



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Giovana Rossi Pasquareli

Polinômios de Romanovski-Routh

São José do Rio Preto
2022

Giovana Rossi Pasquareli

Polinômios de Romanovski-Routh

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2022

P284p Pasquareli, Giovana Rossi
Polinômios de Romanovski-Routh / Giovana Rossi Pasquareli. --
São José do Rio Preto, 2022
67 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio
Preto
Orientadora: Cleonice Fátima Bracciali

1. Polinômios ortogonais. 2. Equações hipergeométricas. 3.
Polinômios de Romanovski-Routh. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Giovana Rossi Pasquareli

Polinômios de Romanovski-Routh

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali
Orientadora

Profa. Dra. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz
UNIFESP - Câmpus de São José dos Câmpus

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
29 de março de 2022

*Aos meus pais,
dedico*

AGRADECIMENTOS

Um agradecimento especial à Professora Cleonice Fátima Bracciali pela orientação, paciência, dedicação e carinho.

Aos meus pais, Junior e Juliana, que nunca duvidaram de mim e me amam incondicionalmente. À minha avó, Raquel, pelos muitos ensinamentos e apoio constante.

Ao meu amor, André, por prezar sempre pela minha felicidade.

A todos os professores e funcionários, amigos da graduação e da pós-graduação que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização desta dissertação.

Mais importante a Deus, pelo constante cuidado, misericórdia e amor.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*Buscai, pois, em primeiro lugar
o Seu reino e a Sua justiça,
e todas estas coisas
vos serão acrescentadas.*
Matheus 6:33

RESUMO

Neste trabalho estudamos características, propriedades e aplicações dos polinômios de Romanovski-Routh. Tais polinômios formam uma classe de polinômios ortogonais clássicos, ou seja, são soluções polinomiais de uma equação diferencial ordinária com coeficientes polinomiais chamada equação hipergeométrica. Compilamos resultados quanto a suas representações, ortogonalidade, zeros e aplicação à Mecânica Quântica. Apresentamos também duas famílias que constituem partições do conjunto de todos os polinômios de Romanovski-Routh, uma delas composta pelos polinômios complementares de Romanovski-Routh.

Palavras-chave: Polinômios ortogonais, Equações hipergeométricas, Polinômios de Romanovski-Routh.

ABSTRACT

In this work we study characteristics, properties and applications of Romanovski-Routh polynomials. These polynomials form a class of classical orthogonal polynomials, that is, they are polynomial solutions of an ordinary differential equation with polynomial coefficients called the hypergeometric equation. We compile results regarding their representations, orthogonality, zeros and application to Quantum Mechanics. We also present two families that constitute partitions of the set of all Romanovski-Routh polynomials, one of them formed by the complementary Romanovski-Routh polynomials.

Keywords: Orthogonal polynomials, Hypergeometric equations, Romanovski-Routh polynomials.

Sumário

1	Introdução	17
2	Preliminares	19
2.1	Polinômios Ortogonais	19
2.2	Equações Diferenciais Hipergeométricas	21
2.3	Classificação dos Polinômios Hipergeométricos	27
2.3.1	$\sigma(x)$ é uma constante	27
2.3.2	$\sigma(x)$ tem grau um	28
2.3.3	$\sigma(x)$ tem grau dois e dois zeros reais e distintos	29
2.3.4	$\sigma(x)$ tem grau dois e um zero real duplo	30
2.3.5	$\sigma(x)$ tem grau dois e dois zeros complexos	30
3	Polinômio de Romanovski-Routh	33
3.1	Família $\mathcal{R}^{(\alpha,\beta)}$	35
3.2	Família $\mathcal{Q}^{(\alpha,\beta)}$	42
3.3	Relação entre os Polinômios de Romanovski-Routh e os Polinômios Complexos de Jacobi	48
3.4	Zeros	50
3.4.1	Limitantes dos zeros extremos	51
3.4.2	Motonicidade dos zeros	55
4	Polinômios de Romanovski-Routh na Física Quântica	57
4.1	Breve Introdução à Mecânica Quântica	57
4.2	Polinômios Ortogonais na Mecânica Quântica	58
4.3	Polinômios de Romanovski-Routh em Scarf II	60
4.3.1	Polinômios de Romanovski-Routh e funções angulares não-esféricas	62
5	Conclusão	65
	Referências	67

1 Introdução

Em 1929 S. Bochner [1] classificou todos os polinômios ortogonais clássicos como sendo soluções de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes polinomiais, chamada equação hipergeométrica. São eles, os polinômios de Hermite, Laguerre, Jacobi, Bessel e Romanovski-Routh. Esta última família de polinômios, também conhecida como polinômios Pseudo-Jacobi, foi primeiramente reportada por E. J. Routh [2], em 1884, como polinômios definidos no plano complexo, e redescoberta, no contexto de teoria de probabilidade e estatística, por V. Romanovski [3], em 1929, como polinômios reais.

Uma característica interessante dos polinômios de Romanovski-Routh é que, para qualquer conjunto de parâmetros, apenas um número finito de polinômios satisfaz a condição de ortogonalidade. Essa relação é chamada de ortogonalidade finita.

A importância de estudar os polinômios ortogonais está em sua relação com a física matemática, estatística, mecânica, e com importantes ramos da análise. Em específico, os polinômios de Romanovski-Routh apresentam ampla ação na Mecânica Quântica, atuando como soluções de equações de Schrödinger com potencial hiperbólico de Scarf (Scarf II) e potencial trigonométrico de Rosen-Morse [4, 5].

Existe também uma subclasse dos polinômios de Romanovski-Routh, chamados polinômios complementares de Romanovski-Routh, que podem ser relacionados à uma classe de polinômios ortogonais no círculo unitário [6, 7].

O objetivo deste trabalho é, portanto, fornecer um compilado de informações acerca da família dos polinômios de Romanovski-Routh afim de facilitar seu estudo para futuras descobertas.

A seguir descrevemos, brevemente, os capítulos que compõem esta dissertação, que foi baseada nos artigos [4, 8] e [9].

No Capítulo 2 apresentamos algumas definições e resultados importantes para o desenvolvimento desse trabalho. A primeira seção foi dedicada à apresentação dos polinômios ortogonais, com suas relações de recorrência de três termos e zeros. Na segunda seção apresentamos a definição da equação diferencial hipergeométrica, referida por Bochner, e suas propriedades associadas a suas soluções polinomiais, os polinômios ortogonais clássicos. Na terceira seção desmembramos os polinômios ortogonais clássicos, com suas equações diferenciais, caracterizações e relações de ortogonalidade.

O Capítulo 3 traz o principal objetivo dessa dissertação, o estudo dos polinômios de Romanovski-Routh. Aqui apresentamos tanto as propriedades gerais dessa família de polinômios como as propriedades particulares. Dividimos este capítulo em quatro seções. A primeira se destina ao estudo das famílias de polinômios de Romanovski-Routh com parâmetros fixos e a segunda à família de polinômios de Romanovski-Routh com um parâmetro fixo e o outro variando em função do grau do polinômio. Em ambos os casos

apresentamos a função geradora daquela família, sua relação de estrutura (ou, relação de recorrência diferencial) e relação de ortogonalidade. Já na terceira seção mostramos a relação entre os polinômios de Romanovski-Routh e os polinômios complexos de Jacobi, e assim, justificamos a nomenclatura adicional desta classe de polinômios como polinômios Pseudo-Jacobi. Por fim, na quarta seção apresentamos as propriedades dos zeros dos polinômios de Romanovski-Routh.

Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos a atuação física dos polinômios de Romanovski-Routh na Mecânica Quântica, especificamente no problema de Scarf II. Para isso, nas primeira e segunda seções introduzimos a equação de Schrödinger afim de apresentar a aplicação polinomial. Na terceira, e última, seção apresentamos a equação de Schrödinger com Scarf II e encontramos os polinômios de Romanovski-Routh como parte da solução, como também definindo as chamadas funções angulares não esféricas, que são soluções de uma equação de Schrödinger angular.

2 Preliminares

Neste capítulo apresentamos as principais definições e propriedades de sequências de polinômios ortogonais necessárias ao estudo, feito neste trabalho, dos polinômios de Romanovski-Routh. Também, apresentamos as equações diferenciais hipergeométricas, referidas por Bochner [1], com foco em suas soluções polinomiais, os polinômios ortogonais clássicos

2.1 Polinômios Ortogonais

Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [10] e [11]. Por serem resultados bastante conhecidos, omitimos suas demonstrações.

Definição 2.1. Sejam (a, b) um intervalo real, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e $\phi(x)$ uma função real limitada, não decrescente e com infinitos pontos de aumento em (a, b) . Se os momentos definidos por

$$\mu_r = \int_a^b x^r d\phi(x)$$

existem para $r = 0, 1, 2, \dots$, então $d\phi(x)$ é chamada medida positiva em (a, b) .

Quando $\phi(x)$ é absolutamente contínua podemos escrever $d\phi(x) = \omega(x)dx$, onde $\omega(x)$ é uma função contínua e positiva em (a, b) , mas não identicamente nula, chamada função peso. Vamos considerar apenas este caso.

Seja $P_n(x)$ um polinômio de grau n denotado por

$$P_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0}, \quad (2.1)$$

onde $a_{n,n} \neq 0$ é o coeficiente do termo de maior grau de $P_n(x)$.

Consideramos aqui o delta de Kronecker dado como

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ 1, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Definição 2.2. Uma sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação a função peso $\omega(x)$ no intervalo (a, b) , se todo $P_n(x)$ possui grau exatamente n e

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)\omega(x)dx = \rho_n\delta_{nm}, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Vamos chamar a relação de ortogonalidade (2.2) de ortogonalidade infinita, pois existem infinitos polinômios que satisfazem-na. Essa relação é equivalente a

$$\langle P_n, \pi \rangle = \int_b^a P_n(x) \pi(x) \omega(x) dx = 0, \quad \forall \pi(x) \in \mathbb{P}_{n-1},$$

onde $\mathbb{P}_{n-1}$ é o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a $n-1$, e equivalente a

$$\langle x^m, P_n \rangle = \int_b^a x^m P_n(x) \omega(x) dx = \begin{cases} 0, & 0 \leq m \leq n-1, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0, & m = n. \end{cases}$$

Chamamos $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ de sequência de polinômios ortonormais quando

$$\rho_n = \int_a^b (P_n(x))^2 \omega(x) dx = 1.$$

A sequência formada por polinômios da forma

$$\hat{P}_n(x) = \frac{P_n(x)}{a_{n,n}}$$

é chamada sequência de polinômios ortogonais mônicos e é denotada por $\{\hat{P}_n(x)\}_{n=0}^\infty$, ou seja, é a sequência formada por polinômios ortogonais com coeficientes dos termos de maior grau iguais a 1.

O resultado abaixo é uma das características mais importantes dos polinômios ortogonais.

Teorema 2.3. *Toda sequência de polinômios ortogonais satisfaz a relação de recorrência de três termos*

$$P_{n+1} = (\gamma_n x - \alpha_n) P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

com $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$, $\gamma_n, \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$,

$$\gamma_n = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \alpha_n = \gamma_n \frac{\langle x P_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \quad \beta_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0.$$

Para referência futura, quando falamos de uma sequência de polinômios ortogonais mônicos, segue que $\gamma_n = 1$ e a relação de recorrência três termos é reescrita como

$$\hat{P}_{n+1} = (x - \alpha_n) \hat{P}_n(x) - \beta_n \hat{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.3)$$

onde

$$\alpha_n = \frac{\langle x \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle} \quad \text{e} \quad \beta_n = \frac{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \rangle} > 0.$$

Quanto aos zeros dos polinômios de uma família de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$, é conhecido que todos são reais, distintos e estão dentro do intervalo de ortogonalidade, além de satisfazerem a propriedade de entrelaçamento, isto é, entre dois zeros consecutivos de $P_{n+1}(x)$ existe somente um zero em $P_n(x)$.

Além disso, quando a função peso $\omega(x)$ está definida no intervalo $(-b, b)$ e é uma função par, segue que a sequência de polinômios ortogonais relativa a ela satisfaz a relação de simetria

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x),$$

ou seja, quando n é par então $P_n(x)$ é uma função par e, quando n é ímpar, então $P_n(x)$ é uma função ímpar. Logo, todos os expoentes de x do polinômio $P_n(x)$ seguem a paridade de n . Ademais, seus zeros são simétricos com respeito a origem.

Aqui faremos uma breve descrição dos polinômios quase-ortogonais baseada em [12].

Seja $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$ e $R_n(x)$ um polinômio de grau exatamente n que satisfaz

$$\int_b^a x^k R_n(x) w(x) dx \begin{cases} = 0 & k = 0, \dots, n-1-r, \\ \neq 0 & k = n-r, \end{cases} \quad (2.4)$$

então $R_n(x)$ é dito quase-ortogonal de ordem r em (a, b) com respeito a função peso $w(x)$.

Para r qualquer temos, no seguinte teorema, um dos principais resultados quanto a quase-ortogonalidade de um polinômio.

Teorema 2.4. *Pelo menos $(n-r)$ zeros de $R_n(x)$ são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .*

2.2 Equações Diferenciais Hipergeométricas

Nesta seção definimos as equações diferenciais hipergeométricas e apresentamos algumas propriedades com relação a suas soluções polinomiais, como poderem ser escritas através da fórmula de Rodrigues e satisfazerem uma relação de ortogonalidade, que nem sempre é infinita.

As demonstrações aqui omitidas podem ser encontradas no primeiro capítulo de [13].

Definição 2.5. Uma equação hipergeométrica é uma equação diferencial ordinária da forma

$$\sigma(x)F''(x) + \tau(x)F'(x) + \lambda F(x) = 0, \quad (2.5)$$

onde

$$\sigma(x) = a_\sigma x^2 + b_\sigma x + c_\sigma, \quad \tau(x) = d_\tau x + e_\tau, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e $F(x)$ é uma função real $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, sendo $U \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto.

A função $F(x)$, solução da equação hipergeométrica (2.5), é chamada função hipergeométrica.

Para demonstrar o próximo resultado, precisamos primeiro definir a equação de Pearson. Para isso, sejam $\omega(x)$ a função peso definida na Seção 2.1 e os coeficientes polinomiais $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ dados na equação (2.5).

Definição 2.6. Chamamos equação de Pearson a equação diferencial dada por

$$[\sigma(x)\omega(x)]' = \tau(x)\omega(x). \quad (2.6)$$

Assim, segue o resultado.

Teorema 2.7. *Seja $\omega(x)$ uma função peso que satisfaça a equação de Pearson (2.6), então a equação hipergeométrica (2.5) pode ser reescrita na forma auto-adjunta, isto é,*

$$[\sigma(x)\omega(x)F'(x)]' + \lambda\omega(x)F(x) = 0. \quad (2.7)$$

Demonstração. Primeiramente, multiplicamos a equação (2.5) pela função peso $\omega(x)$, isto é,

$$\sigma(x)\omega(x)F''(x) + \tau(x)\omega(x)F'(x) + \lambda\omega(x)F(x) = 0.$$

Logo, usando a equação de Pearson (2.6) obtemos

$$\sigma(x)\omega(x)F''(x) + [\sigma(x)\omega(x)]'F'(x) + \lambda\omega(x)F(x) = 0.$$

Finalmente, pela regra da derivada da multiplicação, temos

$$[\sigma(x)\omega(x)F'(x)]' + \lambda\omega(x)F(x) = 0.$$

■

Teorema 2.8. *Se $F(x)$ é uma função hipergeométrica, então todas as suas derivadas são funções hipergeométricas.*

Demonstração. Derivando a equação hipergeométrica (2.5), temos a equação

$$\sigma'(x)F''(x) + \sigma(x)F'''(x) + \tau'(x)F'(x) + \tau(x)F''(x) + \lambda F'(x) = 0,$$

que pode ser reformulada de tal forma que $F'(x)$ seja solução de uma EDO similar a (2.5) da forma

$$\sigma(x)\frac{d^2}{dx^2}F'(x) + \tau_{(1)}(x)\frac{d}{dx}F'(x) + \lambda_{(1)}F'(x) = 0, \quad (2.8)$$

onde chamamos

$$\tau_{(1)}(x) = \tau(x) + \sigma'(x), \quad \lambda_{(1)} = \lambda + \tau'(x).$$

Note que $\tau_{(1)}(x)$ é um polinômio de primeira ordem e $\lambda_{(1)}$ é uma constante. Logo, a equação acima satisfaz a Definição 2.5, sendo uma equação diferencial hipergeométrica, ou seja, a derivada de $F(x)$ é uma função hipergeométrica.

Repetindo o mesmo processo, obtemos que a k -ésima derivada de $F(x)$ é solução da equação

$$\sigma(x)\frac{d^2}{dx^2}F^{(k)}(x) + \tau_{(k)}(x)\frac{d}{dx}F^{(k)}(x) + \lambda_{(k)}F^{(k)}(x) = 0, \quad (2.9)$$

onde

$$\tau_{(k)}(x) = \tau(x) + k\sigma'(x), \quad \lambda_{(k)} = \lambda + k\left(\tau'(x) + \frac{k-1}{2}\sigma''(x)\right), \quad (2.10)$$

que, pelo mesmo raciocínio, satisfaz a Definição 2.5. Sendo assim, $F^{(k)}(x)$ também é uma função hipergeométrica.

■

A seguir veremos o resultado que fornece as condições para que a equação diferencial hipergeométrica admita uma família de polinômios como solução.

Teorema 2.9. *Suponhamos que*

$$\lambda = \lambda_n = -n\left(\tau'(x) + \frac{n-1}{2}\sigma''(x)\right) = -n(d_\tau + (n-1)a_\sigma), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.11)$$

então, para todo n , existe um polinômio $F_n(x) \in \mathbb{P}_n$ que, junto a constante λ_n , satisfaz a equação (2.5).

Os polinômios $F_n(x)$ são chamados polinômios hipergeométricos e são as soluções mais simples possíveis da equação hipergeométrica (2.5), por isso o interesse em estudá-los.

Note que, considerando $\lambda = \lambda_n$ na definição de $\lambda_{(k)}$ em (2.10), obtemos

$$\lambda_{n(k)} = [\lambda_n]_{(k)} = -n \left(\tau'(x) + \frac{n-1}{2} \sigma''(x) \right) + k \left(\tau'(x) + \frac{k-1}{2} \sigma''(x) \right),$$

isto é,

$$\lambda_{n(k)} = -(n-k) \left(\tau'(x) + \frac{n+k-1}{2} \sigma''(x) \right). \quad (2.12)$$

O próximo resultado apresenta uma forma de representar os polinômios hipergeométricos. Sua demonstração segue a referência [13].

Proposição 2.10. *Os polinômios hipergeométricos podem ser calculados através da fórmula de Rodrigues*

$$F_n(x) = N_n \frac{1}{\omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\omega(x) \sigma(x)^n], \quad n \geq 1, \quad (2.13)$$

onde a constante de normalização N_n se relaciona com o coeficiente do termo de maior grau de $F_n(x)$, dado em (2.1), por

$$N_n = (-1)^n \frac{n! a_{n,n}}{\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_{n(k)}}, \quad n \geq 1, \quad (2.14)$$

onde $\lambda_{n(k)}$ é como em (2.12).

Demonstração. Considere a equação hipergeométrica da n -ésima derivada de $F(x)$, dada em (2.9), por

$$\sigma(x) \frac{d^2}{dx^2} F^{(n)}(x) + \tau_{(n)}(x) \frac{d}{dx} F^{(n)}(x) + \lambda_{(n)} F^{(n)}(x) = 0,$$

onde

$$\tau_{(n)}(x) = \tau(x) + n\sigma'(x) \quad \text{e} \quad \lambda_{(n)} = \lambda + n \left(\tau'(x) + \frac{n-1}{2} \sigma''(x) \right).$$

Suponhamos $\omega_{(n)}(x)$ a função peso que satisfaça a equação de Pearson

$$[\sigma(x)\omega_{(n)}(x)]' = \tau_{(n)}(x)\omega_{(n)}(x). \quad (2.15)$$

Multiplicando a equação hipergeométrica anterior pela função peso $\omega_{(n)}(x)$ obtemos sua forma auto-adjunta

$$[\sigma(x)\omega_{(n)}(x)F^{(n+1)}(x)]' + \lambda_{(n)}\omega_{(n)}(x)F^{(n)}(x) = 0. \quad (2.16)$$

A forma auto-adjunta da equação hipergeométrica da função $F(x)$ é dada por

$$[\sigma(x)\omega(x)F'(x)]' + \lambda\omega(x)F(x) = 0,$$

onde $\omega(x)$ satisfaz a equação de Pearson

$$[\sigma(x)\omega(x)]' = \tau(x)\omega(x). \quad (2.17)$$

Substituindo a definição de $\tau_{(n)}(x)$ em (2.15) e usando a equação (2.17) segue que

$$[\sigma(x)\omega_{(n)}(x)]' = (\tau(x) + n\sigma'(x))\omega_{(n)}(x) = \left(\frac{[\sigma(x)\omega(x)]'}{\omega(x)} + n\sigma'(x) \right) \omega_{(n)}(x),$$

isto é,

$$\sigma'(x)\omega_n(x) + \sigma(x)\omega'_{(n)}(x) = \left[\sigma \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} + n\sigma'(x) + \sigma'(x) \right] \omega_{(n)}(x).$$

Logo, obtemos a equação

$$\frac{\omega'_{(n)}(x)}{\omega_{(n)}(x)} = \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} + \frac{n\sigma'(x)}{\sigma(x)}.$$

Podemos verificar que

$$\omega_{(n)}(x) = \sigma^n(x)\omega(x), \quad (2.18)$$

a menos de uma soma constante. De fato,

$$\frac{\omega'_{(n)}(x)}{\omega_{(n)}(x)} = \frac{[\omega_{(n)}(x)]'}{\omega_{(n)}(x)} = \frac{[\sigma^n(x)\omega(x)]'}{\sigma^n(x)\omega(x)} = \frac{n\sigma^{n-1}(x)\sigma'(x)\omega(x) + \sigma^n(x)\omega'(x)}{\sigma^n(x)\omega(x)} = \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} + \frac{n\sigma'(x)}{\sigma(x)},$$

onde $\omega_{(0)}(x) = \omega(x)$.

Multiplicando (2.18) por $\sigma(x)$ obtemos

$$\sigma(x)\omega_{(n)}(x) = \sigma^{n+1}(x)\omega(x) = \omega_{(n+1)}(x)$$

e, substituindo a equação acima na equação hipergeométrica na forma auto-adjunta (2.16), obtemos

$$[\omega_{(n+1)}(x)F^{(n+1)}(x)]' + \lambda_{(n)}\omega_{(n)}(x)F^{(n)}(x) = 0,$$

isto é, a relação de recorrência

$$\omega_{(n)}(x)F^{(n)}(x) = -\frac{1}{\lambda_{(n)}}[\omega_{(n+1)}(x)F^{(n+1)}(x)]'. \quad (2.19)$$

Assim, sucessivamente temos

$$\begin{aligned} \omega(x)F(x) &= -\frac{1}{\lambda_{(0)}}[\omega_{(1)}(x)F^{(1)}(x)]' = \left(-\frac{1}{\lambda_{(0)}}\right) \left(-\frac{1}{\lambda_{(1)}}\right) [\omega_{(2)}(x)F^{(2)}(x)]'' \\ &= \dots = \frac{(-1)^n}{\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_{(k)}} [\omega_{(n)}(x)F^{(n)}(x)]^{(n)}. \end{aligned}$$

Finalmente, pelo Teorema 2.9, suponhamos $\lambda = \lambda_n$ de tal forma que $F(x) = F_n(x)$ seja um polinômio hipergeométrico de grau n . Logo, $F_n^{(n)}(x) = n!a_{n,n}$, com $a_{n,n}$ sendo o coeficiente do termo de maior grau de $F_n(x)$, e assim,

$$F_n(x) = \frac{(-1)^n}{\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_{n(k)}} \frac{1}{\omega(x)} [n! a_{n,n} \omega_{(n)}(x)]^{(n)}.$$

Como $\omega_{(n)}(x) = \sigma^n(x)\omega(x)$, conclui-se a fórmula de Rodrigues

$$F_n(x) = (-1)^n \frac{n! a_{n,n}}{\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_{n(k)}} \frac{1}{\omega(x)} [\sigma^n(x)\omega(x)]^{(n)}.$$

■

Seja $m \in \mathbb{N}$. É possível generalizar a fórmula de Rodrigues (2.13) para a m -ésima derivada de $F_n(x)$ através da relação de recorrência (2.19), seguindo o mesmo processo da demonstração anterior, como

$$F_n^{(m)}(x) = N_{nm} \frac{1}{\omega(x)\sigma(x)^m} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} [\omega(x)\sigma(x)^n], \quad 0 \leq m \leq n, \quad n \geq 1, \quad (2.20)$$

onde a constante de normalização é dada por

$$N_{nm} = (-1)^{n-m} \frac{n! a_{n,n}}{\prod_{k=m}^{n-1} \lambda_{n(k)}}, \quad 0 \leq m \leq n, \quad n \geq 1, \quad (2.21)$$

e a constante $\lambda_{n(k)}$ em (2.12).

Assim,

$$\begin{aligned} \prod_{k=m}^{n-1} \lambda_{n(k)} &= \prod_{k=m}^{n-1} \left[-(n-k) \left(\tau'(x) + \frac{n+k-1}{2} \sigma''(x) \right) \right] \\ &= (-1)^{n-m} (n-m)! \prod_{k=m}^{n-1} \left(\tau'(x) + \frac{n+k-1}{2} \sigma''(x) \right). \end{aligned}$$

Logo, a constante de normalização da fórmula generalizada de Rodrigues pode ser escrita como

$$N_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!} \frac{a_{n,n}}{\prod_{k=m}^{n-1} \left(\tau'(x) + \frac{n+k-1}{2} \sigma''(x) \right)}.$$

Fazendo $m = 0$ obtemos uma fórmula para calcular o coeficiente do termo de maior grau de qualquer polinômio hipergeométrico em função da constante de normalização da fórmula de Rodrigues (2.14), dada por

$$a_{n,n} = N_n \prod_{k=0}^{n-1} \left(\tau'(x) + \frac{n+k-1}{2} \sigma''(x) \right), \quad n \geq 1. \quad (2.22)$$

Dessa forma, podemos relacionar a constante de normalização da fórmula de Rodrigues da m -ésima derivada do polinômio $F_n(x)$ com a constante de normalização do próprio polinômio $F_n(x)$. Para $0 \leq m \leq n$ e $n \geq 1$, escrevemos

$$N_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!} N_n \prod_{k=0}^{m-1} \left(\tau'(x) + \frac{n+k-1}{2} \sigma''(x) \right). \quad (2.23)$$

Agora, apresentamos a propriedade ortogonal dos polinômios hipergeométricos. Este resultado é devido a Bochner [1].

Tomemos a forma auto-adjunta, dada em (2.7), das equações diferenciais hipergeométricas dos polinômios $y_n(x)$ e $y_m(x)$, respectivamente,

$$[\sigma(x)\omega(x)y_n'(x)]' + \lambda_n\omega(x)y_n(x) = 0$$

e

$$[\sigma(x)\omega(x)y_m'(x)]' + \lambda_m\omega(x)y_m(x) = 0,$$

onde λ_k é dado por (2.11) como

$$\lambda_k = -k \left(\tau'(x) + \frac{k-1}{2} \sigma''(x) \right), \quad k = n, m.$$

Multiplicando a primeira equação hipergeométrica na forma auto-adjunta por $y_m(x)$, a segunda por $y_n(x)$ e subtraindo a segunda igualdade na primeira obtemos

$$y_m(x)[\sigma(x)\omega(x)y'_n(x)]' - y_n(x)[\sigma(x)\omega(x)y'_m(x)]' = (\lambda_m - \lambda_n)y_m(x)y_n(x)\omega(x). \quad (2.24)$$

Observe que

$$y_m(x)[\sigma(x)\omega(x)y'_n(x)]' - y_n(x)[\sigma(x)\omega(x)y'_m(x)]' = \frac{d}{dx}\{\sigma(x)\omega(x)[y_m(x)y'_n(x) - y_n(x)y'_m(x)]\}.$$

Logo, integrando a equação (2.24) em um intervalo qualquer (a, b) obtemos

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b y_m(x)y_n(x)\omega(x)dx = \sigma(x)\omega(x)[y_m(x)y'_n(x) - y_n(x)y'_m(x)]_a^b.$$

Substituindo $[y_m(x)y'_n(x) - y_n(x)y'_m(x)]$ pelo monômio x^k , com $k \in \mathbb{N}$, pois podemos variar $m, n \in \mathbb{N}$, obtemos a integral

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\omega(x)dx = \frac{1}{\lambda_m - \lambda_n} \sigma(x)\omega(x)x^k|_a^b, \quad (2.25)$$

sempre que $\lambda_m \neq \lambda_n$. Para que isso ocorra, de (2.11), precisamos que

$$n \left(\tau'(x) + \frac{n-1}{2} \sigma''(x) \right) \neq m \left(\tau'(x) + \frac{m-1}{2} \sigma''(x) \right),$$

isto é,

$$(n-m) \left[\tau'(x) + \frac{n+m-1}{2} \sigma''(x) \right] \neq 0.$$

Como $[\tau'(x) + \frac{n+m-1}{2} \sigma''(x)]$ aparece no denominador da constante de normalização (2.21) da fórmula generalizada de Rodrigues, então é não nulo. Logo, $\lambda_n \neq \lambda_m$ sempre que $n \neq m$, e assim, na equação (2.25) basta supormos que os graus dos polinômios y_n e y_m sejam distintos entre si.

Supondo que a função peso $\omega(x)$ satisfaça a condição de contorno

$$\sigma(x)\omega(x)x^k|_{x=a,b} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.26)$$

conclui-se que os polinômios $y_m(x)$ e $y_n(x)$ satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\omega(x)dx = 0, \quad n \neq m, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad (2.27)$$

provando assim o resultado abaixo, que relaciona os polinômios ortogonais às equações hipergeométricas.

Teorema 2.11. *Os polinômios hipergeométricos $y_n(x)$ para os quais a função peso $\omega(x)$ satisfaz a condição de contorno (2.26) são polinômios (infinitamente) ortogonais.*

Já vimos, do Teorema 2.9, que toda equação hipergeométrica admite uma família de polinômios como solução. Agora, do Teorema 2.11, temos que para essa família ser considerada (infinitamente) ortogonal precisamos que a função peso, relativa a ela, satisfaça a condição de contorno (2.26).

Para concluir, note que, para valores finitos de a e b podemos substituir a condição de contorno (2.26) por

$$\sigma(x)\omega(x)|_{x=a,b} = 0.$$

Entretanto, caso, por exemplo, tenhamos $b = \infty$, escreve-se

$$\sigma(x)\omega(x)|_{x=a} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x)\omega(x)x^k = 0.$$

2.3 Classificação dos Polinômios Hipergeométricos

Bochner [1] classificou as soluções polinomiais da equação diferencial hipergeométrica

$$\sigma(x)F''(x) + \tau(x)F'(x) + \lambda_n F(x) = 0$$

em cinco grupos distintos levando em consideração os zeros de $\sigma(x)$. Os polinômios obtidos são conhecidos como polinômios ortogonais clássicos. Além disso, como a mudança de variável afim ($x \rightarrow ax + b$, $a \neq 0$) preserva a classificação dos zeros de $\sigma(x)$, pode-se considerar apenas sua forma canônica.

Vale ressaltar que dependendo da caracterização do polinômio $\tau(x)$ existem notações diferentes, mas que ainda definem a mesma família de polinômios. Neste trabalho optamos pela notação utilizada no artigo [8]. Outras abordagens podem ser vistas em [14], onde é usada a forma geral $\tau(x) = dx + e$, e em [15], onde $\tau(x) = 2\varepsilon x + \gamma$.

Veja classificação abaixo.

2.3.1 $\sigma(x)$ é uma constante

Considere a forma canônica de uma constante, isto é $\sigma(x) = 1$. A equação hipergeométrica abaixo

$$H''(x) - 2\alpha H'(x) + 2\alpha n H(x) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

é chamada equação de Hermite generalizada, onde supomos $\tau(x) = -2\alpha x$ e $\lambda_n = 2\alpha n$, dada pela equação (2.11). Segundo Chihara [10], a família de polinômios que satisfaz tais condições é chamada família de polinômios generalizados de Hermite, $\{H_n^\alpha(x)\}_{n=0}^\infty$.

Como supomos $\sigma(x) = 1$, pela equação de Pearson (2.6) temos

$$\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = -2\alpha x.$$

Logo, como a primeira parte da identidade é a derivada do logaritmo natural de $\omega(x)$, integrando a equação anterior obtemos

$$\ln(\omega(x)) = -\alpha x^2,$$

que nos fornece a função peso

$$\omega(x) = e^{-\alpha x^2}.$$

Para $\alpha > 0$, a condição de contorno (2.26)

$$e^{-\alpha x^2} x^k|_{x=a,b} = 0$$

é satisfeita no intervalo $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Logo, os polinômios generalizados de Hermite satisfazem a relação de ortogonalidade (2.27), ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} H_m^\alpha(x) H_n^\alpha(x) dx = h_n \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Note que, tomando $\alpha = 1$ temos a equação

$$H''(x) - 2xH'(x) + 2nH(x) = 0,$$

chamada equação de Hermite, que admite como solução a família dos polinômios ortogonais de Hermite $\{H_n(x)\}_{n=0}^\infty$, onde, pela fórmula de Rodrigues (2.13), temos

$$H_n(x) = N_n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}],$$

sendo N_n a constante de normalização dada por (2.14).

2.3.2 $\sigma(x)$ tem grau um

Novamente escolhemos a forma canônica de um polinômio de grau 1, isto é $\sigma(x) = x$. Supondo $\tau(x) = -\beta x + \alpha + 1$ e a constante $\lambda_n = n\beta$, dada por (2.11), obtemos a equação

$$xL''(x) + (-\beta x + \alpha + 1)L'(x) + n\beta L(x) = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (2.28)$$

Derivando $x\omega(x)$, segue da equação de Pearson (2.6) que

$$\omega(x) + x\omega'(x) = (-\beta x + \alpha + 1)\omega(x),$$

logo,

$$\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \frac{-\beta x + \alpha}{x}.$$

Agora, usando o mesmo argumento do caso anterior, como $\frac{d}{dx} \ln(\omega(x)) = \frac{\omega'(x)}{\omega(x)}$, aplicando a integral na equação anterior segue que

$$\ln(\omega(x)) = -\beta x + \alpha \ln(x),$$

e assim, obtemos a função peso

$$\omega(x) = x^\alpha e^{-\beta x}.$$

Se $\alpha, \beta > 0$, a condição de contorno (2.26)

$$x^{\alpha+k} e^{-\beta x} \Big|_{x=a,b} = 0$$

é satisfeita no intervalo $(0, \infty)$. Logo, temos a relação de ortogonalidade (2.27), ou seja,

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x} L_m^{(\alpha, \beta)}(x) L_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx = l_n \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

onde $L_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é o polinômio que satisfaz a equação (2.28).

Se $\beta = 1$ temos a equação generalizada de Laguerre

$$xL''(x) + (-x + \alpha + 1)L'(x) + nL(x) = 0,$$

que possui como solução a família dos polinômios generalizados (associados) de Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^\infty$, onde, pela fórmula de Rodrigues (2.13), temos

$$L_n^{(\alpha)}(x) = N_n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n} e^{-x}].$$

Agora, tomando $\beta = 1$ e $\alpha = 0$, temos a equação de Laguerre

$$xL''(x) + (-x + 1)L'(x) + nL(x) = 0,$$

que possui como solução a família dos polinômios de Laguerre $\{L_n(x)\}_{n=0}^\infty$. Este é o caso originalmente estudado por Laguerre. Segundo Chihara [10], o polinômio $L_n^{(\alpha)}(x)$ também pode ser chamado de Polinômio de Laguerre, visto que $L_n(x)$ é apenas um caso particular.

2.3.3 $\sigma(x)$ tem grau dois e dois zeros reais e distintos

Considere a forma canônica $\sigma(x) = 1 - x^2$. Assim, segue a equação de Jacobi

$$(1 - x^2)P''(x) + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)P'(x) + n(\alpha + \beta + n + 1)P(x) = 0, \quad (2.29)$$

onde, para cada par (α, β) real, a fórmula de Rodrigues define a família de polinômios de Jacobi $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ como

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = N_n(1 - x)^{-\alpha}(1 + x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x)^{\alpha+n}(1 + x)^{\beta+n}],$$

onde, pela equação de Pearson (2.6), temos a função peso

$$\omega(x) = (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}.$$

Se os parâmetros α e β satisfazem $\alpha, \beta > -1$, a condição de contorno (2.26) é satisfeita no intervalo $(-1, 1)$. Logo, temos a relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^1 (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta} P_m^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx = p_n \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Alguns casos particulares recebem nomes especiais, como é o caso da equação de Gegenbauer

$$(1 - x^2)G''(x) - (2\gamma + 1)xG'(x) + n(2\gamma + 2 - n)G(x) = 0,$$

onde $\alpha = \beta = \gamma - 1/2$, que possui como solução a família dos polinômios de Gegenbauer $\{G_n^{(\gamma)}\}_{n=0}^{\infty}$, com

$$G_n^{(\gamma)}(x) = \left(\frac{2\alpha}{\alpha} \right)^{-1} \left(\frac{n + 2\alpha}{\alpha} \right) P_n^{(\alpha, \alpha)}(x).$$

Também, as equações de Chebyshev de primeira e segunda espécies, respectivamente

$$(1 - x^2)T''(x) - xT'(x) + n(2 - n)T(x) = 0,$$

$$(1 - x^2)U''(x) - 3xU'(x) + n(4 - n)U(x) = 0,$$

onde $\alpha = \beta = -1/2 \rightarrow \gamma = 0$ na primeira equação e $\alpha = \beta = 1/2 \rightarrow \gamma = 1$ na segunda. Essas equações diferenciais hipergeométricas possuem como soluções, respectivamente, as famílias dos polinômios de Chebyshev de primeira espécie $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$, onde

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x)),$$

e Chebyshev de segunda espécie $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$, onde

$$U_n(x) = \frac{\sin((n + 1) \cos^{-1}(x))}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Finalmente, a equação de Legendre

$$(1 - x^2)P''(x) - 2xP'(x) + n(3 - n)P(x) = 0,$$

com $\alpha = \beta = 0 \rightarrow \gamma = 1/2$, que possui como solução a família dos polinômios de Legendre $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, onde, pela fórmula de Rodrigues (2.13), temos

$$P_n(x) = N_n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Note que os polinômios de Chebyshev de primeira e segunda espécies e o polinômio de Legendre são ainda casos particulares do polinômio de Gegenbauer.

2.3.4 $\sigma(x)$ tem grau dois e um zero real duplo

Suponhamos $\sigma(x) = x^2$. A equação de Bessel dada abaixo

$$x^2 B''(x) + ((\alpha + 2)x + \beta)B'(x) - n(\alpha + n + 1)B(x) = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

tem como solução a família dos polinômios de Bessel $\{B_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{n=0}^\infty$.

Pela equação de Pearson (2.6) temos

$$x^2 \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = (\alpha + 2)x + \beta - 2$$

e conseqüentemente obtém-se a função peso

$$\omega(x) = x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}}. \quad (2.30)$$

Logo, o polinômio $B_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é dado pela fórmula de Rodrigues (2.13) por

$$B_n^{(\alpha, \beta)}(x) = N_n x^{-\alpha} e^{\frac{\beta}{x}} \frac{d^n}{dx^n} [x^{2n\alpha} e^{-\frac{\beta}{x}}].$$

Dado $N \in \mathbb{N}$, segundo [15] a condição de contorno (2.26) gera o intervalo de ortogonalidade $(0, \infty)$ para os parâmetros $\alpha < -2N - 1$ e $\beta > 0$. Portanto, segue que os polinômios de Bessel satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} B_m^{(\alpha, \beta)}(x) B_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx = b_n \delta_{mn}, \quad m, n = \{0, 1, \dots, N\}, \quad \alpha < -2N - 1.$$

Isso significa que, em uma família de polinômios de Bessel existe um número finito de polinômios ortogonais para cada escolha do parâmetro α .

Além disso, pode ser visto na referência [16], de Krall e Frink, que os polinômios de Bessel são ortogonais com respeito a uma função peso na circunferência unitária $\mathbb{T} = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

2.3.5 $\sigma(x)$ tem grau dois e dois zeros complexos

Sejam $\sigma(x) = 1 + x^2$, $\tau(x) = 2\beta x + \alpha$ e a constante $\lambda_n = -n(2\beta + n - 1)$ dada pela equação (2.11). A equação

$$(1 + x^2)R''(x) + (2\beta x + \alpha)R'(x) - n(2\beta + n - 1)R(x) = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

chamada equação de Romanovski, possui como solução a família de polinômios de Romanovski-Routh $\{R_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{n=0}^\infty$.

A função peso é definida através da equação de Pearson (2.6)

$$(1 + x^2) \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \tau(x) - 2,$$

por

$$\omega(x) = \omega^{(\alpha, \beta)}(x) = (1 + x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \cotg^{-1} x}. \quad (2.31)$$

Ainda sobre a representação da função peso, temos duas possíveis formas, uma em função da cotangente e outra em função da tangente. Isso é possível devido à identidade

$$\cotg^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \tg^{-1}(x).$$

Logo, sem perda de generalidade, podemos definir a função peso dos polinômios de Romanovski-Routh como

$$\omega^{(\alpha,\beta)}(x) = (1+x^2)^{\beta-1} e^{\alpha \operatorname{tg}^{-1} x}.$$

Dessa forma, o polinômio de Romanovski-Routh é dado, pela fórmula de Rodrigues (2.13), como

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = N_n (1+x^2)^{1-\beta} e^{\alpha \operatorname{cotg}^{-1} x} \frac{d^n}{dx^n} [(1+x^2)^{\beta+n-1} e^{-\alpha \operatorname{cotg}^{-1} x}], \quad (2.32)$$

sendo N_n a constante de normalização dada em (2.14).

Quanto ao intervalo de ortogonalidade (a, b) temos que, para $\beta < 0$, a condição de contorno

$$(1+x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \operatorname{cotg}^{-1} x} x^k \Big|_{x=a,b} = 0$$

gera o intervalo natural $(-\infty, \infty)$, mas não é plenamente satisfeita. Além disso, os momentos relacionados a função peso $\omega^{(\alpha,\beta)}(x)$,

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \operatorname{cotg}^{-1} x} x^k dx, \quad (2.33)$$

existem até $k = \lfloor -2\beta \rfloor + 1$, onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x . Logo, supondo $\beta < 0$ os momentos μ_k existem para $k < 1 - 2\beta$. Disso segue que apenas um número finito de polinômios de Romanovski-Routh satisfazem a relação de ortogonalidade (2.2).

Veremos na Seção 3.1 que, supondo $\beta < 0$, os polinômios $R_m^{(\alpha,\beta)}(x)$ e $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ são ortogonais com relação a função peso $\omega^{(\alpha,\beta)}(x)$ em $(-\infty, \infty)$, quando $m+n < 1 - 2\beta$. Isto é, os polinômios de Romanovski-Routh satisfazem a relação de ortogonalidade finita

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \operatorname{cotg}^{-1} x} R_m^{(\alpha,\beta)}(x) R_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx = r_n \delta_{mn}, \quad m+n < 1 - 2\beta. \quad (2.34)$$

3 Polinômio de Romanovski-Routh

Neste capítulo apresentamos nossos estudos sobre os polinômios de Romanovski-Routh divididos em dois grupos, a família $\mathcal{R}^{(\alpha, \beta)}$, composta pelos polinômios de Romanovski-Routh com parâmetros fixos, e a família $\mathcal{Q}^{(\alpha, \beta)}$, composta pelos polinômios de Romanovski-Routh com um parâmetro fixo e outro variando conforme o grau do polinômio. Os resultados mais gerais sobre os polinômios de Romanovski-Routh são apresentados antes desta divisão.

Trabalhamos com os zeros dos polinômios de Romanovski-Routh e suas propriedades, justificamos sua relação com os polinômios de Jacobi e apresentamos a ortogonalidade finita, entre outros resultados. Aqui utilizamos as referências [8, 9, 15] e [17].

Consideramos a constante de normalização da fórmula de Rodrigues, dada em (2.14), como $N_n = 1$.

Definimos o conjunto de todos os polinômios de Romanovski-Routh por

$$\mathcal{R} \equiv \{R_n^{(\alpha, \beta)} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\},$$

onde, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, os polinômios $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ são dados pela fórmula de Rodrigues (2.13), ou seja,

$$R_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{\omega^{(\alpha, \beta)}(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma(x)^n \omega^{(\alpha, \beta)}(x)],$$

com

$$\omega^{(\alpha, \beta)}(x) = (1 + x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \cotg^{-1} x}$$

e

$$\sigma(x) = 1 + x^2.$$

Em termos da função hipergeométrica ${}_2F_1(a, b; c; z)$ (veja Seção 9.9 de [15]), os polinômios de Romanovski-Routh podem ser dados por

$$\begin{aligned} R_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= (-2i)^n (\beta + \frac{i}{2}\alpha)_n {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n + 2\beta - 1; \frac{1 - ix}{2} \\ \beta + \frac{i}{2}\alpha \end{matrix} \right) \\ &= (n + 2\beta - 1)_n (x + i)^n {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, 1 - \beta - n - \frac{i}{2}\alpha; \frac{2}{1 - ix} \\ 2 - 2\beta - 2n \end{matrix} \right). \end{aligned}$$

Pela equação (2.22) sabemos que o coeficiente do termo de maior grau de um polinômio qualquer pode ser dado em função da constante de normalização da fórmula de Rodrigues pela equação

$$a_{n,n} = N_n \prod_{k=0}^{n-1} \left(\tau'(x) + \frac{n+k-1}{2} \sigma''(x) \right), \quad n \geq 1.$$

Como supomos $N_n = 1$ e $\tau(x) = 2\beta x + \alpha$ para os polinômios de Romanovski-Routh, segue que o coeficiente do termo de maior grau de $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ pode ser dado por

$$a_{n,n} = \prod_{k=0}^{n-1} (2\beta + n + k - 1) = (n + 2\beta - 1)_n, \quad (3.1)$$

onde $(\cdot)_n$ é o símbolo de Pochhammer dado por

$$(c)_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ c(c+1) \dots (c+n-1), & n > 0. \end{cases}$$

Assim, pela equação (3.1), podemos escrever o polinômio de Romanovski-Routh na forma mônica como

$$\hat{R}_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{(n + 2\beta - 1)_n} R_n^{(\alpha, \beta)}(x).$$

Os polinômios de Romanoski-Routh também satisfazem a relação de recorrência de três termos (veja Seção de 4.3 [15]). Neste trabalho optamos por apresentar a relação de recorrência de três termos destes polinômios na forma mônica, dada por

$$\begin{aligned} \hat{R}_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) &= \left(x + \frac{\alpha(\beta - 1)}{2(n + \beta - 1)(n + \beta)} \right) \hat{R}_n^{(\alpha, \beta)}(x) \\ &+ \frac{n(n + 2\beta - 2)((n + \beta - 1)^2 + (\alpha/2)^2)}{(2n + 2\beta - 3)(2n + 2\beta - 1)(n + \beta - 1)^2} \hat{R}_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x), \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $\hat{R}_{-1}^{(\alpha, \beta)}(x) = 0$ e $\hat{R}_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1$, da qual é possível concluir que seus coeficientes são reais quando $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Note, da equação (3.1), que $a_{n,n}$ não depende de α e, se fixarmos $n \geq 1$ e variarmos β a partir de $1 - n$, quando

$$\beta = \frac{1 - n - k}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (3.3)$$

o coeficiente do termo de maior grau é nulo, isto é, $a_{n,n} = 0$ para $n \in \mathbb{N}^*$. Isso faz com que o polinômio $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ tenha grau menor que n . Logo, para tais valores de β a relação de ortogonalidade (2.2) não é plenamente satisfeita.

Os valores de β que satisfazem a equação (3.3) são

$$1 - n, \frac{3}{2} - n, 2 - n, \dots, -\frac{1}{2} - \frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2} - \frac{n}{2}, \quad n \geq 1.$$

Sabemos que, supondo $\beta < 0$, os momentos μ_n , dados em (2.33), existem para $n < 1 - 2\beta$, ou seja, $\beta < \frac{1}{2} - \frac{n}{2}$. Logo, a ortogonalidade dos polinômios de Romanovski-Routh pode ser analisada quando

$$1 - n < \beta < \frac{1}{2} - \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad \beta \neq \frac{3}{2} - n, 2 - n, \dots, -\frac{1}{2} - \frac{n}{2}, -\frac{n}{2}.$$

A informação acima é importante para o enunciado do teorema a seguir, que proporciona a quase-ortogonalidade dos polinômios de Romanovski-Routh. A ideia da demonstração pode ser encontrada em [9] e [17].

Teorema 3.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ fixo e o parâmetro $\beta \in \left(1 - n, \frac{1}{2} - \frac{n}{2}\right)$ de tal forma que $\beta \neq \frac{3}{2} - n, 2 - n, \dots, -\frac{1}{2} - \frac{n}{2}, -\frac{n}{2}$. Então,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k R_n^{(\alpha, \beta)}(x) \omega^{(\alpha, \beta)}(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2 \lfloor -\beta \rfloor - n. \quad (3.4)$$

Note que, em (3.4), a integral se anula para os valores de $k = 0, 1, \dots, 2 \lfloor -\beta \rfloor - n$. Logo, somando e subtraindo $(n-1)$ ao último termo, temos que a integral se anula quando

$$k = 0, 1, \dots, n - 1 + 2 \lfloor -\beta \rfloor - 2n + 1. \quad (3.5)$$

Como vimos em (2.4), um polinômio é considerado quase-ortogonal de ordem r em (a, b) com respeito a função peso $\omega(x)$ se

$$\int_a^b x^k R_n(x) \omega(x) dx \begin{cases} = 0 & k = 0, 1, \dots, n - 1 - r, \\ \neq 0 & k = n - r. \end{cases}$$

Dessa forma, para $n \in \mathbb{N}^*$, quando

$$1 - n < \beta < \frac{1}{2} - \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad \beta \neq \frac{3}{2} - n, \dots, -\frac{n}{2}$$

segue das equações (3.4) e (3.5) que o polinômio $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é quase-ortogonal de ordem

$$r = -(2 \lfloor -\beta \rfloor - 2n + 1)$$

em $(-\infty, \infty)$ com respeito a função peso $\omega^{(\alpha, \beta)}(x) = (1 + x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \cot^{-1} x}$.

Além disso, sob tais condições, segue do Teorema 2.4 que o polinômio $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ possui pelo menos $n - r$ zeros reais. Assim, segue o Corolário.

Corolário 3.2. *Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e o parâmetro β sob seguintes condições*

$$1 - n < \beta < \frac{1}{2} - \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad \beta \neq \frac{3}{2} - n, \dots, -\frac{n}{2}.$$

Então, o polinômio $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é quase-ortogonal de ordem $r = -(2 \lfloor -\beta \rfloor - 2n + 1)$ em $(-\infty, \infty)$ com respeito a função peso $\omega^{(\alpha, \beta)}(x)$ e possui pelo menos $2 \lfloor -\beta \rfloor - n + 1$ zeros reais.

3.1 Família $\mathcal{R}^{(\alpha, \beta)}$

Nesta seção estudamos uma partição do conjunto $\mathcal{R}$ dos polinômios de Romanovski-Routh que, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixos, possui todos os polinômios $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, com $n \in \mathbb{N}$. Definimos este conjunto como

$$\mathcal{R}^{(\alpha, \beta)} \equiv \{R_n^{(\alpha, \beta)} : n \in \mathbb{N}\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

de tal forma que abrange todas as soluções polinomiais da equação de Romanovski com α e β fixos

$$(1 + x^2)R''(x) + (2\beta x + \alpha)R'(x) - n(2\beta + n - 1)R(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

já que possui um, e somente um, polinômio de cada grau $n \in \mathbb{N}$. A família $\mathcal{R}^{(\alpha, \beta)}$ é uma partição de $\mathcal{R}$, pois a união disjunta de todos os conjuntos $\mathcal{R}^{(\alpha, \beta)}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, formam o conjunto dos polinômios de Romanovski-Routh.

Apresentamos algumas propriedades dos polinômios de Romanovski-Routh, como possuir uma função geradora, satisfazer uma relação de recorrência diferencial e a ortogonalidade finita. As demonstrações aqui apresentadas seguem a referência [8].

Para facilitar a leitura vamos omitir das demonstrações os parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixados.

O próximo resultado apresenta a relação de recorrência diferencial satisfeita pelos polinômios de Romanovski-Routh. Também chamada de relação de estrutura.

Teorema 3.3. *Os polinômios de Romanovski-Routh satisfazem a relação de recorrência diferencial dada por*

$$(1+x^2) \frac{dR_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{dx} = \frac{(2\beta + n - 1)}{2(\beta + n)} \left(R_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) - [2(\beta + n)x + \alpha] R_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right). \quad (3.6)$$

Demonstração. Considere a fórmula de Rodrigues para o polinômio de Romanovski-Routh $R_{n+1}(x)$

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{\omega(x)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [\omega(x) \sigma(x)^{n+1}].$$

Note que

$$\begin{aligned} [\omega(x) \sigma(x)^{n+1}]' &= [\omega(x) \sigma(x)^n \sigma(x)]' = [\omega(x) \sigma(x)^n]' \sigma(x) + \omega(x) \sigma(x)^n \sigma'(x) \\ &= \{ [\omega(x) \sigma(x)^{n-1}]' \sigma(x) + \omega(x) \sigma(x)^{n-1} \sigma'(x) \} \sigma(x) + \omega(x) \sigma(x)^n \sigma'(x) \\ &= [\omega(x) \sigma(x)^{n-1}]' \sigma(x)^2 + 2 \omega(x) \sigma(x)^n \sigma'(x) \end{aligned}$$

e, repetindo o processo n vezes, obtemos pela equação de Pearson (2.6) que

$$\begin{aligned} [\omega(x) \sigma(x)^{n+1}]' &= [\omega(x) \sigma(x)]' \sigma(x)^n + n \omega(x) \sigma(x)^n \sigma'(x) \\ &= \omega(x) \tau(x) \sigma(x)^n + n \omega(x) \sigma(x)^n \sigma'(x) \\ &= \omega(x) \sigma(x)^n [2(\beta + n)x + \alpha], \end{aligned}$$

pois $\tau(x) = 2\beta x + \alpha$ e $\sigma(x) = 1 + x^2$ para os polinômios de Romanovski-Routh com parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Logo,

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{\omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\omega(x) \sigma(x)^{n+1}]' = \frac{1}{\omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\omega(x) \sigma(x)^n (2(\beta + n)x + \alpha)] \\ &= \frac{2(\beta + n)x + \alpha}{\omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\omega(x) \sigma(x)^n] + \frac{2n(\beta + n)}{\omega(x)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [\omega(x) \sigma(x)^n], \end{aligned} \quad (3.7)$$

pois quando $g(x)$ é um polinômio de grau 1, então $[f(x)g(x)]^{(n)} = g(x)f^{(n)}(x) + ng'(x)f^{(n-1)}(x)$.

Note que, da fórmula de Rodrigues (2.13), obtemos que o primeiro termo da equação (3.7) se relaciona com o polinômio $R_n(x)$ da seguinte forma

$$[2(\beta + n)x + \alpha] R_n(x) = \frac{2(\beta + n)x + \alpha}{\omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\omega(x) \sigma(x)^n]. \quad (3.8)$$

Agora, usando a fórmula de Rodrigues generalizada (2.20), com $m = 1$, temos que a derivada do polinômio $R_n(x)$ satisfaz

$$\frac{d}{dx} R_n(x) = N_{n,1} \frac{1}{\omega(x) \sigma(x)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [\omega(x) \sigma^n(x)], \quad (3.9)$$

onde $N_{n,m}$ é a constante de normalização dada por (2.23), ou seja,

$$N_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!} N_n \prod_{k=0}^{m-1} \left(\tau'(x) + \frac{n+k-1}{2} \sigma''(x) \right).$$

Como supomos que a constante de normalização do polinômio de Romanovski-Routh é $N_n = 1$, então

$$N_{n,1} = \frac{n!}{(n-1)!} (2\beta + n - 1) = n(2\beta + n - 1). \quad (3.10)$$

Assim, pela fórmula (3.9) e (3.10) vemos que o segundo termo da equação (3.7) pode ser dado por

$$\frac{2n(\beta + n)}{\omega(x)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [\omega(x)\sigma(x)^n] = \frac{2(\beta + n)\sigma(x)}{2\beta + n - 1} \frac{d}{dx} R_n(x). \quad (3.11)$$

Portanto, de (3.8) e (3.11), reescrevemos a equação (3.7) como

$$R_{n+1}(x) = [2(\beta + n)x + \alpha] R_n(x) + \frac{2(\beta + n)(1 + x^2)}{2\beta + n - 1} \frac{dR_n(x)}{dx},$$

de onde obtemos a relação de recorrência diferencial dos polinômios de Romanovski-Routh

$$(1 + x^2) \frac{dR_n(x)}{dx} = \frac{(2\beta + n - 1)}{2(\beta + n)} (R_{n+1}(x) - [2(\beta + n)x + \alpha] R_n(x)).$$

■

Todo polinômio clássico possui uma função geradora, que é uma função analítica em y cuja expansão de Taylor na variável y tem a forma

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} P_k(x). \quad (3.12)$$

Veja Chihara [10] .

O próximo resultado apresenta a função geradora dos polinômios de Romanovski-Routh.

Teorema 3.4. *Os polinômios de Romanovski-Routh têm como função geradora a aplicação*

$$R^{(\alpha, \beta)}(x, y) = \frac{(1 + A^2)^{\beta-1} \exp(-\alpha \cot^{-1} A)}{(1 - 2yA)(1 + x^2)^{\beta-1} \exp(-\alpha \cot^{-1} x)},$$

onde

$$A = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y(x + y)}}{2y}.$$

Demonstração. Vamos primeiro encontrar uma representação integral para o polinômio de Romanovski-Routh $R_n(x)$, onde também omitimos os parâmetros α e β fixos.

Como a função peso $\omega(x) = \omega^{(\alpha, \beta)}(x) = (1 + x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \cot^{-1} x}$ é analítica exceto nos pontos $\pm i$, assim como a função $\sigma(x)^n = (1 + x^2)^n$. Segue que, segundo Churchill [18], podemos usar a fórmula integral de Cauchy para derivadas afim de alcançar a relação

$$\frac{d^n}{dx^n} [\omega(x)\sigma(x)^n] = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(z)\sigma(z)^n}{(z - x)^{n+1}} dz, \quad (3.13)$$

onde x é real, z é complexo, e γ é uma curva fechada no plano complexo, que inclui o ponto real x , mas não os pontos $\pm i$.

Escrevendo o polinômio $R_n(x)$ como pela fórmula de Rodrigues (2.13) e aplicando a relação (3.13) obtemos

$$R_n(x) = \frac{1}{\omega(x)} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(z)\sigma(z)^n}{(z-x)^{n+1}} dz.$$

Substituindo o polinômio de Romanovski-Routh $R_n(x)$ na equação (3.12) segue a função geradora dos polinômios de Romanovski-Routh

$$R(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \left(\frac{k!}{2\pi i \omega(x)} \int_{\gamma} \frac{\omega(z)\sigma(z)^k}{(z-x)^{k+1}} dz \right),$$

isto é,

$$R(x, y) = \frac{1}{2\pi i \omega(x)} \int_{\gamma} \frac{\omega(z)}{z-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k \sigma(z)^k}{(z-x)^k} dz.$$

Supondo $w = \frac{y\sigma(z)}{z-x}$ com $|w| < 1$, temos da série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} w^k = \frac{1}{1-w},$$

que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y\sigma(z)}{z-x} \right)^k = \frac{z-x}{z-x-y\sigma(z)}.$$

Logo, reduzimos a função geradora $R(x, y)$ a

$$R(x, y) = \frac{1}{2\pi i \omega(z)} \int_{\gamma} \frac{\omega(x)}{z-x} \frac{z-x}{z-x-y\sigma(z)} dz,$$

isto é,

$$R(x, y) = \frac{1}{2\pi i \omega(z)} \int_{\gamma} \frac{\omega(x)}{z-x-y\sigma(z)} dz. \quad (3.14)$$

Para encontrar o valor dessa integral usamos o Teorema dos Resíduos, veja [19], que diz: sejam $f(z)$ uma função analítica em uma vizinhança de $z = a$, uma singularidade isolada, e γ uma curva fechada no interior dessa vizinhança e que contém $z = a$, então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \text{Res}(f(z), a).$$

Além disso, se $z = a$ é um pólo simples no interior da curva γ , então

$$\text{Res}(f(z), a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z).$$

Como $\sigma(z) = 1 + z^2$, os pontos em que a razão

$$\frac{\omega(z)}{z-x-y\sigma(z)} = \frac{\omega(z)}{z-x-y(1+z^2)} = \frac{\omega(z)}{-yz^2 + z - (x+y)}$$

possui singularidades são

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y(x + y)}}{2y} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4y(x + y)}}{2y}.$$

Note que supomos $|w| = \left| \frac{y\sigma(z)}{(z - x)} \right| < 1$, ou seja,

$$x - z < y\sigma(z) < z - x, \quad (3.15)$$

e disso segue que o zero z_1 está mais próximo do ponto real x do que o zero z_2 . De fato, substituindo $z = z_1$ na primeira desigualdade de (3.15) obtemos

$$x - \frac{1 - \sqrt{1 - 4y(x + y)}}{2y} < \frac{1 - \sqrt{1 - 4y(x + y)} - 2xy}{2y}$$

e, tomando $z = z_2$ na segunda desigualdade de (3.15) obtemos

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4y(x + y)} - 2xy}{2y} < \frac{1 + \sqrt{1 - 4y(x + y)}}{2y} - x.$$

Logo,

$$x - \frac{1 - \sqrt{1 - 4y(x + y)}}{2y} < \frac{1 + \sqrt{1 - 4y(x + y)}}{2y} - x$$

e aplicando o módulo obtemos que a distância entre z_1 e x é menor que a distância entre z_2 e x .

Como, pela fórmula de Cauchy, γ é qualquer caminho fechado contendo o ponto real x (e não contendo os pontos $\pm i$), podemos escolhê-lo de tal forma que contenha apenas o zero $z = z_1$, que está mais próximo de x .

Assim, usando o Teorema dos Resíduos, a equação (3.14) torna-se

$$R(x, y) = \frac{1}{\omega(x)} \text{Res} \left(\frac{\omega(z)}{z - x - y\sigma(z)}, z_1 \right)$$

e, como $z - x - y\sigma(z) = -y(z - z_1)(z - z_2)$ e z_1 é uma singularidade isolada, temos

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\frac{\omega(z)}{z - x - y\sigma(z)}, z_1 \right) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{\omega(z)}{-y(z - z_1)(z - z_2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} -\frac{\omega(z)}{y(z - z_2)} \\ &= -\frac{\omega(z_1)}{y(z_1 - z_2)} \\ &= \frac{\omega(z_1)}{\sqrt{1 - 4y(x + y)}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$R(x, y) = \frac{\omega(z_1)}{\omega(x) \sqrt{1 - 4y(x + y)}}.$$

Fazendo $A = z_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y(x+y)}}{2y}$ temos que $\sqrt{1 - 4y(x+y)} = 1 - 2yA$. Assim, encontramos a função geradora (3.12) dos polinômios de Romanovski-Routh

$$R(x, y) = \frac{\omega(A)}{(1 - 2yA)\omega(x)},$$

onde $A = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y(x+y)}}{2y}$. ■

Vamos agora estudar a ortogonalidade dos polinômios de Romanovski-Routh. Vimos que os momentos

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \cot^{-1} x} x^k dx$$

existem para $k < 1 - 2\beta$, quando $\beta < 0$. Disso, segue que apenas um número finito de polinômios de Romanovski-Routh satisfazem a relação de ortogonalidade (2.2). Logo, faz sentido a relação (2.34) que será finalmente demonstrada no resultado a seguir.

Teorema 3.5. *Se $R_m^{(\alpha, \beta)}(x)$ e $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, $m \neq n$, são polinômios de Romanovski-Routh de grau m e n respectivamente, então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_m^{(\alpha, \beta)}(x) R_n^{(\alpha, \beta)}(x) \omega^{(\alpha, \beta)}(x) dx = 0,$$

se, e somente se, $m + n < 1 - 2\beta$ e $\beta < 0$.

Demonstração. Da demonstração do Teorema 2.11 da ortogonalidade dos polinômios hipergeométricos, fazendo $y_n(x) = R_n(x)$ em (2.25), e omitindo os parâmetros α e β , podemos concluir que a integral

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} R_m(x) R_n(x) \omega(x) dx \\ &= \frac{1}{\lambda_m - \lambda_n} \{ \sigma(x) \omega(x) [R_m(x) R'_n(x) - R_n(x) R'_m(x)] \}_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

é nula quando $\lambda_m \neq \lambda_n$ e a condição de contorno (2.26) é válida, isto é,

$$\{ \sigma(x) \omega(x) [R_m(x) R'_n(x) - R_n(x) R'_m(x)] \}_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad (3.16)$$

Também mostramos que $\lambda_m \neq \lambda_n$ quando $m \neq n$. Logo, vamos analisar apenas a condição de contorno. Chamando

$$M(x) = (1 + x^2)^{\beta} e^{-\alpha \cot^{-1} x} [R_n(x) R'_m(x) - R_m(x) R'_n(x)]$$

podemos substituir a equação (3.16) por

$$\lim_{x \rightarrow \infty} M(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} M(x) = 0$$

e analisar os limites por partes. Escrevendo $y = -\alpha \cot^{-1} x$, temos que quando $x \rightarrow \infty$ segue que $y \rightarrow 0$ e quando $x \rightarrow -\infty$ segue que $y \rightarrow -\alpha\pi$. Logo, o limite da parte exponencial é uma constante positiva, sendo 1 ou $e^{-\alpha\pi}$. Os outros fatores se comportam como potências de x , a saber, x com expoente $2\beta + m + n - 1$.

Assim, quando o expoente $2\beta + m + n - 1$ for negativo sabemos que os limites existem e são nulos. Observe que, como $m, n \in \mathbb{N}$ e $n \neq m$, a condição $2\beta + m + n - 1 < 0$ só faz sentido se β for negativo.

Portanto, concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_m(x) R_n(x) \omega(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

se, e somente se, $m + n < 1 - 2\beta$ e $\beta < 0$. ■

Com argumento similar ao usado no Teorema 3.5 demonstramos o resultado a seguir.

Teorema 3.6. *Somente para os polinômios $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, com $0 \leq n < -\beta$, a integral abaixo converge*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (R_n^{(\alpha, \beta)}(x))^2 \omega^{(\alpha, \beta)}(x) dx.$$

Para demonstrar o próximo resultado precisamos da seguinte relação

$$\omega^{(\alpha, \beta)}(x) \sigma(x)^n = \omega^{(\alpha, \beta+n)}(x). \quad (3.17)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \omega^{(\alpha, \beta)}(x) \sigma(x)^n &= (1+x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \cot^{-1} x} (1+x^2)^n \\ &= (1+x^2)^{\beta+n-1} e^{-\alpha \cot^{-1} x} = \omega^{(\alpha, \beta+n)}(x). \end{aligned}$$

O teorema a seguir diz que cada polinômio de Romanovski-Routh é, a menos de uma constante, igual a derivada do polinômio de grau consecutivo, mas não da mesma família.

Teorema 3.7. *Os polinômios de Romanovski-Routh satisfazem a relação*

$$\frac{d}{dx} R_n^{(\alpha, \beta)}(x) = n(2\beta + n - 1) R_{n-1}^{(\alpha, \beta+1)}(x).$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Na Seção 2.2 vimos que a derivada de uma função hipergeométrica $F'(x)$ é solução da equação (2.8), ou seja,

$$\sigma(x) \frac{d^2}{dx^2} F'(x) + \tau_{(1)}(x) \frac{d}{dx} F'(x) + \lambda_{(1)} F'(x) = 0,$$

onde

$$\tau_{(1)}(x) = \tau(x) + \sigma'(x), \quad \lambda_{(1)} = \lambda + \tau'(x).$$

Tomando $\sigma(x) = 1 + x^2$, $\tau(x) = 2\beta x + \alpha$ e a constante $\lambda_n = -n(2\beta + n - 1)$, reescrevemos a equação acima por

$$(1+x^2) \frac{d^2}{dx^2} F'(x) + (2(\beta+1)x + \alpha) \frac{d}{dx} F'(x) = (n-1)(n+2\beta) F'(x), \quad (3.18)$$

onde a derivada $\frac{d}{dx} R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é solução.

O polinômio de Romanovski-Routh $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é solução da equação de Romanovski

$$(1+x^2) \frac{d^2}{dx^2} F(x) + (2\beta x + \alpha) \frac{d}{dx} F(x) = n(n+2\beta-1) F(x). \quad (3.19)$$

Note que fazendo $\beta = \beta + 1$ e $n = n - 1$ podemos transformar a equação (3.19) na equação (3.18). Logo, os polinômios $R_{n-1}^{(\alpha, \beta+1)}(x)$ e $\frac{d}{dx}R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ devem ser proporcionais, pois ambos são soluções da mesma equação.

De fato, vimos que a constante de normalização da fórmula generalizada de Rodrigues para os polinômios de Romanovski-Routh, com $m = 1$, é dada por (3.10), ou seja,

$$N_{n1} = n(2\beta + n - 1),$$

e assim, a derivada do polinômio de Romanovski-Routh é dada por (3.9) como

$$\frac{d}{dx}R_n^{(\alpha, \beta)}(x) = n(2\beta + n - 1) \frac{1}{\omega^{(\alpha, \beta)}(x)\sigma(x)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\omega^{(\alpha, \beta)}\sigma^n(x)].$$

Usando a relação (3.17) e a fórmula de Rodrigues (2.13), obtemos o resultado final

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}R_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= n(2\beta + n - 1) \frac{1}{\omega^{(\alpha, \beta+1)}(x)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\omega^{(\alpha, \beta+1)}\sigma^{n-1}(x)] \\ &= n(2\beta + n - 1)R_{n-1}^{(\alpha, \beta+1)}(x). \end{aligned}$$

■

3.2 Família $\mathcal{Q}^{(\alpha, \beta)}$

Nesta seção vamos apresentar a família de polinômios conhecidos por polinômios complementares de Romanovski-Routh $Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, que se relacionam com os polinômios de Romanovski-Routh da seguinte forma

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) = R_n^{(\alpha, \beta-n)}(x), \quad n \geq 0 \quad (3.20)$$

Logo, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, podemos definir os conjuntos

$$\mathcal{Q}^{(\alpha, \beta)} \equiv \{Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) : n \in \mathbb{N}\} = \{R_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) : n \in \mathbb{N}\},$$

que constituem em uma partição do conjunto dos polinômios de Romanovski-Routh $\mathcal{R}$, já que possuem um, e somente um, polinômio de cada grau, duas famílias distintas não compartilham de polinômios em comum e a união de todos esses conjuntos formam o conjunto $\mathcal{R}$.

Como fizemos na seção anterior vamos apresentar, para os polinômios complementares de Romanovski-Routh $Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, a fórmula de Rodrigues, a função geradora, a relação de recorrência diferencial e sua ortogonalidade. As demonstrações aqui apresentadas também seguem a referência [8].

Consideramos os parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixos.

Vamos primeiro encontrar a fórmula de Rodrigues. Sabemos que os polinômios $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ satisfazem

$$R_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{\omega^{(\alpha, \beta)}(x)} \frac{d^n}{dx^n}[\sigma(x)^n \omega^{(\alpha, \beta)}(x)],$$

logo,

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) = R_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) = \frac{1}{\omega^{(\alpha, \beta-n)}(x)} \frac{d^n}{dx^n}[\sigma(x)^n \omega^{(\alpha, \beta-n)}(x)]. \quad (3.21)$$

Como vimos anteriormente $\omega^{(\alpha, \beta)}(x)\sigma(x)^n = \omega^{(\alpha, \beta+n)}(x)$, então

$$\omega^{(\alpha, \beta-n)}(x)\sigma(x)^n = \omega^{(\alpha, \beta)}(x) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\omega^{(\alpha, \beta-n)}(x)} = \frac{\sigma(x)^n}{\omega^{(\alpha, \beta)}(x)}.$$

Finalmente, substituindo em (3.21), encontramos a fórmula de Rodrigues para os polinômios $Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)$,

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) \equiv \frac{\sigma(x)^n}{\omega^{(\alpha, \beta)}(x)} \frac{d^n}{dx^n} \omega^{(\alpha, \beta)}(x). \quad (3.22)$$

Isolando a n -ésima derivada da função peso na equação (3.22) obtemos

$$\frac{d^n}{dx^n} [\omega^{(\alpha, \beta)}(x)] = Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) \omega^{(\alpha, \beta)}(x) \sigma(x)^{-n}. \quad (3.23)$$

Logo, para $0 \leq m \leq n$

$$\frac{d^n}{dx^n} \omega^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \frac{d^m}{dx^m} \omega^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} [Q_m^{(\alpha, \beta)}(x) \omega^{(\alpha, \beta)}(x) \sigma(x)^{-m}].$$

Assim, substituindo a relação acima na equação (3.22) obtemos outra forma de representar os polinômios complementares de Romanovski-Routh

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\sigma(x)^n}{\omega^{(\alpha, \beta)}(x)} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} [Q_m^{(\alpha, \beta)}(x) \omega^{(\alpha, \beta)}(x) \sigma(x)^{-m}].$$

Agora, tomando $\beta = \beta - n$ na equação de Romanovski (3.36) temos que os polinômios complementares de Romanovski-Routh $Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ satisfazem a equação hipergeométrica

$$(1 + x^2)Q''(x) + [2(\beta - n)x + \alpha]Q'(x) - n(2\beta - n - 1)Q(x) = 0.$$

Nos valendo do Teorema 3.7 obtemos o próximo resultado, que diz que cada polinômio complementar de Romanovski-Routh é, a menos de uma constante, igual a derivada do polinômio consecutivo da mesma família (isto é, com os mesmos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Teorema 3.8. *Os polinômios complementares de Romanovski-Routh satisfazem a relação*

$$\frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) = n(2\beta - n - 1)Q_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x), \quad (3.24)$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Basta tomarmos a relação dada pelo Teorema 3.7, isto é,

$$\frac{d}{dx} R_n^{(\alpha, \beta)}(x) = n(2\beta + n - 1)R_{n-1}^{(\alpha, \beta+1)}(x)$$

e expressá-la em termos dos polinômios complementares de Romanovski-Routh. Para isso, chamamos $\beta = \beta - n$ e assim,

$$\frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) = n(2\beta - n - 1)Q_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x).$$

■

Como os polinômios complementares de Romanovski-Routh são polinômios de Romanovski-Routh com um parâmetro livre e outro dependente do grau do polinômio, também existe uma função geradora, $Q^{(\alpha,\beta)}(x, y)$, em forma fechada, para a família $\mathcal{Q}^{(\alpha,\beta)}$, que é uma função analítica em y da forma

$$Q^{(\alpha,\beta)}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} Q_k^{(\alpha,\beta)}(x). \quad (3.25)$$

Teorema 3.9. *Os polinômios complementares de Romanovski-Routh possuem uma função geradora na forma*

$$Q^{(\alpha,\beta)}(x, y) = \frac{\omega^{(\alpha,\beta)}(x + y(1 + x^2))}{\omega^{(\alpha,\beta)}(x)}.$$

Demonstração. Substituindo na equação (3.25) a definição do polinômio complementar de Romanovski-Routh, dada por (3.22), temos

$$\begin{aligned} Q^{(\alpha,\beta)}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \frac{\sigma(x)^k}{\omega^{(\alpha,\beta)}(x)} \frac{d^k}{dx^k} \omega^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &= \frac{1}{\omega^{(\alpha,\beta)}(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y\sigma(x))^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \omega^{(\alpha,\beta)}(x) \end{aligned}$$

e tomando $z = x + y\sigma(x) = x + y(1 + x^2)$ obtemos

$$Q^{(\alpha,\beta)}(x, y) = \frac{1}{\omega^{(\alpha,\beta)}(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - x)^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \omega^{(\alpha,\beta)}(x). \quad (3.26)$$

Note que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - x)^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \omega^{(\alpha,\beta)}(x) = \omega^{(\alpha,\beta)}(z),$$

pois o lado esquerdo da equação é a expansão de Taylor da função peso em torno do ponto x . Logo, substituindo em (3.26) obtemos a função geradora

$$Q^{(\alpha,\beta)}(x, y) = \frac{\omega^{(\alpha,\beta)}(z)}{\omega^{(\alpha,\beta)}(x)},$$

onde $z = x + y(1 + x^2)$. ■

O próximo resultado apresenta a relação de estrutura satisfeita pelos polinômios complementares de Romanovski-Routh.

Teorema 3.10. *Os polinômios complementares de Romanovski-Routh satisfazem a relação de recorrência diferencial*

$$(1 + x^2) \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) - [2(\beta - n - 1)x + \alpha] Q_n^{(\alpha,\beta)}(x). \quad (3.27)$$

Demonstração. Derivando o polinômio complementar de Romanovski dado por (3.22) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\omega^{(\alpha,\beta-n)}(x)} \frac{d^n}{dx^n} \omega^{(\alpha,\beta)}(x) \right] \\ &= - \frac{1}{[\omega^{(\alpha,\beta-n)}(x)]^2} \frac{d}{dx} \omega^{(\alpha,\beta-n)}(x) \frac{d^n}{dx^n} \omega^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &\quad + \frac{1}{\omega^{(\alpha,\beta-n)}(x)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \omega^{(\alpha,\beta)}(x) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Fazendo $n = n + 1$ na equação (3.22) obtemos

$$Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\sigma(x)}{\omega^{(\alpha,\beta-n)}(x)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \omega^{(\alpha,\beta)}(x)$$

e assim,

$$Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \sigma(x)^{-1} = \frac{1}{\omega^{(\alpha,\beta-n)}(x)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \omega^{(\alpha,\beta)}(x), \quad (3.29)$$

que é equivalente ao segundo termo da equação (3.28).

Derivando a função peso $\omega^{(\alpha,\beta-n)}(x)$ segue, da equação de Pearson (2.6), que

$$\frac{d}{dx} \omega^{(\alpha,\beta-n)}(x) = \frac{\omega^{(\alpha,\beta-n)}(x) [\tau(x) - \sigma'(x)]}{\sigma(x)},$$

onde, neste caso, $\tau(x) = 2(\beta - n)x + \alpha$ e $\sigma'(x) = 2x$. Diante disso,

$$\frac{d}{dx} \omega^{(\alpha,\beta-n)}(x) = \omega^{(\alpha,\beta-n)}(x) \sigma(x)^{-1} [2(\beta - n - 1)x + \alpha] \quad (3.30)$$

e, derivando n vezes a função peso $\omega^{(\alpha,\beta-n)}(x)$, segue da equação (3.23) que

$$\frac{d^n}{dx^n} [\omega^{(\alpha,\beta)}(x)] = Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) \omega^{(\alpha,\beta-n)}(x). \quad (3.31)$$

Logo, das equações (3.30) e (3.31) temos que o primeiro termo da equação (3.28) é dado por

$$-\frac{1}{[\omega^{(\alpha,\beta-n)}(x)]^2} \frac{d}{dx} \omega^{(\alpha,\beta-n)}(x) \frac{d^n}{dx^n} \omega^{(\alpha,\beta)}(x) = -\sigma^{-1}(x) [2(\beta - n - 1)x + \alpha] Q_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

Assim, voltando para a equação (3.28) obtemos

$$\frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -[2(\beta - n - 1)x + \alpha] \sigma(x)^{-1} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \sigma(x)^{-1} Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x),$$

isto é,

$$(1 + x^2) \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) - [2(\beta - n - 1)x + \alpha] Q_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

■

Desse resultado podemos encontrar uma relação de recorrência de três termos para os polinômios complementares de Romanovski-Routh. Basta substituir na relação de estrutura (3.27) a derivada do polinômio $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ dada na equação (3.24). Assim, para $n \geq 0$,

$$Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = [2(\beta - n - 1)x + \alpha] Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) + n(2\beta - n - 1)(1 + x^2) Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x),$$

com as condições iniciais $Q_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$ e $Q_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$.

Devido a este tipo de relação de recorrência, conhecida como relação de recorrência do tipo R_{II} , que os polinômios complementares de Romanovski-Routh foram estudados em [6] e [7] através de sua relação com polinômios ortogonais no círculo unitário.

Agora, vamos estudar a relação de ortogonalidade da família $\mathcal{Q}^{(\alpha,\beta)}$.

Teorema 3.11. *Os polinômios complementares de Romanovski-Routh, com $\beta < \delta - \frac{1}{2}$, satisfazem a seguinte relação*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^{(\alpha,\beta)}(x)}{(1+x^2)^{\frac{\delta}{2}}} \frac{Q_m^{(\alpha,\beta)}(x)}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}} \frac{Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} dx = 0, \quad m \neq n, \quad (3.32)$$

onde $\delta = 1$ se $m+n$ é ímpar e $\delta = 2$ se $m+n$ é par.

Demonstração. Vamos mostrar apenas o caso quando $m+n$ é par, pois o caso $m+n$ ímpar é análogo. Como $m \neq n$, suponhamos, sem perda de generalidade, que $m > n$. Considere

$$O_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^{(\alpha,\beta)}(x)}{\sigma(x)} \frac{Q_m^{(\alpha,\beta)}(x)}{\sigma(x)^{\frac{m}{2}}} \frac{Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\sigma(x)^{\frac{n}{2}}} dx. \quad (3.33)$$

Substituindo, na equação anterior, a fórmula de Rodrigues dos polinômios complementares de Romanovski-Routh (3.22), ou seja,

$$Q_m^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\sigma(x)^m}{\omega^{(\alpha,\beta)}(x)} \frac{d^m}{dx^m} \omega^{(\alpha,\beta)}(x)$$

obtemos

$$O_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\sigma(x)^{\frac{1}{2}(n-m)+1}} \frac{d^m}{dx^m} \omega^{(\alpha,\beta)}(x) dx. \quad (3.34)$$

Como $m+n$ é par e $m > n$, então $m-n-2$ é um inteiro não negativo par. Logo, $\sigma(x)^{\frac{1}{2}(m-n-2)} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}(m-n-2)}$ é um polinômio de grau $m-n-2$ e chamamos

$$P_{m-2}(x) := Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) \sigma(x)^{\frac{1}{2}(m-n-2)}$$

um polinômio de grau $m-2$.

Voltando à equação (3.34) segue que

$$O_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{m-2}(x) \frac{d^m}{dx^m} \omega^{(\alpha,\beta)}(x) dx.$$

Assim, integrando por partes $m-1$ vezes a equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} O_{m,n} &= \left[P_{m-2}(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \omega^{(\alpha,\beta)}(x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \left[\frac{d}{dx} P_{m-2}(x) \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} \omega^{(\alpha,\beta)}(x) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{m-2} \left[\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} P_{m-2}(x) \frac{d}{dx} \omega^{(\alpha,\beta)}(x) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} P_{m-2}(x) \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} \omega^{(\alpha,\beta)}(x) \right]_{-\infty}^{\infty}. \end{aligned}$$

Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$ a derivada

$$\tilde{P}_{m-k-1} := \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} P_{m-2}(x)$$

é um polinômio de grau $m-k-1$, enquanto que, pela equação (3.23), a $(m-k)$ -ésima derivada da função peso é dada por

$$\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} \omega^{(\alpha,\beta)}(x) = \omega^{(\alpha,\beta)}(x) \sigma(x)^{k-m} Q_{m-k}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

Dessa forma, podemos reescrever $O_{m,n}$ por

$$O_{m,n} = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \left[\tilde{P}_{m-k-1}(x) \frac{\omega^{(\alpha, \beta)}(x)}{\sigma(x)^{m-k}} Q_{m-k}^{(\alpha, \beta)}(x) \right]_{-\infty}^{\infty}. \quad (3.35)$$

Chamando de

$$\bar{P}_{2m-2k-1}(x) := \tilde{P}_{m-k-1}(x) Q_{m-k}^{(\alpha, \beta)}(x)$$

o polinômio de grau $2m - 2k - 1$, podemos calcular os limitantes

$$[M(x)]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} M(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} M(x),$$

onde

$$\begin{aligned} M(x) &= \omega^{(\alpha, \beta)}(x) \sigma(x)^{k-m} \bar{P}_{2m-2k-1}(x) \\ &= (1+x^2)^{\beta+k-m-1} e^{-\alpha \cot g^{-1} x} \bar{P}_{2m-2k-1}(x). \end{aligned}$$

Na demonstração do Teorema 3.5 vimos que o limite da parte exponencial é uma constante positiva, sendo 1 ou $e^{-\alpha\pi}$, e os outros fatores se comportam como potências de x , a saber x com expoente $2\beta - 3$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1+x^2)^{\beta+k-m-1} e^{-\alpha \cot g^{-1} x} \bar{P}_{2m-2k-1}(x) = 0$$

se, e somente se, o expoente $2\beta - 3$ for negativo.

Voltando para a equação (3.35) segue que a integral $O_{m,n}$ é nula se, e somente se, o parâmetro $\beta < \frac{3}{2}$. Logo, chamando $\delta = 2$ e considerando a definição de $O_{m,n}$ dada em (3.33) obtemos

$$O_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^{(\alpha, \beta)}(x)}{(1+x^2)^{\frac{\delta}{2}}} \frac{Q_m^{(\alpha, \beta)}(x)}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}} \frac{Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} dx = 0,$$

se, e somente se $\beta < \delta - \frac{1}{2}$. ■

Note que o Teorema 3.11 descreve uma relação de ortogonalidade infinita entre as funções $Q_m^{(\alpha, \beta)}(x)(1+x^2)^{-m/2}$ e $Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)(1+x^2)^{-n/2}$, que não são polinômios.

Em termos do polinômio de Romanovski-Routh com parâmetro $\beta < \delta - \frac{1}{2}$, como

$$\omega^{(\alpha, \beta)}(x) = \left(\sqrt{\omega^{(\alpha, \beta)}(x)} \right)^2 = \sqrt{\omega^{(\alpha, \beta-m)}(x) \sigma(x)^m} \sqrt{\omega^{(\alpha, \beta-n)}(x) \sigma(x)^n},$$

obtemos da equação (3.32) a relação de ortogonalidade infinita

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_m^{(\alpha, \beta-m)}(x) R_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) \sqrt{\omega^{(\alpha, \beta-m)}(x)} \sqrt{\omega^{(\alpha, \beta-n)}(x)} (1+x^2)^{-\frac{\delta}{2}} dx = 0, \quad m \neq n,$$

onde $\delta = 1$ se $m+n$ é ímpar e $\delta = 2$ se $m+n$ é par.

3.3 Relação entre os Polinômios de Romanovski-Routh e os Polinômios Complexos de Jacobi

Para observar a relação entre os polinômios de Romanovski-Routh e os polinômios complexos de Jacobi é necessário aplicar a transformação de x para ix .

Segundo Raposo e outros [8], apesar dos polinômios de Romanovski-Routh serem comumente considerados uma complexificação do polinômio de Jacobi, pois a mudança de x para ix transforma o coeficiente $(1 - x^2)$ em $(1 + x^2)$ na equação de Jacobi

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + n(n + \alpha + \beta + 1) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 0,$$

neste seção vemos que esta mudança de variável é insuficiente para chegarmos na equação de Romanovski

$$(1 + x^2) \frac{d^2}{dx^2} R_n^{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}(x) + [2\hat{\beta}x + \hat{\alpha}] \frac{d}{dx} R_n^{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}(x) = n(n + 2\hat{\beta} - 1) R_n^{(\alpha, \beta)}(x). \quad (3.36)$$

Nesta seção denotamos os parâmetros dos polinômios de Romanovski-Routh por $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ para não confundir com os parâmetros dos polinômios de Jacobi.

Também mostramos o conjunto $\mathcal{R}$ dos polinômios de Romanovski-Routh como um subconjunto da família dos polinômios complexos de Jacobi e, disso segue que o polinômio $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ também pode ser referido como Pseudo-Jacobi.

Podemos considerar a complexificação de uma função como uma aplicação que transforma funções reais com variáveis reais em funções complexas sob variáveis reais. Isto é, se $g : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real, definida num intervalo da reta, definimos uma complexificação de g como a função $g^* : U' \subset U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g^*(x) \equiv g(ix).$$

Vale observar que a relação $U' = U$ pode acontecer.

A complexificação conserva a soma e o produto, isto é, $(f + g)^*(x) = f^*(x) + g^*(x)$ e $(fg)^*(x) = f^*(x)g^*(x)$.

Quando $g(x)$ é um polinômio, as propriedades de continuidade e de diferenciabilidade são respeitadas. Então, as derivadas com respeito a x satisfazem

$$\frac{d^n}{dx^n} g^*(x) = \left(\frac{d(ix)}{dx} \right)^n \frac{d^n}{d(ix)^n} g(ix) = i^n \left(\frac{d^n}{dx^n} g(x) \right)^*, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, se a função $g(x)$ é solução de uma equação hipergeométrica

$$\sigma(x) \frac{d^2}{dx^2} g(x) + \tau(x) \frac{d}{dx} g(x) + \lambda g(x) = 0,$$

então $g^*(x)$ é solução da complexificação desta equação hipergeométrica, ou seja,

$$\sigma(ix) \frac{d^2}{d(ix)^2} g(ix) + \tau(ix) \frac{d}{d(ix)} g(ix) + \lambda g(ix) = 0,$$

ou melhor,

$$\frac{1}{i^2} \sigma(ix) \frac{d^2}{dx^2} g^*(x) + \frac{1}{i} \tau(ix) \frac{d}{dx} g^*(x) + \lambda g^*(x) = 0.$$

Assim, a complexificação do polinômio de Jacobi $(P_n^{(\alpha,\beta)})^*(x) \equiv P_n^{(\alpha,\beta)}(ix)$ satisfaz a equação

$$(1+x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_n^{(\alpha,\beta)}(ix) + i[\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)ix]\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(ix) - n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha,\beta)}(ix) = 0. \quad (3.37)$$

Note que a única semelhança entre a equação complexa de Jacobi (3.37) com parâmetros reais e a equação de Romanovski, dada em (3.36), é $\sigma(x) = 1 + x^2$. Logo, supor $x = ix$ na equação de Jacobi é insuficiente para transformá-la na equação de Romanovski.

Agora, tomando $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, com $\alpha = a + ib$ e $\beta = a - ib$ em (3.37) obtemos

$$(1+x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_n^{(a+ib,a-ib)}(ix) + [2b + (2a+2)x]\frac{d}{dx}P_n^{(a+ib,a-ib)}(ix) - n(n+2a+1)P_n^{(a+ib,a-ib)}(ix) = 0, \quad (3.38)$$

que se relaciona perfeitamente com a equação de Romanovski (3.36) com parâmetros reais $\hat{\alpha} = 2b$ e $\hat{\beta} = a + 1$.

Portanto, para obtermos a equação de Romanovski através da equação de Jacobi precisamos estender a definição do polinômio de Jacobi no plano complexo, com $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$, e restringir a variável $z = ix$ e os parâmetros conjugados, isto é, $\beta = \bar{\alpha}$.

Sabemos de [17] que o polinômio de Jacobi de grau $n \in \mathbb{N}$, $z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, é dado por

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (z-1)^k (1+z)^{n-k} \quad (3.39)$$

ou, equivalentemente, pela fórmula de Rodrigues com constante de normalização $N_n = 1$, por

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = (1-z)^{-\alpha} (1+z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} [(1-z)^{n+\alpha} (1+z)^{n+\beta}],$$

e satisfaz a equação complexa de Jacobi (3.37) quando $z = ix$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Assim, se $\beta = \bar{\alpha}$, então $P_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}(ix)$ também soluciona a equação (3.38) equivalente à equação de Romanovski.

Para relacionar o polinômio complexo de Jacobi $P_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}(ix)$ ao polinômio de Romanovski-Routh precisamos mostrar que ele é um polinômio real, e para isso, basta mostrar que o seu conjugado é ele mesmo.

Podemos calcular o conjugado do polinômio $P_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}(ix)$ por (3.39) como

$$\overline{P_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}(ix)} = P_n^{(\bar{\alpha},\alpha)}(-ix) = n! \sum_{k=0}^n \binom{n+\bar{\alpha}}{n-k} \binom{n+\alpha}{k} (1+ix)^k (ix-1)^{n-k}.$$

Logo,

$$\overline{P_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}(ix)} = (-1)^n P_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}(ix), \quad (3.40)$$

isto é, para n par, $P_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}(ix)$ é uma função real, enquanto que para n ímpar, $P_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}(ix)$ é uma função imaginária. Portanto, $i^n P_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}(ix)$ é uma função real para todo $n \in \mathbb{N}$ e também é solução da equação de Romanovski (3.36).

Como a solução polinomial de uma equação diferencial hipergeométrica é única para cada grau, a menos de uma constante, concluímos que $i^n P_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}(ix)$ é o polinômio de

Romanovski-Routh $R_n^{(2b,a+1)}(x)$, com constante de normalização da fórmula de Rodrigues $N_n = 1$. Assim,

$$R_n^{(2b,a+1)}(x) = i^n P_n^{(a+ib,a-ib)}(ix), \quad (3.41)$$

ou ainda, para $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \mathbb{R}$,

$$R_n^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})}(x) = i^n P_n^{(\hat{\beta}-1+\frac{i}{2}\hat{\alpha},\hat{\beta}-1-\frac{i}{2}\hat{\alpha})}(ix). \quad (3.42)$$

Note que em (3.42) foram consideradas as mesmas normalizações para $R_n^{(\hat{\alpha},\hat{\beta})}(x)$ e $P_n^{(\hat{\beta}-1+\frac{i}{2}\hat{\alpha},\hat{\beta}-1-\frac{i}{2}\hat{\alpha})}(ix)$. Para o caso de normalizações distintas, a igualdade anterior é verdadeira a menos de uma constante.

Finalmente, de (3.42), temos a família dos polinômios de Romanovski-Routh como um subconjunto da família dos polinômios complexos de Jacobi e, devido a essa relação, os polinômios de Romanovski-Routh também são chamados de Pseudo-Jacobi.

3.4 Zeros

Nesta seção apresentamos algumas propriedades dos zeros dos polinômios de Romanovski-Routh com $n \in \mathbb{N}^*$ fixo e parâmetro $\beta < 1 - n$. Visto que, como esta família satisfaz uma relação de ortogonalidade para um número finito de polinômios, haverá certas particularidades quanto a seus zeros. Contudo, vale ressaltar que no Corolário 3.2 consta uma propriedade dos zeros do polinômio de Romanovski-Routh para o caso em que o parâmetro β satisfaz as seguintes condições

$$1 - n < \beta < \frac{1}{2} - \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad \beta \neq \frac{3}{2} - n, \dots, -\frac{n}{2},$$

que diz que o polinômio $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ possui pelo menos $2 \lfloor -\beta \rfloor - n + 1$ zeros reais, devido a sua quase-ortogonalidade. Seguimos, aqui, a referência [9].

No Teorema 3.5 vimos que os polinômios de Romanovski-Routh com parâmetro $\beta < 0$ fixo satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_m^{(\alpha,\beta)}(x) R_n^{(\alpha,\beta)}(x) \omega(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

se, e somente se, $m + n < 1 - 2\beta$. Note que, se supormos $\beta < 1 - n$, com $n \in \mathbb{N}^*$ fixo, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_m^{(\alpha,\beta)}(x) R_n^{(\alpha,\beta)}(x) \omega(x) dx = 0, \quad 0 \leq m < n,$$

que é equivalente a ortogonalidade finita definida no Teorema 3.5.

Sabemos, da Seção 2.1, que os zeros de uma família de polinômios ortogonais são reais, distintos e pertencentes ao intervalo de ortogonalidade. Logo, tomando $n \in \mathbb{N}^*$, segue que os zeros de $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ são reais e distintos, quando $\beta < 1 - n$.

Para as próximas seções consideramos $n \in \mathbb{N}^*$ fixo e denotamos os zeros do polinômio de Romanovski-Routh $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, com $\beta < 1 - n$, por

$$x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n},$$

ou seja, ordenados em ordem crescente.

3.4.1 Limitantes dos zeros extremos

Nesta seção vamos apresentar alguns limitantes inferiores e superiores para os zeros extremos do polinômio de Romanovski-Routh $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, isto é, para $x_{n,1}$ e $x_{n,n}$, segundo [9].

Antes do primeiro teorema precisamos apresentar uma propriedade, provada na referência [20].

Propriedade 3.12. Seja $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais e $g_{n-1}(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ tal que

$$g_{n-1}(x) = a(x)F_{n+1}(x) - (x - A_n)b(x)F_n(x), \quad (3.43)$$

com A_n constante e, $a(x)$ e $b(x)$ funções. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ fixo, A_n é um limitante inferior do maior zero de $F_{n+1}(x)$ e um limitante superior do menor zero de $F_{n+1}(x)$.

O resultado a seguir apresenta limitantes superiores para o menor zero de $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, isto é, $x_{n,1}$, e limitantes inferiores para o maior zero de $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, isto é, $x_{n,n}$.

Teorema 3.13. *Seja $n \in \mathbb{N}^*$ e $\beta < 1 - n$. Então,*

- (i) $x_{n,1} < -\frac{\alpha(\beta-1)}{2(n+\beta-1)(n+\beta)} < x_{n,n}$;
- (ii) $x_{n,1} < -\frac{\alpha}{2(n+\beta-1)} < x_{n,n}$;
- (iii) $x_{n,1} < -\frac{\alpha}{2\beta} < x_{n,n}$.

Demonstração. (i) Considere a relação de recorrência dos polinômios de Romanovski-Routh na forma mônica (3.2), isto é,

$$\begin{aligned} \hat{R}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) &= \left(x + \frac{\alpha(\beta-1)}{2(n+\beta-1)(n+\beta)} \right) \hat{R}_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &\quad + \frac{n(n+2\beta-2)((n+\beta-1)^2 + (\alpha/2)^2)}{(2n+2\beta-3)(2n+2\beta-1)(n+\beta-1)^2} \hat{R}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x). \end{aligned}$$

Logo, pelo Propriedade 3.12, segue que $a(x) = 1$, $b(x) = 1$ e

$$A_n = -\frac{\alpha(\beta-1)}{2(n+\beta-1)(n+\beta)}$$

um limitante inferior de $x_{n,n}$ e um limitante superior de $x_{n,1}$, ou seja,

$$x_{n,1} < -\frac{\alpha(\beta-1)}{2(n+\beta-1)(n+\beta)} < x_{n,n}.$$

(ii) Na referência [21] encontramos a seguinte relação entre polinômios de Jacobi

$$\begin{aligned} \frac{1-x^2}{2} P_{n-1}^{(\hat{\alpha}+1, \hat{\beta}+1)}(x) &= 2 \left(x + \frac{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}{2n + \hat{\alpha} + \hat{\beta} + 2} \right) P_n^{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}(x) \\ &\quad - \frac{4(n+1)}{2n + \hat{\alpha} + \hat{\beta} + 2} P_{n+1}^{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}(x). \end{aligned}$$

Substituindo n por $n - 1$, $\hat{\alpha}$ por $a + ib$, $\hat{\beta}$ por $a - ib$ e x por ix na equação anterior obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1 - (ix)^2}{2} P_{n-2}^{(a+1+ib, a+1-ib)}(x) &= 2 \left(ix + \frac{2ib}{2n+2a} \right) P_{n-1}^{(a+ib, a-ib)}(x) \\ &\quad - \frac{4n}{2n+2a} P_n^{(a+ib, a-ib)}(x) \end{aligned}$$

e, considerando a relação entre os polinômios complexos de Jacobi e os polinômios de Romanovski-Routh, dada em (3.41), temos

$$\frac{1+x^2}{2} (i)^{-2} R_{n-2}^{(2b, a+2)}(x) = 2 \left(x + \frac{b}{n+a} \right) R_{n-1}^{(2b, a+1)}(x) - \frac{2n}{n+a} R_n^{(2b, a+1)}(x).$$

Portanto, escolhendo os parâmetros do polinômio de Romanovski-Routh da forma $\alpha = 2b$ e $\beta = a + 1$, segue da Propriedade 3.12 que

$$x_{n,1} < A_n = -\frac{b}{n+a} = -\frac{\alpha}{2(n+\beta-1)} < x_{n,n}.$$

- (iii) Na referência [21] também encontramos a seguinte relação entre polinômios de Jacobi

$$G_n(1-x^2)^2 P_{n-1}^{(\hat{\alpha}+2, \hat{\beta}+2)}(x) = \left(x - \frac{\hat{\beta} - \hat{\alpha}}{\hat{\alpha} + \hat{\beta} + 2} \right) P_n^{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}(x) - H_n C(x) P_{n+1}^{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}(x),$$

onde $C(x)$ é um polinômio de grau 2 que depende de n , α e β ,

$$G_n = \frac{(n + \hat{\alpha} + \hat{\beta} + 2)(n + \hat{\alpha} + \hat{\beta} + 3)(2n + \hat{\alpha} + \hat{\beta} + 2)}{8(n + \hat{\alpha} + 1)(n + \hat{\beta} + 1)(\hat{\alpha} + \hat{\beta} + 2)}$$

e

$$H_n = \frac{2(n+1)}{(n + \hat{\alpha} + 1)(n + \hat{\beta} + 1)(\hat{\alpha} + \hat{\beta} + 2)}.$$

Substituindo n por $n - 1$, $\hat{\alpha}$ por $a + ib$, $\hat{\beta}$ por $a - ib$ e x por ix na equação anterior, e, novamente, considerando a relação entre os polinômios complexos de Jacobi e os polinômios de Romanovski-Routh, dada em (3.41), obtemos

$$G_{n-1}(1+x^2)^2 (i)^{-2} R_{n-2}^{(2b, a+3)}(x) = \left(x - \frac{-b}{a+1} \right) R_{n-1}^{(2b, a+1)}(x) - H_{n-1} C(x) R_n^{(2b, a+1)}(x).$$

Logo, chamando $\alpha = 2b$ e $\beta = a + 1$, segue da Propriedade 3.12 que

$$x_{n,1} < A_n = -\frac{b}{a+1} = -\frac{\alpha}{2\beta} < x_{n,n}.$$

■

Pelos itens (i) e (ii) do Teorema 3.13 mostra-se que fixando $n \in \mathbb{N}^*$ e tomando β se aproximando de $(1 - n)$ obtemos que o menor zero de $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ tende a $-\infty$ e o maior zero de $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ tende a $+\infty$, quando α é não nulo. De fato,

$$\lim_{\beta \rightarrow (-n+1)^-} \frac{-\alpha}{2(n + \beta - 1)} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha < 0, \\ -\infty, & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

e

$$\lim_{\beta \rightarrow (-n+1)^-} \frac{-\alpha(\beta - 1)}{2(n + \beta - 1)(n + \beta)} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha > 0, \\ -\infty, & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Assim, quando α é positivo, $\frac{-\alpha}{2(n+\beta-1)}$ é limitante superior do menor zero de $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ de tal forma que, quando β se aproxima de $(1 - n)$, então $x_{n,1}$ tende a $-\infty$. E, $\frac{-\alpha(\beta-1)}{2(n+\beta-1)(n+\beta)}$ é um limitante inferior do maior zero de $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ de tal forma que, quando β se aproxima de $(1 - n)$, então $x_{n,n}$ tende a $+\infty$. Analogamente provamos para $\alpha < 0$.

Observe que, neste caso, o grau do polinômio $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é no máximo $n - 2$.

A seguir, apresentamos um resultado que caracteriza o método, introduzido por Ismail e Li em [22] e reproduzido em [11], para obter os limitantes do intervalo que contém os zeros de um polinômio. Sua demonstração pode ser encontrada em [11].

Como vamos usar sequência encadeada, começamos definindo-a, segundo [11], por $\{c_n : n = 1, 2, \dots, N\}$, com $N \leq \infty$, de tal forma que existe outra sequência $\{g_n : n = 0, 1, \dots, N\}$ que satisfaz

$$c_n = g_n(1 - g_{n-1}), \quad n > 0, \quad 0 < g_n < 1, \quad 0 \leq g_0 < 1.$$

A sequência $\{g_n\}_{n \geq 0}$ é chamada sequência de parâmetros da sequência encadeada $\{c_n\}_{n \geq 0}$. Além disso, essa sequência será constante se, e somente se,

$$0 < c_n \leq \frac{1}{4 \cos^2(\pi/(N+1))}.$$

Muitas propriedades sobre sequência encadeada podem ser encontradas em [10].

Teorema 3.14. *Seja $\{\hat{F}_n(x)\}$ uma sequência de polinômios, na forma mônica, que satisfaçam a relação de recorrência de três termos (2.3), com $\beta_n > 0$, para $1 \leq n \leq N$, e seja $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência encadeada. Suponhamos*

$$A = \min\{y_n; 0 < n < N\} \quad e \quad B = \max\{x_n; 0 < n < N\}, \quad (3.44)$$

onde x_n e y_n , $y_n \leq x_n$, são raízes da equação

$$(x - \alpha_n)(x - \alpha_{n-1})c_n = \beta_n,$$

ou seja,

$$x_n, y_n = \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n-1}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha_n - \alpha_{n-1})^2 + 4\frac{\beta_n}{c_n}}.$$

Então, os zeros de $\hat{F}_N(x)$ pertencem ao intervalo (A, B) .

Note que A é um limitante inferior do menor zero de $\hat{F}_N(x)$ e B é um limitante superior do maior zero de $\hat{F}_N(x)$. Além disso, tomaremos a sequência encadeada constante $\{c\} = \left\{ \frac{1}{4 \cos^2(\pi/(N+1))} \right\}$.

Segue a aplicação do Teorema 3.14 para a relação de recorrência dos polinômios de Romanovski-Routh na forma mônica (3.2).

Teorema 3.15. *Sejam $N \in \mathbb{N}^*$, $\beta < 1 - N$ e $\alpha > 0$. Então, denotando*

$$S(n) = \sqrt{\left(\frac{\alpha(1-\beta)}{2(n+\beta-2)(n+\beta)}\right)^2 + \frac{4n(n+2\beta-2)((n+\beta-1)^2 + (\alpha/2)^2)}{(2n+2\beta-3)(2n+2\beta-1)} \cos^2 \frac{\pi}{N+1}},$$

temos

$$(i) \ x_{N,1} > A = \min_{0 \leq n < N} \frac{\alpha(\beta-1)}{2(n+\beta-2)(n+\beta)} - \frac{S(n)}{n+\beta-1};$$

$$(ii) \ x_{N,N} < B = \max_{0 \leq n < N} \frac{\alpha(\beta-1)}{2(n+\beta-2)(n+\beta)} + \frac{S(n)}{n+\beta-1}.$$

Demonstração. Sabemos que os polinômios de Romanovski-Routh na forma mônica, $\hat{R}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, satisfazem a relação de recorrência de três termos (3.2) com coeficientes

$$\alpha_n = \frac{\alpha(\beta-1)}{2(n+\beta-1)(n+\beta)} \quad \text{e} \quad \beta_n = \frac{n(n+2\beta-2)((n+\beta-1)^2 + (\alpha/2)^2)}{(2n+2\beta-3)(2n+2\beta-1)(n+\beta-1)^2} > 0.$$

Portanto, segue do Teorema 3.14 que

$$x_n, y_n = \frac{\alpha(\beta-1)}{2(n+\beta-2)(n+\beta)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\alpha(1-\beta)}{(n+\beta-2)(n+\beta-1)(n+\beta)}\right)^2 + \frac{4}{c_n} \beta_n}.$$

Suponhamos $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência encadeada constante de tal forma que $c_n = c = \frac{1}{4 \cos^2(\pi/(N+1))}$. Logo,

$$x_n, y_n = \frac{\alpha(\beta-1)}{2(n+\beta-2)(n+\beta)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\alpha(1-\beta)}{(n+\beta-2)(n+\beta-1)(n+\beta)}\right)^2 + 16\beta_n \cos^2 \frac{\pi}{N+1}}$$

Como $\beta < 1 - n$ (pois $n < N$) e $\alpha > 0$, temos que $\frac{\alpha(\beta-1)}{2(n+\beta-2)(n+\beta)} < 0$. Consequentemente, y_n está associado à subtração e x_n à soma da raiz.

Vamos, primeiro, considerar o caso da subtração. Então, pela equação (3.44) temos que $A = \min\{y_n; 0 \leq n < N\}$, ou seja,

$$A = \min_{0 \leq n < N} \frac{\alpha(\beta-1)}{2(n+\beta-2)(n+\beta)} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\alpha(1-\beta)}{(n+\beta-2)(n+\beta-1)(n+\beta)}\right)^2 + 16\beta_n \cos^2 \frac{\pi}{N+1}},$$

onde

$$\beta_n = \frac{n(n+2\beta-2)((n+\beta-1)^2 + (\alpha/2)^2)}{(2n+2\beta-3)(2n+2\beta-1)(n+\beta-1)^2}.$$

Logo,

$$A = \min_{0 \leq n < N} \frac{\alpha(\beta-1)}{2(n+\beta-2)(n+\beta)} - \frac{1}{n+\beta-1} \sqrt{\left(\frac{\alpha(1-\beta)}{2(n+\beta-2)(n+\beta)}\right)^2 + 4\tilde{\beta}_n \cos^2 \frac{\pi}{N+1}},$$

onde

$$\tilde{\beta}_n = \frac{n(n+2\beta-2)((n+\beta-1)^2 + (\alpha/2)^2)}{(2n+2\beta-3)(2n+2\beta-1)}.$$

Analogamente para o caso da adição temos

$$B = \max_{1 \leq n \leq N-1} \frac{\alpha(\beta-1)}{2(n+\beta-2)(n+\beta)} + \frac{1}{n+\beta-1} \sqrt{\left(\frac{\alpha(1-\beta)}{2(n+\beta-2)(n+\beta)}\right)^2 + 4\tilde{\beta}_n \cos^2 \frac{\pi}{N+1}}.$$

■

3.4.2 Motonicidade dos zeros

Para o próximo resultado vamos primeiro enunciar o Teorema de Markov (veja Teorema 6.12.1 em [23]).

Considere $n \in \mathbb{N}^*$ e $\{F_n^\gamma(x)\}$ uma sequência de polinômios ortogonais com relação a função peso $\omega(x, \gamma)$, dependente do parâmetro $\gamma \in (c, d)$, no intervalo (a, b) . Denotamos os zeros de $F_n^\gamma(x)$ por $y_{n,1} < y_{n,2} < \dots < y_{n,n}$.

Teorema 3.16 (Markov). *Suponhamos a existência e continuidade da derivada da função peso $\omega(x, \gamma)$ em função de γ , ou seja, $\frac{d}{d\gamma}\omega(x, \gamma)$ para $x \in (a, b)$ e $\gamma \in (c, d)$, e a convergência uniforme das integrais*

$$\int_a^b x^\nu \frac{d}{d\gamma}\omega(x, \gamma)dx, \quad \nu = 0, 1, \dots, 2n-1,$$

no intervalo fechado $[e, f] \subset (c, d)$. O ν -ésimo zero $y_{n,\nu}$ (para um valor fixo ν) é uma função crescente em γ , se $\frac{\frac{d}{d\gamma}\omega(x, \gamma)}{\omega(x, \gamma)}$ for uma função crescente em x , $a < x < b$.

Assim, segue o resultado que diz que a monotonicidade dos zeros do polinômio de Romanovski-Routh $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ depende do parâmetro α .

Teorema 3.17. *Fixando $n \in \mathbb{N}^*$, para $\beta < 1 - n$ os zeros de $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ crescem quando o parâmetro α cresce.*

Demonstração. Vimos que a integral

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \cotg^{-1} x} x^n dx$$

converge para $k < 1 - 2\beta$, quando o parâmetro $\beta < 0$, como é o caso de $\beta < 1 - n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Logo, a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^\nu \frac{d}{d\alpha} \omega^{(\alpha, \beta)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} -\cotg^{-1}(x) (1+x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \cotg^{-1} x} x^\nu dx,$$

também converge quando $\nu < 1 - 2\beta < 2n - 1$, isto é, para $\nu = 0, 1, \dots, 2n - 1$. Dessa forma, as condições do Teorema de Markov são satisfeitas.

Basta verificar se a razão $\frac{\frac{d}{d\alpha}\omega^{(\alpha, \beta)}(x)}{\omega^{(\alpha, \beta)}(x)}$ é uma função crescente. De fato,

$$\frac{\frac{d}{d\alpha}\omega^{(\alpha, \beta)}(x)}{\omega^{(\alpha, \beta)}(x)} = \frac{-(1+x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \cotg^{-1} x} \cotg^{-1} x}{(1+x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \cotg^{-1} x}} = -\cotg^{-1} x$$

e, como $\cotg^{-1} x$ é uma função decrescente, conclui-se que a razão $\frac{\frac{d}{d\alpha}\omega^{(\alpha, \beta)}(x)}{\omega^{(\alpha, \beta)}(x)}$ é uma função crescente em x . Logo, pelo Teorema de Markov, o ν -ésimo zero de $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é uma função crescente em α , ou seja, os zeros de $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ crescem quando α cresce. ■

Por outro lado, nada podemos falar da monotonicidade dos zeros do polinômio de Romanovski em função do parâmetro β , pois a razão

$$\frac{\frac{d}{d\beta}\omega^{(\alpha, \beta)}(x)}{\omega^{(\alpha, \beta)}(x)} = \frac{(1+x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \cotg^{-1} x} \ln(1+x^2)}{(1+x^2)^{\beta-1} e^{-\alpha \cotg^{-1} x}} = \ln(1+x^2)$$

é uma função não monótona, e assim, não é possível usar o Teorema de Markov.

Para que possamos falar do parâmetro β , vamos enunciar o próximo teorema que é uma extensão do Teorema de Markov, para função peso par (veja [24]).

Teorema 3.18. *Seja $\omega(x, \gamma)$ uma função peso par, dependente do parâmetro $\gamma \in (c, d)$, no intervalo $(-a, a)$, $a > 0$. Suponhamos a existência e continuidade da derivativa $\frac{d}{d\gamma}\omega(x, \gamma)$ para $x \in (-a, a)$ e $\gamma \in (c, d)$, e a convergência uniforme das integrais*

$$\int_a^b x^\nu \frac{d}{d\gamma}\omega(x, \gamma)dx, \quad \nu = 0, 1, \dots, 2n-1,$$

no intervalo fechado $[e, f] \subset (c, d)$. O ν -ésimo zero $y_{n,\nu}$ (para um valor fixo ν) é uma função crescente em γ , se $\frac{\frac{d}{d\gamma}\omega(x, \gamma)}{\omega(x, \gamma)}$ for uma função crescente em x , $0 \leq x < a$.

Segue o teorema que relaciona a monotonicidade dos zeros de $R_n^{(0,\beta)}(x)$ com o parâmetro β .

Teorema 3.19. *Seja $\beta < 1 - n$ e $\alpha = 0$, então os zeros positivos de $R_n^{(0,\beta)}(x)$ crescem conforme o parâmetro β cresce.*

Demonstração. Quando $\alpha = 0$, a função peso $\omega^{(0,\beta)}(x) = (1 + x^2)^{\beta-1}$ é uma função par em x . Como a razão

$$\frac{\frac{d}{d\beta}\omega^{(0,\beta)}(x)}{\omega^{(0,\beta)}(x)} = \frac{(1 + x^2)^{\beta-1} \ln(1 + x^2)}{(1 + x^2)^{\beta-1}} = \ln(1 + x^2)$$

é uma função crescente para x positivo, segue, do Teorema 3.18, que os zeros positivos de $R_n^{(0,\beta)}(x)$ crescem a medida que o parâmetro β cresce. ■

Note que, como neste caso a função peso é par, segue da Seção 2.1 que os zeros do polinômio de Romanovski-Routh são simétricos com respeito a origem. Logo, os zeros negativos de $R_n^{(0,\beta)}(x)$ decrescem quando β cresce.

4 Polinômios de Romanovski-Routh na Física Quântica

Neste capítulo destacamos a aplicação dos polinômios de Romanovski-Routh no problema de potencial hiperbólico de Scarf (Scarf II). Para isso, discorremos uma breve introdução à Mecânica Quântica, onde apresentamos a equação de Schrödinger, que foi desmembrada afim de obter como solução uma família de polinômios ortogonais, neste caso, os polinômios de Romanovski-Routh.

4.1 Breve Introdução à Mecânica Quântica

Nesta seção usamos como base as referências [25, 26] e [27]. A Mecânica Quântica é o ramo da Física que estuda o comportamento de corpos subatômicos. A energia total de um sistema físico pode ser descrita pelo operador auto-adjunto

$$H = T + V, \quad (4.1)$$

chamado operador Hamiltoniano, onde T é a energia cinética e V a energia potencial do sistema.

A principal equação da Mecânica Quântica é a chamada Equação de Schrödinger independente do tempo, que é um problema de autovalor para o Hamiltoniano H , dada por

$$H\psi = E\psi,$$

onde o autovalor correspondente E é a energia de uma dada partícula cujo estado é descrito por ψ , chamada função de onda. A autofunção ψ atua como solução do problema e é ortogonal, veja [26].

Na sua forma mais geral a equação de Schrödinger descreve como o estado quântico de um sistema físico (ou seja, a função de onda ψ) muda com o tempo. Em particular, para sistemas estacionários, em uma dimensão, a equação de Schrödinger independente do tempo para uma partícula escreve-se da seguinte forma

$$H\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (4.2)$$

onde $\psi(x)$ é a função de onda independente do tempo, $\hbar$ é a constante reduzida de Planck, μ é a massa da partícula, $V(x)$ é a função energia potencial e E é a energia do sistema. O operador energia cinética $T(x)$ da equação de Schrödinger é dado por

$$T(x) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2}.$$

A constante de Planck, representada por h , é uma das constantes fundamentais da Física e vale

$$h = 6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s},$$

de onde tira-se a constante reduzida de Plank, que é a abreviação para $\frac{h}{2\pi}$. Logo,

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054\,571\,68(18) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s},$$

onde $J \cdot s$ significa Joule·segundo.

4.2 Polinômios Ortogonais na Mecânica Quântica

Nesta seção mostramos como os polinômios ortogonais aparecem naturalmente na Mecânica Quântica e como o método de separação de variáveis pode ser usado para resolver a equação de Schrödinger em função de polinômios ortogonais. Usamos as referências [13, 19, 26] e [28].

A equação de Schrödinger (4.2) pode ser escrita em coordenadas esféricas da forma

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) + V\psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi), \quad (4.3)$$

onde o operador Laplaciano é

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

com $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\varphi \in [0, \pi]$.

Seja o potencial V dado por

$$V(r, \theta) = V_1(r) + \frac{V_2(\theta)}{r^2}. \quad (4.4)$$

Como queremos encontrar soluções separáveis, fazemos

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi),$$

onde $R(r)$ é chamada função de onda radial e $Y(\theta, \varphi)$ função de onda angular. Então, a equação (4.3) passa a ser

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{Y}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right] + (V - E)RY = 0.$$

Multiplicando os dois lados da equação por $-\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{r^2}{R(r)Y(\theta, \varphi)}$ temos

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{Y \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} r^2 (V_1 + \frac{V_2}{r^2} - E) = 0.$$

Como uma parte da equação acima depende de r e outra depende de θ e φ , lembrando que $V(r, \theta) = V_1(r) + \frac{V_2(\theta)}{r^2}$, podemos separar a equação anterior em duas partes. Seja $l(l+1)$ a constante de separação, então

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{2\mu}{\hbar^2} r^2 (V_1 - E) = l(l+1) \quad (4.5)$$

é chamada equação radial e

$$\frac{1}{Y \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} V_2 = -l(l+1) \quad (4.6)$$

é chamada equação angular.

Para encontrarmos a equação que depende somente de θ , multiplicamos a equação angular (4.6) por $\sin^2(\theta)$ e separamos a função de onda angular em termos das variáveis θ e φ , isto é, $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Logo,

$$\frac{1}{\Theta} \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \sin^2(\theta) \left(l(l+1) - \frac{2\mu}{\hbar^2} V_2 \right) = 0.$$

Como, novamente, uma parte da equação acima depende de θ e outra depende de φ , podemos separá-la em duas partes. Sendo a constante de separação m^2 , então

$$\frac{1}{\Theta} \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \sin^2(\theta) \left(l(l+1) - \frac{2\mu}{\hbar^2} V_2 \right) = m^2 \quad (4.7)$$

é chamada equação polar e

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2 \quad (4.8)$$

é chamada equação azimutal. Note que a solução trivial da equação azimutal é $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$, onde m assume apenas valores inteiros.

A solução da equação polar (4.7) não é simples de ser calculada. Porém, das referências [19] e [26], sabemos que, fazendo $V_2(\theta) = 0$, temos $\Theta(\theta) = AP_l^m(\cos \theta)$ como solução, onde $P_l^m(x)$ é a função associada de Legendre definida por

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d}{dx} P_l(x), \quad (4.9)$$

com $P_l(x)$ sendo o polinômio de Legendre, onde l assume apenas valores inteiros não negativos.

Portanto a solução fundamental da equação angular (4.6), com potencial $V_2 = 0$, é dada por

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = AP_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (4.10)$$

conhecida como função esférica harmônica.

Voltando à equação radial (4.5), vamos multiplicá-la por $\frac{R(r)}{r}$. Assim,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - rR \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_1 - E) \right) = 0. \quad (4.11)$$

Com objetivo de simplificar a equação anterior, note que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \left(2r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) = r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial}{\partial r}, \quad (4.12)$$

onde o termo entre parênteses foi derivado. Agora, denotando $u(r) = rR(r)$, temos

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(R + r \frac{dR}{dr} \right) = r \frac{d^2 R}{dr^2} + 2 \frac{dR}{dr}.$$

Logo, aplicando (4.12) em $R(r)$ segue que

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right).$$

Assim, denotando $V(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V_1 + \frac{l(l+1)}{r^2}$ e $\epsilon = \frac{2\mu}{\hbar^2} E$, podemos reescrever a equação (4.11) como

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + (\epsilon - V(r)) u(r) = 0. \quad (4.13)$$

Note que (4.13) é a equação de Schrödinger na variável r .

Há várias formas de encontrar a solução exata da equação de Schrödinger acima. O método tradicional, dado em [13], consiste em reduzi-la à equação hipergeométrica (2.5) cujas soluções polinomiais são os polinômios ortogonais clássicos.

Para isso, vamos supor a mudança de variável $r = f(x)$ de tal forma que

$$u(f(x)) = \psi_n(x) = \sqrt{\omega(x)} F_n(x) \frac{1}{\sqrt{\frac{df(x)}{dx}}},$$

onde $\omega(x)$ é a função peso associada ao polinômio $F_n(x)$, com $x \in [a, b]$. Logo, pela propriedade ortogonal da função de onda, mencionada na Seção 4.1, obtemos

$$\int_0^\infty \psi_n(x) \psi_m(x) d(f(x)) = \int_a^b F_n(x) F_m(x) \omega(x) dx = \delta_{nm}, \quad (4.14)$$

pois tomamos $f(x)$ sendo a coordenada polar $r \in [0, \infty)$. Além disso, usando a mudança de variável polinomial, também podemos reduzir a equação (4.13) à equação hipergeométrica, como queríamos.

4.3 Polinômios de Romanovski-Routh em Scarf II

Nesta seção apresentamos o problema de Scarf II, segundo as referências [4] e [28], usado na construção de potenciais periódicos e aplicado no modelo físico unidimensional de cristais em estado sólido. Em seguida, mostramos que a solução deste problema pode ser dada em termos dos polinômios de Romanovski-Routh e, por meio desta, encontramos outras aplicações para essa família de polinômios.

Considere o potencial trigonométrico de Scarf (Scarf I)

$$V_t(z) = -a^2 + (a^2 + b^2 - \gamma a) \sec^2(\gamma z) - b(2a + \gamma) \operatorname{tg}(\gamma z) \sec(\gamma z).$$

A equação de Schrödinger (4.13) com potencial $V_t(z)$, chamada equação de Schrödinger com Scarf I, é dada por

$$\frac{d^2}{dz^2} \psi(z) + ([-a^2 - b^2 + \gamma a] \sec^2(\gamma z) + b[2a + \gamma] \operatorname{tg}(\gamma z) \sec(\gamma z) + a^2 + \epsilon) \psi(z) = 0,$$

onde o espectro de energia ϵ_n é dado como

$$\epsilon_n = e_n + a^2 = (a + \gamma n)^2. \quad (4.15)$$

A solução da equação de Schrödinger com Scarf I é bem conhecida (veja [27, 29]) como

$$\psi_n(\operatorname{sen}(\gamma z)) = (1 - \operatorname{sen}(\gamma z))^{\frac{a-b}{2\gamma}} (1 + \operatorname{sen}(\gamma z))^{\frac{a+b}{2\gamma}} P_n^{\left(\frac{a-b}{\gamma} - \frac{1}{2}, \frac{a+b}{\gamma} - \frac{1}{2}\right)}(\operatorname{sen}(\gamma z)), \quad (4.16)$$

onde $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é o polinômio de Jacobi com parâmetros $\alpha = \frac{a-b}{\gamma} - \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{a+b}{\gamma} - \frac{1}{2}$.

Mudando os parâmetros

$$a \rightarrow ia \quad \text{e} \quad \gamma \rightarrow -i\gamma \quad (4.17)$$

no potencial trigonométrico de Scarf $V_t(x)$ obtem-se o potencial hiperbólico de Scarf (Scarf II) por

$$V_h(z) = a^2 + (b^2 - a^2 - \gamma a) \operatorname{sech}^2(\gamma z) + b(2a + \gamma) \operatorname{sech}(\gamma z) \operatorname{tgh}(\gamma z). \quad (4.18)$$

A equação de Schrödinger (4.13) com potencial $V_h(x)$, chamada equação de Schrödinger com Scarf II, é dada por

$$\frac{d^2}{dz^2} \psi(z) + [-b^2 + a(a + \gamma)] \operatorname{sech}^2(\gamma z) - b(2a + \gamma) \operatorname{sech}(\gamma z) \operatorname{tgh}(\gamma z) + \epsilon_n \psi(z) = 0, \quad (4.19)$$

onde o espectro de energia

$$\epsilon_n = \epsilon - a^2 = -(a - \gamma n)^2, \quad n < a,$$

é obtido aplicando a mudança de parâmetro (4.17) na equação (4.15).

Suponhamos $\gamma = 1$ para simplificação das contas.

Considerando novamente a mudança de parâmetros (4.17), agora na função de onda (4.16), obtem-se a solução da equação de Schrödinger com Scarf II como

$$\begin{aligned} \psi_n(-i \operatorname{senh}(z)) &= (1 + i \operatorname{senh}(z))^{-\frac{a}{2}} (1 - i \operatorname{senh}(z))^{-\frac{a}{2}} \left(\frac{1 - i \operatorname{senh}(z)}{1 + i \operatorname{senh}(z)} \right)^{i\frac{b}{2}} \\ &\quad \times c_n P_n^{(-a-\frac{1}{2}-ib, -a-\frac{1}{2}+ib)}(-i \operatorname{senh}(z)), \end{aligned}$$

onde se tomarmos $x = \operatorname{senh}(z)$ podemos simplificá-la como

$$\psi_n(-ix) = (1 + x^2)^{-\frac{a}{2}} e^{b \operatorname{tg}^{-1}(x)} c_n P_n^{(-a-\frac{1}{2}-ib, -a-\frac{1}{2}+ib)}(-ix), \quad (4.20)$$

com c_n sendo uma fase complexa dependente do estado e $n < a$.

Note que em (4.20) o polinômio de Jacobi possui parâmetros complexos e argumento complexo. Como da Seção 3.3 conhecemos a relação entre os polinômios complexos de Jacobi e os polinômios de Romanovski-Routh dada por

$$R_n^{(\alpha, \beta)}(x) = i^n P_n^{(\beta-1+\frac{i}{2}\alpha, \beta-1-\frac{i}{2}\alpha)}(ix),$$

podemos relacionar a função de onda $\psi_n(x)$ com o polinômio de Romanovski-Routh $R_n^{(2b, -a+1/2)}(x)$ como

$$\psi_n(x) = (1 + x^2)^{-\frac{a}{2}} e^{b \operatorname{tg}^{-1}(x)} d_n R_n^{(2b, -a+1/2)}(x), \quad n < a \quad (4.21)$$

onde $d_n = (i)^n c_n$. Logo, os polinômios de Romanovski-Routh aparecem na solução do problema de Scarf II.

Por fim, chamando $\alpha = 2b$ e $\beta = -a + 1/2$, escrevemos

$$\psi_n(x) = (1 + x^2)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^{-1}(x)} d_n R_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad n < a,$$

e assim, da ortogonalidade da função de onda (4.14) obtemos a ortogonalidade finita dos polinômios de Romanovski-Routh dada no Teorema 3.5, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = d_n d_m \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{\beta-1} e^{\alpha \operatorname{tg}^{-1}(x)} R_n^{(\alpha, \beta)}(x) R_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx = 0,$$

quando $m + n < 2\beta - 1$.

4.3.1 Polinômios de Romanovski-Routh e funções angulares não-esféricas

Nesta seção, com base na referência [28], mostramos que os polinômios de Romanovski-Routh também satisfazem uma equação de Schrödinger polar e, conseqüentemente, uma equação de Schrödinger angular, de tal forma que sua solução define a chamada função angular não-esférica.

Considere a equação polar (4.7)

$$\frac{1}{\Theta} \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \sin^2(\theta) \left(l(l+1) - \frac{2\mu}{\hbar^2} V_2 \right) = m^2.$$

Multiplicando a equação anterior por $\frac{\Theta(\theta)}{\sin^2(\theta)}$ obtemos

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \left(l(l+1) - \frac{2\mu}{\hbar^2} V_2 - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \right) \Theta = 0. \quad (4.22)$$

Note que

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d}{d\theta} \right) = \sin(\theta) \left(\cos(\theta) \frac{d}{d\theta} + \sin(\theta) \frac{d^2}{d\theta^2} \right) = \frac{d^2}{d\theta^2} + \cotg(\theta) \frac{d}{d\theta},$$

onde derivamos o termo entre parênteses. Logo, usando a relação anterior, reescrevemos (4.22) como

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \Theta(\theta) + \cotg(\theta) \frac{d}{d\theta} \Theta(\theta) + \left(l(l+1) - \frac{2\mu}{\hbar^2} V_2(\theta) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \right) \Theta(\theta) = 0.$$

Tomando $V_2(\theta) = -c \cotg(\theta)$ e $\theta = f(z)$ obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \Theta(f(z)) + \left(-\frac{f''(z)}{f'(z)} + f'(z) \cotg(f(z)) \right) \frac{d}{dz} \Theta(f(z)) \\ + \left(l(l+1) + \frac{2\mu}{\hbar^2} c \cotg(f(z)) - \frac{m^2}{\sin^2(f(z))} \right) (f'(z))^2 \Theta(f(z)) = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

pois $\frac{d^2}{d\theta^2} = \frac{f''(z)}{f'(z)} \frac{d}{dz} + \frac{1}{f'(z)^2} \frac{d^2}{dz^2}.$

Afim de remover a derivativa $\frac{d}{dz} \Theta(f(z))$ da equação anterior, suponhamos $f(x)$ de tal forma que

$$-\frac{f''(z)}{f'(z)} + f'(z) \cotg(f(z)) = 0, \quad (4.24)$$

isto é,

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = f'(z) \cotg(f(z)) = \frac{f'(z) \cos(f(z))}{\sin(f(z))},$$

e também $\lim_{z \rightarrow 0} f'(z)/\sin(z) \rightarrow 1$ para que não haja divisão por zero.

Note que a primeira parte da equação anterior é a derivada de $\ln(f'(z))$ e a última parte é a derivada de $\ln(\sin(f(z)))$. Logo,

$$\frac{d}{dz} \ln(f'(z)) = \frac{d}{dz} \ln(\sin(f(z))),$$

ou seja

$$f'(z) = \text{sen}(f(z)). \quad (4.25)$$

Como $f'(z) = \frac{df(x)}{dz}$ podemos escrever

$$dz = \frac{df(z)}{\text{sen}(f(z))},$$

e integrando ambos os lados obtemos

$$z = \int \frac{1}{\text{sen}(f(z))} df(z) = \ln \left(\text{tg} \left(\frac{f(z)}{2} \right) \right).$$

Aplicando o exponencial na equação acima temos que $e^z = \text{tg} \left(\frac{f(z)}{2} \right)$ e fazendo $f(z) = \theta$ podemos escrever e^z e e^{-z} em função de θ como

$$e^z = \text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad e^{-z} = \text{cotg} \left(\frac{\theta}{2} \right).$$

Logo, a função do cosseno hiperbólico em função de z pode ser escrita como

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{\text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) + \text{cotg} \left(\frac{\theta}{2} \right)}{2} = \frac{1}{\text{sen}(\theta)}, \quad (4.26)$$

e a função seno hiperbólico como

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{\text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) - \text{cotg} \left(\frac{\theta}{2} \right)}{2} = -\text{cotg}(\theta). \quad (4.27)$$

Note que, de (4.25) e (4.26), obtemos

$$f'(z) = \text{sen}(f(z)) = \frac{1}{\cosh(z)}. \quad (4.28)$$

Por fim, chamando $\tilde{\psi}(z) = \Theta(f(z))$, das equações (4.24), (4.27) e (4.28), podemos reescrever a equação polar (4.23) como

$$\frac{d^2}{dz^2} \tilde{\psi}(z) + \left(l(l+1) - \frac{2\mu}{\hbar^2} c \sinh(z) - m^2 \cosh^2(z) \right) \frac{1}{\cosh^2(z)} \tilde{\psi}(z) = 0$$

e denotando $\tilde{c} = -\frac{2\mu}{\hbar^2} c$ obtemos

$$\frac{d^2}{dz^2} \tilde{\psi}(z) + \left(l(l+1) \text{sech}^2(z) + \tilde{c} \text{tgh}(z) \text{sech}(z) - m^2 \right) \tilde{\psi}(z) = 0. \quad (4.29)$$

Note que a equação polar acima é equivalente a equação de Schrödinger com Scarf II (tomando $\gamma = 1$)

$$\frac{d^2}{dz^2} \psi(z) + ([-b^2 + a(a+1)] \text{sech}^2(z) - b(2a+1) \text{tgh}(z) \text{sech}(z) + \epsilon_n) \psi(z) = 0, \quad n < a,$$

quando assumimos

$$l(l+1) = -b^2 + a(a+1), \quad m^2 = -\epsilon_n = (a-n)^2 \quad \text{e} \quad \tilde{c} = -b(2a+1).$$

Suponhamos $a = b$, logo temos os parâmetros a , b e $\tilde{c}$ dependentes apenas de l , isto é,

$$a = b = l(l+1), \quad n = a - m = l(l+1) - m \quad \text{e} \quad \tilde{c} = -b(2a+1). \quad (4.30)$$

Como $n < a$ segue que $m > 0$, e assim, l é um número inteiro não negativo tal que $n < l(l+1)$.

Sabemos que a função de onda (4.21), isto é,

$$\psi(z) = (1+z^2)^{-\frac{a}{2}} e^{b \operatorname{tg}^{-1}(z)} R_n^{(2b, -a+1/2)}(z), \quad n < a,$$

é solução da equação de Schrödinger com Scarf II. Logo, supondo os parâmetros a , b e n como em (4.30) e $z = -\cotg(\theta)$, escrevemos a solução da equação polar (4.29) em termos dos polinômios de Romanovski-Routh como

$$\Theta(\theta) = (1 + \cotg^2 \theta)^{-\frac{l(l+1)}{2}} e^{l(l+1) \operatorname{tg}^{-1}(-\cotg \theta)} R_{l(l+1)-m}^{(2l(l+1), -l(l+1)+1/2)}(-\cotg \theta), \quad m > 0, \quad (4.31)$$

onde denotamos $\tilde{\psi}(-\cotg(\theta)) = \Theta(\theta)$.

Agora, precisamos lembrar da construção feita na Seção 4.2, onde separamos a equação de Schrödinger em equação radial (4.5) e equação angular (4.6). Escrevemos a solução da equação angular por

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi),$$

onde vale $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$.

Aplicando a função de onda polar $\Theta(\theta)$ como em (4.31) podemos escrever a função de onda angular $Y(\theta, \varphi)$ em termos dos polinômios de Romanovski-Routh como

$$\begin{aligned} Y(\theta, \varphi) &= \Theta(\theta)e^{im\varphi} \\ &= (1 + \cotg^2 \theta)^{-\frac{l(l+1)}{2}} e^{l(l+1) \operatorname{tg}^{-1}(-\cotg \theta)} R_{l(l+1)-m}^{(2l(l+1), -l(l+1)+1/2)}(-\cotg \theta)e^{im\varphi}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Denotamos $Z_l^m(\theta, \varphi) = Y(\theta, \varphi)$.

Na Seção 4.2 vimos que, quando tomamos o potencial $V_2(\theta) = 0$ na equação angular, a solução fundamental é dada pela função harmônica esférica

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = AP_l^m(\cos \theta)e^{im\varphi}.$$

Como, nesta seção, supomos $V_2(\theta) = -c \cotg \theta$, se assumirmos $c = 0$ o potencial será nulo. Logo, basta tomarmos $a = 0 = b$, pois satisfaz $\tilde{c} = -b(2a+1) = 0$.

Assim, para $a = 0 = b$, a função de onda angular $Z_l^m(\theta, \varphi)$, dada em (4.32), se reduz à função esférica harmônica $Y_l^m(\theta, \varphi)$. Diante disso, $Z_l^m(\theta, \varphi)$ é chamada função angular não-esférica e destacamos que são funções definidas por polinômios de Romanovski-Routh como

$$Z_l^m(\theta, \varphi) = (1 + \cotg^2 \theta)^{-\frac{l(l+1)}{2}} e^{l(l+1) \operatorname{tg}^{-1}(-\cotg \theta)} R_{l(l+1)-m}^{(2l(l+1), -l(l+1)+1/2)}(-\cotg \theta)e^{im\varphi}.$$

5 Conclusão

Neste trabalho estudamos como os polinômios ortogonais de Hermite, Laguerre, Jacobi, Bessel e Romanovski-Routh aparecem como soluções de equações diferenciais hipergeométricas da forma

$$\sigma(x)F''(x) + \tau(x)F'(x) + \lambda F(x) = 0,$$

onde $\sigma(x)$ é um polinômio de grau no máximo dois, $\tau(x)$ é um polinômio de grau no máximo um e λ é uma constante. Para isso, apresentamos a classificação, segundo Bochner [1], das equações hipergeométricas em cinco grupos, considerando os zeros do polinômio $\sigma(x)$, e apresentamos suas soluções polinomiais, os polinômios ortogonais clássicos de Hermite, Laguerre, Jacobi, Bessel e Romanovski-Routh.

Demonstramos a fórmula de Rodrigues e justificamos, pela condição de contorno, a ortogonalidade dos polinômios ortogonais clássicos. Dito isso, apresentamos a relação de ortogonalidade finita, satisfeita pelos polinômios de Romanovski-Routh e de Bessel.

Como os polinômios de Romanovski-Routh não satisfazem as condições de ortogonalidade para todos os polinômios de uma mesma família, dividimos nossos estudos nas famílias de polinômios de Romanovski-Routh com parâmetros fixos, denotados por $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, e nas famílias de polinômios de Romanovski-Routh com um parâmetro fixo e o outro variando em função do grau do polinômio, denotados por $Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ e chamados polinômios complementares de Romanovski-Routh. Apresentamos as principais propriedades dos polinômios $R_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ e $Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, como possuir função geradora, relação de estrutura, assim como suas representações pela fórmula de Rodrigues, e relação de recorrência de três termos.

Também apresentamos as relações de ortogonalidade satisfeitas pelos polinômios de Romanovski-Routh, como a relação de ortogonalidade finita e a quase-ortogonalidade. Além disso, estudamos as consequências dessas relações de ortogonalidade no comportamento dos zeros do polinômio de Romanovski-Routh.

Justificamos a dupla nomenclatura do polinômio de Romanovski-Routh como polinômio Pseudo Jacobi. Para isso, vimos como a equação hipergeométrica de Jacobi, com parâmetros complexos e conjugados, e variável complexa $z = ix$, se transforma na equação hipergeométrica de Romanovski-Routh, fazendo com que haja a seguinte relação entre os polinômios complexos de Jacobi, denotados por $P_n^{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}(z)$, e os polinômios de Romanovski-Routh,

$$R_n^{(\alpha, \beta)}(x) = i^n P_n^{(\beta-1+\frac{i}{2}\alpha, \beta-1-\frac{i}{2}\alpha)}(ix).$$

Por fim, estudamos a aplicação dos polinômios de Romanovski-Routh na Mecânica Quântica. Vimos que os polinômios de Romanovski-Routh aparecem na solução da equa-

ção de Schrödinger com Scarf II

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \left(l(l+1)\operatorname{sech}^2(x) + \tilde{c}\operatorname{tgh}(x)\operatorname{sech}(x) - m^2\right)\psi(x) = 0,$$

onde l , $\tilde{c}$ e m são constante, de tal forma que definem as funções angulares não-esféricas $Z_l^m(\theta, \varphi)$, que aparecem como solução de uma equação de Schrödinger angular.

Referências

- [1] BOCHNER, S. Über Sturm-Liouvillesche polynomsysteme. *Math. Z.*, v. 29, p. 730–736, 1929. Disponível em <<https://doi.org/10.1007/BF01180560>>.
- [2] ROUTH, E. J. On some properties of certain solutions of a differential equation of the second order. *J. Lond. Math. Soc.*, v. 16, p. 245–261, 1884. Disponível em <<https://doi.org/10.1112/plms/s1-16.1.245>>.
- [3] ROMANOVSKI, V. Sur quelques classes nouvelles de polynomes orthogonaux. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 188, p. 1023–1025, 1929.
- [4] ALVAREZ-CASTILHO, D. E.; KIRCHBACH, M. Exact spectrum and wave functions of the hyperbolic Scarf potential in terms of finite Romanovski polynomials. *Rev. Mexicana Fís.*, v. 53, p. 143–154, 2007.
- [5] COMPEAN, C. B.; KIRCHBACH, M. The trigonometric Rosen-Morse potential in the supersymmetric quantum mechanics and its exact solutions. *J. Phys. A*, v. 39, p. 547–558, 2006. Disponível em <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/3/007>>.
- [6] MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN, A.; RIBEIRO, L. L. S.; SRI RANGA, A.; TYAGLOV M. Complementary Romanovski-Routh polynomials: from orthogonal polynomials on the unit circle to Coulomb wave functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 147, p. 2625–2640, 2019. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1090/proc/14423>>.
- [7] MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN, A.; RIBEIRO, L. L. S.; SRI RANGA, A.; TYAGLOV M. Complementary Romanovski-Routh polynomials, orthogonal polynomials on the unit circle, and extended Coulomb wave functions. *Results Math.*, v. 75, 2020. Disponível em <<http://dx.doi.org/10.1007/s00025-020-1167-8>>.
- [8] RAPOSO, A. P.; WEBER, H. J.; ALVAREZ-CASTILLO, D. E.; KIRCHBACH M. Romanovski polynomials in selected physics problems. *Cent. Eur. J. Phys.*, v. 5, p. 253–284, 2007. Disponível em <<https://doi.org/10.2478/s11534-007-0018-5>>.
- [9] JORDAAN, K.; TOÓKOS, F. Orthogonality and asymptotics of Pseudo-Jacobi polynomials for non-classical parameters. *J. Approx. Theory*, v. 178, p. 1–12, 2014. Disponível em <<https://doi.org/10.1016/j.jat.2013.10.003>>.
- [10] CHIHARA, T. S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. 1. ed. New York: Gordon and Breach, Science Publishers, 1978. Disponível em <<https://doi.org/10.2307/3617920>>.

-
- [11] ISMAIL, M. E. H. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*. 98. ed. United Kingdom: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 2005. Disponível em <<https://doi.org/10.1017/CBO9781107325982>>.
- [12] BREZINSKI, C.; DRIVER, K.; REDIVO-ZAGLIA, M. Quasi orthogonality with applications to some families of classical orthogonal polynomials. *Appl. Numer. Math.*, v. 48, p. 157–168, 2004. Disponível em <<https://doi.org/10.1016/j.apnum.2003.10.001>>.
- [13] NIKIFOROV, A.F.; SUSLOV, S.K.; UVAROV, V.B. *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable*. 1. ed. Berlin: Springer Monographs in Mathematics, 1991. Disponível em <<https://doi.org/10.1007/BF00403473>>.
- [14] COFTAS, N. Systems of orthogonal polynomials defined by hypergeometric type equations with application to quantum mechanics. *Cent. Eur. J. Phys.*, v. 2, p. 456–466, 2004. Disponível em <<https://doi.org/10.48550/arXiv.math-ph/0602037>>.
- [15] KOEKOEK, R.; LESKY, P. A.; SWARTTOUW, R. F. *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*. 1. ed. Berlin: Springer Monographs in Mathematics, 2010. Disponível em <<https://doi.org/10.1007/978-3-642-05014-5>>.
- [16] KRALL, H. L.; FRINK, O. A new class of orthogonal polynomials: The Bessel polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 65, p. 100–115, 1949. Disponível em <<https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1949-0028473-1>>.
- [17] KUIJLAARS, A. B. J.; MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN, A.; ORIVE, R. Orthogonality or Jacobi polynomials with general parameters. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, v. 19, p. 1–17, 2005. Disponível em <<https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0301037>>.
- [18] BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. *Complex Variables and Applications*. 8. ed. New York: McGraw-Hill Companies, 2009. Disponível em <<https://doi.org/10.1017/S0025557200106655>>.
- [19] BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. 1. ed. Berlin: Addison-Wesley Publishing Company, 1973. Disponível em <<https://doi.org/10.1063/1.3035806>>.
- [20] DRIVER, K.; JORDAAN, K. Bounds for extreme zeros of some classical orthogonal polynomials. *J. Approx. Theory*, v. 164, p. 1200–1204, 2012. Disponível em <<https://doi.org/10.1016/j.jat.2012.05.014>>.
- [21] DRIVER, K.; JOOSTE, A.; JORDAAN, K. Stieltjes interlacing of zeros of Jacobi polynomials from different sequences. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, v. 38, p. 317–326, 2011. Disponível em <<http://hdl.handle.net/2263/17941>>.
- [22] ISMAIL, M. E. H.; LI, X. Bounds for extreme zeros of orthogonal polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 115, p. 131–140, 1992. Disponível em <<https://doi.org/10.2307/2159575>>.
- [23] SZEGŐ, G. *Orthogonal Polynomials*. 4. ed. Rhode Island: Amer. Math. Soc. Collo. Publ., 1975. Disponível em <<https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1090/coll/023>>.

-
- [24] JORDAAN, K.; WANG, H.; ZHOU, J. Monotonicity of zeros of polynomials orthogonal with respect to an even weight function. *Integral Transforms Spec. Funct.*, v. 25, p. 721–729, 2014. Disponível em <<https://doi.org/10.1080/10652469.2014.904303>>.
- [25] SCHIFFFL, L. I. *Quantum Mechanics*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1968. Disponível em <<https://doi.org/10.1119/1.1987309>>.
- [26] GRIFFITHS, D. J.; SCHROETER, D. F. *Introduction to Quantum Mechanics*. 3. ed. United Kingdom: Cambridge University Press, 2018. Disponível em <<https://doi.org/10.1017/9781316995433>>.
- [27] COOPER, F.; KHARE, A.; SUKHATME, U. Supersymmetry and quantum mechanics. *Phys. Rep.*, v. 215, p. 267–385, 1995. Disponível em <<https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-th/9405029>>.
- [28] ALVAREZ-CASTILHO, D. E. *Exactly Solvable Potentials and Romanovski Polynomials in Quantum Mechanics*. Dissertação – University of San Luis Potosi, 2007. Disponível em <<https://doi.org/10.48550/arXiv.0808.1642>>.
- [29] LÉVAI, G. A search for shape-invariant solvable potentials. *J. Phys. A*, v. 22, p. 689–702, 1989.