RESSALVA

Atendendo solicitação do autor, o texto completo desta dissertação será disponibilizado somente a partir de 28/02/2019.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO

Hans Muller Junho de Mendonça

PROPRIEDADES DE ESCALA E CASCATAS DE BIFURCAÇÕES EM MAPAS UNIDIMENSIONAIS DISCRETOS

Rio Claro - SP, Fevereiro de 2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO

Hans Muller Junho de Mendonça

PROPRIEDADES DE ESCALA E CASCATAS DE BIFURCAÇÕES EM MAPAS UNIDIMENSIONAIS DISCRETOS

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Física pelo Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, área de Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira

Rio Claro - SP, Fevereiro de 2018

517.39 Mendonça, Hans Muller Junho de
M539p Propriedades de escala e cascatas de bifurcações em mapas unidimensionais discretos / Hans Muller Junho de Mendonça. - Rio Claro, 2018
65 f. : il., figs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Juliano A. de Oliveira

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Mapas unidimensionais. 3. Expoentes críticos. 4. Leis de escala. 5. Crises de fronteiras. 6. Espaço de parâmetros. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP - Ana Paula Santulo C. de Medeiros / CRB 8/7336

Hans Muller Junho de Mendonça

PROPRIEDADES DE ESCALA E CASCATAS DE BIFURCAÇÕES EM MAPAS UNIDIMENSIONAIS DISCRETOS

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Física pelo Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, área de Física Aplicada.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira (Orientador)
UNESP - Câmpus de São João da Boa Vista

Prof. Dr. Edson Denis Leonel
UNESP - Câmpus de Rio Claro

Prof. Dr. Tiago Pereira da Silva
ICMC-USP - Câmpus de São Carlos

Rio Claro - SP, Fevereiro de 2018

RESULTADO: APROVADO

A minha família,
em especial
aos meus sobrinhos,
Maria e João, *dedico*.

Agradecimentos

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho direta ou indiretamente. O apoio e incentivo de todos foram muito importantes para o meu crescimento pessoal ou acadêmico durante esses anos de estudos neste curso de Pós-Graduação.

Agradeço,

- aos meus pais Maria e Sebastião e meu irmão Rodolfo por tudo que me ensinaram durante o decorrer da minha vida e por sempre darem forças para continuar meus estudos;

- aos professores que passaram em minha formação, desde o pré, até o presente momento. Sem vocês, nada disso teria acontecido. Meu muito obrigado;

- ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira, não só por todo o apoio e discussões nesta dissertação, mas também pelas conversas produtivas e dicas para uma vida e carreira acadêmica melhor;

- aos pesquisadores e amigos do Grupo de Estudos de Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear, em especial ao líder Prof. Dr. Edson D. Leonel, Dr. Diogo R. da Costa, Dr. André L. P. Livorati e ao MS. Matheus P. Silva;

- aos Professores Joelson e Flávio, que se tornaram grandes amigos, por todas as conversas e risadas durante as viagens para Rio Claro e ajudas necessárias durante esses anos de Pós-Graduação;

- aos amigos conhecidos durante meu período de moradia em Rio Claro - SP, em especial ao time de vôlei da UNESP e aos moradores e ex-moradores da república Mansão, muito obrigado pelos momentos que vivemos;

- a UNESP-Câmpus de Rio Claro, pela oportunidade de estudar e adquirir grandes conhecimentos nesta instituição;

- a Fundação de Amparo à Pesquisa do estado de São Paulo - FAPESP, pelo auxílio financeiro ao trabalho, cujo número de processo é 2015/22062-3, proporcionando dedicação exclusiva ao mesmo.

Resumo

Neste trabalho estudamos o decaimento das órbitas para os pontos fixos em bifurcações distintas em mapeamentos unidimensionais não lineares discretos. Consideramos o mapa Gauss, analisamos o diagrama de órbitas e estudamos o decaimento das trajetórias para o ponto de equilíbrio nas bifurcações tangente e de duplicação de período. Encontramos analítica e numericamente o conjunto de expoentes críticos que descrevem propriedades de escala nas bifurcações e próximos delas. Estes expoentes caracterizam o tipo de bifurcação do problema. Estudamos, também, eventos chamados crises de fronteiras, que ocorrem a partir de determinado valor do parâmetro de controle ν. Estendemos nossos estudos considerando o mapa Hassell e introduzimos uma perturbação no problema. Assim como no mapa Gauss, analisamos nestes sistemas o diagrama de órbitas, os decaimentos das trajetórias para os pontos fixos nas bifurcações transcríticas e investigamos analítica e numericamente para determinar os expoentes críticos destas bifurcações. Com o intuito de investigar os efeitos da perturbação paramétrica introduzida ao mapa Hassell, construímos e analisamos as trajetórias no espaço de parâmetros. Utilizamos, como ferramentas, as órbitas superestáveis e extremas. Nas duas classes de mapas (Gauss e Hassell), caracterizamos o caos via expoentes de Lyapunov. Mostramos, também que, quando obtidos os expoentes críticos e utilizando transformações de escalas apropriadas nos eixos coordenados, todas as curvas de decaimento para os pontos de equilíbrio se ajustaram em uma única curva, validando os expoentes.

Palavras Chaves: Mapas unidimensionais, pontos fixos, expoentes críticos, leis de escala, crises de fronteiras e espaço de parâmetros.

Abstract

In this work we study the decay of the orbits to the fixed points in different bifurcations of nonlinear discrete one-dimensional mappings. We consider the Gauss map and analyze the orbit diagram to study the convergence of the trajectories to the equilibrium point at the fold and flip bifurcation. We find numerically and analytically the set of critical exponents that describe some scaling properties at the bifurcations and near them. These critical exponents can also characterize which types of bifurcations that arises from the problem in question. We also study particular events called boundary crisis that occur from above a specific value of the control parameter ν. We continue the studies considering the Hassell map and its perturbed version. Just like in the Gauss map, we analyze the orbit diagrams within these systems, as well as the convergence of the orbits to the fixed points at the transcritical bifurcations, while also investigating numerically and analytically to determine the specific critical exponents of those bifurcations. With parametric perturbation added to the Hassell map, we build and analyze the trajectories on the parameter space. We apply, as tools, the superstable and extreme orbits. In the two classes of the maps (Gauss and Hassell), we quantify the chaos by Lyapunov exponents. After the critical exponents are obtained, using convenient scale transformations in the coordinate axes we show that all the curves of decay to the fixed points are collapsed into a universal curve, thus validating the exponents.

Key Words: One-dimensional maps, fixed points, critical exponents, scaling law, boundary crisis and parameter space.

SUMÁRIO

1 Propriedades dinâmicas do mapa Gauss **13**

1.1 Diagrama de órbita e ponto fixo 13

1.2 Expoente de Lyapunov 15

1.3 Convergência das órbitas para o ponto fixo 18

1.3.1 Bifurcação tangente 18

1.3.2 Bifurcação de duplicação de período 21

1.4 Aproximações analíticas para as convergências das órbitas para os pontos fixos 24

1.4.1 $\mathbf{x_1^*}$ na bifurcação tangente 24

1.4.2 $\mathbf{x_2^*}$ na bifurcação de duplicação de período 26

1.5 Crises de fronteiras 29

2 Propriedades dinâmicas do mapa Hassell **34**

2.1 Diagrama de órbita e ponto fixo 34

2.2 Expoente de Lyapunov 36

2.3 Convergência das órbitas para o ponto fixo 37

2.4 Aproximação analítica da convergência das órbitas para o ponto fixo N_1^* . 40

3 Propriedades dinâmicas do mapa Hassell perturbado **43**

3.1 Diagrama de órbita e ponto fixo 43

3.2 Expoente de Lyapunov 45

3.3 Convergência das órbitas para o ponto fixo 46

3.4 Aproximação analítica da convergência das órbitas para o ponto fixo N^* . 50

3.5 Espaço de parâmetros, órbitas superestáveis e extremas 52

3.5.1 Espaço de parâmetros 53

3.5.2 Órbitas superestáveis e extremas 54

4 Comentários finais **61**

Introdução

Com os conceitos matemáticos desenvolvidos na teoria de sistemas dinâmicos não lineares, comportamentos dinâmicos de vários sistemas físicos puderam ser caracterizados [1–5]. Estes sistemas podem ser classificados em dois tipos: determinísticos, ou não determinísticos. O primeiro: quando conhecidas as variáveis de estado em um dado instante, seu comportamento em qualquer instante posterior é determinado univocamente. O segundo: a modelagem, em geral, envolve teorias probabilísticas.

Edward Lorenz, na década de 1960, em seu estudo intitulado "Deterministic nonperiodic flow" [6] notou ao variar sutilmente as condições iniciais do sistema, mudanças totalmente distintas durante a evolução dessas condições quando comparadas entre elas. Isto, teoricamente, estava estranho, pois o problema era determinístico e essas pequenas variações nas condições iniciais não deveriam alterar completamente as características da evolução do problema. Assim, estes comportamentos observados por Lorenz, indicavam ser caóticos.

Como caracterizar um comportamento caótico em sistemas unidimensionais não lineares discretos? Robert Hilborn, em seu livro [7] apresentou uma maneira quantitativa de verificar este tipo de comportamento. Ele analisou o afastamento médio entre trajetórias vizinhas, de forma exponencial, utilizando os expoentes de Lyapunov. Quando os valores destes expoentes são negativos: temos órbitas regulares, ou periódicas. Caso contrário, positivos: temos trajetórias caóticas, implicando na divergência exponencial média entre essas condições iniciais.

Com a descoberta de sistemas sensíveis a condições iniciais, estudos em dinâmica não linear e caos aumentaram muito ao longo das últimas décadas e despertaram o interesse de muitos pesquisadores para essa área [8–19]. Por exemplo, os estudos realizados por Robert May e co-autores [20, 21] com o mapa logístico. Um modelo que possui um parâmetro de controle e não linearidade quadrática, sendo matematicamente simples. Entretanto, quando variamos o parâmetro, este mapeamento apresenta diversos comportamentos em sua dinâmica, como pontos fixos, bifurcações, atratores caóticos, crises. Possui, também, aplicações em diversas áreas da ciência, como economia [22], criptografia [23, 24], dentre outras [25–27].

Existem sistemas dinâmicos lineares e não lineares. O primeiro: existem soluções gerais e nos permite determinar o comportamento futuro do sistema. Mas o segundo:

as soluções exatas, em geral, não são simples de obter analiticamente e se obtidas, os resultados podem ser de difícil interpretação. Há alguns métodos que facilitam os estudos desses sistemas. Por exemplo: as seções de Poincaré [7], em que conseguimos reduzir o fluxo de soluções de um problema de N dimensões para $(N-1)$ dimensões. Outro exemplo: a discretização de equações diferenciais [28]. Este processo, por exemplo, pode demandar um custo numérico menor em obter informações do problema quando comparado com modelos descritos por equações diferenciais.

O conjunto de pontos da evolução de um modelo unidimensional discreto – incluindo a condição inicial estabelecida –, são chamados órbitas ou trajetórias do sistema. Estas órbitas podem ser caóticas ou não caóticas e as características dessas trajetórias estão ligadas ao parâmetro de controle do problema. Uma maneira qualitativa de observar esses comportamentos – descartando o transiente e após um longo período de iterações – é através do diagrama de órbitas do sistema. Este diagrama é a evolução da trajetória do sistema em função do parâmetro de controle e mostra o nascimento, evolução e destruição do conjunto de atratores do problema [29]. Outra maneira de observar – também descartando o transiente e após um longo período de iterações – é através do espaço de parâmetros [30], analisando a dinâmica do sistema em função dos parâmetros de controle, quando o mesmo possui dois ou mais.

Em mapeamentos unidimensionais, podemos observar e estudar alguns comportamentos relacionados a dinâmica do sistema. Um deles: o ponto fixo [12], dado da seguinte forma $F(x^*) = x^*$, sendo um ponto em que "mapeia" a si mesmo. Este ponto pode ser estável, instável ou assintoticamente estável. Outro: o ponto de bifurcação [7], ponto em que ocorre uma mudança na estabilidade do ponto fixo, alterando seu comportamento de assintoticamente estável para instável ou vice e versa. Por último: atratores, classificados em dois tipos: caóticos (ou estranhos) e não caóticos. O comportamento desses atratores são importantes para explicar fenômenos dinâmicos do sistema [29].

Os estudos sobre atratores e como são afetados quando o parâmetro de controle do sistema é variado recebeu atenção de pesquisadores. Alguns tópicos nessa área incluem teoria de bifurcação [31,32], cascatas de duplicação de período resultando em caos [21,33–35], dentre outros. Quando um atrator caótico colide com um ponto fixo instável, ocorrem mudanças no comportamento da dinâmica caótica do sistema, no valor do parâmetro em que acontece esse cruzamento, chamado crise [36–38]. Se o atrator caótico é destruído, temos crise de fronteira, mas se acontece a expansão no mesmo, temos crise interior. Uma ferramenta que ajuda no estudo destes eventos são as órbitas *supertracks*, que são trajetórias avaliadas no ponto cuja derivada do mapeamento é nula e com dependência apenas no parâmetro de controle do mesmo [39].

Neste trabalho estudamos o decaimento das órbitas para os pontos fixos em três bifurcações distintas, sendo elas: tangente, transcrítica e duplicação de período. Estudadas em dois mapeamentos unidimensionais não lineares discretos. O primeiro: o mapa

Gauss [7, 40, 41], analisamos o diagrama de órbitas e estudamos o decaimento das trajetórias para o ponto de equilíbrio nas bifurcações tangente e de duplicação de período. Encontramos analítica e numericamente o conjunto de expoentes críticos que descrevem propriedades de escala nas bifurcações e próximos delas. Estes expoentes caracterizam o tipo de bifurcação do problema. Estudamos, também, os eventos chamados crises de fronteiras, que ocorrem a partir de determinado valor de ν. A segunda classe: o mapa Hassell [42, 43] e sua versão perturbada. Nestes dois mapeamentos também analisamos o diagrama de órbitas, os decaimentos das trajetórias para o ponto fixo na bifurcação transcrítica e estudamos analítica e numericamente os expoentes críticos característicos desta bifurcação.

Com a perturbação paramétrica introduzida ao mapa Hassell, como aplicada na ref. [44] para o mapa logístico, construímos e analisamos as trajetórias no espaço de parâmetros a partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov. Neste estudo, utilizamos como ferramentas as órbitas superestáveis e extremas [44]. Nas duas classes de mapas (Gauss e Hassell), caracterizamos o caos via expoentes de Lyapunov. Mostramos também que quando obtidos os expoentes críticos e utilizando transformações de escalas apropriadas, todas as curvas de decaimento para os pontos de equilíbrio se sobrepõem em uma única curva, validando os expoentes.

Para melhor compreensão da dissertação, organizamos a mesma em quatro Capítulos. No primeiro Capítulo: descrevemos os estudos detalhados sobre os comportamentos dinâmicos para o mapa Gauss. No segundo Capítulo: descrevemos os estudos realizados no mapa Hassell. O terceiro Capítulo: apresentamos os estudos detalhados do mapa Hassell perturbado, analisando também o espaço de parâmetros do mesmo. No último Capítulo: apresentamos os comentários finais sobre o desenvolvimento e resultados do trabalho.

Capítulo 4

Comentários finais

Neste trabalho consideramos um conjunto de mapas unidimensionais discretos e investigamos algumas propriedades dinâmicas. Iniciamos os estudos considerando o mapa Gauss e investigamos a convergência das órbitas para os pontos fixos x_1^* e x_2^* para os parâmetros de controle $\beta = \beta_{c_1}$ e $\beta = \beta_{c_2}$, em que ocorrem as bifurcações tangente e duplicação de período respectivamente. Nestes pontos fizemos analises fenomenológicas e observamos que o decaimento das trajetórias para os pontos fixos são caracterizadas por três expoentes críticos cada. Estes expoentes estão relacionados entre si pelas leis de escalas $z' = {}^{\alpha'}/_{\sigma'}$ e $z = {}^{\alpha}/_{\sigma}$ e os resultados forneceram $\alpha' = 1$, $\sigma' = -1$ e $z' = -1$ para a bifurcação tangente e $\alpha = 1$, $\sigma = -{}^{1}/_{2}$ e $z = -2$ para a bifurcação de duplicação de período.

Mostramos no mapa Gauss, quando escolhidos outros valores do parâmetro de controle ν, comportamentos chamados de crises de fronteiras. Caracterizamos estes eventos e obtemos os expoentes $\gamma_1 \approx -0,509(7)$ para a crise de fronteira em $\beta = \beta_{crise_1}$ e $\gamma_2 \approx -0,507(4)$ para crise em $\beta = \beta_{crise_2}$, quando consideramos $\nu = 10$. Estes resultados produziram o mesmo valor encontrado nas referências [36–38] para o mapa quadrático. Utilizando a órbita de ponto fixo instável de período 1 e as órbitas *supertracks*, conseguimos encontrar o valor que iniciam as crises no mapeamento, fornecendo $\nu = \nu_{crise} \approx 9,82$.

Estendemos nossos estudos considerando o mapa Hassell e investigamos a convergência das órbitas para o ponto fixo na bifurcação transcrítica. Neste ponto, fizemos analises fenomenológicas e observamos que a convergência das órbitas também são caracterizadas por três expoentes. Eles estão relacionados entre si pela lei de escala $z^{'} = {}^{\alpha'}/_{\beta}$ e os resultados encontrados foram $\alpha' = 1$, $\beta = -1$ e $z' = -1$. Perto da bifurcação a convergência das órbitas para o ponto fixo no mapa Hassell é marcada por um decaimento exponencial e o tempo de relaxação é descrito pela lei do tipo $\tau \propto \mu^{\delta}$, com $\delta = -1$.

Comparando os expoentes críticos encontrados para o mapa Hassell e Hassell perturbado, observamos que a perturbação não afetou a convergência das trajetórias para o ponto de equilíbrio na bifurcação transcrítica, com isso, conseguimos os mesmos resultados

de expoentes.

Comparando os resultados dos três mapas estudados com os estudos realizados para o mapa logístico em [17], observamos que os expoentes críticos obtidos no mapa Gauss, estudando a convergência das órbitas para o ponto fixo na primeira iterada, na bifurcação tangente; são diferentes dos expoentes obtidos para o mapa Logístico, Hassell e Hassell perturbado. Entretanto, os três últimos mapas, quando estudados os decaimentos das trajetórias na bifurcação transcrítica, apresentaram os mesmos expoentes críticos.

Analisamos a convergência das trajetórias para o ponto estacionário no mapa Gauss na bifurcação de duplicação de período e encontramos outros três expoentes críticos. Comparando estes expoentes com os do mapa Logístico, na mesma bifurcação, os expoentes apresentaram os mesmos resultados. Portanto, de acordo com a bifurcação em que estamos analisando o decaimento das órbitas para o ponto de equilíbrio, os expoentes críticos podem ser iguais (se estivermos na mesma bifurcação) ou diferentes (se não estivermos na mesma bifurcação).

Finalizando, utilizamos como ferramenta os expoentes de Lyapunov para obter o espaço de parâmetros e verificar estruturas complexas periódicas chamadas *shrimps* (camarões). Além disso, quando observamos o espaço de parâmetros via períodos e utilizamos as órbitas de retorno que foram encontradas numérica e analiticamente, nos possibilitou entender melhor como essas estruturas se organizam. Visto que, utilizando estas órbitas foi possível localizar mais precisamente os camarões. Com isso, sendo uma importante ferramenta para investigação global e local destas estruturas periódicas complexas.

Temos como perspectivas, analisar o comportamento das órbitas na relaxação para a bifurcação tangente e verificar se há modificação no valor do expoente de relaxação. Além disso, pretendemos acoplar o mapa Gauss ao mapa logístico. Neste tema, vamos investigar os efeitos que este acoplamento pode causar no espaço de parâmetros deste novo sistema. Queremos, também, analisar o que acontece na mudança da bacia de atração no mapa Hassell perturbado, pois quando acrescentamos essa perturbação paramétrica a mesma produz novos comportamentos na dinâmica do mapeamento.

Referências Bibliográficas

[1] G. A. Luna-Acosta, G. Orellana-Rivadeneyra, A. Mendoza-Galván, and C. Jung. Chaotic classical scattering and dynamics in oscillating 1-d potential wells. *Chaos, Solitons & Fractals*, 12(2):349 – 363, 2001. Chaos in Ecology.

[2] W. B. Zang. *Discrete Dynamical Systems, Bifurcations and Chaos in Economics.* Elsevier Science, 2006.

[3] E. D. Leonel. Corrugated waveguide under scaling investigation. *Phys. Rev. Lett.*, 98:114102, Mar 2007.

[4] E. D. Leonel and L. A. Bunimovich. Suppressing fermi acceleration in a driven elliptical billiard. *Phys. Rev. Lett.*, 104:224101, Jun 2010.

[5] J. A. de Oliveira and E. D. Leonel. Scaling properties and universality in a ratchet system. *The European Physical Journal Special Topics*, 223(13):2969–2978, Dec 2014.

[6] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141, 1963.

[7] R. Hilborn. *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers.* Oxford University Prees, 2 edition, 2004.

[8] Tien-Yien Li and J. A. Yorke. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10):985–992, 1975.

[9] J. R. Pounder and T. D. Rogers. Dynamics of a two-parameter family of maps of the interval. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 10(5):415 – 423, 1986.

[10] R. L. Devaney. *A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment (Studies in Nonlinearity).* Westview Press, 1992.

[11] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics.* Springer New York, 1992.

[12] M. Martelli. *Introduction to discrete dynamical systems and chaos.* Wiley, New York, 1999.

[13] E. D. Leonel, J. K. L. da Silva, and S. O. Kampshort. Relaxation and transients in a time-dependent logistic map. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 12:1667 – 1674, 2002.

[14] R. L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems.* Westview Press, Cambridge, 2003.

[15] O. Galor. *Discrete dynamical systems.* Springer, Heildelberg, 2007.

[16] J. A. de Oliveira, E. R. Papesso, and E. D. Leonel. Relaxation to fixed points in the logistic and cubic maps: Analytical and numerical investigation. *Entropy*, 15:4310–4318, 2013.

[17] R. M. N. Teixeira, D. S. Rando, F. C. Geraldo, R. N. C. Filho, J. A. de Oliveira, and E. D. Leonel. Convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation. *Physics Letters A*, 379:1246 – 1250, 2015.

[18] E. D. Leonel, R. M. N. Teixeira, D. S. Rando, R. N. C. Filho, and J. A. de Oliveira. Addendum to: "Convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation". *Physics Letters A*, 379:1796–1798, 2015.

[19] D. R. da Costa, R. O. Medrano-T, and E. D. Leonel. Route to chaos and some properties in the boundary crisis of a generalized logistic mapping. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 486:674–680, 2017.

[20] R. M. May. Biological populations with nonoverlapping generations: Stable points, stable cycles, and chaos. *Science*, 186(4164):645–7, December 1974.

[21] R. M. May. Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models. *The American Naturalist*, 110(974):573–599, 1976.

[22] M. Miskiewicz and J. Ausloos. A logistic map approach to economic cycles. (i). the best adapted companies. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 336:206 – 214, 2004.

[23] N. K. Pareek, V. Patidar, and K. K. Sud. Image encryption using chaotic logistic map. *Image and Vision Computing*, 24:926 – 934, 2006.

[24] N. Singh and A. Sinha. Chaos-based secure communication system using logistic map. *Optics and Lasers in Engineering*, 48:398 – 404, 2010.

[25] E. P. Borges, C. Tsallis, G. F. J. A na nos, and P. M. C. de Oliveira. Nonequilibrium probabilistic dynamics of the logistic map at the edge of chaos. *Physical Review Letters*, 89, 2002.

[26] A. Curtright and T. Veitia. Logistic map potentials. *Physical Letters A*, 375:276 – 282, 2010.

[27] K. J. Persohn and R. J. Povinelli. Analyzing logistic map pseudorandom number generators for periodicity induced by finite precision floating-point representation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 45:238 – 245, 2012.

[28] J. Banasiak. *Mathematical Modelling in One Dimension: An Introduction via Difference and Differential Equations.* Cambridge University Press, 2013.

[29] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Veriag, New York, 1997.

[30] J. A. C. Gallas. Structure of the parameter space of the hénon map. *Physical Review Letters*, 70(18), 1993.

[31] J. E. Marsden and M. McCracken. *The Hopf bifurcation and its applications*. Springer, Berlin, 1976.

[32] D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Turbulence, Strange Attractors and Chaos*, pages 57–84, 1970.

[33] M. J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19(1):25–52, Jul 1978.

[34] P. Collet and J. P. Eckmann. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Basel, 1 edition, 2009.

[35] E. Ott. *Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems*, pages 103–119. Springer New York, New York, NY, 2004.

[36] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke. Chaotic attractors in crisis. *Physical Review Letters*, 48(22), 1982.

[37] C. Grebogi and E. Ott. Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos. *Physica 7D*, pages 181–200, 1983.

[38] C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras, and J. A. Yorke. Critical exponents for crisis-induced intermittency. *Physical Review A*, 36(11), 1987.

[39] E. M. Oblow. Supertracks, supertrack functions and chaos in the quadratic map. *Physics Letters A*, 128(8), 1988.

[40] S. Lynch. *Dynamical Systems with Applications using matlab*. Birkhauser, 2 edition, 2001.

[41] Z. Zhou, W. Shi, Y. Bao, and M. Yang. A gaussian function based chaotic neural network. In *2010 International Conference on Computer Application and System Modeling (ICCASM 2010)*, volume 4, pages V4–203–V4–206, Oct 2010.

[42] M. P. Hassell. Density-dependence in single-species populations. *The Journal of Animal Ecology*, 44(1):283–295, Feb. 1975.

[43] H. M. J. de Mendonça, E. D. Leonel, and J. A. de Oliveira. An investigation of the convergence to the stationary state in the hassell mapping. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 466:537 – 543, 2017.

[44] D. R. da Costa, M. Hansen, G. Guarise, R. O. Medrano-T, and E. D. Leonel. The role of extreme orbits in the global organization of periodic regions in parameter space for one dimensional maps. *Physics Letters A*, 380:1610–1614, 2016.

[45] V. L. Zaguskin. *Handbook of Numerical Methods for the Solution of Algebraic and Transcendental Equations.* Pergamon Press, 1961.

[46] J. Stewart. *Cálculo*, volume 1. Cengage Learning., São Paulo, 7 edition, 2013.

[47] N. Fiedler-Ferreira and C. P. Cintra do Prado. *Caos: uma intodução.* Blücher, 2009.

[48] L. H. A. Monteiro. *Sistemas Dinâmicos.* Editora Livraria da Física, 2006.

[49] M. J. Panik. *Growth curve modeling: theory and applications.* Wiley, 2013.

[50] S. Elaydi. *An introduction to difference equations.* Springer Science+Business Media, 3 edition, 2005.

[51] H. Bai-Lin. *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems.* World Scientific Publishing Co. Inc., Singapore, 1989.