UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

VALÉRIA OSTETE JANNIS LUCHETTA

UMA POSSÍVEL PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS PARA AS SÉRIES NO LIVRO ELEMENTOS DE ÁLGEBRA DE LEONHARD EULER

Rio Claro - SP

2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

VALÉRIA OSTETE JANNIS LUCHETTA

UMA POSSÍVEL PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS PARA AS SÉRIES NO LIVRO ELEMENTOS DE ÁLGEBRA DE LEONHARD EULER

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Orientadores: Prof. Dr. Romulo Campos Lins (*in memoriam*)
Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira

Rio Claro - SP

2017

510.07 Luchetta, Valéria Ostete Jannis
L936p Uma possível produção de significados para as séries infinitas no livro Elementos de Álgebra de Leonhard Euler / Valéria Ostete Jannis Luchetta. - Rio Claro, 2017
244 f. : il., figs., fots.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Romulo Campos Lins (in memoriam)
Orientador: Marcos Vieira Teixeira

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Educação matemática. 3. História da matemática. 4. Leonhard Euler. 5. Séries infinitas. 6. Produção de significados. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP - Adriana Ap. Puerta Buzzá / CRB 8/7987

VALÉRIA OSTETE JANNIS LUCHETTA

UMA POSSÍVEL PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS PARA AS SÉRIES NO LIVRO ELEMENTOS DE ÁLGEBRA DE LEONHARD EULER

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Comissão examinadora

Prof. Dr. Romulo Campos Lins (*in memoriam*) - Orientador
Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira
IGCE/Unesp/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies
IME/USP/São Paulo (SP)

Prof. Dr. Henrique Lazari
IGCE/Unesp/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva
ICE/UFJF/Juiz de Fora (MG)

Profa. Dra. Lígia Arantes Sad
Cefor/IFES/ Espírito Santo (ES)

Rio Claro - SP, 24 de novembro de 2017

O amor, quando se revela,
Não se sabe revelar.
Sabe bem olhar p'ra ela,
Mas não lhe sabe falar.

Quem quer dizer o que sente
Não sabe o que há de dizer.
Fala: parece que mente ...
Cala: parece esquecer ...

Ah, mas se ela adivinhasse,
Se pudesse ouvir o olhar,
E se um olhar lhe bastasse
P'ra saber que a estão a amar!

Mas quem sente muito, cala;
Quem quer dizer quanto sente
Fica sem alma nem fala,
Fica só, inteiramente!

Mas se isto puder contar-lhe
O que não lhe ouso contar,
Já não terei que falar-lhe
Porque lhe estou a falar ...

Fernando Pessoa

aos eternos amores de minha vida:

Sérgio e Giovanna.

Agradecimentos

Agradeço:

Ao meu orientador professor Romulo Campos Lins (*in memoriam*), pela amizade que fizemos, pelas conversas que tivemos e acima de tudo pela paciência de esperar o meu tempo de amadurecimento perante a sua teoria. Seu maior papel para mim foi mostrar a possibilidade da coexistência de uma teoria e de sua prática, ele não só desenvolveu uma teoria mas viveu de acordo com os seus pressupostos. Ele me mostrou a importância da *diferença*. Sou eternamente grata.

Ao professor Marcos Vieira Teixeira por aceitar a responsabilidade de representar meu orientador na minha defesa de doutoramento e pelos seus comentários, sugestões e conversas. Muitíssimo obrigada!

Ao professor Henrique Lazari que me acolheu em meus primeiros passos neste programa, pela torcida e pela amizade.

Ao professor Francisco César Polcino Milies, meu eterno orientado e amigo, por participar mais uma vez, da minha caminhada. Obrigada por sempre me mostrar com mestria o significado da palavra mestre.

Ao professor Amarildo Melchiades da Silva, por aceitar participar deste meu processo de doutoramento, pelos comentários, sugestão e conversas.

À professora Ligia Arantes Sad, por aceitar participar deste meu processo final de doutoramento, pelos comentários e sugestões.

Aos funcionários e professores do curso de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro aos quais foram sempre solícitos.

Aos colegas de trabalho do Instituto Federal de São Paulo (IFSP) - campus de São Paulo, pela torcida.

Aos amigos que fiz durante o doutoramento e em especial à Hannah Dora de Garcia e Lacerda, Regina Ehlers Bathelt, Guilherme Francisco Ferreira e João Pedro de Paulo.

Aos integrantes do grupo Sigma-T por compartilharmos interlocutores.

Às funcionárias da Biblioteca e Biblioteca de Obras Raras da UFRJ: Zoraíde e Cristina, por me receberem muito bem e serem muito solicitas.

Ao pesquisador Martin Mattmüller do Bernoulli-Euler-Zentrum da Basiléia, Suíça, por me receber prontamente e me proporcionar momentos de felicidade única ao me mostrar o acervo com algumas das obras de Euler, além de me agraciar com um selo comemorativo do tricentenário do nascimento de Euler.

Ao Instituto Federal de São Paulo (IFSP) por me conceder afastamento integral de minhas atividades e me dedicar exclusivamente ao meu doutoramento.

Aos meus pais: Lorival e Mércia, e minha irmã Valesca pela torcida.

Acima de tudo, agradeço a minha família: Sérgio, Giovanna e Bruno. Vocês foram maravilhosos durante todo este caminho. Vocês compreenderam minhas ausências no preparo dos almoços de domingo, participaram de discussões à respeito de meu trabalho, escutaram, leram, sugeriram mudanças e releram meu trabalho. Me apoiaram, me incentivaram e me suportaram durante todo este processo. Amo vocês.

Resumo

No presente trabalho apresentamos uma análise de alguns dos capítulos da obra *Elements of Algebra* (1840), de Leonhard Euler (1707 – 1783), que tratam de *Séries infinitas*. Nesta obra encontramos os métodos e os resultados mais importantes à respeito de álgebra alcançados por Euler até 1770. Nosso objetivo foi analisar e evidenciar os diferentes modos de produção de significados e conhecimentos para o objeto matemático *séries infinitas* na obra supra citada tomando como fundamentação teórica e metodológica o *Modelo dos Campos Semânticos*. Apresentamos a tradução dos capítulos selecionados, produzimos significados a eles utilizando nosso referencial teórico e os comparamos com a forma que produzimos significados e conhecimentos hoje utilizando a Teoria de Séries.

Palavras-chave: Educação Matemática, História da Matemática, Leonhard Euler, Séries Infinitas, Produção de Significados.

Abstract

In this work we present an analysis of some of the chapters of Leonhard Euler's (1707-1783) Elements of Algebra (1840), which deal with Infinite Series. In his work we find the most important methods and results regarding algebra achieved by Euler until 1770. Our goal was to analyze and evidence the different modes of production of meanings and knowledge for the mathematical object *infinite series* in the work cited above taking as theoretical and methodological foundation the *Model of Semantic Fields.* We present the translation of the selected chapters, we produce meanings for them using our theoretical benchmark and compare them with the way we produce meanings and knowledge today using the Theory of Series.

Keywords: Mathematics Education, History of Matemática, Leonhard Euler, Infinite Series, Production of Meaning.

Sumário

Introdução

Séries é um assunto abordado nos cursos de licenciatura em matemática nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e/ou Sequências e Séries e Análise. Nestas disciplinas a ênfase neste assunto é sobre convergência e especialmente sobre os teoremas e testes de convergência. Assim sendo, o futuro professor de matemática, no processo de sua formação matemática, muitas vezes não consegue conectar este assunto com os componentes curriculares sobre os quais ele ministrará aulas na Educação Básica (ensino fundamental e médio).

Ao estudarmos a obra *Elements of Algebra*, de Leonhard Euler, ficam evidenciadas algumas das utilizações desse assunto no ensino básico. O presente trabalho tem como objetivo apresentar como Euler constituía as *séries* na referida obra.

Em linhas gerais, apresentaremos os capítulos sob os quais esta tese foi elaborada.

O primeiro capítulo apresenta os caminhos que nos conduziram à escolha da obra *Elements of Algebra* e os motivos pelos quais optamos estudar o objeto matemático: *séries.* Elaboramos uma breve história do livro e, retratamos um pouco da vida de Euler e de seus trabalhos. Também exibimos nossa proposta de considerar Euler um cientista que utiliza o pensamento empírico em seus trabalhos. E finalizamos o capítulo, expondo as primeiras concepções e definições que Euler apresenta no primeiro capítulo do seu livro *Elements of Algebra*, da Parte I (Contendo a Análise de Quantidades Determinadas), da Seção I (Dos Diferentes Métodos de Calcular Quantidades Simples), intitulado *Da Matemática em geral.*

O segundo capítulo apresenta as principais noções e ideias de nosso referencial teórico. O nosso trabalho é fundamentado no Modelo dos Campos Semânticos, que é um modelo epistemológico que nos permite analisar certos modos de produção de significados e conhecimentos na matemática.

O terceiro capítulo inicia com uma breve história sobre as séries infinitas até a época de Euler. Também apresenta uma pequena introdução sobre as séries infinitas e alguns dos possíveis significados naturalmente produzidos para elas na matemática.

O quarto capítulo apresenta *uma* possível produção de significado para o Capítulo V, cujo título é *Das Resoluções das Frações em Séries Infinitas*, da Parte I, Seção II, do livro *Elements of Algebra.* Neste referido capítulo, Euler constitui o objeto *séries*, a partir da divisão elementar, que é um dos modos de produzir significado naturalmente para as séries infinitas. Euler também constitui os objetos: soma de uma série, séries convergentes e divergentes.

O quinto capítulo apresenta *uma* possível produção de significado para o Teorema Binomial encontrado na obra *Elements of Algebra*. Analisamos e produzimos significados para os capítulos X, XI, XII e XIII, da Parte I, Seção II, onde Euler nos apresenta a construção da fórmula do Teorema Binomial (Capítulos X e XI) e utiliza a generalização do Teorema Binomial (Capítulos XII e XIII) para extrair raízes quadradas e cúbicas de um binômio da forma $a + b$, além de utilizar também o Teorema Binomial para n negativo. Também mostramos como Euler constitui alguns objetos, tais como o triângulo aritmético, os números binomiais, as permutações simples, as permutações com elementos repetidos e a expansão multinomial. Finalizamos este capítulo apresentando brevemente dois artigos onde Euler demonstra o Teorema Binomial Generalizado.

O sexto capítulo apresenta *uma* possível produção de significado para os Capítulos XI e XII, da Parte I, Seção III intitulada Das Razões e Proporções, do livro *Elements of Algebra*. No Capítulo XI, cujo título é *Das Progressões Geométricas*, Euler apresenta a definição de *progressão geométrica* (P.G.) e sua classificação, a fórmula do termo geral de uma P.G., a fórmula da soma dos n termos de uma P.G. e a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita, além de fornecer vários exemplos e aplicações. O Capítulo XII, cujo título é *Das Frações Decimais Infinitas*, Euler apresenta como transformar uma fração ordinária em uma fração decimal e vice-versa e também a regra de transformar dízimas periódicas simples em frações ordinárias.

O último capítulo apresenta algumas das possíveis considerações ao termino desta tese, trazemos alguns apontamentos e possíveis encaminhamentos para trabalhos futuros.

Capítulo 1

O nascimento de uma tese

O que pensa o homem quando se permite pensar sem amarras.
Michel Montaigne

A proposta inicial desta pesquisa era traduzirmos do inglês para o português a obra *Elements of Algebra* de Leonhard Euler, datada de 1840, e a partir desta tradução buscaríamos analisar os modos de produção de significados e conhecimentos para os objetos matemáticos com base no Modelo dos Campos Semânticos e, pautados nesta obra, o currículo da licenciatura em matemática e a formação do professor seriam postos sob análise crítica.

Uma primeira indagação que pode surgir desta proposta é: por que traduzir para o português uma obra de 1840? Segundo Dunham (1999), os matemáticos modernos estudam os conceitos e as teorias da matemática nos *textbooks*[1] modernos em vez de fontes originais, mas isto é compreensível, uma vez que houve mudanças de notações ao longo do tempo, e até mesmo mudanças de produções de significados para os objetos matemáticos. Além, é claro, dos avanços alcançados pela matemática que podem tornar as discussões com base nas obras originais obsoletas. No entanto, este mesmo autor, no prefácio de sua obra *Euler: The Master of Us all*, afirma: "Nenhum estudante de literatura ficaria satisfeito com uma mera sinopse de *Hamlet*. Da mesma forma, nenhum matemático deveria seguir por sua carreira sem encontrar Euler face a face." (DUNHAM, 1999, p. xvi, tradução nossa).

Aqui cabe destacarmos que o face a face não se refere aos inúmeros resultados e teoremas atribuídos a Euler, mas sim a ficarmos diante de suas obras originais, e em suas leituras "podemos ver uma grande mente criativa trabalhando" (ALEXANDERSON, 1983, p. 276, tradução nossa). Para nós, pesquisadores modernos, "suas técnicas, bem como seus resultados são uma fonte abundante de ideias." (ALEXANDERSON, 1983 p. 277, tradução nossa).

Assim sendo, a tradução desta obra torna-se um objeto de interesse e estudo, não apenas por seu conteúdo, mas pelas técnicas e métodos apresentados para constituir os

[1] Este termo é utilizado para designar um livro destinado ao uso no ensino de todos os níveis.

objetos matemáticos.

Mas por que esta obra? Segundo Grimberg, podemos afirmar que na obra *Elements of Algebra* (1770) de Leonhard Euler "constam os métodos e os resultados mais importantes [sobre álgebra] alcançados por Euler e Lagrange até 1770" (GRIMBERG, 2014, p. 146). Esta obra escrita de forma magistralmente didática apresenta

> um absoluto início passo a passo a partir dos números naturais por meio dos princípios aritméticos e algébricos, e técnicas da teoria elementar das equações direto aos detalhes mais sutis da análise indeterminada (equações Diofantinas) (FELLMANN, 2007, p. 120-121, tradução nossa).

De acordo com Fellmann (2007), este livro tornou-se um *bestseller* alcançando 108 mil cópias entre os anos de 1883 e 1942, e segundo este autor, só existe um outro livro na área de matemática que teve um sucesso compatível nas vendas: os *Elementos* de Euclides. Assim, estamos diante de um importante livro de "álgebra" cujo prestígio marcou época.

Diante das justificativas apresentadas acima para a escolha da obra e o porque de traduzirmos esta obra, a tradução foi iniciada. A princípio usaríamos apenas a versão inglesa, porém durante o processo de tradução surgiram, entre outras coisas, obstáculos em decorrência do uso do inglês arcaico. Então recorremos à tradução francesa de 1798, ao qual descobrimos que o tradutor francês, Johann III Bernoulli, modificou a divisão da obra original, acrescentando ao primeiro volume, a Seção I, *Das Equações Algébricas e das Resoluções destas Equações*, do volume dois, pois segundo ele completava a análise de quantidades determinadas. Assim, esta mudança, segundo Bernoulli, favorecia a divisão natural da álgebra em análise determinada e indeterminada, além de preservar a igualdade de tamanho nos dois volumes após os acréscimos de Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813). Bernoulli também alterou um pouco a obra original ao acrescentar alguns cálculos e explicações, e modificar alguns resultados, mas isto se deve ao fato que Euler, naquela época, estava quase cego e ditou o livro a um servo alemão sem instrução. Assim, no prefácio da tradução francesa, temos, nas próprias palavras de Bernoulli:

> Eu me esforcei para traduzir essa Álgebra no estilo mais adequado às obras desse tipo. Minha principal ansiedade era manter o sentido do original e torná-lo com a maior clareza. Talvez eu possa presumir dar a minha tradução alguma superioridade sobre o original, porque esse trabalho foi ditado, e admitindo que não houve nenhuma revisão do autor, é fácil conceber que em muitas passagens teriam necessidades de correções. Se eu não submeti a tradução literalmente, eu não falhei em seguir o autor passo a passo [...] em apenas alguns lugares tomei a liberdade de suprimir alguns detalhes de cálculos, e inserir uma ou duas linhas de ilustração no texto, que acredito ser desnecessário estabelecer uma explicação das razões pelas quais eu estava justificado em fazer isso. (EULER, 1840, p. liv, tradução nossa).

De fato, ao tratarmos com duas traduções percebemos as diferenças e desafios, pois estávamos buscando analisar quais eram os modos de produção de significados que Euler produzia para os objetos matemáticos. Assim, buscamos também o original alemão para uma melhor compreensão da sua obra, uma vez que observamos não só inserções do tradutor francês, mas também modificações dos modos de produção de significados por parte do tradutor inglês, além deste acrescentar todos os exercícios contidos no livro. Além da versão em alemão de 1771, utilizamos também uma edição em alemão de 1911.

Durante a tradução ocorreram vários momentos de estranhamentos ao nos depararmos com os objetos matemáticos constituídos por Euler, e a cada estranhamento, uma pausa na tradução, uma busca dos trabalhos anteriores de Euler ou de outros matemáticos para sabermos de onde Euler estava falando. Houve, durante a tradução, uma ruptura significativa à respeito dos modos de produção de significados para certos objetos matemáticos, aos quais já estavam naturalizados para a pesquisadora. Segundo Popper (1978),

> [...] cada problema surge da descoberta de que algo não está em ordem com o nosso suposto conhecimento; ou examinado logicamente, da descoberta de uma contradição interna entre o nosso suposto conhecimento e os fatos; ou, declarado mais corretamente, da descoberta de uma contradição entre nosso suposto conhecimento e os supostos fatos. (POPPER, 1978 apud FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 90).

Assim, diante destes outros objetos matemáticos distintos daqueles já naturalizados pela nossa cultura, vimos a necessidade de uma análise detalhada e profunda à respeito dos modos de produção de significados destes objetos. Diante desta demanda, uma leitura positiva[2] da obra de Euler nos proporcionou um mergulho no mundo de Euler ao qual nos fizeram ficar frente a frente com uma riquíssima diversidade de modos de produção de significados para os objetos matemáticos ao longo dos séculos.

Assim sendo, analisar toda a obra seria um trabalho hercúleo para uma tese de doutorado que tem tempo limitado de quatro anos, então nos focamos em um único objeto: *séries.*

A escolha deste objeto de estudo foi devido aos estranhamentos causados durante a tradução da obra com a qual a pesquisadora se deparou. Após a tradução do capítulo intitulado *Das Resoluções das Frações em Séries Infinitas*, da Parte I, Seção II, da referida obra, quando iniciamos a produção de significado para este capítulo houve um momento de limite epistemológico pois não era legítimo para mim, pesquisadora, a produção de significado que Euler estava produzindo para séries. Assim, diante deste limite epistemológico, a pesquisadora passou por uma fase que chamamos de descentramento[3] para conseguir prosseguir com sua pesquisa, portanto, diante deste fato, a pergunta que se tornou mais urgente ser investigada era: **Quais eram os modos de produção de significados e conhecimentos para séries que Euler nos apresentava em seu livro?**

Desse modo, o objetivo de nossa tese tornou-se a produção de significados para alguns capítulos do livro *Elements of Algebra* de Leonhard Euler que tratam de Séries Infinitas,

[2]No sentido proposto por Lins (2012), "Toda leitura é autoria. Ler é dizer 'o que está aqui é ...'." (LINS, 2012, p. 23). Uma leitura é positiva quando o outro não é lido pela falta. Como observa Silva (2003), "em termos teóricos, o caminho para uma leitura positiva é buscar fazer uma leitura do outro através de suas legitimidades, seus interlocutores, compartilhando o mesmo espaço comunicativo." (SILVA, A. 2003, p. 54).

[3]Descentramento é o esforço "de entender do que o outro fala, almejando que modos de produção de significados sejam compartilhados, que se crie um espaço comunicativo." (OLIVEIRA, 2012, p. 207).

utilizando como referencial teórico o Modelo dos Campos Semânticos.

A relevância do nosso trabalho pode ser justificada sob dois pontos de vista: o da história da matemática e o da educação matemática. A tradução desta obra é relevante para a pesquisa em história da matemática, pois disponibiliza uma tradução moderna para apresentar como Euler trabalhava com as séries na obra *Elements of Algebra*. A relevância do nosso trabalho para educação matemática é evidenciar os diferentes modos de produção de significados e conhecimentos para os objetos matemáticos.

Nossa pesquisa assume uma perspectiva teórica pois temos por objetivo a (re)construção e o desenvolvimento do objeto denominado séries apresentados em alguns dos trabalhos de Euler. Também podemos caracterizá-la como uma pesquisa qualitativa do tipo histórico-bibliográfica pois temos como material de análise documentos escritos tais como livros e artigos produzidos por Euler.

1.1 O livro: *Vollständige Anleitung zur Algebra*

O livro que traduzimos, *Elements of Algebra*, do inglês (1840), é uma tradução do livro *Vollständige Anleitung zur Algebra* [Introdução Completa à Álgebra] que foi publicado em dois volumes, segundo Thiele (2011), pela primeira vez em 1768/69, pela Academia de Ciências de São Petersburgo, em uma tradução russa feita por P. Inokhodtsov e I. Iudin, e então em 1770, a mesma Academia publicou uma edição em alemão. Em 1774, o *textbook* de Euler, escrito originalmente em alemão, foi traduzido para o francês por Johann III Bernoulli[4], e Joseph-Louis Lagrange inseriu 100 páginas de complementos à tradução.

Esta edição francesa foi o ponto de partida para a edição inglesa, que foi iniciada por Francis Horner[5]. Ele morreu antes de completar o trabalho, e deixou isso para John Hewlett[6], que finalmente editou uma tradução para o inglês em 1797. A obra também foi traduzida para o holandês (1773), uma segunda tradução em russo (1812), para o latim

[4] Johann III Bernoulli (1744 - 1807), neto de Johann Bernoulli, e filho de Johann II Bernoulli. Estudou direito e teve interesse em matemática. Com catorze anos de idade obteve o grau de mestre em direito. Aos dezenove anos, foi nomeado para uma cadeira na Academia de Berlim. Ele escreveu sobre astronomia, geografia, matemática e suas contribuições mais importantes foram os relatos de suas viagens pela Alemanha, que vieram a ter um impacto histórico. Ele estava bem ciente da linha de matemáticos famosos do qual era descendente e cuidou da riqueza dos escritos matemáticos que foi passado entre os membros da família. Ele vendeu as cartas para a Academia de Estocolmo, onde permaneceram esquecidas até 1887, naquela ocasião quando aquelas cartas foram examinadas, 2800 cartas escritas por Johann III Bernoulli foram encontradas na coleção. Em 1774 ele publicou uma tradução francesa dos *Elementos de Álgebra* de Leonhard Euler. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Johann(III).html> e <https://en.wikisource.org/wiki/1911_Encyclop\T1\aedia_Britannica/Bernoulli>. Acesso em: 27 jan. 2016.

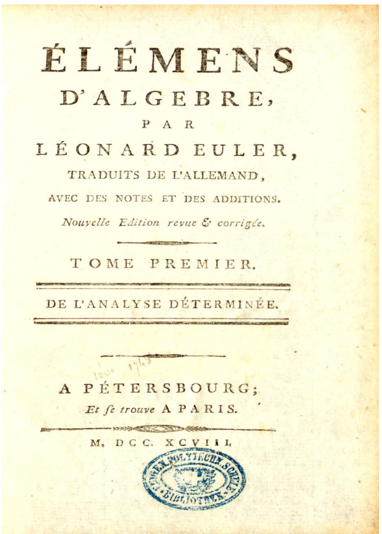
[5] Francis Horner (1778 - 1817) foi um político escocês, jornalista, advogado e economista político. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Francis_Horner>. Acesso em: 27 jan. 2016.

[6] John Hewlett (1762 - 1844) foi um erudito bíblico de destaque na Grã-Bretanha do século XIX. Depois de tornar-se ministro, ele foi admitido como *sizar* na Universidade de Magdalene, Cambridge. Ele foi nomeado reitor de Hilgay, Downham, Norfolk em 1819 e atuou como professor de belas-artes na *Royal Institution* da Grã-Bretanha. Ele publicou vários livros de sermões e teologia. Sua obra mais importante, no entanto, foi sua edição da Bíblia (1812), que incluiu cinco volumes de comentários (1816). Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/John_Hewlett>. Acesso em: 18 nov. 2016.

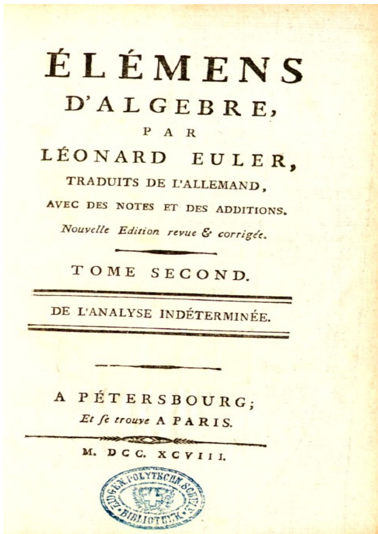
(1790), inglês (1797, 1822) e grego (1800). A Academia Russa publicou uma segunda e terceira edição alemã em 1771 e 1802; as edições posteriores publicadas pela Reclam Verlag, venderam mais de 100 000 exemplares entre 1883 a 1942. Em 1972, Clifford Truesdell[7] acrescentou uma introdução "Leonard Euler, O Supremo Geômetra" e Christopher Sangwin, em 2007, publicou uma tradução em inglês com um texto modernizado e anotações encurtadas da Parte I da edição de John Hewlett de 1840.

(a) Vollständige Anleitung zur Algebra, Tomo Primeiro (1771)

(b) Vollständige Anleitung zur Algebra, Tomo Segundo (1771)



(c) Élémens D'Algebre, Tomo Primeiro, *Da Análise Determinada* (1798)



(d) Élémens D'Algebre, Tomo Segundo, *Da Análise Indeterminada* (1798)

Uma questão que parece surgir naturalmente é: por que esta obra foi publicada pela primeira vez em russo? Em 1769, a primeira parte da obra *Vollständige Anleitung zur*

[7] Clifford Ambrose Truesdell III (1919 - 2000) foi um matemático estadunidense, professor de mecânica racional na Universidade Johns Hopkins, de 1961 até seu falecimento. Foi fundador e editor das publicações *Archive for Rational Mechanics* and *Analysis e Archive for the History of Exact Sciences*. Disponível em: <`https://pt.wikipedia.org/wiki/Clifford_Truesdell`>. Acesso em: 27 jan. 2016.

Algebra já havia sido publicada em língua russa, e sabemos que Euler deixou Berlim no dia 1 de junho de 1766 e chegou em São Petersburgo no dia 28 de julho deste mesmo ano. Sendo assim, Fellmann (2010) afirma que é muito provável que Euler iniciou a escrita desta obra em Berlim, pelo menos o rascunho desta ao qual deve ter sido concluída em 1768, já em São Petersburgo. Segundo Thiele (2011) esta suposição é sustentada por três exemplos contidos nesta obra onde Euler utiliza os números 1765 e 1766 que possivelmente indicam as datas de composição deste livro. Averiguemos.

> *Euler: 243. É bem conhecido que, no modo comum de escrita dos números [Zahlen] por meio dos dez algarismo [Ziffern], ou símbolos,*
>
> $$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$
>
> *o primeiro algarismo da direita tem apenas seu significado natural, os algarismos em segundo lugar tem dez vezes o valor que teria tido no primeiro, os algarismos em terceiro lugar tem cem vezes o valor, e os da quarta, mil vezes, e assim por diante, de modo que à medida que avançamos para a esquerda, adquirem um valor dez vezes maior do que tinham na posição anterior. Assim, o número **1765**, o algarismo 5 está, em primeiro lugar, à direita, e é apenas igual a 5; em segundo lugar está o 6, mas este algarismo, em vez de 6, representa* 10×6 *ou 60; o algarismo 7 está em terceiro lugar, e representa* 100×7 *ou 700; e, por último, o 1, que está na quarta posição, torna-se 1000; de modo que nós lemos o número dado assim:*
>
> Um mil, setecentos e sessenta e cinco.
>
> *(EULER, 1840, p. 70, tradução nossa).*

> *Euler: 248. Por outro lado, os logaritmos de números que são menores do que 10, ou expressos por um simples algarismo, não contém um inteiro, e por esta razão encontramos 0 antes da vírgula, então temos duas partes para considerarmos no logaritmo. Em primeiro lugar, o que precede a vírgula, ou a parte inteira; e a outra, as frações decimais que serão adicionadas à anterior. A parte inteira de um logaritmo que é geralmente chamada de* característica, *é facilmente determinada a partir do que já dissemos no artigo anterior. Assim, ela é 0, para todos os números que tem contudo* um algarismo*; ela é 1, para aqueles que têm* dois*; é 2, para aqueles que têm* três*; e, em geral, é sempre um a menos que o número [Anzahl] de algarismos. Portanto, se o logaritmo de **1766** for solicitado, já sabemos que a primeira parte, ou aquela dos números inteiros, é necessariamente 3. (EULER, 1840, p. 72, tradução nossa).*

> *Euler: 421. Se for solicitado adicionar todos os números naturais de* 1 *a* n*, temos, para encontrarmos esta soma, o primeiro termo* 1*, o último termo* n *e o número de termos* n*, portanto, a soma solicitada é* $\frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$*. Se fizermos* $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{1766}$*, a soma de todos os números, de* 1 *a* ***1766****, será* 883 *(a metade do número de termos) multiplicado por* 1767 *que é igual a* 1560261*. (EULER, 1840, p. 137, tradução nossa).*

Ainda segundo Thiele (2011), esta suposição é fortemente apoiada em dois trabalhos anteriores onde encontramos Euler brincando com as datas de suas escritas: em *Cartas a uma princesa da Alemanha* (1768), Euler brinca com a data falando de um número **1761**-gonal e na obra *Einleitung zur Rechenkunst* (1738)[8] (Figura 1.1), encontramos a seguinte questão: “No ano de **1734** foi declarado que a pólvora havia sido inventada há 354 anos. A questão é: em que ano, após o nascimento de Cristo, a pólvora foi inventa?” (EULER, 1738, cap. 3, p. 9, tradução nossa).

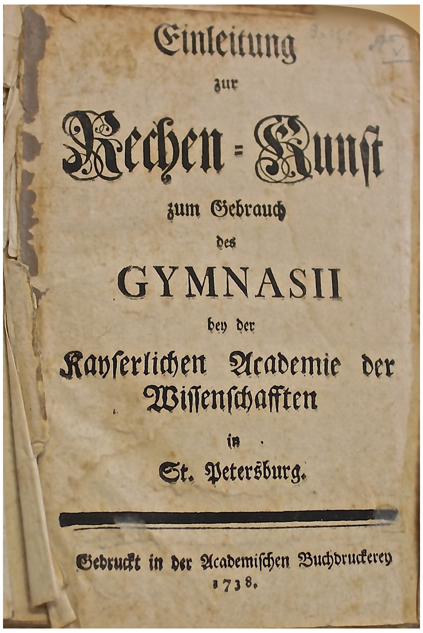

Einleitung
zur
Rechen-Kunst
zum Gebrauch
des
GYMNASII
bey der
Kayserlichen Academie der
Wissenschafften
in
St. Petersburg.
Gedruckt in der Academischen Buchdruckerey
1738.

Figura 1.1: Folha de rosto da obra *Einleitung zur Rechenkunst* (1738).
Fonte: Bernoulli-Euler-Zentrum

O livro *Vollständige Anleitung zur Algebra* foi traduzido para o português, de acordo com Silva da Silva (2009), possivelmente por Manuel Ferreira de Araújo Guimarães e publicado em 1809, tendo sido um dos primeiro livro didático impresso no Brasil após a introdução da imprensa no país, o qual foi adotado para o ensino de álgebra na Academia Real Militar do Rio de Janeiro até o ano de 1823 quando foi substituído pela obra de Lacroix. Silva da Silva saiu em busca desta obra e descobriu um exemplar desta tradução na Biblioteca de Obras Raras da UFRJ em precário estado. Assim, fomos até a cidade do Rio de Janeiro visitar esta biblioteca em busca desta tradução.

De fato, como podemos observar a obra está se definhando (Figuras 1.2, 1.3 e 1.4), a cada manuseio ocorrem esfarelamento do papel. A obra encontra-se incompleta, como podemos ver na Figura 1.3, ela termina no Capítulo VIII, cujo título é *Das Proporções Geométricas*, da Seção III, da Parte I, portanto, estão faltando os Capítulos IX, X, XI, XII e XIII da Seção III, intitulada *Das Relações e Proporções*, da Parte I, que somam cerca de 46 páginas faltantes se considerarmos o original alemão como referência para o final do Tomo Primeiro e faltam aproximadamente 330 páginas se considerarmos a tradução francesa que incorporou a seção: *Das Equações Algébricas e das Resoluções destas Equações*, contendo dezesseis capítulos. Ao analisarmos a obra traduzida para o português,

[8]Obra escrita por Euler para uso nas escolas de *São Petersburgo* ao qual aborda a aritmética elementar.

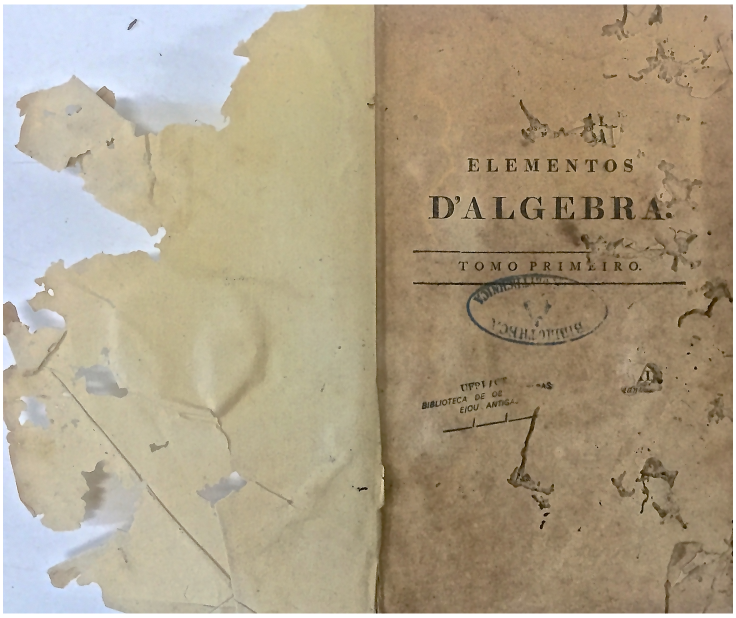
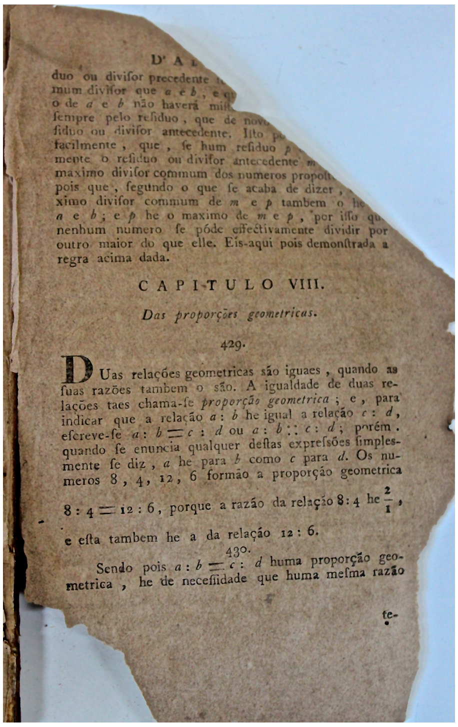


Figura 1.2: *Elementos D'Algebra* (1809) Tomo Primeiro.
Fonte: Biblioteca de Obras Raras do Centro de Tecnologia da UFRJ

observamos que as notas de rodapé inseridas pelo tradutor são traduções das notas de rodapé da tradução francesa (1798), portanto, podemos inferir que esta obra foi traduzida a partir de uma tradução francesa.


D' A
duo ou diviſor precedente
mum diviſor que *a* e *b*, e q
o de *a* e *b* não haverá mi
ſempre pelo reſiduo, que de novo
ſiduo ou diviſor antecedente. Iſto p
facilmente, que, ſe hum reſiduo *p*
mente o reſiduo ou diviſor antecedente *m*
maximo diviſor commum dos numeros propoſt
pois que, ſegundo o que ſe acaba de dizer,
ximo diviſor commum de *m* e *p* tambem o he
a e *b*; e *p* he o maximo de *m* e *p*, por iſſo qu
nenhum numero ſe póde effectivamente dividir por
outro maior do que elle. Eis-aqui pois demonſtrada a
regra acima dada.

CAPITULO VIII.

Das proporções geometricas.

429.

Duas relações geometricas são iguaes, quando as ſuas razões tambem o são. A igualdade de duas relações taes chama-ſe *proporção geometrica*; e, para indicar que a relação $a : b$ he igual a relação $c : d$, eſcreve-ſe $a : b = c : d$ ou $a : b :: c : d$; porém quando ſe enuncia qualquer deſtas expreſsões ſimplesmente ſe diz, *a* he para *b* como *c* para *d*. Os numeros 8, 4, 12, 6 formão a proporção geometrica

$8 : 4 = 12 : 6$, porque a razão da relação $8 : 4$ he $\frac{2}{1}$,

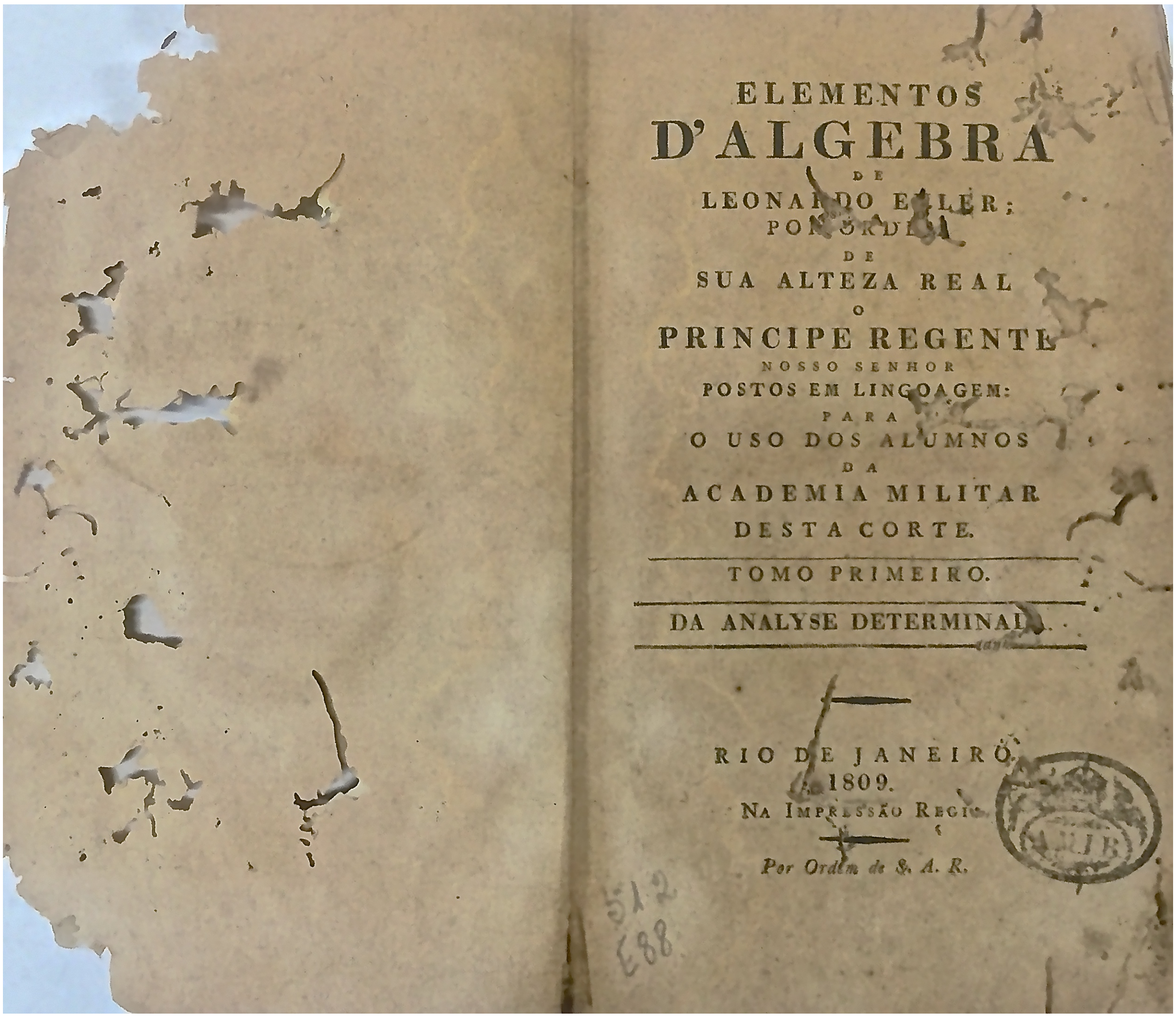
e eſta tambem he a da relação $12 : 6$.

430.

Sendo pois $a : b = c : d$ huma proporção geometrica, he de neceſſidade que huma meſma razão

te-

Figura 1.3: Página 207, Capítulo VIII, da Seção III, da parte I da obra *Elementos D'Algebra*.
Fonte: Biblioteca de Obras Raras do Centro de Tecnologia da UFRJ



ELEMENTOS
D'ALGEBRA
DE
LEONARDO EULER;
POR ORDEM
DE
SUA ALTEZA REAL
O
PRINCIPE REGENTE
NOSSO SENHOR
POSTOS EM LINGOAGEM:
PARA
O USO DOS ALUMNOS
DA
ACADEMIA MILITAR
DESTA CORTE.
TOMO PRIMEIRO.
DA ANALYSE DETERMINADA.
RIO DE JANEIRO.
1809.
NA IMPRESSÃO REGIA.
Por Ordem de S. A. R.
512
E88

Figura 1.4: Folha de rosto da edição em português da obra *Elementos D'Algebra* (1809) Tomo Primeiro. Fonte: Biblioteca de Obras Raras do Centro de Tecnologia da UFRJ

Também percebemos que a numeração dos artigos que compõem os capítulos da obra traduzida para o português estavam diferentes da numeração dos artigos da obra traduzida para o francês. Assim sendo, fizemos uma breve comparação entre a numeração dos artigos da obra traduzida para o português e dos artigos da obra traduzida para o francês. Vejamos.

A Seção I, nomeada *Dos differentes methodos de calcular as grandezas simples ou incomplexas*[9], da Parte I, cujo título é: *Que trata da Analyse determinada*[10], contém 23 capítulos, aos quais são numerados por artigos. Uma comparação rápida entre a tradução em língua portuguesa (TP) com a tradução em língua francesa (TF) nos mostrou uma correspondência entre a numeração desta seção. Esta seção inicia-se no artigo *1* e termina no artigo *255*, e podemos observar que todas as notas de rodapé inseridas pelo tradutor

[9] O título desta seção na tradução francesa (1798) é: *Des différentes Méthodes de calcul pour les grandeurs simples ou incomplexes* (Dos diferentes Métodos de cálculo para grandezas simples ou incomplexas) (EULER, 1798, p. 1).

[10] O título da tradução francesa (1798) da Parte I é: *Où l'on traite de l'Analyse déterminée* (Onde são tratadas a Análise Determinada) (EULER, 1798, p. 1).

francês foram mantidas e traduzidas para o português.

Na Seção II, designada *Dos differentes methodos de calcular as grandezas compostas ou complexas*[11], os Capítulos I, II, III e IV mantêm a correspondência da numeração entre os artigos da tradução em língua portuguesa com a tradução em língua francesa. No Capítulo V, cujo título é: *Da resolução das fracções em series infinitas*[12], notamos a primeira modificação de conteúdo de um artigo em relação a tradução francesa, o artigo *304* está incompleto, o tradutor omitiu os cálculos e os exemplos nos quais atribuíram-se valores numéricos para a variável a. Até o Capítulo VIII existe a paridade da numeração dos artigos com a tradução francesa (1798). No Capítulo IX, intitulado *Dos Cubos e extracção das raizes cubicas*[13], o tradutor omite dois exemplos do artigo *339* da tradução francesa. No Capítulo X, denominado *Das potencias mais altas das quantidades complexas*[14], o tradutor omitiu os três últimos artigos deste capítulo, a saber, os artigos *349*, *350* e *351* da tradução francesa, acrescentando um parágrafo ao final do artigo *348* com os dizeres: "Se por esta regra buscarmos os coeficientes de outra qualquer das potencias calculadas, acharemos resultados inteiramente conformes aos que obtivemos." (EULER, 1809, p. 163). A partir daqui, observamos que não há mais correspondência entre a numeração dos artigos da tradução em língua portuguesa com a tradução em língua francesa (1798).

Assim, o Capítulo XI, intitulado *Da permutação das letras, sobre a qual se funda a demonstração da regra antecedente*[15], na tradução francesa, o capítulo inicia-se no artigo *352* e termina no artigo *360* (o capítulo contém none artigos), já na tradução em língua portuguesa o capítulo inicia-se no artigo *349* e termina no artigo *357*, ou seja, contém nove artigos também, mas encontramos modificações nos artigos: *355* (TP) que corresponde ao artigo *356* (TF), onde o tradutor da língua portuguesa omite os cálculos das permutações; artigo *356* (TP) que corresponde ao artigo *359* (TF); artigo *357* (TP) que corresponde ao artigo *360* (TF), onde o tradutor da língua portuguesa omite o último parágrafo.

O Capítulo XII, denominado *Do modo de desenvolver em series infinitas as quantidades radicaes*[16], na tradução francesa, este capítulo inicia-se no artigo *361* e termina no artigo *369* (contém nove artigos), na tradução em língua portuguesa, o capítulo inicia-se no artigo *358* e termina no artigo *363*, ou seja, contém seis artigos. O tradutor da língua portuguesa une os artigos *361* e *362* da tradução francesa para compor o artigo *358*. O artigo *359* (TP) corresponde aos artigos *363* e *364* da tradução francesa. O artigo *360*

[11]O título desta seção na tradução francesa (1798) é: *Des différentes Méthodes de Calcul pour les Grandeurs composés ou complexes* (Dos diferentes Métodos de Cálculo para as Grandezas compostas ou complexas) (EULER, 1798, p. 193).

[12]O título deste capítulo na tradução francesa (1798) é: *De la Résolution des Fractions en des suites infinies* (Da Resolução das Frações em Séries Infinitas) (EULER, 1798, p. 222).

[13]O título deste capítulo na tradução francesa (1798) é: *Des Cubes & de l'extráction des Racines cubiques* (Dos Cubos e das extrações das raízes cúbicas) (EULER, 1798, p. 261).

[14]O título deste capítulo na tradução francesa (1798) é: *Des Puissances plus hautes des Quantités complexes* (Das Potências mais altas das Quantidades complexas) (EULER, 1798, p. 267).

[15]O título deste capítulo na tradução francesa (1798) é: *De la permutation des Lettres, sur laquelle se fonde la démonstration de la regle précédente* (Da permutação das letras, na qual se baseia a demonstração da regra anterior) (EULER, 1798, p. 280).

[16]O título deste capítulo na tradução francesa (1798) é: *Du Développement des Puissances irrationelles par des suites infinies* (Do Desenvolvimento das Potências Irracionais por Séries Infinitas) (EULER, 1798, p. 292).

(TP) corresponde ao artigo *365* (TF). O artigo *361* (TP) corresponde ao artigo *366* (TF). O artigo *362* (TP) corresponde aos artigos *367* e *368* da tradução francesa, e o artigo *363* (TP) corresponde ao artigo *369* (TF).

O Capítulo XIII, designado *Do modo de desenvolver em serie infinita as potencias, cujos expoentes são números negativos*[17], na tradução francesa, este capítulo inicia-se no artigo *370* e termina no artigo *377* (contém oito artigos), na tradução em língua portuguesa esse capítulo inicia-se no artigo *364* e termina no artigo *369*, ou seja, contém seis artigos. Encontramos as seguintes correspondências entre a numeração dos artigos na tradução em língua portuguesa com a tradução francesa: o artigo *364* (TP) corresponde ao artigo *370* (TF); o artigo *365* (TP) corresponde ao artigo *371* (TF); o artigo *366* (TP) corresponde ao artigo *372* (TF); o artigo *367* (TP) corresponde ao artigo *373* (TF), mas aqui o tradutor da língua portuguesa reduz os cálculos apresentados na tradução francesa; o artigo *368* (TP) corresponde ao artigo *374* (TF), mas aqui o tradutor da língua portuguesa acrescenta ao final deste artigo a seguinte frase: "Mediante esta fórmula poderemos resolver em serie [in]finita toda e qualquer fracção da fórmula $\frac{c}{(a+b)^m}$, [...] mesmo que m seja maior que a unidade." (EULER, 1809, p. 178); o artigo *369* (TP) corresponde a um resumo, em palavras, dos cálculos efetuados nos artigos *375*, *376* e *377* da tradução francesa.

A Seção III, alcunhada *Das relações e proporções*[18], é composta apenas por sete capítulos completos dos treze capítulos correspondentes da tradução francesa. O Capítulo I, cujo título é: *Da relação arithmetica, ou da differença entre dous números*[19], na tradução francesa, este capítulo inicia-se no artigo *378* e termina no artigo *389* (contendo doze artigos), na tradução em língua portuguesa, esse capítulo inicia-se no artigo *370* e termina no artigo *380*, ou seja, contém onze artigos. Assim, temos as seguintes correspondências entre a numeração dos artigos na tradução em língua portuguesa com a tradução francesa: o artigo *370* (TP) corresponde ao artigo *378* (TF); o artigo *371* (TP) corresponde ao artigo *379* (TF); o artigo *372* (TP) corresponde ao artigo *380* (TF); o artigo *373* (TP) corresponde ao artigo *381* (TF); no artigo *374* (TP) que corresponde ao artigo *382* (TF), o tradutor da língua portuguesa omite a última frase da tradução francesa; o artigo *375* (TP) corresponde ao artigo *383* (TF); o artigo *376* (TP) corresponde ao artigo *384* (TF); o artigo *377* (TP) corresponde ao artigo *385* (TF); no artigo *378* (TP) que corresponde ao artigo *386* (TF), o tradutor da língua portuguesa omite a última frase da tradução francesa; o artigo *379* (TF) é formado pela união dos artigos *387* e *388* da tradução francesa, além de não apresentar o exemplo que consta na tradução francesa e exibir de modo modificado o artigo *388* da tradução francesa; o artigo *380* (TP) corresponde ao artigo *389* (TF).

No Capítulo II, denominado *Das proporções arithmeticas*[20], na tradução francesa, o

[17]O título deste capítulo na tradução francesa (1798) é: *Du Développement des Puissances négatives* (Do Desenvolvimento das Potências Negativas) (EULER, 1798, p. 300).

[18]O título desta seção na tradução francesa (1798) é: *Des Rapports & des Proportions* (Das Razões [Relações] e Proporções) (EULER, 1798, p. 307).

[19]O título deste capítulo na tradução francesa (1798) é: *Du Rapport arithmétique, ou de la différence entre deux Nombres* (Da razão [relação] aritmética ou da diferença entre dois números) (EULER, 1798, p. 307).

[20]O título deste capítulo na tradução francesa (1798) é: *Des Proportions arithmétiques* (Das Proporções

capítulo inicia-se no artigo *390* e termina no artigo *401* (o capítulo contém doze artigos), na tradução em língua portuguesa, o capítulo inicia-se no artigo *381* e termina no artigo *391*, ou seja, contém onze artigos. Encontramos as seguintes correspondências entre a numeração dos artigos na tradução em língua portuguesa com a tradução francesa: o artigo *381* (TP) corresponde ao artigo *390* (TF); o artigo *382* (TP) corresponde ao artigo *391* (TF); o artigo *383* (TP) corresponde ao artigo *392* (TF); no artigo *384* (TP) que corresponde ao artigo *393* (TF), o tradutor da língua portuguesa omite a última frase da tradução francesa; o artigo *385* (TP) corresponde ao artigo *394* (TF); o artigo *386* (TP) que corresponde ao artigo *395* (TF), o tradutor da língua portuguesa modifica o último parágrafo da tradução francesa; o artigo *387* (TP) corresponde ao artigo *396* (TF); o artigo *388* (TP) corresponde ao artigo *397* (TF); o artigo *389* (TP) corresponde ao artigo *398* (TF); no artigo *390* o tradutor da língua portuguesa une os artigos *399* e *400* da tradução francesa, modificando um pouco o último; o artigo *391* (TP) corresponde ao artigo *401* (TF).

O Capítulo III, intitulado *Das progressões arithmeticas*[21], na tradução francesa, o capítulo inicia-se no artigo *402* e termina no artigo *411* (o capítulo contém dez artigos), já na tradução em língua portuguesa, o capítulo inicia-se no artigo *392* e termina no artigo *400*, ou seja, contém nove artigos. Notamos as seguintes correspondências entre a numeração dos artigos da tradução em língua portuguesa com a tradução francesa: o artigo *392* (TP) corresponde ao artigo *402* da tradução francesa, mas o tradutor da língua portuguesa faz pequenas modificações; o artigo *393* (TP) corresponde ao artigo *403* (TF); o artigo *394* (TP) corresponde ao artigo *404* (TF); o artigo *395* (TP) que corresponde a união dos artigos *405* e *406* da tradução francesa, foram modificados pelo tradutor da língua portuguesa; o artigo *396* (TP) corresponde ao artigo *407* (TF); no artigo *397* (TP) que corresponde ao artigo *408* (TF), o tradutor da língua portuguesa além de modificá-lo, omite o último exemplo da tradução francesa; no artigo *398* (TP) que corresponde ao artigo *409* (TF), o tradutor da língua portuguesa não apresenta o último exemplo; o artigo *399* (TP) corresponde ao artigo *410* (TF); o tradutor da língua portuguesa modificou o artigo *400* ao qual corresponde ao artigo *411* (TF).

O Capítulo IV, designado *Da Sommação das progressões arithmeticas*[22], a tradução francesa inicia este capítulo no artigo *412* e termina no artigo *424* (o capítulo contém treze artigos), a tradução em língua portuguesa inicia este capítulo no artigo *401* e termina no artigo *408*, ou seja, contém oito artigos. Observamos as seguintes correspondências entre a numeração dos artigos da tradução em língua portuguesa com a tradução francesa: o artigo *401* (TP) corresponde ao artigo *412* (TF); o artigo *402* (TP) corresponde ao artigo *413* (TF), com modificações feita pelo tradutor da língua portuguesa; o artigo *403* (TP) corresponde ao artigo *414* (TF); o artigo *404* (TP) corresponde ao artigo *415* (TF); o artigo *405* (TP) corresponde ao artigo *416* (TF); o artigo *406* (TP) corresponde ao artigo *417* (TF); o artigo *407* (TP) que corresponde a união dos artigos *418* e *419* da tradução francesa, foram modificados pelo tradutor da língua portuguesa; o artigo *408* (TP) que corresponde ao artigo *420* (TF), foi modificado pelo tradutor da língua portuguesa. O

---

aritméticas) (EULER, 1798, p. 314).

[21]O título deste capítulo na tradução francesa (1798) é: *Des Progressions Arithmétiques* (Das Progressões Aritméticas) (EULER, 1798, p. 322).

[22]O título deste capítulo na tradução francesa (1798) é: *De la Sommation des Progressions arithmétiques* (Do Somatório das Progressões Aritméticas) (EULER, 1798, p. 331).

tradutor da língua portuguesa exclui deste capítulo os artigos *421*, *422*, *423* e *424* da tradução francesa.

O Capítulo V, cujo título é: *Dos números figurados ou polygonos*[23], a tradução francesa inicia este capítulo no artigo *425* e termina no artigo *439* (o capítulo contém quinze artigos), a tradução em língua portuguesa inicia este capítulo no artigo *409* e termina no artigo *414*, ou seja, contém seis artigos. Neste capítulo observamos uma maior modificação do tradutor da língua portuguesa. O artigo *409* (TP) corresponde aos artigos *436* e *425* da tradução francesa modificados; o artigo *410* (TP) corresponde aos artigos *426*, *427*, *428* e *429* da tradução francesa bem modificados pelo tradutor da língua portuguesa; o artigo *411* (TP) corresponde aos artigo *430* e *431* da tradução francesa bem modificados; o artigo *412* (TP) corresponde ao artigo *432* (TF); o tradutor da língua portuguesa despreza o artigo *433* (TF); o artigo *413* (TP) corresponde ao artigo *434* da tradução francesa modificado; o tradutor da língua portuguesa omite os artigos *435* e *437* da tradução francesa; o artigo *414* (TP) corresponde ao início do artigo *436* junto com o artigo *438* da tradução francesa, modificados pelo tradutor da língua portuguesa; o tradutor da língua portuguesa exclui o artigo *439* da tradução francesa, mas mantém na tradução a nota de rodapé inserida pelo tradutor francês neste artigo.

O Capítulo VI, intitulado *Da relação geometrica*[24], a tradução francesa inicia-se no artigo *440* e termina no artigo *450* (o capítulo contém onze artigos), a tradução em língua portuguesa, o capítulo inicia-se no artigo *415* e termina no artigo *422*, ou seja, contém oito artigos. Notamos as seguintes correspondências entre a numeração dos artigos deste capítulo da tradução em língua portuguesa com a tradução francesa: o artigo *415* (TP) corresponde a união dos artigos *440* e *441* da tradução francesa; o artigo *416* (TP) corresponde ao artigo *442* (TF); o artigo *417* (TP) corresponde ao artigo *443* (TF); o artigo *418* (TP) corresponde ao artigo *444* (TF); o artigo *419* (TP) corresponde ao artigo *445* (TF); o artigo *420* (TP) que corresponde ao artigo *446* da tradução francesa, foi ligeiramente modificado pelo tradutor da língua portuguesa; o artigo *421* (TP) que corresponde ao artigo *447* da tradução francesa, foi modificado pelo tradutor da língua portuguesa e apresenta apenas um único exemplo; o tradutor da língua portuguesa exclui o artigo *448* da tradução francesa; o artigo *422* (TP) corresponde a união dos artigos *449* e *450* da tradução francesa.

O Capítulo VII, denominado *Do maximo commum divisor de dous números dados*[25], a tradução francesa inicia-se no artigo *451* e termina no artigo *460* (o capítulo contém dez artigos), na tradução em língua portuguesa, o capítulo inicia-se no artigo *423* e termina no artigo *428*, ou seja, contém seis artigos. Observamos as seguintes correspondências entre a numeração dos artigos da tradução em língua portuguesa com a tradução francesa: o artigo *423* (TP) corresponde ao artigo *451*; o artigo *424* (TP) corresponde ao artigo *452* (TF); o tradutor da língua portuguesa omite os artigos *453* e *545* da tradução francesa que apresentam outros exemplos do cálculo do máximo divisor comum; o artigo *425* (TP) corresponde ao artigo *455* (TF); o artigo *426* (TP) corresponde ao artigo *456* (TF); o

[23]O título deste capítulo na tradução francesa (1798) é: *Des Nombres figurés ou polygones* (Dos Números figurados ou Poligonais) (EULER, 1798, p. 341).

[24]O título deste capítulo na tradução francesa (1798) é: *Du Rapport Géométrique* (Da Razão Geométrica) (EULER, 1798, p. 355).

[25]O título deste capítulo na tradução francesa (1798) é: *Du plus grand commun Diviseur de deux Nombres donnés* (Do Máximo Divisor Comum de dois Números dados) (EULER, 1798, p. 362).

artigo *427* (TP) corresponde ao artigo *457* da tradução francesa, que foi modificado pelo tradutor da língua portuguesa; o artigo *428* (TP) corresponde a união dos artigos *458* e *459* da tradução francesa, e foram modificados pelo tradutor da língua portuguesa; o tradutor da língua portuguesa exclui o artigo *460* da tradução francesa que corresponde a um exemplo da aplicação da regra.

O Capítulo VIII, cujo título é: *Das proporções geometricas*[26], a tradução francesa inicia-se no artigo *461* e termina no artigo *476* (o capítulo contém dezesseis artigos). Na obra traduzida para o português constam apenas quatro artigos (*429*, *430*, *431* e *432*) pois a obra está incompleta. Encontramos as seguintes correspondências entre a numeração dos artigos da tradução em língua portuguesa com a tradução francesa: o artigo *429* (TP) corresponde ao artigo *461* (TF); o artigo *430* (TP) corresponde ao artigo *462* (TF), embora falte um pedaço do topo da página (Figura 1.3); o artigo *431* (TP) que corresponde a união dos artigos *463* e *464* da tradução francesa, foram modificados pelo tradutor da língua portuguesa; e o artigo *432* (TP) corresponde ao artigo *465* (TF).

Deste modo, apoiados nestas observações que fizemos da tradução em língua portuguesa, notamos uma reorganização da apresentação da obra em relação a tradução francesa, podemos inferir que esta modificação possivelmente foi devido a demanda de produção de materiais didáticos para uso dos alunos da Academia Real Militar, como podemos observar na folha de rosto da obra (Figura 1.4). Portanto, com esses indícios podemos deduzir que esta tradução é possivelmente uma adaptação da tradução francesa. Em trabalhos futuros, faremos um estudo comparado desta tradução em língua portuguesa (1809) com a nossa tradução.

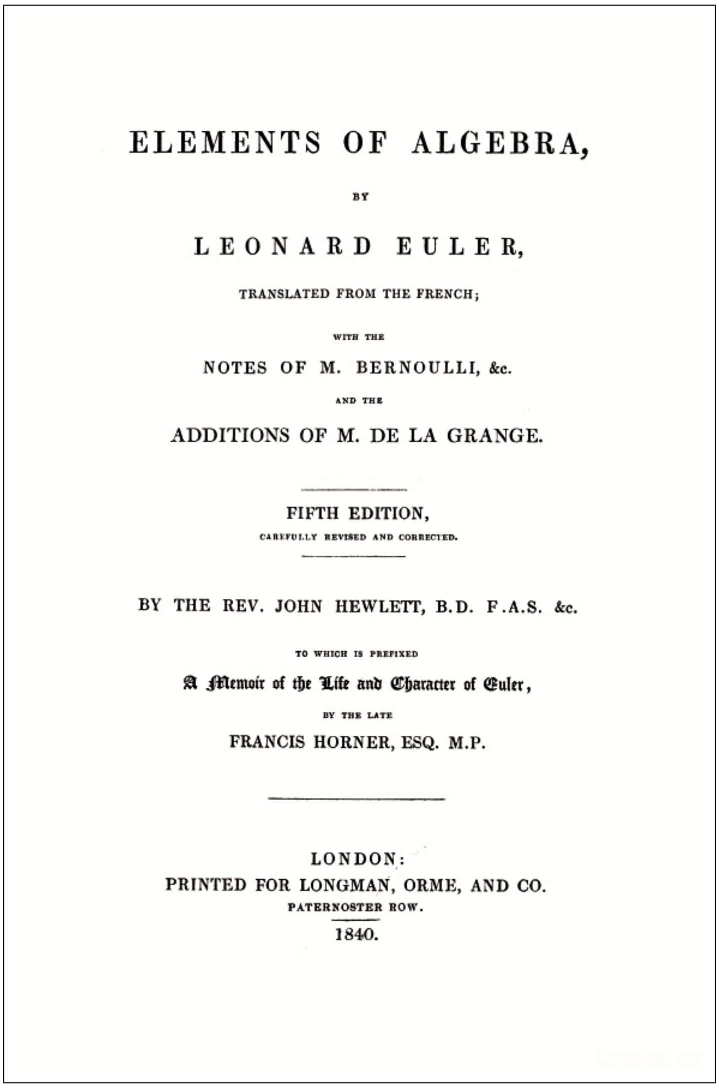
⋆ ⋆ ⋆

Segundo Heeffer (2006), Euler, em sua autobiografia ditada ao seu filho Johann Albrecht, afirmou que seu pai Paulus lhe ensinou a matemática básica usando a versão de Michael Stifel (1553) do livro clássico *Die Coss* de Christoff Rudolff, publicado em 1525. O livro de Rudolff foi o primeiro livro alemão inteiramente dedicado a álgebra. Este livro foi fonte de inspiração para vários problemas apresentados por Euler em sua obra *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770).

De acordo com Heeffer (2006), antes do século XVI encontramos nos livros de Aritmética uma enorme variedade de problemas que eram resolvidos por meio de "receitas". Na segunda metade do século XVI, com o advento do simbolismo algébrico estas "receitas" tornaram-se obsoletas, assim sendo, "os livros-texto de Álgebra do século XVIII abandonaram o papel construtivo dos problemas na produção de teoremas algébricos" (HEEFFER, 2006, p. 951, tradução nossa). O propósito dos problemas era apenas de ilustrar a teoria e treinar a formulação dos problemas em linguagem algébrica. Conforme Heefffer, a "nova retórica dos problemas em livros-texto de Álgebra explica porque Euler encontrou em *Die Coss* de Rudolff um apropriado repositório de exemplos" (HEEFFER, 2006, p. 951, tradução nossa), muitos problemas da sua obra *Vollständige Anleitung zur Algebra* são correspondentes aos problemas do livro de Rudolff, alguns são reprodução literais, outros com novos valores ou ligeiramente reformulados. Com estas evidencias,

[26]O título deste capítulo na tradução francesa (1798) é: *Des Proportions géométriques* (Das Proporções Geométricas) (EULER, 1798, p. 369).

podemos dizer que a obra *Vollständige Anleitung zur Algebra* de Euler funcionou como uma passagem para a sobrevivência e ressurgimento dos problemas recreativos da Renascença. E segundo Hoare (2007), este livro "tornou-se o mais bem sucedido livro-texto de matemática desde os Elementos de Euclides". (HOARE, 2007, p. 410, tradução nossa).



ELEMENTS OF ALGEBRA,

BY

LEONARD EULER,

TRANSLATED FROM THE FRENCH;

WITH THE

NOTES OF M. BERNOULLI, &c.

AND THE

ADDITIONS OF M. DE LA GRANGE.

FIFTH EDITION,

CAREFULLY REVISED AND CORRECTED.

BY THE REV. JOHN HEWLETT, B.D. F.A.S. &c.

TO WHICH IS PREFIXED

A Memoir of the Life and Character of Euler,

BY THE LATE

FRANCIS HORNER, ESQ. M.P.

LONDON:

PRINTED FOR LONGMAN, ORME, AND CO.

PATERNOSTER ROW.

1840.

Figura 1.5: Folha de rosto da obra *Elements of Algebra* (1840).

O livro *Elements of Algebra* (Figura 1.5), edição de 1840, da tradução inglesa de John Hewlett, é uma obra extensa, com mais de 600 páginas, o volume consiste das seguintes partes:

1. Leonard Euler, O Supremo Geômetra, por Clifford Truesdell (33 páginas);
2. Excerto da Memória da vida e reputação de Euler, por Francis Horner (11 páginas);
3. Comentários de M. Bernoulli, o tradutor francês (2 páginas);
4. *Elements of Algebra*, por Leonhard Euler (462 páginas);
5. Acréscimos, por La Grange [Lagrange] (131 páginas).

A seguir apresentaremos o conteúdo do livro *Elements of Algebra* (1840), que é dividido em três partes:

- **Parte I - Contendo a Análise de Quantidades Determinadas**.

  Seção I: Dos Diferentes Métodos de Calcular Quantidades Simples.
  Capítulos

  I. Da Matemática em geral.
  II. Explicação dos sinais + (mais) e – (menos).
  III. Da Multiplicação de Quantidades Simples[27].
  IV. Da Natureza dos Números Inteiros, ou Inteiros, com respeito de seus Fatores.
  V. Da Divisão de Quantidades Simples.
  VI. Das Propriedades dos Inteiros com respeito aos seus Divisores.
  VII. Das Frações em geral.
  VIII. Das Propriedades das Frações.
  IX. Da Adição e Subtração de Frações.
  X. Da Multiplicação e Divisão de Frações.
  XI. Dos Números Quadrados.
  XII. Das Raízes Quadradas e dos Números Irracionais resultantes delas.
  XIII. Das Quantidades Impossíveis ou Imaginárias que surgem da mesma fonte.
  XIV. Dos Números Cúbicos.
  XV. Das Raízes Cúbicas e Dos Números Irracionais resultantes delas.
  XVI. Das Potências em geral.
  XVII. Dos Cálculos das Potências.
  XVIII. Das Raízes com relação as Potências em geral.
  XIX. Do Método de Representar os Números Irracionais por Expoentes Fracionários.
  XX. Dos Diferentes Métodos de Cálculo e suas Mutuas Conexões.
  XXI. Dos Logaritmos em geral.
  XXII. Das Tabelas de Logaritmos agora em uso.
  XXIII. Dos Métodos de expressar os Logaritmos.

  Seção II: Dos Diferentes Métodos de Calcular Quantidades Compostas.
  Capítulos

  I. Das Adições de Quantidades Compostas[28].
  II. Das Subtrações de Quantidades Compostas.
  III. Das Multiplicações das Quantidades Compostas.
  IV. Das Divisões das Quantidades Compostas.
  V. Das Resoluções das Frações em Séries Infinitas.
  VI. Dos Quadrados de Quantidades Compostas.

[27] Quantidades Simples são números considerados com respeito aos sinais que os precedem ou os afetam.
[28] Quantidades Compostas são expressões que consistem de vários termos.

VII. Das Extrações de Raízes aplicadas as Quantidades Compostas.
VIII. Dos Cálculos de Quantidades Irracionais.
IX. Dos Cubos e das extrações de Raízes Cúbicas.
X. Das Potências Superiores das Quantidades Compostas.
XI. Das Transposições das Letras, em que a demonstração da Regra anterior é estabelecida.
XII. Do Desenvolvimento das Potências Irracionais por Séries Infinitas.
XIII. Do Desenvolvimento de Potências Negativas.

Seção III: Das Razões e Proporções.
Capítulos

I. Da Razão Aritmética ou da Diferença entre dois Números.
II. Das Proporções Aritméticas.
III. Das Progressões Aritméticas.
IV. Das Somas das Progressões Aritméticas.
V. Dos Números Figurados ou Poligonais.
VI. Da Razão Geométrica.
VII. Do Máximo Divisor Comum de dois Números dados.
VIII. Das Proporções Geométricas.
IX. Observações sobre as Regras de Proporções e sua Utilidade.
X. Das Razões Compostas.
XI. Das Progressões Geométricas.
XII. Das Frações Decimais Infinitas.
XIII. Dos Cálculos de Juros.

Seção IV: Das Equações Algébricas e das Resoluções destas Equações.
Capítulos

I. Da Solução dos Problemas em Geral.
II. Da Resolução de Equações simples ou Equações do Primeiro Grau.
III. Da Solução de Questões relacionadas ao Capítulo anterior.
IV. Da Resolução de duas ou mais Equações do Primeiro Grau.
V. Da Resolução das Equações Quadráticas Puras.
VI. Da Resolução de Equações do Segundo Grau Mistas.
VII. Das Extrações de Raízes dos Números Poligonais.
VIII. Das Extrações das Raízes Quadradas de Binomiais.
IX. Da Natureza das Equações do Segundo Grau.
X. Das Equações Pura do Terceiro grau.
XI. Das Resoluções das Equações Completas do Terceiro Grau.
XII. Da Regra de *Cardano* ou de *Scipione Ferro*.
XIII. Da Resolução de Equações do Quarto Grau.
XIV. Da Regra de *Bombelli* para a redução da Resolução das Equações do Quarto Grau para aquelas Equações do Terceiro Grau.
XV. De um novo Método de resolução de Equações do Quarto Grau.

XVI. Das Resoluções das Equações por Aproximação.

- **Parte II - Contendo a Análise de Quantidades Indeterminadas**.
  Capítulos

  I. Da Resolução de Equações do Primeiro Grau que contém mais do que uma quantidade desconhecida.

  II. Da Regra que é chamada *Regra Coeci*, para determinar por meio de duas Equações, três ou mais quantidades desconhecidas.

  III. Das Equações Indeterminadas Compostas, em que uma das quantidades desconhecidas não excede o Primeiro Grau.

  IV. Dos Métodos de restaurar as Quantidades Surd da forma $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$.

  V. Dos Casos em que a Fórmula $a+bx+cx^2$ nunca pode torna-se um Quadrado.

  VI. Dos Casos em Números Inteiros, em que a Fórmula ax^2+b torna-se um Quadrado.

  VII. De um Método particular através do qual a Fórmula an^2+1, torna-se um quadrado de Números Inteiros.

  VIII. Do Método de tornar a Fórmula Irracional $\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3)}$ em Racional.

  IX. Do Método de tornar Racional a Fórmula Incomensurável $\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)}$.

  X. Do Método de tornar Racional a Fórmula Irracional $\sqrt[3]{(a+bx+cx^2+dx^3)}$.

  XI. Da Resolução da Fórmula $ax^2+bxy+cy^2$ em seus Fatores.

  XII. Da Transformação da Fórmula ax^2+cy^2 em Quadrados, e Potências maiores.

  XIII. Algumas Expressões da Forma ax^4+by^4 que não são reduzidas a quadrados.

  XIV. Soluções de algumas Questões que pertencem a esta Parte da Álgebra.

  XV. Soluções de algumas Questões em que os Cubos são necessários.

- Acréscimos por M. De La Grange [Lagrange].
  Capítulos

  I. Sobre Frações Contínuas.

  II. Soluções de alguns Problemas Aritméticos curiosos e novos.

  III. Das Soluções em Números Inteiros das Equações do primeiro Grau contendo duas Quantidades Desconhecidas.

  IV. Método Geral para resolver, em Números inteiros, Equações com duas Quantidades desconhecidas, uma das quais não excede o primeiro Grau.

  V. Método direto e geral para encontrar os valores de x que tornarão Quantidades da forma $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ Racionais, e para resolver, em Números Racionais, as Equações indeterminadas de segundo Grau que têm duas Quantidades desconhecidas, quando elas admitem soluções deste tipo.

  VI. De Igualdades Duplas e Triplas.

VII. Método direto e geral para encontrar todos os valores de y expresso em Números Inteiros, pelo qual podemos tornar Quantidades da forma $\sqrt{(Ay^2 + B)}$ racional, A e B sendo Números Inteiros dados; e também para encontrar todas as possíveis Soluções, em Números Inteiros, de Equações Quatráticas Indeterminadas de duas Quantidades desconhecidas.

VIII. Observações sobre Equações da forma $p^2 = Aq^2 + 1$ e sobre o método comum de suas resoluções em Números Inteiros.

IX. Do Modo de encontrar Funções Algébricas de todos os Graus, que, quando multiplicadas, podem sempre produzir Funções Semelhantes.

1.2 Europa no século XVIII

Segundo, Bogdan e Biklen (1994) podemos assumir que as ações de um indivíduo são expressivamente influenciada pelo ambiente habitual de ocorrência, portanto, como nossa proposta de pesquisa é analisar os modos de produção de significados e conhecimentos que Euler produzia para *séries*, precisamos conhecer o contexto, ou seja, o lugar de onde Euler estava *falando*.

Os modos de produção de significados e conhecimentos para os objetos matemáticos são produzidos socialmente, e aceitos por uma determinada cultura em uma determinada época. Assim o ambiente onde Euler está inserido é uma parte importante para compreendermos a sua obra.

O século XVIII ficou conhecido como a idade das Luzes, onde floresceram as ideias iluministas na europa e espalharam-se pelo mundo, inspirando revoluções como a Revolução Francesa em 1789, onde a burguesia aliou-se à população pobre e depuseram o rei.

Durante o século XVIII o desenvolvimento das pesquisas em matemática não aconteciam nas universidades, mas sim nas academias, que trouxeram uma democratização do conhecimento científico. Ao final do século XVII, com o objetivo de produzir e divulgar as conclusões das pesquisas científicas ao público, foram fundadas duas academias, Academia de Paris e a *Royal Society* de Londres. Posteriormente, várias outras instituições foram fundadas no modelo destas duas, incluindo a Academia de Berlim, a Academia de São Petersburgo, a Sociedade de Turim, e muitas outras. Estas academias, geralmente, eram patrocinadas por monarcas, seus membros tinham um pouco mais de liberdade e havia continuidade nas pesquisas desenvolvidas.

O surgimento de revistas científicas também desencadeou o desenvolvimento acadêmico desta época, e muitas vezes estas publicações eram produzidas pelas próprias academias, por exemplo *Philosophical Transactions* de Londres e *Mémoires* de Paris, embora um bom número fosse publicada de forma independente, como a *Acta Eruditorum* e o *Journal für die reine und angewandte Mathematik* - conhecido como Jornal de *Crelle.* Estas revistas serviram para democratizar a ciência, uma vez que elas circulavam para um vasto público que incluía muitos de fora da comunidade científica.

Assim, a revolução científica estava em pleno andamento, as pesquisas eram divulgadas, compiladas, trocadas, corroboradas e comunicadas não somente à comunidade científica da época, mas também ao público em geral. É neste ambiente que Leonhard Euler está situado, fazendo contribuições em vários campos das ciências. Segundo o historiador da ciência, Clifford Truesdell, vinte e cinco por cento de todo o trabalho matemático e científico publicado durante todo o século XVIII foi escrito por Euler.

1.3 Leonhard Euler, o mestre de todos nós

Figura 1.6: Retrato de Leonhard Euler por Handman (1753).
Fonte: <http://en.wikipedia.org/wiki/Jakob_Emanuel_Handmann>

Para a composição desta seção, foram utilizados como bibliografia básica os seguintes artigos e livro: Brurckhard (1983), Cajori (2007), D'Ambrosio (2009), Fellmann (2007), Heeffer (2006), Hoare (2007), Kleinert (2016) e Kleinert e Mattmüller (2007).

Leonhard Euler nasceu no dia 15 de abril de 1707 na Basiléia, Suíça. Filho de Paulus Euler, um ministro calvinista e de Margaretha Brucker. Paulus foi aluno da Universidade da Basiléia, e segundo D'Ambrosio (2009), sua tese de conclusão de curso sobre razões e proporções, foi orientada por Jacob Bernoulli (1654 - 1705).

Antes de frequentar a escola, Euler foi instruído por seu pai e durante sua vida escolar teve um matemático amador, Johann Burckhardt, como professor particular que utilizou o livro de álgebra *Die Coss* de Christoff Rudolfs. Podemos afirmar que este livro teve grande influência na obra *Vollständige Anleitung zur Algebra* de Leonhard Euler, publicada em 1770, onde temos vários problemas extraídos dele.

Em 1720, aos 13 anos, Euler ingressou na Universidade da Basiléia, no departamento de Artes, para receber uma educação geral. De acordo com seus escritos biográficos, ele estava insatisfeito com seus estudos, e procurou o famoso professor Johann Bernoulli (1667 - 1748) (Figura 1.7), que era professor da cadeira de matemática nesta Universidade, para instruí-lo. Johann estava muito ocupado para dar aulas particulares a Euler, mas indicou alguns textos matemáticos avançados para ele estudar e aos sábados ele poderia visitá-lo para tirar dúvidas e obter explicações.

Figura 1.7: Retrato de Johann Bernoulli.
Fonte: Bernoulli-Euler-Zentrum

Em 1723, aos 16 anos, Euler recebeu o grau de mestre em filosofia com uma dissertação, escrita em latim, comparando as ideias filosóficas de René Descartes (1596 - 1650) e Isaac Newton (1643 - 1727). Euler começou a estudar teologia, pois seu pai gostaria que ele seguisse-o no ofício do ministério, mas Euler dedicava-se a maior parte de seu tempo à matemática. Johann Bernoulli, percebendo a genialidade do jovem Euler, convenceu Paulus a permitir que Euler mudasse seus estudos para matemática. Euler foi o discípulo preferido de Johann Bernoulli, e ficou muito amigo de seus filhos Nicolaus II (1695 - 1726), Daniel (1700 - 1782) e Johann II (1710 - 1790) (Figura 1.8).

Em 1726 Euler terminou seus estudos formais, e segundo Hoare (2007, p. 407), Johann Bernoulli aconselhou-o a estudar os trabalhos de Descartes, Galileu Galilei (1564 - 1642), Newton, Jacob Bernoulli, Brook Taylor (1685 - 1731), John Wallis (1616 - 1703) e Jakob Hermann (1678 - 1733). Aos 18 anos iniciou suas próprias investigações. Euler foi um matemático e cientista que obteve reconhecimento em sua época, antes de sair da Basiléia, aos 19 anos, recebeu uma menção honrosa da Academia de Ciências de Paris, por seu trabalho intitulado *Meditationes super problemate nautico* onde tratava de mastros de navios. Mais tarde, enviou outros trabalhos a essa Academia, e recebeu por doze vezes o cobiçado prêmio desta academia.

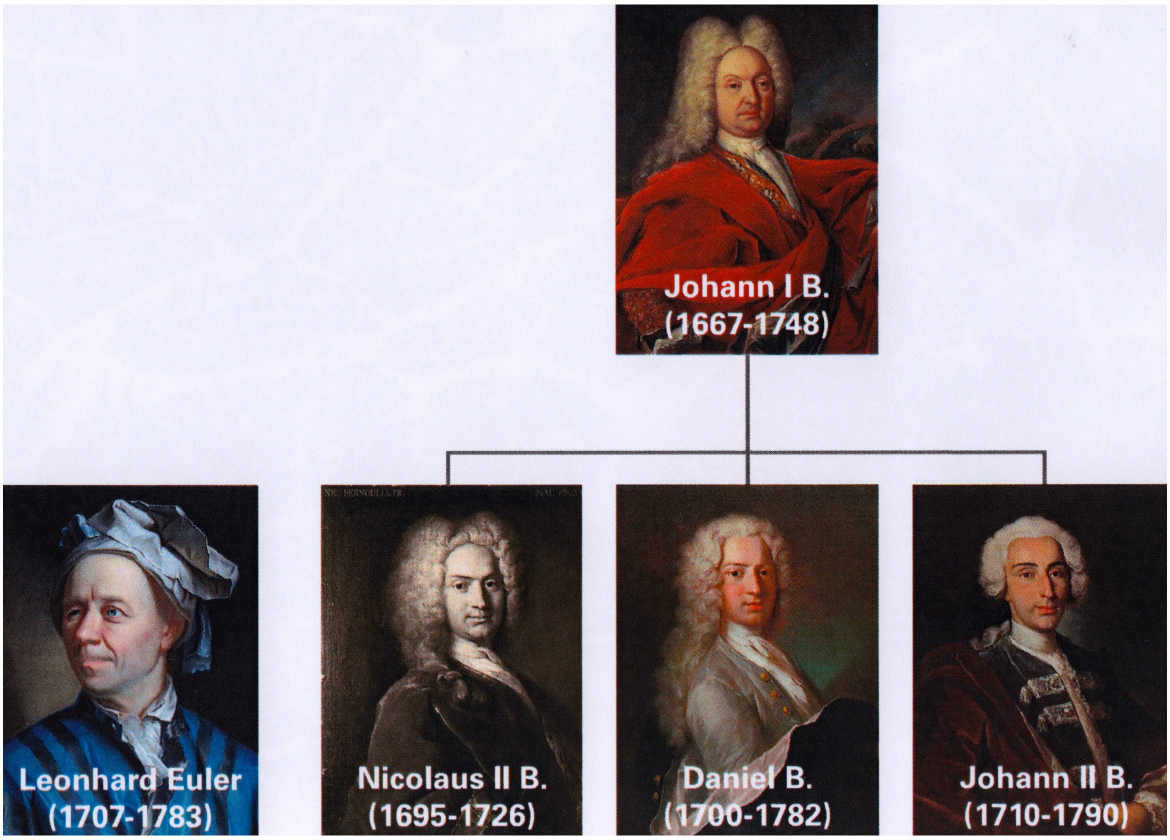


Figura 1.8: Retrato dos Bernoulli's e Euler.
Fonte: Bernoulli-Euler-Zentrum

Em 1727, Euler chega a São Petersburgo para assumir a vacância na seção de medicina e fisiologia na recém-criada Academia de Ciências de São Petersburgo. Sua preparação para este cargo foi feita durante o inverno de 1726 no qual Euler se inscreveu na Faculdade de Medicina da Basiléia, estudando as aplicações da matemática e da mecânica à fisiologia. A pedido de Daniel Bernoulli e Jakob Hermann, Euler foi logo transferido para a seção de matemática e física da Academia. A partir deste momento, segundo Hoare (2007, p. 408), cercado por um grupo de cientistas eminentes, tais como Jakob Hermann, geômetra e analista; Daniel Bernoulli, amigo pessoal, geômetra e matemático aplicado; Christian Goldbach (1690 - 1764), com quem discutia problemas em análise e teoria dos números; F. Maier, especialista em trigonometria e Joseph Nicolas Delisle (1688 - 1768) astrônomo e cartógrafo, sua genialidade desabrochou. Euler contribui com uma enorme quantidade de artigos matemáticos para a revista *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitsnae* publicada pela Academia de São Petersburgo. Em 1730, Euler foi nomeado professor de Física, e após três anos, com o retorno de Daniel Bernoulli à Basiléia, Euler assumiu a sua sucessão como o principal matemático da Academia. Em 1734, casou-se com Katharina Gsell (1707 - 1773), filha de um artista suíço, com quem teve treze filhos, mas apenas cinco chegaram a idade adulta. Segundo D'Ambrosio (2009, p. 20), Euler sofria de uma doença cutânea, desde sua infância, "uma forma de tuberculose que afeta os gânglios linfáticos do pescoço". Em 1738, em decorrência desta doença, perde a visão direita e ficou com a esquerda muito prejudicada.

Em 1741, mudou-se para Prússia para fazer parte da Academia de Ciências de Berlim à convite de Frederico, o Grande (1712 - 1786), tornando-se diretor do curso de matemática da Academia Prussiana, passando vinte e cinco anos trabalhando na Academia de Ciências de Berlim, apresentando um grande número de artigos à Academia de São Petersburgo, bem como à Academia da Prússia. Devido a sua excelência acadêmica, e sua reputação que se estendia a toda a Europa, foi também membro da *Académie Royale des Sciences* de Paris, da *Royal Society of London* e da *Società Scientifica Privata Torinese*, entre outras.

Em 1766 Euler regressa à São Petersburgo com grandes privilégios à convite de Catarina II, a Grande (1729 - 1796), como membro da Academia de Ciências Russa, posição que ocupou até sua morte em 18 de setembro de 1783. Em 1771, mesmo após uma doença que o deixou quase totalmente cego sua produtividade continuou intensa, sua memória impecável permitia a ele ditar seus textos para seus assistentes.

Leonhard Euler teve uma longa carreira como matemático e cientista, sendo considerado o matemático mais produtivo da história. Embora conhecesse várias línguas, ele escrevia, principalmente, em latim, francês e alemão. Escreveu livros de referência sobre assuntos de análise matemática, geometria analítica e diferencial, cálculo de variações, mecânica e álgebra. Publicou mais de 760 trabalhos de pesquisa, muitos dos quais ganharam prêmios em competições, seus trabalhos eram publicados nas revistas das academias científicas de grande prestígios em toda a Europa. Segundo Kleinert e Mattmüller (2007, p. 25), mesmo não tendo obrigações regulares de ensino, ele escreveu influentes livros didáticos contemplando uma grande variedade de assuntos como o cálculo diferencial e integral, a mecânica, a balística, a acústica, a astronomia, a teoria musical, a construção de navios, assim como um tratado sobre as Ciências Naturais na obra *Cartas a uma princesa da Alemanha*. Após sua morte, seus pupilos embarcaram no longo projeto de publicar suas centenas de obras inéditas.

Assim, em 1830, houve as primeiras tentativas de publicar as obras completas de Euler. Conforme Kleinert e Mattmüller (2007, p. 26), duas dessas iniciativas foram lançadas simultaneamente. Uma delas foi iniciada pelo bisneto de Euler, Paul-Heinrich Fuss, que era secretário permanente da Academia de São Petersburgo, e foi encorajado por muitos matemáticos proeminentes incluindo Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851), mas o projeto foi abandonado quando se verificou que o orçamento excederia a capacidade financeira da Academia. Em 1849, a iniciativa de Fuss e Jacobi produziu como resultado a publicação de dois volumes de *Commentationes arithmeticae*, editado por Paul-Heinrich e Nicolaus Fuss que incluía 94 artigos que já haviam sido publicados, cinco manuscritos inéditos dentre eles o importante manuscrito *Tractatus de doctrina numerorum*. Também em 1830, um grupo de matemáticos belgas estavam empreendendo um projeto idêntico, e conseguiram publicar cinco volumes das obras de Euler, segundo Kleinert (2015), esta edição foi severamente criticada devido a má qualidade da tradução.

De acordo com Kleinert e Mattmüller (2007), o principal objetivo dos primeiros editores das obras de Euler era torná-las acessíveis aos cientistas contemporâneos, e em particular aos matemáticos. Em suas palavras:

> Eles acreditavam que as obras de Euler poderiam ainda estimular a pesquisa em matemática e que os matemáticos deveriam estudar

> as obras de Euler com a mesma intensidade das famosas palavras que foram imputadas a Laplace: "Leia Euler, leia Euler, ele é o mestre de todos nós". (KLEINERT; MATTMÜLLER, 2007, p. 26, tradução nossa).

Em 1883, no centenário da morte de Euler, ressurgiu o interesse em suas obras e, em 1896, o mais valioso preliminar para qualquer publicação completa apareceu - o *Índice operum Leonhardi Euleri* feito por Johann Georg Hagen. À medida que o bicentenário do nascimento de Euler se aproximava, em 1903, a Academia de Ciências Russa propôs novamente o projeto da publicação das obras completas de Euler, assim firmou-se uma parceria das Academias de Ciências de São Petersburgo e Berlim. Embora, neste momento, o projeto foi abandonado, as comemorações do bicentenário do nascimento de Euler forneceram o impulso necessário para a publicação da *Opera omnia*. Entre 1910 e 1913, o historiador da matemática sueco, Gustav Eneström (1856 - 1923) compilou o inventário padrão dos escritos de Euler, essa indexação é conhecida como Índice Eneström, as publicações são identificadas pela letra E seguida de um número. De acordo com este inventário, o número total de publicações impressas de Euler, entre artigos e livros, é de 866.[29]

Após o bicentenário de sua morte, a Academia de Ciência da Suíça, por iniciativa de um professor de matemática da Universidade Politécnica de Zurique, Ferdinand Rudio, empreendeu esforços na publicação dos trabalhos de Euler baseando-se na lista preparada por Eneström. Foi criado um comitê permanente (Euler-Kommission) para a realização do projeto e arrecadação de fundos, conseguidos através de donativos e patrocínios. Mas o projeto não dependia apenas do dinheiro, era necessário para a sua implementação matemáticos altamente capacitados. Felizmente, segundo Kleinert (2015, p.17-18), havia vinte matemáticos de reputação internacional que concordaram em servir como editores de um ou mais volumes, entre eles, Jacques Hadamard de Paris, Gustav Eneström de Estocolmo, Tullio Levi-Civita de Padova, Gerhard Kowalewski de Praga e Heinrich Weber de Estrasburgo, que foi o editor do primeiro volume publicado em 1911.

De acordo com Kleinert (2015, p. 18), inicialmente o Comitê estimou que o projeto teria uma duração de 12 anos, com um total de 40 volumes, mas verificou-se que o comitê havia subestimado consideravelmente o tamanho do legado deixado por Euler. Em 1913, o número estimado de volumes foi aumentado para 66, e depois para 72.

Ficou firmado que a *Opera Omnia* seria dividida em três séries:

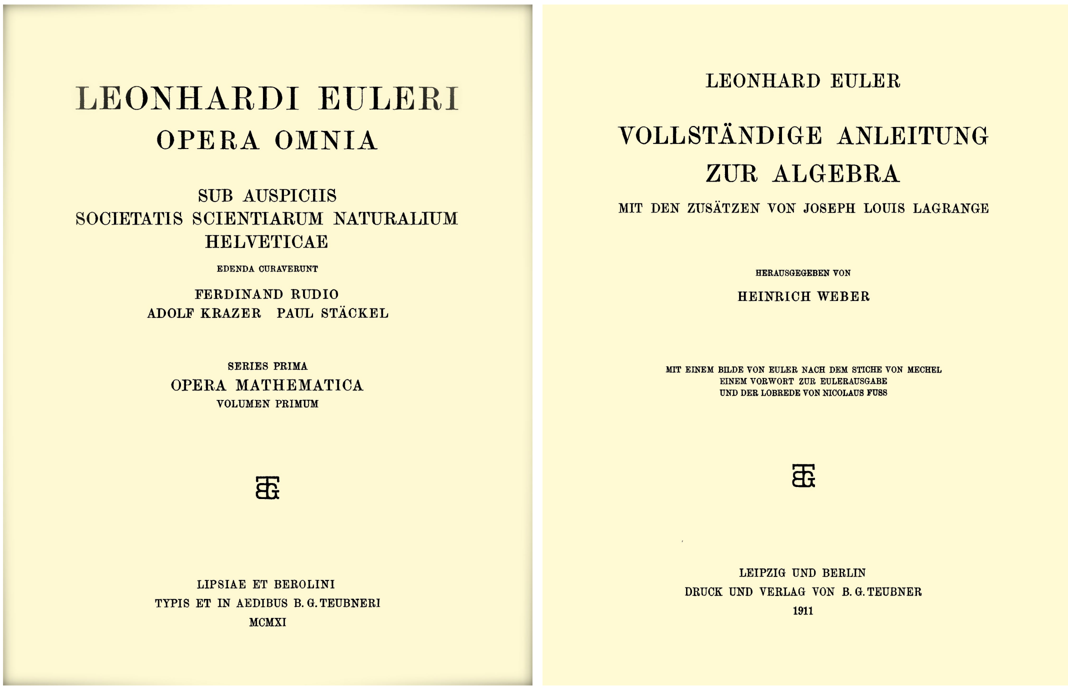
I. Matemática (29 volumes);

II. Mecânica e Astronomia (31 volumes);

III. Física e Diversos (12 volumes).

Em 1911 o primeiro volume foi publicado e compreendeu o livro *Vollständige Einleitung zur Algebra* com os acréscimos de Lagrange e o Elogio à Euler por Nicolaus Fuss (Figura 1.9).

[29]A relação completa das obras de Euler classificadas por Gustav Eneström está disponível no site: <`http://www.math.dartmouth.edu/~euler/index/enestrom.html`>.



LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA
SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM
HELVETICAE
EDENDA CURAVERUNT
FERDINAND RUDIO
ADOLF KRAZER PAUL STÄCKEL
SERIES PRIMA
OPERA MATHEMATICA
VOLUMEN PRIMUM
LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXI

LEONHARD EULER
VOLLSTÄNDIGE ANLEITUNG
ZUR ALGEBRA
MIT DEN ZUSÄTZEN VON JOSEPH LOUIS LAGRANGE
HERAUSGEGEBEN VON
HEINRICH WEBER
MIT EINEM BILDE VON EULER NACH DEM STICHE VON MECHEL
EINEM VORWORT ZUR EULERAUSGABE
UND DER LOBREDE VON NICOLAUS FUSS
LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1911

Figura 1.9: Vollständige Anleitung zur Algebra (1911)

Até o início da primeira Guerra Mundial 12 volumes tinham sido publicados. A distribuição dos volumes publicados ao longo dos anos, segundo Kleinert (2015, p. 18-19) é dada pela tabela abaixo.

1911 - 1912	12 volumes
1915 - 1919	2 volumes
1920 - 1927	8 volumes
1928 - 1931	-
1932 - 1940	4 volumes
1941 - 1946	4 volumes
1947 - 1960	21 volumes
1961 - 1979	16 volumes
1980 - 1990	-
1990 - 2004	3 volumes
2016 (?)	2 volumes
Total	72 volumes

Após a década de 1950 tornou-se cada vez mais difícil encontrar editores qualificados, ou seja, matemáticos capazes de ler textos escritos em latim, francês e alemão antigo. Assim, para os volumes publicados depois de 1960, os matemáticos e físicos foram substituídos como editores por historiadores da ciência profissionais tais como Emil Fellmann, Otto Fleckenstein, Clifford Truesdell, David Speiser, Eric Aiton, Patricia Radelet-de Grave e Karine Chemla. Segundo Kleinert (2015, p.19), a consequência dessa mudança foi uma filosofia bastante diferente dos primeiros editores, cujo principal objetivo era tornar os textos originais amplamente disponíveis aos cientistas, em particular aos matemáticos. Em um parágrafo do esboço editorial de 1910, foi claramente dito que as anotações não deveriam se degenerar em longos tratados históricos. Esse princípio sensato foi cada vez mais abandonado quando os historiadores da ciência substituíram os cientistas como editores. Enquanto para os matemáticos a importância da edição diminuiu, essas tornaram-se uma ferramenta extremamente valiosa para os historiadores profissionais interessados em ciência e seu contexto social e político da Europa do século XVIII. Como resultado, os historiadores, e em particular os historiadores profissionais da ciência, assumiram o lugar dos matemáticos como leitores e também como editores.

> Alguns deles usaram esta ocasião como uma oportunidade para apresentar todo o seu conhecimento e erudição, e há mesmo um volume com mais de 400 páginas que não inclui uma única linha de Euler. É apenas um tratado histórico sobre a história dos corpos elásticos entre 1639 e 1788. De um modo geral, pode-se dizer que os volumes mais recentes são caracterizados por introduções mais profundas e notas de rodapé e comentários mais extensos. (KLEINERT, 2015, p. 19, tradução nossa).

Por ocasião do 250^o aniversário de Euler formou-se uma cooperação da seção de Leningrado da Academia de Ciências da União Soviéticas e da Academia de Ciências da República Democrática Alemã, que se considerava a sucessora legal da Academia Prussiana, para publicarem todas as cartas de Euler escrita no século XVIII. Uma vez que a maior parte das cartas originais dirigidas a Euler foram preservadas nos Arquivos da Academia de Ciência da antiga União Soviética em Leningrado, e havia um número considerável de especialistas em Euler vivendo na União Soviética.

Em 1967 o Comitê Suíço de Euler decidiu iniciar uma quarta série adicional da *Opera Omnia*, em um projeto conjunto da Academia de Ciências Suíça e da Academia de Ciências da União Soviéticas. O segundo comitê de redação foi criado composto por quatro membros da URSS e quatro da Suíça, comitê este que seria exclusivamente responsável pela Série IV, que deveria conter as correspondências de Euler (série IVA) e manuscritos inéditos (série IVB). Esta comissão foi presidida por Walter Habicht, sendo substituído em 1985 por Emil Fellmann que também foi diretor do *Euler Archive* na Basiléia. A série IVB foi adiada e a publicação da série IVA começou em 1975 com um inventário de aproximadamente 3.000 cartas de e para Euler que eram conhecidas naquele tempo e que estão escritas em alemão, francês e latim, apenas poucas em russo. De acordo com Kleinert (2015, p. 20), os correspondentes incluem matemáticos famosos do século XVIII, tais como Daniel Bernoulli, Christian Goldbach, Johann Andreas Segner e outras pessoas com que Euler tratava de assuntos de negócios, tais como Pierre Louis Moreau de Maupertuis, Gerhard Friedrich Müller e Johann Daniel Schumacher.

Ficaram estabelecidas as seguintes diretrizes para as publicações das correspondências de Euler: elas não seriam publicada em ordem cronológica, em vez disso, cada volume incluiria a troca de cartas com um ou mais correspondentes; uma revisão da classificação do carácter científico ou não científico das cartas deveria ser feito; para cada volume, uma "língua de trabalho" seria determinada para a introdução, notas de rodapé e comentários; como regra geral, a língua adotada para o volume seria a língua da maioria das correspondências neste volume. Assim, com base nestas diretrizes, o alemão foi escolhido como língua de trabalho para os volumes 2, 3 e 8 e o francês para os volumes 5, 6 e 7. Para o volume 9, que consistia das correspondências entre Euler e Martin Knutzen, as cartas estão escritas principalmente em latim, e portanto a língua de trabalho seria o italiano, língua nativa do editor Antonio Moretto. O texto das cartas seriam publicados completamente, incluindo as cortesias no início e no final e na língua original, sendo que somente as cartas em latim seriam adicionalmente traduzidas para a língua de trabalho do volume.

Assim como toda regra tem exceções, diferentemente do que foi estipulado, o volume IVA3 apresenta as correspondências trocadas entre Euler e Daniel Bernoulli que foram escritas em uma estranha mistura de alemão, francês e latim. Assim, ficou estabelecido que além do texto original, o volume seria traduzido para o alemão moderno.

Já o volume IVA4, apresenta as correspondência entre Euler e Goldbach que foram escritas em latim ou uma mistura de alemão, latim e francês. Com a finalidade de torná-las acessíveis a comunidade de matemáticos e não apenas aos historiadores da ciência, decidiu-se usar para este volume o idioma inglês como língua de trabalho, portanto, todas as cartas foram traduzidas para o inglês, além de apresentar o texto original, pois o conselho editorial ficou convencido de que estas correspondências são de grande interesse para os matemáticos modernos dado o fato delas serem fontes de muitas ideias e sugestões, e em particular no que diz respeito à Teoria dos Números.

Em 1975 foi publicado o primeiro volume da série IVA, que consiste de um inventário de todas as correspondências de e para Euler conhecidas naquele tempo. Para cada carta, encontramos um breve resumo e informações sobre a data, o idioma, as cópias existentes, o local onde o original está localizado e se ele já foi publicado. Em 1980 foi publicado, de fato, o primeiro volume de correspondências, o volume IVA5, que inclui as correspondências de Euler com Alexis Claude Clairaut (1713 - 1765), Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783) e Joseph-Louis Lagrange, editadas por René Taton e Adolf P. Juškevič. Em 1986 foi publicado o volume IVA6 que consiste das correspondências de Euler com Maupertuis e Frederick II, editadas por Pierre Costabel, Eduard Winter, Asot T. Grigorjan e Adolf P. Juškevič. Em 1998 foi publicado o volume IVA2 que consiste das correspondências de Euler com Johann I e Niklaus I Bernoulli, editadas por Emil Fellmann e Gleb K. Mikhajlov.

De acordo com Kleinert (2015), não foi publicado nenhum volume da série IVA entre 1998 e 2015, devido a problemas financeiros e de editores qualificados. Segundo Kleinert e Mattmüller (2007, p. 30-31), tornou-se cada vez mais difícil encontrar e financiar editores qualificados, que estejam familiarizados com a matemática, física e ou astronomia do século XVIII, que tenham um sólido conhecimento de latim, francês e escrita alemã antiga, sejam capazes de ler manuscrito do século XVIII, e que conheçam a história, a cultura e a ciência do século XVIII, enquanto, os editores das séries I, II e III eram na maioria professores universitários que tinham posições estáveis como pesquisadores ou professores universitários que consideravam uma grande honra contribuir com o Comitê de Euler. A série de correspondências também foi concebida desta mesma forma, ou seja, contou com a colaboração de professores universitários com mais de 60 anos de idade, independentes financeiramente e próximos da aposentadoria, que ficando livres de outras obrigações, pudessem se concentrar nesse trabalho. De fato, estes profissionais estão dentro do perfil de habilidades necessárias para este trabalho e são financeiramente independentes, mas existe uma grande desvantagem, o trabalho é executado de acordo com a disponibilidade de tempo do colaborador, e infelizmente muitos deles morrem antes de terminar o trabalho.

Em 2006 o Comitê de Euler na Basiléia decidiu contratar, por meio período, um jovem estudante, Siegfried Bodenmann, falante nativo de francês e que cresceu perto de Genebra, com a finalidade que ele concluísse o volume IVA7 (que consiste de várias correspondências em francês). Para o restante do trabalho, ou seja, outros volumes pendentes, tais como os volumes: IVA3 - correspondências entre Euler e Daniel Bernoulli; IVA4 - correspondências entre Euler e Goldbach; e IVA8 - correspondências de Euler com Segner e outros cientistas de Halle; o Comitê de Euler obteve fundos para pagar mais dois cargos de meio período: Martin Mattmüller, além de servir como secretário do comitê, participa da edição da correspondências entre Euler e Goldbach juntamente com Günther Frei, professor aposentado da Universidade de Québec e especialista em Teoria dos Números. O outro editor pago, Thomas Steiner, está trabalhando nas correspondências de Segner.

Segundo Kleinert (2015), as correspondências de Euler fornecem novos *insights* para a pesquisa histórica à respeito do dia a dia da ciência no século XVIII, além de ser uma rica fonte de informações sobre vários aspectos da vida e do trabalho de Euler. Segundo este autor, o volume IVA8, que consiste das correspondências entre Euler e Johann Andreas von Segner e outros membros da universidade de Halle, apresentará uma grande quantidade de detalhes sobre a vida cotidiana numa universidade prussiana do século XVIII; o volume IVA7 revela Euler como o autor de um artigo publicado anonimamente sobre a teoria da gravitação, e o volume IVA9, formado por 72 cartas de Knutzen e duas cartas de Euler, é de interesse particular à história da filosofia. De acordo com Kleinert (2015), Knutzen morreu muito jovem e temos poucas fontes ou documentos originais sobre ele, com exceção de suas publicações. Sabemos que Knutzen influenciou fortemente Immanuel Kant durante os seus estudos na Universidade de Königsberg, e supõem-se que por intermédio de Knutzen que Kant se familiarizou com a física newtoniana e com a filosofia de Leibniz.

Em 2015 a edição das obras impressas de Euler estava quase terminada, foram publicados quatro volumes das correspondências, além de um inventário de todas as cartas conhecidas de Euler. Quatro volumes adicionais estão em andamento e serão publicados em 2016 ou 2017. De acordo com Kleinert (2015, p. 25-26), a Fundação Nacional da Ciência da Suíça não financiará mais edições impressas de clássicos, portanto, não haverá uma edição completa impressa de todas as correspondências de Euler. Estão planejando para serem disponibilizadas em uma edição *on-line* com acesso aberto, as cartas restantes que não se destinam à publicação nos volumes impressos, incluindo manuscritos originais, transcrições e comentários, seguindo como exemplo o projeto Bernoulli na Basiléia[30] e o projeto sueco Linné[31].

Desde o início da edição das obras, os arquivos de Euler na Basiléia, que agora fazem parte do Bernoulli-Euler-Zentrum[32], localizado na Biblioteca da Universidade da Basiléia, reuniu as cópias das cartas existentes de Euler que estavam espalhadas pelo mundo, em bibliotecas, arquivos e coleções particulares. Quanto às cartas a ele endereçadas, estas são preservadas principalmente nos arquivos de São Petersburgo na divisão de Arquivo da Academia de Ciências Russa (SPbB ARAS). No século XIX uma pequena parte das correspondências de Euler foram transferida para o departamento de manuscritos da Biblioteca Universitária de Tartu (Estônia), todas estas cartas para e de Euler estão agora acessíveis *on-line*[33].

(a) Biblioteca da Universidade da Basiléia

(b) Sala do Bernoulli-Euler-Zentrum

[30] <`http://www.ub.unibas.ch/bernoulli/index.php/Hauptseite`>.
[31] <`http://linnaeus.c18.net`>.
[32] <`https://bez.unibas.ch`>.
[33] <`http://dspace.ut.ee/handle/10062/4930`>.

1.4 Uma proposta

Nossa proposta para abordar os assuntos tratados por Euler em seus trabalhos será a partir de um ponto de vista empírico. A maneira de sugerir a legitimidade desse ponto de vista é justamente aplicar o pensamento empírico na explicação dos assuntos, é sugerir como o pensamento empírico funciona no interior dessas temáticas.

Para dar suporte ao nosso posicionamento, apresentaremos a classificação dos assuntos tratados por Euler em seus trabalhos, de acordo com a área, segundo o *site The Euler Archive*[34] - que é uma biblioteca digital dedicada aos trabalhos e vida de Leonhard Euler. Temos,

- **Matemática:** Teoria dos Números; Teoria das Equações; Combinatória e Probabilidade; Cálculo Diferencial; Séries Infinitas; Integração; Integrais Elípticas; Equações Diferenciais; Cálculo de Variações; Geometria.
- **Física:** Física Geral, Acústica; Óptica.
- **Astronomia:** Movimento Solar e Lunar; Perturbação Astronômica; Movimento dos Planetas, Cometas; Rotação e Translação; Elipses e Paralaxe; Mares e Geofisícas.
- **Mecânica:** Mecânica Geral; Corpos Rígidos; Corpos Elásticos; Mecânica dos Fluídos; Teoria de Máquinas; Ciências Naval.
- **Diversos:** Aritmética Básica Escolar; Cartas a uma princesa da Alemanha.

Assim, podemos constatar que Euler fez grandes contribuições à matemática, à física, à astronomia e à engenharia, portanto, podemos dizer que além de matemático, Euler foi físico e até mesmo engenheiro. Como cientista podemos inferir, com a classificação de hoje, que ele atuava tanto nas Ciências Formais como Empíricas e, assim tinha por método tanto o indutivo[35] como o dedutivo[36], como veremos ao longo deste trabalho.

> Não há dúvida de que Leonhard Euler faz parte dos grandes cientistas de todos os tempos. Seu trabalho exibe uma combinação única de interesses amplos e ideias brilhantes. Ele exibe maneiras originais de lidar com desafios e uma incrível persistência na busca de suas ideias, e mostra ainda uma apreciação profunda e solidária as realizações de seus antecessores e colegas. Euler é lembrado sobretudo como o principal matemático do seu tempo, mas suas obras também incluem inovadoras contribuições à física, à astronomia e à engenharia. Além disso, sua vasta correspondência produz uma compreensão fascinante sobre o desenvolvimento de suas ideias e sobre a comunidade científica do século XVIII. (KLEINERT; MATTMÜLLER, 2007, p. 25, tradução nossa).

[34] <`http://eulerarchive.maa.org`>.

[35] "Indução é um processo mental por intermédio do qual, partindo de dados particulares, suficientemente constatados, infere-se uma verdade geral ou universal, não contida nas partes examinadas. Portanto, o objetivo dos argumentos indutivos é levar a conclusões cujo conteúdo é muito mais amplo do que o das premissas nas quais se basearam." (MARCONI; LAKATOS, 2016, p. 68).

[36] O Método dedutivo "é o método que parte do geral e, a seguir, desce ao particular. Parte de princípios reconhecidos como verdadeiros e indiscutíveis e possibilita chegar a conclusões de maneira puramente formal, isto é, em virtude unicamente de sua lógica. É o método proposto pelos racionalistas (Descartes, Spinoza, Leibniz), segundo os quais só a razão é capaz de levar ao conhecimento verdadeiro, que decorre de princípios a priori evidentes e irrecusáveis." (GIL, 2002, p. 9).

Para corroborar mais esta ideia, apresentaremos, a seguir, uma citação de Polya (1954, p. 3), a qual ele atribuiu a Euler[37].

> Parecerá um pouco paradoxal atribuir uma grande importância às observações mesmo na parte das ciências matemáticas, que é normalmente chamada de Matemática Pura, uma vez que a opinião corrente é que as observações são restritas a objetos físicos que produzem sensações sobre os sentidos. Como devemos nos referir aos números apenas com o intelecto puro, dificilmente podemos compreender como observações e quase-experimentos podem ser úteis na investigação da natureza dos números. No entanto, de fato, como vou mostrar aqui, com muito boas razões, as propriedades dos números conhecidas hoje foram descobertas principalmente por observações, e descobriram-se muito antes de sua verdade ter sido confirmada por demonstrações rigorosas. Há ainda muitas propriedades dos números com as quais estamos bem familiarizados, mas que não somos ainda capazes de provar; apenas observações nos levaram ao seu conhecimento. Daí, vemos que na teoria dos números, que ainda é muito imperfeita, podemos colocar nossas maiores esperanças nas observações; elas vão levar-nos continuamente para novas propriedades, que devemos nos esforçar para provar depois. O tipo de conhecimento que é apoiado apenas pelas observações e que ainda não foi provado deve ser cuidadosamente distinguido da verdade; ele é obtido por indução, como costumamos dizer. Contudo temos visto casos em que a mera indução levaram ao erro. Portanto, devemos tomar muito cuidado para não aceitarmos como verdadeiras tais propriedades dos números que descobrimos por observação e que são sustentadas apenas por indução. Na verdade, devemos usar essa descoberta como uma oportunidade para investigar mais precisamente as propriedades descobertas e para provar ou refutá-las; em ambos os casos, podemos aprender algo útil. (EULER, Opera Omnia, ser. 1, vol. 2, p. 459, *Specimen de usu observationum in mathesi pura*, tradução nossa).

Refletindo nos dizeres do editor de Euler, percebemos que o método indutivo é um método que nos proporciona encontrar a "verdade", ele nos fornece o caminho, ou a ferramenta para fazermos as conjecturas. Assim, quanto mais casos particulares estudarmos, mais plausível torna-se-á a conjectura. Mas devemos ter bom senso ao utilizar esse método, pois podemos formular falsas conjecturas.

O editor observa que ao formularmos uma conjectura, ela é apenas uma conjectura, pois, de fato, devemos demonstrá-la rigorosamente para que ela torne-se uma proposição ou teorema. Assim, Euler utiliza o método indutivo para fazer suas descobertas, mas como matemático, ele sabe da necessidade de provar seus resultados. Aqui, queremos destacar que os interlocutores de Euler eram os matemáticos e cientistas do século XVIII, que constituíam a comunidade científica[38] da época. Logo, aqui convém também destacar o que era uma demonstração rigorosa para essa comunidade.

[37]De acordo com a obra *A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações* de Imre Lakatos esta citação foi atribuída equivocadamente a Euler, de fato, foi feita pelo editor da revista *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, volume 6, impresso em 1761.

[38]Neste trabalho utilizaremos o significado que Thomas Kuhn atribuiu a *comunidade científica* no livro *A Estrutura das Revoluções Científicas* (1962), ou seja, comunidade científica é o nome que designa o "grupo acadêmico que decide se novas teorias científicas ou novos resultados serão aceitos e reconhecidos." (SCHUBRING, 2003, p. 8).

O Ocidente absorveu a "Álgebra" (*al-jabr wa'l-muqabah*) dos Árabes na forma de teoria das equações, a partir do século XIII até a metade do século XVI. Segundo Arruda (2015), no século XV, na Itália, o texto original de Diofanto de Alexandria (c. 200 - 284) começou a se tornar bem conhecido e influente, e no século XVI, François Viète (1540 - 1603), influenciado por Diofanto, cria sua arte analítica que propunha uma maneira axiomática de usar o método analítico associado aos procedimentos algébricos.

Na primeira página de sua *In Artem Analyticem Isagoge* (Introdução à Arte Analítica), Viète afirma:

> Encontra-se na Matemática uma certa maneira de procurar a verdade, que diz-se ter sido primeiramente inventada por Platão, que Theon chamou Análise e que, para ele, define a suposição daquilo que procuramos como se estivesse concedido para chegar a uma verdade procurada, por meio de consequências; ao contrário, a Síntese é a suposição de uma coisa concedida para chegar ao conhecimento daquilo que procuramos pelo meio de consequências. (VIÈTE apud CORRÊA, 2008, p. 90).

Consequentemente, podemos dizer que o paradigma dominante para uma demonstração matemática era a utilização do método sintético, pois o método analítico era um método de descoberta e não uma demonstração propriamente. Mas pouco a pouco este paradigma foi mudando, a partir de Descartes a utilização do método analítico para demonstrar um resultado tornou-se válido, não havia mais a necessidade de mostrar os resultados obtidos pelo método sintético.

De acordo com Roque (2012, p. 353), "o debate entre tradição e modernidade refletia-se, na matemática, em uma disputa entre método sintético e analítico." Em 1660, Antoine Arnauld (1612 - 1694) cria uma nova noção de rigor, que ficou conhecida como *lógica de Port-Royal*, ao publicar dois livros *Nouveaux éléments de géometrie* (Novos elementos de geometria); e *La logique ou l'art de penser* (A lógica ou a arte de pensar) escrito em parceria com Pierre Nicole. No primeiro, ele explicita o *método de invenção* que consistia em associar as grandezas geométricas as quantidades algébricas exibindo, por meio de manipulação algébrica, o caminho percorrido para se chegar ao resultado. Segundo Roque (2012, p. 353), além de facilitar a compreensão da geometria e apresentar princípios mais fecundos, Arnauld destacava que uma das vantagens desse método era à generalidade das técnicas permitida pelo uso da álgebra.

Ainda segundo Roque (2012, p. 354), Arnauld e Jean Prestet reuniram os progressos da álgebra de seu tempo e elaboraram um programa para generalizar o conhecimento matemático por meio do método analítico. No início do XVIII, suas ideias foram difundidas na Academia de Ciências de Paris modernizando a matemática francesa.

Portanto, os métodos de invenção adquiriram legitimidade no ambiente da pesquisa matemática. Podemos observar a utilização destes métodos nas trocas de correspondências entre os matemáticos e também em seus tratados. Segundo Roque (2012), no século XVII um grande adepto do método analítico foi Leibniz, que para se libertar dos padrões gregos, associados ao cânone euclidiano, defendia suas práticas como *arte da invenção*, onde o que importava mais eram as possibilidades de novidades que as ferramentas e algoritmos traziam do que os critérios que eram usados para as demonstrações.

Este ponto de vista não era compartilhado por Newton, em sua principal obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (Princípios matemáticos da filosofia natural), segundo Roque (2012, p. 364), "os resultados são apresentados na linguagem da geometria sintética", para este grande matemático e físico, "esse formalismo euclidiano era considerado mais adequado para expor uma nova teoria". De fato, o livro *Os Elementos* de Euclides era o que chamamos de *textbook* contendo o padrão de demonstração que era considerado rigoroso, ou seja, o método sintético era o padrão de rigor das demonstrações matemáticas. Assim, a noção de rigor do século XVII estava associada ao método, que tanto poderia ser analítico como sintético.

De acordo com Roque (2012),

> A separação da análise em relação à geometria, no século XVIII, implicou a visão da matemática como um formalismo algébrico. Essa confiança no formalismo decorria do sucesso dos métodos analíticos, e a generalidade da matemática, uma qualidade cara aos analistas, era assegurada pela generalidade dos métodos algébricos. Isso significa dizer que esses métodos operavam sobre objetos algébricos e sua generalidade era derivada da generalidade das fórmulas da álgebra. Logo, se uma demonstração era feita por meio de tais fórmulas, o resultado era admitido como válido em geral. Não havia sequer a necessidade de tecer especulações associadas ao domínio da aplicação das técnicas. (ROQUE, 2012, p. 388).

Portanto, percebemos que o conceito de rigor foi se modificando ao longo da história. Na virada do século XVIII para o XIX as crenças e técnicas que os matemáticos utilizavam já não eram mais capazes de resolver os problemas que surgiam no interior da própria matemática. Como consequência disto, Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) crítica a crença dos matemáticos do século XVIII na "generalização da álgebra", por sua vez, a noção de rigor de Lagrange era diferente da de Cauchy, que, por sua vez, também seria criticado por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897).

Desse modo, entendido que o rigor é um conceito histórico, e que a concepção de rigor no século XVIII, estava associada ao método analítico, podemos afirmar que Euler era um cientista que buscava o rigor em seus trabalhos. Mais do que isto, ele tentava explicitar de forma simples e clara o caminho de suas descobertas.

Segundo Burckhardt (1983),

> André Weil[39]comentou que se fôssemos distinguir entre pesquisadores "teóricos" e "experimentais", como é feito para os físicos, então a preocupação constante de Euler com a teoria dos números o colocaria entre os primeiros. Mas em vista de sua insistência no método "indutivo" de descoberta de verdades aritméticas, realizando um monte de cálculos numéricos para casos especiais antes de abordar a questão geral, poderíamos igualmente chamá-lo de um gênio "experimental". (BURCKHARDT, 1983, p. 264, tradução nossa).

Polya, ao longo do seu livro *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics*, analisa alguns dos trabalhos de Euler para fortalecer a tese da importância do pensamento indutivo na matemática. Em suas próprias palavras:

> Um mestre da pesquisa indutiva em matemática, ele [Euler] fez importantes descobertas (em Série Infinita, na Teoria dos Números, e em outros

[39]Matemático francês (1906 - 1998), foi um dos fundadores do grupo *Bourbaki*, e é reconhecido como um dos mais brilhantes matemáticos do século XX. Disponível em: <`http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/AndreWei.html`>. Acesso em: 3 dez. 2016.

> ramos da matemática) por indução, isto é, por meio de observação, palpites ousados e verificação astuta. A este respeito, no entanto, Euler não é único; outros matemáticos, grandes e pequenos, utilizaram indução extensivamente em seus trabalhos.
> No entanto, Euler parece-me quase único em um aspecto: ele procura apresentar a evidência indutiva relevante cuidadosamente, em detalhe, em boa ordem. Ele a apresenta de forma convincentemente mas honestamente, como um autêntico cientista deveria fazer. Sua apresentação é "a exposição sincera das ideias que o conduziram a essas descobertas" e tem um charme distinto. Naturalmente, como qualquer outro autor, ele tenta impressionar seus leitores, mas como um autor muito bom, ele tenta impressionar seus leitores apenas com coisas que genuinamente impressionaram a ele mesmo. (POLYA, 1954, p. 90, tradução nossa).

Segundo Alexanderson (1983), mesmo em sua época Euler era conhecido como um escritor de escrita clara e elegante. Assim, é com esta grande inspiração que iremos analisar o livro *Elements of Algebra* do grande mestre Leonhard Euler, onde buscaremos compreender quais eram os modos de produção de significados e conhecimentos para séries que ele nos apresentava em seu livro.

1.5 Algumas considerações antes de começarmos

Para iniciarmos nosso encontro "face a face" com Euler, segundo Lins,

> toda tentativa de se entender um autor deve passar pelo esforço de olhar o mundo com os olhos do autor, de usar os termos que ele usa de uma forma que torne o todo de seu texto plausível, e é aqui que devemos prestar atenção às definições que um autor propõe. (LINS, 1999, p. 93).

Portanto, para nos esforçarmos em olhar o mundo com os olhos de Euler, apresentaremos algumas concepções e definições apresentadas por ele, e que guiaram sua escrita ao longo de seu trabalho. Assim, com base no entendimento destes conceitos e definições nos propomos analisar sua obra.

Deste modo, na Parte I, Seção I, no primeiro capítulo intitulado *Da Matemática em geral*, Euler inicia sua obra *Elements of Algebra*, definindo grandeza ou quantidade, explica como medir estas grandezas e define número. Também apresenta o interesse da Ciência Matemática, o que ele entende por Álgebra ou Análise e finaliza o capítulo fazendo uma diferenciação entre aritmética e álgebra. Este referido capítulo é composto por 7 artigos cuja numeração inicia-se no *1* e termina no *7*.

Euler inicia seu livro definindo grandeza:

> *Euler: 1. Tudo o que é capaz de aumentar ou diminuir, é chamado de* **grandeza**[40] *ou* **quantidade**[41].
> *Uma soma de dinheiro, portanto, é uma quantidade, uma vez que nós podemos aumentá-la ou diminuí-la. É o mesmo com um peso e outras coisas deste tipo. (EULER, 1840, p. 1, tradução nossa).*

[40] A tradução inglesa utiliza a palavra magnitude. Optamos utilizar a palavra grandeza para a tradução da palavra alemã *Größe*. No dicionário básico Langenscheidt, encontramos *Größe* como sinônimo de grandeza; magnitude; tamanho; dimensão; extensão; estatura; altura; número.

[41] Sinônimo acrescentado pelo tradutor francês.

Apoiado neste conceito Euler define *Matemática*:

> *Euler: 2. A partir desta definição, é evidente, que os diferentes tipos de grandezas devem ser tão variados que se tornam difíceis de enumerá-los; e esta é a origem dos diferentes ramos da Matemática, cada um sendo empregado em um tipo particular de grandeza. A Matemática, em geral, é a* **ciência das quantidades** *[grandezas] ou a ciência que investiga os meios de medir quantidades. (EULER, 1840, p. 2, tradução nossa).*

Se a Matemática é a ciência das quantidades então precisamos saber medir essas quantidades. Logo, nos próximos artigos Euler irá nos ensinar a medir e também definirá número.

> *Euler: 3. Pois bem, não podemos medir ou determinar qualquer quantidade, exceto considerando alguma outra quantidade do mesmo tipo como conhecida e indicando sua relação mútua. Se fosse proposto, por exemplo, determinar a quantidade de uma soma de dinheiro, devemos tomar algum pedaço*[42] *(sic) conhecido de dinheiro, como louis*[43]*, uma coroa*[44]*, um ducat*[45]*, ou alguma outra moeda e mostrar quantos destes pedaços estão contidos na soma dada. Da mesma maneira, se fosse proposto determinar a quantidade de um peso, devemos tomar um certo peso conhecido, por exemplo, uma libra, uma onça, etc., e então mostrar quantas vezes um destes pesos está contido naquele que estamos querendo determinar. Se desejarmos medir qualquer comprimento ou extensão, devemos fazer uso de algum comprimento conhecido, tal como um pé. (EULER, 1840, p. 2-3, tradução nossa).*

> *Euler: 4. Dessa maneira a determinação, ou medida de grandezas de todos os tipos, é reduzida ao seguinte: fixo uma grandeza conhecida qualquer da mesma espécie que aquela que queremos determinar, e a considero como* **medida** *ou* **unidade***; e então determino a razão [Verhältniß], da grandeza proposta em relação a esta medida conhecida. Esta razão é sempre expressa por números [Zahlen]. De modo que um número [Zahl] nada mais é do que a razão [Verhältniß] de uma grandeza para outra arbitrária assumida como unidade. (EULER, 1840, p. 2, tradução nossa).*

Aqui queremos destacar a utilização da palavra *Zahlen*, ou no singular *Zahl*, por Euler, segundo a nota da tradutora, Eva Brann, da obra *Greek Mathematical Thought and the Origen of Algebra* de Jacob Klein, "a palavra grega *Arithmos* foi traduzida do texto Alemão como *Anzahl*: 'um número de [coisa]' para distinguí-la de nossa forma moderna denominada *Zahl*: 'número'." (ARRUDA, 2015, p.177). A tradutora chama a atenção para o fato que tanto a palavra alemã *Anzahl* como *Zahl* são traduzidas simplesmente como "número", e no caso da obra supracitada, seu objetivo principal era mostrar que o "arithmos" grego e o moderno "número" não significam a mesma coisa. Ainda segundo Brann, eles diferem na sua intencionalidade, pois o primeiro significa *coisas*, isto é, um número delas, enquanto o último significa um *conceito*, isto é, aquilo que tem quantidade e relações. Destacamos que Euler, em sua obra, utiliza as duas palavras

[42]A palavra utilizada no original alemão é *Stücke* que, segundo o dicionário Langenscheidt, significa pedaço ou peça. O tradutor francês utilizou a palavra moeda (*monnoie*) e o tradutor inglês utilizou a palavra *piece*, que segundo o dicionário *on-line* `wordreference.com`, significa moeda (archaic).

[43]Antiga moeda francesa de ouro que circulava antes da Revolução.

[44]Moeda britânica que surgiu com a união dos reinos da Inglaterra e Escócia em 1707.

[45]Ducat foi uma moeda de prata ou ouro utilizada na Europa nos séculos medievais até o início do século XX.

em alemão, sendo assim, em nossa tradução, indicamos entre colchetes a palavra original alemã utilizada por ele, pois acreditamos que os significados produzidos são diferentes, como mostra Brann, de acordo com a palavra utilizada. De fato, podemos observar no Artigo *4*, que o uso da palavra número foi empregada no sentido simbólico, ou seja, conceitual.

E assim, Euler, conclui:

> *Euler: 5. A partir disso parece que toda grandeza pode ser expressa por números, e que a base de toda a Ciência Matemática deve ser estabelecidas em um tratado completo sobre a ciências dos números, e um exame preciso dos diferentes métodos possíveis de cálculos.*
>
> *Esta parte fundamental da matemática é chamada de Análise ou Álgebra. (EULER, 1840, p. 2, tradução nossa).*

O tradutor francês após este último parágrafo acrescenta uma nota de rodapé:

> Vários escritores matemáticos fazem uma distinção entre Análise e Álgebra. Pelo termo Análise, eles entendem o método de determinação dessas regras gerais que auxiliam a compreensão em todas as investigações matemáticas; e por Álgebra, o instrumento que este método emprega para realizar este fim. Esta é a definição dada por M. Bèzout no prefácio de sua *Algebra.* (EULER, 1840, p. 2, tradução nossa).

Comparando a nota de rodapé com o artigo *5*, podemos dizer que para Euler análise e álgebra são sinônimos, ou seja, para ele, álgebra é tanto o método como o instrumento que o método emprega para a determinação das regras gerais que auxiliam a compreensão em todas as investigações matemáticas.

> *Euler: 6. Na Álgebra, então, consideramos apenas números, que representam quantidades [grandezas], sem considerar os diferentes tipos de quantidades [grandezas]. Estes são os tópicos de outros ramos da matemática. (EULER, 1840, p. 2, tradução nossa).*

Segundo a obra *A New Mathematical And Philosophical Dictionary* de Peter Barlow (1814) encontramos as seguintes definições:

> ÁLGEBRA é um método geral de resolver problemas matemáticos por meio de equações; ou é um método de cálculo relativo a todos os tipos de quantidades por meio de certos caracteres ou símbolos que foram inventados para este propósito.
>
> ANÁLISE é, em geral, o método de resolver problemas matemáticos, reduzindo-os em equações; e pode ser dividida em *antiga* e moderna.
>
> A **Análise Antiga**, como Pappus descreveu em sua "Collections Mathematical" (1588), é o método de proceder da coisa procurada tomada como certa, através de suas consequências, para alguma coisa que é realmente certa ou conhecida; neste sentido se opõe à síntese, ou composição, que começa no último passo da análise, e traça os vários passos para trás,

> fazendo neste caso o antecedente, que no outro fosse o consequente, até chegarmos à coisa procurada, que foi assumida no primeiro passo da análise.
>
> A **Análise Moderna** compreende a álgebra, a aritmética de infinitos, as séries infinitas, os incrementos, os fluxões, etc.; [...] A este ramo da ciência devemos as nobres invenções e melhorias que foram feitas na matemática e na filosofia nos últimos dois séculos. Nos fornece os exemplos mais perfeitos da maneira pela qual a arte do raciocínio deve ser empregada; nos dá à mente uma habilidade maravilhosa para descobrir coisas desconhecidas por algumas coisas dadas; e empregando símbolos curtos e fáceis para expressar ideias, nos apresenta ao entendimento coisas que de outra forma estariam além desta esfera. Por meio disso, as demonstrações geométricas podem ser abreviadas; um longo caminho de raciocínio auxiliado e facilitado por símbolos visíveis. Por este artifício, um grande número de verdades podem ser expressas em uma única linha; que, no processo ordinário, ocuparia muitas páginas, e assim, pela contemplação de uma linha de cálculo, poderemos adquirir em pouco tempo o conhecimento de toda uma ciência que, sem essa ajuda, dificilmente poderia ser compreendida em vários anos. (tradução nossa).

Note que após alguns anos da publicação do livro *Elements of Algebra*, a definição apresentada de Análise é ampliada e engloba a Álgebra. De fato, como veremos mais adiante nesta tese, na concepção de Euler, apresentada acima, a álgebra é sinônimo da análise, e compreende a aritmética de infinitos e as séries infinitas.

Euler encerra o Capítulo 1, apresentando a diferença entre aritmética e álgebra.

> *Euler: 7. A aritmética trata dos números em particular, e é a* **ciência dos números propriamente dita***; mas esta ciência se estende apenas a determinados métodos de cálculo, que ocorrem na prática comum [vida comum]; a Álgebra, ao contrário, compreende em geral todos os casos que podem existir na doutrina e cálculo dos números. (EULER, 1840, p. 2, tradução nossa).*

De acordo com a obra *A New Mathematical And Philosophical Dictionary* de Peter Barlow (1814) encontramos a seguinte definição:

> ARITMÉTICA forma-se a partir de $\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$, número, a arte e ciência dos números; ou a parte da matemática que considera suas operações e propriedades, e ensina como computar ou calcular verdadeiramente, com facilidade e expedição. As várias regras relacionadas a este assunto seriam encontradas sobre seu respectivo domínio [...] (tradução nossa).

Também, na obra de Barlow, encontramos a definição de *analista*, um algebrista, ou alguém *expert* em análise em geral. Isto reforça a concepção de Euler. Observe que estes significados foram abandonados, hoje um analista e um algebristas são matemáticos que operam em áreas distintas, análise e álgebra, respectivamente. E as próprias definições de análise e álgebra são outras.

Assim, temos as primeiras concepções que guiaram o trabalho de Euler, e com base nessas concepções produziremos significado aos objetos matemáticos apresentados por Euler.

Capítulo 2

O Modelo dos Campos Semânticos

> *Não sei como você é; preciso saber. Não sei também onde você está (sei apenas que está em algum lugar); preciso saber onde você está para que eu possa ir até lá falar com você e para que possamos nos entender, e negociar um projeto no qual eu gostaria que estivesse presente a perspectiva de você ir a lugares novos. (LINS, 1999, p. 85).*

Nosso trabalho é fundamentado no Modelo dos Campos Semânticos (MCS), que é um modelo epistemológico que nos permite analisar certos modos de produção de significados na matemática. Segundo Lins (2012, p. 12), "este modelo só existe em ação, ele não é uma teoria para ser estudada, é uma teorização para ser usada".

Mas para usarmos o modelo precisamos apresentar algumas noções dele que são fundamentais para o nosso trabalho.

A definição proposta por Lins para epistemologia é:

> Epistemologia é a atividade humana que estuda as seguintes questões: (i) o que é conhecimento?; (ii) como é que conhecimento é produzido?; (iii) como é que conhecemos o que conhecemos? (LINS, 1993, p. 77).

Assim, ao respondermos estas questões estamos marcando nossas *posições epistemológicas*, e todo nosso trabalho de pesquisa será apoiado em nossa posição epistemológica.

2.1 O que é conhecimento?

Lins formula a seguinte resposta a esta pergunta.

> **CONHECIMENTO**
> Um conhecimento consiste em uma crença-afirmação (o sujeito enuncia algo em que acredita) junto com uma justificação (aquilo que o sujeito entende como lhe autorizando a dizer o que diz). (LINS, 2012, p. 12).

Observe que nesta formulação de conhecimento, para que o conhecimento ocorra, de fato, é necessário que o sujeito (da enunciação) justifique suas *crenças-afirmações*, não basta apenas acreditar naquilo que está afirmando. Com esta caracterização de conhecimento, podemos afirmar que conhecimento pertence ao sujeito que faz uma enunciação e não ao enunciado.

Vamos esclarecer os outros dois termos que apareceram na formulação de conhecimento.

> **ACREDITAR (CRENÇA)**
> Aqui é preferível uma caracterização pragmática: direi que uma pessoa acredita em algo que diz se age de maneira coerente com o que diz. (LINS, 2012, p. 13).

Em muitas culturas ocidentais, legitimamos que as crianças acreditem em *Papai Noel*, ou seja, as crianças acreditam que no dia 25 de dezembro o *Papai Noel* deixará um presente de natal sob a árvore de natal, e elas esperam ansiosamente por este dia.

> **JUSTIFICAÇÃO**
> Não é justificativa. Não é explicação para o que digo. Não é algum tipo de conexão lógica com coisas sabidas. É apenas o que o sujeito do conhecimento (aquele que o produz, o enuncia) acredita que o autoriza a dizer o que diz. (LINS, 2012, p. 21).

Por exemplo, a maioria dos adultos que conhecemos recita o *Teorema de Pitágoras*: "o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos catetos ao quadrado". Qual a justificação que lhes autoriza a dizer isto? A *autoridade* de um professor que eles tiveram na escola, de um livro que leram. "A autoridade não 'explica' nada, ela apenas *autoriza*, *empresta legitimidade*." (LINS, 2012, p. 21).

Vamos elucidar o que foi dito até agora: para o MCS "$0,333\ldots = \frac{1}{3}$" é um texto que não contém conhecimento, quando um sujeito cognitivo, digamos, Mércia "olha" para este texto, e acredita e afirma ele com a justificação

$$0,3333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$$

como o lado direito dessa igualdade é a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, cujo primeiro termo é $\frac{3}{10}$ e a razão igual a $\frac{1}{10}$, temos

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, $0,333\ldots = \frac{1}{3}$. Dizemos que Mércia produziu um significado para este texto, logo ela produziu <u>um</u> conhecimento a partir deste texto.

Agora suponhamos que um outro sujeito cognitivo, digamos Lorival, se depare com o mesmo texto "$0,333\ldots = \frac{1}{3}$", ele acredita e afirma ele, e sua justificação é a seguinte:

$$\begin{array}{rcl} s & = & 0,333\ldots \\ 10s & = & 3,333\ldots \\ \textit{Subtraindo } s & = & 0,333\ldots \\ \hline 9s & = & 3 \end{array}$$

Portanto, temos $s = \frac{3}{9}$, isto é, $0,333\ldots = \frac{1}{3}$. Observe que o conhecimento produzido pela Mércia, do ponto de vista do MCS, é diferente do conhecimento produzido por Lorival, pois suas justificações são diferentes. Desta forma, a nossa posição epistemologica nos mostra que para um mesmo discurso (texto) se pode produzir conhecimentos distintos. Portanto, produzir conhecimento é "produzir uma enunciação, de uma proposição, na qual o sujeito acredita e para a qual tem alguma justificação." (LINS, 2012, p. 33).

Esta caracterização de conhecimento é importante para o nosso trabalho, pois trataremos a Matemática como um conjunto de frases, isto é, um texto, e não conhecimento. Como observa Lins (1994), "apenas quando este texto, a Matemática, é enunciado, que há produção de conhecimento" (LINS, 1994, p. 43). Por isso, analisaremos as *crenças-afirmações* e justificações que Euler nos apresenta em seus textos, pois "produzir conhecimento é produzir justificações no processo de enunciação de crenças-afirmações." (SILVA, A. 2003, p. 20).

Precisamos de mais algumas noções do MCS para iniciarmos nosso trabalho de pesquisa. Como nossa proposta é analisar os modos de produção de significados e conhecimentos que Euler produzia para os objetos matemáticos. Lins (2012), afirma que "é no interior de campos semânticos que se produz conhecimento e significado, que *objetos* são constituídos." (LINS, 2012, p. 18).

2.2 Campos Semânticos

Voltando ao exemplo inicial da Seção 2.1, Mércia se depara com o texto $0,333\ldots = \frac{1}{3}$. Então, ela começa a produzir significado para este texto,

$$\begin{aligned} 0,3333\ldots &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots \\ &= \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Observe que neste processo de produção de significado, foram feitas afirmações ($\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$ é uma progressão geométrica infinita, logo sua soma é igual a $\frac{1}{3}$), que são tomadas como localmente válidas, sem que haja necessidade de justificações. Lins denominou o conjunto dessas *crenças-afirmações*, que não precisam de justificações, de estipulações locais[1].

> **NÚCLEO**
> O núcleo de um campo semântico é constituído por estipulações locais, que são, localmente, verdades absolutas, que não requerem, localmente, justificação. (LINS, 2012, p. 26).

Observe que no nosso exemplo o núcleo foi constituído por progressões geométricas infinitas.

> **CAMPO SEMÂNTICO**
> Um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade. (LINS, 2012, p. 17).

Utilizando os dois exemplos dados acima, podemos dizer que Mércia produziu significado para a representação da dízima periódica em fração ordinária em *um* Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por progressões geométricas infinitas, ou seja, suas justificações estão

[1]Emprestando a noção de *estipulação* de Nelson Goodman.

todas relacionadas a um mesmo núcleo: as progressões geométricas. Agora, vamos analisar o conhecimento produzido por Lorival.

$$\begin{array}{rcl} s & = & 0,333\ldots \\ 10s & = & 3,333\ldots \\ \underline{Subtraindo\ s} & \underline{=} & \underline{0,333\ldots} \\ 9s & = & 3 \\ s & = & \frac{3}{9} \end{array}$$

Portanto, $0,333\ldots = \frac{1}{3}$. Observe que as suas justificações estão relacionadas a operações aritméticas (posso multiplicar por 10 ambos os lados da equação, posso subtrair uma equação da outra, posso dividir por 9 ambos os lados da equação). Assim, de acordo com o MCS, Lorival produziu significado para a representação da dízima periódica em fração ordinária em *um* outro Campo Semântico, cujo núcleo foi constituído por operações aritméticas.

Falta comentarmos o que entendemos por atividade. Lins, na formulação de sua teoria, utiliza o conceito de atividade proposto por Leontiev, nos seguintes termos:

> Não chamamos todos os processos de atividade. Por esse termo designamos apenas aqueles processos que, realizando as relações do homem com o mundo, satisfazem uma necessidade especial correspondente a ele. [...] Por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objeto que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo. (LEONTIEV, p. 68, 2012).

Para ilustrar o que é uma atividade, Leontiev apresenta um exemplo. Um estudante está lendo um livro de história, preparando-se para uma prova. Um colega diz a ele que este livro que ele está lendo não é uma leitura necessária para a prova. Segundo Leontiev (2012), pode ocorrer as seguintes situações:

- o estudante para imediatamente a leitura do livro, pois o motivo pelo qual ele estava lendo o livro não era o seu conteúdo mas sim a necessidade de obter boas notas na prova.

> Aquilo para o qual sua leitura se dirigia não coincidia com aquilo que o induzia a ler. Neste caso, por conseguinte, a leitura não era propriamente uma atividade. A atividade, neste caso, era a preparação para o exame, e não a leitura do livro por si mesmo. (LEONTIEV, p. 68, 2012).

- o estudante pode continuar sua leitura ou talvez desistir momentaneamente da leitura. Nestes casos,

> aquilo que dirigiu o processo da leitura, isto é, o conteúdo do livro, estimulou por si mesmo o processo, em outras palavras, o conteúdo do livro foi o motivo. Dizendo de outra forma, alguma necessidade especial do estudante obteve satisfação no domínio do conteúdo do livro - uma necessidade de conhecer, de entender, de compreender aquilo de que tratava o livro. (LEONTIEV, p. 68, 2012).

Ao tomarmos a atividade como a unidade de análise, queremos dizer que nossa análise do processo de produção de significado ocorre no interior da atividade, e sendo assim, se a atividade muda, a produção de significados também pode mudar.

Queremos destacar aqui o fato que na definição de Campos Semânticos, em sua "formulação de semântica em relação a conhecimento não faz referências primárias a *objetos*, mas a modos de produzir objetos" (LINS, 1994a, p. 31). Isto implica que Campos Semânticos não são constituídos por *objetos*, pois "a constituição de *objetos* se dá sempre no processo de produção de *significado*, no processo de produção de *conhecimento*" (LINS, 1994a, p. 38).

2.3 O que entendemos por *objetos*?

Segundo Lins (1996, p. 137), em alguns "aspectos de uma abordagem tradicional no estudo do pensamento humano" assume-se que o pensamento é estruturado por conceitos.

> [...] encontramos na ciência ocidental o protótipo do que tomamos hoje por "conceito": uma construção teórica dentro duma teoria. É assim que temos conceitos de massa, velocidade e número natural, por exemplo. Na tradição de nossa ciência, o papel dos conceitos é o de tematizar e firmar as noções básicas de uma teoria ou campo de investigação; podemos considerar que os conceitos de uma teoria indicam do que é que ela trata, quais são - em um sentido amplo - seus objetos. (LINS, 1996b, p. 137).

Assim,

> A inserção dum sujeito em uma prática científica, ainda que de forma "ficcional", como muitas vezes se dá no plano do ensino-aprendizagem, passa necessariamente pela aceitação de que os objetos constituídos pelos conceitos são *os* objetos de que se trata naquela prática, o que equivale a dizer que nesta inserção o sujeito deve passar a pensar *com* e *sobre* aqueles conceitos: com relação ao pensamento científico, é natural considerar que este seja estruturado por conceitos. Parte considerável da atividade científica consiste, na verdade, em articular novas ideias ou evidência experimental aos conceitos básicos da ciência em questão. (LINS, 1996b, p. 137).

Observe que a atividade científica está bem circunscrita, ou seja, vamos incorporando ao seu *corpus*, as novas ideias (conceitos) de maneira a deixá-la cada vez mais consistente. Segundo Silva, A. (2003, p. 71), "o objetivo da ciência é o domínio total dos fenômenos, é caminhar na direção de dizer tudo."

> [...] o pensamento científico, enquanto paradigma de verdade e excelência, oferece uma visão do que seja o pensamento humano "pleno", e por este pensamento científico estruturar-se sobre conceitos, fica reforçada a tese de que todo pensamento o é. (LINS, 1996b, p. 138).

De acordo com Lins, a educação científica e a matemática sofreram forte influência desta visão. "Não é nenhuma coincidência que Piaget se referia exatamente às mesmas estruturas-mãe de Bourbaki[2] como as fundamentais do pensamento lógico-matemático" (LINS, 1996b, p. 138).

[2]Nicolas Bourbaki foi o nome escolhido por um grupo de matemáticos, majoritariamente franceses, que a partir de 1935, escreveram uma série de livros com o objetivo de fundamentar toda a matemática em bases axiomáticas. Os seus membros fundadores foram: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb,

No projeto piagetiano, segundo Lins, a criança é examinada sempre pela *falta*, isto é, "pelo que ela não é *ainda*", o que esta faltando para ela se tornar como nós ("o ocidente racional e científico").

> Um efeito da concepção piagetiana é a noção de "misconceptions", que se debate entre não poder aceitar a ideia de "conceito errado" (pois não seria um conceito), e o pressuposto de que o pensamento se estrutura através de conceitos. A solução habitual é procurar, subjacentes a "misconceptions", por *proto-conceitos*, entendendo-se por isso uma noção que envolve pelo menos alguns aspectos (corretos) dos conceitos (plenos), mas também outros elementos (incorretos), podendo portanto serem vistos como germes da formação de conceitos, e ao mesmo tempo "responsáveis" por erros. (LINS, 1996b, p. 138).

O problema da suposição que o pensamento estrutura-se por conceitos é o fato que as pessoas são lidas pela falta, não existe outra alternativa para esta concepção. Mas uma questão primordial no Modelo dos Campos Semânticos é entender por que as pessoas dizem o que dizem. Assim, Lins propõem uma interpretação alternativa para estruturar o pensamento, ou seja, o pensamento não seria mais estruturado por conceitos mas por elementos de outra natureza.

> Podemos chamar esses elementos de *objetos*, não no sentido de "coisa-em-sí", mas no sentido de "coisas sobre as quais sabemos dizer algo, e dizemos". Uma tal noção de objeto refere-se, naturalmente, ao fato de que eles existem sempre no interior de atividades; o significado de um objeto não é o conjunto de todas as coisas que possivelmente poderíamos dizer sobre ele (uma noção que beira perigosamente o idealismo), e sim o conjunto das coisas que *efetivamente* dizemos sobre ele. "Massa" pode ser vista como um objeto, por exemplo no interior de uma atividade na qual enunciamos que "a massa de um corpo varia com a velocidade desse corpo". Se em outra atividade enunciamos (newtonianamente) que, "a massa de um corpo é constante", *certamente o objeto é outro.*
> Há uma tradição que diria que são apenas duas "interpretações" de uma mesma coisa (uma delas sendo apenas aproximadamente correta), mas não penso que essa noção de "interpretação" de uma "essência" seja necessária (ou correta). *De fato*, é no interior de atividades que os objetos são constituídos. (LINS, 1996b, p. 140).

Em seguida Lins apresenta a diferença entre conceitos e objetos.

> Enquanto a noção de conceito pensa em caracterizações estáveis de objetos (e de preferência uma caracterização justa, minimal, como no caso de nossos conceitos científicos), os objetos enquanto noção básica são constituídos de forma redundante, muitas vezes, e são instáveis, na medida em que dentro de uma atividade é possível - e comum - que novas demandas ou condições se apresentem, que vínculos antes distantes se tornem próximos. (LINS, 1996b, p. 140).

Portanto, o Modelo dos Campos Semânticos se apoia na premissa que o pensamento humano

Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, René de Possel, Szolem Mandelbrojt, André Weil. Para maiores informações consulte a página oficial da Associação dos Colaboradores de Nicolas Bourbaki: `<http://www.bourbaki.ens.fr>`.

é estruturado por objetos.

> Um objeto é, no MCS, qualquer coisa sobre a qual uma pessoa esta falando, seja ela "concreta" - por exemplo, uma cadeira em frente a mim - ou "simbólica" - por exemplo, letras em um pedaço de papel. (LINS, 2004c, p. 4, tradução nossa).

Voltando ao nosso exemplo, ao produzir significado para o texto $0,333\ldots = \frac{1}{3}$ tanto Mércia quanto Lorival constituíram o **objeto dízima periódica**. Observamos que o objeto dízima periódica não estava previamente constituído, ele se constitui como objeto a partir do momento em que Lorival e Mércia começaram a falar a partir do texto $0,333\ldots = \frac{1}{3}$.

> **SIGNIFICADO/OBJETO**
> Significado de um objeto é aquilo que <u>efetivamente</u> se diz a respeito de um objeto, no interior de uma atividade. Objeto é aquilo para que se produz significado. (LINS, 2012, p. 28).

Destacamos ainda, que o objeto dízima periódica que Lorival constituiu é diferente do objeto dízima periódica constituído pela Mércia, pois de acordo com o MCS, as justificações que cada um produziu para constituir o objeto dízima periódica foram diferentes, logo dizemos que os objetos são distintos e não interpretações possíveis para o mesmo texto $0,333\ldots = \frac{1}{3}$.

Esta concepção de objeto é central em nosso trabalho, pois os objetos são constituídos no interior da atividade no processo de produção de significado, portanto,

> para o MCS não existe <u>o</u> significado de um "objeto" sem referência ao contexto em que se fala de um objeto (que se pensa com ele, que se pensa sobre ele). Talvez seja útil dizer que significado é sempre *local*. (LINS, 2012, p. 28).

Mas isto não quer dizer que significado é qualquer coisa que dizemos, já que é sempre local, segundo Lins e Gimenez " [...] não é tudo que pode ser dito [pelo sujeito], já que qualquer dada cultura aceita alguns, mas nunca todos os modos possíveis de produzir significados" (Lins; Gimenez, 1997, p. 143).

Por exemplo, a obra *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*, publicada em 1494, do frade Luca Pacioli (1445 - 1517) foi amplamente divulgada e teve grande prestígio em sua época. Nesta obra encontramos a regra para resolver equações do segundo grau escrita em forma de versos, e mais ainda, Pacioli afirmava que as equações do terceiro grau não podiam ser resolvidas algebricamente. Em outras palavras, no interior das práticas sociais em que Pacioli estava inserido, não era possível produzir significado para as resoluções algébricas das equações do terceiro grau, não era legítimo. Se olhássemos para esta obra desde a perspectiva de que nossa mente é estruturada por conceitos, não poderíamos dizer nada além de que Luca Pacioli estava errado. Ao assumir que pensamos com objetos, as leituras realizadas com o Modelo dos Campos Semânticos nos permitem compreender o porquê de ser legítimo, para Luca Pacioli, dizer o que ele disse e que não podem ser ditas com as justificações da matemática de hoje.

2.4 O Processo de Comunicação

Desde o início deste trabalho nossa proposta de tradução vai de encontro aos primeiros editores das obras de Euler, no sentido de não alterarmos o texto original do livro, isto principalmente porque a proposta de nosso trabalho é analisar os modos de produção de significado e conhecimento que Euler produzia para os objetos matemáticos. Assim, com essa premissa em mente a tradução foi iniciada.

Segundo Lins,

> sempre produzimos significado para um texto, cremos que esse texto tem significado, isto é, que alguém tenha composto dessa maneira com uma intenção, a qual pode "ler-se" a partir do texto. Tendo isto em conta, eu digo que um texto é um resíduo de uma enunciação, que está presente para alguém como parte do pedido de que alguém produza significado para este texto. Uns creem que alguém tenha dito, mas também creem que deveriam produzir significado para este texto. (LINS, 1997, p. 40, tradução nossa).

Desta forma, Lins (1997, p. 40) postula que "a produção de significado sempre implica no mínimo três elementos: autor, texto e leitor."

> **AUTOR-TEXTO-LEITOR**
> Quem produz uma enunciação é o autor. O autor fala sempre na direção de um leitor, que é constituído (produzido, instaurado, instalado, introduzido) pelo o autor. Quem produz significado para um resíduo de enunciação é o leitor. O leitor sempre fala na direção de um autor, que é constituído (produzido, instaurado, instalado, introduzido) pelo o leitor. (LINS, 2012, p. 14).

Dito de outra forma, quando o autor produz uma enunciação, ele o faz sempre na direção de um leitor (interlocutor), que é constituído por ele. Por exemplo, um professor em uma aula expositiva, um pintor expondo o seu quadro. O autor espera que sua enunciação transforme-se em um texto[3] para algum leitor (interlocutor). Podemos expressar estas ideias por meio de um diagrama, proposto por Lins (2012, p. 14).

$$O\ autor \longrightarrow \boxed{\text{TEXTO}} \dashrightarrow UM\ leitor$$

Agora, na perspectiva do leitor, o leitor, no processo de produção de significado, constituí um autor (interlocutor), e é em sua direção que o leitor produz significado para o resíduo de enunciação[4] e neste momento se constitui em texto. Por exemplo, o aluno que busca entender o que o professor diz durante a aula, o visitante de uma galeria que contempla a obra do pintor. Podemos esquematizar estas ideias por meio do diagrama, proposto por Lins (2012, p. 14).

$$UM\ autor \dashrightarrow \boxed{\text{TEXTO}} \longrightarrow O\ leitor$$

[3] "Por um texto [. . .] entenderei não somente o texto escrito - como em *Ecriture*, de Derrida (1991), mas qualquer resíduo de uma enunciação: sons (resíduos de elocução), desenhos e diagramas, gestos e todos os sinais do corpo. O que faz do texto o que ele é, é a crença do leitor que ele é, de fato, resíduo de uma enunciação, ou seja, um texto é delimitado pelo leitor; além disso, ele é sempre delimitado no contexto de uma demanda de que algum significado seja produzido para ele". (LINS, 2001 apud Silva, A., 2003, p. 50).

[4] Segundo Lins (2012, p. 27), resíduo de enunciação é "algo com que me deparo e que acredito ter sido dito por alguém."

Segundo Lins (1999, p. 82), quando entramos em um processo de nos colocarmos "incessante e alternadamente na posição de o autor e de o leitor em cada um destes processos", os pontilhados das figuras acima desaparecem e as duas figuras se fundem, "restando a sensação psicológica de comunicação efetiva".

$$AUTOR \longrightarrow \boxed{\text{TEXTO}} \longrightarrow LEITOR$$

Mas a comunicação só acontece se compartilhamos interlocutores, ou seja, "na medida em que dizemos coisas que o outro diria e com a autoridade que o outro aceita. É isto que estabelece um espaço comunicativo." (Lins, 1999, p. 82).

> **INTERLOCUTOR**
> O interlocutor é uma direção na qual se fala. Quando falo na direção de um interlocutor é porque acredito que este interlocutor diria o que estou dizendo e aceitaria/adotaria a justificação que me autoriza a dizer o que estou dizendo. (LINS, 2012, p. 19).

Oliveira (2002), elucida esta ideia da seguinte forma:

> Podemos ilustrar essa ideia imaginando o que ocorre quando lemos, por exemplo, um romance policial. Ao produzirmos significado para o que está escrito no livro - que então se torna texto para quem lê - , estamos nos colocando incessante e alternativamente nas posições de o autor e o leitor; falamos a história de acordo com o que acreditamos que um autor escreveria ao mesmo tempo em que estamos lendo. Dessa forma é que temos a sensação de que ocorreu a comunicação. Seja para o que for que estejamos produzindo significado, o processo é o mesmo. Um livro de matemática, um acontecimento, um gesto - tudo isso pode vir a se tornar texto no momento que alguém esteja produzindo significado para ele. (OLIVEIRA, 2002, p. 19).

Deste modo, a tradução é um "diálogo" entre o tradutor (leitor) e o autor, ou seja, as enunciações de Euler (o autor) chegam até nós (leitores/ tradutores) como resíduo de enunciações, que se constitui em texto a partir do momento que produzimos significado para este resíduo. Neste momento nos transformamos em autores. Mas para que de fato esse diálogo ocorra é necessário que compartilhemos "interlocutores, na medida em que dizemos coisas que o outro diria e com autoridade que o outro aceita" (LINS, 1999, p. 82).

> No MCS a noção de comunicação é substituída pela noção de *espaço comunicativo*, que é um processo de interação no qual (dizer isto, para o MCS, é redundante) interlocutores são compartilhados [Figura 2.1]. Numa inversão conceitual, "comunicação" não corresponde mais a algo do tipo "duas pessoas falando uma para a outra", e sim a "dois sujeitos cognitivos falando na direção de um mesmo interlocutor". (LINS, 2012, p. 24).

Segundo Lins (2012, p. 19), os nossos interlocutores marcam um *horizonte cultural*, ou seja, os limites do que pode ser dito, pois eles são as marcas da legitimidade.

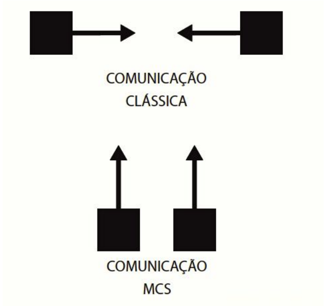


Figura 2.1: Lins, 2012.

> **LEGITIMIDADE/VERDADE**
> Para o MCS, "verdadeiro" não é um atributo daquilo que se afirma (quando há produção de conhecimento), mas sim um atributo do conhecimento produzido. Já legitimidade aplica-se (ou não) a modos de produção de significado. (LINS, 2012, p. 21).

De acordo com Lins (2012), "como consequência de ser enunciado na direção de um interlocutor, e de ter mesmo sido produzido, todo conhecimento é verdadeiro. Isto não quer dizer que aquilo que é afirmado seja 'verdade'." (LINS, 2012, p. 21).

Vamos elucidar esta ideia. Girolamo Cardano (1501 - 1576), em 1539, obteve de Niccolo Fontana (conhecido como Tartaglia) (1500 - 1557), a regra para resolver a equação cúbica $x^3+px = q$, cuja substituição de $x = y - \frac{a}{3}$ na equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ eliminava o termo x^2. A partir disto, deduziu as fórmulas para resolver treze tipos de equações do terceiro grau. Hoje essas fórmulas se reduzem a uma única. Destacamos que naquela época não havia fórmulas e sim receitas ou regras, explicadas com exemplos numéricos, uma regra para $x^3 + px = q$, outra para $x^3 = px + q$, outra para $x^3 + px^2 = q$, etc.

Segundo Boyer (2012, p. 201), Cardano tratava de equações sobre números, seguindo al-Khwarizmi ao pensar geometricamente, assim seu método pode ser pensado como sendo de "completar o cubo". A vantagem de produzir significado para equações cúbicas desta forma é que considerando a equação $x^3 + 6x = 20$, temos que x^3 é um volume, logo devemos produzir significado para $6x$ como volume também. Portanto, o número 6 deve ter dimensão de área, o que sugere o tipo de substituição usado por Cardano. Segundo Boyer, era legítimo Cardano pensar nas "suas equações com coeficientes numéricos específicos como representante de categorias gerais" (BOYER, 2012, p. 202). Isto significa que podemos produzir significado para a equação acima, de forma geral, como $x^3 + px = q$.

Assim, no Capítulo XI de sua *Ars Magna* publicado em 1545 Cardano resolve a equação específica $x^3 + 6x = 20$ e formula verbalmente a regra equivalente à solução da forma geral $x^3 + px = q$. No Capítulo XII Cardano formula a regra para a resolução da equação cúbica da forma $x^3 = px + q$, obtendo para uma das raízes:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Cardano, nesta obra, estuda outras equações cúbicas, mas tomando sempre o cuidado de satisfazer a condição $\left(\frac{q}{2}\right)^2 > \left(\frac{p}{3}\right)^3$, ou melhor, em todos os exemplos apresentados por Cardano que tratam das soluções das equações cúbicas, a raiz quadrada, que encontra-se na sua regra, é sempre uma raiz de um número positivo.

Mas isto não significa que Cardano não se deparou com as raízes quadradas de números negativos na sua obra. No Capítulo XXXVII, cujo título é *Sobre a Regra para Postular um Negativo*, encontramos o seguinte problema: Dividir 10 em duas partes de tal modo que seu produto seja 40.

Cardano inicia a resolução deste problema dizendo: "É claro que este caso é impossível. No entanto, vamos trabalhar assim [...]" (CARDANO, 1993, p. 219, tradução nossa). A seguir apresentaremos a resolução deste problema, utilizando notação moderna.

Sejam x e y dois números que satisfazem as seguintes equações:

$$x + y = 10 \tag{2.1}$$
$$x \cdot y = 40 \tag{2.2}$$

Utilizando a Equação 2.1 obtemos $y = 10 - x$. E substituindo este valor de y na Equação 2.2, temos

$$\begin{aligned} x \cdot (10 - x) &= 40 \\ 10x - x^2 &= 40 \\ x^2 - 10x + 40 &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Resolvendo a Equação 2.3, encontramos as raízes:

$$x_1 = 5 + \sqrt{-15} \quad \text{e} \quad x_2 = 5 - \sqrt{-15}$$

Cardano verifica que os dois números obtidos satisfazem as condições solicitadas. Ele escreve:

> Colocando de lado as torturas mentais envolvidas, multiplicando $5 + \sqrt{-15}$ por $5 - \sqrt{-15}$, obtemos $25 - (-15)$, que é $+15$. Portanto, o produto é 40. [...] Isto é verdadeiramente sofisticado, uma vez que, com ele, não se pode realizar as operações, caso se trate de um [número] negativo puro e outros [números]. [...] Assim, progride a sutileza aritmética, no final disto, como é dito, é tão sutil quanto inútil." (CARDANO, 1993, p. 219-220, tradução nossa).

Cardano sabia que ao substituir os valores $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ nas Equações 2.1 e 2.2 tornava-as verdadeiras, ou seja, $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ eram as soluções destas equações, mas ao mesmo tempo era legítimo na sua época não produzir significado para raiz quadrada de número negativo. Assim, ele não conseguia produzir significado para a sua solução em tal situação. Podemos dizer que Cardano encontrava-se diante de um limite epistemológico. Diante deste paradoxo, Cardano passa a chamar de "sofísticas" as raízes quadradas de números negativos e conclui que nestes casos a regra é "tão sutil quanto inútil".

Podemos dizer que o conhecimento produzido por Cardano ao resolver a equação $x^2 - 10x + 40 = 0$ é verdadeiro, e que a afirmação que as raízes obtidas pela fórmula desta equação é "tão sutil quanto inútil" também é verdadeira, pois não havia sentido para ele e para a comunidade científica de sua época, produzir significado para raízes quadradas de números negativos.

> Esse 'poder' diz respeito à legitimidade dos modos de produção de significado, aos interlocutores. Portanto, ninguém produz significado que não seja plausível em alguma direção. Além do mais, o significado é produzido pelo sujeito, já que ele é quem diz algo. (OLIVEIRA, 2002, p. 20).

Rafael Bombelli (1526 - 1572) ao estudar as publicações de álgebra de sua época teve o que chamou "ideia louca", pois toda a questão "parecia apoiar-se em sofismas". (BOYER, 2012, p. 203).

Bombelli, utilizando a regra proposta por Cardano, resolveu a equação

$$x^3 = 15x + 4 \tag{2.4}$$

e obteve a raiz

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Seguindo Cardano, Bombelli chama as raízes quadradas de números negativos de "sofísticas", mas observa que a Equação 2.4 não é impossível, pois, por meio de substituição direta, obtemos $x = 4$ como a única raiz positiva desta equação.

Bombelli analisando os dois radicais das raízes cúbicas notou que eles diferem apenas por um sinal, portanto teve a ideia "de que os próprios radicais poderiam ser relacionados de modo análogo aquele em que os radicandos são relacionados" (BOYER, 2012, p. 203) - em linguagem atual, "eles são imaginários conjugados que levam ao número real 4" (BOYER, 2012, p. 203). Portanto,

> se a soma das partes reais é 4, então a parte real de cada um é 2; e se um número da forma $2 + b\sqrt{-1}$ deve ser uma raiz cúbica de $2 + 11\sqrt{-1}$ então é fácil ver que b deve ser 1. Logo, $x = 2 + 1\sqrt{-1} + 2 - 1\sqrt{-1} = 4$ (BOYER, 2012, p. 203).

Assim, podemos dizer que o conhecimento produzido por Bombelli ao resolver a equação $x^3 = 15x + 4$ é verdadeiro e suas *crenças-afirmações* durante a resolução também são verdadeiras.

A obra *Algebra* de Bombelli foi impressa em 1572, nesta obra Bombelli apresenta a solução algébrica de equações cúbicas acompanhada por demonstrações geométricas. "Com seu engenhoso raciocínio, Bombelli mostrou o papel importante que os números imaginários conjugados iriam desempenhar no futuro" (BOYER, 2012, p. 2003). Podemos dizer que as raízes quadradas dos números negativos tornaram-se legítimas dentro da comunidade matemática.

De acordo com Lins e Gimenez,

> [...] o problema de se estabelecer se uma pessoa tem ou não direito de "ter" um conhecimento é um problema interno do processo de produção de conhecimento, e não externo: é a própria enunciação da crença-afirmação que estabelece sua legitimidade, e não uma deliberação posterior. (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 142).

Assim, tanto Cardano quanto Bombelli produziram significado para equações do terceiro grau e enunciaram seus conhecimentos. No caso de Cardano era legítimo não prosseguir com a resolução se esta apresentasse uma raiz quadrada de números negativos. Passado alguns anos, o modo de produzir significado para a fórmula da resolução de equações do terceiro grau envolvendo raiz quadrada de números negativos mudou, e esse novo modo de produzir significado passou a ser legítimo. É neste sentido que Lins afirma que o significado é sempre local e não é qualquer coisa que *pode* ser dita.

> [...] é verdade tanto para "indivíduos" quanto o é para culturas matemáticas, que todo conhecimento é construído dentro de um conjunto de modos de produzir significados, modos estes que a um mesmo tempo permitem a produção de conhecimento enquanto impõe limites epistemológicos ao que pode ser este conhecimento. (LINS, 1994b, p. 5).

Pelo que foi exposto até aqui, podemos dizer que todo conhecimento é verdadeiro para quem enuncia. O problema da veracidade, "perde seu sentido original: não é a *crença-afirmação* (a proposição-conhecimento, nas visões tradicionais) que deve ser verdadeira ou não, e sim, o conhecimento em sua nova formulação" (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 142). Na comunidade matemática, um conhecimento é considerado verdadeiro se um grupo de profissionais desta área o aceitam como legítimo. Podemos ilustrar melhor esta ideia apresentando os critérios que o *Clay Mathematics Institute*[5] criou para aceitar a solução dos sete famosos problemas matemáticos, segundo Davis (2006):

1. A solução deve ser publicada num periódico renomado;
2. A solução deve permanecer aceita na comunidade matemática por um período de dois anos;
3. O Instituto Clay nomeia uma comissão para verificar a solução. (Davis, 2006, p. 10).

De acordo com Davis (2006) "uma solução é aceita se um grupo de matemáticos qualificados na área concorda com a solução" (DAVIS, 2006, p. 11). Isto corrobora com a afirmação que fizemos anteriormente, ou seja, que os modos de produzir significado para a matemática é construído socialmente e depende de um consenso. Podemos confirmar esta última afirmação mencionando o esforço coletivo realizado por aproximadamente cem matemáticos por cerca de cinquenta anos para realizar a classificação dos grupos simples finitos.[6]

[5] <`http://www.claymath.org`>.

[6] A classificação dos grupos simples finitos é um teorema cuja demonstração compreende um total de mais de 15 mil páginas. A seguir apresentaremos seu enunciado.

Teorema: Seja G um grupo simples finito. Então G é um dos seguintes grupos:

1. Um grupo cíclico de ordem prima, $\mathbb{Z}_p$;
2. Um grupo alternante, A_n, $n \geq 5$;
3. Um grupo linear clássico $PSL(n,q)$, $PSU(n,q)$, $PSp(2n,q)$ ou $P\Omega^{\epsilon}(n,q)$;
4. Um grupo de Lie *exceptional* ou *twisted* do tipo: ${}^3D_4(q)$, $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, $F_4(q)$, ${}^2F_4(2^n)'$, $G_2(q)$, ${}^2G_2(3^n)$ ou ${}^2B_2(2^n)$;
5. Um grupo simples *sporadic*: M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24} (the Mathieu groups); J_1, J_2, J_3, J_4 (the Janko groups); Co_1, Co_2, Co_3 (the Conway groups); HS, Mc; Suz (Co_1 'babies'), Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24} (the Fischer groups); $F_1 = M$ (the Monster), F_2, F_3, F_5, $He (= F_7)$ (Monster 'babies'); Ru; Ly; ON. (SOLOMON, 1995, p. 232, tradução nossa).

2.5 Leitura Positiva

Estamos diante do livro *Elements of Algebra*, que segundo Bloch (2012), "documentos são vestígios [...] mesmo os aparentemente mais claros e mais complacentes, não fala senão quando sabemos interrogá-los" (BLOCH, 2012, p. 79). Portanto, "é a pergunta que fazemos que condiciona a análise e, no limite, eleva ou diminui a importância de um texto retirado de um momento afastado" (BLOCH, 2012, p. 8).

Deste modo, em nossa perspectiva, o livro *Elements of Algebra* são resíduos de enunciações (vestígios) que se transformará em texto a partir do momento que produzirmos significado para ele. De acordo com Oliveira (2011), "não há o que muitos chamam de interpretações para um texto - há, sim, diferentes significados produzidos para um mesmo resíduo de enunciação". (OLIVEIRA, 2011, p. 19).

Assim, diante das obras de Euler adotaremos a perspectiva de leitura oferecida pelo MCS, pois

> [...] o entendimento em História da Matemática varia tanto quanto se queira de acordo com assumirmos uma leitura progressistas da História (ler a história em busca de uma sucessão de métodos e teoremas) ou uma leitura epistemológica da História (buscar entender como as ideias contidas em uma cultura matemática estão organicamente articuladas e de que forma certas noções estão naturalmente excluídas desta cultura). (LINS, 1993, p. 78).

A origem desse tipo de leitura surgiu quando Lins era professor do ensino básico, e queria dar conta de entender o que estava ocorrendo quando um aluno escrevia, por exemplo,

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2+3}{3+5} = \frac{5}{8}.$$

Lins opunha-se à maneira piagetiana de questionar o que estava ocorrendo, isto é, de perguntar: o que *falta* a esta criança para que ela produza significado corretamente para a soma de frações? Ao invés disso, seu interesse era saber: por que ela fez o que fez?

> [...] ao invés de apenas caracterizar o erro, a falta, eu queria mostrar que existe ali a possibilidade e a necessidade do que hoje chamo de uma leitura positiva do que o aluno fez/disse, que consiste em saber do que, de que objetos, ele estava efetivamente falando. E mais, desenvolver um referencial teórico que me permitisse fazer esta leitura positiva. (LINS, 2000 apud SILVA, A. 2003, p, 65).

Em outras palavras, o que Lins chama de leitura positiva é uma oposição à leitura do outro pela falta.

> O objetivo da leitura que propomos não é olhar para o erro quando as pessoas enfrentam uma tarefa, ou para o que lhes falta para resolvê-la corretamente. Nosso foco esta em entender por que ela fez o que fez. Com isso estamos também dizendo que leitura positiva não é juízo de valor. (SILVA, A. 2003, p. 65).

Para deixar mais claro a importância desta leitura no nosso trabalho, apresentarei brevemente, sem aprofundar a análise, os artigos *298* e *299* do Capítulo V, Seção II, da Parte I do livro *Elements of Algebra*.

> *Euler: 298. Da mesma forma, podemos resolver a fração* $\frac{1}{1+a}$ *em uma série infinita, dividindo efetivamente o numerador* 1 *pelo denominador* $1+a$,[7] *como segue*
>
> $$\begin{array}{llllllll} 1+a) & 1 & & & & & & (1-a+a^2-a^3+a^4 \\ & \underline{1+a} & & & & & & \\ & \quad -a & & & & & & \\ & \quad \underline{-a-a^2} & & & & & & \\ & \qquad\quad +a^2 & & & & & & \\ & \qquad\quad \underline{+a^2+a^3} & & & & & & \\ & \qquad\qquad\quad -a^3 & & & & & & \\ & \qquad\qquad\quad \underline{-a^3-a^4} & & & & & & \\ & \qquad\qquad\qquad\quad +a^4 & & & & & & \\ & \qquad\qquad\qquad\quad \underline{+a^4+a^5} & & & & & & \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -a^5 \quad \textit{etc.} & & & & & & \end{array}$$
>
> *Daí segue-se que a fração* $\frac{1}{1+a}$ *é igual a série*
>
> $$1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7 \textit{ etc.}$$

> *Euler: 299. Se fizermos* $a=1$*, temos esta comparação notável:*
>
> $$\frac{1}{1+a}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+1-1 \textit{ etc.}$$
>
> *até o infinito; que parece bastante contraditório, pois se pararmos no* -1 *a série dá 0; e se terminarmos em* $+1$ *dá* 1*, mas isso é precisamente o que resolve a dificuldade, porque desde que devemos continuar até o infinito, sem parar, quer no* -1 *ou em* $+1$*, é evidente que a soma não pode ser nem* 0 *ou* 1*, mas que este resultado deve situar-se entre estes dois, e portanto ser* $\frac{1}{2}$.

Podemos olhar para a expressão $\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+1-1$ *etc.* e dizer que esta afirmação não é verdadeira, e que a justificação que Euler está fornecendo está errada, e então não há nada mais a dizer. Mas podemos fazer uma leitura positiva deste texto, isto é, podemos perguntar por que Euler esta dizendo/fazendo isto? Ao produzir este conhecimento suas justificações estavam sendo feitas para quais interlocutores? Ao respondermos estas perguntas, estamos tentando compartilhar o mesmo espaço comunicativo com Euler, buscando as suas legitimidades.

Podemos dizer, que Euler estava produzindo significado para a série $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+1-1$ *etc.* de maneira empírica, ou seja, ele calculou a soma parcial dos dois

[7] Esta divisão é representada, no Brasil, pelo diagrama:

$$\begin{array}{ll} 1 & \underline{|\ \ 1+a \qquad\qquad\qquad} \\ \underline{1+a} & 1-a+a^2-a^3+a^4 \\ \quad -a & \\ \quad \underline{-a-a^2} & \\ \qquad\quad +a^2 & \\ \qquad\quad \underline{+a^2+a^3} & \\ \qquad\qquad\quad -a^3 & \\ \qquad\qquad\quad \underline{-a^3-a^4} & \\ \qquad\qquad\qquad\quad +a^4 & \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{+a^4+a^5} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -a^5 & \text{etc.} \end{array}$$

primeiros termos e obteve o valor 0; calculou a soma parcial dos três primeiros termos e obteve como resultado 1; depois, calculou o valor da soma parcial dos quatro primeiros termos e obteve 0; e procedendo dessa forma observou que estes são os únicos valores para as somas parciais. Mas a soma é infinita, logo não podia considerar nem 0 nem 1 como o valor da soma, então era razoável atribuir o valor $\frac{1}{2}$ para esta soma, pois como só tínhamos dois valores possíveis, podemos considerar a média aritmética deles.

Note que o que apresentamos no parágrafo acima, que discutiremos mais profundamente no Capítulo 4 desta tese, é uma tentativa de se fazer uma leitura positiva. Produzimos significado para o resíduo da enunciação de Euler olhando para aquilo que ele poderia ter feito/pensado, e não para aquilo que ele deveria ter feito/pensado tendo como parâmetro as verdades da matemática atual.

> [...] acreditamos que não haja uma "versão" única e verdadeira de "tais situações", e sim significados plausíveis produzidos a partir da leitura dessas situações. Nesse sentido, existem vários significados que podem ser produzidos para trabalhos matemáticos. (OLIVEIRA, 2002, p. 30).

Neste trabalho apresentaremos *uma* possível produção de significado para alguns dos capítulos da obra *Elements of Algebra*. Nosso interesse não está focado em encontrar os possíveis erros que Euler cometeu em seu trabalho, mas buscar compreender porque ele dizia/fazia determinadas coisas no interior daquela atividade.

Segundo Lins (2012), "o MCS oferece: um quadro de referência para que se possa produzir leituras suficientemente finas de processos de produção de significados". (LINS, 2012, p. 18).

2.6 Episódio: Sentindo no corpo e na alma o estranhamento, o limite epistemológico e o descentramento.

O MCS também trabalha com outras concepções bem interessantes, que apresentaremos na forma de uma crônica. Apresentaremos a tradução de um pequeno trecho do Capítulo XI da Parte I do livro *Elements of Algebra*, que trata dos números quadrados.

> *Euler*: 115. O produto de um número, quando multiplicado por si mesmo, é chamado um quadrado; e, por esta razão, o número considerado em relação a um tal produto, é chamado uma raiz quadrada. Por exemplo, quando multiplicamos 12 por 12, o produto 144 é um quadrado, do qual a raiz é 12.
> A origem deste termo é tomada emprestada da geometria, que nos ensina que os conteúdos de um quadrado é obtido multiplicando seus lados por si mesmo.
> *Euler*: 116. Os números quadrados são obtidos, portanto, pela multiplicação; isto é, pela multiplicação da raiz por si mesma: quer dizer, 1 é o quadrado de 1, uma vez que 1 multiplicado por 1 dá 1; Da mesma forma, 4 é o quadrado de 2; e 9 o quadrado de 3; e 2 é a raiz de 4, e 3 é a raiz de 9.
> ......
> *Euler*: 122. Consideremos agora o que deve ser observado sobre este assunto no que diz respeito aos sinais + e − . Em primeiro lugar, é evidente que, se a raiz tem o sinal +, isto é, se é um número positivo, o

> seu quadrado deve ser necessariamente um número positivo também, porque + multiplicado por + resulta +: por isso o quadrado de $+a$ será $+aa$; **mas se a raiz for um número negativo, como $-a$, o quadrado ainda é positivo, pois ele é $+aa$.** Podemos, portanto, concluir, que $+aa$ é o quadrado tanto de $+a$ e $-a$, e que, consequentemente, cada quadrado tem duas raízes, uma positivo e outra negativa. **A raiz quadrada de 25, por exemplo é ao mesmo tempo 5 e -5**, porque -5 multiplicado por -5 dá 25, bem como $+5$ por $+5$. (grifo nosso).

Portanto, estamos diante de um resíduo de uma enunciação ao qual se coloca como uma demanda para a produção de significado para nós. Como o autor deste texto era um matemático, ao produzir significa para este texto, constitui o meu autor como um matemático, ou seja, a produção de significado que comecei a produzir foi na direção da comunidade matemática (hoje). Assim, produzi significado para a última parte grifada do texto acima como $\sqrt{25} = \pm 5$.

Minha bagagem cultural fez com que eu visse neste trecho um monstro monstruoso![8]

Segundo Lins (2004, p. 102), "o monstro me paralisa exatamente porque não sei como ele funciona, como devo agir com relação a ele, *não sei o que posso dizer dele, isto é, o único significado que consigo produzir para ele é exatamente este, 'não sei o que dizer'.*"

Durante minha experiência como professora eu me deparei com alguns alunos e professores de graduação que cometiam este erro. Mas não está errado? Não consigo produzir significado, não consigo olhar para este monstro monstruoso, não consigo prosseguir na tradução do livro, estou diante de um limite epistemológico.

Segundo Lins (2004, p. 99) "o que define a Matemática do matemático são certos modos - tomados então como *legítimos* - de produção de significado para a Matemática, um conjunto de enunciados." Assim, não era legítimo para mim, o que estava escrito neste artigo, não conseguia produzir significado para o resíduo desta enunciação.

Meus conhecimentos dizem que não posso aceitar, mesmo sendo Euler falando. Segundo Lins (2004), "a matemática do matemático oferece uma oportunidade única de viver o estranhamento peculiar ao encontro com noções que contrariam em tudo o senso comum do cotidiano [...] (LINS; GIMENEZ, 1997)", mas no meu caso, o estranhamento veio de um resíduo de enunciação de um dos grandes matemáticos.

Precisava conversar com o meu orientador, meu estômago doía ... ele não se encontrava. Após duas semanas de repulsa, de dores estomacais e de aversão desabafei com uma amiga (Regina) sobre o meu limite epistemológico e sobre o meu sofrimento. Ela me disse que eu precisava entender o momento histórico onde foi dito e prosseguir ...

Minha alma estava atormentada, isto era muito monstruoso!

Assim, estava eu, imersa no Modelo dos Campos Semânticos, sentindo no corpo e na alma o estranhamento! Para prosseguir com meu trabalho foi necessário passar pelo descentramento,

> nesse sentido, o que chamamos de descentramento passa pelo esforço de tornar-se sensível ao estranhamento do outro, de entender do que o outro fala, almejando que modos de produção de significados sejam

[8] Ver Lins (2004).

> compartilhados, que se crie um espaço comunicativo. (OLIVEIRA, 2012, p. 207).

Mesmo com a alma atormentada precisava compreender de onde o autor falava, este é o exercício do descentramento. Portanto, continuei com a tradução e a produção de significado para a obra de Euler. Puxa vida, eu estava tão apaixonada pela forma como ele (Euler) ia apresentando a matemática e depois veio o estranhamento, a dor e o descentramento.

Conversando com o meu orientador, percebi que eu estava operando em um campo semântico e Euler em outro. Eu preciso olhar para o que o autor diz e produzir significado para seu resíduo de enunciação dentro de seu campo semântico e não trazer para dentro do campo semântico que eu constituo utilizando a matemática do matemático do século XXI. Segundo Lins,

> toda tentativa de se entender um autor deve passar pelo esforço de olhar o mundo com os olhos do autor, de usar os termos que ele usa de uma forma que torne o todo de seu texto plausível, e é aqui que devemos prestar atenção às definições que um autor propõe. (LINS, 1999, p. 93).

Assim foi o início do meu caso de amor e dor ao trabalhar com a obra *Elements of Algebra* utilizando o MCS. E após vivenciar esse episódio, compreendi, de fato, quando Bloch (2002, p. 83) escreve que “todo livro de história digno deveria comportar um capítulo ou, inserida nos pontos de inflexão da exposição, uma série de parágrafos que se intitulariam algo como: ‘Como posso saber o que vou lhes dizer?’.”

Capítulo 3

As séries infinitas

Os trabalhos de Euler sobre séries infinitas fornecem um excelente exemplo do esforço, sucesso e fracasso que são parte essencial da vida criativa da maioria de todos os grandes matemáticos.
(KLINE, 1983, p. 307)

A proposta de nossa tese é produzir significado para alguns capítulos do livro *Elements of Algebra* de Leonhard Euler que tratam de Séries Infinitas. Neste capítulo apresentaremos uma breve história sobre as séries infinitas até a época de Euler.

3.1 Breve História sobre Séries Infinitas

As séries infinitas são consideradas hoje uma parte essencial do Cálculo Diferencial e Integral e foram consideradas também ferramentas propulsoras do cálculo nos séculos XVII e XVIII. De fato, Newton considerou seu método dos fluxões inseparável de séries, pois o único modo de manipular funções algébricas e funções transcendentes era expandindo-as em séries infinitas, e assim ele poderia diferenciar e integrar termo a termo. Leibniz também enfatizou o uso de séries em seus trabalhos. Os Bernoullis, Euler e seus contemporâneos utilizaram também séries em seus trabalhos. Nesta época, as séries eram a única forma de representação para algumas funções e o mais efetivo meio de calcular as funções transcendentais elementares. As séries eram tratadas como polinômios infinitos, ou seja, séries formais de potências, que são de certo modo, uma generalização de polinômios, onde o grau pode ser considerado infinito e não há preocupação com a convergência. Além disso, segundo Kline, "Euler e Lagrange acreditavam que todas as funções poderiam ser expressas como uma série." (KLINE, 1972, p. 436).

Antes de prosseguirmos, vamos apresentar a definição de "função", fornecida por Euler no Capítulo I do seu livro *Introduction to the Analysis of the Infinite* (1748).

> *Euler: §4. Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo a partir da quantidade variável e de números ou magnitudes constantes. (EULER, 1988, p. 3, tradução nossa).*

Um pouco antes, em 1718, Johann Bernoulli apresentou a definição de função como "uma quantidade composta de um modo qualquer de uma variável e algumas constantes." (CAJORI, 2007, p. 290).

Euler classificou as funções em dois tipos, a saber,

> *Euler: §7. As funções são divididas em algébricas e transcendentes. As primeiras são aquelas que são formadas somente por operações algébricas, as últimas são aquelas que envolvem operações transcendentes.*[1] *(EULER, 1988, p. 4, tradução nossa).*

Assim, é com esta concepção de "função" que devemos produzir significado para os trabalhos de Euler nesta pesquisa.

Voltando a história das série infinitas, elas apareceram muito cedo na matemática, geralmente na forma de progressões geométricas infinitas com razão menor do que 1. Segundo Edwards (1979), os matemáticos e filósofos medievais eram fascinados por séries infinitas. Os trabalhos em Merton College em Oxford, sobre a latitude das formas conduziram naturalmente a vários problemas sobre séries infinitas. Um de seus membros, Richard Swineshead (c. 1340 - 1354), conhecido como o Calculador, resolveu o seguinte problema, que compreendido em termos de movimento, nos diz:

> Se um ponto se move ao longo da primeira metade de um intervalo de tempo determinado com uma velocidade constante, ao longo da quarta parte seguinte do intervalo continua com o dobro da velocidade inicial, ao longo da oitava parte seguinte, triplicando a velocidade inicial, e assim por diante ad infinitum; então a velocidade média durante todo o intervalo de tempo será o dobro da velocidade inicial. (EDWARDS, 1979, p. 91, tradução nossa).

Tomando o intervalo e a velocidade inicial como unidade, podemos produzir significado para a asserção acima como

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2 \tag{3.1}$$

Segundo Edwards (1979), Swineshead deu uma longa e tediosa prova verbal de (3.1). Nicole Oresme (1323 - 1382) provou esse resultado de uma maneira mais fácil utilizando o seu processo gráfico de demonstração. No seu tratado intitulado *Questiones Super Geometriam Euclides* (c. 1360), Oresme demonstrou que a série harmônica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

é divergente por um método utilizado ainda hoje, a saber, substitua a série dada pela série de termos menores

[1]As operações algébricas "são adição, subtração, multiplicação, divisão, elevação a uma potência e extração de raízes. Além disso, a solução das equações deve ser considerada. Além dessas operações, que são geralmente chamadas de algébricas, existem muitas outras que são transcendentes, tais como as exponenciais, os logaritmos e outras que o cálculo integral fornece em abundância." (EULER, 1988, p. 4, tradução nossa).

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

> e note que a última série diverge porque podemos obter tantos grupos de termos, cada grupo com magnitude de $\frac{1}{2}$, quanto quisermos. (KLINE, 1972, p. 437, tradução nossa).

Destacamos que o termo divergente significa para Oresme que "se os sucessivos termos são adicionados um a um, então ele diz: 'o todo se tornaria infinito'." (EDWARDS, 1979, p. 92, tradução nossa).

François Viète em sua obra *Variorum de rebus mathematicis responsorum* (1539) forneceu a fórmula para a soma de uma progressão geométrica infinita.

> Ele tomou dos *Elementos de Euclides* [Proposição 12 do livro V] que a soma de n termos $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é dado por
>
> $$\frac{s_n - a_n}{s_n - a_1} = \frac{a_1}{a_2}$$
>
> Então se $\dfrac{a_1}{a_2} > 1$, a_n aproxima-se de 0 quando $n \to +\infty$, de modo que
>
> $$s_\infty = \frac{a_1^2}{a_1 - a_2}.$$
>
> (KLINE, 1972, p. 437, tradução nossa).

No seu *Opus Geometricum* (1647), Gregory de Saint-Vincent (1584 - 1667) mostrou que o paradoxo de Aquiles e a tartaruga poderia ser resolvido por meio da soma de uma série geométrica infinita. Ele mostrou por meio das séries geométricas decrescente que Aquiles ganha da tartaruga, e também determinou o momento em que Aquiles ultrapassa a tartaruga. Saint-Vincent utilizou o termo "*limite*" para denotar a soma de uma série geométrica infinita, e foi o primeiro a afirmar explicitamente que uma série infinita representa uma magnitude, ou seja, a soma da série é o limite da série. Saint-Vincent disse que *"o fim da progressão é o fim da série para o qual a progressão não atinge, mesmo se continuarmos até o infinito, mas para o qual ela pode aproximar-se mais de perto do que qualquer intervalo dado".* (KLINE, 1972, p. 437, tradução nossa).

Pietro Mengoli (1626 - 1686) foi outro matemático que, segundo Boyer, não foi apreciado em sua época, mas que fez contribuições notáveis em teoria de séries. Ele aprendeu matemática por Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 - 1647) e foi influenciado por Saint-Vincent e Evangelista Torricelli (1608 - 1647). Em 1650, publicou um tratado *Novae quadraturae arithmeticae, seu de additione fractionum*, onde utilizou vários resultados referentes a séries que decorreram do seu estudo da quadratura da parábola arquimediana. Mengoli estabeleceu dois axiomas e derivou deles várias propriedades de séries. Dentre elas, mostrou o valor da soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Utilizando o seguinte resultado demonstrado em sua *Novae quadraturae arithmeticae*, em notação moderna,

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} + \frac{a_4 - a_3}{a_3 a_4} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} a_n} = \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n}$$

Ele estabeleceu que as somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ são

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

E assim, argumentou

> Desde que $\frac{n}{n+1} < 1$, a série tem uma extensão finita S. Esta extensão é precisamente igual a 1. De fato, se $S > 1$, então deve existir uma soma parcial S_n tal que $S_n > 1$, que é impossível. Agora, seja $S_n < 1$, uma vez que os números $\frac{n}{n+1}$ se aproximam de 1 indefinidamente quando n cresce, as somas parciais
>
> $$S_n = \frac{n}{n+1}$$
>
> tornar-se-ão maiores do que S quando n é grande o suficiente. Isto é também impossível. Consequentemente, $S = 1$. (FERRARO, 2008, p. 9, tradução nossa).

Mengoli obteve a soma de muitas outras séries, como

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} &= \frac{3}{4},\\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} &= \frac{11}{18},\\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{4},\\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} &= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Mengoli redescobriu que a série harmônica não converge. Na introdução de *Novae quadraturae arithmeticae*, ele demonstrou este fato. Em notação moderna, sua prova pode ser formulada da seguinte forma. Desde que

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > \frac{3}{n},$$

temos

$$\begin{aligned}
S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots\\
&= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) + \cdots\\
&> 1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{6} + \frac{3}{9} + \frac{3}{12} + \cdots\\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\\
&= 1 + S.
\end{aligned}$$

Consequentemente, S não pode ser uma quantidade finita.

Ainda na introdução de *Novae quadraturae arithmeticae*, Mengoli considerou a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

mas ele não conseguiu calcular a soma desta série. Esse problema foi abordado posteriormente por Jacob Bernoulli, e ficou conhecido como o problema de Basel, cuja "solução foi um dos mais importantes sucessos de Euler." (FERRARO, 2008, p. 10, tradução nossa).

Em 1655, o matemático inglês John Wallis publicou seu maior trabalho a *Arithmetica infinitorum*. Neste, segundo Stedall (2001), ele "mostrou como os problemas clássicos de quadraturas poderiam ser manuseado aritmeticamente e algebricamente" (STEDALL, 2001, p. 1, tradução nossa), suas ideias estavam apoiadas no método dos indivisíveis de Cavalieri. Wallis percebeu que ele poderia determinar áreas (ou volumes) delimitadas por curvas, não apenas somando progressões aritméticas, mas sequências de quadrados, cubos e potências mais elevadas. Este fato, levou-o a tratar com um grande número de séries e, seu método teve uma enorme influência sobre os matemáticos posteriores. Para ilustramos o seu método, consideremos o problema de determinar a área sob as curvas $y = x^k$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$ e sob o segmento [0, a]. (Veja Figura 3.1, onde a curva $y = x^k$ é representada por PSR, $PQ = AB = a$ e $RQ = BC = a^k$).

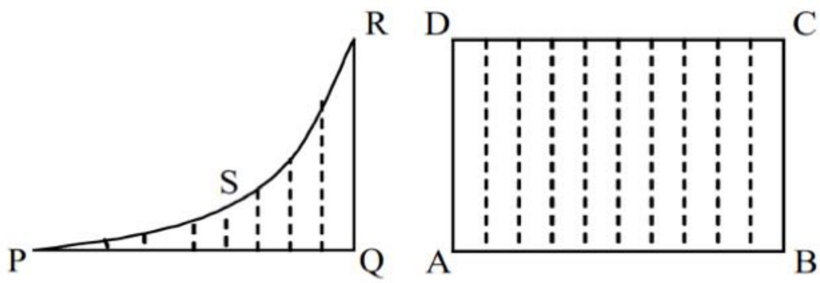


Figura 3.1: Curva $y = x^k$ e retângulo de lados a e a^k.
Fonte: FERRARO (2008, p. 11)

Seguindo Cavalieri, Wallis considerou a figura PQR constituída por um número infinito de linhas paralelas, cada uma delas tendo o comprimento igual a x^k. Agora, vamos dividir o segmento $PQ = AB = a$ em n partes iguais, ou seja, cada parte tem o comprimento $h = \frac{a}{n}$, onde n é infinito. Assim, a soma destas linhas infinitas terá a forma

$$0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \ldots + (nh)^k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

Da mesma maneira, a área do retângulo será dada por

$$a^k + a^k + a^k + \ldots + a^k = (nh)^k + (nh)^k + (nh)^k + \ldots + (nh)^k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

A razão entre a área da parábola PQR e do retângulo ABCD é dada por

$$\begin{aligned}
&\frac{0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \ldots + (nh)^k}{(nh)^k + (nh)^k + (nh)^k + (nh)^k + \ldots + (nh)^k} = \\
&= \frac{h^k(0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k)}{h^k(n^k + n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k)} \\
&= \frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k}, \quad k = 1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Este processo conduziu Wallis a considerar o problema de determinar os valores de (3.4) quando $n = \infty$ e $k = 1, 2, 3, \ldots$. Ele afirmou:

> O método mais simples de investigação ... é considerar um certo número de casos individuais, e observar as razões emergentes e compará-las com as outras, de modo que uma proposição universal possa ser estabelecida por indução. (WALLIS, 1656 apud FERRARO, 2008, p. 11, tradução nossa).

Assim, na Proposição 1, do seu *Arithmetica Infinitorum*, Wallis testou algumas razões simples

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}; \quad \frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{1}{2}; \quad \ldots; \quad \frac{0+1+2+3+4+5+6}{6+6+6+6+6+6+6} = \frac{1}{2}.$$

Estes casos analisados por Wallis foram suficientes para ele concluir, por indução, que

$$\frac{0+1+2+3+\ldots+n}{n+n+n+n+\cdots+n} = \frac{1}{2}.$$

Queremos destacar que o processo que Wallis chamou de *indução*, não se trata do conceito moderno de indução matemática, mas sim "um argumento a partir do precedente, uma suposição de que um padrão ou procedimento uma vez estabelecido poderia ser continuado indefinidamente." (STEDALL, 2001, p. 3, tradução nossa).

Na Proposição 19, Wallis substituiu o valor de k por 2 na expressão (3.4). Investigando empiricamente, ele obteve

$$\begin{aligned}
&\frac{0+1}{1+1} &&= \frac{1}{2} = \frac{3}{6} &&= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \\
&\frac{0+1+4}{4+4+4} &&= \frac{5}{12} &&= \frac{1}{3} + \frac{1}{6 \cdot 2} \\
&\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} &&= \frac{14}{36} &&= \frac{1}{3} + \frac{1}{6 \cdot 3} \\
&\quad\vdots \\
&\frac{0+1+4+9+16+25+36}{36+36+36+36+36+36+36} &&= \frac{91}{252} &&= \frac{1}{3} + \frac{1}{6 \cdot 6}
\end{aligned}$$

Portanto, na Proposição 20, ele chegou na fórmula

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6\cdot n}.$$

Observe que a razão se aproxima do valor de $\frac{1}{3}$ conforme o número de termos aumenta, assim fazendo $n=\infty$, obtemos

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2}=\frac{1}{3}.$$

Procedendo de maneira análoga, Wallis obtém

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^3+n^3+n^3+n^3+\ldots+n^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot n}$$

e para $n=\infty$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^3+n^3+n^3+n^3+\ldots+n^3}=\frac{1}{4}.$$

Assim, de uma maneira empírica, Wallis generaliza seu resultado,

$$\frac{0^k+1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k}{n^k+n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}=\frac{1}{k+1}. \tag{3.5}$$

Wallis não parou por aqui. Ele continuou a sua generalização a fim de obter um significado para (3.5), mesmo quando $k\neq 1,2,3,\ldots$. Este processo de generalização ficou conhecido mais tarde por Interpolação de Wallis.

Na obra *Logarithmotechnia*, publicada em 1668, Nicholas Mercator (1620 - 1687) apresentou uma técnica para facilitar os cálculos com logaritmos. Esta técnica era baseada na expansão da série do logaritmo natural[2]

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

Para encontrar esta expansão Mercator utilizou os resultados conhecidos de logaritmos apresentados na obra de Gregory de Saint-Vicent, ou seja, utilizou o fato que o logaritmo é a área sob a hipérbole $y=\dfrac{1}{x+1}$ e aplicou juntamente o método de Wallis de quadratura. De fato, para calcular a área sob a hipérbole $y=\dfrac{1}{1+x}$ e acima do segmento $[1,A]$, Mercator dividiu o segmento em n partes iguais, ou seja, $h=\dfrac{A}{n}$. Assim, a área da hipérbole poderia ser pensada

[2]Esta expansão do logaritmo já era conhecida por Isaac Newton. No entanto, Mercator foi o primeiro a publicá-la.

como a soma das ordenadas

$$\frac{1}{1+h}, \quad \frac{1}{1+2h}, \quad \frac{1}{1+3h}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{1+nh}.$$

Usando o método de *divisão longa*, Mercator expandiu as frações acima, e obteve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+h} &= 1 - h + h^2 - h^3 + \ldots, \\
\frac{1}{1+2h} &= 1 - 2h + 4h^2 - 8h^3 + \ldots, \\
\frac{1}{1+3h} &= 1 - 3h + 9h^2 - 27h^3 + \ldots, \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}$$

Agora, somando coluna por coluna, obtemos a área procurada, isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+h} + \frac{1}{1+2h} + \frac{1}{1+3h} + \ldots \;=\; & (1+1+1+\ldots) \\
& -(h+2h+3h+\ldots) \\
& +(h^2+4h^2+9h^2+\ldots) \\
& -(h^3+8h^3+27h^3+\ldots) \\
& +\cdots
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Observe que cada uma das séries da forma $\sum_n (na)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ na fórmula (3.6) são as mesmas séries usadas por Wallis e podem ser pensadas como representando as áreas das parábolas $y = x^k$ entre 0 e A.

Portanto,

$$\sum_n (na)^k = \frac{A^{k+1}}{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Assim, concluiu que

$$log(1+A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \ldots$$

Segundo Ferraro (2008), na Proposição VII do livro *Logarithmotechnia*, Mercator utiliza o método de *divisão longa*, isto é, utiliza o algoritmo usual da divisão continuamente *ad infinitum* para encontrar o quociente entre dois polinômios, obtendo uma série infinita. Este método era fundamentado na ideia que as operações algébricas usuais poderiam ser usadas para gerar séries e, de acordo com Ferraro, "se poderia operar sobre uma série da mesma maneira como se opera sobre uma expressão analítica fechada." (FERRARO, 2008, p. 20, tradução nossa). Observamos que estas ideias foram utilizadas por Euler, como veremos mais adiante, no seu livro *Elements of Algebra*.

Newton obteve vários resultados à respeito de séries. Utilizando seu método de aproximações sucessivas, encontramos no seu *De Analysi* de 1669, as representações das seguintes funções em série infinitas:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots \\
arcsen(x) &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \ldots \\
sen(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \ldots \\
cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 - \ldots
\end{aligned}$$

John Collins (1624 - 1683) recebeu *De Analysi* de Newton em 1669, e comunicou os resultados sobre séries para James Gregory (1638 - 1675) em 24 de dezembro de 1670. Gregory respondeu em 15 de fevereiro de 1671 que ele obteve outras séries entre elas

$$\begin{aligned}
arctg(x) &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots \\
tg(x) &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots \\
\sec(x) &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \ldots
\end{aligned}$$

A origem destas séries são desconhecidas. Em 1672, após sua chegada à Paris, Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716) observou um fato interessante à respeito da soma das diferenças dos termos consecutivos de uma sequência numérica. Dada a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, tomando as diferenças consecutivas dos termos dessa sequência, obtemos uma nova sequência finita $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$, onde $d_i = a_i - a_{i-1}$. Então

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0.$$

Portanto, a soma das diferenças consecutivas é igual a diferença do primeiro e último termos da sequência original. Leibniz apresentou o seguinte exemplo, considere a sequência dos números quadrados, $0, 1, 4, 9, \ldots, n^2$, a sequência das diferenças consecutivas dos termos desta sequência formam a sequência $1, 3, 5, ..., 2n-1$, onde $n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$, isto é, a sequência dos números ímpares consecutivos. Assim, a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

A partir dos seus resultados obtidos por soma de diferenças consecutivas, Leibniz teve a ideia de aplicá-los a somas de séries de números infinitos. De fato, suponha que os números $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ são as diferenças consecutivas dos termos da sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, onde $b_i = a_i - a_{i+1}$. Então,

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = a_1 - a_{n+1}$$

Agora, se o n-ésimo termo da sequência original for a zero, quando n for aumentado infinitamente, então teremos, em notação moderna,

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_n = a_1 \tag{3.7}$$

Leibniz descreveu seus resultados a Christiaan Huygens (1629 - 1695), que lhe propôs encontrar a soma da série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}+\ldots$$

isto é, a soma dos recíprocos dos números triangulares.

Assim, Leibniz combinou seu conhecimento à respeito das somas das diferenças com sua familiaridade com os números figurados que apareciam no triângulo aritmético (ou triângulo de Pascal), e construiu o que ele chamou de Triângulo Harmônico. Começando na primeira linha com a sequência dos recíprocos dos números inteiros, as linhas subsequentes são formadas tomando as diferenças dos termos consecutivos logo acima dele e à direita na linha precedente.

$$\begin{array}{llllllll}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\[2ex]
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{42} & \cdots & \\[2ex]
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{105} & \cdots & & \\[2ex]
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} & \frac{1}{140} & \cdots & & & \\[2ex]
\frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{105} & \cdots & & & & \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Portanto, a fórmula (3.7) implica que a soma dos termos de cada linha é igual ao primeiro termo da linha precedente. Assim, o Triângulo Harmônico fornece a soma de séries numéricas infinitas. Em particular, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots &= 1 \\
\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\cdots &= \frac{1}{2} \\
\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}+\frac{1}{140}+\cdots &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por 2, obtemos a soma solicitada por Huygens,

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots=2.$$

Leibniz publicou um pequeno artigo *Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum* em 1691, contendo os seus principais resultados sobre a expansão de séries de quantidades geométricas. Neste encontramos as seguintes expansões em séries, em notação moderna,

$$
\begin{aligned}
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\
arctg(x) &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots \\
sen(x) &= x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots \\
1 - cos(x) &= \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \ldots \\
e^x - 1 &= x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots
\end{aligned}
$$

De acordo com Kline (1972),

> As séries que representam as funções transcendentais foram o mais fértil método disponível no início do desenvolvimento do cálculo para manusear estas funções, e foram parte significante dos trabalhos de Newton e Leibniz sobre cálculo. (KLINE, 1972, p. 438, tradução nossa).

Ainda, segundo Kline (1972)

> Um dos maiores uso das séries, além de sua utilidade em diferenciação e integração, é para calcular quantidades especiais, tais como π e e, e as funções logarítmicas e trigonométricas. Newton, Leibniz, James Gregory, Cotes, Euler e muitos outros estavam interessados em séries para este propósito. (KLINE, 1972, p. 439, tradução nossa).

Assim as séries infinitas mostravam-se de grande valia para os matemáticos e merecia uma atenção especial. Próximo do ano de 1730, Euler publica seu primeiro trabalho sobre séries infinitas, e faz contribuições sobre séries durante toda a sua vida.

Mais uma vez de acordo com Kline (1983),

> [...] no trabalho de Euler, assim como de seus antecessores, faltava rigor, é frequentemente *ad hoc* e contém equívocos, mas apesar disso, seus cálculos revelam uma excepcional habilidade para estimar ao passo que seus métodos podem conduzir a resultados corretos. (KLINE, 1983, p. 307, tradução nossa).

Aqui, discordamos de Kline quando ele diz que faltava rigor no trabalho de Euler, pois o que consideramos rigor matemático hoje não era concebido da mesma forma naquela época, e o que chamamos de “prova” hoje, não têm o mesmo significado para os matemáticos do século XVIII. Lembramos, que quem legitima o que é matemática e o que não é matemática, é a comunidade acadêmica ao qual o matemático está inserido. Logo, ao longo da história vemos várias discussões e “duelos” de matemáticos para mostrarem o seu ponto de vista, e são os matemáticos da época que decidem se a “prova” é legítima ou não.

Assim, analisar a história com os conhecimentos de hoje, faz parecer que os matemáticos eram descuidados e sem rigor, devemos “olhar” para a história da matemática como Descartes nos diz em seu livro *Discurso do Método*:

> [...] conversar com as pessoas dos outros séculos é quase o mesmo que viajar (pois é quase a mesma coisa viver na companhia de homens de uma outra época e viver com estrangeiros). É bom saber alguma coisa dos costumes de vários povos para julgarmos os nossos mais salutarmente, e para não pensarmos que tudo o que é contra nossos modos é ridículo e contra a razão, como costumam fazer os que nada viram. (DESCARTES, 2009, p. 13).

3.2 A Delimitação do Estudo

Atualmente, nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral nos deparamos com o estudo de séries, e a ênfase neste assunto é sobre convergência e especialmente sobre os testes de convergência. Segundo Lehmann (1995), "gastamos nosso tempo descobrindo se as séries convergem ou não, mas pouco ou nenhum tempo descobrindo que as séries *convergem para*" (LEHMANN, 1995, p. 164, tradução nossa). E como vimos, um dos interesses dos matemáticos do século XVII e XVIII eram nas representações de *funções* como somas de séries infinitas para poderem, de fato, operarem algebricamente com estas representações.

De fato, a teoria sobre séries infinitas nos fornece um método de representar uma função derivável como soma infinita de potências de x, e podemos avaliar uma classe de funções muito mais geral que a dos polinômios. Atualmente, os físicos utilizam as séries em óptica, relatividade especial e eletromagnetismo; eles analisam fenômenos trocando a função pelos primeiros termos da série que a representa. As séries geométricas infinitas também são utilizadas por economistas, por exemplo, no chamado *efeito multiplicador*[3]. E outras áreas, como Ciências Biológicas também utilizam as séries.

Ao analisarmos os livros textos modernos que tratam a Teoria de séries infinitas, estes iniciam-se com definições, proposições e teoremas à respeito de sequências, e depois introduzem as definições, teoremas e testes (ou critérios) à respeito de séries infinitas. Assim, hoje quando iniciamos o trabalho com séries infinitas precisamos definir o que é "soma" de uma série infinita. Este comentário é obvio hoje em dia, mas Hardy (1949) nos diz:

> [...] não ocorre para um matemático moderno que uma coleção de símbolos matemáticos deveria ter um "significado" até alguém ter atribuído a ele por definição. Não era uma trivialidade mesmo para os grandes matemáticos do século XVIII. Eles não tinham o hábito de definir: não era natural para eles dizerem abertamente "por X queremos dizer Y". Há reservas à serem feitas, [...] mas é amplamente verdade dizer que os matemáticos antes de Cauchy não perguntavam: "Como definiremos $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$?" mas "O que é $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$?" e **este hábito de pensar os conduziu a perplexidades desnecessárias e controvérsias que eram frequentemente verbais**. (HARDY, 1949, p. 5-6, tradução nossa) [grifo nosso].

[3] "Se uma quantidade A é introduzida na economia, através, de uma isenção de imposto, essa injeção de dinheiro induz um aumento de consumo muito maior que o equivalente a A. Isso acontece porque a fração de A gasta por um indivíduo se torna receita de outros indivíduos, que por sua vez tornam a gastar esse dinheiro, proporcionando receita a outros indivíduos, e assim por diante. Os economistas se referem a essa propagação de dinheiro na economia como **efeito multiplicador**." (HOFFMANN; BRADLEY, 2010, p. 69).

Aqui, discordamos de Hardy no que diz respeito a afirmação em negrito, pois no século XVIII a pergunta: "Como definimos $1-1+1-1+\ldots$?" não produzia significado para os matemáticos, era sem sentido, pois os objetos matemáticos não eram dados por definição. Enquanto que ao se depararem com "algo" novo a pergunta: "O que é $1-1+1-1+\ldots$?" ou "Qual é o valor (ou significado) destes símbolos?" era totalmente legítima, e o significado era produzido e analisado de vários modos (como veremos mais adiante neste trabalho). Assim, por meio da leitura positiva, buscaremos entender como os matemáticos do século XVIII "pensavam", ou melhor, produziam significados para os objetos da matemática. Portanto, quando nos deparamos com um livro/ artigo publicado em outra época, ele (o livro escrito) "representa uma voz que se reveste de autoridade" (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 106). E é com esta autoridade (do autor) que analisaremos os trabalhos de Euler apresentados nesta tese.

Assim, ao longo desta tese, ao produzirmos significados para séries, minhas enunciações serão feitas na direção de interlocutores - ora Euler, ora a comunidade matemática de hoje - que, acredito, diriam o que estou dizendo com a justificação que estou produzindo. Queremos salientar que nossa estratégia busca destacar as possíveis convergências (se é que existem) e diversificações que ocorrem na produção de significados, nos objetos e nos conhecimentos.

Optamos apresentar algumas das definições, proposições, teoremas à respeito de sequências e séries que encontramos atualmente nos livros-textos no Apêndice A deste trabalho. Com efeito, o leitor poderá imergir na produção de significado que Euler nos apresenta ao longo dos seus trabalhos tratados aqui sem uma prévia produção de significado para a teoria de séries de hoje, e conforme haja necessidade, o leitor pode consultar os resultados e definições ao longo de sua leitura.

3.2.1 O que é uma série infinita?

Segundo Simmons (1988), uma série infinita, ou simplesmente uma série, é uma expressão da forma

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{3.8}$$

onde as últimas reticências indicam que os termos continuam indefinidamente. O número a_n chama-se n-ésimo termo da série.

É usual escrevermos a série (3.8) na forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

É claro que a operação de adição realizada uma infinidade de vezes não pode ser interpretada literalmente, e seu significado deve ser abordado de maneira sutil.

> Foi uma das grandes conquistas da Matemática do século XIX descobrir que pode ser dado a (3.8) um significado perfeitamente razoável e satisfatório. Com precaução, esse significado nos permite trabalhar com tais expressões com a mesma facilidade como se elas envolvessem somente um número finito de termos. Em muitos os casos, seremos realmente capazes de encontrar o número que é a soma exata da série infinita, e essas somas, com frequência, chegam mesmo a ser surpreendentes. (SIMMONS, 1988, v. 2, p. 1-2)

Aqui, discordamos de Simmons (e vamos discorrer sobre isso ao longo do texto) que somente no século XIX as séries tiveram um significado perfeitamente razoável e satisfatório, dizer isso, é olhar para os grandes matemáticos dos séculos anteriores pela falta, e o que vamos mostrar nesse trabalho é que um dos grandes matemáticos do século XVIII, Euler, não só trabalhava com essas séries infinitas de forma satisfatória mas era totalmente coerente com seus pressupostos.

Entre os significados produzidos naturalmente para séries infinitas na matemática, temos:

(A) Uma **decimal infinita** é definida como a série infinita,

$$0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots \quad = \quad \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots,$$

onde cada um dos $a's$ é um dos dez algarismos $0, 1, 2, \ldots, 9$.

(B) A **divisão elementar**

$$\begin{array}{llll}
1 & & & \left|\underline{1 - x \qquad\qquad}\right. \\
\underline{1 - x} & & & 1 + x + x^2 + \ldots \\
\quad +x & & & \\
\quad \underline{+x - x^2} & & & \\
\qquad\quad +x^2 & & & \\
\qquad\quad \underline{+x^2 - x^3} & & & \\
\qquad\qquad\quad +x^3 & & & \text{etc.}
\end{array}$$

mostra que

$$\frac{1}{1-x} \quad = \quad 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}. \tag{3.9}$$

Queremos saber como a função do primeiro membro de (3.9) está relacionada com a série infinita que parece formar-se no segundo membro. Isto é, seria verdade que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots ?$$

(C) O **teorema do Binômio de Newton** pode ser escrito na forma

$$(1+x)^n \quad = \quad 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots + x^n,$$

onde n é um inteiro positivo. Esta fórmula vale se n for real? ou seja,

$$\begin{aligned}
(1+x)^n \quad &= \quad 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots + \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}x^k + \ldots
\end{aligned}$$

(D) **Equações Diferenciais**. Considere

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{3.10}$$

Suponhamos que

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots \tag{3.11}$$

seja uma solução de (3.10). Derivando (3.11), termo a termo, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots \tag{3.12}$$

e substituindo (3.11) e (3.12) em (3.10) temos

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots \tag{3.13}$$

Igualando os coeficientes de potências iguais de x em (3.13), obtemos

$$a_1 = a_0, \quad 2a_2 = a_1, \quad 3a_3 = a_2, \quad 4a_4 = a_3, \ldots$$

logo

$$a_1 = a_0, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2 \cdot 3}, \quad a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \ldots \tag{3.14}$$

usando a notação fatorial para escrever as equações (3.14) sob a forma

$$a_1 = a_0, \quad a_2 = \frac{a_0}{2!}, \quad a_3 = \frac{a_0}{3!}, \quad a_4 = \frac{a_0}{4!}, \ldots$$

Nossa tentativa de solução (3.11) da equação diferencial (3.10) torna-se, portanto,

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_0x + \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \ldots \\ &= a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde a_0 é uma constante arbitrária.

Sabemos que $y = ce^x$ é uma solução de (3.10), para toda constante c. Comparando esta solução com (3.15), podemos conjecturar que a função exponencial e^x é igual à série infinita mostrada entre parênteses:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Verifica-se que esta fórmula é realmente válida.

No livro *Elements of Algebra*, encontramos os três primeiros modos de produzir significados para séries infinitas. Como o propósito do nosso trabalho é analisar as séries neste livro, não apresentaremos o tratamento de séries no estudo de equações diferencias.[4]

[4]Os leitores interessados neste último tópico podem consultar a obra de Euler, intitulada *Institutiones Calculi Differentialis* (1755).

Capítulo 4

Das Resoluções das Frações em Séries Infinitas

a mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho
original.
Albert Einstein

O propósitos deste presente capítulo é apresentar *uma* possível produção de significado para o Capítulo V, da Parte I, Seção II, do livro *Elements of Algebra*, cujo título é *Das Resoluções das Frações em Séries Infinitas*, que é justamente o caso da divisão elementar que apresentamos na Subseção 3.2.1. Este referido capítulo é composto por 17 artigos cuja numeração inicia-se no *289* e termina no *305*. Os artigos e fragmentos dos artigos que apresentaremos a seguir foram traduzidos pelos autores.

Logo no título deste referido capítulo há uma nota de rodapé acrescentada pelo tradutor francês, chamando a atenção para esta teoria, que segundo ele: *"é uma das mais importantes em toda a matemática"*. De fato, a teoria de séries infinitas foi central no desenvolvimento da matemática no século XVIII.

Euler começa este capítulo, no artigo *289*, recordando quando o dividendo não é divisível pelo divisor:

> *Euler: Quando o dividendo não é divisível pelo divisor, o quociente é expresso, como já tínhamos observado, por uma fração. Assim, se tivermos que dividir 1 por* $1 - a$*, obtemos a fração* $\frac{1}{1-a}$*. Isso, porém, não nos impede de tentar a divisão de acordo com as regras que foram dadas, nem de continuarmos tão longe quanto desejarmos; e não vamos falhar deste modo para encontrar o verdadeiro quociente, embora sob diferentes formas.*

Neste parágrafo Euler nos apresenta qual será o seu modo de produzir significado para o quociente $\frac{1}{1-a}$, ou seja, ele utilizará o algoritmo usual da divisão continuadamente para encontrar o quociente. Com base na produção de significados, segundo o modelo teórico adotado e os registros de Euler, podemos inferir que ele estava a constituir um núcleo em relação ao que denominamos algoritmo usual da divisão. Chamaremos a atividade de produzir significado em relação à esse núcleo de **Campo Semântico da Divisão**.

No artigo seguinte, Euler efetua a divisão de 1 por $1-a$, e após a divisão, no artigo *291* sintetiza os seus resultados e conclui.

> *Euler: 290. Para provar isso, vamos realmente dividir o dividendo 1 pelo divisor* $1-a$*, assim:*[1]
>
> $$\begin{array}{lll} 1-a) & 1 & (1+\dfrac{a}{1-a} \\ & \underline{1-a} & \\ \textit{resto} & \quad +a & \end{array} \qquad \textit{ou} \qquad \begin{array}{lll} 1-a) & 1 & (1+a+\dfrac{a^2}{1-a} \\ & \underline{1-a} & \\ & \quad +a & \\ & \quad \underline{+a-a^2} & \\ \textit{resto} & \qquad +a^2 & \end{array}$$
>
> *Para encontrar um número maior desta forma, só temos que continuar dividindo o resto* a^2 *por* $1-a$*,*
>
> $$\begin{array}{lll} 1-a) & a^2 & (a^2+\dfrac{a^3}{1-a} \\ & \underline{a^2-a^3} & \\ & \qquad +a^3 & \end{array} \qquad \textit{então} \qquad \begin{array}{lll} 1-a) & a^3 & (a^3+\dfrac{a^4}{1-a} \\ & \underline{a^3-a^4} & \\ & \qquad +a^4 & \end{array}$$
>
> *e novamente,*
>
> $$\begin{array}{lll} 1-a) & a^4 & (a^4+\dfrac{a^5}{1-a} \\ & \underline{a^4-a^5} & \\ & \qquad +a^5 & \textit{etc.} \end{array}$$

> *Euler: 291. Isto mostra que a fração* $\dfrac{1}{1-a}$ *pode ser exibida conforme todas as seguintes formas:*
>
> $$\begin{array}{llll} \textit{I.} & 1+\dfrac{a}{1-a}; & \textit{II.} & 1+a+\dfrac{a^2}{1-a}; \\ \textit{III.} & 1+a+a^2+\dfrac{a^3}{1-a}; & \textit{IV.} & 1+a+a^2+a^3+\dfrac{a^4}{1-a}; \\ \textit{V.} & 1+a+a^2+a^3+a^4+\dfrac{a^5}{1-a}; & \textit{etc.} & \end{array}$$

E neste mesmo artigo mostra por meio de cálculos que todas essas expressões são iguais em valores a fração $\dfrac{1}{1-a}$. No artigo *292*, Euler continua com sua explicação:

---

[1]Estas divisões são representadas, no Brasil, pelos diagramas:

$$\begin{array}{l} 1 \\ \underline{1-a} \\ \quad +a \end{array} \begin{array}{|l} \underline{1-a} \\ 1 \end{array} \;; \quad \begin{array}{l} 1 \\ \underline{1-a} \\ \quad +a \\ \quad \underline{+a-a^2} \\ \qquad +a^2 \end{array} \begin{array}{|l} \underline{1-a} \\ 1+a \end{array} \;; \quad \begin{array}{l} 1 \\ \underline{1-a} \\ \quad +a \\ \quad \underline{+a-a^2} \\ \qquad +a^2 \\ \qquad \underline{+a^2-a^3} \\ \qquad\quad +a^3 \end{array} \begin{array}{|l} \underline{1-a} \\ 1+a+a^2 \end{array} \;; \quad \text{etc.}$$

Euler: 292. Sendo este o caso, podemos continuar a série[2]*, tanto quanto desejarmos, sem ser necessário realizarmos mais nenhum cálculo. E, assim, teremos*

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a};$$

ou podemos continuar esta, mais longe, e ainda continuar sem fim. Razão pela qual podemos dizer que a fração proposta foi resolvida em série infinita, que é,

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} \textit{ etc.}^3$$

até o infinito[4]*; e existem motivos suficientes para afirmar que o valor desta série infinita é o mesmo que da fração* $\frac{1}{1-a}$. (grifo nosso)

Note que Euler, primeiramente, aplicou o algoritmo usual da divisão para encontrar o quociente da divisão de 1 por $1 - a$, após alguns passos, concluiu que

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a}.$$

Veja bem! Nos séculos XVII e XVIII, era comum a utilização do *princípio da extensão infinita*, isto é, a passagem dos algoritmos finitos para os infinitos. Segundo Ferraro,

> Se uma regra R era válida para uma expressão finita ou se um procedimento P dependia de um número finito n de passos $S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots,\ S_n$ então era legítimo aplicar a regra R e o procedimento P nas expressões infinitas e em um número infindável de passos $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots$ (FERRARO, 2008, p. 117, tradução nossa).

Como vimos na Seção 3.1, Mercator utilizava o *método da divisão longa* para encontrar séries infinitas, logo era legítimo para Euler aplicar o algoritmo da divisão continuamente *ad infinitum* para obter uma série infinita. Assim, Euler, por meio da divisão, de 1 por $1 - a$ obtém a série infinita

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} + \ldots$$

Podemos dizer que Euler estava produzindo significado para esta série infinita a partir da divisão elementar, em outras palavras, ele estava nos mostrando o que é uma série infinita, ou seja, a série surge a partir da divisão continuada *ad infinitum*. Em termos do nosso modelo teórico, podemos dizer que os significados, objetos e conhecimentos serão produzidos por Euler, neste capítulo, em relação ao **Campo Semântico da Divisão**.

Observamos também, que este livro-texto foi publicado pela primeira vez em alemão em 1770, quarenta e um anos depois da apresentação, na Academia de São Petersburgo, de seu

[2]Durante os séculos XVII e XVIII os matemáticos utilizavam o termo *séries* para denotar tanto séries como sequências. Note que aqui Euler utilizou o termo *série* para se referir a soma dos termos de uma sequência.

[3]**Etc.** é uma abreviação da expressão latina *et cetera* que significa **e o resto**; **e outras coisas** (da mesma espécie); **e assim por diante**. É usada quando há enumeração de uma sequência de itens.

[4]Produzimos significado para a expressão *etc. até o infinito* como a soma deve ser feita indefinidamente, ou seja, trata-se de uma soma com infinitas parcelas.

primeiro trabalho sobre séries infinitas, assim, podemos inferir que esse assunto para Euler já estava bem consolidado, e os resultados que ele apresenta nesta obra já foram bem trabalhados anteriormente, logo ele apresentará neste Capítulo V o resumo de alguns de seus resultados.

Segundo Martins (2005, p. 77), o termo paradigma designa "um complexo de crenças teóricas gerais, de leis e de técnicas para sua aplicação, capaz de organizar as pesquisas de toda uma comunidade científica." Assim, quando um paradigma está em voga, um membro da comunidade científica "não se vê mais obrigado, na exposição de seus trabalhos mais importantes, a reconstruir o seu campo de estudos desde os primeiros princípios, nem tampouco justificar o uso de cada conceito utilizado." (MARTINS, 2005, p. 77).

Assim, para compreendermos os resultados apresentados por Euler, devemos analisar esse capítulo sob a sua ótica e buscar quais foram os possíveis modos de produção de conhecimento e significados matemáticos feito por ele. Para fazermos uma leitura positiva deste capítulo, buscamos um artigo científico anterior a este livro, que trata de séries divergentes, *De seriebus divergentibus*, publicado em 1760, e o Capítulo III do livro *Foundations of Differential Calculus*, publicado em 1755, que trabalha com algumas das séries apresentadas no livro que estamos analisando.

Portanto, iremos traduzir e analisar trechos do artigo científico de Euler, *De seriebus divergentibus*, publicado pela primeira vez em *Novi commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 5*, 1760, p. 205-237, reimpresso em *Opera Omnia: Series 1*, volume 14, p. 585-617 e do livro *Foundations of Differential Calculus*, Capítulo III, p. 47-61, intitulado: *On the Infinite and the Infinitely Small.*

No artigo *De seriebus divergentibus*, temos

> *Euler: §11 [...] Sempre em análise [álgebra], chegamos a uma expressão racional ou transcendente, geralmente convertemos-a em uma série apropriada em que os cálculo subsequentes possam ser mais facilmente executados. Portanto, se as séries infinitas ocorrem em análise, elas surgiram a partir da expansão de uma certa expressão finita, e, consequentemente, no cálculo é sempre possível, substituímos no lugar da série infinita a fórmula da qual a série originou. Assim, com grande ganho, as regras são dadas para converter as expressões finitas, mas inconvenientes, na forma de séries infinitas, e do mesmo modo, as regras que ajudam a expressão finita, a partir do qual uma série infinita proposta originou, podem ser investigadas, são consideradas de grande utilidade. Uma vez que a expressão pode ser sempre substituída, sem erro, por uma série infinita, ambas devem ter o mesmo valor. Segue-se que não existe série infinita para o qual a expressão finita equivalente a ela não pode ser concebida.*

Neste parágrafo Euler esta constituindo o objeto "séries", assim para ele, as *"**séries infinitas** surgem a partir da expansão da expressão finita"* e "*ambas devem ter o mesmo valor*". E nos afirma, que toda série têm uma expressão finita que lhe originou. Assim, podemos produzir significado para a *soma de uma série* dizendo que somar uma série infinita significa retornar a série dada à expressão finita que a gerou. Por exemplo, em notação moderna, no artigo *292*, a expressão finita

$$\frac{1}{1-a}$$

é a soma da série

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i$$

pois utilizando o algoritmo usual da divisão infinitamente é possível expandir $\dfrac{1}{1-a}$ e obter a série $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$. De acordo com o nosso modelo teórico, podemos dizer que Euler, neste caso, está produzindo significado para a soma da série em um Campo Semântico da Divisão.

Além disso, nesta época o *princípio da generalidade da álgebra* garantia a Euler que esta soma era válida para qualquer valor de a. Este princípio consistia do seguinte pressuposto: "Se uma fórmula analítica foi derivada usando as regras da álgebra então ela era pensada válida em geral." (FERRARO, 2008, p. 209-210, tradução nossa).

Gostaríamos de destacar a diferença do modo de produção de significado para a soma da série que Euler nos apresentou com o significado produzido hoje em teoria de séries. Hoje dizemos que $\dfrac{1}{1-a}$ é a soma da série $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ para $|a| < 1$, pois de acordo com a definição dada na Subseção A.2.1, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} a^i = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1.$$

Neste caso, estamos produzindo significado para a soma de uma série em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por sequências, somas parciais e limite. Logo, o objeto "soma de uma série" foi constituído de um modo diferente daquele feito por Euler, ou seja, são objetos distintos pois cada objeto foi constituído dentro de Campos Semânticos diferentes.

Vamos continuar nossa leitura positiva, agora produzindo significado para o parágrafo §1 deste mesmo artigo, *De seriebus divergentibus*,

> *Euler: §1. Se as séries convergentes são definidas como aquelas cujos termos decrescem continuamente e, finalmente, se a série continua até o infinito, desaparecem completamente; é fácil ver, que as séries cujos termos infinitesimais não tornam-se nada, mas nem permanecem finito ou crescem até o infinito, são designadas, desde que não sejam convergentes, a classe de séries divergentes. Dependendo se os últimos termos da série, que se obtém na progressão continuada até o infinito, são de magnitude finita ou infinita, temos dois tipos de séries divergentes, que podem ser subdivididas em duas classes, dependendo se todos os termos possuem o mesmo sinal ou os sinais alternados + e − um com o outro. No geral, portanto, teremos quatro tipos de séries divergentes que, por motivo de maior clareza, eu gostaria de adicionar alguns exemplos.*
>
> *I.* $1+1+1+1+1+1+etc.$
> $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{6}{7}+etc.$
>
> *II.* $1-1+1-1+1-1+etc.$
> $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{6}-\dfrac{6}{7}+etc.$

III. $1+2+3+4+5+6+etc.$
$1+2+4+8+16+32+etc.$

IV. $1-2+3-4+5-6+etc.$
$1-2+4-8+16-32+etc.$

Podemos dizer que Euler estava produzindo significado para **séries convergentes** como aquelas séries que os termos de forma gradual tornam-se menores e finalmente desaparecem completamente. E as séries cujos termos não tornam-se zero, mas nunca diminuem abaixo de um certo valor ou mesmo aumentam até o infinito, denominam-se **séries divergentes.**

Observe que a definição utilizada hoje para séries convergentes, que apresentamos na Subseção A.2.1, é completamente diferente desta apresentada por Euler, envolve sequências numéricas, somas parciais e limites. Mas dizer que os matemáticos não trataram essa questão por não apresentarem os conceitos nas formas do rigor da matemática moderna, é lê-los pela falta, e isto não faremos no nosso trabalho, pois os objetos matemáticos que Euler estava constituindo não são os mesmos objetos matemáticos de hoje, este fato pode causar um certo estranhamento já que os objetos têm os mesmos nomes.

Para clarificar essa ideia que apresentamos acima, vamos relembrá-los a definição de **significado/ objeto** do *Modelo dos Campos Semânticos* (MSC):

> Significado de um objeto é aquilo que efetivamente se diz a respeito de um objeto, no interior de uma atividade. Objeto é aquilo para que se produz significado. (LINS, 2012, p. 28).

Assim, apoiados no nosso referencial teórico, percebemos que as séries convergentes para Euler não são os mesmos objetos que as séries convergentes são hoje. Na verdade, os objetos que Euler está constituindo neste capítulo, embora tenham os mesmos nomes de hoje, são completamente distintos.

Após estas explicações à respeito da concepção de séries, podemos produzir significado para o artigo *292*, nos termos de Euler, como:

$$\frac{1}{1-a} = 1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+a^8+a^9+a^{10}+a^{11}+\ldots \qquad (4.1)$$

ou seja, o quociente $\dfrac{1}{1-a}$ pode ser expandido em uma série infinita $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ e a soma da série $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ é a expressão finita, neste caso $\dfrac{1}{1-a}$, que a gerou.

Nos artigos *293* a *297*, Euler irá atribuir valores para a em (4.1), apresentando casos particulares, segundo ele, para um melhor entendimento.

4.1 O artigo 293

Vamos agora apresentar, em fragmentos, e comentar esse artigo.

> *Euler: 293. O que dissemos pode parecer à primeira vista estranho, mas a consideração de alguns casos particulares tornará mais fácil o entendimento. Vamos supor, em primeiro lugar, que $a = 1$. Nossa série irá tornar-se* $1+1+1+1+1+1+1$ *etc. e a fração $\dfrac{1}{1-a}$ que deve ser igual, torna-se $\dfrac{1}{1-1}$ ou $\dfrac{1}{0}$. Agora, temos que relembrar antes que $\dfrac{1}{0}$ é um número infinitamente grande. Portanto, aqui é confirmado de maneira satisfatória.*

Assim, substituindo $a = 1$ em (4.1), obtemos

$$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty \quad = \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \tag{4.2}$$

Primeiramente, para legitimar (4.2) devemos entender como Euler produzia significado para o infinito. Assim, vamos apresentar os artigos *82* e *83*, da Parte I, Seção I, Capítulo VII, intitulado: *Das frações em geral*, do livro *Elements of Algebra*:

> *Euler: 82. Para expressar essa ideia, de acordo com o sentido que mencionamos acima, faremos uso do símbolo ∞, que consequentemente indica um número infinitamente grande. Portanto, podemos dizer que a fração $\frac{1}{\infty}$ é na realidade nada, porque uma fração não pode ser reduzida a nada, até que o denominador tenha sido aumentado até o* infinito.

> *Euler: 83. É importante prestar atenção a esta ideia de infinito, uma vez que ela é derivada dos primeiros elementos do nosso conhecimento, e que será de grande importância no seguimento deste tratado. Podemos aqui deduzir a partir de algumas considerações que são extremamente curiosas e dignas de atenção. A fração $\frac{1}{\infty}$ representa o quociente resultante da divisão do dividendo 1 pelo divisor ∞. Agora, nós sabemos que se dividirmos o dividendo 1 pelo quociente $\frac{1}{\infty}$, que é igual a nada, obtemos novamente o divisor ∞. Portanto, adquirimos uma nova ideia de infinito, e aprendemos que ela surge a partir da divisão de 1 por 0; de modo que estamos autorizados a dizer que 1 dividido por 0 expressa um número infinitamente grande ou ∞.*

Segundo Boyer (1996, p. 308), "o símbolo ∞ é livremente considerado como denotando o recíproco do número 0" por Euler, e no artigo *83* está a justificação para isto.

Observe que a série infinita apresentada no artigo *293* é o primeiro tipo de séries divergentes que Euler apresentou no parágrafo §1 do artigo *De seriebus divergentibus*. Assim, vamos buscar subsídio para nossa produção de significado para o artigo *293*, no parágrafo §2 do artigo *De seriebus divergentibus*.

> *Euler: §2. Há muita discórdia entre os matemáticos em relação as séries divergentes, enquanto alguns negam, outros não, que elas podem ter uma soma bem definida. Em primeiro lugar é realmente claro, que as somas das séries, que eu me referi na primeira classe, são realmente infinitas, porque tomando termos suficientes dela, podemos chegar a uma soma maior do que qualquer número dado. Por isso, não há dúvida, que as somas das séries deste tipo podem ser exibidas pela expressão* $\frac{a}{0}$*. Assim, a grande controvérsia entre os geômetras é principalmente sobre os três tipos restantes; e os argumentos que são apresentados por ambos os lados para defenderem suas posições, incorporam tanta força persuasiva, que nenhuma parte sentiu-se obrigada a concordar com a outra.*

Com base neste parágrafo, podemos dizer que Euler produziu significado para a soma da série $1+1+1+1+1+1+\ldots$ como ∞, pois "tomando termos suficientes" desta série, a soma será "maior do que qualquer número dado", ou seja, a soma desta série pode ser expressa por $\frac{1}{0}$. E de acordo com o parágrafo §1 deste mesmo artigo, está série é classificada como divergente.

Também encontramos está mesma produção de significado para (4.2) no livro *Foundations of Differential Calculus*:

> *Euler: §102. A partir da soma de séries infinitas, podemos reunir muitos resultados que tanto ilustram esta teoria do infinito como também ajudam a responder as dúvidas que frequentemente surgem neste assunto. Em primeiro lugar, se a série tem termos iguais, tais como*
>
> $$1+1+1+1+1+\ldots,$$
>
> *que é continuada até o infinito, não há dúvida de que a soma de todos esses termos é maior do que qualquer número atribuível. Por essa razão, ela deve ser infinita. Confirmamos isso considerando sua origem na expansão da fração*
>
> $$\frac{1}{1-x} = 1 = x + x^2 + x^3 + \ldots.$$
>
> *Se tomarmos* $x = 1$*, então*
>
> $$\frac{1}{1-1} = 1+1+1+1+1+\ldots,$$
>
> *de modo que a soma é igual a*
>
> $$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Segundo Kline (1983), Newton interpretou as séries infinitas como polinômios longos [infinitos] e pertencente ao domínio da álgebra, e esta interpretação foi utilizada por Leibniz, Euler e Lagrange. Uma importante característica dos trabalhos do século XVIII

> é que os matemáticos confiavam mais no simbolismo do que na lógica. Assim as séries infinitas tinham a mesma forma simbólica para todos os valores de x, a distinção entre os valores de x para os quais a série convergia e os valores para os quais ela divergia não parece demandar muita atenção. (KLINE, 1983, p. 314, tradução nossa).

Podemos refutar este comentário de Kline, afirmando que esta demanda de produção de significado para séries convergentes e divergentes de fato ocorreu, como podemos ver nos parágrafos §1 e §2 do artigo *De seriebus divergentibus*, o que difere são os modos de produção de significados para as séries convergentes e divergentes, no caso de Euler, sua produção de significado foi feita em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela divisão, no contexto que analisamos, enquanto hoje o modo de produção de significado para séries convergentes e divergentes é feito em um Campo Semântico cujo núcleo é constituído por sequências, somas parciais e limites. Assim, pensando em termos do nosso modelo teórico, os conhecimentos produzidos são distintos.

A seguir vamos embasar nossa conclusão.

Produção de significado utilizando a Teoria de Séries de hoje 4.1.1. *Utilizando os conceitos apresentados na Subseção A.2.1. Considere a série*

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots \tag{4.3}$$

em que $a_n = 1$ *para todo inteiro positivo* n.

Nesse caso a n-ésima soma parcial s_n é n. Quando $n \to +\infty$, $s_n = +\infty$. Por essa razão, a série (4.3) é diverge.

Assim, ao produzirmos significado (hoje) para a série (4.3), chegamos a mesma conclusão de Euler, que a série é divergente. Mas os modos de produção de significados são diferentes.

O MCS é um modelo epistemológico que propõe que conhecimento é uma *crença-afirmação* junto com uma justificação para a *crença-afirmação*. "Mas, pelo fato de exigir que cada conhecimento tenha uma justificação, o MCS indica que o mesmo texto, falado com diferentes justificações, constituí diferentes conhecimentos." (LINS, 1994a, p. 29).

Assim, diante do texto

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \quad = \quad +\infty \tag{4.4}$$

Euler produziu significado para ele dentro de um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela divisão, logo Euler produziu um conhecimento onde a *crença-afirmação* é $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = +\infty$, junto com a *justificação*: essa expressão surgiu quando substituiu-se $a = 1$ em (4.1). Por outro lado, o conhecimento que produzimos hoje utilizando a Teoria de séries é produzido em um Campo Semântico cujo núcleo é constituído por sequências, somas parciais e limites, logo produzimos um conhecimento (diferente de Euler) onde a *crença-afirmação* é $1+1+1+1+1+1+\ldots = +\infty$, junto com a *justificação*: $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} 1 = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. Observe que as justificações são distintas, embora coincidam em relação a *crença-afirmação*. Portanto, podemos dizer que os conhecimentos produzidos são diferentes.

Euler continua o artigo *293*, tomado agora $a = 2$ em (4.1), assim

> *Euler: Novamente, se supormos* $a = 2$, *nossa série tornar-se*
>
> $$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 \; etc.$$

até o infinito, e seu valor deve ser o mesmo que $\frac{1}{1-2}$*, ou seja,* $\frac{1}{-1} = -1$*, que à primeira vista parece absurdo. Mas devemos observar que, se queremos parar em qualquer termo da série acima, não podemos fazê-lo, sem anexar a ele a fração que resta. Suponha, por exemplo, que estamos parando em* 64*, depois de ter escrito*

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$$

devemos adicionar a fração $\frac{128}{1-2}$ *ou* $\frac{128}{-1}$ *ou* -128*, teremos portanto* $127 - 128$ *que é de fato* -1*. Se fôssemos continuar a série sem intervalo, a fração deixariam de ser considerada. Mas, nesse caso, a série poderia ainda continuar.*[5]

Note que Euler diz que a primeira vista parece ser absurdo esse resultado, e logo irá justificar sua afirmação. Observe que a série infinita apresentada no artigo *293*, tomando $a = 2$, é o terceiro tipo de séries divergentes que Euler apresentou no parágrafo §1 do artigo *De seriebus divergentibus*. Esta série foi discutida com maiores argumentações nos parágrafos 6, 7 e 8 no artigo *De seriebus divergentibus*, e também no livro *Foundations of Differential Calculus*, que apresentaremos a seguir.

No artigo *De seriebus divergentibus*:

Euler: §6. Mas aqueles, que se opõem às somas de séries divergentes, tem a opinião que o terceiro tipo lhes fornecem os melhores argumentos. Por isso, embora os termos destas séries aumentem continuamente, portanto, é possível ao adicionarmos mais termos, obtermos uma soma maior do que qualquer número atribuível, ou seja, por definição, infinita, os defensores de somas de tais série são forçados, no entanto, a admitir séries de tais tipos, cujas somas são finitas e até mesmo negativas, ou menor do que nada. Porque, a fração $\frac{1}{1-a}$ *expandida em série, produz:*

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + etc.$$

devemos considerar as seguintes equações:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + etc.,$$

$$-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + etc.$$

que parecem, compreensivelmente, muito suspeitas para os adversários, porque pela adição de apenas termos positivos nunca se pode obter uma soma negativa. E, portanto, eles enfatizam muito a necessidade de adicionar o restante mencionado acima, com este inserido, é evidente que

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n + \frac{2^{n+1}}{1-2}$$

mesmo se n *é um número infinito.*

No livro *Foundations of Differential Calculus*:

[5]Na edição alemã de 1911 com comentários de Heinrich Weber encontramos na nota de rodapé: "Euler não leva em consideração aqui, e nem mais adiante, a questão de convergência, assim ele trata de tais resultados paradoxalmente."

Euler: §103. Embora não haja dúvida de que quando o mesmo número finito é adicionado um número infinito de vezes, a soma deve ser infinita, ainda, a série infinita geral que se origina a partir da fração

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots.$$

parece enfrentar as mais sérias dificuldades. Se para x substituirmos sucessivamente os números $1, 2, 3, 4, \ldots$, obtemos as seguintes séries com suas somas:

$$A.\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = \frac{1}{1-1} = \infty,$$

$$B.\ 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = \frac{1}{1-2} = -1,$$

$$C.\ 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \ldots = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2},$$

$$D.\ 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + \ldots = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3},$$

e assim por diante. Como cada termo da série B, exceto o primeiro, é maior do que o termo correspondente da série A, a soma da série B deve ser muito maior do que a soma da série A. No entanto, esse cálculo mostra que a série A tem uma soma infinita, enquanto a série B tem uma soma negativa, que é menor do que zero, e isso está além da compreensão. Menos ainda podemos conciliar com as idéias comuns os resultados destas e das seguintes séries C, D, e assim por diante, que têm somas negativas enquanto todos os termos são positivos.

Vamos produzir significado para os artigos §6 e §103.

Segundo Euler, intuitivamente a soma da série $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ deveria resultar ∞, pois os termos desta série estão aumentando continuamente. Mas como esta série originou-se da expansão da fração

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots$$

pela divisão contínua, substituindo $a = 1, 2$, obtemos as seguintes séries com as suas respectivas somas:

$$\text{A.}\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = \frac{1}{1-1} = \infty,$$

$$\text{B.}\ 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = \frac{1}{1-2} = -1.$$

Euler observa que os termos da série B, com exceção do primeiro termo, são todos maiores do que os termos correspondentes da série A, portanto, a soma da série B deveria ser maior do que a soma da série A. Mas esses cálculos mostram que a série A tem soma infinita enquanto a série B tem soma negativa, que é menor do que zero. Segundo Euler "isso está além da compreensão", pois estes resultados ultrapassam as ideias comuns da aritmética onde adicionando somente termos positivos resulta uma soma negativa.

Voltando ao artigo *De seriebus divergentibus*:

Euler: §7. Por isso, os defensores das somas de séries divergentes, para resolver esse paradoxo notável, criaram uma distinção, bastante sutil, mas pouco precisa, entre quantidades negativas; enquanto que eles argumentam, por um lado, que existem algumas menores do que nada, por outro lado, outras são maiores do que o infinito, ou seja, maiores do que quantidades infinitas. Por outro lado, devemos admitir o valor de -1*, sempre que pensamos que ele surgiu da subtração de um número maior* $a+1$ *de um menor* a*, e outro valor quando* -1 *é encontrado sendo igual à série* $1+2+4+8+16+$ *etc., que surge da divisão do número* $+1$ *pelo número* -1*; no primeiro caso o número* -1 *é obviamente um número menor do que nada, mas no último, maior do que o infinito. Para maior corroboração, eles apresentam este exemplo [de uma sequência] de frações*

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{-2}, \frac{1}{-3}, etc.$$

que pelos primeiros termos é visto aumentando, é também para ser considerada crescendo continuamente, donde eles concluem que $\frac{1}{-1} > \frac{1}{0}$ *e* $\frac{1}{-2} > \frac{1}{-1}$ *e assim por diante; e portanto se* $\frac{1}{-1}$ *é expresso por* -1 *e* $\frac{1}{0}$ *por* ∞*, então* $-1 > \infty$ *e ainda mais* $\frac{-1}{2} > \infty$*; e desta forma, eles muito engenhosamente expulsam o aparente absurdo.*

No livro *Foundations of Differential Calculus*:

Euler: §98. Ambas as quantidades infinitamente pequenas e infinitamente grandes ocorrem frequentemente em séries de números. Como há números finitos misturados nessas séries, é claro como a luz do dia, que de acordo com as leis de continuidade,[6] *se passa de quantidades finitas para quantidades infinitamente pequenas e para quantidades infinitamente grandes. Primeiro vamos considerar a série dos números naturais, continuada tanto para a frente como para trás:*

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, +0, +1, +2, +3, +4, \ldots$$

Ao diminuir continuamente, os números se aproximam de 0, isto é, o infinitamente pequeno. Então eles continuam mais além e tornam-se negativos. A partir disto, entendemos que os números positivos diminuem, passando por 0 à números negativos crescentes.

[6]O *princípio de continuidade* era um princípio filosófico elaborado por Leibniz, segundo Lacerda (2005),

"pode-se dizer em geral que a continuidade toda é uma coisa ideal e que não há nada na natureza que tenha partes perfeitamente uniformes, mas em compensação o real não deixa de se governar perfeitamente pelo ideal e abstrato, e acontece que as regras do finito funcionam no infinito, como se houvesse átomos (ou seja, elementos assinaláveis na natureza), embora não haja tais elementos, estando a matéria atualmente subdividida sem fim; e que, vice versa, as regras do infinito funcionam no finito, como se houvesse infinitamente pequenos metafísicos, embora não se tenha necessidade disso, e a divisão da matéria não chegue jamais a parcelas infinitamente pequenas (...)" (Carta de Leibniz a Varignon apud LACERDA, 2005, p. 60).

Este princípio pode ser enunciado na forma de aforismo: *a natureza nunca faz saltos.* (SANDIFER, 2006, p. 2).

Euler: §100. Da mesma forma, os termos infinitos geralmente ocorrem nas séries. Assim, na série harmônica, cujo termo geral é $\frac{1}{x}$*, o termo correspondente ao índice* $x = 0$ *é o termo infinito* $\frac{1}{0}$*. A série toda é a seguinte:*

$$\ldots, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{1}, +\frac{1}{0}, +\frac{1}{1}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, +\frac{1}{4}, \ldots$$

Indo da direita para a esquerda os termos aumentam, de modo que $\frac{1}{0}$ *é infinitamente grande. Uma vez que passamos por esse, os termos tornam-se decrescentes e negativos. Assim, uma quantidade infinitamente grande pode ser pensada como algum tipo de limite, passando através dos números positivos tornando-se negativos e vice-versa. Por esta razão, pareceu para muitos que os números negativos podem ser considerados como maiores do que o infinito, uma vez que nesta série os termos aumentam continuamente, e uma vez que eles chegaram ao infinito, eles se tornam negativos.*

Vamos produzir significado para os artigos §7, §98 e §100. Nestes parágrafos Euler busca subsídios para resolver o paradoxo de uma quantidade negativa ser ao mesmo tempo menor do que zero, ou nada, e maior do que o infinito.

No parágrafo §7, Euler produz significado para as quantidades negativas como sendo menores do que nada, justificando que estas surgiram da subtração de um número maior, por exemplo $a + 1$, de um número menor, por exemplo a, ou seja, $a - (a + 1) = -1$. Podemos dizer que Euler estava produzindo significado para as quantidades negativas em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por operações aritméticas.

Já no parágrafo §98, Euler fez uma outra produção de significado para as quantidades negativas como sendo menores do que nada. Ele considerou a série dos números inteiros

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, +0, +1, +2, +3, +4, \ldots$$

e pelo *princípio de continuidade*, ao percorrer esta série da direita para a esquerda, observou que os números estavam diminuindo continuamente e se aproximando do zero, e então continuando a série, os números tornavam-se negativos. Assim, Euler conclui: "a partir disto, entendemos que os números positivos diminuem, passando por 0, à números negativos." Podemos dizer que Euler estava produzindo significado para as quantidades negativas em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela série dos números inteiros e pelo *princípio de continuidade.* Portanto, dois modos diferentes de produzir significados para as quantidades negativas sendo menores do que nada.

E por outro lado, voltando ao parágrafo §7, Euler produziu significado para as quantidades negativas como sendo maiores do que as quantidades infinitas, segundo ele, estas são encontradas, por exemplo, quando consideramos a soma da série $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = -1$, cujo resultado desta soma originou-se da divisão do número $+1$ pelo número -1. Para corroborar ainda mais a esta ideia, Euler utiliza a série harmônica, que descreveremos melhor no próximo parágrafo. Neste caso, podemos dizer que Euler estava produzindo significado para as quantidades negativas em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela divisão elementar, pela soma da série $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ e pela série harmônica.

No parágrafo §100, Euler produziu significado para as quantidades negativas como sendo maiores do que as quantidades infinitas, considerando a série harmônica. De fato, ele considerou a série harmônica, cujo termo geral é $\dfrac{1}{x}$,

$$\ldots, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{1}, +\frac{1}{0}, +\frac{1}{1}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, +\frac{1}{4}, \ldots$$

e utilizando o *princípio de continuidade*, percorreu esta série da direita para à esquerda, observando que os termos aumentam continuamente, de modo que $\frac{1}{0}$ é infinitamente grande, e ao passarmos por esse número, os termos tornam-se decrescentes e negativos. Assim, era legítimo pensar que os números negativos podiam ser considerados maiores do que o infinito. Em termos de nosso modelo teórico, podemos dizer que Euler estava produzindo significado para as quantidades negativas em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela série harmônica e pelo *princípio de continuidade.*

Mas Euler ainda não estava satisfeito. No livro *Foundations of Differential Calculus*:

> *Euler: §104. Por esta razão, a opinião sugerida acima, ou seja, que os números negativos às vezes podem ser considerados maiores do que o infinito, isto é, mais do que o infinito, pode parecer ser mais provável. Uma vez que também é verdade que quando os números decrescentes vão além de zero, eles tornam-se negativos, devemos fazer uma distinção entre os números negativos como* $-1, -2, -3, \ldots$ *e os números negativos como*
>
> $$\frac{+1}{-1}, \frac{+2}{-1}, \frac{+3}{-1}, \ldots,$$
>
> *o primeiro sendo menor do que zero e o último sendo maior do que o infinito.*

Em vista do que foi discutido anteriormente, no parágrafo §104, Euler concluiu que devemos fazer uma distinção entre os números negativos da forma $-1, -2, -3, \ldots$ e os números negativos da forma $\frac{+1}{-1}, \frac{+2}{-1}, \frac{+3}{-1}, \ldots$, o primeiro sendo menor do que zero e o último maior do que o infinito.

Mas isto faria com que os fundamentos da análise/álgebra entrassem em colapso. Vejamos como ele resolve este problema no artigo *De seriebus divergentibus.*

> *Euler: §8. Embora esta distinção pareça ser uma ideia genial, é no entanto, pouco satisfatória para os adversários e, portanto, parece violar a certeza da análise. Por isso, se os dois valores de* -1*, na medida em que ele é ou* $= 1 - 2$ *ou* $= \frac{1}{-1}$*, são de fato diferentes um do outro, de modo que não podem ser confundidos, a certeza e a aplicação das regras que seguimos nos cálculos seriam completamente abolidas, e isso seria certamente mais absurdo do que a distinção para o qual foi pensado. Mas se* $1 - 2 = \frac{1}{-1}$*, como as leis da álgebra exigem, a questão de modo algum está concluída, uma vez que a quantidade* -1 *em si, que é definida como sendo igual à série* $1 + 2 + 4 + 8 +$ *etc., entretanto, é menor do que zero e a mesma dificuldade permanece. No entanto, parece ser verdade, dizermos que as mesmas quantidades que são menores do que nada, ao mesmo tempo podem ser consideradas como maiores do que o infinito. Assim, não somente a partir da álgebra, mas também da geometria, sabemos que há um salto das quantidades positivas para as quantidades negativas, através do nada ou zero, e outro através do infinito, e portanto as quantidades que a partir do zero, tanto aumentam como diminuem, retornarão a si mesmas, e finalmente alcançarão o mesmo termo* $= 0$ *novamente, de modo que as quantidades maiores do que o infinito*

também são menores do que nada e as quantidades menores do que o infinito também correspondem as quantidades maiores do que nada.

Observe que diante de "algo" novo a pergunta que era legítima para os matemáticos do século XVIII fazerem era: "O que é isso?", neste contexto, "O que são os números negativos?" Assim, Euler constituiu o objeto "números negativos" como aquelas quantidades que são simultaneamente menores do que zero e maiores do que o infinito. E esta forma de constituir este objeto estava de acordo, segundo Euler, tanto com os preceitos da álgebra como os da geometria, pois "sabemos que há um salto das quantidades positivas para as quantidades negativas através do zero" e outro salto das quantidades positivas para as quantidades negativas através do infinito. Segundo Barbeau e Leah (1976, p. 157), "o negócio de passar de um lado a outro do infinito a partir de números positivos para os números negativos é pelo menos tão antigo quanto Wallis" (tradução nossa). Logo, este argumento metafísico apresentado por Euler era legitimado pela comunidade matemática de sua época. Pensando em termos do nosso modelo teórico, podemos observar que os parágrafos acima apresentam um modo de produção de significado para os números negativos que era coerente com os pressupostos desta comunidade, e que são bem distintos do que estabelecemos (hoje) ao falarmos de números negativos.

Diante do que foi discutido até aqui, podemos dizer que era legítimo, para Euler, enunciar que

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \ldots = -1$$

pois os números negativos podiam ser maiores do que o infinito.

Queremos destacar que Euler foi um dos pioneiros na utilização de séries divergentes, ele as utilizava de forma audaz. Algumas vezes seus resultados pareciam paradoxais, mas o que vimos acima foi uma argumentação plausível para a comunidade científica da época, pois para ele não havia dúvidas quanto ao resultado dessa série, basta olharmos novamente para a produção de significado que ele nos apresentou, onde a série surgiu da divisão, logo a série infinita é igual a expressão finita que lhe originou e "ela pode ser usada nas operações matemáticas como equivalente aquela expressão, mesmo para valores da variável para os quais as séries divergem." (KLINE, 1983, p. 313, tradução nossa). Mais adiante, nesta tese, voltaremos a discutir a soma de séries divergentes.

Vamos apresentar a **produção de significado utilizando a teoria de séries de hoje** para o artigo *293*, tomando $a = 2$.

Considere a série

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \ldots + 2^n + \ldots$$

em que $a_n = 2^n$.

Assim, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, logo ele não existe. Aplicando o Teorema A.2.3 (Critério do termo geral para divergência), segue que a série é diverge.

Queremos chamar atenção para a importância das justificações que ocorrem durante a produção de um conhecimento para tentarmos entender de onde um autor está falando. De fato, diante do parágrafo §1 do artigo *De seriebus divergentibus*, onde Euler afirma que a série

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + etc.$$

é divergente, podemos produzir significado para esta afirmação sem nenhum estranhamento pois hoje concordamos com ela, mas ao passo que investigamos a produção de conhecimento que Euler fez

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + etc. = -1$$

no artigo *293*, substituindo $a = 2$ na expansão da fração $\dfrac{1}{1-a}$ em série infinita, isto nos causa não apenas um estranhamento mas um *limite epistemológico*, pois isto não pode ser dito hoje na comunidade matemática, não é legítimo. Poderíamos, ao nos depararmos com essa afirmação, simplesmente dizer que Euler "errou" ao considerar a série de maneira formal, não percebendo quais eram os valores de a que poderiam ser substituídos na fração $\dfrac{1}{1-a}$ para que a série convergisse. Mas como nossa leitura é apoiada na leitura positiva, o que nos interessa é saber por que Euler produzia significado para esta série desta forma. Para entendermos de onde Euler estava falando, fomos buscar seus trabalhos anteriores, onde ele produziu significado para a série $1+2+4+8+16+32+etc.$, e somente levando em consideração seus trabalhos anteriores pudemos perceber toda a coerência de sua produção de significado, toda a riqueza de sua argumentação e veja bem! Era legítimo para Euler enunciar

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + etc. = -1$$

pois o -1 é um número maior do que o infinito!

4.2 Os artigos 294, 295, 296 e 297

Nos artigos *294*, *295*, *296* e *297*, Euler utilizará os valores de a entre 0 e 1 na expressão (4.1).

> *Euler: 294. Estas são as considerações que são necessárias, quando assumimos para a números maiores do que a unidade. Mas se supuséssemos a menor do que 1, o todo tornar-se-ia mais inteligível. Por exemplo, seja* $a = \dfrac{1}{2}$ *teremos então* $\dfrac{1}{1-a} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$*, que será igual a seguinte série*
>
> $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}\ etc.$$
>
> *até o infinito. Agora, se tomarmos apenas dois termos desta série, teremos* $1 + \dfrac{1}{2}$*, e falta* $\dfrac{1}{2}$ *para ser igual a* $\dfrac{1}{1-a} = 2$*. Se tomarmos três termos, falta* $\dfrac{1}{4}$*, pois a soma é* $1\dfrac{3}{4}$*. Se tomarmos quatro termos, temos* $1\dfrac{7}{8}$*, e o déficit é apenas* $\dfrac{1}{8}$*. Portanto, quanto mais termos tomarmos, menor torna-se a diferença; e, consequentemente, se continuarmos a série até o infinito, não haverá nenhuma diferença entre todas as suas somas e o valor da fração* $\dfrac{1}{1-a}$ *ou 2.*

Podemos produzir significado para o artigo *294*, utilizando os pressupostos de Euler, em um Campo Semântico cujo núcleo é constituído pela afirmação "séries convergentes são aquelas cujos os termos decrescem gradualmente até desaparecerem completamente". Assim, podemos afirmar que a série dada é convergente, e adicionando ao núcleo deste Campos Semântico, o objeto "série" que constituímos em relação a divisão, podemos produzir significado para a soma desta série convergente, e afirmar que ela vale 2.

Observe que neste artigo, Euler nos apresenta outro objeto que ele incorpora ao núcleo na produção de significado para a soma desta série. Este novo objeto é o *termo somatório*, que ele constituiu pela primeira vez no artigo *De summatione innumerabilium progressionum*, publicado em 1738, na *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 5*, p. 91-105, e reimpresso em *Opera Omnia: Series 1*, v. 14, p. 25 - 41.

Neste artigo supracitado, no primeiro parágrafo, Euler nos diz que os termos gerais das progressões são de grande valia para encontrarmos a soma das progressões, principalmente nos casos de progressões transcendentais[7] onde a álgebra comum é insuficiente para somar tais progressões. No parágrafo §2, deste artigo, temos

> *Euler: Uma certa progressão indefinida é dita para ser somada, se uma fórmula é dada contendo o número indefinido n, que define a soma de todos os termos daquela progressão, tantos termos são tomados quanto existem unidades em n, assim, por exemplo, se n é colocado igual a 10, esta fórmula mostra a soma dos* 10 *primeiros termos a partir do primeiro. Esta fórmula é chamada o* **termo somatório** *que expressa a soma desta progressão [. . .].*

Em linguagem moderna, o que Euler denomina de *termo somatório* é o que chamamos *soma parcial* de ordem n de uma série.

Voltando a produção de significado feita por Euler no artigo *294*, ele calcula os termos somatórios e as diferenças dos valores destes termos com o valor conhecido da soma da série. Assim, Euler forma a sequência de somas parciais e as respectivas diferenças $|s_i - 2|$, onde s_i indica a i-ésima soma parcial

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, & |s_1 - 2| = 1 \\ s_2 &= 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}, & |s_2 - 2| = \tfrac{1}{2} \\ s_3 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{4}, & |s_3 - 2| = \tfrac{1}{4} \\ s_4 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{15}{8}, & |s_4 - 2| = \tfrac{1}{8} \\ & \quad \ldots \end{aligned}$$

e conclui que se continuarmos a série até o infinito, pelo *princípio da extensão infinita*, não haverá nenhuma diferença entre todas as somas parciais e a soma da série 2.

Podemos sintetizar a produção de significado que Euler nos apresentou em relação as diferenças entre as somas parciais e a soma da série da seguinte forma:

> *Seja S a soma da série $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Se a sequência das n-ésimas somas parciais $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i$ aproxima-se de S quando n aumenta indefinidamente então a diferença*

[7] Em seu primeiro artigo sobre séries, *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt*, publicado em 1738, Euler nos diz que "as progressões cujos termos gerais não podem ser expressos algebricamente, eu chamo *transcendentais*."

entre S_n e S (em valor absoluto) torna-se menor do que qualquer quantidade dada. (FERRARO, 2008, p. 115, tradução nossa).

A diferença entre as somas parciais e a soma da série, é denominada hoje por **erro absoluto**, isto é, o erro absoluto é a diferença entre o valor exato da soma e de seu valor aproximado S_i: $EA_S = |S - S_i|$. Portanto, podemos concluir que se o erro absoluto for zero, a soma da série será igual a n-ésima soma parcial quando $n = \infty$.

Esta ideia também apareceu anteriormente no livro *Foundations of Differential Calculus.*

Euler: §106. [...] vamos examinar o desenvolvimento da fração $\dfrac{1}{1-x}$ *nos primeiros números finitos de termos. Assim, temos*

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + \frac{x}{1-x}, \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + \frac{x^2}{1-x}, \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}, \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}, \end{aligned}$$

e assim por diante. Se alguém quiser dizer que a série finita $1 + x + x^2 + x^3$ *tem uma soma igual a* $\dfrac{1}{1-x}$*, então ele está errando pela quantidade* $\dfrac{x^4}{1-x}$*; Se alguém dissesse que a soma da série* $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{1000}$ *é* $\dfrac{1}{1-x}$*, então seu erro é igual a* $\dfrac{x^{1001}}{1-x}$*. Se acontecer de x ser maior do que 1, este erro é muito grande.*

Euler: §107. A partir disto vemos que alguém que diria que quando esta mesma série é continuada ao infinito, isto é,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{\infty},$$

e que a soma é $\dfrac{1}{1-x}$*, então seu erro seria* $\dfrac{x^{\infty+1}}{1-x}$*; e se* $x > 1$ *então o erro é de fato infinito. Ao mesmo tempo, porém, esse mesmo argumento mostra porque a série* $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$*, continuada até o infinito, tem uma verdadeira soma de* $\dfrac{1}{1-x}$*, desde que x seja uma fração menor que 1. Neste caso, o erro* $x^{\infty+1}$ *é infinitamente pequeno e, portanto, igual a zero, de modo que pode ser abandonado com segurança. Assim, se deixarmos* $x = \frac{1}{2}$*, então na verdade*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

De maneira semelhante, o resto da série em que x é uma fração menor que 1 terá uma soma verdadeira da maneira que indicamos.

Vamos produzir significado para os parágrafos §106 e §107.

Segundo Euler, se alguém quiser dizer que a soma da série finita $1 + x + x^2 + x^3$ é igual a $\dfrac{1}{1-x}$ então o erro que ela comete ao afirmar isto é pela quantidade $\dfrac{x^4}{1-x}$. Podemos expressar essa ideia da seguinte forma

$$|\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{S} - \underbrace{(1 + x + x^2 + x^3)}_{S_4}| = \frac{x^4}{1-x}$$

ou seja, a diferença entre a soma da série e a soma parcial dos quatro termos é $\dfrac{x^4}{1-x}$.

De modo geral, pelo *princípio da extensão infinita*,

$$|\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{S} - \underbrace{(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{\infty})}_{S_{\infty+1}}| = \frac{x^{\infty+1}}{1-x}.$$

De onde Euler conclui que se $x > 1$ então o erro absoluto é muito grande, de fato infinito, e por outro lado, se $(0 <)\ x < 1$ então o erro é infinitamente pequeno, e pode ser desconsiderado, o que implica que a soma parcial quando $n = \infty$ é a soma da série. Esta conclusão pode ser expressa da seguinte forma,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}, \quad \text{se} \quad (0 <) \quad x < 1.$$

Portanto, se $x = \frac{1}{2}$ temos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Sintetizando, podemos dizer que Euler estava produzindo significado para a soma da série $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{128} + \ldots$, no artigo *294*, em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído:

- pela divisão longa, ou seja,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

  tomando $a = \frac{1}{2}$ temos

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

- pela diferença entre as somas parciais e a soma da série, ao qual chamamos hoje de erro absoluto,

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1, & |s_1 - 2| = 1 \\
s_2 &= 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}, & |s_2 - 2| = \tfrac{1}{2} \\
s_3 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{4}, & |s_3 - 2| = \tfrac{1}{4} \\
s_4 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{15}{8}, & |s_4 - 2| = \tfrac{1}{8} \\
& \ldots
\end{aligned}$$

que junto com o parágrafo §107, temos que o erro $x^{\infty+1}$ é infinitamente pequeno, e portanto igual a zero, se $|x| < 1$, de modo que pode ser abandonado, ou seja, a soma da série é igual a n-ésima soma parcial quando $n = \infty$.

Vamos apresentar **a produção de significado que fazemos hoje** para o artigo *294* utilizando a teoria de séries. Primeiro vamos apresentar o teorema de séries geométricas.

Teorema 4.2.1 (Séries Geométricas)**.** *A série geométrica* $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots$ *é convergente se* $|r| < 1$ *e sua soma é*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1.$$

Se $|r| \geqslant 1$, *a série geométrica é divergente.*

Demonstração.

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} ar^i = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{a - ar^{n+1}}{1-r}.$$

- Se $|r| < 1$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} r^{n+1} = 0$. Daí,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} ar^i = \lim_{n\to+\infty} \frac{a - ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r}.$$

  Logo, a série dada é convergente se $|r| < 1$ e tem por soma $\dfrac{a}{1-r}$.

- Se $|r| > 1$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} |ar^n| \neq 0$, o que implica que $\lim\limits_{n\to+\infty} ar^n \neq 0$. Segue do Teorema A.2.3 (Critério do termo geral para divergência) que a série dada é divergente.

- Se $r = 1$ então a série fica $\sum_{n=0}^{+\infty} a$. Neste caso, a n-ésima soma parcial s_n é na. Sendo assim, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ ou $-\infty$ conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Por essa razão a série dada é divergente.

- Se $r = -1$ então a série fica $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a$. Neste caso, a soma parcial de n termos é:

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ a, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

  Sendo assim, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ não existe. Por essa razão a série dada é divergente.

$\square$

Considere a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots \tag{4.5}$$

Observe que esta série é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = \frac{1}{2}$, logo pelo Teorema 4.2.1 temos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Podemos dizer que produzimos significado hoje para a soma da série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots$ em um Campo Semântico cujo núcleo é constituído pelas seguintes estipulações locais:

1^o. Determinação do termo geral da n-ésima soma parcial.

2^o. Cálculo do limite da n-ésima soma parcial quando $n \to +\infty$.

Queremos destacar que diante da crença-afirmação "$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots = 2$", nós (hoje) reconhecemos uma série geométrica cuja razão é $\frac{1}{2}$, logo a série é convergente e sua soma é 2. Ao lermos esta afirmação em um livro do século XVIII não existe estranhamento, pois a afirmação é a mesma que fazemos hoje, mas os conhecimentos produzidos a partir desta crença-afirmação são distintos, pois foram constituídos dentro de Campos Semânticos diferentes. Para que percebamos que de fato os conhecimentos são distintos, é de suma importância que analisemos as justificações, que para o MCS é constitutiva do conhecimento, e assim possamos entender como os objetos matemáticos foram constituídos por Euler e como os constituímos hoje.

De modo geral, quando nos deparamos com o texto "$1+a+a^2+a^3+\dots = \frac{1}{1-a}$", para $|a| < 1$, tanto Euler como nós (hoje) concordamos com ele, assim temos a sensação de estarmos compartilhando o mesmo espaço comunicativo, mas somente quando analisamos os modos de produção de significado, ou seja, os conhecimentos produzidos a partir deste texto, notamos que eles são realmente distintos. Por este motivo que o Modelo dos Campos Semânticos é um referencial que nos permite "produzir leituras suficientemente finas de processos de produção de significado" (LINS, 2012, p. 18) e que nos possibilita "ver" os objetos matemáticos sendo constituídos.

A seguir apresentamos a tradução dos artigos *295*, *296* e *297*.

Euler: 295. Seja $a = \frac{1}{3}$ *e nossa fração será então* $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, *que reduzida a uma série infinita, torna-se*

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}\ etc.$$

que é consequentemente igual a $\frac{1}{1-a}$. *Aqui, se tomarmos dois termos, temos* $1\frac{1}{3}$, *e faltará* $\frac{1}{6}$. *Se tomarmos três termos, temos* $1\frac{4}{9}$ *e ainda faltará* $\frac{1}{18}$. *Se tomarmos quatro termos, teremos* $1\frac{13}{27}$, *e a diferença será* $\frac{1}{54}$; *já que, portanto, o erro sempre torna-se três vezes menor, e deve evidentemente desaparecer finalmente.*

Euler: 296. Seja $a = \frac{2}{3}$ *teremos* $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$, *a série será* $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243} +$ *etc. até o infinito; e aqui tomando primeiro* $1\frac{2}{3}$, *o erro é* $1\frac{1}{3}$; *tomando três termos, produzimos* $2\frac{1}{9}$, *o erro é* $\frac{8}{9}$; *tomando quatro termos, temos* $2\frac{11}{27}$, *e o erro é* $\frac{16}{27}$.

Euler: 297. Seja $a = \frac{1}{4}$ *a fração é* $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{3}$ *e a série torna-se* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ *etc. Os primeiros dois termos são iguais a* $1\frac{1}{4}$, *que dá* $\frac{1}{12}$ *para o erro; e tomando um termo a mais, temos* $1\frac{5}{16}$[8], *ou seja, apenas um erro de* $\frac{1}{48}$.

Observe que nestes artigos, Euler substituiu o valor de a por $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$, e como estes valores de a são menores do que 1, a soma da série é o valor da expressão finita que a originou, isto é, $\frac{1}{1-a}$, pois o valor da diferença entre a soma da série e as somas parciais é infinitamente pequeno. Portanto, Euler faz a mesma produção de significado apresentada no artigo *294*. Podemos dizer que Euler produziu significado para estes artigos em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela divisão longa e pela diferença entre a soma da série e as somas parciais.

4.3 A fração $\frac{1}{1+a}$

Vamos agora analisar a produção de significado que Euler fez para a série infinita gerada a partir da divisão de 1 por $1 + a$.

Euler: 298. Da mesma forma, podemos resolver a fração $\frac{1}{1+a}$ *em uma série infinita, dividindo efetivamente o numerador* 1 *pelo denominador* $1+a$,[9] *como segue*

---

[8]Na tradução inglesa encontramos o valor de $1\frac{5}{15}$, ao invés do valor correto de $1\frac{5}{16}$.

[9]Esta divisão é representada, no Brasil, pelo diagrama:

$$
\begin{array}{llll}
1 & & & \underline{|\quad 1+a \quad} \\
\underline{1+a} & & & 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 \\
\quad -a & & & \\
\quad \underline{-a - a^2} & & & \\
\qquad +a^2 & & & \\
\qquad \underline{+a^2 + a^3} & & & \\
\qquad\quad -a^3 & & & \\
\qquad\quad \underline{-a^3 - a^4} & & & \\
\qquad\qquad +a^4 & & & \\
\qquad\qquad \underline{+a^4 + a^5} & & & \\
\qquad\qquad\quad -a^5 & \text{etc.} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlllllll}
1+a) & 1 & & & & & & (1-a+a^2-a^3+a^4 \\
 & \underline{1+a} & & & & & & \\
 & \quad -a & & & & & & \\
 & \quad \underline{-a-a^2} & & & & & & \\
 & \qquad\quad +a^2 & & & & & & \\
 & \qquad\quad \underline{+a^2+a^3} & & & & & & \\
 & \qquad\qquad\quad -a^3 & & & & & & \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{-a^3-a^4} & & & & & & \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad +a^4 & & & & & & \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad \underline{+a^4+a^5} & & & & & & \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -a^5 \quad \textit{etc.} & & & & & &
\end{array}
$$

Daí segue-se que a fração $\dfrac{1}{1+a}$ *é igual a série*

$$1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7 \textit{ etc.}$$

Podemos produzir significado para o artigo *298*, nos termos de Euler, como:

$$\frac{1}{1+a} = 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7+\dots \tag{4.6}$$

onde essa igualdade foi gerada pela utilização do algoritmo usual da divisão, e pelo *princípio da extensão infinita*, portanto, podemos afirmar que o quociente $\dfrac{1}{1+a}$ pode ser expandido em uma série infinita $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i a^i$ e a soma da série $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i a^i$ é a expressão finita, neste caso, $\dfrac{1}{1+a}$, que a gerou.

Nos próximos três artigos, *299*, *300* e *301*, Euler atribuirá valores para a em (4.6) e analisará cada caso em particular.

> *Euler: 299. Se fizermos* $a=1$*, temos esta comparação notável:*
>
> $$\frac{1}{1+a} = \frac{1}{2} = 1-1+1-1+1-1+1-1 \textit{ etc.}$$
>
> *até o infinito; que parece bastante contraditória, pois se pararmos no* -1 *a série dá 0; e se terminarmos em* $+1$ *dá* 1*, mas isso é precisamente o que resolve a dificuldade, porque desde que devemos continuar até o infinito, sem parar, quer no* -1 *ou em* $+1$*, é evidente que a soma não pode ser nem* 0 *ou* 1*, mas que este resultado deve situar-se entre estes dois, e portanto ser* $\frac{1}{2}$.

Primeiro, vamos **produzir significado para o artigo *299*, utilizando a Teoria de Séries de hoje**.

Considere a série

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i = 1-1+1-1+\dots$$

A sequência de somas parciais é $1, 0, 1, 0, \ldots$ logo s_n não cresce arbitrariamente, mas não se aproxima de nenhum limite finito. Em vez disso, oscila indefinidamente entre os números 1 e 0 e, portanto, a série não têm soma.

Hoje, sabemos que esta série é uma série alternada divergente, mas antes da fundamentação da Teoria de séries, esta série gerou muita polêmica e disputa entre os matemáticos. Quando Euler produziu significado para esta série, sua enunciação foi feita na direção da comunidade matemática da sua época, que diriam o que ele está dizendo com a justificação que ele estava produzindo, e de fato, faremos uma retomada histórica dessa série, citando alguns matemáticos envolvidos no cálculo dessa série e mostraremos que o resultado encontrado por Euler no artigo *299* era totalmente plausível em sua época.

4.3.1 Série de Grandi

O matemático italiano, filósofo e padre Guido Grandi (1671-1742)[10] estudou os fluxões de Newton e os diferenciais de Leibniz e usou ambas as abordagens embora tenha favorecido a abordagem utilizada por Leibniz. Ele enviou cópias de seu trabalho para ambos os matemáticos e recebeu agradecimentos de Leibniz e cópias da *Óptica* e dos *Principia* de Newton. Um dos seus resultados obtido na obra *Quadratura dos Círculos e Hiperboles* causou muito interesse. Ele usou a expansão em série

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

e colocando $x = 1$, obteve

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}. \tag{4.7}$$

Utilizando a propriedade associativa da adição, ele argumentou que

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \cdots = \frac{1}{2}.$$

Com esse resultado, no primeiro esboço do seu trabalho, Grandi afirmou que uma vez que a soma de infinitos 0 é igual a $\frac{1}{2}$, ele provou que Deus poderia criar a palavra a partir do nada.

Entretanto, a censura da época exigiu que fosse retirado esse comentário, permitindo a publicação apenas da matemática. Relutantemente, Grandi concordou em remover o comentário, mas muitos matemáticos de toda a Europa ficaram intrigados com o resultado de Grandi que $0 + 0 + 0 + 0 + \ldots = \frac{1}{2}$.

4.3.2 Leibniz e os Bernoulli

Segundo Kline (1972), Jacob e Johann Bernoulli fizeram um grande trabalho com séries. Jacob Bernoulli (1654 - 1705) escreveu um tratado, o *Positiones arithmeticae de seriebus infinito, earumque summa finita*, onde tentou sistematizar os principais resultados obtidos durante

[10]<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Grandi.html>.

o século XVII, fornecendo uma exposição estruturada e coerente da teoria de séries. Este tratado foi publicado entre 1689 e 1704 em cinco artigos separados, e foram publicados postumamente por seu sobrinho Nicholas (1695 - 1726) no apêndice da obra *Ars Conjectandi* em 1713.

Bernoulli afirmou que o método de divisão longa aplicado a $\dfrac{l}{m \mp n}$ sempre produz um resto, apenas se $m > n$ o resto "diminui e é finalmente menor do que qualquer quantidade dada" (FERRARO, 2008, p. 84, tradução nossa) neste caso temos:

$$\frac{l}{m \mp n} = \frac{l}{m} \pm \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} \pm \ldots$$

Ele também provou que a soma de $\dfrac{l}{m} - \dfrac{ln}{m^2} + \dfrac{ln^2}{m^3} - \ldots = \dfrac{l}{m+n}$ varia entre $\dfrac{l}{m}$ e $\dfrac{l}{2m}$ para $0 < n < m$. Ele notou que quando $n = m$ a série resulta

$$\frac{l}{2m} = \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \ldots \tag{4.8}$$

que ele descreveu como um paradoxo. Segundo ele, neste caso o resto não diminui mas é sempre igual a $\pm\dfrac{l}{2m}$. Logo, não podemos simplesmente abandoná-lo. Portanto, o resultado da divisão de l por $2m$ é

$$\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \ldots + (-1)^n \frac{l}{2m},$$

onde n é o número de termos que estamos adicionando.

Leibniz estudou a série de Grandi em algumas cartas (1713 - 1716) para Christian Wolf (1678 - 1754). Ele concordou com o resultado de Grandi, mas pensou que deveria ser possível obter o resultado da série sem a argumentação dada por Grandi.

De fato, Leibniz argumentou que se tomarmos o primeiro termo, a soma dos dois primeiros termos, a somas dos três primeiros termos, e assim por diante, obteremos a sequência

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

Portanto, as somas 1 e 0 são igualmente prováveis quando o número de termos é finito, ou seja, quando o número de termos for par a soma resulta 0 e quando o número de termos for ímpar a soma resulta 1. Assim, quando somamos a série $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ até o infinito, a natureza dos números desaparecem e não podemos distinguir entre números pares ou ímpares. De acordo com Leibniz, a soma da série então não pode ser 0 ou 1, mas deve ser tomada como a média aritmética entre 0 e 1, que é o valor mais provável para a soma quando o número de termos é infinito.

> Esta solução foi aceita por Jacob e Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli e mais tarde por Lagrange. Leibniz admitiu que seu argumento era mais metafísico do que matemático, mas passou a dizer que havia mais verdades metafísica em matemática do que era geralmente reconhecido. (KLINE, 1972, p. 446, tradução nossa).

Pensando em termos do nosso modelo teórico, podemos observar que Leibniz estava produzindo significado para a série (4.7) em um campo semântico cujo núcleo foi constituído pelas somas parciais, pela crença que a natureza dos números desaparecem no infinito, por um argumento probabilístico e pela média aritmética das somas parciais.

Segundo Ferraro (2008), Leibniz se recusou a produzir significado para a série (4.7) de modo exclusivamente algébrico e rejeitou os resultados que provinham apenas dele. Para ilustrarmos esse fato, em correspondência trocada com Christian Wolf, em 12 de junho de 1712, Wolf escreveu que tinha obtido alguns resultados para a soma de séries divergentes. Ele considerou a seguinte expansão em série

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

e substituindo $x = 2$, obteve

$$\frac{1}{3} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots$$

Também substituiu $x = 3$, e obteve

$$\frac{1}{4} = 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - \ldots$$

Wolf também tentou provar esses resultados calculando as somas parciais dos termos positivos e as somas parciais dos termos negativos, utilizando o mesmo argumento probabilístico dado por Leibniz, tomou a média aritmética das somas parciais dos termos positivos e dos termos negativos quando o número de termos é finito, mas Leibniz desaprovou esses resultados pelo seu método, em correspondência datada em 13 de julho de 1712.

4.3.3 A série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Vamos agora olhar para a justificação do artigo *299* dada por Euler no artigo *De seriebus divergentibus* e no Capítulo III do livro *Foundations of Differential Calculus.*

> *Euler §3. Do segundo tipo temos a série* $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ *etc., primeiro considerada por Leibniz, cuja soma afirmou ser igual a* $\frac{1}{2}$*, com o suporte do seguinte raciocínio, bastante sólido: em primeiro lugar, esta série surge se a fração* $\frac{1}{1+a}$ *é expandida, da forma usual, pela divisão continua na seguinte série*
>
> $$1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + etc,$$
>
> *e o valor da letra a é tomado igual a unidade. Então, na verdade, para confirmar isto ainda mais e persuadir aqueles que não estão acostumados com tais cálculos, ele deu o seguinte argumento: se esta série é terminada em algum lugar, e o número de termos for par, então sua soma será igual a 0, mas se, por outro lado, o número de termos for ímpar, a soma da série será igual a 1; Portanto, se a série prosseguir até o infinito e (consequentemente) o número de termos não pode ser considerado nem como par nem como ímpar, ele concluiu que a soma não pode ser igual a 0 ou 1, mas tem um certo valor médio, que difere igualmente dos dois, que é igual a* $\frac{1}{2}$.

Neste parágrafo, pensando em termos do nosso modelo teórico, observamos que houve uma mudança de Campo Semântico ao longo do discurso. Inicialmente, houve uma produção de significado para a série (4.7) em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela divisão, ou seja, utilizando o algoritmo usual da divisão continuamente, a fração $\frac{1}{1+a}$ foi expandida em uma série infinita. Mas como vimos na Subseção 4.3.2, Leibniz se recusou a esse modo de produção de significado para a série (4.7). Assim, Euler nos apresenta uma outra produção de significado para a série (4.7), fornecida por Leibniz, para as pessoas que não estão acostumadas a operar em um Campo Semântico cujo núcleo é constituído pela divisão. Portanto, para legitimar o resultado obtido, Euler nos apresenta a produção de significado para série (4.7) em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pelas somas parciais, pela crença que a natureza dos números desaparecem no infinito, por um argumento probabilístico e pela média aritmética das somas parciais. Chamaremos a atividade de produzir significado em relação a esse núcleo de **Campo Semântico de Leibniz**.

Euler continua a sua produção de significado para a série (4.7).

Euler: §4. Contrário a este argumento, é geralmente apresentado a seguinte objeção: "Primeiro, a fração $\frac{1}{1+a}$ *é somente igual a série infinita*

$$1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - etc.$$

se a é uma fração menor do que a unidade. Se, por exemplo, a divisão é interrompida em algum lugar e a parcela correspondente aos termos restantes é adicionada ao quociente, a origem do falso raciocínio será revelada; o seu resultado será

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots \pm a^n \mp \frac{a^{n+1}}{1+a},$$

e se o número n é tomado infinitamente, não é possível, no entanto, omitir a fração adicionada $\mp\frac{a^{n+1}}{1+a}$*, a menos que ela realmente desapareça, que ocorre apenas se* $a < 1$ *e então a série converge. Mas, nos outros casos, é sempre necessário levar em conta o resto* $\mp\frac{a^{n+1}}{1+a}$*, e embora seja precedido por um sinal ambíguo* $\mp$*, dependendo se n for par ou ímpar, portanto, se n for infinito, o resto não pode ser apenas abandonado, porque um número infinito não é nem par nem ímpar, e assim não temos nenhum critério para a escolha do sinal. Pois é absurdo acreditar que existe um número inteiro, mesmo sendo infinito, que não é nem par nem ímpar."*

Euler: §5. Mas a essa objeção, os que atribuem certas somas as séries divergentes, justificadamente respondem que um número infinito é tratado como um número, e portanto é par ou ímpar, embora seja de fato indeterminado. Quando uma série é dita continuada até o infinito, é contrário a esta ideia, se um certo termo da série é considerado como o último, mesmo se ele for infinitesimal. Portanto, a objeção acima referida, relativa a adição ou subtração do resto, depois do último termo, desaparece por si só. Uma vez que nunca alcançamos o fim de uma série infinita, portanto, nunca chegamos além de um lugar onde seria necessário acrescentar o resto; e consequentemente, este resto não só pode ser abandonado, mas tem que ser, porque em nenhum lugar encontramos ele. E esses argumentos, que são colocados a favor ou contra das somas de séries divergentes, também diz respeito ao quarto tipo, que é geralmente carregado de problemas próprios deles.

No parágrafo §4 Euler apresenta os argumentos dos críticos de somas de séries divergentes, onde para eles a fração $\dfrac{1}{1+a}$ é igual a série infinita $1-a+a^2-a^3+a^4-\ldots$ somente se $(0<)$ $a<1$. E para os outros valores de a devemos considerar a parcela correspondente aos termos restantes, isto é, a fração $\mp\dfrac{a^{n+1}}{1+a}$. Euler observa que se n é infinito não há critérios para a escolha do sinal do termo $\mp\dfrac{a^{n+1}}{1+a}$, pois este depende de n ser um número par ou ímpar. E acrescenta, no parágrafo §5, "quando uma série é dita continuada até o infinito, é contrário a esta ideia, se um certo termo da série é considerado como o último, mesmo se ele for infinitesimal", portanto, o resto deve ser desconsiderado.

Estes parágrafos acima nos mostram que Euler tinha consciência que as séries divergentes causavam estranhamentos, mesmo para os mais hábeis matemáticos de sua época, mas Euler sabia que esse objeto chamado de *séries divergentes* tinha um comportamento diferente das séries convergentes, mas nem por isso deixou de usá-los e perceber a sua importância.

No livro *Foundations of Differential Calculus*, temos

> *Euler: §108. [...] Uma vez que temos*
>
> $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots,$$
>
> *Se não expressarmos o resto final, teremos*
>
> *A.* $1-1+1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$,
>
> *B.* $1-2+4-8+16-32+\ldots=\frac{1}{3}$,
>
> *C.* $1-3+9-27+81-243+\ldots=\frac{1}{4}$.
>
> *É claro que a soma da série B não pode ser igual a $\frac{1}{3}$, já que quanto mais termos somamos, mais longe o resultado obtido vai de $\frac{1}{3}$. Mas a soma de qualquer série deveria ser um limite próximo, ao qual as somas parciais deveriam aproximar-se, quanto mais termos são acrescentados.*

> *Euler: §109. A partir disto, podemos concluir que as séries deste tipo, que são chamadas divergente, não têm somas fixas, uma vez que as somas parciais não se aproximam de qualquer limite que seria a soma da série infinita. Esta é certamente uma conclusão verdadeira, uma vez que mostramos o erro abandonado no resto final. No entanto, é possível, com justiça considerável, objetar que essas somas, mesmo que elas pareçam não ser verdadeiras, nunca levam ao erro. Na verdade, se as permitimos, então podemos descobrir muitos excelentes resultados que não teríamos se as rejeitássemos. Além disso, se essas somas fossem realmente falsas, elas não conduziriam consistentemente a resultados verdadeiros. Em vez disso, uma vez que elas diferem da verdadeira soma não apenas por uma pequena diferença, mas por infinito, elas deveriam nos enganar por uma quantidade infinita. Uma vez que isso não acontece, nós somos deixados com um nó mais difícil de desatar.*

Note que no início do parágrafo §108 Euler produziu significado para a expansão da fração $\dfrac{1}{1+x}$ em séries infinitas dentro do **Campo Semântico da Divisão**, e depois tenta produzir significado para a série B dentro do **Campo Semântico de Leibniz**, pois, de fato, ele já havia produzido significado para a série A dentro deste campo semântico. Assim, Euler considera as somas parciais da série B:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1, \\
s_2 &= 1-2=-1 \\
s_3 &= 1-2+4=+3 \\
s_4 &= 1-2+4-8=-5 \\
s_5 &= 1-2+4-8+16=+11 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

portanto, ele percebe que quanto mais termos somamos, mais longe o resultado dessas somas parciais ficam do valor $\frac{1}{3}$. "Mas a soma de qualquer série deveria ser um limite próximo, ao qual as somas parciais deveriam aproximar-se, quanto mais termos são acrescentados." Logo, não é legítimo produzir significado para a série B dentro do **Campo Semântico de Leibniz**. Assim, Euler encontra-se diante de um paradoxo. De um lado ele percebe que a soma de séries divergentes diferem de sua "verdadeira" soma quando analisamos as suas somas parciais. Por outro lado, as séries infinitas surgiram a partir da expansão de uma certa expressão finita, ou seja, a soma da série é a expressão finita que a gerou. E quando utilizamos estas séries, elas não nos conduzem a absurdos. Portanto, para Euler o problema todo encontra-se na concepção da palavra *soma*.

> *Euler: §110. Digo que todas as dificuldades encontra-se no nome* **soma**. *Se, como é comumente o caso, tomamos a* **soma** *de uma série como sendo o cumulado de todos os seus termos, de fato, considerados juntos, então não há dúvida de que apenas as séries infinitas que convergem continuamente se aproximam de algum valor fixo, quanto mais termos de fato adicionarmos, pode ter soma. No entanto, séries divergentes, cujos termos não diminuem, se seus sinais* $+$ *e* $-$ *alternados ou não, realmente não têm somas fixas, supondo que usamos a palavra* **soma** *para o culumado de todos os termos. Considere estes casos que lembramos, com somas erradas, por exemplo a expressão finita* $\dfrac{1}{1-x}$ *para a série infinita* $1+x+x^2+x^3+\ldots$. *A verdade da questão é esta, não que a expressão é a soma da série, mas que a série é derivada da expressão. Nessa situação, o nome* **soma** *poderia ser completamente omitido.*

Segundo Euler, quando consideramos a soma de uma série convergente, estamos utilizando a palavra soma no sentido usual da aritmética, ou seja, estamos adicionando quantitativamente os termos de uma série, e ao adicionarmos continuamente os termos de uma série nos aproximamos de uma valor fixo. Entretanto, no caso das séries divergentes a palavra soma não corresponde ao sentido usual da aritmética, aqui, somar corresponde a encontrar a expressão finita que gerou a série. Assim, nas próprias palavras de Euler, encontramos no artigo *De seriebus divergentibus*:

> *Euler: §12. Portanto, se mudarmos a noção habitual de soma, de tal forma, que dizemos que a soma de qualquer série é a expressão finita, cuja expansão a série em si originou [...] em primeiro lugar a expressão, da qual surge a série convergente, ao mesmo tempo exibe a sua soma, no sentido usual, e se a série for divergente, a questão não pode ser pensada absurda, se encontramos a expressão finita que produz a série expandida de acordo com as regras da análise. Uma vez que é possível no cálculo, substituir a expressão no lugar da sua série, não seremos capazes de duvidar, que elas serão mesmos iguais uma a outra. Isso estabelecido, não*

recuamos da notação de costume, se chamamos a expressão, que é igual a uma certa série, de sua soma, contanto que para séries divergentes não conectamos essa noção com a ideia de uma soma para essa série que quanto mais termos são adicionados, a série deve aproximar-se mais do valor desta soma.

E no livro *Foundations of Differential Calculus*:

> *Euler §111. Esses inconvenientes e as aparentes contradições podem ser evitados se dermos à palavra* **soma** *um significado diferente do usual. Digamos que a* **soma** *de qualquer série infinita é uma expressão finita a partir da qual a série pode ser derivada. Nesse sentido, a soma verdadeira da série infinita* $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ *é* $\frac{1}{1-x}$*, uma vez que esta série é derivada a partir da fração, não importa qual valor seja substituído para* x*. Com esta compreensão, se a série é convergente, a nova definição de soma concorda com a definição usual. Desde que as séries divergentes não têm uma soma, propriamente falando, não há nenhuma dificuldade real que surge desse novo significado. Finalmente, com o auxílio desta definição, podemos manter a utilidade das séries divergentes e preservar sua reputação.*

Pelo que expusemos nos parágrafos acima, constatamos que Euler estabeleceu a sua concepção de **soma**: a **soma** de uma série infinita é a expressão finita que originou a série. De maneira geral, podemos dizer que Euler definiu série infinita intrinsecamente com a sua soma, e é totalmente coerente para ele dizer que séries divergentes têm **soma**, pois elas foram originadas por uma expressão finita. Como consequência desta concepção, podemos dizer que "toda série era concebida tendo sua própria expressão fechada geradora, que era identificada com a série, e a substituição recíproca entre uma série e sua expressão fechada geradora sempre era possível." (FERRARO, 2008, p. 222, tradução nossa).

Queremos chamar atenção aqui que diante da demanda de produzir significado para a soma de séries divergentes, Euler constitui o objeto "soma de série infinita", ou seja, a soma da série é a expressão finita que lhe originou. No caso de séries convergentes, a soma concorda com a definição usual da aritmética, e no caso das séries divergentes, a soma é a expressão finita que produziu a série de acordo com as regras da análise, e neste caso, não conectamos a noção de soma usual. Hoje, na Teoria de Séries, iniciamos esta teoria apresentando a definição de soma de uma série: o número real s é denominado soma da série se existe $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s$.

Mesmo depois de Euler, os matemáticos tiveram muito receio de utilizar as séries divergentes, ou melhor, rejeitaram o trabalho com séries divergentes, podemos corroborar essa afirmação utilizando a citação que J. E. Littlewood escreveu no prefácio do livro *Divergent Series* de Hardy:

> *Abel escreveu em 1828: "Séries Divergentes são invenções do diabo, e é vergonhoso basear sobre elas qualquer demonstração". No período subsequente de revisão crítica elas foram simplesmente rejeitadas. Então veio um tempo onde foi descoberto que algo afinal poderia ser feito com elas.* (Hardy, 1949, tradução nossa).

Fica claro que existiu muita ressalva em trabalhar com séries divergentes, e somente no final do século XIX, as ideias de séries divergentes ganharam aceitação e foram desenvolvidas por matemáticos.

> Sua tarefa [dos matemáticos] está clara agora: não devem eles gastar tempo e energias na busca do fogo fátuo [vaidoso] da verdade que constantemente lhes foge das mãos. Ao contrário, deverão encarar suas criações pela óptica da utilidade e da adaptabilidade às circunstâncias, com o espírito sempre aberto a possíveis métodos que possam levar a esses fins. O fato de certos métodos levarem a contradições, quando usados indiscriminadamente, não significa que devam ser abandonados; tal situação apenas aponta para a necessidade de determinar as áreas nas quais esses métodos se mostram seguros. (STEEN, 1979 apud DOMINGUES, 2002, p. 65).

De fato, as séries divergentes mostraram-se de grande importância na análise no século XX. A Teoria de Séries Divergentes é uma teoria à parte da Teoria de Séries que foi desenvolvida de modo sistemático pela primeira vez por Félix Edouard Justin Émile Borel (1871- 1956) em 1899.

Segundo Borel,

> numa teoria de séries divergentes deve atribuir-se uma soma a séries que a não tinham. Mas, essa teoria deve permitir, por cálculos efetuados sobre tais séries, demonstrar resultados que, enunciados independentemente de toda a introdução de séries divergentes, constituam proposições rigorosas, ligadas às teorias clássicas. Além disso, para que sejam possíveis aplicações, é necessário que as regras do cálculo possam aplicar-se às séries divergentes estudadas. (COSTA, 1991, p. 10).

Deste modo, modificando de modo conveniente a definição de soma de uma série, é possível atribuir somas a certas séries divergentes. A estas últimas chamamos *soma no sentido generalizado*. Existem várias definições de somas, que nos conduzem a somas generalizadas das séries, um exemplo é a *Soma de Cesàro* que apresentamos a seguir.

Mas antes, queremos chamar atenção para o fato de que essa ideia de modificar a definição de soma foi dada por Euler, o que nos permite dizer que Euler foi o precursor dos métodos de somas de séries divergentes e seus métodos foram estudados e aprimorados por matemáticos modernos, como é o caso de Hardy.[11]

4.3.4 Soma de Cesàro

Voltando para a série (4.6) quando $a = 1$, o valor $\frac{1}{2}$ para a soma da série que parecia para alguns críticos um absurdo, não para Euler, ganhou legitimidade com o matemático italiano Ernesto Cesàro (1859 -1906), mesmo antes do século XX. Em 1890, Cesàro publicou o artigo *Sur la multiplication des séries*, onde pela primeira vez uma teoria de séries divergentes foi formulada explicitamente.

Em análise matemática, a *Soma de Cesàro* é uma das mais úteis formas de *somabilidade*[12] e um importante campo de aplicação em Séries de Fourier. A *Soma de Cesàro* atribui valores para algumas séries infinitas que não são convergentes no sentido usual, enquanto coincide com

[11] Para as pessoas interessadas neste tópico, consultar o livro *Divergent Series* de G. H. Hardy, que é uma referência neste assunto.

[12] Seja X um espaço normado e $(x_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de X. Dizemos que $(x_i)_{i\in I}$ é *somável* e tem *soma* $x \in X$ se, para cada $\epsilon > 0$ existir um subconjunto finito de índices $F_\epsilon \subset I$ tal que, para todo subconjunto finito com $F_\epsilon \subset F \subset I$, tem-se $\|x - \sum_{i\in F} x_i\| < \epsilon$.

a soma padrão se elas são convergentes. Se a série converge, no sentido usual, para uma soma α, então a série é também somável por Cesàro e possui valor α. A importância da soma de Cesàro é que uma série divergente pode ter uma soma de Cesàro bem definida.

A Definição 4.3.1 e o Exemplo 4.3.1 a seguir foram retirados de Aragona e Oliveira (2010, p. 33).

Definição 4.3.1. *Dado* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, *seja* s_n *a* n*-ésima soma parcial desta série e*

$$C_n^1 = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é* ***Cesàro-somável*** *(ou (C, 1) somável) se* C_n^1 *converge.*

Se $\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = s$ *então* s *é* ***a soma de Cesàro*** *(ou soma (C, 1)) de* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e escrevemos,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s \quad (C, 1).$$

Exemplo 4.3.1. *Seja* $a_n = x^n$, $|x| = 1$, $x \neq 1$. *Então,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \quad (C, 1) \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} = \frac{1}{2} \quad (C, 1).$$

Utilizando a fórmula para a soma de uma progressão geométrica temos,

$$s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
C_n^1 &= \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x}\right) + \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^2}{1-x}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\right)}{n} \\
&= \frac{n \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} \cdot (1 + x + \ldots + x^{n-1})}{n} \\
&= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{1-x} \cdot \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) \\
&= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{n} \cdot \frac{x(1-x^n)}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

Desta forma, visto que

$$\left|\frac{x(1-x^n)}{(1-x)^2}\right| = \frac{|x| \cdot |1-x^n|}{|1-x|^2} = \frac{|1-x^n|}{|1-x|^2} \leq \frac{|1| + |-x^n|}{|1-x|^2} = \frac{2}{|1-x|^2},$$

concluímos

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{n}\cdot\frac{x(1-x^n)}{(1-x)^2}\right] = \frac{1}{1-x}.$$

Agora, tomando $x=-1$, temos $a_n=(-1)^n$ e $|-1|=1$. Então,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 4.3.2. *Podemos produzir significado para a soma da série* $1-1+1-1+1-\ldots$ *diretamente aplicando a Definição 4.3.1.*

De fato, temos

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1\\
s_2 &= 1-1=0\\
s_3 &= 1-1+1=1\\
s_4 &= 1-1+1-1=0\\
s_5 &= 1-1+1-1+1=1\\
s_6 &= 1-1+1-1+1-1=0\\
\ldots
\end{aligned}$$

ou seja,

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é ímpar}\\ 0, & \text{se } n \text{ é par}\end{cases}$$

de modo que,

$$s_1+s_2+s_3+\ldots+s_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot(n+1), & \text{se } n \text{ é ímpar}\\[2ex] \frac{1}{2}\cdot n, & \text{se } n \text{ é par}\end{cases}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

4.3.5 Artigos 300 e 301

Nos artigos *300* e *301*, Euler utilizará os valores de a entre 0 e 1 na expressão (4.6).

Como vimos no artigo *De seriebus divergentibus*, parágrafo §4, Euler afirmou que não havia dúvidas, para a comunidade matemática de sua época, que a fração $\frac{1}{1+a}$ podia ser expandida em uma série infinita, ou seja,

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - \dots$$

se $(0 <)\ a < 1$. Neste caso, podemos dizer que compartilhamos com Euler a mesma crença-afirmação, mas somente quando analisamos as justificações dadas por Euler pudemos perceber que o seu conhecimento era, de fato, distinto do conhecimento que produzimos hoje para esta mesma crença-afirmação.

> *Euler: 300. Vamos agora tomar* $a = \frac{1}{2}$, *e nossa fração será* $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, *que então deve expressar o valor da série* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ *etc. até o infinito. Aqui, se tomarmos apenas os dois primeiros termos desta série teremos* $\frac{1}{2}$, *que é muito menor por* $\frac{1}{6}$. *Se tomarmos três termos teremos* $\frac{3}{4}$, *que é demasiado por* $\frac{1}{12}$. *Se tomarmos quatro termos temos* $\frac{5}{8}$, *que é muito menor por* $\frac{1}{24}$, *etc.*

Podemos dizer que Euler estava produzindo significado para a soma da série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \dots$ em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído:

- pela divisão longa, ou seja,

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + \dots$$

  tomando $a = \frac{1}{2}$ temos

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

- pelas somas parciais e pela diferença entre a soma da série e as somas parciais,

$$\begin{aligned} s_2 &= 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}, & |\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{6} \\ s_3 &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}, & |\tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{4}| = \tfrac{1}{12} \\ s_4 &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} = \tfrac{5}{8}, & |\tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{8}| = \tfrac{1}{24} \\ & \dots \end{aligned}$$

  como a diferença entre a soma da série e as somas parciais estão diminuindo, pelo *princípio da extensão infinita*, a diferença torna-se-á infinitamente pequena, e portanto igual a zero, de modo que a soma da série será igual a n-ésima soma parcial quando $n = \infty$.

Vamos apresentar a **produção de significado que fazemos hoje** para o artigo *300*.

Considere a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\dots \tag{4.9}$$

Temos que $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é uma sequência decrescente e que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, segue do Teorema A.2.4 (Critério de convergência para série alternada), que a série dada é convergente.

Para descobrirmos o valor da soma da série, basta lembrarmos que a série (4.9) é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = -\frac{1}{2}$ logo, pelo Teorema A.2.1, temos

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\dots = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Gostaríamos de destacar a diferença dos modos de produção de significados para a soma da série que Euler nos apresentou no artigo *300* com a produção de significado que fazemos hoje em teoria de séries.

Podemos dizer que Euler estava operando em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela divisão longa, pelas somas parciais e pela diferença entre a soma da série e as somas parciais, e produziu significado para o artigo *300*, da seguinte maneira:

$$\frac{2}{3} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\dots \tag{4.10}$$

enquanto que hoje ao operarmos em um Campo Semântico cujo núcleo é constituído por sequências, somas parciais, limites e soma da série geométrica infinita, produzimos significado para o artigo *300*, da seguinte forma:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\dots = \frac{2}{3} \tag{4.11}$$

Sabemos hoje que o "igual" é uma relação de equivalência: se $a = b$ então $b = a$. Assim, em um sentido formal, essas duas equações (4.10) e (4.11) são equivalentes. Mas na realidade estamos operando em Campos Semânticos diferentes, logo os modos de produção de significados e os objetos constituídos são distintos. Queremos chamar a atenção para o fato que a mudança de um Campo Semântico a outro pode não ser tão fácil e gerar até mesmo um limite epistemológico.

A produção de significado para o próximo artigo segue a mesma linha de raciocínio do artigo *300*. Assim, iremos apenas enunciá-lo.

> *Euler: 301. Suponhamos novamente* $a = \frac{1}{3}$ *então nossa fração será* $\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$, *que deve ser igual a esta série continua* $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243}+\frac{1}{729}$ *etc. até o infinito. Agora, considerando-se apenas dois termos, temos* $\frac{2}{3}$ *que é muito menor por* $\frac{1}{12}$; *três termos produzem* $\frac{7}{9}$, *que é demasiado por* $\frac{1}{36}$; *quatro termos dá* $\frac{20}{27}$, *que é muito menor por* $\frac{1}{108}$, *e assim por diante.*

4.4 A fração $\frac{1}{a+1}$

No artigo *302*, Euler apresentará as séries que são geradas quando dividimos 1 por $a+1$, e irá atribuir os valores 1 e 2 para a.

Euler: 302. A fração $\dfrac{1}{1+a}$ *também pode ser resolvida em uma série infinita por outro caminho, ou seja, pela divisão de* 1 *por* $a+1$ [13]*, como segue:*[14]

$$
\begin{array}{llllllll}
a+1) & 1 & & & & & & \left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{a^4}+\dfrac{1}{a^5}\ etc.\right. \\
& \underline{1+\frac{1}{a}} & & & & & & \\
& \quad -\frac{1}{a} & & & & & & \\
& \quad \underline{-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}} & & & & & & \\
& \qquad\quad +\frac{1}{a^2} & & & & & & \\
& \qquad\quad \underline{+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}} & & & & & & \\
& \qquad\qquad\quad -\frac{1}{a^3} & & & & & & \\
& \qquad\qquad\quad \underline{-\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}} & & & & & & \\
& \qquad\qquad\qquad\quad +\frac{1}{a^4} & & & & & & \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \underline{+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}} & & & & & & \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -\frac{1}{a^5} \quad etc. & & & & & &
\end{array}
$$

Consequentemente, nossa fração $\dfrac{1}{a+1}$*, é igual a série infinita*

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}\ etc.$$

Vamos tomar $a=1$ *, e teremos a série*

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1\ etc.,$$

como antes; e se supomos $a=2$*, teremos a série*

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\ etc.$$

Podemos produzir significado para o artigo *302*, nos termos de Euler, como:

[13] Esta divisão é representada, no Brasil, pelo diagrama:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & \quad a+1 \\ \cline{2-2}
1+\frac{1}{a} & \frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5} \\ \cline{1-1}
\quad -\frac{1}{a} & \\
\quad \underline{-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}} & \\
\qquad\quad +\frac{1}{a^2} & \\
\qquad\quad \underline{+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}} & \\
\qquad\qquad\quad -\frac{1}{a^3} & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad +\frac{1}{a^4} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -\frac{1}{a^5} &
\end{array}
$$

[14] Na tradução inglesa a divisão "termina" no resto $-\frac{1}{a^3}$.

$$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6} + \dots \tag{4.12}$$

ou seja, o quociente $\dfrac{1}{a+1}$ pode ser expandido em uma série infinita $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}$ e a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}$ é a expressão finita, neste caso $\dfrac{1}{a+1}$, que a gerou.

Também podemos dizer que Euler produziu significado para a soma da série

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6} + \dots$$

em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela divisão.

Vamos apresentar a **produção de significado que fazemos hoje** para a série do artigo *302*, temos que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6} + \dots \tag{4.13}$$

é uma série alternada.

Para $a = 1$, a questão já foi amplamente discutida na Seção 4.3. Agora, para $a = 2$ temos,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \dots \tag{4.14}$$

Como a sequência $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ é decrescente e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, segue do Teorema A.2.4 (Critério de convergência para série alternada), que a série (4.14) é convergente.

Agora, vamos encontrar o valor para o qual a soma da série está convergindo.

Sabemos que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \dots$$

é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = -\frac{1}{2}$, assim,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Segue da Subseção A.2.2 (Propriedades das séries) do item 1 que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = (-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

logo

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{2}{3}.$$

Assim,

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\ldots = -\frac{2}{3}.$$

Segue da Subseção A.2.2 do item 3 que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\ldots &= -\frac{2}{3}+1\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\ldots &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Dessa maneira, produzimos significado para a soma da série $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\ldots$ em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por sequências, limites, teorema de convergência para séries alternadas, séries geométricas e propriedades das séries convergentes. Enquanto que Euler produziu significado para esta mesma série no Campo Semântico da Divisão. Observamos que embora operamos em Campos Semânticos diferentes, e portanto, produzimos conhecimentos distintos, produzimos o mesmo resultado para a soma da série $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\ldots$.

Queremos chamar a atenção para o fato que neste artigo Euler utilizou apenas a divisão longa para calcular a soma da série, podemos dizer que ele utilizou o seu famoso princípio *"summa cujusque seriei est valor expressionis illus finitae, ex cujus evolutione illa series oritur"* (HARDY, 1949, p. 8) ["a soma da série é o valor da expressão finita, da qual o desenvolvimento desta série originou"]. E portanto, não viu mais necessidade de acrescentar ao núcleo outros objetos tais como as somas parciais e a diferença entre a soma da série e as somas parciais.

Também queremos enfatizar que Euler iniciou o artigo *302*, afirmando que a fração $\dfrac{1}{1+a}$ pode ser expandida em uma série infinita por um outro caminho, ou seja, por meio da divisão de 1 por $a+1$. Dito de outro modo,

$$\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}+\ldots$$

isto é, o quociente $\dfrac{1}{a+1}$ pode ser expandido em uma série infinita $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}$ e a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}$ é o valor da expressão finita, $\dfrac{1}{a+1}$, que a gerou.

Vimos no artigo *298*, um outro modo de produzir significado para a fração $\dfrac{1}{1+a}$ em uma série infinita, por meio da divisão de 1 por $1+a$. Dito de outro modo,

$$\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7+\ldots$$

ou seja, o quociente $\dfrac{1}{1+a}$ pode ser expandido em uma série infinita $\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i a^i$ e a soma da série $\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i a^i$ é o valor da expressão finita, $\dfrac{1}{1+a}$, que a gerou.

Podemos dizer que para Euler era plausível o quociente $\dfrac{1}{1+a}$ ser expandido na série infinita $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n+1}$ e também na série $\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i a^i$. De fato, aplicando o algoritmo da divisão longa obtemos ambas as séries a partir do quociente $\dfrac{1}{1+a}$, e não há contradição nestes valores, pois a operação de divisão que sustenta este argumento se apoia no *princípio da extensão infinita*, isto é, a passagem dos algoritmos finitos para os infinitos era sempre verdadeira. Além disso, no primeiro artigo deste capítulo Euler nos diz: "não vamos falhar deste modo para encontrar o verdadeiro quociente, embora sob diferentes formas."

Por outro lado, temos que a soma de duas séries distintas resultam o mesmo valor, mas isto está de acordo com a definição de *soma* de uma série dada por Euler: "a soma da série é a expressão finita que lhe originou."

De fato, na Subseção 4.3, Euler representa a expansão da fração $\dfrac{1}{1+a}$ em série infinita da seguinte forma:

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7 + \dots$$

Podemos escrever, em notação atual, o lado direito desta equação como

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-a)^n = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7 + \dots \tag{4.15}$$

Agora, se $|-a| < 1$ temos que a série (4.15) é uma série geométrica convergente e sua soma será

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-a)^n = \frac{1}{1+a}.$$

Também podemos expandir a fração $\dfrac{1}{a+1}$ em série infinita e temos,

$$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6} + \dots$$

Agora, considere a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{a}\right)^n = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^5} + \frac{1}{a^6} - \dots \tag{4.16}$$

Se $\left|-\frac{1}{a}\right| < 1$ temos que a série (4.16) é uma série geométrica convergente e sua soma será

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{a}} = \frac{a}{a+1}.$$

Utilizando os itens 1 e 3 da Subseção A.2.2 (Propriedades das séries), obtemos que

$$\begin{aligned}
(-1)\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{a}\right)^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)\left(-\frac{1}{a}\right)^n \\
-\frac{a}{a+1} &= -1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6} + \dots \\
1 - \frac{a}{a+1} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6} + \dots
\end{aligned}$$

Portanto, se $\left|-\frac{1}{a}\right| < 1$ obtemos

$$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6} + \dots$$

Sendo assim, as séries (4.13) e (4.15) são diferentes, mas de acordo com os valores de a, elas resultam a mesma soma. Parece que para Euler isto estava bastante claro e não contrariava o seu famoso princípio. Além disso, obter duas séries diferentes para a mesma expressão analítica era um paradigma mesmo antes da época de Euler. De fato, Newton encontrou duas séries diferentes para o desenvolvimento da fração $\frac{1}{1+x^2}$. Na verdade, ele estava interessado no cálculo da área sob esta curva e o eixo das abcissas. Portanto, ele dividiu o numerador 1 pelo denominador $1+x^2$, utilizando o algoritmo usual da divisão e o *princípio da extensão infinita*, e obteve

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

Integrando termo a termo o lado direito desta igualdade, ele expressou a área procurada pela série

$$y = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \dots \tag{4.17}$$

Ao mesmo tempo, Newton também dividiu o numerador 1 pelo denominador x^2+1 e obteve

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \dots$$

e a área procurada é dada por

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots \tag{4.18}$$

Complementando, Newton disse que a primeira expansão (4.17) era para ser utilizada quando x fosse pequeno o suficiente, enquanto a última (4.18) deveria ser utilizada quando x fosse grande o suficiente. A diferença entre os desenvolvimentos de $\dfrac{1}{1+x^2}$ e $\dfrac{1}{x^2+1}$ "não era vista como um defeito, mas como uma ferramenta útil para facilitar o cálculo de áreas." (FERRARO, 2008, p. 70, tradução nossa).

4.5 A fração $\frac{c}{a+b}$

No artigo *303*, Euler apresentará uma generalização dos artigos anteriores, de modo que ele irá desenvolver a fração $\dfrac{c}{a+b}$ em uma série infinita.

> *Euler: 303. Do mesmo modo, resolvendo a fração geral* $\dfrac{c}{a+b}$ [15] *em série infinita, teremos,*
>
> $$\begin{array}{lll} a+b) & c & \left(\dfrac{c}{a}-\dfrac{bc}{a^2}+\dfrac{b^2c}{a^3}-\dfrac{b^3c}{a^4}\ \textit{etc.}\right. \\ & \underline{c+\frac{bc}{a}} & \\ & \quad -\frac{bc}{a} & \\ & \quad \underline{-\frac{bc}{a}-\frac{b^2c}{a^2}} & \\ & \qquad\quad +\frac{b^2c}{a^2} & \\ & \qquad\quad \underline{+\frac{b^2c}{a^2}+\frac{b^3c}{a^3}} & \\ & \qquad\qquad\qquad -\frac{b^3c}{a^3} & \end{array}$$
>
> *De onde, podemos comparar* $\dfrac{c}{a+b}$ *com a série*
>
> $$\frac{c}{a}-\frac{bc}{a^2}+\frac{b^2c}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}\ \textit{etc.}$$
>
> *até o infinito. Sejam* $a=2$*,* $b=4$*,* $c=3$*, teremos*
>
> $$\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2+4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-3+6-12\ \textit{etc.}$$
>
> *Se* $a=10$*,* $b=1$*,* $c=11$*, teremos*
>
> $$\frac{c}{a+b}=\frac{11}{10+1}=1=\frac{11}{10}-\frac{11}{100}+\frac{11}{1000}-\frac{11}{10000}\ \textit{etc.}$$

[15] Esta divisão é representada, no Brasil, pelo diagrama:

$$\begin{array}{l|l} c & \quad a+b \\ \cline{2-2} \underline{\frac{c}{a}+\frac{bc}{a}} & \frac{c}{a}-\frac{bc}{a^2}+\frac{b^2c}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4} \\ \quad -\frac{bc}{a} & \\ \quad \underline{-\frac{bc}{a}-\frac{b^2c}{a^2}} & \\ \qquad\quad +\frac{b^2c}{a^2} & \\ \qquad\quad \underline{+\frac{b^2c}{a^2}+\frac{b^3c}{a^3}} & \\ \qquad\qquad\qquad -\frac{b^3c}{a^3} & \end{array}$$

Aqui, se considerarmos apenas um termo da série, temos $\frac{11}{10}$*, que é excedido por* $\frac{1}{10}$*; se tomarmos dois termos, temos* $\frac{99}{100}$*, que é menor por* $\frac{1}{100}$*; se tomarmos três termos, temos* $\frac{1001}{1000}$*; que é excedido por* $\frac{1}{1000}$*, etc.*

Podemos produzir significado para o artigo *303*, nos termos de Euler, como:

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5} - \frac{b^5c}{a^6} + \dots \tag{4.19}$$

onde essa igualdade foi gerada pela utilização do algoritmo usual da divisão, e pelo *princípio da extensão infinita*. Isto posto, podemos afirmar que o quociente $\dfrac{c}{a+b}$ pode ser expandido em uma série $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)^i$ e a soma da série $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)^i$ é a expressão finita, neste caso $\dfrac{c}{a+b}$, que a gerou. E pelo *princípio da generalidade da álgebra*, a expressão (4.19) é válida para quaisquer valores de a, b e c.

Vamos **produzir significado para o artigo *303*, utilizando a Teoria de Séries de hoje**.

Considere a série

$$\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \dots \tag{4.20}$$

Podemos representá-la como

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)^n \quad = \quad \frac{c}{a}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^n}_{*} \tag{4.21}$$

Vamos aplicar o Teorema A.2.6 (Critério da razão), na série (*)

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-\frac{b}{a})^{n+1}}{(-\frac{b}{a})^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|-\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{b}{a}\right|$$

Temos que

- Se $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$, a série (*) será convergente.
- Se $\left|\frac{b}{a}\right| > 1$, a série (*) será divergente.
- Se $\left|\frac{b}{a}\right| = 1$, o critério nada revela.

Vamos analisar o caso $\left|\frac{b}{a}\right| = 1$, isto é, $|b| = |a|$.

Para $b = a$ temos $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{a}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ é uma série alternada divergente.

Para $b=-a$ temos $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{a}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(1)^n$ é uma série divergente.

Portanto, podemos concluir que a série (*) é convergente para $\left|\dfrac{b}{a}\right|<1$.

Em vista disso, se $\left|-\dfrac{b}{a}\right|<1$ a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $-\dfrac{b}{a}$, e sabemos que sua soma é

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)^n=\frac{\frac{c}{a}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{c}{a+b}.$$

Consequentemente, se $\left|-\dfrac{b}{a}\right|<1$ a soma da série do artigo *303* terá o mesmo valor da série (4.20). E por este motivo, muitos historiadores, ao analisarem os textos produzidos por Euler acreditam que os objetos são os mesmos. Contudo, no primeiro exemplo fornecido por Euler já encontramos uma falácia para essa crença. Vejamos.

Substituindo $a=2$, $b=4$, $c=3$ em (4.19), obtemos

$$\frac{3}{2+4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-3+6-12+24-48+\dots$$

Em outras palavras, a soma da série $\dfrac{3}{2}-3+6-12+24-48+\dots$ é $\dfrac{1}{2}$. E isto está de acordo com a produção de significado feita por Euler anteriormente. De fato, consideremos as somas parciais e as diferenças entre as somas parciais e a soma da série,

$$\begin{array}{rcll} s_1 &=& \frac{3}{2}, & |\frac{3}{2}-\frac{1}{2}|=1\\ s_2 &=& \frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}, & |-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}|=2\\ s_3 &=& \frac{3}{2}-3+6=\frac{9}{2}, & |\frac{9}{2}-\frac{1}{2}|=4\\ s_4 &=& \frac{3}{2}-3+6-12=-\frac{15}{2}, & |-\frac{15}{2}-\frac{1}{2}|=8\\ && \dots & \end{array}$$

Observemos que quanto mais termos somamos, mais longe o resultado dessas somas parciais ficam do valor $\frac{1}{2}$ e as diferenças entre as somas parciais e a soma da série ficam cada vez maiores, por isto, utilizando os pressupostos de Euler, a série dada é divergente. Mas este fato não implica que a série dada não tenha soma, pelo contrário, sabemos que a *soma* de uma série é o valor da expressão finita que gerou a série, portanto, o valor da *soma* da série divergente $\dfrac{3}{2}-3+6-12+24-48+\dots$ é $\dfrac{1}{2}$.

Novamente, vamos **produzir significado para o artigo *303*, utilizando a Teoria de Séries de hoje**. Vamos substituir valores para a, b e c em (4.20).

Sejam $a=2$, $b=4$, $c=3$, temos

$$\frac{3}{2}-3+6-12+24-48+\dots$$

Observe que $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{4}{2}\right| = 2 > 1$, pelo critério da razão a série é divergente. Portanto, não atribuímos soma a essa série.

Consequentemente, fica claro que o objeto *soma da série* $\frac{3}{2} - 3 + 6 - 12 + 24 - 48 + \ldots$ que Euler constituiu é diferente do objeto *soma da série* $\frac{3}{2} - 3 + 6 - 12 + 24 - 48 + \ldots$ que constituímos hoje na teoria de séries.

No segundo exemplo do artigo *303*, podemos dizer que Euler produziu significado para a soma da série $\frac{11}{10} - \frac{11}{100} + \frac{11}{1000} - \frac{11}{10000} + \ldots$ em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído:

- pela divisão longa, ou seja,

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5} - \frac{b^5c}{a^6} + \ldots$$

  tomando $a = 10$, $b = 1$ e $c = 11$ temos

$$\frac{11}{10+1} = 1 = \frac{11}{10} - \frac{11}{100} + \frac{11}{1000} - \frac{11}{10000} + \ldots$$

- pelas somas parciais e pelas diferenças entre a soma da série e as somas parciais,

$$\begin{array}{lcll} s_1 & = & \frac{11}{10}, & |1 - \frac{11}{10}| = \frac{1}{10} \\ s_2 & = & \frac{11}{10} - \frac{11}{100} = \frac{99}{100}, & |1 - \frac{99}{100}| = \frac{1}{100} \\ s_3 & = & \frac{11}{10} - \frac{11}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{1}{1000}, & |1 - \frac{1}{1000}| = \frac{1}{1000} \\ & & \ldots & \end{array}$$

  como as diferenças entre a soma da série e as somas parciais estão diminuindo, pelo *princípio da extensão infinita*, a diferença torna-se-á infinitamente pequena, e portanto igual a zero, de modo que a soma da série será igual a n-ésima soma parcial quando $n = \infty$.

Vamos apresentar a **produção de significado que fazemos hoje** para o segundo exemplo do artigo *303*. Se $a = 10$, $b = 1$ e $c = 11$, temos $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{1}{10}\right| < 1$, pelo critério da razão a série é convergente.

Sendo assim, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{11}{10}\left(\frac{-1}{10}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $-\dfrac{1}{10}$, e segue do Teorema A.2.1 que sua soma é

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{11}{10}\left(\frac{-1}{10}\right)^n = \frac{\frac{11}{10}}{1 + \frac{1}{10}} = \frac{11}{10} \cdot \frac{10}{11} = 1.$$

Podemos dizer que produzimos significado (hoje) para a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{11}{10}\left(\frac{-1}{10}\right)^n$ em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pelo critério da razão, que envolve sequências e limites e pela soma de séries geométricas infinitas.

Observe que, embora os objetos *soma de séries* sejam diferentes, eles foram constituídos a partir de uma mesma crença-afirmação, pois se $\left|-\frac{b}{a}\right| < 1$ temos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)^n = \frac{c}{a+b}$ e, neste caso, as produções de significados para a soma da série produzidas em Campos Semânticos diferentes resultam o mesmo valor. Entretanto, de acordo com o nosso referencial teórico, os conhecimentos produzidos são diferentes, uma vez que as justificações para a *soma* desta série percorrem caminhos distintos, ou seja, por um lado a produção de significado envolveu divisão longa, somas parciais e as diferenças entre a soma da série e as somas parciais e por outro lado a produção de significado envolveu sequências, limites, critério da razão e a soma de séries geométricas infinitas.

4.6 A fração $\frac{1}{1-a+a^2}$

Vamos apresentar o artigo *304* e depois faremos uma produção de significado para ele.

Euler: 304. Quando existem mais do que dois termos no divisor, também podemos continuar a divisão até o infinito do mesmo modo. Portanto, se a fração $\frac{1}{1-a+a^2}$ *foi proposta, a série infinita, a qual ela é igual, será encontrada como segue:*[16]

$$
\begin{array}{lllllll}
1-a+a^2) & 1 & & & & & (1+a-a^3-a^4+a^6+a^7\ etc. \\
 & \underline{1-a+a^2} & & & & & \\
 & \quad +a-a^2 & & & & & \\
 & \quad \underline{+a-a^2+a^3} & & & & & \\
 & & -a^3 & & & & \\
 & & \underline{-a^3+a^4-a^5} & & & & \\
 & & \quad -a^4+a^5 & & & & \\
 & & \quad \underline{-a^4+a^5-a^6} & & & & \\
 & & & +a^6 & & & \\
 & & & \underline{+a^6-a^7+a^8} & & & \\
 & & & \quad +a^7-a^8 & & & \\
 & & & \quad \underline{+a^7-a^8+a^9} & & & \\
 & & & \qquad\qquad -a^9 & etc. & &
\end{array}
$$

Portanto, temos a equação

$$\frac{1}{1-a+a^2} = 1+a-a^3-a^4+a^6+a^7-a^9-a^{10}\ etc.$$

[16] Esta divisão é representada, no Brasil, pelo diagrama:

$$
\begin{array}{ll}
1 & \underline{|\ 1-a+a^2\qquad\qquad} \\
\underline{1-a+a^2} & 1+a-a^3-a^4+a^6+a^7 \\
\quad a-a^2 & \\
\quad \underline{a-a^2+a^3} & \\
\qquad -a^3 & \\
\qquad \underline{-a^3+a^4-a^5} & \\
\qquad\quad -a^4+a^5 & \\
\qquad\quad \underline{-a^4+a^5-a^6} & \\
\qquad\qquad +a^6 & \\
\qquad\qquad \underline{+a^6-a^7+a^8} & \\
\qquad\qquad\quad a^7-a^8 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{a^7-a^8+a^9} & \\
\qquad\qquad\qquad -a^9 \quad \text{etc.} &
\end{array}
$$

onde, se fizermos $a = 1$, temos

$$1 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 \, etc.$$

cuja série contém duas vezes a série encontrada anteriormente $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \, etc.$ Agora, como encontramos esta sendo $\frac{1}{2}$, não é extraordinário que devemos encontrar $\frac{2}{2}$ ou 1, para o valor do qual acabamos de determinar.

Fazendo $a = \frac{1}{2}$, teremos a equação

$$\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512} \, etc.$$

Se $a = \frac{1}{3}$, teremos a equação

$$\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{729} \, etc.$$

e se tomarmos os quatro primeiros termos desta série, temos $\frac{104}{81}$, que é apenas $\frac{1}{567}$ menor do que $\frac{9}{7}$. Suponhamos novamente $a = \frac{2}{3}$, teremos

$$\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \frac{64}{729} \, etc.$$

portanto, esta série é igual a anterior; e subtraindo uma da outra, obtemos $0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729} \, etc.$, esses quatro termos são somados $-\frac{2}{81}$.[17]

Podemos produzir significado para o artigo *304*, utilizando os pressupostos de Euler, em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pelo princípio: "a soma da série é a expressão finita que lhe originou". Portanto,

$$\frac{1}{1 - a + a^2} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10} + a^{12} + a^{13} - \ldots \qquad (4.22)$$

e pelo *princípio da generalidade da álgebra*, a expressão (4.22) é válida para quaisquer valores de a.

Em vista disso, Euler substituiu valores para a em (4.22).

Primeiro, ele tomou $a = 1$, e obteve

$$1 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - \ldots$$

Depois observou que esta série era duas vezes a série encontrada no artigo *299*. De fato,

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

multiplicando por dois essa expressão, e escrevendo-a de uma forma conveniente, temos

[17] A tradução inglesa omite este final.

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad = \quad \underbrace{1+1}_{+2} \underbrace{-1-1}_{-2} \underbrace{+1+1}_{+2} \underbrace{-1-1}_{-2} \underbrace{+1+1}_{+2} - \ldots$$

que pela forma que se apresenta é "exatamente" igual a soma dada por Euler, quando a é igual a 1 na equação (4.22).

Observamos que para Euler, o resultado desta soma ser igual a 1 era natural, pois esta série surgiu da divisão, e assim podemos usar sua fórmula finita. Queremos destacar também o fato que esta série é uma série divergente, e Euler operava com as séries divergentes como se fossem convergentes, ou seja, ele multiplicou por 2 a série $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ para obter a série dada, e nos diz:"não é extraordinário que devemos encontrar $\frac{2}{2}$ ou 1, para o valor do qual acabamos de determinar".

Veja bem! Sim é extraordinário observar a desenvoltura de Euler ao operar as séries divergentes, e como vimos anteriormente neste trabalho, esta teoria foi desenvolvida posteriormente e utilizou muitas das ideias desenvolvidas por Euler.

Queremos abrir um parentes aqui a respeito do uso das séries por Euler. Podemos dizer que as séries eram consideradas por ele como sendo polinômios cujo o grau poderia ser tomado infinito, ou seja, Euler manipulava as séries infinitas de maneira formal.

De fato, as propriedades ou regras que valiam para séries finitas eram estendidas para séries infinitas, pelo *princípio da extensão infinita*. Assim, as regras já conhecidas para séries finitas, tais como

1. Se $\sum_{i=0}^{n} a_i = s$ então $\sum_{i=0}^{n} k a_i = ks$, onde k é um número qualquer.
2. Se $\sum_{i=0}^{n} a_i = s$ e $\sum_{i=0}^{n} b_i = t$ então $\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) = s + t$.
3. Se $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s$ então $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s - a_0$ e inversamente.

Parecia natural estender essas regras para séries infinitas também. Assim sendo, era válido também

1. Se $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = s$ então $\sum_{i=0}^{+\infty} k a_i = ks$, onde k é um número qualquer.
2. Se $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = s$ e $\sum_{i=0}^{+\infty} b_i = t$ então $\sum_{i=0}^{+\infty} (a_i + b_i) = s + t$.
3. Se $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = s$ então $a_1 + a_2 + \ldots = s - a_0$ e inversamente.

Ferraro (2008), chama a atenção para o fato

> *que os procedimentos formais não foram livremente inventados ou criados: na teoria de séries, os matemáticos só consideravam as regras da extensão infinita derivadas das propriedades que eram válidas para as expressões finitas e um número fixo de passos. (FERRARO, 2008, p. 118, tradução nossa).*

Atentamos que Euler utilizou o item 1 das propriedades das séries infinitas para uma série divergente. E este fato para ele era totalmente natural, uma vez que as séries divergentes eram séries infinitas que também possuíam *somas*, logo as propriedades também eram válidas para elas. Também queremos destacar que na Teoria de Séries Divergentes, as definições de *somas* buscam incorporar as três propriedades listas acima de séries convergentes. Na verdade, a Teoria de Séries Divergentes amplia a definição clássica de séries de Augustin Louis Cauchy[18].

Continuando a produção de significado para o artigo *304*, Euler toma $a = \frac{1}{2}$ em (4.22), e obtém

$$\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512} - \dots$$

e não faz nenhum comentário a respeito da soma desta série, portanto, podemos dizer que para ele não havia necessidade de acrescentar nenhum novo objeto a sua produção de significados para confirmar este resultado.

Em seguida ele toma $a = \frac{1}{3}$ em (4.22), e obtém a expressão

$$\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \dots \tag{4.23}$$

e depois calcula a soma parcial dos quatro primeiros termos desta série. Podemos dizer que Euler iniciou a sua produção de significado para a soma desta série em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pelo seu princípio: "a soma da série é a expressão finita que lhe originou" e depois acrescentou ao núcleo as somas parciais e a diferença entre a soma da série e as somas parciais.

De fato, consideremos as somas parciais e as diferenças entre as somas parciais e a soma da série,

$$\begin{array}{lcll}
s_1 & = & 1, & |1 - \frac{9}{7}| = \frac{2}{7} \\
s_2 & = & 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, & |\frac{4}{3} - \frac{9}{7}| = \frac{1}{21} \\
s_3 & = & 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} = \frac{35}{27}, & |\frac{35}{27} - \frac{9}{7}| = \frac{2}{189} \\
s_4 & = & 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} = \frac{104}{81}, & |\frac{104}{81} - \frac{9}{7}| = \frac{1}{567} \\
 & & \dots &
\end{array}$$

Euler observa que a soma parcial dos quatro primeiros termos desta série resulta $\frac{104}{81}$, que é apenas $\frac{1}{567}$ menor do que a soma da série, cujo valor é de $\frac{9}{7}$. Portanto, como a diferença entre a soma da série e as somas parciais estão diminuindo, pelo *princípio da extensão infinita*, a diferença torna-se-á infinitamente pequena, e portanto igual a zero, de modo que a soma da série será igual a n-ésima soma parcial quando $n = \infty$.

E por último, Euler toma $a = \frac{2}{3}$ em (4.22), e obtém

$$\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \frac{64}{729} + \dots \tag{4.24}$$

[18] < `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cauchy.html` >. Acesso em: 6 jul. 2017.

Ele observa que para $a = \frac{1}{3}$ e $a = \frac{2}{3}$ a soma das séries são iguais, e subtrai a série (4.23) da série (4.24), ou seja, ele utiliza os itens 1 e 2 das propriedades das séries infinitas. E conclui

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729} - \ldots$$

Para esta nova série, Euler calcula a soma parcial dos quatro primeiros termos. De fato, consideremos as somas parciais e as diferenças entre as somas parciais e a soma da série,

$$\begin{array}{lcll} s_1 & = & \frac{1}{3}, & |\frac{1}{3} - 0| = \frac{1}{3} \\ s_2 & = & \frac{1}{3} - \frac{7}{27} = \frac{2}{27}, & |\frac{2}{27} - 0| = \frac{2}{27} \\ s_3 & = & \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} = -\frac{1}{9}, & |-\frac{1}{9} - 0| = \frac{1}{9} \\ s_4 & = & \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729} = -\frac{2}{81}, & |-\frac{2}{81} - 0| = \frac{2}{81} \\ & & \ldots & \end{array}$$

Euler observa que a soma parcial dos quatro primeiros termos desta série resulta $-\frac{2}{81}$, que é apenas $\frac{2}{81}$ menor do que a soma da série, cujo valor é de 0. Portanto, como a diferença entre a soma da série e as somas parciais estão diminuindo, pelo *princípio da extensão infinita*, a diferença torna-se-á infinitamente pequena, e portanto igual a zero, de modo que a soma da série será igual a n-ésima soma parcial quando $n = \infty$.

Observamos que Euler apenas calculou a soma dos quatro primeiros termos, como se fosse o bastante para convencer o leitor que as somas parciais estavam diminuindo e portanto se aproximando de zero, logo não havia dúvidas que o valor da soma da série seria zero.

Vamos apresentar a **produção de significado que fazemos hoje** para o artigo *304*. Primeiro, vamos analisar a série gerada pela divisão de 1 por $1 - a + a^2$.

$$\frac{1}{1 - a + a^2} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10} + a^{12} + a^{13} - \ldots \tag{4.25}$$

Assim, estamos interessados no lado direito da equação (4.25).

$$\begin{aligned} & 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10} + a^{12} + a^{13} - \ldots = \\ & = 1 + a - a^3(1 + a) + a^6(1 + a) - a^9(1 + a) + a^{12}(1 + a) - \ldots \\ & = (1 + a)(1 - a^3 + a^6 - a^9 + a^{12} - \ldots) \\ & = (1 + a)\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}(-a^3)^k}_{*} \end{aligned} \tag{4.26}$$

Vamos aplicar o Teorema A.2.6 (Critério da razão), na série (*)

$$\lim_{n \to +\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to +\infty}\left|\frac{(-a^3)^{n+1}}{(-a^3)^n}\right| = \lim_{n \to +\infty}|-a^3| = |a^3|$$

Temos que

- Se $|a^3| < 1$, a série (*) será convergente.
- Se $|a^3| > 1$, a série (*) será divergente.
- Se $|a^3| = 1$, o critério nada revela.

Vamos analisar o caso $|a^3| = 1$.

Se $a = 1$ temos $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ é uma série alternada divergente.

Para $a = -1$ temos $\sum_{n=0}^{+\infty}(1)^n$ é uma série divergente.

Portanto, podemos concluir que a série (*) será convergente se $|a^3| < 1$, e neste caso temos

$$(1+a)\sum_{k=0}^{+\infty}(-a^3)^k = (1+a)\frac{1}{1-(-a^3)} = \frac{1+a}{1+a^3}. \tag{4.27}$$

Fatorando $1+a^3$, obtemos $1+a^3 = (1+a)(a-a+a^2)$, e substituindo esse valor na equação (4.27), temos

$$\begin{aligned}(1+a)\sum_{k=0}^{+\infty}(-a^3)^k &= \frac{1+a}{1+a^3} = \frac{1+a}{(1+a)(a-a+a^2)} \\ &= \frac{1}{a-a+a^2}, \quad |-a^3| < 1. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Portanto, a equação (4.25) coincide com a definição de hoje se somente se $|-a^3| < 1$.

Assim, vamos continuar a produção de significado, que fazemos hoje, para o artigo *304*.

No caso em que $a = 1$ sabemos que a série é uma série alternada divergente, pois foi discutido durante a aplicação do critério da razão. E na Teoria de Séries não atribuímos somas a séries divergentes.

Nos casos em que os valores de a são $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, temos que estes valores satisfazem a condição $|a^3| < 1$. Desse modo, a série $(1+a)\sum_{k=0}^{+\infty}(-a^3)^k$ é convergente e converge para a soma $\frac{1}{1-a+a^2}$. Logo, obtemos os mesmos valores para a soma que Euler obteve no artigo *304*.

4.7 O artigo 305

Após todas essas explanações Euler finaliza o Capítulo V:

> *Euler: 305. O método, que explicamos aqui, serve para determinar, em geral, todas as frações em séries infinitas; que é geralmente encontrada como sendo da maior utilidade. Também é extraordinário que uma série infinita, embora nunca cesse, pode ter um valor determinado. Devemos também observar que, a partir deste ramo da matemática, invenções da maior importância foram derivadas; no qual a explicação do assunto merece ser estudada com a maior atenção.*[19]

Note que neste artigo Euler novamente chama a atenção para o fato que as séries infinitas são geradas a partir das frações, ou seja, as séries infinitas são polinômios infinitos que surgem da divisão elementar. Também podemos afirmar que para Euler todas as frações podem ser expandidas em séries infinitas e esse fato nessa época era extraordinário, pois permitia transformar frações algébricas complicadas em séries infinitas, e assim diferenciar e integrar termo a termo, sem dúvida as séries infinitas foram uma ferramenta essencial para o desenvolvimento da matemática.

Ao longo deste capítulo apresentamos uma produção de significado para as séries infinitas que surgiram da divisão da expressão finita que as originou e ao mesmo tempo produzimos significado para os conceitos sobre séries infinitas da Teoria de séries de hoje. Segundo Kline (1972, p. 453), "o espírito dos métodos de Euler deve ser claro. Ele é o maior manipulador [de séries] e apontou o caminho para milhares de resultados que mais tarde foram estabelecidos rigorosamente." Nossa intenção neste capítulo foi justamente sugerir que embora muitos dos resultados apresentados por Euler assemelham-se aos nossos (hoje), alguns dos *objetos* que chamamos hoje de séries, somas, convergência e divergência são totalmente diferentes.

Schoenfed e Arcavi (1988) apresentam as dificuldades que são geradas quando perguntamos qual o significado de variável, e segundo estes autores a "dificuldade pode ser que para entendermos o que é algo, você precisa entender como este algo é usado (como ele funciona)" (SCHOENFED; ARCAVI, 1988, p. 425). Da mesma forma, percebemos que Euler estava preocupado em entender o que é série, como elas funcionam e a partir daí trabalhar com elas. A preocupação nunca foi definir série, convergência e divergência mas de que forma podemos usá-las como ferramenta para, por exemplo, diferenciar e integrar uma "função".

Deste modo, termino a produção de significado para o Capítulo V, citando a epígrafe de Laplace[20] que inicia o capítulo 20 sobre Séries Infinitas da obra de Kline (1972, p. 436):

> *Leia Euler, leia Euler, ele é o mestre de todos nós.*

---

[19] Ao final deste capítulo, a versão de 1911 chama atenção novamente para a nota de rodapé da página 93.

[20] Segundo Ed Sandifer (2010) esta citação duvidosamente foi atribuída a Laplace por Guglielmo Libri.

Capítulo 5

O Teorema Binomial

Se fui capaz de ver mais longe, é porque me apoiei em ombros de gigantes.
Isaac Newton

Neste presente capítulo apresentaremos *uma* possível produção de significado para o Teorema Binomial encontrado na obra *Elements of Algebra*. Inicialmente analisaremos e produziremos significados para os Capítulos X e XI, da Parte I, Seção II, onde Euler nos apresenta a construção da fórmula do Teorema Binomial. Em seguida analisaremos e produziremos significados para os Capítulos XII e XIII, da Parte I, Seção II, onde Euler utiliza o Teorema Binomial Generalização. Observamos que este é o terceiro modo de produzir significado para séries infinitas que apresentamos na Subseção 3.2.1.

O Capítulo X, denominado *Das Potências Superiores das Quantidades Compostas*, é composto por 12 artigos cuja numeração inicia-se no número *340* e termina no *351*. Os Capítulo XI e XII, cujos títulos são *Das Transposições das Letras, em que a demonstração da Regra anterior é estabelecida* e *Do Desenvolvimento das Potências Irracionais por Séries Infinitas*, respectivamente, são compostos por 9 artigos cada um, cuja numeração do primeiro inicia-se no *352* e termina no *360*, e a numeração do segundo inicia-se no artigo *361* e termina no *369*. O Capítulo XIII, intitulado *Do Desenvolvimento de Potências Negativas* é composto por 8 artigos cuja numeração inicia-se no artigo *370* e termina no *377*. Os artigos e fragmentos dos artigos que apresentaremos a seguir foram traduzidos pelos autores.

5.1 Das Potências Superiores das Quantidades Compostas

No Capítulo X, cujo título é *Das Potências Superiores das Quantidades Compostas*, Euler nos apresenta como calcular as potências superiores à três de um binômio. Assim sendo, no artigo *341* ele calcula as potências do binômio $a+b$ até a sexta potência, pelo método de multiplicações sucessivas, e no artigo seguinte desenvolve até a sexta potência o binômio $a-b$, e destaca que as potências ímpares de b têm sinal $-$, enquanto as potências pares conservam o sinal $+$.

No artigo *343*, ele destaca a importância de conhecermos um método para calcularmos qualquer potência de um binômio, sem a necessidade de realizar todas as multiplicações, ou seja, de conhecermos as potências anteriores. Portanto, nos artigos *344* e *345*, que apresentaremos a seguir, Euler buscará estabelecer os padrões dos termos que aparecem no desenvolvimento das potências do binômio e estabelecerá também os padrões dos coeficientes destes termos.

Euler: 344. Agora, se a partir das potências que já determinamos, removermos os números que antecedem cada termo, que são chamados de ***coeficientes****, observamos uma ordem singular em todos os termos: em primeiro lugar, vemos o primeiro termo a da raiz elevado a potência que é solicitada; nos termos seguintes, as potências de a diminuem continuamente por uma unidade, e as potências de b aumentam na mesma proporção; de modo que a soma dos expoentes de a e de b é sempre a mesma, e sempre igual ao expoente da potência solicitada; e finalmente, encontramos o termo b, elevado a potência solicitada. Se, portanto, a décima potência de a + b foi solicitada, estamos certos de que os termos, sem os seus coeficientes, sucedem-se na seguinte ordem:*

$$a^{10},\ a^9b,\ a^8b^2,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ ab^9,\ b^{10}.$$

Euler: 345. Resta, portanto, mostrar como são determinados os coeficientes, que pertencem a esses termos, ou os números pelos quais eles serão multiplicados. Agora, com respeito ao primeiro termo, seu coeficiente é sempre a unidade; e para o segundo, o seu coeficiente é constantemente o expoente da potência. Com respeito aos outros termos, não é tão fácil observar qualquer ordem em seus coeficientes; mas se continuarmos esses coeficientes, não vamos deixar de descobrir a lei pela qual eles são formados, como pode ser visto a partir da seguinte tabela:

Potências	*Coeficiêntes*
$1^{a.}$	$1, 1$
$2^{a.}$	$1, 2, 1$
$3^{a.}$	$1, 3, 3, 1$
$4^{a.}$	$1, 4, 6, 4, 1$
$5^{a.}$	$1, 5, 10, 10, 5, 1$
$6^{a.}$	$1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$
$7^{a.}$	$1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$
$8^{a.}$	$1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1$
$9^{a.}$	$1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1$
$10^{a.}$	$1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1$

Então, vemos que a décima potência de a + b será

$$a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5$$
$$+210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}.$$

Podemos dizer que Euler, primeiramente, observou que os termos a e b que surgem multiplicados no desenvolvimento do binômio $a + b$ têm sempre a soma de seus expoentes iguais a potência solicitada, de onde o primeiro termo a inicia-se pela potência solicitada, e nos termos seguintes, sua potência diminui continuamente por uma unidade ao mesmo tempo que as potências de b iniciam-se do zero e aumentam uma unidade. Depois, Euler nos apresentou como os coeficientes desses termos são determinados. Ele observou que o primeiro termo do desenvolvimento do binômio $a + b$ tem sempre o coeficiente igual a 1 e o segundo termo sempre igual a potência solicitada e concluiu que os demais coeficientes podem ser encontrados por meio do triângulo aritmético.

Portanto, podemos dizer que Euler estava produzindo significado para o desenvolvimento de um binômio em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pelo padrão das potências dos termos ab que surgem no desenvolvimento do binômio $a + b$ e pelo triângulo aritmético para determinar os coeficientes que compõem esses termos.

5.1.1 O Triângulo Aritmético

No século XIII, na obra do chinês Yang Hui (viveu por volta de 1261 - 1275) encontramos resultados quanto à soma de séries e o chamado triângulo aritmético. Os matemáticos árabes deste mesmo século, conheciam o teorema binomial para expoentes inteiros positivos, ou seja, a expansão de $(a + b)^n$ para n inteiro positivo sob a forma do triângulo aritmético. Nas obras dos alemães Peter Apian (1495 - 1552) intitulada *Rechnung* (1527) e Michael Stiefel (1487 - 1567) intitulada a *Arithmetica integra* (1544) encontramos o triângulo aritmético. Este triângulo também foi construído pelo italiano Niccolo Fontana (conhecido como Tartaglia) (1500 - 1557) e pelo matemático belga Simon Stevin (1548 - 1620). Blaise Pascal (1623 - 1662) conectou o estudo das probabilidades com o triângulo aritmético, ele estudou profundamente as propriedades do triângulo aritmético em sua obra *Traité du Triangle Arithmétique* escrita em 1653, mas publicada apenas em 1665, a partir desta obra o triângulo aritmético passou a ser conhecido como "triângulo de Pascal". John Wallis também tratou deste assunto na sua *Algebra*.

Em 1544, Michael Stifel introduziu o termo *coeficiente binomial* e publicou seu *Arithmetica Integra*, onde encontramos o seguinte diagrama

1				
2				
3	3			
4	6			
5	10	10		
6	15	20		
7	21	35	35	
8	28	56	70	
9	36	84	126	126
10	35	120	210	252

Destacamos duas produções de significados importantes no trabalho de Stifel. A primeira era a produção de significado para extrair a raiz quadrada de um número; e a outra era a construção do diagrama acima.

O diagrama acima é construído colocando os números naturais em ordem crescente na primeira coluna. Em cada coluna subsequente, começamos duas posições abaixo da anterior; iniciamos a coluna, com o número imediatamente à sua esquerda, e cada número subsequente na coluna é a soma do número imediatamente acima dele e o número à esquerda do último. Assim, se escrevermos

$$(a + b)^n = (a + b)(a + b)^{n-1}$$

e, se conhecemos a expansão de $(a+b)^{n-1}$, encontramos os coeficientes da expansão $(a+b)^n$. Isto nos leva acreditar que Stifel estava mostrando, em notação moderna:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}, \quad n \geq p \quad \text{e} \quad n \geq 2.$$

Uma outra forma de apresentar esse diagrama foi dado por Blaise Pascal, cujo famoso triângulo aparece na forma

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & & \\
1 & 4 & 10 & 20 & & & \\
1 & 5 & 15 & & & & \\
1 & 6 & & & & & \\
1 & & & & & &
\end{array}$$

Segundo Coolidge (1949), provavelmente Pascal tivesse familiaridade com o diagrama de Stifel. Ele forneceu a mesma regra para a construção deste diagrama, assim como outras identidades. Em seu trabalho encontramos a regra geral, em notação moderna,

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 1}, \quad n \geqslant 0 \quad e \quad r \geqslant 0. \tag{5.1}$$

A igualdade (5.1) é conhecida hoje como *números binomiais*. Para melhor representá-los foram desenvolvidos alguns conceitos.

Definição 5.1.1. *Dado um número natural n, $n \geq 2$, o fatorial de n (indica-se por $n!$) é o produto dos n primeiros números naturais positivos, escritos desde n até 1, isto é,*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

O símbolo $n!$ foi introduzido por Christian Kramp (1760 - 1820) de Estrasburgo no prefácio de sua obra *Èléments d'arithmétique universelle* (1808).

Assim, utilizando a notação de fatorial, os números binominais são definidos por:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}, \quad n \geqslant 0 \quad e \quad r \geqslant 0. \tag{5.2}$$

Segundo Boyer (1996, p. 314), Euler contribuiu com esta notação, afirmando que achava útil representar a expressão

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdots r}$$

por

$$\left[\frac{n}{r}\right]$$

o que é equivalente à notação moderna

$$\binom{n}{r}$$

Vamos apresentar aqui uma propriedade do Triângulo Aritmético.

Teorema 5.1.1 (Teorema das Linhas). *A soma dos elementos da n-ésima linha é sempre igual a 2^n.*

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Demonstração. Considere o desenvolvimento de $(a+b)^n$, fazendo $a=b=1$. Assim, temos

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= \binom{n}{0}\cdot 1^n\cdot 1^0+\binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot 1^1+\cdots+\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot 1^k+\cdots \\ &\quad \cdots+\binom{n}{n}\cdot 1^0\cdot 1^n \end{aligned}$$

Como $1^n=1, \forall\, n\in\mathbb{N}$, então,

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}$$

□

A principal utilidade do triângulo aritmético é ser um dispositivo mecânico para a geração dos coeficientes da expansão $(a+b)^n$, com n inteiro positivo.

Prosseguindo, no artigo *346*, Euler nos apresenta o Teorema das Linhas por meio de um exemplo numérico.

> *Euler: 346. Agora, com respeito aos coeficientes, devemos observar, que para cada potência sua soma dever ser igual ao número 2 elevado a mesma potência. Sejam $a=1$ e $b=1$, então cada termo, sem os coeficientes, será igual a 1; consequentemente, os valores das potências serão simplesmente a soma dos coeficientes. Esta soma, no exemplo anterior, é 1024, de acordo com $(1+1)^{10}=2^{10}=1024$.*
>
> *É o mesmo com respeito a todas as outras potências. Assim, temos*
>
> $1^{a.}$ $1+1=2=2^1$
> $2^{a.}$ $1+2+1=4=2^2$
> $3^{a.}$ $1+3+3+1=8=2^3$
> $4^{a.}$ $1+4+6+4+1=16=2^4$
> $5^{a.}$ $1+5+10+10+5+1=32=2^5$
> $6^{a.}$ $1+6+15+20+15+6+1=64=2^6$
> $7^{a.}$ $1+7+21+35+35+21+7+1=128=2^7$

Euler observa, no artigo *347*, que a ordem dos coeficientes merece atenção especial, pois é por meio desta que podemos determinar os coeficientes de um binômio sem a necessidade de calcular as potências anteriores. Assim, ele irá explicar esse método por meio de um exemplo.

Euler: 348. A fim de determinar os coeficientes de qualquer potência proposta, a sétima por exemplo, vamos escrever as seguintes frações uma após a outra:

$$\frac{7}{1}, \frac{6}{2}, \frac{5}{3}, \frac{4}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{6}, \frac{1}{7}$$

Neste arranjo, percebemos que os numeradores começam pelo expoente da potência solicitada, e que eles diminuem sucessivamente por uma unidade; enquanto os denominadores seguem a ordem natural dos números, 1, 2, 3, 4, etc. Agora, o primeiro coeficiente sendo sempre 1, a primeira fração nos dá o segundo coeficiente; o produto das duas primeiras frações, multiplicadas juntas, representam o terceiro coeficiente; o produto das três primeiras frações representam o quarto coeficiente, e assim por diante. Assim,

$$\begin{array}{lll}
1^{o.}\ \textit{coeficiente é} & 1 & = 1 \\
2^{o.} \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{7}{1} & = 7 \\
3^{o.} \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} & = 21 \\
4^{o.} \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} & = 35 \\
5^{o.} \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} & = 35 \\
6^{o.} \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} & = 21 \\
7^{o.} \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} & = 7 \\
8^{o.} \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} & = 1
\end{array}$$

Observe que os coeficientes que Euler apresenta no artigo *348*, são os números binomiais que definimos anteriormente, assim, em notação atual, temos

$$\begin{array}{llll}
1^{o.}\ \text{coeficiente é} & \binom{7}{0} = \frac{7!}{7!0!} = \frac{1}{1} & & = 1 \\
2^{o.} \ldots\ldots\ldots\ldots & \binom{7}{1} = \frac{7!}{6!1!} = \frac{7}{1} & & = 7 \\
3^{o.} \ldots\ldots\ldots\ldots & \binom{7}{2} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} & & = 21 \\
4^{o.} \ldots\ldots\ldots\ldots & \binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} & & = 35 \\
5^{o.} \ldots\ldots\ldots\ldots & \binom{7}{4} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} & & = 35
\end{array}$$

$$6^{o.} \quad \binom{7}{5} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} \qquad = 21$$

$$7^{o.} \quad \binom{7}{6} = \frac{7!}{1!6!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} \qquad = 7$$

$$8^{o.} \quad \binom{7}{7} = \frac{7!}{0!7!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} \quad = 1$$

Desse modo, Euler termina este capítulo apresentando nos artigos *349*, *350* e *351*, exemplos de como encontrar os coeficientes do binômio $a+b$ nos casos onde $n = 2, 3, 4, 10$ e 100, utilizando o método que ele explicou no artigo *348*.

5.2 Das Transposições das Letras, em que a demonstração da Regra anterior é estabelecida

No Capítulo XI, cujo título é *Das Transposições das Letras, em que a demonstração da Regra anterior é estabelecida*, Euler "demonstra" a rega dos coeficientes binomiais da expansão do binômio dada no capítulo anterior e estende a regra para um trinômio. Apresentaremos e analisaremos alguns destes artigos.

> *Euler: 352. Se nós conhecermos a origem dos coeficientes que estamos considerando, veremos que cada termo é apresentado quantas vezes é possível transpor as letras da qual esse termo é composto; ou, para expressar a mesma coisa diferentemente, o coeficiente de cada termo é igual ao número de transposições que as letras compondo esse termo admite. Na segunda potência, por exemplo, o termo ab é tomado duas vezes, ou seja, o seu coeficiente é 2; e na verdade podemos mudar a ordem das letras que compõe esse termo duas vezes, desde que podemos escrever ab e ba. O termo aa, ao contrário, é encontrado apenas uma vez, e aqui a ordem das letras pode submeter-se a qualquer troca, ou transposição. Na terceira potência de* $a+b$*, o termo aab pode ser escrito de três formas diferentes, assim, aab, aba, baa; o coeficiente é três. Na quarta potência, o termo* a^3b *ou aaab admite quatro arranjos diferentes, aaab, aaba, abaa, baaa; e consequentemente o coeficiente é 4. O termo aabb admite seis transposições, aabb, abba, baba, abab, bbaa, baab, e seu coeficiente é 6. É o mesmo em todos os outros casos.*

> *Euler: 353. De fato, se considerarmos que a quarta potência, por exemplo, de qualquer raiz consistindo em mais de dois termos, como* $(a+b+c+d)^4$*, é encontrada pela multiplicação dos quatro fatores,* $(a+b+c+d)\cdot(a+b+c+d)\cdot(a+b+c+d)\cdot(a+b+c+d)$*, facilmente vemos, que cada letra do primeiro fator deve ser multiplicada por cada letra do segundo, em seguida, por cada letra do terceiro, e por último, por cada letra do quarto. De modo que cada termo não é composto apenas por quatro letras, mas também se apresentam, ou entram na soma, quantas vezes essas letras podem ser arranjadas diferentemente com respeito as outras, e aqui surge o seu coeficiente.*

Euler: 354. É, portanto, de grande importância sabermos, de quantas formas diferentes um número determinado de letras pode ser arranjado; mas nessa investigação, devemos considerar particularmente se as letras em questão são as mesmas ou diferentes, pois quando elas são as mesmas, não pode haver transposição delas, e por esta razão as potências simples, como a^2, a^3, a^4, *etc. têm todas a unidade como seus coeficientes.*

Observe que no artigo *354*, Euler está estabelecendo que os coeficientes dos termos do binômio que aparecem elevados a mesma potência da expansão é sempre 1.

Euler: 355. Vamos primeiro supor todas as letras diferentes, e começaremos com o caso mais simples de duas letras, ou ab, imediatamente descobrimos que duas transposições podem ocorrer, ou seja, ab e ba.

Se temos três letras abc, a considerar, observamos que cada uma das três letras podem assumir a primeira posição, enquanto as duas outras admitirão duas transposições. Assim, se a for a primeira letra, temos dois arranjos abc, acb; se b está na primeira posição, temos os arranjos bac, bca; por último, se c ocupa a primeira posição, temos também dois arranjos, ou seja, cab, cba; consequentemente o número total de arranjos é $3 \times 2 = 6$.

Se há quatro letras, abcd, cada uma pode ocupar o primeiro lugar, e em cada caso, as outras três podem formar seis arranjos diferentes, como acabamos de ver. Portanto, o número total de transposições é $4 \times 6 = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Se temos cinco letras, abcde, cada uma das cindo podem ser a primeira, e as outras quatro admitirão vinte e quatro transposições, então o número total de transposições será $5 \times 24 = 120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Euler: 356. Consequentemente, contudo, é evidente que um maior número de letras podem ser fornecidos, sendo elas todas diferentes, podemos facilmente determinar o número de transposições, e para este propósito, podemos recorrer a seguinte tabela:

Número de letras	*Número de Transposições*
1	$1 = 1$
2	$2 \cdot 1 = 2$
3	$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
4	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
5	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
6	$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
7	$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$
8	$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$
9	$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$
10	$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$

Vamos definir *permutação simples.*

Definição 5.2.1. *Seja S um conjunto com n elementos. Chama-se* **permutação simples** *dos n elementos, qualquer sequência de n elementos distintos de S.*

Indicamos o número de permutação simples de n elementos por P_n. Assim, $P_n = n!$

Observe que nos artigos *355* e *356*, Euler constituiu o objeto *permutação simples* do mesmo modo que nós constituímos hoje.

> *Euler: 357. Mas, como intimamente, os números nesta tabela podem ocorrer apenas quando todas as letras são diferentes; pois se dois ou mais deles são iguais, o número de transposições tornam-se muito menor; e se todas as letras são as mesmas, temos apenas um arranjo. Portanto, vamos mostrar, agora, como os números na tabela são reduzidos, de acordo com o número de letras que são iguais.*

> *Euler: 358. Quando duas letras são dadas, e essas letras são as mesmas, os dois arranjos são reduzidos a um, e consequentemente o número, que encontramos acima, é reduzido ao meio, ou seja, ele deve ser dividido por 2. Se tivermos três letras iguais, as seis transposições são reduzidas a uma; de onde segue que os números na tabela devem ser divididos por $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$; e pela mesma razão, se quatro letras são iguais, devemos dividir os números encontrados por 24, ou $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, etc.*
>
> *Portanto, é fácil encontrar quantas transposições as letras aaabbc, por exemplo, podem submeter-se. Elas são 6, e consequentemente, se elas são todas diferentes, elas admitiriam $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ transposições; mas desde que a é encontrado três vezes nestas letras, devemos dividir este número de transposições por $3 \cdot 2 \cdot 1$; e desde que b ocorre duas vezes, devemos novamente dividir por $2 \cdot 1$, o número de transposições solicitado será, portanto, $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.*

Vamos definir o número de *permutações com elementos repetidos.*

Definição 5.2.2. *O número de permutações de n objetos dos quais α são iguais a a, β iguais a b, ..., λ iguais a l $(\alpha + \beta + \cdots + \lambda = n)$ é:*

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdots \lambda!}$$

Podemos dizer que Euler constituiu o objeto *número de permutações com elementos repetidos* da mesma maneira que nós constituímos hoje.

> *Euler: 359. Podemos agora facilmente determinar os coeficientes de todos os termos de qualquer potência. Por exemplo, da sétima potência $(a + b)^7$.*
>
> *O primeiro termo é a^7, que ocorre apenas uma vez, e como todos os outros termos têm cada sete letras, segue que o número de transposições para cada termo seria $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, se todas as letras forem diferentes; mas desde que no*

segundo termo, a^6b*, encontramos seis letras iguais, devemos dividir o produto acima por* $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$*, de onde segue que o coeficiente é*

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7}{1}.$$

No terceiro termo, a^5b^2*, encontramos a mesma letra a cinco vezes, e a mesma letra b duas vezes; devemos, portanto, dividir aquele número, primeiro por* $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$*, e então por* $2 \cdot 1$*; de onde resulta o coeficiente*

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21.$$

O quarto termo a^4b^3 *contém a letra a quatro vezes, e a letra b três vezes, consequentemente, o número total de transposições das sete letras deve ser dividido, em primeiro lugar, por* $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$*, e em segundo lugar, por* $3 \cdot 2 \cdot 1$*, e o coeficiente torna-se igual a*

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

Da mesma forma, encontramos $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ *para o coeficiente do quinto termo, e assim para o restante, do qual a regra antes dada é demonstrada.*

O artigo *359* é um exemplo exemplar que Euler utiliza para ilustrar o método de encontrar os coeficientes binômias do desenvolvimento do Binômio de Newton para qualquer potência, que na verdade ele realiza para $n = 7$. Na próxima subseção apresentaremos uma demonstração do Binômio de Newton.

5.2.1 O Binômio de Newton

Encontramos vestígios do Teorema Binomial na obra *Os elementos* de Euclides (por volta de 300 a.C.). De fato, no livro II, Proposição 4, temos: "Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos." (BICUDO, 2009, p. 137). Se nomearmos de a e b os segmentos, em linguagem algébrica, temos

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

No livro II, Proposição 7, encontramos a correspondente fórmula para o quadrado da diferença:"Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, os quadrados ambos juntos, o sobre a reta toda e o sobre um dos segmentos, são iguais a duas vezes o retângulo contido pela reta toda e pelo dito segmento e também o quadrado sobre o segmento restante." (BICUDO, 2009, p. 141). Se nomearmos de a o segmento todo e b o primeiro segmento, em linguagem algébrica, temos

$$a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$$

Assim sendo, o Teorema Binomial era conhecido desde a época de Euclides, e a expansão binomial para expoentes inteiros positivos era bem familiar para os matemáticos antigos. De fato, o teorema binomial era conhecido pelos hindus e árabes do século XIII, eles usaram as expansões de $(a + b)^2$ e $(a + b)^3$ para extraírem raízes. François Viète conhecia a expansão de $(a + b)^4$, mas estes são resultados de simples multiplicação sem o emprego de uma regra geral.

Isaac Newton em 1665 mostrou que podemos calcular $(1+a)^n$ diretamente sem referência a $(1+a)^{n-1}$. Ele ficou convencido que a expansão era válida para n fracionário e negativo (nestes casos, em séries infinitas) e então começou sua generalização, mas nunca provou. O matemático escocês James Gregory, também chegou no teorema independentemente, mas não pensou que havia necessidade de prová-lo.

Vamos demonstrar o teorema binomial para n um inteiro positivo. Esta demonstração foi extraída de Hazzan (2013, p. 50-51).

Teorema 5.2.1. *Sejam x e a números reais e n um inteiro positivo, então*

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}a^k \\ &= \binom{n}{0}x^n a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^0 a^n.\end{aligned}$$

Observe que:

(i) o desenvolvimento de $(x+a)^n$ possui $n+1$ termos.

(ii) os coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^n$ são os elementos da n-ésima linha do triângulo de Pascal.

Demonstração.

$$(x+a)^n = \underbrace{(x+a)\cdot(x+a)\cdots(x+a)}_{n \quad \text{fatores}}$$

Pela propriedade distributiva da multiplicação, os diferentes tipos de termos que podem ser obtidos na multiplicação, serão:

$$x^n,\ x^{n-1}a,\ x^{n-2}a^2, \ldots, x^{n-p}a^p, \ldots, a^n$$

Vamos agora calcular o coeficiente de cada um desses diferentes tipos de termos.

$1^{o.}$) x^n

O produto x^n só pode ocorrer de uma forma:

$$\underbrace{x\cdot x\cdot x\cdots x}_{n \quad \text{fatores}}$$

e portanto o coeficiente de x^n é 1 ou $\binom{n}{0}$.

$2^{o.}$) $x^{n-1}\cdot a$

O produto $x^{n-1}\cdot a$ pode ocorrer de tantas formas, quantas podemos permutar $(n-1)$ letras x e uma letra a. Isto é,

$$P_n^{n-1,1} = \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} = \binom{n}{1}$$

Portanto, o coeficiente de $x^{n-1} \cdot a$ é $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$.

$3^{o.}$) $x^{n-2} \cdot a^2$

O produto $x^{n-2} \cdot a^2$ pode ocorrer de tantas formas, quantas podemos permutar $(n-2)$ letras x e duas letras a. Isto é,

$$P_n^{n-2,2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$$

Portanto, o coeficiente de $x^{n-2} \cdot a^2$ é $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$.

$4^{o.}$) $x^{n-p} \cdot a^p$

Genericamente, o produto $x^{n-p} \cdot a^p$ pode ocorrer de tantas formas, quantas podemos permutar $(n-p)$ letras x e p letras a. Isto é,

$$P_n^{n-p,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$$

Portanto, o coeficiente de $x^{n-p} \cdot a^p$ é $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$.

$5^{o.}$) a^n

Finalmente, o produto a^n só pode ocorrer de uma forma, que é

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fatores}}$$

portanto, o coeficiente de a^n é 1 ou $\begin{pmatrix} n \\ a \end{pmatrix}$.

Das considerações feitas acima, concluímos que:

$$(x+a)^n \quad = \quad \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} x^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1} a^1 + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} x^{n-p} a^p + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} a^n.$$

que é o que queríamos demostrar. □

Observe que Euler executou os passos desta demonstração nos artigos *354* e *358*, onde ele explicou como calcular os coeficientes binomiais e aplicou este método para o caso particular de $n = 7$ no artigo *359*. Podemos dizer que a legitimidade do Binômio de Newton já era garantida pela sua própria enunciação, não havia necessidade de justificação para ele, era uma fórmula aceita para os interlocutores de Euler. Destacamos aqui, que o objeto denominado *Binômio de Newton* que foi constituído por Euler, é o mesmo objeto que constituímos hoje.

5.2.2 Expansão Multinomial ou Polinômio de Leibniz

No artigo *360*, Euler estende o desenvolvimento do binômio para um trinômio por meio de um exemplo. Assim, temos

> *Euler: 360. Essas considerações nos levam mais longe, e também nos mostram como encontrar todas as potências das raízes compostas por mais de dois termos.*[1] *Vamos aplicá-las para a terceira potência de $a + b + c$, os termos que devem ser formados por todas as possíveis combinações das três letras, cada termo tendo para seu coeficiente o número de suas transposições, (como mostra o Art. 352).*[2]
>
> *Aqui, sem realizar a multiplicação, a terceira potência de $(a + b + c)$ será,*
>
> $$a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3.$$
>
> *Suponhamos $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, o cubo de $1 + 1 + 1$, ou de 3, será*
>
> $$1 + 3 + 3 + 3 + 6 + 3 + 1 + 3 + 3 + 1 = 27$$
>
> *cujo resultado é exato, e confirma a regra. Mas se supormos $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$, devemos encontrar para o cubo de $1 + 1 - 1$, que é 1,*
>
> $$1 + 3 - 3 + 3 - 6 + 3 + 1 - 3 + 3 - 1 = 1,$$
>
> *que é ainda mais uma confirmação da regra.*

Note que Euler atribuiu valores para as letras a, b e c, como uma forma de "demonstrar" a regra estabelecida, mostrando que ambos os lados da equação tem o mesmo valor.

Apresentaremos uma breve história sobre a expansão multinomial e sua demonstração.

Ginsburg (1959) traduziu do latim cartas entre Gottfried Wilhelm von Leibniz e Jacob Bernoulli, onde Leibniz relata a regra inventada por ele para encontrar os coeficientes de um polinômio elevado a qualquer potência.

A seguir apresentaremos um trecho da carta datada de 16 de maio de 1695, de Leibniz para Jacob Bernoulli.

> Eu concebi, então, uma regra maravilhosa para os coeficientes de potências, não apenas do binômio $x + y$, mas também do trinômio $x + y + z$, de fato, de qualquer polinômio; de modo que quando dado a potência de qualquer grau, digamos dez, e qualquer termo contido nela, como $x^5y^3z^2$, seria possível atribuir o coeficiente que ele deve ter [...] (GINSBURG, 1959, p. 230, tradução nossa)

Em 8 de junho de 1695, Jacob Bernoulli responde a carta de Leibniz.

[1] As raízes, ou quantidades, compostas por mais de dois termos, são chamadas de *polinomiais*, a fim de distinguí-las das *binomiais*, ou quantidades compostas por dois termos. - T. F.

[2] Referência acrescentada pelo tradutor inglês.

> Seja solicitado elevar qualquer polinômio $s + x + y + z + etc.$ a uma potência arbitrária r, e seja solicitado encontrar o coeficiente do termo $s^a x^b y^c z^e etc.$ Eu digo que o coeficiente será
>
> $$\frac{r \cdot r-1 \cdot r-2 \cdot r-3 \cdot r-4 \cdots a+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots b \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots c \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots e \ etc.}$$
>
> ou seja, o coeficiente solicitado será dado pelo produto de todos os termos da progressão aritmética que inicia com o número da potência do multinomial e decresce por 1 até o número alcançar a potência da primeira letra sendo maior por uma unidade desta potência, este produto será dividido pelo produto de todos os termos da progressão aritmética ascendente a partir do 1 até o respectivo número da potência de todas as letras exceto a primeira. Note que a divisão é tediosa e uma considerável parte da multiplicação seria eliminada pelo cancelamento antes da operação, daquelas partes multiplicativas que o numerador têm em comum com o denominador. Como um exemplo, tomamos o que você propôs: é solicitado encontrar o coeficiente do termo $s^5 x^3 y^2$ contido no valor do trinômio $s + x + y$ elevado a décima potência. Substituindo na fórmula geral os valores $r = 10$, $b = 3$ e $c = 2$. Teremos para o coeficiente solicitado $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \times 1 \cdot 2} = 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 = 2520$. Se o coeficiente de $s^8 x^6 y^4 z^2$ na expansão do quadrinômio $s + x + y + z$ para a vigésima potência foi solicitado, teremos
>
> $$\begin{aligned} &\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \times 1 \cdot 2} = \\ &= 19 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \\ &= 1745944200. \end{aligned}$$
>
> Seria um prazer ver sua regra e seria bom para testar se elas concordam; a sua é, possivelmente, mais simples. (GINSBURG, 1959, p. 230, tradução nossa).

Assim, por meio destas correspondências datadas no ano de 1695, constatamos que na época de Euler o teorema multinomial era conhecido. Logo, Euler apresenta-o como uma generalização do Binômio de Newton para expressões com mais de dois termos.

Hoje, podemos demonstrar esta fórmula como segue. Esta demonstração foi extraída de De Oliveira Morgado (1991, p. 114).

Teorema 5.2.2. *Considere os números x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_p e um número natural n. Então*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_p!} x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p}$$

estendendo-se o somatório a todos os valores inteiros não-negativos de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$.

Demonstração.

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_p) \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_p) \cdots (x_1 + x_2 + \ldots + x_p).$$

O termo genérico do produto é obtido escolhendo-se em cada parênteses um x_i e multiplicando-se os escolhidos. Ora, se em α_1 dos parênteses escolhermos x_1, em α_2 dos parênteses escolhermos x_2 etc. ...obteremos

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ inteiros não-negativos e $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$.

O termo $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p}$ aparece tantas vezes quantos são os modos de escolhermos nos n parênteses α_1 deles para pegarmos os x_1 para fator, α_2 dentre os que sobraram para pegarmos o x_2 como fator etc. ...Mas isso pode ser feito de

$$C_n^{\alpha_1} \cdot C_{n-\alpha_1}^{\alpha_2} \cdots C_{n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{n-1}}^{\alpha_n} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!} \quad \text{modos.}$$

Logo, $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p}$ aparece no desenvolvimento

$$\frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!} \quad \text{vezes.}$$

□

Assim, podemos aplicar o Teorema da Expansão Multinomial no Artigo *360*.

Vamos calcular $(a+b+c)^3$.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= \sum \frac{3!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \alpha_3!} a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} c^{\alpha_3} \\ &= \sum \frac{6}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \alpha_3!} a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} c^{\alpha_3}\end{aligned}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são números naturais tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3$.

A tabela a seguir apresenta os valores possíveis de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e os correspondentes termos do desenvolvimento.

α_1	α_2	α_3	termo
3	0	0	a^3
0	3	0	b^3
0	0	3	c^3
2	1	0	$3a^2b$
2	0	1	$3a^2c$
1	0	2	$3ac^2$
1	2	0	$3ab^2$
0	1	2	$3bc^2$
0	2	1	$3b^2c$
1	1	1	$6abc$

Assim, obtemos

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3bc^2 + 3b^2c + 6abc.$$

5.3 Breve História do Teorema Binomial

Vamos voltar a história do Teorema Binomial. Após estabelecer o computo dos logaritmos, descobriram-se novos métodos de cálculo por meio das séries infinitas. Os primeiros matemáticos a utilizarem este novo método foram James Gregory, Lord William Brounker (1620 - 1687), John Wallis, Edmund Halley (1656 - 1742) e Nicholas Mercator, que em 1668 transformou a soma de $\log(1+a)$ na série infinita

$$\log(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \cdots$$

As séries infinitas ganharam destaque na época da invenção do cálculo diferencial e integral, foram usadas antes por Pietro Mengoli de Bolonha, que a utilizou em seu livro *Novae quadraturae arithmeticae*, em 1650. Mengoli provou a divergência da série harmônica dividindo seus termos em um número infinito de grupos, tais que a soma dos termos em cada grupo é maior do que 1. Ele também mostrou a convergência dos inversos dos números triangulares.

Segundo Coolidge (1949), o primeiro matemático a abordar a expansão binomial de potências fracionárias foi James Gregory, que nos forneceu a fórmula em 1670. Seu objetivo era encontrar um anti-logaritmo.

Sejam dados dois números b e d com os logaritmos $\log b = e$ e $\log(b+d) = e+c$. Queremos encontrar o número cujo logaritmo é $e+a$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}
e+a &= \log b + \frac{a}{c}(e+c-e) \\
&= \log b + \frac{a}{c}(\log(b+d) - \log b) \\
&= \log b + \frac{a}{c} \cdot \log\left(\frac{b+d}{b}\right) \\
&= \log b + \log\left(\frac{b+d}{b}\right)^{\frac{a}{c}} \\
&= \log\left(b \cdot \left(\frac{b+d}{b}\right)^{\frac{a}{c}}\right) \\
&= \log\left(b \cdot \left(1+\frac{d}{b}\right)^{\frac{a}{c}}\right)
\end{aligned}$$

e portanto o número procurado é $b \cdot \left(1+\frac{d}{b}\right)^{\frac{a}{c}}$.

Tomando duas séries

$$b, d, \frac{d^2}{b}, \frac{d^3}{b^2}, \ldots$$

$$\frac{a}{c}, \frac{a-c}{2c}, \frac{a-2c}{3c}, \frac{a-3c}{4c}, \ldots$$

e combinando-as, Gregory obteve

$$b + \frac{a}{c} \cdot d + \frac{a}{c} \cdot \frac{a-c}{2c} \cdot \frac{d^2}{b} + \frac{a}{c} \cdot \frac{a-c}{2c} \cdot \frac{a-2c}{3c} \cdot \frac{d^3}{b^2} + \ldots = b\left(1 + \frac{d}{b}\right)^{\frac{a}{c}}$$

Esta fórmula foi apresentada por Gregory, mas não há sinal de demonstração desta.

Como vimos no Capítulo 3, Seção 3.1, em 1655, o matemático John Wallis publicou a obra *Arithmetica infinitorum.* Neste trabalho, ele amplia a aplicação da análise ao método dos indivisíveis para efetuar quadraturas. Wallis

> criou a concepção aritmética de um limite considerando os valores sucessivos de uma fração, obtida no estudo de certas razões, esses fatores fracionários aproximam-se monotonamente de um valor limite, de modo que a diferença se torna menor do que qualquer valor arbitrário e desaparece quando o processo é levado ao infinito. (CAJORI, 2007, p. 257).

A fórmula da quadratura da parábola $y = x^m$, sendo m um inteiro positivo, já era conhecida por Bonaventura Francesco Cavalieri e por geômetras franceses. Wallis estudou a quadratura do círculo e

> encontrou que as áreas compreendidas entre os eixos, as ordenadas correspondentes a x e as curvas representadas pelas equações $y = (1-x^2)^0$, $y = (1-x^2)^1$, $y = (1-x^2)^2$, $y = (1-x^2)^3$, etc. são expressas, em função dos retângulos circunscritos de lados x e y, pelas quantidades formando a série
>
> $$x,$$
>
> $$x - \tfrac{1}{3}x^3,$$
>
> $$x - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5,$$
>
> $$x - \tfrac{3}{3}x^3 + \tfrac{3}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7, etc.$$
>
> (CAJORI, 2007, p. 258-259).

Para encontrar estas fórmulas Wallis estudou os quocientes da forma

$$\frac{0^p + 1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p + n^p + n^p + \cdots + n^p}$$

e notou que o limite quando n aumenta indefinidamente era assintoticamente $\dfrac{1}{p+1}$. A partir deste fato, passou a buscar a área sob a curva $y = x^p$.

Assim, dividindo o intervalo $[0, x]$ sobre o eixo x em n subintervalos de comprimentos iguais a $\Delta x = \frac{x}{n}$, sendo os pontos da divisão $0, \Delta x, 2\Delta x, \ldots, n\Delta x$. Agora, vamos construir retângulos sobre eles, sendo a altura o valor da curva nestes pontos. Então, as áreas dos retângulos são

$$\Delta x \cdot (\Delta x)^p, \Delta x \cdot (2\Delta x)^p, \Delta x \cdot (3\Delta x)^p, \ldots, \Delta x \cdot (n\Delta x)^p$$

Somando estes retângulos, obtemos

$$(\Delta x)^{p+1}(1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p)$$

Agora, utilizando notação moderna, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{0^p + 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{(n+1)n^p} = \frac{1}{p+1}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} (\Delta x)^{p+1}(0^p + 1^p + 2^p + \ldots + n^p) = \\
&= \lim_{n\to+\infty} (\Delta x)^{p+1}(0^p + 1^p + 2^p + \ldots + n^p) \cdot \frac{(n+1)n^p}{(n+1)n^p} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{0^p + 1^p + 2^p + \ldots + n^p}{(n+1)n^p} \cdot \lim_{n\to+\infty} (\Delta x)^{p+1} \cdot (n+1)n^p \\
&= \frac{1}{p+1} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left((n\Delta x)^{p+1} + (n\Delta x)^p \Delta x\right) \\
&= \frac{1}{p+1} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(\left(n\frac{x}{n}\right)^{p+1} + \left(n\frac{x}{n}\right)^p \frac{x}{n}\right) \\
&= \frac{1}{p+1} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(x^{p+1} + \frac{x^{p+1}}{n}\right) \\
&= \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1} \\
&= \frac{x^{p+1}}{p+1}
\end{aligned}$$

Isto nos dá a fórmula fundamental

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}.$$

"Naturalmente Wallis não estabeleceu as coisas desta forma, mas esta é a essência de seu raciocínio." (COOLIDGE, 1949, p. 152, tradução nossa).

Wallis não conseguiu aplicar seu método de interpolação para o caso $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$. Assim, Isaac Newton se deparou com este trabalho de Wallis e foi o primeiro a estabelecer o teorema binomial para expoentes negativos e fracionários. O teorema binomial foi descrito, em 1676, em duas cartas de Newton para Henry Oldenburg, secretário da Royal Society, para transmití-la a Leibniz, que havia perguntado à respeito do trabalho de Newton sobre séries infinitas. Após a primeira carta de 13 de junho, Leibniz solicitou mais detalhes e Newton respondeu em 24 de junho do mesmo ano. Ambas as cartas foram publicadas no *Commercium Epistolicum* (1712).

Em sua carta de 13 de junho, Newton escreveu

> [...] Frações podem ser reduzidas em séries infinitas por divisão, e quantidades radicais podem ser então reduzidas por Extração de Raízes. Estas operações podem ser estendidas para **Species** [quantidades algébricas]

> pelos mesmos caminhos como aqueles que se aplicam para números decimais. Esses são os fundamentos da Redução. (SANFORD, 1959, v. 1, p. 224-225, tradução nossa).

Assim, Newton enunciou seu teorema:

> As Extrações de Raízes são muito abreviadas pelo Teorema
>
> $$P+PQ\rceil^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + etc.$$
>
> onde $P+PQ$ representa uma quantidade cuja raiz ou potência ou cuja raiz de uma potência se quer achar, P sendo o primeiro termo dessa quantidade, Q sendo os termos restantes divididos pelo primeiro termo e $\frac{m}{n}$ o índice numérico das potências de $P+PQ$. Este podendo ser um número inteiro ou um número quebrado; um número positivo ou um número negativo. [...] Finalmente, no lugar dos termos que ocorrem durante o trabalho no quociente, usarei A, B, C, D, etc. Assim, A representa o primeiro termo $P^{\frac{m}{n}}$, B o segundo termo $\frac{m}{n}AQ$, e assim por diante. (SANFORD, 1959, v. 1, p. 225, tradução nossa).

Por volta do ano de 1665, Newton descobriu como expressar *funções* em termos de séries infinitas e como parte de seu método de séries infinitas, na carta de 24 de outubro de 1676, ele explicou detalhadamente como chegou na série binomial.

Desse modo, Newton escreveu que no início de seu estudo de matemática, ele se deparou por acaso com o trabalho de Wallis sobre a determinação de áreas (de 0 a x) sob curvas, cujas ordenadas são da forma $(1-x^2)^n$. Examinando as áreas para expoentes n iguais a $0, 1, 2, 3$ e assim por diante, temos

Curvas	Quadraturas
$y=(1-x^2)^0=1$	$z=x$
$y=(1-x^2)^1=1-x^2$	$z=x-\frac{1}{3}x^3$
$y=(1-x^2)^2=1-2x^2+x^4$	$z=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$
$y=(1-x^2)^3=1-3x^2+3x^4-x^6$	$z=x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$

Newton observou que o primeiro termo sempre é x, e este aumenta com potências ímpares, com os sinais alternando em $+$ e $-$, e que os segundos termos

$$\frac{0}{3}x^3 \text{ ou } \frac{1}{3}x^3 \text{ ou } \frac{2}{3}x^3 \text{ ou } \frac{3}{3}x^3$$

estão em progressão aritmética.

Portanto, os dois primeiros termos das séries interpoladas devem ser

$$x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3},\ x-\frac{\frac{3}{2}x^3}{3},\ x-\frac{\frac{5}{2}x^3}{3}, \text{ etc.}$$

Para interpolar o restante, considerou que os denominadores $1, 3, 5, 7, etc.$ estão em progressão aritmética e que os coeficientes numéricos dos numeradores, em cada expressão, são os dígitos da potência de 11, ou seja, para a primeira expressão, 11^0 ou 1; para a segunda 11^1 ou $1, 1$; para a terceira 11^2 ou $1, 2, 1$; para a quarta, 11^3 ou $1, 3, 3, 1$; para a quinta, 11^4 ou $1, 4, 6, 4, 1$; *etc.*

Assim, Newton descobriu um método para encontrar os elementos restantes desta série, dado os dois primeiros dígitos. Logo, quando o segundo dígito m é conhecido, podemos calcular os demais dígitos pela multiplicação continuada dos termos da série:

$$\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5} \times etc.$$

Por exemplo, seja $m = 4$ então o terceiro termo da série é $4 \times \dfrac{m-1}{2} = 6$; o quarto termo é $6 \times \dfrac{m-2}{3} = 4$; o quinto termo é $4 \times \dfrac{m-3}{4} = 1$ e o sexto termo é $1 \times \dfrac{m-4}{5} = 0$, onde a série termina neste caso.

Aplicando esta regra à série pedida, ou seja, para o círculo, o segundo termo seria $\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, então $m = \dfrac{1}{2}$ e os termos que resultam são $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\frac{1}{2}-1}{2} = -\dfrac{1}{8}$; $-\dfrac{1}{8} \times \dfrac{\frac{1}{2}-2}{3} = +\dfrac{1}{16}$; $\dfrac{1}{16} \times \dfrac{\frac{1}{2}-3}{4} = -\dfrac{5}{128}$ e assim até o infinito.

Portanto, Newton descobriu que a área pedida para o segmento circular é

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} - etc.$$

Por esse processo, descobriu que a expressão interpolada é uma série infinita, e que o mesmo método pode ser usado para interpolar outras séries, mesmo com dois ou mais termos ausentes na série.

Esta interpolação sugeriu a Newton uma maneira de expandir $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, ou em geral $(1-x^2)^m$ em séries. Assim, ele considerou os termos

$$(1-x^2)^{\frac{0}{2}},\ (1-x^2)^{\frac{2}{2}},\ (1-x^2)^{\frac{4}{2}},\ (1-x^2)^{\frac{6}{2}},\ etc.$$

ou seja,

$$1,\ 1-x^2,\ 1-2x^2+x^4,\ 1-3x^2+3x^4-x^6,\ etc.$$

para serem interpolados da mesma maneira e as áreas deveriam originar-se a partir delas. Para isto, então, é necessário apenas omitir os denominadores $1, 3, 5, 7, etc.$ nos termos que expressam as áreas, ou seja, os coeficientes dos termos das quantidades para serem interpolados $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ou $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$, ou mais geral $(1-x^2)^m$ seriam produzidos pela multiplicação continuada dos termos da série $m \times \dfrac{m-1}{2} \times \dfrac{m-2}{3} \times \dfrac{m-3}{4} \times \dfrac{m-4}{5} \times etc.$

Dessa forma, por exemplo,

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{equivaleria a} \quad 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 \ - etc.,$$

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{equivaleria a} \quad 1 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 \ - etc. \text{ e}$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{3}} \quad \text{equivaleria a} \quad 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6 \ - etc.$$

Isto posto, ficou estabelecido para Newton a redução de radicais em séries infinitas. Para *"provar"* isto, ele multiplicou a série $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - etc.$ por ela mesma e obteve o radicando original $1 - x^2$, os demais termos da série desaparecem pelo *princípio da extensão infinita.* Analogamente, multiplicou a série $1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6 - etc.$ três vezes por si mesma, e obteve $1 - x^2$. De modo que isto poderia ser uma demonstração de suas conclusões. Por outro lado, ele utilizou o processo algébrico conhecido de extração de raízes para extrair a raiz quadrada de $1 - x^2$, e encontrou a mesma série infinita. Portanto, após esta descoberta, ele desistiu completamente das interpolações de séries e passou a utilizar esse novo método. Newton, também verificou que o resultado obtido para $(1 - x^2)^{-1}$ coincidia com o resultado obtido por divisão. Assim, Newton

> tinha descoberto algo muito mais importante que o teorema binomial; tinha verificado que a análise por séries infinitas tinha a mesma consistência interior e estava sujeita às mesmas leis gerais, que a álgebra de quantidades finitas. As séries infinitas já não deviam mais ser consideradas apenas como instrumentos de aproximação; eram formas alternativas das funções que representavam. (BOYER, 2012 p. 273).

Apesar de Newton não ter publicado o Teorema Binomial, nem o ter provado, ele redigiu e publicou exposições de sua análise infinita. A primeira publicação se chamaria *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, escrita em 1669 e publicada em 1711. Nela ele escreveu:

> E tudo que a análise comum [isto é, a álgebra] executa por meio de equações com número finito de termos (desde que possa ser feito) esse novo método sempre pode executar por meio de equações infinitas. Por isso, não hesitei em dar a isso o nome de Análise também. Pois os raciocínios aqui não são menos certos que na outra; nem as equações menos exatas; embora nós mortais cujos poderes de raciocínio estão restritos a limites estreitos, não possamos nem exprimir, nem conceber todos os termos dessas equações de modo a saber exatamente delas as quantidades que queremos. Para concluir, podemos merecidamente considerar como pertencente à Arte Analítica, aquilo por cuja ajuda as Áreas e Comprimentos etc. das Curvas podem ser exata e geometricamente determinadas. (BOYER, 1996, p. 272).

Em 1736, foi publicado *O Método dos Fluxões* de Newton, traduzido por J. Colson do original em latim, após 65 anos de ter sido escrito. Neste, Newton explica a expansão em série de quantidades fracionárias e irracionais. Na introdução do texto *Quadratura de Curvas* de 1704, Newton calcula o fluxo de x^n, utilizando a notação atual de Δx ao invés de 0, temos

> Ao mesmo tempo que x, fluindo, transforma-se em $x + \Delta x$, a potência x^n para $(x + \Delta x)^n$, isto é, pelo método das séries infinitas
>
> $$x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n^2 - n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + etc.$$
>
> e os incrementos
>
> $$\Delta x \text{ e } nx^{n-1}\Delta x + \frac{n^2 - n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + etc.$$

> estão um para o outro como
>
> $$1 \text{ para } nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}x^{n-2}\Delta x + etc.$$
>
> Fazendo agora os incrementos desaparecerem, sua razão final será 1 para nx^{n-1}, portanto o fluxo da quantidade x está para o fluxo da quantidade x^n como $1 : nx^{n-1}$ (CAJORI, 2007, p. 273-4).

Segundo Coolidge (1949), em 1742, no *Philosophical Transaction*, apareceu um artigo de Giovanni Salvemini. Neste, ele afirmava que a fórmula de Newton era conhecida por todos, mas ninguém havia a demonstrado. Assim, ele distingue três casos: um cujo expoente é um número inteiro positivo, outro cujo expoente é uma fração positiva e outro cujo expoente é negativo. No primeiro caso, ele substituiu $(p+q)^n$ pelo produto de $(p+q)$ por si mesmo, tomado n vezes. O produto $p^{n-r}q^r$ pode ocorrer de tantas formas, quantas podemos permutar $(n-r)$ letras p e r letras q, ou seja $\binom{n}{r}$.

Assim, quando é solicitado para expandir $(p+q)^{\frac{r}{n}}$, ele estava seguro em tomar o primeiro expoente como $\frac{r}{n}$, pois é o caso quando $q=0$, portanto

$$\begin{aligned}(p+q)^{\frac{r}{n}} &= Ap^{\frac{r}{n}} + Bp^{\frac{r}{n}-1}q + Cp^{\frac{r}{n}-2}q^2 + Dp^{\frac{r}{n}-3}q^3 + \cdots \\ &= p^{\frac{r}{n}}(A + Bp^{-1}q + Cp^{-2}q^2 + Dp^{-3}q^3 + \cdots)\end{aligned}$$

Elevando a n, ambos os lados da equação acima, temos

$$(p+q)^r = p^r(A + Bp^{-1}q + Cp^{-2}q^2 + Dp^{-3}q^3 + \cdots)^n \tag{5.3}$$

Como Salvemini conhecia a expansão pelo binômio para qualquer potência inteira positiva, ele despreocupadamente aplicou-a para a série de potências convergente, tratando-a como um binomial.

Assim,

$$\begin{aligned}(p+q)^r &= p^r + \frac{r}{1}\cdot p^{r-1}q + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}p^{r-2}q^2 + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdot\frac{r-2}{3}p^{r-3}q^3 + \cdots \\ &= p^r\left(1 + \frac{r}{1}\cdot p^{-1}q + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}p^{-2}q^2 + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdot\frac{r-2}{3}p^{-3}q^3 + \cdots\right)\end{aligned} \tag{5.4}$$

Portanto, comparando os coeficientes de (5.3) e (5.4), temos

$$1 = A^n \Longrightarrow A = 1$$

$$r = nA^{n-1}B \Longrightarrow B = \frac{r}{n}$$

$$\frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2} = nA^{n-1}C + \frac{n!}{(n-2)!2!}A^{n-2}B^2 \Longrightarrow \frac{r(r-1)}{2} = nC + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{r^2}{n^2}$$

$$nC = \frac{r(r-1)}{2} - \frac{(n-1)r^2}{2n} \Longrightarrow C = \frac{nr(r-1)-(n-1)r^2}{2n^2} = \frac{nr^2 - nr - nr^2 + r^2}{2n^2}$$

$$C = \frac{r(r-n)}{2n^2} = \frac{r}{2n}\left(\frac{r-n}{n}\right) = \frac{r}{2n}\left(\frac{r}{n} - 1\right) = \frac{\frac{r}{n}\left(\frac{r}{n}-1\right)}{1 \cdot 2}$$

Segundo Salvemini, a expansão negativa surge tomando os recíprocos dos positivos.

Também, em 1742, Colin Maclaurin (1698 - 1746) em sua obra *Fluxions* desenvolveu um método rápido para encontrar os coeficientes binomiais. Segundo Maclaurin, por meio da álgebra comum, sabemos que o primeiro termo de qualquer potência de $1+x$ na expansão binomial é 1, e os termos subsequentes envolvem x, x^2, x^3, x^4, ... com coeficientes invariáveis. Supondo que

$$(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots$$

representa a fórmula geral. Maclaurin tomou os *fluxions* [derivadas] de ambos os lados da equação acima e obteve

$$n(1+x)^{n-1} = A + 2Bx + 3Cx^2 + \dots \tag{5.5}$$

Fazendo $x = 0$ na equação (5.5) temos $n = A$.

Assim, temos

$$n(1+x)^{n-1} = n + 2Bx + 3Cx^2 + \dots \tag{5.6}$$

Derivando, novamente, a equação (5.6) obtemos

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2B + 6Cx + \dots \tag{5.7}$$

Fazendo $x = 0$ na equação (5.7) temos $n(n-1) = 2B$, ou seja, $B = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Os demais coeficientes são obtidos pelo mesmo processo.

Segundo Boyer (1996), encontramos na segunda parte do *Ars Conjectandi* (1713) de Jacob (Jacques) Bernoulli, uma teoria geral de permutações e combinações, que utilizaram no seu desenvolvimento os teoremas binomial e multinomial. Nesta obra encontramos também uma demonstração, utilizando o método de indução matemática, do teorema binomial para potências inteiras positivas, seguindo o modelo de Pascal.

5.4 Introduction to the Analysis of the Infinite

Na próxima seção iremos analisar e produzir significado para o Capítulo XII, cujo título é *Do Desenvolvimento das Potências Irracionais por Séries Infinitas*, para melhor compreendermos as enunciações de Euler, fomos buscar um texto publicado anteriormente ao livro.

Apresentaremos algumas ideias à respeito de séries encontradas no livro *Introduction to the Analysis of the Infinite* (1748), Capítulo IV, intitulado *O desenvolvimento de funções em séries infinitas*, neste Euler nos diz que para um melhor entendimento de uma *função*[3] em z, seria apropriado escrevê-la em séries [de potência], ou seja,

$$f(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots$$

mesmo se os números de termos forem infinitos. Acrescentando, que para uma ampliação do entendimento, deve ser permitido que as potências de z além de terem os expoentes inteiros positivos, possam ter quaisquer expoentes. Assim, a sua proposta para este capítulo é representar as *funções* fracionárias e irracionais em séries infinitas [ou séries de potências].

Pensando em termos do nosso modelo teórico, podemos inferir que os significados, objetos e conhecimentos serão produzidos em um <u>outro</u> Campo Semântico em relação a estipulações locais que representam as *funções* em série infinitas [de potências], diferente daqueles que apresentamos no Capítulo 4, onde majoritariamente Euler produziu significado para as frações em séries infinitas em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído em relação ao algoritmo usual da divisão.

De fato, Euler inicia sua produção de significado para as representações de *funções* em séries infinitas apresentando o método de representar as frações algébricas em séries infinitas pela divisão continuada. Assim, no parágrafo §60, Euler nos apresenta um exemplo deste método.

A fração

$$\frac{a}{\alpha + \beta z}$$

é representada em séries infinitas por

$$\frac{a}{\alpha} - \frac{a\beta z}{\alpha^2} + \frac{a\beta^2 z^2}{\alpha^3} - \frac{a\beta^3 z^3}{\alpha^4} + \frac{a\beta^4 z^4}{\alpha^5} - etc.$$

Assim, Euler nos diz que a razão desta série é $-\frac{\beta z}{\alpha}$, e a série é chamada de *série geométrica.* Este caso foi discutido, nesta tese, com detalhes na Seção 4.5. Mas, Euler estava interessado em nos apresentar um outro método de encontrar esta série, que não seja pela divisão. Pensando em termos do nosso modelo teórico, Euler produzirá significado para séries em um outro Campo Semântico.

Logo, ele iguala a fração a uma série [de potências] inicialmente desconhecida. Assim,

$$\frac{a}{\alpha + \beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + etc.$$

[3]Recordamos a definição de *função*, fornecida por Euler no Capítulo I do seu livro *Introduction to the Analysis of the Infinite* (1748).

> *Euler: §4. Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica de algum tipo composta de quantidade variável e de números constantes ou magnitudes. (EULER, 1988, p. 3, tradução nossa).*

Portanto, para que tenhamos uma igualdade, devemos encontrar os coeficientes $A, B, C, D, etc.$

Vamos multiplicar, ambos os lados, desta equação por $\alpha + \beta z$, temos

$$a = (\alpha + \beta z) \cdot (A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + etc.)$$

e efetuando a multiplicação no lado direito da equação, obtemos

$$\begin{aligned} a &= A\alpha + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + etc. \\ &\quad + \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + etc. \end{aligned}$$

Consequentemente, devemos obter

$$a = A\alpha \text{ e portanto } A = \frac{a}{\alpha}$$

e colocando a soma dos coeficientes de cada potência de z igual a zero, teremos as seguintes equações

$$\begin{aligned} \alpha B + \beta A &= 0 \\ \alpha C + \beta B &= 0 \\ \alpha D + \beta C &= 0 \\ \alpha E + \beta D &= 0 \\ etc.& \end{aligned}$$

Isto posto, Euler conclui que para qualquer coeficiente conhecido, o seguinte é encontrado; pois se o coeficiente conhecido for P e o seguinte for Q, temos

$$\alpha Q + \beta P = 0 \text{ ou } Q = -\frac{\beta P}{\alpha}.$$

Portanto, uma vez que o primeiro termo da série A é determinado, os outros termos serão conhecidos também. E por inspeção, encontramos que o coeficiente da potência z^n na série é $\frac{a}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$, onde temos o sinal $+$ se n for par e, se n for ímpar, o sinal $-$.

Assim sendo, Euler utilizará este novo método ao longo deste capítulo, apresentando exemplos de como transformar as *funções* fracionárias e irracionais em séries infinitas. Podemos dizer que os exemplos apresentados por Euler são exemplos exemplares, pois a cada exemplo apresentado, ele nos aponta o padrão da transformação da função em séries infinitas.

No parágrafo §62, Euler nos fornece uma caracterização desta transformação, onde qualquer termo da série é determinado a partir de alguns termos precedentes seguindo uma certa regra constante, e cuja regra surge do denominador da fração que produz a série. Segundo Euler, este tipo de séries foi chamada, pelo ilustre De Moivre, de *recorrentes*, que examinou a natureza destas com muito cuidado.

Deste modo, no parágrafo §63, Euler nos apresenta como transformar uma *função* fracionária [racional] em z, em uma série recorrente infinita.

Seja a *função*

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + etc.}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - etc.}$$

onde o primeiro termo do denominador é igual a 1 e $\alpha \neq 0$. A série recorrente resultante é da forma

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + etc.$$

onde os coeficientes serão determinados da seguinte maneira:

$$\begin{array}{lcl} A & = & a \\ B & = & \alpha A + b \\ C & = & \alpha B + \beta A + c \\ D & = & \alpha C + \beta B + \gamma A + d \\ E & = & \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A + e \\ etc. & & \end{array}$$

Assim, qualquer coeficiente que desejarmos será igual a soma dos múltiplos dos precedentes junto com um certo número, que o numerador fornece. Além disso, a menos que o numerador seja infinito, estes são adicionados e logo cessarão, e algum termo será determinado segundo uma regra constante, a partir de alguns números precedentes. Após estabelecer esta regra geral, Euler analisará as séries recorrentes infinitas geradas por frações cujos denominadores são potências.

Portanto, Euler apresenta as seguintes frações expressas em séries infinitas e os coeficientes da potência z^n.

- A fração $\dfrac{a + bz}{(1 - \alpha z)^2}$ pode ser expressa em série infinita por

$$a + (2\alpha a + b)z + (3\alpha^2 a + 2\alpha b)z^2 + (4\alpha^3 a + 3\alpha^2 b)z^3 + (5\alpha^4 a + 4\alpha^3 b)z^4 + etc.$$

cujo coeficiente da potência z^n é

$$(n + 1)\alpha^n a + n\alpha^{n-1} b;$$

- A fração $\dfrac{a + bz + cz^2}{(1 - \alpha z)^3}$ pode ser expressa em série infinita por

$$a+(3\alpha a+b)z+(6\alpha^2 a+3\alpha b+c)z^2+(10\alpha^3 a+6\alpha^2 b+3\alpha c)z^3+(15\alpha^4 a+10\alpha^3 b+6\alpha^2 c)z^4+etc.$$

cujo coeficiente da potência z^n é

$$\frac{(n + 1)(n + 2)}{1 \cdot 2}\alpha^n a + \frac{n(n + 1)}{1 \cdot 2}\alpha^{n-1} b + \frac{(n - 1)n}{1 \cdot 2}\alpha^{n-2} c;$$

- A fração $\dfrac{a+bz+cz^2+dz^3}{(1-\alpha z)^4}$ pode ser expressa em série infinita por

$$a+(4\alpha a+b)z+(10\alpha^2 a+4\alpha b+c)z^2+(20\alpha^3 a+10\alpha^2 b+4\alpha c+d)z^3+(35\alpha^4 a+20\alpha^3 b+10\alpha^2 c+4\alpha d)z^4+etc.$$

cujo coeficiente da potência z^n é

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^n a+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-1}b+\frac{(n-1)n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-2}c+\frac{(n-2)(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-3}d;$$

No parágrafo §68, Euler nos apresenta o caso em que o denominador é uma potência multinomial, e para este caso ele nos mostra um outro método de desenvolvimento. Se a fração proposta for

$$\frac{1}{(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-etc.)^{m+1}}$$

ela dará origem a série infinita

$$\begin{aligned}1+\frac{(m+1)}{1}\alpha z+\frac{(m+1)\cdot(m+2)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^2+\frac{(m+1)\cdot(m+2)\cdot(m+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^3+etc.\\ +\frac{(m+1)}{1}\beta z^2+\frac{(m+1)\cdot(m+2)}{1\cdot 2}2\alpha\beta z^3+etc.\\ +\frac{(m+1)}{1}\gamma z^3+etc.\end{aligned}$$

Segundo Euler, a fim de examinarmos essa série mais cuidadosamente, podemos representá-la de forma geral por

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots+Kz^{n-3}+Lz^{n-2}+Mz^{n-1}+Nz^n+etc.$$

onde qualquer coeficiente N será determinado pelos precedentes, uma vez que existem letras $\alpha,\beta,\gamma,\delta,etc.$ de modo que,

$$N=\frac{m+n}{n}\alpha M+\frac{2m+n}{n}\beta L+\frac{3m+n}{n}\gamma K+\frac{4m+n}{n}\delta I+etc.$$

Esta regra não é constante pois depende do expoente de z, mas contudo ela é similar a regra constante das progressões que são determinadas pelo denominador da série recorrente. Euler destaca que esta regra é aplicada apenas se o numerador é 1 ou alguma quantidade constante.

No parágrafo §71, Euler apresenta o teorema geral que transforma funções irracionais em séries infinitas.

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}P^{\frac{m-n}{n}}Q+\frac{m(m-n)}{n\cdot 2n}P^{\frac{m-2n}{n}}Q^2+\frac{m(m-n)(m-2n)}{n\cdot 2n\cdot 3n}P^{\frac{m-3n}{n}}Q^3+etc.$$

onde estes termos, a menos que $\frac{m}{n}$ seja um inteiro positivo, percorrem até o infinito.

Observe que a fórmula apresentada por Euler é a mesma apresentada por Giovanni Salvemini em 1742, e com uma pequena variação na notação, a mesma fórmula dada por Newton em 1676.

Explorando um pouco mais a fórmula apresentada, Euler, no parágrafo §72, nos apresenta como encontrar qualquer termo da série a partir dos termos precedentes. Assim, um termo qualquer desta série, é dado por

$$MP^{\frac{m-kn}{n}}Q^k$$

então o termo seguinte desta série será

$$\frac{m-kn}{(k+1)n}MP^{\frac{m-(k+1)n}{n}}Q^{k+1}.$$

Assim, Euler nota que no termo seguinte, o expoente de P decresce uma unidade, enquanto o expoente de Q aumenta uma unidade. Além disso, podemos reescrever a fórmula geral $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ por $P^{\frac{m}{n}}\left(1+\dfrac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$, de modo que podemos desenvolver a fórmula $\left(1+\dfrac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$ em séries infinitas e depois multiplicá-la por $P^{\frac{m}{n}}$. E portanto, ele conclui que podemos atribuir a m, não apenas valores inteiros, mas também fracionários.

Aqui observamos que o fator $\left(1+\dfrac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$ da fórmula reescrita foi dado originalmente em séries infinitas por James Gregory em 1670, para calcular anti-logaritmos.

Feito estas considerações, Euler continua sua apresentação das séries infinitas, agora, considerando que $\dfrac{Q}{P}$ é uma função de z. Assim,

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + etc.$$

Portanto, uma vez estabelecida esta fórmula, Euler faz uma pequena modificação nesta, segundo ele, para seguir as regras das progressões, e apresenta a seguinte fórmula

$$(1+z)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}z + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + etc. \tag{5.8}$$

Prosseguindo, no parágrafo §73, Euler coloca $z = \alpha z$ na fórmula (5.8), e obtém a série

$$(1+\alpha z)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}\alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^3 + etc.$$

onde a fórmula geral desta série pode ser escrita como

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots + Mz^{n-1} + Nz^n + etc.$$

e qualquer coeficiente N desta série será determinado a partir do termo precedente M de modo que temos

$$N = \frac{m-n}{n}\alpha M.$$

No parágrafo §74, Euler toma $z = \alpha z + \beta z^2$ na fórmula (5.8), e obtém a série

$$(1+\alpha z+\beta z^2)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}(\alpha z+\beta z^2) + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}(\alpha z+\beta z^2)^2 + etc.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}(1+\alpha z+\beta z^2)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}\alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^3 + etc.\\ + \frac{m-1}{1}\beta z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}2\alpha\beta z^3 + etc.\end{aligned}$$

onde a fórmula geral desta série pode ser escrita como

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n + etc.$$

e qualquer coeficiente desta série será determinado a partir dos dois termos precedentes, de modo que teremos

$$N = \frac{m-n}{n}\alpha M + \frac{2m-n}{n}\beta L.$$

Dando continuidade ao seu estudo, no parágrafo §75, Euler substitui $z = \alpha + \beta z^2 + \gamma z^3$ na fórmula (5.8), e obtém a série

$$(1+\alpha+\beta z^2+\gamma z^3)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}(\alpha+\beta z^2+\gamma z^3) + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}(\alpha+\beta z^2+\gamma z^3)^2 + etc.$$

Reordenando todos os termos da série em relação as potências de z, colocadas em ordem crescente, obtemos

$$\begin{aligned}(1+\alpha+\beta z^2+\gamma z^3)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}\alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^3 + etc.\\ + \frac{m-1}{1}\beta z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}2\alpha\beta z^3 + etc.\\ + \frac{m-1}{1}\gamma z^3 + etc.\end{aligned}$$

onde a fórmula geral desta série pode ser escrita como

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n + etc.$$

e qualquer coeficiente desta série será determinado a partir dos três termos precedentes, de modo que teremos

$$N = \frac{m-n}{n}\alpha M + \frac{2m-n}{n}\beta L + \frac{3m-n}{n}\gamma K.$$

Posto isto, Euler generaliza os resultados anteriores. Portanto, se podemos escrever

$$(1+\alpha+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+etc.)^{m-1}=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+etc.$$

cada termo desta série será definido a partir dos termos precedentes, de modo que, teremos

$$A=\frac{m-1}{1}\alpha$$

$$B=\frac{m-2}{2}\alpha A+\frac{2m-2}{2}\beta$$

$$C=\frac{m-3}{3}\alpha B+\frac{2m-3}{3}\beta A+\frac{3m-3}{3}\gamma$$

$$D=\frac{m-4}{4}\alpha C+\frac{2m-4}{4}\beta B+\frac{3m-4}{4}\gamma A+\frac{4m-4}{4}\delta$$

$$E=\frac{m-5}{5}\alpha D+\frac{2m-5}{5}\beta C+\frac{3m-5}{5}\gamma B+\frac{4m-4}{4}\delta A+\frac{5m-5}{5}\epsilon$$

etc.

Segundo Euler, a descrição desta regra concorda com a série encontrada no parágrafo §68, onde no lugar de m escrevemos $-m$ e as letras α, β, γ, δ, *etc.* são tomadas negativas, de fato, as séries são as mesmas. De acordo com Euler, ele não fará a prova da regra dessas progressões, pois com ajuda de alguns *princípios do cálculo diferencial* a prova segue muito mais facilmente, para esse momento "a verdade por aplicação bastará para provar os exemplos de todos os tipos."

Salientamos que Euler nesta obra apenas apresentou o Teorema Binomial Generalizado e o utilizou. Mas adiante, nesta tese, apresentaremos as ideias dos artigos *Demonstratio Theorematis Neutoniani De Evolutione Potestatum Binomii Pro Casibus, Quibus Exponentes Non Sunt Numeri Integri* (1775) e *Nova Demonstratio Quod Evolutio Potestatum Binomii Newtoniana Etiam Pro Exponentibus Fractis Valet* (1789) onde Euler busca uma demonstração para este teorema.

É de suma importância observarmos que no MCS os objetos são constituídos e sempre existem no interior de uma atividade, portanto, no Capítulo V do livro *Elements of Algebra* a atividade era representar as frações em séries infinitas, e nesta seção, a atividade é transformar uma *função* em séries de potências. Assim, podemos observar diferentes produções de significado para o objeto denominado "série".

5.5 Do Desenvolvimento das Potências Irracionais por Séries Infinitas[4]

Utilizando a seção anterior, vamos produzir significado e analisar o Capítulo XII, cujo título é *Do Desenvolvimento das Potências Irracionais por Séries Infinitas.*

[4]O tradutor inglês mudou a palavra desenvolvimento, que é utilizada em alemão e francês, por expressão.

Nos artigos *361* e *362*, Euler apresenta a fórmula do Binômio de Newton.

Euler: 361. Uma vez que mostramos o método de encontrar qualquer potência da raiz $a+b$, contudo, o expoente pode ser tão grande, que somos capazes de expressar, em geral, a potência de $a+b$, cujo expoente é indeterminado; pois é evidente que se representarmos o expoente por n, teremos pela regra já dada (Art. 348 e a seguinte):[5]

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 \\ &\quad + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 + etc.\end{aligned}$$

Euler: 362. Se a mesma potência da raiz $a-b$ foi solicitada, precisamos apenas mudar os sinais do segundo, quarto, sexto, etc. termos, e teremos

$$\begin{aligned}(a-b)^n &= a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 \\ &\quad + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 - etc.\end{aligned}$$

Assim, uma vez que Euler enuncia estas duas fórmulas, ele irá aplicá-las para expoentes irracionais neste capítulo. Como vimos na seção anterior, Euler apresentou em seu livro *Introduction to the Analysis of the Infinite* a generalização do Binômio de Newton para expoentes fracionários, assim este era um conhecimento que Euler possuía a respeito do teorema binomial, e era aceito e legitimado pelos seus interlocutores, os matemáticos de sua época. Portanto, nos artigos *363* e *364*, ele nos apresentará um exemplo da aplicação do teorema binomial para o caso de $n = \frac{1}{2}$.

Euler: 363. Estas fórmulas são notavelmente úteis, uma vez que elas também servem para expressar todos os tipos de radicais, pois mostramos que todas as quantidades irracionais podem assumir a forma de potências cujos expoentes são fracionários, e que $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ e $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$, etc.; temos assim,

$$\sqrt[2]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}\ e\ \sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}},\ etc.$$

Consequentemente, se desejarmos encontrar a raiz quadrada de $a+b$, temos apenas que substituir no expoente n a fração $\frac{1}{2}$, na fórmula geral, (Art. 361)[6]*, e teremos em primeiro lugar, para os coeficientes,*

$$\frac{n}{1} = \frac{1}{2},\ \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4},\ \frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6},\ \frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8},\ \frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10},\ \frac{n-5}{5} = -\frac{9}{12}.$$

Então,

$$a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a},\ a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a}},\ a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}},\ a^{n-3} = \frac{1}{a^2\sqrt{a}},\ etc.$$

ou podemos expressar essas potências de a da seguinte forma:

$$a^n = \sqrt{a},\ a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a},\ a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2},\ a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3},\ a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4},\ etc.$$

[5]Inserção do tradutor francês.

[6]Inserção do tradutor francês.

Euler: 364. Isto sendo estabelecido, a raiz quadrada de $a+b$ pode ser expressa da seguinte forma:

$$\sqrt{(a+b)} \quad = \quad \sqrt{a}+\frac{1}{2}b\frac{\sqrt{a}}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}b^2\frac{\sqrt{a}}{a^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}b^3\frac{\sqrt{a}}{a^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}b^4\frac{\sqrt{a}}{a^4}+etc.$$

Deste modo, temos um método de extrair a raiz quadrada utilizando séries infinitas. Mas Euler observa que nesta expansão, ainda, precisamos extrair a raiz quadrada de a, então se a for um quadrado, eliminamos a raiz.

Euler: 365. Se a então for um número quadrado, podemos atribuir o valor de $\sqrt{a}$, e consequentemente, a raiz quadrada de $a+b$ pode ser expressa por uma série infinita, sem qualquer sinal radical.

Seja, por exemplo, $a=c^2$, teremos $\sqrt{a}=c$, então

$$\sqrt{(c^2+b)} \quad = \quad c+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{c}-\frac{1}{8}\cdot\frac{b^2}{c^3}+\frac{1}{16}\cdot\frac{b^3}{c^5}-\frac{5}{128}\cdot\frac{b^4}{c^7}+etc.$$

Portanto, vemos que não há nenhum número cuja raiz quadrada não podemos extrair dessa maneira. Desde que cada número pode ser decomposto em duas partes, uma que é um quadrado representado por c^2. Se, por exemplo, a raiz quadrada de 6 foi solicitada, fazemos $6=4+2$, consequentemente, $c^2=4$, $c=2$ e $b=2$, de onde resulta

$$\sqrt{6}=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\frac{5}{1024}+etc.$$

Se tomarmos apenas os dois primeiros termos desta série, teremos $2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, cujo o quadrado $\frac{25}{4}$, é $\frac{1}{4}$ maior do que 6. Mas se considerarmos três termos, temos $2\frac{7}{16}=\frac{39}{16}$, cujo o quadrado $\frac{1521}{256}$, é ainda muito pequeno por $\frac{15}{256}$.

Euler: 366. Uma vez que, neste exemplo, $\frac{5}{2}$ aproxima-se muito de perto do verdadeiro valor de $\sqrt{6}$, tomaremos para 6 a quantidade equivalente $\frac{25}{4}-\frac{1}{4}$.

Assim, $c^2=\frac{25}{4}$, $c=\frac{5}{2}$ e $b=-\frac{1}{4}$. Calculando apenas os dois primeiros termos, encontramos

$$\sqrt{6}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}-\frac{1}{20}=\frac{49}{20},$$

o quadrado desta fração sendo $\frac{2401}{400}$, excede o quadrado de $\sqrt{6}$ apenas por $\frac{1}{400}$.

Agora, fazendo $6=\frac{2401}{400}-\frac{1}{400}$, então $c=\frac{49}{20}$ e $b=-\frac{1}{400}$. Ainda tomando apenas os dois primeiros termos, temos

$$\sqrt{6}=\frac{49}{20}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\frac{49}{20}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\frac{49}{20}-\frac{1}{1960}=\frac{4801}{1960},$$

cujo o quadrado é $\frac{23049601}{3841600}$. E 6 quando reduzido ao mesmo denominador, é igual a $\frac{23049600}{3841600}$, então o erro é apenas $\frac{1}{3841600}$.

Observe que no artigo *365*, Euler estabeleceu uma nova fórmula para extrair a raiz quadrada de um número, dado que esse número pode ser decomposto em duas partes onde uma das partes é um número quadrado. Deste modo, ele nos apresenta como calcular $\sqrt{6}$. Primeiro, ele decompõem o número 6 em duas partes, sendo uma delas um quadrado, isto é, $6 = 4 + 2$, consequentemente, $c^2 = 4$, $c = 2$ e $b = 2$. Depois, aplicou a fórmula:

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024} + etc.$$

A fim de obter uma aproximação numérica para $\sqrt{6}$, Euler considerou as somas parciais desta série. Portanto, ele tomou os dois primeiros termos desta série:

$$\sqrt{6} \cong 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta equação, obteve

$$(\sqrt{6})^2 \cong \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Longrightarrow 6 \cong \frac{25}{4} = \frac{24}{4} + \frac{1}{4} = 6\frac{1}{4}$$

ou seja, a soma dos dois primeiros termos ao quadrado excede o valor de 6 por $\frac{1}{4}$.

Em seguida, Euler considerou os três primeiros termos desta série e obteve

$$\sqrt{6} \cong 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{39}{16}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta equação, temos

$$(\sqrt{6})^2 \cong \left(\frac{39}{16}\right)^2 \Longrightarrow 6 \cong \frac{1521}{256} \Longrightarrow 6 = \frac{1536}{256} > \frac{1521}{256}$$

ou seja, 6 excede a soma dos três primeiros termos da série ao quadrado por $\frac{15}{256}$.

Assim sendo, para uma melhor aproximação do valor de $\sqrt{6}$, no artigo *366*, Euler faz uma nova decomposição do número 6, ou seja, ele toma $6 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}$. Assim, $c^2 = \frac{25}{4}$, $c = \frac{5}{2}$ e $b = -\frac{1}{4}$. E aplicando a fórmula do artigo *365*, obtém

$$\begin{aligned} \sqrt{6} &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\frac{1}{16}}{\frac{125}{8}} + \frac{1}{16} \cdot \frac{-\frac{1}{64}}{\frac{3125}{32}} - etc. \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{20} - \frac{1}{2000} - \frac{1}{100000} - etc. \end{aligned}$$

A fim de obter uma aproximação para $\sqrt{6}$, Euler toma os dois primeiros termos desta série e obtém

$$\sqrt{6} \cong \frac{5}{2} - \frac{1}{20} = \frac{49}{20}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta equação, obteve

$$(\sqrt{6})^2 \cong \left(\frac{49}{20}\right)^2 \Longrightarrow 6 \cong \frac{2401}{400} = \frac{2400}{400} + \frac{1}{400}$$

ou seja, a soma dos dois primeiros termos ao quadrado excede o quadrado de $\sqrt{6}$ por $\frac{1}{400}$.

Novamente para uma melhor aproximação de $\sqrt{6}$, Euler toma $6 = \frac{2401}{400} - \frac{1}{400}$, onde $c^2 = \frac{2401}{400}$, $c = \frac{49}{20}$ e $b = -\frac{1}{400}$. Utilizando a fórmula do artigo *365*, obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{6} &= \frac{49}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\frac{1}{160000}}{\frac{117649}{8000}} + etc. \\ &= \frac{49}{20} - \frac{1}{1960} - \frac{1}{18823840} + etc. \end{aligned}$$

Considerando os dois primeiros termos desta série para aproximar o valor de $\sqrt{6}$, temos

$$\sqrt{6} \cong \frac{49}{20} - \frac{1}{1960} = \frac{4801}{1960}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta equação, obtemos

$$(\sqrt{6})^2 \cong \left(\frac{4801}{1960}\right)^2 \Longrightarrow 6 \cong \frac{23049601}{3841600} = \frac{23049600}{3841600} + \frac{1}{3841600} = 6 + \frac{1}{3841600}$$

Portanto, a soma dos dois primeiros termos ao quadrado excede o quadrado de $\sqrt{6}$ por $\frac{1}{3841600}$.

Queremos destacar que hoje, ao calcularmos $\sqrt{6}$ em uma calculadora obtemos o valor de $2,449489743$ e o valor que Euler obteve foi $\frac{4801}{1960} = 2,449489796$, ou seja, o erro de aproximação entre a utilização de séries infinitas e a calculadora é de $5,313519 \times 10^{-8}$.

Dando continuidade a este capítulo, Euler, nos artigos *367* e *368*, expressa a raiz cúbica de $a + b$ por séries infinitas, depois apresenta a expansão da raiz cúbica supondo a um cubo. Prosseguindo, no artigo *369*, ele apresenta um exemplo numérico para extrair a raiz cúbica por séries infinitas.

Destacamos que neste capítulo Euler nos mostrou como extrair as raízes quadradas e cúbicas de um binômio $a + b$ utilizando o Teorema Binomial onde n é um número racional, isto é, Euler utilizou as séries infinitas para calcular as raízes quadradas e cúbicas de um binômio. Observamos que a utilização da fórmula do Teorema Binomial fazia parte do repertório de Euler, como mostramos na seção anterior, logo a sua utilização era legítima e não havia necessidade de sua demonstração. Em termos do nosso modelo teórico, podemos dizer que Euler produziu significado para o cálculo das raízes quadradas e cúbicas de um binômio $a + b$ em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pelo Teorema Binomial Generalizado, ou seja, por Séries Binomiais.

Com a finalidade de compararmos a generalização do Binômio de Newton apresentada por Euler nesta seção com a teoria atual, apresentaremos na próxima seção a prova do Teorema Binomial Generalizado.

5.6 Séries de Taylor e de Maclaurin

A série de Taylor recebeu esse nome em homenagem ao matemático inglês Brook Taylor e a série de Maclaurin em homenagem ao matemático escocês Colin Maclaurin, que a popularizou em seu livro-texto de cálculo *Treatise of Fluxions*, publicado em 1742. A série de Taylor era conhecida pelo matemático escocês James Gregory em 1668 e pelo matemático suíço Johann Bernoulli no ano de 1690. Taylor aparentemente não conhecia os trabalhos destes dois matemáticos quando publicou suas descobertas sobre séries em 1715 no livro *Methodus incrementorum directa et inversa*. A primeira e mais rigorosa prova do "Teorema de Taylor" foi feita um século mais tarde por Augustin Louis Cauchy.

Utilizaremos como bibliografia básica para esta seção Stewart (2011), capítulo 11.

Vamos agora investigar quais funções têm representações em série de potências.

Iniciemos supondo que f seja qualquer função que possa ser representada por uma série de potências:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \tag{5.9}$$

para $|x-a| < R$.

Vamos determinar os coeficientes c_n que devem aparecer nos termos de f. Observe que, se colocarmos $x = a$ na equação (5.9), então todos os termos após o primeiro serão 0 e obteremos

$$f(a) = c_0.$$

Pelo Teorema A.3.3, podemos diferenciar a série na Equação 5.9, termo a termo, e obtemos:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \tag{5.10}$$

para $|x-a| < R$, e substituindo $x = a$ na Equação 5.10, teremos

$$f'(a) = c_1.$$

Agora, vamos derivar ambos os lados da Equação 5.10, obteremos

$$f''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-a) + 3\cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \tag{5.11}$$

para $|x-a|<R$, e mais uma vez substituindo $x=a$ na Equação 5.11, teremos

$$f''(a) = 2c_2.$$

Aplicando o procedimento mais uma vez, a derivada da Equação 5.11 resulta

$$f'''(x) \quad = \quad 2\cdot 3c_3 + 2\cdot 3\cdot 4c_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5c_5(x-a)^2 + \cdots \tag{5.12}$$

para $|x-a|<R$, e substituindo $x=a$ na Equação 5.12, teremos

$$f'''(a) = 2\cdot 3c_3 = 3!c_3.$$

Desse modo podemos observar o padrão. Se continuarmos a derivar e substituir $x=a$, obteremos

$$f^{(n)}(a) = 2\cdot 3\cdot 4\cdots c_n = n!c_n.$$

Isolando o n-ésimo coeficiente c_n nessa equação, teremos

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Essa fórmula permanecerá válida mesmo para $n=0$ se adotarmos as convenções de que $0!=1$ e $f^{(0)}=f$. Assim, demostramos o seguinte teorema:

Teorema 5.6.1. *Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em a, isto é, se*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n \quad \textit{para} \quad |x-a|<R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Substituindo essa fórmula para c_n de volta na série, vemos que, se f tiver uma expansão em série de potências em a, então ela deve ser da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Essa série encontrada é chamada **série de Taylor da função f em a** (ou em torno de a ou centrada em a).

Para o caso especial $a = 0$, a série de Taylor torna-se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots$$

Esse caso surge com frequência e lhe foi dado o nome especial de **série de Maclaurin**.

Desse modo mostramos que, se f puder ser representada como uma série de potências em torno de a, então f é igual à soma de sua série de Taylor.

Vamos determinar a série de Maclaurin de $f(x) = (1+x)^k$, onde k é um número real qualquer. Temos:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = (1+x)^k & f(0) = 1 \\
f'(x) = k(1+x)^{k-1} & f'(0) = k \\
f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) = k(k-1) \\
f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) = k(k-1)(k-2) \\
\quad \vdots & \quad \vdots \\
f^n(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} & f^n(0) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)
\end{array}$$

Portanto, a série de Maclaurin de $f(x) = (1+x)^k$ é

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n$$

Essa série é chamada **série binomial**. Escrevendo o seu n-ésimo termo por $a_n = \dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)\cdot(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{k(k-1)\cdots(k-n+1)x^n}\right| \\
&= \frac{|k-n|}{n+1}|x| \\
&= \frac{\left|1-\frac{k}{n}\right|}{1+\frac{1}{n}}|x| \longrightarrow |x| \quad \text{quando} \quad n \to +\infty
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teste da Razão, a Série Binomial converge se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$.

A notação tradicional para os coeficientes na série binomial é

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}, \quad n \geq 1 \quad \text{e} \quad \binom{k}{0} = 1 \tag{5.13}$$

e estes são chamados **coeficientes binomiais**.

Teorema 5.6.2 (A Série Binomial)**.** *Se k for um número real qualquer e $|x| < 1$, então*

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Este teorema afirma que $(1+x)^k$ é igual à soma de sua série de Maclaurin.

Antes de demonstrarmos o Teorema 5.6.2 precisamos de dois resultados do Cálculo.

Teorema 5.6.3 (Teorema do Valor Médio)**.** *Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existirá pelo menos um c em $]a, b[$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Teorema 5.6.4. *Seja f uma função derivável em um certo intervalo I. Se $f'(x) = 0$ em todo x do intervalo I, então existirá uma constante k tal que $f(x) = k$ para todo x em I.*

Agora, podemos demonstrar o Teorema 5.6.2.

Demonstração. Vimos anteriormente que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k}{n} x^n$ é convergente para $|x| < 1$.

1^a. **Afirmação**. Seja $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k}{n} x^n$. Logo, para $|x| < 1$ temos $g'(x) = \dfrac{kg(x)}{1+x}$.

De fato, segue da definição dos coeficientes binomiais dado em 5.13 e do Teorema A.3.3 que g é derivável e que

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{k}{n} nx^{n-1}$$

Multiplicando, ambos os lados desta equação por $1 + x$ obtemos

$$\begin{aligned} (1+x)g'(x) &= (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{k}{n} nx^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{k}{n} nx^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{k}{n} nx^{n} \end{aligned}$$

Substituindo n por $n + 1$ na primeira série, teremos:

$$\begin{aligned}
(1+x)g'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{k}{n+1}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{k}{n} nx^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left[\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)}{(n+1)!}\right]x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n\left[\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}\right]x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(n+1)k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)+n(n+1)k(k-1)\cdots(k-n+1)}{(n+1)n!}\right)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n+n)}{(n+1)n!}x^n \\
&= k\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n \\
&= k\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{k}{n}x^n \\
&= kg(x)
\end{aligned}$$

Portanto, $g'(x) = \dfrac{kg(x)}{1+x}$.

2^a. Afirmação. Seja $h(x) = (1+x)^{-k}g(x)$. Logo, $h'(x) = 0$ em $]-1,1[$.

De fato, derivando a equação $h(x) = (1+x)^{-k}g(x)$, temos

$$\begin{aligned}
h'(x) &= -k(1+x)^{-k-1}g(x) + (1+x)^{-k}g'(x) \\
&= -k(1+x)^{-k-1}g(x) + (1+x)^{-k}\frac{kg(x)}{1+x} \\
&= \frac{-k(1+x)^{-k}g(x) + (1+x)^{-k}kg(x)}{1+x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

3^a. Afirmação. Vamos deduzir que $g(x) = (1+x)^k$.

Devemos observar que na "Afirmação 2", $h(x)$ deve ser constante para $x \in]-1,1[$, como temos no Teorema 5.6.4.

Sendo assim, como $h(x) = (1+x)^{-k}g(x)$ temos h(0) = g(0); e como $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{k}{n}x^n = \binom{k}{0} + \binom{k}{1}x + \cdots$ temos que $g(0) = \binom{k}{0} = 1$.

Portanto, $h(x) = h(0) = 1$ para $x \in]-1,1[$. Desse modo,

$$h(x) = 1 = (1+x)^{-k}g(x) \Longleftrightarrow g(x) = (1+x)^k \quad \text{para} \quad x \in]-1,1[$$

$\square$

Corolário 5.6.5. *Se k for um número real qualquer então a expansão de $(a+b)^k$ como série de potências é*

$$a^k + k \cdot ba^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} \cdot b^2a^{k-2} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot b^3a^{k-3} + \cdots$$

para $\left|\dfrac{b}{a}\right| < 1$.

Demonstração. Temos

$$(a+b)^k = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^k = a^k\left(1+\frac{b}{a}\right)^k$$

Por hipótese, k é um número real qualquer, e seja $\left|\dfrac{b}{a}\right| < 1$, então aplicando o Teorema 5.6.2, temos

$$\begin{aligned}
(a+b)^k &= a^k \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(\frac{b}{a}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k}{n} \frac{b^n}{a^{n-k}} \\
&= \binom{k}{0}\frac{b^0}{a^{0-k}} + \binom{k}{1}\frac{b^1}{a^{1-k}} + \binom{k}{2}\frac{b^2}{a^{2-k}} + \binom{k}{3}\frac{b^3}{a^{3-k}} + \cdots \\
&= \frac{1}{a^{-k}} + k \cdot \frac{b}{a^{1-k}} + \frac{k(k-1)}{2!} \cdot \frac{b^2}{a^{2-k}} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot \frac{b^3}{a^{3-k}} + \cdots \\
&= a^k + k \cdot ba^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} \cdot b^2a^{k-2} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot b^3a^{k-3} + \cdots
\end{aligned}$$

□

Agora, vamos analisar a Seção 5.5 que é composta pelo Capítulo XII, cujo título é *Do Desenvolvimento das Potências Irracionais por Séries Infinitas* comparando com a produção de significado que fizemos aqui para a Série Binomial.

Primeiramente, para aplicarmos o Corolário 5.6.5, precisamos que a hipótese $\left|\dfrac{b}{a}\right| < 1$ seja verdadeira. Se esta hipótese for satisfeita então vale o Teorema Binomial para n fracionário, e podemos aplicá-lo nos artigos *363* e *364* como Euler fez.

Assim, o artigo *365* expressa a raiz quadrada de 6 em séries infinitas utilizando a decomposição $6 = 4+2$. Observe que, se fizermos $a = 4$ e $b = 2$ temos $\left|\dfrac{2}{4}\right| < 1$, logo a hipótese do Corolário 5.6.5 é satisfeita e podemos usar a fórmula

$$\begin{aligned}
\sqrt{6} = (4+2)^{\frac{1}{2}} &= 4^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4^{\frac{1}{2}-1} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} \cdot 2^2 4^{\frac{1}{2}-2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} \cdot 2^3 4^{\frac{1}{2}-3} + \cdots \\
&= 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \cdots
\end{aligned}$$

que é exatamente a mesma que Euler utilizou no artigo *365*.

A cada nova decomposição do número 6 que Euler nos apresenta no artigo *366*,

$$6 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}, \qquad \left|\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{25}{4}}\right| = \left|-\frac{1}{25}\right| < 1,$$

$$6 = \frac{2401}{400} - \frac{1}{400}, \quad \left|\frac{-\frac{1}{400}}{\frac{2401}{400}}\right| = \left|-\frac{1}{2401}\right| < 1,$$

a hipótese do Corolário 5.6.5 é satisfeita, logo podemos utilizar a fórmula do Teorema Binomial para $n = \frac{1}{2}$, para aproximar o valor de $\sqrt{6}$.

Pensando em termos do nosso modelo teórico, a fórmula do Teorema Binomial para expoentes fracionários é uma crença-afirmação compartilhada pelos matemáticos de hoje e do passado. Mas, para a comunidade matemática de hoje a produção de significado para esta fórmula é feita em um Campo Semântico cujo núcleo é constituído pela série de Maclaurin e a produção de significado que Euler nos apresentou foi feita em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela própria fórmula do Binômio de Newton. Assim, temos conhecimentos distintos para a mesma crença-afirmação.

5.7 Do Desenvolvimento de Potências Negativas [7]

No último capítulo da Seção II, Euler produziu significado para o Binômio de Newton quando as potências são negativas. Assim, no Capítulo XIII, cujo título é o mesmo desta seção, os objetos que Euler irá constituir em um Campo Semântico em relação a um núcleo composto pela fórmula do Teorema Binomial terá a mesma "aparência" dos objetos que constituímos hoje em um Campo Semântico cujo núcleo é constituído pela série de Maclaurin se e somente se pudermos aplicar o Corolário 5.6.5.

> *Euler: 370. Nós já mostramos que $\frac{1}{a}$ pode ser expressa por a^{-1}. Portanto, podemos expressar $\frac{1}{a+b}$ também por $(a+b)^{-1}$. A fração $\frac{1}{a+b}$ pode ser considerada como uma potência de $a+b$, ou seja, aquela potência cujo expoente é -1; do qual segue que a série já encontrada para o valor de $(a+b)^n$ se estende também para este caso.*

> *Euler: 371. Portanto, desde que $\frac{1}{a+b}$ é o mesmo que $(a+b)^{-1}$, vamos supor, na fórmula geral (Art. 361) $n = -1$; e teremos em primeiro lugar para os coeficientes,*
>
> $$\frac{n}{1} = -1,\ \frac{n-1}{2} = -1,\ \frac{n-2}{3} = -1,\ \frac{n-3}{4} = -1,\ \frac{n-4}{5} = -1,\ etc.$$
>
> *E para as potências de a, temos*
>
> $$a^n = a^{-1} = \frac{1}{a},\ a^{n-1} = \frac{1}{a^2}{}^{8},\ a^{n-2} = \frac{1}{a^3},\ a^{n-3} = \frac{1}{a^4},\ etc.$$

[7] O tradutor inglês mudou a palavra desenvolvimento, que é utilizada em alemão e francês, por resolução.

Então,

$$(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} + etc.$$

que é a mesma série que encontramos antes por divisão.

Podemos dizer que nestes dois artigos Euler estabeleceu a utilização do Binômio de Newton para as potências negativas. De fato, dado uma fração $\frac{1}{a+b}$, podemos expressá-la por $(a+b)^{-1}$ logo era legítimo (pois vigorava o *princípio da extensão infinita*) para Euler estender a fórmula do Binômio de Newton para encontrar o desenvolvimento em série desse binômio.

Observe que Euler chama a atenção para o fato que a série infinita gerada tanto por divisão quanto pela aplicação do Binômio de Newton é a mesma. Podemos dizer, que embora Euler estivesse operando em Campos Semânticos diferentes, o objeto produzido no interior destes Campos Semânticos têm a mesma expressão, mesmo que sejam distintos. Este fato, que podemos observar pelo resíduo da sua enunciação, nos parece funcionar como se fosse uma "prova" do método encontrado, ou seja, se operarmos em Campos Semânticos distintos, e obtivermos o mesmo resultado então temos a legitimidade do resultado. Nós mostramos que este tipo de argumentação foi dado por Newton na Seção 5.3.

Na verdade, se tomarmos $c = 1$ no artigo *303* e considerarmos $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ temos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)^n$ é uma série geométrica convergente e sua soma será $\frac{1}{a+b}$. E por outro lado, se aplicarmos o Corolário 5.6.5 temos que

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - etc.$$

Portanto, neste caso, os dois métodos correspondem a mesma expressão.

Nos artigos *372* e *373*, Euler aplica a fórmula do Binômio de Newton para $n = -2, -3, -4$.

Assim, com base no padrão observado nestes artigos, Euler apresenta uma fórmula do Binômio de Newton para o caso em que o expoente n é negativo.

Euler: 374 . Os diferentes casos que foram considerados nos permitem concluir com confiança, que teremos, de modo geral, para qualquer potência negativa de $a+b$:

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^{m+2}} - \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{b^3}{a^{m+3}} + etc.$$ [9]

E, por meio desta fórmula, podemos transformar todas essas frações em séries infinitas, substituindo também as frações, ou expoentes fracionários, por m, a fim de expressar as quantidades irracionais.

[8] O tradutor francês acrescentou a igualdade a^{-2}, que foi mantida pelo tradutor inglês.

[9] A tradução inglesa apresenta essa fórmula errada:

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m\cdot b}{a^{m+1}} + \frac{m\cdot(m-1)\cdot b^2}{2\cdot a^{m+2}} - \frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot b^3}{2\cdot 3\cdot a^{m+3}} + etc.$$

Observe que se $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$, podemos tomar $k = -m$ no Corolário 5.6.5, e teremos

$$\begin{aligned}(a+b)^{-m} &= a^{-m} - m \cdot ba^{-m-1} + \frac{-m(-m-1)}{2!} \cdot b^2 a^{-m-2} + \frac{-m(-m-1)(-m-2)}{3!} \cdot \\ &= \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1} \cdot \frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m(m+1)}{2!} \cdot \frac{b^2}{a^{m+2}} - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} \cdot \frac{b^3}{a^{m+3}} + \cdots\end{aligned}$$

que é a fórmula apresentada por Euler.

Nos artigos *375*, *376* e *377*, Euler manipula as séries da maneira como Newton fez na carta de 24 de outubro de 1676, como se fosse uma "prova" dos resultados obtidos. Assim, apresentaremos apenas o artigo *375* como ilustração desta "prova", pois os outros dois são apresentados de maneira similar.

Euler: 375. As seguintes considerações ilustrarão este assunto ainda mais, pois vimos que,

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} + etc.$$

Portanto, se multiplicarmos esta série por $a+b$, o produto deverá ser 1; e isto é verdade, como veremos através da realização da multiplicação:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} + etc. \\ a+b \\ \hline 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5} + etc. \\ \quad + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} - etc. \\ \hline 1 \end{array}$$

onde todos os termos, menos o primeiro, cancelam-se com os outros.[10]

Destacamos que a justificação - *se multiplicarmos esta série por $a+b$, o produto deverá ser 1* - pode dar a Euler a certeza de dizer que "a fórmula é verdadeira", pois esta justificação é legítima para os seus interlocutores que são os matemáticos de sua época. Nos parece que uma forma de legitimar um resultado matemático na época de Euler, era produzir significados para uma *crença-afirmação* em diversos Campos Semânticos, e se após a produção de significados, encontrarmos o mesmo resultado, isto legitimava a produção de conhecimento.

Mas uma característica do grande matemático que foi Euler era buscar várias justificativas de um resultado por vários caminhos. Pensando em termos do nosso modelo teórico, podemos dizer que Euler operava em diversos Campos Semânticos. Assim, Euler em 1773 e 1776, escreveu duas demonstrações do Teorema Binomial Generalizado (Série Binomial), que apresentaremos a seguir.

[10] Explicação acrescentada pelo tradutor inglês.

5.8 Demonstratio Theorematis Neutoniani De Evolutione Potestatum Binomii Pro Casibus, Quibus Exponentes Non Sunt Numeri Integri

Em 1773 Euler escreveu o artigo intitulado *Demonstratio Theorematis Neutoniani De Evolutione Potestatum Binomii Pro Casibus, Quibus Exponentes Non Sunt Numeri Integri*, onde apresentou uma demonstração para o teorema binomial para o caso em que os expoentes não são números inteiros. Este artigo foi publicado pela primeira vez em *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 19*, 1775, p. 103 -111, e reimpresso em *Opera Omnia: Series 1*, volume 15, p. 207 - 216. Apresentaremos nesta seção as principais ideias contidas neste artigo.

Euler inicia o artigo afirmando que o desenvolvimento do binômio $(a+b)^n$ em série

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + etc.$$

onde n é um inteiro positivo, já foi demonstrado rigorosamente, mas esta fórmula é aceita, sem questionamento, para n igual a um número inteiro ou fracionário ou até mesmo irracional. Segundo Euler, esta fórmula foi mostrada verdadeira para o expoente n igual a um número inteiro positivo, mas não podemos acredita na validade desta fórmula se os expoentes são fracionários.

Assim sendo, para ilustrar este fato, Euler considera outra série

$$\frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3} + etc.$$

e calcula a soma desta série nos casos em que $n = 0, 1, 2, 3$. Apoiado nestes casos estudados, ele conclui que o valor desta série é o próprio valor de n. Isto posto, Euler afirma que para n um número inteiro positivo não há dúvidas quanto a validade da fórmula,

$$n = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3} + etc.$$

Mas se tomarmos $n = \frac{1}{2}$ esta série terá uma soma diferente do valor $\frac{1}{2}$. Do mesmo modo, Euler nos diz que a fórmula do binômio de Newton é verdadeira se n for um número inteiro positivo, mas para outros valores de n é necessário uma prova rigorosa.

Assim sendo, Euler apresentará uma demonstração que, segundo ele, será mais satisfatória do que outra já feita, isto porque sua prova não estará apoiada em indução.

Euler inicia a prova do binômio de Newton observando que se a igualdade

$$a+b = a\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

é válida então também é válida a igualdade

$$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

Portanto, tudo se resumirá ao desenvolvimento da potência $\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^n$.

Deste modo, Euler define $x = \frac{b}{a}$ e obtém $(1+x)^n$, ao qual sabemos expandir se n for um número inteiro positivo, ou seja,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}x^4 + etc.$$

Euler observa que se n não for um número inteiro positivo, não conhecemos o valor desta série. Portanto, ele assume que o valor desta série seja $[n]$, isto é,

$$[n] = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}x^4 + etc.$$

E salienta que, se n for um inteiro positivo devemos ter

$$[n] = (1+x)^n$$

e queremos que isto ocorra para os demais valores de n.

Isto posto, Euler estuda o produto de duas séries deste tipo

$$[m] = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}x^2 + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}x^3 + etc.$$

e

$$[n] = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^3 + etc.$$

ou seja, o produto $[m]\cdot[n]$ será expresso na forma

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + etc. \tag{5.14}$$

e por outro lado ao multiplicarmos $[n]$ por $[m]$, obtemos

$$\begin{aligned}[m]\cdot[n] \;=\; & 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}x^2 + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}x^3 + etc.\\ & \frac{n}{1}x + \frac{m}{1}\cdot\frac{n}{1}x^2 + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n}{1}x^3 + etc.\\ & \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^2 + \frac{m}{1}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^3 + etc.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Comparando as expressões (5.14) e (5.15), temos que

$$A = m + n$$

e

$$\begin{aligned}
B &= \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}\cdot\frac{n}{1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\\
&= \frac{m^2-m}{2}+m\cdot n+\frac{n^2-n}{2}\\
&= \frac{m+n}{1}\cdot\frac{m+n-1}{2}
\end{aligned}$$

e procedendo desta forma, podemos encontrar os outros coeficientes $C, D, E, etc.$

Assim, Euler observa que se m e n são números inteiros positivos então temos

$$[m]=(1+x)^m \quad \text{e} \quad [n]=(1+x)^n$$

onde o produto destas duas fórmulas resulta

$$[m]\cdot[n]=(1+x)^{m+n}$$

e podemos desenvolver $(1+x)^{m+n}$ pelo binômio de Newton, ou seja,

$$(1+x)^{m+n}=1+\frac{m+n}{1}x+\frac{m+n}{1}\cdot\frac{m+n-1}{2}x^2+\frac{m+n}{1}\cdot\frac{m+n-1}{2}\cdot\frac{m+n-2}{3}x^3+etc.$$

Isto posto, podemos escrever a série acima pelo símbolo $[m+n]$ e temos então

$$[m]\cdot[n]=[m+n] \tag{5.16}$$

Em seguida, Euler generaliza (5.16), para mais de dois fatores, ou seja,

$$\begin{aligned}
[m]\cdot[n] &= [m+n]\\
[m]\cdot[n]\cdot[p] &= [m+n+p]\\
[m]\cdot[n]\cdot[p]\cdot[q] &= [m+n+p+q]
\end{aligned}$$

e se tivermos $m=n=p=q$ ocorrem as seguintes potências

$$[m]^2=[2m],\quad [m]^3=[3m],\quad [m]^4=[4m],\quad etc.$$

e de modo geral

$$[m]^a=[am]$$

onde a indica qualquer número inteiro positivo.

Sendo assim, Euler considera i um número inteiro positivo tal que $2m=i$, de modo que $m=\frac{i}{2}$. Logo,

$$[m]^2 = [2m] = [i]$$

ou seja,

$$\left[\frac{i}{2}\right]^2 = [i]$$

Mas desde que i é um número inteiro positivo, temos

$$[i] = (1+x)^i$$

e assim teremos

$$\left[\frac{i}{2}\right]^2 = (1+x)^i$$

Tomando a raiz quadrada de ambos os lados desta igualdade, obtemos

$$\left[\frac{i}{2}\right] = (1+x)^{\frac{i}{2}}$$

Portanto, Euler conclui que o teorema do binômio de Newton é verdadeiro, mesmo nos casos em que o expoente n é uma fração do tipo $\frac{i}{2}$. Euler continua sua produção de significado tomando $3m = i$, e conclui que a fórmula do binômio de Newton é verdadeira para o expoente fracionário da forma $\frac{i}{3}$, e portanto, de modo geral, conclui que

$$\left[\frac{i}{a}\right] = (1+x)^{\frac{i}{a}}$$

de onde o teorema se mostra verdadeiro para o expoente n sendo da forma $\frac{i}{a}$.

Para finalizar este artigo, Euler afirma que a fórmula do binômio de Newton também é válida se o expoente n for um número negativo. De fato, Euler considera novamente a igualdade

$$[m] \cdot [n] = [m+n]$$

onde m é um número inteiro positivo ou fracionário, pois isto já foi mostrado, assim

$$[m] = (1+x)^m$$

Euler define $n = -m$ logo $m + n = 0$. Portanto,

$$[m+n] = [0] = (1+x)^0 = 1.$$

Agora, temos

$$\begin{array}{lcl} [m]\cdot[n] & = & [m+n] \\ [m]\cdot[-m] & = & [m-n]=[0]=1 \\ (1+x)^m\cdot[-m] & = & 1 \end{array}$$

de onde concluímos que

$$[-m]=\frac{1}{(1+x)^m}=(1+x)^{-m}.$$

Segundo Euler, está provado verdadeiro o teorema do binômio de Newton para o expoente n igual a qualquer número negativo. Portanto, ele concluí o artigo dizendo que este teorema, de fato, foi confirmado ser verdadeiro por um raciocínio rigoroso.

Mas três anos depois Euler escreveu uma nova demonstração para este teorema. Como veremos a seguir.

5.9 Nova Demonstratio Quod Evolutio Potestatum Binomii Newtoniana Etiam Pro Exponentibus Fractis Valeat

Em 1776, Euler escreveu um artigo intitulado *Nova Demonstratio Quod Evolutio Potestatum Binomii Newtoniana Etiam Pro Exponentibus Fractis Valeat*, onde demonstra novamente o teorema binomial para expoentes fracionários ou negativos. Este artigo foi publicado pela primeira vez em *Nova Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae 5*, 1789, p. 52-58, e reimpresso em *Opera Omnia: Series 1*, volume 16, p. 112 - 121. Neste artigo, o autor nos diz que até aquele momento muitos matemáticos tentaram demonstrá-lo, mas nunca chegaram a uma demonstração satisfatória. Assim, segundo ele, apresentará uma demonstração que será satisfatória para os matemáticos.

Euler inicia o artigo afirmando que Newton definiu a fórmula para as potências de $(1+x)^n$,

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+etc.$$

cuja validade só foi provada para o caso onde n é um número inteiro positivo.

Portanto, ele considera a equação

$$(1+x)^n=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+etc. \tag{5.17}$$

e afirma que se n for um número inteiro positivo então sabemos determinar as letras maiúsculas em (5.17), ou seja,

$$A=\frac{n}{1};\quad B=\frac{n-1}{2}A;\quad C=\frac{n-2}{3}B;\quad D=\frac{n-3}{4}C;\quad etc.$$

Isto posto, neste artigo Euler discutirá um método para descobrir estes coeficientes mesmo quando n não for um número inteiro positivo.

Inicialmente ele observa que o primeiro termo desta série é sempre 1, pois quando $x = 0$ em (5.17), o lado esquerdo da equação é igual a 1 e do lado direito todos os termos com exceção de 1 desaparecem. Em seguida, ele analisa o caso em que $n = 0$, e novamente verifica que a equação (5.17) se mantém verdadeira.

Assim, Euler nos diz que de forma semelhante temos

$$(1+x)^{n+1} = 1 + A'x + B'x^2 + C'x^3 + D'x^4 + etc. \tag{5.18}$$

E recordando que $(1+x)^{n+1} = (1+x)\cdot(1+x)^n$, ele constata que a Equação 5.18 surgiu a partir da multiplicação da Equação 5.17 por $1+x$, assim

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)\cdot(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + etc.) \\
&= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + etc. \\
&\qquad\quad x + Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + etc.
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(1+x)^{n+1} = 1 + (A+1)x + (B+A)x^2 + (C+B)x^3 + (D+C)x^4 + etc. \tag{5.19}$$

Comparando os coeficientes de x na Equação 5.19 com a Equação 5.18, obtemos as seguintes equações

$$\begin{array}{rcl}
A' = A + 1 & ou & A' - A = 1 \\
B' = B + A & ou & B' - B = A \\
C' = C + B & ou & C' - C = B \\
D' = D + C & ou & D' - D = C \\
E' = E + D & ou & E' - E = D \\
etc. & &
\end{array}$$

portanto, de modo geral, podemos escrever $N' - N = M$. Assim, Euler nos diz que precisamos descobrir como a letra N é determinada e devemos encontrar o valor da letra N', que surge da expansão do binômio de ordem $n+1$. Para isto, ele enuncia cinco lemas. Que apresentaremos a seguir, utilizando notação atual.

Lema 1: $M = \alpha \Longleftrightarrow N = \alpha n$.

Lema 2: $M = \alpha n \Longleftrightarrow N = \frac{\alpha}{2}n(n-1)$.

Lema 3: $M = \alpha n(n-1) \Longleftrightarrow N = \frac{\alpha}{3}n(n-1)(n-2)$.

Lema 4: $M = \alpha n(n-1)(n-2) \Longleftrightarrow N = \frac{\alpha}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$.

Lema 5: $M = \alpha n(n-1)(n-2)(n-3) \Longleftrightarrow N = \frac{\alpha}{5}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.

E a partir desses lemas, Euler conclui que:

Se $M = \alpha n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-\lambda)$ então

$$N = \frac{\alpha}{\lambda+2}n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-\lambda-1).$$

Assim sendo, Euler estabeleceu uma regra para descobrir os coeficientes da expansão binomial, uma vez que as letras M e N são duas letras quaisquer consecutivas da série $A, B, C, D, etc.$

Desse modo, considerando os primeiros coeficientes $A' - A = 1$ então $M = 1$, e portanto, pelo Lema 1, segue que N ou $A = n$. Segundo Euler, este valor é certamente verdadeiro pois o número utilizado é sempre o expoente n, e ele observa que as contas efetuadas anteriormente não se limitam a números inteiros. Em seguida, conhecendo o valor de A, ele utiliza a segunda equação e o Lema 2 para determinar o coeficiente B, ou seja, $B = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}$ e assim sucessivamente, ele calcula os valores dos coeficientes até a letra E, e a cada coeficiente encontrado, compara com os coeficientes do desenvolvimento do binômio de Newton.

Euler conclui o artigo, dizendo que é desnecessário continuar encontrando os demais coeficientes, pois "já está claro como a luz do meio dia" que os coeficientes que surgiram e que surgirão são os mesmos do desenvolvimento do binômio de Newton, logo a fórmula é válida, mesmo que n seja imaginário.

Observamos que somente no século XIX, Niels Henrik Abel (1802 - 1829) estendeu o teorema binomial para os números complexos.

$\sim \bigstar \sim$

Neste capítulo apresentamos como os objetos denominados Binômio de Newton e Teorema Binomial Generalizado foram tratados por Euler na sua obra *Elements of Algebra*. Além de apresentarmos outros trabalhos de Euler e de outros matemáticos que abordaram estes tópicos. Também apresentamos uma breve história desses objetos e os matemáticos que manusearam eles.

Vimos, também, como alguns objetos foram constituídos por Euler, tais como o triângulo aritmético, os números binomiais, as permutações simples, as permutações com elementos repetidos, o Binômio de Newton e a expansão multinomial. Observamos que os modos de produção de significados para estes objetos hoje, salvo as notações atuais, são os mesmos que Euler fez. Em termos do nosso modelo teórico, podemos dizer que nós (autores) e Euler estamos compartilhando "interlocutores, na medida em que dizemos coisas que o outro diria e com a autoridade que o outro aceita." (LINS, 1999, p. 82).

Agora, em relação ao Teorema Binomial generalizado, Euler no livro *Elements of Algebra* apenas afirmou que a fórmula

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 \\ &+ \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 + etc.\end{aligned}$$

é verdadeira para n um número inteiro positivo, e pelo *princípio da extensão infinita*, aplicou a fórmula para expoentes fracionários e negativos. Em termos de nosso modelo teórico, podemos dizer que Euler produziu significado para a fórmula do Binômio de Newton generalizada em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela própria fórmula do Binômio de Newton. Também mostramos que hoje, produzimos significado para a fórmula do Binômio de Newton generalizado em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela série de Taylor e pela série de Maclaurin.

Embora Euler tenha apresentado a fórmula do Binômio de Newton generalizado nos livros *Introduction to the Analysis of the Infinite* (1748) e *Elements of Algebra* (1770), ele percebeu a necessidade de demonstrar esta fórmula nos casos onde n era um número racional e um número negativo. De fato, ele buscou demonstrá-la, como apresentamos nesta tese, nos artigos *Demonstratio Theorematis Neutoniani De Evolutione Potestatum Binomii Pro Casibus, Quibus Exponentes Non Sunt Numeri Integri* (1775) e *Nova Demonstratio Quod Evolutio Potestatum Binomii Newtoniana Etiam Pro Exponentibus Fractis Valet* (1789). Destacamos que Euler, nestes dois artigos, produziu dois significados diferentes para a fórmula do Binômio de Newton, e ambas distintas da produção de significado que fazemos hoje, portanto, podemos dizer que as *crenças-afirmações* coincidem e as justificações são diferentes, logo os conhecimentos são outros.

Capítulo 6

Decimais Infinitos

A beleza está nos olhos de quem vê.
Ramón de Campoamor y Campoosorio

O propósito deste capítulo é apresentar *uma* possível produção de significado para os Capítulos XI e XII, da Parte I, Seção III intitulada Das Razões e Proporções, do livro *Elements of Algebra*.

O Capítulo XI, cujo título é *Das Progressões Geométricas* é composto por 20 artigos cuja numeração inicia-se no número *505* e termina no *524*; e o Capítulo XII, cujo título é *Das Frações Decimais Infinitas* é composto por 15 artigos cuja numeração inicia-se no *525* e termina no *539*, observamos que este é o primeiro modo de produzir significado para séries infinitas que apresentamos na Subseção 3.2.1.

Os artigos e fragmentos dos artigos que apresentaremos a seguir foram traduzidos pelos autores.

6.1 Das Progressões Geométricas

As definições, classificações, propriedades e teoremas à respeito de Progressões Geométricas (P. G.) que encontramos atualmente nos livros-textos apresentaremos no Apêndice B desta tese.

No Capítulo XI, cujo título é *Das Progressões Geométricas*, Euler apresenta a definição de *progressão geométrica* e sua classificação, a fórmula do termo geral de uma P.G., a fórmula da soma dos n termos de uma P.G. e a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita, além de fornecer vários exemplos e aplicações.

Euler inicia este capítulo definindo uma progressão geométrica.

> *Euler: 505. Uma série de números, que está sempre tornando-se um certo número de vezes maior, ou menor, é chamada uma* ***progressão geométrica****, porque cada termo está constantemente para o seguinte na mesma razão geométrica*[1]*; e o*

[1] No capítulo VI, cujo título é *Da Razão Geométrica*, Euler apresenta a definição de *razão geométrica*:

> *Euler: 440. A* ***razão geométrica*** *de dois números é encontrada pela resolução da questão,*

número que expressa quantas vezes cada termo é maior do que o precedente, é chamado o ***expoente*** *ou* ***razão****. Assim, quando o primeiro termo é 1, e o expoente, ou a razão, é 2, a progressão geométrica torna-se*

Termos	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*etc.*
Prog.	*1,*	*2,*	*4,*	*8,*	*16,*	*32,*	*64,*	*128,*	*256,*	*etc.*

Os números 1, 2, 3, etc. sempre marcam a posição que cada termo ocupa na progressão.

Observamos que podemos produzir significado para essa definição da mesma maneira que produzimos significado para a Definição B.1.1 do Apêndice B. Em seguida, Euler apresenta a fórmula do termo geral de uma P.G. e sua classificação.

Euler 506. Se supormos, em geral, que o primeiro termo seja a e a razão b, temos a seguinte progressão geométrica:

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	...	*n*
Prog.	a,	ab,	ab^2,	ab^3,	ab^4,	ab^5,	ab^6,	ab^7,	...	ab^{n-1}

De modo que, quando esta progressão consiste de n termos, o último é ab^{n-1}*. Devemos, no entanto, observar aqui, que se a razão b for maior que a unidade, os termos aumentam continuamente; se* $b = 1$*, os termos são todos iguais; e por último, se b for menor do que 1, ou uma fração, os termos diminuem continuamente. Assim, quando* $a = 1$ *e* $b = \frac{1}{2}$*, temos a progressão geométrica:*

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{8},\quad \frac{1}{16},\quad \frac{1}{32},\quad \frac{1}{64},\quad \frac{1}{128},\quad \textit{etc.}$$

Primeiro, observamos que o modo de produzir significado para a fórmula do termo geral apresentada por Euler é o mesmo que fizemos na Subseção B.1.2. Mas quanto a classificação, devemos recordar que, para Euler, o primeiro termo e a razão de uma progressão geométrica são sempre números positivos maiores do que zero. Assim, quando comparamos com a classificação apresentada na Subseção B.1.1, teremos o mesmo modo de produzir significado para as categorias: 1^a. *a*) P.G. crescente com termos positivos ($q > 1$); 2^a. *b*) P.G. constante com termos iguais e não nulos ($q = 1$) e 3^a. *a*) P.G. decrescente com termos positivos ($0 < q < 1$); pois estas são as que coincidem quanto a hipótese do primeiro termo e a razão serem números estritamente positivos. Euler mais adiante trabalhará com as P.G. alternantes, mas elas não entram aqui em sua classificação.

Assim, Euler sintetiza os objetos que devemos levar em consideração quando trabalhamos com as progressões geométricas.

Euler: 507. Aqui, portanto, temos que considerar:

1. *O primeiro termo, que chamamos de a.*
2. *O expoente, que chamo de b.*

---

quantas vezes *um número é maior do que o outro? Isto é feito dividindo um pelo o outro, e o quociente expressará a razão solicitada.*

> *3. O número de termos, que expressamos por n.*
>
> *4. E o último termo, que já vimos, é ab^{n-1}.*
>
> *De modo que, quando os três primeiros são dados, o último termo é encontrado multiplicando $n-1$ vezes a potência b, ou b^{n-1}, pelo primeiro termo a.*
>
> *Se, portanto, o 50º. termo da progressão geométrica 1, 2, 4, 8, etc. for solicitado, teremos $a = 1$, $b = 2$ e $n = 50$; consequentemente, o 50º. termo será 2^{49}; e como $2^9 = 512$, teremos $2^{10} = 1024$. Portanto, o quadrado de 2^{10}, ou $2^{20} = 1048576$, e o quadrado deste número, que é $1099511627776 = 2^{40}$. Multiplicando, portanto, este valor de 2^{40} por 2^9, ou 512, temos $2^{49} = 562949953421312$ para o 50º. termo.*

Utilizando o método empírico-indutivo, Euler apresentará a fórmula da soma dos n termos de uma P.G. Assim, a partir do artigo *508* ao *513*, Euler estudará alguns exemplos particulares, buscando relações entre eles, para generalizar a relação e chegar na elaboração da fórmula. A título de ilustração para depois comentarmos os demais artigos, apresentaremos o artigo *508*.

> *Euler: 508. Uma das principais questões que ocorre neste assunto, é encontrar a* soma *de todos os termos de uma progressão geométrica. Portanto, vamos explicar o método de fazer isso. Seja dado, em primeiro lugar, a seguinte progressão, consistindo dos dez termos:*
>
> $$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512,$$
>
> *a soma desta pode ser representada por s, ou seja,*
>
> $$s = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512;$$
>
> *dobrando ambos os lados, teremos*
>
> $$2s = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024$$
>
> *e subtraindo desta a progressão representada por s, teremos o resto $s = 1024 - 1 = 1023$, portanto a soma requerida é 1023.*

No artigo *509*, ele utiliza a mesma progressão geométrica, mas agora com uma quantidade de termos indeterminada, ou seja, n. E repete o processo para encontrar a soma dos n termos dessa P.G., ou seja, $s = 2^n - 1$. Para confirmar a validade da fórmula encontrada, no artigo *510*, Euler calcula a soma aritmética de 1, 2, 3 e 4 termos e confere o resultado encontrado com os valores quando aplicamos a fórmula. E no artigo *511*, apresenta um exemplo da utilização dessa fórmula no "cotidiano".

> *Euler: 511. Sobre este assunto, a seguinte questão é geralmente proposta. Um homem oferece vender seu cavalo na seguinte condição, ou seja, ele exige 1* **pence**[2] *para a primeira parcela, 2 para a segunda, 4 para a terceira, 8 para a quarta, e assim por diante, dobrando o preço de cada parcela sucessiva. É solicitado determinar o preço do cavalo, sendo o número das parcelas igual a 32?*
>
> *Esta questão é evidentemente reduzida a determinar a soma de todos os termos da progressão geométrica 1, 2, 4, 8, 16, etc. continuada até o 32º. termo. Agora, este*

[2] *Penny* (plural de *pence*) é uma moeda medieval utilizada na Inglaterra, como em toda a Europa Ocidental a língua oficial era o latim, os contadores simbolizavam o *penny* por *d*.

> *último termo é* 2^{31}, *e como já encontramos* $2^{20} = 1048576$, *e* $2^{10} = 1024$, *teremos* $2^{20} \cdot 2^{10} = 2^{30} = 1073741824$*; e multiplicando novamente por 2, o último termo é* $2^{31} = 2147483648$*; portanto duplicando este número, e subtraindo a unidade deste produto, a soma solicitada torna-se* 4294967295 **pence**, *que sendo reduzida, temos 17895697* ℓ. *1s. 3d. para o preço do cavalo.*[3]

Chamamos a atenção para a precisão dos cálculos apresentados por Euler, pois em uma calculadora científica comum houve erro de aproximação, para obtermos os valores apresentados por Euler foi necessário fazer os cálculos no aplicativo *Excel*.

Continuando na busca da generalização das relações observadas, Euler apresenta uma nova progressão geométrica com 7 termos, cujo primeiro termo é 1 e a razão igual a 3. Assim, no artigo *512*, ele calcula a soma desses termos do mesmo modo que procedeu no artigo *508*. No artigo *513*, ele calcula a soma dessa mesma P.G. com um número indeterminado de termos, chegando a fórmula $s = \dfrac{3^n - 1}{2}$, e depois calcula as somas parciais, fazendo n variar de 1 até 5, aritmeticamente e por meio dessa fórmula encontrada.

Deste modo, aplicando o método utilizado nos dois casos particulares estudados, onde Euler encontrou a fórmula para a soma dos n termos de uma P.G., ele buscará a fórmula geral.

> *Euler: 514. Suponhamos agora, em geral, que o primeiro termo seja* a, *a razão* b, *o número de termos* n, *e sua soma* s, *então*
>
> $$s = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots + ab^{n-1}.$$
>
> *Se multiplicarmos por* b, *temos*
>
> $$sb = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ab^5 + \ldots + ab^n,$$
>
> *e tomando a diferença entre esta e a equação acima, temos o resto* $(b-1)s = ab^n - a$, *de onde facilmente deduzimos a soma solicitada* $s = \dfrac{a \cdot (b^n - 1)}{b - 1}$. *Consequentemente, a soma de qualquer progressão geométrica é encontrada multiplicando o último termo pela razão, ou expoente da progressão, e dividindo a diferença entre este produto e o primeiro termo, pela razão diminuída por uma unidade.*

Podemos produzir significado para esse artigo do mesmo modo que produzimos significado para o Teorema B.1.2, o procedimento da demonstração é o mesmo. Em termos de nosso referencial teórico, podemos dizer que Euler e nós (hoje) produzimos o mesmo conhecimento a respeito da fórmula da soma dos n termos de uma P.G., pois Euler e nós acreditamos e afirmamos a fórmula da soma dos n termos de uma P.G., isto é, $s = \dfrac{a \cdot (b^n - 1)}{b - 1}$, e produzimos as mesmas justificações.

Nos artigos *515* e *516*, Euler apresenta dois exemplos da aplicação dessa fórmula, o primeiro é a soma dos 7 termos de uma P.G. cujo primeiro termo é igual a 3 e a razão igual a 2. O segundo, é quando a progressão geométrica possui 6 termos, cujo primeiro termo é igual a 4 e a

[3] s é uma abreviação de *solidus*, sabemos que um *solidus* equivale a 12 *denarius*. A libra é representada por ℓ, logo, uma *libra* equivale a 240 d. Uma quantia de 30 *penny* equivale a $2s$. e $6d$.

razão igual a $\frac{3}{2}$.

As progressões geométricas infinitas com razão menor do que 1 apareceram muito cedo na matemática. Segundo Kline (1972), Aristóteles reconheceu que tais séries tinham uma soma, e como vimos no Capítulo 3 deste trabalho, François Viète apresentou a fórmula para soma de uma progressão geométrica infinita na sua obra *Variorum de rebus mathematicis responsorum* (1539). Assim, podemos afirmar que Euler tinha o conhecimento dessa fórmula. Queremos destacar aqui, que Euler apresentará um outro modo de produzir significado para as séries infinitas, diferente daqueles apresentados nos Capítulos 4 e 5 desse trabalho, onde ele produziu significado para séries em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por divisões elementares e em outro Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pelo Binômio de Newton.

> *Euler: 517. Quando o expoente é menor do que 1, e, consequentemente, os termos da progressão diminuem continuamente, a soma de uma tal progressão decrescente, levada até o infinito, pode ser expressa de forma precisa.*
>
> *Por exemplo, seja o primeiro termo 1, a razão $\frac{1}{2}$ e a soma s, então:*
>
> $$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + etc.$$
>
> *até o infinito.*[4]
>
> *Se multiplicarmos por 2, temos*
>
> $$2s = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + etc.$$
>
> *até o infinito. E, subtraindo da progressão anterior, temos o resto $s = 2$ para a soma da progressão infinita proposta.*

No Capítulo 4 deste trabalho, apresentamos a produção de significado que Euler produziu para séries convergentes, ou seja, aquelas que os termos de forma gradual tornam-se menores e finalmente desaparecem completamente. Assim, ao tomar a razão da P.G. menor do que 1, a progressão geométrica será decrescente e ao levarmos a progressão até o infinito, temos uma série infinita convergente, ou seja, podemos expressar de forma precisa sua soma. Queremos destacar que essa série apresentada no artigo acima, já foi apresentada por Euler no artigo *294* e no parágrafo §107 do livro *Foundations of Differential Calculus*, ou seja, ele conhecia o valor da soma dessa série por meio de outa produção de significado.

De fato, no artigo *294*, Euler produziu significado para esta série em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela divisão elementar; e no parágrafo §107 do livro *Foundations of Differential Calculus*, Euler observou que se x é uma fração menor do que 1 então a soma da série $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ é igual a $\dfrac{1}{1-x}$, pois neste caso o erro $x^{\infty+1}$ é infinitamente pequeno, e portanto, igual a zero. E como exemplo, toma $x = \dfrac{1}{2}$ nesta série, e obtém

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + etc. = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

[4] A expressão utilizada no original alemão é *ohne Ende* que significa *sem fim.* O tradutor francês traduziu para *sans fin* que significa *interminável*, que por sua vez, o tradutor inglês traduziu para *ad infinitum.*

Agora, vamos analisar a produção de significado que Euler produziu no artigo *517*. Podemos dizer que Euler aplicou o *princípio da extensão infinita* no artigo *514* para produzir o artigo *517*, isto é, como o procedimento empregado no artigo *514* era válido para uma expressão finita logo era legítimo aplicar este processo para expressões infinitas. Desse modo, se denotarmos por s o valor da soma da série infinita

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \tag{6.1}$$

Podemos multiplicar ambos os lados da expressão (6.1) por 2, e obtemos

$$2s = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \tag{6.2}$$

Subtraindo (6.1) de (6.2), obtemos $s = 2$.

Portanto, podemos dizer que Euler estava produzindo significado para a soma desta P.G. infinita em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por operações aritméticas usuais e o *princípio da extensão infinita.*

Gostaríamos de destacar a diferença do modo de produção de significado para a soma da P.G. infinita que Euler nos apresentou no artigo *517* com a produção de significado que fazemos hoje utilizando a teoria de séries. Podemos produzir significado para este artigo da seguinte forma, como esta série é uma série geométrica cuja razão é igual a $\frac{1}{2}$ segue do Teorema 4.2.1 que esta série é convergente, logo podemos aplicar as propriedades algébricas usuais. De modo mais formal, podemos aplicar as propriedades das séries apresentadas na Subseção A.2.2, ou seja, podemos multiplicar a série por um número real dado que a série resultante será também convergente; e a soma de séries convergentes resulta em uma nova série convergente, portanto, os passos da demonstração acima para mostrar que o valor da soma da série é 2, estão todos justificados. Também podemos dizer que o conhecimento que Euler produziu e o conhecimento que produzimos hoje são distintos, pois as justificações são diferentes.

Nos artigos *518* e *519*, Euler calcula a soma de outras duas progressões geométricas infinitas, onde o primeiro termo de ambas é igual a 1 e as razões são $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$, respectivamente, do mesmo modo como procedeu no artigo *517*, isto é, denota o valor da soma por s, multiplica a soma da progressão pelo inverso da sua razão, depois subtrai desta nova soma o valor de s, chegando no valor da soma procurada.

Assim, após estudar três casos particulares, e observar o método de resolução, Euler estabelece a generalização do cálculo, ou seja, apresenta a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita.

> *Euler: 520. Se supormos, em geral, que o primeiro termo seja a, e a razão da progressão seja $\frac{b}{c}$, de modo que esta fração seja menor do que 1, e consequentemente c é maior do que b. A soma da progressão, levada até o infinito, será determinada assim:*
>
> *Faça*
>
> $$s = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} + etc.$$
>
> *até o infinito.*

Então, multiplicando por $\frac{b}{c}$, *teremos*

$$\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} + etc.$$

até o infinito.

E subtraindo esta equação da anterior, temos o resto $\left(1 - \frac{b}{c}\right) s = a$.

Consequentemente, $s = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}} = \frac{ac}{c - b}$, *multiplicando ambos, o numerador e o denominador, por* c.

A soma da progressão geométrica infinita proposta é, portanto, encontrada dividindo o primeiro termo a por 1 menos a razão, ou multiplicando o primeiro termo a pelo denominador da razão, e dividindo este produto pelo mesmo denominador diminuído pelo numerador da razão.

Observe que Euler inicia sua produção de significado para a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita considerando a razão da progressão menor do que 1. Depois ele produz significado para a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita do mesmo modo que produziu significado para a soma dos n termos de uma P.G. finita, ou seja, Euler estava operando em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por operações aritméticas e pelo *princípio da extensão infinita*. Ao compararmos com a demonstração do Teorema B.1.3 podemos afirmar que os conhecimentos produzidos são distintos, pois no caso do Teorema B.1.3, produzimos significado para essa fórmula em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por somas parciais, operações aritméticas e limites.

No artigo *Methodus Generalis Summandi Progressiones* escrito por volta de 1730/31 e publicado pela primeira vez em *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 5*, 1738, p. 91 - 105, e reimpresso em *Opera Omnia: Series 1*, volume 14, p. 42 - 72; Euler apresenta um método para estabelecer a soma de determinadas séries encontrando o termo geral e o termo somatório destas séries, e para encontrar este último utiliza diferenciação e integração. Mas antes de mostrar o seu método, ele nos apresenta um método de resolução, que segundo ele, já era bem conhecido há algum tempo. Assim, no parágrafo §4, ele inicia a sua investigação com a seguinte progressão geométrica

$$x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} + x^{a+3b} + \ldots + x^{a+(n-1)b}$$

Denotando por s a soma desta progressão, temos

$$s = x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} + x^{a+3b} + \ldots + x^{a+(n-1)b}$$

então subtraindo x^a de ambos os lados desta equação, temos

$$s - x^a = x^{a+b} + x^{a+2b} + x^{a+3b} + \ldots + x^{a+(n-1)b}$$

adicionando a ambos os lados desta equação x^{a+nb} e depois dividindo ambos os lados por x^b, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{s - x^a + x^{a+nb}}{x^b} &= \frac{x^{a+b} + x^{a+2b} + x^{a+3b} + \ldots + x^{a+(n-1)b} + x^{a+nb}}{x^b} \\
&= x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} + x^{a+3b} + \ldots + x^{a+(n-1)b} \\
&= s
\end{aligned}$$

Portanto, temos a equação

$$s - x^a + x^{a+nb} = sx^b.$$

De onde encontramos

$$s = \frac{x^a - x^{a+nb}}{1 - x^b}$$

que é a soma da progressão geométrica proposta.

Se x for uma fração menor do que 1 (e maior do que 0) e n um número infinitamente grande então $x^{a+nb} = 0$ e

$$s = \frac{x^a}{1 - x^b}$$

fornece a soma da progressão geométrica

$$x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} + x^{a+3b} + etc.$$

continuada até o infinito.

Neste artigo temos uma outra produção de significado para a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita, onde a partir da fórmula da soma dos n termos de uma P.G. finita, Euler considera x uma fração menor do que 1 e toma n infinitamente grande e obtém a fórmula. Aqui, podemos dizer que Euler produziu significado para a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela soma parcial de ordem n da P.G. infinita, por operações aritméticas e pela asserção: "se x for uma fração menor do que 1 (e maior do que 0) e n um número infinitamente grande então $x^{a+nb} = 0$".

Embora possa parecer que esta produção de significado que Euler nos apresentou seja a mesma que fazemos hoje, a menos de notação, não podemos dizer que os conhecimentos produzidos por Euler e por nós (hoje) são os mesmos uma vez que conhecimento para nós consiste em uma *crença-afirmação* junto com uma *justificação.* De fato, muitas pessoas produzem significado para a asserção:

"se x for uma fração menor do que 1 e n um número infinitamente grande então $x^{a+nb} = 0$"

de modo que, utilizando a notação moderna, temos

$$\text{"se } |x| < 1 \text{ então } \lim_{n \to +\infty} x^{a+nb} = 0\text{".}$$

Quando produzimos significado desta maneira estamos utilizando conceitos desenvolvidos posteriormente, tal como limite, e definições diferentes, tal como função, das utilizadas por Euler. Para produzirmos significados para esta asserção precisamos buscar os pressupostos de Euler.

Assim sendo, o fato de $x^{a+nb} = 0$ quando x é uma fração menor do que 1 (e maior do que 0) e n é um número infinitamente grande, pode ser justificado, empregando os pressupostos de Euler, utilizando os artigos *81* e *82*, da Parte I, Seção I, Capítulo VII, intitulado *Das frações em geral*, do livro *Elements of Algebra*, que apresentaremos a seguir:

> *Euler: 81. Portanto, nunca podemos chegar completamente em 0, ou nada, por maior que o denominador possa ser; e, consequentemente, como essas frações devem sempre preservar uma certa quantidade, podemos continuar as séries de frações no Artigo 78 [*$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$*, etc.], sem interrupção. Esta circunstância introduziu a expressão, que o denominador deve ser* infinito *ou infinitamente grande, de modo que a fração possa ser reduzida a 0, ou nada. A palavra* infinito*, na realidade, significa aqui, que nunca podemos chegar ao fim da série das* frações *acima mencionadas.*

> *Euler 82. Para expressar essa ideia, de acordo com o sentido que mencionamos acima, faremos uso do símbolo* ∞*, que consequentemente indica um número infinitamente grande. Portanto, podemos dizer que a fração* $\frac{1}{\infty}$ *é na realidade nada, porque uma fração não pode ser reduzida a nada, até que o denominador tenha sido aumentado até o* infinito.

Portanto, podemos concluir que, de fato, o conhecimento produzido por Euler é distinto do conhecimento produzido por nós (hoje) para a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita.

Vamos prosseguir com a nossa produção de significados para o Capítulo XI, *Das Progressões Geométricas.*

> *Euler: 521. Da mesma maneira, encontramos a soma das progressões, cujos os termos são alternadamente afetados pelos sinais + e −. Suponhamos, por exemplo,*
>
> $$s = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} - etc.$$
>
> *Multiplicando por* $\frac{b}{c}$*, temos*
>
> $$\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} + etc.$$
>
> *E, adicionada esta equação com a anterior, obtemos* $\left(1 + \frac{b}{c}\right)s = a$*, de onde deduzimos a soma solicitada,*
>
> $$s = \frac{a}{1 + \frac{b}{c}} \quad ou \quad s = \frac{ac}{c + b}.$$

Podemos dizer que Euler produziu significado para a fórmula da soma dos termos de uma P.G. alternante infinita do mesmo modo que produziu significado para a soma dos n termos de uma P.G. finita, ou seja, ele estava operando em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por operações aritméticas e pelo *princípio da extensão infinita*.

Observamos que Euler já havia produzido significado para esta série no artigo *298* deste livro. De fato, Euler estava operando em um outro Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela divisão. Vejamos, no artigo *298* Euler dividiu o numerador 1 pelo denominador $1+a$ e produziu a série $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6-etc.$, ou seja,

$$\frac{1}{1+a} = 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6-etc.$$

Podemos substituir $a=\frac{b}{c}$, onde $\mid \frac{b}{c} \mid < 1$, nesta série e obteremos

$$\frac{1}{1+\frac{b}{c}} = 1-\frac{b}{c}+\frac{b^2}{c^2}-\frac{b^3}{c^3}+\frac{b^4}{c^4}-\frac{b^5}{c^5}+\frac{b^6}{c^6}-etc.$$

Multiplicando por $a>0$, obtemos

$$\frac{a}{1+\frac{b}{c}} \;=\; a-\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}-\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4}-\frac{ab^5}{c^5}+\frac{ab^6}{c^6}-etc.$$

Desta forma, temos uma outra produção de significado, usando os pressupostos de Euler, para o valor da soma desta progressão geométrica infinita. Este processo de produzir significado para uma *crença-afirmação* em diversos Campos Semânticos corrobora com nossa suposição que Euler utilizava este método como uma maneira de confirmar a validade dos resultados obtidos por ele.

Podemos produzir significado para o artigo *521*, utilizando a Teoria de Séries apresentada no Apêndice A deste trabalho, da seguinte forma. Considere a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a\left(-\frac{b}{c}\right)^n \;=\; a-\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}-\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4}-\frac{ab^5}{c^5}+\frac{ab^6}{c^6}-\ldots$$

onde $\mid -\frac{b}{c} \mid < 1$, segue do Teorema A.2.1 que essa série é convergente e sua soma é

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a\left(-\frac{b}{c}\right)^n \;=\; \frac{a}{1-(-\frac{b}{c})} = \frac{a}{1+\frac{b}{c}}, \quad \mid -\frac{b}{c} \mid < 1.$$

Observamos que ao apresentar a soma dos termos de uma série geométrica infinita, Euler também conhece a soma dos termos da série alternada que se origina alternando o sinal da primeira. É o que nos mostra o próximo artigo.

Euler: 522. É evidente, portanto, que se o primeiro termo $a = \frac{3}{5}$ *e a razão for* $\frac{2}{5}$*, isto é,* $b = 2$ *e* $c = 5$*, encontraremos a soma da progressão*

$$\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625} + etc. = 1$$

desde que, subtraindo a razão de 1, temos o resto $\frac{3}{5}$*, e dividindo o primeiro termo por este resto, o quociente é 1.*

Também é evidente, se os termos forem alternadamente positivos e negativos, a progressão assume esta forma:

$$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} + etc.$$

do qual a soma será

$$\frac{a}{1 + \frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}.$$

Para finalizar o Capítulo XI, Euler apresenta dois exemplos da soma dos termos de uma P.G. infinita.

Euler: 523. Novamente, seja proposta a progressão infinita,

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + etc.$$

O primeiro termo é aqui $\frac{3}{10}$ *e a razão é* $\frac{1}{10}$*. Portanto, subtraindo este último de 1, resta* $\frac{9}{10}$*, e se dividirmos o primeiro termo por esta fração, temos* $\frac{1}{3}$ *para a soma da progressão dada. De modo que, se tomarmos apenas um termo da progressão, ou seja,* $\frac{3}{10}$*, o erro será de* $\frac{1}{30}$*.*[5]

E tomando dois termos, $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100}$*, estaria faltando ainda* $\frac{1}{300}$[6] *para fazer a soma, que já vimos é* $\frac{1}{3}$*.*

Podemos produzir significado para o artigo *523*, utilizando a fórmula apresentada por Euler no artigo *520*, da seguinte maneira:

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \ldots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Deste modo, podemos dizer que Euler produziu significado para a soma desta P.G. infinita em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita. E depois acrescentou a este núcleo as somas parciais desta P.G. infinita, ou seja, ele calculou as somas parciais e as respectivas diferenças $|s_i - \frac{1}{3}|$, onde s_i indica a i-ésima soma parcial.

[5] Este valor encontra-se errado no original alemão, nas traduções francesa e inglesa, $\frac{1}{10}$.

[6] Este valor encontra-se errado no original alemão, nas traduções francesa e inglesa, $\frac{1}{100}$.

$$\begin{aligned} s_1 &= \tfrac{3}{10}, & |s_1 - \tfrac{1}{3}| = \tfrac{1}{30}, \\ s_2 &= \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{100} = \tfrac{33}{100}, & |s_2 - \tfrac{1}{3}| = \tfrac{1}{300}. \end{aligned}$$

Euler: 524. Agora, seja dada a progressão infinita,

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{9}{100000} + etc.$$

O primeiro termo é 9 e a razão é $\frac{1}{10}$*. De modo que 1 menos a razão é* $\frac{9}{10}$*; e* $\frac{9}{\frac{9}{10}} = 10$*, a soma solicitada; tal série é expressa pela fração decimal, assim,* $9,9999999 etc.$[7]

Podemos produzir significado para o artigo *524*, utilizando a fórmula apresentada por Euler no artigo *520*, da seguinte maneira:

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{9}{100000} + \ldots = \frac{9}{1 - \frac{1}{10}} = 10.$$

Deste modo, podemos dizer que Euler produziu significado para a soma desta P.G. infinita em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita. E aqui Euler nos apresenta a expressão desta série em fração decimal, isto é,

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{9}{100000} + \ldots = 9,99999\ldots$$

Esses exemplos são hoje apresentados nos livros didático como uma técnica para encontrarmos a fração geratriz de uma dízima periódica. Também queremos destacar que os livros didáticos de hoje ao apresentarem esse objeto *a soma dos termos de uma P.G. infinita*, tratam de objetos matemáticos que não fazem parte da componente curricular do Ensino Médio Brasileiro, tais como limite, séries convergentes e divergentes.

No Capítulo XII, Euler fornecerá aplicações das progressões geométricas em problemas envolvendo frações decimais infinitas.

6.2 Das Frações Decimais Infinitas

O Capítulo XII, cujo título é *Das Frações Decimais Infinitas*, Euler apresentará como transformar uma fração ordinária em uma fração decimal e vice-versa. Ele estudará as frações ordinárias cujos numeradores são iguais a 1 e os denominadores percorrerão os números naturais de 2 até 11, e alguns múltiplos dessas frações. Assim, no primeiro artigo desse capítulo, Euler recorda que no Capítulo XXIII, da Seção I, Parte I, ele utilizou as frações decimais no lugar das frações ordinárias no cálculo dos logaritmos, e também definiu as frações decimais nos artigos *244* e *245*. Vamos apresentar esses artigos.

[7]Segundo a webpage <`https://en.wikipedia.org/wiki/0.999...`>, acesso em: 23 de nov. 2016, está é a primeira vez que é fornecida a demonstração.

Euler: 525. Já vimos, nos cálculos logarítmicos, que as frações decimais são empregadas no lugar das Frações Ordinárias; as mesmas são também vantajosamente empregadas em outros cálculos. Assim, será muito necessário mostrar como uma fração ordinária pode ser transformada em uma fração decimal; e, inversamente, como podemos expressar o valor de uma fração decimal por uma fração ordinária.[8]

Isto posto, vamos apresentar os artigos do Capítulo XXIII, da Seção I, Parte I, em que Euler utilizou as frações decimais.

Euler: 243. É bem conhecido que, no modo comum de escrita dos números [Zahlen] por meio dos dez algarismo [Ziffern], ou símbolos,

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

o primeiro algarismo da direita tem apenas seu significado natural, os algarismos em segundo lugar tem dez vezes o valor que teria tido no primeiro, os algarismos em terceiro lugar tem cem vezes o valor, e os da quarta, mil vezes, e assim por diante, de modo que à medida que avançamos para a esquerda, adquirem um valor dez vezes maior do que tinham na posição anterior. Assim, o número 1765, o algarismo 5 está, em primeiro lugar, à direita, e é apenas igual a 5; em segundo lugar está o 6, mas este algarismo, em vez de 6, representa 10×6 *ou 60; o algarismo 7 está em terceiro lugar, e representa* 100×7 *ou 700; e, por último, o 1, que está na quarta posição, torna-se 1000; de modo que nós lemos o número dado assim:*

Um mil, setecentos e sessenta e cinco.

Neste artigo Euler nos apresentou como representar um número positivo no sistema de numeração posicional decimal, ou seja,

$$1765 = 1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 5.$$

De um modo mais geral, uma expressão do tipo $u_n u_{n-1} \ldots u_1 u_0$, no sistema de numeração posicional decimal, representa o número

$$u_n u_{n-1} \ldots u_1 u_0 = u_n 10^n + u_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + u_1 10 + u_0.$$

Nos próximos artigos Euler nos apresentará como representar um número decimal na forma de frações decimais.

Euler: 244. Como os valores dos algarismos tornam-se sempre dez vezes maior à medida que avançamos a partir da direita para a esquerda, e consequentemente eles se tornam continuamente dez vezes menor quando vamos da esquerda para a direita; podemos, em conformidade com esta regra, avançar ainda mais para a direita, e obter algarismos cujos valores continuarão a tornar-se dez vezes menores do que o

[8] A partir daqui usaremos a representação usual dos números decimais, ou seja, utilizaremos a vírgula para separar a parte inteira da parte decimal de um número, como no alemão e no francês, e não utilizaremos o ponto como separador, como aparece na tradução inglesa.

anterior; mas deve ser observado, que o lugar onde os algarismos têm o seu valor natural é marcado por uma vírgula.[9] *Assim, se encontrarmos, por exemplo, com o número 36,54892, é para ser entendido da seguinte maneira: o algarismo 6, em primeiro lugar, tem o seu valor natural, e o algarismo 3, que está na segunda posição à esquerda, significa 30. Mas o algarismo 5, que vem depois da vírgula, significa* $\frac{5}{10}$, *e 4 significa* $\frac{4}{100}$, *o algarismo 8 significa* $\frac{8}{1000}$, *o algarismo 9 significa* $\frac{9}{10000}$, *e o algarismo 2 significa* $\frac{2}{100000}$. *Vemos então, que quanto mais esses algarismos avançam para a direita, mais os seus valores diminuem; e, por fim, esses valores tornam-se tão pequeno, que eles podem ser considerados como nada.*

Euler: 245. Este é o tipo de número que chamamos de ***frações decimais****, e desta forma os logaritmos são representados nas Tabelas. O logaritmo de 2, por exemplo, é expresso por 0,3010300; no qual vemos: 1º.) Desde que há 0 antes da vírgula, este logaritmo não contém um número inteiro; 2º.) seu valor é*

$$\frac{3}{10}+\frac{0}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{0}{10000}+\frac{3}{100000}+\frac{0}{1000000}+\frac{0}{10000000}.$$

Poderíamos ter deixado de fora os dois últimos algarismos, mas eles servem para mostrar que o logaritmo em questão não contém nenhuma dessas partes que tenham 1 000 000 e 10 000 000 como denominador. É contudo entendido, que pela continuidade da série, poderíamos encontrar ainda partes menores; mas com respeito a essas, elas são ignoradas, em razão de sua extrema pequeneza.

No início do artigo *244* Euler nos fornece um modo de produzir significado para a representação de um número decimal na forma de frações decimais:

Como os valores dos algarismos tornam-se sempre dez vezes maior à medida que avançamos a partir da direita para a esquerda, e consequentemente ele se tornam continuamente dez vezes menor quando vamos da esquerda para a direita; podemos, em conformidade com esta regra, avançar ainda mais para a direita, e obter algarismos cujos valores continuarão a tornar-se dez vezes menores do que o anterior; mas deve ser observado, que o lugar onde os algarismos têm o seu valor natural é marcado por uma vírgula.

Em seguida nos apresenta um exemplo,

$$36,54892 = 3\cdot 10+6+\frac{5}{10}+\frac{4}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{9}{10000}+\frac{2}{100000}.$$

E no início do artigo *245* nos diz que este tipo de representação é chamado de *frações decimais*, e que os logaritmos são representados por elas nas Tabelas. Assim, Euler expressa o valor do logaritmo de 2 na forma de frações decimais, isto é,

$$\log 2 = 0,3010300 = \frac{3}{10}+\frac{0}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{0}{10000}+\frac{3}{100000}+\frac{0}{1000000}+\frac{0}{10000000}.$$

[9]O tradutor inglês modificou a tradução, ao invés de vírgula utilizou ponto. Adotaremos nesta tradução a vírgula, que foi utilizada no original e na tradução francesa.

Euler observa que pela continuidade da série poderíamos encontrar partes menores do valor de $\log 2$, mas estas partes seriam tão pequenas que podemos ignorá-las. Assim, nestes dois últimos artigos apresentados acima, Euler nos mostrou como expressar um número decimal na forma de frações decimais.

O primeiro matemático a discutir a teoria das frações decimais e sua aritmética foi Simon Stevin, na obra intitulada *La Disme*, publicada em 1585. Na primeira parte desta obra, *Das Definições*, Stevin apresenta a seguinte definição:

> Definição I: Números decimais são uma espécie de aritmética baseada na ideia de progressões por dez, fazendo uso dos numerais arábicos ordinais, onde qualquer número pode ser escrito e pelo qual todos os cálculos que são encontrados no comércio podem ser realizados apenas por inteiros sem o auxílio de frações. (SANFORD, V. 1959, p. 23, tradução nossa).

Na segunda parte desta obra, *Das Operações*, Stevin nos ensina como somar, subtrair, multiplicar e dividir números decimais.

Podemos dizer que o grande propósito da utilização dos números decimais era facilitar os cálculos que ocorrem, por exemplo, nas transações comerciais. Assim sendo, nesta seção Euler nos apresentará a regra de como transformar uma fração ordinária em uma fração decimal e vice-versa.

Euler: 526. Seja solicitado, em geral, transformar a fração $\frac{a}{b}$*, em um número decimal. Como esta fração expressa o quociente da divisão do numerador a pelo denominador b, vamos escrever, em vez de a, a quantidade* $a,0000000$*, cujo valor, afinal, não difere de a, uma vez que não contém nenhuma décima parte, ou centésima parte, nem quaisquer outras partes. Se agora dividirmos a quantidade pelo número b, de acordo com as regras comuns de divisão, observando colocar a vírgula no lugar apropriado, a qual separa o decimal e os inteiros, obteremos o decimal procurado. Esta é toda a operação, que ilustraremos com alguns exemplos.*

Consideremos primeiro a fração $\dfrac{1}{2}$ *e a divisão em decimais assumirá esta forma:*[10]

$$2)\ \begin{array}{l}\underline{1,0000000}\\ 0,5000000 = \frac{1}{2}.\end{array}$$

Portanto, parece que $\dfrac{1}{2}$ *é igual a* $0,5000000$ *ou* $0,5$*; que é suficientemente evidente, uma vez que esta fração decimal representa* $\dfrac{5}{10}$*, que é equivalente a* $\dfrac{1}{2}$*.*

Observamos que Euler utilizará o algoritmo usual da divisão para transformar a fração $\dfrac{a}{b}$ em um número decimal, mas para este propósito, Euler nos diz que devemos primeiro representar a por $a,0000000$ e após a divisão deste número por b devemos colocar a vírgula no lugar apropriado,

[10] Esta divisão é representada, no Brasil, pelo diagrama:

$$\begin{array}{l|l} 1,0000000 & \ 2 \\ \cline{2-2} \underline{\ 10\ } & 0,5000000 = \frac{1}{2} \\ \ \ 0 & \end{array}$$

a qual separa os decimais dos números inteiros. Para ilustrar este método, Euler apresentará alguns exemplos.

Assim, no artigo *526*, Euler transforma a fração $\frac{1}{2}$ em um número decimal pelo algoritmo usual da divisão, e nos diz "*parece* que $\frac{1}{2}$ é igual a $0,500000$ ou $0,5$" e para confirmar a veracidade deste resultado ele representa o número decimal $0,5$ na forma de fração decimal, isto é, $0,5 = \frac{5}{10}$, cuja fração é equivalente a $\frac{1}{2}$. Portanto, podemos dizer que é legítimo para Euler dizer que $\frac{1}{2} = 0,5$.

No próximo artigo, Euler transformará a fração $\frac{1}{3}$ em um número decimal e vice-versa.

> *Euler: 527. Agora, seja* $\frac{1}{3}$ *a fração dada, e teremos,*[11]
>
> $$3)\ \frac{1,0000000}{0,3333333\,etc = \frac{1}{3}.}$$
>
> *Isto mostra que a fração decimal cujo valor é* $\frac{1}{3}$*, não pode, a rigor, nunca ser interrompida, mas que continua até o infinito, repetindo sempre o número 3, concordando com o que já mostramos, no Art. 523, ou seja, que as frações*
>
> $$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + etc. \quad \text{até o infinito} \quad = \frac{1}{3}.$$
>
> *A fração decimal que expressa o valor de* $\frac{2}{3}$*, é também continua até o infinito, pois temos*[12]
>
> $$3)\ \frac{2,0000000}{0,6666666\,etc = \frac{2}{3}.}$$
>
> *Que é também evidente, do que acabamos de dizer, porque* $\frac{2}{3}$ *é o dobro de* $\frac{1}{3}$.

Observe que ao dividir o número 1 pelo número 3, Euler obtém uma dízima periódica, que naquela época era chamada de *Frações decimais circulares*, e que essa representação concorda com o que foi mostrado no artigo *523*, ou seja,

$$0,3333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \ldots$$

o lado direito dessa igualdade é a soma dos termos de uma P.G. infinita, cujo primeiro termo é $\frac{3}{10}$ e a razão igual a $\frac{1}{10}$, logo

[11]Esta divisão é representada, no Brasil, pelo diagrama:

$$1,0000000 \quad \underline{|\ \ 3\quad}$$
$$\qquad\qquad\qquad 0,3333333\ldots$$

[12]Esta divisão é representada, no Brasil, pelo diagrama:

$$2,0000000 \quad \underline{|\ \ 3\quad}$$
$$\qquad\qquad\qquad 0,6666666\ldots$$

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{3}$$

Portanto, $0,333\ldots=\dfrac{1}{3}$. Agora, multiplicando ambos os membros dessa igualdade por 2, obtemos $0,666\ldots=\dfrac{2}{6}$.

Podemos dizer que Euler primeiramente produziu significado para a representação da fração $\dfrac{1}{3}$ em fração decimal em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela divisão. Depois, como forma de corroborar sua representação, produziu significado para a dízima periódica $0,333\ldots$ em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela representação da dízima periódica em frações decimais e pela fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita.

Posto isto, podemos dizer que os modos de produzir significados para a representação da fração ordinária $\frac{1}{3}$ em frações decimais e para a representação da dízima periódica $0,333333\ldots$ em fração ordinária apresentados por Euler são os mesmos que encontramos hoje nos livros didáticos do ensino básico brasileiro. Podemos dizer que o objeto *representação da fração ordinária* $\frac{1}{3}$ *em frações decimais* constituído por Euler é o mesmo objeto que constituímos hoje, e mais ainda, que o conhecimento produzido por Euler e por nós são iguais. De fato, produzimos significado para a representação da fração $\frac{1}{3}$ em fração decimal em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela divisão.

Mediante ao resíduo de enunciação de Euler, que encontramos no artigo *527*, poderíamos afirmar que o objeto *representação da dízima periódica* $0,333333\ldots$ *em fração ordinária* constituído por Euler e por nós (hoje) é o mesmo, pois produzimos significado para esse objeto em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela representação da dízima periódica em frações decimais e pela fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita. Mas afirmamos que os objetos são distintos. Veja bem!

> Pode acontecer de uma afirmação produzida no interior de um campo semântico vir a tornar-se, por motivos diversos, parte do núcleo. É o caso, comumente, de teoremas. A princípio eles demandam demonstração. Depois, aos poucos, os teoremas mais usados (mais centrais, mais importantes, mais usados pelo autor x, ...) eles passam a ser usados como se fossem axiomas. (LINS, 2012, p. 26).

Com efeito, Euler utilizou a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita para produzir significado para a representação da dízima periódica $0,333333\ldots$ em fração ordinária, mas como vimos nesta tese, no artigo *520*, Euler produziu significado para essa fórmula em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por operações aritméticas e pelo *princípio da extensão infinita*. E essa fórmula produzida no interior deste Campo Semântico, tornou-se parte do núcleo de um outro Campo Semântico, ao qual Euler constituiu o objeto *representação da dízima periódica* $0,333333\ldots$ *em fração ordinária*, portanto, podemos dizer que este objeto é diferente do objeto que constituímos hoje, pelo fato de produzirmos significado para a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita em um Campo Semântico cujo núcleo é constituído por somas parciais, operações aritméticas e limites.

Queremos destacar a importância da utilização do nosso referencial teórico, por meio do qual pudemos fazer uma leitura suficientemente fina dos processos de produção de significados para o objeto *representação da dízima periódica* $0,333333\ldots$ *em fração ordinária*. Somente com esse tipo de leitura pudemos notar as pequenas sutilezas que ocorrem no processo de produção de significados. De fato, se não tivéssemos a preocupação de tentar "olhar" o mundo com os olhos de Euler, se não adotássemos os seus pressupostos, poderíamos ter afirmado que o objeto *representação da dízima periódica* $0,333333\ldots$ *em fração ordinária* constituído por Euler e por nós hoje é o mesmo.

Na época de Euler era uma prática comum considerar as frações decimais como séries, como podemos constatar no artigo de John Robertson publicado em 1768, cujo título é *Of the Theory of Circulating Decimal Fractions*,

> Portanto, toda fração decimal é igual a uma série que surge da multiplicação do primeiro, segundo, terceiro, quarto, etc. termos da progressão geométrica decrescente $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$, *etc.* pelos primeiro, segundo, terceiro, quarto e etc. termos da fração dada respectivamente.
>
> Assim, seja dado a fração 0,3587 ou $\frac{3587}{10000}$. Então,
>
> $$\begin{aligned} 0,3587 &= \tfrac{1}{10}\times 3+\tfrac{1}{100}\times 5+\tfrac{1}{1000}\times 8+\tfrac{1}{10000}\times 7 \\ &= \tfrac{3}{10}+\tfrac{5}{100}+\tfrac{8}{1000}+\tfrac{7}{10000} \\ &= \tfrac{3000}{10000}+\tfrac{500}{10000}+\tfrac{80}{10000}+\tfrac{7}{10000} \\ &= \tfrac{3587}{10000} \end{aligned}$$
>
> Toda fração decimal surge da divisão, quando o dividendo é menor do que o divisor.
>
> [...] E de acordo com a razão entre o dividendo e o divisor, o quociente ou fração decimal será finita ou infinita.
>
> Entre aquelas frações decimais que são infinitas, ou não terminam, algumas delas *repetem-se* ou circulam, isto é, o mesmo algarismo ou algarismos circulam novamente e novamente *ad infinitum.*
>
> Como $0,333$ *etc.*; $0,2323$ *etc.*; $0,758758$ *etc.*; $0,999$ *etc.*
>
> Aqui
>
> $$\begin{aligned} 0,333\ \textit{etc.} &= \tfrac{3}{10}+\tfrac{3}{100}+\tfrac{3}{1000}+\tfrac{3}{10000}, \textit{etc.} \\ 0,2323\ \textit{etc.} &= \tfrac{2}{10}+\tfrac{3}{100}+\tfrac{2}{1000}+\tfrac{3}{10000}, \textit{etc.} \\ 0,785785\ \textit{etc.} &= \tfrac{7}{10}+\tfrac{8}{100}+\tfrac{5}{1000}+\tfrac{7}{10000}+\tfrac{8}{100000}+\tfrac{5}{1000000}, \textit{etc.} \\ 0,999\ \textit{etc.} &= \tfrac{9}{10}+\tfrac{9}{100}+\tfrac{9}{1000}+\tfrac{9}{10000}, \textit{etc.} \end{aligned}$$
>
> (ROBERTSON, 1768, p. 209, tradução nossa).

Continuando com a nossa produção de significado para o Capítulo XII, *Das Frações Decimais Infinitas*, no artigo *528*, Euler divide o numerador pelo denominador da fração proposta encontrando o número decimal, e depois representa o número decimal como soma de frações decimais, transformando-o em uma fração ordinária.

Euler: 528. Se $\dfrac{1}{4}$ *é a fração proposta, temos*[13]

$$4)\ \begin{array}{l} \underline{1,0000000} \\ 0,2500000 = \tfrac{1}{4}. \end{array}$$

De modo que $\dfrac{1}{4}$ *é igual a* $0,2500000$ *ou* $0,25$*, que é evidentemente verdade, uma vez que*

$$\frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

De maneira semelhante, podemos ter para a fração $\dfrac{3}{4}$,[14]

$$4)\ \begin{array}{l} \underline{3,0000000} \\ 0,7500000 = \tfrac{3}{4}. \end{array}$$

De modo que $\dfrac{3}{4} = 0,75$*, e de fato*

$$\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}.$$

A fração $\dfrac{5}{4}$ *é transformada na fração decimal, fazendo*[15]

$$4)\ \begin{array}{l} \underline{5,0000000} \\ 1,2500000 = \tfrac{5}{4}. \end{array}$$

Agora, $1 + \dfrac{25}{100}$ *que é* $1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$.

No artigo *529*, Euler representa a fração ordinária $\frac{1}{5}$, e alguns múltiplos dessa fração, em números decimais. Depois, apresenta um outro modo de produzir significado à transformação de uma dízima periódica em uma fração ordinária. Vejamos.

---

[13]Esta divisão é representada, no Brasil, pelo diagrama:

$$\begin{array}{l|l} 1,0000000 & \ 4 \\ \cline{2-2} \underline{\ \ 8\ \ } & 0,2500000 = \tfrac{1}{4} \\ \ \ 20 & \\ \ \ \underline{20} & \\ \ \ \ 0 & \end{array}$$

[14]Esta divisão é representada, no Brasil, pelo diagrama:

$$\begin{array}{l|l} 3,0000000 & \ 4 \\ \cline{2-2} \underline{\ 28\ } & 0,7500000 = \tfrac{3}{4} \\ \ \ 20 & \\ \ \ \underline{20} & \\ \ \ \ 0 & \end{array}$$

[15]Esta divisão é representada, no Brasil, pelo diagrama:

$$\begin{array}{l|l} 5,0000000 & \ 4 \\ \cline{2-2} \underline{4\ } & 1,2500000 = \tfrac{5}{4} \\ 10 & \\ \underline{\ 8\ } & \\ \ \ 20 & \\ \ \ \underline{20} & \\ \ \ \ 0 & \end{array}$$

Euler: 529. Da mesma forma, $\frac{1}{5}$ *será encontrado igual a* $0,2$*;* $\frac{2}{5} = 0,4$*;* $\frac{3}{5} = 0,6$*;* $\frac{4}{5} = 0,8$*;* $\frac{5}{5} = 1$*;* $\frac{6}{5} = 1,2$*, etc.*

Quando o denominador for 6, encontramos $\frac{1}{6} = 0,1666666$ *etc. que é igual a* $0,6666666 - 0,5$[16]*; mas* $0,6666666 = \frac{2}{3}$[17] *e* $0,5 = \frac{1}{2}$*, portanto* $0,1666666 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$[18] *ou* $\frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$.

Encontramos também $\frac{2}{6} = 0,3333333$ *etc.* $= \frac{1}{3}$*; mas* $\frac{3}{6}$ *torna-se* $0,5000000 = \frac{1}{2}$*; também,* $\frac{5}{6} = 0,8333333 = 0,3333333 + 0,5$*,*[19] *ou seja,* $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ *ou* $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$.

No primeiro parágrafo do artigo *529* Euler utiliza o algoritmo usual da divisão para expressar as frações ordinárias, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, na forma de números decimais. Nos outros dois parágrafos deste artigo Euler utiliza também o algoritmo usual da divisão para expressar as frações ordinárias, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{6}$, na forma de números decimais, mas nos apresenta um outro modo de produzir significado para as representações das dízimas periódicas $0,1666666\ldots$, $0,3333333\ldots$ e $0,8333333\ldots$ em frações ordinárias.

Assim, Euler procura resultados anteriores, artigos *526* e *527*, para constituir as representações dessas dízimas periódicas em frações ordinárias, ou seja, por meio de operações aritméticas e os resultados já conhecidos, obtém

$$\begin{aligned}
0,1666666\ldots &= 0,6666666\ldots - 0,5 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6};\\
0,3333333\ldots &= \frac{1}{3} = \frac{2}{6};\\
0,8333333\ldots &= 0,3333333\ldots + 0,5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Podemos dizer que Euler produziu significado para as representações das dízimas periódicas acima em frações ordinárias em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por operações aritméticas, por frações equivalentes e por resultados obtidos nos artigos *526* e *527*.

Queremos destacar que Euler *poderia* ter produzido significado para estas dízimas periódicas do mesmo modo que ele procedeu no artigo *527*, isto é, dentro de um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela representação da dízima periódica em frações decimais e pela fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita. Deste modo, à título de ilustração, produziremos significado para a representação da dízima periódica $0,1666666\ldots$ em uma fração ordinária neste Campo Semântico.

[16] A expressão correta seria $0,6666666$ *etc.* $- 0,5$.
[17] A expressão correta seria $0,6666666$ *etc.* $= \frac{2}{3}$.
[18] A expressão correta seria $0,1666666$ *etc.* $= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$.
[19] A expressão correta seria $\frac{5}{6} = 0,8333333$ *etc.* $= 0,3333333$ *etc.* $+ 0,5$.

$$\begin{aligned}
0,1666666\ldots &= \frac{1}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\frac{6}{10000}+\ldots \\
&= \frac{1}{10}+\frac{6}{100}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots\right) \\
&= \frac{1}{10}+\frac{6}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) \\
&= \frac{1}{10}+\frac{6}{100}\cdot\frac{10}{9} \\
&= \frac{1}{10}+\frac{1}{15} \\
&= \frac{3+2}{30} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Podemos dizer que a produção de significado para as representações das dízimas periódicas em frações ordinárias apresentadas por Euler no artigo *529* são muito mais sucintas e envolvem operações mais simples, tais como adições e frações equivalentes, do que esta última que fizemos. Como já vimos, nesta tese, uma das características de Euler era produzir significado para um objeto de várias maneiras, utilizando a terminologia de nosso referencial teórico, Euler produzia significado para um objeto em vários Campos Semânticos.

Nos próximos artigos, *530*, *531*, *532* e *533*, Euler apresentará duas produções de significados para transformar a dízima periódica $0,\overline{142857}$ em uma fração ordinária.

> *Euler: 530. Quando o denominador é 7, as frações decimais tornam-se mais complicadas. Por exemplo, encontramos* $\frac{1}{7}=0,142857$ *etc.*[20]*; no entanto, devemos observar que estes seis algarismos são continuamente repetidos. Para sermos convencidos, portanto, que esta fração decimal expressa precisamente o valor de* $\frac{1}{7}$*, podemos transformá-la em uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é* $\frac{142857}{1000000}$*, a razão sendo* $\frac{1}{1000000}$*; e consequentemente, a soma* $=\frac{\frac{142857}{1000000}}{1-\frac{1}{1000000}}=\frac{142857}{999999}$ *(multiplicando ambos os termos por 1000000)* $=\frac{1}{7}$*. [Ver Art. 520]*[21]

Neste artigo, Euler primeiro expressa a fração ordinária $\frac{1}{7}$ na forma de fração decimal $0,142857\ldots$ utilizando o algoritmo usual da divisão, e observa que esses seis algarismos são continuamente repetidos. Deste modo, para produzir significado para a representação dessa dízima periódica na forma de fração ordinária, Euler representa a dízima periódica $0,\overline{142857}$ na forma de somas de frações decimais infinitas, e percebe que essa soma infinita nada mais é do que a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. Assim, calcula essa soma e obtém a fração ordinária ou fração geratriz. Portanto, podemos dizer que Euler produziu significado

[20] O tradutor inglês omitiu o *etc.*

[21] Acréscimo do tradutor inglês.

para a representação da dízima periódica $0,\overline{142857}$ em uma fração ordinária em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por progressões geométricas infinitas e pela fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.

> *Euler: 531. Podemos provar, ainda de maneira mais fácil, que a fração decimal, que encontramos, é exatamente igual a $\frac{1}{7}$, pois substituindo seu valor pela letra s, temos*
>
> $$\begin{array}{rcl} s & = & 0,142857142857142857 \; \textit{etc.} \\ 10s & = & 1,42857142857142857 \; \textit{etc.} \\ 100s & = & 14,2857142857142857 \; \textit{etc.} \\ 1000s & = & 142,857142857142857 \; \textit{etc.} \\ 10000s & = & 1428,57142857142857 \; \textit{etc.} \\ 100000s & = & 14285,7142857142857 \; \textit{etc.} \\ 1000000s & = & 142857,142857142857 \; \textit{etc.} \\ \textit{Subtraindo } s & = & 0,142857142857 \; \textit{etc.} \\ \hline 999999s & = & 142857, \end{array}$$
>
> *E dividindo por 999999, temos $s = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$. Portanto, a fração decimal que foi representada por s é igual a $\frac{1}{7}$.*

Neste artigo, Euler faz uma outra produção de significado para representar a dízima periódica $0,\overline{142857}$ em uma fração ordinária. Observamos que este método para demonstrar que a dízima periódica $0,\overline{142857}$ é representada pela fração ordinária $\frac{1}{7}$, é muito similar a produção de significado que Euler fez no artigo *517*. De fato, representando por s a dízima periódica, temos

$$s = 0,142857142857142857\ldots \tag{6.3}$$

Multiplicando por 1000000 (inverso da razão $\frac{1}{1000000}$), obtemos

$$1000000 \cdot s = 142857,142857142857\ldots \tag{6.4}$$

subtraindo (6.3) de (6.4), resulta

$$\begin{array}{rcl} 999999s & = & 142857 \\ s & = & \dfrac{142857}{999999} \\ s & = & \dfrac{1}{7}. \end{array}$$

Podemos dizer que Euler produziu significado para a representação da dízima periódica $0,\overline{142857}$ em uma fração ordinária em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por operações aritméticas. Queremos salientar que esse método apresentado por Euler no artigo *531* é utilizado até hoje nos livros-textos do Ensino Básico Brasileiro.

Assim sendo, este método apresentado por Euler é aceito como legítimo dentro da comunidade matemática de hoje, portanto, podemos justificá-lo utilizando a teoria de séries de hoje. Vejamos.

Sabemos que a dízima periódica $0,\overline{142857}$ pode ser expressa pela seguinte série geométrica

$$0,142857142857142857\ldots = \frac{142857}{10^6} + \frac{142857}{10^{12}} + \frac{142857}{10^{18}} + \ldots$$

cuja razão é $\dfrac{1}{10^6}$. Aplicando o Teorema A.2.1 temos que esta série é convergente, isto é,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{142857}{10^6}\left(\frac{1}{10^6}\right)^n = s \tag{6.5}$$

Utilizando as propriedades 1 e 2 das séries descritas no Apêndice A.2.2, temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 10^6 \frac{142857}{10^6}\left(\frac{1}{10^6}\right)^n = 10^6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{142857}{10^6}\left(\frac{1}{10^6}\right)^n$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 142857\left(\frac{1}{10^6}\right)^n = 10^6 s. \tag{6.6}$$

Subtraindo (6.5) de (6.6), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} 142857\left(\frac{1}{10^6}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{142857}{10^6}\left(\frac{1}{10^6}\right)^n &= 10^6 s - s \\
\sum_{n=0}^{+\infty}\left(142857 - \frac{142857}{10^6}\right)\left(\frac{1}{10^6}\right)^n &= (10^6 - 1)s \\
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{142857(10^6 - 1)}{10^6}\left(\frac{1}{10^6}\right)^n &= (10^6 - 1)s \\
142857 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{10^6 - 1}{10^6}\left(\frac{1}{10^6}\right)^n}_{*} &= (10^6 - 1)s
\end{aligned}$$

Vamos calcular o valor numérico da série ($*$).

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{10^6 - 1}{10^6}\left(\frac{1}{10^6}\right)^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{10^6}\right)^n - \frac{1}{10^6}\left(\frac{1}{10^6}\right)^n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{10^6}\right)^n - \left(\frac{1}{10^6}\right)^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o lado direito desta igualdade, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{10^6}\right)^n-\left(\frac{1}{10^6}\right)^{n+1}\right] &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\left[\left(\frac{1}{10^6}\right)^i-\left(\frac{1}{10^6}\right)^{i+1}\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{10^6}\right)+\left(\frac{1}{10^6}-\left(\frac{1}{10^6}\right)^2\right)+\cdots+\right.\\
&\quad \left.+\left(\left(\frac{1}{10^6}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{10^6}\right)^n\right)+\left(\left(\frac{1}{10^6}\right)^n-\left(\frac{1}{10^6}\right)^{n+1}\right)\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{1}{10^6}\right)^{n+1}\right]\\
&= 1
\end{aligned}$$

Assim sendo,

$$142857\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{10^6-1}{10^6}\left(\frac{1}{10^6}\right)^n = 142857.$$

Portanto,

$$(10^6-1)s = 142857$$

de onde concluimos

$$s=\frac{142857}{10^6-1}.$$

Deste modo estão justificadas todas as operações realizadas no artigo *531*.

Desde que as dízimas periódicas podem ser representadas por frações decimais infinitas cujas razões destas progressões geométricas infinitas são maiores do que 0 e menores do que 1 então as séries geométricas são convergentes. Logo, podemos aplicar as propriedades de soma e de multiplicação por uma constante para séries infinitas. Isto posto, os cálculos tornam-se muito mais fáceis pois utilizamos apenas operações aritméticas usuais.

Euler: 532. Do mesmo modo, $\frac{2}{7}$ *pode ser transformada na fração decimal, que será* $0,28571428$ *etc. e isto nos permite encontrar mais facilmente o valor da fração decimal que representamos por s; porque* $0,28571428$ *etc. deve ser o dobro desta, e consequentemente,* $= 2s$*. Agora, vemos que*

$$\begin{array}{rrcl}
 & 100s & = & 14,28571428571\ \textit{etc.}\\
\textit{de modo que subtraindo} & 2s & = & 0,28571428571\ \textit{etc.}\\
\hline
\textit{resta} & 98s & = & 14
\end{array}$$

portanto $s=\frac{14}{98}=\frac{1}{7}$.

Também encontramos $\frac{3}{7}=0,42857142857$ *etc., que de acordo com nossa suposição, deve ser igual a* $3s$*; e encontramos*

$$\begin{array}{rrcl} & 10s & = & 1,42857142857\ etc. \\ \textit{de modo que subtraindo} & 3s & = & 0,42857142857\ etc. \\ \hline \textit{temos} & 7s & = & 1, \end{array}$$

portanto $s = \dfrac{1}{7}$.

Euler: 533. Quando uma fração proposta, portanto, tem o denominador 7, a fração decimal é infinita, e 6 algarismos são continuamente repetidos. A razão disto é facilmente percebida, ou seja, quando continuamos a divisão, um resto deve retornar, mais cedo ou mais tarde, ao que já tínhamos. Agora, nesta divisão, apenas 6 números diferentes podem formar o resto, ou seja, 1, 2, 3, 4, 5, 6, isto é, pelo menos, após a sexta divisão, os mesmos algarismos devem retornar, mas quando o denominador é tal que deixa uma divisão sem resto, este caso não acontece.

Observamos que neste artigo Euler chama a atenção para os dois tipos de números racionais, aqueles que tem uma representação decimal finita, quando um dos restos da divisão é zero, e aqueles que a representação decimal é infinita, ou seja, quando o resto da divisão nunca será zero, mas se repetirá em algum momento. Note que a produção de significado que Euler fez no artigo *533* é a mesma que fazemos hoje. (Veja Subseção C.1).

Nos artigos *534* e *535*, Euler representa as frações ordinárias $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, e seus múltiplos, em frações decimais utilizando o algoritmo usual da divisão. No artigo *536*, Euler representa a fração ordinária $\frac{1}{11}$ em um número decimal infinito utilizando o algoritmo usual da divisão e usando o procedimento do artigo *531*, transforma a dízima periódica $0,\overline{0909090}$ em uma fração ordinária e, também representa os múltiplos dessa fração ordinária em números decimais infinitos.

Assim, embasado nos padrões observados nos artigos anteriormente, Euler utiliza o método empregado no artigo *531* para apresentar a regra geral de transformar dízimas periódicas simples em frações ordinárias.

Euler: 537. Portanto, existe um grande número de frações decimais em que um, dois, ou mais algarismos constantemente repetem-se, e que continuam assim até o infinito. Tais frações são curiosas, e mostraremos como os seus valores podem ser facilmente encontrados.

Vamos primeiro supor que um único algarismo é constantemente repetido, e vamos representá-lo por a, de modo que $s = 0,aaaaaaa$[22]*. Temos*

$$\begin{array}{rrcl} & 10s & = & a,aaaaaaa \\ \textit{e subtraindo} & s & = & 0,aaaaaaa \\ \hline \textit{temos} & 9s & = & a \end{array}$$

portanto, $s = \dfrac{a}{9}$.

Quando dois algarismos são repetidos, como ab, temos $s = 0,ababab$[23]*. Portanto,* $100s = ab,ababab$*; e se subtrairmos s desta, resta* $99s = ab$*; consequentemente* $s = \dfrac{ab}{99}$.

[22]O correto seria expressar s da seguinte forma $s = 0,aaaaaaa\ etc.$

[23]O correto seria expressar s da seguinte forma $s = 0,ababab\ etc.$

> *Quando três algarismos, como abc, são repetidos, temos* $s = 0, abcabcabc$[24]*; consequentemente,* $1000s = abc, abcabcabc$*; e subtraindo* s *deste, resta* $999s = abc$*; onde* $s = \frac{abc}{999}$*, e assim por diante.*[25]

Podemos dizer que Euler estava produzindo significado para a fórmula da fração geratriz de uma dízima periódica em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por operações aritméticas. Na Subseção C.1, produzimos significado para essa fórmula em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por progressões geométricas infinitas e pela fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. De fato, sabemos que

$$\begin{aligned}
0,\overline{b_1b_2\ldots b_t} &= \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^t} + \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^{2t}} + \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^{3t}} + \ldots \\
&= \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^t}\left(1 + \frac{1}{10^t} + \frac{1}{10^{2t}} + \ldots\right) \\
&= \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^t}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10^t}}\right) \\
&= \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^t}\left(\frac{10^t}{10^t-1}\right) \\
&= \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^t-1}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$0,\overline{b_1b_2\ldots b_t} = \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^t-1}.$$

Aplicando esta fórmula para encontrarmos as frações geratrizes das dízimas periódicas quando temos um, dois e três algarismos repetidos, obtemos os mesmos resultados apresentados por Euler. Com efeito,

$$\begin{aligned}
0,\overline{a} &= \frac{a}{10-1} = \frac{a}{9}; \\
0,\overline{ab} &= \frac{ab}{10^2-1} = \frac{ab}{99}; \\
0,\overline{abc} &= \frac{abc}{10^3-1} = \frac{abc}{999}.
\end{aligned}$$

Assim sendo, podemos dizer que produzimos conhecimentos distintos para o objeto *fórmula da fração geratriz de uma dízima periódica.*

Em seguida, Euler apresenta um exemplo numérico dessa regra, e finaliza o capítulo apresentando um outro exemplo, onde transforma uma fração ordinária em um número decimal utilizando o algoritmo usual da divisão. Apresentaremos, à título de ilustração, o artigo *538*.

[24] O correto seria expressar s da seguinte forma $s = 0, abcabcabc$ *etc.*

[25] O tradutor inglês modificou este artigo, colocando os dois últimos parágrafos no artigo 538.

Euler: 538. Portanto, sempre que uma fração decimal deste tipo ocorrer, é fácil encontrar seu valor. Seja dado, por exemplo, $0,296296$*;*[26] *seu valor será* $\dfrac{296}{999} = \dfrac{8}{27}$*, dividindo ambos os termos por 37.*

Esta fração deve resultar novamente a fração decimal proposta; e podemos ser facilmente convencidos de que este é o resultado verdadeiro, dividindo 8 por 9, e em seguida, o quociente por 3, porque $27 = 3 \cdot 9$*, então temos*[27]

$$\begin{array}{rl} 9) & 8,000000 \\ 3) & 0,888888 \; \textit{etc.} \\ \hline & 0,296296 \; \textit{etc.} \end{array}$$

que é a fração decimal que foi solicitada.

Neste capítulo vimos como Euler constituiu, em sua obra *Elements of Algebra*, os objetos denominados progressões geométricas finitas e infinitas, representação de frações ordinárias em frações decimais, representação de frações decimais em frações ordinárias e a regra de transformar dízimas periódicas simples em frações ordinárias.

Vimos também que as frações decimais infinitas são outro modo de produzir significado para séries infinitas. Queremos destacar que neste capítulo Euler nos apresentou três modos diferentes de produzir significados para as representações das dízimas periódicas em frações ordinárias.

1º Modo. Em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela representação da dízima periódica em frações decimais e pela fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita;

2º Modo. Em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por operações aritméticas, por frações equivalentes e por resultados obtidos anteriormente;

3º Modo. Em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por operações aritméticas.

Deste modo, podemos dizer que Euler produziu significado para as representações das dízimas periódicas em frações ordinárias em Campos Semânticos diferentes, portanto, produziu conhecimentos distintos.

Também destacamos, ao longo do texto, como alguns modos de produzir significados se mantiveram até hoje na comunidade matemática e como alguns modos foram modificados ao longo dos séculos, embora se assemelhem são produzidos em Campos Semânticos distintos.

[26] O correto seria expressar esse número da seguinte forma $0,296296$ *etc.*

[27] Esta divisão é representada, no Brasil, pelo diagrama:

$$\begin{array}{l|l} 8,0000000 & 27 \\ \cline{2-2} \underline{54} & 0,296296 \\ 260 & \\ \underline{243} & \\ \quad 170 & \\ \quad \underline{162} & \\ \qquad 80 & \\ \qquad \underline{54} & \\ \qquad 260 & \\ \qquad \underline{243} & \\ \qquad\quad 170 & \\ \qquad\quad \underline{162} & \\ \qquad\qquad 8 & \end{array}$$

Capítulo 7

Considerações finais

Quanto às investigações fundamentais da matemática, não há nenhum último fim ... nenhum primeiro começo.
Felix Klein

Ao término da análise destes capítulos selecionados, nos perguntamos: como concluir esta tese? De fato, não existe conclusão. O que existe são novos caminhos a serem seguidos, como, por exemplo, a continuação do estudo de séries em outros trabalhos de Euler. Segundo Ed Sandifer (2005), Euler escreveu seu primeiro artigo em 1725, *Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente*, que foi publicado em 1726 em *Acta Eruditorum*, e após sua morte em 1783, seus trabalhos continuaram sendo publicado até 1826. Como apresentamos no Capítulo 1, a produção de Euler foi muito vasta com 866 trabalhos catalogados, entre os quais temos artigos, livros e algumas correspondências. Dentre estes trabalhos catalogados encontramos 82 deles, como sendo de séries, aproximadamente 1800 páginas, sem levar em consideração outros artigos e livros "que não foram explicitamente classificados como pertencentes à teoria de séries pelos editores de *Opera Omnia*." (FERRARO, 2008, p. 155, tradução nossa). Portanto, há muitas coisas sobre séries à serem investigadas ainda.

Embora nosso projeto inicial fosse traduzir do inglês para o português a obra *Elements of Algebra* de Leonhard Euler, datada de 1840, e a partir desta tradução buscaríamos analisar os modos de produção de significados e conhecimentos para os objetos matemáticos com base no Modelo dos Campos Semânticos e, pautados nesta obra, colocaríamos sob análise crítica o currículo da licenciatura em matemática e a formação do professor. Ao longo da tradução percebemos que a nossa proposta inicial era muito extensa, e assim delimitamos o estudo para apenas um objeto matemático: *séries*, e abandonamos as outras propostas mencionadas. Deste modo, deixamos para o futuro a publicação da tradução em língua portuguesa desta obra, a análise comparativa da nossa tradução com a tradução em língua portuguesa encontrada na Biblioteca de Obras Raras da UFRJ datada de 1809, uma investigação mais aprofundada dos dois artigos que apresentamos no Capítulo 5 à respeito das demonstrações do Binômio de Newton para n fracionário e negativo apresentadas por Euler, a análise crítica do currículo da licenciatura em matemática e a formação do professor, além, é claro, as análises dos demais capítulos deste livro.

Em relação ao livro que traduzimos e apresentamos parcialmente nesta tese, este contém aproximadamente 600 páginas das quais 462 foram produzidas por Euler, de modo que não concluímos este trabalho mas apenas terminamos uma etapa de nosso projeto, podemos dizer que cumprimos uma pequena etapa da análise do livro, uma vez que a obra que selecionamos para estudar é muito rica e aborda vários objetos matemáticos além dos apresentados nesta tese. Assim, podemos dizer que findamos *um*, entre outros possíveis, modo de produzir significados para as séries no livro *Elements of Algebra*.

Apresentamos nesta tese alguns dos modos de produção de significados e conhecimentos para séries feito por Euler na obra *Elements of Algebra*, na qual ele explora três dos quatro significados produzidos naturalmente para séries infinitas na matemática: a divisão elementar, o teorema do binômio de Newton generalizado e as decimais infinitas.

Um dos princípios utilizado por Euler em seus trabalhos sobre séries é que *as séries infinitas surgem a partir da expansão de uma certa expressão finita.* Assim, ele inicia o seu estudo de séries, no livro *Elements of Algebra*, por meio da divisão elementar, ou seja, ele utiliza o algoritmo usual da divisão para representar o quociente de algumas frações em séries infinitas, e é a partir deste modo de produção de significado que analisamos o Capítulo 4 desta tese.

Em termos de nosso referencial teórico, podemos dizer que Euler estava produzindo significado para as séries infinitas em um *Campo Semântico* cujo núcleo foi constituído pelo algoritmo usual da divisão. Queremos destacar que este é um entre outros modos de produzirmos significados para as séries infinitas que Euler nos apresenta em seu trabalho.

No Capítulo 5 desta tese, Euler nos apresenta um outro modo de produzir significado para séries, por meio do Teorema Binomial, ou seja, ele utiliza a fórmula do binômio de Newton para n fracionário e negativo, gerando por meio da fórmula (expressão finita) uma série infinita, de modo que podemos dizer que Euler estava produzindo significado para as séries infinitas em um *Campo Semântico* cujo núcleo foi constituído pela fórmula do binômio de Newton.

No Capítulo 6, Euler produz significado para as séries geométricas infinitas utilizando o modo de produzir significado para a fórmula da progressão geométrica finita, ou seja, podemos dizer que Euler estava produzindo significado para as séries infinitas em um *Campo Semântico* cujo núcleo foi constituído por operações aritméticas e pelo *princípio da extensão infinita.* Euler também produz significado para as representações das frações ordinárias em frações decimais por meio do algoritmo usual da divisão, ou seja, podemos dizer que Euler estava produzindo significado para as séries infinitas em um *Campo Semântico* cujo núcleo foi constituído pelo algoritmo usual da divisão.

Como podemos notar nos parágrafos acima, um dos propósitos de nosso trabalho foi evidenciar os diferentes modos de produção de significados para séries. Assim, em cada produção de significado que Euler nos apresentava, buscamos compará-lo com os modos de produção de significados que fazemos hoje na Teoria de Séries. Encontramos muitas diferenças e algumas convergências entre a teoria de hoje e a teoria do século XVIII.

No trabalho de doutoramento de Martins (2005), este sustentou que na matemática os *fatos*[1] são cumulativos, mas não há a permanência nos modos de produção de significados para esses *fatos.* Corroborando esta ideia, pudemos evidenciar em nossa tese que muitas das *crenças-afirmações* feitas por Euler permanecem ainda hoje, mas os modos de produção de significados não. Assim, a mesma *crença-afirmação* pode ser justificada dentro de Campos Semânticos diferentes, mas para cada Campo Semântico a justificação corresponde a diferentes conhecimentos.

[1]Martins (2005), define *fatos* na matemática como sendo as proposições e os teoremas enquanto enunciados demonstráveis.

Segundo Lins,

> o conhecimento produzido é indivisível, e que não se pode separar uma *crença-afirmação* que tem significado em relação a *objetos* constituídos dentro de um *Campo Semântico*, que se aplique "automaticamente" a *objetos* constituídos dentro de outros *Campos Semânticos*, naqueles que não sejam possível produzir significado para aqueles objetos. (LINS, 1994e, p. 54).

Vejamos. No artigo *292*, Euler aplicou o algoritmo usual da divisão para encontrar o quociente da divisão de 1 por $1 - a$, e utilizando o algoritmo da divisão continuamente, expressou este quociente em uma série infinita,

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \ldots \tag{7.1}$$

No artigo *293*, Euler supôs $a = 2$ na Equação 7.1 e obteve

$$\frac{1}{1-2} = -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \ldots \tag{7.2}$$

Conforme discutimos no Capítulo 4, Euler resolveu este paradoxo constituindo o objeto *números negativos* como aquelas quantidades que são simultaneamente menores do que zero e maiores do que o infinito. Assim sendo, a Expressão 7.2 era legítima para Euler, e foi produzida dentro de um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pelo algoritmo usual da divisão. Portanto, Euler constituiu o objeto $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \ldots$ ao qual não podemos produzir significado algum dentro de um Campo Semântico cujo núcleo é constituído pela Teoria de Séries de hoje.

> Aqui fica claro a distinção entre os modos de produzir *significado*, já que é possível gerar *objetos* dentro de um dos *Campos Semânticos*, que podem perfeitamente não ter significado em outro Campo Semântico. (LINS, 1994e, p. 54).

Mas aqui também entra em jogo um outro objeto constituído por Euler, que é a *soma* de séries divergentes. Segundo Euler, todo o problema se encontra na utilização da palavra *soma*. Portanto, no livro *Foundations of Differential Calculus*, Euler estabelece: *a* ***soma*** *de uma série infinita é a expressão finita que originou a série.* Posto isto, a soma da série $1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+\ldots$ é a expressão finita que lhe originou, ou seja, $\dfrac{1}{1-a}$. Assim, tomando $a = 2$, obtemos que o valor da soma da série $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \ldots$ é -1. Conforme apresentamos no Capítulo 4, Euler foi um dos pioneiros na utilização de séries divergentes, e seus métodos e ideias foram utilizados por matemáticos posteriores a ele, como é o caso de Borel, Cèsaro e Hardy.

O nosso trabalho concentrou-se na análise de processos de produção de significados em relação a núcleos no interior de atividades. Destacamos que os *Campos Semânticos* não são fixos, estáticos, mas dinâmicos, móveis, por exemplo, quando expandimos o quociente $\dfrac{1}{a+b}$ em uma série infinita $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{b}{a^2} + \dfrac{b^2}{a^3} - \dfrac{b^3}{a^4} + \dfrac{b^4}{a^5} - \dfrac{b^5}{a^6} + etc.$ podemos produzir significado para esta expressão em relação a um núcleo que é constituído pela divisão elementar e em relação a um núcleo que é constituído pela fórmula do binômio de Newton, dependendo da atividade que estamos desenvolvendo. Segundo Lins, o interesse do Modelo dos Campos Semânticos é no processo de produção de significados e em sua leitura, e não na permanência.

Também observamos, ao longo dessa tese, que muitas vezes Euler utilizava um exemplo que servia como um modelo geral do assunto, e ele o utilizava para generalizar seus resultados, e outras vezes ele utilizava o método dedutivo para *provar* seus resultados. Segundo Crombie,

> O estilo de pensamento da cultura fornece os critérios e os modos que determinam, entre outros, a natureza ontológica dos objetos matemáticos, o tipo de discurso científico tido como aceitável, os argumentos reconhecidos como válidos e os métodos de pesquisa que lhe são próprios. (CROMBIE, 1995 apud RADFORD, 2011, p. 50).

Assim, acreditamos que fazia parte do discurso científico daquela época que ao utilizarem resultados matemáticos conhecidos anteriormente a sua época, esses seriam conhecimentos já reconhecidos como verdadeiros, e não havia necessidade de prová-los. Outros resultados obtidos por meio de exemplos particulares, serviam de modelo de técnicas a serem seguidas, como uma regra, pois bastava mudar os números nesses exemplos e obteríamos novos exemplos e resultados, assim o método era auto-evidente, reconhecido como válido e não havia necessidade de prová-lo.

Hoje na matemática acadêmica temos <u>um</u> modo de produzir significado para séries, mas como apresentamos nesta tese, existiram outros diferentes deste. E aqui vale assinalar que estes modos de produzir significados são compartilhados pelos matemáticos de hoje e, eram compartilhados pelos matemáticos da época de Euler. Algumas vezes olhamos para o passado e queremos "ver" os objetos que constituímos hoje. Algumas pessoas acreditam que as séries que Euler estava constituindo como objeto devem ter uma conexão lógica com as séries de hoje. Mas ao colocarmos em evidência os modos de produção de significados para estes objetos, acreditamos que estamos dando um grande passo para mostrarmos as diferenças. As legitimidades dos modos de produção de significados são sempre negociadas. Sugerimos em vários capítulos desta tese que a maioria das *crenças-afirmações* foram preservadas, mas os significados produzidos para elas não.

Para corroborar esta ideia, apresentaremos, a seguir, uma citação de Poincaré (1908),

> ... matemática é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes ... Quando a linguagem é bem escolhida, ficamos admirados de ver que todas as provas feitas para certo objeto aplicam-se imediatamente a muitos novos objetos; nada há a alterar, nem mesmo as palavras, visto que os nomes tornaram-se os mesmos. (POINCARÉ, 1908, p. 375 apud LAKATOS, 1978, p. 120- 121).

Podemos fortalecer ainda mais este ponto de vista apresentando um trecho da obra *A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações*, de Imre Lakatos:

> [...] Você tem que restringir seu programa euclidiano a teorias que tenham conceitos perfeitamente conhecidos, e quando você quiser incluir teorias com conceitos vagos no escopo desse programa, você pode fazer isso mediante sua técnica tradutória: como você disse, você não traduz; pelo contrário, cria novo significado. Mas mesmo que você tentasse *traduzir* o antigo significado, alguns aspectos essenciais do conceito vago original podem perder-se nessa tradução. O novo conceito claro pode não servir para a solução do problema para o qual o antigo conceito servia.

> Se você conscientemente bane sua tradução como infalível, ou se você conscientemente bane o antigo significado, ambos esses extremos produzirão o mesmo resultado: você pode jogar o problema original no limbo da história do pensamento - o que, de fato, você não deseja fazer. (LAKATOS, 1978, p. 160-161).

Muitas vezes a matemática é apresentada como uma sequência sempre crescente de verdades imutáveis e eternas. Mas apoiado neste pressuposto o que ocorre de fato é que " [...] Toda a história evapora, as sucessivas formulações provisórias do teorema durante a prova são relegadas ao esquecimento enquanto o resultado final é exaltado como infalibilidade sagrada." (LAKATOS, 1978, p. 186). Diante disto, conservando apenas *as crenças-afirmações* (ou os *fatos*) temos a sensação de estarmos falando do mesmo objeto matemático, e como apresentamos em nossa tese, quando utilizamos nosso referencial teórico para fazermos leituras suficientemente finas para *as crenças-afirmações*, percebemos que os modos de produção de significados e os conhecimentos produzidos são distintos.

O que nos encantou ao analisar esta obra foram os modos de produzir significados para os objetos matemáticos apresentados por Euler. Ele o faz de forma magistral, explícita, clara e coerente. Seu modo de tratar e expor os assuntos é sem dúvida magnânimo. A cada tópico, ele explora todos os aspectos possíveis daquele resultado encontrado, aprofundando seus conhecimentos a respeito do objeto estudado, obtendo uma certa proficiência que acreditamos é de extrema importância para um professor do Ensino Básico.

Ainda pensando na prática docente, deseja-se que os professores tenham um amplo e diversificado conhecimento à respeito dos assuntos que ensinarão. Acreditamos que a utilização do Modelo dos Campos Semânticos juntamente com a metodologia utilizada por Euler em sua obra *Elements of Algebra* fornece uma base sólida e diversificada para o professor trabalhar em sala de aula. Utilizar diversos modos de produção de significados em sala de aula possibilita novas oportunidades de aprendizado e compreensão. Um exemplo disso, foi apresentado por Euler, no Capítulo 6 desta tese, onde ele produziu diferentes significados para a dízima periódica, estudou vários exemplos particulares, fez generalizações, assim temos uma grande oportunidade para o ensino e aprendizado desse tópico.

Segundo Lins, o que é mais importante para a formação de um futuro professor de matemática é que diante, por exemplo da série $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + \ldots$, tomando $a = 1$, obtemos $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, esta situação faça seu chão sumir sob seus pés, pois isso segundo Lins, "cria a possibilidade do tornar-se, não torna-se um matemático, mas tornar-se - como deve ser um professor - um atento leitor da *diferença*". (LINS, 2004a, p. 119). Assim, a Matemática do matemático oferece uma oportunidade ímpar de discutir a diferença. E para Lins,

> isto é, ao meu entendimento, exercer uma educação *através* da Matemática, e num sentido que coloca a escolha de conteúdos claramente como apenas uma escolha do que me vai ser mais útil em minha empreitada e, nunca, como uma escolha "do que deve ser ensinado". (LINS, 2004a, p. 119).

Portanto, ao nos depararmos com os diferentes modos de produções de significados que Euler nos apresenta em seu livro, estamos ampliando nossos horizontes, estamos experimentando a possibilidade de vislumbrarmos outros lugares, outros modos de produção de significados para os objetos matemáticos, outras práticas de ensino.

Nossa tese teve como objetivo apresentar os diferentes modos de produzir significados e conhecimentos para diversos objetos matemáticos entre eles algumas *séries* particulares. Mostramos que no interior de cada *Campo Semântico* constituímos objetos diferentes e portanto conhecimentos distintos. E esta diversidade de produção de conhecimento amplia nosso repertório para tratarmos de objetos matemáticos, nos mostra que não existe um único modo de produzir significado para um objeto, mas que existem vários.

Para finalizar, acreditamos que este trabalho corrobora as ideias de Lins, onde ele defende que

> o professor precisa saber mais, e não menos Matemática, mas sempre esclarecendo que este mais não se refere a mais conteúdo, e sim a um entendimento, uma lucidez maior, e isto inclui, necessariamente, a compreensão de que mesmo dentro da Matemática do matemático produzimos significados diferentes para o que parece ser a mesma coisa. (LINS, 2005, p. 122).

Sou muito grata ao Romulo por me apresentar Euler "face a face", e me possibilitar a descoberta este maravilhoso mundo ao qual as obras de Euler habitam.

Por fim,

> Se todos os sujeitos biológicos morrerem, isto não implica que eu, como sujeito biológico, morra por causa disto. Se todos os sujeitos cognitivos morrerem (para mim; um apagamento), isto implica que eu, como sujeito cognitivo, morro. (LINS, 2012, p. 29).

Referências

ALEXANDERSON, G. L. Ars Expositionis: Euler as Writer and Teacher. **Mathematics Magazine**, v. 56, n. 5, p. 274-278, nov. 1983. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2690366>. Acesso em: 27 nov. 2017.

ARAGONA, Jorge; DE OLIVEIRA, Oswaldo R. B. **Números Complexos**. 2010. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~oliveira/ComplexosCap6.pdf>. Acesso em: 27 nov. 2017.

BARBEAU, E. J.; LEAH, P. J. Euler's 1760 Paper on Divergent Series. **Historia Mathematica**. v. 3, n. 2, p. 141-160, 1976.

BARLOW, Peter. **A New Mathematical and Philosophical Dictionary**. London: Printed by Whittingham and Rowland, 1814.

BICUDO, Irineu. **Os Elementos de Euclides**. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BIRMAJER, Daniel; GIL, Juan B. Arithmetic in the ring of formal power series with integer coefficients. **American Mathematical Monthly**, v. 115, n. 6, p. 541-549, 2008.

BLOCH, Marc. **Apologia da história ou O ofício de historiador**. Tradução André Telles. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução de M. J. Alvarez, S. B. dos Santos, T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BOULOS, P.; ABUD, Z. I. **Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2002. v. 2.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BROCHERO MARTINEZ, Fabio et al. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

BURCKHARDT, J. J. Leonhard Euler, 1707-1783. **Mathematics Magazine**, v. 56, n. 5, p. 261-273, nov. 1983. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2690365>. Acesso em: 27 nov. 2017.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática**. Tradução de Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

CARDANO, Girolamo. **Ars Magna or The Rules of Algebra**. Translated by T. Richard Witmer. New York: Dover Publications, 1993.

COOLIDGE, J. L. The Story of the Binomial Theorem. **The American Mathematical Monthly**, v. 56, n. 3, p. 147-157, mar. 1949. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2305028>. Acesso em: 27 nov. 2017.

CORRÊA, Bruna Moustapha. A introdução à arte analítica de François Viète: comentários e tradução. 2008. 131 f. Dissertação (mestrado) - UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. Rio de Janeiro, UFRJ, 2009.

COSTA, Fernão Couceiro da. **Somas de Séries no Sentido Generalizado: Factores de convergência**. Porto: Imprensa Portuguesa, 1931. Disponível em: <https://repositorio-tematico.up.pt/bitstream/10405/50481/1/150179_C.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2016.

CRUZ, Willian José; SANTANA SOARES, Carlos Alberto. Um olhar para as dízimas periódicas: convite ao professor da educação básica (TA). In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. Disponível em: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1155>. Acesso em: 13 jun. 2015.

DAVIS, Tinka. **Forty Two Problems of First Degree from Diophantus' Arithmetica**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ciências). Department of Mathematics and Statistics and faculty of the Graduate School of Wichita State University, 2010.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Euler, Um Matemático Multifacetado. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 9, n. 17, p. 13-31, abril/set. 2009.

DE ANDRADE, Rubens Leão; DE LIMA, Ronaldo Freire. **Pré-Cálculo**. Natal, RN: EDUFRN Editora da UFRN, 2006.

DE ARRUDA, Evilásio José. O Pensamento de Jacob Klein sobre a simbolização algébrica nos séculos XVI e XVII. **Caminhos da Educação Matemática em Revista (On-line)**, v. 3, n. 1, 2015. Disponível em: <https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/search/titles?searchPage=2>. Acesso em: 30 nov. 2015.

DE OLIVEIRA MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 7. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

DE OLIVEIRA SANTOS, José Plínio. **Introdução à teoria dos números**. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

DESCARTES, René. (1596-1650). **Discurso do método**. Tradução de Maria Ermantina de Almeida Prado Galvão. 4. ed. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2009.

DOMINGUES, Hygino Hugueros; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. 4 ed. reform. São Paulo: Atual, 2003.

DOMINGUES, Hygino H. A Demonstração ao Longo dos Séculos. **Boletim de Educação Matemática-BOLEMA**, v. 15, n. 18, p. 55-67, set. 2002. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10593/6982>. Acesso em: 18 jan. 2017.

DUNHAM, William. **Euler: The Master of Us All**. MAA, 1999.

EDWARDS, C. H. Jr. **The historical development of the calculus**. New York: Springer-Verlag, 1979.

EULER, Leonhard. **Einleitung zur Rechenkunst**. Anmerck ungen uber die zeitungen, 1738. Reimpresso em **Opera Omnina: Series 3**, v. 2, p. 1-304. Tradução de Christian Siebeneicher. Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org/index.html>. Acesso em: 04 set. 2017.

EULER, Leonhard. De summatione innumerabilium progressionum. **Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 5**, 1738, p. 91-105. Reimpresso em **Opera Omnia: Series 1**, v. 14, p. 25 - 41. Tradução de Ian Bruce. Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org>. Acesso em: 17 abr. 2017.

EULER, Leonhard. Methodus Generalis Summandi Progressiones. **Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 6**, 1738, p. 68-97. Reimpresso em **Opera Omnina: Series 1**, v. 14, p. 42-72. Tradução de Ian Bruce. Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org>. Acesso em: 17 abr. 2017.

EULER, Leonhard. (1748). **Introduction to the Analysis of the Infinite**. Translated by John D. Blanton. New York: Springer-Verlag, 1988. v. 1.

EULER, Leonhard. De seriebus divergentibus. **Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae 5**, 1760, p. 205-237. Reimpresso em **Opera Omnina: Series 1**, v. 14, p. 585-617. Tradução de Alexander Aycock. Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org>. Acesso em: 23 maio 2016.

EULER, Leonhard. **Vollständige Anleitung zur Algebra**. St. Petersburg: bei der kayserlichen Akademie der Wissenschaften, 1771. Reimpresso em **Opera Omnia: Series 1**, v. 1. Editado por Heinrich Weber. Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org>. Acesso em: 28 nov. 2017.

EULER, Leonhard. Demonstratio Theorematis Neutoniani De Evolutione Potestatum Binomii Pro Casibus, Quibus Exponentes Non Sunt Numeri Integri. **Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 19**, 1775, p. 103 -111. Reimpresso em **Opera Omnia: Series 1**, v. 15, p. 207 - 216. Tradução de Alexander Aycock and Arseny Skryagin. Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org>. Acesso em: 17 abr. 2017.

EULER, Leonhard. Nova Demonstratio Quod Evolutio Potestatum Binomii Newtoniana Etiam Pro Exponentibus Fractis Valeat. **Nova Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae 5**, 1789, p. 52-58. Reimpresso em **Opera Omnia: Series 1**, v. 16, p. 112 - 121. Tradução de Artur Diener and Alexander Aycock. Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org>. Acesso em: 23 jun. 2016.

EULER, Leonhard. **Elémens d'algèbre**. Translated by M. Bernoulli. Petersbourg: [s.n.], 1798.

EULER, Leonhard (1840). **Elements of Algebra**. Translated by Rev. John Hewlett. New York: Springer-Verlag, 1984.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

FELLMANN, Emil A. **Leonhard Euler**. Translated by Erika Gautschi and Walter Gautschi. Basel: Birkhäuser, 2007.

FERRARO, Giovanni. The first modern definition of the sum of a divergent series: an aspect of the rise of 20th century mathematics. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 54, n. 2, p. 101-135, jun. 1999.

FERRARO, Giovanni. **The rise and development of the theory of series up to the early 1820s**. New York: Springer Science & Business Media, 2008.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2016.

GINSBURG, J. Leibniz And The Bernoullis On The Polynomial Theorem. In: SMITH, David Eugene. **A Source Book in Mathematics**. New York: Dover Publications, 1959. p. 229-231. v. 1.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática: uma nova abordagem**, vol. 1: versão trigonometria e vol. 2: versão progressões. São Paulo: FTD, 2000.

GRIMBERG, Gerard E. GAUSS: Os Resíduos Biquadráticos e a Representação Geométrica dos Números Complexos. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 14, n. 29, 2014, p. 145-166.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. v. 4.

GUNDLACH, Bernard H. **História dos números e numerais**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

HARDY, G. H. **Divergent Series**. London: Oxford University Press, 1949.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade**. 3. ed. São Paulo: Atual, 1977. v. 5.

HEATH, Thomas Little. **A History of Greek Mathematics, vol. 1: From Thales to Euclid**. Oxford: Clarendon Press, 1921.

HEEFFER, Albrecht. The origin of the problems in Euler's Algebra. **Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin**, Belgium, v. 13, n. 5, p. 949-952, 2006.

HOARE, Graham. Leonhard Euler (1707-1783). **The Mathematical Gazette**. v. 91, n. 522, p. 406-414, nov. 2007. Disponível em: <`http://www.jstor.org/stable/40378414`>. Acesso em: 03 maio 2016.

HOFFMANN, L. D., BRADLEY, G. L. **Cálculo: um curso moderno e suas aplicações: tópicos avançados**. Tradução de Ronaldo Sérgio de Biasi. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1977. v. 4.

KLEIN, Jacob. **Greek mathematical thought and the origin of algebra**. Translated by Eva Brann. New York: Dover Publications, 1992.

KLINE, Morris. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. New York: Oxford University Press, 1972. v. 1.

KLINE, Morris. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. New York: Oxford University Press, 1972. v. 2.

KLINE, Morris. Euler and Infinite Series. **Mathematics Magazine**. v. 56, n. 5, p. 307-314, nov. 1983.

KLEINERT, Andreas. Leonhardi Euleri Opera Omnia: Editing the works and correspondence of Leonhard Euler. **Prace Komisji Historii Nauki PAU**, v. 14, p. 13-35, 2015. Disponível em: <`http://pau.krakow.pl/PKHN-PAU/pkhn-pau-XIV-2015-2.pdf`>. Acesso em: 21 nov. 2016.

KLEINERT, Andreas; MATTMÜLLER, Martin. Leonhardi Euleri Opera Omnia: a centenary project. **Newsletter of The European Mathematical Society**, n. 65, p. 25-31, set. 2007.

LACERDA, Tessa Moura. **A expressão em Leibniz**. 2005. Tese (Doutorado em Filosofia). Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

LAKATOS, Imre. **A Lógica do Descobrimento Matemático: provas e refutações**. Tradução de Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LEHMANN, J. P. Converging Concepts of Series: Learning from History. In: SWETZ, Frank et al. **Learn from the Masters**. The United States of America: The Mathematical Association of America, 1995. p. 161-180.

LEONTIEV, Alexis N. Uma Contribuição à Teoria do Desenvolvimento da Psique Infantil. In: VIGOTSKII, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem**. Tradução de Maria da Pena Villalobos. 12. ed. São Paulo: Ícone, 2012. p. 59-83.

LINS, R. C. Epistemologia, História e Educação Matemática: Tornando mais Sólidas as Bases da Pesquisa. **Revista de Educação Matemática da SBEM**, São Paulo, ano 1, n. 1, p. 75-91, set. 1993.

LINS, R. C. O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: Uma Análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Dynamis: Revista Técno-Científica**, Blumenau, v.1, n. 7, p. 29-39, abril/jun. 1994a.

LINS, R. C. Um quadro de referência para entender-se o que é o pensamento algébrico. In: **Seminário Novas Perspectivas da Educação Matemática no Brasil**, 4., 1994, Águas de

São Pedro/SP. Série Documental. Brasília: MEC, 1994b.

LINS, R. C. Epistemologia e Matemática. **Boletim de Educação Matemática-Bolema**, Rio Claro, ano 9, n. especial 3, p. 35-46, 1994.

LINS, R. C. Notas sobre o uso da noção de conceito como unidade estruturante do pensamento. In: ESCOLA LATINO-AMERICANA SOBRE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA - ELAPEF, 3., 1996, Porto Alegre. **Anais...** Canela: [s.n.], 1996b. p. 137-141.

LINS, R. C. Luchar por la supervivencia: la producción de significado. **Uno: Revista de Didáctica de las matemáticas**, Barcelona, n. 14, p. 39-46, out. 1997a.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997b.

LINS, R. C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a educação matemática In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p. 75-94.

LINS, R. C. Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Editora Cortez, 2004. p. 92 -120.

LINS, R. C. A formação pedagógica em disciplinas de conteúdo matemático nas licenciaturas em matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, n. 18, p. 117-123, jun. 2005.

LINS, R. C. O Modelo dos Campos Semânticos: Estabelecimentos e Notas de Teorização. In: ANGELO, C. L. et al. (Org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história**. São Paulo: Midiograf, 2012. p. 11- 30.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2016.

MARTINS, João Carlos Gilli. **Sobre revoluções científicas na matemática**. 2005. 175 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/102083>. Acesso em: 25 jan. 2016.

MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C. **Progressões e Matemática Financeira**. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

NIVEN, Ivan. **Números: racionais e irracionais**. Tradução de Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

OLIVEIRA, V. C. A. Sobre as ideias de estranhamento e descentramento na formação de professores de Matemática. In: ANGELO, C. L. et al. (Org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história**. São Paulo: Midiograf, 2012. p. 199-216.

POLCINO MILIES, Francisco César; COELHO, Sonia Pitta. **Números: Uma Introdução à Matemática**. 3. ed. reimpr. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2006.

POLYA, George. **Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics**. London: Oxford University Press, 1954. v. 1.

RADFORD, Luis. **Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

RIPOLL, Cydara Cavedon. A Construção dos Números Reais Nos Ensinos Fundamental e Médio. In: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2., 2004. Salvador. **Anais...** UFBA. Disponível em: < `http://www.bienasbm.ufba.br/M54.pdf`>. Acesso em: 13 jun. 2015.

ROBERTSON, John. Of the Theory of Circulating Decimal Fractions. **Philosophical Transactions**, v. 58, p. 207-213, 1768. Disponível em: < `http://www.jstor.org/stable/105780`>. Acesso em: 23 out. 2016.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAD, Lígia Arantes. **Cálculo diferencial e integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos**. 1998. 371 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

SANDIFER, Ed. A memorable example of false induction (August 2005). In: ______. **How Euler did it**. Disponível em: < `http://eulerarchive.maa.org/hedi/index.html` >. Acesso em: 03 dez. 2015.

SANDIFER, Ed. Divergent series (June 2006). In: ______. **How Euler did it**. Disponível em: < `http://eulerarchive.maa.org/hedi/index.html` >. Acesso em: 03 dez. 2015.

SANDIFER, Ed. Euler as a Teacher - Part 2 (February 2010). In: ______. **How Euler did it**. Disponível em: < `http://eulerarchive.maa.org/hedi/index.html` >. Acesso em: 03 dez. 2015.

SANDIFER, Ed. **How Euler did it**. MAA, 2007. Disponível em: < `http://eulerarchive.maa.org/hedi/index.html` >. Acesso em: 18 jan. 2017.

SANFORD, E. M. Newton On the Binomial Theorem for Fractional and Negative Exponents. In: SMITH, David Eugene. **A Source Book in Mathematics**. New York: Dover Publications, 1959. p. 224-228. v. 1.

SANFORD, V. Stevin On Decimal Fractions. In: SMITH, David Eugene. **A Source Book in Mathematics**. New York: Dover Publications, 1959. p. 20-34. v. 1.

SCHOENFELD, A. H.; ARCAVI, A. On the Meaning of Variable. **National Council of Teachers of Mathematics**. v. 81, n. 6, p. 420-427, set. 1988.

SCHUBRING, Gert. **Análise Histórica de Livros de Matemática: notas de Aulas**. Tradução de Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas, SP: Autores Associados, 2003.

SIGLER, Laurence. **Fibonacci's Liber abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation**. New York: Springer-Verlag, 2002.

SILVA DA SILVA, Circe Mary. O livro Didático mais popular de Leonhard Euler e sua repercussão no Brasil. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 9, n. 17, p. 33-52, abril/2009 - set./2009.

SILVA, Amarildo Melchiades da. **Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática**. 2003. 243 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução de Seiji Hariki. São Paulo: Pearson Makron Books, 1988. v. 2.

SOLOMON, Ron. On Finite Simple Groups and Their Classification. **Notices of the American Mathematical Society**, v. 42, n. 2, p. 231-239, fev. 1995. Disponível em: < http://www.ams.org/notices/199502/solomon.pdf >. Acesso em: 09 dez. 2017.

STEDALL, J. A. The Discovery of Wonders: Reading Between the Lines of John Wallis's Arithmetica infinitorum. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 56, n. 1, p. 1-28, nov. 2001. Disponível em: < http://www.jstor.org/stable/41134128 >. Acesso em: 30 mar. 2016.

STEWART, J. **Cálculo**. Tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2011. v. 2.

TATTERSALL, James J. **Elementary number theory in nine chapters**. New York: Cambridge University Press, 1999.

THIELE, Rüdiger. Review: Johann Philipp Grüson's edition of Euler's Algebra. **Opusculum**. The Euler Society Newsletter. v. 3, n. 2, p. 33-34. Summer 2011. Disponível em: <http://faculty.washington.edu/etou/eulersoc/documents/opusculum/Opusculum-2011-2.pdf>. Acesso em: 17 nov. 2016.

WAERDEN, Bartel L. van der. **A History of Algebra**. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.

VEYNE, Paul Marie. **Como se escreve a história; Foucault revoluciona a história**. Tradução de Alda Baltar e Maria Auxiliadora Kneipp. 4. ed. reimpressão. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2014.

Apêndice A

Teoria de Séries

Utilizaremos como bibliografia básica para esta seção Boulos (2002, v. 2), capítulo 10, Guidorizzi (1999, v. 4), capítulos 1, 2, 3, 4 e 8 e Stewart (2011, v. 2), capítulo 1.

A.1 Sequências

Definição A.1.1. *Uma **sequência** pode ser pensada como uma lista de números escritos em uma ordem definida:*

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

O número a_1 é chamado primeiro termo da sequência, a_2 é o segundo termo e, em geral, a_n é o n-ésimo termo. Trataremos exclusivamente de sequências infinitas, de modo que cada termo a_n terá um sucessor a_{n+1}.

Observe que, para cada inteiro positivo n, existe um número correspondente a_n e, dessa forma, uma sequência pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Mas, geralmente, escrevemos a_n em vez da notação de função $f(n)$ para o valor da função no número n.

Denotamos a sequência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ por $\{a_n\}$.

Definição A.1.2. *Consideremos uma sequência de termo geral a_n e seja L um número real. Definimos:*

(i) $$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \iff \left\{ \begin{array}{c} Para\ todo\ \epsilon > 0, existe\ um\ natural\ n_0\ tal\ que \\ n > n_0 \Longrightarrow L - \epsilon < a_n < L + \epsilon. \end{array} \right.$$

(ii) $$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \left\{ \begin{array}{c} Para\ todo\ \epsilon > 0, existe\ um\ natural\ n_0\ tal\ que \\ n > n_0 \Longrightarrow a_n > \epsilon. \end{array} \right.$$

(iii) $$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \left\{ \begin{array}{c} Para\ todo\ \epsilon > 0, existe\ um\ natural\ n_0\ tal\ que \\ n > n_0 \Longrightarrow a_n < -\epsilon. \end{array} \right.$$

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ for finito, diremos que a sequência a_n é *convergente*; caso contrário, diremos que a sequência é divergente.

Definição A.1.3. *Uma sequência $\{a_n\}$ é denominada* ***crescente*** *se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, isto é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. É chamada* ***decrescente*** *se $a_n > a_{n+1}$ para todos $n \geq 1$. É dita* ***monótona*** *se for crescente ou descrente.*

A.2 Séries Numéricas

A ideia de "adição infinita" aparece em sua forma mais natural na fórmula

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots \quad = \quad 2. \tag{A.1}$$

Concordamos que a "soma" do lado esquerdo é exatamente igual a 2. A razão é que começamos com 1 (soma parcial $= 1$), depois somamos $\frac{1}{2}$ (total parcial $= 1\frac{1}{2}$), depois somamos $\frac{1}{4}$ (total parcial $= 1\frac{3}{4}$) e assim por diante, produzindo a sequência de somas parciais,

$$1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, \ldots$$

Essa sequência se aproxima visivelmente de 2 (seu limite) e é precisamente este o significado que damos à expressão: "a soma da série é 2".

Exemplo A.2.1. *Sejam $a \neq 0$ um número real e r um outro número real tal que $r \in]-1, 1[$. Obtemos os termos da progressão geométrica*

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^n, \ldots$$

O número r chama-se razão.

Queremos calcular a soma dos termos da série geométrica formada a partir dessa progressão

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots \tag{A.2}$$

A partir de (A.2) chamamos a soma finita dos termos de a a ar^n de n-ésima *soma parcial*, e a denotamos por s_n. Assim,

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & a + ar \\ s_2 & = & a + ar + ar^2 \\ & & \ldots \\ s_n & = & a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n \\ & & \ldots \end{array}$$

Se (A.2) possuir uma soma finita s, então

$$s \;=\; \lim_{n \to +\infty} s_n \tag{A.3}$$

Vamos encontrar a fórmula fechada da n-ésima soma parcial s_n como função de n.

Multiplique s_n por r e escreva as duas somas juntas,

$$s_n \;=\; a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n \tag{A.4}$$

$$rs_n \;=\; ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n+1} \tag{A.5}$$

Subtraindo (A.5) de (A.4) temos

$$\begin{aligned} s_n - rs_n &= a - ar^{n+1} \\ s_n(1-r) &= a(1-r^{n+1}) \\ s_n &= \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \end{aligned} \tag{A.6}$$

pois $r \neq 1$. Sabemos que $r^{n+1} \to 0$ quando $n \to +\infty$, porque $|r| < 1$.

Logo,

$$s_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \longrightarrow \frac{a}{1-r} \quad \textit{quando} \quad n \to +\infty.$$

Assim, admitindo que existe uma soma finita s para a série geométrica (A.2), podemos usar a fórmula (A.6) para calculá-la por meio da ideia expressa em (A.3),

$$s = \lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{a}{1-r}$$

Isto é o que queremos dizer quando escrevemos

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1 \tag{A.7}$$

Exemplo A.2.2. *Agora podemos compreender o significado da fórmula (A.1):*

a série à esquerda é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = \frac{1}{2}$ logo, por (A.7) temos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Vamos analisar a produção de significado que foi realizada no Exemplo A.2.1. Primeiro, admite-se que existe uma soma finita s para a série geométrica; calcula-se a n-ésima soma parcial s_n da série geométrica, e então, conclui-se que $s = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$. Segundo Simmons (1988, p. 9) "nenhuma investigação posterior revela outra maneira de se calcular a soma finita da série geométrica (A.2) diferente da realizada através do limite $s = \lim s_n$". Assim, a teoria de séries inverte o enfoque, ou seja, ela muda o modo de produção de significado, definindo "a soma da série (A.2) como sendo o número calculado dessa maneira que, como sabemos, existe" (SIMMONS, 1988, p. 9). E é a partir deste modo de produção de significado que a teoria de séries infinitas irá operar.

A.2.1 A soma de uma série

Dada uma sequência numérica $\{a_n\}$.

A sequência de termo geral

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \tag{A.8}$$

denomina-se **série numérica associada à sequência** $\{a_n\}$. Nos referimos a (A.8) como **soma parcial de ordem** n da série.

Se existe $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$, o número real s é chamado de **soma** da série.

Se a soma for um número real, diremos que a série é **convergente**. Se a soma for infinita ($+\infty$ ou $-\infty$) ou se o limite não existir, diremos que a série é **divergente**.

Pensando em termos do nosso modelo teórico, os significados, objetos e conhecimentos, serão produzidos em um Campo Semântico em relação a estipulações locais à respeito de sequências, somas parciais e limite.

A.2.2 Propriedades das séries

1. Seja α um número real dado. Se $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ for convergente, então $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha a_k$ será convergente e $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha a_k = \alpha \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$.

2. Se $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k$ forem convergentes, então $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(a_k + b_k)$ será convergente e
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

3. $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ será convergente se e somente se, para todo natural p, $\sum\limits_{k=p}^{+\infty} a_k$ for convergente. Além disso, se $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ for convergente, teremos, para $p \geqslant 1$,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{p-1} a_k + \sum_{k=p}^{+\infty} a_k.$$

A.2.3 Série geométrica

Teorema A.2.1. *A série geométrica* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots$ *é convergente se* $|r| < 1$ *e sua soma é*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1$$
Se $|r| \geqslant 1$*, a série geométrica é divergente.*

A.2.4 Uma Condição necessária para que uma série seja convergente. Critério do Termo Geral para Divergência.

Teorema A.2.2. *Se* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *for convergente então* $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Segue do teorema acima o seguinte critério para testar divergência de uma série.

Teorema A.2.3 (Critério do termo geral para divergência)**.** *Seja a série* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. *Se* $\lim_{k\to+\infty} a_k \neq 0$ *ou se* $\lim_{k\to+\infty} a_k$ *não existir, então a série* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *será divergente.*

A.2.5 Série Harmônica

A série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, α um número real dado, denomina-se *série harmônica de ordem* α.

Considere a série harmônica $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Tem-se:

(a) $\alpha > 1 \implies \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ é convergente.

(b) $\alpha \leqslant 1 \implies \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$.

Exemplo A.2.3. *É interessante observar que tanto a série harmônica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

como a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

têm termos positivos que decrescem para zero, mas a primeira diverge, enquanto a segunda converge.

Em outras palavras, o exemplo acima nos mostra que a recíproca do Teorema A.2.2 não é verdadeira, ou seja, em ambas as séries temos $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, mas a primeira série é diverge, enquanto a segunda é convergente.

A.2.6 Critério de Convergência para Série Alternada

Por uma *série alternada* entendemos uma série do tipo $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$, onde $a_k > 0$ para todo natural k.

Teorema A.2.4 (Critério de convergência para série alternada)**.** *Seja a série alternada* $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$*. Se a sequência* a_k *for decrescente e se* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ *então a série alternada* $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$ *será convergente.*

A.2.7 Séries Absolutamente Convergentes e Séries Condicionalmente Convergentes.

Definição A.2.1. *A série* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *é dita* ***absolutamente convergente*** *se* $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ *for convergente.*

Definição A.2.2. *Uma série* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *é chamada* ***condicionalmente convergente*** *se ela for convergente, mas não for absolutamente convergente.*

Teorema A.2.5. *Se* $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ *for convergente, então* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *será, também, convergente.*

A recíproca do teorema acima não vale. A série $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ é convergente, mas não é absolutamente convergente.

Teorema A.2.6 (Critério da Razão)**.** *Seja a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *com* $a_n \neq 0$ *para todo natural* n*. Suponha que* $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$*.*

Nestas condições, tem-se:

a) se $L < 1$*, a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*

b) se $L > 1$ *ou* $L = \infty$*, a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

c) se $L = 1$*, o critério nada revela.*

A.3 Séries de Potências

Uma **série de potências** é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots \tag{A.9}$$

onde x é uma variável e os c_n são constantes chamadas **coeficientes** da série. Para cada x fixo a série (A.9) é uma série de constantes que podemos testar a convergência ou divergência.

A soma da série é uma função

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

cujo domínio é o conjunto de todos os x para os quais a série converge. Observe que f se assemelha a um polinômio.

Em geral, a série da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots \tag{A.10}$$

denomina-se **série de potências centrada em** a ou **série de potências em torno de** a. Estamos convencionando aqui que $0^0 = 1$. Observe que, quando $x = a$ todos os termos são 0 para $n \geq 1$ e assim a série de potências (A.10) sempre converge quando $x = a$.

A série geométrica, na qual os coeficientes são todos iguais a 1 na expressão A.9, é evidentemente a série de potências mais simples.

O próximo teorema destaca uma propriedade bastante importante das séries de potências.

Teorema A.3.1. *Se* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *for convergente para* $x = x_1$, *com* $x_1 \neq 0$, *então a série convergirá absolutamente para todo* x *no intervalo aberto* $]-|x_1|, |x_1|[$.

A.3.1 Raio de Convergência

Teorema A.3.2. *Seja a série de potências* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$. *Existem apenas três possibilidades:*

(i) A série converge apenas quando $x = a$.

(ii) A série converge para todo x.

(iii) Existe um número positivo R *tal que a série converge se* $|x-a| < R$ *e diverge se* $|x-a| > R$.

O número R em *(iii)* é chamado de **raio de convergência** da série de potências. Por convenção, o raio de convergência é $R = 0$ no caso *(i)* e $R = \infty$ no caso *(ii)*.

O intervalo de convergência de uma série de potências é aquele que consiste em todos os valores de x para os quais a série converge. No caso (i) o intervalo consiste em apenas um único ponto a. No caso (ii) o intervalo é $]-\infty, +\infty[$. No caso (iii) observe que a desigualdade $|x-a| < R$ pode ser escrita como $a - R < x < a + R$. Quando x é extremidade do intervalo, isto é, $x = a \pm R$, qualquer coisa pode acontecer, a série pode convergir em uma ou ambas as extremidades ou divergir em ambas as extremidades. Então, no caso (iii) existem quatro possibilidades para o intervalo de convergência:

$$]a-R, a+R[, \quad]a-R, a+R], \quad [a-R, a+R[, \quad [a-R, a+R]$$

O raio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ onde $a_n \neq 0$ para $n \geq p$, é dado pela fórmula

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

desde que o limite exista, finito ou infinito.

A.3.2 Representação de Funções como Séries de Potências

Considere a equação

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

Encontramos essa equação anteriormente, onde a obtivemos observando que ela é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Mas aqui produziremos significado para esta equação de um outro modo, vamos nos referir a equação acima como uma expressão da função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ como uma soma de uma série de potências.

Pensando em termos do nosso modelo teórico, podemos observar que, nesse caso, os significados, objetos e conhecimentos, serão produzidos em um <u>outro</u> Campo Semântico em relação a estipulações locais que representa a expressão da função como uma soma de uma série de potências.

Teorema A.3.3. *Se a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$ *tiver um raio de convergência* $R > 0$*, então a função* f *definida por*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $]a-R, a+R[$ *e*

(i) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$

(ii)

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \dots \\ &= C + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

Os raios de convergência das séries de potências nas Equações (i) e (ii) são ambos R.

Assim, apresentamos até aqui as definições, proposições, teoremas e critérios da teoria de séries. Nosso propósito foi relembra-los para buscarmos as diferenças e convergências (se de fato existem) entre a teoria de hoje e a teoria no século XVIII.

Apêndice B

Progressões

As progressões são conteúdos curriculares obrigatórios no ensino médio brasileiro. Atualmente, os livros didáticos iniciam os estudos de progressões com o conceito de sequências numéricas. Define-se sequências, sequências com lei de formação, estas são apresentadas de três maneiras: por fórmula de recorrência; expressando cada termo em função de sua posição e por propriedade dos termos. Em seguida inicia-se o estudo das *progressões aritméticas*: definição, fórmula do termo geral de uma P.A., aplicações, interpolação aritmética e fórmula da soma dos n termos de uma P.A. E finalmente, o estudo das *progressões geométricas*: definição, classificação, fórmula do termo geral de uma P.G., aplicações, interpolação geométrica, fórmula da soma dos n termos de uma P.G. e soma dos termos de uma P.G. infinita.

A fim de podermos comparar as definições de hoje, com as apresentadas por Euler, apresentaremos os principais conceitos das progressões geométricas que atualmente encontramos nos livros didáticos.

B.1 Progressão Geométrica

Definição B.1.1. ***Progressão geométrica*** *(P.G.) é uma sequência de números não-nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo, chamado* razão *da progressão.*

B.1.1 Classificação de uma P.G.

As progressões geométricas podem ser classificadas em cinco categorias:

1^a. Crescentes: quando cada termo é maior que o anterior.

a) P.G. com termos positivos

$$a_n > a_{n-1} \Longleftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Longleftrightarrow q > 1$$

b) P.G. com termos negativos

$$a_n > a_{n-1} \Longleftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Longleftrightarrow 0 < q < 1$$

2^a. Constantes: quando cada termo é igual ao anterior.

a) P.G. com termos todos nulos

$$a_1 = 0 \quad \text{e} \quad q \quad \text{qualquer}$$

b) P.G. com termos iguais e não nulos

$$a_n = a_{n-1} \Longleftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \Longleftrightarrow q = 1$$

3^a. Decrescente: quando cada termo é menor que o anterior.

a) P.G. com termos positivos

$$a_n < a_{n-1} \Longleftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Longleftrightarrow 0 < q < 1$$

b) P.G. com termos negativos

$$a_n < a_{n-1} \Longleftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Longleftrightarrow q > 1$$

4^a. Alternantes: quando cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior. Isto é, quando $q < 0$.

5^a. Estacionárias: quando $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = 0$. Isto é, quando $q = 0$.

B.1.2 Fórmula do termo geral de uma PG

Considere a seguinte P.G. de razão q, $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.

Usando a definição de P.G., temos:

$$\begin{array}{rcl} a_2 & = & a_1 \cdot q \\ a_3 & = & a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 & = & a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\ \cdots & & \cdots\cdots \\ a_n & = & a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \end{array}$$

ou seja,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

onde a_n é o termo geral, a_1 é o primeiro termo e n é o número de termos da P.G.

Teorema B.1.1. *Se (a_n) é uma progressão geométrica de razão q então $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, para todo natural n.*

B.1.3 Fórmula da soma dos n termos de uma P.G.

Teorema B.1.2. *A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$ é igual a*

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Demonstração. Temos: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \quad \text{(I)}$

Multiplicando ambos os membros por q, obtemos

$$S_n q = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \ldots + a_{n-1} q + a_n q$$
$$S_n q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_{n+1} \qquad \text{(II)}$$

Subtraindo (I) de (II), obtemos

$$\begin{aligned} S_n q - S_n &= a_{n+1} - a_1 \\ S_n(q-1) &= a_1 q^n - a_1 \\ S_n(q-1) &= a_1(q^n - 1) \end{aligned}$$

Como $q \neq 1$, temos

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

□

B.1.4 Fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita

Para deduzirmos a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita é necessário conhecermos um pouco da Teoria de sequências e séries. Embora esses conceitos não façam parte das componentes curriculares do Ensino Médio, os livros didáticos os utilizam para apresentarem e demonstrarem a fórmula. Faremos um breve comentário da abordagem feita desse assunto em três livros didáticos, a saber, Giovanni e Bonjorno (2000, p. 42-44), Iezzi et. al. (1977, p. 27-30) e Morgado, Wagner e Zani (2005, p. 24-28). E em seguida, apresentaremos a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita com uma das possíveis demonstrações.

No primeiro livro, Giovanni e Bonjorno definem série geométrica e utilizam conceitos de limite, sequências convergentes e divergentes, sem defini-los. Em termos do nosso modelo teórico, podemos dizer que esses autores estão operando em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por sequências e limites.

No segundo livro, Iezzi et al. definem os conceitos de sequências convergentes, soma de séries infinitas e provam a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita utilizando esses conceitos. Podemos dizer que os autores, também, estão operando em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por sequências e limites.

No terceiro livro, Morgado, Wagner e Zani definem ϵ-aproximação e utilizam esse conceito para definir sequências convergentes, apresentam e demonstram o Teorema da *Desigualdade de Bernoulli* (Se $h > -1$ então $(1+h)^n \geq 1 + nh$, para todo natural n). Com essas definições e resultados demonstram a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita. Assim, podemos dizer que esses autores estão operando em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por ϵ-aproximação, sequências, limites e a Desigualdade de Bernoulli.

Teorema B.1.3. *Se* $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ *é uma P.G. com razão* q *tal que* $-1 < q < 1$ *então* $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Demonstração. Temos

$$S_n - \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} - \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} = -\frac{a_1}{1-q} q^n$$

Lembrando que a_1 e q são constantes, notamos que $-\frac{a_1}{1-q}$ é constante; e que para $\mid q \mid < 1$, temos $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Resulta, portanto, o seguinte

$$\lim_{n\to+\infty} \left(S_n - \frac{a_1}{1-q} \right) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n = -\frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to+\infty} q^n = -\frac{a_1}{1-q} \cdot 0 = 0$$

isto é,

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$\square$

Observações:

1ª.) Se $a_1 = 0$, a condição $-1 < q < 1$ é desnecessária para a convergência da sequência $(S_1, S_2, S_3, \ldots)$. Neste caso, é obvio que a P.G. é $(0, 0, 0, \ldots)$ e sua soma é zero, qualquer que seja q.

2ª.) Se $a_1 \neq 0$ e $q < -1$ ou $q > 1$, a sequência $(S_1, S_2, S_3, \ldots)$ não converge. Neste caso, é impossível calcular a soma dos termos da P.G.

Apêndice C

Números Racionais

Utilizaremos como bibliografia básica para esta seção Ripoll (2004), De Andrade e De Lima (2006), Cruz (2011) e Niven (1994), capítulo 2.

Definição C.0.1. *Um **número racional** (ou fração ordinária) é um número que pode ser colocado na forma* $\frac{a}{b}$*, onde* a *e* b *são inteiros e* $b \neq 0$.

C.1 Representações Decimais Finitas e Infinitas

Podemos representar o número 1765, no sistema decimal como

$$1765 = 1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Podemos também representar um número racional na forma decimal. As representações decimais de alguns números racionais são finitas e de outros são infinitas.

Um *número decimal* é um símbolo que representa uma soma de frações cujos denominadores são potências de 10, denominadas *frações decimais*. Por sua vez, essa soma é disposta de uma maneira tal que cada parcela é menor que a precedente.

Vamos representar um número racional positivo em base 10. Sejam a e b inteiros positivos, com $b \neq 0$, vamos dividir a por b, então, existem inteiros positivos q e r tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$. Assim, temos

$$\frac{a}{b} = \frac{bq + r}{b} = q + \frac{r}{b}$$

onde $\frac{r}{b}$ é uma fração maior ou igual a zero e menor do que 1, isto é, $0 \leq r < b$.

Podemos representar q na forma decimal, ou seja,

$$q = u_n u_{n-1} u_{n-2} \ldots u_1 u_0$$

Agora, suponha que $\frac{r}{b} \neq 0$, vamos expressar $\frac{r}{b}$ como uma soma de frações decimais, ou seja, procuramos algarismos $\alpha_j \in 0, 1, \ldots, 9$, $1 \leq j \leq s$ tais que

$$\frac{r}{b} = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \ldots + \frac{\alpha_s}{10^s}$$

No caso de encontrarmos estes números escrevemos

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} = u_n u_{n-1} u_{n-2} \dots u_1 u_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \dots + \frac{\alpha_s}{10^s}$$

Portanto, utilizando a representação posicional para $\frac{a}{b}$, temos

$$\frac{a}{b} = u_n u_{n-1} u_{n-2} \dots u_1 u_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s,$$

ou simplesmente,

$$\frac{a}{b} = q, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s,$$

onde a vírgula serve para separar a parte inteira de $\frac{a}{b}$ do que chamamos de *representação decimal* da parte menor do que 1 de $\frac{a}{b}$. Os algarismos α_1, α_2, α_3, ..., α_s são chamados de *casas decimais*, que são ordenadas da esquerda para a direita.

Teorema C.1.1. *Um número racional, na forma irredutível $\frac{a}{b}$, tem uma representação decimal finita se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível que admite uma representação decimal finita, logo essa fração decimal finita pode ser escrita na forma de fração ordinária com denominador igual a 10, 100, ou alguma potência de 10.

Assim, b é sempre um fator de alguma potência de 10 e $10 = 2 \cdot 5$. Portanto, b não pode ter outros fatores primos além de 2 e 5. (Em outras palavras, se b for divisível por algum primo diferente de 2 e de 5, então o número racional $\frac{a}{b}$, a e b primos entre si, não terá uma representação decimal finita.)

($\Longleftarrow$) Seja $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível qualquer e suponha que b tenha no máximo dois fatores primos 2 e 5. Suponhamos que b seja da forma $2^m \cdot 5^n$, com m e n inteiros positivos ou nulos. Então, de duas uma: ou $n \leq m$ ou $n > m$. Se $n \leq m$, multiplicando o numerador e o denominador da fração por 5^{m-n}:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^n \cdot 5^{m-n}} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{10^m}$$

Sendo $m - n$ positivo ou nulo, 5^{m-n} será um inteiro e, portanto, $a \cdot 5^{m-n}$ também será um inteiro, digamos c. Podemos escrever:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{10^m}$$

E como a divisão do inteiro c por 10^m requer apenas que coloquemos a vírgula no lugar correto, obteremos para $\frac{a}{b}$ uma representação decimal finita.

Por outro lado, se $n > m$, multiplicamos o numerador e o denominador de $\frac{a}{b}$ por 2^{n-m}:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^m \cdot 5^n \cdot 2^{n-m}} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^n \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{10^n}$$

Sendo $n - m > 0$, 2^{n-m} será um inteiro e, portanto, $a \cdot 2^{n-m}$ também será um inteiro, escrevendo d no lugar de $a \cdot 2^{n-m}$, obteremos

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{10^n},$$

e assim, novamente teremos, para $\frac{a}{b}$, uma representação decimal finita. □

Dízimas Periódicas

Um fato curioso ocorre com a representação decimal de uma fração $\frac{a}{b}$, quando b não é divisor de nenhuma potência de 10.

Usaremos a notação de uma barra sobre os dígitos que se repetem para indicar o período da dízima periódica.

Vamos transformar a fração ordinária $\frac{2}{7}$ em fração decimal, por meio da divisão do numerador pelo denominador.

$$\begin{array}{l|l}
2{,}000000 & \underline{\ \ 7\ \ } \\
\underline{14} & 0{,}285714 \\
\ \ 60 & \\
\ \ \underline{56} & \\
\ \ \ \ 40 & \\
\ \ \ \ \underline{35} & \\
\ \ \ \ \ \ 50 & \\
\ \ \ \ \ \ \underline{49} & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 10 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{7} & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 30 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{28} & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 2 &
\end{array}$$

ou seja, $\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$.

Os restos que surgem no processo da divisão são sucessivamente, 6, 4, 5, 1, 3, 2. Ao chegarmos no resto 2, um ciclo ou período é completado e temos novamente a divisão de 20 por 7. Todos os restos são menores do que o divisor 7 e, portanto, haverá uma repetição, de fato, existem apenas seis restos possíveis, uma vez que excluímos o caso em que o resto é igual a zero, pois neste caso a fração decimal seria finita.

De modo geral, seja $\frac{a}{b}$, realizando o processo elementar do algoritmo da divisão, os únicos restos possíveis serão: 1, 2, 3, ..., $b-1$ e, portanto, podemos ter certeza de que haverá repetição no processo da divisão. Quando a repetição ocorrer, um novo ciclo se iniciará e o resultado será uma **dízima periódica**.

Sejam p e q números inteiros tais que $p < q$ e $mdc(p, q) = 1$, logo

$$\frac{p}{q} = 0, a_1 a_2 \dots a_s \overline{b_1 b_2 \dots b_t}.$$

Se multiplicarmos essa igualdade por 10^s, obtemos

$$\begin{aligned} 10^s \cdot \frac{p}{q} &= a_1a_2\ldots a_s, \overline{b_1b_2\ldots b_t} \\ &= a_1a_2\ldots a_s + 0, \overline{b_1b_2\ldots b_t} \end{aligned} \tag{C.1}$$

Sabendo que:

$$\begin{aligned} 0, \overline{b_1b_2\ldots b_t} &= \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^t} + \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^{2t}} + \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^{3t}} + \ldots \\ &= \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^t}\left(1 + \frac{1}{10^t} + \frac{1}{10^{2t}} + \ldots\right) \\ &= \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^t}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10^t}}\right) \\ &= \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^t}\left(\frac{10^t}{10^t - 1}\right) \\ &= \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^t - 1} \end{aligned} \tag{C.2}$$

Substituindo a igualdade (C.2) na igualdade (C.1), temos

$$10^s \cdot \frac{p}{q} = a_1a_2\ldots a_s + \frac{b_1b_2\ldots b_t}{10^t - 1} \tag{C.3}$$

Agora, multiplicando a igualdade (C.3), inicialmente por $10^t - 1$, e depois por q, obteremos

$$(10^t - 1)10^s \cdot p = q[(10^t - 1)(a_1a_2\ldots a_s) + b_1b_2\ldots b_t]$$

em outras palavras, q é divisor de $(10^t - 1)10^s$.

Se q for uma potência de 2 ou 5 ou de 2 e 5 então q é divisor de 10^s, portanto segue do Teorema C.1.1 que $\frac{p}{q}$ tem uma representação decimal finita. Porém, se q não for múltiplo somente de 2 e 5, encontramos a parte periódica, pois q será divisor de $(10^t - 1)$.

A fração que dá origem a dízima é denominada *fração geratriz*. Assim, $\frac{p}{q}$ é a fração geratriz da dízima $0, a_1a_2\ldots a_s\overline{b_1b_2\ldots b_t}$, e a forma geral de escrever $\frac{p}{q}$ é dada por

$$\frac{p}{q} = \frac{(10^t - 1)(a_1a_2\ldots a_s) + b_1b_2\ldots b_t}{(10^t - 1)10^s}.$$

Esta fórmula aparece nos livros do Ensino Básico, da seguinte forma:

$$0, a_1a_2\ldots a_s\overline{b_1b_2\ldots b_t} = \frac{a_1a_2\ldots a_sb_1b_2\ldots b_t - a_1a_2\ldots a_s}{\underbrace{99\ldots9}_{t}\underbrace{00\ldots0}_{s}}.$$

Por exemplo, a dízima 0, 1666 ... tem como geratriz

$$\frac{p}{q} = \frac{(10^1 - 1) \cdot 1 + 6}{(10^1 - 1)10^1} = \frac{9 + 6}{9 \cdot 10} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

ou

$$0,1\overline{6} = \frac{16 - 1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}.$$

Uma dízima periódica como $0,1666\ldots$, na qual há um número diferente do período entre a vírgula, é denominada **composta**, caso contrário, a chamamos **simples**.

Teorema C.1.2. *Todo número racional* $\frac{a}{b}$ *pode ser representado por uma fração decimal finita ou por uma fração decimal infinita periódica, reciprocamente, toda fração decimal, finita ou periódica infinita, representa um número racional.*

Demonstração. Sabemos que as frações decimais finitas representam números racionais. Examinemos as dízimas periódicas. Vamos escrever qualquer dízima periódica (sem parte inteira) na forma

$$x = a_1 a_2 \ldots a_s \overline{b_1 b_2 \ldots b_t}$$

onde a_1, a_2, $\ldots$, a_s representam os s algarismos consecutivos da parte não periódica e b_1, b_2, $\ldots$, b_t representam os t algarismos periódicos.

Se multiplicarmos x, inicialmente por 10^{s+t}, depois por 10^s, e subtrairmos os resultados, obteremos

$$\begin{array}{rcl} 10^{s+t} \cdot x & = & a_1 a_2 \ldots a_s b_1 b_2 \ldots b_t + 0, b_1 b_2 \ldots b_t \ldots \\ 10^s \cdot x & = & a_1 a_2 \ldots a_s + 0, b_1 b_2 \ldots b_t \ldots \\ \hline (10^{s+t} - 10^s) \cdot x & = & a_1 a_2 \ldots a_s b_1 b_2 \ldots b_t - a_1 a_2 \ldots a_s \end{array}$$

de modo que

$$x = \frac{a_1 a_2 \ldots a_s b_1 b_2 \ldots b_t - a_1 a_2 \ldots a_s}{10^{s+t} - 10^s}$$

Que está na forma "inteiro sobre inteiro". Portanto x é racional, como queríamos demonstrar.

□