



A Matemática e o GPS

Fernando Foresto Scannavino

São José do Rio Preto

Janeiro - 2015

A Matemática e o GPS

Fernando Foresto Scannavino

Orientador: Prof Dr Claudio Aguinaldo Buzzi

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, campus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São José do Rio Preto

Janeiro - 2015

Scannavino, Fernando Foresto.

A matemática e o GPS / Fernando Foresto Scannavino. -- São José do Rio Preto, 2015

33 f. : il., gráfs.

Orientador: Claudio Aguinaldo Buzzi

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria analítica - Estudo e ensino. 3. Sistema de posicionamento global. 4. Esfera. 5. Coordenadas (Matemática) 6. Coordenadas geográficas. I. Buzzi, Claudio Aguinaldo. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 516(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Fernando Foresto Scannavino

A Matemática e o GPS

Dissertação apresentada como parte dos requisitos junto ao programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração - ensino de matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

UNESP - São José do Rio Preto

Orientador

Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins

UNICAMP - Campinas

Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos

UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto

25 de Fevereiro de 2015

Agradecimentos

Agradeço

à minha família pela paciência e compreensão,

ao meu orientador pelo suporte sempre que necessário.

Resumo

O trabalho estuda o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e os conceitos matemáticos envolvidos nesse sistema. E para transmitir esses conceitos a alunos de ensino fundamental e médio foi feita uma analogia entre posicionamentos em coordenadas bidimensionais e tridimensionais.

Palavras chaves: Interseção de Esferas, Sistemas de Posicionamento Global (GPS).

Abstract

The paper studies the operation of the Global Positioning System (GPS) and the mathematical concepts involved in this system. Further, to implement these concepts to students in elementary and middle school was made an analogy between placements two-dimensional and three-dimensional coordinates.

Keywords: Intersection of Spheres, Global Positioning System (GPS).

Sumário

1	O Sistema de Posicionamento Global - G.P.S.	8
2	A Matemática por trás do G.P.S.	13
2.1	A superfície esférica	13
2.2	Das Coordenadas cartesianas para as coordenadas geográficas	17
3	A necessidade do quarto satélite	20
3.1	Solução com apenas 3 satélites	20
3.2	O erro e o quarto satélite	22
3.3	A escolha dos satélites	25
4	Aplicabilidade em Sala de Aula	27

Capítulo 1

O Sistema de Posicionamento Global - G.P.S.

Desde o começo dos tempos o homem sempre teve interesse em determinar sua localização na Terra. Desde as técnicas mais primitivas, como marcações em pedras e outras superfícies para identificar suas localizações para que não se perdessem, passando pela milenar bússola, cuja descoberta é atribuída aos chineses, o astrolábio e mais tarde o sextante.



Figura 1.1: Primeira
Bússola Chinesa



Figura 1.2: Astrolábio



Figura 1.3: Sextante

A história recente tem visto cada vez mais o desenvolvimento de sistemas complexos e precisos para determinar a localização de um indivíduo ou algo sobre a Terra. E isso é claramente representado pelo sofisticado sistema chamado G.P.S. (Global Positioning System). O Sistema de Posicionamento Global foi criado pelo Departamento de Defesa

dos Estados Unidos no início da década de 1960, a princípio com o nome de NAVSTAR (Navigation Satellite with Time and Ranging) com o objetivo de ser o principal sistema de navegação das Forças Armadas Americanas. Para mais detalhes consultar [4].

O sistema só foi considerado completamente utilizável em 1995. Em um primeiro momento o sistema consistia em 24 satélites, de tal forma que, pelo menos 21 estariam funcionando 98% do tempo. Em 2005 o sistema passou a ser constituído por 32 satélites, dos quais pelo menos 24 estão funcionando, enquanto os demais ficam prontos para assumir o lugar de algum que eventualmente falhe. Os satélites estão posicionados a 20.200 km da superfície da Terra, distribuídos em 6 órbitas planas. Há pelo menos 4 satélites em cada órbita plana, equidistantes uns dos outros. Cada satélite completa sua órbita ao redor da Terra em 11 horas e 58 minutos. Essa configuração assegura que em qualquer momento e qualquer localização da Terra nós estamos sendo observados por pelo menos 4 satélites.

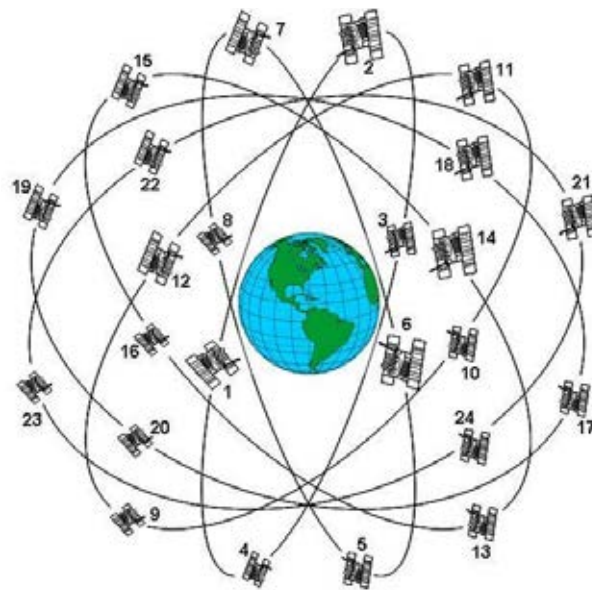


Figura 1.4: Os 24 Satélites e suas órbitas.

Os 24 satélites emitem sinais que se repetem periodicamente, e que são captados com a ajuda de receptores especiais. Esses receptores são os aparelhos que compramos, erroneamente denominados G.P.S. (no que diz respeito ao conceito). Esses aparelhos

são capazes de calcular a posição de cada satélite a qualquer momento. Cada satélite é equipado de um relógio atômico extremamente preciso (precisão de nano-segundo). Os receptores “GPS” de uso militar têm precisão de 1 metro e os de uso civil, de 15 a 100 metros.

O papel dos receptores é avaliar o lapso de tempo entre emissão e recepção dos sinais de rádio enviados pelos satélites. Assumindo-se que os relógios do receptor e de todos os satélites estejam perfeitamente sincronizados, o receptor calcula o tempo que o sinal leva de um satélite até sua chegada no aparelho. Com esse tempo, e sabendo-se que o sinal viaja na velocidade da luz c , o receptor calcula sua distância em relação ao satélite: $r = c.t$. A partir dessa distância obtemos uma esfera de raio r com centro no satélite, que são os possíveis locais onde o receptor pode estar em relação ao satélite. Fica claro então que apenas essa informação é insuficiente para se determinar a exata localização do receptor.

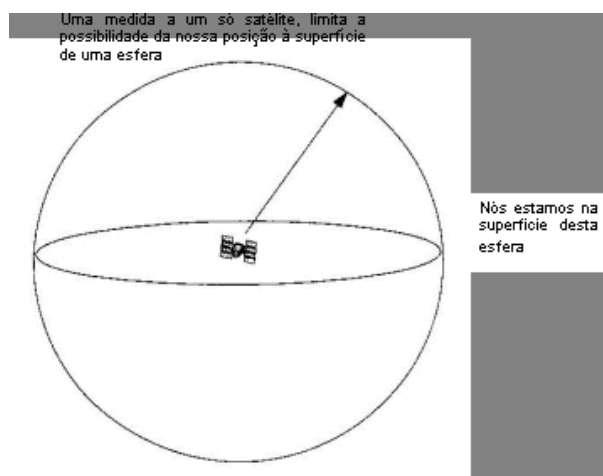


Figura 1.5: Uma esfera.

O receptor capta então um segundo sinal de um outro satélite, gerando uma segunda esfera conforme processo explicado anteriormente. Temos que a intersecção entre duas esferas de centros diferentes é no máximo uma circunferência, ficando assim limitado aos pontos dessa circunferência os possíveis locais do receptor.

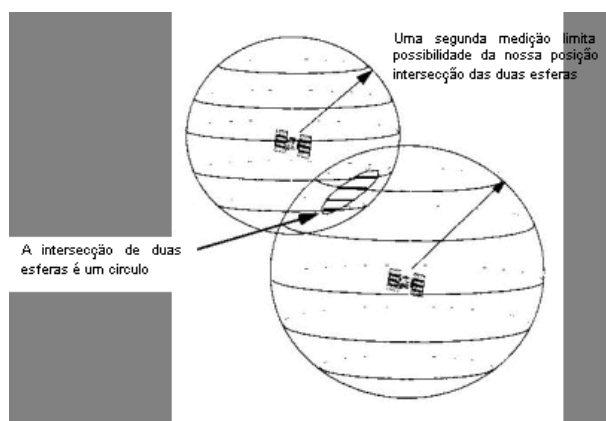


Figura 1.6: Duas esferas.

Sendo assim, há a necessidade de uma terceira esfera. Captando o sinal de um terceiro satélite, e gerando uma terceira esfera, tem-se que a intersecção entre a circunferência e a nova esfera gera no máximo dois pontos.

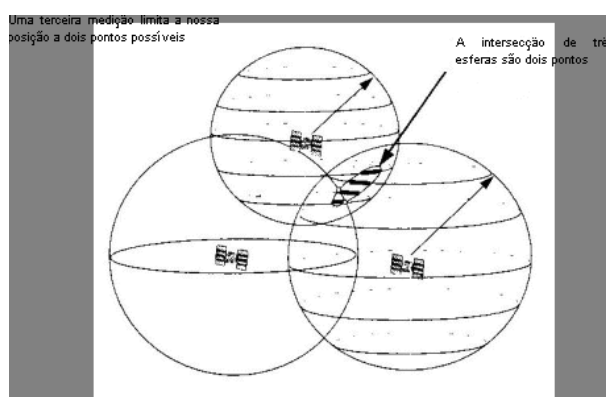


Figura 1.7: Três esferas.

A princípio, parece ser necessário mais uma esfera para se determinar em qual dos dois pontos se localiza o receptor, porém isso não há necessidade pois, devido à posição dos satélites um dos pontos fica totalmente fora da Terra, podendo assim ser eliminado. (é bom lembrar que a Terra “funciona” como a quarta esfera necessária para se determinar o exato local)

A descrição acima é a teoria que existe por trás do cálculo da posição de um aparelho receptor. Infelizmente, na prática é um pouco mais complicado. Isso se deve ao fato de que os tempos medidos pelos aparelhos receptores são extremamente curtos e devem ser feitos com alta precisão. Se por um lado, os satélites são equipados com um relógio atômico de extrema precisão (e extremamente caro!!) os receptores são equipados com relógios de baixa precisão, para que caiba no orçamento da maioria das pessoas. Como lidar com essa diferença? Bem, aí entra o quarto satélite, com a quarta esfera. Mas antes, vamos ver a matemática da parte teórica!

Capítulo 2

A Matemática por trás do G.P.S.

2.1 A superfície esférica

Quando trabalhamos em um sistema de coordenadas cartesianas com origem O no espaço tridimensional, dado um ponto $P = (x, y, z)$ e com a aplicação dupla do Teorema de Pitágoras mostra-se que a distância de P a O fica dada pela expressão:

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

A distância assim entre os pontos $P = (x, y, z)$ e $C = (u, v, w)$ é dada pela fórmula:

$$d(P, C) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2}.$$

Uma superfície esférica é o conjunto de todos os pontos P que equidistam r de um ponto C no espaço, sendo r um número real positivo.

Portanto temos que a equação reduzida de uma superfície esférica S é:

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 = r^2.$$

Desenvolvendo a equação acima obtemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xu - 2yv - 2zw + u^2 + v^2 + w^2 - r^2 = 0,$$

que para facilitar escrevemos

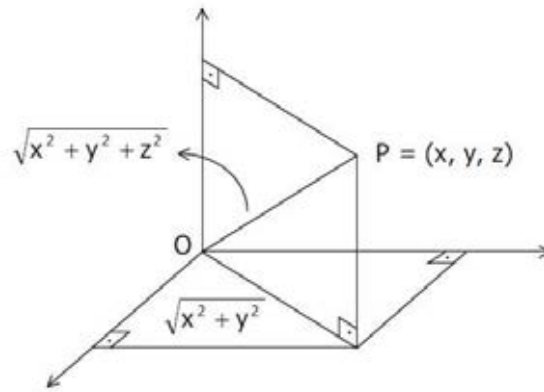


Figura 2.1: Sistemas de Coordenadas Cartesianas no Espaço.

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0, \quad (2.1)$$

onde:

$$a = -2u,$$

$$b = -2v,$$

$$c = -2w \text{ e}$$

$$d = u^2 + v^2 + w^2 - r^2.$$

Esta equação é chamada de equação geral da superfície esférica.

A intersecção entre superfícies esféricas no espaço:

Sejam duas superfícies esféricas S_1 e S_2 de centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2 , respectivamente. Sem perda de generalidade assuma que $r_1 \geq r_2$. É fácil perceber que a intersecção entre elas pode ser:

1. o conjunto vazio, se $d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$ ou $d(C_1, C_2) < r_1 - r_2$,
2. um ponto, se $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$ ou $d(C_1, C_2) = r_1 - r_2$,
3. uma circunferência, se $r_1 - r_2 < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$.

Agora vamos analisar a inserção de uma terceira superfície esférica às duas analisadas anteriormente. Partindo-se do pressuposto que há intersecção entre as três esferas, ou

seja, que $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \neq \emptyset$, podemos descartar o caso 1. Caso as duas primeiras superfícies possuam apenas um ponto em comum, este ponto será a intersecção entre as três superfícies.

Caso a intersecção entre as duas primeiras for uma circunferência, ao inserirmos uma terceira superfície, a intersecção entre a circunferência e essa superfície nos fornecerá um ou dois pontos!



Figura 2.2: Intersecção entre três esferas. Figura obtida em [3]

Assim, quando introduzimos uma quarta superfície às outras três, de tal forma que $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$, a intersecção entre elas vai ser, necessariamente, apenas um ponto. Como demonstrar isso matematicamente?

A seguir apresentamos o Teorema que nos garante isso!

Teorema 2.1.1. *Se quatro superfícies esféricas possuem pelo menos um ponto em comum e seus centros são não coplanares, então essa intersecção consiste em um único ponto.*

Demonstração. Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 as superfícies esféricas com centros C_1, C_2, C_3 e C_4 respectivamente.

Devemos provar que, se existe $P \in S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ e C_1, C_2, C_3 e C_4 são não coplanares então $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{P\}$.

Assim, como visto na seção (2.1), as equações gerais dessas superfícies esféricas S_j , onde $j = 1, 2, 3, 4$, serão representadas por

$$x^2 + y^2 + z^2 + a_j x + b_j y + c_j z + d_j = 0.$$

Temos assim quatro equações com termos quadráticos que, se subtrairmos duas a duas podemos obter equações lineares em x, y e z , pois os termos x^2, y^2 e z^2 serão eliminados.

Ao subtrair as equações S_1 e S_2 , obtém-se a equação de um plano que contém $S_1 \cap S_2$.

Dessa forma, fazendo-se $S_1 - S_2, S_1 - S_3$ e $S_1 - S_4$, obtemos as equações dos planos que contêm, respectivamente, $S_1 \cap S_2, S_1 \cap S_3$ e $S_1 \cap S_4$. Temos ainda que, se $P = (x, y, z)$ está em $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ então (x, y, z) é solução do sistema linear

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0, \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0, \\ (a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) = 0. \end{cases}$$

Pelo Método de Cramer, sabemos que se o determinante da matriz principal do sistema acima for diferente de zero, então o sistema possui uma única solução, provando assim o Teorema. Assim sendo temos que mostrar que

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Sendo $C_j = (u_j, v_j, w_j)$ o centro de S_j , $j = 1, 2, 3, 4$, temos $a_j = -2u_j$, $b_j = -2v_j$, $c_j = -2w_j$ de modo que, substituindo, obtemos o sistema equivalente abaixo

$$\begin{cases} (-2u_1 + 2u_2)x + (-2v_1 + 2v_2)y + (-2w_1 + 2w_2)z + (d_1 - d_2) = 0, \\ (-2u_1 + 2u_3)x + (-2v_1 + 2v_3)y + (-2w_1 + 2w_3)z + (d_1 - d_3) = 0, \\ (-2u_1 + 2u_4)x + (-2v_1 + 2v_4)y + (-2w_1 + 2w_4)z + (d_1 - d_4) = 0. \end{cases}$$

Colocando-se o número dois em evidência teremos que

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 & w_2 - w_1 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 & w_3 - w_1 \\ u_4 - u_1 & v_4 - v_1 & w_4 - w_1 \end{vmatrix}.$$

E como C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são não coplanares, segue que o determinante à direita é não nulo e, portanto, o sistema linear tem uma única solução, o que prova o teorema.

□

Uma observação extremamente importante: Resolver sistemas com equações quadráticas subtraindo duas a duas para que desapareçam os termos quadráticos só

é perfeitamente possível nesse caso pois sabemos que o sistema possui uma solução, ou seja, a solução que encontrarmos no sistema linear será também solução do sistema quadrático pois, afinal de contas, sabemos que os sinais saem de um aparelho e que esse aparelho existe, existindo assim uma solução para o problema. Há que se frisar a importância do que é dito no Teorema: se quatro superfícies esféricas possuem um ponto em comum, então ele é único! E sabemos que esse ponto existe (o aparelho GPS).

2.2 Das Coordenadas cartesianas para as coordenadas geográficas

Temos que ressaltar que o sistema de coordenadas cartesianas não é o sistema mais usual para localização de pontos na Terra. Normalmente a localização mais utilizada se dá pela latitude, longitude e a elevação que o ponto se encontra em relação ao nível do mar. Dessa forma, há que se fazer a transformação das coordenadas cartesianas, onde o ponto é dado por $P = (x, y, z)$, para as coordenadas esféricas, onde o mesmo ponto é dado por $P = (\theta, \varphi, h)$, onde

θ é a latitude,

φ é a longitude e

h é a elevação em relação ao nível do mar.

Partimos assim do sistema ortogonal de coordenadas cartesianas definido anteriormente, onde a origem O é o centro da Terra, o eixo Oz positivo aponta para o Pólo Norte, o plano Oxy é o plano que contém o equador com o eixo Ox positivo cortando o meridiano na longitude $90^0 E$.

Com isso, dado um ponto $P = (x, y, z)$ no espaço, os ângulos θ e φ , conforme figura a seguir, vão nos dar a latitude e longitude, respectivamente. Ver mais detalhes em [2].

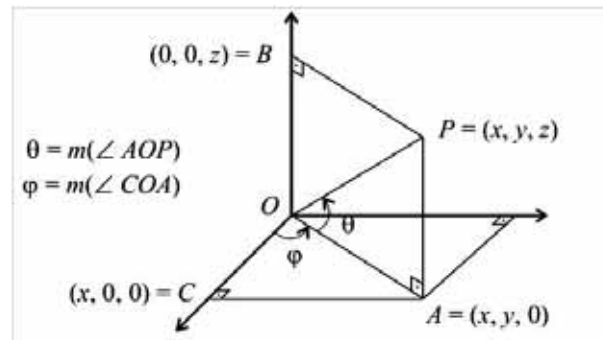


Figura 2.3: Coordenadas Geográficas.

Do triângulo $\triangle OPB$ temos

$$\cos(90 - \theta) = \frac{OB}{OP} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

E como $\cos(90 - \theta) = \sin(\theta)$, então

$$\sin \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Assim, quando $z > 0$ significa que a latitude de P é $\theta^0 N$ (Norte) e quando $z < 0$ a latitude de P é $(-\theta)^0 S$ (Sul). Além disso do triângulo $\triangle OAC$ temos:

$$\sin \varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ e } \cos \varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Com essas expressões definimos a longitude de P . Se $y > 0$ então a longitude é $\varphi^0 E$ (leste). E quando $y < 0$, a longitude de P é $(-\varphi)^0 W$ (oeste).

Mas as coordenadas geográficas de um ponto P são dadas pelo conjunto: $P(\text{latitude}, \text{longitude}, \text{elevação})$.

E como calcular a elevação? Simples, a elevação é dada pela diferença entre $OP = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e o raio da Terra.

Capítulo 3

A necessidade do quarto satélite

3.1 Solução com apenas 3 satélites

A parte matemática descrita no capítulo anterior funcionaria em um mundo perfeito. Como já mencionado, na prática, devido à discrepância entre a precisão dos relógios presentes nos satélites e nos receptores, é necessário uma análise um pouco mais profunda.

Teoricamente a captação de sinais vindos de três satélites apenas seriam suficientes para se determinar a localização de um aparelho receptor. Isso acontece porque um dos dois pontos de intersecção das três esferas estará sempre muito distante da superfície terrestre. E isso se deve à maneira com que os satélites foram posicionados. (nunca três satélites estarão colineares).

Portanto, seguindo a teoria descrita no capítulo 2 teríamos apenas as três primeiras equações das esferas:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0. \end{cases}$$

Subtraindo duas a duas obtemos:

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0, \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0. \end{cases}$$

E como os satélites são posicionados de tal maneira que nunca três satélites estão colineares, isso garante que pelo menos um dos determinantes 2×2 abaixo seja diferente de zero:

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & c_1 - c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \end{vmatrix}.$$

Supondo o primeiro determinante diferente de zero, usamos a Regra de Cramer para obter soluções de x e y em função de z :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (c_2 - c_1)z + (d_2 - d_1) & b_1 - b_2 \\ (c_3 - c_1)z + (d_3 - d_1) & b_1 - b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 \end{vmatrix}},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (a_1 - a_2) & (c_2 - c_1)z + (d_2 - d_1) \\ (a_1 - a_3) & (c_3 - c_1)z + (d_3 - d_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 \end{vmatrix}}.$$

Substituindo esses valores de x e y na equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 + a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

encontraremos uma equação quadrática em z , de onde obteremos as soluções z_1 e z_2 . E de posse desses dois valores, voltamos às equações de x e y acima e encontramos x_1 , x_2 , y_1 e y_2 . Assim, obtemos os dois pontos (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) , dos quais um é descartado por estar completamente fora da Terra.

3.2 O erro e o quarto satélite

Como os relógios dos receptores tem baixa acuracidade, os lapsos de tempos calculados por eles são fictícios, os quais denominaremos T_i . Esse tempo é calculado da seguinte forma:

$T_i = (\text{tempo de chegada do sinal no relógio do receptor}) - (\text{tempo de partida do sinal no relógio do satélite})$

O erro entre o tempo fictício T_i calculado pelo receptor e o verdadeiro tempo t_i é sempre o mesmo, independentemente do satélite a partir do qual foi tomada a medida. Assim $T_i = \tau + t_i$ para $i = 1, 2, 3$, onde

$t_i = (\text{tempo de chegada do sinal no relógio do satélite}) - (\text{tempo de partida do sinal no relógio do satélite})$

e τ é dado pela equação

$\tau = (\text{tempo de chegada do sinal no relógio do receptor}) - (\text{tempo de chegada do sinal no relógio do satélite})$.

A constante τ representa assim o erro existente entre as tomadas de medidas dos relógios dos satélites e dos receptores. Com isso, uma quarta incógnita é introduzida ao sistema original que tinha apenas x , y e z . Com 3 satélites obtínhamos três tempos, que eram suficientes para resolver o sistema, agora com mais uma incógnita, precisamos de mais uma equação, daí a necessidade do quarto satélite! Temos assim as equações das quatro esferas:

$$(x - u_1)^2 + (y - v_1)^2 + (z - w_1)^2 = c^2(T_1 - \tau)^2,$$

$$(x - u_2)^2 + (y - v_2)^2 + (z - w_2)^2 = c^2(T_2 - \tau)^2,$$

$$(x - u_3)^2 + (y - v_3)^2 + (z - w_3)^2 = c^2(T_3 - \tau)^2,$$

$$(x - u_4)^2 + (y - v_4)^2 + (z - w_4)^2 = c^2(T_4 - \tau)^2.$$

Assim, como visto na seção (2.1), as equações gerais dessas superfícies esféricas S_j ,

onde $j = 1, 2, 3, 4$, serão representadas por

$$x^2 + y^2 + z^2 + a_j x + b_j y + c_j z + d_j = c^2(T_j - \tau)^2,$$

sendo que

$$a = -2u,$$

$$b = -2v,$$

$$c = -2w \text{ e}$$

$$d_j = u^2 + v^2 + w^2.$$

Tiramos o raio ao quadrado do coeficiente d , pois é nele que se encontra a nova incógnita τ . Subtraindo duas a duas temos o sistema:

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z = 2c^2\tau(T_2 - T_1) + A_1, \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z = 2c^2\tau(T_3 - T_1) + A_2, \\ (a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z = 2c^2\tau(T_4 - T_1) + A_3, \end{cases}$$

onde

$$A_1 = c^2(T_1^2 - T_2^2) - (d_1 - d_2),$$

$$A_2 = c^2(T_1^2 - T_3^2) - (d_1 - d_3),$$

$$A_3 = c^2(T_1^2 - T_4^2) - (d_1 - d_4).$$

Nesse sistema, aplica-se a Regra de Cramer para se determinar os valores de x , y e z em função de τ :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2c^2\tau(T_2 - T_1) + A_1 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ 2c^2\tau(T_3 - T_1) + A_2 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ 2c^2\tau(T_4 - T_1) + A_3 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix}},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & 2c^2\tau(T_2 - T_1) + A_1 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & 2c^2\tau(T_3 - T_1) + A_2 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & 2c^2\tau(T_4 - T_1) + A_3 & c_1 - c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix}},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & 2c^2\tau(T_2 - T_1) + A_1 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & 2c^2\tau(T_3 - T_1) + A_2 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & 2c^2\tau(T_4 - T_1) + A_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix}}.$$

Como os satélites estão dispostos de tal maneira que nunca quatro satélites visíveis por um ponto na Terra estão no mesmo plano, então o determinante do denominador é diferente de zero.

Substituindo as soluções acima na equação

$$(x - u_1)^2 + (y - v_1)^2 + (z - w_1)^2 = c^2(T_1 - \tau)^2,$$

obteremos uma equação do segundo grau em τ , de onde obteremos τ_1 e τ_2 . Voltando nas equações de x , y e z acima, obteremos dois pontos possíveis para o receptor, dos quais um, como explicado anteriormente, é eliminado por estar completamente fora da Terra.

Com isso, o problema do erro existente em função da baixa precisão dos relógios presentes nos receptores fica resolvido, e o receptor localizado de maneira precisa.

3.3 A escolha dos satélites

Caso o aparelho receptor consiga captar mais de quatro satélites, quais ele deverá escolher? Ele deverá escolher aqueles que produzam o menor erro. Como o erro do tempo é sempre o mesmo, independentemente do satélite escolhido, a escolha será de acordo com a posição ocupada pelos satélites. Como os tempos medidos são todos aproximados, as distâncias calculadas são também aproximadas. Sendo assim podemos representar as esferas calculadas aumentando a espessura de suas “cascas”, o que faz com que a intersecção entre as esferas se transforme em uma “região”. Para mais detalhes consultar [4]

Sendo assim, o aparelho deverá escolher os satélites que proporcionam uma menor região, conforme figuras abaixo:

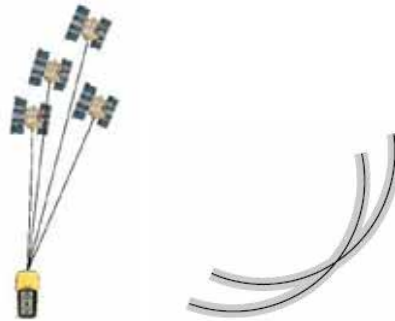


Figura 3.1: Geometria Inadequada.

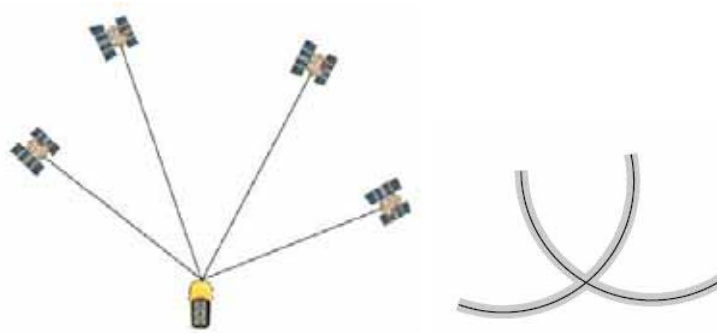


Figura 3.2: Geometria Adequada.

Matematicamente, os valores de x , y e z em função de τ são obtidos através da divisão

por

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix}.$$

Quanto menor o denominador, maior o erro. Assim, o receptor deve escolher os quatro satélites que maximizam esse denominador! Para maiores detalhes consultar [1].

Capítulo 4

Aplicabilidade em Sala de Aula

- Objetivos da Aula:

Aprender conceitos de escala, ampliar os conceitos de geometria plana e espacial através de suas aplicações na funcionalidade do GPS. As idéias para essa atividade foram inspiradas no texto [5].

- Roteiro:

1. Trabalhar o conceito de escala;
2. Apresentar os conceitos de circunferência e esfera para os alunos;
3. Propor a Atividade “Perdido no Mapa”;
4. Explicar o funcionamento do GPS.

- Aplicação:

Veja o exemplo aplicado em salas do nono ano do Ensino Fundamental do Colégio Agostiniano São José da cidade de São José do Rio Preto. As perguntas abaixo foram entregues aos alunos que estavam distribuídos em grupos de três.

1. Segundo o mapa do estado de Mato Grosso 2 cm no mapa corresponde a 100 km no real. Encontre a escala desse mapa.

Nesta etapa, de posse do mapa do estado de Mato Grosso, foi explicado aos alunos como “funciona” a escala, solicitando a eles que retirassem algumas

distâncias entre cidades.

2. Se uma pessoa se encontra a 100 km da cidade de Porto Murtinho, desenhe no mapa onde pode estar essa pessoa. Qual figura geométrica você desenhou?

Mostrar aos alunos a ideia de Lugar Geométrico através da circunferência no plano e da esfera no espaço.

3. Imagine que uma pessoa se encontra foragida no estado de Mato Grosso. Três delegacias de polícias de cidades diferentes captaram sinais emitidos por um aparelho fixo no tornozelo do indivíduo. Campo Grande - informou que o indivíduo se encontra a 125 km de sua cidade. Água Clara - informou que o indivíduo se encontra a 225 km de sua cidade. Chapadão do Sul - informou que o indivíduo se encontra também a 225 km de sua cidade. Localize o indivíduo no mapa!! Ele se encontra próximo de qual cidade?

Distâncias:

125 km de Campo Grande

225 km de Chapadão do Sul

225 km de Água Clara

Esse item consiste em o aluno descobrir, de posse de um mapa e de alguns dados, onde exatamente um indivíduo perdido se encontra. (Problema da Trilateração).

De posse das distâncias em quilômetros e da escala o aluno é capaz de converter a medida para o mapa, obtendo circunferências. Com apenas uma circunferência o aluno percebe que o indivíduo pode estar em qualquer ponto sobre a circunferência. Ao traçar a segunda circunferência obtém-se dois pontos de intersecção, e com a terceira circunferência o aluno obterá apenas um ponto, que é exatamente onde o indivíduo se localiza.

Veja a sequência que se é esperada dos alunos:

A escala do mapa é de 1 : 5000000 o que significa que cada 1 cm no mapa

corresponde a 50 km no real. Dessa forma o aluno converte as distâncias acima para o mapa:

2,5 cm de Campo Grande

4,5 cm de Chapadão do Sul

4,5 cm de Água Clara

Traçando-se a primeira circunferência com centro em Campo Grande e raio 2,5 cm obtemos:



Figura 4.1: A primeira circunferência.

Introduzindo a segunda circunferência com centro em Chapadão do Sul e raio 4,5 cm obtemos dois pontos (possíveis locais onde o indivíduo se encontra):



Figura 4.2: Intersecção entre duas circunferências.

E por fim, traçando-se a terceira circunferência com centro em Água Clara e raio 4,5 cm obtemos um ponto de intersecção, que é onde o indivíduo se encontra:



Figura 4.3: Intersecção entre as três circunferências.

Pelo mapa chegamos à conclusão de que o indivíduo se encontra nas proximidades da cidade de São Gabriel do Oeste!!

4. O Funcionamento do GPS

Após a atividade das circunferências, realizada pelos alunos, explica-se o funcionamento do GPS através da analogia, transferindo-se a atividade do plano para o espaço, ou seja, da intersecção de circunferências para a intersecção de esferas! (utilização de figuras e vídeo).

Intersecção entre esferas:



Figura 4.4: Intersecção entre três esferas.

- Avaliação Geral e Conclusões sobre a Atividade em Sala

1. A receptividade e o interesse por parte dos alunos foi muito grande;
2. O índice de grupos que conseguem realizar a atividade de modo satisfatório é alto;
3. O tempo ideal para realização dessa atividade é de, no mínimo, duas aulas;
4. A maior dificuldade apresentada por parte dos alunos ainda é conceitual, no que se diz respeito aos conceitos de círculo, circunferência e esfera;
5. A transposição do plano para o espaço apresentada com figuras é essencial para compreensão (visualização) do aluno.

Referências Bibliográficas

- [1] ROUSSEAU, C.; SAINT-AUBIN, Y. *Mathematics and Technology*, p. 01-36, Springer 2000.
- [2] ALVES, S. *A geometria do globo terrestre*, II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, . *Mitteil. der Math.* , 2004.
- [3] LIMA, D.D. *Desvendando a Matemática do GPS*, 2013.
- [4] Miguens, Pires, Altineu. *Navegação eletrônica e em condições especiais*, Brasília, 28/09/2000. Disponível em: <<https://www.mar.mil.br/dhn/bhmn/download/cap-37.pdf>>. Acesso em: 10/07/2014.
- [5] Gasparoto, Lutécia. *Matemática na prática: GPS*, Curitiba, 20/01/2009. Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1480>>. Acesso em: 14/12/2014.