde{R} \quad (5.54)$$

para um valor dado de r e condições iniciais

$$\left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{t}} \right)_{\tilde{t}_i=0} = \sqrt{\frac{\Omega_m^0}{a_i} + \Omega_\Lambda^0 a_i^2} \quad (5.55)$$

e $\tilde{R}_i = a_i$.

No que segue usaremos $\Omega_m^0 = 0.23$ e $\Omega_\Lambda^0 = 0.77$ em cujo caso $\tilde{t} = 1.037$ em o presente. A equação (5.54) também admite soluções paramétricas [32, 66]. No entanto, enquanto no caso Einstein-de Sitter o parâmetro livre é um número real, no caso Λ CDM este parâmetro é complexo [66]. Já que seu domínio no plano complexo pode ser somente determinado numericamente, a solução paramétrica neste caso são de interesse prático limitado. Por esta razão temos optado por resolver a equação (5.54) numericamente com a condição inicial dada acima.

Na Fig.(5.4) mostramos que a evolução temporal de $\tilde{R}(r, \tilde{t})$ tem o mesmo comportamento qualitativo como no caso Einstein-de Sitter, exceto que a partir de um determinado raio ao redor de $r = 0.7\sigma$ o efeito da constante cosmológica detém o colapso, já que esta atua como anti-gravidade, afetando a perturbação mediante a expansão do universo. Isto está em concordância com as análise recentes de [32], onde foi encontrado uma camada divisória que separa a região em expansão e de colapso em modelos gerais.

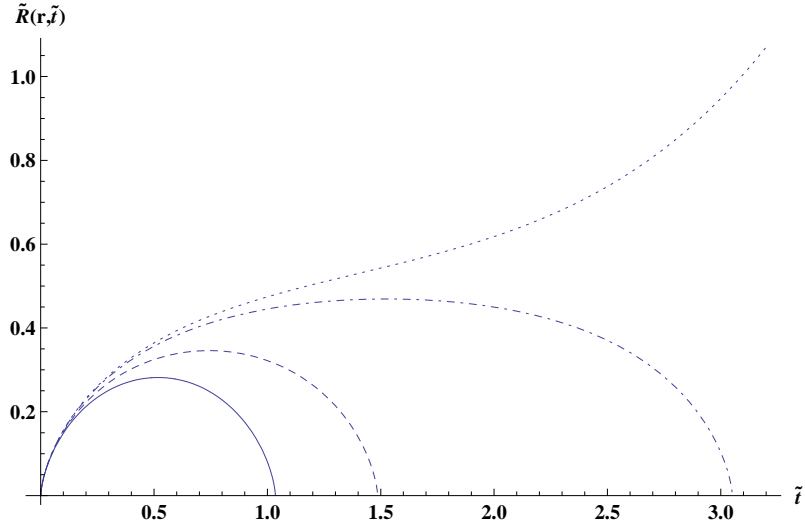


Figura 5.4: Raio areal $\tilde{R}(r, \tilde{t})$ como uma função do tempo \tilde{t} para $\frac{\tau}{\sigma} = 0.01$ (linha sólida), 0.5 (linha tracejada), 0.7 (linha ponto-tracejada) e 0.75 (linha pontilhada).

A evolução inicial de perturbações na matéria é mostrada na Fig.(5.5). De novo, mostramos o instante inicial da evolução do perfil do contraste de densidade $\delta(r, \tilde{t})$.

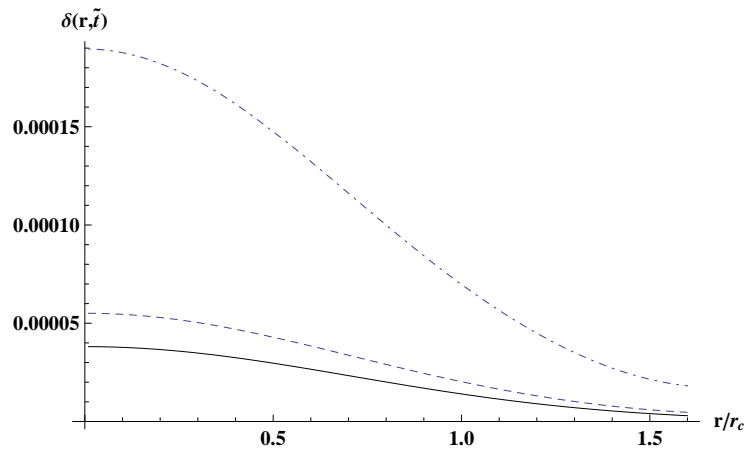


Figura 5.5: Contraste de densidade $\delta(r, \tilde{t})$ como uma função do raio comovel em unidades de σ para o contraste de densidade inicial (linha sólida), contraste de densidade em $\tilde{t} = 10^{-7}$ (linha tracejada) e $\tilde{t} = 10^{-6}$ (linha ponto-tracejada).

O perfil da perturbação evolui rapidamente para uma gaussiana no regime não-linear, como pode ser visto na Fig.(5.6).

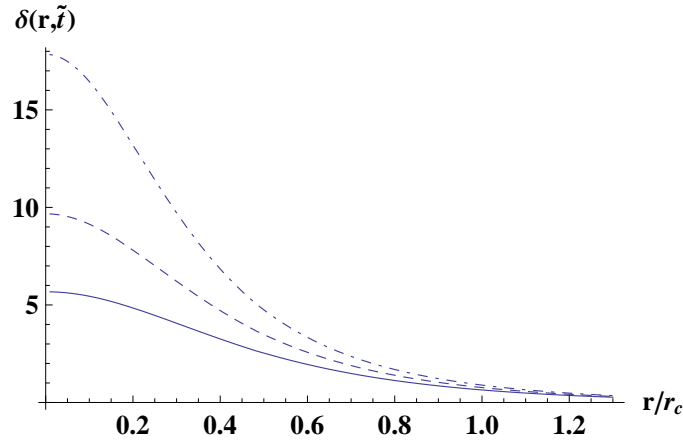


Figura 5.6: Contraste de densidade como uma função do raio comóvel em unidades de σ em $\tilde{t} = 0.5$ (linha sólida), $\tilde{t} = 0.6$ (linha tracejada) e $\tilde{t} = 0.7$ (linha ponto-tracejada).

Comparando a Fig.(5.3) com a Fig.(5.6) podemos observar que para um valor fixo no raio comóvel, o contraste de densidade no caso Λ CMB atinge valores menores do que o caso Einstein-de Sitter como consequência da presença da constante cosmológica, que atua como anti-gravidade, gerando uma expansão acelerada do universo, a qual inibe o crescimento da perturbação.

5.2 O caso com pressão

No caso anterior, as perturbações de densidade com um perfil de densidade foram assumidas sem pressão, permitindo empregar o modelo LTB para analisar a evolução da perturbação. Se agora relaxamos essa restrição e consideramos uma perturbação de densidade que exerça pressão, o modelo adequado para fazer a descrição da evolução da perturbação é o modelo de Lemaître [26]. Neste caso, não há uma solução fechada ao problema, mas é possível explorar algum método numérico que nos permita conhecer o comportamento das funções embora seja de uma forma aproximada. Esse é o fim do seguinte método, o qual segue a sugestão de [67], mas aplicada a uma perturbação de densidade.

As equações dinâmicas do modelo de Lemaître são (5.11) e (5.12), enquanto as equações de hidrodinâmica são as (5.7)-(5.10), complementadas com a equação de estado $p(r, t) = \omega\rho(r, t)$. O modelo é resolvido determinando as funções $A(r, t)$, $B(r, t)$, $m(r, t)$, $R(r, t)$ e $\rho(r, t)$.

Para tal fim, definimos todas as funções sobre uma tri-superfície $t = t_i$. Depois, fazendo uso de suas derivadas com respeito ao tempo geramos sua evolução temporal.

Da equação (5.8) obtemos a função

$$A(r, t) = A^c(t) - 2\frac{\omega}{1+\omega} \ln \frac{\rho(r, t)}{\rho^c(t)} \quad (5.56)$$

onde c denota a função avaliada no centro da perturbação $r = 0$. Tomamos $A^c(t) = 0$, de tal modo que um observador no centro da perturbação medirá o tempo próprio. A evolução desta função estará determinada uma vez que se gera a evolução das outras funções.

Integrando a equação (5.11) resulta

$$m(r, t) = 4\pi G \int_0^r R(r', t)^2 \frac{\partial R(r', t)}{\partial r'} \rho(r', t) dr' \quad (5.57)$$

Calculando $m(r, t)$ na tri-superfície $t = t_i$ obtemos

$$m_i(r) = 4\pi G \int_0^r R_i(r')^2 \frac{\partial R_i(r')}{\partial r'} \rho_i(r') dr' \quad (5.58)$$

Usando a definição para a massa ativa gravitacional no caso sem constante cosmológica, encontramos

$$\frac{\partial R(r, t)}{\partial t} = e^{\frac{A(r, t)}{2}} \left\{ \frac{2m(r, t)}{R(r, t)} + f(r, t) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.59)$$

onde $f(r)$ é a curvatura, a qual depende do tempo e é definida como $f(r, t) = e^{-B(r, t)} \left\{ \frac{\partial R(r, t)}{\partial r} \right\}^2 - 1$.

Fixamos a curvatura na tri-superfície inicial $t = t_i$. Para encontrarmos uma expressão para a curvatura nesse instante, usamos o modelo de LTB. Como a equação (5.17) determina a curvatura e não depende do tempo, podemos escolhê-la em qualquer instante, particularmente em $t = t_i$, tal que

$$f(r) = H_i^2 R_i^2 - \frac{2m(r)}{R_i} \quad (5.60)$$

Considerando a condição inicial $R_i = ra_i$ e a expressão (5.46) para $m(r)$, encontramos a curvatura para o instante $t = t_i$ no modelo de Lemaître

$$f_i(r) = H_i^2 r^2 a_i^2 \{1 - \Omega_i h(r)\} \quad (5.61)$$

Portanto, a função B na tri-superfície $t = t_i$ está dada por

$$B_i(r) = \ln \frac{\left\{ \frac{\partial R_i(r)}{\partial r} \right\}^2}{1 + f_i(r)} \quad (5.62)$$

Combinando a equação (5.8) com a equação (5.4) nos permite obter

$$\frac{\partial B(r, t)}{\partial t} = 2 \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial R(r, t)}{\partial t} \right]}{\frac{\partial R(r, t)}{\partial r}} + \frac{2\omega}{(1 + \omega)} \frac{\frac{\partial R(r, t)}{\partial t}}{\frac{\partial R(r, t)}{\partial r}} \frac{\frac{\partial \rho(r, t)}{\partial r}}{\rho(r, t)} \quad (5.63)$$

Substituindo (5.63) em (5.7) obtemos

$$\frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} = -\omega \frac{\frac{\partial R(r, t)}{\partial t}}{\frac{\partial R(r, t)}{\partial r}} \frac{\partial \rho(r, t)}{\partial r} - (1 + \omega) \rho(r, t) \left\{ 2 \frac{\frac{\partial R(r, t)}{\partial t}}{R(r, t)} + \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial R(r, t)}{\partial t} \right]}{\frac{\partial R(r, t)}{\partial r}} \right\} \quad (5.64)$$

O perfil de densidade inicial para a perturbação será dada por uma gaussiana, de maneira que

$$\rho_i(r) = \bar{\rho}_i \left\{ 1 + \delta_i e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} \right\} \quad (5.65)$$

Por outro lado, a densidade da perturbação no centro é igual a

$$\rho^c(t) = \bar{\rho}(t) \{1 + \delta^c(t)\} \quad (5.66)$$

onde $\delta^c(t)$ é o contraste de densidade no centro da perturbação.

Agora, para gerar a evolução das funções do modelo de Lemaître, fazemos uma foliação do espaço-tempo em tri-superfícies separadas no tempo por um intervalo Δt e definimos as funções B , m , R e ρ sobre a tri-superfície inicial, a partir da qual geramos a evolução para as seguintes tri-superfícies.

Evolução das funções para a tri-superfície $t_1 = \Delta t$

A evolução de R é dado por

$$R_1(r, t) = R_i(r) + \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i \Delta t = r a_i + r H_i a_i \Delta t \quad (5.67)$$

onde \dot{R}_i está determinado pela condição inicial R_i e está dada por $\dot{R}_i = r H_i a_i$.

Para o caso de ρ temos

$$\rho_1(r, t) = \rho_i(r) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_i \Delta t = \rho_i(r) - \left\{ \omega r H_i \frac{\partial \rho_i(r)}{\partial r} + 3(1 + \omega) H_i \rho_i \right\} \Delta t \quad (5.68)$$

na qual $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_i$ foi determinada pela expressão (5.64).

De igual forma m é dada por

$$m_1(r, t) = m_i(r) + \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)_i \Delta t = m_i(r) - 4\pi G \omega r^3 a_i^3 H_i \rho_i(r) \Delta t \quad (5.69)$$

onde $\left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)_i$ é estabelecida mediante (5.12)

No caso de B temos que

$$B_1(r, t) = B_i(r) + \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_i \Delta t = B_i(r) + 2 \left\{ H_i + \frac{\omega}{1 + \omega} \frac{\partial \rho_i(r)}{\partial r} r H_i \right\} \Delta t \quad (5.70)$$

onde $\left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_i$ foi obtida usando (5.63).

Desta forma, a função A é determinada como

$$A_1(r, t) = -2 \frac{\omega}{1 + \omega} \ln \frac{\rho_1(r, t)}{\rho_1^c(t)} \quad (5.71)$$

onde $\rho_1^c(t) = \bar{\rho}_i(1 + \delta_i) - 3(1 + \omega)(1 + \delta_i) H_i \bar{\rho}_i \Delta t$.

Evolução das funções para a tri-superfície $t_2 = 2\Delta t$

Como no primeiro caso, a evolução de R é

$$R_2(r, t) = R_1(r, t) + \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_1 \Delta t = R_1(r, t) + e^{\frac{A_1(r, t)}{2}} \left\{ \frac{2m_1(r, t)}{R_1(r, t)} + f_1(r, t) \right\}^{\frac{1}{2}} \Delta t \quad (5.72)$$

onde $f_1(r, t) = e^{-B_1(r, t)} \left\{ \frac{\partial R_1(r, t)}{\partial r} \right\}^2 - 1$.

A evolução de ρ é dada como

$$\rho_2(r, t) = \rho_1(r, t) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1 \Delta t \quad (5.73)$$

na qual $\left(\frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} \right)_1 = -\frac{\left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_1}{\frac{\partial R_1(r, t)}{\partial r}} \frac{\partial \rho_1(r, t)}{\partial r} - (1 + \omega) \rho_1 \left\{ 2 \frac{\left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_1}{R_1(r, t)} + \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_1 \right]}{\frac{\partial R_1(r, t)}{\partial r}} \right\}$.

A evolução de m é conseguida como

$$m_2(r, t) = m_1(r, t) + \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right)_1 \Delta t = m_1(r, t) - 4\pi G\omega R_1^2(r, t) \rho_1(r, t) \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_1 \Delta t \quad (5.74)$$

De igual forma, a função B é dada por

$$B_2(r, t) = B_1(r, t) + \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_1 \Delta t \quad (5.75)$$

na qual $\left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_1 = 2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_1 \right] + 2 \frac{\omega}{1+\omega} \frac{\left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_1}{\frac{\partial R_1(r, t)}{\partial r}} \frac{\partial \rho_1(r, t)}{\rho_1(r, t)}$.

Com as funções anteriores, a função A é determinada por

$$A_2(r, t) = -2 \frac{\omega}{1+\omega} \ln \frac{\rho_2(r, t)}{\rho_2^c(t)} \quad (5.76)$$

onde $\rho_2^c(t) = \rho_1(0, t) + \left(\frac{\partial \rho(0, t)}{\partial t} \right)_1 \Delta t$.

A partir deste instante, a evolução das funções para as outras tri-superfícies é gerada de igual modo que nas duas iterações anteriores, possibilitando deste modo a descrição da evolução da perturbação de densidade. Este procedimento representa uma primeira tentativa de decrever tais perturbações com pressão. O algoritmo não está livre de problemas, e melhoras estão sendo realizadas.

Conclusões

O modelo do colapso esférico é uma ferramenta bem-sucedida para entender a formação de estruturas. Contudo, este modelo faz a suposição de homogeneidade na distribuição de massa da perturbação. Mas como sabemos, no universo, tanto as estruturas astrofísicas (como estrelas) e cosmológicas (como galáxias), têm uma maior concentração de massa no interior do que na sua superfície, variando de adentro para fora de maneira gradual. A consideração desta característica nas estruturas cósmicas foi a motivação física que nos levou a implementar uma generalização do modelo do colapso esférico top-hat, incluindo um perfil inicial geral para a perturbação de densidade. Neste contexto, calculamos a evolução não-linear das perturbações de densidade, usando um perfil gaussiano simples com desvio padrão σ . Mostramos que as perturbações de densidade evoluem de modo diferente em um fundo Einstein-de Sitter e Λ CDM. No primeiro caso, cada uma das camadas da perturbação colapsa em momentos diferentes, colapsando primeiro as camadas mais próximas ao centro da perturbação e depois as mais afastadas. Este comportamento deve-se a que a expansão do universo domina mais sobre camadas de menor densidade, retardando seu colapso com respeito às de maior densidade. Por outro lado, enquanto a perturbação de densidade evolui no tempo, o perfil de densidade inicial gaussiano se mantém, mas sua largura diminui com o decorrer do tempo. No último caso, observa-se um comportamento qualitativo igual ao primeiro, com a diferença que, para iguais instantes de tempo o contraste de densidade atinge valores menores ao longo do raio comóvel, além da existência de uma camada divisória entre uma região de expansão e contração dentro da perturbação. Isso é devido a que a constante cosmológica atua como anti-gravidade, afetando o crescimento da perturbação por meio da expansão acelerada do universo, de modo que a expansão do universo exerce maior efeito sobre o crescimento de cada camada, mesmo chegando a deter o colapso de camadas abaixo de uma densidade crítica. Em ambos casos, a existência da perturbação afeta levemente a evolução do fundo com respeito à evolução que esta seguiria sem a presença da perturbação de densidade. O uso de um modelo de colapso esférico com um perfil de densidade radial indica que camadas mais próximas ao centro colapsam primeiro que as mais afastadas. Tal comportamento na perturbação de densidade

nos leva a perguntar como determinar o valor da quantidade δ_c , de tanta importância para o formalismo de Press-Schechter. Segundo a definição da quantidade $\delta_c(z)$, o qual é o contraste de densidade da teoria linear com uma condição inicial tal que o colapso não-linear acontece para um desvio para o vermelho z , em particular para este trabalho em $z = 0$, notamos que apenas o centro da perturbação colapsa em $z = 0$, por tanto todas as outras capas que colapsam em tempos posteriores são excluídas da definição de δ_c , levandonos a concluir que seu valor em princípio depende apenas da cosmologia de fundo, sendo independente do perfil de densidade. Nesse caso, deixaria de introduzir alguma modificação no formalismo de Press-Schechter.

Apêndice A

Soluções Paramétricas

Nós incluímos aqui as soluções paramétricas exatas da equação (5.18) com e sem constante cosmológica .

Caso Einstein-de Sitter. Quando $\Lambda = 0$ a equação (5.18) tem como solução [61]:

$$R(\eta, t) = \frac{m(r)}{|f(r)|} (1 - \cos \eta) \quad (\text{A.1})$$

$$t(\eta, r) = t_0(r) + \frac{m(r)}{|f(r)|^{\frac{3}{2}}} (\eta - \sin \eta) \quad (\text{A.2})$$

onde $\eta \in [0, 2\pi]$ e $f(r)$ é a curvatura.

Caso Λ CDM. Quando $\Lambda \neq 0$ a solução para a equação (5.18) está dada em termos das funções Weierstrass \wp , σ e ζ , definidas pelos invariantes g_2 e g_3 :

$$g_2(r) = 12\alpha^2(r) \quad (\text{A.3})$$

$$g_3(r) = -8\alpha^3(r) - \frac{\Lambda}{3} \quad (\text{A.4})$$

nos quais $\alpha(r) = \frac{f(r)}{3\{4m(r)\}^{\frac{2}{3}}}$. A solução está dada por [66]

$$R(\eta, r) = \frac{\left\{ \frac{m(r)}{2} \right\}^{\frac{1}{3}}}{\wp(\eta) - \alpha(r)} \quad (\text{A.5})$$

$$t(\eta, r) = t_0(r) + \frac{1}{\wp'(x)} \left[\log \left\{ \frac{\sigma(x - \eta)}{\sigma(x + \eta)} \right\} + 2\eta\zeta(r) - F(\eta_0) \right] \quad (\text{A.6})$$

onde $F(\eta_0)$ é uma constante arbitrária e $x \equiv \wp^{-1}(\alpha)$. O parâmetro η é em geral um número complexo.

Apêndice B

Tensores

Aqui mostramos a definição dos tensores da relatividad general que foram usados ao longo deste trabalho.

O elemento de linha da métrica $g_{\mu\nu}$ está dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{B.1})$$

na qual está se usando uma métrica com assignatura $(+ - - -)$.

Podemos obter para qualquer métrica $g_{\mu\nu}$ as componentes da conexão

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{g^{\alpha\beta}}{2} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \quad (\text{B.2})$$

onde vírgula implica uma derivada com respeito às coordenadas x^μ .

Com a conexão podemos calcular a derivada covariante de um tensor $T^{\mu\nu}$ como

$$\nabla_\mu T^{\nu\mu} = T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + T^{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\nu} + T^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\alpha\nu} \quad (\text{B.3})$$

A partir de $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ podemos calcular a equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (\text{B.4})$$

onde τ é o tempo proprio que parametriza a geodésica.

O tensor de Riemann é obtido a partir da conexão como

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu} \quad (\text{B.5})$$

Contraindo o primeiro e terceiro índice do tensor de Riemann se define o tensor de Ricci

$$R_{\beta\nu} \equiv R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu} \quad (\text{B.6})$$

Similarmente o tensor de Ricci é definido como a contração do tensor de Ricci com a métrica

$$R \equiv g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} \quad (\text{B.7})$$

As equações de Einstein são

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (\text{B.8})$$

onde $G_{\mu\nu}$ é conhecido como o tensor de Einstein e está definido como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (\text{B.9})$$

O tensor de Einstein satisfaz a identidade

$$\nabla_{\mu} G^{\nu\mu} = 0 \quad (\text{B.10})$$

conhecida como identidade de Bianchi.

Referências Bibliográficas

- [1] <http://www.darkenergysurvey.org>
- [2] J.A.Tyson [LSST Collaboration], Large Synoptic Survey Telescope: Overview, Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng. 4836, 10 (2002) [arXiv:astro-ph/0302102].
- [3] <http://sci.esa.int>.
- [4] <http://deep.berkeley.edu>
- [5] J.M.Bardeen, Gauge Invariant Cosmological Perturbations, Phys. Rev. D 22, 1882 (1980).
- [6] H.Kodama and M.Sasaki, Prog. Theor. Phys. Suppl. , 78 (1984) 1.
- [7] E.Gunn and J.R.I.Gott, On the infall of matter into cluster of galaxies and some effects on their evolution, Astrophys. J. 176, 1 (1972).
- [8] T.Padmanabhan. *Structure Formation in the Universe*. Cambridge University Press (1993).
- [9] P.Fosalba and E.Gaztanaga, Cosmological Perturbation Theory and the Spherical Collapse model: Part I. Gaussian initial conditions, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 301, 503 (1998) [arXiv:astro-ph/9712095].
- [10] W.H.Press and P.Schechter, Formation of galaxies and clusters of galaxies by selfsimilar gravitational condensation, Astrophys. J. 187, 425 (1974).
- [11] M.C.Martino, H.F.Stabenau and R.K.Sheth, Spherical Collapse and Modified Gravity, Phys. Rev. D 79, 084013 (2009) [arXiv:0812.0200 [astro-ph]].
- [12] F.Schmidt, M.V.Lima, H.Oyaizu and W.Hu, Non-linear Evolution of f(R) Cosmologies III: Halo Statistics, Phys. Rev. D 79, 083518 (2009) [arXiv:0812.0545 [astro-ph]].

- [13] F.Schmidt, W.Hu and M.Lima, Spherical Collapse and the Halo Model in Braneworld Gravity, *Phys. Rev. D* 81, 063005 (2010) [arXiv:0911.5178 [astro-ph.CO]].
- [14] D.F.Mota and C. van de Bruck, *Astron. Astrophys.* , 421 (2004) 71.
- [15] N.J.Nunes and D.F.Mota, Structure Formation in Inhomogeneous Dark Energy Models, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 368, 751 (2006) [arXiv:astro-ph/0409481].
- [16] N.J.Nunes, A.C. da Silva and N.Aghanim, *Astron. Astroph.*, 450 (2006) 899
- [17] C.Horellou and J.Berge, Dark energy and the evolution of spherical overdensities, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 360, 1393 (2005) [arXiv:astro-ph/0504465].
- [18] M.Manera and D.F.Mota, Cluster number counts dependence on dark energy inhomogeneities and coupling to dark matter, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 371, 1373 (2006) [arXiv:astro-ph/0504519].
- [19] B.M.Schaefer and K.Koyama, Spherical collapse in modified gravity with the Birkhoff-theorem, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 385, 411 (2008) [arXiv:0711.3129 [astro-ph]].
- [20] L.R.Abramo, R.C.Batista, L.Liberato and R.Rosenfeld, Structure formation in the presence of dark energy perturbations, *JCAP* 0711, 012 (2007) [arXiv:0707.2882 [astro-ph]].
- [21] L.R.Abramo, R.C.Batista, L.Liberato and R.Rosenfeld, Physical approximations for the nonlinear evolution of perturbations in inhomogeneous dark energy scenarios, *Phys. Rev. D* 79, 023516 (2009) [arXiv:0806.3461 [astro-ph]].
- [22] S.Basilakos, J.C.Bueno Sanchez and L.Perivolaropoulos, The spherical collapse model and cluster formation beyond the Lambda cosmology: Indications for a clustered dark energy?, *Phys. Rev. D* 80, 043530 (2009) [arXiv:0908.1333 [astro-ph.CO]].
- [23] F.Pace, J.C.Waizmann and M.Bartelmann, Spherical collapse model in dark energy cosmologies, arXiv:1005.0233 [astro-ph.CO].
- [24] N.Wintergerst and V.Pettorino, Clarifying spherical collapse in coupled dark energy cosmologies, *Phys. Rev. D* 82, 103516 (2010) [arXiv:1005.1278 [astro-ph.CO]].
- [25] Ph.Brax, R.Rosenfeld and D.A.Steer, Spherical Collapse in Chameleon Models, *JCAP* 1008, 033 (2010) [arXiv:1005.2051 [astro-ph.CO]].

- [26] G.Lemaitre, The expanding universe, *Gen. Rel. Grav.* 29, 641 (1997)
- [27] R.C.Tolman, Effect of inhomogeneity on cosmological models, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 20, 169 (1934).
- [28] H.Bondi, Spherically symmetrical models in general relativity, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 107, 410 (1947).
- [29] S. Perlmutter et al. [Supernova Cosmology Project Collaboration], Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae, *Astrophys. J.* 517, 565 (1999) [arXiv:astro-ph/9812133].
- [30] A. G. Riess et al. [Supernova Search Team Collaboration], Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, *Astron. J.* 116, 1009 (1998) [arXiv:astro-ph/9805201]
- [31] J.R.Bond, S.Cole, G.Efstathiou and N.Kaiser, Excursion set mass functions for hierarchical Gaussian fluctuations, *Astrophys. J.* 379, 440 (1991).
- [32] J.P.Mimoso, M.Le Delliou and F.C.Mena, Separating expansion from contraction in spherically symmetric models with a perfect-fluid: Generalization of the Tolman-Oppenheimer-Volkoff condition and application to models with a cosmological constant, *Phys. Rev. D* 81, 123514 (2010) [arXiv:0910.5755 [gr-qc]].
- [33] H.Alnes, M.Amarzguioui and O.Gron, An inhomogeneous alternative to dark energy?, *Phys. Rev. D* 73, 083519 (2006) [arXiv:astro-ph/0512006].
- [34] K.Tomita, A Local Void and the Accelerating Universe, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 326, 287 (2001) [arXiv:astro-ph/0011484].
- [35] T. S. Pereira, R. Rosenfeld and A. Sanoja, Evolution of spherical non-uniform perturbations in the universe, *EPL*, 92 (2010) 39001.
- [36] <http://map.gsfc.nasa.gov/>
- [37] The COBE mission: Its design and performance two years after launch, *Astrophys. J.* 397, 420 (1992).
- [38] M.S.Turner, Inflation after COBE: Lectures on inflationary cosmology, arXiv:astro-ph/9304012.
- [39] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press (2005).
- [40] J.B.Hartle. *Gravity*. Addison Wesley (2003).

- [41] E. W. Kolb, and M. Turner. *The Early Universe*. Addison-Wesley Publishing Company (1990).
- [42] A.D.Linde, Chaotic Inflation, Phys. Lett. B 129 (1983) 177.
- [43] A.H.Guth, The Inflationary Universe: A Possible Solution To The Horizon And Flatness Problems, Phys. Rev. D 23, 347 (1981).
- [44] A.D.Linde, A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems, Phys. Lett. B 108, 389 (1982).
- [45] A.Albrecht and P.J.Steinhardt, Cosmology For Grand Unified Theories With Radiatively Induced Symmetry Breaking, Phys. Rev. Lett. 48, 1220 (1982).
- [46] A.Albrecht, P.J.Steinhardt, M.S.Turner and F.Wilczek, Reheating An Inflationary Universe, Phys. Rev. Lett. 48, 1437 (1982).
- [47] L.F.Abbott, E.Farhi and M.B.Wise, Particle Production In The New Inflationary Cosmology, Phys. Lett. B 117, 29 (1982).
- [48] A.D.Dolgov and A.D.Linde, Baryon Asymmetry In Inflationary Universe, Phys. Lett. B 116, 329 (1982).
- [49] A.D.Linde. *Particle Physics and Inflationary Cosmology*. Harwood, Chur, Switzerland (1990).
- [50] S.W.Hawking, The Development Of Irregularities In A Single Bubble Inflationary Universe, Phys. Lett. B 115, 295 (1982).
- [51] A.H.Guth and S.Y.Pi, Fluctuations In The New Inflationary Universe, Phys. Rev. Lett. 49, 1110 (1982).
- [52] J.M.Bardeen, P.J.Steinhardt and M.S.Turner, Spontaneous Creation Of Almost Scale - Free Density Perturbations In An Inflationary Universe, Phys. Rev. D 28, 679 (1983).
- [53] R. K. Sachs and A. M. Wolfe, Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background, Astrophys. J. 147, 73 (1967)
- [54] V.F.Mukhanov, H.A. Feldman and R.H. Brandenberger. *Theory of Cosmological Perturbations*. North-Holland (1992).
- [55] J.Frieman, M.Turner and D.Huterer, Dark Energy and the Accelerating Universe, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 46, 385 (2008) [arXiv:0803.0982 [astro-ph]].

- [56] G.R.Dvali, G.Gabadadze and M.Porrati, 4D gravity on a brane in 5D Minkowski space, Phys. Lett. B 485, 208 (2000) [arXiv:hep-th/0005016].
- [57] S.M.Carroll, V.Duvvuri, M.Trodden and M.S.Turner, Is Cosmic Speed-Up Due to New Gravitational Physics?, Phys. Rev. D 70, 043528 (2004) [arXiv:astro-ph/0306438].
- [58] T.P.Sotiriou and V.Faraoni, f(R) Theories Of Gravity, Rev. Mod. Phys. 82, 451 (2010) [arXiv:0805.1726 [gr-qc]].
- [59] A.De Felice and S.Tsujikawa, f(R) theories, Living Rev. Rel. 13, 3 (2010) [arXiv:1002.4928 [gr-qc]].
- [60] D.Lynden-Bell, Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 136 (1967) 101.
- [61] Jerzy Plebanski and Andrzej Krasinski. *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. Cambridge University Press (2006)
- [62] E.W.Kolb, S.Matarrese and A.Riotto, On cosmic acceleration without dark energy, New J. Phys. 8, 322 (2006) [arXiv:astro-ph/0506534].
- [63] K.Enqvist, Lemaitre-Tolman-Bondi model and accelerating expansion, Gen. Rel. Grav. 40, 451 (2008) [arXiv:0709.2044 [astro-ph]].
- [64] J.Garcia-Bellido and T.Haugboelle, Confronting Lemaitre-Tolman-Bondi models with Observational Cosmology, JCAP 0804, 003 (2008) [arXiv:0802.1523 [astro-ph]].
- [65] A.Paranjape and T.P.Singh, Structure Formation, Backreaction and Weak Gravitational Fields, JCAP 0803, 023 (2008) [arXiv:0801.1546 [astro-ph]].
- [66] G. C. Omer, Jr. Spherically Symmetric Distributions Of Matter Without Pressure, PNAS 53, 1 (1965)
- [67] A.A.H.Alfedeel and C.Hellaby, The Lemaitre Model and the Generalisation of the Cosmic Mass, Gen. Rel. Grav. 42, 1935 (2010) [arXiv:0906.2343 [gr-qc]].