



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Lilian Paola Romero Paredes

Semigrupos de Operadores e Aplicações

**Rio Claro
2022**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Semigrupos de Operadores e Aplicações

Lilian Paola Romero Paredes

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

Rio Claro
2022

P227s	Paredes, Lilian Paola Romero Semigrupos de operadores e aplicações / Lilian Paola Romero Paredes. -- Rio Claro, 2022 134 p. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro Orientadora: Suzete Maria Silva Afonso 1. Semigrupos lineares. 2. Teorema de Hille-Yosida. 3. Teorema de Lumer-Phillips. 4. Teorema de Feller-Miyadera-Phillips. 5. Boa colocação - Equação do calor. I. Título.
-------	---

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Lilian Paola Romero Paredes

SEMIGRUPOS DE OPERADORES E APLICAÇÕES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
Orientadora

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
Departamento de Matemática - IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto
Departamento de Matemática - ICMC/USP/São Carlos (SP)

Rio Claro, 09 de maio de 2022

*Às minhas maiores inspirações de vida e esforço, meus pais: Maria Eugenia Paredes e
Luis Eduardo Romero.*

Agradecimentos

Agradeço primeira e principalmente ao doador da vida e de todo entendimento, pela oportunidade maravilhosa de viver esta experiência e pelo seu cuidado durante todo o processo de mestrado, *Deus*.

Agradeço aos meus maiores exemplos de vida e tenacidade, meus pais, que com amor e apoio fizeram mais agradável esta caminhada. Para eles, minha inteira gratidão, pois sem eles não teria sido possível concluir este processo.

Agradeço aos meus professores do IGCE por terem sido mentores e guias nesta etapa da minha vida acadêmica, foi muito especial a maneira como fizeram me sentir em família mesmo estando longe de casa. Agradeço, especialmente, à minha orientadora, Profa. Suzete Maria Silva Afonso, pela pessoa admirável que ela é. Mesmo na situação de pandemia que vivemos durante a elaboração da dissertação e com pouquíssimos encontros pessoais, ela foi uma inspiração tanto acadêmica como pessoal. Em momentos de dificuldade, sempre tive uma palavra de conforto da parte dela e isso fez dela uma verdadeira orientadora.

Agradeço às funcionárias do Departamento de Matemática, Inajara e a Elisa, que me instruíram em muitas das minhas dúvidas como estrangeira e como aluna, sempre tinham uma solução pra tudo, com um lindo sorriso e muita amabilidade.

Agradeço às minhas irmãs, Magaly, Kelly, Katherine e Lisbeth que sempre estiveram me apoiando mesmo à distância, sempre se sentindo orgulhosas de mim e me encorajando em momentos difíceis. Para elas, minha eterna gratidão.

À minha querida família brasileira, Família Vitoriano Dias; eles foram fundamentais para eu atingir este objetivo, pois, mesmo sem me conhecer, acolheram-me em suas casas e vidas, outorgando-me a oportunidade de viver experiências únicas no Brasil durante esses anos de mestrado. Desejo que Deus abençoe vocês muito mais e que a nossa amizade seja eterna. Muito obrigada mesmo por fazer este sonho possível. Especialmente agradeço à Laura Vitoriano Dias e Miguel Vitoriano Dias, que fizeram meus dias mais felizes, e me ensinaram muito, principalmente sobre a cultura e a língua portuguesa.

À Cidinha, que foi como uma mãe para mim e cuidou de mim durante os últimos meses de estadia no Brasil. Sua companhia e seu amor foram fundamentais para eu suportar uma época de pandemia longe de casa.

À Katia e a Rebequinha, mulheres especiais na minha vida. Foi uma benção ter amigas como elas do Brasil para a vida toda.

Às minhas amigas que a UNESP e o mestrado me trouxeram, especialmente ao time

“Luluzinha”. Elas verdadeiramente me fizeram sentir como uma brasileira a mais, me orientaram nas questões burocráticas e culturais, me ensinaram que a amizade cruza fronteiras. Devo agradecimentos especiais a: Ana Paula Brandão, por sua incondicional amizade transparente; Roberta Paula Brandão, por sua linda amizade e a sua maravilhosa família; graças a eles conheci diferentes lugares do Brasil, viajando em datas especiais, e me sentindo parte deles. Muito obrigada meninas, vocês moram no meu coração.

Ao maravilhoso Brasil, país que me recebeu de uma maneira inesquecível, à sua gente linda e acolhedora, que de repente fazem parte da minha vida, especialmente à Madalena, Danilo, Livinha, Ivonne, Yago, Isa, Wedson, Alessandra e família, Tânia, Cris Nonato, Dona Giovina, Andrea Fontanari, Beatriz Mazzini, Anésio e Samuel, Paula Isayama e família, entre outros.

Finalmente agradeço à minha família em geral e amigos que mesmo à distancia manifestaram o seu carinho e apoio no meu objetivo de concluir com êxito o mestrado, especialmente ao meu amigo Jonatan Gómez quem foi um apoio para mim.

A todos vocês, muito obrigada, Deus abençoe muito as suas vidas.

Resumo

Neste trabalho, vamos abordar a teoria básica de semigrupos lineares, provar os teoremas de geração de Hille-Yosida, Lumer-Phillips e Feller-Miyadera-Phillips, e aplicar a teoria desenvolvida ao estudo de boa colocação para equações de evolução. Em particular, estudaremos a propriedade de boa colocação para a equação do calor.

Palavras-chave: Semigrupos lineares, teorema de Hille-Yosida, teorema de Lumer-Phillips, teorema de Feller-Miyadera-Phillips, boa colocação, equação do calor.

Abstract

In this work, we will approach the basic theory of linear semigroups, prove the generation theorems of Hille-Yosida, Lumer-Phillips and Feller-Miyadera-Phillips, and apply the developed theory to the study of “well-posedness” for evolution equations. In particular, we will study the property of well-posedness for the heat equation.

Keywords: Linear semigroups, Hille–Yosida theorem, Lumer-Phillips theorem, Feller-Miyadera-Phillips theorem, well-posedness, heat equation.

En este trabajo, vamos a abordar la teoría básica de semigrupos lineares, demostrar los teoremas de generación de Hille-Yosida, Lumer-Phillips y Feller-Miyadera-Phillips, y aplicar la teoría desarrollada al estudio del buen planteamiento para ecuaciones de evolución. En particular, estudiaremos la propiedad del buen planteamiento para la ecuación del calor.

Palabras Clave: Semigrupos lineares, teorema de Hille-Yosida, teorema de Lumer-Phillips, teorema de Feller-Miyadera-Phillips, buen planteamiento, ecuación del calor.

Introdução	17
1 Preliminares	19
1.1 Cálculo Diferencial e Integral em espaços de Banach	19
1.2 Espaços de Hilbert	30
1.3 Operadores lineares	31
1.3.1 O operador resolvente	37
1.4 Exemplos de operadores lineares limitados e não limitados	39
1.4.1 Operador diferencial	39
1.4.2 Operador integral	39
1.5 A função exponencial	40
2 Semigrupos	49
2.1 Semigrupos uniformemente contínuos	49
2.2 Semigrupos fortemente contínuos, C_0 -semigrupos	55
2.3 Exemplos de semigrupos e geradores infinitesimais	65
2.3.1 Construção de novos C_0 -semigrupos	69
3 Teoremas de geração de semigrupos	73
3.1 Aproximações por geradores contínuos	73
3.2 Construção do Teorema de Hille-Yosida	74
3.3 O Teorema de Lumer-Phillips	89
3.4 O Teorema de Feller-Miyadera-Phillips	95
3.5 Alguns resultados envolvendo semigrupos em espaços de Hilbert	100
4 Aplicações	101
4.1 Boa colocação para equações de evolução	101
4.2 Aplicação da teoria à equação do calor homogênea	113
Conclusões	121
Referências	123

A	Resultados da teoria de Análise Funcional	125
A.1	Lema de Lax-Milgram	127
B	Derivada fraca e espaços de Sobolev	129
B.1	Alguns resultados envolvendo os espaços $L^p(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$	132
B.1.1	Problema de Dirichlet Homogêneo	133

É sabido que uma Equação Diferencial é uma equação que envolve uma função incógnita e suas derivadas. O estudo das equações diferenciais surgiu com a criação do Cálculo Diferencial e Integral, introduzido por Newton e Leibniz, e elaborado no último quarto do século XVII para resolver problemas motivados por considerações físicas e geométricas, como a mecânica das partículas. O sucesso em tratar esses problemas utilizando o Cálculo Diferencial em suas evoluções conduziram gradualmente à consolidação das Equações Diferenciais como um novo e promissor ramo da Matemática. O conceito de solução de uma equação diferencial foi sendo alterado gradualmente com o avanço das pesquisas. Ademais, perguntas pertinentes sobre existência, unicidade e regularidade surgiram motivando cada vez mais esta área da Matemática.

A evolução de um sistema físico no tempo é geralmente descrita por um problema de valor inicial para uma equação diferencial. Suponhamos que $u(t)$ descreva o estado de algum processo físico no tempo t , a taxa de variação instantânea de $u(t)$ seja dada por alguma função A do estado do sistema $u(t)$ e o valor inicial seja dado por $u(0) = u_0$. Assim, temos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), & t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1)$$

onde a função u assume valores num espaço X , A é um operador (isto é, uma função) de seu domínio $\mathcal{D}_A \subset X$ em X ,

$$\frac{du(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h},$$

e para que o limite acima exista, X deve ser um espaço de Banach. Portanto, uma solução u para a equação $\frac{du}{dt} = Au$ deve satisfazer $u(t) \in \mathcal{D}_A$ para todo $t \geq 0$ e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - A[u(t)] \right\| = 0,$$

em que $\|\cdot\|$ denota a norma em X .

Neste trabalho, vamos estudar a boa colocação de sistemas do tipo (1), ou seja, estudar existência, unicidade e dependência contínua com respeito aos dados iniciais, quando

estes pertencem ao domínio do operador A . Para isso, usaremos uma importante ferramenta, a saber, a **teoria de semigrupos lineares**, para a qual será necessário estudar propriedades pontuais do operador A em cada caso e as do operador resolvente $R(\lambda; A)$ associado a este.

Portanto, o tema central deste trabalho é a teoria de semigrupos lineares, que será utilizada como ferramenta para o estudo de problemas do tipo (1). Esta teoria desenvolveu-se entre 1930 e 1960 com as contribuições de Stone, Hille, Yosida, Feller, Lumer, Miyadera, Phillips, e teve grande avanço em 1948 com a demonstração do Teorema de Hille-Yosida, um dos resultados mais importantes dentro da teoria dos C_0 -semigrupos, que caracteriza os operadores lineares que geram C_0 -semigrupos de contrações. Dois anos depois, o Teorema de Hille-Yosida foi generalizado para C_0 -semigrupos quaisquer. Esta generalização foi atribuída aos matemáticos Feller, Miyadera e Phillips. Além disso os matemáticos G. Lumer e R. Phillips dão origem a uma reformulação do Teorema de Hille-Yosida, que acabaria sendo mais conveniente na obtenção de C_0 -semigrupos de contrações em alguns casos particulares, como, por exemplo, em espaços de Hilbert, devido ao fato de ser mais simples a verificação das suas hipóteses.

Em suma, abordaremos a teoria básica de semigrupos lineares, provaremos os teoremas de geração de Hille-Yosida, Lumer-Phillips e Feller-Miyadera-Phillips, e aplicaremos a teoria desenvolvida ao estudo da boa colocação para equações de evolução, descritas por problemas abstratos de Cauchy. Analisaremos, em particular, a propriedade de boa colocação para a equação do calor.

Para facilitar ao leitor, explicamos a seguir como o trabalho está estruturado.

No Capítulo 1, apresentamos os conceitos e resultados preliminares que serão importantes para a compreensão da teoria de semigrupos, tais como resultados do Cálculo Diferencial e Integral em espaços de Banach, conceitos e resultados de Análise Funcional e propriedades da função exponencial.

No Capítulo 2, introduzimos o conceito de semigrupo de operadores lineares, caracterizando-os de acordo com a sua continuidade em: semigrupos uniformemente contínuos e fortemente contínuos, além de apresentar a definição de gerador infinitesimal de semigrupo e expor alguns exemplos e propriedades envolvendo estes dois conceitos. Com este capítulo, fornecemos uma base sólida para os teoremas de geração a serem apresentados na sequência.

No Capítulo 3, estudamos os três teoremas fundamentais da teoria de semigrupos que descrevem as propriedades dos operadores que geram C_0 -semigrupos, a saber, o Teorema de Hille-Yosida, o Teorema de Lumer-Phillips e o Teorema de Feller-Miyadera-Phillips.

No Capítulo 4, apresentamos algumas aplicações da teoria de semigrupos, abordada no Capítulo 3, ao estudo de problemas de Cauchy. Também estabeleceremos boa colocação, no sentido de soluções clássicas, para a equação do calor.

Por fim, consolidamos as conclusões do estudo realizado, apresentando a importância de cada um dos teoremas centrais abordados no Capítulo 3, ratificando a teoria de semigrupos como ferramenta útil ao estudo de soluções de equações de evolução.

No final do texto foi adicionado um apêndice, dividido em duas partes, contendo resultados e notações que foram utilizados no desenvolvimento do trabalho, com a pretensão de torná-lo autocontido.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Este capítulo, fundamental para a boa compreensão dos capítulos posteriores, está dividido em cinco seções. Na primeira seção, faremos uma breve exposição sobre a teoria do Cálculo Diferencial e Integral em Espaços de Banach. Na segunda seção, veremos alguns conceitos e resultados sobre espaços de Hilbert e, na terceira seção, exporemos parte fundamental da teoria de operadores lineares. Na quarta seção estudaremos exemplos de operadores lineares limitados e não limitados e, finalmente, na última seção, exploraremos as propriedades da função exponencial, função que dá origem ao conceito de semigrupo.

As principais referências utilizadas para a elaboração deste capítulo foram [7, 14, 15, 10, 23].

1.1 Cálculo Diferencial e Integral em espaços de Banach

Nesta seção faremos um breve revisão de conceitos e resultados do Cálculo Diferencial e Integral em espaços de Banach. Estes resultados serão usados implícita ou diretamente no desenvolvimento da teoria de semigrupos; aqui o espaço X denotará um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munido da norma $\|\cdot\|$, salvo menção contrária.

Começaremos nossa exposição com o conceito de *net* em espaços de Banach, que será útil quando apresentarmos o Teorema de Hille-Yosida, pois neste, usando a aproximação Yosida do operador, o semigrupo obtido é o limite uniforme de uma *net* composta por semigrupos; mas antes disso, introduziremos o conceito de conjunto direcionado.

Definição 1.1. Um conjunto I é dito **direcionado** se é não vazio e possui uma pré-ordem, ou seja, uma relação binária reflexiva e transitiva, $\leq$, com a propriedade adicional de que todo par de elementos tem uma cota superior. Em outras palavras, para quaisquer a e b em I , deve existir algum c em I tal que $a \leq c$ e $b \leq c$. Os elementos de I são denominados índices.

Claramente, $\mathbb{N}$ e todo conjunto totalmente ordenado são conjuntos direcionados.

Definição 1.2. Uma **net** em X é uma função $x : I \rightarrow X$, onde I é um conjunto direcionado. O valor $x(\lambda)$, para todo $\lambda \in I$, é representado por x_λ .

A definição a seguir é um caso particular de net, onde $I = \mathbb{N}$.

Definição 1.3. Uma **sequência** em X é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ que associa a cada número natural n um elemento $x(n)$ de X . O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é representado por x_n e denominado **n -ésimo termo** da sequência.

Definição 1.4. Dizemos que uma net $x : I \rightarrow X$ é de **Cauchy** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\eta \in I$ tal que

$$\lambda, \mu > \eta \implies \|x_\lambda - x_\mu\| < \varepsilon.$$

Analogamente, uma sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ é de **Cauchy** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \implies \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Num espaço de Banach, toda sequência de Cauchy e toda net de Cauchy são convergentes.

A seguir veremos o conceito de séries em espaços de Banach.

Definição 1.5. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X . A partir dela formamos uma nova sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cujos elementos são as somas

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1, \\ s_2 &= x_1 + x_2, \\ &\vdots \\ s_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \end{aligned}$$

denominadas as **reduzidas** ou **somas parciais** da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

A parcela x_n é chamada o **n -ésimo termo** ou **termo geral** da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Se existir o limite $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é **convergente** e o limite s será chamado a **soma** desta série.

Se a sequência de somas parciais não convergir, diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é **divergente**.

Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é **absolutamente convergente** (ou que converge em norma em X) se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ for convergente.

Proposição 1.6. *Toda série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolutamente convergente em X é convergente.*

Demonstração. Seja $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de somas parciais da série referida, com $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$, $n \in \mathbb{N}$. Como X é um espaço de Banach, basta provar que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é

uma sequência de Cauchy em X . Com efeito, considere $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$. Note que

$$\begin{aligned}
 \|s_m - s_n\| &= \left\| \sum_{k=1}^m x_k - \sum_{k=1}^n x_k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| \\
 &\leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| \\
 &= \sum_{k=1}^m \|x_k\| - \sum_{k=1}^n \|x_k\| \\
 &\leq \left| \sum_{k=1}^m \|x_k\| - \sum_{k=1}^n \|x_k\| \right| \\
 &= |\bar{s}_m - \bar{s}_n|,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $\bar{s}_n = \sum_{k=1}^n \|x_k\|$ é a n -ésima soma parcial da série convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$, a qual é de Cauchy em X , posto que $(\bar{s}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

Assim, para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \in \mathbb{N}, m > n > n_0 \implies |\bar{s}_m - \bar{s}_n| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Portanto, por (1.1) e (1.2), concluímos que para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \in \mathbb{N}, m > n > n_0 \implies \|s_m - s_n\| < \varepsilon,$$

o que prova que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy sobre X e, por conseguinte, convergente em X . Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente. $\square$

O próximo resultado é importante na determinação da convergência de séries.

Proposição 1.7 (Teste da Comparação). *Seja $M_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que $\|x_n\| \leq M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente.*

Demonstração. A relação $\|x_n\| \leq M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Pelo critério de comparação de séries para números reais segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente, posto que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente. Portanto, por definição, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente. $\square$

O seguinte teorema, conhecido como *Teste M de Weierstrass*, é um critério muito útil para verificar se uma dada série de funções converge uniformemente.

Teorema 1.8 (Teste M de Weierstrass). *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e (Y, d) um espaço métrico. Suponha que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n: Y \rightarrow X$ seja uma função e que exista $M_n \geq 0$ tal que*

$$\|f_n(y)\|_X \leq M_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Então, a sequência

$$\bar{f}_N(y) = \sum_{n=1}^N f_n(y)$$

converge absoluta e uniformemente para $\bar{f}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)$ para cada $y \in Y$.

Demonstração. Sejam $y \in Y$ e $(\bar{f}_N(y))_{N \in \mathbb{N}}$ a sequência de somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)$, ou seja,

$$\bar{f}_N(y) = \sum_{n=1}^N f_n(y) = f_1(y) + \cdots + f_N(y).$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, a sequência de somas parciais dela, a qual denotamos por $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é convergente e, portanto, de Cauchy. Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$M, N \in \mathbb{N}, \quad M > N > n_0 \quad \implies \quad |s_M - s_N| < \varepsilon.$$

Por conseguinte, se $M, N \in \mathbb{N}$ e $M > N > n_0$ então

$$\begin{aligned} \|\bar{f}_M(y) - \bar{f}_N(y)\| &= \|f_{N+1}(y) + \cdots + f_M(y)\| \\ &\leq \|f_{N+1}(y)\| + \cdots + \|f_M(y)\| \\ &\leq M_{N+1} + M_{N+2} + \cdots + M_M \\ &= \sum_{n=N+1}^M M_n \\ &= |s_M - s_N| < \varepsilon, \end{aligned}$$

garantindo assim que $(\bar{f}_N(y))_{N \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X e consequentemente convergente. Por conseguinte, existe o limite quando $N \rightarrow \infty$ desta sequência, que de fato será um elemento de X . Ou seja, existe $\xi \in X$ tal que $\xi = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{f}_N(y)$. Chamando $\xi = \bar{f}(y)$, obtemos uma função $\bar{f}: Y \rightarrow X$. Ademais,

$$\begin{aligned} \|\bar{f}(y) - \bar{f}_N(y)\| &= \left\| \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{f}_N(y) - \sum_{n=1}^N f_n(y) \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) - \sum_{n=1}^N f_n(y) \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(y) \right\| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n(y)\| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n. \end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$ sempre que $N \geq n_0$, donde

$$\|\bar{f}(y) - \bar{f}_N(y)\| < \varepsilon, \text{ para todo } y \in Y, \text{ sempre que } N \geq n_0.$$

Dessa forma, concluímos que $(\bar{f}_N(y))_{N \in \mathbb{N}}$ converge para $\bar{f}(y)$ absoluta e uniformemente. $\square$

A seguir, introduzimos alguns conceitos do Cálculo Diferencial e Integral em espaços de Banach. Começaremos com a definição de função contínua.

Definição 1.9. Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e consideremos a função

$$\begin{aligned} x: I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto x(t). \end{aligned}$$

Diremos que x é **contínua em** $t_0 \in I$ se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|x(t) - x(t_0)\| = 0.$$

Se x for contínua em todos os pontos de I , diremos que x é **contínua**.

Definimos também $\mathbf{C}([a, b], X) = \{x: [a, b] \rightarrow X: x \text{ é contínua}\}$.

Proposição 1.10. $\mathbf{C}([a, b], X)$ é um espaço de Banach munido da norma

$$\|x\|_{\mathbf{C}([a, b], X)} = \sup_{t \in [a, b]} \|x(t)\|.$$

Demonstração. Para facilitar a notação, vamos denotar o conjunto $\mathbf{C}([a, b], X)$ por Ω . Inicialmente, verifiquemos que $\|x\|_{\Omega}$ é uma norma. Com efeito,

$$(i) \quad \|x\|_{\Omega} = \sup_{t \in [a, b]} \|x(t)\| \geq 0 \text{ para todo } x \in \Omega, \text{ pois } \|x(t)\| \geq 0 \text{ para todo } t \in [a, b].$$

$$(ii) \quad \text{Vamos supor que } \|x\|_{\Omega} = 0, \text{ ou seja, } \sup_{t \in [a, b]} \|x(t)\| = 0. \text{ Como } \|x(t)\| \geq 0 \text{ para todo } t \in [a, b], \text{ para que o supremo destes valores seja igual a 0, devemos ter}$$

$$\|x(t)\| = 0, \quad \forall t \in [a, b],$$

mas isso só acontece quando $x(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$, ou seja, quando x é a função nula, $x \equiv 0$.

Suponha agora que x é a função nula, ou seja, $x(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$. Assim, $\|x(t)\| = 0$ para todo $t \in [a, b]$ e, portanto, o supremo desses valores é 0, isto é,

$$\sup_{t \in [a, b]} \|x(t)\| = 0,$$

ou seja $\|x\|_{\Omega} = 0$.

$$(iii) \quad \|\lambda x\|_{\Omega} = \sup_{t \in [a, b]} \|\lambda x(t)\| = \sup_{t \in [a, b]} |\lambda| \|x(t)\| = |\lambda| \sup_{t \in [a, b]} \|x(t)\| = |\lambda| \|x\|_{\Omega}.$$

(iv) Para todo $t \in [a, b]$, temos

$$\|x(t) + y(t)\| \leq \|x(t)\| + \|y(t)\|.$$

Portanto, por propriedades de supremo, obtemos

$$\underbrace{\sup_{t \in [a, b]} \|x(t) + y(t)\|}_{\|x+y\|_\Omega} \leq \sup_{t \in [a, b]} [\|x(t)\| + \|y(t)\|] \leq \underbrace{\sup_{t \in [a, b]} \|x(t)\|}_{\|x\|_\Omega} + \underbrace{\sup_{t \in [a, b]} \|y(t)\|}_{\|y\|_\Omega},$$

provando efetivamente que $\|x\|_\Omega$ é uma norma.

Vamos provar agora que toda sequência de Cauchy em Ω é convergente, para garantir que Ω seja completo.

Pois bem, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ uma sequência de Cauchy. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um $N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > N_1 \implies \|x_m - x_n\|_\Omega = \sup_{t \in [a, b]} \|x_m(t) - x_n(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Em particular, para $t_0 \in [a, b]$ fixo, temos

$$\|x_m(t_0) - x_n(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{sempre que } m, n \geq N_1. \quad (1.3)$$

Isto mostra que $(x_n(t_0))_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em X , mas como X é completo, existe $x(t_0) \in X$ tal que

$$x_n(t_0) \rightarrow x(t_0), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, podemos associar a cada $t \in [a, b]$ um único elemento $x(t) \in X$, o que define uma função $x: [a, b] \rightarrow X$. Fixando $n \geq N_1$ e fazendo $m \rightarrow \infty$ em (1.3), vemos que

$$\|x(t_0) - x_n(t_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \text{para cada } t_0 \in [a, b].$$

Concluimos, assim, que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para x em $[a, b]$, pois o N_1 depende só de ε e x é contínua, pois é o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas.

Temos também a seguinte inclusão $\{\|x_n(t_0) - x(t_0)\| : t_0 \in [a, b]\} \subset [0, \frac{\varepsilon}{2}]$, donde

$$\|x_n - x\|_\Omega = \sup_{t \in [a, b]} \|x_n(t) - x(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|x_n - x\|_\Omega < \varepsilon, \text{ para } n \geq N_1,$$

o que significa que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x em Ω . □

Definição 1.11. Diremos que $x: (a, b) \rightarrow X$ é **derivável à direita** em $t_0 \in (a, b)$ se existir $y \in X$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} - y \right\| = 0.$$

O ponto $y \in X$ é denominado **derivada à direita** de x em t_0 e é denotado por $\frac{d^+ x}{dt}(t_0)$ ou $x'_+(t_0)$.

Analogamente, diremos que $x: (a, b) \rightarrow X$ é **derivável à esquerda** em $t_0 \in (a, b)$ se existir $y \in X$ tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \left\| \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} - y \right\| = 0.$$

O ponto $y \in X$ é denominado **derivada à esquerda** de x em t_0 e é denotado por $\frac{d^-x}{dt}(t_0)$ ou $x'_-(t_0)$.

Quando ambas as derivadas existirem e forem iguais, diremos que $x: (a, b) \rightarrow X$ é **derivável** em $t_0 \in (a, b)$ e denotaremos y por $\frac{dx(t_0)}{dt}$ ou simplesmente $x'(t_0)$.

Proposição 1.12. *Se $x: (a, b) \rightarrow X$ é derivável em $t_0 \in (a, b)$, então x é contínua em t_0 .*

Demonstração. Supondo que x é derivável em $t_0 \in (a, b)$, existe $x^* := x'(t_0) \in X$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} - x^* \right\| = 0.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|h| < \delta \implies \left\| \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} - x^* \right\| < \varepsilon.$$

Sabendo que $|\|\alpha\| - \|\beta\|| \leq \|\alpha - \beta\|$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \left| \left\| \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \right\| - \|x^*\| \right| < \varepsilon &\iff -\varepsilon < \left\| \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \right\| - \|x'(t_0)\| < \varepsilon \\ &\iff \|x'(t_0)\| - \varepsilon < \left\| \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \right\| < \varepsilon + \|x'(t_0)\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|h| < \delta \implies \|x(t_0 + h) - x(t_0)\| < \varepsilon|h| + \|x'(t_0)\||h|.$$

Em particular, fixando $\varepsilon = 1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|h| < \delta_1 \implies \|x(t_0 + h) - x(t_0)\| < (1 + \|x'(t_0)\|)|h|.$$

Chamando $t = t_0 + h$, temos

$$|t - t_0| < \delta_1 \implies \|x(t) - x(t_0)\| < C|t - t_0|,$$

onde $C = 1 + \|x'(t_0)\|$.

Para o $\varepsilon > 0$ dado inicialmente, tomemos $\delta = \min \left\{ \delta_1, \frac{\varepsilon}{C} \right\}$. Assim, temos

$$|t - t_0| < \delta \implies \|x(t) - x(t_0)\| < C|t - t_0| < C\delta \leq C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

o que prova o resultado. □

Agora, abordaremos o conceito de integração em espaços de Banach e alguns resultados que serão fundamentais ao longo do trabalho.

Definição 1.13. Seja $f: (a, b) \rightarrow X$ uma função contínua. Dada uma partição π de $[a, b]$, isto é $n + 1$ números reais $t_0, \dots, t_n$ satisfazendo a condição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ e n números reais $\xi_i, i = 1, \dots, n$, com $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, define-se a soma de Riemann de f por:

$$\sigma_\pi(f) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) f(\xi_i).$$

Evidentemente, $\sigma_\pi(f) \in X$. Seja $|\pi| = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\}$.

Sendo f contínua, com os mesmos argumentos do caso $X = \mathbb{R}$, demonstra-se que $\sigma_\pi(f)$ tem um limite, $x \in X$, quando $|\pi| \rightarrow 0$. De modo mais preciso, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\sigma_\pi(f) - x\| < \varepsilon \text{ para toda partição } \pi \text{ de } (a, b) \text{ tal que } |\pi| < \delta.$$

Como no caso $X = \mathbb{R}$, diz-se que I é a integral de f em $[a, b]$ e escreve-se

$$I = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sigma_\pi(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

Cada item da proposição a seguir pode ser demonstrado facilmente usando a Definição 1.13.

Proposição 1.14. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. São válidas as seguintes propriedades para a integral de uma função vetorial:*

- (i) *Se k é uma constante, então $\int_a^b k f(t) dt = k \int_a^b f(t) dt$.*
- (ii) *$\int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$.*
- (iii) *Se $a \leq c \leq b$, então $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.*
- (iv) *$\|\int_a^b f(t) dt\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$.*
- (v) *$\|\int_a^b f(t) dt\| \leq \max_{a \leq t \leq b} \|f(t)\| (b - a)$.*

O próximo resultado, conhecido como Teorema da Média, será bastante utilizado ao longo do trabalho.

Teorema 1.15 (Teorema da Média). *Se $f: [0, a] \rightarrow X$ é uma função contínua, então*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds = f(0).$$

Demonstração. Pela Proposição 1.14 - item (i), podemos escrever

$$\left[\frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds - f(0) \right] = \frac{1}{t} \left[\int_0^t f(s) ds - \int_0^t f(0) ds \right] = \frac{1}{t} \int_0^t [f(s) - f(0)] ds.$$

Como f é contínua em $[0, a]$, que é um conjunto compacto, então f é uniformemente contínua em $[0, a]$ (veja [11, Teorema 1.68]). Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < t < \delta \implies \|f(t) - f(0)\| < \varepsilon.$$

Sendo assim, usando o item (iv) da Proposição 1.14, obtemos

$$\begin{aligned}
 0 < t < \delta \quad \implies \quad \left\| \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds - f(0) \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t [f(s) - f(0)] ds \right\| \\
 &= \left| \frac{1}{t} \right| \left\| \int_0^t [f(s) - f(0)] ds \right\| \\
 &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \|f(s) - f(0)\| ds \\
 &< \frac{1}{t} \int_0^t \varepsilon ds = \varepsilon,
 \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds = f(0).$$

□

Proposição 1.16. *Sejam X e Y espaços de Banach, $A: X \rightarrow Y$ uma aplicação linear e contínua, e consideremos $x \in C([a, b]; X)$. Então,*

$$A \int_a^b x(t) dt = \int_a^b Ax(t) dt.$$

Demonstração. Consideremos a partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$ onde $t_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ e seja $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Então,

$$x_n = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) x(\xi_i) \in X \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

pois x_n é uma combinação linear de elementos do espaço vetorial X , em que $(t_i - t_{i-1})$ são os escalares e $x(\xi_i) \in X$ para $i = 1, \dots, n$.

Usando a linearidade de A e avaliando-a em x_n , obtemos

$$Ax_n = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) Ax(\xi_i).$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \int_a^b Ax(t) dt. \quad (1.4)$$

Por outro lado, como x e A são contínuas, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \int_a^b x(t) dt$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = A \left(\int_a^b x(t) dt \right). \quad (1.5)$$

Por (1.4) e (1.5) concluímos que

$$A \int_a^b x(t) dt = \int_a^b Ax(t) dt.$$

□

Uma prova para o próximo resultado pode ser encontrada em [23, Lema 1.13]. Este resultado será utilizado na demonstração da Proposição 1.18, apresentada na sequência.

Lema 1.17. *Sejam $x, y \in C([a, b]; X)$ curvas deriváveis em $[a, b]$, tais que $y'(t) = x'(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Então, existe $\xi \in X$ tal que $y(t) = x(t) + \xi$, para todo $t \in [a, b]$.*

Proposição 1.18. *Seja $x \in C([a, b]; X)$ e consideremos*

$$y(t) = \int_a^t x(s)ds.$$

Então, $y \in C^1([a, b]; X) = \{w: [a, b] \rightarrow X: w \text{ é derivável e } w' \text{ é contínua}\}$ e $y'(t) = x(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

Além disso, se $x \in C^1([a, b]; X)$, então vale a identidade:

$$x(b) - x(a) = \int_a^b x'(s)ds.$$

Demonstração. Para provar que $y \in C^1([a, b]; X)$, é suficiente provar que $y'(t) = x(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Para isso, devemos mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h} = x(t_0)$$

para qualquer $t_0 \in [a, b]$.

De fato, seja $t_0 \in [a, b]$ e $\varepsilon > 0$. Como $x \in C([a, b]; X)$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $0 < h < \delta$ então $\|x(t_0 + h) - x(t_0)\| < \varepsilon$. Daí, para todo $0 < h < \delta$ resulta que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h} - x(t_0) \right\| &= \left\| \frac{\int_a^{t_0+h} x(s)ds - \int_a^{t_0} x(s)ds}{h} - x(t_0) \right\| \\ &= \left\| \frac{\int_{t_0}^{t_0+h} x(s)ds}{h} - x(t_0) \right\| = \left\| \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} x(s)ds - \frac{h}{h} x(t_0) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h} \left(\int_{t_0}^{t_0+h} x(s)ds - \int_{t_0}^{t_0+h} x(t_0)ds \right) \right\| = \left\| \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} (x(s) - x(t_0))ds \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h} \int_0^h x(t_0 + \tau) - x(t_0) d\tau \right\| \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|x(t_0 + \tau) - x(t_0)\| d\tau \\ &< \frac{1}{h} \int_0^h \varepsilon d\tau = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso mostra que existe $\frac{d^+y}{dt}(t_0)$ e $\frac{d^+y}{dt}(t_0) = x(t_0)$. De forma análoga, podemos mostrar que existe $\frac{d^-y}{dt}(t_0)$ e $\frac{d^-y}{dt}(t_0) = x(t_0)$. Portanto, y é derivável em $[a, b]$ e $y'(t_0) = x(t_0)$. Pela arbitrariedade de $t_0 \in [a, b]$, concluímos que y é derivável em t e $y'(t) = x(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Cabe destacar que, quando $t_0 = a$ ou $t_0 = b$, estamos considerando apenas a respectiva derivada lateral. Assim concluímos que $y \in C^1([a, b]; X)$.

Suponhamos agora que $x \in C^1([a, b]; X)$. Logo, $\int_a^t x'(s)ds$ está bem definida. Definamos

$$y(t) = x(a) + \int_a^t x'(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Pelo que foi provado anteriormente, temos que $y'(t)$ existe para todo $t \in [a, b]$ e ainda, como $(x(a))' = 0$, obtemos

$$y'(t) = (x(a))' + \left(\int_a^t x'(s)ds \right)' = x'(t), \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Segue então do Lema (1.17) que existe $\xi \in X$ tal que

$$y(t) = \xi + x(t), \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Em particular, para $t = a$, vale

$$\xi + x(a) = y(a) = x(a) + \int_a^a x'(s)ds = x(a),$$

ou seja,

$$\xi + x(a) = x(a),$$

o que implica $\xi = 0$, ou seja, $y(t) = x(t)$, para todo $t \in [a, b]$.

Finalmente, considerando $t = b$, obtemos

$$x(b) = y(b) = x(a) + \int_a^b x'(s)ds,$$

ou melhor,

$$x(b) - x(a) = \int_a^b x'(s)ds,$$

o que encerra a prova. $\square$

Finalizaremos esta seção com o Critério de Cauchy, resultado que fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de limite.

Proposição 1.19 (Critério de Cauchy). *Sejam X um espaço de Banach e $f: [a, +\infty) \rightarrow X$ uma função. Uma condição necessária e suficiente para que o limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ exista é que dado $\varepsilon > 0$, exista $t_0 > a$ tal que*

$$t, s > t_0 \implies \|f(t) - f(s)\| < \varepsilon.$$

Demonstração. ($\implies$): Suponhamos que o limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ exista e $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = x_0$.

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um $t_0 > a$ tal que se $t > t_0$ então

$$t > t_0 \implies \|f(t) - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} t, s > t_0 \implies \|f(t) - f(s)\| &= \|f(t) - x_0 + x_0 - f(s)\| \\ &\leq \|f(t) - x_0\| + \|x_0 - f(s)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

($\impliedby$): Reciprocamente, vamos assumir que dado $\varepsilon > 0$, exista $t_0 > a$ tal que se $t, s > t_0$ então $\|f(t) - f(s)\| < \varepsilon$. Fazendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \in (a, +\infty)$ tal que

$$t, s > t_n \implies \|f(t) - f(s)\| < \frac{1}{n}.$$

Note que podemos supor, sem perda de generalidade, que a sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente, ou seja, que $t_m > t_n$ sempre que $m > n$. Consideremos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ a sequência

definida por $x_n = f(t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que esta sequência é de Cauchy. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, como $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Logo,

$$\begin{aligned} m, n > n_0 &\implies t_m > t_n > t_{n_0} \\ &\implies \|x_m - x_n\| = \|f(t_m) - f(t_n)\| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova a afirmação. Como X é um espaço completo, existe um $x_0 \in X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_1 \implies \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ou seja, existe $t_{n_1} > a$ tal que

$$t_n > t_{n_1} \implies n > n_1 \implies \|f(t_n) - x_0\| = \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ e, portanto, $t_{n_2} > a$ tal que

$$t, s > t_{n_2} \implies \|f(t) - f(s)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ segue que existe $t_0 = t_{n_0} > 0$ tal que

$$t > t_0 \implies \|f(t) - x_0\| \leq \|f(t) - f(t_n)\| + \|f(t_n) - x_0\|,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ é tal que $n > n_0$, ou seja, $t_n > t_{n_0} = t_0$. Por conseguinte,

$$t > t_0 \implies \|f(t) - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que conclui a prova. □

1.2 Espaços de Hilbert

Abordamos aqui uma classe de espaços de Banach, conhecidos como espaços de Hilbert, que serão mencionados em uma aplicação da teoria a ser desenvolvida. Os resultados aqui expostos foram extraídos de [14] e [8].

Definição 1.20. Um **produto interno** (ou produto escalar) sobre um espaço vetorial X é uma função de valor escalar $(\cdot, \cdot)$ definida em $X \times X$ tal que

- (i) para cada $y \in X$, a função $x \in X \mapsto (x, y)$ é linear;
- (ii) $\overline{(x, y)} = (y, x)$, onde a barra denota a conjugação complexa;
- (iii) $(x, x) \geq 0$ para cada $x \in X$;
- (iv) $(x, x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Note que por ((i)), $(0, y) = 0$ para qualquer $y \in X$ e, portanto, $(y, 0) = 0$ por ((ii)), para qualquer $y \in X$.

Teorema 1.21 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Se $(\cdot, \cdot)$ é um produto interno sobre um espaço vetorial X , então:*

- (i) para $x, y \in X$, tem-se $|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}$;
- (ii) a função $x \in X \mapsto \|x\| := \sqrt{(x, x)}$ define uma norma sobre X , denominada a norma induzida pelo produto interno.

Definição 1.22. Um espaço de Banach $(H, \|\cdot\|)$ é chamado um **espaço de Hilbert** se existe um produto interno $(\cdot, \cdot)$ sobre H tal que $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ para cada $x \in H$.

Observação 1.23. Todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach, mas a afirmação recíproca não é verdadeira, pois nem toda norma provém de um produto interno. Como exemplos de normas que não provêm de produto interno, podemos citar as normas da soma e a do máximo em $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_S = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ e $\|x\|_M = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, respectivamente.

Exemplo 1.24. A seguir apresentamos dois exemplos de espaços de Hilbert, cujas definições podem ser encontradas no Apêndice (B). Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, temos que

- (i) o espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno:

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx;$$

- (ii) o espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(f, g)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (f(x)g(x) + \nabla f(x) \cdot \nabla g(x))dx,$$

onde ∇ é o operador definido por $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$.

1.3 Operadores lineares

Esta seção tem como objetivo introduzir notações, conceitos e recordar resultados básicos da teoria de operadores lineares. As demonstrações dos resultados aqui presentes serão omitidas por serem abordadas em muitos livros e materiais didáticos da disciplina Análise Funcional. No entanto, ao leitor interessado, que ainda não teve contato com elementos dessa teoria, indicamos a referência [10] para maiores detalhes.

Nesta seção, X e Y denotam espaços normados com suas respectivas normas, $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$.

Definição 1.25. Sejam X, Y espaços normados e $\mathcal{D}_T$ um subespaço de X . Dizemos que $T: \mathcal{D}_T \subseteq X \rightarrow Y$ é um **operador linear** se

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2),$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_T$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Quando $Y = \mathbb{R}$ ou $Y = \mathbb{C}$, dizemos que T é um **funcional linear**.

Observação 1.26. Se $T: \mathcal{D}_T \subseteq X \rightarrow Y$ é linear, então $T(0) = 0$. De fato, para $x \neq 0$ e $\lambda = 0$, temos

$$T(0) = T(0 \cdot x) = 0 \cdot T(x) = 0.$$

Definição 1.27. Seja $T: \mathcal{D}_T \subseteq X \rightarrow Y$ um operador linear. Definimos:

- A **imagem** de T , como o conjunto dos elementos $y \in Y$ tais que $y = T(x)$, com $x \in \mathcal{D}_T$. Esse conjunto é denotado por $\text{Im}(T)$. Portanto,

$$\text{Im}(T) := \{y \in Y : y = T(x), x \in \mathcal{D}_T\}.$$

- O **núcleo** de T , como o conjunto de todos os elementos $x \in \mathcal{D}_T$ tais que $T(x) = 0$. Esse conjunto é denotado por $\mathcal{N}_T$. Logo,

$$\mathcal{N}_T := \{x \in X : T(x) = 0\}.$$

Na sequência apresentaremos o conceito de continuidade e limitação para um operador linear.

Definição 1.28. Dizemos que o operador $T: \mathcal{D}_T \subset X \rightarrow Y$ é **contínuo** em x' se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathcal{D}_T, \|x - x'\|_X < \delta \implies \|T(x) - T(x')\|_Y < \varepsilon.$$

Dizemos que o operador $T: \mathcal{D}_T \subset X \rightarrow Y$ é **contínuo** em X quando T é contínuo em todo $x \in X$.

Definição 1.29. Dizemos que o operador $T: \mathcal{D}_T \subset X \rightarrow Y$ é **limitado** se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}_T.$$

Note que se T é limitado então T leva subconjuntos limitados de X em subconjuntos limitados de Y .

É sabido que as Definições 1.28 e 1.29 são equivalentes para operadores lineares. Este fato está formalizado no próximo resultado, cuja prova pode ser encontrada em [10, Teorema 2.7-9].

Teorema 1.30. *Um operador linear $T: \mathcal{D}_T \subset X \rightarrow Y$ é contínuo se, e somente se, é limitado.*

Usando a equivalência dada no Teorema 1.30, pode-se demonstrar o seguinte resultado, veja [10, Teorema 2.7-8].

Proposição 1.31. *Se X é um espaço normado de dimensão finita, então todo operador linear definido em X é contínuo.*

O conjunto dos operadores lineares limitados $T: X \rightarrow Y$ será denotado por $\mathcal{B}(X; Y)$. Quando $X = Y$, denotaremos $\mathcal{B}(X; X)$ simplesmente por $\mathcal{B}(X)$.

$\mathcal{B}(X; Y)$ é um espaço vetorial normado com a norma:

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X; Y)} := \inf\{C > 0 : \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \forall x \in X\}. \quad (1.6)$$

É possível verificar que

$$\begin{aligned} \inf\{C > 0: \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \forall x \in X\} &= \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \\ &= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|T(x)\|_Y \\ &= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|T(x)\|_Y, \end{aligned} \quad (1.7)$$

veja [10], páginas 91–93.

Portanto, por (1.6) e (1.7), vemos que

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X;Y)} \stackrel{(*)}{=} \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|T(x)\|_Y = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|T(x)\|_Y.$$

Da igualdade (*) segue que $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{B}(X;Y)}\|x\|_X$ para todo $x \in X$.

Também é sabido que $\mathcal{B}(X;Y)$ é completo com a métrica induzida pela norma $\|T\|_{\mathcal{B}(X;Y)}$ se Y for completo com a métrica induzida pela norma de Y , (veja [10, Teorema 2.10-2]).

Vimos na Definição 1.25 o conceito de funcional linear. Sendo X um espaço normado, denotaremos por X^* o **espaço dual topológico de X** , que é o espaço de todos os funcionais lineares contínuos definidos em X .

Sobre X^* , define-se a norma (dual) por

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in X}} |f(x)| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in X}} f(x), \quad (1.8)$$

para $f \in X^*$.

Também poderemos escrever $\|f\|$ no lugar de $\|f\|_{X^*}$, quando não houver o risco de gerar confusão entre as notações. Dado $f \in X^*$ e $x \in X$, escreveremos frequentemente $\langle f, x \rangle$ para denotar $f(x)$; dizemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o **produto escalar para a dualidade X^*, X** .

Observação 1.32. X^* é um espaço de Banach, ou seja, X^* com a norma definida em (1.8) é completo (ainda que X não seja). Isso é consequência da forma analítica do Teorema de Hahn-Banach (Teorema A.1, Apêndice A) - veja também [10, Teorema 2.10-2].

Vamos agora à definição de inverso de um operador linear. Consideremos X, Y espaços vetoriais e $\mathcal{D}_T$ um subespaço de X . Primeiramente, lembramos que um operador linear $T: \mathcal{D}_T \rightarrow Y$ é injetivo se, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_T$, tem-se

$$x_1 \neq x_2 \implies T(x_1) \neq T(x_2),$$

ou equivalentemente,

$$T(x_1) = T(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Neste caso, existe o operador

$$\begin{aligned} T^{-1}: \quad \text{Im}(T) &\longrightarrow \mathcal{D}_T \\ y_0 &\longmapsto x_0 \quad (y_0 = T(x_0)) \end{aligned} \quad (1.9)$$

que leva todo $y_0 \in \text{Im}(T)$ sobre $x_0 \in \mathcal{D}_T$, onde $T(x_0) = y_0$. O operador T^{-1} é chamado o **inverso** de T .

Claramente de (1.9) segue que

$$T^{-1}T(x) = x \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}_T,$$

e

$$TT^{-1}(y) = y \quad \text{para todo } y \in \text{Im}(T).$$

O inverso de um operador linear existe se, e somente se, o núcleo dele consiste apenas do vetor nulo. Mais precisamente, temos o seguinte critério, cuja prova pode ser encontrada em [10, Teorema 2.6-10].

Teorema 1.33. *Sejam X e Y espaços vetoriais, ambos reais ou ambos complexos. Seja $T: \mathcal{D}_T \rightarrow Y$ um operador linear com domínio $\mathcal{D}_T \subset X$ e imagem $\text{Im}(T) \subset Y$.*

(i) *O inverso $T^{-1}: \text{Im}(T) \rightarrow \mathcal{D}_T$ existe se, e somente se,*

$$T(x) = 0 \implies x = 0.$$

(ii) *Se T^{-1} existe, T^{-1} é um operador linear.*

(iii) *Se $\dim \mathcal{D}_T = n < \infty$ e T^{-1} existe, então $\dim \text{Im}(T) = \dim \mathcal{D}_T = n$.*

Também deixaremos registrado aqui a fórmula bastante útil para o inverso de uma composição de operadores lineares. Este resultado também está presente em [10, Lema 2.6-11].

Teorema 1.34. *Sejam X, Y, Z espaços vetoriais, todos reais ou todos complexos, e $T: X \rightarrow Y$ e $S: Y \rightarrow Z$ operadores lineares bijetivos invertíveis. Então, o inverso $(ST)^{-1}: Z \rightarrow X$ do produto (da composição) ST existe e vale*

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

Teorema 1.35 (Teorema de Neumann). *Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(X)$.*

Se $\|T\|_{\mathcal{B}(X)} < 1$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converge para $(I - T)^{-1}$ e, além disso,

$$\|(I - T)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{1}{1 - \|T\|_{\mathcal{B}(X)}}.$$

Demonstração. Pela Proposição 1.6, é suficiente mostrar que a série $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converge absolutamente em $\mathcal{B}(X)$, que é um espaço de Banach, posto que X o é.

Notemos inicialmente que, como $\|T\|_{\mathcal{B}(X)} < 1$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|},$$

por tratar-se de uma série geométrica. Ancorados pelo Teste de Comparação (Proposição 1.7), fazendo $M_n = \|T\|_{\mathcal{B}(X)}^n$, para $n \in \mathbb{N}$, e notando que

$$\|T^n\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \|T\|_{\mathcal{B}(X)}^n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

inferimos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente. Ademais,

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} T^n \right\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|_{\mathcal{B}(X)}^n = \frac{1}{1 - \|T\|_{\mathcal{B}(X)}}. \quad (1.10)$$

Para concluir a prova, resta-nos provar que $\sum_{n=0}^{\infty} T^n = (I - T)^{-1}$. De fato,

$$(I - T) \sum_{n=0}^{\infty} T^n = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=1}^{\infty} T^n = T^0 + \sum_{n=1}^{\infty} T^n - \sum_{n=1}^{\infty} T^n = I.$$

Por outro lado,

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n (I - T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k T^n (I - T) = \lim_{k \rightarrow \infty} I - T^{k+1} = I,$$

pois $\|T^{k+1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \|T\|_{\mathcal{B}(X)}^{k+1}$ e $\|T\|_{\mathcal{B}(X)} < 1$. Portanto, concluímos que $\sum_{n=0}^{\infty} T^n = (I - T)^{-1}$ e, por (1.10), obtemos

$$\|(I - T)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{1}{1 - \|T\|_{\mathcal{B}(X)}}.$$

□

A seguir, enunciamos um resultado referente a séries no espaço $\mathcal{B}(X)$.

Teorema 1.36 (Produto de séries absolutamente convergentes). *Sejam $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências no espaço de Banach $\mathcal{B}(X)$ tais que*

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} T_n$ converge absolutamente;
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ converge;
- (iii) $U_n = \sum_{k=0}^n T_k S_{n-k}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n \right).$$

Definição 1.37. Dois operadores A e B , com domínios $\mathcal{D}_A$ e $\mathcal{D}_B$ respectivamente, são ditos iguais quando $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_B = \mathcal{D}$ e $Au = Bu$ para todo $u \in \mathcal{D}$.

Definição 1.38. Dizemos que o operador $B : \mathcal{D}_B \subset H \rightarrow H$ é uma extensão do operador $A : \mathcal{D}_A \subset H \rightarrow H$ quando $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_B$ e $Au = Bu$ para todo $u \in \mathcal{D}_A$.

Neste caso, indica-se $A \subset B$. Ademais, quando $A \subset B$, dizemos que B é uma extensão própria de A .

Definição 1.39. Sejam X e Y espaços normados. Um operador linear $T: \mathcal{D}_T \subseteq X \rightarrow Y$ é **fechado** se seu gráfico

$$\mathcal{G}_T = \{(x, y) \in X \times Y : x \in \mathcal{D}_T, y = T(x)\}$$

é um conjunto fechado no espaço normado $X \times Y$ munido com a **norma do gráfico**, $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_T}$, dada por

$$\|x\|_{\mathcal{D}_T} = \|x\|_X + \|T(x)\|_Y.$$

Assim, T é fechado se para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_T$ satisfazendo $x_n \rightarrow x$ e $T(x_n) \rightarrow y$ fortemente em X e em Y , respectivamente, quando $n \rightarrow \infty$, então $x \in \mathcal{D}_T$ e $T(x) = y$.

Proposição 1.40. Se X e Y são espaços de Banach e $T: \mathcal{D}_T \subset X \rightarrow Y$ é um operador linear fechado, então $\mathcal{D}_T$ é um espaço de Banach, com a norma do gráfico.

A prova da Proposição 1.40 é simples. Basta verificar que toda sequência de Cauchy em $\mathcal{D}_T$ converge com a norma do gráfico.

Observação 1.41. Lembre-se que um operador A sobre um espaço normado X se diz **densamente definido** se seu domínio é um subconjunto denso do espaço X ; isto é,

$$\overline{\mathcal{D}_A} = X.$$

Definição 1.42. Sejam X um espaço de Banach e $A: \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow X$ um operador linear densamente definido. Definimos

$$\mathcal{D}_{A^*} = \{f \in X^* : \text{existe } C > 0 \text{ tal que } |f(Au)| \leq C\|u\|_X, \text{ para cada } u \in \mathcal{D}_A\}.$$

Note que $\mathcal{D}_{A^*}$ é um subespaço de X^* . Além disso, se $f \in \mathcal{D}_{A^*}$, o funcional g dado por

$$\begin{aligned} g &: \mathcal{D}_A \rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto g(u) = f(Au), \end{aligned}$$

é linear e contínuo em $\mathcal{D}_A$. A linearidade segue do fato de f e A serem lineares, já a continuidade segue do fato de $f \in \mathcal{D}_{A^*}$.

Já que $\overline{\mathcal{D}_A} = X$, como consequência do Teorema de Hahn-Banach (Corolário A.2 - Apêndice A) existe uma única extensão linear e contínua de g em X que denotaremos por A^*f . Dessa maneira,

$$\begin{aligned} A^* &: \mathcal{D}(A^*) \subset X^* \rightarrow X^* \\ f &\mapsto A^*f \end{aligned}$$

é um operador linear.

Definição 1.43. O operador A^* definido acima é chamado o **adjunto** de A e vale a seguinte relação entre A e A^*

$$(A^*f)(u) = f(Au) \text{ para quaisquer } f \in \mathcal{D}_{A^*} \text{ e } u \in \mathcal{D}_A.$$

No que segue daremos algumas definições e um resultado concernentes a operadores sobre espaços de Hilbert. Tendo já definido esse tipo de espaço na Seção 1.2, H denotará um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot, \cdot)_H$. As referências para os conceitos e o resultado que seguem são [15] e [3].

Definição 1.44. Seja $A : \mathcal{D}_A \subset H \rightarrow H$ um operador linear não limitado. Dizemos que A é

- **monótono**¹ se

$$(Av, v) \geq 0 \text{ para todo } v \in \mathcal{D}_A.$$

- **maximal monótono** se é monótono e $\text{Im}(I + A) = H$, isto é,

$$\text{para toda } f \in H, \text{ existe } u \in \mathcal{D}_A \text{ tal que } u + Au = f.$$

Definição 1.45. Seja $A : \mathcal{D}_A \subset H \rightarrow H$ um operador linear densamente definido. Dizemos que A é **simétrico** se satisfaz $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_{A^*}$ e $A = A^*$ em $\mathcal{D}_A$. Ou seja, se para quaisquer $u, v \in \mathcal{D}_A$, tem-se

$$(Au, v)_H = (u, Av)_H.$$

O operador A é dito **auto-adjunto** se $A^* = A$. Diremos que o operador simétrico A é auto-adjunto se $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^*}$.

Observação 1.46. Quando $\mathcal{D}_A = H$ e $A \in \mathcal{B}(H)$, não existe distinção entre operadores simétricos e auto-adjuntos. É claro que todo operador auto-adjunto é simétrico, mas a recíproca não é válida: A é simétrico se $A \subset A^*$, isto é, se $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_{A^*}$ e $A^* = A$ em $\mathcal{D}_A$. Quando A é simétrico, pode ocorrer que $A \subsetneq A^*$, de forma que não poderia ser auto-adjunto. Porém, o seguinte resultado garante que quando A é maximal monótono, então

$$(A \text{ simétrico}) \Leftrightarrow (A \text{ auto-adjunto}).$$

Proposição 1.47 ([15, Proposição 7.6]). *Se $A : \mathcal{D}_A \subset H \rightarrow H$ é um operador maximal monótono e simétrico, então A é auto-adjunto.*

1.3.1 O operador resolvente

Definição 1.48. Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(X)$. Um número complexo λ se diz **autovalor** de T se existe $x \in X \setminus \{0\}$ tal que

$$T(x) = \lambda x.$$

O elemento x que satisfaz a equação anterior é chamado um **autovetor** de T .

Observação 1.49.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ é um autovalor de } T &\iff \exists x \neq 0 \text{ tal que } (\lambda I - T)x = 0 \\ &\iff x \in \mathcal{N}_{(\lambda I - T)} \\ &\iff (\lambda I - T) \text{ não é injetivo, } \mathcal{N}_{(\lambda I - T)} \neq \{0\}. \end{aligned}$$

Definição 1.50. Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(X)$. O **conjunto resolvente** de T , denotado por $\rho(T)$, é o conjunto de todos os números complexos λ tais que o operador $\lambda I - T$ é invertível, isto é:

$$\rho(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T)^{-1} \text{ existe em } \mathcal{B}(X) \right\}$$

e $(\lambda I - T)^{-1} : \text{Im}(\lambda I - T) \subset X \rightarrow X$ é limitado. Ou seja, se $\lambda \in \rho(T)$, então $(\lambda I - T)$ é invertível. O **espectro** do operador T é definido por $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$. Para $\lambda \in \rho(T)$, o operador $R(\lambda, T) := (\lambda I - T)^{-1}$ é chamado o **operador resolvente**.

¹Isto é equivalente a dizer que $-A$ é dissipativo

Os próximos resultados a serem enunciados, conhecidos como consequências do Teorema de Categoria de Baire, serão úteis ao longo do trabalho. Suas demonstrações podem ser encontradas em [15, Capítulo 2] e [10, Capítulo 4].

Teorema 1.51 (Princípio da Limitação Uniforme). *Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $(T_i)_{i \in I}$ uma família de operadores lineares limitados $T_i: X \rightarrow Y$, onde I é um conjunto de índices não necessariamente enumerável, satisfazendo a condição de que, para cada $x \in X$, existe uma constante $0 < C_x < \infty$ tal que $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_Y < C_x$. Então,*

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{B}(X;Y)} < \infty.$$

Os dois resultados seguintes são teoremas fundamentais sobre espaços de Banach, as demonstrações deles podem ser achadas em qualquer livro de Análise Funcional, porém deixamos como referência [10].

Teorema 1.52 (Teorema da Inversa Limitada). *Sejam X e Y espaços de Banach e $T: X \rightarrow Y$ um operador linear, limitado e bijetor. Então, T^{-1} é um operador linear limitado de Y em X .*

Teorema 1.53 (Teorema do Gráfico Fechado). *Sejam X e Y espaços de Banach e $T: X \rightarrow Y$ um operador linear. Se T é um operador fechado, então T é limitado.*

Observação 1.54. Usando o Teorema do Gráfico Fechado, é possível mostrar que se $T: \mathcal{D}_T \subset X \rightarrow X$ é um operador fechado e $\lambda \in \rho(T)$, então $\text{Im}(\lambda I - T) = X$ (Uma prova deste resultado pode ser encontrada em [23, Proposição 1.32].)

Mais ainda, se $\lambda I - T: \mathcal{D}_T \subset X \rightarrow X$ é bijetor, segue do Teorema da Inversa Limitada que $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$.

Fazendo uso da observação anterior, a definição de conjunto resolvente pode ser reformulada da seguinte maneira:

Definição 1.55. Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $T: \mathcal{D}_T \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado. O **conjunto resolvente** de T é o subconjunto $\rho(T)$ de todos os λ em $\mathbb{C}$ tais que $(\lambda I - T)$ é bijetor.

O **espectro** $\sigma(T)$ de um operador fechado $T: \mathcal{D}_T \subset X \rightarrow X$ pode ser descomposto em 3 partes disjuntas, como segue.

- (i) O conjunto dos **autovalores** de T é chamado de **espectro pontual** de T , $\sigma_p(T)$, isto é

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T): (\lambda I - T) \text{ não é injetor}\}.$$

- (ii) O **espectro residual** $\sigma_r(T)$ de T é definido por

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T): (\lambda I - T) \text{ é injetor e } \overline{\text{Im}(\lambda I - T)} \subsetneq X\}.$$

- (iii) O **espectro contínuo** $\sigma_c(T)$ de T é definido por

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T): (\lambda I - T) \text{ é injetor, } \text{Im}(\lambda I - T) \subsetneq X \text{ e } \overline{\text{Im}(\lambda I - T)} = X\}.$$

Claramente, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$ com união disjunta. Em espaços de dimensão finita, segue do Teorema do Núcleo e da Imagem que $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, isto é $\sigma_r(T) = \sigma_c(T) = \emptyset$. Mas, em espaços de dimensão infinita, isto pode não ser verdadeiro.

1.4 Exemplos de operadores lineares limitados e não limitados

Exporemos a seguir os operadores lineares que são relevantes neste estudo. As referências usadas para elaborar esta seção foram [13], [10] e [23].

1.4.1 Operador diferencial

Seja X o espaço normado de todos os polinômios sobre $I = [0, 1]$, com a norma dada por:

$$\|x\| = \max \{|x(t)|, t \in I\}.$$

O operador diferencial $\mathbf{D}$ definido em X por:

$$\mathbf{D}x(t) = x'(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

é um operador linear, mas não é limitado. Para verificar a última afirmação, considere $x_n(t) = t^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Note que $\sup_{t \in I} |x_n(t)| = 1 = \|x_n\|$, pois $I = [0, 1]$. Por outro lado, $\mathbf{D}x_n(t) = x'_n(t) = nt^{n-1}$, de onde obtemos:

$$\|\mathbf{D}\| = \sup_{x_n \neq 0} \left\{ \frac{\|\mathbf{D}x_n\|}{\|x_n\|} \right\} = \sup_{x_n \neq 0} \left\{ \frac{\|nt^{n-1}\|}{1} \right\} = \sup_{x_n \neq 0} \{nt^{n-1}\} = n.$$

1.4.2 Operador integral

O operador integral em $L^2((a, b))^2$ é definido por

$$T(x)(s) = \int_a^b K(s, t)x(t)dt,$$

onde a e b podem ser finitos ou infinitos, com $a < b$, e K é uma função definida sobre o quadrado $(a, b) \times (a, b)$. A função K é chamada o núcleo do operador. O domínio do operador integral depende de K .

Se

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 dt ds < \infty,$$

então T é limitado sobre $L^2((a, b))$ e

$$\|T\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 dt ds}.$$

Com efeito, para qualquer $x \in L^2((a, b))$, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.21), temos

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t)x(t)dt \right|^2 ds \\ &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(s, t)|^2 dt \int_a^b |x(t)|^2 dt \right) ds \\ &\leq \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 dt ds \int_a^b |x(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

²Recorde a definição de $L^2((a, b))$ no Apêndice B.

Assim,

$$\|Tx\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dt ds} \|x\|.$$

Consequentemente,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dt ds},$$

para qualquer $x \in L^2((a,b))$ com $x \neq 0$, donde

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dt ds}.$$

Observação 1.56. Veremos no Capítulo 4 - Seção 4.2, que o operador de Laplace ou Laplaciano, denotado por “ Δ ” e definido por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

é um operador linear não limitado em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)^3$, onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, limitado, suficientemente suave, com fronteira regular.

1.5 A função exponencial

Antes de iniciarmos o nosso estudo sobre semigrupos, vamos mostrar o porquê é tão importante falar sobre a função exponencial neste contexto. Começamos com a seguinte indagação: o que de comum têm as seguintes equações

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_x = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.12)$$

e

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.13)$$

Ou qual é a relação que existe entre as equações anteriores e o sistema da forma

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha u_{xx} + m \theta_x = 0, & x \in \mathbb{R} \\ \theta_t - k \theta_{xx} + m u_{xt} = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.14)$$

Pelo fato das equações acima serem de diferentes tipos, aparentemente não existe semelhança alguma entre elas e o sistema. Se quisermos estudar sua boa colocação ou qualquer outro tipo de propriedade, para cada caso, teríamos que proceder de maneiras diferentes. Porém, todas as equações acima podem ser reduzidas a uma equação de primeira ordem na variável t , como será feito a seguir.

³Veja a definição de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ no Apêndice B.

Por exemplo, consideremos a equação (1.11), fazendo

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \implies \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ \alpha u_{xx} \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I \\ (\cdot)_{xx} & 0 \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}.$$

Podemos então reescrever a equação (1.11) na seguinte forma

$$U_t = AU, \quad U(0) = U_0, \quad \text{com } U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Fazendo $A = \alpha(\cdot)_x$, a equação (1.12) também pode ser escrita na forma (1.15). De forma análoga, a equação (1.13) também pode ser escrita na forma (1.15), tomando $A = k(\cdot)_{xx}$. Finalmente, o sistema (1.14) pode ser reescrito como

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \\ \theta \end{pmatrix} \implies \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ u_t \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \\ \theta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ \alpha u_{xx} - m\theta_x \\ k\theta_{xx} - mu_{xt} \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ u_t \\ \theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ (\cdot)_{xx} & 0 & -m(\cdot)_x \\ 0 & -m(\cdot)_x & k(\cdot)_{xx} \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} u \\ u_t \\ \theta \end{pmatrix}.$$

Portanto, o sistema (1.14) também pode ser expresso na forma

$$U_t = AU, \quad \text{com } U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \theta_0 \end{pmatrix}.$$

Isto nos leva à conclusão de que para estudar a boa colocação dos modelos (1.11)–(1.14) bastará estudar as propriedades do operador A na equação abstrata (1.15). Isto é o que trata a teoria de semigrupos.

Motivamos então o uso da função exponencial, pensando na seguinte equação diferencial de primeira ordem dada por

$$y' = ay, \quad y(0) = y_0$$

com $a, y_0 \in \mathbb{R}$, cuja solução é dada por $y = y_0 e^{at}$ para $t \geq 0$. Consideremos agora um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} y'_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ y'_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ y'_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \end{aligned}$$

com $y_1(0) = y_{10}$, $y_2(0) = y_{20}$, $y_3(0) = y_{30}$, onde a_{ij} , $y_{i0} \in \mathbb{R}$ são dados do problema. Achar a solução deste sistema é um problema mais complexo que no caso escalar. Porém, usando a notação matricial

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ y_{30} \end{pmatrix},$$

o sistema que pode ser reescrito da seguinte maneira

$$Y' = AY; \quad Y(0) = Y_0.$$

Pela forma desta última equação, esperamos que a solução Y do problema de valor inicial anterior seja também uma função exponencial. O problema, então, é estender o conceito de exponencial para matrizes. Usando as séries de Taylor, podemos expressar a função exponencial real como uma série de potências:

$$e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A partir desta fórmula, é possível estender o conceito de exponencial sobre o conjunto das matrizes.

Consideremos uma matriz quadrada A de ordem n . Qualquer potência A^k é também uma matriz quadrada, e a série

$$I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots \quad (1.16)$$

está bem definida, onde trocamos o número 1 pela matriz identidade I . A série acima é convergente para qualquer matriz A e qualquer número real t . Para garantir isto, basta verificar que a sequência de somas parciais dela é de Cauchy no espaço das matrizes (que é um espaço de Banach) usando também o fato de que, para matrizes quadradas de ordem n , tem-se

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k,$$

e o fato da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|A\|^n$ ser convergente para qualquer valor de t (pelo Teste da Razão), onde o símbolo $\|\cdot\|$ aqui denota uma norma no espaço das matrizes quadradas.

Definimos então o limite da série convergente (1.16) como a exponencial da matriz A , ou seja,

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots.$$

Podemos verificar facilmente que

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}.$$

Portanto, a função exponencial matricial, definida no limite, verifica a propriedade da diferenciação da função exponencial de variável real.

De forma similar podemos estender a definição de exponencial para o caso em que A é um operador linear limitado (ou equivalentemente, contínuo) num espaço de Banach. Neste caso, a série

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

converge em norma e, por conseguinte, para cada $t \in \mathbb{R}$ sua ‘soma’ é um operador linear limitado desse espaço. Porém, um problema muito mais delicado é definir ‘a função exponencial’ quando A é não limitado.

Uma das razões de interesse na função exponencial é que ela é, formalmente, solução do seguinte problema de Cauchy: dado um operador linear não limitado, A , de um espaço de Banach X , queremos determinar uma função $u(t)$ definida em $[0, \infty)$, cujos valores pertencem a $\mathcal{D}_A$, isto é, $u(t): [0, \infty) \rightarrow \mathcal{D}_A$ e que satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = A(u(t)), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1.17)$$

onde u_0 é um elemento de X dado arbitrariamente.

Quando $A \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$, a função exponencial $E: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $E(t) = e^{tA}$, tem as seguintes propriedades:

- (i) $E(0) = 1$,
- (ii) $E(t + s) = E(t)E(s)$,
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} E(t) = 1$

e, além disso, é a única função definida em $\mathbb{R}_+$ com tais propriedades. É possível mostrar que o mesmo ocorre quando E toma valores no espaço $\mathcal{B}(X)$, onde X é qualquer espaço normado de dimensão finita (lembrando que todo operador linear definido em um espaço de dimensão finita é também contínuo). Neste caso, o número 1 que aparece nas propriedades (i) e (iii) deve ser interpretado como o operador identidade $I: X \rightarrow X$ e a multiplicação na propriedade (ii) como a composição de operadores lineares. Quando X tem dimensão infinita, temos que levar em conta que, neste caso, três topologias são usualmente introduzidas no espaço $\mathcal{B}(X)$ dos operadores lineares e limitados de X correspondendo, a cada uma delas, uma maneira distinta de interpretar o limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} E(t) = 1$. Assim, podemos interpretá-lo como o limite uniforme, o forte e o fraco. Relembremos que:

- * I é o limite uniforme de $E(t)$ quando $t \rightarrow 0^+$, se $\|E(t) - I\|_{\mathcal{B}(X)} \rightarrow 0$;
- * I é o limite forte de $E(t)$ quando $t \rightarrow 0^+$, se $\|E(t)x - x\|_X \rightarrow 0$, para todo $x \in X$;
- * I é o limite fraco de $E(t)$ quando $t \rightarrow 0^+$, se $\langle (E(t) - I)(x), x' \rangle \rightarrow 0$, para todo $x \in X$ e todo $x' \in X'$, onde X' é o dual topológico de X .

Quando o limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} E(t) = I$ é tomado no sentido da topologia uniforme tem-se uma situação bastante simples como mostra o seguinte teorema.

Teorema 1.57. *Uma função $E: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{B}(X)$ satisfaz as condições :*

- (a) $E(0) = I$,

$$(b) \ E(t+s) = E(t)E(s),$$

$$(c) \ \|E(t) - I\|_{\mathcal{B}(X)} \longrightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0^+,$$

se, e somente se, $E(t) = e^{tA}$, onde $A \in \mathcal{B}(X)$ e e^{tA} é definido por

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $A \in \mathcal{B}(X)$ e que

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Conforme foi observado anteriormente, para cada $t \geq 0$, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

converge absolutamente e $\mathcal{B}(X)$ é um espaço de Banach. Então, e^{tA} define, para cada $t \geq 0$, um operador linear limitado (contínuo) sobre X . Assim, $E(t) = e^{tA}$ é tal que $E: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{B}(X)$. Resta-nos provar que $E(t)$ satisfaz as condições (a), (b) e (c). Faremos isso nas próximas linhas.

(a): Por definição, temos

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \cdots + \frac{t^k A^k}{k!} + \cdots.$$

Avaliando a função E em $t = 0$, obtemos

$$E(0) = I + 0A + \frac{0^2 A^2}{2!} + \cdots + \frac{0^k A^k}{k!} + \cdots = I.$$

(b): Da fórmula do binômio de Newton segue que

$$(t+s)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k s^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k s^{n-k}, \quad \text{para } k \in \mathbb{N}. \quad (1.18)$$

Usando o Teorema 1.36, obtemos

$$\begin{aligned} E(t)E(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(sA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(tA)^k}{k!} \frac{(sA)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k A^k s^{n-k} A^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k A^k s^{n-k} A^{n-k}}{k!(n-k)!} \frac{n!}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{t^k s^{n-k} A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k s^{n-k} \\ &\stackrel{(1.18)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} (t+s)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} \\ &= E(t+s). \end{aligned}$$

(c): Mostraremos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|E(t) - I\|_{\mathcal{B}(X)} = 0$, o que significa que $E(t)$ é um semi-grupo uniformemente contínuo, conceito que será apresentado posteriormente. Para isso, vejamos que

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Então,

$$\begin{aligned} e^{At} - I &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \\ &= \frac{tA}{1!} + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \frac{(tA)^4}{4!} + \dots \\ &= tA \left(I + \frac{tA}{2!} + \frac{(tA)^2}{3!} + \frac{(tA)^3}{4!} + \dots \right) \\ &= tA \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{(n+1)!}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{(n+1)!}$ converge absolutamente, já que

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{(n+1)!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|(tA)^n\|}{(n+1)!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|tA\|^n}{n!} = e^{t\|A\|}. \tag{1.20}$$

Logo, por (1.19) e (1.20), obtemos

$$0 \leq \|E(t) - I\|_{\mathcal{B}(X)} \leq t\|A\|_{\mathcal{B}(X)} e^{t\|A\|_{\mathcal{B}(X)}}. \tag{1.21}$$

Como $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{t\|A\|_{\mathcal{B}(X)}} = 1$, temos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t\|A\|_{\mathcal{B}(X)} e^{t\|A\|_{\mathcal{B}(X)}} = 0$ e, por (1.21), concluímos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|E(t) - I\|_{\mathcal{B}(X)} = 0$, pelo Teorema do Confronto.

Reciprocamente, suponhamos que $E: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{B}(X)$ satisfaça as condições (a), (b) e (c). Destacamos que, aqui, o símbolo $\|\cdot\|$ denotará a norma de $\mathcal{B}(X)$ por simplicidade de notação. Primeiramente, vamos mostrar que $E(t)$ é uma função limitada em todo intervalo limitado. Com efeito, pela propriedade (c), dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 \leq t \leq \delta \implies \|E(t) - I\| < 1. \tag{1.22}$$

Como $\| \|E(t)\| - \|I\| \| \leq \|E(t) - I\|$ para todo $t \geq 0$, segue de (1.22) que

$$0 \leq t \leq \delta \implies \|E(t)\| < \|E(t) - I\| + \|I\| < 2. \tag{1.23}$$

Consideremos, agora, $t \geq 0$ qualquer. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = n\delta + r$, onde $0 \leq r < \delta$. Aplicando a propriedade (b), obtemos

$$E(t) = E(n\delta + r) = E(n\delta)E(r) = \underbrace{E(\delta + \dots + \delta)}_{n \text{ vezes}} E(r) = \underbrace{E(\delta)E(\delta) \dots E(\delta)}_{n \text{ vezes}} E(r),$$

ou seja,

$$E(t) = E(\delta)^n E(r).$$

Dessa forma, por (1.23), temos

$$\|E(t)\| = \|E(\delta)^n E(r)\| \leq \|E(\delta)\|^n \|E(r)\| < 2^n 2 = 2^{n+1}.$$

Como $t = n\delta + r$ então $t \geq n\delta$, donde segue que $n \leq \frac{t}{\delta}$. Logo,

$$\|E(t)\| \leq 2^n 2 \leq 2^{\frac{t}{\delta}} 2.$$

Tomando $\omega = \left(\frac{1}{\delta}\right) \ln 2$, pela última desigualdade podemos escrever

$$\|E(t)\| \leq 2e^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (1.24)$$

já que $e^{\omega t} = e^{\left(\frac{1}{\delta}\right) \ln 2 t} = 2^{\frac{t}{\delta}}$.

Considere, agora, $t \in [T_0, T]$, onde $0 \leq T_0 < T < +\infty$. Então, de (1.24) resulta que

$$\|E(t)\| \leq 2e^{wT}, \quad \forall t \in [T_0, T],$$

ou seja, $E(t)$ é uma função limitada em intervalos limitados.

Mostraremos a seguir que E é contínua na topologia uniforme de $\mathcal{B}(X)$. De fato, seja $h > 0$ e $t \geq 0$. Pela propriedade (c) e do fato de que $\|E(t)\|$ é limitada em intervalos limitados, segue que

$$\begin{aligned} \|E(t+h) - E(t)\| &= \|E(t)E(h) - E(t)\| \\ &= \|E(t)(E(h) - I)\| \leq \|E(t)\| \|E(h) - I\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Agora, se $0 < h \leq t$, ou seja $0 \leq t-h < t$, de forma análoga teremos

$$\begin{aligned} \|E(t-h) - E(t)\| &= \|E(t-h) - E(t-h)E(h)\| \\ &= \|E(t-h)(I - E(h))\| \\ &\leq \|E(t-h)\| \|E(h) - I\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Das convergências acima concluímos a continuidade de E na topologia uniforme de $\mathcal{B}(X)$. Resulta daí sua integrabilidade no sentido Riemann relativamente à topologia uniforme de $\mathcal{B}(X)$. Ademais, pelo Teorema da Média (Teorema 1.15), temos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h E(t) dt = E(0) = I \quad \text{em } \mathcal{B}(X).$$

Logo, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\| \frac{1}{h} \int_0^h E(t) dt - I \right\| < 1, \quad \text{sempre que } 0 < h \leq \delta,$$

donde

$$\left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta E(t) dt - I \right\| < 1.$$

Portanto, pelo Teorema de Neumann (Teorema 1.35), o operador $\frac{1}{\delta} \int_0^\delta E(t) dt$ é invertível em $\mathcal{B}(X)$ e, conseqüentemente, o operador $\int_0^\delta E(t) dt$ também é invertível.

Com isso em mente, tomemos $0 < h \leq \delta$. Então,

$$\begin{aligned} \left[\frac{E(h) - I}{h} \right] \int_0^\delta E(t) dt &= \frac{1}{h} \int_0^\delta E(t)(E(h) - I) dt \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_0^\delta (E(t)E(h) - E(t)) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_0^\delta E(t+h) dt - \int_0^\delta E(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Fazendo a seguinte mudança de variável $w = t + h$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\delta E(t+h)dt &= \int_h^{\delta+h} E(w)dw \\ &= \int_h^{\delta+h} E(t)dt \\ &= \int_0^{\delta+h} E(t)dt - \int_0^h E(t)dt.\end{aligned}$$

Logo, teremos

$$\begin{aligned}\frac{1}{h} \left[\int_0^\delta E(t+h)dt - \int_0^\delta E(t)dt \right] &= \frac{1}{h} \left[\int_0^{\delta+h} E(t)dt - \int_0^h E(t)dt - \int_0^\delta E(t)dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_\delta^{\delta+h} E(t)dt - \int_0^h E(t)dt \right],\end{aligned}$$

o que implica

$$\left[\frac{E(h) - I}{h} \right] = \left[\frac{1}{h} \int_\delta^{\delta+h} E(t)dt - \frac{1}{h} \int_0^h E(t)dt \right] \left[\int_0^h E(t)dt \right]^{-1}. \quad (1.25)$$

Pelo Teorema da Média 1.15 temos que, quando $h \rightarrow 0^+$, $\left[\frac{1}{h} \int_\delta^{\delta+h} E(t)dt - \frac{1}{h} \int_0^h E(t)dt \right]$ converge em norma para $(E(\delta) - I)$, pois

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_\delta^{\delta+h} E(t)dt = E(\delta) \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h E(t)dt = E(0) = I.$$

Logo, o membro à direita de (1.25) converge em norma para $(E(\delta) - I) \left[\int_0^h E(t)dt \right]^{-1}$ quando $h \rightarrow 0^+$, e o mesmo ocorre para o membro à esquerda.

Designaremos por A o limite uniforme de $\left[\frac{E(h) - I}{h} \right]$ em $\mathcal{B}(X)$ quando $h \rightarrow 0^+$. Assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{E(t) - I}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{E(t) - E(0)}{h} = \frac{d^+ E(0)}{dt} = A.$$

Além disso, para $t > 0$ e $h > 0$ resulta que

$$\frac{E(t+h) - E(t)}{h} = E(t) \left(\frac{E(h) - I}{h} \right),$$

e como $\frac{E(h) - I}{h}$ converge em norma para A , temos que $\frac{E(t+h) - E(t)}{h}$ converge em norma para $E(t)A$ quando $h \rightarrow 0^+$. Resulta daí que E é derivável à direita para todo $t \geq 0$, relativamente à topologia uniforme de $\mathcal{B}(X)$ e

$$\frac{d^+ E(t)}{dt} = E(t)A. \quad (1.26)$$

Analogamente, sejam $t, h > 0$ tais que $0 < h < t$. Temos,

$$\frac{E(t-h) - E(t)}{-h} = \frac{E(t) - E(t-h)}{h} = E(t-h) \left[\frac{E(h) - I}{h} \right].$$

Como E é contínua na topologia uniforme de $\mathcal{B}(X)$, temos que $E(t-h)$ converge para $E(t)$ quando $h \rightarrow 0^+$. Também, $\frac{E(h) - I}{h}$ converge para A quando $h \rightarrow 0^+$. Portanto,

$$\frac{d^- E(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{E(t-h) - E(t)}{-h} = E(t)A. \quad (1.27)$$

Assim, de (1.26) e (1.27) concluímos que

$$\frac{dE(t)}{dt} = E(t)A, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Para finalizar a prova, consideremos a função

$$\phi(t) = E(t)e^{-tA}, \quad t \geq 0.$$

Lembrando que a derivada em $\mathcal{B}(X)$ possui as propriedades da derivada clássica, usando a regra do produto, obtemos

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= E'(t)e^{-tA} - E(t)Ae^{-tA} \\ &= E(t)Ae^{-tA} - E(t)Ae^{-tA} = 0 \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. Consequentemente, ϕ é uma função constante. Como $\phi(0) = E(0)e^{-0A} = I$, podemos então inferir que

$$E(t)e^{-tA} = I, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

ou seja,

$$E(t) = e^{tA}, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

o que finaliza a prova. □

Observação 1.58. Nos espaços de dimensão finita, as topologias uniforme, forte e fraca coincidem com a topologia usual e como, na demonstração do Teorema 1.57, não foi feita menção à dimensão do espaço, este teorema permanece válido nos espaços de dimensão finita.

Como a convergência uniforme implica a convergência forte, o Teorema 1.57 mostra que a definição de C_0 -semigrupo apresentada no próximo capítulo generaliza a de função exponencial.

Neste capítulo apresentamos os fatos básicos da teoria de semigrupos de operadores lineares e contínuos. As principais referências para este capítulo são [7, 19, 2, 23, 4].

Destacamos que, neste capítulo, $(X, \|\cdot\|)$ denota um espaço de Banach, $\mathcal{B}(X)$ o espaço vetorial dos operadores lineares limitados de X em X , com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(X)}$ definida no Capítulo 1, mais especificamente em (1.6) e (1.7), e $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais não negativos.

2.1 Semigrupos uniformemente contínuos

Definição 2.1. Dizemos que uma aplicação $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{B}(X)$ é um **semigrupo de operadores lineares limitados** de X se:

- i) $T(0) = I$, onde I é o operador identidade de X ;
- ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}_+$.

O nome “semigrupo” pode ser entendido usando o seguinte raciocínio. Denotemos por $\mathcal{G}$ o conjunto constituído pela família de operadores lineares limitados $T(s): X \rightarrow X$, ou seja,

$$\mathcal{G} := \{T(s) \in \mathcal{B}(X) : s \in \mathbb{R}_+\}.$$

Se equipamos este conjunto $\mathcal{G}$ com seguinte operação binária

$$\begin{aligned} * : \quad \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{B}(X) \\ (T(s), T(t)) &\longmapsto T(s) * T(t) = T(s)T(t) = T(s + t), \end{aligned}$$

obtemos uma estrutura de semigrupo abeliano cujo elemento unitário é o operador identidade $I = T(0) \in \mathcal{G}$ e dado qualquer $T(s) \in \mathcal{G}$, temos

$$T(s) * I = T(s) * T(0) = T(s + 0) = T(s).$$

Observação 2.2. O conjunto $\mathcal{G}$ será um grupo abeliano quando os operadores $T(s)$ estiverem definidos em toda a reta real.

Definição 2.3. Seja $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{B}(X)$ um semigrupo de operadores lineares limitados. Se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0,$$

diremos que o semigrupo $\{T(t): t \geq 0\}$ é **uniformemente contínuo**.

Da Definição 2.3 segue que se $T(t)$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados, então

$$\lim_{s \rightarrow t^+} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

Com efeito, fazendo $h = s - t$, vemos que $h \rightarrow 0^+$ quando $s \rightarrow t^+$. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow t^+} \|T(s) - T(t)\| &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(h+t) - T(t)\| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t)(T(h) - I)\| \\ &\leq \|T(t)\| \lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(h) - I\| = 0. \end{aligned}$$

Ao estudarmos semigrupos, estamos interessados em solucionar dois tipos de problemas:

- (I) O primeiro deles consiste em, dado um semigrupo, achar o operador conhecido como seu gerador infinitesimal.
- (II) O segundo problema consiste no processo inverso, que é um problema mais difícil de investigar, pois nos interessa saber qual é o semigrupo gerado por um operador linear. Este problema será resolvido com a ajuda do Teorema 2.6, no caso em que o operador é limitado, e dos *Teoremas de Hille-Yosida e Feller-Miyadera-Phillips*, no caso em que o operador não é limitado.

A seguir apresentamos o conceito de gerador infinitesimal.

Definição 2.4. Seja $\{T(t): t \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathcal{B}(X)$ um semigrupo e seja

$$\mathcal{D}_A = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

O operador linear $A: \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow X$ definido por

$$A(x) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} := \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0} \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}_A$$

é o **gerador infinitesimal** do semigrupo $\{T(t): t \geq 0\}$, com domínio $\mathcal{D}_A$.

Note que a linearidade de A segue da linearidade do semigrupo e das propriedades de limite. Além disso, a linearidade do semigrupo, as propriedades de limite e a definição de A também justificam que $\mathcal{D}_A$ é um subespaço vetorial de X . Para referenciar resultados posteriores, colocamos essas informações no próximo resultado.

Proposição 2.5. $\mathcal{D}_A$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.

Observe, pois, que a solução para o problema (I) está posta. Dado um semigrupo, a Definição 2.4 mostra como encontrar seu gerador infinitesimal, basta avaliar o limite em questão.

Na sequência apresentamos uma série de propriedades dos semigrupos uniformemente contínuos. O primeiro resultado responde a pergunta de como caracterizar o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo. Mais do que isso, garante que dado um operador linear limitado A , com certeza ele será o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo, a saber, do semigrupo $\{T(t) = e^{tA} : t \geq 0\}$.

Teorema 2.6. *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja A um operador linear limitado sobre X e defina

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.1)$$

A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ converge absolutamente para todo $t \geq 0$ e define, para cada t , um operador linear limitado $T(t)$. Além disso, $T(0) = I$ e

$$\begin{aligned} T(t)T(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(sA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k A^k s^{n-k} A^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} (t+s)^n = e^{(t+s)A} = T(t+s), \end{aligned}$$

ou seja, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo.

Afirmção 1: $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo uniformemente contínuo. Com efeito, para $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \|T(t) - I\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} - I \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|A\|^n = t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} \|A\|^n. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} \|A\|^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^{n+1}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\| \|A\|^n}{n!} = \|A\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \\ &= \|A\| e^{t\|A\|}, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$0 \leq \|T(t) - I\| \leq t\|A\| e^{t\|A\|}. \quad (2.2)$$

Fazendo $t \rightarrow 0^+$ em (2.2), obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0,$$

e provamos a Afirmção 1.

Afirmção 2: A é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t): t \geq 0\}$. De fato, para $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t}(T(t) - I) - A \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} - A \right\| = \left\| \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - A \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{t} \left(tA + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) - A \right\| = \left\| A + \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - A \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \leq \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \\ &= \frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} - 1 - t\|A\| \right) = \frac{1}{t} (e^{t\|A\|} - 1) - \|A\|. \end{aligned}$$

Como $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (e^{t\|A\|} - 1) = \|A\|$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{1}{t}(T(t) - I) - A \right\| = 0,$$

o que completa a prova da Afirmção 2.

($\Rightarrow$) Seja $T(t)$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados sobre X .

Como $\lim_{s \rightarrow 0^+} \|T(s) - I\| = 0$, para $\varepsilon = 1$, existe $\rho > 0$ tal que

$$0 < s < \rho \quad \Rightarrow \quad \|T(s) - I\| < 1. \quad (2.3)$$

Pela relação (2.3), integrando ambos os lados da desigualdade $\|T(s) - I\| < 1$ no intervalo $[0, \rho]$ e dividindo por ρ , obtemos

$$\frac{1}{\rho} \int_0^\rho \|T(s) - I\| ds < \frac{1}{\rho} \int_0^\rho 1 ds = 1. \quad (2.4)$$

Como

$$\|I - \rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds\| = \left\| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho [T(s) - I] ds \right\| \leq \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \|T(s) - I\| ds, \quad (2.5)$$

vemos, por (2.4) e (2.5), que podemos escolher um $\rho > 0$ suficientemente pequeno, tal que $\|I - \rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds\| < 1$. O Teorema 1.35 garante que $\rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds$ é invertível e, conseqüentemente, $\int_0^\rho T(s) ds$ é invertível. Também podemos afirmar que $(\int_0^\rho T(s) ds)^{-1}$ é um operador linear limitado pelo Teorema da Inversa Limitada (Teorema 1.52).

Temos

$$\begin{aligned} h^{-1}(T(h) - I) \int_0^\rho T(s) ds &= h^{-1} \left(\int_0^\rho T(s+h) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\ &= h^{-1} \left(\int_h^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\ &= h^{-1} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$h^{-1}(T(h) - I) = \left(h^{-1} \int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - h^{-1} \int_0^h T(s) ds \right) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}. \quad (2.6)$$

Afirmção 3: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \left(\frac{1}{h} \int_{\rho}^{\rho+h} T(s) ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds \right) - (T(\rho) - I) \right\| = 0$. De fato, note que

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{1}{h} \int_{\rho}^{\rho+h} T(s) ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds \right) - (T(\rho) - I) \right\| &\leq \left\| \frac{1}{h} \int_{\rho}^{\rho+h} (T(s) - T(\rho)) ds \right\| \\ &\quad + \left\| \frac{1}{h} \int_0^h (T(s) - I) ds \right\|. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sabemos que

$$\left\| \frac{1}{h} \int_{\rho}^{\rho+h} (T(s) - T(\rho)) ds \right\| \leq \frac{1}{h} \int_{\rho}^{\rho+h} \|T(s) - T(\rho)\| ds = \frac{1}{h} \int_0^h \|T(s + \rho) - T(\rho)\| ds \quad (2.8)$$

e

$$\left\| \frac{1}{h} \int_0^h (T(s) - I) ds \right\| = \left\| \frac{1}{h} \int_0^h (T(s) - T(0)) ds \right\| \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|T(s) - T(0)\| ds. \quad (2.9)$$

Como o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é uniformemente contínuo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < h < \delta \implies \|T(s + \rho) - T(\rho)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \|T(s) - T(0)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall s \in [0, h]. \quad (2.10)$$

Por (2.7), (2.8), (2.9) e (2.10), deduzimos que

$$0 < h < \delta \implies \left\| \left(\frac{1}{h} \int_{\rho}^{\rho+h} T(s) ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds \right) - (T(\rho) - I) \right\| < \varepsilon,$$

o que prova a Afirmção 3.

Portanto, fazendo $h \rightarrow 0^+$ em (2.6), segue que $h^{-1}(T(h) - I)$ converge em norma para o operador linear $(T(\rho) - I)(\int_0^{\rho} T(s) ds)^{-1}$ que é limitado, pois $T(\rho)$, I e $(\int_0^{\rho} T(s) ds)^{-1}$ são operadores limitados. Adicionalmente, concluímos que $(T(\rho) - I)(\int_0^{\rho} T(s) ds)^{-1}$ é o gerador infinitesimal de $T(t)$. $\square$

O teorema anterior garante que cada operador linear limitado é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo. É natural nos perguntarmos se este semigrupo é único. A resposta para esta questão está no próximo resultado.

Teorema 2.7. *Sejam $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $\{S(t) : t \geq 0\}$ semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados. Se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t}, \quad (2.11)$$

então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Mostraremos que, dado $M > 0$ qualquer, $S(t) = T(t)$ para todo $0 \leq t \leq M$. Pois bem, fixemos $M > 0$. Como as funções $t \in [0, M] \mapsto \|S(t)\|$ e $t \in [0, M] \mapsto \|T(t)\|$ são contínuas e, portanto, limitadas no intervalo compacto $[0, M]$, podemos afirmar que existe $C > 0$ tal que

$$\|T(t)\| \|S(s)\| \leq C, \quad \text{para quaisquer } 0 \leq t, s \leq M. \quad (2.12)$$

Além disso, como

$$\left\| \frac{T(h) - S(h)}{h} \right\| = \left\| \frac{T(h) - I}{h} - \frac{S(h) - I}{h} \right\|,$$

por (2.11), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} &= 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} - \frac{S(h) - I}{h} &= 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - S(h)}{h} &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < h < \delta \implies \frac{\|T(h) - S(h)\|}{h} < \frac{\varepsilon}{MC}. \quad (2.13)$$

Seja $0 \leq t \leq M$ e escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $t/n < \delta$ – tal escolha é possível porque $\mathbb{R}$ é arquimediano. Por propriedade de semigrupo e por (2.13), obtemos

$$\begin{aligned} \|T(t) - S(t)\| &= \left\| T\left(n \frac{t}{n}\right) - S\left(n \frac{t}{n}\right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k) \frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1) \frac{t}{n}\right) S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1) \frac{t}{n}\right) \right\| \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| S\left(\frac{kt}{n}\right) \right\| \\ &\leq Cn \frac{\varepsilon}{MC} \frac{t}{n} \leq Cn \frac{\varepsilon}{MC} \frac{M}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, concluímos que $T(t) = S(t)$ para todo $t \in [0, M]$. Sendo $M > 0$ também arbitrário, podemos inferir que $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$. $\square$

Corolário 2.8. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (a) *Existe uma constante $\omega \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$.*
- (b) *Existe um único operador linear limitado A tal que $T(t) = e^{tA}$ para todo $t \geq 0$.*
- (c) *O operador A no item (b) é o gerador infinitesimal de $T(t)$.*
- (d) *A aplicação $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto T(t)$ é diferenciável em norma e $\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A$.*

Demonstração. Em primeiro lugar mostraremos o item (b), pois os demais seguirão deste resultado.

Como $T(t)$ é um semigrupo uniformemente contínuo, o Teorema 2.6 garante que o gerador infinitesimal de $T(t)$ é um operador linear limitado A , que por sua vez também é o gerador infinitesimal de e^{At} , pois

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tA}x - x}{t} = Ae^{tA}x \Big|_{t=0} = Ax.$$

Logo, pelo Teorema 2.7, temos que $T(t) = e^{tA}$ para todo $t \geq 0$.
Vamos provar (a). Como $T(t) = e^{tA}$ para todo $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|e^{tA}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|t^n A^n\|}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A^n\|}{n!} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t} \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

onde $\omega = \|A\| \geq 0$.

As provas de (c) e (d) também seguem facilmente de (b) e, por isso, serão omitidas. $\square$

2.2 Semigrupos fortemente contínuos, C_0 -semigrupos

Um semigrupo pode ser gerado por um operador linear não limitado. Para tratar sobre este assunto, introduzimos o seguinte conceito.

Definição 2.9. Diremos que um semigrupo $\{T(t): t \geq 0\}$ é **fortemente contínuo** ou de **classe C_0** se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(T(t) - I)x\| = 0 \quad \text{para todo } x \in X,$$

ou equivalentemente $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$, para todo $x \in X$. Vamos nos referir aos semigrupos de classe C_0 como **C_0 -semigrupos**.

Além de introduzir esse conceito, exporemos algumas das propriedades que os C_0 -semigrupos possuem. É importante observar que todo semigrupo uniformemente contínuo é um C_0 -semigrupo. Logo, qualquer propriedade destes últimos é herdada pelos semigrupos uniformemente contínuos.

Antes de passarmos às propriedades, vamos mostrar que, de fato, todo semigrupo uniformemente contínuo é um C_0 -semigrupo.

Suponha que $\{T(t): t \geq 0\}$ seja um semigrupo uniformemente contínuo. Logo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0,$$

o que significa que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(t) - I\| < \varepsilon \quad \text{sempre que } 0 \leq t < \delta.$$

Por outro lado, para todo $x \in X$, pela linearidade de T e pelas propriedades da norma de $\mathcal{B}(X)$, temos que

$$\|T(t)x - x\| = \|T(t)x - T(0)x\| = \|(T(t) - I)x\| \leq \|T(t) - I\|\|x\| < \varepsilon\|x\| = \tilde{\varepsilon},$$

sempre que $0 \leq t < \delta$, de onde segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(T(t) - I)x\| = 0.$$

Observação 2.10. O domínio do gerador contém informação importante acerca do semigrupo e portanto tem que ser tratado com cuidado.

Em muitos exemplos é comum calcular a expressão Ax para alguns ou muitos elementos no $\mathcal{D}_A$, embora seja difícil identificar $\mathcal{D}_A$ com precisão. Nessas situações o seguinte conceito ajuda a distinguir entre subespaços “pequenos” e “grandes” de $\mathcal{D}_A$.

Definição 2.11. Um subespaço D do domínio $\mathcal{D}_A$ do operador linear $A : \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow X$ é chamado um **core** para A se D é denso em $\mathcal{D}_A$ com respeito à norma do gráfico:

$$\|x\|_{\mathcal{D}_A} := \|x\| + \|Ax\|.$$

Na sequência exibimos um critério útil para que um subespaço seja um *core* para o gerador de um C_0 -semigrupo, cuja demonstração pode ser encontrada em [19, Proposição 1.7].

Proposição 2.12. *Seja $(A, \mathcal{D}_A)$ o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ sobre um espaço de Banach X . Um subespaço D do $\mathcal{D}_A$ que é $\|\cdot\|$ -denso em X e invariante sob o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é sempre um core para A .*

A seguir apresentamos uma série de propriedades dos C_0 -semigrupos; a primeira que demonstramos está conectada à função exponencial, pois garante que os C_0 -semigrupos podem crescer na norma, no máximo, exponencialmente.

Proposição 2.13. *Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo, então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \text{para } t \geq 0.$$

Demonstração. Inicialmente, afirmamos que existe $\eta > 0$ tal que a função $\|T(t)\|$ é limitada no intervalo $[0, \eta]$. De fato, suponha que isso não ocorra. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $0 \leq t_n < \frac{1}{n}$ tal que $\|T(t_n)\| > n$, ou seja, existe uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ e $\|T(t_n)\| > n$.

Como $\|T(t_n)\| > n$, segue pelo Princípio da Limitação Uniforme (Teorema 1.51) que existe $x \in X$ tal que $\|T(t_n)(x)\|$ não é limitado, o que contradiz o fato de $T(t)$ ser um C_0 -semigrupo, ou seja, a condição $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$. Portanto, existem $\eta > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\|T(t)\| \leq M \quad \text{para } 0 \leq t \leq \eta.$$

Como $\|T(0)\| = 1$, $M \geq 1$. Seja $\omega = \eta^{-1} \ln M \geq 0$. Dado $t \geq 0$ arbitrário, temos que $t = n\eta + r$, com $0 \leq r < \eta$ e $n \in \mathbb{N}$. Usando a propriedade de semigrupo, obtemos

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(n\eta + r)\| = \|T(n\eta)T(r)\| \\ &= \|T(\eta)^n T(r)\| \leq M^{n+1} \\ &\leq MM^{\frac{t}{\eta}} = Me^{\omega t}, \end{aligned}$$

o que completa a prova. □

Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo, então $T(t)$ é contínuo em $t = 0$, pois $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x = Ix = T(0)x$. Usando a propriedade de semigrupo, podemos mostrar que C_0 -semigrupos são contínuos sobre toda a semirreta real não-negativa, $\mathbb{R}_+$, conforme veremos a seguir.

Corolário 2.14. Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo então, para todo $x \in X$, a função $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

Demonstração. Sejam $t, h \geq 0$ e $x \in X$. Pela Proposição 2.13, existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(s)\| \leq Me^{ws}$ para todo $s \geq 0$.

A continuidade da função $t \mapsto T(t)x$ segue das desigualdades

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \leq Me^{wt} \|T(h)x - x\|$$

e para $t \geq h \geq 0$

$$\|T(t-h)x - T(t)x\| \leq \|T(t-h)\| \|x - T(h)x\| \leq Me^{w(t-h)} \|x - T(h)x\| \leq Me^{wt} \|x - T(h)x\|,$$

além da hipótese de $T(t)$ ser C_0 -semigrupo. $\square$

Observação 2.15. Conforme vimos na Definição 2.9, os C_0 -semigrupos são também conhecidos como semigrupos fortemente contínuos, o que encontra justificativa no Corolário 2.14.

Na demonstração da Proposição 2.13, vimos que se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo, então existem números reais M e ω tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Um resultado mais refinado será demonstrado posteriormente, mas antes mostraremos um resultado válido para funções **subaditivas**, isto é, funções $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem $p(t+s) \leq p(t) + p(s)$ para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$.

Lema 2.16. Seja p uma função subaditiva definida em $\mathbb{R}_+$ e limitada superiormente em todo intervalo limitado. Então, existe $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t}$ e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{p(t)}{t}.$$

Demonstração. Seja

$$\omega_0 := \inf_{t > 0} \frac{p(t)}{t} \geq -\infty.$$

Consideremos inicialmente o caso em que $\omega_0 > -\infty$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $T = T(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\frac{p(T)}{T} < \omega_0 + \varepsilon. \quad (2.14)$$

Dado $t \in \mathbb{R}_+$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = nT + r$, com $0 \leq r < T$. Da subaditividade de p e de (2.14) segue que

$$\begin{aligned} \omega_0 &\leq \frac{p(t)}{t} = \frac{p(nT + r)}{t} \\ &\leq \frac{p(nT) + p(r)}{t} \leq \frac{nTp(T)}{tT} + \frac{p(r)}{t} \\ &\leq \frac{nT}{t}(\omega_0 + \varepsilon) + \frac{p(r)}{t}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ademais, pelo fato de p ser limitada superiormente em $[0, T)$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$p(r) \leq c, \text{ para todo } r \in [0, T), \quad (2.16)$$

e também pelo fato de $t = nT + r$, temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{nT}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t - r}{t} = 1 \quad (2.17)$$

Assim, por (2.15), (2.16) e (2.17) obtemos

$$\omega_0 \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{t} \leq \omega_0 + \varepsilon,$$

bem como

$$\omega_0 \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{t} \leq \omega_0 + \varepsilon.$$

Pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, concluímos que

$$\omega_0 = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{t} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{t},$$

e portanto

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t}.$$

Consideremos, agora, o caso $\omega_0 = -\infty$. Neste caso, para cada real ω , existe $T = T(\omega) > 0$, tal que

$$\frac{p(T)}{T} \leq \omega.$$

Sejam $t \in \mathbb{R}_+$ e $\omega \in \mathbb{R}$. Então, existem $T = T(\omega) > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{p(T)}{T} \leq \omega \quad \text{e} \quad t = nT + r, \quad \text{com } 0 \leq r < T.$$

Adotando um procedimento análogo ao que foi utilizado no caso anterior, obtemos

$$\frac{p(t)}{t} \leq \frac{nT}{t}(\omega) + \frac{c}{t}, \quad \text{onde } c > 0.$$

Logo,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} \leq \omega \quad \text{e} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{t} \leq \omega.$$

Pela arbitrariedade de ω segue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{t} = -\infty,$$

o que completa a prova. □

Proposição 2.17. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo. Então:*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \omega_0,$$

e, para cada $\omega > \omega_0$, existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (2.18)$$

Demonstração. Como

$$\begin{aligned}\ln \|T(t+s)\| &= \ln \|T(t)T(s)\| \leq \ln \|T(t)\| + \ln \|T(s)\| \\ &= \ln \|T(t)\| + \ln \|T(s)\|,\end{aligned}$$

posto que a função logaritmo é crescente, temos que $\ln \|T(t)\|$ é uma função subaditiva. Pela Proposição 2.13, a função $\|T(t)\|$ é limitada em todo intervalo limitado. Sendo assim, a função $\ln \|T(t)\|$ é limitada superiormente em todo intervalo limitado. Pondo $p(t) = \ln \|T(t)\|$, temos, pelo Lema 2.16, que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \omega_0,$$

concluindo assim a primeira parte da prova.

Seja $\omega > \omega_0$. Afirmamos que existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\frac{\ln \|T(t)\|}{t} < \omega, \quad \text{para todo } t \geq t_0. \quad (2.19)$$

De fato, se $\omega_0 < +\infty$ tomemos $\varepsilon = \omega - \omega_0 > 0$. Logo, pela definição de limite existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\left| \frac{\ln \|T(t)\|}{t} - \omega_0 \right| < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \geq t_0, \quad (2.20)$$

o que prova o desejado em (2.19), pois (2.20) implica

$$-\varepsilon < \frac{\ln \|T(t)\|}{t} - \omega_0 < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \geq t_0$$

e, portanto,

$$\frac{\ln \|T(t)\|}{t} < \varepsilon + \omega_0 = \omega, \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Agora, se $\omega_0 = -\infty$, da definição de limite infinito segue o desejado em (2.19).

Por outro lado, como $\|T(t)\|$ é limitada em $[0, t_0]$ e $\|T(0)\| = 1$, existe $M_0 \geq 1$ tal que

$$\|T(t)\| \leq M_0, \quad \text{para todo } t \in [0, t_0].$$

E como a função $\ln$ é crescente, temos

$$\ln \|T(t)\| \leq \ln M_0, \quad \text{para todo } t \in [0, t_0]. \quad (2.21)$$

Seja $\omega \geq 0$. De (2.19) (2.21) segue que

$$\ln \|T(t)\| \leq \omega t + \ln M_0, \quad \text{para todo } t \geq 0$$

e, por conseguinte,

$$\|T(t)\| \leq M_0 e^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Tomando $M_0 = M$, concluímos o desejado.

Agora, analisemos o caso em que $\omega < 0$. Pois bem, se $\omega < 0$, então $-\omega t_0 > 0$, e portanto, de (2.19) vem que

$$\ln \|T(t)\| < \omega t - \omega t_0 \quad \text{para todo } t \geq t_0. \quad (2.22)$$

Concluimos de (2.21) e (2.22) e do fato de que $\omega(t - t_0) > 0$ para todo $t \in [0, t_0]$ que

$$\ln \|T(t)\| \leq \omega(t - t_0) + \ln M_0, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Dessa forma,

$$\|T(t)\| \leq M_0 e^{\omega(t-t_0)}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Tomando $M = M_0 e^{-\omega t_0}$ neste caso, obtemos o desejado. $\square$

Observação 2.18. Quando $\omega_0 < 0$, podemos considerar $\omega_0 < \omega < 0$ e de (2.18), existe $M \geq 1$ tal que

$$\|T(t)\| < M, \text{ para todo } t \geq 0,$$

já que $e^{\omega t} < 1$ se $\omega < 0$. Neste caso, dizemos que $T(t)$ é um **C_0 -semigrupo uniformemente limitado**.

Teorema 2.19. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo e A o gerador infinitesimal de $T(t)$. Então, A comuta com $T(t)$, isto é*

$$AT(t)x = T(t)Ax, \text{ para quaisquer } t \in \mathbb{R}_+ \text{ e } x \in \mathcal{D}_A.$$

Demonstração. Com efeito, dados $t \geq 0$ e $x \in \mathcal{D}_A$, temos

$$\begin{aligned} AT(t)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} T(t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h+t)x - T(t)x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t)T(h)x - T(t)x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} T(t) \left(\frac{T(h)x - x}{h} \right) \\ &= T(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h)x - x}{h} \right) = T(t)Ax, \end{aligned}$$

ou seja,

$$AT(t)x = T(t)Ax.$$

$\square$

Para o próximo teorema, precisaremos utilizar as propriedades de integral vistas na Seção 1.1 do Capítulo 1.

Teorema 2.20. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo e seja A seu gerador infinitesimal. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (a) Para $x \in X$, tem-se $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x$, para $t \geq 0$.
- (b) Para $x \in X$, tem-se $\int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}_A$ e $A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x$, para $t \geq 0$.
- (c) Para $x \in \mathcal{D}_A$, tem-se $T(t)x \in \mathcal{D}_A$

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \tag{2.23}$$

para $t \geq 0$.

(d) Para $x \in \mathcal{D}_A$, tem-se

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau,$$

para $t \geq 0$.

Demonstração. O item (a) segue da continuidade da função $t \mapsto T(t)x$. Com efeito, dados $x \in X$, $t \geq 0$ e $h > 0$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t)xds \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\| ds. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por meio da mudança de variável $u + t = s$, obtemos

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\| ds = \frac{1}{h} \int_0^h \|T(u+t)x - T(t)x\| du. \quad (2.25)$$

De (2.24) e (2.25) segue que

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - T(t)x \right\| \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|T(u+t)x - T(t)x\| du. \quad (2.26)$$

Como a aplicação $t \mapsto T(t)x$ é contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < h < \delta \implies \|T(t+h)x - T(t)x\| < \varepsilon. \quad (2.27)$$

Segue, portanto, de (2.26) e (2.27) que

$$0 < h < \delta \implies \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - T(t)x \right\| < \frac{1}{h} \int_0^h \varepsilon du = \varepsilon,$$

concluindo assim que, para cada $x \in X$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

Para provar o item (b), consideremos $x \in X$, $t \geq 0$ e $h > 0$.

Queremos mostrar que $\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}_A$ e, para isso, temos que verificar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x' - x'}{h} \text{ existe, onde } x' = \int_0^t T(s)xds. \quad (2.28)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^t T(s)xds \right) &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(h) - I)(T(s))xds = \frac{1}{h} \int_0^t [T(h)T(s)x - T(s)x] ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(s+h)x - T(s)x) ds = \frac{1}{h} \int_0^t T(s+h)xds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)xds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)xds = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)xds. \end{aligned}$$

Fazendo $h \rightarrow 0^+$, temos pelo item (a) que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{0+h} T(s)x ds = T(0)x = x.$$

Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^t T(s)x ds \right) \right) = T(t)x - x,$$

o que prova (2.28) e, portanto, $\int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}_A$. Além disso,

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$$

Agora, vamos provar (c). Sejam $x \in \mathcal{D}_A$ e $h > 0$. Então,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} (T(t)x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} T(t) \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) x = T(t)Ax. \quad (2.29)$$

Assim, $T(t)x \in \mathcal{D}_A$ e $AT(t)x = T(t)Ax$. Ademais, (2.29) também implica que

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax,$$

isto é, a derivada à direita de $T(t)x$ existe e é igual a $T(t)Ax$.

Para provar (2.23), precisamos mostrar que, para $t > 0$, existe a derivada à esquerda de $T(t)x$ e é igual a $T(t)Ax$. Para isso, vamos mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} \right] = T(t)Ax,$$

ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right] = 0. \quad (2.30)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right] &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(t-h+h)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(t-h)T(h)x - T(t-h)x}{h} - T(t-h)Ax + T(t-h)Ax - T(t)Ax \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(T(t-h) \left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right] + T(t-h)Ax - T(t)Ax \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} T(t-h) \left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right] + \lim_{h \rightarrow 0^+} (T(t-h)Ax - T(t)Ax). \end{aligned}$$

Na última igualdade temos uma soma de dois limites, e o primeiro deles é igual a 0, pois $x \in \mathcal{D}_A$ e $\|T(t-h)\|$ é limitada em $0 \leq h \leq t$. O segundo limite também é zero devido à continuidade forte de $T(t)$. Isso prova a igualdade (2.30) e completa a prova do item (c).

Para provar o item (d), tomemos $x \in \mathcal{D}_A$. Pelo item (c) concluímos que $\frac{d}{dt}T(t)x$ é uma aplicação contínua em t , posto que $T(t)$ é fortemente contínuo. Logo, podemos integrá-la em intervalos compactos de $\mathbb{R}_+$ e obter

$$\int_s^t \frac{d}{d\tau}T(\tau)x d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau,$$

ou seja,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau.$$

□

Para o próximo resultado, precisaremos da definição de operador fechado. Caso seja preciso, solicitamos que o leitor revise o Capítulo 1, Definição 1.39.

Corolário 2.21. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, então $\mathcal{D}_A$ é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração. Dividiremos a prova deste resultado em duas partes. Na primeira, mostraremos que $\mathcal{D}_A$ é denso em X e na segunda verificaremos que A é um operador linear fechado.

Parte I. $\mathcal{D}_A$ é denso em X , ou seja, $\overline{\mathcal{D}_A} = X$.

Com efeito, é claro que $\overline{\mathcal{D}_A} \subset X$. Portanto, resta-nos mostrar que $X \subset \overline{\mathcal{D}_A}$. Tomemos $x \in X$.

Pelo item (b) do Teorema 2.20, $\int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}_A$ para todo $t \geq 0$. Pela Proposição 2.5, como $\mathcal{D}_A$ é um subespaço, temos que $\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}_A$ para todo $t \geq 0$. Sabendo disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$x_n = \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x ds = n \int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x ds.$$

Observamos anteriormente que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_A$. Além disso, como $h = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, temos pelo item (a) do Teorema 2.20 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x ds = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds = x,$$

o que mostra que $x \in \overline{\mathcal{D}_A}$ e completa a prova da Parte I, uma vez que x foi tomado arbitrariamente em X .

Parte II. A é um operador linear fechado.

De fato, A é linear, pois é o gerador infinitesimal de $T(t)$, conforme fora observado na Proposição 2.5.

Provemos agora que A é um operador fechado. Para isso, consideremos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}_A$ tal que

$$x_n \rightarrow x \quad \text{e} \quad A(x_n) \rightarrow y \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Segue do item (d) do Teorema 2.20 que

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)A(x_n)ds, \tag{2.31}$$

ou equivalentemente,

$$T(t)x_n - T(0)x_n = \int_0^t T(s)A(x_n)ds. \tag{2.32}$$

O integrando no lado direito de (2.32) converge para $T(s)y$ uniformemente sobre intervalos limitados. Consequentemente, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (2.31), obtemos

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds. \quad (2.33)$$

Dividindo (2.33) por $t > 0$ e fazendo $t \rightarrow 0^+$, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y ds \stackrel{(*)}{=} T(0)y = y,$$

onde em (*) usamos o item (a) do Teorema 2.20.

Por conseguinte,

$$x \in \mathcal{D}_A \text{ e } Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y ds = T(0)y = y,$$

o que encerra a prova da Parte II. $\square$

A seguir mostraremos que, assim como o que ocorre com semigrupos uniformemente contínuos, o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo não gera dois semigrupos distintos.

Teorema 2.22. *Sejam $\{T(t): t \geq 0\}$ e $\{S(t): t \geq 0\}$ C_0 -semigrupos de operadores lineares com geradores infinitesimais A e B , respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$ para $t \geq 0$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{D}_A = \mathcal{D}_B$. Segue do item (c) do Teorema 2.20 que a aplicação $\psi(s) = T(t-s)S(s)x$ é derivável e

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\psi(s) &= \frac{d}{ds} [T(t-s)S(s)x] = -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0. \end{aligned}$$

Concluindo, assim, que $\psi(s) = T(t-s)S(s)x$ é uma aplicação constante. Em particular, temos $\psi(0) = \psi(t)$, ou seja,

$$T(t-0)S(0)x = T(t-t)S(t)x \implies T(t)x = S(t)x.$$

Como x foi tomado arbitrariamente em $\mathcal{D}_A$, temos que $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in \mathcal{D}_A$. Como pelo Corolário 2.21, $\mathcal{D}_A$ é denso em X e, por hipótese, $T(t)$ e $S(t)$ são limitados, concluímos que

$$T(t)x = S(t)x, \quad \text{para todo } x \in X.$$

$\square$

Observação 2.23. Se $\{T(t): t \geq 0\}$ é o semigrupo gerado pelo operador A , podemos verificar que as derivadas de ordem k deste operador verificam

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t),$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}T(t)x &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}T(t)x \right) \\
&= \frac{d}{dt} (AT(t)x) \\
&= A \frac{d}{dt}T(t)x \\
&= A^2T(t)x.
\end{aligned}$$

Em geral, tem-se

$$\frac{d^k}{dt^k}T(t)x = A^kT(t)x, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}_{A^k}.$$

Concluimos do processo anterior que para obter a derivada de ordem k de um semigrupo $\{T(t): t \geq 0\}$ é suficiente compor o semigrupo com seu gerador infinitesimal A exatamente k -vezes. Usando as propriedades de semigrupo podemos escrever

$$\frac{d^k}{dt^k}T(t)x = \left[AT \left(\frac{t}{k} \right) \right]^k x,$$

pois

$$\begin{aligned}
\left[AT \left(\frac{t}{k} \right) \right]^k x &= A^k T^k \left(\frac{t}{k} \right) x \\
&= A^k \overbrace{\left(T \left(\frac{t}{k} \right) \cdots T \left(\frac{t}{k} \right) \right)}^{k\text{-vezes}} x \\
&= A^k T \left(\frac{t}{k} + \cdots + \frac{t}{k} \right) x \\
&= A^k T \left(k \frac{t}{k} \right) x \\
&= A^k T(t)x.
\end{aligned}$$

2.3 Exemplos de semigrupos e geradores infinitesimais

Antes de estudarmos os teoremas de geração de semigrupos, conteúdo que será desenvolvido no capítulo central deste trabalho, queremos acrescentar aqui alguns exemplos de semigrupos que darão à teoria exposta anteriormente uma melhor interpretação.

Para isto, recomendamos ao leitor, consultar o Apêndice (B) no qual foram introduzidos alguns dos espaços utilizados para definir os semigrupos aqui expostos. Para um estudo mais detalhado sobre tais espaços, recomendamos as referências [20, Seção 6.3], [22] e [9].

Passemos então aos exemplos de semigrupos de operadores; o primeiro e mais conhecido deles é a função exponencial de um operador linear e limitado.

Exemplo 2.24 (Função Exponencial). Se A é um operador linear limitado em X , então, pelo estudo feito antes sobre a função exponencial, é possível concluir que $\{T(t) = e^{tA}: t \geq 0\}$ define um C_0 -semigrupo. Além disso, pelo Teorema 1.57, $\{T(t) = e^{tA}: t \geq 0\}$ é um semigrupo uniformemente contínuo.

Exemplo 2.25 (O semigrupo das translações). Seja $C_u(\mathbb{R})$ o espaço das funções uniformemente contínuas e limitadas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Em $C_u(\mathbb{R})$ defina, para cada $t \geq 0$, a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} T(t): C_u(\mathbb{R}) &\longrightarrow C_u(\mathbb{R}) \\ u(x) &\longmapsto T(t)u(x) = u(x+t). \end{aligned}$$

Considere em $C_u(\mathbb{R})$ a norma uniforme, dada por

$$\|u\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|.$$

A prova de que $C_u(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach com a norma uniforme é análoga à prova da Proposição 1.10. Também é simples verificar que, para cada $t \geq 0$, a aplicação $T(t)$ é um operador linear limitado de $C_u(\mathbb{R})$.

Com os três itens a seguir, mostraremos que $\{T(t): t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo em $C_u(\mathbb{R})$.

(i) Quando $t = 0$, temos

$$T(0)u(x) = u(x+0) = u(x), \text{ para } u \in C_u(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R},$$

ou seja, $T(0) = I$.

(ii) Dados $t, s \geq 0$ e $u \in C_u(\mathbb{R})$, temos

$$T(s+t)u(x) = u(x+t+s)$$

e

$$(T(t) \circ T(s))u(x) = T(t)u(x+s) = u(x+s+t),$$

de onde concluímos que

$$(T(t) \circ T(s))u(x) = T(t+s)u(x),$$

o que implica

$$T(t) \circ T(s) = T(t+s).$$

(iii) Sejam $u \in C_u(\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$. Da continuidade uniforme de u , existe $\delta > 0$ tal que se $0 < t < \delta$ então $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x+t) - u(x)| < \varepsilon$, isto é, $\|T(t)u - u\| < \varepsilon$ para $0 < t < \delta$. Portanto, para cada $u \in C_u(\mathbb{R})$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)u - u\| = 0.$$

Para completar a análise deste semigrupo, vamos encontrar seu gerador infinitesimal. Para isso, denotá-lo-emos por $A: \mathcal{D}_A \subset C_u(\mathbb{R}) \rightarrow C_u(\mathbb{R})$. Se $u \in \mathcal{D}_A$, então

$$Au = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)u - u}{h},$$

e este limite existe na norma uniforme. No entanto,

$$(Au)(s) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(h+s) - u(s)}{h} = \frac{d^+u}{dt}(s),$$

onde o limite existe na norma uniforme, portanto $\frac{d^+u}{dt}$ existe e é uniformemente contínua. Nessas condições, é possível verificar que $\frac{du}{dt}$ existe e é uniformemente contínua (veja [7, Lema 2.1.2]).

Reciprocamente, se $u \in C_u(\mathbb{R})$, $\frac{du}{dt}$ existe e é uniformemente contínua, segue do Teorema do Valor Médio que, dado $h > 0$, existe $\theta_{t,h} \in (t, t+h)$ tal que

$$\frac{T(h)u(t) - u(t)}{h} - \frac{du}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(\theta_{t,h}) - \frac{du}{dt}(t),$$

e como $\theta_{t,h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} t$, a continuidade uniforme de $\frac{du}{dt}$ garante que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)u - u}{h}$ existe uniformemente. Portanto, $u \in \mathcal{D}_A$ e

$$Au = \frac{du}{dt}.$$

Logo, $\mathcal{D}_A = \left\{ u \in C_u(\mathbb{R}) : \frac{du}{dt} \text{ existe e é uniformemente contínua} \right\}$ e, para $u \in \mathcal{D}_A$, $Au = \frac{du}{dt}$.

Nos dois exemplos seguintes, apresentamos semigrupos de translações definidos sobre o espaço de Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$. Conceitos e notações abaixo utilizados podem ser encontrados no Apêndice B, inclusive a definição de $L^2(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.26. Denotemos por $T(t)$ o operador definido em $L^2(\mathbb{R})$ por

$$\begin{aligned} T(t) : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f(x) &\longrightarrow T(t)f(x) = f(x+t). \end{aligned}$$

É fácil verificar que $T(t)$ está bem definido para cada $t \in \mathbb{R}$.

Afirmamos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de operadores em $L^2(\mathbb{R})$. Com efeito, dada $f \in L^2(\mathbb{R})$, tem-se $T(0)f(x) = f(x+0) = f(x)$, ou seja, $T(0) = I$. Além disso, como

$$T(s+t)f(x) = f(x+t+s)$$

e

$$(T(t) \circ T(s))f(x) = T(t)f(x+s) = f(x+s+t),$$

concluimos que

$$(T(t) \circ T(s))f(x) = T(t+s)f(x), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

o que implica

$$T(t) \circ T(s) = T(t+s).$$

Calculemos o gerador infinitesimal de $T(t)$. Para isso, precisamos avaliar o limite a seguir:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)f(x) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = Af(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Este limite existe somente quando f é uma função com derivada fraca, isto é, quando $f \in H^1(\mathbb{R})$. Portanto, denotando por A o gerador infinitesimal de $T(t)$, temos:

$$\mathcal{D}_A = H^1(\mathbb{R}) \text{ e ainda } A(f) = \frac{d}{dx}f.$$

O operador A é um operador linear, mas não é limitado. Finalmente, note que $T(t)$, para cada $t \geq 0$, é um operador unitário. De fato, dados $t \geq 0$ e $f \in L^2(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned}\|T(t)f(x)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |T(t)f(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \\ &= \|f(x)\|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\end{aligned}$$

com o qual concluímos que $\|T(t)f(x)\| = \|f(x)\|$.

$$\|T(t)\| = \sup \left\{ \frac{\|T(t)f(x)\|}{\|f(x)\|}; f \in L^2(\mathbb{R}), f \neq 0 \right\} = 1.$$

Assim, concluímos que

$$\|T(t)\| = 1.$$

Exemplo 2.27. Denotemos por $T(t)$ o operador em $L^2(\mathbb{R})$ por:

$$T(t) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \quad (2.34)$$

$$f(x) \mapsto f(x+t)e^{at}, \quad (2.35)$$

com $a \in \mathbb{R}$.

Afirmção: $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo. De fato,

- para $t = 0$, temos

$$T(0)f(x) = f(x+0)e^{a0} = f(x), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

isto é, $T(0) = I$.

- dados $t, s \in \mathbb{R}_+$ e $f \in L^2(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned}T(t+s)f(x) &= f(x+t+s)e^{a(t+s)} \\ &= f(x+s+t)e^{as}e^{at} \\ &= T(t)(f(x+s)e^{as}) \\ &= [T(t) \circ T(s)]f(x),\end{aligned}$$

de onde concluímos que:

$$T(t) \circ T(s)f(x) = T(t+s)f(x), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Calculamos agora o gerador infinitesimal de tal semigrupo. Para isso, avaliamos o

seguinte limite:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)f(x) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h)e^{ah} - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h)e^{ah} - f(x)e^{ah} + f(x)e^{ah} - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h)e^{ah} - f(x)e^{ah}}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x)e^{ah} - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{ah} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) + f(x) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{ah} - 1}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{ah} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{ah} - 1}{h} \\
&= f'(x) + af(x) = Af(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

O limite acima existe se, e somente se $f \in H^1(\mathbb{R})$. Portanto, denotando por A o gerador infinitesimal de $T(t)$, temos que:

$$\mathcal{D}_A = H^1(\mathbb{R})$$

e ainda

$$A(f) = \frac{d}{dx}f + af, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

concluindo que $A = \frac{d}{dx} + aI$ é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, onde $T(t)$ é o operador dado (2.34), para $t \geq 0$.

O operador A é um operador linear, mas não é limitado, conforme fora constatado na Seção 1.4.1.

Exemplo 2.28. Definindo $T(t)$ o operador em $L^2(\mathbb{R})$ por:

$$T(t) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \quad (2.36)$$

$$f(x) \mapsto f(x+t)e^{i\alpha t}, \quad (2.37)$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$, procedendo da mesma forma como nos exemplos anteriores, podemos mostrar que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo unitário.

2.3.1 Construção de novos C_0 -semigrupos

A partir de um C_0 -semigrupo dado, é possível obter novos semigrupos fortemente contínuos. Essas construções têm utilidade em resultados que serão apresentados posteriormente.

Nos exemplos a seguir consideraremos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo num espaço de Banach X dado, cujo gerador infinitesimal é A .

Exemplo 2.29 (Semigrupos reescalados). Para quaisquer números $\mu \in \mathbb{C}$ e $\alpha > 0$, definimos o semigrupo redimensionado de $\{T(t) : t \geq 0\}$ por

$$\tilde{T}(t) = e^{\mu t}T(\alpha t), \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Veja que, para todo $t \geq 0$, $\tilde{T}(t) \in \mathcal{B}(X)$, uma vez que $T(t) \in \mathcal{B}(X)$ e $\mathcal{B}(X)$ é um espaço vetorial. Além disso, $\{\tilde{T}(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo. Com efeito,

- $\tilde{T}(0) = e^{\mu 0} S(\alpha 0) = S(0) = I$,
- $\tilde{T}(t+s) = e^{\mu(t+s)} T(\alpha(t+s)) = e^{\mu t} e^{\mu s} T(\alpha t) T(\alpha s) = \tilde{T}(t) \tilde{T}(s)$,
- dado $x \in X$, tem-se

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{T}(t)x - x\| &= \|e^{\mu t} T(\alpha t)x - x\| \\
 &= \|e^{\mu t} T(\alpha t)x - e^{\mu t}x + e^{\mu t}x - x\| \\
 &\leq \|e^{\mu t} T(\alpha t)x - e^{\mu t}x\| + \|e^{\mu t}x - x\| \\
 &= |e^{\mu t}| \|T(\alpha t)x - x\| + |e^{\mu t} - 1| \|x\|.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\tilde{T}(t)x - x\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0^+,$$

pois

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(\alpha t)x - x\| = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0^+} |e^{\mu t} - 1| = 0.$$

Suponhamos, agora, que $\tilde{A}$ seja o gerador infinitesimal de $\tilde{T}$. Então,

$$\mathcal{D}_{\tilde{A}} = \left\{ x \in X : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{T}(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\}.$$

Para todo $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{T}(h)x - x}{h} &= \frac{e^{\mu h} T(\alpha h)x - x}{h} \\
 &= \frac{e^{\mu h} T(\alpha h)x - e^{\mu h}x + e^{\mu h}x - x}{h} \\
 &= \frac{e^{\mu h} T(\alpha h)x - e^{\mu h}x}{h} + \frac{e^{\mu h}x - x}{h} \\
 &= \frac{e^{\mu h} (T(\alpha h)x - x)}{h} + \frac{(e^{\mu h} - 1)x}{h},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\tilde{T}(h)x - x}{h} = e^{\mu h} \frac{T(\alpha h)x - x}{h} + \frac{(e^{\mu h} - 1)x}{h}. \quad (2.38)$$

Daí, para todo $x \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$, temos

$$\frac{T(\alpha h)x - x}{h} = e^{-\mu h} \left(\frac{\tilde{T}(h)x - x}{h} \right) - e^{-\mu h} \left(\frac{e^{\mu h} - 1}{h} \right) x.$$

Fazendo $h \rightarrow 0^+$, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(\alpha h)x - x}{h} = \tilde{A}x - \mu x,$$

uma vez que

- $\lim_{h \rightarrow 0^+} e^{-\mu h} = 1$,
- $\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\mu h} - 1}{h} \right) = \mu$ e

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{T}(h)x - x}{h} = \tilde{A}x \text{ (pois } x \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}).$$

Por conseguinte, se $x \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$, então $x \in \mathcal{D}_A$, pois $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(\alpha h)x - x}{h}$ existe e é igual a $\tilde{A}x - \mu x$, ou seja,

$$\mathcal{D}_{\tilde{A}} \subset \mathcal{D}_A.$$

Por outro lado, tomando $x \in \mathcal{D}_A$, analogamente de (2.38) temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{T}(h)x - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(e^{\mu h} \frac{T(\alpha h)x - x}{h} + \frac{(e^{\mu h} - 1)x}{h} \right).$$

Mas, $\lim_{h \rightarrow 0^+} e^{\mu h} \frac{T(\alpha h)x - x}{h} = \alpha A x$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\mu h} - 1)x}{h} = \mu x$, obtendo

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{T}(h)x - x}{h} = \alpha A x + \mu x.$$

Sendo assim, $x \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$ e, portanto,

$$\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_{\tilde{A}}$$

e $\tilde{A}x = \alpha A x + \mu x$.

Logo, $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{\tilde{A}}$ e $\tilde{A} = \alpha A + \mu I$.

O exemplo a seguir é um caso particular do exemplo anterior, em que $\mu = \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1$.

Exemplo 2.30 (Translações de geradores). A família dada por

$$S(t) = e^{\beta t} T(t), \text{ para cada } t \geq 0,$$

define um C_0 -semigrupo em X e $A + \beta I$ é o seu gerador infinitesimal.

Antes de apresentarmos o próximo exemplo, recordamos o conceito de isomorfismo entre espaços normados.

Definição 2.31. Um **isomorfismo** entre espaços normados X e Y é uma aplicação linear $V: X \rightarrow Y$ contínua, invertível, cuja inversa é contínua. Em outras palavras, um isomorfismo é um homomorfismo bijetor.

Quando há um isomorfismo entre X e Y , dizemos que X e Y são isomorfos e escrevemos $X \cong Y$.

Exemplo 2.32 (Semigrupos similares.). Lembramos que estamos assumindo $\{T(t): t \geq 0\}$ como um C_0 -semigrupo num espaço de Banach X , cujo gerador é o operador A . Dado um outro espaço de Banach Y e um isomorfismo V de Y a X , obtemos um novo C_0 -semigrupo $S(t)$ em Y , dito “**similar**” a $T(t)$, definido por

$$S(t) := V^{-1}T(t)V, \forall t \geq 0.$$

Sem fazer referência explícita ao isomorfismo V , dizemos que os semigrupos $T(t)$ e $S(t)$ são **isomorfos**.

O gerador do C_0 -semigrupo $S(t)$ é o operador

$$B = V^{-1}AV,$$

cujos domínio é

$$\mathcal{D}_B = \{y \in Y: Vy \in \mathcal{D}_A\}.$$

Observação 2.33. Os espectros de A e B coincidem, isto é $\sigma(A) = \sigma(B)$, e o resolvente de B é dado por

$$R(\lambda; B) = V^{-1}R(\lambda; A)V, \text{ para } \lambda \in \rho(A).$$

Com o objetivo de continuar solucionando o segundo problema proposto neste estudo, isto é, a caracterização dos operadores não limitados, de tal maneira que possamos estabelecer condições necessárias e suficientes para que estes gerem C_0 –semigrupos, abordaremos no capítulo seguinte três resultados, conhecidos como os teoremas de geração de semigrupos.

Teoremas de geração de semigrupos

No Corolário 2.21 mostramos que, para que um operador A seja o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo, é necessário que ele seja fechado e esteja densamente definido. Porém, essas condições impostas sobre o operador A não são suficientes para que ele seja um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo. O Teorema de Hille-Yosida, no entanto, surge para apresentar condições necessárias e suficientes para que um operador A fechado e densamente definido, mesmo sem ser limitado, gere um C_0 -semigrupo de contrações. Além disso, uma reformulação de tal teorema é dada através do Teorema de Lumer-Phillips, obtendo também C_0 -semigrupos de contrações. Finalmente, o Teorema de Feller-Miyadera-Phillips surge como uma generalização do Teorema de Hille-Yosida para C_0 -semigrupos quaisquer.

Sabemos até este momento que o semigrupo gerado por um operador limitado é uniformemente contínuo. Neste capítulo, veremos o que ocorre quando o operador A não é limitado e, com isso, teremos um maior alcance na investigação de problemas interessantes, determinados por equações de evolução. A princípio, poderíamos pensar em usar uma abordagem análoga à dos geradores limitados, usando a série de potências e^{tA} . Contudo, quando A não é limitado, não podemos garantir a convergência da série de potências e^{tA} .

Na sequência, detalharemos a forma como trataremos este assunto. Vamos considerar X um espaço de Banach dotado de uma norma $\|\cdot\|$ e $\mathcal{B}(X)$ o espaço de Banach dos operadores lineares limitados $A: X \rightarrow X$, com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(X)}$ definida no Capítulo 1, mais especificamente em (1.6) e (1.7). Para simplificar a notação, neste capítulo, vamos denotar as normas de X e $\mathcal{B}(X)$ com o mesmo símbolo, a saber, $\|\cdot\|$.

As principais referências utilizadas para a elaboração deste capítulo foram [19, 1, 23, 4, 16].

3.1 Aproximações por geradores contínuos

Nosso problema consiste em determinar condições necessárias e suficientes para que um operador não limitado A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo. A maneira de fazer isso é usando um argumento de aproximação. Mais explicitamente, queremos aproximar operadores não limitados por operadores limitados, pois para esses últimos já

foi garantida a convergência da série e^{tA} e, com isso, o fato de que, para cada $t \geq 0$, e^{tA} define um elemento do espaço $\mathcal{B}(X)$.

Dado um operador linear não limitado A , aproximá-lo-emos por operadores limitados que chamaremos de A_μ , de tal forma que se verifiquem as seguintes condições:

$$A_\mu \omega \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} A\omega, \quad \forall \omega \in \mathcal{D}_A, \quad (3.1)$$

e

$$(e^{tA_\mu})_{\mu > 0} \quad \text{é uma net de Cauchy em } \mathcal{B}(X). \quad (3.2)$$

Se as propriedades (3.1) (3.2) se verificarem, é possível concluir que existe um operador $T(t)$, que é o limite uniforme desta net, ou seja,

$$T(t) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} e^{A_\mu t} \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

e $\{T(t): t \geq 0\}$ será justamente o semigrupo gerado por A , pelo fato de ser limite de semigrupos. Finalmente, A será o gerador infinitesimal de $\{T(t): t \geq 0\}$, pois

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\lim_{\mu \rightarrow \infty} e^{A_\mu h} x - x \right] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^h \frac{d}{dt} \{e^{A_\mu t} x\} dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^h A_\mu e^{A_\mu t} x dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h \lim_{\mu \rightarrow \infty} (A_\mu e^{A_\mu t} x) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h A \lim_{\mu \rightarrow \infty} e^{A_\mu t} x dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h AT(t)x dt \\ &= AT(0)x = Ax. \end{aligned}$$

Sendo assim, nosso problema se resume em caracterizar o operador linear A de tal forma que exista uma net $(A_\mu)_{\mu > 0}$ satisfazendo (3.1) e (3.2). Estas são as condições requeridas no Teorema de Hille-Yosida, as quais cabe mencionar que estão intimamente ligadas às propriedades do conjunto resolvente e do operador resolvente de A .

Lembremos que, dado A um operador linear, não necessariamente limitado sobre X , o conjunto resolvente de A é o conjunto de todos os números complexos para os quais $\lambda I - A$ é invertível, e é denotado por $\rho(A)$. Recordamos também que o **operador resolvente** de A é definido por $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ para $\lambda \in \rho(A)$.

3.2 Construção do Teorema de Hille-Yosida

Seja $\{T(t): t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo. Vimos na Proposição 2.13 que existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para $t \geq 0$. Se $\omega = 0$, então $T(t)$ é denominado **uniformemente limitado** e, se, além disso, $M = 1$, $T(t)$ é denominado um **C_0 -semigrupo de contrações**. Esta seção será dedicada à caracterização dos geradores infinitesimais dos C_0 -semigrupos de contrações. Condições sobre o comportamento do resolvente de um operador A , que são necessárias e suficientes para A ser um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações, serão dadas. Nesta seção, por simplicidade de notação, denotaremos o operador resolvente de A , $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ para $\lambda \in \rho(A)$, por $R(\lambda)$.

Vamos então considerar que $\{T(t) : t \geq 0\}$ seja um C_0 -semigrupo de contrações. Sejam $x \in X$ e $\lambda > 0$. Para $s, t \in \mathbb{R}$, $s < t$, consideremos a seguinte integral

$$\int_s^t e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau,$$

a qual está bem definida pelo fato de que a função $f(t) = e^{-\lambda t} T(t)x$ é contínua e $[s, t]$ é um intervalo compacto.

Afirmção: $\int_s^t e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \rightarrow 0$ quando $t, s \rightarrow \infty$.

De fato, por propriedades da integral, temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_s^t e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right\| &\leq \int_s^t \|e^{-\lambda\tau} T(\tau)x\| d\tau \\ &= \int_s^t |e^{-\lambda\tau}| \|T(\tau)x\| d\tau \\ &\leq \int_s^t e^{-\lambda\tau} \|T(\tau)\| \|x\| d\tau \\ &\leq \int_s^t e^{-\lambda\tau} \|x\| d\tau \quad (\text{pois } T(t) \text{ é um semigrupo de contrações}) \\ &= \|x\| \int_s^t e^{-\lambda\tau} d\tau = \frac{-1}{\lambda} \|x\| [e^{-\lambda t} - e^{-\lambda s}], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\| \int_s^t e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right\| \leq \frac{-1}{\lambda} \|x\| [e^{-\lambda t} - e^{-\lambda s}], \quad (3.3)$$

Fazendo $t, s \rightarrow \infty$ em (3.3), obtemos

$$\lim_{s, t \rightarrow \infty} \int_s^t e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau = 0. \quad (3.4)$$

Afirmção (*): A integral imprópria $\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau$ é convergente.

De fato, seja $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}_+$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e considere a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^{t_n} e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau.$$

Para provar a Afirmção (*), precisamos provar que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. Mas, para isso, basta verificarmos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X e, consequentemente, convergente, posto que X é um espaço de Banach.

Com efeito, sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e suponha, sem perda de generalidade, que $t_m > t_n$. Temos

$$\|u_m - u_n\| = \left\| \int_0^{t_m} e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau - \int_0^{t_n} e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right\| = \left\| \int_{t_n}^{t_m} e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right\|.$$

Como $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que $t_m \rightarrow \infty$ quando $m \rightarrow \infty$ e, por (3.4), obtemos

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\| = 0.$$

Logo, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X , o que completa a prova da Afirmção (*).

Concluimos, portanto, que a integral $\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau$ é convergente. Esta integral define o seguinte operador conhecido como a **interpretação integral do operador resolvente**:

$$\begin{aligned} R(\lambda): \quad X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau. \end{aligned}$$

Mostraremos que $R(\lambda)$ é um operador linear e limitado. De fato:

- (i) a linearidade segue da linearidade do semigrupo $\{T(t): t \geq 0\}$ e da integral, e
- (ii) $R(\lambda)$ é limitado, pois dado $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} \|R(\lambda)x\| &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right\| = \left\| \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right\| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \int_0^t e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\lambda\tau} \|T(\tau)\| \|x\| d\tau \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \|x\| \int_0^t e^{-\lambda\tau} d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{\lambda} \|x\| [e^{-\lambda t} - e^{-\lambda 0}] \\ &= \frac{-1}{\lambda} \|x\| \lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-\lambda t} - 1] = \frac{1}{\lambda} \|x\|, \end{aligned} \tag{3.5}$$

uma vez que $\|T(t)\| \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

Logo, faz sentido calcular a norma de $R(\lambda)$, dada por

$$\|R(\lambda)\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|R(\lambda)x\|.$$

Por (3.5), temos que

$$\|R(\lambda)\| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \frac{1}{\lambda} \|x\| = \frac{1}{\lambda} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|x\| = \frac{1}{\lambda}.$$

Assim, podemos inferir que

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \text{para todo } \lambda > 0. \tag{3.6}$$

Observação 3.1. Todo operador A , limitado ou não, comuta com seu operador resolvente. Isso se deve às seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} A(\lambda I - A)^{-1} &= (-(\lambda I - A) + \lambda I)(\lambda I - A)^{-1} \\ &= -(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} + \lambda I(\lambda I - A)^{-1} \\ &= -(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A) + (\lambda I - A)^{-1}\lambda I \\ &= [(\lambda I - A)^{-1}] [-(\lambda I - A) + \lambda I] \\ &= (\lambda I - A)^{-1} A. \end{aligned}$$

Teorema 3.2. Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $\{T(t): t \geq 0\}$, então $(\lambda I - A)$ é invertível para todo $\lambda > 0$ e

$$(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda). \tag{3.7}$$

Mais ainda, por (3.6), tem-se

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Demonstração. Para provar (3.7) é preciso mostrar que, para $x \in X$, tem-se

$$(\lambda I - A)R(\lambda)x = x, \quad (3.8)$$

e para $x \in \mathcal{D}_A$, tem-se

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x. \quad (3.9)$$

Provaremos primeiro a igualdade (3.8). Para isso, vamos garantir inicialmente que $R(\lambda)x \in \mathcal{D}_A$ para $x \in X$, para que faça sentido calcular $(\lambda I - A)R(\lambda)x$.

Com efeito, para $h > 0$, temos

$$\left(\frac{T(h) - I}{h}\right) R(\lambda)x = \frac{1}{h} \left[T(h) \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau - \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right].$$

Por propriedade de semigrupo, obtemos

$$\left(\frac{T(h) - I}{h}\right) R(\lambda)x = \frac{1}{h} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau + h)x d\tau - \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right]. \quad (3.10)$$

Fazendo a mudança de variável $\omega = \tau + h$ na primeira integral do lado direito de (3.10), temos

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau + h)x d\tau = \int_h^\infty e^{-\lambda(\omega-h)} T(\omega)x d\omega.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{T(h) - I}{h}\right) R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \left[\int_h^\infty e^{-\lambda(\omega-h)} T(\omega)x d\omega - \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_h^\infty e^{-\lambda\omega} e^{\lambda h} T(\omega)x d\omega - \int_0^h e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau - \int_h^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[e^{\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda\omega} T(\omega)x d\omega - \int_0^h e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau - \int_h^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right]. \end{aligned}$$

Pelo fato de ω ser uma variável muda na integral $\int_h^\infty e^{-\lambda\omega} T(\omega)x d\omega$, podemos substituí-la por τ de forma a obtermos

$$\begin{aligned} \left(\frac{T(h) - I}{h}\right) R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \left[e^{\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau - \int_0^h e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau - \int_h^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[(e^{\lambda h} - 1) \int_h^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau - \int_0^h e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right] \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau. \end{aligned}$$

Agora, observamos que:

- $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} = \lambda;$
- $\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_h^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau = R(\lambda)x;$

- $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau = x$. Com efeito, basta notar que $f(x) = e^{-\lambda\tau} T(\tau)x$ é uma função contínua com valores em X , portanto usando o Teorema 1.15 obtemos o resultado desejado, já que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau = e^{-\lambda 0} T(0)x = x.$$

Com isso, concluímos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) R(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x, \quad (3.11)$$

donde $R(\lambda)x \in \mathcal{D}_A$ e

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x.$$

Consequentemente

$$(\lambda I - A)R(\lambda)x = x,$$

provando a igualdade (3.8).

Agora, vamos provar (3.9). Dado $x \in \mathcal{D}_A$, temos

$$R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)Ax d\tau.$$

Pelo item (c) do Teorema 2.20, temos que

$$R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} (T(\tau)x)' d\tau,$$

isto é,

$$R(\lambda)Ax = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\lambda\tau} (T(\tau)x)' d\tau.$$

Fazendo integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{-\lambda\tau} T(\tau)x \Big|_0^t - \int_0^t T(\tau)x (-\lambda e^{-\lambda\tau}) d\tau \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{-\lambda t} T(t)x - e^{-\lambda 0} T(0)x + \lambda \int_0^t e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{-\lambda t} T(t)x - x + \lambda \int_0^t e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$R(\lambda)Ax = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} T(t)x - \lim_{t \rightarrow \infty} x + \lambda \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau,$$

donde

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} T(\tau)x d\tau - x \\ &= \lambda R(\lambda)x - x. \end{aligned}$$

Vemos, assim, que $R(\lambda)(\lambda I - A)x = x$, o que conclui a prova de (3.9). Por conseguinte,

$$(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda)$$

e de (3.6) segue que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \text{para todo } \lambda > 0,$$

completando a prova do teorema. □

Corolário 3.3. Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t): t \geq 0\}$ de contrações, então

$$\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A),$$

onde

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (3.12)$$

Demonstração. A prova de que $\mathbb{C}_+$ está contido em $\rho(A)$ segue de forma análoga à prova do Teorema 3.2. Concentrar-nos-emos em provar que a desigualdade (3.12) é válida para todo $\lambda \in \mathbb{C}_+$.

Com efeito, para $\lambda \in \mathbb{C}_+$ e $x \in X$ arbitrários, temos que

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt.$$

Como $\|T(t)\| \leq 1$ para todo $t \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \|R(\lambda)x\| &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| \leq \int_0^\infty |e^{-\lambda t}| \|T(t)\| \|x\| dt \\ &\leq \|x\| \int_0^\infty |e^{-\lambda t}| dt. \end{aligned}$$

Como $\lambda \in \mathbb{C}_+$, ele pode ser escrito como $\lambda = a + ib$, com $a = \operatorname{Re} \lambda > 0$, veja que

$$\begin{aligned} |e^{-\lambda t}| &= |e^{(-a-ib)t}| = |e^{-at}| |e^{-ibt}| = e^{-at} |\cos(-bt) + i \sin(-bt)| \\ &= e^{-at} \sqrt{\cos^2(-bt) + \sin^2(-bt)} = e^{-at} = e^{-\operatorname{Re} \lambda t}. \end{aligned}$$

Por isso, temos

$$\|R(\lambda)x\| \leq \|x\| \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} \lambda t} dt = \|x\| \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y e^{-\operatorname{Re} \lambda t} dt = \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda} \|x\|.$$

Assim concluímos que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leq \|x\| \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}, \quad \text{para quaisquer } x \in X \text{ e } \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Por conseguinte,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda},$$

como queríamos demonstrar. □

Anteriormente apresentamos vários resultados que se resumem na seguinte afirmação: o gerador infinitesimal A de um semigrupo de contrações verifica as seguintes condições:

- (I) A é fechado;
- (II) A é densamente definido;
- (III) o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ existe, é linear e limitado para cada $\lambda > 0$, com

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

O Teorema de Hille-Yosida garante que as condições expostas anteriormente são de fato suficientes para que A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações, porém antes de explorarmos este resultado, devemos garantir quando e em que condições é possível aproximar o operador não limitado A por meio de operadores limitados A_λ . Para isso, vamos abordar o seguinte lema, assumindo que A satisfaz as condições (I), (II) e (III), e que $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$.

Lema 3.4. *Seja $A: \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow X$ um operador fechado e densamente definido em $\mathcal{D}_A$. Se o conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, contém $\mathbb{R}_+$ e, para cada $\lambda > 0$, tem-se $\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, então:*

- (i) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda)x = x$, para todo $x \in X$.
- (ii) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda A R(\lambda)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda)Ax = Ax$, para todo $x \in \mathcal{D}_A$.

Demonstração. (i) Mostraremos inicialmente que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda)x = x$ para todo $x \in \mathcal{D}_A$.

Com efeito, seja $x \in \mathcal{D}_A$. Por (3.8), temos

$$\lambda R(\lambda)x - x = AR(\lambda)x, \quad (3.13)$$

e por (3.9)

$$R(\lambda)\lambda x - x = R(\lambda)Ax. \quad (3.14)$$

Como $R(\lambda)$ é um operador linear, sabemos que

$$\lambda R(\lambda)x = R(\lambda)\lambda x. \quad (3.15)$$

Por (3.13), (3.14) e (3.15), obtemos

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x = R(\lambda)\lambda x - x = R(\lambda)Ax.$$

Assim,

$$\|\lambda R(\lambda)x - x\| = \|AR(\lambda)x\| = \|R(\lambda)Ax\| \leq \|R(\lambda)\| \|Ax\| \leq \frac{1}{\lambda} \|Ax\|. \quad (3.16)$$

Fazendo $\lambda \rightarrow \infty$ em 3.16, obtemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|\lambda R(\lambda)x - x\| = 0.$$

Assim, concluímos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda)x = x, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}_A. \quad (3.17)$$

Como $\mathcal{D}_A$ é denso em X , para cada $x \in X$, podemos encontrar um $y \in \mathcal{D}_A$ suficientemente próximo de x de forma que a distância entre eles, $\|y - x\|$, seja suficientemente pequena. Observando que, para cada $\lambda > 0$, tem-se

$$\|\lambda R(\lambda)x - x\| = \|\lambda R(\lambda)x - \lambda R(\lambda)y + \lambda R(\lambda)y - y + y - x\|,$$

usando as propriedades de norma, a linearidade de $R(\lambda)$, o fato de $R(\lambda)$ ser limitado e a hipótese de que $\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda)x - x\| &= \|\lambda R(\lambda)x - \lambda R(\lambda)y + \lambda R(\lambda)y - y + y - x\| \\ &\leq \|\lambda R(\lambda)\| \|x - y\| + \|\lambda R(\lambda)y - y\| + \|y - x\| \\ &\leq \lambda \frac{1}{\lambda} \|x - y\| + \|\lambda R(\lambda)y - y\| + \|y - x\| \\ &= 2\|x - y\| + \|\lambda R(\lambda)y - y\|. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como $y \in \mathcal{D}_A$, segue de (3.17) que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda)y = y$. Portanto, por (3.18), podemos inferir que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda)x = x$, posto que $\|x - y\|$ é um valor suficientemente pequeno. Isso completa a prova de (i).

(ii) Mostraremos, a princípio, que

$$\lambda AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)Ax, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}_A.$$

Pois bem, isso ocorre, pois, conforme demonstramos na Observação 3.1, todo operador linear, limitado ou não, comuta com seu operador resolvente.

Ademais, observamos que, para todo $x \in X$, $Ax \in X$. Portanto, pelo item (i), temos que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda)Ax = Ax$, o que completa a prova de (ii). □

O Lema (3.4) indica quais operadores limitados devem ser considerados para aproximar o operador A . Pensando nisso, introduziremos uma classe de operadores lineares limitados que se “aproximam” de A em certo sentido a ser explicitado.

Seja $\lambda > 0$ e considere

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda).$$

Logo,

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda) = \lambda(A - \lambda I + \lambda I)R(\lambda) = \lambda^2 R(\lambda) - \lambda I.$$

Na prova do Teorema 3.2 mostramos que $R(\lambda)x \in \mathcal{D}_A$ para todo $x \in X$. Sendo assim, A_λ está definido para todo $x \in X$.

Afirmção (**): A_λ é um operador linear, limitado e $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda = A$.

Com efeito, a linearidade de A_λ segue facilmente da linearidade de $R(\lambda)$ e do operador identidade. A limitação de A_λ também segue da limitação de $R(\lambda)$ e do operador identidade. De fato, dado $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\| &= \|\lambda^2 R(\lambda)x - \lambda x\| \leq \|\lambda^2 R(\lambda)x\| + \|\lambda x\| \\ &= \lambda^2 \|R(\lambda)x\| + \lambda \|x\| \stackrel{(*)}{\leq} \lambda^2 \frac{\|x\|}{\lambda} + \lambda \|x\| \\ &= 2\lambda \|x\|, \end{aligned}$$

onde em $(*)$ usamos o fato de que $\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Esta classe de operadores A_λ , para $\lambda > 0$, é comumente conhecida como a **aproximação Yosida de A** .

Lema 3.5. *Seja A um operador linear que satisfaz as condições (I), (II) e (III). Se $x \in \mathcal{D}_A$, então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax.$$

Demonstração. Note que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda AR(\lambda)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda)Ax.$$

Usando o Lema 3.4 - item (ii), temos que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda)Ax = Ax$, de onde segue o resultado. $\square$

O Lema 3.5 completa a prova da Afirmação (**). Então, para cada $\lambda > 0$, A_λ é um operador linear e limitado. Logo, pelo Teorema 2.6, A_λ gera um semigrupo, a saber $\{e^{tA_\lambda} : t \geq 0\}$. Afirmamos que esse semigrupo é um semigrupo de contrações. De fato, dado $t \geq 0$, temos

$$\|e^{tA_\lambda}\| = \|e^{t(\lambda^2 R(\lambda) - \lambda I)}\| = \|e^{t\lambda^2 R(\lambda)} e^{-t\lambda I}\| \stackrel{(\bullet)}{=} e^{-t\lambda} \|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}\|, \quad (3.19)$$

em que a igualdade $(\bullet)$ se deve ao fato de que, para cada $x \in X$, temos

$$e^{-t\lambda I}x = e^{-t\lambda}x$$

e, portanto,

$$e^{t\lambda^2 R(\lambda)} e^{-t\lambda I}x = e^{t\lambda^2 R(\lambda)} e^{-t\lambda}x = e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 R(\lambda)}x, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Daí,

$$\|e^{t\lambda^2 R(\lambda)} e^{-t\lambda I}x\| = e^{-t\lambda} \|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}x\|, \quad \text{para todo } x \in X.$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \|e^{t\lambda^2 R(\lambda)} e^{-t\lambda I}\| &= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|e^{t\lambda^2 R(\lambda)} e^{-t\lambda I}x\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} e^{-t\lambda} \|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}x\| \\ &= e^{-t\lambda} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}x\| = e^{-t\lambda} \|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}\|. \end{aligned}$$

Segue, portanto, de (3.19) que

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\| &= e^{-t\lambda} \|e^{t\lambda^2 R(\lambda)}\| \leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda)\|} \\ &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \frac{1}{\lambda}} = e^{-t\lambda} e^{t\lambda} = 1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Portanto, $\{e^{tA_\lambda} : t \geq 0\}$ é um semigrupo de contrações para cada $\lambda > 0$.

Estamos agora em condições de enunciar um dos mais importantes teoremas de geração de semigrupos, o famoso **Teorema de Hille-Yosida**.

Teorema 3.6 (Teorema de Hille-Yosida). *Um operador linear não limitado A em um espaço de Banach X é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t) : t \geq 0\}$ se, e somente se,*

- (i) A é fechado,
- (ii) A é densamente definido e,

(iii) para cada $\lambda > 0$, $\lambda \in \rho(A)$, ou seja, $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e é um operador linear limitado, com

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Apresentaremos a demonstração deste teorema como consequência de outros dois resultados, um dos quais é o Teorema 3.2, que foi provado anteriormente, e o outro será demonstrado a seguir. Tais resultados mostram a necessidade e a suficiência, respectivamente, das condições (i), (ii) e (iii) do Teorema 3.6. No próximo resultado, mostraremos a suficiência das condições, pois a necessidade foi garantida pelo Teorema 3.2. Antes de enunciá-lo, faremos uma breve observação que será importante em sua prova.

Observação 3.7. Usando a linearidade dos operadores A_λ e o fato de que $\lambda I - A$ e $\mu I - A$ comutam, mostra-se facilmente que, para $\lambda, \mu > 0$, A_λ e A_μ comutam.

Teorema 3.8. *Seja A um operador densamente definido tal que, para cada $\lambda > 0$, o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e é linear limitado, com*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Então, A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações.

Demonstração. Para ter uma melhor interpretação do resultado, dividiremos esta prova em três etapas.

Etapla 1: Nesta primeira parte vamos obter uma desigualdade que será usada na segunda etapa.

Seja $x \in X$. Para $\lambda, \mu > 0$, $t \geq 0$ fixo, $0 \leq s \leq 1$ e $h > 0$, note que

$$\begin{aligned} e^{t(s+h)A_\lambda} e^{t(1-(s+h))A_\mu} x - e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x &= e^{t(s+h)A_\lambda} \left(e^{t(1-(s+h)A_\mu)} x - e^{t(1-s)A_\mu} x \right) \\ &+ \left(e^{t(s+h)A_\lambda} - e^{tsA_\lambda} \right) e^{t(1-s)A_\mu} x. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dividindo os dois membros da igualdade (3.21) por h , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{e^{t(s+h)A_\lambda} e^{t(1-(s+h))A_\mu} x - e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x}{h} &= e^{t(s+h)A_\lambda} \left(\frac{e^{t(1-(s+h)A_\mu)} - e^{t(1-s)A_\mu}}{h} x \right) \\ &+ e^{tsA_\lambda} \left(\frac{e^{thA_\lambda} - I}{h} e^{t(1-s)A_\mu} x \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Fazendo $h \rightarrow 0$, obtemos, no lado esquerdo de (3.22),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{t(s+h)A_\lambda} e^{t(1-(s+h))A_\mu} x - e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x}{h} = \frac{d}{ds} \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} \right), \quad (3.23)$$

e do lado direito obtemos a soma de dois limites, que calcularemos separadamente, a saber:

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^{t(s+h)A_\lambda} \left(\frac{e^{t(1-(s+h)A_\mu)} - e^{t(1-s)A_\mu}}{h} x \right) \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} e^{tsA_\lambda} \left(\frac{e^{thA_\lambda} - I}{h} e^{t(1-s)A_\mu} x \right).$$

Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} e^{t(s+h)A_\lambda} \left(\frac{e^{t(1-(s+h)A_\mu)} - e^{t(1-s)A_\mu}}{h} x \right) &= e^{tsA_\lambda} \left(\frac{d}{ds} (e^{t(1-s)A_\mu}) x \right) \\ &= e^{tsA_\lambda} (e^{t(1-s)A_\mu} x (-tA_\mu)) \\ &= -e^{tsA_\lambda} tA_\mu e^{t(1-s)A_\mu} x \end{aligned} \quad (3.24)$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} e^{tsA_\lambda} \left(\frac{e^{thA_\lambda} - I}{h} e^{t(1-s)A_\mu} x \right) &= e^{tsA_\lambda} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{thA_\lambda} - I}{h} e^{t(1-s)A_\mu} x \right) \\ &= e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{thA_\lambda} - I}{h} \right) \\ &= e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x \left(\frac{d}{dh} (e^{thA_\lambda}) \Big|_{h=0} \right) \\ &= e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x (tA_\lambda) e^{t(0)A_\lambda}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Assim, por (3.23), (3.24) e (3.25), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x) &= -e^{tsA_\lambda} tA_\mu e^{t(1-s)A_\mu} x + e^{tsA_\lambda} tA_\lambda e^{t(0)A_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x \\ &= t \left[-e^{tsA_\lambda} A_\mu e^{t(1-s)A_\mu} x + e^{tsA_\lambda} A_\lambda e^{t(1-s)A_\mu} x \right] \\ &= t \left[-e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} A_\mu x + e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} A_\lambda x \right], \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x) = t e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (-A_\mu x + A_\lambda x). \quad (3.26)$$

Integrando de 0 a 1 os dois membros da igualdade (3.26), obtemos

$$\int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x) ds = \int_0^1 t e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (-A_\mu x + A_\lambda x) ds.$$

Aplicando a Proposição 1.18, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x) ds &= e^{t(1)A_\lambda} e^{t(1-1)A_\mu} x - e^{t(0)A_\lambda} e^{t(1-0)A_\mu} x \\ &= e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x) ds \right\| \leq \int_0^1 \left\| \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x) \right\| ds \\ &\stackrel{(3.26)}{\leq} \int_0^1 \|t e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (-A_\mu x + A_\lambda x)\| ds \leq \int_0^1 t \|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}\| \|A_\mu x - A_\lambda x\| ds \\ &= t \|A_\mu x - A_\lambda x\| \int_0^1 \|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}\| ds \leq t \|A_\mu x - A_\lambda x\| \int_0^1 \|e^{tsA_\lambda}\| \|e^{t(1-s)A_\mu}\| ds. \end{aligned}$$

Mas, como

$$\|e^{tsA_\lambda}\| \leq 1 \quad \text{e} \quad \|e^{t(1-s)A_\mu}\| \leq 1,$$

obtemos

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\mu x - A_\lambda x\| \int_0^1 ds = t\|A_\mu x - A_\lambda x\|. \quad (3.27)$$

Etapa 2: Nesta etapa encontraremos um semigrupo de contrações que é gerado pelo operador não limitado A usando aproximações.

Para $x \in \mathcal{D}_A$, por (3.27), temos

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &\leq t\|A_\mu x - A_\lambda x\| \\ &= t\|A_\lambda x - Ax + Ax - A_\mu x\| \\ &\leq t(\|A_\lambda x - Ax\| + \|Ax - A_\mu x\|) \\ &= t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|A_\mu x - Ax\|. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Pelo Lema 3.5, temos

$$\|A_\lambda x - Ax\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0 \quad \text{e} \quad \|A_\mu x - Ax\| \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0. \quad (3.29)$$

Por (3.28) e (3.29) vemos que, para cada $x \in \mathcal{D}_A$, $(e^{tA_\lambda}x)_{\lambda>0}$ é uma net de Cauchy em X . Como X é um espaço de Banach, podemos afirmar que, para cada $x \in \mathcal{D}_A$, o limite

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x$$

existe. Além disso, por (3.28), também inferimos que esta convergência é uniforme em intervalos limitados com respeito a t . Agora, para $y \in X$, existe $x \in \mathcal{D}_A$ tal que a distância $\|y - x\|$ é suficiente pequena, uma vez que $\mathcal{D}_A$ é denso em X . Portanto, para $\lambda, \mu > 0$, temos

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}y - e^{tA_\mu}y\| &= \|e^{tA_\lambda}y - e^{tA_\lambda}x + e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x + e^{tA_\mu}x - e^{tA_\mu}y\| \\ &\leq \|e^{tA_\lambda}y - e^{tA_\lambda}x\| + \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| + \|e^{tA_\mu}x - e^{tA_\mu}y\|. \end{aligned}$$

Usando a linearidade de e^{tA_λ} e e^{tA_μ} e a limitação dada em (3.20) para λ e μ , obtemos

$$\|e^{tA_\lambda}y - e^{tA_\mu}y\| \leq 2\|y - x\| + \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|,$$

de onde segue que $(e^{tA_\lambda}y)_{\lambda>0}$ também é uma net de Cauchy em X e, portanto, convergente. Logo, o limite

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}y$$

existe, onde esta convergência é uniforme em intervalos limitados com relação a t .

Definimos então, para cada $x \in X$,

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x.$$

$\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de contrações. Com efeito, note inicialmente que $T(t)$ é linear, pois e^{tA_λ} e o limite são lineares. Ademais, $T(t)$ é limitado, já que

$$\|T(t)x\| = \left\| \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x \right\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|e^{tA_\lambda}\| \|x\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|x\| = \|x\|,$$

o que implica $\|T(t)\| \leq 1$. Agora, verificaremos que $T(t)$ é um C_0 -semigrupo.

(i) Para todo $x \in X$, temos

$$T(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{0A_\lambda}x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} Ix = x,$$

ou seja, que $T(0) = I$.

(ii) Dado $x \in X$, temos

$$T(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{(t+s)A_\lambda}x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}x. \quad (3.30)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} T(t)T(s)x &= T(t) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{sA_\lambda}x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T(t)e^{sA_\lambda}x \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}x \right) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}x. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Portanto, por (3.30) e (3.31), concluimos que

$$T(t+s)x = T(t)T(s)x, \quad \text{para todo } x \in X,$$

isto é, $T(t+s) = T(t)T(s)$.

(iii) Segue da definição de $T(t)$ que, para cada $t \geq 0$, existe $\lambda_1 > 0$ tal que

$$\|e^{tA_\lambda}x - T(t)x\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } \lambda \geq \lambda_1.$$

Então, para $\lambda = \lambda_1$, temos

$$\|e^{tA_{\lambda_1}}x - T(t)x\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (3.32)$$

Como A_{λ_1} é um operador linear, segue que $\{e^{tA_{\lambda_1}} : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo. Portanto, fazendo $t \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{tA_{\lambda_1}}x = e^{0A_{\lambda_1}}x = x.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, para t próximo de zero pela direita, temos

$$\|e^{tA_{\lambda_1}}x - x\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.33)$$

Então, por (3.32) e (3.33), vemos que, para t próximo de zero pela direita, vale

$$\|T(t)x - x\| \leq \|e^{tA_{\lambda_1}}x - T(t)x\| + \|e^{tA_{\lambda_1}}x - x\| < \varepsilon$$

donde segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x.$$

Por (i), (ii) e (iii), concluimos que $T(t)$ é um C_0 -semigrupo.

Etapa 3: Nesta última etapa mostraremos que A efetivamente é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Contudo, foi provado na etapa anterior que $T(t)$ é um C_0 -semigrupo. Portanto, $T(t)$ tem um gerador, o qual vamos chamar de F . Sendo assim, temos que mostrar que $F = A$.

Se $x \in \mathcal{D}_A$, então

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x - x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{tA_\lambda}x - x). \quad (3.34)$$

Sabemos que A_λ gera o C_0 -semigrupo $\{e^{tA_\lambda} : t \geq 0\}$. Do Teorema 2.20 - item (c) segue que

$$\frac{d}{dt}(e^{tA_\lambda}x) = e^{tA_\lambda}A_\lambda x. \quad (3.35)$$

Integrando ambos os membros da igualdade (3.35) sobre $[0, t]$ e aplicando a Proposição 1.18, obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}(e^{\tau A_\lambda})d\tau = \int_0^t e^{\tau A_\lambda}A_\lambda x d\tau = e^{tA_\lambda}x - e^{0A_\lambda}x = e^{tA_\lambda}x - x. \quad (3.36)$$

Assim, de (3.34) e (3.36) segue que

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\tau A_\lambda}A_\lambda x d\tau \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\int_0^t (e^{\tau A_\lambda}A_\lambda x - e^{\tau A_\lambda}Ax + e^{\tau A_\lambda}Ax) d\tau \right] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\int_0^t e^{\tau A_\lambda}(A_\lambda x - Ax)d\tau + \int_0^t e^{\tau A_\lambda}Ax d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Afirmamos que

- (i) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\tau A_\lambda}(A_\lambda x - Ax)d\tau = 0$ e
- (ii) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\tau A_\lambda}Ax d\tau = \int_0^t T(\tau)Ax d\tau$.

Com efeito, como

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{\tau A_\lambda}(A_\lambda x - Ax)d\tau \right\| &\leq \int_0^t \|e^{\tau A_\lambda}\| \|A_\lambda x - Ax\| d\tau \leq \int_0^t \|A_\lambda x - Ax\| d\tau \\ &= \|A_\lambda x - Ax\| \int_0^t d\tau = \|A_\lambda x - Ax\|t \end{aligned}$$

e $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax$, concluímos a validade de (i).

Agora, note que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{\tau A_\lambda}Ax d\tau - \int_0^t T(\tau)Ax d\tau \right\| &= \left\| \int_0^t (e^{\tau A_\lambda}Ax - T(\tau)Ax) d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^t \|e^{\tau A_\lambda}Ax - T(\tau)Ax\| d\tau. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Para simplificar a notação, vamos denotar a família de funções $\|e^{\tau A_\lambda}Ax - T(\tau)Ax\|$, com $\lambda > 0$, por $H_\lambda(\tau)$.

Pela definição do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, temos que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} H_\lambda(\tau) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} H_\lambda(\tau) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|e^{\tau A_\lambda} Ax - T(\tau)Ax\| \\ &= \left\| \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{\tau A_\lambda} Ax - T(\tau)Ax \right\| \\ &= \|T(\tau)Ax - T(\tau)Ax\| = 0. \end{aligned}$$

Além disso, note que, para $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} 0 \leq H_\lambda(\tau) &= \|e^{\tau A_\lambda} Ax - T(\tau)Ax\| \\ &\leq \|e^{\tau A_\lambda} Ax\| + \|-T(\tau)Ax\| \\ &= \|e^{\tau A_\lambda}\| \|Ax\| + \|T(\tau)\| \|Ax\| \\ &\leq \|Ax\| + \|Ax\| = 2\|Ax\|. \end{aligned}$$

Consequentemente, H_λ é integrável em $[0, t]$ e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja [5, Teorema 2.24]), segue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t H_\lambda(\tau) d\tau = 0,$$

isto é,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t \|e^{\tau A_\lambda} Ax - T(\tau)Ax\| d\tau = 0. \quad (3.39)$$

Portanto, de (3.38) e (3.39) segue o resultado exposto em (ii).

Agora, por (3.37), (i) e (ii), obtemos

$$T(t)x - x = \int_0^t T(\tau)Ax d\tau$$

e, para $t > 0$, temos

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)Ax d\tau.$$

Pelo Teorema 2.20 - item (a), concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = T(0)Ax = Ax,$$

de onde segue que $x \in \mathcal{D}_F$ e $Fx = Ax$. Desse modo, $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_F$ e $F|_{\mathcal{D}_A} = A$. Seja $x \in \mathcal{D}_F$. Considerando $y = R(1)(I - F)x$, temos $y \in \mathcal{D}_A$ e

$$(I - A)y = (I - A)(I - A)^{-1}(I - F)x = (I - F)x,$$

o que implica

$$y - Ay = x - Fx \implies y - Fy = x - Fx \implies (I - F)(y - x) = 0.$$

Como $(I - F)$ é injetivo, segue que $y = x$. Dessa forma, $x \in \mathcal{D}_A$ e, portanto, $\mathcal{D}_F \subset \mathcal{D}_A$. Por conseguinte, $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_A$, o que implica que $F \equiv A$. $\square$

3.3 O Teorema de Lumer-Phillips

Anteriormente, apresentamos o Teorema de Hille-Yosida, o qual caracterizou os geradores infinitesimais dos C_0 -semigrupos de contrações. Infelizmente, mesmo no caso de problemas relativamente simples, é praticamente impossível verificar todas as condições listadas por tal teorema, por exemplo, nem sempre é fácil estimar a norma do operador resolvente, e em situações específicas verificar que o operador seja fechado também pode ser uma tarefa árdua. Porém, nesta seção enunciaremos uma nova caracterização dos geradores de tais semigrupos, através de uma reformulação muito útil do Teorema de Hille-Yosida, cuja vantagem em relação a esse último reside no fato de ser mais simples a verificação das hipóteses, como veremos posteriormente. Tal resultado é conhecido como o Teorema de Lumer-Phillips.

Este teorema apresenta bastante utilidade em espaços de Hilbert e em outros espaços, como os espaços L^p , pois não é necessário realizar cálculos explícitos das normas dos resolventes como exige o Teorema de Hille-Yosida. A seguir, abordaremos alguns conceitos preliminares ao referido teorema.

Sejam X um espaço de Banach, X^* o dual topológico de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a **dualidade** entre X^* e X . Denotamos por $\langle x^*, x \rangle$ o valor de $x^* \in X^*$ em $x \in X$ e definimos, para cada $x \in X$, o **conjunto dualidade** $F(x) \subset X^*$ por

$$F(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = \|x^*\|^2 = \|x\|^2\} \subset X^*. \quad (3.40)$$

Como consequência do Teorema de Hahn-Banach, $F(x) \neq \emptyset$ seja qual for o $x \in X$. Portanto, a aplicação dualidade $j : X \rightarrow X^*$ que a cada $x \in X$ faz corresponder $j(x) \in F(x)$ está bem definida e tem-se

$$\|j(x)\| = \|x\| = (\langle j(x), x \rangle)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.41)$$

Buscamos uma caracterização do gerador de um C_0 -semigrupo de contração que não requeira conhecimento explícito do resolvente, a definição que segue é uma noção chave para alcançar esse objetivo.

Definição 3.9. Um operador linear $A : \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow X$ é **dissipativo** relativamente a alguma aplicação dualidade j se

$$\operatorname{Re} \langle j(x), Ax \rangle \leq 0, \text{ para cada } x \in \mathcal{D}_A.$$

Para nos familiarizarmos com os operadores dissipativos, apresentamos algumas de suas propriedades básicas.

Definição 3.10. Um operador dissipativo A que satisfaça $\operatorname{Im}(I - A) = X$ é denominado **maximal dissipativo**.

Observação 3.11. É claro que se A é dissipativo, então λA é dissipativo para todo $\lambda > 0$.

Uma caracterização muito útil dos operadores dissipativos é fornecida pelo seguinte resultado.

Proposição 3.12. Se A é um operador linear dissipativo relativamente à alguma aplicação dualidade, então

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \operatorname{Re} \lambda \|x\|, \text{ para quaisquer } \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } x \in \mathcal{D}_A.$$

Demonstração. Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x \in \mathcal{D}_A$. Consideremos a aplicação dualidade $j : X \rightarrow X^*$ para a qual A é dissipativo.

Temos de (3.41) que

$$\begin{aligned}\langle j(x), (\lambda I - A)x \rangle &= \langle j(x), \lambda x \rangle - \langle j(x), Ax \rangle \\ &= \bar{\lambda} \|x\|^2 - \langle j(x), Ax \rangle,\end{aligned}$$

de onde segue que

$$(Re(\lambda)) \|x\|^2 = (Re(\bar{\lambda})) \|x\|^2 = Re \langle j(x), (\lambda I - A)x \rangle + Re \langle j(x), Ax \rangle.$$

Da Definição 3.9 e novamente de (3.41) decorre que

$$\begin{aligned}(Re(\lambda)) \|x\|^2 &\leq Re \langle j(x), (\lambda I - A)x \rangle \\ &\leq |\langle j(x), (\lambda I - A)x \rangle| \\ &\leq \|j(x)\|_{X^*} \|(\lambda I - A)x\| \\ &\leq \|x\| \|(\lambda I - A)x\|,\end{aligned}$$

o que implica

$$(Re \lambda) \|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\|, \text{ se } x \neq 0.$$

No caso em que $x = 0$, a desigualdade segue trivialmente, o que encerra a prova. $\square$

Proposição 3.13. *Se $A : \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow X$ é um operador linear, fechado e dissipativo em relação à alguma aplicação dualidade, então $\rho(A) \cap (0, \infty)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Dividimos a prova em dois casos: quando $\rho(A) \cap (0, \infty) = \emptyset$ e quando $\rho(A) \cap (0, \infty) \neq \emptyset$.

- Se $\rho(A) \cap (0, \infty) = \emptyset$, não temos nada a provar, pois $\emptyset$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.
- Suponhamos que $\rho(A) \cap (0, \infty) \neq \emptyset$ e seja $\lambda_0 \in \rho(A) \cap (0, \infty)$. Agora, dados $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f \in X$, consideremos a identidade

$$\lambda u - Au = f, \tag{3.42}$$

que pode ser reescrita como

$$\lambda_0 u - Au = f + (\lambda_0 - \lambda)u. \tag{3.43}$$

Como $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ existe, resulta de (3.43) que

$$u = (\lambda_0 I - A)^{-1}(f + (\lambda_0 - \lambda)u). \tag{3.44}$$

Definamos

$$\begin{aligned}G : X &\rightarrow X \\ u &\mapsto Gu := (\lambda_0 I - A)^{-1}(f + (\lambda_0 - \lambda)u).\end{aligned} \tag{3.45}$$

Como A é fechado, podemos inferir que G está bem definida. Ademais, G é contínua, pois a aplicação $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é contínua. Além disso, para quaisquer $u, v \in X$, temos

$$\begin{aligned} \|Gu - Gv\| &= \|(\lambda_0 I - A)^{-1}(f + (\lambda_0 - \lambda)u) - (\lambda_0 I - A)^{-1}(f + (\lambda_0 - \lambda)v)\| \\ &= \|(\lambda_0 I - A)^{-1}[(\lambda_0 - \lambda)(u - v)]\| \\ &\leq \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| |\lambda_0 - \lambda| \|u - v\|. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Considerando

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|} := r_0,$$

teremos

$$\|Gu - Gv\| < \|u - v\|,$$

donde a aplicação definida em (3.45) será uma contração e pelo Teorema do ponto fixo de Banach, existirá um único $u \in X$ que soluciona a equação (3.44) e, por conseguinte, solução da equação (3.42). Em outras palavras, o operador $(\lambda I - A)$ será uma bijeção e, portanto, admitirá uma inversa $(\lambda I - A)^{-1}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda - \lambda_0| < r_0$.

Note que como $\lambda_0 > 0$, tem-se que $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e $Re\lambda_0 = \lambda_0$. Podemos então escolher r_0 suficientemente pequeno de tal maneira que se $|\lambda - \lambda_0| < r_0$, então $Re\lambda > 0$. Resultando assim que se $\lambda \in \mathcal{B}_{r_0}(\lambda_0)^1$ e $x \in X$ então $(\lambda I - A)^{-1}x \in \mathcal{D}_A$ e pela Proposição 3.12 temos

$$\|x\| = \|(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}x\| \geq Re\lambda \|(\lambda I - A)^{-1}x\|,$$

ou seja,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leq \frac{1}{Re\lambda} \|x\|, \text{ para todo } x \in X \text{ e } \lambda \in \mathcal{B}_{r_0}(\lambda_0).$$

A última desigualdade prova a continuidade da família de operadores $(\lambda I - A)^{-1}$ para todo $\lambda \in \mathcal{B}_{r_0}(\lambda_0)$, ou seja, para todo $\lambda \in \mathcal{B}_{r_0}(\lambda_0)$ o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e é contínuo. Portanto,

$$(\lambda_0 - r_0, \lambda_0 + r_0) \subset \rho(A) \cap (0, \infty),$$

mostrando que λ_0 é um ponto interior do conjunto $\rho(A) \cap (0, \infty)$. Como λ_0 foi escolhido arbitrariamente, concluímos que $\rho(A) \cap (0, \infty)$ é aberto em $\mathbb{R}$. $\square$

Observação 3.14. Enunciaremos e provaremos o Teorema de Lumer-Phillips considerando X como espaço de Banach. A versão deste resultado no caso em que X é um espaço de Hilbert foi obtida por Ralph Saul Phillips em 1959. Neste caso, tem-se $F(x) := \{x\}$ e mostrar que A é dissipativo em $X = H$ espaço de Hilbert, resume-se a verificar que $Re\langle Ax, x \rangle \leq 0$ para todo $x \in \mathcal{D}_A$. Cabe mencionar que se $Re\langle Ax, x \rangle \geq 0$, então A é chamado **acretivo**.

Teorema 3.15. (*Teorema de Lumer-Phillips*). *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações, então:*

- (i) *A é dissipativo relativamente à qualquer aplicação dualidade;*
- (ii) *$Im(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$ (ou seja, $\lambda I - A$ é sobrejetor para todo $\lambda > 0$).*

Reciprocamente, se

- (iii) *$\mathcal{D}_A$ é denso em X ,*

¹O símbolo $\mathcal{B}_{r_0}(\lambda_0)$ denota a bola no plano complexo centrada em $(\lambda_0, 0)$ e raio r_0 .

- (iv) A é dissipativo relativamente à alguma aplicação dualidade,
 (v) $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$,
 então, A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações.

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que A seja o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $T(t)$, ou seja,

$$\|T(t)\| \leq 1, \text{ para todo } t \geq 0. \quad (3.47)$$

Seja $j : X \rightarrow X^*$ uma aplicação dualidade e consideremos $x \in \mathcal{D}_A$ e $t \geq 0$. Resulta das equações 3.41 e 3.47 que

$$\begin{aligned} \text{Re}\langle j(x), T(t)x - x \rangle &= \text{Re}\langle j(x), T(t)x \rangle - \text{Re}\langle j(x), x \rangle \\ &\leq |\langle j(x), T(t)x \rangle| - \|x\|^2 \\ &\leq \|j(x)\| \|T(t)x - x\| \\ &\leq \|j(x)\| (\|T(t)\| \|x\| - \|x\|) = 0. \end{aligned}$$

Da última desigualdade, obtemos

$$\text{Re}\left\langle j(x), \frac{T(t)x - x}{t} \right\rangle \leq 0, \text{ para todo } t > 0. \quad (3.48)$$

Como $\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{T(t)x - x}{t} = Ax$, fazendo $t \rightarrow 0_+$ em (3.48), obtemos

$$\text{Re}\langle j(x), Ax \rangle \leq 0,$$

mostrando que A é dissipativo e completando a prova do item (i).

Por outro lado, de acordo com o Teorema de Hille-Yosida (Teorema 3.6), podemos afirmar que $(0, \infty) \subset \rho(A)$. Resulta daí que, para $\lambda > 0$, o operador $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ existe, é contínuo (pelo Teorema do Gráfico Fechado) e tem como domínio todo o espaço X , pois A é fechado. Isso prova o item (ii).

Reciprocamente, seja $A : \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow X$ um operador com domínio denso em X , que é dissipativo relativamente à alguma aplicação dualidade, tal que $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$. Vamos mostrar que A gera um C_0 -semigrupo de contrações.

Para isto, comprovemos que A satisfaz as hipóteses do Teorema de Hille-Yosida. Provaremos inicialmente que

$$A \text{ é fechado}, \quad (3.49)$$

visto que A é densamente definido, por hipótese. Com efeito, conforme garante o item (iv), A é dissipativo relativamente à alguma aplicação dualidade j . Logo, pela Proposição 3.12, obtemos

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \text{ para todo } \lambda > 0 \text{ e } x \in \mathcal{D}_A, \quad (3.50)$$

o que prova que $(\lambda I - A)_{\lambda > 0}$ é uma família de operadores injetivos. Além disso, pelo item (v), temos que

$$\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X, \text{ para algum } \lambda_0 > 0. \quad (3.51)$$

Dessa forma, $(\lambda_0 I - A)$ é uma bijeção de $\mathcal{D}_A$ sobre todo o espaço X , já que $(\lambda_0 I - A)$ é injetor (por (3.50)) e sobrejetor por (3.51).

Consequentemente, $(\lambda_0 I - A)^{-1}x \in \mathcal{D}_A$ para todo $x \in X$, e pela Proposição 3.12 podemos escrever

$$\|(\lambda_0 I - A)^{-1}x\| \leq \frac{1}{\lambda_0}\|x\|, \text{ para todo } x \in X.$$

Portanto,

$$(\lambda_0 I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(X, \mathcal{D}_A) \text{ } (\mathcal{D}_A \text{ munido da topologia de } X). \quad (3.52)$$

Consideremos, então, $(x_v)_v \subset \mathcal{D}_A$ tal que

$$x_v \rightarrow x \text{ em } X \text{ e } Ax_v \rightarrow y \text{ em } X \text{ quando } v \rightarrow \infty. \quad (3.53)$$

De (3.53), obtemos

$$\lambda_0 x_v \rightarrow \lambda_0 x \text{ em } X \text{ e } -Ax_v \rightarrow -y \text{ em } X \text{ quando } v \rightarrow \infty,$$

de onde resulta que

$$(\lambda_0 I - A)x_v \rightarrow \lambda_0 x - y \text{ em } X \text{ quando } v \rightarrow \infty. \quad (3.54)$$

Assim, por (3.52) e (3.54), concluímos que

$$(\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 I - A)x_v \rightarrow (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 x - y) \text{ em } X \text{ quando } v \rightarrow \infty,$$

ou ainda

$$x_v \rightarrow (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 x - y) \text{ em } X \text{ quando } v \rightarrow \infty. \quad (3.55)$$

Por (3.53) e (3.55), usando a unicidade do limite, resulta que

$$x = (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 x - y),$$

o que mostra que $x \in \mathcal{D}_A$. Ademais,

$$(\lambda_0 I - A)x = \lambda_0 x - y,$$

ou seja, $Ax = y$, provando que A é um operador fechado.

Para concluir a prova do teorema, resta-nos provar que, dado $\lambda > 0$, tem-se $\lambda \in \rho(A)$ e $\|R(\lambda, A)\| < \frac{1}{\lambda}$. De fato, considerando o conjunto

$$\Lambda = (0, \infty) \cap \rho(A),$$

temos $\Lambda \neq \emptyset$, pois pelo item (v) existe $\lambda_0 \in \rho(A)$ tal que $\lambda_0 > 0$. Segue da Proposição 3.13 que Λ é aberto em $(0, \infty)$, posto que Λ é aberto em $\mathbb{R}$ e $\Lambda \subset (0, \infty)$.

Agora, mostraremos que Λ é fechado em $(0, \infty)$. Com efeito, seja $(\lambda_v)_v \subset \Lambda$ tal que

$$\lambda_v \rightarrow \lambda \text{ em } \mathbb{R}, \text{ com } \lambda \in (0, \infty). \quad (3.56)$$

Como $(\lambda_v)_v \subset \rho(A)$, segue de (3.49) e da Observação 1.54 que, para cada $v \in \mathbb{N}$,

$$\text{Im}(\lambda_v I - A) = X. \quad (3.57)$$

Dado $y \in X$ arbitrário, de (3.57) resulta que, para cada $v \in \mathbb{N}$, existe $x_v \in \mathcal{D}_A$ tal que

$$\lambda_v x_v - Ax_v = y.$$

Pela Proposição 3.12 podemos inferir que

$$\|x_v\| \leq \frac{1}{\lambda_v} \|(\lambda_v I - A)x_v\| = \frac{1}{\lambda_v} \|y\|, \quad (3.58)$$

posto que $\lambda_v > 0$. Como $\lambda_v \rightarrow \lambda$ em $\mathbb{R}$, com $\lambda \in (0, \infty)$ temos que $\left(\frac{1}{\lambda_v}\right)_v$ é limitada e de (3.57) resulta que existe $C > 0$ tal que

$$\|x_v\| \leq C \text{ para todo } v \in \mathbb{N}, \quad (3.59)$$

onde C é uma constante que depende de y .

Sejam $v, \mu \in \mathbb{N}$ com $\mu > v$, temos pela Proposição 3.12 que

$$\begin{aligned} \lambda_\mu \|x_\mu - x_v\| &\leq \|(\lambda_\mu I - A)(x_\mu - x_v)\| \\ &= \|\lambda_\mu(x_\mu - x_v) - A(x_\mu - x_v)\|. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Logo, como

$$\lambda_v x_v - Ax_v = y \text{ e } \lambda_\mu x_\mu - Ax_\mu = y,$$

então

$$\lambda_\mu x_\mu - \lambda_v x_v = Ax_\mu - Ax_v,$$

o que implica que

$$\lambda_\mu(x_\mu - x_v) + (\lambda_\mu - \lambda_v)x_v = A(x_\mu - x_v). \quad (3.61)$$

De (3.60) e (3.61) podemos escrever

$$\begin{aligned} \lambda_\mu \|x_\mu - x_v\| &\leq \|\lambda_\mu(x_\mu - x_v) - A(x_\mu - x_v)\| \\ &= |\lambda_\mu - \lambda_v| \|x_v\|. \end{aligned} \quad (3.62)$$

e de (3.59) deduzimos

$$\lambda_\mu \|x_\mu - x_v\| \leq C |\lambda_\mu - \lambda_v|. \quad (3.63)$$

De (3.56) e (3.63) e do fato que $\left(\frac{1}{\lambda_v}\right)_v$ é limitada, resulta que $(x_v)_v$ é uma sequência de Cauchy em X , pois

$$\|x_\mu - x_v\| \leq \frac{1}{\lambda_\mu} C |\lambda_\mu - \lambda_v|.$$

Logo, como X é um espaço de Banach, existe $x \in X$ tal que

$$x_v \rightarrow x \text{ em } X \text{ quando } v \rightarrow \infty. \quad (3.64)$$

Segue de (3.56) e de (3.64) que

$$\lambda_v x_v \rightarrow \lambda x \text{ em } X \text{ quando } v \rightarrow \infty$$

e conseqüentemente

$$Ax_v = \lambda_v x_v - y \rightarrow \lambda x - y \text{ em } X \text{ quando } v \rightarrow \infty. \quad (3.65)$$

Assim, usando (3.49), (3.64) e (3.65), concluímos que $x \in \mathcal{D}_A$ e $Ax = \lambda x - y$, ou seja,

$$(\lambda I - A)x = y. \quad (3.66)$$

Usando a Equação 3.66 e o mesmo raciocínio aplicado à prova de (3.49), deduzimos que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e é contínuo, isto é, $\lambda \in \rho(A)$, provando que $\lambda \in \Lambda$ e que Λ é fechado.

Como Λ é aberto e fechado em $(0, \infty)$, concluímos que $\Lambda = (0, \infty)$. Além disso, como

$$\Lambda = (0, \infty) \cap \rho(A) \subset \rho(A),$$

mostramos que

$$(0, \infty) \subset \rho(A).$$

Resta-nos provar que

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \text{ para todo } \lambda > 0.$$

De fato, como $(0, \infty) \subset \rho(A)$ tem-se, para todo $\lambda > 0$, que $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ e da Proposição 3.12 decorre que

$$\|R(\lambda, A)x\| = \|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|,$$

encerrando a prova do teorema. □

Observação 3.16. Em termos de operadores maximais dissipativos, o Teorema de Lumer-Phillips pode ser reescrito como: um operador A densamente definido é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações se, e somente se, A é maximal dissipativo.

No caso em que X é um espaço de Hilbert, o Teorema de Lumer-Phillips garante que os únicos operadores maximais dissipativos do espaço são os que geram C_0 -semigrupos de contrações.

Observação 3.17. Da demonstração do Teorema de Lumer-Phillips segue que se A é maximal dissipativo, então $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.

A prova do próximo resultado será omitida, mas pode ser encontrada em [4, Corolário 4.4].

Corolário 3.18. *Seja A um operador linear fechado e densamente definido. Se ambos A e A^* são dissipativos, então A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações sobre X*

A seguir veremos uma generalização do Teorema de Hille-Yosida, que se refere à geração de C_0 -semigrupos quaisquer, não necessariamente com normas menores ou iguais do que 1.

3.4 O Teorema de Feller-Miyadera-Phillips

Dado um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, pela Proposição 2.13, existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Para nos referirmos a esta propriedade, diremos que $T(t)$ é um C_0 -semigrupo do tipo (M, ω) .

O Teorema de Feller-Miyadera-Phillips generaliza o Teorema de Hille-Yosida para C_0 -semigrupos do tipo (M, ω) quaisquer.

O Teorema de Feller-Miyadera-Phillips caracteriza os geradores de semigrupos fortemente contínuos arbitrários, foi provado em 1952 e deduzido do Teorema de Hille-Yosida,

demonstrado 4 anos antes. No Teorema de Feller-Miyadera-Phillips, precisamos estabelecer estimativas da norma para as potências do operador resolvente associado ao operador em questão. Antes de abordá-lo, apresentaremos a equação resolvente e um resultado auxiliar.

Teorema 3.19. *Seja $A: \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Se $\lambda, \mu \in \rho(A)$ e $R(\lambda; A), R(\mu; A) \in \mathcal{B}(X)$, então*

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda)R(\lambda; A)R(\mu; A). \quad (3.67)$$

A equação (3.67) é conhecida como a **equação resolvente**.

Demonstração. Como $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ e $R(\mu; A) = (\mu I - A)^{-1}$, temos

$$\begin{aligned} R(\lambda; A) &= R(\lambda; A) (\mu I - A) R(\mu; A) \\ &= R(\lambda; A) \{(\mu - \lambda)I + (\lambda I - A)\} R(\mu; A) \\ &= (\mu - \lambda) R(\lambda; A)R(\mu; A) + R(\mu; A), \end{aligned}$$

donde

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda)R(\lambda; A)R(\mu; A),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Lema 3.20. *Seja $A: \mathcal{D}_A \subseteq X \rightarrow X$ um operador linear tal que $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ e*

$$\|\lambda^n R(\lambda; A)^n\|_{\mathcal{B}(X)} \leq M.$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda > 0$. Então, existe uma norma $|\cdot|$ em X tal que

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|, \quad (3.68)$$

e

$$|\lambda R(\lambda; A)x| \leq |x|. \quad (3.69)$$

para cada $x \in X$ e $\lambda > 0$.

Demonstração. Para $\mu > 0$, definamos $|\cdot|_\mu: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$|x|_\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^n R(\mu; A)^n x\|,$$

onde consideramos que $0 \in \mathbb{N}$. É fácil verificar que a função $|\cdot|_\mu$ define uma norma em X .

Veja que, dado $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} |x|_\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^n R(\mu; A)^n x\| &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^n R(\mu; A)^n\| \|x\| \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} M \|x\| \\ &= M \|x\|. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Por outro lado, também temos

$$\|x\| = \|\mu^0 R(\mu; A)^0 x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^n R(\mu; A)^n x\| = |x|_\mu. \quad (3.71)$$

Portanto, por (3.70) e (3.71), concluimos que

$$\|x\| \leq |x|_\mu \leq M\|x\|. \quad (3.72)$$

Além disso,

$$|\mu R(\mu; A)x|_\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^n R(\mu; A)^n(\mu R(\mu; A)x)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^{n+1} R(\mu; A)^{n+1}x\| \leq |x|_\mu. \quad (3.73)$$

Afirmamos que

$$|\lambda R(\lambda; A)x|_\mu \leq |x|_\mu, \quad \text{para cada } \lambda \in (0, \mu] \text{ e cada } x \in X. \quad (3.74)$$

De fato, dado $x \in X$ arbitrariamente, pela equação resolvente (3.67), temos

$$R(\lambda; A)x = R(\mu; A)(x + (\mu - \lambda)R(\lambda; A)x)$$

e, usando (3.73), obtemos

$$|R(\lambda; A)x|_\mu \leq \frac{1}{\mu}|x|_\mu + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)|R(\lambda; A)x|_\mu.$$

Daí,

$$\left[1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\right]|R(\lambda; A)x|_\mu \leq \frac{1}{\mu}|x|_\mu,$$

ou seja,

$$\frac{\lambda}{\mu}|R(\lambda; A)x|_\mu \leq \frac{1}{\mu}|x|_\mu.$$

Consequentemente,

$$|\lambda R(\lambda; A)x|_\mu \leq |x|_\mu,$$

o que prova a afirmação feita em (3.74), que por sua vez implica

$$|\lambda R(\lambda; A)|_\mu = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|\lambda R(\lambda; A)x|_\mu}{|x|_\mu} \leq 1. \quad (3.75)$$

Como $|\lambda^n R(\lambda; A)^n x|_\mu \leq |\lambda R(\lambda; A)|_\mu^n |x|_\mu$, segue de (3.75) que

$$|\lambda^n R(\lambda; A)^n x|_\mu \leq 1^n \cdot |x|_\mu = |x|_\mu. \quad (3.76)$$

Portanto, pela primeira desigualdade de (3.72) e (3.76) deduzimos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in (0, \mu]$, vale

$$\|\lambda^n R(\lambda; A)^n x\| \leq |\lambda^n R(\lambda; A)^n x|_\mu \leq |x|_\mu. \quad (3.77)$$

Passando o supremo para $n \in \mathbb{N}$ no lado esquerdo da desigualdade (3.77), obtemos

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\lambda^n R(\lambda; A)^n x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x|_\mu = |x|_\mu,$$

ou seja,

$$|x|_\lambda \leq |x|_\mu \quad \text{para cada } \lambda \in (0, \mu].$$

Agora, podemos definir

$$|x| = \lim_{\mu \rightarrow \infty} |x|_{\mu}.$$

Por (3.74), obtemos

$$|\lambda R(\lambda; A)x| = \lim_{\mu \rightarrow \infty} |\lambda R(\lambda; A)x|_{\mu} \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} |x|_{\mu} = |x|,$$

o que prova (3.69).

Ademais, por (3.72), temos

$$\|x\| \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} |x|_{\mu} \leq M\|x\|,$$

ou seja,

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|,$$

provando (3.68). Dessa forma, a prova está completa. $\square$

Agora, estamos prontos para provar o Teorema de Feller-Miyadera-Phillips.

Teorema 3.21 (Teorema Feller-Miyadera-Phillips). *O operador $A: \mathcal{D}_A \subseteq X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t): t \geq 0\}$ do tipo (M, ω) , com $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$, ou seja, que satisfaz $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ se, e somente se:*

- (i) *A é densamente definido e fechado e*
- (ii) *$(\omega, +\infty) \subseteq \rho(A)$ e, para cada $\lambda > \omega$ e cada $n \in \mathbb{N}^*$, temos*

$$\|R(\lambda; A)^n\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$): Inicialmente, vamos considerar o caso em que $\omega = 0$.

Observamos que duas normas sobre um mesmo espaço vetorial X são equivalentes quando induzem a mesma topologia sobre X . Mais precisamente, duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são ditas equivalentes se existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Cabe destacar que, dessa forma, duas normas preservam as propriedades topológicas do gerador e do semigrupo quando são equivalentes.

Começaremos a prova para o caso em que $\omega = 0$ escolhendo uma norma equivalente à de X , $\|\cdot\|$, com respeito à qual o C_0 -semigrupo $\{T(t): t \geq 0\}$ do tipo $(M, 0)$ seja do tipo $(1, 0)$, isto é, seja um C_0 -semigrupo de contrações, para que possamos fazer uso do teorema de Hille-Yosida.

Vamos definir a norma $|||\cdot|||: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$|||x||| = \sup_{t \geq 0} \|T(t)x\|, \quad \text{para } x \in X.$$

Note que

$$\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\|, \quad \text{para todo } x \in X, \tag{3.78}$$

uma vez que $\{T(t): t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo do tipo $(M, 0)$. Portanto, $|||\cdot|||$ e $\|\cdot\|$ são normas equivalentes sobre X .

Adicionalmente, para todo $x \in X$, temos

$$|||T(t)x||| = \sup_{s \geq 0} \|T(s)T(t)x\| = \sup_{s \geq 0} \|T(s+t)x\| \leq \sup_{t \geq 0} \|T(t)x\| = |||x|||,$$

de onde segue que

$$|||T(t)|||_{\mathcal{B}(X)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|||T(t)x|||}{|||x|||} \leq 1.$$

Portanto, $T(t)$ é um C_0 -semigrupo de contrações sobre o espaço $(X, |||\cdot|||)$.

Segue, pois, do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 3.6) que A é fechado, densamente definido, $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ e

$$|||R(\lambda; A)|||_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (3.79)$$

para cada $\lambda > 0$. Pela definição da norma $|||\cdot|||$, (3.78) e (3.79), temos

$$\|\lambda^n R(\lambda; A)^n x\| \leq |||\lambda^n R(\lambda; A)^n x||| \leq \lambda^n |||R(\lambda; A)^n|||_{\mathcal{B}(X)} |||x||| \leq \lambda^n \frac{1}{\lambda^n} |||x||| \leq M \|x\|,$$

que equivale a

$$\|R(\lambda; A)^n x\| \leq \frac{M}{\lambda^n} \|x\|. \quad (3.80)$$

Pela desigualdade (3.80) concluímos que

$$\|R(\lambda; A)^n\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n},$$

com $\omega = 0$. Portanto, as condições (i) e (ii) são necessárias quando A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo do tipo $(M, 0)$.

($\Leftarrow$) : Suponhamos, agora, que as condições (i) e (ii) estejam satisfeitas. Pelo Lema 3.20, existe uma norma $|\cdot|$ sobre X , equivalente à norma $\|\cdot\|$, tal que

$$|x| \leq \|x\| \leq M|x| \quad \text{e} \quad |\lambda R(\lambda; A)x| \leq |x|,$$

para cada $x \in X$ e $\lambda > 0$. Daí, vemos que $|R(\lambda; A)|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$ e A satisfaz as hipóteses do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 3.6) sobre $(X; |\cdot|)$. Portanto, A é o gerador de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t); t \geq 0\}$.

Finalmente, como

$$\|T(t)x\| \leq |T(t)x| \leq |x| \leq M\|x\|,$$

para cada $t \geq 0$ e $x \in X$, obtemos

$$\|T(t)\|_{\mathcal{B}(X)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(t)x\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} M\|x\| = M = Me^{0t},$$

para cada $t \geq 0$, completando a prova para o caso em que $\omega = 0$.

Para o caso geral, precisamos somente observar que se $\{T(t); t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo do tipo (M, ω) e A é seu gerador, então $\{e^{-\omega t}T(t); t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo do tipo $(M, 0)$ e $A - \omega I$ é seu gerador (veja Exemplo 2.30). $\square$

3.5 Alguns resultados envolvendo semigrupos em espaços de Hilbert

Os resultados apresentados na sequência estão registrados com suas respectivas provas em [22, Seção 4.5]. Embora não sejam demonstrados neste trabalho, é fundamental apresentá-los, pois precisaremos deles numa aplicação da teoria que exibiremos posteriormente, uma vez que os espaços considerados são de Hilbert.

No que segue, assumiremos que H é um espaço de Hilbert, cujo produto interno nele definido é denotado por $(\cdot, \cdot)$.

No capítulo seguinte mostraremos que é possível resolver os problemas de valor inicial no sentido clássico, quando $u_0 \in \mathcal{D}_A$. Porém, por meio do próximo resultado veremos que, sempre que o operador A associado ao problema abstrato de Cauchy for auto-adjunto, é possível garantir solução no sentido clássico para qualquer condição inicial $u_0 \in H$.

Teorema 3.22 ([22, Teorema 4.5.2]). *Seja $A : \mathcal{D}_A \subset H \rightarrow H$ um operador auto-adjunto maximal dissipativo. Dado $u_0 \in H$, existe uma única u tal que*

$$u \in C([0, \infty); H) \cap C^1((0, \infty); H) \cap C((0, \infty); \mathcal{D}_A),$$

tal que

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.81)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} & \|u(t)\| \leq \|u_0\|, \quad t \geq 0 \\ e \quad & \left\| \frac{du(t)}{dt} \right\| = \|Au(t)\| \leq \frac{1}{t} \|u_0\|, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Enunciaremos agora um resultado de regularidade para o caso em que o operador A é auto-adjunto e maximal dissipativo.

Teorema 3.23 ([22, Teorema 4.5.3]). *Seja A um operador auto-adjunto maximal dissipativo sobre H . Se u é a solução do problema de valor inicial do problema (3.81), com $u_0 \in H$, então*

$$u \in C^k((0, \infty); \mathcal{D}_{A^l}), \quad \text{para inteiros } k \text{ e } l.$$

Um outro caso importante é quando ambos A e $-A$ são operadores maximais dissipativos, neste caso é obvio que

$$(Au, u) = 0, \quad \text{para cada } u \in \mathcal{D}_A.$$

Para tal caso, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.24 ([22, Teorema 4.5.4]). *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : \mathcal{D}_A \subset H \rightarrow H$, tal que tanto A como $-A$ são operadores maximais dissipativos. Então, ambos geram um grupo de isometrias.*

Com os resultados expostos no presente capítulo fornecemos as ferramentas para a aplicação da teoria de semigrupos às equações lineares de evolução, objetivo que será alcançado no capítulo seguinte para a equação do calor homogênea, além de mostrar a teoria de semigrupos como ferramenta para estabelecer a boa colocação para este tipo de problemas.

Neste capítulo utilizamos a teoria estudada no Capítulo 3 para apresentar algumas aplicações da teoria de semigrupos ao estudo de problemas de Cauchy. Em primeira instância, abordamos o papel dos semigrupos na procura da boa colocação para equações de evolução. Na sequência, estabeleceremos boa colocação, no sentido de soluções clássicas, para uma equação diferencial parcial muito conhecida, a saber, a equação do calor.

4.1 Boa colocação para equações de evolução

Nesta seção expomos uma das mais importantes aplicações da teoria de semigrupos de operadores, que consiste em inferir, através dos semigrupos de operadores lineares, informações sobre a boa colocação de equações de evolução, as quais deverão ser expressas como problemas de valor inicial lineares abstratos, isto é, problemas com valores em espaços de Banach da forma

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), \forall t > 0 \\ u(0) = u_0 = x, \end{cases}$$

em que t é uma variável independente representando o tempo, $u(\cdot)$ uma função com valores num espaço de Banach X , A um operador linear, $A : \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow X$, e $u_0 \in X$ o valor ou dado inicial.

Este, de fato, foi o nosso ponto de partida, pois motivamos o estudo dos semigrupos indagando sobre as soluções desse tipo de problema. Porém, nesta seção, além de garantir a existência de solução, queremos estudar a unicidade e a dependência contínua dos dados iniciais, objetivo que alcançaremos por meio da teoria de semigrupos, pelo menos para o caso em que o dado inicial pertença ao domínio do operador A , associado ao problema de valor inicial.

A seguir introduzimos a terminologia a ser utilizada.

Definição 4.1. i) O problema de valor inicial (P.V.I.)

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = u_t = Au(t), \forall t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

é chamado **problema abstrato de Cauchy** associado ao operador $(A, \mathcal{D}_A)$ com valor inicial u_0 .

ii) Diremos que a função $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ é uma **solução (clássica)** do P.V.I. (4.1) se:

- (a) u é contínua para todo $t \geq 0$;
- (b) u é continuamente diferenciável com respeito a X para $t > 0$;
- (c) $u(t) \in \mathcal{D}_A$ para todo $t > 0$;
- (d) u satisfaz (4.1).

Note que, como $u(t) \in \mathcal{D}_A$ para todo $t > 0$ e u é contínua em $t = 0$, o problema (4.1) não pode ter solução clássica quando $u_0 \notin \overline{\mathcal{D}_A}$.

Em outras palavras, $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ é solução clássica do P.V.I. (4.1) quando

$$u \in C^1((0, \infty); \mathcal{D}_A) \cap C([0, \infty); \mathcal{D}_A)$$

e u verifica (4.1).

Com base na definição anterior, é possível relacionar as soluções do problema (4.1) com a teoria de semigrupos de operadores e os seus geradores, conforme veremos no próximo resultado, cuja demonstração está baseada no item (c) do Teorema 2.20. Mostraremos a seguir que, para cada $u_0 \in \mathcal{D}_A$, a solução dada pelo semigrupo é única.

Proposição 4.2. *Se A é o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, então, para todo $u_0 \in \mathcal{D}_A$,*

$$u(t) = T(t)u_0$$

é a única solução clássica do P.V.I. dado em (4.1). Além disso,

$$u(t) \in C^1([0, \infty); \mathcal{D}_A) \cap C([0, \infty); \mathcal{D}_A).$$

Adicionalmente, se $\{T(t) : t \geq 0\}$ for um semigrupo de contrações, teremos

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|$$

e

$$\left\| \frac{du(t)}{dt} \right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Como consequência do item (c) do Teorema 2.20 temos que $u(t) = T(t)u_0$ é solução do P.V.I. dado em (4.1).

Afirmamos que $u(t) = T(t)u_0$ é a única solução de (4.1). Com efeito, suponhamos que existe outra função $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ que também é solução de (4.1).

Seja $\omega(s) = T(t-s)v(s)$. Derivando ω com respeito a s e usando o fato de que v é solução de (4.1), obtemos

$$\frac{d\omega}{ds}(s) = -AT(t-s)v(s) + AT(t-s)v(s) = 0,$$

que mostra que ω é constante. Note que

$$\omega(t) = T(t-t)v(t) = T(0)v(t) = v(t) \quad \text{e}$$

$$\omega(0) = T(t-0)v(0) = T(t)v(0) = T(t)u_0.$$

Como ω é constante, temos

$$\omega(t) = \omega(0)$$

e, portanto,

$$v(t) = T(t)u_0 = u(t),$$

concluindo que $u(t) = T(t)u_0$ é, de fato, a única solução de (4.1)

Como $u(t) = T(t)u_0$, $t \geq 0$, é solução do problema (4.1), temos

$$\frac{du}{dt}(t) = AT(t)u_0 = T(t)Au_0, \quad \forall t \geq 0,$$

além de $u(0) = T(0)u_0 = u_0$.

Se T for um semigrupo de contrações, teremos

$$\|u(t)\| = \|T(t)u_0\| \leq \|T(t)\| \|u_0\| \leq \|u_0\|, \quad \forall t \geq 0$$

e

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|AT(t)u_0\| = \|T(t)Au_0\| \leq \|T(t)\| \|Au_0\| \leq \|Au_0\|, \quad \forall t \geq 0,$$

o que completa a prova. $\square$

Garantimos até aqui a existência e a unicidade de soluções clássicas sempre que o valor inicial u_0 pertence a $\mathcal{D}_A$. Na sequência veremos o conceito de solução fraca para o problema (4.1) e garantiremos a existência e unicidade de solução fraca para (4.1), considerando a equação sujeita à qualquer valor inicial $u_0 \in X$.

Definição 4.3. Diremos que uma função $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ é **solução fraca (ou generalizada)** do problema abstrato de Cauchy (4.1) se:

- (a) u é contínua para todo $t \geq 0$;
- (b) $\int_0^t u(s)ds \in \mathcal{D}_A$ para todo $t \geq 0$;
- (c) $u(t) = A \int_0^t u(s)ds + u_0$.

Também é possível relacionar o estudo de soluções fracas à teoria de semigrupos de operadores. De fato, dado um gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo A , segue do item (b) do Teorema 2.20 que existe uma solução fraca para o P.V.I. associado a A , para cada valor inicial $u_0 \in X$. A unicidade de tal solução será provada no próximo resultado.

Proposição 4.4. *Seja $(A, \mathcal{D}_A)$ o gerador do C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Então, para cada $u_0 \in X$,*

$$u(t) = T(t)u_0, \quad t \geq 0$$

é a única solução fraca do problema abstrato de Cauchy associado a A , satisfazendo $u(0) = u_0$.

Demonstração. A existência da solução fraca para o problema de Cauchy associado a A decorre do item (b) do Teorema 2.20, pois se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo, cujo gerador infinitesimal é A , dado $u_0 \in X$, fazendo $u(t) = T(t)u_0$, tem-se

$$\int_0^t T(s)u_0 ds \in \mathcal{D}_A, \quad \forall t \geq 0.$$

Portanto, $u(t)$ satisfaz a condição (b) da Definição 4.3.

Além disso,

$$A \int_0^t T(s)u_0 ds = T(t)u_0 - u_0,$$

ou seja,

$$T(t)u_0 = A \int_0^t T(s)u_0 ds + u_0, \quad (4.2)$$

provando com isso que $u(t)$ satisfaz a condição (c) de (4.3).

Falta-nos provar que $u(t)$ satisfaz a condição (a) da Definição (4.3), isto é, a continuidade de u para todo $t \geq 0$. Com efeito, se $t_n \rightarrow t_0$ em $\mathbb{R}_+$, então

$$\|u(t_n) - u(t_0)\| = \|T(t_n)u_0 - T(t_0)u_0\|,$$

assim, pelo fato de T ser fortemente contínuo, quando $n \rightarrow \infty$ temos

$$\|T(t_n)u_0 - T(t_0)u_0\| \rightarrow 0,$$

pois

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(t_n)u_0 - T(t_0)u_0\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)u_0 - T(t_0)u_0 \right\| \\ &= \left\| T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n\right)u_0 - T(t_0)u_0 \right\| \\ &= \|T(t_0)u_0 - T(t_0)u_0\| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então, $\|u(t_n) - u(t_0)\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e, por conseguinte, $u(t_n) \rightarrow u(t_0)$, o que implica que u é contínua para todo $t \geq 0$, isto é, $u \in C([0, +\infty); X)$.

Logo, $u(t) = T(t)u_0$ é solução fraca do problema abstrato de Cauchy associado a A .

No que segue, mostraremos a unicidade de tal solução. Para isso, vamos dividir a prova em duas etapas.

- Etapa 1. Aqui, vamos supor que $u_0 \equiv 0$. Neste caso, é imediato que $v(t) \equiv 0$ é solução fraca do problema descrito em (4.1) (solução trivial).

Suponhamos, agora, que u seja outra solução fraca de (4.1) para $u_0 \equiv 0$. Tomemos $t > 0$ e, para cada $s \in (0, t)$, definimos uma função auxiliar ω da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \omega : (0, t) &\rightarrow X \\ s &\mapsto \omega(s) = T(t-s) \int_0^s u(r) dr. \end{aligned}$$

Derivando ω em relação a s , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(T(t-s) \int_0^s u(r) dr \right) &= T(t-s)u(s) - T(t-s)A \int_0^s u(r) dr \\ &= T(t-s)u(s) - T(t-s)u(s) + u(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Integrando a expressão anterior no intervalo $(0, t)$ com respeito a s , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{ds} \left(T(t-s) \int_0^s u(r) dr \right) ds &= \int_0^t 0 ds \\ \left(T(t-s) \int_0^s u(r) dr \right) \Big|_0^t &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$T(0) \int_0^t u(r) dr - T(t) \int_0^0 u(r) dr = 0,$$

donde $\int_0^t u(r) dr = 0$. Aplicando o operador A aos dois membros da última igualdade, temos

$$\begin{aligned} u(t) - u(0) &= A \int_0^t u(r) dr = A(0) = 0 \\ u(t) &= A \int_0^t u(r) dr = 0. \end{aligned}$$

Sendo assim, podemos inferir que $u(t) \equiv 0$ em $(0, t)$ e $u(t) = u(0) = 0$. Logo, se u é solução fraca do problema (4.1) com $u_0 \equiv 0$, então $u \equiv v \equiv 0$.

- Etapa 2. Aqui, consideramos v e w duas soluções do problema (4.1). Para $t \in \mathbb{R}_+$, defina $u(t) = v(t) - w(t)$. Note que

$$\begin{aligned} A \int_0^t u(s) ds &= A \int_0^t v(s) ds - A \int_0^t w(s) ds \\ &= v(t) - w(t), \text{ para } u_0 \equiv 0, \\ &= u(t), \end{aligned}$$

ou seja, u verifica a condição (c) da Definição (4.3). Além disso, como v e w são contínuas em $\mathbb{R}_+$, u é contínua em $\mathbb{R}_+$.

Ainda,

$$\int_0^t u(s) ds \in \mathcal{D}_A, \quad \forall t \geq 0,$$

pois

$$\int_0^t v(s) ds \in \mathcal{D}_A \text{ e } \int_0^t w(s) ds \in \mathcal{D}_A, \quad \forall t \geq 0.$$

Assim, usando o fato de que $\mathcal{D}_A$ é um espaço vetorial, concluímos que a condição (b) da Definição (4.3) é satisfeita por u . Portanto, u satisfaz as três condições para ser uma solução fraca do problema (4.1), para $u_0 \equiv 0$. Pela Etapa 1, conclui-se que $u \equiv 0$ e, conseqüentemente,

$$v(t) = w(t), \quad \forall t \geq 0,$$

de onde segue a unicidade da solução fraca.

□

Usando os resultados das Proposições 4.2 e 4.4, apresentamos dois exemplos, nos quais evidenciamos as equações que os semigrupos apresentados nos Exemplos 2.26 e 2.27 resolvem.

Exemplo 4.5. Provamos no Exemplo 2.26 que as translações formam um semigrupo sobre $L^2(\mathbb{R})$, cujo gerador infinitesimal é $A = \frac{d}{dx}$. Na sequência, construiremos a equação diferencial que este semigrupo resolve. Lembremos que se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é o semigrupo gerado por A , então a função $u(x, t) = T(t)u_0(x)$ resolve a equação

$$\begin{cases} u_t = Au(x, t) \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

Se substituimos o operador A , encontramos que a equação é equivalente a

$$\begin{cases} u_t - u_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{cases}$$

cuja única solução é dada por

$$u(x, t) = T(t)u_0(x) = u_0(x + t).$$

Exemplo 4.6. É possível construir a equação diferencial que o semigrupo

$$T(t)f(x) = f(x + t)e^{at},$$

do Exemplo 2.27 resolve. Com efeito, se A é o gerador de um semigrupo $T(t)$, sabemos que a função $u(x, t) = T(t)u_0(x)$ resolve a equação

$$\begin{cases} u_t = Au(x, t), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Considerando o operador $A = \frac{d}{dx} + aI$, a equação acima pode ser expressa como

$$\begin{cases} u_t - u_x - au(x, t) &= 0, \\ u(x, t) &= u_0(x), \end{cases}$$

e a solução única será dada por

$$u(x, t) = T(t)u_0(x) = u_0(x + t)e^{at}.$$

Observação 4.7. O tipo de solução encontrada em cada um dos exemplos anteriores depende da condição inicial que foi considerada. Se esta pertencer a todo o espaço X , teremos uma solução fraca, porém, se pertencer só ao domínio do operador A , a solução será clássica.

Percebe-se que, em essência, os resultados expostos nas Proposições 4.2 e 4.4 são reformulações de dois resultados provados anteriormente para C_0 -semigrupos, a saber, itens (c) e (b) do Teorema (2.20), respectivamente. Embora estes resultados possam sugerir que a recíproca seja válida, o exemplo a seguir mostra que isso não é verdade.

Exemplo 4.8. Seja $(B, \mathcal{D}_B)$ um operador fechado e não limitado sobre X . Sobre o espaço produto $\mathfrak{X} := X \times X$, considere o operador $(\mathcal{A}, \mathcal{D}_\mathcal{A})$ escrito em forma matricial como

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com domínio $\mathcal{D}_\mathcal{A} := X \times \mathcal{D}_B$, ou seja, os elementos de $\mathcal{D}_\mathcal{A}$ são da forma $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, onde $x \in X$ e $y \in \mathcal{D}_B$. Então, é fácil ver que

$$t \mapsto u(t) := \begin{pmatrix} x + tBy \\ y \end{pmatrix}$$

é a única solução do problema abstrato de Cauchy associado a $\mathcal{A}$, descrito por:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}(u(t)), & t \geq 0 \\ u(0) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Em contrapartida, $\mathcal{A}$ não gera nenhum C_0 -semigrupo, pois, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, tem-se

$$(\lambda - \mathcal{A})\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda x - By \\ \lambda y \end{pmatrix} : x \in X, y \in \mathcal{D}_B \right\} \subset X \times \mathcal{D}_B \neq \mathfrak{X},$$

de onde segue que o operador $(\lambda I - \mathcal{A})$ não é sobrejetor. Daí, $(\lambda I - \mathcal{A})$ não é bijetor e, consequentemente, não é invertível. Portanto, $\rho(\mathcal{A}) = \emptyset$ ou equivalentemente $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C}$.

Com o exemplo anterior, vemos que existência e unicidade de solução para um P.V.I. não são suficientes para garantir que o operador associado ao problema gere algum C_0 -semigrupo. Contudo, sempre que tivermos existência e unicidade de solução para o problema (4.1), com $u_0 \in \mathcal{D}_A$, estaremos lidando em algum sentido com geradores de semigrupos, conforme será mostrado no seguinte teorema.

Teorema 4.9. *Seja $A : \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow X$ um operador fechado. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) *Existe uma única solução do problema abstrato de Cauchy descrito em (4.1) para cada $x \in \mathcal{D}_A$.*
- (ii) *O operador $A_1 := A|_{X_1}$ em $X_1 := (\mathcal{D}_A, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_A})$, cujo domínio é $\mathcal{D}_{A_1} = \{x \in X_1 : Ax \in X_1\}$, definido por $A_1(x) = Ax$, para todo $x \in \mathcal{D}_{A_1}$, é o gerador de um C_0 -semigrupo sobre o espaço de Banach X_1 .*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii). Seja $u(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}_+, X)$ a única solução do problema abstrato de Cauchy com condição inicial $x \in X_1$ e defina

$$T_1(t)x := u(t, x), \quad \forall t \geq 0.$$

A unicidade da solução implica que cada $T_1(t)$ é um operador linear em X_1 satisfazendo:

- $T_1(0) = I_{X_1}$;
- $T_1(t + s) = T_1(t)T_1(s)$. $\forall t, s \geq 0$. Com efeito, chamemos

$$\eta(t) = u(t + s, x)$$

e

$$\xi(t) = u(t, u(s, x)).$$

Quando t assume o valor 0, obtemos

$$\eta(0) = u(s, x), \quad \text{e} \quad \xi(0) = u(0, u(s, x)) = u(s, x).$$

Por $u(t)$ ser solução do P.V.I. descrito em (4.1), conclui-se que $\eta(t)$ e $\xi(t)$ também são soluções de tal problema, mas pela unicidade da solução deduzimos que $\eta(t) = \xi(t)$, ou seja,

$$u(t + s, x) = u(t, u(s, x))$$

e, portanto,

$$T_1(t + s) = T_1(t)T_1(s).$$

Além disso $T_1(\cdot)x \in C^1(\mathbb{R}_+, X)$ e satisfaz

$$\frac{d}{dt}T_1(t)x = AT_1(t)x.$$

Ainda, por $T_1(t)x$ ser solução, temos que $t \mapsto T_1(t)x$ é contínua de $\mathbb{R}_+$ no espaço de Banach X_1 , pois, para todo $x \in X_1$, $T_1(t)x \in \mathcal{D}_A$, ou seja, $T_1(t)x \in X_1$.

Agora, resta-nos mostrar que $T_1(t)x \in \mathcal{B}(X_1)$ para todo $t > 0$. Para isso, definimos um operador linear φ por

$$\begin{aligned} \varphi: X_1 &\longrightarrow C([0, t], X_1) \\ x &\longrightarrow \varphi(x) := T_1(\cdot)x. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Afirmção 1. φ é fechado.

De fato, sejam $x_n \rightarrow x$ em X_1 e $\varphi(x_n) \rightarrow f$ em $C([0, t], X_1)$. Da equação diferencial em (4.1), para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$T_1(s)x_n = x_n + \int_0^s AT_1(r)x_n dr$$

e, portanto, quando $n \rightarrow \infty$, temos

$$f(s) = x + \int_0^s Af(r)dr, \text{ para } s \in [0, t].$$

Defina

$$f^*(s) := \begin{cases} T_1(s-t)f(t), & \text{para } s > t \\ f(s), & \text{para } 0 \leq s \leq t. \end{cases} \quad (4.4)$$

Note que f^* é solução do problema (4.1). Realmente,

- $\frac{d}{ds}f^*(s) = Af^*(s)$, pois

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}f^*(s) &= \begin{cases} AT_1(s-t)f(t) + 0 \cdot T_1(s-t) & \text{para } s > t \\ Af(s) & \text{para } 0 \leq s \leq t \end{cases} \\ &= Af^*(s). \end{aligned} \quad (4.5)$$

- $f^*(0) = f(0) = x + \int_0^0 Af(r)dr = x$.

Pela unicidade da solução, temos $f^*(s) = T_1(s)x$ para todo $s \geq 0$, ou seja, $f = \varphi(x)$. Isso conclui a prova de que φ é fechado.

Como X_1 e $C([0, t], X_1)$ são espaços de Banach, usando o Teorema do Gráfico Fechado, concluímos que φ é limitado em X_1 , mostrando que $T_1(t)x \in \mathcal{B}(X_1)$ para todo $t > 0$.

Identificaremos neste último passo o gerador $(B, \mathcal{D}(B))$ do semigrupo $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ com o operador $(A_1, \mathcal{D}_{A_1})$. Para tanto, vamos mostrar primeiro que:

$$AT_1(t)x = T_1(t)Ax, \quad \forall x \in \mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A^2}. \quad (4.6)$$

De fato, dado $x \in \mathcal{D}_{A_1}$, se definimos

$$f(t) := x + \int_0^t T_1(s)Axd s, \quad (4.7)$$

obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(t) &= T_1(t)Ax \\ &= Ax + \int_0^t AT_1(s)Axd s \\ &= Af(t).\end{aligned}\tag{4.8}$$

Além disso, $f(0) = x$. Devido à unicidade da solução, obtemos $f(t) = T_1(t)x$ e

$$AT_1(t)x = Af(t) = \frac{d}{dt}f(t) = T_1(t)Ax,\tag{4.9}$$

como queríamos provar.

Se $x \in \mathcal{D}_{A^2}$, então $x \in \mathcal{D}_{A_1}$ e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T_1(t)x - x) = Ax,\tag{4.10}$$

e por (4.6), tem-se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} A \frac{1}{t}(T_1(t)x - x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T_1(t)Ax - Ax) = A^2x,\tag{4.11}$$

em relação a norma do espaço X . As igualdades em (4.10) e (4.11) implicam que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T_1(t)x - x) = Ax,$$

em relação à norma do gráfico $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_A}$, pois como

$$\left\| \frac{T_1(t)x - x}{t} - Ax \right\|_{\mathcal{D}_A} = \underbrace{\left\| \frac{T_1(t)x - x}{t} - Ax \right\|_X}_{(I)} + \underbrace{\left\| \frac{AT_1(t)x - Ax}{t} - A^2x \right\|_X}_{(II)},\tag{4.12}$$

fazendo $t \rightarrow 0^+$ na equação (4.12) temos que $(I) \rightarrow 0$ e $(II) \rightarrow 0$, donde

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{T_1(t)x - x}{t} - Ax \right\|_{\mathcal{D}_A} = 0.$$

Assim concluímos que $A_1 \subset B$. Assumamos agora que $x \in \mathcal{D}_B$, isto é, que o limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T_1(t)x - x)$ existe no sentido da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_A}$. Então, o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} A \frac{1}{t}(T_1(t)x - x)$$

existe com respeito a norma $\|\cdot\|_X$, donde podemos concluir que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T_1(t)x - x) = Ax$ com respeito a norma $\|\cdot\|_X$. Como A é fechado, segue pelo Teorema do Gráfico Fechado que A é contínuo, o que implica $Ax \in \mathcal{D}_A$ e, portanto, $x \in \mathcal{D}_{A^2} = \mathcal{D}_{A_1}$.¹

(ii) $\Rightarrow$ (i). Seja $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em X_1 gerado por A_1 . Definindo

$$u(t, x) := T_1(t)x, \text{ para } x \in X_1,$$

verificaremos que $u(\cdot, x)$ soluciona o problema (4.1) e que essa solução é única. Veja que

¹ $\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A^2}$. Com efeito, se $x \in \mathcal{D}_{A_1}$ significa que $Ax \in X_1$, isto é, $Ax \in (\mathcal{D}_A, \|\cdot\|_A)$, logo $A(Ax)$ está bem definido e $x \in \mathcal{D}_{A^2}$. A inclusão no outro sentido é análoga.

- $u(\cdot, x) \in C(\mathbb{R}_+, X)$, pois $T_1(\cdot)x$ é fortemente contínuo.
- $Au(\cdot, x) \in C(\mathbb{R}_+, X)$, pois sendo A um operador fechado entre espaços de Banach, a continuidade de A é garantida pelo Teorema do Gráfico Fechado. Como $u(\cdot, x) \in C(\mathbb{R}_+, X)$, temos a continuidade de $Au(\cdot, x)$.

Portanto, usando o item (b) do Teorema 2.20, obtemos:

$$\int_0^t u(s, x)ds = \int_0^t T_1(s)xds \in \mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A^2}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} A \left(\int_0^t u(s, x)ds \right) &= A_1 \int_0^t u(s, x)ds = A_1 \int_0^t T_1(s)ds \\ &= T_1(t)x - x = u(t, x) - x. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Isso fornece

$$u(t, x) = x + \int_0^t Au(s, x)ds,$$

mostrando com isso que $u(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}_+, X)$ e

$$\frac{d}{dt}u(t, x) = Au(t, x).$$

Portanto, $u(t, x)$ é uma solução do problema descrito em (4.1). Ademais, tal solução é única. Com efeito, seja $u(\cdot)$ uma solução do problema (4.1) com condição inicial $x = 0$ e defina

$$f(t) := \int_0^t u(s)ds.$$

Então, $f(t) \in \mathcal{D}_A$ e com isso tem sentido avaliar A em $f(t)$, obtendo

$$Af(t) = \int_0^t Au(s)ds = \int_0^t \frac{d}{ds}u(s)ds = u(t) \in \mathcal{D}_A.$$

Concluimos que $Af(t) \in \mathcal{D}_A$ e, portanto, $f(t) \in \mathcal{D}_{A^2}$ para todo $t \geq 0$ e

$$\frac{d}{dt}f(t) = u(t) = Af(t).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}Af(t) = Au(t) = A \left(\frac{d}{dt}f(t) \right) = A^2(f(t)).$$

Isso mostra que $f \in C^1(\mathbb{R}_+, X_1)$.

Como $f(t) \in \mathcal{D}_{A^2}$, então $f(t) \in \mathcal{D}_{A^1}$ e $Af(t)$ é a imagem por A de um elemento do domínio de A_1 . Portanto,

$$Af(t) = A_1f(t), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Consequentemente

$$\frac{d}{dt}f(t) = A_1f(t).$$

Como $f(0) = 0$, segue que $f \equiv 0$ e, por conseguinte, $u \equiv 0$. Quando o dado inicial for diferente de 0, basta proceder como na Etapa 2 da demonstração da Proposição 4.4 para garantir a unicidade da solução. $\square$

Apenas existência e unicidade de solução não são suficientes para garantir que o problema (4.1) associado ao operador fechado A seja regido por um C_0 -semigrupo, precisamos exigir além disso que $\rho(A) \neq \emptyset$. Essas três condições fornecem o conceito de *boa colocação* do problema (4.1). No próximo resultado, algumas equivalências referentes a esse conceito serão exibidas. Antes, apresentamos uma definição que será útil para sua prova.

Definição 4.10. O **limite espectral** associado a qualquer operador linear A é dado por:

$$s(A) := \sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Teorema 4.11. *Seja $A : \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow X$ um operador fechado. Para o problema abstrato de Cauchy associado a A :*

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} &= Au(t), \quad \forall t \geq 0, \\ u(0) &= u_0 = x, \end{cases} \quad (4.14)$$

consideramos a seguinte condição de existência e unicidade:

$$\text{Para cada } u_0 \in \mathcal{D}_A, \text{ existe uma única solução } u(\cdot, x) \text{ de (4.14).} \quad (4.15)$$

Então as seguintes propriedades são equivalentes:

- (a) A gera um semigrupo fortemente contínuo.
- (b) A satisfaz (4.15) e $\rho(A) \neq \emptyset$.
- (c) A satisfaz (4.15) e existe uma sequência $\lambda_n \rightarrow \infty$ tal que as imagens $(\lambda_n - A)\mathcal{D}_A$ são iguais a X para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (d) A satisfaz (4.15), tem domínio denso em X e para cada sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_A$ satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} u(t, x_n) = 0$ uniformemente em intervalos compactos $[0, t_0]$.

Demonstração. As implicações (a) $\Rightarrow$ (b), (a) $\Rightarrow$ (c) e (a) $\Rightarrow$ (d) seguem das propriedades anteriormente estudadas sobre geradores de semigrupos, em particular, da Proposição 4.2.

Para provar as outras implicações, assumimos que (4.15) vale e consideramos o operador A_1 em X_1 como foi definido no Teorema 4.9.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Se $\lambda \in \rho(A)$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_A &= \{x \in X : (\lambda - A)^{-1}x \in \mathcal{D}_{A_1}\} \\ &\text{e} \\ Ax &= (\lambda - A)A_1(\lambda - A)^{-1}x, \quad \forall x \in \mathcal{D}_A, \end{aligned}$$

pois se $(\lambda - A)^{-1}x \in \mathcal{D}_{A_1}$ significa que $(\lambda - A)^{-1}x \in X_1$ e $A(\lambda - A)^{-1}x \in X_1$ de tal forma que

$$A_1(\lambda - A)^{-1}x = A(\lambda - A)^{-1}x = (\lambda - A)^{-1}Ax.$$

Portanto, $(A, \mathcal{D}_A)$ e $(A_1, \mathcal{D}_{A_1})$ são similares (veja Exemplo 2.32). Já que $(A_1, \mathcal{D}_{A_1})$ é o gerador de um C_0 -semigrupo, segundo o Teorema 4.9, o mesmo vale para $(A, \mathcal{D}_A)$, concluindo que (a) ocorre.

(c) $\Rightarrow$ (b): Com efeito, podemos encontrar $\lambda > s(A_1)$ (limite espectral de A_1 - veja Definição 4.10) tal que $(\lambda - A)\mathcal{D}_A = X$. Assumamos que $Ax = \lambda x$ para algum $x \in \mathcal{D}_A$, então x pertence a $\mathcal{D}_{A^2} = \mathcal{D}_{A_1}$ e, portanto, $x = 0$, já que $\lambda \in \rho(A_1)$. Isso mostra que o operador $\lambda - A$ é injetivo e $\lambda \in \rho(A)$, donde $\rho(A) \neq \emptyset$.

(d) $\implies$ (a): As hipóteses em (d) implicam a existência de operadores limitados $T(t) \in \mathcal{B}(X)$ satisfazendo

$$T(t)x := u(t, x), \text{ para cada } x \in \mathcal{D}_A.$$

Além disso, afirmamos que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|T(t)\| < \infty.$$

Por contradição, vamos assumir que existe uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ tal que

$$\|T(t_n)\| \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, é possível escolher $(x_n) \subset \mathcal{D}_A$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \text{e} \quad \|T(t_n)x_n\| \geq 1.$$

Isso contradiz a hipótese em (d), já que $u(t_n, x_n) = T(t_n)x_n$. Portanto $\|T(t)\|$ é uniformemente limitado para todo $t \in [0, 1]$. Como $t \mapsto T(t)x$ é uma aplicação contínua para cada $x \in \mathcal{D}_A$ e $\mathcal{D}_A$ é denso em X , usando o Lema A.5 do Apêndice A, obtemos a continuidade de $t \mapsto T(t)x$ para cada $x \in X$.

Finalmente, a unicidade da solução $u(\cdot, x)$ implica que

$$T(t+s) = T(t)T(s)x, \quad \forall x \in \mathcal{D}_A \text{ e } \forall t, s \geq 0.$$

Assim é possível concluir que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo sobre X , cujo gerador, que denotamos por B , certamente satisfaz $A \subset B$. Além disso, $\mathcal{D}_A$ permanece invariante pelo semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Pela Proposição 2.12, $\mathcal{D}_A$ é um *core* de B . Pelo fato de A ser um operador fechado, obtemos $A = B$. $\square$

Intuitivamente, a propriedade (d) do último teorema expressa as condições para que um problema abstrato de Cauchy possua boa colocação, tais condições são:

Existência + unicidade + dependência contínua dados iniciais.

Portanto, introduz-se um nome para tal propriedade como segue.

Definição 4.12. O problema abstrato de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0 = x, \end{cases}$$

associado ao operador fechado $A : \mathcal{D}_A \subset X \rightarrow X$ é chamado **bem colocado** se a condição (d) do Teorema 4.11 for verificada.

Esta definição para problema bem colocado não é a única possível. De fato, usando as equivalências do Teorema 4.11, obtemos uma outra forma de definir a boa colocação de um problema abstrato de Cauchy, conforme expressamos a seguir.

Definição 4.13. O problema (4.1) é dito **bem colocado** se $\rho(A) \neq \emptyset$ e, para cada $u_0 \in \mathcal{D}_A$, existe uma única solução $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{D}_A$ de (4.1) em $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, X)$.

Com base na Definição 4.13, enunciaremos o resultado que encerrará esta seção, com o qual conclui-se que a propriedade mais importante do gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo, do ponto de vista das aplicações, é o fato de que o problema abstrato de Cauchy associado a tal gerador está bem colocado. Mostra-se, dessa forma, a teoria de semigrupos como ferramenta para o estudo da boa colocação de problemas abstratos de Cauchy, pelo menos para o caso em que o dado inicial pertence ao domínio do operador A , ou seja, para soluções clássicas.

Corolário 4.14. *Para um operador fechado $A : \mathcal{D}_A \subset X \longrightarrow X$, o problema abstrato de Cauchy associado a A está bem colocado se, e somente se, A gera um semigrupo fortemente contínuo sobre X .*

Demonstração. A demonstração deste corolário segue como consequência do Teorema 4.11. □

4.2 Aplicação da teoria à equação do calor homogênea

Para finalizar este trabalho, abordaremos uma equação diferencial parcial bem conhecida que será colocada como um problema abstrato de Cauchy com condições de fronteira, a saber, a equação do calor. Para tal equação, evidenciaremos resultados de existência e unicidade de solução, e no caso em que a condição inicial pertencer ao domínio do operador associado ao problema, será possível estudar a dependência contínua da solução também via teoria de semigrupos lineares.

Observação 4.15. A dedução do modelo a ser apresentado não será exibida aqui. Porém, ao leitor interessado por essa abordagem, indicamos a referência [24, Capítulo 4].

A obtenção de soluções para a equação do calor pelo método de separação de variáveis é vista em qualquer curso básico sobre equações diferenciais parciais, mas muitas vezes sem a preocupação de tratar sobre a unicidade e a dependência contínua. Por tal razão, mostramos nesta seção, como pode ser empregada a teoria dos C_0 -semigrupos para tratar equações como essa

Vamos introduzir a equação do calor homogênea, cuja abordagem é baseada nas referências [3, 23, 24].

A equação do calor é um modelo matemático que representa a difusão do calor em sólidos sobre certas considerações. Ela tem sido muito estudada tanto teórica como computacionalmente. É considerada o exemplo mais simples de uma equação diferencial parcial de segunda ordem, do tipo parabólico. Esta equação e as suas variações ocorrem em vários fenômenos físicos que envolvem difusão. Por essa razão, também é conhecida como equação de difusão térmica. As condições de fronteira assumidas no modelo dependerão da situação física envolvida. Abordaremos aqui a equação do calor com condição de fronteira de Dirichlet, o que significa que manteremos a temperatura da fronteira fixada.

Vamos considerar Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, limitado, suficientemente suave,

com fronteira Γ bem regular.² Considere o seguinte problema com condição de Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{em } (0, \infty) \times \Omega \\ u = 0 & \text{em } (0, \infty) \times \Gamma \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.16)$$

onde u representa a temperatura em Ω em função da variável espacial $x \in \Omega$ e do tempo $t \geq 0$, e

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

designa o Laplaciano de u com relação a variável espacial x .

Dizemos que (4.16) é um problema de evolução devido à dependência em relação a t , que se relaciona precisamente com a evolução da temperatura ao longo do tempo.

A fim de resolver o problema (4.16) e obter resultados de boa colocação, podemos considerar u como uma função definida em $[0, \infty)$ com valores num espaço de Hilbert H , onde H é um espaço de funções que dependem só de x . Aqui, consideraremos $H = L^2(\Omega)$. Quando escrevemos $u(t)$, para algum $t \geq 0$, nos referimos a um elemento de H .

O operador associado é $A = \Delta$. Portanto, $\mathcal{D}_A$ deve ser um subespaço de $L^2(\Omega)$ composto de funções pelo menos duas vezes diferenciáveis. Se escolhermos $\mathcal{D}_A$ de forma que as funções a este conjunto pertencentes sejam duas vezes diferenciáveis no sentido fraco, como $\mathcal{D}_A = H^2(\Omega)$, então obteremos soluções fracas do problema (4.16), cujo dado inicial é u_0 . Porém, para ser satisfeita a condição de que a temperatura é 0 em Γ , necessitamos considerar $\mathcal{D}_A = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Em virtude do que foi exposto acima, estudaremos a existência e unicidade de solução da equação (4.16) considerando o dado inicial u_0 nos seguintes conjuntos:

- (i) $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e
- (ii) $L^2(\Omega)$.

Caso 1. $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Observação 4.16. Neste caso, encontraremos soluções clássicas, pois estamos considerando que o dado inicial pertence ao domínio do operador A , que é um subconjunto de H .

Consideramos $H = L^2(\Omega)$ e $A : \mathcal{D}_A \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, em que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_A &= H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ Au &= \Delta u, \quad u \in \mathcal{D}_A \end{aligned} \quad (4.17)$$

Assim, podemos colocar o problema (4.16) na forma abstrata dada por

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Para garantir que o problema (4.18) possua uma única solução, basta mostrar que Δ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo. Para conseguir isso, podemos caracterizar tal

²Isso significa que em Γ pelo menos todas as derivadas de u que aparecem em 4.16 existem e são contínuas, embora talvez não existam ali certas derivadas superiores.

operador usando algum dos teoremas de geração desenvolvidos no Capítulo 3. Pelo fato de ser mais simples a verificação das hipóteses, faremos uso do Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 3.15).

Com efeito,

- (i) Δ está densamente definido em $L^2(\Omega)$. De fato, seja $\mathfrak{D}(\Omega)$ o espaço das funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis que possuem suporte compacto em Ω . Como $\mathfrak{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $\mathfrak{D}(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, temos que $\mathcal{D}_\Delta = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$.
- (ii) Para verificar que Δ é um operador não limitado, consideremos o seguinte problema elíptico de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta \omega = \lambda \omega & \text{em } \Omega \\ \omega = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.19)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado e tem fronteira suave e o seguinte resultado auxiliar que pode ser analisado em [13].

Lema 4.17. *Associado ao problema (4.19) existe uma base ortonormal $\{\omega_n\}$ de $L^2(\Omega)$ e uma sequência de números reais positivos (λ_n) , tal que $\lambda_n \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$, e*

- (a) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$;
- (b) $\omega_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$;
- (c) $-\Delta \omega_n = \lambda_n \omega_n$ em Ω .

Consideremos a sequência de autofunções $\{\omega_n\}$ de $-\Delta$ mencionada no Lema 4.17. Evidentemente $\omega_n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e pelo Teorema 4.17, temos

$$-\Delta \omega_n = \lambda_n \omega_n, \quad \|\omega_n\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \text{com } \lambda_n \rightarrow +\infty \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \quad (4.20)$$

Note que

$$\begin{aligned} \|A\omega_n\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |\Delta \omega_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |-\Delta \omega_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |\lambda_n \omega_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Daí,

$$\|A\omega_n\|_{L^2(\Omega)} = \lambda_n \|\omega_n\|_{L^2(\Omega)} = \lambda_n. \quad (4.22)$$

Portanto,

$$\frac{\|A\omega_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|\omega_n\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\lambda_n}{1} = \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad (4.23)$$

quando $n \rightarrow +\infty$, de onde segue que Δ é ilimitado.

- (iii) Δ é dissipativo, pois usando a definição do produto interno em $L^2(\Omega)$, a condição de que a temperatura é 0 na fronteira e o Lema (B.15) do Apêndice B, temos que

$$(\Delta u, u)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \Delta u u = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx = -\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \text{ para } u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Portanto,

$$(\Delta u, u)_{L^2(\Omega)} = -\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0,$$

de onde se conclui que Δ é um operador dissipativo.

- (iv) Finalmente, mostraremos que $\text{Im}(I - \Delta) = L^2(\Omega)$. Podemos provar isso, mostrando que para cada $f \in L^2(\Omega)$ o problema $u - \Delta u = f$ é satisfeito para alguma função $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Para tanto, será necessário usar o Lema de Lax-Milgram (Lema A.15). Definamos a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ como

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv) dx, \text{ para quaisquer } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Afirmamos que $a(\cdot, \cdot)$ é contínua e coerciva. De fato, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.21) e pela Desigualdade de Poincaré (Proposição B.17), temos

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| dx + \int_{\Omega} |u| |v| dx \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq c \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

que mostra a continuidade de $a(\cdot, \cdot)$. Além disso,

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

mostrando que $a(\cdot, \cdot)$ é coerciva.

Usando o Lema de Lax-Milgram, podemos garantir que existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $a(u, v) = (f, v)_{L^2}$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, ou seja,

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv) dx = \int_{\Omega} f v dx, \text{ para toda } v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.24)$$

Daí e da regularidade do problema de Dirichlet (veja Teorema (B.13)), resulta que $u \in H^2(\Omega)$. Logo, usando o Lema B.15 e o fato de que em Γ a temperatura é 0, vemos que existe uma única $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ que satisfaz a equação $u - \Delta u = f$, obtendo assim o desejado.

Pelos itens (i), (iii) e (iv), concluímos que Δ é um operador densamente definido e maximal dissipativo. Logo, pelo Teorema de Lumer-Phillips, Δ gera um C_0 -semigrupo de contrações. Pelo Corolário 2.21, concluímos que Δ é um operador linear fechado.

Como Δ é o operador associado ao problema abstrato de Cauchy dado em (4.18), pelo Corolário 4.14, concluímos que existe uma única solução (clássica) para a equação do calor, sempre que $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, e que tal solução depende continuamente das condições iniciais. Isso significa que o Problema 4.18 está bem colocado.

No caso seguinte, vamos a estudar existência e unicidade de solução considerando que o dado inicial pertence a $H = L^2(\Omega)$. Na verdade, usaremos a caracterização do operador de Laplace para mostrar que, mesmo quando a condição inicial pertence ao espaço todo, é possível solucionar de maneira única a equação do calor, no sentido clássico.

Caso 2. $u_0 \in L^2(\Omega)$.

O próximo resultado garante que podemos estabelecer pelo menos existência e unicidade de solução da equação (4.16) considerando a condição inicial no espaço $L^2(\Omega)$.

Teorema 4.18. *Se $u_0 \in L^2(\Omega)$, então existe uma única solução u de (4.16) tal que*

$$u \in C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap C^1((0, \infty); L^2(\Omega)) \cap C((0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)). \quad (4.25)$$

Demonstração. Considere $A : \mathcal{D}_A \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, em que

$$\begin{cases} \mathcal{D}_A = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \\ Au = \Delta u, \quad u \in \mathcal{D}_A. \end{cases} \quad (4.26)$$

Claramente, como

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot u = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u = -|u|_{H^1(\Omega)}^2 \leq 0, \quad u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

temos que A é dissipativo. Além disso, A é maximal dissipativo, já que existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(I - A)u = u - \Delta u = f,$$

para cada $f \in L^2(\Omega)$. Pelo Teorema de regularidade (Teorema B.13), $u \in H^2(\Omega)$. Assim, $\text{Im}(I - A) = H$.

Afirmção: O operador de Laplace é auto-adjunto.

De fato, como $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, temos como consequência do Teorema de Representação de Riesz (Teorema B.9) que

$$\mathcal{D}_{A^*} = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \exists c > 0 \text{ tal que } \left| \int_{\Omega} u \Delta v \right| \leq c \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in \mathcal{D}_A \right\}.$$

Note que $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_{A^*}$. Com efeito, para $u \in \mathcal{D}_A$ e $v \in \mathcal{D}_A$, pelo Lema B.15, temos que

$$\int_{\Omega} u \Delta v = \int_{\Omega} v \Delta u. \quad (4.27)$$

Então,

$$\left| \int_{\Omega} u \Delta v \right| = \left| \int_{\Omega} v \Delta u \right| \leq \int_{\Omega} |v \Delta u|$$

e da Desigualdade de Hölder segue que

$$\left| \int_{\Omega} u \Delta v \right| \leq \underbrace{\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}}_c \|v\|_{L^2(\Omega)},$$

mostrando que $u \in \mathcal{D}_{A^*}$, uma vez que v foi escolhida arbitrariamente.

Ademais, por (4.27), temos

$$(u, Av)_{L^2(\Omega)} = (u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u \Delta v = \int_{\Omega} v \Delta u = \int_{\Omega} \Delta uv = (\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} = (Au, v)_{L^2(\Omega)},$$

de onde segue que $A = \Delta$ é um operador simétrico.

Para concluir que A é auto-adjunto, ou seja, que $A = A^*$, devemos mostrar que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^*}$. Portanto, resta-nos verificar que $\mathcal{D}_{A^*} \subset \mathcal{D}_A$. Com efeito, considere o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega = \Gamma. \end{cases} \quad (4.28)$$

Defina

$$\begin{aligned} G : L^2(\Omega) &\rightarrow L^2(\Omega) \\ f &\mapsto G(f) = u, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde $u \in H_0^1(\Omega)$ é a única solução fraca do problema (4.28). Então,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \text{ para toda } \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (4.30)$$

Pelo Teorema B.13, temos que $u \in H^2(\Omega)$. Por conseguinte, $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = \mathcal{D}_A$,

$$\text{Im}(I - \Delta) = L^2(\Omega),$$

e

$$G = (I - \Delta)^{-1}.$$

Note também que G é um operador simétrico, pois para $f, g \in L^2(\Omega)$, existem $u, v \in L^2(\Omega)$ tais que

$$G(f) = u, \text{ e } G(g) = v. \quad (4.31)$$

Daí,

$$\int_{\Omega} f \varphi = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi \text{ para toda } \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (4.32)$$

e

$$\int_{\Omega} g \psi = \int_{\Omega} \nabla v \nabla \psi + \int_{\Omega} v \psi \text{ para toda } \psi \in H_0^1(\Omega). \quad (4.33)$$

Usando as igualdades dadas em (4.31) nas equações (4.32) e (4.33), tem-se

$$\int_{\Omega} f \varphi = \int_{\Omega} \nabla(G(f)) \nabla \varphi + \int_{\Omega} G(f) \varphi \text{ para toda } \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

e

$$\int_{\Omega} g \psi = \int_{\Omega} \nabla(G(g)) \nabla \psi + \int_{\Omega} G(g) \psi \text{ para toda } \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, para $\varphi = G(g)$ e $\psi = G(f)$, obtemos

$$\int_{\Omega} f G(g) = \int_{\Omega} \nabla(G(f)) \nabla G(g) + \int_{\Omega} G(f) G(g)$$

e

$$\int_{\Omega} g G(f) = \int_{\Omega} \nabla(G(g)) \nabla G(f) + \int_{\Omega} G(g) G(f),$$

que implica

$$(G(f), g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} G(f) g = \int_{\Omega} f G(g) = (f, G(g))_{L^2(\Omega)}.$$

Portanto, a simetria de G está garantida. Como $\mathcal{D}_A = L^2(\Omega)$ e G é limitado, segue da Observação 1.46 que G é um operador linear auto-adjunto.

Fixando agora $w \in L^2(\Omega)$, seja $v \in \mathcal{D}_A$ tal que $v = G(w)$. Logo, $G^{-1}(v) = w$, ou seja,

$$(I - A)v = w.$$

Seja $u \in \mathcal{D}_{A^*}$ e considere $f = u - A^*u$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v &= \int_{\Omega} (u - A^*u)v = \int_{\Omega} [uv - (A^*u)v] \\ &= \int_{\Omega} [uv - uAv] \\ &= \int_{\Omega} (v - Av)u, \end{aligned}$$

donde

$$\int_{\Omega} f v = \int_{\Omega} (I - A)vu = \int_{\Omega} wu.$$

Desse modo,

$$\int_{\Omega} G(f)w = \int_{\Omega} fG(w) = \int_{\Omega} f v = \int_{\Omega} u w \text{ para toda } u \in \mathcal{D}_{A^*}.$$

Daí,

$$\int_{\Omega} [G(f) - u]w = 0, \text{ para toda } u \in \mathcal{D}_{A^*}.$$

Usando o Lema de Du Bois Raymond (veja Teorema B.14 - Apêndice B), segue que

$$G(f) - u = 0 \text{ q.t.p em } \Omega,$$

ou seja,

$$G(f) = u \text{ q.t.p em } \Omega,$$

que implica que u é a única solução do problema (4.28) e, portanto, $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}_A$. Logo,

$$\mathcal{D}_{A^*} \subset \mathcal{D}_A \tag{4.34}$$

e $A = \Delta$ é um operador auto-adjunto, isto é, $\Delta = \Delta^*$.

Portanto, como o operador de Laplace é auto-adjunto, valem os Teoremas 3.22 e 3.23. Assim, pelo Teorema 3.22, existe uma única u que é solução do Problema 4.16 tal que

$$u \in C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap C^1((0, \infty); L^2(\Omega)) \cap C((0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

mostrando que (4.25) vale. Ademais, pelo Teorema 3.23,

$$u \in C^k((0, \infty); \mathcal{D}_{A^l}), \quad (4.35)$$

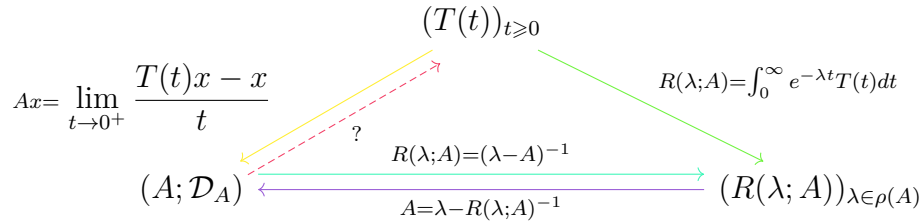
para quaisquer inteiros não negativos k e l .

□

Como esperávamos, foi possível estabelecer existência e unicidade de solução clássica para a equação do calor, nos Casos 1 e 2, estudando as propriedades do operador Δ . Em particular, vimos que, quando $u_0 \in \mathcal{D}_A$, o problema de valor inicial associado está bem colocado.

Nesta parte do texto registramos de maneira condensada as conclusões obtidas da teoria que foi desenvolvida.

Evidenciar a relação que existe entre o semigrupo, seu gerador infinitesimal e seu operador resolvente e com isso, enxergar a utilidade do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 3.6), converteu-se em uma das motivações deste trabalho. Essa relação encontra-se sintetizada pelo seguinte diagrama.



Com o estudo realizado, concluímos que um dos problemas fundamentais da teoria de semigrupos é encontrar uma maneira de nos conduzir neste diagrama desde o gerador até o semigrupo. Mais precisamente, buscamos caracterizar os operadores lineares A de forma que sejam geradores de algum C_0 -semigrupo. Isso nos permite obter as soluções de problemas de valor inicial associados ao operador A . Este problema foi resolvido satisfatoriamente com os Teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips (obtendo C_0 -semigrupos de contração) e Feller-Miyadera-Phillips (obtendo C_0 -semigrupos quaisquer).

No que se refere ao Teorema de Hille-Yosida, podemos concluir que a sua importância reside no fato de que, por meio dele, pode-se estudar as soluções de problemas de valor inicial do tipo

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), & \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

pois tal resultado fornece as condições necessárias e suficientes para que o operador A (mesmo sendo ilimitado) seja o gerador de um C_0 -semigrupo de contrações, o qual concede a solução do problema.

A maneira como foram caracterizados os geradores de semigrupos fortemente contínuos por meio do Teorema de Hille-Yosida não é sempre a mais conveniente, pois infelizmente,

mesmo no caso de problemas relativamente simples, é muito difícil verificar todas as condições exigidas por este. É nesse sentido que o Teorema de Lumer-Phillips ganha sua importância, pois este é uma reformulação do Teorema de Hille-Yosida, que fornece uma caracterização mais simples para tais geradores. Por outro lado, o Teorema de Feller-Miyadera-Phillips surge para fornecer uma caracterização dos geradores de semigrupos fortemente contínuos quaisquer, não somente dos que são de contração.

Por fim, destacamos que uma das aplicações mais úteis e interessantes da teoria de semigrupos é a obtenção de condições necessárias e suficientes para que um problema do tipo (1.17) esteja bem colocado, pelo menos para o caso em que o dado inicial pertence ao domínio do operador envolvido, uma vez que dessa forma pode-se obter informações sobre a estabilidade do sistema relacionado ao problema.

Referências

- [1] Goldstein J. A. *Semigroups of linear operators & applications*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2017. Second edition of [MR0790497], Including transcriptions of five lectures from the 1989 workshop at Blaubeuren, Germany.
- [2] Melo R. A. *A teoria de semigrupo aplicada às equações diferenciais parciais*. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Campina Grande, 2006.
- [3] Melo R. A. *A Teoria de Semigrupo Aplicada às Equações Diferenciais Parciais*. Universidade Federal de Campina Grande, 2006.
- [4] Pazy A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [5] Folland G. B. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.
- [6] Sinha K. B. and Srivastava S. *Theory of semigroups and applications*, volume 74 of *Texts and Readings in Mathematics*. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2017.
- [7] Bortolan M. C. *Notas de aula MTM 510002: Teoria de semigrupos e aplicações a EDP's*. Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2015.
- [8] Evans L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, second edition edition, 2010.
- [9] Maldonado A. D. *Integral de Lebesgue, Espaços de Sobolev e Aplicações*. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.
- [10] Kreyszig E. *Introductory functional analysis with applications*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
- [11] Caicedo J. F. *Cálculo avanzado. Introducción*. Universidad Nacional de Colombia, 2012.
- [12] Ciarlet P. G. *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013.

-
- [13] Figueiredo D. G. *Equações elípticas não lineares, 11° Colóquio Brasileiro de Matemática-Poços de Caldas*. 1977.
 - [14] Brezis H. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Masson, Paris, 1 edition, 1983.
 - [15] Brezis H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.
 - [16] Vrabie I. I. *C_0 -semigroups and applications*, volume 191. Elsevier, Amsterdam, 1 edition, 2003.
 - [17] Giles J.R. *Introduction to the Analysis of Metric Spaces*. Australian Mathematical Society Lecture Series. Cambridge University Press, 1987.
 - [18] Ezzinbi K. *Lectures notes in Functional Analysis and evolution equations*. Graduate Course delivered at AUST, Abudja, Nigeria, 2010.
 - [19] Engel K-J. and Nagel R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, volume 194 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000. With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafun, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt.
 - [20] Debnath L. and Mikusinski P. *Hilbert Spaces with Applications*. Elsevier Academic Press, third edition, 2005.
 - [21] Rivera J. E. M. *Estabilização de semigrupos e aplicações*. Série de Métodos Matemáticos, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.
 - [22] Kesavan S. *Topics in Functional Analysis and Applications*. New Age International, 2019.
 - [23] Palomino J. A. S., Cavalcanti M. M., and Cavalcanti V. N. D. *Semigrupos lineares e não lineares e aplicações*. Notas de Aula - Universidade Estadual de Maringá, 2016.
 - [24] Sozzo B. T. S. *Boa colocação para equações diferenciais via semigrupos lineares*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Londrina, 2018.

Resultados da teoria de Análise Funcional

Este trabalho tem como suporte a teoria de Análise Funcional, uma vez que seus principais elementos são os operadores lineares em espaços de Banach e a teoria referente a tais espaços. Por vezes usamos resultados e técnicas da teoria de Análise Funcional que não estão presentes no capítulo de preliminares, porém serão listados e referenciados neste apêndice para a conveniência do leitor.

Iniciamos esta exposição com a importante forma analítica do Teorema de Hahn-Banach. No que segue X denotará um espaço vetorial e X^* seu dual topológico. O referido resultado diz respeito à extensão de um funcional linear definido em um subespaço vetorial de X por um funcional linear definido em todo X .

Teorema A.1. (*Teorema Hahn Banach, [14, Teorema I.1]*) *Seja $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in X \quad e \quad \forall \lambda > 0, \quad (\text{A.1})$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X. \quad (\text{A.2})$$

Seja $G \subset X$ um subespaço linear e $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G.$$

Sob essas suposições, existe um funcional linear f definido sobre todo o espaço X que estende g , isto é, $g(x) = f(x), \forall x \in G$, e é tal que

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

Corolário A.2 ([14, Corolário I.2]). *Seja $G \subset X$ um subespaço vetorial. Se $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, então existe $f \in X^*$ que estende g e é tal que*

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leq 1}} |g(x)| = \|g\|_{G^*}. \quad (\text{A.3})$$

Corolário A.3 ([14, Corolário I.3]). *Para cada $x_0 \in X$, existe $f_0 \in X^*$ tal que*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad e \quad \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2.$$

O próximo teorema permite-nos representar qualquer funcional linear contínuo em um espaço de Hilbert como um elemento do espaço de Hilbert original, em termos do produto interno. A demonstração de tal resultado pode ser encontrada em [20, Teorema 3.7.7].

Teorema A.4 (Teorema de Representação de Riesz). *Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert. Dada $\varphi \in H^*$, existe um único $x \in H$ tal que:*

$$\varphi(y) = \langle x, y \rangle \text{ para todo } y \in H.$$

Além disso,

$$\|\varphi\|_{H^*} = \|x\|_H.$$

O objetivo do próximo resultado é facilitar a verificação da continuidade forte exigida por exemplo na definição de C_0 -semigrupo. As equivalências nele apresentadas são possíveis graças ao Princípio da Limitação Uniforme.

Lema A.5 ([19, Lema 5.2]). *Seja X um espaço de Banach e seja F uma função de um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ em $\mathcal{B}(X)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *F é contínuo para a topologia forte do operador, isto é, as aplicações $K \ni t \mapsto F(t)x \in X$ são contínuas para cada $x \in X$.*
- (ii) *F é uniformemente limitado sobre K e as aplicações $K \ni t \mapsto F(t)x \in X$ são contínuas para todo x em algum subconjunto denso D de X .*
- (iii) *F é contínua para a topologia de convergência uniforme em subconjuntos compactos de X , isto é, a aplicação*

$$K \times C \ni (t, x) \mapsto F(t)x \in X$$

é uniformemente contínua para cada conjunto compacto C em X .

Para concluir este apêndice, enunciaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, às vezes chamado Princípio da Contração de Banach, que garante a existência e a unicidade de um ponto fixo para qualquer aplicação contrativa em um espaço métrico completo, além de fornecer um método para computá-lo.

O teorema será apresentado no contexto de espaços métricos completos, portanto, é amplamente aplicável a uma série de situações que à primeira vista parecem não relacionadas. Em particular, é válido em espaços de Banach. Este resultado é usado em análise real, análise numérica e na teoria de equações diferenciais.

A seguir apresentamos conceitos preliminares para o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Definição A.6. Dado um conjunto não vazio X , um elemento $x \in X$ é chamado um **ponto fixo** de uma aplicação $T : X \rightarrow X$ se $T(x) = x$.

Observação A.7. (i) Uma aplicação $T : X \rightarrow X$ pode não ter, ter um, ou ter vários pontos fixos.

(i) Os pontos fixos de uma aplicação $T : X \rightarrow X$ são soluções da equação

$$(T - I)(x) = 0,$$

onde I é a aplicação identidade sobre X . Assim, um método para encontrar soluções de uma equação é encontrar os pontos fixos da aplicação associada.

Definição A.8. Dado um espaço métrico (X, d) , uma aplicação $T : X \rightarrow X$ é chamada **aplicação contrativa** ou **contração** se existe $0 < k < 1$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \text{ para todo } x, y \in X.$$

Teorema A.9. (Teorema do Ponto Fixo de Banach, [17, Teorema 5.4])

- (i) Uma aplicação contrativa T de um espaço métrico completo (X, d) nele mesmo possui um e só um ponto fixo.
- (ii) Dado qualquer $x \in X$, a sequência de iterações $T^n(x_0)$ converge ao ponto fixo de T , isto é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0) = x, \text{ para todo } x \in X.$$

A.1 Lema de Lax-Milgram

Os resultados a seguir foram extraídos majoritariamente de [12, Capítulo 6].

Definição A.10. Sejam $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $A : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k \rightarrow Y$ é **multilinear** ou **k -linear** de $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ em Y se é linear com respeito a cada variável $x_i \in X_i$, $1 \leq i \leq k$. Se $k = 2$ ou $k = 3$, dizemos que a aplicação é bilinear ou trilinear, respectivamente.

Se $Y = \mathbb{K}$ a aplicação multilinear é também conhecida como **funcional multilinear** ou **forma multilinear**.

Definição A.11. Um **funcional bilinear** ou **forma bilinear** φ sobre um espaço vetorial complexo ou real X é uma aplicação $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha \varphi(x_1, y) + \beta \varphi(x_2, y)$;
- (ii) $\varphi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha} \varphi(x, y_1) + \bar{\beta} \varphi(x, y_2)$

para quaisquer escalares α e β e quaisquer $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in X$.

Note que um funcional bilinear é linear com respeito à primeira variável e antilinear (ou conjugada linear) com respeito à segunda variável. Os funcionais bilineares sobre X formam um espaço vetorial.

Exemplo A.12. O produto interno sobre um espaço de Hilbert é um funcional bilinear.

Definição A.13. Seja X um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|$. Uma forma bilinear $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é simétrica quando $a(u, v) = a(v, u)$ para quaisquer $u, v \in X$.

Definição A.14. Seja X um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|$. Uma forma bilinear $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (simétrica ou não) é dita

- (i) **contínua** se existe uma constante C tal que

$$\|a(u, v)\| \leq C \|u\| \|v\| \text{ para quaisquer } u, v \in X;$$

- (ii) **coerciva** se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que:

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \text{ para todo } v \in X.$$

Dado um subespaço U de um espaço vetorial X , uma forma bilinear $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ e um funcional linear $\ell : X \rightarrow \mathbb{R}$ podemos considerar o seguinte problema variacional abstrato: encontrar um elemento $u \in U$ tal que

$$a(u, v - u) \geq \ell(v - u), \text{ para todo } v \in U. \quad (\text{A.4})$$

A seguir apresentamos um resultado conhecido como o Lema de Lax-Milgram, que garante tais problemas variacionais abstratos tem uma única solução.

Lema A.15 (Lema de Lax-Milgram, [12, Teorema 6.2-1]). *Sejam X um espaço de Hilbert, $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coerciva e $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então o seguinte problema variacional abstrato:*

“Encontrar um elemento $u \in V$ tal que $a(u, v) = \ell(v)$ para todo $v \in V$ ”,

tem uma e só uma solução, e a aplicação $\ell \in V^ \mapsto u \in V$ definida dessa maneira é linear e contínua.*

APÊNDICE B

Derivada fraca e espaços de Sobolev

As principais referências utilizadas para a elaboração deste apêndice foram [12], [20], [8] e [9].

Introduzimos a seguir uma família de espaços, definindo uns dos mais importantes exemplos de espaços de Banach, os **espaços de Lebesgue** L^p .

Definição B.1. Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Para cada $1 \leq p \leq \infty$, definimos o espaço $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ das funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ tais que

$$\int |f|^p d\mu < \infty.$$

$L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço vetorial com as seguintes operações:

- $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, para $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.
- $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$, para $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

E para cada $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, define-se a norma de f em $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde a tripla $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida.

Se ambas, sigma-álgebra e medida, forem bem estipuladas, poderemos denotar estes espaços simplesmente por $L^p(\Omega)$. Quando $p = \infty$, temos

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } |f(x)| \leq C, \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para alguma constante } C\}.$$

O estudo das equações diferenciais parciais envolve naturalmente espaços de funções que são definidos não apenas em termos das próprias funções, mas também de suas derivadas. Neste contexto, os **espaços de Sobolev** mostram-se muito mais convenientes. Porém antes de apresentá-los, introduziremos a noção de derivada parcial fraca de uma função, a qual tem um papel fundamental na definição destes espaços.

A seguir introduzimos a notação multi-índice para derivadas parciais de funções $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Seja $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Os operadores de derivadas parciais correspondentes às coordenadas de x são denotados por

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \partial_{ij} := \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \partial_{ijk} := \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \quad \text{etc.}$$

Os operadores de derivadas parciais de qualquer ordem são também denotados com a notação multi-índice da seguinte forma:

$$D^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um multi-índice, α_i é um número inteiro não negativo e

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Quando $\alpha = 0$, usaremos a convenção $D^0 v := v$.

A seguir, esclareceremos algumas notações a serem utilizadas adiante. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.

- (i) O símbolo $\mathfrak{D}(\Omega)$ denota o espaço das funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis que possuem $\text{Supp}(\varphi)^1$ compacto em Ω .

Observação B.2. É possível mostrar que $\mathfrak{D}(\Omega)$ é um subconjunto denso de $L^p(\Omega)$. Veja [22, Teorema 1.5.6]

- (ii) O símbolo $L^1_{Loc}(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $v|_K \in L^1(K)$, para qualquer subconjunto compacto K de Ω .
- (iii) Para qualquer inteiro $k \geq 1$, o símbolo $C^k(\Omega)$ denota o espaço de todas as funções que são k -vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω .

Para $k = 0$, escrevemos

$$C^0(\Omega) := C(\Omega).$$

- (iv) Usando o mesmo raciocínio, denota-se o conjunto das funções infinitamente continuamente diferenciáveis por

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega).$$

- (v) Para qualquer inteiro $k \geq 1$, definimos

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega) : \text{para cada } |\alpha| \leq k, \text{ existe } g^\alpha \in C(\overline{\Omega}) \text{ tal que } D^\alpha u = g|_\Omega^\alpha\}.$$

Na sequência, exibiremos uma fórmula muito útil que permitirá definir as derivadas parciais fracas de qualquer ordem $k \geq 1$.

¹O conjunto $\text{Supp}(\varphi) := \{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$ é chamado de suporte de φ em Ω .

Teorema B.3 ([12, Teorema 6.3-1]). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $k \geq 1$ um inteiro e $u \in C^k(\Omega)$ uma função dada. Então,*

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^{\alpha} u \varphi dx \text{ para toda } \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega), \quad (\text{B.1})$$

para cada multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$.

Observação B.4. Usando o Teorema da divergência podemos interpretar a fórmula (B.1) como uma integração por partes, excluindo a fronteira de Ω , uma vez que as funções envolvidas possuem suporte compacto.

A fórmula estabelecida no Teorema B.3 motiva a seguinte definição fundamental:

Definição B.5. Sejam $u, v \in L^1_{Loc}(\Omega)$ e α qualquer multi-índice com $|\alpha| \geq 1$. Dizemos que v é a **derivada parcial fraca** de ordem $|\alpha|$ de u , e escrevemos

$$D^{\alpha} u = v,$$

se

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx \text{ para toda } \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega). \quad (\text{B.2})$$

Por exemplo, dada uma função $v \in L^1_{Loc}(\Omega)$, a função $v_i \in L^1_{Loc}(\Omega)$ é uma derivada parcial fraca de v em $L^1_{Loc}(\Omega)$ de primeira ordem com respeito à i -ésima variável se

$$\int_{\Omega} v_i \varphi dx = - \int_{\Omega} v \partial_i \varphi dx \text{ para toda } \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Agora, estamos em condições de definir os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$.

Definição B.6. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, $m \geq 1$ um número inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. O **espaço de Sobolev** (real) $W^{m,p}(\Omega)$ é conjunto de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ que possuem derivada fraca $D^{\alpha} u$, com $1 \leq |\alpha| \leq m$ também em $L^p(\Omega)$. Isto é,

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^{\alpha} u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } 1 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

$W^{m,p}(\Omega)$ é chamado o **espaço de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$** .

O funcional $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{B.3})$$

para $u \in W^{m,p}(\Omega)$, é uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$.

Se $p = \infty$, uma norma em $W^{m,\infty}(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L^{\infty}(\Omega)}. \quad (\text{B.4})$$

Equipado com as normas (B.3) e (B.4), respectivamente, $W^{m,p}(\Omega)$ e $W^{m,\infty}(\Omega)$ são espaços de Banach.

Definiremos agora um caso particular dos espaços $W^{m,p}(\Omega)$, a saber, os espaços $H^m(\Omega)$, que devido à sua aplicação às equações diferenciais parciais consideram-se um dos exemplos mais importantes de espaços com produto interno que são completos, ou seja, espaços de Hilbert.

Definição B.7. Seja Ω um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $H^m(\Omega)$, com $m \in \mathbb{N}$, o espaço dado por

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Em particular, quando $m = 1$,

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega); |\alpha| \leq 1\}.$$

Frequentemente também usamos as seguintes **seminormas** de $W^{m,p}(\Omega)$, as quais consistem das L^p -normas das derivadas de ordem mais alta e são denotadas por $|\cdot|_{W^{m,p}(\Omega)}$. Para qualquer $u \in W^{m,p}(\Omega)$, define-se

$$|u|_{W^{m,p}(\Omega)} = \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_\infty \text{ para } p = \infty.$$

No caso em que $1 \leq p < \infty$, define-se

$$|u|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para qualquer $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Se $p = 2$ escrevemos $|\cdot|_{H^m(\Omega)}$, para denotar a seminorma sobre o espaço $W^{m,2}(\Omega)$.

Os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert, munidos com o produto interno:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v, \text{ para } u, v \in H^m(\Omega),$$

o qual induz a norma dada pela fórmula (B.3) quando $p = 2$.

Definição B.8. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Para cada inteiro $m \geq 1$ e cada número real $1 \leq p < \infty$ o espaço de Sobolev

$$W_0^{m,p}(\Omega) \text{ ou } H_0^m(\Omega), \text{ se } p = 2$$

é o fecho do espaço $\mathfrak{D}(\Omega)$ em $(W^{m,p}(\Omega))$.

B.1 Alguns resultados envolvendo os espaços $L^p(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$

Nesta seção vamos listar resultados importantes envolvendo os espaços $L^p(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$ que foram utilizados ao longo do trabalho.

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [12, Teorema 3.5-3].

Teorema B.9 (Teorema de Representação de Riesz em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$). *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ o expoente conjugado de p . Então, dada qualquer função $g \in L^q(\Omega)$, a relação*

$$\ell(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \text{ para qualquer } f \in L^p(\Omega),$$

define um funcional linear contínuo ℓ sobre $L^p(\Omega)$. Além disso,

$$\|\ell\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

A isometria linear $g \in L^q(\Omega) \rightarrow \ell \in (L^p(\Omega))^$ definida desta maneira é bijetiva. Isto significa que, dado qualquer funcional contínuo ℓ sobre $L^p(\Omega)$, existe uma única função $g \in L^q(\Omega)$ tal que $\ell(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ para qualquer $f \in L^p(\Omega)$.*

Teorema B.10 (Desigualdade de Hölder, [15, Teorema 4.16]). *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $p, q \in [1, +\infty]$, com p e q conjugados, isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então*

$$fg \in L^1(\Omega)$$

e

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Lema B.11. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Suponha que*

$$f_n \rightarrow f \quad \text{em} \quad L^p(\Omega).$$

Se $g \in L^q(\Omega)$, com p e q expoentes conjugados, então

$$\int_{\Omega} f_n g dx \rightarrow \int_{\Omega} f g dx.$$

Demonstração. Note que

$$\left| \int_{\Omega} f_n g dx - \int_{\Omega} f g dx \right| = \left| \int_{\Omega} (f_n - f) g dx \right| \leq \int_{\Omega} |f_n - f| |g| dx.$$

Da Desigualdade de Hölder segue que

$$\left| \int_{\Omega} f_n g dx - \int_{\Omega} f g dx \right| \leq \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)},$$

de onde se conclui o desejado. □

B.1.1 Problema de Dirichlet Homogêneo

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado. Vamos considerar o problema de Dirichlet homogêneo

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega = \Gamma, \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

onde

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

e f é uma função definida em Ω . A condição de fronteira $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ é chamada a condição de Dirichlet (homogênea).

Definição B.12. (i) Uma **solução clássica** do Problema (B.5) é uma função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que verifica (B.5).

(ii) Uma **solução fraca** de B.5 é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v \quad \text{para toda } v \in H_0^1(\Omega).$$

$$\text{onde } \nabla u \nabla v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Enunciaremos agora um resultado de regularidade com relação à solução fraca do problema B.5, cuja demonstração pode ser encontrada em [15, Teorema 9.25]

Teorema B.13 (Regularidade para o problema de Dirichlet). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, suficientemente suave, com fronteira limitada e regular. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e seja $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv \text{ para toda } v \in H_0^1(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

A seguir, exibimos dois resultados fundamentais para o estudo de existência e unicidade de solução da equação do calor, considerando o dado inicial $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Lema B.14 (Lema de Du Bois Raymond). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e u uma função localmente integrável em Ω . Então*

$$\int_{\Omega} uv = 0 \text{ para toda } v \in \mathfrak{D}(\Omega),$$

se, e somente se, $u = 0$ q.t.p em Ω .

O seguinte lema apresenta uma reformulação das identidades de Green² no espaço de Sobolev $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Sua demonstração pode ser encontrada em [3, Lema B.3].

Lema B.15. *Se $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, então*

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\Omega} u \Delta v dx$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = - \int_{\Omega} \Delta uv dx.$$

Apresentamos a seguir uma importante propriedade para os espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$, conhecida como a Desigualdade de Poincaré. Iremos enunciá-la para o caso em que Ω é um intervalo da reta e, em seguida, para o caso em que Ω é qualquer subconjunto limitado e aberto de $\mathbb{R}^n$. As demonstrações dos dois resultados podem ser encontradas em [15, Proposição 8.13] e [22, Teorema 2.3.4], respectivamente.

Proposição B.16 (Desigualdade de Poincaré). *Suponha que I seja um intervalo limitado de $\mathbb{R}$. Então, existe uma constante positiva C (dependendo de $|I| < \infty$) tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)} \text{ para qualquer } u \in W_0^{1,p}(I).$$

Teorema B.17 (Desigualdade de Poincaré, caso geral). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Existe uma constante positiva $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$\|u\|_{W^{0,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \text{ para qualquer } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, a aplicação $u \mapsto \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ define uma norma sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$, que é equivalente a norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Assim, existe uma constante positiva c' tal que

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq c'\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

No caso em que $p = 2$, temos

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c'\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

²Indicamos ao leitor interessado que consulte [12, Teorema 6.7-1] para estudar as identidades de Green.

- C_0 -semigrupo, 55
 - uniformemente limitado, 60, 74
 - de contrações, 74
- aplicação contrativa, 127
- aproximação Yosida de A , 81
- autovalor, 37
- autovetor, 37
- Boa colocação , 101
- conjunto
 - direcionado, 19
 - imagem de T , 32
 - núcleo de T , 32
 - resolvente, 37, 38
- conjunto dualidade, 89
- contração, 127
- derivada parcial fraca, 131
- Desigualdade
 - Cauchy-Schwarz, 30
 - Hölder, 133
- dualidade, 89
- equação do Calor
 - condição de Dirichlet, 113
 - homogênea, 113
- equação resolvente, 96
- espaço dual topológico, 33
- espaços de Lebesgue, 129
- espaços de Sobolev, 129
- espectro, 37
 - contínuo, 38
 - pontual, 38
 - residual, 38
- funcional linear, 31
- função
 - contínua, 23
 - derivável, 25
 - derivável à direita, 24
 - derivável à esquerda, 25
 - exponencial de um operador linear, 42
 - exponencial matricial, 42
 - exponencial real, 42
 - subaditiva, 57
- gerador infinitesimal, 50
- interpretação integral do operador resolvente, 76
- isomorfismo, 71
- Lema
 - de Du Bois Raymond, 134
 - de Lax-Milgram , 128
- limite espectral de um operador, 111
- net, 19
 - de Cauchy, 20
- norma
 - de um operador linear limitado, 32
 - do gráfico, 36
- operador
 - acretivo, 91
 - adjunto, 36
 - auto-adjunto, 37
 - diferencial, 39
 - integral, 39
 - linear dissipativo, 89
 - maximal dissipativo, 89
 - maximal monótono, 37
 - contínuo, 32
 - fechado, 35

inverso, 34

Laplaciano, 40

limitado, 32

linear monótono, 37

resolvente, 37, 74

simétrico, 37

ponto fixo, 126

problema abstrato de Cauchy, 102

 bem colocado, 112

problema de Dirichlet homogêneo, 133

produto escalar para a dualidade, 33

reduzidas, 20

semigrupo

 das translações, 66

 reescalado, 69

 similares, 71

 de classe C_0 , 55

 fortemente contínuo, 55

 uniformemente contínuo, 50

sequência, 20

 de Cauchy, 20

solução

 fraca, 103

 clássica, 102

somas parciais, 20

série

 absolutamente convergente, 20

 convergente, 20

 divergente, 20

Teorema

 de Feller-Miyadera-Phillips, 98

 de Hahn-Banach, 125

 de Lumer-Phillips, 91

 de Representação de Riesz, 126

 de Representação de Riesz em $L^p(\Omega)$,
 $1 \leq p < \infty$, 132

 do ponto fixo de Banach, 127

 da Média, 26

 de Hille-Yosida, 82

Teste

 da Comparação, 21

 M de Weierstrass, 21