

Jarne Donizetti Ribeiro

**Problema do Centro–Foco e Ciclicidade de Pontos
de Hopf para Sistemas Rígidos Tridimensionais**

Tese de Doutorado
Pós-Graduação em Matemática

São José do Rio Preto

2019

Jarne Donizetti Ribeiro

**Problema do Centro–Foco e Ciclicidade de Pontos de Hopf
para Sistemas Rígidos Tridimensionais**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES e IFSULDEMINAS.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa.

São José do Rio Preto

2019

R484p

Ribeiro, Jarne Donizetti

Problema do centro--foco e ciclicidade de pontos de hopf para sistemas rígidos tridimensionais / Jarne Donizetti Ribeiro. -- São José do Rio Preto, 2019
205 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Claudio Gomes Pessoa

1. Sistemas rígidos em R^3 . 2. Coeficientes Focais. 3. problema foco-centro. 4. bifurcações. 5. ciclos limites. I. Título.

Jarne Donizetti Ribeiro

**Problema do Centro–Foco e Ciclicidade de Pontos de Hopf
para Sistemas Rígidos Tridimensionais**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES e IFSULDEMINAS.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado
Universidade Federal de Goiás

Prof. Dr. Rodrigo Donizete Euzébio
Universidade Federal de Goiás

Prof. Dr. Tiago de Carvalho
USP - Ribeirão Preto

São José do Rio Preto, 17 de julho de 2019.

*Dedico este trabalho a minha família: Jarne, Marlene,
Ana Paula, André e a minha noiva Christiane.
Vocês são meu combustível para seguir lutando dia, após dia.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que dá um sentido na minha vida, que guiou meus caminhos e que me deu forças nas horas difíceis.

Agradeço a minha mãe (Marlene) e meu pai (Jarne), que muitas vezes se doaram e renunciaram aos seus sonhos, para que eu pudesse realizar os meus. Quero dizer que essa conquista não é só minha, mas nossa. Tudo que consegui só foi possível graças ao amor, dedicação, renúncia, apoio e oração (“né” mãe) que vocês sempre tiveram por mim. Sempre me ensinaram agir com respeito, simplicidade, dignidade, honestidade (“né” pai) e amor ao próximo. E graças à união de vocês, os obstáculos foram ultrapassados e hoje a vitória também é de vocês. Aos meus irmãos Ana Paula e André Luiz por serem meu espelho em todos os momentos da minha vida, por nunca deixarem eu desistir de meus sonhos, por serem meus apoiadores nas horas que eu mais precisei e por serem irmãos presentes. Minha Família é o tesouro que Deus me deu e se estou aqui foi porque cada um de vocês tiveram participação dia, após dia, mesmo que a distância. Amo vocês!

Agradeço o meu orientador, Cláudio Pessoa, pela paciência com que conduziu minha orientação, principalmente no último ano. Deixo aqui minha gratidão por suas palavras de incentivo, por ter aceitado me orientar mesmo eu estando trabalhando a distância, por escutar minhas ideias, por me dar liberdade de pensamentos e escrita e por compreender meus momentos de angústias e euforia e, mais do que isso, obrigado por estar presente quando mais precisei. Sem dúvida seus ensinamentos, sua experiência e seu conhecimento com generosidade me conduziram ao verdadeiro aprendizado.

Agradeço a minha noiva, namorada, companheira e parceira Christiane, por me esperar todo esse tempo, que por sinal foram 7 anos a distância, por me ouvir no celular horas e horas, por me aguentar quando eu estava por desistir e sem paciência, por apoiar minha ida a Barcelona realizar o sonho de estudar com o professor Llibre, por passar horas difíceis ao meu lado nesses últimos anos, que não foram fáceis, mas que se tornaram

menos árduo pelo fato que eu à tinha ao meu lado.

Agradeço aos demais professores, Evandro Monteiro (iniciação científica), Fábio Scalco Dias (mestrado) e todos professores da UNIFAL, UNIFEI e IBILCE/UNESP, pelo estímulo ao desenvolvimento desta tese e fundamentais ensinamentos que contribuíram de forma incomensurável ao longo dos anos de pesquisa.

Agradeço aos meus amigos do Doutorado (da salinha), Alisson, Érica, Rafaela, Hellen, Luana, Rubão, Luizão, Fabrício, Ricardo, Robson, Eduardo, Bruno, Daniele, Jéssica, Pedro, Cheienne, Gustavo, Laura, Gino, Paula e Mariana que direta ou indiretamente, contribuíram com este trabalho. Agradeço também, Rafael (nervosinho), Júnior (calmo), Luiz Fernando (fofo mau disposto), André (alegria de sempre), Kumon (presença), Lucas (meu irmão caçula e preferido), Otávio (apostador), André But (melhor jogador), Heloísa (séria), Ana Livia (séria), Carol (melhor jogadora), Rodrigo (japa), Jéssica (determinação e esforço), Harison (doidão), Willian (absurdo), Plínio (cervejeiro) e Yagor (lindo) por nessa etapa final me darem um fôlego a mais e tornarem os dias difíceis mais tranquilos e alegres. Vocês são especiais de mais, nunca esqueçam disso.

Agradeço aos meus amigos de trabalho do Instituto Federal que me apoiaram e me incentivaram na conclusão deste trabalho.

Agradeço aos meus grandes amigos de República, André, Lucas (conquistador) e Harison, pelos momentos de descontração e risadas que me proporcionaram, vocês foram a família do lar que eu tive em São José do Rio Preto. Em especial queria agradecer ao Rafael e Junior, que também me receberam em seus lares. Valeu pela paciência, companheirismo e conversas intermináveis, que só acontecem entre bons amigos.

Agradeço a todos brasileiros pelo apoio financeiro. Sem vocês nada disso tinha acontecido.

Agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais (IFSULDEMINAS) pelo apoio financeiro e pela liberação para realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, á qual agradeço.

Enfim, gostaria de agradecer sinceramente a todos que, de alguma forma, me apoiaram ou contribuíram para que eu conseguisse terminar este trabalho.

“Não importa o que aconteça, continue a estudar, continue a estudar.”

Jarne

Resumo

Este trabalho dedica-se à classificação de centros sobre variedades centrais de sistemas diferenciais polinomiais em $\mathbb{R}^3$ e a bifurcação de ciclos limites a partir destes centros. Restringimos nosso estudo a certas famílias de centros rígidos em $\mathbb{R}^3$, cuja definição introduzimos e foi motivada pela definição dos centros rígidos no plano. No caso planar este tipo de centro é muito estudado e vários resultados interessantes foram obtidos. Apresentamos formas normais que caracterizam os centros rígidos e resolvemos o problema do centro–foco para várias famílias de centros rígidos em $\mathbb{R}^3$. Também obtemos cotas inferiores para o número de ciclos limites que bifurcam a partir dos centros rígidos que foram classificados.

Palavras-chave: Sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$, constantes focais, problema do centro–foco, bifurcações, ciclos limites.

Abstract

This work is dedicated to the classification of centers on center manifolds for polynomial differential systems in $\mathbb{R}^3$ and to the bifurcation of limit cycles from these centers. We restrict our study to certain families of rigid centers in $\mathbb{R}^3$, which we have defined motivated by the definition of rigid centers on the plane. On the plane, these centers are widely studied and many interesting results are obtained. We present the normal forms that characterize the rigid centers and solve the center–focus problem for several families of rigid centers in $\mathbb{R}^3$. We also obtain lower bounds to the number of limit cycles bifurcating from the classified rigid centers in this work.

Keywords: Rigid systems in $\mathbb{R}^3$, focal coefficients, center–focus problem, bifurcations, limit cycles.

Sumário

Sumário	10
1 Introdução	12
2 Problema do centro-foco sobre variedades centrais em $\mathbb{R}^3$	21
2.1 Preliminares	21
2.2 Método de Lyapunov e coeficientes focais	23
2.3 Integrabilidade algébrica de sistemas diferenciais polinomiais	29
3 Sistemas Rígidos	34
3.1 Sistemas Rígidos em $\mathbb{R}^3$	37
4 Sistemas Rígidos Homogêneos em $\mathbb{R}^3$	42
4.1 Caso: $n = 1$ e $\frac{\partial R_m}{\partial z}(x, y, z) \equiv 0$	44
4.2 Caso: $n = 2$ e $\frac{\partial R_m}{\partial z}(x, y, z) \equiv 0$	54
4.3 Caso: $n = 1$ e $m = 2$	60
4.4 Caso: $F_2(x, y, z) = R_2(x, y, z)$	67
4.5 Caso: $F_{2q}(z) \equiv 0$, $p = 1$ e $R(x, y, z) = R_2(x, y, z)$	73
4.6 Caso: $F_{2p+1}(z) \equiv 0$, $q = 4$ e $R(x, y, z) = R_2(x, y, z)$	81
4.7 Caso: $p = 2$, $q = 2$ e $R(x, y, z) = R_2(x, z)$	83
5 Bifurcação de ciclos limites a partir de um centro rígido em $\mathbb{R}^3$	86
5.1 Estimando o número de ciclos limites a partir dos coeficientes focais	87
5.2 Cotas inferiores para a ciclicidade de famílias de centros rígidos em $\mathbb{R}^3$. . .	91
Referências	103

APÊNDICE A - Algoritmos e Coeficientes Focais	109
Algoritmo para o cálculo dos coeficientes focais para sistemas em $\mathbb{R}^3$	109
Algoritmo para decompor o radical do ideal gerado pelos coeficientes focais em uma interseção finita de ideais primos	111
Coeficientes Focais do Teorema 4.1	113
Coeficientes Focais do Teorema 4.5	116
Coeficientes Focais do Teorema 4.6 sob o conjunto dos parâmetros S_{21}	118
Coeficientes Focais do Teorema 4.6 sob o conjunto dos parâmetros S_{21}	118
Coeficientes Focais do Teorema 4.6 sob o conjunto dos parâmetros S_{22}	123
Coeficientes Focais do Teorema 4.8	129
APÊNDICE B - Paralelização e Algoritmo em $\mathbb{R}^3$	133
Paralelização em $\mathbb{R}^3$	133
Algoritmo para o cálculo da ciclicidade de sistemas em $\mathbb{R}^3$	135
APÊNDICE C - Coeficiente focais de primeira ordem em ϵ	138
Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema 5.2	138
Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema 5.3	142
Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema 5.4	150
Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema 5.5	157
Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema 5.6	159
Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema 5.7	161
Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema 5.8	173
Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema 5.9	174
Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema 5.10	190
Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema 5.11	205

Capítulo 1

Introdução

A matemática tem várias ramificações que surgem a medida que os problemas tornam-se mais complexos e os estudos se aprofundam. Uma destas ramificações é intitulada Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, que iniciou-se em 1881 com Poincaré [48] e logo ganhou muito destaque, por suas aplicações na modelagem de problemas de ciências aplicadas tais como Física, Biologia, Astronomia, Engenharias, etc. A Teoria Qualitativa se baseia no fato de não ser preciso resolver explicitamente uma equação diferencial ordinária para obter resultados precisos sobre o comportamento de suas soluções, ou seja, não há a necessidade de se obter as soluções explícitas de uma equação diferencial. Isto motivou o desenvolvimento de várias técnicas no estudo da teoria das equações diferenciais e muitos problemas interessantes e intrigantes surgiram, alguns dos quais continuam até hoje sem uma solução definitiva. Podemos citar o problema de se estimar o número de ciclos limites de uma equação diferencial, o problema de integrabilidade de campos de vetores, o problema do centro–foco, etc.

O problema do centro–foco no plano, isto é, para sistemas de equações diferenciais analíticas $\dot{u} = f(u)$ em $\mathbb{R}^2$ com um ponto de equilíbrio isolado na origem, $f(0) = 0$, tal que a parte linear $Df(0)$ tenha dois autovalores imaginários puros, consiste em se obter condições necessárias e suficientes que determinem quando a origem é um foco ou um centro (veja [22] e [40]). De modo geral pouco se pode dizer deste problema, sendo que apenas alguns casos foram resolvidos, por exemplo quando f é um campo de vetores polinomial de grau $n = 2$ feito por Kapteyn e Bautin (veja [7], [35] e [36]). Este problema pode ser formulado para sistemas diferenciais analíticos em $\mathbb{R}^3$, e também encontra-se em aberto, exceto para alguns casos específicos. Mais precisamente, dado um sistema

analítico de equações diferenciais em $\mathbb{R}^3$, $\dot{u} = f(u)$ em que $u = (x, y, z)$ e $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, suponha, sem perda de generalidade, que a origem $(0, 0, 0)$ seja um ponto de equilíbrio isolado. Além disso, suponha também que a parte linear $Df(0)$ tenha um autovalor real não nulo e um par de autovalores complexos conjugados com partes reais nulas. Sob estas hipóteses o Teorema da Variedade Central garante a existência de uma variedade bidimensional $\mathcal{W}^c$, chamada variedade central, em uma vizinhança da origem do sistema, a qual é uma superfície invariante do sistema e tangente ao autoespaço gerado pelos autovetores generalizados, associados aos autovalores imaginários puros, e contém todo o comportamento recorrente do sistema nesta vizinhança da origem em $\mathbb{R}^3$. Portanto, o problema do centro–foco em $\mathbb{R}^3$, sob estas hipóteses, consiste em decidir se a origem sobre a variedade central é um centro ou um foco. Este problema têm sido estudado em vários artigos, ver por exemplo, [17], [25], [27], [44], [50] e [52].

O problema do centro–foco sobre variedades centrais de campos de vetores em $\mathbb{R}^3$ é tão ou mais difícil de ser estudado quanto o seu análogo no plano. Sendo assim, como no caso planar, nossa estratégia é atacar famílias particulares de centros sobre variedades centrais. Motivados pelos bons resultados obtidos para este problema, quando restrito a sistemas rígidos no plano (veja [4], [21], [23], [29] e [30]), nosso trabalho é dedicado ao estudo do problema do centro–foco para sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$ e ao número de ciclos limites que bifurcam dos centros destes sistemas. Chamaremos os centros de sistemas rígidos de *centros rígidos*.

Semelhante ao caso planar, a forma natural de definir sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$ é expressando o sistema restrito a uma variedade central em coordenadas polares (veja Definição 3.1), o que não é muito prático para os cálculos. Por exemplo, para estudar centros rígidos em $\mathbb{R}^3$ temos a dificuldade adicional de restringir o sistema a uma variedade central. Para evitar essa tarefa caracterizamos os sistemas rígidos por coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}^3$. E mostramos que estes sistemas são uma subclasse de sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$.

Com a caracterização dos sistemas rígidos por coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}^3$ passamos ao estudo do problema centro–foco para famílias específicas desta classe de sistemas. Precisamente, motivados pelos resultados conhecidos no plano para sistemas rígidos homogêneos (veja [22]), dividimos a classe de sistemas rígidos por coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}^3$ em duas subclasses, os sistemas rígidos homogêneos e os não-homogêneos. Resolvemos

o problema do centro–foco para sete tipos de famílias de sistemas rígidos homogêneos em $\mathbb{R}^3$ e para três tipos de sistemas rígidos não-homogêneos em $\mathbb{R}^3$.

Graças aos resultados de Bibikov [8] e outros autores [27], o problema do centro–foco sobre variedades centrais se reduz ao problema de encontrar a variedade do ideal gerado por uma coleção de polinômios, chamados de coeficientes focais $g_{K,K,0}$ do sistema. Segue do Teorema da base de Hilbert, que este ideal é gerado por um número finito de coeficientes focais, ou seja, o problema do centro–foco se reduz a encontrar um número $K \in \mathbb{N}$ tal que o ideal $\mathcal{B} = \langle g_{k,k,0}; k \in \mathbb{N} \rangle$ satisfaz $\mathcal{B} = \mathcal{B}_K = \langle g_{2,2,0}, g_{3,3,0}, g_{4,4,0}, \dots, g_{K,K,0} \rangle$. Na prática encontrar K é muito difícil.

Após a classificação das dez famílias de centros rígidos em $\mathbb{R}^3$, mencionadas acima, passamos ao estudo da ciclicidade destes centros. Em outras palavras, tratamos do problema de estimar o número de ciclos limites, isto é, de soluções periódicas isoladas, que podem bifurcar de um centro quando os coeficientes do sistema de equações diferenciais variam por pequenas perturbações. Denotando por $M(n)$ o número máximo de ciclos limites de pequenas amplitudes que surgem de um centro ou um foco de sistema polinomial de grau n , pouco se sabe sobre $M(n)$, o número (veja [13], [18], [38], [50], [53] e [54]). Um resultado clássico devido a Bautin [7] mostra que $M(2) = 3$ para campos polinomiais de grau 2 no plano. Entretanto, para $n \geq 2$, o número $M(n)$ é desconhecido. Este problema é uma versão fraca do ainda não resolvido “16º problema de Hilbert” que foi proposto pelo grande Matemático David Hilbert no Congresso Internacional de Matemática realizado em Paris em 1900, e trata de ciclos limites de um sistema de equações diferenciais polinomiais planares. Mais precisamente, o problema consiste em determinar o número máximo de ciclos limites de um campo vetorial polinomial no plano de grau n e quais suas posições relativas.

Utilizando as ideias de Christopher [16] (veja também [51]), encontramos cotas inferiores para o número de ciclos limites que bifurcam dos centros sobre variedades centrais das famílias de campos de vetores polinomiais rígidos, classificadas neste trabalho, por pequenas perturbações. A técnica para encontrar estas cotas está relacionada a independência linear das partes lineares dos coeficientes focais em pontos da variedade do ideal gerado por estes coeficientes.

Para uma visão completa desta tese, os capítulos subsequentes encontram-se assim organizados:

✓ CAPÍTULO 1: Apresentaremos neste capítulo um breve resumo dos resultados e ferramentas, conhecidos na literatura, que auxiliam na formulação e resolução do problema centro-foco sobre variedades centrais em $\mathbb{R}^3$. Tais como: O Teorema da Variedade central; O Teorema Centro de Lyapunov; coeficientes focais; curvas algébricas invariantes; e a teoria de integrabilidade de Darboux (veja por exemplo [26]).

✓ CAPÍTULO 2: Iniciamos este capítulo buscando uma definição de sistema rígidos em $\mathbb{R}^3$, inspirada na definição para o caso planar. A maneira natural de estender tal definição é considerar o sistema em $\mathbb{R}^3$ restrito a variedade central. Precisamente, sistemas da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + P(x, y, z) \\ \dot{y} &= -x + Q(x, y, z) \\ \dot{z} &= \lambda z + R(x, y, z),\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde $\lambda \neq 0$ e P, Q e R são funções analíticas em x, y e z sem termos constantes e lineares, são ditos rígidos em $\mathbb{R}^3$ se restringidos a uma variedade central na vizinhança da origem, em coordenadas polares, assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \dots, \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}\tag{1.2}$$

onde os pontos indicam expressões que envolvem as funções do lado direito do sistema (1.1). Isto significa que as órbitas do sistema sobre a variedade central giram em torno da origem com velocidade angular constante. Esta definição não é muito prática para os cálculos, pois nem sempre podemos encontrar explicitamente a variedade central. Portanto introduzimos uma outra definição de sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$ usando coordenadas cilíndricas, a qual é enunciado da seguinte forma:

O sistema (1.1) é rígido por coordenadas cilíndricas se, nas coordenadas cilíndricas $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ e $z = z$, assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \dots, \\ \dot{\theta} &= 1, \\ \dot{z} &= \dots,\end{aligned}\tag{1.3}$$

onde os pontos indicam expressões que envolvem as funções do lado direito do sistema (1.1). Observe que esta definição não depende da variedade central.

Em seguida mostramos que tais definições de sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$ não são equivalentes, pelo o fato de sistemas rígidos por coordenadas cilíndricas ser uma subclasse de

sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$. Contudo trabalhar com essas definições, as quais envolvem mudanças de variáveis trigonométricas, não é nada trivial. E como no caso planar, buscamos formas normais em coordenadas cartesianas que caracterizam as definições acima.

Provamos que um sistema da forma (1.1) é rígido em $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, sua restrição a uma variedade central na origem tem a seguinte forma canônica

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xF(x, y) \\ \dot{y} &= x + yF(x, y),\end{aligned}\tag{1.4}$$

onde F é uma função de classe $\mathcal{C}^k$ com $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, se tomarmos um vizinhança suficientemente pequena da origem. Provamos também que um sistema da forma (1.1) é rígido por coordenadas cilíndricas se, e somente se, tem a seguinte forma canônica

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xF(x, y, z) \\ \dot{y} &= x + yF(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R(x, y, z),\end{aligned}\tag{1.5}$$

onde F é uma aplicação analítica.

✓ CAPÍTULO 3: Neste capítulo resolvemos o problema do centro–foco para algumas classes de sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$. Isto é, consideramos os sistemas da forma (1.5), onde F e R são polinômios homogêneos. A motivação para os estudo desta classe de sistemas rígidos vem do trabalho de Conti [22], no qual os centros rígidos são introduzidos. Conti resolve o problema centro–foco no plano para sistemas da forma (1.4), onde F é um polinômio homogêneo, tais sistemas são chamados de *sistemas rígidos homogêneos*.

Considere o sistema (1.5) com $F = F_n$ $R = R_m$, onde $F_n, R_m \in \mathbb{R}[x, y, z]$ são polinômios homogêneos com grau $n \geq 1$, $m \geq 2$, respectivamente e $\lambda \neq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xF_n(x, y, z) \\ \dot{y} &= x + yF_n(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R_m(x, y, z).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Mostramos que o sistema (1.6) com $R_m(x, y, 0) \equiv 0$ tem um centro rígido na origem sobre a variedade central se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} F_n(\cos(s), \sin(s), 0) ds = 0.$$

Agora, para o sistema (1.6) com $\frac{\partial F_n}{\partial z}(x, y, z) \equiv 0$, isto é, $F_n(x, y, z) = F_n(x, y)$ é um polinômio homogêneo nas variáveis x e y , mostramos que (1.6) tem um centro rígido na

origem sobre a variedade central se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} F_n(\cos(s), \sin(s)) ds = 0.$$

Infelizmente não foi possível obter um resultado geral que classifica os centros de sistemas rígidos homogêneos em $\mathbb{R}^3$, como o obtido por Conti no plano. Sendo assim passamos a considerar famílias particulares de sistemas rígidos homogêneos em $\mathbb{R}^3$. Os centros rígidos das seguintes famílias foram estudados:

Três famílias de sistemas da forma (1.6) com $n = 1$ e $\frac{\partial R_m}{\partial z}(x, y, z) \equiv 0$, isto é,

1. $F_1(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z$, $R_2(x, y) = b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2$ e $\lambda \neq 0$
2. $F_1(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z$, $R_3(x, y) = b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3$ e $\lambda = 1$.
3. $F_1(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z$, $R_4(x, y) = b_1x^4 + b_2x^3y + b_3x^2y^2 + b_4xy^3 + b_5y^4$ e $\lambda = 1$.

Para as famílias acima os centros na origem sobre a variedade central foram completamente classificados.

Duas famílias de sistemas da forma (1.6) com $n = 2$ e $\frac{\partial R_m}{\partial z}(x, y, z) \equiv 0$, isto é,

1. $F_2(x, y, z) = a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2$, $R_2(x, y) = b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2$ e $\lambda = 1$.
2. $F_2(x, y, z) = a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2$, $R_3(x, y) = b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3$ e $\lambda = 1$.

Os centros na origem sobre a variedade central da primeira família foram completamente classificados, já para a segunda família não podemos afirmar que nossa classificação está completa, apesar de termos fortes evidências que sim.

Um sistema da forma (1.6) com $n = 1$ e $m = 2$

1. $F_1(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z$, $R_2(x, y, z) = b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2$ e $\lambda = 1$.

Apesar de acreditarmos que as condições para se ter um centro na origem obtidas para a família acima serem necessárias, só fomos capazes de provar que são suficientes.

Um sistema da forma (1.6) com $F_2(x, y, z) = R_2(x, y, z)$

1. $F_2(x, y, z) = b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2$ e $\lambda = 1$.

Os centros na origem sobre a variedade central desta família foram completamente classificados.

Finalizamos o capítulo 3 com duas conjecturas, as quais lembram os resultados de Conti.

✓ CAPÍTULO 4: Dando continuidade ao estudo do problema do centro–foco para sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$, neste capítulo consideramos os sistemas da forma (1.5) que não são homogêneos e tais que a função F é dada por $F(x, y, z) = F_{2p+1}(z) + F_{2q}(z)$, onde F_{2p+1} é um polinômio ímpar na variável z de grau $2p + 1$, F_{2q} é um polinômio par na variável z de grau $2q$, e R é um polinômio homogêneo. O estudo destas famílias foi motivado pelo artigo [25], no qual os autores classificam os centros rígidos no plano de famílias da forma (1.4) com F sendo um polinômio só da variável x , y ou a soma de um polinômio só da variável x com outro polinômio só da variável y .

A saber, classificamos os seguintes centros rígidos:

Caso $F_{2q}(z) \equiv 0$, $p = 1$ e $R(x, y, z) = R_2(x, y, z)$, isto é,

$$F(z) = a_1z + a_3z^3, R_2(x, y, z) = b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2 \text{ e } \lambda = 1$$

Caso $F_{2p+1}(z) \equiv 0$, $q = 4$ e $R(x, y, z) = R_2(x, y, z)$, isto é,

$$F(z) = a_2z^2 + a_4z^4 + a_6z^6 + a_8z^8, R_2(x, y, z) = b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2 \text{ e } \lambda = 1.$$

Caso $p = 2$, $q = 2$ e $R(x, y, z) = R_2(x, z)$, isto é,

$$F(z) = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + a_5z^5, R_2(x, z) = b_1x^2 + b_2xz + b_3z^2 \text{ e } \lambda = 1.$$

✓ CAPÍTULO 5: Começamos este capítulo introduzindo a teoria clássica sobre ciclos limites. A ideia é estudar perturbações a um parâmetro de sistemas em $\mathbb{R}^3$ que possuem um centro na origem sobre a variedade central. Em outras palavras consideraremos famílias da forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + P_c(x, y, z) + \epsilon G_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + Q_c(x, y, z) + \epsilon G_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R_c(x, y, z) + \epsilon G_3(x, y, z), \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde $P_c(x, y, z)$, $Q_c(x, y, z)$, $R_c(x, y, z)$ e $G_j(x, y, z)$, $j = 1, 2, 3$, são polinômios de grau ≥ 2 com coeficientes reais e ϵ um parâmetro real suficientemente pequeno. Além disso,

assumimos que para $\epsilon = 0$ (ou equivalentemente $G_1 = G_2 = G_3 \equiv 0$) o sistema tem um centro sobre a variedade central na origem. Denotando por $(p_1, p_2, \dots, p_l, p_{l+1}, \dots, p_k)$ os parâmetros do sistema acima, onde $(p_1, p_2, \dots, p_l)$ são os parâmetros do sistema não perturbado (i. e. os parâmetros de (1.7) com $\epsilon = 0$) e $(p_{l+1}, \dots, p_k)$ são os parâmetros da perturbação, e por $v_{j,1}$, $j = 1, \dots, k$ os coeficientes de primeira ordem da expansão em ϵ dos k primeiros coeficientes focais, temos o seguinte resultado: suponha que

$$\text{Posto} \left[\frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{k,1})}{\partial(p_1, p_2, \dots, p_k)} \right]_{p=p_c} = k, \quad (1.8)$$

onde $p_c = (p_1, p_2, \dots, p_l, p_{l+1}, \dots, p_k)$ com $p_{l+1} = p_{l+2} = \dots = p_k = 0$, então podemos escolher os parâmetros $p_1, p_2, \dots, p_k$ de modo que o sistema tenha pelo menos $k - 1$ ciclos limites bifurcando do centro. Apresentamos uma prova elementar deste resultado usando argumentos clássicos da teoria de bifurcações. Entretanto, não se pode dizer que temos um resultado novo, na verdade este resultado é uma versão do Teorema 2.1 de [16] enunciado no plano, veja também o Lema 1.1 de [51].

Munidos do resultado acima, passamos a estimar cotas inferiores para o número de ciclos limites que bifurcam a partir de centros em variedades centrais por pequenas perturbações de todos sistemas classificados nos capítulos anteriores. Consideramos perturbações da forma (1.7) com $G_1 = G_2 = G_3 = G$, onde G é um polinômio homogêneo de grau 2. As cotas obtidas variaram entre 1 a 5 ciclos limites, dependendo da família perturbada.

✓ APÊNDICES: Optamos por adicionar a este trabalho três apêndices, A, B e C.

No apêndice A apresentamos um algoritmo para o cálculo dos coeficientes focais, implementado no software Maple, um algoritmo para decompor o radical do ideal gerado pelos coeficientes focais em uma interseção finita de ideais primos, implementado no software Singular, e por fim apresentamos as expressões, algumas de forma parcial devido suas extensões, dos coeficientes focais utilizados no Capítulo 4 e Capítulo 4.4.

No apêndice B apresentamos o método da paralelização para uma classe de sistemas diferenciais em $\mathbb{R}^3$. Até onde sabemos, é a primeira vez que o método da paralelização desenvolvido por Torregrosa e Liang [39] para o plano foi usado em sistemas diferenciais no $\mathbb{R}^3$. Este método simplifica computacionalmente o cálculo das partes lineares dos coeficientes focais. Também apresentamos um algoritmo, implementado no Maple, para o cálculo dos coeficientes de focais de primeira ordem em ϵ e que também foi usado no método da paralelização.

No apêndice C apresentamos as expressões, algumas de forma parcial devido suas extensões, dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ utilizados no Capítulo 5.

Capítulo 2

Problema do centro-foco sobre variedades centrais em $\mathbb{R}^3$

2.1 Preliminares

Nesta seção apresentaremos algumas definições e enunciaremos o Teorema da Variedade Central para campos de vetores de classe C^r , $r \geq 1$, em $\mathbb{R}^3$. Para mais detalhes veja o livro [37].

Consideremos a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (2.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^3$ e $\mu \in \mathbb{R}^n$ são, respectivamente, as variáveis de fase e parâmetros. Assuma que f é uma aplicação de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^n$ e suponha que o sistema (2.1) tenha um ponto de equilíbrio $x = x_0$ quando $\mu = \mu_0$. Além disso, assumiremos que a matriz Jacobiana

$$A = Df(x_0, \mu_0)$$

possui um par de autovalores imaginários puros

$$\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0,$$

e o outro autovalor real $\lambda_1 \neq 0$. Seja E^c o auto espaço associado aos autovalores $\lambda_{2,3}$ da matriz A . Note que E^c é um subespaço invariante por A .

Definição 2.1. *O ponto de equilíbrio (x_0, μ_0) do sistema (2.1) nas condições acima é chamado **ponto de Hopf**.*

O próximo teorema nos permitirá entender o Problema centro–foco em $\mathbb{R}^3$ restrito a uma variedade central local, visto que, a equação diferencial se comporta como no plano. Mais precisamente, o teorema da variedade central local garante a existência de uma variedade invariante bidimensional $\mathcal{W}^c$, numa vizinhança do ponto de Hopf (x_0, μ_0) que é tangente ao autoespaço central E^c em (x_0, μ_0) e contém todo o comportamento recorrente local do sistema (2.1) para mais detalhes veja o Teorema 3.2.1 da página 127 de [32] e as referências [11], [37], [47] e [52].

Teorema 2.1. (*Teorema da Variedade Central local*) *Considere o sistema (2.1) com $f \in C^r(E)$ onde E é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ contendo a origem e $r \geq 1$. Suponha que $f(0) = 0$ e que $Df(0)$ tenha k autovalores com parte real negativa, j autovalores com parte real positiva e $m = n - k - j$ autovalores com parte real nula. Então existe uma variedade local W^c m -dimensional de classe C^r tangente ao autoespaço (generalizado) E^c em (x_0, μ_0) que é invariante sob o fluxo φ_t de (2.1).*

Definição 2.2. $\mathcal{W}^c$ é chamado de **variedade central local**.

Observação 2.1.

i) $\mathcal{W}^c$ pode não ser única. O sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x - y(x^2 + y^2), \\ \dot{z} &= -z,\end{aligned}$$

possui o ponto de equilíbrio $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, e a matriz Jacobiana do sistema na origem possui um autovalor real negativo e um par de autovalores imaginários puros

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = \pm i,$$

ou seja, o equilíbrio é do tipo Hopf. Neste exemplo, existe uma família de variedades centrais locais bidimensionais do sistema dadas por

$$\mathcal{W}_\beta^c(0) = \{(x, y, z); z = \phi_\beta(x, y)\},$$

onde

$$\phi_\beta(x, y) = \begin{cases} \beta \exp\left(\frac{-1}{2(x^2+y^2)}\right), & \text{se } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & , \text{se } x = y = 0. \end{cases}$$

- ii) Uma variedade central local $\mathcal{W}^c$ possui a mesma classe de diferenciabilidade (finita) de f (se $f \in C^k$ para algum k finito, $\mathcal{W}^c$ é também uma variedade de classe C^k) em alguma vizinhança $\mathcal{U}$ de (x_0, μ_0) . Se f é C^∞ então podemos encontrar uma variedade central C^k para qualquer $k < \infty$. Porém, quando $k \rightarrow \infty$, a vizinhança $\mathcal{U}$ pode diminuir, podendo resultar na não existência de uma variedade $\mathcal{W}^c$ de classe C^∞ , para algum sistema C^∞ (veja [37] na página 154).

2.2 Método de Lyapunov e coeficientes focais

Apresentaremos a seguir um método de estudo do problema centro–foco em variedades centrais de sistemas tridimensionais.

Consideremos agora o sistema diferencial real em $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \tilde{P}(u, v, w), \\ \dot{v} &= \tilde{Q}(u, v, w), \\ \dot{w} &= \tilde{R}(u, v, w),\end{aligned}\tag{2.2}$$

onde $\tilde{P}(u, v, w)$, $\tilde{Q}(u, v, w)$ e $\tilde{R}(u, v, w)$ são funções analíticas. Suponha que a origem $(0, 0, 0)$ seja um ponto singular isolado. Seja $\mathcal{X}(u, v, w) = (\tilde{P}(u, v, w), \tilde{Q}(u, v, w), \tilde{R}(u, v, w))$ o campo de vetores associado ao sistema (2.2). Suponha também que a matriz Jacobiana $J(0, 0, 0) = D\mathcal{X}(0, 0, 0)$ tenha um autovalor real não nulo e um par de autovalores complexos conjugados. Qualquer sistema analítico (ou polinomial) como (2.2) que tenha um ponto de Hopf, pode ser transformado (por uma mudança de coordenadas linear e uma reparametrização da variável independente) no sistema

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -v + P(u, v, w), \\ \dot{v} &= u + Q(u, v, w), \\ \dot{w} &= -\lambda w + R(u, v, w),\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $F = (P, Q, R) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é real analítica com, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ um aberto contendo a origem, $F(0) = 0$ e $DF(0) = 0$. Note que os autovalores da parte linear do campo de vetores associado ao sistema (2.3) na origem são da forma $\pm i$ e $-\lambda$.

Denotaremos de agora em diante, por $\mathcal{X}$, o campo vetorial associado do sistema (2.3)

$$\mathcal{X} = (-v + P(u, v, w), u + Q(u, v, w), \lambda w + R(u, v, w)).$$

Investigaremos a natureza do fluxo de $\mathcal{X}$ numa vizinhança da origem restrito a uma variedade central local, $\mathcal{W}^c$, na origem. O problema centro–foco em $\mathbb{R}^3$, grosseiramente falando, é distinguir sobre as condições acima se a origem é um foco ou um centro sobre a variedade central local. Neste sentido, o Problema Centro–Foco para o sistema (2.3) pode ser visto como um problema bidimensional.

Como os auto-valores do sistema (2.3) na origem são complexos conjugados é mais conveniente trabalharmos com o sistema complexificado, como é feito em [27]. Assumindo que P, Q e R são polinômios homogêneos de grau $n \geq 2$, consideremos a seguinte mudança de variável:

$$x = u + iv, \quad y = \bar{x} \quad \text{e} \quad z = w \quad (2.4)$$

onde $\bar{x}$ denota o conjugado de x .

Diferenciando (2.4) e usando (2.3) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{u} + \dot{v}i \\ &= (-v + P(u, v, w)) + i(u + Q(u, v, w)) \\ &= i(u + vi) + P(u, v, w) + iQ(u, v, w), \\ \dot{\bar{x}} &= \dot{u} - \dot{v}i \\ &= (-v + P(u, v, w)) - i(u + Q(u, v, w)) \\ &= -i(u - vi) + P(u, v, w) - iQ(u, v, w), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ix + S(x, \bar{x}, z), \\ \dot{\bar{x}} &= -i\bar{x} + \overline{S(x, \bar{x}, z)}, \\ \dot{z} &= \lambda z + U(x, \bar{x}, z), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $S(x, \bar{x}, z) = P\left(\frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{x-\bar{x}}{2i}, z\right) + iQ\left(\frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{x-\bar{x}}{2i}, z\right)$, $U(x, \bar{x}, z) = R\left(\frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{x-\bar{x}}{2i}, z\right)$ e se substituirmos $\bar{x}$ no sistema (2.5) pela variável y obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ix + S(x, y, z), \\ \dot{y} &= -iy + \overline{S(x, y, z)}, \\ \dot{z} &= -\lambda z + U(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Portanto o sistema (2.6) em $\mathbb{C}^3$ é a complexificação do sistema real (2.2). Isso nos leva

ao estudo de sistemas da forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ix + \sum_{p+q+r=2}^n a_{pqr} x^p y^q z^r, \\ \dot{y} &= -iy + \sum_{p+q+r=2}^n b_{pqr} x^p y^q z^r, \\ \dot{z} &= -\lambda z + \sum_{p+q+r=2}^n c_{pqr} x^p y^q z^r\end{aligned}\tag{2.7}$$

onde $b_{pqr} = \bar{a}_{pqr}$ e c_{pqr} são tais que $\sum_{p+q+r=2}^n c_{pqr} x^p \bar{x}^q w^r$ são reais para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $w \in \mathbb{R}$.

Definição 2.3. Um campo de vetores $\mathcal{X} = (\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})$ é **integrável** em um aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{C}^3$) se existe uma função não constante $H : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, (resp. $\mathbb{C}$) chamada **integral primeira** do campo em $\mathcal{U}$, que é constante em todas as curvas soluções $(x(t), y(t), z(t))$ do sistema diferencial associado a $\mathcal{X}$ contidas em $\mathcal{U}$, isto é, $H(x(t), y(t), z(t)) = \text{constante}$ para todos os valores de t para os quais a solução $(x(t), y(t), z(t))$ esta definida e contida em $\mathcal{U}$. Claramente H é uma integral primeira para o campo $\mathcal{X}$ em $\mathcal{U}$ se, e somente se,

$$\mathcal{X}H = \tilde{P}H_x + \tilde{Q}H_y + \tilde{R}H_z \equiv 0 \quad \text{em } \mathcal{U}.$$

Definição 2.4. Duas integrais primeiras H_1 e H_2 são ditas **independentes**, se seus gradientes são vetores linearmente independentes para todos os pontos $(x, y, z) \in \mathcal{U}$, exceto num conjunto de medida nula. Se o campo $\mathcal{X}$ possui duas integrais primeiras independentes, dizemos que ele é **totalmente integrável**.

Observação 2.2. i) Se o campo $\mathcal{X}$ é totalmente integrável, então as órbitas do sistema estarão contidas nas curvas

$$\{(x, y, z) : H_1(x, y, z) = h_1\} \cap \{(x, y, z) : H_2(x, y, z) = h_2\},$$

onde h_1 e h_2 variam nas imagens de H_1 e H_2 . Daí, a importância de sabermos se um sistema é totalmente integrável.

ii) Se existe uma integral primeira para um sistema dado, qualquer função dela é também uma integral primeira.

O seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [27], é a versão em $\mathbb{R}^3$ do Teorema de Poincaré-Lyapunov para o problema do centro-foco no plano (veja o Teorema 2.5 da próxima seção).

Teorema 2.2. *Um sistema analítico (2.3), tem um centro sobre uma variedade central se, e somente se, o sistema admite uma integral primeira analítica*

$$H(x, y, z) = x^2 + y^2 + \dots, \quad (2.8)$$

em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^3$, onde os pontos (...) indicam que a expansão em Taylor da função H em x, y e z não possui termos constantes e lineares.

O proximo teorema, também encontrado em [27], é um resultado análogo ao teorema anterior porém enunciado para o sistema (2.7).

Teorema 2.3. (Centro de Lyapunov) *A origem é um centro para o sistema (2.7) se, e somente se, o sistema (2.7) admite um integral primeira local analítica da forma*

$$H(x, y, z) = xy + \sum_{j+k+l \geq 3}^n v_{jkl} x^j y^k z^l, \quad (2.9)$$

em uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^3$. Além disso, quando existir um centro, a variedade central local é única e analítica.

Com os resultados acima vamos investigar a existência de um integral primeira H para o sistema (2.7). Denotando por $\mathcal{X} = (\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})$ o campo de vetores associado ao sistema (2.7), a função H dada por (2.9) é um integral primeira para o sistema (2.7) se, e somente se,

$$\mathcal{X}H = \frac{\partial H}{\partial x} \tilde{P}(x, y, z) + \frac{\partial H}{\partial y} \tilde{Q}(x, y, z) + \frac{\partial H}{\partial z} \tilde{R}(x, y, z) \equiv 0, \quad (2.10)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & (y + \sum_{j+k+l \geq 3}^N j \cdot v_{j,k,l} x^{j-1} y^k z^l)(ix + \sum_{p+q+r=2}^n a_{pqr} x^p y^q z^r) + \\ & (x + \sum_{j+k+l \geq 3}^N k \cdot v_{j,k,l} x^j y^{k-1} z^l)(-iy + \sum_{p+q+r=2}^n b_{pqr} x^p y^q z^r) + \\ & + (\sum_{j+k+l \geq 3}^N l \cdot v_{j,k,l} x^j y^k z^{l-1})(-\lambda z + \sum_{p+q+r=2}^n c_{pqr} x^p y^q z^r) \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Como queremos que H seja uma integral primeira, então devemos escolher os coeficientes v_{jkl} de H de maneira que todos coeficientes do lado esquerdo da equação (2.11) se anulem. Note que os coeficientes g_{k_1, k_2, k_3} de $x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$ da expressão $\mathcal{X}H$ são obtidos de forma

explicita por:

$$\begin{aligned}
g_{k_1, k_2, k_3} = & (-\lambda k_3 + (k_1 - k_2)i)v_{k_1, k_2, k_3} + a_{k_1, k_2-1, k_3} + b_{k_1-1, k_2, k_3} + \\
& + \sum_{r=0}^{\min[k_3, N]} \left[\sum_{\substack{j+k=3+r-k_3 \\ j \geq 1, k \geq 0}}^{k_1+k_2+r-1} j a_{k_1-j+1, k_2-k, r} v_{j, k, k_3-r} \right] \\
& + \sum_{r=0}^{\min[k_3, N]} \left[\sum_{\substack{j+k=3+r-k_3 \\ j \geq 0, k \geq 1}}^{k_1+k_2+r-1} k b_{k_1-j, k_2-k+1, r} v_{j, k, k_3-r} \right] + \\
& + \sum_{r=0}^{\min[k_3, N]} \left[\sum_{\substack{j+k=2+r-k_3 \\ j \geq 0, k \geq 0}}^{k_1+k_2+r-2} (k_3 - r + 1) c_{k_1-j, k_2-k, r} v_{j, k, k_3-r+1} \right].
\end{aligned}$$

Utilizando a expressão acima podemos determinar de maneira única os $v_{j, k, l}$ de forma que $g_{k_1, k_2, k_3} = 0$, para todo (k_1, k_2, k_3) , uma vez que já temos determinado os $v_{\alpha, \beta, \gamma}$ onde $\alpha + \beta + \gamma < j + k + l$, exceto para o caso em que $k_1 = k_2$ e $k_3 = 0$. Neste último caso, vemos que a expressão de $g_{K, K, 0}$ é dada por:

$$g_{K, K, 0} = \sum_{\substack{j+k=2 \\ j \geq 0, k \geq 0}}^{2K-1} [j a_{K-j+1, K-k, 0} + k b_{K-j, K-k+1, 0}] v_{j, k, 0} + \sum_{\substack{j+k=2 \\ j \geq 0, k \geq 0}}^{2K-2} c_{K-j, K-k, 0} v_{j, k, 1}. \quad (2.12)$$

Observe que $g_{1, 1, 0} = 0$ e para $K \in \mathbb{N}$, com $K \geq 2$, $g_{K, K, 0}$ não depende do coeficiente $v_{K, K, 0}$, pois este não aparece em (2.12). Isto impede que H seja uma integral primeira apenas por determinar condições sobre os seus coeficientes $v_{j, k, l}$. Portanto a equação (2.11) se reduz a forma

$$\mathcal{X}H = g_{2, 2, 0}(xy)^2 + g_{3, 3, 0}(xy)^3 + g_{4, 4, 0}(xy)^4 + g_{5, 5, 0}(xy)^5 + \dots \quad (2.13)$$

Assim a existência de uma integral primeira H ocorre se todos os coeficientes $g_{K, K, 0}$ são nulos. Estes coeficientes $g_{K, K, 0}$, $K \geq 2$, são chamado de **Coeficientes Focais**. Concluimos, como no caso planar, que a solução do problema do centro-foco em variedades centrais de campos de vetores em $\mathbb{R}^3$ passa pelo cálculo dos coeficientes focais. Temos assim um método para estudar este problema, o qual está resumido no seguinte teorema.

Teorema 2.4. *O sistema (2.7) tem um centro sobre a variedade central se, e somente se, $g_{K, K, 0} = 0$ para $K = 2, \dots, \infty$.*

Para mais detalhes veja o Teorema 8, 9 e 10 em [27].

Resolver o problema do centro-foco significa zerar todos os coeficientes focais. Estes coeficientes focais geram o ideal $\mathcal{B} = \langle g_{k, k, 0}; k \in \mathbb{N} \rangle$, chamado *ideal de Bautin*.

Segue do teorema da base de Hilbert este ideal é finitamente gerado, ou seja, existe uma constante m tal que

$$\mathcal{B} = \langle g_{2,2,0}, g_{3,3,0}, g_{4,4,0}, \dots, g_{m,m,0} \rangle.$$

Desta forma é necessário calcular somente um número finito de coeficientes focais. Contudo, dado um sistema qualquer, não sabemos a priori quantos coeficientes temos que calcular para gerarmos o ideal de Bautin $\mathcal{B}$, com exceção de alguns casos específicos. Em geral calcular os coeficientes focais não é uma tarefa fácil, pois os cálculos crescem de maneira exponencial, exceto em alguns casos mais simples. Assim vários métodos computacionais tem sido desenvolvidos. A ideia é calcular um certo número de coeficientes focais e depois encontrar as condições para anulá-los. Estas condições são necessárias para que a origem seja um centro sobre a variedade central. Entretanto, para provar que as condições são também suficientes, utilizamos simétrias ou teorias de integrabilidade. Discutiremos isto na próxima seção.

No exemplo a seguir ilustraremos o método apresentado nesta seção para o cálculo do primeiro coeficiente focal.

Exemplo 2.1. *Considere o sistema polinomial dada por:*

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -v + u(a_1u + a_2v + a_3w), \\ \dot{v} &= u + v(a_1u + a_2v + a_3w), \\ \dot{w} &= -\lambda w + b_1u^2 + b_2uv + b_3v^2, \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde seus coeficiente são reais e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Através da mudança de variável

$$x = u + iv, \quad y = \bar{x} \quad \text{e} \quad z = w \tag{2.15}$$

o sistema (2.14) pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ix + xU(x, y, z), \\ \dot{y} &= -yi + y\overline{U(x, y, z)}, \\ \dot{z} &= -lz + T(x, y), \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{x}{2}(a_1 - a_2i) + \frac{y}{2}(a_1 + a_2i) + za_3, \\ T(x, y, z) &= \frac{x^2}{4}(b_1 - b_2i - b_3) + \frac{xy}{2}(b_1 + b_3) + \frac{y^2}{4}(b_1 + b_2i - b_3). \end{aligned}$$

Como estamos interessados no cálculo do primeiro coeficiente focal, utilizando o método anterior, passemos então a análise do lado esquerdo da seguinte equação

$$\mathcal{X}H = \frac{\partial H}{\partial x}(ix + U(x, y, z)) + \frac{\partial H}{\partial y}(-iy + \overline{U(x, y, z)}) + \frac{\partial H}{\partial z}(-\lambda z + T(x, y, z)) \equiv 0, \quad (2.17)$$

onde

$$H(x, y, z) = xy + \sum_{j+k+l \geq 3} v_{jkn} x^j y^k z^l, \quad (2.18)$$

com $j, k, l \in \mathbb{N}$. Agora colete os coeficientes de grau 3 da equação (2.17) e para anularmos tais coeficientes devemos assumir

$$\begin{aligned} v_{2,1,0} &= a_1 i - a_2 & v_{1,2,0} &= -a_1 i + a_2 & v_{1,1,1} &= \frac{2a_3}{l} & v_{3,0,0} &= 0 & v_{0,3,0} &= 0 \\ v_{2,0,1} &= 0 & v_{0,2,1} &= 0 & v_{0,1,2} &= 0 & v_{0,0,3} &= 0 & v_{1,0,2} &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo as condições acima em (2.17), colecionando os coeficiente de grau 4 e igualando a zero obtemos

$$\begin{aligned} v_{4,0,0} &= 0 & v_{0,4,0} &= 0 & v_{3,1,0} &= \frac{a_3(ib_1 + b_2 - ib_3) - 3(a_1 - ia_2)^2 l}{4l} \\ v_{0,2,2} &= 0 & v_{0,0,4} &= 0 & v_{1,1,2} &= \frac{2a_3^2}{l^2} \\ v_{3,0,1} &= 0 & v_{0,1,3} &= 0 & v_{2,1,1} &= \frac{a_3(a_1 - ia_2)(2 + 3il)}{l(-i + l)} \\ v_{0,3,1} &= 0 & v_{2,0,2} &= 0 & v_{1,3,0} &= \frac{a_3(-ib_1 + b_2 + ib_3) - 3(a_1 + ia_2)^2 l}{4l} \\ v_{1,0,3} &= 0 & v_{2,2,0} &= 0 & v_{1,2,1} &= \frac{a_3(a_1 + ia_2)(2 - 3il)}{l(i + l)} \end{aligned}$$

Portanto a equação (2.17) se reduz na equação (2.13) com

$$g_{2,2,0} = \frac{a_3(b_1 + b_3)}{l}. \quad (2.19)$$

Para o cálculo dos demais coeficientes focais basta repetir o método. Voltaremos a estudar este sistema no capítulo 3 na Proposição 4.1.

2.3 Integrabilidade algébrica de sistemas diferenciais polinomiais

Agora, apresentaremos algumas definições e resultados sobre a Teoria de integrabilidade algébrica dos sistemas diferenciais polinomiais reais tomando como referência [26] e [50]. Estas ferramentas serão necessárias para determinar se um ponto singular é um

centro ou foco. Observamos que a maioria das definições e teoremas abaixo podem ser estendidos para sistemas complexos e sistemas não polinomiais em dimensões arbitrárias. Denotaremos por $\mathbb{C}[x, y, z]$ ou $\mathbb{R}[x, y, z]$ o anel de polinômios nas variáveis x, y e z com coeficientes em $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Indicaremos por $\mathbb{F}$ o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou dos complexos $\mathbb{C}$.

Como estamos interessados em analisar o problema centro-foco para sistemas em $\mathbb{F}^3$ sobre uma variedade central será necessário conhecermos algumas ferramentas em $\mathbb{F}^2$ relacionadas a este problema no plano. Sendo assim considere o sistema na forma normal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + F_1(x, y), \\ \dot{y} &= x + F_2(x, y),\end{aligned}\tag{2.20}$$

onde F_1 e F_2 são funções analíticas com desenvolvimentos de Taylor na origem começando com pelo menos termos de ordem 2.

O primeiro resultado é o clássico Teorema de Poincaré-Lyapunov.

Teorema 2.5. (Teorema Poincaré-Lyapunov) *O sistema (2.20) possui um centro na origem se, e somente se, admite uma integral primeira analítica da forma*

$$H(x, y) = x^2 + y^2 + \dots,$$

em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$, onde os pontos (...) indicam que a expansão em Taylor da função H em x e y não possui termos constantes nem lineares.

Definição 2.5. *Seja $\mathcal{U}$ um subconjunto aberto de $\mathbb{F}^2$ e $I : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}$ uma função analítica que não é identicamente nula em $\mathcal{U}$. Uma função I é um **fator integrante** para o sistema (2.20) em $\mathcal{U}$ se uma das seguintes três condições equivalentes é verdadeira sobre $\mathcal{U}$:*

- a) $\frac{\partial}{\partial x}(IF_1) = -\frac{\partial}{\partial y}(IF_2)$;
- b) $\text{div}(IF_1, IF_2) = 0$;
- c) $\mathcal{K}I = -I\text{div}(F_1, F_2)$.

Proposição 2.1. *A integral primeira H do sistema (2.20) associada ao fator integrante I é dada por*

$$H(x, y) = \int I(x, y)F_1(x, y)dy + h(x),\tag{2.21}$$

em que $h(x)$ é escolhido de tal forma que $\frac{\partial H}{\partial x} = -IF_2$ e o domínio de integração $\mathcal{U}$ é escolhido de forma apropriada. Então

$$x' = IF_1 = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = IF_2 = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Demonstração. A demonstração desta proposição segue por verificação direta. $\square$

Definição 2.6. *Seja $\mathcal{X}$ o campos de vetores associado ao sistema (2.20). Dizemos que este sistema é **reversível** se existe uma involução $R : \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}^2$, isto é $R \circ R = \text{id}$, tal que*

$$\mathcal{X}(R(x, y)) = -DR(x, y)\mathcal{X}(x, y).$$

Exemplo 2.2. *Considere o sistema*

$$\mathcal{X}(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = -y + xy, \\ \dot{y} = x - y^2. \end{cases}$$

Tomando $R(x, y) = (x, -y)$ temos que $\mathcal{X}(R(x, y)) = -DR(x, y)\mathcal{X}(x, y)$ e portanto este sistema é do tipo reversível.

A demonstração do teorema a seguir é análoga a encontrada no Teorema 3.5.5 na página 133 em [50].

Teorema 2.6. *Todo sistema da forma (2.20) do tipo reversível tem um centro na origem.*

Daqui em diante, assumiremos que $\mathcal{X} = (\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})$ é um campo de vetores polinomial de grau n , ou seja, $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R} \in \mathbb{F}[x, y, z]$ e $n = \max\{\text{grau } \tilde{P}, \text{grau } \tilde{Q}, \text{grau } \tilde{R}\}$. Veremos a seguir como a existência de superfícies algébricas invariantes de campos de vetores em $\mathbb{R}^3$ auxiliará na solução do problema centro-foco.

Definição 2.7. *Seja $f \in \mathbb{F}[x, y, z]$ não identicamente nula. A superfície algébrica $f = 0$ é uma **superfície algébrica invariante** para $\mathcal{X}$ se existe um polinômio $K \in \mathbb{F}[x, y, z]$ tal que*

$$\mathcal{X}f = \tilde{P}\frac{\partial f}{\partial x} + \tilde{Q}\frac{\partial f}{\partial y} + \tilde{R}\frac{\partial f}{\partial z} = Kf. \quad (2.22)$$

*O polinômio K é chamado **cofator** da superfície algébrica invariante $f = 0$. Além disso grau $K \leq n - 1$.*

Nos pontos da superfície algébrica $f = 0$, o gradiente ∇f é ortogonal ao campo vetorial $\mathcal{X}$, ou seja, $\mathcal{X}$ é tangente a $f = 0$. Em outras palavras $f = 0$ pode ser decomposta como a união de trajetórias do campo vetorial $\mathcal{X}$. Isto justifica o nome “superfície algébrica invariante”.

O fator exponencial é uma outra ferramenta que desempenha um papel semelhante aos das superfícies algébricas invariantes na solução do problema centro-foco.

Definição 2.8. *Sejam $h, g \in \mathbb{F}[x, y, z]$ e assumamos que h e g são relativamente primos no anel $\mathbb{F}[x, y, z]$ ou que $h \equiv 1$. Então a função $\exp(g/h)$ é chamada **fator exponencial** para o sistema (2.3) se existe pelo menos um polinômio $K \in \mathbb{F}[x, y, z]$ de grau no máximo $(n - 1)$ que satisfaça a equação*

$$\mathcal{X} \left(\exp \left(\frac{g}{h} \right) \right) = K \exp \left(\frac{g}{h} \right). \quad (2.23)$$

Dizemos então que K é o **cofator** do fator exponencial $\exp(g/h)$.

O seguinte teorema relaciona a existência de uma integral primeira com a existência de superfícies algébricas invariantes (e/ou fatores exponenciais) e consequentemente com a existência de um centro sobre variedades centrais de campos de vetores em $\mathbb{R}^3$. Optamos aqui por apresentar uma versão simples deste teorema, a qual é suficiente para os propósitos deste trabalho. Uma demonstração deste teorema (em sua versão geral) pode ser encontrada na pag. 221 de [26] e [42].

Teorema 2.7. (*Integrabilidade de Darboux*)

Suponha que o campo de vetores polinomial $\mathcal{X}$ admita p superfícies algébricas invariantes irreduzíveis $f_i = 0$ com cofatores K_i , para $i = 1, \dots, p$ e q fatores exponenciais $\exp \left(\frac{g_i}{h_j} \right)$ com cofatores L_j , para $j = 1, \dots, q$. Então

- i) *existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ nem todos nulos tais que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0$, se e somente se, a função*

$$f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} \left(\exp \left(\frac{g_1}{h_1} \right) \right)^{\mu_1} \dots \left(\exp \left(\frac{g_q}{h_q} \right) \right)^{\mu_q}, \quad (2.24)$$

é uma integral primeira para o campo de vetores $\mathcal{X}$.

Outra ferramenta clássica no estudo da integrabilidade de sistemas diferenciais polinomiais é o fator integrante inverso, para mais informações recomendamos [10]. Para sistemas dinâmicos n -dimensionais, em particular tridimensionais, os fatores integrantes inversos são chamados de múltiplos de Jacobi inverso.

Definição 2.9. *Uma função não nula $V : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , é dita ser o **múltiplo de Jacobi inverso** de $\mathcal{X}$, se ela satisfaz a EDP linear de primeira ordem*

$$\mathcal{X}V = \tilde{P} \frac{\partial V}{\partial x} + \tilde{Q} \frac{\partial V}{\partial y} + \tilde{R} \frac{\partial V}{\partial z} = V \operatorname{div} \mathcal{X}. \quad (2.25)$$

Observação 2.3. *Da equação (2.25), temos que o gradiente da função V é ortogonal ao campo vetorial $\mathcal{X}$ ao longo de $V^{-1}(0)$. Assim, $\mathcal{X}$ é tangente a $V = 0$. Então, esta superfície pode ser decomposta em trajetórias do campo $\mathcal{X}$.*

A definição acima é análoga a definição de fator integrante inverso no caso planar. A seguir enunciamos o Critério de Reeb, o qual relaciona a existência de um centro com a existência de um fator integrante inverso.

Teorema 2.8. (*Critério de Reeb*) *O sistema (2.20) tem um centro na origem se, e somente se, admite um fator integrante inverso real analítico da forma $V(x, y) = 1 + \dots$ em uma vizinhança da origem em $\mathbb{F}^2$.*

O seguinte teorema foi apresentado em [10] e pode ser considerado como um resultado análogo ao critério de Reeb em $\mathbb{F}^3$.

Teorema 2.9. *O sistema (2.3) tem um centro na origem se, e somente se, admite um múltiplo de Jacobi inverso da forma*

$$V(x, y, z) = z + \dots,$$

em uma vizinhança da origem em $\mathbb{F}^3$. Além disso quando existir tal V , a variedade central local analítica $W^c \subseteq V^{-1}(0)$.

Capítulo 3

Sistemas Rígidos

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$ a partir da teoria desenvolvida para sistemas rígidos no plano. Nosso objetivo é estudar o problema do centro–foco e a ciclicidade do ponto de Hopf para esta classe de sistemas. Estes problemas serão abordados nos capítulos posteriores.

Considere o sistema planar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \tilde{P}(x, y), \\ \dot{y} &= \tilde{Q}(x, y),\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde $\tilde{P}$ e $\tilde{Q}$ são funções analíticas. Suponha que o sistema (3.1) tem um ponto de Hopf (x_0, y_0) , ou seja, se $\mathcal{X}(x, y) = (\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y))$ denota o campo de vetores associado ao sistema (3.1), temos que a matriz Jacobiana $D\mathcal{X}(x_0, y_0)$ tem um par de autovalores complexos conjugados imaginários puros. Podemos supor sem perda de generalidade que o ponto singular (x_0, y_0) é a origem. Através de uma mudança de variáveis linear e uma reparametrização da variável independente (se necessário) o sistema (3.1) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + P(x, y), \\ \dot{y} &= -x + Q(x, y),\end{aligned}\tag{3.2}$$

onde P e Q são funções analíticas cujos desenvolvimentos em série de Taylor, na origem, começam pelo menos com termos quadráticos. A questão de distinguir se a origem é um centro ou um foco do sistema (3.2), como mencionado no capítulo anterior, é o chamado problema do centro–foco (veja [17], [50], [52], [55], [61] e [62]).

O estudo da função período e da isocronicidade são outros temas importantes de pesquisa relacionadas ao sistema (3.2). Precisamente, se a origem do sistema (3.2) é um

centro, dizemos que ele é *isócrono* se a *função de período* definida numa vizinhança da origem (i.e. a função que associa a cada órbita periódica na vizinhança do centro o seu período) é constante. O conceito de isocronicidade para centros de campos de vetores, em particular campos de vetores polinomiais, tem sido extensivamente estudado na literatura, veja por exemplo [14], [28] e [34].

Uma classe importante de centros isócronos são aqueles cujas órbitas em sua vizinhança giram com a velocidade angular constante. Sistemas com esta última propriedade são chamados de sistemas rígidos. Portanto para sistemas rígidos o problema do centro-foco é equivalente ao problema da isocronicidade. E é por esta razão que sistemas rígidos tem sido estudados por vários autores. A melhor maneira de definir sistemas rígidos é utilizando coordenadas polares. Assim o sistema (3.2) é dito *rígido* se em coordenadas polares $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \dots, \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}$$

onde os pontos (...) indicam uma expressões que envolvem as funções do lado direito do sistema (3.2), sendo na definição o que importa é o fato da velocidade angular ser constante. Note que a velocidade angular ($\theta' = 1$) é consequência da expressão do sistema (3.2). Outra motivação para o estudo dos sistemas rígidos segue de sua expressão em coordenadas polares acima. Devido a esta expressão, vemos que o sistemas rígidos planares são equivalentes a uma única equação diferencial escrita na forma de uma equação de Abel generalizada.

Seguindo as ideias da prova do Teorema 3.1, podemos mostrar que o sistema (3.2) é rígido se, e somente se, pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xF(x, y), \\ \dot{y} &= x + yF(x, y),\end{aligned}\tag{3.3}$$

(veja também, [23]). Em [23] o autor caracteriza os centros do sistema (3.3) para o caso em que $F(x, y) = H_p(x, y)$, onde $H_p(x, y)$ é um polinômio homogêneo de grau $p \in \mathbb{N}$ (veja também [20]). Este resultado foi recentemente melhorado em [29], tomando-se $F(x, y) = a + H_p(x, y)$ com $a \in \mathbb{R}$. Além de caracterizar os centros, os autores mostram que neste caso o sistema pode ter no máximo um ciclo limite. Em [21] o caso $F(x, y) = H_1(x, y) + H_2(x, y)$ é analisado e prova-se que todos os centros desta classe são reversíveis.

Famílias particulares de sistemas rígidos com $F(x, y) = H_0(x, y) + H_p(x, y) + H_q(x, y)$ foram estudadas em [30] e resultados sobre bifurcação de ciclos limites e caracterização de centros foram obtidos (veja também [3], [4], [5], [15] e [56]). Outro caso interessante com $F(x, y) = f(x)g(y)$, onde $f(x)$ e $g(y)$ são polinômios arbitrários, foi estudado em [40] (veja também [19] e [25]).

Um resultado bem conhecido na literatura mostra que o problema da isocronicidade de centros em campos de vetores analíticos é equivalente a existência de um comutador analítico para tal campo. Dizemos que dois campos de vetores X e Y *comutam* se o colchete de Lie destes campos é nulo, ou seja, se $[X, Y] = DX.Y - DY.X = 0$. Neste caso, Y é dito o *comutador* de X . Está provado para sistemas rígidos em [1] (veja também [46]) que se (3.3) tem um comutador Y , então $Y(x, y) = (xK(x, y), yK(x, y))$ com $K(x, y)$ um polinômio de mesmo grau que $F(x, y)$. Usando este resultado os autores de [2] desenvolvem um algoritmo recursivo que lhes permite resolver o problema do centro-foco para as famílias de campos rígidos onde $F(x, y) = H_1(x, y) + H_p(x, y)$ ou $F(x, y) = H_2(x, y) + H_{2p}(x, y)$ (para $F(x, y) = H_2(x, y) + H_6(x, y)$ veja também [57]). No caso de sistemas rígidos, este algoritmo é muito mais eficiente que os métodos clássicos utilizados no cálculo dos coeficientes de Lyapunov ou coeficientes focais. Além disso, no mesmo artigo, os autores estabelecem o número máximo de ciclos limites que podem bifurcar de um foco múltiplo na origem para tais famílias.

O foco deste trabalho são os sistemas tridimensionais que possuem um centro sobre uma variedade central. Em outras palavras, seguindo a discussão iniciada no capítulo anterior, consideraremos o sistema tridimensionais em sua forma normalizada

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + P(x, y, z), \\ \dot{y} &= -x + Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R(x, y, z),\end{aligned}\tag{3.4}$$

onde $\lambda \neq 0$ e P, Q e R são funções analíticas em x, y e z sem termos constantes e lineares, o que implica que a origem é um ponto singular do tipo Hopf. Pelo Teorema 2.1, para todo $k \in \mathbb{R}$, o sistema (3.4) possui uma variedade invariante local W^c bidimensional de classe C^k tangente a $z = 0$ na origem. Em geral a variedade invariante W^c não é unicamente determinada e nem analítica. O conceito de centro para o sistema (3.4) se dá naturalmente devido a existência da variedade central na origem. Este problema é bastante estudado, veja [10], [27], [43], [44] e [45].

De agora em diante direcionaremos nosso estudo para sistemas rígidos definidos em $\mathbb{R}^3$. Semelhante ao caso planar, a forma natural de definir sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$ é expressando o sistema restrito a uma variedade central em coordenadas polares.

Definição 3.1. (*Sistemas Rígidos em $\mathbb{R}^3$*)

Dizemos que o sistema (3.4) é rígido se sua restrição a uma variedade central na origem, em coordenadas polares, assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \dots, \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}\tag{3.5}$$

onde os pontos (...) indicam uma expressões que envolvem as funções do lado direito do sistema (3.4).

A definição acima não é muito prática para cálculos, já que para estudar centros rígidos em $\mathbb{R}^3$ temos a dificuldade adicional de restringir o sistema (3.4) a uma variedade central. Para evitar esta tarefa, vamos introduzir uma subclasse de sistemas rígidos.

Definição 3.2. (*Sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$ por coordenadas cilíndricas*). Dizemos que o sistema (3.4) é rígido por coordenadas cilíndricas se, nas coordenadas cilíndricas $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ e $z = z$, assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \dots, \\ \dot{\theta} &= 1, \\ \dot{z} &= \dots,\end{aligned}\tag{3.6}$$

onde os pontos (...) indicam uma expressões que envolvem as funções do lado direito do sistema (3.4).

Observe que a segunda equação em (3.6) mostra que as soluções do sistema giram em torno do eixo z com velocidade angular constante. Na próxima seção veremos que as definições acima não são equivalentes. De fato, sistemas rígidos por coordenadas cilíndricas são uma subclasse de sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$.

3.1 Sistemas Rígidos em $\mathbb{R}^3$

As seguintes proposições caracterizam os sistemas da forma (3.4) que são rígidos e rígidos por coordenadas cilíndricas.

Teorema 3.1. *O sistema (3.4) é rígido se, e somente se, sua restrição a uma variedade central na origem tem a seguinte forma canônica*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xF(x, y), \\ \dot{y} &= x + yF(x, y),\end{aligned}\tag{3.7}$$

onde F é uma função de classe $\mathcal{C}^k$ com $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, se tomarmos um vizinhança suficientemente pequena da origem.

Demonstração. Em coordenadas polares $(x, y) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ o sistema (3.7) tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}$$

Assim, por definição, (3.4) é um sistema rígido.

Agora mostramos a recíproca. Pelo Teorema 2.1 para cada $k \in \mathbb{N}$ em uma vizinhança suficientemente pequena existe uma variedade invariante bidimensional $\mathcal{W}^c$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ tangente a $z = 0$ na origem. Assim $\mathcal{W}^c$ é localmente o gráfico de uma aplicação $\mathcal{C}^{k+1}$ dada por $z = h(x, y)$. Portanto o sistema (3.4) restrito a $\mathcal{W}^c$ tem a forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \tilde{P}(x, y), \\ \dot{y} &= x + \tilde{Q}(x, y),\end{aligned}\tag{3.8}$$

onde $\tilde{P}(x, y) = P(x, y, h(x, y))$ e $\tilde{Q}(x, y) = Q(x, y, h(x, y))$. Em coordenadas polares (3.8) torna-se

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \cos \theta \tilde{P}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \sin \theta \tilde{Q}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \\ \dot{\theta} &= 1 + \frac{1}{\rho} \left[\cos \theta \tilde{Q}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - \sin \theta \tilde{P}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \right].\end{aligned}\tag{3.9}$$

Assumindo que o sistema (3.4) é rígido, por hipótese, devemos ter $\dot{\theta} = 1$, portanto obtemos que

$$\frac{1}{\rho} \left[\cos \theta \tilde{Q}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - \sin \theta \tilde{P}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \right] = 0.\tag{3.10}$$

Em coordenadas (x, y) a equação (3.10) é dada por:

$$x\tilde{Q}(x, y) - y\tilde{P}(x, y) = 0.\tag{3.11}$$

Tomando $x = 0$ na equação (3.11) temos que $y\tilde{P}(0, y) = 0$. Pelo Lema de Hadamard, existe uma função $F(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^k$, tal que $\tilde{P}(x, y) = xF(x, y)$. Analogamente obtemos que $\tilde{Q}(x, y) = yG(x, y)$ com G uma aplicação de classe $\mathcal{C}^k$. Assim por (3.11) obtemos $xy(G(x, y) - F(x, y)) = 0$, ou seja, $G(x, y) = F(x, y)$. Portanto $\tilde{P}(x, y) = xF(x, y)$ e $\tilde{Q}(x, y) = yF(x, y)$, o que prova a proposição. $\square$

Teorema 3.2. *O sistema (3.4) é rígido por coordenadas cilíndricas se, e somente se, tem a seguinte forma canônica*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xF(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + yF(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R(x, y, z),\end{aligned}\tag{3.12}$$

onde, F é uma função analítica.

Demonstração. O sistema (3.12) em coordenadas cilíndricas pode ser escrita da forma:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z), \\ \dot{\theta} &= 1, \\ \dot{z} &= -\lambda z + R(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z),\end{aligned}\tag{3.13}$$

que por definição é um sistema rígido.

Agora mostraremos a recíproca. Em coordenadas cilíndricas o sistema (3.4) tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \cos \theta P(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) + \sin \theta Q(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z), \\ \dot{\theta} &= 1 + \frac{1}{\rho} [\cos \theta Q(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) + \sin \theta P(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)], \\ \dot{z} &= -\lambda z + R(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).\end{aligned}\tag{3.14}$$

Por hipótese o sistema (3.4) é rígido, isto é ($\theta' = 1$). Então obtemos imediatamente que

$$\frac{1}{\rho} [\cos \theta Q(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) + \sin \theta P(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)] = 0.\tag{3.15}$$

Em coordenadas (x, y, z) a equação (3.15) é escrito como

$$xQ(x, y, z) - yP(x, y, z) = 0.\tag{3.16}$$

Tomando $x = 0$ na equação (3.16) obtemos que $yP(0, y, z) = 0$, isto é, $P(0, y, z) = 0$. Portanto existe uma função analítica F tal que $P(x, y, z) = xF(x, y, z)$. Analogamente, segue que $Q(x, y, z) = yG(x, y, z)$ onde G é uma aplicação analítica. Assim, por (3.16) concluímos que $xy(G(x, y, z) - F(x, y, z)) = 0$, isto é, $G(x, y, z) = F(x, y, z)$. Portanto $P(x, y, z) = xF(x, y, z)$ e $Q(x, y, z) = yF(x, y, z)$, o que prova a proposição. $\square$

O seguinte corolário é uma consequência direta das provas das proposições anteriores.

Corolário 3.1. *Considere o sistema (3.4). Então*

1. este sistema é rígido se, e somente se, $xQ(x, y, z) - yP(x, y, z) = 0$ com $z = h(x, y)$ onde h é a expressão local da variedade central $\mathcal{W}^c$.
2. este sistema é rígido por coordenadas cilíndricas se, e somente se, $xQ(x, y, z) - yP(x, y, z) = 0$.

É obvio que se o sistema (3.4) é rígido em coordenadas cilíndricas, então é rígido em $\mathbb{R}^3$. No entanto a seguinte proposição mostra que as Definições 3.1 e 3.2 não são equivalentes. Na verdade os sistemas rígidos por coordenadas cilíndricas são uma subclasse de sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$.

Proposição 3.1. *O sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x^2 + xy + xz + yz + z^2, \\ \dot{y} &= x + xy + xz + y^2 + yz + z^2, \\ \dot{z} &= -\lambda z + xz + yz + z^2,\end{aligned}\tag{3.17}$$

é rígido, porém não é rígido em coordenadas cilíndricas. Além disso a origem é um centro sobre a variedade central.

Demonstração. Note que z é um fator comum do lado direito da ultima equação do sistema (3.17). Portanto $z = 0$ é uma superfície algébrica invariante, com cofator $K(x, y, z) = -\lambda + x + y + z$. Assim o plano $z = 0$ é uma variedade central do sistema. Logo o sistema (3.17) restrito a $z = 0$ é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x^2 + xy, \\ \dot{y} &= x + xy + y^2.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Este sistema é rígido e tem uma integral primeira dada por

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(1 - x + y)^2},$$

a qual está definida na origem, pois $H(0, 0) = 0$. Concluimos que a origem é um centro sobre a variedade central.

Agora, o sistema (3.17) não é rígido por coordenadas cilíndricas, pois

$$xQ(x, y, z) - yP(x, y, z) = x^2z + xz^2 - y^2z - yz^2 \neq 0,$$

onde $P(x, y, z) = x^2 + xy + xz + yz + z^2$ e $Q(x, y, z) = xy + y^2 + xz + yz + z^2$. □

Observação 3.1. *Em alguns casos o problema do centro-foco sobre uma variedade central para sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$ por coordenadas cilíndricas é exatamente o mesmo problema para sistemas rígidos em $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, quando R em (3.12) satisfaz $R(x, y, 0) \equiv 0$, isto é, quando podemos escrever $R(x, y, z) = z\tilde{R}(x, y, z)$ com $\tilde{R} \in \mathbb{R}[x, y, z]$. Neste caso $z = 0$ é uma variedade central e o sistema (3.12) restrito a ela é dado por*

$$\dot{x} = -y + xF(x, y, 0),$$

$$\dot{y} = x + yF(x, y, 0),$$

onde $F(x, y, 0) \in \mathbb{R}[x, y]$ é um polinômio sem termos constantes. Assim os resultados sobre sistemas rígidos em $\mathbb{R}^2$ são naturalmente estendidos para esta classe de sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$.

Outra classe de sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$ por coordenadas cilíndricas, cujos os resultados relacionados ao problema do centro-foco são extensões naturais de resultados no plano, são os sistemas da forma (3.12) com $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \equiv 0$, isto é, quando podemos escrever $F(x, y, z) = F(x, y)$ com $F(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$. Neste caso as duas primeiras equações do sistema (3.12) estão desacopladas com a terceira e portanto o sistema (3.12) restrito a qualquer variedade central é dado por

$$\dot{x} = -y + xF(x, y),$$

$$\dot{y} = x + yF(x, y).$$

Capítulo 4

Sistemas Rígidos Homogêneos em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção vamos estudar o problema do centro-foco para algumas classes de sistemas rígidos em $\mathbb{R}^3$. O processo de solução deste problema pode ser dividido em três etapas. Primeiramente, usando o algoritmo descrito na Seção 2.2, faremos o cálculo de um certo número de coeficientes focais. Nesta etapa softwares de cálculos simbólicos, tais como Maple [24] e Mathematica [58], serão usados para corroborar os cálculos (veja o Apêndice 5.2 para um algoritmo implementado no Maple). Na segunda etapa iremos determinar o conjunto de zeros em comum do sistema formado pelos coeficientes focais calculados. Algumas vezes o cálculo da base de Groebner é suficiente para encontrar este conjunto de zeros, em outros casos será necessário decompor o radical do ideal gerado pelas coeficientes focais em uma interseção finita de ideais primos. Este procedimento requer um software de cálculos algébricos simbólicos especializado, tal como Singular [31]. Na última etapa devemos verificar se as condições necessárias encontradas, ao zerar os coeficiente focais calculados, são suficientes para se ter um centro sobre a variedade central. Usualmente aplicamos a teoria de integrabilidade de Darboux ou reduzimos o sistema a variedade central para realizar esta tarefa.

Considere o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xF_n(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + yF_n(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R_m(x, y, z),\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde $F_n, R_m \in \mathbb{R}[x, y, z]$ são polinômios homogêneos com grau $n \geq 1$, $m \geq 2$, respectivamente e $\lambda \neq 0$.

As duas proposições a seguir são extensões de resultados conhecidos do plano para

sistemas rígidos homogêneos, veja [22].

Proposição 4.1. *Considere o sistema (4.1) com $R_n(x, y, 0) \equiv 0$. Então o sistema (4.1) tem um centro rígido na origem sobre a variedade central se, e somente se,*

$$\int_0^{2\pi} F_n(\cos(s), \sin(s), 0) ds = 0.$$

Demonstração. Pela Observação, 3.1 o plano $z = 0$ é uma variedade central na origem do sistema (4.1). Portanto, restrito ao plano $z = 0$, o sistema (4.1) em coordenadas polares $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ torna-se

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho^{n+1} F_n(\cos \theta, \sin \theta, 0), \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}$$

O sistema acima é equivalente à equação diferencial

$$\frac{d\rho}{d\theta} = F_n(\cos \theta, \sin \theta, 0) \rho^{n+1}.$$

Como F_n é não constante, separando as variáveis ρ e θ desta equação e integrando de 0 até θ obtemos a seguinte solução

$$\rho(\theta)^n = \frac{\rho(0)^n}{1 - n\rho(0)^n \int_0^\theta F_n(\cos(s), \sin(s), 0) ds}.$$

Assim a origem é um centro sobre a variedade central do sistema (4.1) se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} F_n(\cos(s), \sin(s), 0) ds = 0.$$

Note que se n é ímpar a integral acima é sempre nula. □

Proposição 4.2. *Considere o sistema (4.1) com $\frac{\partial F_n}{\partial z}(x, y, z) \equiv 0$, isto é, $F_n(x, y, z) = F_n(x, y)$ é um polinômio homogêneo nas variáveis x e y . Então o sistema (4.1) tem um centro rígido na origem sobre a variedade central se, e somente se,*

$$\int_0^{2\pi} F_n(\cos(s), \sin(s)) ds = 0.$$

Demonstração. Pela Observação 3.1, o sistema (4.1) restrito a variedade central é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xF_n(x, y), \\ \dot{y} &= x + yF_n(x, y).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Consequentemente o sistema (4.2) em coordenadas polares $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, torna-se:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho^{n+1} F_n(\cos \theta, \sin \theta), \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}$$

o qual é equivalente a equação diferencial

$$\frac{d\rho}{d\theta} = F_n(\cos \theta, \sin \theta) \rho^{n+1}. \quad (4.3)$$

Como na prova da proposição anterior a solução dessa equação com condição inicial $\rho(0) = \rho_0$ é

$$\rho(\theta) = \frac{\rho_0}{\left(1 - n\rho_0^n \int_0^\theta F_n(\cos(s), \sin(s)) ds\right)^{\frac{1}{n}}}. \quad (4.4)$$

Agora o sistema (4.1) tem uma órbita periódica passando pelo ponto $(\rho_0, 0, z_0)$ se, e somente se, $\rho(2\pi) = \rho_0$. Portanto pela equação (4.4), obtemos que

$$\int_0^{2\pi} F_n(\cos(s), \sin(s)) ds = 0. \quad (4.5)$$

Observe que $z_0 = h(\rho_0, 0)$, onde $z = h(x, y)$ é a expressão da variedade central. Além disso, se n é ímpar a integral acima é sempre nula. Isto conclui a prova da proposição. $\square$

4.1 Caso: $n = 1$ e $\frac{\partial R_m}{\partial z}(x, y, z) \equiv 0$.

Nesta seção estudaremos sistemas da forma (4.1) com $n = 1$ e $R_m(x, y, z) = R_m(x, y)$ para $m = 2, 3, 4$.

Teorema 4.1. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xF_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + yF_1(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R_2(x, y),\end{aligned} \quad (4.6)$$

onde $F_1(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z$, $R_2(x, y) = b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2$ e denote por $S = \{(\lambda, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^7; \lambda \neq 0\}$ o conjunto de seus parâmetros. Então o sistema (4.6) restrito a variedade central tem um centro rígido na origem se, e somente se, uma das seguintes condições são satisfeitas:

(a) $a_3 = 0$.

(b) $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.4 a origem é um centro rígido sobre a variedade central para o sistema (4.6) se, e somente se, os coeficientes focais do sistema são todos nulos. Usando este fato e o algoritmo descrito na Seção 2.2, passemos ao cálculo destes coeficientes.

O primeiro coeficiente focal associado a origem do sistema (4.6) é dado por:

$$g_{2,2,0} = \frac{a_3(b_1 + b_3)}{\lambda}.$$

Para facilitar os cálculos vamos definir dois subconjuntos de S :

$$S_1 = \{s \in S; a_3 = 0\},$$

$$S_2 = \{s \in S; a_3 \neq 0\}.$$

Considere o sistema (4.6) sobre o conjunto de parâmetros S_1 , então temos que $g_{2,2,0} = 0$ e pela Proposição 4.2 a origem é um centro sobre a variedade central. Além disso, fazendo $a_3 = 0$ em (4.6), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(a_1x + a_2y), \\ y' &= x + y(a_1x + a_2y), \\ z' &= -\lambda z + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

o qual possui as superfícies algébricas invariantes $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$ onde

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= -1 - a_1y + a_2x, \\ f_2(x, y, z) &= -\frac{1}{2} - a_1y + a_2x - \frac{a_1^2}{2}y^2 + y^2 + a_1a_2xy - \frac{a_2^2}{2}x^2 + x^2, \end{aligned}$$

com cofatores

$$K_1(x, y, z) = a_1x + a_2y,$$

$$K_2(x, y, z) = 2a_2y + 2a_1x.$$

Agora, como $-2K_1 + K_2 \equiv 0$, então pelo Teorema 2.7, a função

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= f_1^{-2} \cdot f_2 \\ &= \frac{1 + 2a_1y - 2a_2x + a_1^2y^2 - 2y^2 - 2a_1a_2xy + a_2^2x^2 - 2x^2}{-2(1 + a_1y - a_2x)^2}, \end{aligned}$$

é uma integral primeira para o sistema (4.7) definida na origem.

Daqui em diante estudaremos a estabilidade da origem do sistema (4.6) sobre o conjunto de parâmetros S_2 e para isto vamos definir outros dois subconjuntos.

$$S_{21} = \{s \in S_2; a_1 = 0, a_2 = 0\},$$

$$S_{22} = \{s \in S_2; a_1^2 + a_2^2 \neq 0\}.$$

Suponha que os parâmetros estejam sobre o conjunto S_{21} , então fazendo as devidas substituições dos parâmetros no sistema (4.6) obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + a_3xz, \\ \dot{y} &= x + a_3yz, \\ \dot{z} &= -\lambda z + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Daí o primeiro e o segundo coeficiente focal é dado por

$$\begin{aligned}g_{2,2,0} &= \frac{a_3(b_1 + b_3)}{\lambda}, \\ g_{3,3,0} &= \frac{a_3^2(\lambda^2(-b_2^2 + 4b_1b_3) + (8 + \lambda^2)(b_1 + b_3)^2)}{(2\lambda^3(4 + \lambda^2))}.\end{aligned}$$

Portanto $g_{2,2,0} = g_{3,3,0} = 0$ se, e somente se, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Sendo assim, pela Proposição 4.1, a origem é um centro sobre a variedade central do sistema.

Suponha que os parâmetros estejam sobre o conjunto S_{22} , neste caso podemos assumir que $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ e $a_3 = 1$, pois caso contrário efetuamos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned}X &= \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}x + \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}y, \\ Y &= -\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}x + \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}y, \\ Z &= \frac{1}{a_3}z.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Então sob estas condições o sistema (4.6) torna-se:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(y + z), \\ \dot{y} &= x + y(y + z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Calculando os 6 primeiros coeficientes focais não nulos, $g_{2,2,0}$, $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$, $g_{6,6,0}$ e $g_{7,7,0}$, que podem ser visto no Apêndice 5.2, podemos calcular a Base de Groebner do ideal gerado por eles. Em resumo, temos que a Base de Groebner deste ideal é gerado pelos seguintes polinômios, que chamaremos de L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5 e L_6 :

- $L_1 = b_1 + b_3$,
- $L_2 = b_3 \lambda^6 (4 + \lambda^2)^3 (9 + \lambda^2)^2 (1 + 5\lambda^2 + 4\lambda^4)$,
- $L_3 = b_3 \lambda^4 (4 + \lambda^2)^2 (9 + 10\lambda^2 + \lambda^4) (1404b_3 + 344\lambda^2 + 130\lambda^4 + 11\lambda^6)$,
- $L_4 = -\lambda^4 (4 + \lambda^2)^2 (-40959b_2\lambda + b_3(110889 + 39195\lambda^2 + 37770\lambda^4 + 33560\lambda^6 + 6358\lambda^8 + 344\lambda^{10}))$,
- $L_5 = b_3 \lambda^4 (4 + \lambda^2)^2 (1402596b_2 - \lambda(-606528 + 342612\lambda^2 + 1489489\lambda^4 + 621678\lambda^6 + 85089\lambda^8 + 3760\lambda^{10} - 467532b_3(7 + \lambda^2)))$,
- $L_6 = \lambda^2 (1474524b_2^2 - 491508b_2\lambda(12 + 7\lambda^2 + \lambda^4) + b_3(17694288 + 5898096b_3 + 13918068\lambda^2 + 5763528\lambda^4 + 6798420\lambda^6 + 4076212\lambda^8 + 1029559\lambda^{10} + 115062\lambda^{12} + 4975\lambda^{14} + 28\lambda^{16}))$.

Logo concluímos que os coeficientes focais $g_{2,2,0}$, $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$, $g_{6,6,0}$ e $g_{7,7,0}$ são nulos se, e somente se, $L_i = 0$, para $i = 1, \dots, 6$, ou seja, se $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Sendo assim, pela Proposição 4.1, a origem é um centro sobre a variedade central do sistema.

□

Observação 4.1. *Nos teoremas a seguir estudaremos famílias da forma (4.1) com $\lambda = 1$. Note que isto não é uma restrição, pois se $\lambda \neq 1$ basta tomar a mudança de coordenadas $(x, y, z) \rightarrow (x, y, \lambda w)$.*

Teorema 4.2. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xF_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + yF_1(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R_3(x, y),\end{aligned}\tag{4.11}$$

onde $F_1(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z$, $R_3(x, y) = b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3$ e denote por $S = \{(\lambda, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^8; \lambda = 1\}$ o conjunto de seus parâmetros. Então o sistema (4.11) restrito a variedade central tem um centro rígido na origem se, e somente se, uma das seguintes condições são satisfeitas:

(a) $a_3 = 0$.

(b) $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.4 a origem é um centro rígido sobre a variedade central para o sistema (4.11) se, e somente se, os coeficiente focais do sistema são todos nulos. Usando este fato e o algoritmo descrito na Seção 2.2, passemos ao cálculo destes coeficientes.

O primeiro e segundo coeficiente focal associado a origem do sistema (4.11) é dado por:

$$\begin{aligned} g_{2,2,0} &= 0, \\ g_{3,3,0} &= -\frac{a_3}{8}(a_1(3b_1 - 5b_2 + b_3 - 15b_4) + a_2(15b_1 + b_2 + 5b_3 + 3b_4)). \end{aligned}$$

Para facilitar os cálculos vamos definir dois subconjuntos de S :

$$S_1 = \{s \in S; a_3 = 0\},$$

$$S_2 = \{s \in S; a_3 \neq 0\}.$$

Considere o sistema (4.11) sobre o conjunto de parâmetros S_1 , então temos que $g_{2,2,0} = g_{3,3,0} = 0$ e pela Proposição 4.2 a origem é um centro sobre a variedade central. Além disso, fazendo $a_3 = 0$ em (4.11), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(a_1x + a_2y), \\ \dot{y} &= x + y(a_1x + a_2y), \\ \dot{z} &= -z + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3. \end{aligned} \tag{4.12}$$

o qual possui as superfícies algébricas invariantes $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$ onde

$$f_1(x, y, z) = 1 + a_1y - a_2x,$$

$$f_2(x, y, z) = 1 + 2a_1y - 2a_2x + (a_1^2 + 1)y^2 - 2a_1a_2xy + (a_2^2 + 1)x^2,$$

com cofatores

$$K_1(x, y, z) = a_1x + a_2y,$$

$$K_2(x, y, z) = 2a_2y + 2a_1x.$$

Agora como $-2K_1 + K_2 \equiv 0$, então pelo Teorema 2.7, a função

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= f_1^{-2} \cdot f_2 \\ &= \frac{(1 + 2a_1y - 2a_2x + a_1^2y^2 + y^2 - 2a_1a_2xy + a_2^2x^2 + x^2)}{(1 + a_1y - a_2x)^2}, \end{aligned}$$

é uma integral primeira para o sistema (4.12) definida na origem.

Daqui em diante estudaremos a estabilidade da origem do sistema (4.11) sobre o conjunto de parâmetros S_2 e para isto vamos definir outros dois subconjuntos.

$$S_{21} = \{s \in S_2; a_1 = 0, a_2 = 0\},$$

$$S_{22} = \{s \in S_2; a_1^2 + a_2^2 \neq 0\}.$$

Suponha que os parâmetros estejam sobre o conjunto S_{21} , então fazendo as devidas substituições dos parâmetros no sistema (4.11) obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + a_3xz, \\ \dot{y} &= x + a_3yz, \\ \dot{z} &= -z + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Daí $g_{2,2,0} = g_{3,3,0} = 0$ e o terceiro coeficiente focal é dado por:

$$g_{4,4,0} = \frac{-3a_3^2}{80} \left(\frac{20b_1^2}{3} + \left(\frac{7b_1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}b_3 \right)^2 + \frac{20b_4^2}{3} + \left(\sqrt{3}b_2 + \frac{7b_4}{\sqrt{3}} \right)^2 \right).$$

Portanto $g_{4,4,0} = 0$ se, e somente se, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$. Sendo assim, pela Proposição 4.1, a origem é um centro sobre a variedade central do sistema.

Suponha que os parâmetros estejam sobre o conjunto S_{22} . Deste modo, podemos tomar $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ e $a_3 = 1$, pois caso contrário efetuamos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned}X &= \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}x + \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}y, \\ Y &= -\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}x + \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}y, \\ Z &= \frac{1}{a_3}z.\end{aligned}$$

Então substituindo os devidos valores nos parâmetros do sistema (4.11) temos:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(y + z), \\ \dot{y} &= x + y(y + z), \\ \dot{z} &= -z + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Calculando os 6 primeiros coeficientes focais, obtemos $g_{2,2,0} = 0$ e

$$\begin{aligned}g_{3,3,0} &= \frac{1}{8}(-15b_1 - b_2 - 5b_3 - 3b_4) \\ g_{4,4,0} &= \frac{1}{80}(-69b_1^2 - 9b_2^2 + b_1(1675 - 42b_3) + 605b_3 - 9b_3^2 + 375b_4 - 69b_4^2 - 21b_2(-5 + \\ &\quad + 2b_4)) \\ g_{5,5,0} &= \frac{1}{108800}(2979807b_1^2 + 230261b_2^2 - 12574050b_3 + 421375b_3^2 - 7856550b_4 + \\ &\quad + 1327122b_3b_4 + 2543349b_4^2 + 2b_2(-1049325 + 217311b_3 + 712355b_4) + \\ &\quad + 2b_1(-17091375 + 663561b_2 + 1071769b_3 + 2025567b_4))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{6,6,0} &= \frac{1}{16972800} (448080399b_1^3 + 15583607b_2^3 + 41136299100b_3 - 1869137640b_3^2 + \\
&\quad + 20663877b_3^3 + 25741041300b_4 - 8147165208b_3b_4 + 53474525b_3^2b_4 - \\
&\quad - 10732299948b_4^2 + 149360133b_3b_4^2 + 400774257b_4^3 + 3b_1^2(-4239782952 + \\
&\quad + 44530473b_2 + 156631501b_3 + 123505863b_4 + b_2^2(-891331356 + 10925733b_3 + \\
&\quad + 126867715b_4) + 3b_2(2271636900 + 6315153b_3^2 - 1969353928b_4 + 124647367b_4^2 + \\
&\quad + 26b_3(-32633656 + 995261b_4) + b_1(42515343b_2^2 + 26b_2(-287183388 + 3469325b_3 + \\
&\quad + 11204613b_4) + 3(56278807b_3^2 + b_3(-3167943424 + 83478746b_4) + 39(952919700 - \\
&\quad - 204555328b_4 + 4578835b_4^2)))))) \\
g_{7,7,0} &= \frac{1}{1281106944000} (11875528804776b_1^4 + 189592323336b_2^4 - \\
&\quad - 88221679436241000b_3 + 4743935408410380b_3^2 - 90886976568323b_3^3 + \\
&\quad + 189592323336b_3^4 + b_1^3(-1757238864840673 + 15584312430336b_3 - \\
&\quad - 1507902907680b_4) - 3b_2^3(20258682998149 + 18616085280b_3 - 657943562432b_4) - \\
&\quad - 55195570635543000b_4 + 23475792159677760b_3b_4 - 342997362806385b_3^2b_4 + \\
&\quad + 111696511680b_3^3b_4 + 26406467970791220b_4^2 - 1160378808356807b_3b_4^2 + \\
&\quad + 2722248393072b_3^2b_4^2 - 1891427545739733b_4^3 + 11875528804776b_4^4 + \\
&\quad + 13b_2^2(165913021470420 + 21684660624b_3^2 - 41560619045427b_4 + \\
&\quad + 625950994512b_4^2 - b_3(7772435933027 + 25776118080b_4)) + \\
&\quad + 3b_1^2(10612844686528500 + 907416131024b_2^2 - 645022112929099b_3 + \\
&\quad + 2712454309552b_3^2 - 872871756434843b_4 + 8792575730224b_4^2 + \\
&\quad + b_2(-278871804754177 + 167544767520b_3 + 5194770810112b_4)) + \\
&\quad + b_2(55848255840b_3^3 - 3b_3^2(-36669755808801 + 528231484352b_4) + \\
&\quad + b_3(7200488236325520 - 671253258170066b_4 - 502634302560b_4^2) + \\
&\quad + 3(-4875861751839000 + 4845312485496600b_4 - 566350290527703b_4^2 + \\
&\quad + 5194770810112b_4^3)) + b_1(-239260407367059000 - 111696511680b_2^3 + \\
&\quad + 1973830687296b_3^3 + b_2^2(-327517111470061 + 1584694453056b_3 - \\
&\quad - 502634302560b_4) + 67856881088922960b_4 - 3705420449176621b_4^2 + \\
&\quad + 1507902907680b_4^3 + 9b_3^2(-80153067310243 + 55848255840b_4) + \\
&\quad + 6b_3(4015296490510500 - 298387706486341b_4 + 2597385405056b_4^2) + \\
&\quad + b_2(20797486491665760 + 335089535040b_3^2 - 2164867468370374b_4 + \\
&\quad + 6b_3(-95581438554591 + 1513186002848b_4))))).
\end{aligned}$$

Calculando a Base de Groebner do ideal gerado por $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$, $g_{6,6,0}$ e $g_{7,7,0}$, obtemos os seguintes polinômios:

- $L_2 = b_4^2$,
- $L_3 = 4b_3 + 3b_4$,
- $L_4 = 4b_2 - 3b_4$,
- $L_5 = b_1$.

Logo concluímos que os coeficientes focais $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$, $g_{6,6,0}$ e $g_{7,7,0}$ são nulos se, e somente se, $L_i = 0$, para $i = 2, \dots, 5$, ou seja, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$. Sendo assim, pela Proposição 4.1, a origem é um centro sobre a variedade central do sistema. $\square$

Teorema 4.3. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + xF_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + yF_1(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R_4(x, y), \end{aligned} \tag{4.15}$$

onde $F_1(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z$, $R_4(x, y) = b_1x^4 + b_2x^3y + b_3x^2y^2 + b_4xy^3 + b_5y^4$ e denote por $S = \{(\lambda, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathbb{R}^9; \lambda = 1\}$ o conjunto de seus parâmetros. Então o sistema (4.15) restrito a variedade central tem um centro rígido na origem se, e somente se, uma das seguintes condições são satisfeitas:

(a) $a_3 = 0$.

(b) $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.4 a origem é um centro rígido sobre a variedade central para o sistema (4.15), se, e somente se, os coeficientes focais do sistema são todos nulos. Usando este fato e o algoritmo descrito na Seção 2.2, passamos ao cálculo dos coeficientes.

$$\begin{aligned} g_{2,2,0} &= 0, \\ g_{3,3,0} &= \frac{a_3(3b_1 + b_3 + 3b_5)}{4}. \end{aligned}$$

Para facilitar os cálculos vamos definir dois subconjuntos:

$$S_1 = \{s \in S; a_3 = 0\},$$

$$S_2 = \{s \in S; a_3 \neq 0 \text{ e } b_3 = -3b_1 - 3b_5\}.$$

Considere o sistema (4.15) sobre o conjunto de parâmetros S_1 , então temos que $g_{3,3,0} = 0$ e pela Proposição 4.2 a origem é um centro sobre a variedade central. Além disso, fazendo $a_3 = 0$ em (4.15) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(a_1x + a_2y), \\ y' &= x + y(a_1x + a_2y), \\ z' &= -z + b_1x^4 + b_2x^3y^2 + b_3x^2y^2 + b_4xy^3 + b_5y^4, \end{aligned} \quad (4.16)$$

o qual possui as superfícies algébricas invariantes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ e $f_3 = 0$ onde

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 1 + 2ya_1 - 2xa_2 + y^2(a_1^2 + a_2^2 + 1/2) - 2a_1ya_2x + x^2(2a_2^2 + 1/2), \\ f_2(x, y, z) &= 1 + 3ya_1 - 3xa_2 + y^2(3a_1^2 - a_2^2 + 1/2) - 6a_1ya_2x + x^2(2a_2^2 + 1/2) + \\ &\quad + y^3(a_1(2a_2^2 + 1/2) - 3a_2^2a_1 + a_1^3) - xy^2a_2(3a_1^2 - a_2^2 + 1/2) + \\ &\quad + x^2ya_1(2a_2^2 + 1/2) + x^3(-a_2(2a_2^2 + 1/2) + 2a_2^3), \\ f_3(x, y, z) &= 1 + ya_1 - xa_2, \end{aligned}$$

com cofatores

$$\begin{aligned} K_1(x, y, z) &= 2a_2y + 2a_1x, \\ K_2(x, y, z) &= 3a_2y + 3a_1x, \\ K_3(x, y, z) &= a_1x + a_2y. \end{aligned}$$

Agora como $K_1 + K_2 - 5K_3 \equiv 0$, então pelo Teorema 2.7, a função

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= f_1 \cdot f_2 \cdot f_3^{-5} \\ &= \frac{1}{(1 + ya_1 - xa_2)^4} \left((1 + 2ya_1 - 2xa_2 + y^2a_1^2 - y^2a_2^2 + y^2(2a_2^2 + \frac{1}{2}) - \right. \\ &\quad \left. - 2a_1ya_2x + x^2(2a_2^2 + \frac{1}{2})) (y^2a_1^2 - 2a_1ya_2x + 2ya_1 + y^2(2a_2^2 + \frac{1}{2}) - \right. \\ &\quad \left. - 3y^2a_2^2 - 2xa_2 + 1 + x^2(2a_2^2 + \frac{1}{2}) - 2a_2^2x^2) \right), \end{aligned}$$

é uma integral primeira para o sistema (4.16) definida na origem.

Daqui em diante estudaremos a estabilidade da origem do sistema (4.15) sobre o conjunto de parâmetros S_2 e para isto vamos definir dois subconjuntos.

$$S_{21} = \{s \in S_2; a_1 = 0, a_2 = 0\},$$

$$S_{22} = \{s \in S_2; a_1^2 + a_2^2 \neq 0\}.$$

Suponha que os parâmetros estejam sobre o conjunto S_{21} , deste modo, podemos tomar $a_3 = 1$, pois caso contrário efetuamos a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} X &= x - y, \\ Y &= x + y, \\ Z &= \frac{1}{a_3}z. \end{aligned}$$

Então substituindo os devidos valores nos parâmetros do sistema (4.15) temos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + xz, \\ \dot{y} &= x + yz, \\ \dot{z} &= -z + b_1x^4 + b_2x^3y - (3b_1 + 3b_5)x^2y^2 + b_4xy^3 + b_5y^4. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Daí $g_{2,2,0} = g_{3,3,0} = g_{4,4,0} = 0$ e o quarto coeficiente focal é dado por:

$$g_{5,5,0} = \frac{1}{1360}(-192(b_5 - b_1)^2 - 63(b_2 + b_4)^2 - 160b_5^2 - 160b_1^2 - 10b_2^2 - 10b_4^2).$$

Note que $g_{5,5,0} = 0$, se e somente se, $b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = 0$ e consequentemente $b_3 = 0$. Sendo assim, pela Proposição 4.1, a origem é um centro sobre a variedade central do sistema.

Suponha que os parâmetros estejam sobre o conjunto S_{22} , deste modo, podemos tomar $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ e $a_3 = 1$, pois caso contrário efetuamos a mudança de variáveis

$$\begin{cases} X = \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}x + \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}y, \\ Y = -\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}x + \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}y, \\ Z = \frac{1}{a_3}z. \end{cases}$$

Então substituindo os devidos valores dos parâmetros no sistema (4.15) temos:

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(y + z), \\ y' &= x + y(y + z), \\ z' &= -z + b_1x^4 + b_2x^3y - (3b_1 + 3b_5)x^2y^2 + b_4xy^3 + b_5y^4. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Calculando os 7 primeiros coeficientes focais, obtemos $g_{2,2,0} = g_{3,3,0} = 0$ e:

$$\begin{aligned} g_{4,4,0} &= \frac{1}{4}(8b_1 + b_2 + b_4 - 8b_5), \\ g_{5,5,0} &= \frac{1}{2720}(-92990b_1 - 704b_1^2 - 12155b_2 - 146b_2^2 - 13005b_4 - 252b_2b_4 - 146b_4^2 + \\ &\quad + 101490b_5 + 768b_1b_5 - 704b_5^2), \\ g_{6,6,0} &= \frac{1}{707200}(523688b_1^2 + 201529b_2^2 + 73559850b_4 + 544703b_4^2 + 4b_1(127533575 + \\ &\quad + 9607b_2 + 28821b_4 - 409632b_5) - 570113700b_5 + 38428b_4b_5 + 3269080b_5^2 + \\ &\quad + 2b_2(33719075 + 305796b_4 + 57642b_5)), \\ g_{7,7,0} &= \frac{1}{39249600}(3878784b_1^3 + 56277b_2^3 + 3b_2^2(32511002 + 18759b_4 - 646464b_5) + \\ &\quad + 18b_1^2(94055589 + 37518b_2 + 62530b_4 - 215488b_5) - b_1(795185857050 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +1939392b_4^2 + 111b_2(-12252517 + 17472b_4 - 4056b_5) + 1576767652b_5 + \\
 & +3878784b_5^2 + 111b_4(-10931491 + 4056b_5) - b_2(56277b_4^2 + 16b_4(13676297 + \\
 & +121212b_5) + 111(949559650 + 14894569b_5 + 10140b_5^2)) - 3(168028776b_4^2 + \\
 & +18759b_4^3 + 37b_4(1040821600 + 13573543b_5 + 6084b_5^2) - 2b_5(148976558575 - \\
 & -519992345b_5 + 646464b_5^2))), \\
 g_{8,8,0} = & \frac{1}{53379456000}(-254560501744b_1^3 - 50373996024b_2^3 + 5813543520866250b_4 + \\
 & +16170962064455b_4^2 - 51832747664b_4^3 - 8b_1^2(18344820756015 + \\
 & +28964653982b_2 + 28235278162b_4 - 88150169034b_5) - 44963444538675000b_5 + \\
 & +134043803978260b_4b_5 + 56678655666b_4^2b_5 + 84031425959480b_5^2 - \\
 & -249222251536b_4b_5^2 + 200541780464b_5^3 + b_2^2(-13619376663495 - \\
 & -140561988272b_4 + 70183335986b_5) - 2b_2(-2649287822390625 + \\
 & +3304481844320b_4 + 71010369956b_4^2 - 69307671511030b_5 - 63291576086b_4b_5 + \\
 & +127528629048b_5^2) - 2b_1(-19977443857312500 + 28339327833b_2^2 + \\
 & +57043813950730b_4 + 21586987673b_4^2 + 2b_2(29664791736315 + 24893447883b_4 - \\
 & -73618616728b_5) - 104647962761120b_5 - 141402226896b_4b_5 + 325591315496b_5^2)).
 \end{aligned}$$

Calculando a Base de Groebner do ideal gerado por $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$, $g_{6,6,0}$, $g_{7,7,0}$ e $g_{8,8,0}$, obtemos os seguintes polinômios:

- $L_2 = b_5^2$,
- $L_3 = b_4 - 5b_5$,
- $L_4 = b_2 - 3b_5$,
- $L_5 = b_1$.

Logo concluímos que os coeficientes focais do sistema (4.18) são nulos se, e somente se, $L_i = 0$, para $i = 2, \dots, 5$, ou seja, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$. Sendo assim, pela Proposição 4.1, a origem é um centro sobre a variedade central do sistema. $\square$

4.2 Caso: $n = 2$ e $\frac{\partial R_m}{\partial z}(x, y, z) \equiv 0$.

Nesta seção estudaremos sistemas da forma (4.1) com $n = 2$ e $R_m(x, y, z) = R_m(x, y)$ para $m = 2, 3$.

Teorema 4.4. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xF_2(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + yF_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R_2(x, y),\end{aligned}\tag{4.19}$$

onde $F_2(x, y, z) = a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2$, $R_2(x, y) = b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2$ e denote por $S = \{(\lambda, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^9; \lambda = 1\}$ o conjunto de seus parâmetros. Então o sistema (4.19) restrito a variedade central tem um centro rígido na origem se, e somente se, uma das seguintes condições são satisfeitas:

$$(a) \ a_1 = -a_4, b_1 = b_2 = b_3 = 0,$$

$$(b) \ a_1 = -a_4, a_3 = a_5 = a_6 = 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.4 a origem é um centro rígido sobre a variedade central para o sistema (4.19) se, e somente se, os coeficiente focais do sistema são todos nulos. Usando este fato e o algoritmo descrito na Seção 2.2, passemos ao cálculo destes coeficientes.

O primeiro coeficiente focal associado a origem do sistema (4.19) é dado por:

$$g_{2,2,0} = a_1 + a_4.$$

Logo, $g_{2,2,0} = 0$ se, e somente se, $a_1 = -a_4$. O segundo coeficiente focal do sistema (4.19) é dado por

$$g_{3,3,0} = \frac{a_6}{20} (9(b_1 + b_3)^2 + b_2^2 + 2(b_3^2 + b_1^2)).$$

Para facilitar os cálculos vamos definir dois subconjuntos de S :

$$S_1 = \{s \in S; a_1 = -a_4 \text{ e } a_6 \neq 0\},$$

$$S_2 = \{s \in S; a_1 = -a_4 \text{ e } a_6 = 0\}.$$

Considere o sistema (4.19) sobre o conjunto de parâmetro S_1 , então temos que $g_{3,3,0} = 0$ se e somente se $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Sendo assim, pela Proposição 4.1, a origem é um centro sobre a variedade central do sistema.

Considere o sistema (4.19) sobre o conjunto de parâmetro S_2 então temos que $g_{3,3,0} = 0$ e para facilitar os cálculos vamos definir dois subconjuntos de S_2 :

$$S_{21} = \{s \in S_2; a_3 = 0, a_5 = 0\},$$

$$S_{22} = \{s \in S_2; a_3^2 + a_5^2 \neq 0\}.$$

Suponha que os parâmetros estejam sobre o conjunto S_{21} , então pela Proposição 4.2 a origem é um centro sobre a variedade central. Além disso, fazendo as substituições dos parâmetros em (4.19) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(a_1x^2 + a_2xy + a_4y^2), \\ \dot{y} &= x + y(a_1x^2 + a_2xy + a_4y^2), \\ \dot{z} &= -z + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2,\end{aligned}\tag{4.20}$$

o qual possui as superfícies algébricas invariante $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$, onde

$$\begin{aligned}f_1(x, y, z) &= 1 + y^2(a_2 + 1) + 2a_1xy + x^2, \\ f_2(x, y, z) &= y^2 + x^2,\end{aligned}$$

com cofatores

$$\begin{aligned}K_1(x, y, z) &= -2a_1y^2 + 2a_2xy + 2a_1x^2, \\ K_2(x, y, z) &= -2a_1y^2 + 2a_2xy + 2a_1x^2.\end{aligned}$$

Agora como $-K_1 + K_2 \equiv 0$, então pelo Teorema 2.7 a função

$$\begin{aligned}H(x, y, z) &= f_1^{-1} \cdot f_2 \\ &= \frac{y^2 + x^2}{1 + y^2a_2 + y^2 + 2a_1xy + x^2},\end{aligned}$$

é uma integral primeira para o sistema (4.20) definida na origem.

Suponha que os parâmetros estejam sobre o espaço S_{22} , neste caso podemos assumir $a_3 = 0$ e $a_5 = 1$, pois caso contrário efetuamos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned}X &= \frac{a_5}{a_3^2 + a_5^2}x + \frac{a_3}{a_3^2 + a_5^2}y, \\ Y &= -\frac{a_3}{a_3^2 + a_5^2}x + \frac{a_5}{a_3^2 + a_5^2}y, \\ Z &= z.\end{aligned}$$

Então sob estas condições o sistema (4.19), torna-se:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(a_1x^2 + a_2xy - a_1y^2 + xz + a_5yz), \\ \dot{y} &= x + y(a_1x^2 + a_2xy - a_1y^2 + xz + a_5yz), \\ \dot{z} &= -z + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2,\end{aligned}\tag{4.21}$$

e seu terceiro coeficiente focal é dado por:

$$g_{4,4,0} = -\frac{1}{40}((b_2 + 3(b_1 + b_3))^2 + 4b_1^2).$$

Portanto $g_{4,4,0} = 0$, se e somente se, $b_1 = 0$ e $b_2 = -3b_3$. Sendo assim defina

$$S_{221} = \{s \in S_{22}; b_1 = 0 \text{ e } b_2 = -3b_3\}.$$

Calculando o quarto, quinto e sexto coeficientes focais do sistema (4.21) sobre o conjunto de parâmetros S_{221} , obtemos

$$\begin{aligned} g_{5,5,0} &= \frac{-b_3^2}{408} (36a_2 + 35a_4), \\ g_{6,6,0} &= -\frac{-b_3^2}{106080} \left(\left(82a_2 + \frac{2055}{164}a_4 \right)^2 + \frac{1443104527}{26896}a_4^2 + 129a_2^2 \right), \\ g_{7,7,0} &= -\frac{b_3^2}{313996800} (47143543a_2^3 + 59069548a_2^2a_4 + 443265892a_2a_4^2 + 169980112a_4^3 - \\ &\quad - 13653000b_3^2), \end{aligned}$$

logo $g_{5,5,0} = g_{6,6,0} = g_{7,7,0} = 0$ se, e somente se, $b_3 = 0$ e consequentemente $b_1 = b_2 = 0$. Sendo assim, pela Proposição 4.1, a origem é um centro sobre a variedade central do sistema. $\square$

Teorema 4.5. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + xF_2(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + yF_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R_3(x, y), \end{aligned} \tag{4.22}$$

onde $F_2(x, y, z) = a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2$, $R_3(x, y) = b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3$ e denote por $S = \{(\lambda, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^{10}; \lambda = 1\}$ o conjunto de seus parâmetros. Se uma das seguintes condições são satisfeitas:

$$(a) \ a_1 = -a_4, b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0,$$

$$(b) \ a_1 = -a_4, a_3 = a_5 = a_6 = 0,$$

então o sistema (4.19) restrito a variedade central tem um centro rígido na origem.

Demonstração. Pelo Teorema 2.4 a origem é um centro rígido sobre a variedade central para o sistema (4.22) se, e somente se, os coeficiente focais do sistema são todos nulos. Para facilitar os cálculos dos coeficiente focais vamos definir dois subconjuntos de S :

$$S_1 = \{s \in S; a_3 = 0, a_5 = 0\},$$

$$S_2 = \{s \in S; a_3^2 + a_5^2 \neq 0\}.$$

Considere o sistema (4.22) sobre o conjunto de parâmetro S_1 , então fazendo as devidas substituições dos parâmetros em (4.22), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(a_1x^2 + a_2xy + a_4y^2 + a_6z^2), \\ \dot{y} &= x + y(a_1x^2 + a_2xy + a_4y^2 + a_6z^2), \\ \dot{z} &= -z + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3,\end{aligned}\tag{4.23}$$

cujo os três primeiros coeficientes focais são dados por

$$\begin{aligned}g_{2,2,0} &= a_1 + a_4, \\ g_{3,3,0} &= 0, \\ g_{4,4,0} &= \frac{a_6}{80} \left(\frac{20}{3}b_1^2 + \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}b_1 + \sqrt{3}b_3 \right)^2 + \frac{20}{3}b_4^2 + \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}b_4 + \sqrt{3}b_2 \right)^2 \right).\end{aligned}$$

Agora considere dois subconjuntos de S_1 dados por

$$S_{11} = \{s \in S_1; a_1 = -a_4 \text{ e } a_6 = 0\},$$

$$S_{12} = \{s \in S_1; a_1 = -a_4, \quad a_6 \neq 0 \text{ e } b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0\}.$$

Suponha que os parâmetros estejam sobre o conjunto S_{11} , então pela Proposição 4.2 a origem é um centro sobre a variedade central. Além disso, sobre este espaço de parâmetros, o sistema (4.23) possui as superfícies algébricas invariante $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$, onde

$$\begin{aligned}f_1(x, y, z) &= 1 + y^2(a_2 + 1) + 2a_1xy + x^2, \\ f_2(x, y, z) &= y^2 + x^2,\end{aligned}$$

com cofatores

$$\begin{aligned}K_1(x, y, z) &= -2a_1y^2 + 2a_2xy + 2a_1x^2, \\ K_2(x, y, z) &= -2a_1y^2 + 2a_2xy + 2a_1x^2.\end{aligned}$$

Como $-K_1 + K_2 \equiv 0$, então pelo Teorema 2.7 a função

$$\begin{aligned}H(x, y, z) &= f_1^{-1} \cdot f_2 \\ &= \frac{y^2 + x^2}{1 + y^2a_2 + y^2 + 2a_1xy + x^2},\end{aligned}$$

é uma integral primeira para o sistema (4.23) definida na origem.

Suponha que os parâmetros estejam sobre o conjunto S_{12} , neste caso $g_{2,2,0} = g_{3,3,0} = g_{4,4,0} = 0$ se, e somente se, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$. Sendo assim, pela Proposição 4.1, a origem é um centro sobre a variedade central do sistema.

Finalmente se os parâmetros estiverem sobre o conjunto S_2 , podemos assumir que $a_3 = 0$ e $a_5 = 1$, pois caso contrário efetuamos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} X &= \frac{a_5}{a_3^2 + a_5^2}x + \frac{a_3}{a_3^2 + a_5^2}y, \\ Y &= \frac{-a_3}{a_3^2 + a_5^2}x + \frac{-a_5}{a_3^2 + a_5^2}y, \\ Z &= z. \end{aligned}$$

Então sob estas condições o sistema (4.22) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(a_1x^2 + a_2xy + a_4y^2 + yz + a_6z^2), \\ \dot{y} &= x + y(a_1x^2 + a_2xy + a_4y^2 + yz + a_6z^2), \\ \dot{z} &= -z + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Calculando os 8 primeiros coeficientes focais $g_{2,2,0}$, $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$, $g_{6,6,0}$, $g_{7,7,0}$, $g_{8,8,0}$ e $g_{9,9,0}$, que podem ser visto no Apêndice 5.2, infelizmente não foi possível decompor o radical do ideal

$$I = \langle g_{2,2,0}, g_{3,3,0}, g_{4,4,0}, g_{5,5,0}, g_{6,6,0}, g_{7,7,0}, g_{8,8,0}, g_{9,9,0} \rangle$$

em uma interseção finita de ideais primos sobre um corpo de característica zero usando o Singular. No entanto tal decomposição foi possível sobre o corpo finito de característica 32003, a qual consiste das seguintes componentes:

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle b_4, b_3, b_2, b_1 + 10668b_2 + 10668b_3 + b_4, a_1 + a_4 \rangle, \\ I_2 &= \langle b_3^2 + 9b_4^2, 10667a_4b_3 + a_2b_4, a_2b_3 + 6a_4b_4, a_2^2 + 4a_4^2, b_2 + 3b_4, b_1 + 10668b_2 + \\ &\quad + 10668b_3 + b_4, a_1 + a_4 \rangle. \end{aligned}$$

Um vez que $10668 = \frac{1}{3}$ modulo 32003 e $10667 = -\frac{2}{3}$ modulo 32003, então obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle b_4, b_3, b_2, b_1 + \frac{1}{3}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + b_4, a_1 + a_4 \rangle, \\ I_2 &= \langle b_3^2 + 9b_4^2, -\frac{2}{3}a_4b_3 + a_2b_4, a_2b_3 + 6a_4b_4, a_2^2 + 4a_4^2, b_2 + 3b_4, b_1 + \frac{1}{3}b_2 + \frac{1}{3}b_3b_4, a_1 + \\ &\quad + a_4 \rangle. \end{aligned}$$

Ao analisar os zeros de cada um dos geradores dos ideais acima, temos que $a_1 = -a_4$ e $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$ é uma condição para anular os coeficiente focais calculados e pela Proposição 4.1, sob esta condição, a origem é um centro sobre a variedade central do sistema. $\square$

Não podemos afirmar que as condições obtidas na proposição acima resolvem completamente o problema do centro-foco para a família (4.22), pois durante a prova da

proposição usamos aritmética modular para decompor o radical do ideal gerado pelos coeficiente focais calculados no último caso estudado (veja [49]). Entretanto a probabilidade de alguma condição necessária ter se perdido neste processo é muito pequena. Portanto conjecturamos que as condições da Proposição 4.5 são necessárias e suficientes para que a origem do sistema (4.22) seja um centro sobre a variedade central.

4.3 Caso: $n = 1$ e $m = 2$.

Teorema 4.6. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xF_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + yF_1(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R_2(x, y, z),\end{aligned}\tag{4.25}$$

onde $F_1(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z$, $R_2(x, y, z) = b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2$ e denote por $S = \{(\lambda, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^{10}; \lambda = 1\}$ o conjunto de seus parâmetros. Se uma das seguintes condições são satisfeitas:

- (a) $a_3 = 0$,
- (b) $b_1 = b_2 = b_4 = 0$,
- (c) $b_1 = -b_4$, $a_1 = a_2 = b_3 = b_5 = 0$, $a_3 = 1$ e $b_6 = 2$,
- (d) $b_1 = -b_4$, $b_3 = 2$, $b_5 = -1$, $b_6 = 2$, $a_2 = 0$ e $a_1 = a_3 = 1$,
- (e) $b_1 = -b_4$, $b_2 = -b_4$, $b_3 = 2$, $a_2 = b_5 = 0$, $b_6 = 2$ e $a_1 = a_3 = 1$,
- (f) $b_1 = b_4 = 0$, $b_2 = -b_6 + 1$, $b_3 = b_6$, $b_5 = -b_6 + 1$, $a_2 = 0$ e $a_1 = a_3 = 1$,

então o sistema (4.25) restrito a variedade central tem um centro rígido na origem.

Demonstração. Pelo Teorema 2.4 a origem é um centro rígido sobre a variedade central para o sistema (4.25) se, e somente se, os coeficientes focais do sistema são todos nulos. Passemos assim ao cálculo do primeiro coeficiente focal associado a origem do sistema (4.25), que é dado por:

$$g_{2,2,0} = a_3(b_1 + b_4).$$

Para facilitar os cálculos vamos definir dois subconjuntos de S :

$$S_1 = \{s \in S; a_3 = 0\},$$

$$S_2 = \{s \in S; a_3 \neq 0, \quad b_1 = -b_4\}.$$

Considere o sistema (4.25) sobre o conjunto de parâmetros S_1 , então temos que $g_{2,2,0} = 0$ e pela Proposição 4.2 a origem é um centro sobre a variedade central. Além disso, fazendo $a_3 = 0$ em (4.25) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(a_1x + a_2y), \\ \dot{y} &= x + y(a_1x + a_2y), \\ \dot{z} &= -z + b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2,\end{aligned}\tag{4.26}$$

o qual possui as superfícies algébricas invariante $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ e $f_3 = 0$, onde

$$\begin{aligned}f_1(x, y, z) &= -2a_2^2 - 2ya_1a_2^2 + 2xa_2^3, \\ f_2(x, y, z) &= -2a_2^2 - 4ya_1a_2^2 + 4xa_2^3 + y^2(-2a_2^2a_1^2 + 2a_2^4 + a_2^2) + 4xya_1a_2^3 + x^2a_2^2, \\ f_3(x, y, z) &= -2a_2^2 - 6ya_1a_2^2 + 6xa_2^3 + y^2(-6a_2^2a_1^2 + 6a_2^4 + a_2^2) + 12xya_1a_2^3 + x^2a_2^2 + \\ &\quad + y^3(a_2^2a_1 + 6a_2^4a_1 - 2a_2^2a_1^3) - xy^2a_2(-6a_2^2a_1^2 + 6a_2^4 + a_2^2) + x^2ya_1a_2^2 + \\ &\quad + x^3(-a_2^3 - 4a_2^5),\end{aligned}$$

com cofatores

$$\begin{aligned}K_1(x, y, z) &= a_1x + a_2y, \\ K_2(x, y, z) &= 2a_2y + 2a_1x, \\ K_3(x, y, z) &= 3a_2y + 3a_1x.\end{aligned}$$

Agora como $-K_1 - K_2 + K_3 \equiv 0$, então pelo Teorema 2.7, a função

$$\begin{aligned}H(x, y, z) &= f_1^{-1} \cdot f_2^{-1} \cdot f_3 \\ &= \frac{2(y^2 + x^2)}{2 + 4ya_1 - 4xa_2 + 2y^2a_1^2 - 2y^2a_2^2 - y^2 - 4xya_1a_2 - x^2},\end{aligned}$$

é uma integral primeira para o sistema (4.26) definida na origem.

Daqui em diante estudaremos a estabilidade da origem do sistema (4.25) sobre o conjunto de parâmetros S_2 e para isto vamos definir outros dois subconjuntos.

$$S_{21} = \{s \in S_2; a_1 = 0, a_2 = 0\},$$

$$S_{22} = \{s \in S_2; a_1^2 + a_2^2 \neq 0\}.$$

Suponha que os parâmetros estejam sobre o conjunto S_{21} , deste modo, podemos tomar $a_3 = 1$, pois caso contrário efetuamos a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{aligned}X &= x - y, \\ Y &= x + y, \\ Z &= \frac{1}{a_3}z.\end{aligned}$$

Então sob estas condições o sistema (4.25) torna-se:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + xz, \\ \dot{y} &= x + yz, \\ \dot{z} &= -z - b_4x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Daí $g_{2,2,0} = 0$ e calculando os 5 seguintes coeficientes focais, $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$, $g_{6,6,0}$ e $g_{7,7,0}$, que podem ser visto no Apêndice 5.2, conseguimos decompor o radical do ideal

$$I = \langle g_{3,3,0}, g_{4,4,0}, g_{5,5,0}, g_{6,6,0}, g_{7,7,0} \rangle,$$

em uma interseção finita de ideais primos sobre um corpo de característica zero, a qual consiste das seguintes componentes:

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle b_6 - 2, b_5, b_3 \rangle, \\ I_2 &= \langle b_4, b_2 \rangle, \\ I_3 &= \langle b_3^2 + b_5^2, -2b_3b_4 + b_2b_5, b_2b_3 + 2b_4b_5, b_2^2 + 4b_4^2 \rangle. \end{aligned}$$

Ao analisar os zeros de cada um dos geradores dos ideais acima, temos que $b_6 = -2$ e $b_5 = b_3 = 0$ ou $b_2 = b_4 = 0$ são as condições que anulam os coeficientes focais $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$, $g_{6,6,0}$ e $g_{7,7,0}$. Logo vamos analisar os seguintes subconjuntos de S_{21} :

$$S_{211} = \{s \in S_{21}; b_6 = 2 \text{ e } b_5 = b_3 = 0\},$$

$$S_{212} = \{s \in S_{21}; b_2 = b_4 = 0\}.$$

Considere o sistema (4.27) sobre o conjunto de parâmetro S_{211} . Neste caso a divergência do campo $\mathcal{X}$ associado a este sistema é dada por $\text{div}(\mathcal{X}) = 6z - 1$ e para

$$\begin{aligned} V(u, v, w) &= z + \frac{141}{125} x^2 y^4 b_2^2 b_4 - \frac{644}{125} x^2 y^4 b_4^2 b_2 + \frac{24}{125} x^4 y^2 b_4^2 b_2 + \frac{104}{125} x^4 y^2 b_2^2 b_4 - \\ &- \frac{24}{125} x^5 y b_4^2 b_2 - \frac{24}{125} x^5 y b_2^2 b_4 - 4z^2 - \frac{1}{5} b_2 xy - \frac{8}{125} x^3 y^3 b_2^2 b_4 - \\ &- \frac{8}{125} x^3 y^3 b_4^2 b_2 + \frac{56}{5} xyz^2 b_4 - \frac{4}{5} xyz^2 b_2 - \frac{112}{25} xy^3 z b_4^2 + \frac{28}{25} xy^3 z b_2^2 - \\ &- \frac{32}{25} x^3 y z b_4^2 + \frac{8}{25} x^3 y z b_2^2 + \frac{72}{25} xy^3 b_2 b_4 + \frac{316}{125} xy^5 b_2^2 b_4 + \frac{1}{5} b_4 x^2 - \\ &- \frac{1}{5} b_4 y^2 - \frac{14}{25} xy^3 b_2^2 + \frac{36}{25} xy^3 b_4^2 - \frac{4}{5} x^2 z^2 b_2 - \frac{4}{5} x^2 z^2 b_4 + \\ &+ \frac{464}{125} x^3 y^3 b_4^3 - \frac{36}{125} x^3 y^3 b_2^3 - \frac{268}{125} x^2 y^4 b_4^3 + \frac{17}{125} x^2 y^4 b_2^3 - \frac{8}{125} x^5 y b_4^3 - \\ &- \frac{8}{125} x^5 y b_2^3 - \frac{52}{125} x^4 y^2 b_4^3 + \frac{28}{125} x^4 y^2 b_2^3 + \frac{72}{125} xy^5 b_4^3 - \frac{53}{125} xy^5 b_2^3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{81}{25} y^4 z b_2^2 + \frac{16}{25} y^4 z b_4^2 - \frac{32}{5} y^2 z^2 b_2 - \frac{12}{5} y^2 z^2 b_4 - \frac{4}{25} x^3 y b_4^2 - \\
& - \frac{4}{25} x^3 y b_2^2 + \frac{18}{5} y^2 z b_2 + \frac{8}{5} y^2 z b_4 - \frac{18}{25} y^4 b_2 b_4 + \frac{8}{25} x^4 b_2 b_4 - \\
& - \frac{16}{5} x^2 y^2 b_4^2 + \frac{2}{5} x^2 y^2 b_2^2 + \frac{4}{5} x y b_4 - \frac{89}{125} y^6 b_2^2 b_4 - \frac{44}{125} y^6 b_4^2 b_2 + \\
& + \frac{24}{125} x^6 b_4^2 b_2 + \frac{24}{125} x^6 b_2^2 b_4 + \frac{316}{125} x y^5 b_4^2 b_2 + \frac{72}{25} y^4 z b_2 b_4 - \\
& - \frac{8}{25} x^3 y b_2 b_4 + \frac{6}{5} x^2 y^2 b_2 b_4 + \frac{276}{25} x^2 y^2 z b_4^2 + \frac{16}{25} x^2 y^2 z b_2^2 - \\
& - \frac{36}{5} x y z b_4 + \frac{4}{5} x y z b_2 + 4 z^3 - \frac{4}{25} y^4 b_4^2 - \frac{14}{25} y^4 b_2^2 + \frac{4}{25} x^4 b_4^2 + \\
& + \frac{4}{25} x^4 b_2^2 + \frac{1}{5} x^2 b_2 - \frac{1}{5} y^2 b_2 - \frac{8}{125} y^6 b_4^3 - \frac{53}{125} y^6 b_2^3 + \frac{8}{125} x^6 b_4^3 + \\
& + \frac{8}{125} x^6 b_2^3 - \frac{284}{25} x y^3 z b_2 b_4 - \frac{24}{25} x^3 y z b_2 b_4 - \frac{8}{25} x^2 y^2 z b_2 b_4,
\end{aligned}$$

temos a seguinte igualdade

$$\mathcal{X} \cdot V = \operatorname{div}(\mathcal{X}) \cdot V.$$

Logo V é um múltiplo de Jacobi inverso. Então pelo Teorema 2.9, a origem é um centro para o sistema (4.27). Além disso, a variedade central analítica $W^c \subseteq V^{-1}(0)$.

Suponha que os parâmetros do sistema (4.27) estejam sobre o conjunto S_{212} , ou seja, considere o sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y + xz, \\
\dot{y} &= x + yz, \\
\dot{z} &= -z + b_3 xz + b_5 yz + b_6 z^2.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Note que $z = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (4.28). Consequentemente restrito ao plano $z = 0$ o sistema planar tem a origem como um centro trivial.

Assuma que os parâmetros do sistema (4.26) estejam sobre o espaço S_{22} . Deste modo, podemos tomar $a_2 = 0$, $a_1 = 1$ e $a_3 = 1$, pois caso contrário efetuamos uma mudança de variáveis

$$\begin{aligned}
X &= \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} x - \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} y, \\
Y &= \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} x + \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} y, \\
Z &= \frac{1}{a_3} z.
\end{aligned}$$

Então sob estas condições o sistema (4.25) torna-se

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y + x(y + z), \\
\dot{y} &= x + y(y + z), \\
\dot{z} &= -z - b_4 x^2 + b_2 xy + b_3 xz + b_4 y^2 + b_5 yz + b_6 z^2.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Calculando os 10 primeiros coeficientes focais vemos que $g_{2,2,0} = 0$ e as expressões de $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$, $g_{6,6,0}$, $g_{7,7,0}$, $g_{8,8,0}$, $g_{9,9,0}$, $g_{10,10,0}$ e $g_{11,11,0}$, encontram-se no Apêndice 5.2. Infelizmente não foi possível decompor o radical do ideal

$$I = \langle g_{3,3,0}, g_{4,4,0}, g_{5,5,0}, g_{6,6,0}, g_{7,7,0}, g_{8,8,0}, g_{9,9,0}, g_{10,10,0}, g_{11,11,0} \rangle,$$

em uma interseção finita de ideais primos sobre um corpo de característica zero usando o Singular. No entanto tal decomposição foi possível sobre o corpo finito de característica 32003, a qual consiste das seguintes componentes:

$$I_1 = \langle b_4, b_2 \rangle,$$

$$I_2 = \langle b_3^2 + b_5^2 - 4b_3 + 2b_5 + 5, -2b_3b_4 + b_2b_5 + b_2 + 4b_4, b_2b_3 + 2b_4b_5 - 2b_2 + 2b_4, b_2^2 + 4b_4^2 \rangle,$$

$$I_3 = \langle b_3^2 + b_5^2 - 6b_3 + 2b_5 + 10, b_2b_5 - 2b_3b_4 + b_2 + 6b_4, b_2b_3 + 2b_4b_5 - 3b_2 + 2b_4, b_2^2 + 4b_4^2 \rangle,$$

$$I_4 = \langle b_6 - 2, b_5 + 1, b_3 - 2 \rangle,$$

$$I_5 = \langle b_6 - 2, b_5, b_3 - 2, b_2 + b_4 \rangle,$$

$$I_6 = \langle b_5 + b_6 - 1, b_4, b_3 - b_6, b_2 + b_6 - 1 \rangle.$$

Ao analisar os zeros de cada um dos geradores dos ideais acima, temos que $b_2 = b_4 = 0$ ou $b_6 = 2$, $b_5 = -1$ e $b_3 = 2$ ou $b_6 = 2$, $b_5 = 0$, $b_3 = 2$, $b_2 = -b_4$ ou $b_5 = -b_6 + 1$, $b_4 = 0$, $b_3 = b_6$ e $b_2 = -b_6 + 1$ são as condições que anulam os coeficientes focais $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$, $g_{6,6,0}$, $g_{7,7,0}$, $g_{8,8,0}$, $g_{9,9,0}$, $g_{10,10,0}$ e $g_{11,11,0}$. Logo vamos analisar os seguintes subconjuntos de S_{22} :

$$S_{221} = \{s \in S_{22}; b_2 = b_4 = 0\},$$

$$S_{222} = \{s \in S_{22}; b_6 = 2, b_5 = -1 \text{ e } b_3 = 2\},$$

$$S_{223} = \{s \in S_{22}; b_6 = 2, b_5 = 0, b_3 = 2 \text{ e } b_2 = -b_4\},$$

$$S_{224} = \{s \in S_{22}; b_5 = -b_6 + 1, b_4 = 0, b_3 = b_6, \text{ e } b_2 = -b_6 + 1\}.$$

Considere as condições dos parâmetro para o sistema (4.29) sobre S_{221} , fazendo as devidas substituições obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(x + z), \\ \dot{y} &= x + y(x + z), \\ \dot{z} &= -z + b_3xz + b_5yz + b_6z^2, \end{aligned} \tag{4.30}$$

que neste caso $z = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (4.30). Consequentemente restrito ao plano $z = 0$ o sistema planar tem a origem como um centro trivial.

Considere o sistema (4.29) sobre o conjunto de parâmetros S_{222} , fazendo as devidas substituições obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(x + z), \\ \dot{y} &= x + y(x + z), \\ \dot{z} &= -z - b_4x^2 + b_2xy + 2xz + b_4y^2 - yz + 2z^2,\end{aligned}\tag{4.31}$$

o qual possui as superfícies algébricas invariantes $f_4 = 0$ e $f_5 = 0$ onde

$$\begin{aligned}f_4(x, y, z) &= 1 - x^2 + x^4 + 8xyb_4z - 8yz + y^2z(-2 - 4b_2) + 2zx^2 - 2x^2y + x^2y^2(-b_2 + \\ &\quad + 4b_4^2 + 1) - 4xyb_4 - 8xy^2b_4 - 2xy^3b_4(1 + 2b_2) + 2x^3yb_4 + y^3(4b_2 + 2) - 4z + \\ &\quad + 4y + 4z^2 + y^2(2b_2 + 5) + y^4(b_2^2 + b_2 + 1), \\ f_5(x, y, z) &= 1 - x^2 - 2xyb_4 - 2z + 2y + y^2b_2,\end{aligned}$$

com cofatores

$$\begin{aligned}K_4(x, y, z) &= 4z + 4x, \\ K_5(x, y, z) &= 2z + 2x.\end{aligned}$$

Agora, como $K_4 - 2K_5 \equiv 0$, pelo Teorema 2.7 a função $f_4^{-1} \cdot f_5^{-2}$ é um integral primeira para o sistema (4.31) definida na origem. Em particular,

$$\begin{aligned}H(x, y, z) &= f_4^{-1} \cdot f_5^{-2} - 1 \\ &= \frac{(x^2 + y^2)(-2xyb_4 + y^2b_2 + 2y - 2z + y^2 + 1)}{(1 - x^2 - 2xyb_4 - 2z + 2y + y^2b_2)^2},\end{aligned}$$

também é uma integral primeira para o sistema (4.31) definida na origem, cuja série de Taylor neste ponto tem a forma $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + \dots$. Daí, pelo Teorema 2.2, a origem é um centro sobre a variedade central do sistema.

Considere as condições dos parâmetro para o sistema (4.29) sobre S_{223} , fazendo as devidas substituições obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(x + z), \\ \dot{y} &= x + y(x + z), \\ \dot{z} &= -z - b_4x^2 - b_4xy + 2xz + b_4y^2 + 2z^2,\end{aligned}\tag{4.32}$$

o qual possui uma superfície algébrica invariante $f_6 = 0$, onde

$$f_6(x, y, z) = z + xyb_4,\tag{4.33}$$

com cofator $K_6(x, y, z) = -1 + 2z + 2x$. Note que a superfície algébrica invariante $f_6 = 0$ contém a origem e é tangente ao auto espaço central E^c neste ponto, pois E^c é gerado pelos vetores

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (-1, 1, 0),$$

e o gradiente $\nabla f_6(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$ é ortogonal a estes vetores. Portanto $f_6 = 0$ é a uma variedade central W^c do sistema. Assim, resolvendo (4.33) em função de z e substituindo nas duas primeiras equações de (4.32), obtemos o seguinte sistema no plano

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(y + -b_4xy), \\ \dot{y} &= x + y(y + -b_4xy).\end{aligned}\tag{4.34}$$

Sejam $R(x, y) = (-x, y)$ e $\mathcal{X}(x, y)$ o campo associado ao sistema (4.34), então temos

$$\begin{aligned}DR(x, y)\mathcal{X}(x, y) &= (-\dot{x}, \dot{y}) \\ &= (y - x(y + -b_4xy), x + y(y + -b_4xy)) \\ &= -(-y + x(y + -b_4xy), -x - y(y + -b_4xy)) \\ &= -\mathcal{X}(R(x, y)).\end{aligned}$$

Portanto temos que o sistema (4.34) é reversível, logo pelo Teorema 2.6 a origem do sistema (4.34) é um centro.

Suponha que os parâmetros do sistema (4.29) estejam sobre o conjunto S_{224} , fazendo as devidas substituições obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(y + z), \\ \dot{y} &= x + y(y + z), \\ \dot{z} &= -z - (1 - b_6)xy + b_6xz + (1 - b_6)yz + b_6z^2.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Para a análise deste sistema vamos definir dois subconjuntos:

$$S_{2241} = \{s \in S_{224}; b_6 = 0\},$$

$$S_{2242} = \{s \in S_{224}; b_6 \neq 0\}.$$

Com os parâmetros do sistema (4.35) sobre o conjunto S_{2241} , este possui um fator exponencial e uma superfície algébrica invariante dadas por:

$$f_7(x, y, z) = e^{-2y+2z},$$

$$f_8(x, y, z) = y^2 + x^2,$$

com os respectivos cofatores $K_7(x, y, z) = -2z - 2x$ e $K_8(x, y, z) = 2z + 2x$. Agora como $K_7 + K_8 \equiv 0$, então pelo Teorema 2.7 a função

$$\begin{aligned}H(x, y, z) &= f_7 \cdot f_8 \\ &= e^{-2y+2z}(y^2 + x^2),\end{aligned}$$

é uma integral primeira para sistema. Além disso, a sua expansão em série Taylor é dada por $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + \dots$ e, pelo Teorema 2.2, a origem é um centro sobre a variedade central do sistema.

Finalmente considere os parâmetros do sistema (4.35) sobre o conjunto S_{2242} . Neste caso, o sistema possui as superfícies algébricas invariantes $f_9 = 0$ e $f_{10} = 0$ dadas por

$$f_9(x, y, z) = y^2 + x^2,$$

$$f_{10}(x, y, z) = 1 - zb_6 + yb_6,$$

com cofatores $K_9(x, y, z) = 2z + 2x$ e $K_{10}(x, y, z) = b_6z + b_6x$. Como $K_9 - \frac{1}{b_6}K_{10} \equiv 0$, pelo Teorema 2.7, a função

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= f_9 \cdot f_{10}^{\frac{-2}{b_6}} \\ &= \frac{y^2 + x^2}{(1 - b_6z + yb_6)^{(2/b_6)}}, \end{aligned}$$

é uma integral primeira para o sistema (4.35) e possui expansão em série de Taylor da forma $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + \dots$. Daí, como no caso anterior, a origem é um centro sobre a variedade central. $\square$

Não podemos afirmar que as condições obtidas na proposição acima resolvem completamente o problema do centro-foco para a família (4.25). A explicação é a mesma feita logo após a demonstração da Proposição 4.5. Todavia, conjecturamos que as condições da Proposição 4.6 são necessárias e suficientes para que a origem do sistema (4.25) seja um centro sobre a variedade central.

4.4 Caso: $F_2(x, y, z) = R_2(x, y, z)$.

Teorema 4.7. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + xF_2(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + yF_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + F_2(x, y, z) \end{aligned} \tag{4.36}$$

onde $F_2(x, y, z) = b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2$ e denote por $S = \{(\lambda, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) \in \mathbb{R}^7; \lambda = 1\}$ o conjunto de seus parâmetros. Então o sistema (4.36) restrito à variedade central tem um centro rígido na origem se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:

$$(a) \ b_1 = -b_4, \ b_3 = b_5 = b_6 = 0,$$

$$(b) \ b_1 = b_2 = b_4 = 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.4 a origem é um centro rígido sobre a variedade central para o sistema (4.36), se, e somente se, os coeficientes focais do sistema são todos nulos. Para facilitar os cálculos e a análise dos coeficientes focais do sistema (4.36) vamos considerar dois subconjuntos de S :

$$S_1 = \{s \in S; \ b_3 = 0, \ b_5 = 0\},$$

$$S_2 = \{s \in S; \ b_3^2 + b_5^2 \neq 0\}.$$

Considere o sistema (4.36) sobre o conjunto de parâmetro S_1 , então fazendo as devidas substituições dos parâmetros em (4.36), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(b_1x^2 + b_2xy + b_4y^2 + b_6z^2), \\ \dot{y} &= x + y(b_1x^2 + b_2xy + b_4y^2 + b_6z^2), \\ \dot{z} &= -z + b_1x^2 + b_2xy + b_4y^2 + b_6z^2, \end{aligned} \tag{4.37}$$

o qual tem o primeiro e segundo coeficientes focais dados por:

$$\begin{aligned} g_{2,2,0} &= b_1 + b_4, \\ g_{3,3,0} &= 2(b_2^2 + 4b_4^2)b_6. \end{aligned}$$

Logo, $g_{2,2,0} = g_{3,3,0} = 0$ se, e somente se, os parâmetros do sistema (4.37) pertence a um dos seguintes subconjuntos de S_1 .

$$S_{11} = \{s \in S_1; \ b_1 = -b_4 \quad \text{e} \quad b_6 = 0\},$$

$$S_{12} = \{s \in S_1; \ b_6 \neq 0 \quad \text{e} \quad b_1 = b_4 = b_2 = 0\}.$$

Suponha que os parâmetros estejam sobre S_{11} , então pela Proposição 4.2 a origem é um centro sobre a variedade central. Além disso, o sistema (4.37) possui as superfícies algébricas invariante $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$, onde

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 1 + y^2(1 + b_2) - 2b_4xy + x^2, \\ f_2(x, y, z) &= y^2 + x^2, \end{aligned}$$

com cofatores

$$\begin{aligned} K_1(x, y, z) &= 2b_4y^2 + 2b_2xy - 2b_4x^2, \\ K_2(x, y, z) &= 2b_4y^2 + 2b_2xy - 2b_4x^2. \end{aligned}$$

Agora, como $-K_1 + K_2 \equiv 0$, pelo Teorema 2.7 a função

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= f_1^{-1} \cdot f_2 \\ &= \frac{y^2 + x^2}{1 + y^2 + y^2 b_2 - 2b_4 xy + x^2}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

é uma integral primeira para o sistema (4.37) definida na origem.

Suponha que os parâmetros estejam sobre S_{12} , então neste caso $z = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (4.37). Consequentemente, restrito ao plano $z = 0$ obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x, \end{aligned} \quad (4.39)$$

cuja a origem é um centro.

Finalmente considere os parâmetros sobre S_2 , neste caso podemos assumir que $b_3 = 1$ e $b_5 = 1$, pois caso contrário efetuamos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} X &= \frac{(b_5 + b_3)}{b_3^2 + b_5^2} x + \frac{(b_3 - b_5)}{b_3^2 + b_5^2} y, \\ Y &= -\frac{(b_3 - b_5)}{b_3^2 + b_5^2} x + \frac{(b_3 + b_5)}{b_3^2 + b_5^2} y \\ Z &= z. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Então sob estas condições o sistema (4.36) torna-se:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(b_1 x^2 + b_2 xy + xz + b_4 y^2 + yz + b_6 z^2), \\ \dot{y} &= x + y(b_1 x^2 + b_2 xy + xz + b_4 y^2 yz + b_6 z^2), \\ \dot{z} &= -z + b_1 x^2 + b_2 xy + xz + b_4 y^2 + yz + b_6 z^2, \end{aligned} \quad (4.41)$$

Calculando os 5 primeiros coeficientes focais $g_{2,2,0}, g_{3,3,0}, g_{4,4,0}, g_{5,5,0}$ e $g_{6,6,0}$, obtemos

$$\begin{aligned} g_{2,2,0} &= b_1 + b_4, \\ g_{3,3,0} &= \frac{1}{20}(13b_1 - b_2 + 7b_4 + (11b_1^2 + b_2^2 + 18b_1 b_4 + 11b_4^2)b_6), \\ g_{4,4,0} &= \frac{1}{200}(b_1^3(-150 + 223b_6 + 114b_6^2) - 2b_2(5 + b_4(39 + 7b_6)) + b_2^2(10(-1 + b_6) + \\ &\quad + b_4(-150 - 27b_6 + 14b_6^2)) + b_4(20 + 2b_4(68 + 69b_6) + b_4^2(-150 + 223b_6 + 114b_6^2)) \\ &\quad + b_1^2(44 + 282b_6 + b_4(150 + 777b_6 + 286b_6^2)) + b_1(40 - 2b_2(39 + 7b_6) + 20b_4(11 + \\ &\quad + 19b_6) + b_2^2(-150 - 27b_6 + 14b_6^2) + b_4^2(150 + 777b_6 + 286b_6^2))), \\ g_{5,5,0} &= \frac{1}{2448000}(18b_2^4 b_6(-7125 - 1046b_6 + 283b_6^2) - 3b_2^3(-54835 + 14424b_6 + \\ &\quad + 3396b_6^2) + 6b_1^4 b_6(834609 + 1360942b_6 + 297873b_6^2) + b_1^3(-31709963 + 72(72958 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 551125b_4)b_6 + 12(536013 + 2828276b_4)b_6^2 + 6099624b_4b_6^3 - 3b_2(9900 + \\
& + 4b_4(73069 + 32943b_6) + b_4^2(1125713 + 1052784b_6 + 87444b_6^2)) + b_2^2(34182 + \\
& + 34794b_6 + 36b_4^2b_6(-136461 - 8866b_6 + 7287b_6^2) + b_4(-4288625 - 1134216b_6 + \\
& + 395316b_6^2)) + b_4(42300 + 6b_4(191123 + 167241b_6) + 6b_4^3b_6(834609 + 1360942b_6 + \\
& + 297873b_6^2) + b_4^2(-5445917 + 8113104b_6 + 3041604b_6^2)) + b_1^2(6(18403 + \\
& + 461001b_6) + 36b_2^2b_6(-136461 - 8866b_6 + 7287b_6^2) - 3b_2(1125713 + 1052784b_6 + \\
& + 87444b_6^2) + 36b_4^2b_6(1869297 + 1423502b_6 + 241841b_6^2) + b_4(-48780823 + \\
& + 24265872b_6 + 13864140b_6^2)) + b_1(80100 + 36b_4(48719 + 91813b_6) + \\
& + 24b_4^3b_6(1653375 + 1414138b_6 + 254151b_6^2) + b_4^2(-25447297 + 26016048b_6 + \\
& + 10934100b_6^2) + b_2^2(-5021255 - 72(19607 + 122211b_4)b_6 + (510444 - \\
& - 487728b_4)b_6^2 + 483912b_4b_6^3) - 6b_2(181622 + 85074b_6 + b_4(1235383 + 1023936b_6 + \\
& + 80652b_6^2))))), \\
g_{6,6,0} = & \frac{1}{5410080000}(b_1^5(26627737500 + 61550205444b_6 + 93586561475b_6^2 + \\
& + 44121625275b_6^3 + 5668057044b_6^4) - b_2^3(102(-9197655 - 457249b_6 + 774360b_6^2) + \\
& + b_4(339093365 + 527414670b_6 + 1078892802b_6^2 + 70163496b_6^3)) - b_2(8139600 + \\
& + 30b_4(27983437 + 17844444b_6) + 2b_4^2(93292513 + 5225744043b_6 + 1037138256b_6^2) + \\
& + b_4^3(-45394071151 + 30551059386b_6 + 15845525826b_6^2 + 969318792b_6^3)) + \\
& + 9b_2^4(17(2483425 - 4562980b_6 - 1331166b_6^2 + 258120b_6^3) + b_4(704437500 + \\
& + 212735900b_6 - 157579869b_6^2 - 17844541b_6^3 + 3897972b_6^4)) + b_2^2(2040(76894 + \\
& + 23349b_6) + 6b_4(-1280299941 - 247397135b_6 + 95069178b_6^2) + b_4^2(576131515 - \\
& - 52418159450b_6 - 6016280292b_6^2 + 2074276512b_6^3) + 6b_4^3(5494612500 - \\
& - 4187538576b_6 - 4009075391b_6^2 + 160359901b_6^3 + 161553132b_6^4)) + b_4(10067400 + \\
& + 30b_4(29989481 + 27180360b_6) + 2b_4^2(-8440451587 + 8777282949b_6 + \\
& + 3159508626b_6^2) + 2b_4^3(-34278308461 + 3254626811b_6 + 29266808637b_6^2 + \\
& + 5974107372b_6^3) + b_4^4(26627737500 + 61550205444b_6 + 93586561475b_6^2 + \\
& + 44121625275b_6^3 + 5668057044b_6^4)) + b_1^4(-55120705108 - 219689534462b_6 + \\
& + 54207262410b_6^2 + 25557703416b_6^3 + b_4(1267987500 + 408251953044b_6 + \\
& + 564150616759b_6^2 + 216759488751b_6^3 + 24463010052b_6^4)) + b_1(17778600 + \\
& + 12240b_4(100653 + 238579b_6) + 2b_4^2(-53391648703 + 29068334277b_6 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 13646537694b_6^2) - b_2^3(339093365 + 527414670b_6 + 1078892802b_6^2 + \\
& + 70163496b_6^3) + b_4^3(-263095081934 + 9510864204b_6 + 253873235400b_6^2 + \\
& + 53105241600b_6^3) + 9b_2^4(704437500 + 212735900b_6 - 157579869b_6^2 - \\
& - 17844541b_6^3 + 3897972b_6^4) + b_4^4(1267987500 + 408251953044b_6 + \\
& + 564150616759b_6^2 + 216759488751b_6^3 + 24463010052b_6^4) - b_2(90(11667647 + \\
& + 9727044b_6) + 68b_4(-2903335 + 375157887b_6 + 70713000b_6^2) + \\
& + b_4^2(-137538586913 + 89543519478b_6 + 43221006270b_6^2 + 2627302392b_6^3)) + \\
& + 2b_2^2(-5306437353 - 1335643419b_6 + 455257854b_6^2 + 34b_4(171497115 - \\
& - 1754033900b_6 - 210310146b_6^2 + 70713000b_6^3) + 9b_4^2(2676862500 - \\
& - 5038482176b_6 - 3378755915b_6^2 + 231738065b_6^3 + 145961244b_6^4))) + \\
& + b_1^3(-b_2(-45394071151 + 30551059386b_6 + 15845525826b_6^2 + 969318792b_6^3) + \\
& + 6b_2^2(5494612500 - 4187538576b_6 - 4009075391b_6^2 + 160359901b_6^3 + \\
& + 161553132b_6^4) + 2(-70952441717 + 3625387695b_6 + 10243641186b_6^2 + \\
& + b_4(-145210135133 - 181397208342b_6 + 130406015892b_6^2 + 38210369760b_6^3) + \\
& + b_4^2(-13947862500 + 473819400756b_6 + 600913770883b_6^2 + 213550362987b_6^3 + \\
& + 22805026452b_6^4))) + b_1^2(-b_2(-4136655046 + 14872690638b_6 + 3050146368b_6^2 + \\
& + b_4(-137538586913 + 89543519478b_6 + 43221006270b_6^2 + 2627302392b_6^3)) + \\
& + b_2^2(14125384505 - 72441233270b_6 - 9914156820b_6^2 + 3050146368b_6^3 + \\
& + 18b_4(2676862500 - 5038482176b_6 - 3378755915b_6^2 + 231738065b_6^3 + \\
& + 145961244b_6^4)) + 2(15(-15151745 + 88275888b_6) + b_4(-110041488713 + \\
& + 26290247079b_6 + 20050468974b_6^2) + 17b_4^2(-12463488405 - 4449219020b_6 + \\
& + 11726049798b_6^2 + 2725057080b_6^3) + b_4^3(-13947862500 + 473819400756b_6 + \\
& + 600913770883b_6^2 + 213550362987b_6^3 + 22805026452b_6^4))).
\end{aligned}$$

A Base de Groebner do ideal gerado pelos coeficientes focais acima é dada pelos seguintes polinômios

- $L_1 = b_4$,
- $L_2 = b_1$,
- $L_3 = b_2$.

Logo, concluímos que os coeficientes focais $g_{2,2,0}$, $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$ e $g_{6,6,0}$ são nulos se, e somente se, $b_1 = b_2 = b_4 = 0$. Assumindo estas condições sobre (4.41) temos o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(xz + yz + b_6 z^2), \\ \dot{y} &= x + y(xz + yz + b_6 z^2), \\ \dot{z} &= -z + xz + yz + b_6 z^2.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Neste caso $z = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (4.42) e, restrito ao plano $z = 0$, temos o sistema planar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x.\end{aligned}\tag{4.43}$$

Portanto a origem é um centro. $\square$

Analisando os resultados obtidos nos Teoremas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, conjecturamos que é possível resumi-los em um resultado mais general.

Conjectura 4.1. *Considere o sistema (4.1) com $\frac{\partial R_m}{\partial z}(x, y, z) \equiv 0$ (isto é, $R_m(x, y, z) = R_m(x, y)$), $n \geq 1$ e $m \geq 2$. Então a origem é um centro rígido sobre a variedade central do sistema se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:*

(a) $R_m(x, y) \equiv 0$ e

$$\int_0^{2\pi} F_n(\cos(s), \sin(s), 0) ds = 0;$$

(b) $F_n(x, y, z) = F_n(x, y)$ e

$$\int_0^{2\pi} F_n(\cos(s), \sin(s)) ds = 0.$$

Pelo Teorema 4.6, a condição $\frac{\partial R_m}{\partial z}(x, y, z) \equiv 0$ não pode ser suprimida na conjectura acima.

O Teorema 4.7 também nos leva a conjecturar o seguinte.

Conjectura 4.2. *Considere o sistema (4.1) com $R_m(x, y, z) = F_n(x, y, z)$. Então a origem é um centro rígido sobre a variedade central do sistema se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:*

(a) $F_n(x, y, 0) \equiv 0;$

(b) $\frac{\partial F_n}{\partial z}(x, y, 0) \equiv 0$ e

$$\int_0^{2\pi} F_n(\cos(s), \sin(s), 0) ds = 0.$$

Sistemas Rígidos Não-Homogêneos em $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo estudaremos alguns sistemas da forma (3.12) com R um polinômio homogêneo de grau 2 em três ou duas variáveis e $F(x, y, z) = F_{2p+1}(z) + F_{2q}(z)$, onde F_{2p+1} é um polinômio ímpar na variável z de grau $2p + 1$ e F_{2q} é um polinômio par na variável z de grau $2q$.

4.5 Caso: $F_{2q}(z) \equiv 0$, $p = 1$ e $R(x, y, z) = R_2(x, y, z)$.

Teorema 4.8. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xF_3(z), \\ \dot{y} &= x + yF_3(z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R_2(x, y, z)\end{aligned}\tag{4.44}$$

onde $F_3(z) = a_1z + a_3z^3$, $R_2(x, y, z) = b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2$ e denote por $S = \{(\lambda, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, a_1, a_3) \in \mathbb{R}^9; \lambda = 1\}$ o conjunto de seus parâmetros. Então o sistema (4.44) restrito a variedade central tem um centro rígido na origem se, e somente se, uma das seguintes condições são satisfeitas:

$$(a) \quad b_1 = -b_4, \quad a_3 = b_3 = b_5 = 0 \quad \text{e} \quad b_6 = 2a_1,$$

$$(b) \quad b_1 = b_2 = b_4 = 0,$$

$$(b) \quad a_1 = a_3 = 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.4 a origem é um centro rígido sobre a variedade central para o sistema (4.44) se, e somente se, os coeficientes focais do sistema são todos nulos. Para facilitar os cálculos e a análise dos coeficientes focais do sistema (4.44) vamos

considerar dois subconjuntos de S :

$$S_1 = \{s \in S; b_3 = 0 \text{ e } b_5 = 0\},$$

$$S_2 = \{s \in S; b_3^2 + b_5^2 \neq 0\}.$$

Considere o sistema (4.44) sobre o conjunto de parâmetro S_1 , então fazendo as devidas substituições dos parâmetros em (4.44), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(a_1z + a_3z^3), \\ \dot{y} &= x + y(a_1z + a_3z^3), \\ \dot{z} &= -z + b_1x^2 + b_2xy + b_4y^2 + b_6z^2,\end{aligned}\tag{4.45}$$

Calculando os 6 primeiros coeficientes focais, $g_{2,2,0}$, $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$, $g_{6,6,0}$ e $g_{7,7,0}$, obtemos

$$\begin{aligned}g_{2,2,0} &= a_1(b_1 + b_4), \\ g_{3,3,0} &= \frac{1}{20}a_1(2a_1(9b_1^2 - b_2^2 + 22b_1b_4 + 9b_4^2) + (11b_1^2 + b_2^2 + 18b_1b_4 + 11b_4^2)b_6), \\ g_{4,4,0} &= \frac{1}{200}(b_1 + b_4)(5a_3(13b_1^2 + 3b_2^2 + 14b_1b_4 + 13b_4^2) + 4a_1^3(98b_1^2 - 27b_2^2 + 304b_1b_4 + \\ &+ 98b_4^2) + a_1^2(431b_1^2 - 19b_2^2 + 938b_1b_4 + 431b_4^2)b_6 + 2a_1(57b_1^2 + 7b_2^2 + 86b_1b_4 + \\ &+ 57b_4^2)b_6^2), \\ g_{5,5,0} &= \frac{1}{408000}(2a_1^4(1677931b_1^4 + 10299b_2^4 + 8254804b_1^3b_4 - 385770b_2^2b_4^2 + 1677931b_4^4 - \\ &- 30b_1^2(12859b_2^2 - 443951b_4^2) + b_1(-853932b_2^2b_4 + 8254804b_4^3)) + 45a_3(4387b_1^4 + \\ &+ 35b_2^4 + 13460b_1^3b_4 + 1022b_2^2b_4^2 + 4387b_4^4 + 2b_1^2(511b_2^2 + 9353b_4^2) + 4b_1(441b_2^2b_4 + \\ &+ 3365b_4^3))b_6 + 3a_1^3(1444519b_1^4 - 2249b_2^4 + 6536996b_1^3b_4 - 189730b_2^2b_4^2 + \\ &+ 1444519b_4^4 + b_1^2(-189730b_2^2 + 10148970b_4^2) + b_1(-361468b_2^2b_4 + 6536996b_4^3))b_6 + \\ &+ 2a_1^2(967535b_1^4 - 1737b_2^4 + 3848948b_1^3b_4 + 5298b_2^2b_4^2 + 967535b_4^4 + 6b_1^2(883b_2^2 + \\ &+ 955839b_4^2) + 4b_1(6123b_2^2b_4 + 962237b_4^3))b_6^2 + a_1(40a_3(13585b_1^4 - 117b_2^4 + \\ &+ 54868b_1^3b_4 - 132b_2^2b_4^2 + 13585b_4^4 + b_1^2(-132b_2^2 + 80694b_4^2) + b_1(672b_2^2b_4 + \\ &+ 54868b_4^3)) + 3(99291b_1^4 + 283b_2^4 + 338868b_1^3b_4 + 14574b_2^2b_4^2 + 99291b_4^4 + \\ &+ 2b_1^2(7287b_2^2 + 241841b_4^2) + 4b_1(6721b_2^2b_4 + 84717b_4^3))b_6^3)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{6,6,0} &= \frac{1}{5410080000} (b_1 + b_4) (4a^5 (60774396835b_1^4 + 1039527963b_2^4 + 308198868148b_1^3b_4 \\
&- 16275320202b_2^2b_4^2 + 60774396835b_4^4 - 6b_1^2(2712553367b_2^2 - 85246898339b_4^2) + \\
&+ b_1(-40866864108b_2^2b_4 + 308198868148b_4^3)) + 78a^4(4801716413b_1^4 + 12260445b_2^4 \\
&+ 22250198220b_1^3b_4 - 760833142b_2^2b_4^2 + 4801716413b_4^4 + b_1^2(-760833142b_2^2 + \\
&+ 35093130734b_4^2) - 4b_1(404937461b_2^2b_4 - 5562549555b_4^3))b_6 + 3510a_3(1120337b_1^4 + \\
&+ 15201b_2^4 + 3407196b_1^3b_4 + 268538b_2^2b_4^2 + 1120337b_4^4 + b_1^2(268538b_2^2 + 4816934b_4^2) + \\
&+ 4b_1(103867b_2^2b_4 + 851799b_4^3))b_6^2 + a^3(213433561007b_1^4 - 787381497b_2^4 + \\
&+ 904453825988b_1^3b_4 - 12679895490b_2^2b_4^2 + 213433561007b_4^4 - 30b_1^2(422663183b_2^2 - \\
&- 45648080867b_4^2) + b_1(-19060739004b_2^2b_4 + 904453825988b_4^3))b_6^2 + \\
&+ a^2(10a_3(4236317945b_1^4 - 398491926b_1^2b_2^2 - 73811871b_2^4 + 18539239484b_1^3b_4 - \\
&- 206488884b_1b_2^2b_4 + 27424853142b_1^2b_4^2 - 398491926b_2^2b_4^2 + 18539239484b_1b_4^3 + \\
&+ 4236317945b_4^4) + 39(1418008525b_1^4 + 69517154b_1^2b_2^2 - 3196371b_2^4 + \\
&+ 5393965484b_1^3b_4 + 164605276b_1b_2^2b_4 + 7900771982b_1^2b_4^2 + 69517154b_2^2b_4^2 + \\
&+ 5393965484b_1b_4^3 + 1418008525b_4^4)b_6^3) + 3a_1b_6(85a_3(99594357b_1^4 - 771603b_2^4 + \\
&+ 373482412b_1^3b_4 + 6223754b_2^2b_4^2 + 99594357b_4^4 + b_1^2(6223754b_2^2 + 535430462b_4^2) + \\
&+ 4b_1(4655083b_2^2b_4 + 93370603b_4^3)) + 156(12111233b_1^4 + 74961b_2^4 + 40160156b_1^3b_4 + \\
&+ 2071194b_2^2b_4^2 + 12111233b_4^4 + 6b_1^2(345199b_2^2 + 9549537b_4^2) + 4b_1(885675b_2^2b_4 + \\
&+ 10040039b_4^3))b_6^3)), \\
g_{7,7,0} &= \frac{1}{1769528966400000} (16a^6(34849339676330787b_1^6 - 7220143589022b_2^6 + \\
&+ 252959146793687570b_1^5b_4 + 864503584399479b_2^4b_4^2 - 10965777183925712b_2^2b_4^4 + \\
&+ 34849339676330787b_4^6 + b_1^4(-10965777183925712b_2^2 + 712024587438164861b_4^2) + \\
&+ b_1^3(-50779137410898680b_2^2b_4 + 988291649831313564b_4^3) + b_1^2(864503584399479b_2^4 \\
&- 79973287346218992b_2^2b_4^2 + 712024587438164861b_4^4) + 2b_1(907824445933611b_2^4b_4 \\
&- 25389568705449340b_2^2b_4^3 + 126479573396843785b_4^5)) + \\
&+ 8a^5(120717524905180351b_1^6 + 4061776896801b_2^6 + 820866945399451198b_1^5b_4 + \\
&+ 969406365924177b_2^4b_4^2 - 24140448992092273b_2^2b_4^4 + 120717524905180351b_4^6 + \\
&+ b_1^4(-24140448992092273b_2^2 + 2212520559305968465b_4^2) - \\
&- 4b_1^3(26079261723940627b_2^2b_4 - 756120580975499993b_4^3) + b_1^2(969406365924177b_2^4 \\
&- 160158230516294022b_2^2b_4^2 + 2212520559305968465b_4^4) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2b_1(945035704543371b_2^4b_4 - 52158523447881254b_2^2b_4^3 + \\
& + 410433472699725599b_4^5))b_6 + 2a_1^4(327723367232993127b_1^6 + 13896524267847b_2^6 \\
& + 2096385366903957398b_1^5b_4 - 528670027074939b_2^4b_4^2 - 32511290876499659b_2^2b_4^4 + \\
& + 327723367232993127b_4^6 + b_1^4(-32511290876499659b_2^2 + 5427572442085692425b_4^2) \\
& + b_1^3(-125815803289399124b_2^2b_4 + 7316931507276314100b_4^3) + b_1^2(-528670027074939b_2^4 \\
& - 185941991660942274b_2^2b_4^2 + 5427572442085692425b_4^4) - 2b_1(612049172682021b_2^4b_4 + \\
& + 62907901644699562b_2^2b_4^3 - 1048192683451978699b_4^5))b_6^2 + 20280a_3(53465a_3(488617b_1^6 \\
& - 477b_2^6 + 2764674b_1^5b_4 - 5337b_2^4b_4^2 + 41757b_2^2b_4^4 + 488617b_4^6 + 93b_1^4(449b_2^2 + 70707b_4^2) + \\
& + 4b_1^3(52431b_2^2b_4 + 2157479b_4^3) - 9b_1^2(593b_2^4 - 34782b_2^2b_4^2 - 730639b_4^4) - 6b_1(825b_2^4b_4 - \\
& - 34954b_2^2b_4^3 - 460779b_4^5)) + 6(16645440841b_1^6 + 3604595b_2^6 + 82993820994b_1^5b_4 + \\
& + 302539767b_2^4b_4^2 + 4219706013b_2^2b_4^4 + 16645440841b_4^6 + 3b_1^4(1406568671b_2^2 + \\
& + 62335650893b_4^2) + 12b_1^3(1204875493b_2^2b_4 + 20090537581b_4^3) + 3b_1^2(100846589b_2^4 + \\
& + 6883540122b_2^2b_4^2 + 62335650893b_4^4) + 6b_1(93637399b_2^4b_4 + 2409750986b_2^2b_4^3 + \\
& + 13832303499b_4^5))b_6^3) + 6a_1b_6^2(5a_3(738994554152193b_1^6 - 114548625633b_2^6 + \\
& + 4089199123237730b_1^5b_4 - 3045251052969b_2^4b_4^2 + 86192050418857b_2^2b_4^4 + \\
& + 738994554152193b_4^6 + b_1^4(86192050418857b_2^2 + 9657121488733679b_4^2) + \\
& + 4b_1^3(92282552524795b_2^2b_4 + 3155291237834199b_4^3) + b_1^2(-3045251052969b_2^4 + \\
& + 560377985330262b_2^2b_4^2 + 9657121488733679b_4^4) + b_1(-4715918598342b_2^4b_4 + \\
& + 369130210099180b_2^2b_4^3 + 4089199123237730b_4^5)) + 2028(234665645151b_1^6 + \\
& + 18440053b_2^6 + 1223473412302b_1^5b_4 + 2352959553b_2^4b_4^2 + 46130114651b_2^2b_4^4 + \\
& + 234665645151b_4^6 + b_1^4(46130114651b_2^2 + 2819550195697b_4^2) + 20b_1^3(8284839109b_2^2b_4 + \\
& + 183015234685b_4^3) + b_1^2(2352959553b_2^4 + 240018457602b_2^2b_4^2 + 2819550195697b_4^4) + \\
& + 2b_1(2242319235b_2^4b_4 + 82848391090b_2^2b_4^3 + 611736706151b_4^5))b_6^3) + \\
& + 2a_1^2b_6(10a_3(4149440797831898b_1^6 - 381317552811b_2^6 + 24881286560436152b_1^5b_4 - \\
& - 55636478340900b_2^4b_4^2 + 3839556638809b_2^2b_4^4 + 4149440797831898b_4^6 + \\
& + b_1^4(3839556638809b_2^2 + 61289995407803126b_4^2) + b_1^3(460450053282436b_2^2b_4 + \\
& + 81140703613777648b_4^3) + b_1^2(-55636478340900b_2^4 + 894917750752326b_2^2b_4^2 + \\
& + 61289995407803126b_4^4) + b_1(-106697146048068b_2^4b_4 + 460450053282436b_2^2b_4^3 + \\
& + 24881286560436152b_4^5)) + 507(38077524479433b_1^6 - 1653260421b_2^6 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 214891397172194b_1^5b_4 - 43735143753b_2^4b_4^2 + 3393437426101b_2^2b_4^4 + \\
& + 38077524479433b_4^6 + b_1^4(3393437426101b_2^2 + 516168106073831b_4^2) + \\
& + 4b_1^3(3480907713607b_2^2b_4 + 169703568857271b_4^3) + b_1^2(-43735143753b_2^4 + \\
& + 20981030356446b_2^2b_4^2 + 516168106073831b_4^4) + b_1(-67631162454b_2^4b_4 + \\
& + 13923630854428b_2^2b_4^3 + 214891397172194b_4^5))b_6^3) + a_1^3(80a_3(1328226381306816b_1^6 + \\
& + 376683672105b_2^6 + 8480735203531532b_1^5b_4 - 12575468282370b_2^4b_4^2 - \\
& - 127844228922659b_2^2b_4^4 + 1328226381306816b_4^6 + b_1^4(-127844228922659b_2^2 + \\
& + 21767695889846864b_4^2) + b_1^3(-410773169431676b_2^2b_4 + 29206266380229576b_4^3) - \\
& - 2b_1^2(6287734141185b_2^4 + 273888532378497b_2^2b_4^2 - 10883847944923432b_4^4) - \\
& - 4b_1(7417785157500b_2^4b_4 + 102693292357919b_2^2b_4^3 - 2120183800882883b_4^5)) + \\
& + 17(13063226976306953b_1^6 - 301440765249b_2^6 + 78697339246926770b_1^5b_4 - \\
& - 61664224743465b_2^4b_4^2 - 79494347271263b_2^2b_4^4 + 13063226976306953b_4^6 + b_1^4(- \\
& - 79494347271263b_2^2 + 196233686605049063b_4^2) + 4b_1^3(43834102215667b_2^2b_4 + \\
& + 65304610219458607b_4^3) + b_1^2(-61664224743465b_2^4 + 495192355535910b_2^2b_4^2 + \\
& + 196233686605049063b_4^4) + b_1(-119711160303942b_2^4b_4 + 175336408862668b_2^2b_4^3 + \\
& + 78697339246926770b_4^5))b_6^3)).
\end{aligned}$$

A decomposição do radical do ideal

$$I = \langle g_{2,2,0}, g_{3,3,0}, g_{4,4,0}, g_{5,5,0}, g_{6,6,0}, g_{7,7,0} \rangle,$$

em uma interseção finita de ideais primos sobre um corpo de característica zero, consiste das seguintes componentes:

$$I_1 = \langle b_1 + b_4, a_3, 2a_1 - b_6 \rangle,$$

$$I_2 = \langle b_1 + b_4, b_2^2 + 4b_4^2 \rangle,$$

$$I_3 = \langle a_1, a_3 \rangle.$$

Ao analisar os zeros de cada um dos geradores dos ideais acima, temos que $b_1 = -b_4$, $a_3 = 0$ e $b_6 = 2a_1$ ou $b_1 = b_2 = b_4 = 0$ ou $a_1 = a_3 = 0$ são as condições que anulam os coeficientes focais $g_{2,2,0}$, $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$, $g_{6,6,0}$ e $g_{7,7,0}$. Assim, vamos analisar os seguintes subconjuntos de S_1 :

$$S_{11} = \{s \in S_1; b_1 = -b_4, a_3 = 0 \text{ e } b_6 = 2a_1\},$$

$$S_{12} = \{s \in S_1; b_1 = b_2 = b_4 = 0\}.$$

$$S_{13} = \{s \in S_1; a_1 = a_3 = 0\}.$$

Considere o sistema (4.45) sobre o conjunto de parâmetro S_{11} , então fazendo as devidas substituições dos parâmetros em (4.45), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + a_1xz, \\ \dot{y} &= x + a_1yz, \\ \dot{z} &= -z - b_4x^2 + b_2xy + b_4y^2 + 2a_1z^2.\end{aligned}\tag{4.46}$$

Seja

$$\begin{aligned}V(u, v, w) &= z + \frac{1}{5}(-b_2 - b_4)y^2 + \frac{1}{5}(-b_2 + 4b_4)xy + \frac{1}{5}(b_2 + b_4)x^2 - 4a_1z^2 + 4a_1^2z^3 + \\ &+ \frac{1}{5}(4a_1b_2 - 36a_1b_4)xyz + \frac{1}{5}(18a_1b_2 + 8a_1b_4)y^2z + \frac{1}{25}(-14a_1b_2^2 - 18a_1b_2b_4 - \\ &- 4a_1b_4^2)y^4 + \frac{1}{5}(-32a_1^2b_2 - 12a_1^2b_4)y^2z^2 + \frac{1}{25}(4a_1b_2^2 + 8a_1b_2b_4 + 4a_1b_4^2)x^4 + \\ &+ \frac{1}{25}(-4a_1b_2^2 - 8a_1b_2b_4 - 4a_1b_4^2)x^3y + \frac{1}{5}(2a_1b_2^2 + 6a_1b_2b_4 - 16a_1b_4^2)x^2y^2 + \\ &+ \frac{1}{5}(-4a_1^2b_2 - 4a_1^2b_4)x^2z^2 + \frac{1}{25}(-14a_1b_2^2 + 72a_1b_2b_4 + 36a_1b_4^2)xy^3 + \\ &+ \frac{1}{5}(-4a_1^2b_2 + 56a_1^2b_4)xyz^2 + x^4z + \frac{1}{25}(8a_1^2b_2^2 - 24a_1^2b_2b_4 - 32a_1^2b_4^2)x^3yz + \\ &+ \frac{1}{25}(16a_1^2b_2^2 - 8a_1^2b_2b_4 + 276a_1^2b_4^2 + 2)x^2y^2z + \frac{1}{25}(28a_1^2b_2^2 - 284a_1^2b_2b_4 - \\ &- 112a_1^2b_4^2)xy^3z + \frac{1}{25}(81a_1^2b_2^2 + 72a_1^2b_2b_4 + 16a_1^2b_4^2 + 1)y^4z + \frac{1}{5}\left(\frac{8a_1^2b_2^3}{25} + \right. \\ &+ \frac{24a_1^2b_2^2b_4}{25} + \frac{24a_1^2b_2b_4^2}{25} + \frac{8a_1^2b_4^3}{25} + b_2 + b_4)x^6 + \frac{1}{5}\left(-\frac{8a_1^2b_2^3}{25} - \frac{24a_1^2b_2^2b_4}{25} - \right. \\ &- \frac{24a_1^2b_2b_4^2}{25} - \frac{8a_1^2b_4^3}{25} - b_2 + 4b_4)x^5y + \frac{1}{5}\left(\frac{28a_1^2b_2^3}{25} + \frac{104a_1^2b_2^2b_4}{25} + \frac{24a_1^2b_2b_4^2}{25} - \right. \\ &- \frac{52a_1^2b_4^3}{25} + b_2 + b_4)x^4y^2 + \frac{1}{5}\left(-\frac{36a_1^2b_2^3}{25} - \frac{8a_1^2b_2^2b_4}{25} - \frac{8a_1^2b_2b_4^2}{25} + \frac{46a_1^2b_4^3}{25} - \right. \\ &- 2b_2 + 8b_4)x^3y^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{17a_1^2b_2^3}{25} + \frac{141a_1^2b_2^2b_4}{25} - \frac{644a_1^2b_2b_4^2}{25} - \frac{268a_1^2b_4^3}{25} - b_2 - \right. \\ &- b_4)x^2y^4 + \frac{1}{5}\left(-\frac{53a_1^2b_2^3}{25} + \frac{316a_1^2b_2^2b_4}{25} + \frac{316a_1^2b_2b_4^2}{25} + \frac{72a_1^2b_4^3}{25} - b_2 + 4b_4)xy^5 + \\ &+ \frac{1}{5}\left(-\frac{53a_1^2b_2^3}{25} - \frac{89a_1^2b_2^2b_4}{25} - \frac{44a_1^2b_2b_4^2}{25} - \frac{8a_1^2b_4^3}{25} - b_2 - b_4)y^6.\end{aligned}$$

Como a divergência do campo $\mathcal{X}$, associado ao sistema (4.46), é dado por $\text{div}(\mathcal{X}) = -1$, temos

$$\mathcal{X} \cdot V = \text{div}(\mathcal{X}) \cdot V.$$

Logo V é um múltiplo de Jacobi inverso. Então pelo Teorema 2.9, a origem é um centro para o sistema (4.46). Além disso, a variedade central analítica $W^c \subseteq V^{-1}(0)$.

Suponha que os parâmetros estejam sobre o conjunto S_{12} , então fazendo as devidas substituições dos parâmetros em (4.45), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(a_1z + a_3z^3), \\ \dot{y} &= x + y(a_1z + a_3z^3), \\ \dot{z} &= -z + b_6z^2.\end{aligned}\tag{4.47}$$

Neste caso $z = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (4.47) e, restrito ao plano $z = 0$, temos o sistema planar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x.\end{aligned}\tag{4.48}$$

Portanto a origem é um centro.

Considere os parâmetros do sistema (4.45) sobre S_{13} , então este torna-se:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x, \\ \dot{z} &= -z + b_1x^2 + b_2xy + b_4y^2 + b_6z^2,\end{aligned}\tag{4.49}$$

o qual tem uma integral primeira

$$H(x, y, z) = x^2 + y^2 + x^4 + 2y^2x^2 + y^4.$$

Portanto pelo Teorema 2.2 a origem do sistema (4.49) é um centro sobre a variedade central.

Agora, assuma que os parâmetros do sistema (4.44) estejam sobre S_2 , deste modo, podemos tomar $b_3 = 1$ e $b_5 = 1$, pois caso contrário efetuamos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned}X &= \frac{(b_3 - b_5)}{b_3^2 + b_5^2}x - \frac{(b_3 + b_5)}{b_3^2 + b_5^2}y, \\ Y &= \frac{(b_3 + b_5)}{b_3^2 + b_5^2}x + \frac{(b_3 - b_5)}{b_3^2 + b_5^2}y, \\ Z &= z.\end{aligned}\tag{4.50}$$

Então sob estas condições o sistema (4.44) torna-se

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(a_1z + a_3z^3), \\ \dot{y} &= x + y(a_1z + a_3z^3), \\ \dot{z} &= -z + b_1x^2 + b_2xy + xz + b_4y^2 + yz + b_6z^2.\end{aligned}\tag{4.51}$$

Calculando os 7 primeiros coeficientes focais $g_{2,2,0}$, $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$, $g_{6,6,0}$, $g_{7,7,0}$ e $g_{8,8,0}$, cujas expressões se encontram no Apêndice 5.2, podemos decompor o radical do ideal

$$I = \langle g_{2,2,0}, g_{3,3,0}, g_{4,4,0}, g_{5,5,0}, g_{6,6,0}, g_{7,7,0}, g_{8,8,0} \rangle,$$

em uma interseção finita de ideais primos sobre um corpo de característica zero, a qual consiste das seguintes componentes:

$$I_1 = \langle b_1, b_2, b_4 \rangle,$$

$$I_2 = \langle a_1, a_3 \rangle.$$

Ao analisar os zeros de cada um dos geradores dos ideais acima, temos que $b_1 = b_2 = b_4 = 0$ ou $a_1 = a_3 = 0$ são as condições que anulam os coeficientes focais $g_{2,2,0}$, $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$, $g_{6,6,0}$, $g_{7,7,0}$ e $g_{8,8,0}$. Portanto, vamos analisar os seguintes subconjuntos de S_2 :

$$S_{21} = \{s \in S_2; b_1 = b_2 = b_4 = 0\},$$

$$S_{22} = \{s \in S_2; a_1 = 0, a_3 = 0\}.$$

Sobre o conjunto de parâmetros S_{21} , o sistema (4.51) torna-se:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(a_1z + a_3z^3), \\ \dot{y} &= x + y(a_1z + a_3z^3), \\ \dot{z} &= -z + xz + yz + b_6z^2. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Neste caso $z = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (4.52) e, restrito ao plano $z = 0$, temos o sistema planar

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Assim a origem é um centro.

Finalmente considere os parâmetros sobre S_{22} e fazendo as devidas substituições em (4.51) obtemos o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x, \\ \dot{z} &= -z + b_1x^2 + b_2xy + xz + b_4y^2 + yz + b_6z^2, \end{aligned} \tag{4.54}$$

o qual tem uma integral primeira dada por

$$H(x, y, z) = x^2 + y^2 + x^4 + 2y^2x^2 + y^4.$$

Logo, pelo Teorema 2.2, a origem do sistema (4.54) é um centro sobre a variedade central.

□

4.6 Caso: $F_{2p+1}(z) \equiv 0$, $q = 4$ e $R(x, y, z) = R_2(x, y, z)$.

Teorema 4.9. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xF(z), \\ \dot{y} &= x + yF(z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R_2(x, y, z),\end{aligned}\tag{4.55}$$

onde $F(z) = a_2z^2 + a_4z^4 + a_6z^6 + a_8z^8$, $R_2(x, y, z) = b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2$ e denote por $S = \{(\lambda, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, a_2, a_4, a_6, a_8) \in \mathbb{R}^{11}; \lambda = 1\}$ o conjunto de seus parâmetros. Então o sistema (4.55) restrito a variedade central tem um centro rígido na origem se, e somente se, uma das seguintes condições são satisfeitas:

$$(a) \quad a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0,$$

$$(b) \quad b_1 = b_2 = b_4 = 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.4 a origem é um centro rígido sobre a variedade central para o sistema (4.55) se, e somente se, os coeficientes focais do sistema são todos nulos.

Suponha que $b_1 = b_4$, caso contrário efetuamos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned}X &= (b_1 - b_4)x + (-b_2 + \sqrt{b_1^2 - 2b_1b_4 + b_4^2 + b_2^2})y, \\ Y &= -(-b_2 + \sqrt{b_1^2 - 2b_1b_4 + b_4^2 + b_2^2})x + (b_1 - b_4)y, \\ Z &= z.\end{aligned}\tag{4.56}$$

Então sob estas condições o sistema (4.55) torna-se

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(a_2z^2 + a_4z^4 + a_6z^6 + a_8z^8), \\ \dot{y} &= x + y(a_2z^2 + a_4z^4 + a_6z^6 + a_8z^8), \\ \dot{z} &= -z + b_4x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2,\end{aligned}\tag{4.57}$$

onde seu primeiro e segundo coeficientes focais são dados por

$$\begin{aligned}g_{2,2,0} &= 0, \\ g_{3,3,0} &= \frac{1}{20}a_2(b_2^2 + 40b_4^2).\end{aligned}$$

Portanto $g_{2,2,0} = g_{3,3,0} = 0$ se, e somente se, os parâmetros estão sobre um dos dois seguintes subconjuntos de S

$$S_1 = \{s \in S; a_2 = 0 \quad \text{e} \quad b_2^2 + 40b_4^2 \neq 0\},$$

$$S_2 = \{s \in S; b_2 = 0, b_4 = 0 \text{ e } a_2 \neq 0\}.$$

Considere os parâmetros do sistema (4.57) sobre S_1 , sendo assim passamos ao cálculo do terceiro e quarto coeficientes focais, os quais são dados por:

$$\begin{aligned} g_{4,4,0} &= 0, \\ g_{5,5,0} &= \frac{a_4}{1600}(3b_2^4 + 480b_2^2b_4^2 + 3200b_4^4). \end{aligned}$$

Daí sobre S_1 temos que $g_{4,4,0} = g_{5,5,0} = 0$ se, e somente se, $a_4 = 0$. Logo defina o seguinte subconjunto de S_1

$$S_{12} = \{s \in S_1; a_4 = 0\}.$$

Passemos agora ao cálculo do quinto e sexto coeficiente focal do sistema (4.57) sobre o conjunto S_{12} , os quais são dados por:

$$\begin{aligned} g_{6,6,0} &= 0, \\ g_{7,7,0} &= \frac{a_6}{12800}(b_2^6 + 360b_2^4b_4^2 + 9600b_2^2b_4^4 + 25600b_4^6). \end{aligned}$$

Assim temos que $g_{6,6,0} = g_{7,7,0} = 0$ se, e somente se, $a_6 = 0$. Logo defina o seguinte subconjunto de S_{12}

$$S_{13} = \{s \in S_{12}; a_6 = 0\}.$$

Finalmente calculando o sétimo e oitavo coeficiente focal do sistema (4.57) sobre o conjunto S_{13} , obtemos

$$\begin{aligned} g_{8,8,0} &= 0, \\ g_{9,9,0} &= \frac{a_8}{2048000}(7b_2^8 + 4480b_2^6b_4^2 + 268800b_2^4b_4^4 + 2867200b_2^2b_4^6 + 4096000b_4^8). \end{aligned}$$

Portanto $g_{8,8,0} = g_{9,9,0} = 0$ se, e somente se, $a_8 = 0$. Logo defina o seguinte subconjunto de S_{13}

$$S_{14} = \{s \in S_{13}; a_8 = 0\}.$$

Considere os parâmetros do sistema (4.57) sobre o conjunto S_{14} , então fazendo as devidas substituições obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x, \\ \dot{z} &= -z + b_4x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2, \end{aligned} \tag{4.58}$$

o qual tem uma integral primeira dada por

$$H(x, y, z) = x^2 + y^2 + x^4 + y^4 + 2y^2x^2.$$

Portanto pelo Teorema 2.2 a origem do sistema (4.58) é um centro.

Finalmente, considere os parâmetros sobre o conjunto S_2 e substituindo em (4.57), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(a_2z^2 + a_4z^4 + a_6z^6 + a_8z^8), \\ \dot{y} &= x + y(a_2z^2 + a_4z^4 + a_6z^6 + a_8z^8), \\ \dot{z} &= -z + b_3xz + b_5yz + b_6z^2,\end{aligned}\tag{4.59}$$

o qual tem $z = 0$ como uma superfície algébrica invariante. Consequentemente restrito ao plano $z = 0$ obtemos o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x,\end{aligned}$$

cujas a origem é um centro. □

4.7 Caso: $p = 2, q = 2$ e $R(x, y, z) = R_2(x, z)$.

Teorema 4.10. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xF(z), \\ \dot{y} &= x + yF(z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R_2(x, z),\end{aligned}\tag{4.60}$$

onde $F(z) = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + a_5z^5$, $R_2(x, z) = b_1x^2 + b_2xz + b_3z^2$ e denote por $S = \{(\lambda, b_1, b_2, b_3, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^9; \lambda = 1\}$ o conjunto de seus parâmetros. Então o sistema (4.60) restrito a variedade central tem um centro rígido na origem se, e somente se, uma das seguintes condições são satisfeitas:

$$(a) \ a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0,$$

$$(b) \ b_1 = 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.4 a origem é um centro rígido sobre a variedade central para o sistema (4.60), se, e somente se, os coeficientes focais do sistema são todos nulos.

Usando este fato passamos ao cálculo dos 5 primeiros coeficientes focais, os quais são dados por:

$$\begin{aligned}
g_{2,2,0} &= a_1 b_1, \\
g_{3,3,0} &= \frac{b_1}{40} (36a_1^2 b_1 + 22a_2 b_1 + 9a_1 b_2^2 + 22a_1 b_1 b_3), \\
g_{4,4,0} &= \frac{b_1}{400} (784a_1^3 b_1^2 + a_1^2 b_1 (105b_2^2 + 862b_1 b_3) + b_1 (130a_3 b_1 + 161a_2 b_2^2 + 228a_2 b_1 b_3) + \\
&\quad + 2a_1 (5b_2^4 + b_1 (309a_2 b_1 + 2b_3 (49b_2^2 + 57b_1 b_3)))), \\
g_{5,5,0} &= \frac{b_1}{4896000} (40270344a_1^4 b_1^3 + a_1^3 b_1^2 (-3855041b_2^2 + 52002684b_1 b_3) + \\
&\quad + 3a_1 (2173600a_3 b_1^3 + 2a_2 b_1^2 (755137b_2^2 + 3788696b_1 b_3) + 3(875b_2^6 + 75033b_1 b_2^4 b_3 + \\
&\quad + 497172b_1^2 b_2^2 b_3^2 + 397164b_1^3 b_3^3)) + 18b_1 (148988a_2^2 b_1^2 + a_2 (30445b_2^4 + 264648b_1 b_2^2 b_3 + \\
&\quad + 198582b_1^2 b_3^2) + b_1 (54910a_4 b_1 + 3a_3 (45019b_2^2 + 43870b_1 b_3))) + 12a_1^2 b_1 (13042b_2^4 + \\
&\quad + b_1 (2758365a_2 b_1 + 2b_3 (326727b_2^2 + 967535b_1 b_3)))), \\
g_{6,6,0} &= \frac{b_1}{21640320000} (972390349360a_1^5 b_1^4 + 2a_1^4 b_1^3 (112910927825b_2^2 + \\
&\quad + 749067760428b_1 b_3) + a_1^2 b_1 (169452717800a_3 b_1^3 - 720644402a_2 b_1^2 b_2^2 + \\
&\quad + 38480175b_2^6 + 838864785056a_2 b_1^3 b_3 + 10864878606b_1 b_2^4 b_3 + \\
&\quad + 131955915060b_1^2 b_2^2 b_3^2 + 221209329900b_1^3 b_3^3) + 6b_1 (85(52(689624a_2 a_3 + \\
&\quad + 105825a_5) b_1^3 + 8892(1106a_2^2 + 2519a_4) b_1^2 b_2^2 + 10426644a_3 b_1 b_2^4 + \\
&\quad + 791811a_2 b_2^6) + 2b_1 (1768(2017384a_2^2 + 397005a_4) b_1^2 + 2456383005a_3 b_1 b_2^2 + \\
&\quad + 925534251a_2 b_2^4) b_3 + 6b_1^2 (436931430a_3 b_1 + 1141295759a_2 b_2^2) b_3^2 + \\
&\quad + 3778704696a_2 b_1^3 b_3^3) + 3a_1 (42885552044a_2^2 b_1^4 + a_2 b_1^2 (1927318201b_2^4 + \\
&\quad + 40066919064b_1 b_2^2 b_3 + 82099058132b_1^2 b_3^2) + 2(4113569390a_4 b_1^4 + \\
&\quad + 6312827358a_3 b_1^3 b_2^2 + 240975b_2^8 + 16931040690a_3 b_1^4 b_3 + 78185160b_1 b_2^6 b_3 + \\
&\quad + 1658882178b_1^2 b_2^4 b_3^2 + 5927880096b_1^3 b_2^2 b_3^3 + 3778704696b_1^4 b_3^4)) + \\
&\quad + a_1^3 b_1^2 (-20157834977b_2^4 + 4b_1 (234772312134a_2 b_1 + b_3 (32239153055b_2^2 + \\
&\quad + 213433561007b_1 b_3)))).
\end{aligned}$$

Logo podemos calcular a Base de Groebner do ideal gerado por eles. Em resumo, temos que a Base de Groebner deste ideal é gerado pelos seguintes polinômios

- $L_1 = a_1 b_1,$

- $L_2 = a_2 b_1^2$,
- $L_3 = a_3 b_1^3$,
- $L_4 = a_4 b_1^4$,
- $L_5 = a_5 b_1^5$.

Portanto os coeficientes focais do sistema (4.60) são nulos sobre o subconjunto S se, e somente se, $L_i = 0$ para $i = 1, \dots, 5$, ou seja, se os parâmetros pertencem a um dos seguintes subconjuntos

$$S_1 = \{s \in S; a_i = 0 \text{ para } i = 1, \dots, 5\},$$

$$S_2 = \{s \in S; b_1 = 0\}.$$

Se os parâmetros do sistema (4.60) estão sobre S_1 , obtemos o novo sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x, \\ \dot{z} &= -z + b_1 x^2 + b_2 xz + b_3 z^2, \end{aligned} \tag{4.61}$$

o qual uma integral primeira dada por

$$H(x, y, z) = x^2 + y^2 + x^4 + y^4 + 2y^2 x^2.$$

Portanto pelo Teorema 2.2 a origem do sistema (4.61) é um centro.

Se os parâmetros do sistema (4.60) estão sobre S_2 , obtemos o novo sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5), \\ \dot{y} &= x + y(a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5), \\ \dot{z} &= -z + b_2 xz + b_3 z^2, \end{aligned} \tag{4.62}$$

o qual tem $z = 0$ como uma superfície algébrica invariante. Consequentemente restrito ao plano $z = 0$ obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x, \end{aligned}$$

cujas origens são centros.

□

Capítulo 5

Bifurcação de ciclos limites a partir de um centro rígido em $\mathbb{R}^3$

No ano de 1900 ocorreu o Congresso Internacional de Matemática realizado em Paris, nesta ocasião o grande Matemático David Hilbert listou alguns problemas em aberto da matemática, entre eles está o problema conhecido como “O 16º problema de Hilbert”, que trata de ciclos limites de um sistema de equações diferenciais polinomiais. Mais precisamente, a segunda parte desse problema consiste em determinar a posição e o número dos ciclos limites de um sistema polinomial no plano em função do seu grau. Este problema é considerado o maior desafio matemático dentro da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais e está em aberto mesmo para o caso mais simples, isto é, para campos polinomiais de grau 2 (veja, [13] e [38]). Existem várias versões mais fracas deste problema, por exemplo determinar o número $M(n)$ de ciclos limites que bifurcam de um centro ou foco (isto é, a sua ciclicidade) em campos de vetores polinomiais no plano de grau n (veja [18], [50], [53] e [54]).

Um método eficiente para estimar ciclos limites a partir de um ponto singular do tipo centro ou foco é calcular os coeficientes de Lyapunov (ou equivalentemente os coeficientes focais) quando pequenas perturbações do sistema original são consideradas, veja [7], [16], [18], [50] e suas referências. Christopher [16] desenvolveu uma abordagem simples para se obter cotas inferiores para o número de ciclos limites que bifurcam por pequenas perturbações de um centro ou foco. A ideia consiste em levar em conta a parte linear dos coeficientes de Lyapunov. Mais precisamente, Christopher provou que se calcularmos as partes lineares dos k primeiros coeficientes de Lyapunov e se estas forem

linearmente independentes, então por pequenas perturbações é possível obtermos k ciclos limites bifurcando do centro ou foco. Os resultados de Christopher são enunciados para o plano, mas podem ser estendidos para o caso de singularidades do tipo centro ou foco em variedades centrais de campos de vetores no $\mathbb{R}^3$.

Em [33], [51] e [60] os autores estudam bifurcações de ciclos limites a partir de singularidades do tipo centro e foco em variedades centrais de campos de vetores no $\mathbb{R}^3$. Nestes três artigos, a principal técnica utilizada para produzir bifurcações de ciclos limites passa pelo cálculo dos coeficientes focais e pela independência linear dos primeiros coeficientes, o que lembra as ideias de Christopher para o plano.

Nosso objetivo nesse capítulo é encontrar cotas inferiores para o número de ciclos limites que bifurcam dos centros das famílias de campos de vetores polinomiais rígidos classificadas nos capítulos anteriores. Usaremos as ideias apresentadas em [51] para atacar este problema.

5.1 Estimando o número de ciclos limites a partir dos coeficientes focais

Nesta seção apresentaremos alguns resultados conhecidos na literatura para estimar o número de ciclos limites que bifurcam a partir de centros em variedades centrais por pequenas perturbações do sistema.

Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + P_c(x, y, z) + \epsilon G_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + Q_c(x, y, z) + \epsilon G_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + R_c(x, y, z) + \epsilon G_3(x, y, z),\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde $P_c(x, y, z)$, $Q_c(x, y, z)$, $R_c(x, y, z)$ e $G_j(x, y, z)$, $j = 1, 2, 3$, são polinômios de grau ≥ 2 com coeficientes reais e ϵ um parâmetro real suficientemente pequeno. Denote por $(p_1, p_2, \dots, p_l)$ os parâmetros do sistema (5.1) quando $\epsilon = 0$ e por $(p_{l+1}, p_{l+2}, \dots, p_k)$ os parâmetros da perturbação. Assuma que para $\epsilon = 0$ (ou equivalentemente $G_1 = G_2 = G_3 \equiv 0$) o sistema (5.1) tem um centro na origem sobre a variedade central.

Definição 5.1. *Uma órbita periódica γ do sistema (5.1) será chamada de **ciclo limite** se existir uma vizinhança V de γ tal que γ é a única órbita periódica contida em V , veja [41].*

Pelo Teorema 2.1 existe uma variedade central para o sistema (5.1), a qual pode ser expressa da forma $z = h(x, y)$, onde h é uma função de classe C^r , para r arbitrário, satisfazendo $h(0, 0) = 0$ e $Dh(0, 0) = 0$. Assim restringindo o sistema (5.1) sobre esta variedade obtemos o sistema planar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + P_c(x, y, h(x, y)) + \epsilon G_1(x, y, h(x, y)), \\ \dot{y} &= x + Q_c(x, y, h(x, y)) + \epsilon G_2(x, y, h(x, y)).\end{aligned}\tag{5.2}$$

Observe que h também depende de ϵ , entretanto omitimos o ϵ para simplificar a notação. Passando para coordenadas polares $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, temos que o sistema (5.2) é equivalente a equação diferencial

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\psi(\rho, \theta, \epsilon)}{1 + \phi(\rho, \theta, \epsilon)},\tag{5.3}$$

onde as funções ψ e ϕ dependem das entradas do sistema (5.2). Pelo Lema 3 da página 242 de [6] o lado direito da equação acima é uma aplicação de classe C^r . Assim a solução $\rho(\theta, \rho_0, \epsilon)$ da equação (5.3), com a condição inicial $\rho(0, \rho_0, \epsilon) = \rho_0$, também é uma aplicação de classe C^r . Daí, definimos a *aplicação de Poincaré* associado ao sistema (5.1) por $\Pi(\rho_0, \epsilon) = \rho(2\pi, \rho_0, \epsilon)$, a qual é de classe C^r e pode ser representada por sua fórmula de Taylor de ordem r em $\rho_0 = 0$ como

$$\Pi(\rho_0, \epsilon) = V_1(p, \epsilon)\rho_0 + V_2(p, \epsilon)\rho_0^2 + \cdots + V_r(p, \epsilon)\rho_0^r + o(\rho_0^r),\tag{5.4}$$

onde $p = (p_1, p_2, \dots, p_l, p_{l+1}, \dots, p_k)$ são os parâmetros do sistema (5.1). Note que os pontos fixos da aplicação de Poincaré Π correspondem a ciclos limites do sistema (5.1).

Como a origem é um ponto de Hopf do sistema (5.1), segue que $V_1(p, \epsilon) \equiv 1$. Seja

$$\tilde{v}_i(p, \epsilon) = V_i(p, \epsilon) \mid \tilde{v}_1 = \cdots = \tilde{v}_{i-1} = 0, \quad i = 2, 3, \dots,$$

pelo Lema 5 da página 243 de [6], os coeficientes $\tilde{v}_{2i}$ são nulos e portanto redundantes no estudo dos ciclos limites que bifurcam do ponto singular (veja [16] pág. 26, [60] pág 525 e o Teorema 40 da pág. 244 de [6]).

Os coeficientes $v_i(p, \epsilon) = \tilde{v}_{2i+1}(p, \epsilon)$, $i = 1, 2, \dots$, são chamados de *coeficientes de Lyapunov* do sistema (5.1) (para maiores detalhes veja o Capítulo IX de [6]).

Como $v_i(p, 0) = 0$, $i = 1, 2, \dots$, aplicando a fórmula de Taylor, temos que a expansão em ϵ dos coeficiente de Lyapunov na vizinhança do zero é dada por

$$v_i(p, \epsilon) = v_{i,1}(p)\epsilon + v_{i,2}(p)\epsilon^2 + v_{i,3}(p)\epsilon^3 + \cdots, \quad i = 1, 2, \dots,\tag{5.5}$$

(veja [51]).

Os coeficientes $v_{i,m}$ serão chamados *coeficientes de Lyapunov de ordem m em ϵ* . Para $|\epsilon| > 0$ suficientemente pequeno podemos usar os $v_{i,1}$ para determinar o número dos ciclos limites do sistema (5.1)| $\epsilon=0$ que bifurcam do centro na origem por pequenas perturbações da forma (5.1). Precisamente, temos o seguinte resultado, o qual é uma versão do Teorema 2.1 de [16] enunciado no plano. Veja também o Lema 1.1 de [51].

Teorema 5.1. *Suponha que o*

$$\text{Posto} \left[\frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{k,1})}{\partial(p_1, p_2, \dots, p_k)} \right]_{p=p_c} = k, \quad (5.6)$$

onde $p_c = (p_1, p_2, \dots, p_l, p_{l+1}, \dots, p_k)$ com $p_{l+1} = p_{l+2} = \dots = p_k = 0$. Então podemos escolher os parâmetros $p_1, p_2, \dots, p_k$ de modo que o sistema (5.1) tenha pelo menos $k - 1$ ciclos limites de pequenas amplitudes na vizinhança do ponto singular.

Para fins computacionais o cálculo dos coeficientes de Lyapunov é menos eficiente do que o cálculo das coeficientes focais. Assim, para aplicar o teorema acima, é melhor utilizar os coeficientes focais, uma vez que, a menos de uma constante, os dois coeficientes são iguais (veja Teorema 6.2.3 da pág. 261 de [50], [9] e [59]). Precisamente, usando a notação da Seção 2.2, temos o seguinte resultado.

Lema 5.1. *Para qualquer número natural n temos a seguinte afirmação*

$$v_n = \pi g_{n+1, n+1, 0} \quad \text{mod} \langle g_{2,2,0}, g_{3,3,0}, \dots, g_{n,n,0} \rangle,$$

onde v_n são os coeficientes de Lyapunov do sistema (5.1) e os $g_{j,j,0}$, $j = 1, \dots, n+1$, são os coeficientes focais do sistema (5.1) complexificado. Mais precisamente, quando $g_{2,2,0} = g_{3,3,0} = \dots = g_{n-1, n-1, 0} = 0$, temos

$$v_n = \pi g_{n+1, n+1, 0}.$$

Para maiores detalhes sobre o lema acima veja [9, 50, 51, 59].

Demonstração do Teorema 5.1. Usando a teoria de formas normais e depois introduzindo coordenadas polares, podemos escrever o sistema (5.2) na forma

$$\dot{\rho} = \rho^3(v_1 + v_2\rho + \dots + v_k\rho^{2k-2}) + O(\rho^{2k-1}) \quad (5.7)$$

$$\dot{\theta} = 1 + \tau_1\rho^2 + \dots + \tau_k\rho^{2k} + O(\tau^{2k+1}), \quad (5.8)$$

onde $v_i = v_i(p, \epsilon)$ são os coeficientes de Lyapunov e $\tau_i = \tau_i(p, \epsilon)$ são os coeficientes de isocronicidade, veja pág. 70 de [12]. Note que os ciclos limites do sistema (5.2) correspondem aos zeros positivos do lado direito da equação (5.7) e que

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho^3(v_1 + v_2\rho + \cdots + v_k\rho^{2k-2}) + O(\rho^{2k+1}) \\ &= \rho^3 \sum_{j=1}^k \left(\sum_{s=1}^{\infty} v_{j,s}(p)\epsilon^s \right) (\rho^2)^{j-1} + O(\rho^{2k+1}) \\ &= \epsilon\rho^3 \sum_{j=1}^k v_{j,1}(p)(\rho^2)^{j-1} + O(\epsilon^2) \\ &= \epsilon\rho^3 \left(\sum_{j=1}^k v_{j,1}(p)(\rho^2)^{j-1} + O(\epsilon) \right), \quad |\epsilon| \ll 1.\end{aligned}$$

Fazendo $\rho^2 = \sigma$, pelo Teorema da Função Implícita, reduzimos o problema de encontrar zeros da equação acima ao problema de encontrar as raízes simples positivas da equação

$$v_{k,1}(p)\sigma^{k-1} + \cdots + v_{2,1}(p)\sigma + v_{1,1}(p) = 0, \quad (5.9)$$

ou melhor, os zeros simples positivos da função

$$d(\sigma, p) = v_{k,1}(p)\sigma^{k-1} + \cdots + v_{2,1}(p)\sigma + v_{1,1}(p).$$

Denote por $T(p) = (v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{k,1})$, a qual é de classe C^1 e $T(p_c) = 0$, pois $v_{j,1}(p_c) = 0$, $j = 1, \dots, k$. Por hipótese $DT(p_c)$ é um isomorfismo e pelo Teorema da Aplicação Inversa existe T^{-1} definida em uma vizinhança U da origem. Logo, podemos escolher $\vec{\eta}_k = (0, \dots, 0, \eta_k) \in U$, com $\eta_k > 0$, tal que para $p_{\eta_k} = T^{-1}(\vec{\eta}_k)$ temos

$$d(\sigma, p_{\eta_k}) = \eta_k \sigma^{k-1} > 0.$$

Seja σ_0 , tal que $d(\sigma_0, p_{\eta_k}) > 0$. Tomemos $\vec{\eta}_{k-1} = (0, \dots, 0, \eta_{k-1}, \eta_k) \in U$, com $\eta_{k-1} < 0$ e $|\vec{\eta}_k - \vec{\eta}_{k-1}| = |\eta_{k-1}| \ll |\eta_k| \ll 1$, tal que para $p_{\eta_{k-1}} = T^{-1}(\vec{\eta}_{k-1})$ temos $d(\sigma_0, p_{\eta_{k-1}}) > 0$ e

$$d(\sigma, p_{\eta_{k-1}}) = \eta_{k-1}\sigma^{k-2} + \eta_k\sigma^{k-1}.$$

Assim para σ suficientemente pequeno, como $\eta_{k-1} < 0$, teremos $d(\sigma, p_{\eta_{k-1}}) < 0$. Seja σ_1 um desses valores, com $\sigma_1 < \sigma_0$, então $d(\sigma_0, p_{\eta_{k-1}}) > 0$ e $d(\sigma_1, p_{\eta_{k-1}}) < 0$. Continuando com este procedimento podemos escolher $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k) \in U$ tal que

$$|\eta_1(p)| \ll |\eta_2(p)| \ll |\eta_3(p)| \ll \cdots \ll |\eta_k(p)| \ll 1, \quad \eta_j(p) \cdot \eta_{j+1}(p) < 0,$$

$j = 1, \dots, k$, ou seja, existe $p_\eta = T^{-1}(\eta)$ suficientemente próximo de p_c tal que

$$|v_{1,1}(p_\eta)| \ll |v_{2,1}(p_\eta)| \ll |v_{3,1}(p_\eta)| \ll \dots \ll |v_{k,1}(p_\eta)| \ll 1, \quad v_{j,1}(p_\eta) \cdot v_{j+1,1}(p_\eta) < 0,$$

$j = 1, \dots, k$. Além disso, obtemos também valores positivos σ_j , com $\sigma_j < \sigma_{j+1}$, tal que

$$d(\sigma_0, p_\eta) > 0, d(\sigma_1, p_\eta) < 0, d(\sigma_2, p_\eta) > 0, \dots$$

Portanto entre os valores σ_{j-1} e σ_j temos um zero da função $d(\sigma, p)$, ou seja, a equação (5.9) tem pelo menos $k - 1$ zeros positivos.

□

5.2 Cotas inferiores para a ciclicidade de famílias de centros rígidos em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção usaremos o Teorema 5.1 para investigar o número de ciclos limites que bifurcam dos centros das famílias de campos de vetores polinomiais rígidos classificadas nos Capítulos 3 e 4. Entretanto, devido ao Lema 5.1, iremos substituir na condição (5.6) os coeficiente de Lyapunov de primeira ordem em ϵ pelos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ mantendo a mesma notação $v_{i,1}$. Além disso, para simplificar os cálculos e torná-los possíveis computacionalmente, iremos fazer perturbações da forma (5.1) com $G_1 = G_2 = G_3 = G$, onde G é um polinômio homogêneo de grau 2 com coeficientes reais nas variáveis x, y e z . Para calcular os $v_{i,1}$ serão utilizados softwares de cálculos simbólicos, tais como Maple [24] e Mathematica [58] (veja o Apêndice 5.2 para um algoritmo implementado no Maple). Observamos que alguns coeficientes foram obtidos utilizando uma extensão para o $\mathbb{R}^3$ do método da paralelização no plano o qual foi apresentado em [39]. Este método lembra “O Princípio da Superposição” usado para resolver equações diferenciais lineares não homogêneas. Em outras palavras podemos calcular as partes lineares dos coeficientes focais de um campo de vetores polinomial separando o em campos mais simples (veja Apêndice 5.2 e o artigo [39] para detalhes).

O primeiro sistema que iremos estudar sua ciclicidade é dado pelo Teorema 4.1.

Teorema 5.2. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(a_1x + a_2xy + a_3y) + \epsilon G(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + y(a_1x + a_2xy + a_3y) + \epsilon G(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + \epsilon G(x, y, z), \end{aligned} \tag{5.10}$$

onde, $G(x, y, z) = c_1x^2 + c_2xy + c_3xz + c_4y^2 + c_5yz + c_6z^2$ e

$$S = \{(\lambda, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \in \mathbb{R}^{13}; \lambda = 1\}$$

é o conjunto dos seus parâmetros.

a) Se $a_3 = 0$, então bifurcam pelo menos 4 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.10).

Demonstração. Inicialmente assumimos a condição $a_3 = 0$ no sistema (5.10), a qual implica, pelo Teorema 4.1, que a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.10)|_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Daí, calculando os 11 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.10), as quais se encontram no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\left. \frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{11,1})}{\partial(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, \dots, c_6)} \right|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 5. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.10) com $a_3 = 0$ tal que este tenha 4 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro. $\square$

O 2º sistema que iremos estudar a ciclicidade é dado pelo Teorema 4.2.

Teorema 5.3. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(a_1x + a_2xy + a_3y) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + y(a_1x + a_2xy + a_3y) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3 + \epsilon h_1(x, y, z), \end{aligned} \tag{5.11}$$

onde, $h_1(x, y, z) = c_1x^2 + c_2xy + c_3xz + c_4y^2 + c_5yz + c_6z^2$ e

$$S = \{(\lambda, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \in \mathbb{R}^{14}; \lambda = 1\}$$

é o conjunto dos seus parâmetros.

a) Se $a_3 = 0$, então bifurcam pelo menos 4 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.11).

Demonstração. Inicialmente assumimos a condição $a_3 = 0$ no sistema (5.11), a qual implica, pelo Teorema 4.2, que a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.11)|_{\epsilon=0}$

sobre a variedade central. Daí, calculando os 12 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.11) as quais se encontram no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\left. \frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{12,1})}{\partial(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, \dots, c_6)} \right|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 5. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.11) com $a_3 = 0$ tal que este tenha 4 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro. $\square$

O 3º sistema que iremos estudar a ciclicidade é dado pelo Teorema 4.3.

Teorema 5.4. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(a_1x + a_2xy + a_3y) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + y(a_1x + a_2xy + a_3y) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + b_1x^4 + b_2x^3y + b_3x^2y^2 + b_4xy^3 + b_5y^4 + \epsilon h_1(x, y, z), \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde, $h_1(x, y, z) = c_1x^2 + c_2xy + c_3xz + c_4y^2 + c_5yz + c_6z^2$ e

$$S = \{(\lambda, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \in \mathbb{R}^{15}; \lambda = 1\}$$

é conjunto dos seus parâmetros.

a) Se $a_3 = 0$, então bifurcam pelo menos 4 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.12).

Demonstração. Inicialmente assumimos a condição $a_3 = 0$ no sistema (5.12), a qual implica, pelo Teorema 4.3, que a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.12)|_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Daí, calculando os 13 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.12), as quais se encontram no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\left. \frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{13,1})}{\partial(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, \dots, c_6)} \right|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 5. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.12) com $a_3 = 0$ tal que este tenha 4 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro. $\square$

No seguinte Teorema estudamos a ciclicidade do centro dado pelo item (b) dos Teoremas 4.1, 4.2, 4.3.

Teorema 5.5. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(a_1x + a_2xy + a_3y) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + y(a_1x + a_2xy + a_3y) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + \epsilon h_1(x, y, z),\end{aligned}\tag{5.13}$$

onde, $h_1(x, y, z) = c_1x^2 + c_2xy + c_3xz + c_4y^2 + c_5yz + c_6z^2$ e

$$S = \{(\lambda, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \in \mathbb{R}^{10}; \lambda = 1\}$$

é conjunto dos seus parâmetros. Então bifurcam pelo menos 2 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.13).

Demonstração. Pelo Teorema 4.3, a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.13)|_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Assim calculando os 9 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.12), as quais são dados no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\left. \frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{9,1})}{\partial(a_1, a_2, a_3, c_1, \dots, c_6)} \right|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 3. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.12) de formas que este tenha 2 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro. $\square$

O 4º sistema que iremos estudar a ciclicidade é dado pelo Teorema 4.4. Consideraremos somente a condição de centro (b) do Teorema 4.4, pois assumindo a condição (a) os 12 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ são todos nulos, o que impossibilita computacionalmente a aplicação do Teorema 5.1.

Teorema 5.6. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + y(a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + \epsilon h_1(x, y, z),\end{aligned}\tag{5.14}$$

onde, $h_1(x, y, z) = c_1x^2 + c_2xy + c_3xz + c_4y^2 + c_5yz + c_6z^2$ e

$$S = \{(\lambda, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \in \mathbb{R}^{16}; \lambda = 1\}$$

é o conjunto dos seus parâmetros. Se $a_1 = -a_4$ e $a_3 = a_5 = a_6 = 0$, então bifurca pelo menos 1 ciclo limite de pequena amplitude do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.14).

Demonstração. Assumiremos $a_1 = -a_4$ e $a_3 = a_5 = a_6 = 0$, as quais implicam, pelo Teorema 4.4, que a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.14)|_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Assim calculando os 11 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.14), as quais são dados no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{11,1})}{\partial(a_2, a_4, b_1, b_2, b_3, c_1, \dots, c_6)} \Big|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 2. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.14) de formas que este tenha 1 ciclo limite de pequena amplitude bifurcando do centro.

□

Não foi possível fazer o estudo da ciclicidade do sistema dado pelo Teorema 4.5, pois sob as condições de centro desta preposição, os 12 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ são todos nulos.

O 5º sistema que iremos estudar a ciclicidade é dado pelo Teorema 4.6.

Teorema 5.7. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(a_1x + a_2y + a_3z) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + y(a_1x + a_2y + a_3z) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2 + \epsilon h_1(x, y, z),\end{aligned}\tag{5.15}$$

onde, $h_1(x, y, z) = c_1x^2 + c_2xy + c_3xz + c_4y^2 + c_5yz + c_6z^2$ e

$$S = \{(\lambda, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \in \mathbb{R}^{16}; \lambda = 1\}$$

é o conjunto dos seus parâmetros.

- a) Se $a_3 = 0$, então bifurcam pelo menos 4 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.15).
- b) Se $b_1 = b_2 = b_4 = 0$, então bifurcam pelo menos 2 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.15).
- c) Se $b_1 = -b_4, a_1 = a_2 = b_3 = b_5 = 0, a_3 = 1$ e $b_6 = 2$, então bifurcam pelo menos 2 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.15).

- d) Se $b_1 = -b_4, b_3 = 2, b_5 = -1, a_2 = 0, a_1 = a_3 = 1$ e $b_6 = 2$, então bifurcam pelo menos 5 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.15).
- e) Se $b_1 = -b_4, b_2 = -b_4, b_3 = 2, a_2 = b_5 = 0, a_1 = a_3 = 1$ e $b_6 = 2$, então bifurcam pelo menos 5 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.15).
- f) Se $a_2 = b_1 = b_4 = 0, a_1 = a_3 = 1, b_2 = -b_6 + 1, b_3 = b_6$ e $b_5 = -b_6 + 1$, então bifurcam pelo menos 5 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.15).

Demonstração. Inicialmente assumimos a condição $a_3 = 0$ no sistema (5.15), a qual implica, pelo Teorema 4.6, que a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.15)|_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Daí, calculando os 6 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.15), as quais se encontram no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{6,1})}{\partial(a_1, a_2, b_1, \dots, b_6, c_1, \dots, c_6)} \Big|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 5. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.15) com $a_3 = 0$, tal que este tenha 4 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro.

Assumiremos $b_1 = b_2 = b_4 = 0$ no sistema (5.15), as quais implicam, pelo Teorema 4.6, que a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.15)|_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Assim calculando os 6 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.15), as quais são dados no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{6,1})}{\partial(a_1, a_2, a_3, b_1, \dots, b_6, c_1, \dots, c_6)} \Big|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 3. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.15) de forma que este tenha 2 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro.

Considere $b_1 = -b_4, a_1 = a_2 = b_3 = b_5 = 0, a_3 = 1$ e $b_6 = 2$, as quais implicam, pelo Teorema 4.6, que a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.15)|_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Assim calculando os 8 primeiros coeficientes focais de primeira ordem

em ϵ do sistema (5.15), as quais são dados no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\left. \frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{8,1})}{\partial(b_2, b_4, c_1, \dots, c_6)} \right|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 3. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.15) de formas que este tenha 2 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro.

Tome $b_1 = -b_4, b_3 = 2, b_5 = -1, a_2 = 0, a_1 = a_3 = 1$ e $b_6 = 2$, as quais implicam, pelo Teorema 4.6, que a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.15)|_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Assim calculando os 8 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.15), as quais são dados no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\left. \frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{8,1})}{\partial(b_2, b_4, c_1, \dots, c_6)} \right|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 6. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.15) de formas que este tenha 5 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro.

Agora vamos estudar a ciclicidade do sistema (5.15) assumindo $b_1 = -b_4, b_2 = -b_4, b_3 = 2, a_2 = b_5 = 0, a_1 = a_3 = 1$ e $b_6 = 2$, as quais implicam, pelo Teorema 4.6, que a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.15)|_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Assim calculando os 7 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.15), as quais são dados no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\left. \frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{7,1})}{\partial(b_4, c_1, \dots, c_6)} \right|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 6. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.15) de formas que este tenha 5 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro.

Por fim vamos estudar a ciclicidade do sistema (5.15) assumindo $a_2 = b_1 = b_4 = 0, a_1 = a_3 = 1, b_2 = -b_6 + 1, b_3 = b_6$ e $b_5 = -b_6 + 1$, as quais implicam, pelo Teorema 4.6, que a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.15)|_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Assim calculando os 7 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.15), as quais são dados no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\left. \frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{7,1})}{\partial(b_6, c_1, \dots, c_6)} \right|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 6. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.15) de formas que este tenha 5 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro. $\square$

O 6º sistema que iremos estudar a ciclicidade é dado pelo Teorema 4.7.

Teorema 5.8. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + y(b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2 + \epsilon h_1(x, y, z),\end{aligned}\tag{5.16}$$

onde, $h_1(x, y, z) = c_1x^2 + c_2xy + c_3xz + c_4y^2 + c_5yz + c_6z^2$ e

$$S = \{(\lambda, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \in \mathbb{R}^{13}; \lambda = 1\}$$

é o conjunto dos seus parâmetros.

- a) Se $b_1 = -b_4$ e $b_3 = b_5 = b_6 = 0$, então bifurca pelo menos 1 ciclo limite de pequena amplitude do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.16).
- b) Se $b_1 = b_2 = b_4 = 0$, então bifurcam pelo menos 2 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.16).

Demonstração. Inicialmente assumimos a condição $b_1 = -b_4$ e $b_3 = b_5 = b_6 = 0$, as quais implicam, pelo Teorema 4.7, que a origem é um centro do sistema não perturbado (5.16)| $_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Assim, calculando os 8 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.16), as quais se encontram no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\left. \frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{8,1})}{\partial(b_2, b_4, c_1, \dots, c_6)} \right|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 2. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.16) com $b_1 = -b_4$ e $b_3 = b_5 = b_6 = 0$ tal que este tenha 1 ciclo limite de pequena amplitude bifurcando do centro.

Agora vamos estudar a ciclicidade do sistema (5.16) assumindo $b_1 = b_2 = b_4 = 0$, as quais implicam, pelo Teorema 4.7, que a origem é um centro do sistema não perturbado (5.16)| $_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Assim calculando os 9 primeiros coeficientes focais

de primeira ordem em ϵ do sistema (5.16), as quais são dados no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\left. \frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{9,1})}{\partial(b_3, b_5, b_6, c_1, \dots, c_6)} \right|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 3. Portanto pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.16) de formas que este tenha 2 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro. $\square$

O 7º sistema que iremos estudar a ciclicidade é dado pelo Teorema 4.8.

Teorema 5.9. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(a_1z + a_3z^3) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + y(a_1z + a_3z^3) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2 + \epsilon h_1(x, y, z), \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde, $h_1(x, y, z) = c_1x^2 + c_2xy + c_3xz + c_4y^2 + c_5yz + c_6z^2$ e

$$S = \{(\lambda, a_1, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \in \mathbb{R}^{15}; \lambda = 1\}$$

é o conjunto dos seus parâmetros.

- a) Se $b_1 = -b_4$, $a_3 = b_3 = b_5 = 0$ e $b_6 = 2a_1$, então bifurcam pelo menos 2 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.17).
- b) Se $b_1 = b_2 = b_4 = 0$, então bifurcam pelo menos 2 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.17).
- c) Se $a_1 = a_3 = 0$, então bifurcam pelo menos 2 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.17).

Demonstração. Inicialmente assumimos a condição $b_1 = -b_4$, $a_3 = b_3 = b_5 = 0$ e $b_6 = 2a_1$, as quais implicam, pelo Teorema 4.8, que a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.17)|_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Assim, calculando os 9 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.17), as quais se encontram no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\left. \frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{9,1})}{\partial(a_1, b_2, b_4, c_1, \dots, c_6)} \right|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 3. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.17) com $b_1 = -b_4$ e $b_3 = b_5 = b_6 = 0$ tal que este tenha 2 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro.

Agora vamos estudar a ciclicidade do sistema (5.17) assumindo $b_1 = b_2 = b_4 = 0$, as quais implicam, pelo Teorema 4.8, que a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.17)|_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Assim calculando os 11 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.17), as quais são dados no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\left. \frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{11,1})}{\partial(a_1, a_3, b_3, b_5, b_6, c_1, \dots, c_6)} \right|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 3. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.17) de formas que este tenha 2 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro.

Para concluir o estudo da ciclicidade do sistema (5.17) vamos assumir $a_1 = a_3 = 0$, as quais implicam, pelo Teorema 4.8, que a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.17)|_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Assim calculando os 7 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.17), as quais são dados no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\left. \frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{7,1})}{\partial(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, c_1, \dots, c_6)} \right|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 3. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.17) de formas que este tenha 2 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro. $\square$

O 8º sistema que iremos estudar a ciclicidade é dado pelo Teorema 4.9. Consideraremos somente a condição de centro (a) do Teorema 4.9, pois assumindo a condição (b) os 14 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ são todos nulos, o que impossibilita computacionalmente a aplicação do Teorema 5.1.

Teorema 5.10. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(a_2 z^2 + a_4 z^4 + a_6 z^6 + a_8 z^8) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + y(a_2 z^2 + a_4 z^4 + a_6 z^6 + a_8 z^8) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 xz + b_4 y^2 + b_5 yz + b_6 z^2 + \epsilon h_1(x, y, z), \end{aligned} \tag{5.18}$$

onde, $h_1(x, y, z) = c_1x^2 + c_2xy + c_3xz + c_4y^2 + c_5yz + c_6z^2$ e

$$S = \{(\lambda, a_2, a_4, a_6, a_8, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \in \mathbb{R}^{17}; \lambda = 1\}$$

é o conjunto dos seus parâmetros. Se $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$, então bifurcam pelo menos 2 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema (5.18).

Demonstração. Inicialmente assumimos a condição $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$, as quais implicam, pelo Teorema 4.9, que a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.18)|_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Assim, calculando os 12 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.18), as quais se encontram no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{12,1})}{\partial(b_1, \dots, b_6, c_1, \dots, c_6)} \Big|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 3. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.18) com $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$ tal que este tenha 2 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro. $\square$

O 9º sistema que iremos estudar a ciclicidade é dado pelo Teorema 4.10. Consideraremos somente a condição de centro (b) do Teorema 4.10, pois assumindo a condição (a), os 9 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ são todos nulos, exceto o primeiro. Neste caso, o posto da matriz do Teorema 5.1 é 1. Portanto não podemos concluir nada sobre a ciclicidade.

Teorema 5.11. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + a_5z^5) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + y(a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + a_5z^5) + \epsilon h_1(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\lambda z + b_1x^2 + b_2xz + b_3z^2 + \epsilon h_1(x, y, z), \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde, $h_1(x, y, z) = c_1x^2 + c_2xy + c_3xz + c_4y^2 + c_5yz + c_6z^2$ e

$$S = \{(\lambda, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \in \mathbb{R}^{15}; \lambda = 1\}$$

é o conjunto dos seus parâmetros. Se $b_1 = 0$, então bifurcam pelo menos 2 ciclos limites de pequenas amplitudes do centro sob a variedade central na origem do sistema $(5.19)|_{\epsilon=0}$.

Demonstração. Assumimos a condição $b_1 = 0$ no sistema (5.19), a qual pelo Teorema 4.10, implica que a origem é um centro do sistema não perturbado $(5.19)|_{\epsilon=0}$ sobre a variedade central. Assim, calculando os 13 primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do sistema (5.19), as quais se encontram no Apêndice 5.2, temos que o posto da matriz jacobiana

$$\frac{\partial(v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{13,1})}{\partial(b_2, b_3, a_1, \dots, a_5, c_1, \dots, c_6)} \Big|_{c_1 = \dots = c_6 = 0},$$

é 3. Portanto, pelo Teorema 5.1, podemos escolher os parâmetros do sistema perturbado (5.19) com $b_1 = 0$ tal que este tenham 2 ciclos limites de pequenas amplitudes bifurcando do centro.

□

Referências

- [1] ALGABA, A. AND REYES, M., *Centers with degenerate infinity and their commutators*, J. Math. Anal. Appl. **278**, (2003), 109-124.
- [2] ALGABA, A. AND REYES, M., *Computing center conditions for vector fields with constant angular speed*, J. Comput. Appl. Math. **154**, (2003), 143-159.
- [3] ALGABA, A., REYES, M. AND BRAVO, A., *Uniformly isochronous quintic planar vector fields*, International Conference on Differential Equations, **Vol. 1, 2** (Berlin, 1999), 1415-1417, World Sci. Publ., River Edger, NJ 2000.
- [4] ALGABA, A., REYES, M., BRAVO, A. AND ORTEGA, T., *Campos cuárticos con velocidad angular constante*, Actas del XVI CEDYA' **99**, (1999), 1339-1340.
- [5] ALWASH, M. A. M., *On the center conditions of certain cubic systems*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3335-3336.
- [6] ANDRONOV, A. A., LEONTOVICH, E. A., GORDON, I. I. AND MAIER, A. G., *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*, Translated from the Russian, Halsted Press, John Wiley & Sons, New York-Toronto, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem-London, 1973.
- [7] BAUTIN, N.N., *On the number of limit cycles which appear with the variation of the coefficients from an equilibrium position of focus or center type*. Math. USSR-Sb., **100**, (1954), 397-413.
- [8] BIBIKOV, Y.N., *Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 702. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [9] BONIN, G. AND LEGAULT, J., *Comparison de la methode des constantes de Lyapunov et la bifurcation de Hopf*, Canad. Math. Bull., **31**, 2 (1988), 200-9.

- [10] BUICĂ, A., GARCÍA, I. A., MAZA, S., *Existence of inverse Jacobi multipliers around Hopf points in $\mathbb{R}^3$: Emphasis on the center problem*. J. Differential Equations, **252**, (2012), 6324-6336.
- [11] CARR, J. , *Applications of Centre Manifold Theory*, Springer-Verlag, 1981.
- [12] CHOW, S., ZHI, C. L. AND WANG, D., *Normal forms and bifurcation of planar vector fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [13] CHAVARRIGA, J., AND GRAU, M., *Some open problems related to 16b Hilbert problem*, Scientia Series A: Mathematical Sciences, **9** (2003), 1-26.
- [14] CHAVARRIGA, J. AND SABATINI, M., *A survey of isochronous centers*, Qual. Theory Dyn. Syst. **1** (1999), no. 1, 1-70.
- [15] CHAVARRIGA, J., GARCÍA, I. A. AND GINÉ, J., *On integrability of differential equations defined by the sum of homogeneous vector fields with degenerate infinity*, Int. J. Bifur. Chaos **11** (2001), 711-722.
- [16] CHRISTOPHER, C., *Estimating Limit Cycle Bifurcations from Centers*. Differential Equations with Symbolic Computation, 23-35, Trends Math, Birkhäuser, Basel, (2005).
- [17] CHRISTOPHER, C.I , *Invariant algebraic curves and conditions for a center*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **124** (1994), 1209-1229.
- [18] CHRISTOPHER, C. AND LI, C., *Limit cycles of differential equations*, Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhäuser Verlag, Basel, (2007).
- [19] CIMA, A., GASULL, A. AND MAÑOSAS, F., *Cyclicity of family of vector fields*, J. Math. Anal. Appl. **196** (1995), no. 3, 921-937.
- [20] COLLINS, C. B., *Algebraic conditions for center or a focus in some simple systems of arbitrary degree*, J. Math. Anal. Appl. **195** (1995), 719-735.
- [21] COLLINS, C. B., *Conditions for a center in a simple class of cubic systems*, Differential Integral Equations **10** (1997), 333-356.

- [22] CONTI, R., *Centers of planar polynomial systems. a review*, Le Matematiche **53** (1999), no. 2, 207-240.
- [23] CONTI, R., *Uniformly isochronous centers of polynomial systems in $\mathbb{R}^2$* , Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 152, Dekker, New York, (1994). (Differential equations, dynamical system, and control science, 21-31).
- [24] CYBERNET SYSTEMS GROUP, *Maplesoft*, <https://www.maplesoft.com>, 2018.
- [25] DIAS, F.S. AND MELLO, L.F., *The center-focus problem and small amplitude limit cycles in rigid systems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **32** (2012), 1627-1637.
- [26] DUMORTIER, F., LLIBRE, J., ARTÉS, J. C., *Qualitative theory of planar differential systems*. New York, Springer, 2006.
- [27] EDNERAL, V.F., MAHDI, A., ROMANOVSKI, V.G. AND SHAFER, D.S., *The center problem on a center manifold in R^3* , Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, **75** (2012), 2614-2622.
- [28] FREIRE, E., GASULL, A., AND GUILLAMON, A., *Period function for perturbed isochronous centres*, Qual. Theory Dyn. Syst. **3** (2002), 275-284.
- [29] GASULL, A. AND TORREGROSA, J., *Exact number of limit cycles for a family of rigid systems*, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2004), 751-758.
- [30] GASULL, A., PROHENS, R. AND TORREGROSA, J., *Limit cycles for rigid cubic systems*, J. Math. Anal. Appl., **303** (2005), 391-404.
- [31] GRENUEL, G. M., PFISTER, G. AND SCHÜNEMANN, H., *Singular 3.0, a computer algebra system for polynomial computations, center for computer algebra*, University of Kaiserslautern, <http://www.singular.uni-kl.de>, 2005.
- [32] GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurctions of Vector Fields*. Second Printing, Applied Mathematical Sciences 42, Springer-Verlag, New York, (1990).
- [33] HAN, M. A., YU, P., *Ten limit cycles around a center-type singular point in a 3-d quadratic system with quadratic perturbation*. Appl. Math. Lett., **44** (2015), 17-20.

-
- [34] HAN, M. AND ROMANOVSKI, V.G., *Isochronicity and normal forms of polynomial systems of odes*, Journal of Symbolic Computation **47** (2012), no. 10, 1163-1174.
- [35] KAPTEYN, W., *On the midpoints of integral curves of differential equations of the first degree*. Nederl. Akad. Wetensch. Verslag. Afd. Natuurk. Koninkl. Nederland, (1911), 1446-1457.
- [36] KAPTEYN, W., *New investigations on the midpoints of integrals of differential equations of the first degree*. Nederl. Akad. Wetensch. Verslag. Afd. Natuurk. Koninkl. Nederland, **20**, (1912), 1354-1365, 1912. Also **21**, 27-33 (Dutch).
- [37] KUZNETSOV, Y. A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*. second edition, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [38] LI, J., *Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **13** (2003), 47-106.
- [39] LIANG, H. AND TORREGROSA, J., *Parallelization of the Lyapunov constants and cyclicity for center of planar polynomial vector fields*, J. Differential Equations. **259** (2015), no. 11, 6494-6509.
- [40] LLIBRE, J. AND RABANAL, R., *Center conditions for a class of planar rigid polynomial differential systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **35** (2015), no. 3, 1075-1090.
- [41] LIBRE, J. AND ZHANG, X., *Darboux theory of integrability for polynomial vector fields in $\mathbb{R}^n$ taking into account the multiplicity at infinity*, Bull. Sci. Math. **133** (2009), 765-778.
- [42] LIBRE, J. AND ZHANG, X., *Darboux theory of integrability in $\mathbb{C}^n$ taking into account the multiplicity*, J. Differential Equations **246** (2009), 541-551.
- [43] MAHDI, A., *The center problem for the third-order ODEs*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **23** (2013), 130078.
- [44] MAHDI, A., PESSOA, C., SHAFER, D. S., *Centers on center manifolds in the Lü system*. Phys. Lett. A, **375**, (2011), 3509-3511.

-
- [45] MAHDI, A., ROMANOVSKI, V.G., AND SHAFER, D., *Stability and periodic oscillations in the Moon-Rand systems* Nonlinear Anal. Real World Appl. **14** (2013), 294-313.
- [46] MAZZI, L. AND SABATINI, M., *Commutators and linearizations of isochronous centers*, Atti. Accad. Naz. Lincei CL. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **11** (2000), 81-98.
- [47] PERKO, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 2000.
- [48] POINCARÉ, H., *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, J. Math. Pures Appl., **7** (1881), 375-422.
- [49] ROMANOVSKI, V.G. AND PRESERN, M., *An approach to solving systems of polynomial via modular arithmetics whith applications*, Jornal of computational and applied mathematics **236** (2011), no. 2, 196-208.
- [50] ROMANOVSKI, V.G. AND SHAFER, D.S., *The center and cyclicity problems: a computational algebra approach*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.
- [51] SANG, B., FERČEC, B., WANG, Q., *Limit Cycles Bifurcated from a Center in a three dimensional system*. Electronic Journal of Differential Equations, (2016), 1-11.
- [52] SIJBRAND, J., *Properties of center manifolds*, Transactions of the American Mathematical Society **289** (1985), 431-469.
- [53] SMALE, S., *Dynamics retrospective: great problems, attempts that failed*, Phys-ica D **51** (1991), 261-273.
- [54] SMALE, S., *Mathematical problems for next century*, Mathematical Inteligencer **20** (1998), no. 2, 7-15.
- [55] VULPE, N.I. AND SIBIRSKY, K.S., *Centro-affine invariant conditions for the existence of a center of a differential system with cubic nonlinearities*, Soviet Math. Dok **38** (1989), 198-201.
- [56] VOLOKITIN1, E.P., *Center conditions for a simple class of quintic systems*, Int. J. Math. Sci. **29** (2002), 625-632.

-
- [57] VOLOKITIN1, E.P., *Centering conditions for planar septic systems*, Electron. J. Differential Equation **34** (2003), 1-7.
- [58] WOLFRAN, S., *The Mathematica Book*, Fifth edition (Wolfram Media Inc., Champaign), <https://www.wolfram.com/mathematica>, (2003).
- [59] YIRONG, L. AND WENTAO, H., *A cubic system with twelve small amplitude limit cycles*, Bull. Sci. Math. **129** (2005), no. 2, 83-98.
- [60] YU, P., HAN, M., XIAO, D., *Four small limit cycles around a Hopf singular point in 3-dimensional competitive Lotka-Volterra systems*, J. Math. Anal Appl. **436** (2016), no. 1, 521-555.
- [61] ŻOLADEK, H., *The classification of reversible cubic systems with center*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **4** (1994), 79-136.
- [62] ŻOLADEK, H., *Quadratic systems with center and their perturbations*, J. Differential Equations **109** (1994), 223-273.

Algoritmos e Coeficientes Focais

Algoritmo para o cálculo dos coeficientes focais para sistemas em $\mathbb{R}^3$

Os coeficientes focais $g_{k,k,0}$ ($k = 2, \dots$) do Capítulo 4 e Capítulo 4.4 são obtidos usando o programa do Maple e o algoritmo apresentado a seguir. Para exemplificar o algoritmo vamos utilizar o sistema (4.6) do Teorema 4.1 sobre o conjunto dos parâmetros S_{22} para o cálculo dos seus dois primeiros coeficientes focais. Ao executar o algoritmo abaixo os dois primeiros coeficientes focais são exibidos.

```
> restart;
> # Pacotes do maple para rodar os comandos.
> with(ListTools):
> with(IntegrationTools):
> # Definição do campo de vetores.
> up := -v + u*(a[1]*u + a[2]*v+a[3]*w);
vp := u + v*(a[1]*u + a[2]*v+a[3]*w);
wp := b[1]*u^2 + b[2]*u*v + b[3]*v^2 - λ*w;
> # Complexificação do campo.
> com := Flatten(solve(x1-u-I*v, x2-u+I*v, [u, v])):
> x1p := expand(subs(com[1], com[2], up+I*vp)):
x2p := expand(subs(com[1], com[2], up-I*vp)):
x3p := expand(subs(com[1], com[2], wp)):
> # “ultima”indica a quantidade de Coefientes Focais que queremos calcular.
> ultima:=2:
> # “N”indica o grau máximo das partes homogêneas de integral primeira H.
```

```

> N:=2*ultima+2:
> xp := subs(w = z, x1 = x, x2 = y, x1p):
yp := subs(w = z, x1 = x, x2 = y, x2p):
zp := subs(w = z, x1 = x, x2 = y, x3p):
> # A sequência de comandos a seguir define a Integral primeira e colecciona seus coefi-
cientes h[i,m,n] da parte homogênea de grau j=n+m+i no conjunto varh[j]
> H:= x*y:
> for j from 3 by 1 to N do
for i from 0 by 1 to j do
for m from 0 by 1 to j do
for s from 0 by 1 to j do
if i+s+m = j then H := h[i, m, s]*x^i*y^m*z^s+H
end if
end do
end do
end do
end do:
for j from 3 to N do
varh[j] := ;
for i from 0 to j do
for m from 0 to j do
for s from 0 to j do
if i+s+m = j then varh[j] := 'union'(h[i, m, s], varh[j])
end if
end do
end do
end do
end do:
> # Os comando a seguir calcula Coeficientes Focais g[(k+1)/2,(k+1)/2,0].
> orden:=3:
for k from 3 to N by 2 do
mtaylor(expand(diff(H,x)*xp+diff(H,y)*yp+diff(H,z)*zp),[x,y,z],k+1)-

```

```

-mtaylor(expand(diff(H,x)*xp+diff(H,y)*yp+diff(H,z)*zp),[x,y,z],k):
solve(coeffs(%,[x,y,z]),varh[k]);
assign(%);
mtaylor(expand(diff(H,x)*xp+diff(H,y)*yp+diff(H,z)*zp),[x,y,z],k+2)-
-mtaylor(expand(diff(H,x)*xp+diff(H,y)*yp+diff(H,z)*zp),[x,y,z],k+1)-
-h[(k+1)/2,(k+1)/2,0]*(x*y)^((k+1)/2);
solve(coeffs(%,[x,y,z]),varh[k+1]);
assign(%);
f[(k+1)/2]:= h[(k+1)/2,(k+1)/2,0];
print(g[(k+1)/2,(k+1)/2,0]=factor(simplify(f[(k+1)/2])));
h[(k+1)/2,(k+1)/2,0]:=0;
od:

```

Algoritmo para decompor o radical do ideal gerado pelos coeficientes focais em uma interseção finita de ideais primos

Após calcular os coeficientes focais passamos a resolução do problema centro-foco do sistema, para isso definimos o ideal gerado pelos coeficientes focais, que pelo Teorema da base de Hilbert é finitamente gerado, ou seja, o problema centro-foco se reduz a encontrar um número $K \in \mathbb{N}$ tal que o ideal $\mathcal{B} = \langle g_{k,k,0}; k \in \mathbb{N} \rangle$ satisfaz $\mathcal{B} = \mathcal{B}_K = \langle g_{2,2,0}, g_{3,3,0}, g_{4,4,0}, \dots, g_{K,K,0} \rangle$. Para encontrar a variedade associada a este ideal, ou seja, a variedade algébrica determinada pelos zeros dos geradores do ideal, as vezes é necessário decompor o radical do ideal em uma interseção finita de ideais primos, para isso utilizamos o software de cálculos algébricos Singular, no qual implementamos o algoritmo abaixo. Para exemplificar o algoritmo, vamos utilizar o Teorema 4.2 considerando os coeficiente focais do sistema (4.11) sobre o conjunto S_{22} com $a_1 = 0$, e $a_2 = a_3 = 1$. Vamos decompor o ideal gerado pelos coeficientes focais $\langle g_{2,2,0}, g_{3,3,0}, g_{4,4,0}, g_{5,5,0}, g_{6,6,0} \rangle$, os quais estão introduzidos no algoritmo pela variáveis “poly gi”, $i=2, 3, 4, 5, 6$. No algoritmo, o comando // indica que está linha não será executada. Portanto, a terceira linha do algoritmo “// ring r=32003,(b₁, b₂, b₃, b₄),(dp);” não será executado, isto significa que

estamos fazendo a decomposição em um anel de característica $r=0$ e não em um anel de característica $r=32003$. Para fazer a decomposição em um anel de característica $r=32003$, apagamos `//` da terceira linha do algoritmo e digitamos `//` na segunda linha. Ao final do algoritmo temos os pacotes do singular que executam a decomposição “rimdecSY(i)”, “minAssChar(i)” e “minAssGTZ(i)”. Podemos escolher qual pacote executar utilizando o comando `//` para comentar a linha que não queremos executar. No algoritmo abaixo estamos executando o pacote “minAssGTZ(i)”. Ao executar o algoritmo ele retorna a decomposição.

```
LIB "primdec.lib";
ring r=0,(b1,b2,b3,b4),(dp);
// ring r=32003,(b1,b2,b3,b4),(dp);
r;
option(prot);
poly g2= -15b1 - b2 - 5b3 - 3b4 ;
poly g3= -69b1^2 - 9b2^2 + b1(1675 - 42b3) + 605b3 - 9b3^2 + 375b4 - 69b4^2 - 21b2(-5 + 2b4) ;
poly g4= 2979807b1^2 + 230261b2^2 - 12574050b3 + 421375b3^2 - 7856550b4 + 1327122b3 * b4 +
2543349b4^2 + 2b2(-1049325 + 217311b3 + 712355b4) + 2b1(-17091375 + 663561b2 + 1071769b3 +
2025567b4) ;
poly g5= 448080399b1^3 + 15583607b2^3 + 41136299100b3 - 1869137640b3^2 + 20663877b3^3 +
25741041300b4 - 8147165208b3b4 + 53474525b3^2b4 - 10732299948b4^2 + 149360133 * b3b4^2 +
400774257b4^3 + 3b1^2(-4239782952 + 44530473b2 + 156631501b3 + 123505863b4) + b2^2(-
- 891331356 + 10925733b3 + 126867715b4) + 3b2(2271636900 + 6315153b3^2 - 1969353928b4 +
124647367b4^2 + 26b3(-32633656 + 995261b4)) + b1(42515343b2^2 + 26b2(-287183388 +
+ 3469325b3 + 11204613b4) + 3 * (56278807b3^2 + b3(-3167943424 + 83478746b4) +
+ 39(952919700 - 204555328b4 + 4578835b4^2))) ;
poly g6= 11875528804776b1^4 + 189592323336b2^4 - 88221679436241000b3 +
+ 4743935408410380b3^2 - 90886976568323b3^3 + 189592323336b3^4 + b1^3(-1757238864840673 +
15584312430336b3 - 1507902907680b4) - 3b2^3(20258682998149 + 18616085280b3 -
- 657943562432b4) - 55195570635543000b4 + 23475792159677760b3b4 -
- 342997362806385b3^2b4 + 111696511680b3^3b4 + 26406467970791220b4^2 -
- 1160378808356807b3b4^2 + 2722248393072b3^2b4^2 - 1891427545739733b3^3 + 11875528804776b4^4 +
```

$$\begin{aligned}
& 13b_2^2(165913021470420 + 21684660624b_3^2 - 41560619045427b_4 + 625950994512b_4^2 - \\
& - b_3(7772435933027 + 25776118080b_4)) + 3b_1^2(10612844686528500 + 907416131024b_2^2 - \\
& 645022112929099b_3 + 2712454309552b_3^2 - 872871756434843b_4 + 8792575730224b_4^2 + \\
& + b_2(-278871804754177 + 167544767520b_3 + 5194770810112b_4)) + b_2(55848255840b_3^3 + \\
& 3b_3^2(-36669755808801 + 528231484352b_4) + b_3(7200488236325520 - 671253258170066b_4 - \\
& 502634302560b_4^2) + 3(-4875861751839000 + 4845312485496600b_4 - 566350290527703b_4^2 + \\
& 5194770810112b_4^3)) + b_1(-239260407367059000 - 111696511680b_2^3 + 1973830687296b_3^3 + \\
& b_2^2(-327517111470061 + 1584694453056b_3 - 502634302560b_4) + 67856881088922960b_4 - \\
& 3705420449176621b_4^2 + 1507902907680b_4^3 + 9b_3^2(-80153067310243 + 55848255840b_4) + \\
& + 6b_3(4015296490510500 - 298387706486341b_4 + 2597385405056b_4^2) + \\
& + b_2(20797486491665760 + 335089535040b_3^2 - 2164867468370374b_4 + 6b_3(-95581438554591 + \\
& 1513186002848b_4))) ;
\end{aligned}$$

ideal i=g2,g3,g4,g5,g6;

// primdecSY(i);

// minAssChar(i);

minAssGTZ(i);

Coeficientes Focais do Teorema 4.1

Nesta seção vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais $g_{2,2,0}$, $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$ e $g_{5,5,0}$ do sistema (4.6) sob o conjunto dos parâmetros S_{22} e devido ao tamanho excessivo dos coeficientes focais $g_{6,6,0}$ e $g_{7,7,0}$ vamos omitir boa parte das suas expressões.

$$\begin{aligned}
g_{2,2,0} &= \frac{b_1 + b_3}{\lambda}, \\
g_{3,3,0} &= \frac{1}{4\lambda^3(4 + 5\lambda^2 + \lambda^4)}(-2b_2\lambda^2(b_2 - 4\lambda + b_2\lambda^2 - \lambda^3) + 2b_1^2(8 + 9\lambda^2 + \lambda^4) + 2b_3^2(8 + \\
& + 9\lambda^2 + \lambda^4) - b_3\lambda^2(116 + 153\lambda^2 + 31\lambda^4) + b_1(4b_3(8 + 11\lambda^2 + 3\lambda^4) - \lambda^2(92 + \\
& + 139\lambda^2 + 29\lambda^4))), \\
g_{4,4,0} &= \frac{1}{8\lambda^5(9 + \lambda^2)(4 + 5\lambda^2 + \lambda^4)^2}(-2b_1^3(1 + \lambda^2)^2(-1440 - 628\lambda^2 + 65\lambda^4 + 40\lambda^6 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3\lambda^8) - 2b_3^3(1 + \lambda^2)^2(-1440 - 628\lambda^2 + 65\lambda^4 + 40\lambda^6 + 3\lambda^8) + 2b_3^2\lambda^2(-8640 - \\
& - 13332\lambda^2 - 5209\lambda^4 - 240\lambda^6 + 147\lambda^8 + 14\lambda^{10}) + 2b_2\lambda^4(4 + 5\lambda^2 + \lambda^4)(-25\lambda(36 + \\
& + 13\lambda^2 + \lambda^4) + 3b_2(34 + 67\lambda^2 + 7\lambda^4)) + b_3\lambda^2(9 + \lambda^2)(-2b_2^2(1 + \lambda^2)^2(28 + 23\lambda^2 + \\
& + 3\lambda^4) + 2\lambda^2(4 + \lambda^2)^2(313 + 651\lambda^2 + 338\lambda^4) + b_2\lambda(448 + 1348\lambda^2 + 1245\lambda^4 + \\
& + 430\lambda^6 + 49\lambda^8)) + 2b_1^2(b_3(1 + \lambda^2)^2(4320 + 2892\lambda^2 + 745\lambda^4 + 80\lambda^6 + 3\lambda^8) + \\
& + \lambda^2(-6912 - 9180\lambda^2 - 1871\lambda^4 + 1234\lambda^6 + 437\lambda^8 + 32\lambda^{10})) + b_1(2b_3^2(1 + \\
& + \lambda^2)^2(4320 + 2892\lambda^2 + 745\lambda^4 + 80\lambda^6 + 3\lambda^8) - 4b_3\lambda^2(7776 + 12072\lambda^2 + \\
& + 6168\lambda^4 + 1885\lambda^6 + 320\lambda^8 + 19\lambda^{10}) + \lambda^2(9 + \lambda^2)(-2b_2^2(1 + \lambda^2)^2(28 + 23\lambda^2 + \\
& + 3\lambda^4) + 2\lambda^2(4 + \lambda^2)^2(242 + 555\lambda^2 + 313\lambda^4) + b_2\lambda(448 + 1348\lambda^2 + 1245\lambda^4 + \\
& + 430\lambda^6 + 49\lambda^8))))) , \\
g_{5,5,0} = & \frac{1}{(576\lambda^7(9 + \lambda^2)^2(4 + 5\lambda^2 + \lambda^4)^3(16 + 65\lambda^2 + 4\lambda^4))}(6b_1^4(9 + 10\lambda^2 + \\
& + \lambda^4)^2(999424 + 5587968\lambda^2 + 7016448\lambda^4 + 2728592\lambda^6 + 432312\lambda^8 + 14763\lambda^{10} - \\
& - 209\lambda^{12} + 12\lambda^{14}) + 6b_3^4(9 + 10\lambda^2 + \lambda^4)^2(999424 + 5587968\lambda^2 + 7016448\lambda^4 + \\
& + 2728592\lambda^6 + 432312\lambda^8 + 14763\lambda^{10} - 209\lambda^{12} + 12\lambda^{14}) + 2b_3^3\lambda^2(-1495977984 - \\
& - 11713248000\lambda^2 - 28207101024\lambda^4 - 11853917696\lambda^6 + 38982656006\lambda^8 + \\
& + 58857404071\lambda^{10} + 35416113368\lambda^{12} + 11276574397\lambda^{14} + 2032882055\lambda^{16} + \\
& + 205934164\lambda^{18} + 10807919\lambda^{20} + 225724\lambda^{22}) + 6b_2\lambda^4(9 + 37\lambda^2 + 4\lambda^4)(9243\lambda^3(1 + \\
& + \lambda^2)^2(4 + \lambda^2)^3(144 + 25\lambda^2 + \lambda^4) + 3b_2^3(1 + \lambda^2)^3(11520 + 17264\lambda^2 + 5016\lambda^4 + \\
& + 513\lambda^6 + 17\lambda^8) - 3b_2\lambda^2(4 + \lambda^2)^2(115512 + 515372\lambda^2 + 798953\lambda^4 + 448887\lambda^6 + \\
& + 60659\lambda^8 + 2225\lambda^{10}) - b_2^2\lambda(470016 + 2243136\lambda^2 + 4148888\lambda^4 + 3586222\lambda^6 + \\
& + 1475375\lambda^8 + 289112\lambda^{10} + 24931\lambda^{12} + 740\lambda^{14})) + 6b_3^2\lambda^2(9 + \lambda^2)(6b_2^2(1 + \lambda^2)^2(- \\
& - 331776 - 1944576\lambda^2 - 2752272\lambda^4 - 1181032\lambda^6 - 208863\lambda^8 - 11418\lambda^{10} + \\
& + 401\lambda^{12} + 36\lambda^{14}) - \lambda^2(4 + \lambda^2)^2(-14719104 - 84430272\lambda^2 - 105931130\lambda^4 - \\
& - 4038433\lambda^6 + 47488057\lambda^8 + 17237209\lambda^{10} + 1916957\lambda^{12} + 64036\lambda^{14}) + \\
& + b_2\lambda(12165120 + 98631168\lambda^2 + 289307328\lambda^4 + 433795240\lambda^6 + 348072282\lambda^8 + \\
& + 149902641\lambda^{10} + 35761304\lambda^{12} + 4674189\lambda^{14} + 305076\lambda^{16} + 7552\lambda^{18})) - b_3\lambda^4(4 + \\
& + \lambda^2)(27\lambda^2(36 + 49\lambda^2 + 14\lambda^4 + \lambda^6)^2(425680 + 2187869\lambda^2 + 1969255\lambda^4 + \\
& + 114636\lambda^6) - 2b_2^2(68045184 + 523217304\lambda^2 + 1378888510\lambda^4 + 1828777429\lambda^6 + \\
& + 1370141454\lambda^8 + 582748817\lambda^{10} + 132622691\lambda^{12} + 15868578\lambda^{14} + 935461\lambda^{16} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 21172\lambda^{18}) + 12b_2\lambda(85390848 + 703955808\lambda^2 + 2051026976\lambda^4 + 2899268926\lambda^6 + \\
& + 2187259365\lambda^8 + 903629320\lambda^{10} + 204597986\lambda^{12} + 24732174\lambda^{14} + 1478705\lambda^{16} + \\
& + 33892\lambda^{18})) + 2b_1^3(-12b_3(1 + \lambda^2)^3(9 + \lambda^2)^2(-999424 - 4809728\lambda^2 - 3478528\lambda^4 - \\
& - 943600\lambda^6 - 87896\lambda^8 + 467\lambda^{10} + 204\lambda^{12}) + \lambda^2(-1191407616 - 9666978048\lambda^2 - \\
& - 26493009696\lambda^4 - 25695320384\lambda^6 + 260508194\lambda^8 + 16969528933\lambda^{10} + \\
& + 12452495468\lambda^{12} + 4228388899\lambda^{14} + 782202065\lambda^{16} + 80076400\lambda^{18} + 4218605\lambda^{20} + \\
& + 88180\lambda^{22})) + 2b_1^2(18b_3^2(9 + 10\lambda^2 + \lambda^4)^2(999424 + 5882880\lambda^2 + 8722432\lambda^4 + \\
& + 5052048\lambda^6 + 1346104\lambda^8 + 183019\lambda^{10} + 11375\lambda^{12} + 268\lambda^{14}) + b_3\lambda^2(-3878793216 - \\
& - 32073221376\lambda^2 - 89271245088\lambda^4 - 85475664448\lambda^6 + 8079201586\lambda^8 + \\
& + 66687037973\lambda^{10} + 47072440264\lambda^{12} + 15693159287\lambda^{14} + 2871638197\lambda^{16} + \\
& + 292087388\lambda^{18} + 15330637\lambda^{20} + 319796\lambda^{22})) + 3\lambda^2(9 + \lambda^2)(6b_2^2(1 + \lambda^2)^2(-331776 - \\
& - 1944576\lambda^2 - 2752272\lambda^4 - 1181032\lambda^6 - 208863\lambda^8 - 11418\lambda^{10} + 401\lambda^{12} + 36\lambda^{14}) - \\
& - \lambda^2(4 + \lambda^2)^2(-11263104 - 60926208\lambda^2 - 54240490\lambda^4 + 58100047\lambda^6 + 92740409\lambda^8 + \\
& + 34660745\lambda^{10} + 4036525\lambda^{12} + 138596\lambda^{14}) + b_2\lambda(12165120 + 98631168\lambda^2 + \\
& + 289307328\lambda^4 + 433795240\lambda^6 + 348072282\lambda^8 + 149902641\lambda^{10} + 35761304\lambda^{12} + \\
& + 4674189\lambda^{14} + 305076\lambda^{16} + 7552\lambda^{18}))) - b_1(24b_3^3(1 + \lambda^2)^3(9 + \lambda^2)^2(-999424 - \\
& - 4809728\lambda^2 - 3478528\lambda^4 - 943600\lambda^6 - 87896\lambda^8 + 467\lambda^{10} + 204\lambda^{12}) - 2b_3^2\lambda^2(- \\
& - 4183363584 - 34182196992\lambda^2 - 91550869344\lambda^4 - 73558241152\lambda^6 + \\
& + 43449827302\lambda^8 + 105446964095\lambda^{10} + 68480175316\lambda^{12} + 22328579369\lambda^{14} + \\
& + 4063578163\lambda^{16} + 413503040\lambda^{18} + 21753847\lambda^{20} + 454940\lambda^{22}) + 12b_3\lambda^2(9 + \\
& + \lambda^2)(6b_2^2(1 + \lambda^2)^2(331776 + 1967616\lambda^2 + 2902000\lambda^4 + 1455864\lambda^6 + 398161\lambda^8 + \\
& + 56710\lambda^{10} + 3873\lambda^{12} + 100\lambda^{14}) + 3\lambda^2(4 + \lambda^2)^2(-4309632 - 24161472\lambda^2 - \\
& - 27663266\lambda^4 + 3770139\lambda^6 + 15778805\lambda^8 + 4735597\lambda^{10} + 475593\lambda^{12} + 14996\lambda^{14}) - \\
& - b_2\lambda(12165120 + 99571200\lambda^2 + 297553728\lambda^4 + 460038104\lambda^6 + 388435830\lambda^8 + \\
& + 181543167\lambda^{10} + 48142528\lambda^{12} + 7036947\lambda^{14} + 506004\lambda^{16} + 13472\lambda^{18})) + \lambda^4(4 + \\
& + \lambda^2)(27\lambda^2(36 + 49\lambda^2 + 14\lambda^4 + \lambda^6)^2(333616 + 1780995\lambda^2 + 1812729\lambda^4 + 106420\lambda^6) - \\
& - 2b_2^2(64126080 + 488851272\lambda^2 + 1267231306\lambda^4 + 1647221599\lambda^6 + 1220033598\lambda^8 + \\
& + 523033103\lambda^{10} + 121753781\lambda^{12} + 14914554\lambda^{14} + 896335\lambda^{16} + 20572\lambda^{18}) + \\
& + 12b_2\lambda(80165376 + 645734304\lambda^2 + 1840569824\lambda^4 + 2611537954\lambda^6 + 1999817007\lambda^8 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 839128360\lambda^{10} + 192315878\lambda^{12} + 23443314\lambda^{14} + 1409555\lambda^{16} + 32428\lambda^{18}))), \\
 g_{6,6,0} &= (1/(2304\lambda^9(9 + \lambda^2)^3(4 + 5\lambda^2 + \lambda^4)^4(16 + 65\lambda^2 + 4\lambda^4)^2(900 + 10561\lambda^2 + \\
 & + 23146\lambda^4 + 9009\lambda^6 + 324\lambda^8)))(4b_1^5(1 + 4\lambda^2)^2(9 + 10\lambda^2 + \lambda^4)^3(1961518694400 + \\
 & + 26664980709376\lambda^2 + 95415622590464\lambda^4 + 139402527201280\lambda^6 + \dots. \\
 g_{7,7,0} &= (1/460800\lambda^{11}(9 + \lambda^2)^4(4 + 5\lambda^2 + \lambda^4)^5(16 + 65\lambda^2 + 4\lambda^4)^3(900 + 10561\lambda^2 + \\
 & + 23146\lambda^4 + 9009\lambda^6 + 324\lambda^8)^2(14400 + 241204\lambda^2 + 174449\lambda^4 + 25396\lambda^6 + \\
 & + 576\lambda^8))(-40b_1^6(1 + \lambda^2)^3(9 + \lambda^2)^4(225 + 3034\lambda^2 + 9521\lambda^4 + 3976\lambda^6 + \dots
 \end{aligned}$$

Coeficientes Focais do Teorema 4.5

Nesta seção vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais $g_{2,2,0}$, $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$ e $g_{6,6,0}$ do sistema (4.22) sob o conjunto dos parâmetros S_2 e devido ao tamanho excessivo dos coeficientes focais $g_{7,7,0}$, $g_{8,8,0}$ e $g_{9,9,0}$ vamos omitir boa parte das suas expressões.

$$\begin{aligned}
 g_{2,2,0} &= a_1 + a_4, \\
 g_{3,3,0} &= \frac{1}{8}(3b_1 + b_2 + b_3 + 3b_4), \\
 g_{4,4,0} &= \frac{1}{80}(-60a_1^3 + 60a_1^2a_4 - 60a_2^2a_4 - 60a_4^3 + 41a_4b_1 + 23a_6b_1^2 - 8a_4b_2 + 3a_6b_2^2 + \\
 & + 9a_4b_3 + 14a_6b_1b_3 + 3a_6b_3^2 - a_2(18b_1 + b_2 + 2b_3 - 11b_4) - 12a_4b_4 + 14a_6b_2b_4 + \\
 & + 23a_6b_4^2 + a_1(-60a_2^2 + 60a_4^2 + 49b_1 + 8b_2 + 21b_3 + 12b_4)), \\
 g_{5,5,0} &= \frac{1}{1280}(1127a_4^2b_1 + 147b_1^2 + 270a_4a_6b_1^2 - 763a_4^2b_2 + 54b_1b_2 - 236a_4a_6b_1b_2 - 15b_2^2 + \\
 & + 2a_4a_6b_2^2 - 15a_4^2b_3 + 90b_1b_3 + 196a_4a_6b_1b_3 - 6b_2b_3 - 116a_4a_6b_2b_3 + 3b_3^2 + \\
 & + 14a_4a_6b_3^2 - 3053a_4^2b_4 + 378b_1b_4 - 372a_4a_6b_1b_4 - 66b_2b_4 + 92a_4a_6b_2b_4 + 54b_3b_4 - \\
 & - 236a_4a_6b_3b_4 - 159b_4^2 + 66a_4a_6b_4^2 + a_1^2(-233b_1 - 123b_2 + 385b_3 + 307b_4) - \\
 & - a_2^2(399b_1 + 165b_2 + 169b_3 + 451b_4) - 2a_2(a_4(649b_1 + 193b_2 + 351b_3 + 47b_4) + \\
 & + a_6(177b_1^2 - b_2^2 + 14b_2b_3 + b_3^2 - 62b_2b_4 + 34b_3b_4 - 177b_4^2 + b_1(34b_2 + 62b_3 + \\
 & + 78b_4))) + 2a_1(a_4(1353b_1 - 157b_2 + 415b_3 - 427b_4) - a_2(671b_1 + 247b_2 + \\
 & + 329b_3 - 7b_4) + a_6(33b_1^2 + 7b_2^2 + 58b_2b_3 + b_3^2 + 98b_2b_4 + 118b_3b_4 + 135b_4^2 + \\
 & + 2b_1(59b_2 + 23b_3 + 93b_4)))).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{6,6,0} = & \frac{1}{332800}(1638000a_1^5 + 78000a_1^4a_4 + 390000a_2^4a_4 + 1638000a_4^5 + 142066a_4^3b_1 + \\
 & + 188281a_4b_1^2 - 121164a_4^2a_6b_1^2 + 22191a_6b_1^3 + 30852a_4^3b_2 - 76739a_4b_1b_2 + \\
 & + 20020a_4^2a_6b_1b_2 - 18473a_6b_1^2b_2 - 46772a_4b_2^2 - 44984a_4^2a_6b_2^2 - 4329a_6b_1b_2^2 + \\
 & + 507a_6b_2^3 + 118194a_4^3b_3 + 47992a_4b_1b_3 - 188752a_4^2a_6b_1b_3 + 42575a_6b_1^2b_3 - \\
 & - 71123a_4b_2b_3 - 4420a_4^2a_6b_2b_3 - 31174a_6b_1b_2b_3 - 3003a_6b_2^2b_3 - 19953a_4b_3^2 - \\
 & - 64484a_4^2a_6b_3^2 + 16757a_6b_1b_3^2 - 10673a_6b_2b_3^2 + 1677a_6b_3^3 + 2a_1^3(1014000a_2^2 - \\
 & - 858000a_4^2 - 390937b_1 - 266404b_2 - 123993b_3 - 589256b_4) + 10a_2^3(10269b_1 + \\
 & + 616b_2 + 1223b_3 - 6362b_4) - 181132a_4^3b_4 + 5889a_4b_1b_4 + 216060a_4^2a_6b_1b_4 + \\
 & + 45201a_6b_1^2b_4 - 292166a_4b_2b_4 - 373352a_4^2a_6b_2b_4 + 21138a_6b_1b_2b_4 + 3887a_6b_2^2b_4 - \\
 & - 134667a_4b_3b_4 + 38740a_4^2a_6b_3b_4 - 26442a_6b_1b_3b_4 - 2314a_6b_2b_3b_4 - 20839a_6b_3^2b_4 - \\
 & - 590822a_4b_4^2 - 850464a_4^2a_6b_4^2 + 64311a_6b_1b_4^2 - 11375a_6b_2b_4^2 + 7397a_6b_3b_4^2 - \\
 & - 55419a_6b_4^3 + 2a_2^2(1014000a_4^3 + a_4(-117363b_1 + 51904b_2 - 46307b_3 + 86156b_4) - \\
 & - 5a_6(8609b_1^2 - 936b_1b_2 + 1797b_2^2 + 7274b_1b_3 + 1797b_3^2 + 7274b_2b_4 + 936b_3b_4 + \\
 & + 8609b_4^2)) + 2a_1^2(1482000a_2^2a_4 - 858000a_4^3 + a_2(354323b_1 - 101024b_2 + \\
 & + 35937b_3 - 221506b_4) - a_4(25893b_1 + 470966b_2 - 10683b_3 + 1408054b_4) - \\
 & - 2a_6(212616b_1^2 + 9685b_1b_2 + 16121b_2^2 + 93338b_1b_3 - 1105b_2b_3 + 11246b_3^2 + \\
 & + 54015b_1b_4 + 47188b_2b_4 + 5005b_3b_4 + 30291b_4^2)) + a_2(-160176b_1^2 - 80769b_1b_2 - \\
 & - 10689b_2^2 - 135246b_1b_3 - 36257b_2b_3 - 29058b_3^2 + 2a_4^2(317767b_1 - 38416b_2 + \\
 & + 72493b_3 - 284114b_4) - 95589b_1b_4 - 29348b_2b_4 - 59865b_3b_4 - 7803b_4^2 + \\
 & + 130a_4a_6(231b_1^2 - 111b_2^2 - 1010b_2b_3 + 183b_3^2 - 482b_2b_4 - 2182b_3b_4 - 447b_4^2 - \\
 & - 2b_1(779b_2 - 313b_3 + 1065b_4)))a_1(390000a_2^4 + 78000a_4^4 + 112097b_1^2 - 33085b_1b_2 - \\
 & - 31618b_2^2 + 108788b_1b_3 - 38701b_2b_3 - 405b_3^2 + 2a_4^2(345797b_1 - 370056b_2 + \\
 & + 54213b_3 - 1188124b_4) + 323583b_1b_4 - 103918b_2b_4 + 24843b_3b_4 - 245104b_4^2 + \\
 & + 2a_2^2(1482000a_4^2 - 139933b_1 + 6674b_2 - 81197b_3 + 16466b_4) - 4a_4a_6(126397b_1^2 - \\
 & - 4680b_1b_2 + 19537b_2^2 + 88066b_1b_3 + 19537b_3^2 + 88066b_2b_4 + 4680b_3b_4 + \\
 & + 126397b_4^2) + 10a_2(2a_4(46671b_1 - 15176b_2 + 8397b_3 - 37838b_4) + 13a_6(447b_1^2 - \\
 & - 2182b_1b_2 - 183b_2^2 + 482b_1b_3 - 1010b_2b_3 + 111b_3^2 - 2130b_1b_4 - 626b_2b_4 - \\
 & - 1558b_3b_4 - 231b_4^2))))),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{7,7,0} &= \frac{1}{173056000}(-1718581962a_4^4b_1 + 612301918a_4^2b_1^2 - 1648064952a_4^3a_6b_1^2 + \\
 &+ 3407625b_1^3 + 38176450a_4a_6b_1^3 - 10308324a_6^2b_1^4 + 1030836226a_4^4b_2 - \dots, \\
 g_{8,8,0} &= \frac{1}{404951040000}(-29426178600000a_1^7 - 29260085400000a_1^6a_4 - \\
 &- 1273381200000a_2^6a_4 - 29426178600000a_4^7 - 21966530580408a_4^5b_1 + \dots, \\
 g_{9,9,0} &= \frac{1}{17898835968000000}(56362628731722195a_4^6b_1 - 979830416799143105a_4^4b_1^2 - \\
 &- 1684999402889094030a_4^5a_6b_1^2 + 280802408769950145a_4^2b_1^3 - \dots,
 \end{aligned}$$

Coeficientes Focais do Teorema 4.6 sob o conjunto dos parâmetros S_{21}

Nesta seção vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$, $g_{6,6,0}$ e $g_{7,7,0}$ do sistema (4.25) sob o conjunto dos parâmetros S_{21} .

$$\begin{aligned}
 g_{3,3,0} &= \frac{1}{40}(b_2(-3b_3^2 - 2b_3b_5 + 3b_5^2) + 2b_4(b_3^2 - 6b_3b_5 - b_5^2 + 4b_4(-2 + b_6)) + 2b_2^2(-2 + \\
 &+ b_6)) \\
 g_{4,4,0} &= -\frac{1}{400}(b_3^2 + b_5^2)(5b_2(b_3^2 + 2b_3b_5 - b_5^2) + 2b_4(-5b_3^2 + 10b_3b_5 + 5b_5^2 + b_4(42 - \\
 &- 20b_6)) + b_2^2(21 - 10b_6)) \\
 g_{5,5,0} &= \frac{1}{1632000}(12b_2^4(6866 - 2249b_6 - 1158b_6^2 + 283b_6^3) + b_2^3(b_3^2(21133 + 59064b_6 - \\
 &- 19188b_6^2) - 2b_3b_5(-79021 + 22272b_6 + 3396b_6^2) + b_5^2(-21133 - 59064b_6 + \\
 &+ 19188b_6^2)) + 2b_4(2475b_3^6 - 3150b_3^5b_5 - 2475b_5^6 + 6b_4b_5^4(1976 + 1933b_6) - \\
 &- 4b_4^2b_5^2(-79021 + 22272b_6 + 3396b_6^2) + 96b_4^3(6866 - 2249b_6 - 1158b_6^2 + 283b_6^3) - \\
 &- 36b_3^3b_5(175b_5^2 + 26b_4(122 + 41b_6)) + 3b_3^4(825b_5^2 + b_4(3952 + 3866b_6)) + \\
 &+ 2b_3b_5(-1575b_5^4 + 468b_4b_5^2(122 + 41b_6) + b_4^2(84532 + 236256b_6 - 76752b_6^2)) + \\
 &+ b_3^2(-2475b_5^4 + 12b_4b_5^2(-14448 + 10961b_6) + 4b_4^2(-79021 + 22272b_6 + 3396b_6^2))) + \\
 &+ b_2^2(468b_3^3b_5(122 + 41b_6) + 3b_3^4(-6236 + 6447b_6) + 3b_5^4(-6236 + 6447b_6) - \\
 &- 2b_4b_5^2(-79021 + 22272b_6 + 3396b_6^2) + 96b_4^2(6866 - 2249b_6 - 1158b_6^2 + 283b_6^3) + \\
 &+ 2b_3^2(3b_5^2(10188 - 2581b_6) + b_4(-79021 + 22272b_6 + 3396b_6^2)) - 4b_3b_5(117b_5^2(122 \\
 &+ 41b_6) + b_4(-21133 - 59064b_6 + 19188b_6^2))) - b_2(1575b_3^6 + 4950b_3^5b_5 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 12b_3^3b_5(825b_5^2 + b_4(16424 - 9028b_6)) + 9b_3^4(175b_5^2 + 52b_4(122 + 41b_6)) + b_5^2(- \\
& - 1575b_5^4 + 468b_4b_5^2(122 + 41b_6) + b_4^2(84532 + 236256b_6 - 76752b_6^2)) + \\
& + 2b_3b_5(2475b_5^4 + 24b_4b_5^2(-4106 + 2257b_6) + 4b_4^2(-79021 + 22272b_6 + 3396b_6^2)) + \\
& + b_3^2(-1575b_5^4 - 2808b_4b_5^2(122 + 41b_6) + 4b_4^2(-21133 - 59064b_6 + 19188b_6^2))) \\
g_{6,6,0} = & \frac{1}{424320000}(b_3^2 + b_5^2)(4b_2^4(7057310 + b_6(-28369 + 6b_6(-414163 + 64530b_6))) + \\
& + b_2^3(b_3^2(13928391 + 2(6365339 - 1667160b_6)b_6) + 2b_3b_5(15774687 + 2(371743 - \\
& + 774360b_6)b_6) + b_5^2(-13928391 + 2b_6(-6365339 + 1667160b_6))) + 8b_4(9975b_3^6 - \\
& - 9450b_3^5b_5 - 9975b_5^6 + 5b_4b_5^4(201749 + 46698b_6) + b_4^2b_5^2(15774687 + 2(371743 - \\
& - 774360b_6)b_6) - 20b_3^3b_5(945b_5^2 + 2b_4(58384 + 41679b_6)) + 5b_3^4(1995b_5^2 + \\
& + b_4(201749 + 46698b_6)) + 2b_3b_5(-4725b_5^4 + 20b_4b_5^2(58384 + 41679b_6) + \\
& + b_4^2(13928391 + 2(6365339 - 1667160b_6)b_6)) + 8b_4^3(7057310 + b_6(-28369 + 6b_6(- \\
& - 414163 + 64530b_6))) + b_3^2(-9975b_5^4 + 10b_4b_5^2(-460355 + 219714b_6) + b_4^2(- \\
& - 15774687 + 2b_6(-371743 + 774360b_6)))) + 2b_2^2(40b_3^3b_5(58384 + 41679b_6) + \\
& + 15b_3^4(-43101 + 44402b_6) + 15b_5^4(-43101 + 44402b_6) + b_4b_5^2(15774687 + \\
& + 2(371743 - 774360b_6)b_6) + 16b_4^2(7057310 + b_6(-28369 + 6b_6(-414163 + \\
& + 64530b_6))) + b_3^2(10b_5^2(532801 - 39810b_6) + b_4(-15774687 + 2b_6(-371743 + \\
& + 774360b_6))) - 2b_3b_5(20b_5^2(58384 + 41679b_6) + b_4(-13928391 + 2b_6(-6365339 + \\
& + 1667160b_6)))) + 4b_2(-4725b_3^6 - 19950b_3^5b_5 - 20b_3^3b_5(1995b_5^2 + b_4(331052 - \\
& - 86508b_6)) - 5b_3^4(945b_5^2 + 4b_4(58384 + 41679b_6)) + b_3^2(4725b_5^4 + 120b_4b_5^2(58384 + \\
& + 41679b_6) + b_4^2(13928391 + 2(6365339 - 1667160b_6)b_6)) + 2b_3b_5(-9975b_5^4 + \\
& + 40b_4b_5^2(82763 - 21627b_6) + b_4^2(15774687 + 2(371743 - 774360b_6)b_6)) + \\
& + b_5^2(4725b_5^4 - 20b_4b_5^2(58384 + 41679b_6) + b_4^2(-13928391 + 2b_6(-6365339 + \\
& + 1667160b_6))))), \\
g_{7,7,0} = & \frac{1}{32027673600000}(36b_2^6(-58080591968 + 16336960872b_6 + 13973377846b_6^2 - \\
& - 2576416797b_6^3 - 842838646b_6^4 + 112809736b_6^5) - 2b_2^5(b_5^2(126373351565 - \\
& - 1071812557984b_6 + 95272016559b_6^2 + 171367494966b_6^3 - 22760600616b_6^4) + \\
& + 2b_3b_5(813184034135 - 142229113672b_6 - 215503758753b_6^2 + 61843271598b_6^3 + \\
& + 3045862872b_6^4) + b_3^2(-126373351565 + 1071812557984b_6 - 95272016559b_6^2 - \\
& - 171367494966b_6^3 + 22760600616b_6^4)) + 2b_2^4(8b_3^3b_5(-994835392 - 99423808629b_6 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 26891713728b_6^2 + 5690150154b_6^3) + b_3^4(1473055789035 - 417668659106b_6 - \\
& - 411275903742b_6^2 + 67675575924b_6^3) + b_5^4(1473055789035 - 417668659106b_6 - \\
& - 411275903742b_6^2 + 67675575924b_6^3) - 2b_4b_5^2(813184034135 - 142229113672b_6 - \\
& - 215503758753b_6^2 + 61843271598b_6^3 + 3045862872b_6^4) + 216b_4^2(-58080591968 + \\
& + 16336960872b_6 + 13973377846b_6^2 - 2576416797b_6^3 - 842838646b_6^4 + \\
& + 112809736b_6^5) + 4b_3b_5(2b_5^2(994835392 + 99423808629b_6 - 26891713728b_6^2 - \\
& - 5690150154b_6^3) + b_4(126373351565 - 1071812557984b_6 + 95272016559b_6^2 + \\
& + 171367494966b_6^3 - 22760600616b_6^4)) + 2b_3^2(b_5^2(-669677297617 + \\
& + 356087292370b_6 + 140794926426b_6^2 - 18412571052b_6^3) + b_4(813184034135 - \\
& - 142229113672b_6 - 215503758753b_6^2 + 61843271598b_6^3 + 3045862872b_6^4))) - \\
& - b_2^3(2b_3^5b_5(-686859550277 + 52799777172b_6 + 90784146924b_6^2) + b_3^6(- \\
& - 814809241967 - 394687837008b_6 + 103909797324b_6^2) + b_3^4(5b_5^2(185360923613 + \\
& + 86053050720b_6 - 5767404228b_6^2) + 16b_4(-994835392 - 99423808629b_6 + \\
& + 26891713728b_6^2 + 5690150154b_6^3)) - 4b_3^3b_5(5b_5^2(25227732673 + \\
& + 48846424500b_6 - 533084940b_6^2) + 8b_4(535683271663 - 193438987869b_6 - \\
& - 138017707542b_6^2 + 21522036744b_6^3)) + 2b_3b_5(b_5^4(-686859550277 + \\
& + 52799777172b_6 + 90784146924b_6^2) + 16b_4b_5^2(535683271663 - 193438987869b_6 - \\
& - 138017707542b_6^2 + 21522036744b_6^3) + 16b_4^2(813184034135 - 142229113672b_6 - \\
& - 215503758753b_6^2 + 61843271598b_6^3 + 3045862872b_6^4)) + b_5^2(b_5^4(814809241967 + \\
& + 394687837008b_6 - 103909797324b_6^2) + 16b_4b_5^2(-994835392 - 99423808629b_6 + \\
& + 26891713728b_6^2 + 5690150154b_6^3) - 16b_4^2(-126373351565 + 1071812557984b_6 - \\
& - 95272016559b_6^2 - 171367494966b_6^3 + 22760600616b_6^4)) + b_3^2(5b_5^4(-185360923613 - \\
& - 86053050720b_6 + 5767404228b_6^2) - 96b_4b_5^2(-994835392 - 99423808629b_6 + \\
& + 26891713728b_6^2 + 5690150154b_6^3) + 16b_4^2(-126373351565 + 1071812557984b_6 - \\
& - 95272016559b_6^2 - 171367494966b_6^3 + 22760600616b_6^4))) + 2b_2^2(2700b_3^7b_5(8380343 + \\
& + 10989406b_6) + 675b_3^8(-14523577 + 11426372b_6) + 675b_5^8(-14523577 + 11426372b_6) \\
& + b_4b_5^6(686859550277 - 52799777172b_6 - 90784146924b_6^2) + 8b_4^2b_5^4(937372517372 - \\
& - 224229671237b_6 - 273258196200b_6^2 + 46153539180b_6^3) - 16b_4^3b_5^2(813184034135 - \\
& - 142229113672b_6 - 215503758753b_6^2 + 61843271598b_6^3 + 3045862872b_6^4) + 864b_4^4(-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 58080591968 + 16336960872b_6 + 13973377846b_6^2 - 2576416797b_6^3 - 842838646b_6^4 + \\
& + 112809736b_6^5) + 2b_3^5b_5(1350b_5^2(8380343 + 10989406b_6) + b_4(1685616171983 + \\
& + 807164382312b_6 - 170283206556b_6^2)) - 20b_3^3b_5^3(135b_5^2(8380343 + 10989406b_6) + \\
& + b_4(185360923613 + 86053050720b_6 - 5767404228b_6^2)) + b_3^6(2700b_5^2(27213647 + \\
& + 8731280b_6) + b_4(-686859550277 + 52799777172b_6 + 90784146924b_6^2)) + \\
& + b_3^4(12150b_5^4(13708685 + 2610972b_6) - 5b_4b_5^2(-535493154239 + 345878324172b_6 + \\
& + 87585637284b_6^2) + 8b_4^2(937372517372 - 224229671237b_6 - 273258196200b_6^2 + \\
& + 46153539180b_6^3)) + b_3^2(2700b_5^6(27213647 + 8731280b_6) + 5b_4b_5^4(-535493154239 + \\
& + 345878324172b_6 + 87585637284b_6^2) + 16b_4^2b_5^2(937372517372 - 224229671237b_6 - \\
& - 273258196200b_6^2 + 46153539180b_6^3) + 16b_4^3(813184034135 - 142229113672b_6 - \\
& - 215503758753b_6^2 + 61843271598b_6^3 + 3045862872b_6^4)) + 2b_3b_5(-1350b_5^6(8380343 + \\
& + 10989406b_6) + b_4b_5^4(1685616171983 + 807164382312b_6 - 170283206556b_6^2) - 16b_4^3(- \\
& - 126373351565 + 1071812557984b_6 - 95272016559b_6^2 - 171367494966b_6^3 + \\
& + 22760600616b_6^4))) + 4b_4(58235625b_3^{10} - 44178750b_3^9b_5 - 58235625b_5^{10} + \\
& + 1350b_4b_5^8(27213647 + 8731280b_6) + 2b_4^2b_5^6(406499106821 + 95716172664b_6 - \\
& - 46724785812b_6^2) + 8b_4^3b_5^4(401689245709 - 30790683368b_6 - 135240488658b_6^2 + \\
& + 24631502436b_6^3) - 16b_4^4b_5^2(813184034135 - 142229113672b_6 - 215503758753b_6^2 + \\
& + 61843271598b_6^3 + 3045862872b_6^4) + 576b_4^5(-58080591968 + 16336960872b_6 + \\
& + 13973377846b_6^2 - 2576416797b_6^3 - 842838646b_6^4 + 112809736b_6^5) + 675b_3^8(258825b_5^2 + \\
& + 2b_4(27213647 + 8731280b_6)) - 5400b_3^7b_5(32725b_5^2 + b_4(8380343 + 10989406b_6)) + \\
& + 2b_3^6(58235625b_5^4 + 2700b_4b_5^2(-14523577 + 11426372b_6) + b_4^2(-406499106821 - \\
& - 95716172664b_6 + 46724785812b_6^2)) - 4b_3^5b_5(66268125b_5^4 + 1350b_4b_5^2(8380343 + \\
& + 10989406b_6) + b_4^2(-379405776959 - 188449564356b_6 + 70723092708b_6^2)) - \\
& - 8b_3^3b_5(22089375b_5^6 - 675b_4b_5^4(8380343 + 10989406b_6) + 5b_4^2b_5^2(-250042541395 - \\
& - 120185221932b_6 + 27419300388b_6^2) + 8b_4^3(-994835392 - 99423808629b_6 + \\
& + 26891713728b_6^2 + 5690150154b_6^3)) + 2b_3^4(-58235625b_5^6 + 4050b_4b_5^4(-28435985 + \\
& + 12324736b_6) + 5b_4^2b_5^2(-305588176129 + 99669525336b_6 + 44592446052b_6^2) + \\
& + 4b_4^3(401689245709 - 30790683368b_6 - 135240488658b_6^2 + 24631502436b_6^3)) + b_3^2(- \\
& - 174706875b_5^8 + 5400b_4b_5^6(-14523577 + 11426372b_6) - 10b_4^2b_5^4(-305588176129 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 99669525336b_6 + 44592446052b_6^2) + 16b_4^3b_5^2(2544422332361 - 804546634844b_6 - \\
 & - 687311318826b_6^2 + 110719649412b_6^3) + 16b_4^4(813184034135 - 142229113672b_6 - \\
 & - 215503758753b_6^2 + 61843271598b_6^3 + 3045862872b_6^4)) + 2b_3b_5(-22089375b_5^8 + \\
 & + 2700b_4b_5^6(8380343 + 10989406b_6) + 2b_4^2b_5^4(379405776959 + 188449564356b_6 - \\
 & - 70723092708b_6^2) + 32b_4^3b_5^2(-994835392 - 99423808629b_6 + 26891713728b_6^2 + \\
 & + 5690150154b_6^3) - 16b_4^4(-126373351565 + 1071812557984b_6 - 95272016559b_6^2 - \\
 & - 171367494966b_6^3 + 22760600616b_6^4))) - 2b_2(22089375b_3^{10} + 116471250b_3^9b_5 + \\
 & + 5400b_3^7b_5(86275b_5^2 + b_4(41737224 - 2695092b_6)) + 675b_3^8(98175b_5^2 + 4b_4(8380343 + \\
 & + 10989406b_6)) - 4b_3^5b_5(-174706875b_5^4 + 16200b_4b_5^2(-3478102 + 224591b_6) + \\
 & + b_4^2(-154221780091 + 392748072336b_6 + 41393936412b_6^2)) + 2b_3^6(22089375b_5^4 - \\
 & - 5400b_4b_5^2(8380343 + 10989406b_6) + b_4^2(-379405776959 - 188449564356b_6 + \\
 & + 70723092708b_6^2)) + 2b_3^4(-22089375b_5^6 - 13500b_4b_5^4(8380343 + 10989406b_6) + 5b_4^2b_5^2(- \\
 & - 1120849471411 - 532661767236b_6 + 93792709620b_6^2) + 16b_4^3(-994835392 - \\
 & - 99423808629b_6 + 26891713728b_6^2 + 5690150154b_6^3)) + 8b_3^3b_5(58235625b_5^6 + \\
 & + 8100b_4b_5^4(-3478102 + 224591b_6) + 5b_4^2b_5^2(-305588176129 + 99669525336b_6 + \\
 & + 44592446052b_6^2) - 8b_4^3(535683271663 - 193438987869b_6 - 138017707542b_6^2 + \\
 & + 21522036744b_6^3)) + 2b_3b_5(58235625b_5^8 + 32400b_4b_5^6(-3478102 + 224591b_6) - \\
 & - 2b_4^2b_5^4(-154221780091 + 392748072336b_6 + 41393936412b_6^2) + 32b_4^3b_5^2(535683271663 \\
 & - 193438987869b_6 - 138017707542b_6^2 + 21522036744b_6^3) + 16b_4^4(813184034135 - \\
 & - 142229113672b_6 - 215503758753b_6^2 + 61843271598b_6^3 + 3045862872b_6^4)) + b_5^2(- \\
 & - 22089375b_5^8 + 2700b_4b_5^6(8380343 + 10989406b_6) + 2b_4^2b_5^4(379405776959 + \\
 & + 188449564356b_6 - 70723092708b_6^2) + 32b_4^3b_5^2(-994835392 - 99423808629b_6 + \\
 & + 26891713728b_6^2 + 5690150154b_6^3) - 16b_4^4(-126373351565 + 1071812557984b_6 - \\
 & - 95272016559b_6^2 - 171367494966b_6^3 + 22760600616b_6^4)) + b_3^2(-66268125b_5^8 - \\
 & - 10800b_4b_5^6(8380343 + 10989406b_6) + 10b_4^2b_5^4(1120849471411 + 532661767236b_6 - \\
 & - 93792709620b_6^2) - 192b_4^3b_5^2(-994835392 - 99423808629b_6 + 26891713728b_6^2 + \\
 & + 5690150154b_6^3) + 16b_4^4(-126373351565 + \\
 & + 1071812557984b_6 - 95272016559b_6^2 - 171367494966b_6^3 + 22760600616b_6^4))).
 \end{aligned}$$

Coeficientes Focais do Teorema 4.6 sob o conjunto dos parâmetros S_{22}

Nesta seção vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$ e $g_{6,6,0}$ do sistema (4.25) sob o conjunto dos parâmetros S_{22} e devido ao tamanho excessivo dos coeficientes focais $g_{7,7,0}$, $g_{8,8,0}$, $g_{9,9,0}$, $g_{10,10,0}$ e $g_{11,11,0}$ vamos omitir boa parte das suas expressões.

$$\begin{aligned}
 g_{3,3,0} &= \frac{1}{40}(b_2(-10 - 3b_3^2 + b_3(13 - 2b_5) + 11b_5 + 3b_5^2) + 2b_4(20 + b_3^2 + 13b_5 - b_5^2 - \\
 &\quad - b_3(11 + 6b_5) + 4b_4(-2 + b_6)) + 2b_2^2(-2 + b_6)) \\
 g_{4,4,0} &= \frac{1}{400}(b_2(1250 - 5b_3^4 - 10b_3^3(-3 + b_5) - 1325b_5 - 203b_5^2 + 61b_5^3 + 5b_5^4 + b_3^2(320 + \\
 &\quad + 39b_5) - b_3(1595 - 211b_5 + 44b_5^2 + 10b_5^3)) + b_2^2(324 + b_3(100 - 47b_6) - 166b_6 + \\
 &\quad + b_3^2(-21 + 10b_6) + b_5^2(-21 + 10b_6) + b_5(-91 + 45b_6)) + 2b_4(-2400 + 5b_4^4 - \\
 &\quad + 1355b_5 + 251b_5^2 - 7b_5^3 - 5b_5^4 - 10b_3^3(5 + b_5) + b_3(1155 + 523b_5 - 72b_5^2 - 10b_5^3 + \\
 &\quad + b_4(200 - 94b_6)) + b_3^2(40 + 67b_5 + b_4(-42 + 20b_6)) + 2b_4(324 - 166b_6 + b_5^2(- \\
 &\quad - 21 + 10b_6) + b_5(-91 + 45b_6)))) \\
 g_{5,5,0} &= \frac{1}{1632000}(12b_2^4(6866 - 2249b_6 - 1158b_6^2 + 283b_6^3) - b_2^3(-1223842 + 431764b_6 + \\
 &\quad + 38016b_6^2 + b_5(40821 + 261942b_6 - 83916b_6^2) + b_5^2(21133 + 59064b_6 - 19188b_6^2) + \\
 &\quad + b_3^2(-21133 - 59064b_6 + 19188b_6^2) + b_3(492363 + 71026b_6 - 90948b_6^2 + 2b_5(- \\
 &\quad - 79021 + 22272b_6 + 3396b_6^2))) + b_2^2(3b_3^4(-6236 + 6447b_6) + 96b_4^2(6866 - 2249b_6 - \\
 &\quad - 1158b_6^2 + 283b_6^3) + 3b_3^3(-70457 - 54285b_6 + 156b_5(122 + 41b_6)) + 3(-4854020 + \\
 &\quad + 3078580b_6 + b_5^4(-6236 + 6447b_6) + b_5^3(-90289 + 63395b_6) - b_5^2(20473 + \\
 &\quad + 102932b_6) - 2b_5(-523841 + 543299b_6)) - 2b_4(921974 + 119872b_6 - 186432b_6^2 + \\
 &\quad + b_5(492363 + 71026b_6 - 90948b_6^2) + b_5^2(-79021 + 22272b_6 + 3396b_6^2)) + b_3^2(2b_4(- \\
 &\quad - 79021 + 22272b_6 + 3396b_6^2) - 3(-1253813 + 115652b_6 + b_5^2(-20376 + 5162b_6) + \\
 &\quad + 5b_5(29553 + 10045b_6))) + b_3(-3(4260740 - 1099150b_6 + 156b_5^3(122 + 41b_6) + \\
 &\quad + b_5^2(-45011 + 1825b_6) - 2b_5(342161 + 46018b_6)) + b_4(81642 + 523884b_6 - \\
 &\quad - 167832b_6^2 + b_5(84532 + 236256b_6 - 76752b_6^2)))) - b_2(1575b_3^6 + 2475b_3^5(-5 + \\
 &\quad + 2b_5) - 3(-26188500 + 27530350b_5 + 3541710b_5^2 - 1349721b_5^3 - 38203b_5^4 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 12415b_5^5 + 525b_5^6) + 3b_3^4(-119925 - 7835b_5 + 525b_5^2 + 156b_4(122 + 41b_6)) + \\
& + 12b_4(1700(811 + 38b_6) + 39b_5^4(122 + 41b_6) - 30b_5(-20158 + 4775b_6) - \\
& - b_5^3(28867 + 13115b_6) - 3b_5^2(89517 + 43582b_6)) - 4b_4^2(1223842 - 431764b_6 - \\
& - 38016b_6^2 + b_5^2(-21133 - 59064b_6 + 19188b_6^2) + 3b_5(-13607 - 87314b_6 + \\
& + 27972b_6^2)) - 3b_3^3(-5(155085 - 49524b_5 + 3850b_5^2 + 660b_5^3) + 4b_4(14369 + \\
& + 28405b_6 + 4b_5(-4106 + 2257b_6))) + b_3^2(-3(-6415350 - 988325b_5 + 111138b_5^2 + \\
& + 20250b_5^3 + 525b_5^4) + 4b_4^2(-21133 - 59064b_6 + 19188b_6^2) - 36b_4(-89517 - \\
& - 43582b_6 + 78b_5^2(122 + 41b_6) - b_5(28867 + 13115b_6))) + b_3(3(-33255750 + \\
& + 4276480b_5 - 944947b_5^2 - 157612b_5^3 + 23375b_5^4 + 1650b_5^5) + 12b_4(4b_5^3(- \\
& - 4106 + 2257b_6) - 10(130053 + 19625b_6) + b_5(-749786 + 24744b_6) + b_5^2(43107 + \\
& + 85215b_6)) + 4b_4^2(492363 + 71026b_6 - 90948b_6^2 + 2b_5(-79021 + 22272b_6 + \\
& + 3396b_6^2)))) + 2b_4(2475b_3^6 - 225b_3^5(135 + 14b_5) + 3(49776000 + 27171450b_5 - \\
& - 5591700b_5^2 + 303627b_5^3 + 119441b_5^4 - 9625b_5^5 - 825b_5^6) + 96b_4^3(6866 - 2249b_6 - \\
& - 1158b_6^2 + 283b_6^3) + 3b_3^4(25(-3327 + 715b_5 + 33b_5^2) + b_4(3952 + 3866b_6)) + \\
& + 6b_4(-4541220 + b_5(3648742 - 694098b_6) + b_5^2(729313 - 127676b_6) + \\
& + 3387980b_6 + b_5^4(1976 + 1933b_6) + b_5^3(-119027 + 6585b_6)) - 4b_4^2(921974 + \\
& + 119872b_6 - 186432b_6^2 + b_5(492363 + 71026b_6 - 90948b_6^2) + b_5^2(-79021 + \\
& + 22272b_6 + 3396b_6^2)) - 3b_3^3(5(-239625 - 28684b_5 + 4966b_5^2 + 420b_5^3) + \\
& + 2b_4(12723 + 28055b_6 + 156b_5(122 + 41b_6))) + b_3^2(-3(1567500 + 1416745b_5 - \\
& - 126274b_5^2 - 8250b_5^3 + 825b_5^4) + 4b_4^2(-79021 + 22272b_6 + 3396b_6^2) + \\
& + 6b_4(504027 - 90908b_6 + b_5^2(-28896 + 21922b_6) + b_5(-61551 + 120205b_6))) - \\
& - b_3(69376950 + 30581100b_5 - 4678563b_5^2 - 518508b_5^3 + 44115b_5^4 + \\
& + 3150b_5^5 - 6b_4(-3051260 + 812650b_6 + 156b_5^3(122 + 41b_6) - b_5^2(128191 + \\
& + 80515b_6) - 2b_5(194941 + 215474b_6)) + 4b_4^2(-40821 - 261942b_6 + \\
& + 83916b_6^2 + 2b_5(-21133 - 59064b_6 + 19188b_6^2)))))) \\
g_{6,6,0} &= \frac{1}{7213440000} (2b_2^4(34b_3^2(7057310 - 28369b_6 - 2484978b_6^2 + 387180b_6^3) + \\
& + 34b_5^2(7057310 - 28369b_6 - 2484978b_6^2 + 387180b_6^3) - 34(132136537 - \\
& - 40461157b_6 - 17855810b_6^2 + 2368314b_6^3) - 17b_3(81821863 - 45487459b_6 - \\
& - 4499822b_6^2 + 3630906b_6^3) + b_5(-88854334 + 541225059b_6 - 372586340b_6^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 62765622b_6^3)) + b_2^3(b_5(13406557128 + 28375190324b_6 - 8792862624b_6^2) + \\
& + b_5^2(9509106023 + 1186816193b_6 - 510121224b_6^2) + b_3^4(236782647 + \\
& + 216421526b_6 - 56683440b_6^2) + 3400(-50518980 + 18297869b_6 + 1227324b_6^2) + \\
& + 17b_5^4(-13928391 - 12730678b_6 + 3334320b_6^2) + 3b_5^3(-35845784 - \\
& - 703458293b_6 + 196653028b_6^2) - 17b_3^3(2b_5(-15774687 - 743486b_6 + \\
& + 1548720b_6^2) - 3(-97091397 + 7333919b_6 + 8889396b_6^2)) + b_3^2(17(1125373302 - \\
& - 851277109b_6 + 58266432b_6^2) + b_5(-4477759326 + 757038505b_6 + \\
& + 184752540b_6^2)) + b_3(136(337812354 + 111415357b_6 - 68688702b_6^2) - \\
& - 34b_5^3(-15774687 - 743486b_6 + 1548720b_6^2) - 3b_5^2(-116931145 + \\
& + 64797541b_6 + 84309084b_6^2 + b_5(-15151056143 + 4108625008b_6 + \\
& + 620728776b_6^2))) - 2b_2(160650b_3^8 + 35700b_3^7(-44 + 19b_5) - 3(1215549172500 - \\
& - 1276031504750b_5 - 159294600950b_5^2 + 62047575965b_5^3 + 1004522063b_5^4 - \\
& - 601801761b_5^5 - 4702315b_5^6 + 2043650b_5^7 + 53550b_5^8) + 5b_3^6(105(- \\
& - 175559 - 7634b_5 + 612b_5^2) + 136b_4(58384 + 41679b_6)) + 4b_4(b_5^3(2341199134 - \\
& - 30225678b_6) - 1127100(325297 + 10562b_6) + 170b_5^6(58384 + 41679b_6) + 6b_5^5(- \\
& - 7094128 + 5992157b_6) + 170b_5(-779003524 + 151865661b_6) - b_5^4(2584918679 + \\
& + 657505830b_6) + 25b_5^2(2865188345 + 824439702b_6)) - 2b_4^2(b_5(13406557128 + \\
& + 28375190324b_6 - 8792862624b_6^2) + b_5^2(9509106023 + 1186816193b_6 - \\
& - 510121224b_6^2) + 3400(-50518980 + 18297869b_6 + 1227324b_6^2) + 17b_5^4(- \\
& - 13928391 - 12730678b_6 + 3334320b_6^2) + 3b_5^3(-35845784 - 703458293b_6 + \\
& + 196653028b_6^2)) - 5b_3^5(-15(10134125 - 3953380b_5 + 197892b_5^2 + 27132b_5^3) + \\
& + 68b_4(2110579 + 1273203b_6 + 8b_5(-82763 + 21627b_6))) + b_3^4(-15(- \\
& - 1124912015 - 94768545b_5 + 14344803b_5^2 + 943110b_5^3) + 34b_4^2(-13928391 - \\
& - 12730678b_6 + 3334320b_6^2) - 4b_4(850b_5^2(58384 + 41679b_6) - 85(18287968 + \\
& + 3301005b_6) - 6b_5(75687202 + 12500267b_6))) + b_3^3(15(-7442052005 + \\
& + 2353779610b_5 - 212415730b_5^2 - 28985184b_5^3 + 2293080b_5^4 + 135660b_5^5) + \\
& + 4b_4(510(-18636884 + 7608577b_6) + 6b_5^2(161793431 + 32611851b_6) + b_5(- \\
& - 6699962323 + 1518578565b_6)) + 34b_4^2(2b_5(-15774687 - 743486b_6 + \\
& + 1548720b_6^2) - 3(-97091397 + 7333919b_6 + 8889396b_6^2))) + b_3(3(1542140307750 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 197603997800b_5 + 42958220195b_5^2 + 6671309706b_5^3 - 1205021119b_5^4 - \\
& - 46091420b_5^5 + 5994500b_5^6 + 226100b_5^7) + 4b_4(b_5(192197228470 - 4695778860b_6) + \\
& + 680b_5^5(-82763 + 21627b_6) + 3b_5^3(1436437283 + 55169235b_6) + 170(2014745603 + \\
& + 209872473b_6) + b_5^4(-73764511 + 345440169b_6) - 2b_5^2(4457777918 + \\
& + 6590847789b_6)) + 2b_4^2(b_5(15151056143 - 4108625008b_6 - 620728776b_6^2) + \\
& + 34b_5^3(-15774687 - 743486b_6 + 1548720b_6^2) + 136(-337812354 - 111415357b_6 + \\
& + 68688702b_6^2) + 3b_5^2(-116931145 + 64797541b_6 + 84309084b_6^2))) - \\
& - b_3^2(3(295227595550 + 47209791625b_5 - 6620830020b_5^2 - 977939334b_5^3 + \\
& + 36298875b_5^4 + 5423250b_5^5 + 107100b_5^6) + 4b_4(850b_5^4(58384 + 41679b_6) + \\
& + 12b_5^3(20108281 + 21230526b_6) + 255(202827343 + 88989986b_6) - \\
& - 3b_5^2(1030441399 + 376920405b_6) + 6b_5(3826694549 + 1157403007b_6)) + \\
& + 2b_4^2(17(1125373302 - 851277109b_6 + 58266432b_6^2) + b_5(-4477759326 + \\
& + 757038505b_6 + 184752540b_6^2)))) + 2b_2^2(527206777800 - 29383341270b_5 + \\
& + 40159892789b_5^2 + 13170739958b_5^3 - 23084128b_5^4 - 194125774b_5^5 - \\
& - 10990755b_5^6 - 418978448700b_6 + 153387228330b_5b_6 + 9469898034b_5^2b_6 - \\
& - 9328137510b_5^3b_6 - 14538810b_5^4b_6 + 203423526b_5^5b_6 + 11322510b_5^6b_6 + \\
& + 255b_3^6(-43101 + 44402b_6) + 85b_3^5(-4899328 - 1284243b_6 + 8b_5(58384 + \\
& + 41679b_6)) + b_3^4(85(56230391 - 9722847b_6) + 1105b_5^2(72023 + 4122b_6) - \\
& - 2b_5(455861317 + 114732747b_6) + 17b_4(-15774687 - 743486b_6 + 1548720b_6^2)) + \\
& + b_4(b_5(55422339594 + 5362465542b_6 - 6732271032b_6^2) - 17b_5^4(- \\
& - 15774687 - 743486b_6 + 1548720b_6^2) + 3b_5^3(-766811302 + 29939541b_6 + \\
& + 33405324b_6^2) - 340(-402929589 - 4138466b_6 + 57322368b_6^2) + b_5^2(- \\
& - 20499128371 + 2726026789b_6 + 2017171608b_6^2)) + 8b_4^2(34b_5^2(7057310 - \\
& - 28369b_6 - 2484978b_6^2 + 387180b_6^3) - 34(132136537 - 40461157b_6 - \\
& - 17855810b_6^2 + 2368314b_6^3) + b_5(-88854334 + 541225059b_6 - 372586340b_6^2 \\
& + 62765622b_6^3)) + b_3^3(b_5(1393199581 - 648112365b_6) + b_5^2(-9768872 + \\
& + 3587778b_6) + 255(51995303 + 37456720b_6) - 17b_4(-134861667 - 39804011b_6 + \\
& + 22785636b_6^2 + b_5(-27856782 - 25461356b_6 + 6668640b_6^2))) - b_3(b_5^2(6659122823 \\
& - 1371206844b_6) + 680b_5^5(58384 + 41679b_6) + b_5^4(246183808 + 252972423b_6) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 20b_5(7879752304 + 846323925b_6) - b_5^3(5514965177 + 859569255b_6) + 170(- \\
& - 4785283319 + 902733081b_6) + 136b_4^2(81821863 - 45487459b_6 - 4499822b_6^2 + \\
& + 3630906b_6^3) + b_4(b_5(-9622240111 + 15658527046b_6 - 1500650568b_6^2) + \\
& + 34b_5^3(-13928391 - 12730678b_6 + 3334320b_6^2) - 34(1261117678 - 1444614641b_6 \\
& + 187673196b_6^2) + b_5^2(2077573635 - 3544081571b_6 + 792562356b_6^2))) + \\
& + b_3^2(1105b_5^4(72023 + 4122b_6) - 8b_5^3(-14759488 + 8448597b_6) + 45b_5^2(- \\
& - 138950557 + 11379779b_6) + 85(-3132966047 + 129274566b_6) + \\
& + b_5(21990878518 + 8959774674b_6) + 272b_4^2(7057310 - 28369b_6 - 2484978b_6^2 + \\
& + 387180b_6^3) + b_4(17(-314592484 - 81329307b_6 + 82143696b_6^2) + b_5(-7602888588 \\
& + 658241115b_6 + 806502420b_6^2)))) + 4b_4(339150b_3^8 - 35700b_3^7(142 + \\
& + 9b_5) - 3(2306046600000 + 1251739788250b_5 - 260666454900b_5^2 + \\
& + 15778065735b_5^3 + 5444178761b_5^4 - 569128947b_5^5 - 31669335b_5^6 + \\
& + 2735450b_5^7 + 113050b_5^8) + 5b_3^6(15(-1631745 + 151306b_5 + 9044b_5^2) + \\
& + 34b_4(201749 + 46698b_6)) + 2b_4(85b_5^6(201749 + 46698b_6) - 790500(- \\
& - 507198 + 600449b_6) - 6b_5^3(-5265184439 + 4469367b_6) - 2b_5^5(123471563 + \\
& + 11703843b_6) - 6b_5^4(263346239 + 86385705b_6) + 10b_5(-70520965529 + \\
& + 8723036391b_6) + b_5^2(-114939805661 + 18918727734b_6)) + 2b_4^2(b_5(55422339594 \\
& + 5362465542b_6 - 6732271032b_6^2) - 17b_5^4(-15774687 - 743486b_6 + 1548720b_6^2) + \\
& + 3b_5^3(-766811302 + 29939541b_6 + 33405324b_6^2) - 340(-402929589 - 4138466b_6 \\
& + 57322368b_6^2) + b_5^2(-20499128371 + 2726026789b_6 + 2017171608b_6^2)) + \\
& + 8b_4^3(34b_5^2(7057310 - 28369b_6 - 2484978b_6^2 + 387180b_6^3) - 34(132136537 - \\
& - 40461157b_6 - 17855810b_6^2 + 2368314b_6^3) + b_5(-88854334 + 541225059b_6 - \\
& - 372586340b_6^2 + 62765622b_6^3)) - 5b_3^5(15(-23752825 - 1117392b_5 + 231084b_5^2 + \\
& + 12852b_5^3) + 34b_4(1977634 + 1054545b_6 + 8b_5(58384 + 41679b_6)))) + \\
& + b_3^4(15(682202265 - 188890125b_5 + 565033b_5^2 + 965970b_5^3) + 34b_4^2(-15774687 - \\
& - 743486b_6 + 1548720b_6^2) + 2b_4(85b_5^2(-718961 + 486126b_6) + 85(9787523 + \\
& + 4163163b_6) + 6b_5(78442289 + 68246889b_6))) - b_3^3(15(11250216565 + \\
& + 1130018110b_5 - 253349542b_5^2 - 14170056b_5^3 + 1296960b_5^4 + 64260b_5^5) + \\
& + 2b_4(85(86590187 - 30315528b_6) + 2b_5^2(579657334 + 200590869b_6) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b_5(2763826741 + 1016613255b_6)) + 34b_4^2(-134861667 - 39804011b_6 + \\
& + 22785636b_6^2 + b_5(-27856782 - 25461356b_6 + 6668640b_6^2))) + b_3^2(-3(- \\
& - 78296517500 - 64057376325b_5 + 7130755780b_5^2 + 264911022b_5^3 - 75288125b_5^4 \\
& + 1688250b_5^5 + 226100b_5^6) + 272b_4^3(7057310 - 28369b_6 - 2484978b_6^2 + \\
& + 387180b_6^3) + 2b_4(85b_5^4(-718961 + 486126b_6) + 72b_5^3(-13891857 + \\
& + 5939173b_6) + 85(-435380653 + 129948354b_6) - 3b_5^2(-3420378731 + \\
& + 505838745b_6) - 6b_5(-6931625867 + 2643840619b_6)) + 2b_4^2(17(-314592484 - \\
& - 81329307b_6 + 82143696b_6^2) + b_5(-7602888588 + 658241115b_6 + \\
& + 806502420b_6^2))) + b_3(-3(-1064489531250 - 469010735500b_5 + 71478021645b_5^2 \\
& + 7650882558b_5^3 - 770632237b_5^4 - 42915480b_5^5 + 2397500b_5^6 + 107100b_5^7) - \\
& - 136b_4^3(81821863 - 45487459b_6 - 4499822b_6^2 + 3630906b_6^3) + 2b_4(680b_5^5(58384 + \\
& + 41679b_6) + b_5^4(-338357962 + 54175443b_6) - 1530(-316599719 + 68540591b_6) \\
& - b_5^3(6885592337 + 2524294875b_6) + 20b_5(4455315805 + 3484019973b_6) + \\
& + b_5^2(23324641873 + 8224947852b_6)) + 2b_4^2(b_5^2(-2077573635 + 3544081571b_6 - \\
& - 792562356b_6^2) - 34b_5^3(-13928391 - 12730678b_6 + 3334320b_6^2) + \\
& + 34(1261117678 - 1444614641b_6 + 187673196b_6^2) + b_5(9622240111 - \\
& - 15658527046b_6 + 1500650568b_6^2))))), \\
g_{7,7,0} &= \frac{1}{70781158656000000}(7956b_2^6(-58080591968 + 16336960872b_6 + 13973377846b_6^2 \\
& - 2576416797b_6^3 - 842838646b_6^4 + 112809736b_6^5) - 442b_2^5(b_5^2(126373351565 - \dots, \\
g_{8,8,0} &= \frac{1}{167845484955732480000000}(884b_2^6(629b_3^2(-42967515540569425 - \\
& - 6913449013614809b_6 + 20912649488894245b_6^2 - 646053473416852b_6^3 - \dots, \\
g_{9,9,0} &= \frac{1}{167167154212832382755328000000000}(3301602759000b_2^8(\\
& 8908258139352632708 - 3006665365169665930b_6 - \dots, \\
g_{10,10,0} &= \frac{1}{723572340950212205974069043310796800000000000}(3144383580b_2^8(\\
& 1258b_3^2(115704614984226805360763659482100 - \dots. \\
g_{11,11,0} &= \frac{1}{603684811027612105035969541979910834174702076968960000000000000}(\\
& 535904118350853471765000b_2^{10}(-\dots.
\end{aligned}$$

Coeficientes Focais do Teorema 4.8

Nesta seção vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais $g_{2,2,0}$, $g_{3,3,0}$, $g_{4,4,0}$, $g_{5,5,0}$ e $g_{6,6,0}$ do sistema (4.44) sob o conjunto dos parâmetros S_2 e devido ao tamanho excessivo dos coeficientes focais $g_{7,7,0}$ e $g_{8,8,0}$ vamos omitir boa parte das suas expressões.

$$\begin{aligned}
g_{2,2,0} &= a_1(b_1 + b_4), \\
g_{3,3,0} &= \frac{1}{20}a_1(-b_2 + b_2^2(-2a_1 + b_6) + b_1^2(18a_1 + 11b_6) + b_4(7 + 18a_1b_4 + 11b_4b_6) + \\
&\quad + b_1(13 + 44a_1b_4 + 18b_4b_6)), \\
g_{4,4,0} &= \frac{1}{200}(5a_3(b_1 + b_4)(13b_1^2 + 3b_2^2 + 14b_1b_4 + 13b_4^2) + 4a_1^3(b_1 + b_4)(98b_1^2 - \\
&\quad - 27b_2^2 + 304b_1b_4 + 98b_4^2) + 2a_1(57b_1^3b_6^2 - b_2(5 + 7b_4b_6) + b_2^2b_6(5 + 7b_4b_6) + \\
&\quad + b_1^2b_6(141 + 143b_4b_6) + b_4(10 + 69b_4b_6 + 57b_4^2b_6^2) + b_1(20 - 7b_2b_6 + 190b_4b_6 + \\
&\quad + 7b_2^2b_6^2 + 143b_4^2b_6^2)) + a_1^2(-124b_2b_4 + 431b_1^3b_6 - b_2^2(21 + 19b_4b_6) + b_4^2(237 + \\
&\quad + 431b_4b_6) + b_1^2(221 + 1369b_4b_6) + b_1(-124b_2 - 19b_2^2b_6 + b_4(542 + 1369b_4b_6))), \\
g_{5,5,0} &= \frac{1}{2448000}(12a_1^4(1677931b_1^4 + 10299b_2^4 + 8254804b_1^3b_4 - 385770b_2^2b_4^2 + 1677931b_4^4 - \\
&\quad - 30b_1^2(12859b_2^2 - 443951b_4^2) + b_1(-853932b_2^2b_4 + 8254804b_4^3)) + 54a_3(-201b_2^3 + \\
&\quad + 8299b_2b_4^2 + 21935b_1^4b_6 + 175b_2^4b_6 + 2b_2^2b_4(1026 + 2555b_4b_6) + b_4^3(29252 + \\
&\quad + 21935b_4b_6) + b_1^3(44188 + 67300b_4b_6) + 2b_1(8701b_2b_4 + 14b_2^2(121 + 315b_4b_6) + \\
&\quad + 2b_4^2(23621 + 16825b_4b_6)) + b_1^2(8299b_2 + 5110b_2^2b_6 + 2b_4(52038 + 46765b_4b_6))) + \\
&\quad + a_1^3(237063b_2^3 - 6316845b_2b_4^2 + 26001342b_1^4b_6 - 40482b_2^4b_6 - b_2^2b_4(3013397 + \\
&\quad + 3415140b_4b_6) + b_4^3(9124399 + 26001342b_4b_6) + b_1^3(-4200791 + 117665928b_4b_6) + \\
&\quad + b_1(-13581942b_2b_4 - b_2^2(3140195 + 6506424b_4b_6) + b_4^2(26101595 + \\
&\quad + 117665928b_4b_6)) + b_1^2(-6316845b_2 - 3415140b_2^2b_6 + b_4(13283597 + \\
&\quad + 182681460b_4b_6))) + 6a_1(-1698b_2^3b_6^2 - 6b_2(825 + 10981b_4b_6 + 7287b_4^2b_6^2) + \\
&\quad + b_2^4(-4680a_3 + 849b_6^3) + b_1^4(543400a_3 + 297873b_6^3) + b_4(7050 + 543400a_3b_4^3 + \\
&\quad + 167241b_4b_6 + 506934b_4^2b_6^2 + 297873b_4^3b_6^3) + 2b_1(6675 + 80a_3(168b_2^2b_4 + 13717b_4^3) \\
&\quad + 275439b_4b_6 + 911175b_4^2b_6^2 + 508302b_4^3b_6^3 - 33b_2b_6(1289 + 1222b_4b_6) + \\
&\quad + 33b_2^2b_6^2(1289 + 1222b_4b_6)) + 2b_1^3(1097360a_3b_4 + 9b_6^2(59557 + 56478b_4b_6)) + b_2^2(- \\
&\quad - 5280a_3b_4^2 + 3b_6(1933 + 21962b_4b_6 + 14574b_4^2b_6^2)) + b_1^2(-240a_3(22b_2^2 - 13449b_4^2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 3b_6(153667 - 14574b_2b_6 + 770230b_4b_6 + 14574b_2^2b_6^2 + 483682b_4^2b_6^2))) + 12a_1^2(- \\
 & - 5568b_2^3b_6 + 967535b_1^4b_6^2 - 1737b_2^4b_6^2 - 2b_2b_4(53723 + 176847b_4b_6) + \\
 & + 4b_1^3b_6(259035 + 962237b_4b_6) + 6b_2^2(494 - 16681b_4b_6 + 883b_4^2b_6^2) + b_4^2(143986 + \\
 & + 978156b_4b_6 + 967535b_4^2b_6^2) + 2b_1^2(63493 - 176847b_2b_6 + 1784454b_4b_6 + \\
 & + 2649b_2^2b_6^2 + 2867517b_4^2b_6^2) + 2b_1(3b_2^2b_6(-21603 + 4082b_4b_6) - b_2(67997 + \\
 & + 342558b_4b_6) + 2b_4(77097 + 848199b_4b_6 + 962237b_4^2b_6^2))))), \\
 g_{6,6,0} = & \frac{1}{5410080000}(4a_1^5(b_1 + b_4)(60774396835b_1^4 + 1039527963b_2^4 + 308198868148b_1^3b_4 - \\
 & - 16275320202b_2^2b_4^2 + 60774396835b_4^4 - 6b_1^2(2712553367b_2^2 - 85246898339b_4^2) + \\
 & + b_1(-40866864108b_2^2b_4 + 308198868148b_4^3)) + a_1^4(4765707305b_2^3b_4 - \\
 & - 34548223891b_2b_4^3 + 374533880214b_1^5b_6 + 390b_2^4(1845758 + 2452089b_4b_6) + \\
 & + 13b_4^4(11703822331 + 28810298478b_4b_6) - b_2^2b_4^2(23280133769 + 59344985076b_4b_6) \\
 & + b_1^4(142768613129 + 2110049341374b_4b_6) + b_1^2(-122707500893b_2b_4 - \\
 & - b_2^2(12766203559 + 185685472908b_4b_6) + 12b_4^2(86704815794 + \\
 & + 372731638201b_4b_6)) + b_1(4765707305b_2^3 - 122707500893b_2b_4^2 + \\
 & + 956314710b_2^4b_6 - 12b_2^2b_4(3483758524 + 15473789409b_4b_6) + 2b_4^3(346169109557 + \\
 & + 1055024670687b_4b_6)) + b_1^3(-34548223891b_2 - 59344985076b_2^2b_6 + \\
 & + 2b_4(315760171963 + 2236389829206b_4b_6))) + 270a_3(14564381b_1^5b_6^2 + \\
 & + b_2^4b_6(112285 + 197613b_4b_6) + b_2^3(-106607 + 252980b_4b_6) + 5b_2b_4^2(67167 + \\
 & + 1553396b_4b_6) + b_1^4b_6(56720369 + 58857929b_4b_6) + b_2^2b_4(-303637 + \\
 & + 4419774b_4b_6 + 3490994b_4^2b_6^2) + b_4^3(11963189 + 36918249b_4b_6 + 14564381b_4^2b_6^2) + \\
 & + b_1^3(26325061 + 7766980b_2b_6 + 179921700b_4b_6 + 3490994b_2^2b_6^2 + \\
 & + 106913690b_4^2b_6^2) + b_1(252980b_2^3b_6 + 197613b_2^4b_6^2 + 2b_2b_4(1684547 + \\
 & + 11144510b_4b_6) + b_2^2(-68085 + 10310908b_4b_6 + 8892078b_4^2b_6^2) + b_4^2(47783243 + \\
 & + 149796020b_4b_6 + 58857929b_4^2b_6^2)) + b_1^2(6b_2^2b_6(1131569 + 1482013b_4b_6) + \\
 & + b_2(2606831 + 22289020b_4b_6) + b_4(61202907 + 237875662b_4b_6 + \\
 & + 106913690b_4^2b_6^2))) + a_1^3(213433561007b_1^5b_6^2 - 3b_2^4b_6(964546 + 262460499b_4b_6) + \\
 & + b_2^3(804509037 + 900703824b_4b_6) - b_2b_4^2(17549843807 + 63443448012b_4b_6) + \\
 & + b_1^4b_6(86796377278 + 1117887386995b_4b_6) - b_2^2b_4(3573910113 + \\
 & + 38685595244b_4b_6 + 12679895490b_4^2b_6^2) + b_4^3(20235869875 + 169047130966b_4b_6 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 213433561007b_4^2b_6^2) + b_1^3(-40362870487 - 63443448012b_2b_6 + \\
& + 622798277952b_4b_6 - 12679895490b_2^2b_6^2 + 2273896251998b_4^2b_6^2) - \\
& - b_1^2(2b_2^2b_6(24170251894 + 15870317247b_4b_6) + b_2(17868049319 + \\
& + 193933159332b_4b_6) - 7b_4(-1436142793 + 159369803236b_4b_6 + \\
& + 324842321714b_4^2b_6^2)) - b_1(-900703824b_2^3b_6 + 787381497b_2^4b_6^2 + \\
& + 2b_2b_4(19317964637 + 96966579666b_4b_6) + b_2^2(4994605995 + 87002949928b_4b_6 + \\
& + 31740634494b_4^2b_6^2) - b_4^2(44862957283 + 748680151152b_4b_6 + \\
& + 1117887386995b_4^2b_6^2))) + a_1^2(-6b_2^3b_6(-6319631 + 223322151b_4b_6) - \\
& - 6b_2b_4(211697885 + 2389393299b_4b_6 + 3311455927b_4^2b_6^2) + 25b_1^5(1694527178a_3 + \\
& + 2212093299b_6^3) - 6b_2^2(-34297330 + 664153210a_3b_4^3 + 228034367b_4b_6 + \\
& + 796646412b_4^2b_6^2 - 451861501b_4^3b_6^3) + b_4^2(1405572450 + 42363179450a_3b_4^3 + \\
& + 24655246578b_4b_6 + 77588144196b_4^2b_6^2 + 55302332475b_4^3b_6^3) - \\
& - 9b_2^4(82013190a_3b_4 + b_6^2(28163084 + 13850941b_4b_6)) + b_1^4(227755574290a_3b_4 + \\
& + 3b_6^2(31368413996 + 88555662117b_4b_6)) + b_1^3(a_3(-3984919260b_2^2 + \\
& + 459640926260b_4^2) + 6b_6(4761855477 - 3311455927b_2b_6 + 65602132264b_4b_6 + \\
& + 451861501b_2^2b_6^2 + 86415793529b_4^2b_6^2)) + b_1^2(a_3(-6049808100b_2^2b_4 + \\
& + 459640926260b_4^3) + 6(181631705 + 16614140329b_4b_6 + 93975518628b_4^2b_6^2 + \\
& + 86415793529b_4^3b_6^3 + 3b_2^2b_6^2(-468179492 + 507265265b_4b_6) - \\
& - 3b_2b_6(1153914253 + 3013693059b_4b_6))) - b_1(1339932906b_2^3b_6^2 + 6b_2(291100125 + \\
& + 5876414582b_4b_6 + 9041079177b_4^2b_6^2) + 9b_2^4(82013190a_3 + 13850941b_6^3) - \\
& - b_4(3022918920 + 227755574290a_3b_4^3 + 90574839066b_4b_6 + 345989188464b_4^2b_6^2 \\
& + +265666986351b_4^3b_6^3) + 6b_2^2(1008301350a_3b_4^2 + b_6(444455893 + 1863227880b_4b_6 - \\
& - 1521795795b_4^2b_6^2)))) + 3a_1(-8b_2(339150 + 174846454a_3b_4^3 + 22305555b_4b_6 + \\
& + 86428188b_4^2b_6^2 + 40388283b_4^3b_6^3) + 3b_1^5(2821840115a_3b_6 + 629784116b_6^4) - \\
& - 108b_2^3(3955929a_3b_4 + 2b_6^2(121890 + 108277b_4b_6)) - 3b_2^4(-36b_6^3(121890 + \\
& + 108277b_4b_6) + 85a_3(138886 + 257201b_4b_6)) + b_1^4(12b_6^3(709936206 + \\
& + 679528057b_4b_6) + a_3(6551953016 + 40211525365b_4b_6)) + 2b_2^2(a_3b_4^2(-562292433 \\
& + 264509545b_4b_6) + 6b_6(1323110 + 15844863b_4b_6 + 57618792b_4^2b_6^2 + \\
& + 26925522b_4^3b_6^3)) + b_4(a_3b_4^3(8871244964 + 8465520345b_4b_6) + 12(279650 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 22650300b_4b_6 + 175528257b_4^2b_6^2 + 331894854b_4^3b_6^3 + 157446029b_4^4b_6^4)) + \\
& + 6b_1^2(2b_6(73563240 + 1113914943b_4b_6 + 2573665020b_4^2b_6^2 + 1266945914b_4^3b_6^3 - \\
& - 18b_2b_6(4707016 + 4054479b_4b_6) + 18b_2^2b_6^2(4707016 + 4054479b_4b_6)) + a_3(- \\
& - 414558928b_2b_4 + 85b_4^2(110053558 + 151485479b_4b_6) + b_2^2(-246918169 + \\
& + 351957885b_4b_6))) + 2b_1^3(6b_6^2(569091177 - 26925522b_2b_6 + 2122798320b_4b_6 + \\
& + 26925522b_2^2b_6^2 + 1266945914b_4^2b_6^2) + a_3(-699385816b_2 + 264509545b_2^2b_6 + \\
& + b_4(17226570034 + 38628797145b_4b_6))) + b_1(a_3(-427240332b_2^3 - \\
& - 2487353568b_2b_4^2 - 65586255b_2^4b_6 + 1530b_2^2b_4(-1518148 + 1380227b_4b_6) + \\
& + b_4^3(37664027372 + 40211525365b_4b_6)) + 12(493850 + 81116860b_4b_6 + \\
& + 758140983b_4^2b_6^2 - 1948986b_2^3b_6^3 + 1475145600b_4^3b_6^3 + 974493b_2^4b_6^4 + \\
& + 679528057b_4^4b_6^4 - 6b_2b_6(4052935 + 22261500b_4b_6 + 12163437b_4^2b_6^2) + \\
& + 3b_2^2b_6^2(8430701 + 44523000b_4b_6 + 24326874b_4^2b_6^2))))), \\
g_{7,7,0} &= \frac{1}{51316340025600000}(464a_1^6(34849339676330787b_1^6 - 7220143589022b_2^6 + \\
& + 252959146793687570b_1^5b_4 + 864503584399479b_2^4b_4^2 - \dots, \\
g_{8,8,0} &= \frac{1}{5475958946680772160000000}(22620a_1^7(b_1 + b_4)(664616547948069327815537b_1^6 \\
& - 564399971302019165457b_2^6 + 4898083914313564013273954b_1^5b_4 + \dots.
\end{aligned}$$

Paralelização e Algoritmo em $\mathbb{R}^3$

Paralelização em $\mathbb{R}^3$.

O teorema a seguir é uma extensão para sistemas tridimensionais do Teorema 2.1 de [39], enunciado no plano, o qual foi adaptado para o tipo de perturbação dos campos de vetores utilizados neste trabalho. Optamos por apresentar sua demonstração com o objetivo de detalhar algumas das ideias de [39] e tornar nosso trabalho mais completo.

Teorema .12. *Considere o sistema $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = F(x, y, z)$ associado ao campo de vetores $F(x, y, z) = (-y + P(x, y, z), x + Q(x, y, z), -\sigma z + R(x, y, z))$ onde P, Q e R são polinômios de grau ≥ 2 e $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sejam $Q_j(x, y, z)$ funções polinomiais de grau ≥ 2 , para $j = 1, \dots, s$. Suponha que $g_{k,k,0}^{Q_j}$ são os k -coeficientes focais do sistema*

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = F(x, y, z) + \epsilon Q_j(x, y, z), \quad j = 1, \dots, s. \quad (.20)$$

Então a parte linear, com respeito a componente ϵ de $g_{k,k,0}^{Q_1} + \dots + g_{k,k,0}^{Q_s}$ é a parte linear do k -coeficiente focal da equação

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = F(x, y, z) + \epsilon(Q_1(x, y, z) + \dots + Q_s(x, y, z)), \quad j = 1, \dots, s, \quad (.21)$$

com respeito a ϵ .

Demonstração. Considere o campo de vetores $X^{Q_j} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ associado ao sistema (.20). Como vimos na seção 2.2 existe uma função analítica $H^{Q_j}(x, y, z, \epsilon)$ em um vizinhança da origem de forma que

$$X^{Q_j} H^{Q_j} = \sum_{k=2}^{\infty} g_{k,k,0}^{Q_j} (xy)^k, \quad \text{para } j=1, \dots, s. \quad (.22)$$

Sejam

$$X^{Q_j} = F + \epsilon Q_j,$$

$$H^{Q_j} = H_0 + H_1^{Q_j}\epsilon + H_2^{Q_j}\epsilon^2 + \dots,$$

as expansões em série de Taylor na vizinhança de $\epsilon = 0$ das aplicações X^{Q_j} e H^{Q_j} , respectivamente. Denotando por $v_{k,1}^{Q_j}$ a parte linear dos coeficientes focais $g_{k,k,0}^{Q_j}$ com respeito a ϵ , segue da equação (.22), que os termos de primeira ordem em ϵ satisfazem

$$FH_1^{Q_j} + Q_j H_0 = \sum_{k=2}^{\infty} v_{k,1}^{Q_j} (xy)^k, \quad j = 1, \dots, s. \quad (.23)$$

Denote por X o campo de vetores associado a (.21). Segue da seção 2.2 que existe uma função analítica $H(x, y, z, \epsilon)$ em um vizinhança da origem tal que

$$XH = \sum_{k=2}^{\infty} g_{k,k,0} (xy)^k. \quad (.24)$$

Expandindo a aplicação H em série de potências de ϵ , isto é $H = \sum_{m=0}^{\infty} H_m \epsilon^m$, podemos escrever o lado esquerdo da equação (.24) na forma

$$\begin{aligned} XH &= (F + \epsilon(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_s)) \sum_{m=0}^{\infty} H_m \epsilon^m \\ &= FH_0 + (FH_1 + (Q_1 + \dots + Q_s)H_0)\epsilon + o(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (.25)$$

Denotando por $v_{k,n}$ o coeficiente da potência de grau n da expansão de $g_{k,k,0}$ em série de potências de ϵ , obtemos usando (.25) que os termos de primeira ordem em ϵ de (.24) satisfazem a seguinte equação

$$FH_1 + (Q_1 + \dots + Q_s)H_0 = \sum_{n=2}^{\infty} v_{k,1} (xy)^k. \quad (.26)$$

Note que a aplicação $H_1 = H_1^{Q_1} + H_1^{Q_2} + \dots + H_1^{Q_s}$ satisfaz a equação (.26). De fato, por (.23), temos

$$\begin{aligned} FH_1 + (Q_1 + \dots + Q_s)H_0 &= \\ F \sum_{j=1}^s H_1^{Q_j} + (Q_1 + \dots + Q_s)H_0 &= \\ (FH_1^{Q_1} + Q_1 H_0) + (FH_1^{Q_2} + Q_2 H_0) + \dots + (FH_1^{Q_s} + Q_s H_0) &= \\ \sum_{k=2}^{\infty} v_{k,1}^{Q_1} (xy)^k + \sum_{k=2}^{\infty} v_{k,1}^{Q_2} (xy)^k + \dots + \sum_{k=2}^{\infty} v_{k,1}^{Q_s} (xy)^k &= \\ \sum_{k=2}^{\infty} (v_{k,1}^{Q_1} + v_{k,1}^{Q_2} + \dots + v_{k,1}^{Q_s}) (xy)^k. \end{aligned} \quad (.27)$$

Portanto $v_{k,1} = v_{k,1}^{Q_1} + v_{k,1}^{Q_2} + \dots + v_{k,1}^{Q_s}$, o que prova o resultado. $\square$

Algoritmo para o cálculo da ciclicidade de sistemas em $\mathbb{R}^3$

Os coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{j,1}$ ($j = 1, \dots$), do Capítulo 5 são obtidos usando o programa de cálculo simbólico Maple, no qual implementamos o algoritmo apresentado a seguir. Observamos que o algoritmo abaixo foi implementado com a condição $v_{j,0} = 0$ (isto é, o campo não perturbado possui um centro sobre a variedade central), caso contrário o algoritmo fornece a saída $v_{j,0} + v_{j,1}\epsilon$.

Para exemplificar o algoritmo vamos utilizar o sistema (5.10) com a condição $a_3 = 0$, do Teorema 5.2 para o cálculo dos seus quatro primeiros coeficientes focais de primeira ordem em ϵ . Para o cálculo dos demais coeficientes utilizamos o mesmo algoritmo aplicando o método da paralelização, mais precisamente no algoritmo abaixo a perturbação Q2 foi substituída por seus monômios obtendo $v_{j,1}$ por partes. Esse procedimento foi usado em boa parte dos resultados do Capítulo 5.

```
> restart;
> # Pacotes do maple para rodar os comandos.
> with(ListTools):
> with(IntegrationTools):
> # Definição da perturbação.
> Q2 := c[1]*u^2+c[2]*u*v+c[3]*u*w+c[4]*v^2+c[5]*v*w+c[6]*w^2;
> # Definição do campo de vetores;
> up := -v + u*(a1*u + a2*v)+epsilon*Q2;
> vp := u + v*(a1*u + a2*v)+epsilon*Q2;
> wp := b1*u^2 + b2*u*v + b3*v^2 - w+epsilon*Q2;
> #Complexificação do campo;
> com := Flatten(solve(x1-u-I*v, x2-u+I*v, [u, v]]):
> x1p :=expand(subs(com[1], com[2], up+I*vp)):
> x2p := expand(subs(com[1],com[2], up-I*vp)):
> x3p := expand(subs(com[1], com[2], wp)):
> # “ultima” indica a quantidade de coeficientes focais de primeira ordem em epsilon que
queremos calcular.
> ultima:=4:
```



```

> N:=2*ultima+2:
> xp := subs(w = z, x1 = x, x2 = y, x1p):
> yp := subs(w = z, x1 = x, x2 = y, x2p):
> zp := subs(w = z, x1 = x,x2 = y, x3p):
> # O conjunto “par” são os coeficiente da perturbação.
> par:={c1,c2,c3,c4,c5,c6,ε};
> # A sequência de comandos a seguir define a Integral primeira e colecciona seus coefi-
cientes h[i,m,n] da parte homogênea de grau j= i+m+n no conjunto varh[j].
> H:= x*y;
> for j from 3 by 1 to N do
for i from 0 by 1 to j do
for m from 0 by 1 to j do
for s from 0 by 1 to j do
if i+s+m = j then H := h[i, m, s]*x^i*y^m*z^s+H
end if
end do
end do
end do
end do:
for j from 3 to N do
varh[j] := ;
for i from 0 to j do
for m from 0 to j do
for s from 0 to j do
if i+s+m = j then varh[j] :=‘union‘(h[i, m, s], varh[j])
end if
end do
end do
end do
end do:
> # O “ordem”define qual a ordem em epsilon dos coeficiente focais o algoritmo vai
calcular;

```

```

> orden:=1:
> for k from 3 to N by 2 do
mtaylor(expand(diff(H,x)*xp+diff(H,y)*yp+diff(H,z)*zp),[x,y,z],k+1)-
-mtaylor(expand(diff(H,x)*xp+diff(H,y)*yp+diff(H,z)*zp),[x,y,z],k):
expand(mtaylor(% ,par,orden+1));
solve(coeffs(%,[x,y,z]),varh[k]);
assign(%);
mtaylor(expand(diff(H,x)*xp+diff(H,y)*yp+diff(H,z)*zp),[x,y,z],k+2)-
-mtaylor(expand(diff(H,x)*xp+diff(H,y)*yp+diff(H,z)*zp),[x,y,z],k+1)-
-h[(k+1)/2,(k+1)/2,0]*(x*y)^((k+1)/2);
expand(mtaylor(% ,par,orden+1));
solve(coeffs(%,[x,y,z]),varh[k+1]);
assign(%);
print(v[(k+1)/2,(k+1)/2]=factor(simplify(h[(k+1)/2,(k+1)/2,0])))
od:

```

Coeficiente focais de primeira ordem em ϵ

Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema 5.2

No 1º caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{4,1}$ e $v_{5,1}$ do sistema (5.10) com a condição $a_3 = 0$ e devido ao tamanho excessivo dos coeficientes focais $v_{6,1}$, $v_{7,1}$, $v_{8,1}$, $v_{9,1}$, $v_{10,1}$ e $v_{11,1}$ vamos omitir boa parte das suas expressões.

1º Caso O sistema (5.10) com a condição $a_3 = 0$.

$$\begin{aligned} v_{1,1} &= \frac{-1}{20}(c_3 b_2 - 11 c_5 b_1 + 5 c_4 a_1 - 9 c_5 b_3 - 5 a_2 c_1 + 5 a_2 c_2 - 5 c_2 a_1 - 3 c_5 b_2 - \\ &\quad - 13 c_3 b_1 - 15 c_4 a_2 + 15 c_1 a_1 - 7 c_3 b_3) \\ v_{2,1} &= \frac{1}{200}(-302 c_6 b_1 b_3 a_1 - 30 c_6 b_2 b_3 a_2 - 74 c_6 b_1 b_3 a_2 - 70 a_2 c_3 b_3 a_1 + 110 c_6 b_2 b_1 a_1 + \\ &\quad + 110 c_6 b_2 b_3 a_1 - 30 c_6 b_2 b_1 a_2 + 130 c_3 b_1 a_1 a_2 - 150 c_3 b_2 a_1 a_2 + 110 c_5 a_2 b_3 a_1 - \\ &\quad - 50 c_5 a_2 b_2 a_1 + 110 c_5 a_2 b_1 a_1 - 245 c_5 a_1^2 b_2 + 15 c_3 a_1^2 b_2 - 915 c_3 a_1^2 b_1 - \\ &\quad - 855 c_5 a_1^2 b_1 - 535 c_3 b_3 a_2^2 - 245 c_5 b_2 a_2^2 - 675 c_5 a_1^2 b_3 - 775 c_5 b_1 a_2^2 - \\ &\quad - 875 c_3 b_1 a_2^2 + 115 c_3 b_2 a_2^2 - 695 c_5 b_3 a_2^2 + 47 c_6 b_3^2 a_2 - 173 c_6 b_1^2 a_2 - \\ &\quad - 13 c_6 b_2^2 a_2 - 119 c_6 b_3^2 a_1 + c_6 b_2^2 a_1 - 179 c_6 b_1^2 a_1 - 425 a_2^2 a_1 c_2 + 1125 a_2^2 a_1 c_1 + \\ &\quad + 425 a_2^2 a_1 c_4 - 425 a_1^2 a_2 c_1 + 425 a_1^2 a_2 c_2 - 1125 a_1^2 a_2 c_4 - 275 c_3 b_3 a_1^2 - \\ &\quad - 1175 a_2^3 c_4 - 375 a_2^3 c_1 + 375 a_2^3 c_2 - 375 c_2 a_1^3 + 1175 c_1 a_1^3 + 375 c_4 a_1^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{3,1} = & -\frac{1}{27200}(-454552 c_6 a_2^2 b_1 b_3 a_1 + 209304 c_6 a_2^2 b_3 b_2 a_1 + 160344 c_6 a_2^2 b_1 b_2 a_1 - \\
 & - 102408 c_6 b_3 a_1^2 b_2 a_2 - 126888 c_6 b_1 a_1^2 b_2 a_2 - 96536 c_6 a_2 a_1^2 b_1 b_3 + \\
 & + 1192550 a_2^3 c_2 a_1^2 - 189020 c_6 b_3^2 a_1 a_2^2 - 438232 c_6 b_3 a_1^3 b_1 + 156536 c_6 b_3 a_1^3 b_2 + \\
 & + 172856 c_6 b_1 a_1^3 b_2 + 173060 c_5 a_1^3 b_3 a_2 + 190060 c_5 a_1^3 b_1 a_2 + 219980 c_3 a_1^3 b_1 a_2 + \\
 & + 43780 c_6 a_1^2 b_3^2 a_2 + 190060 c_5 a_2^3 b_3 a_1 - 83300 a_2^3 c_5 b_2 a_1 + 173060 c_5 a_2^3 b_1 a_1 - \\
 & - 2399550 c_5 b_1 a_2^2 a_1^2 - 2629050 c_3 b_1 a_2^2 a_1^2 + 191250 c_3 b_2 a_2^2 a_1^2 - \\
 & - 2027250 c_5 b_3 a_2^2 a_1^2 - 1144950 c_3 b_3 a_2^2 a_1^2 - 123420 c_3 b_3 a_1^3 a_2 - 86700 c_5 b_2 a_1^3 a_2 - \\
 & - 232900 c_3 b_2 a_1^3 a_2 - 265484 c_6 a_1^2 b_1^2 a_2 - 6812 c_6 b_2^2 a_1^2 a_2 - 224108 c_6 b_1^2 a_1 a_2^2 - \\
 & - 53992 c_6 b_2 b_3 a_2^3 - 129176 c_6 b_1 b_3 a_2^3 - 120020 a_2^3 c_3 b_3 a_1 - 45832 c_6 b_2 b_1 a_2^3 + \\
 & + 216580 c_3 b_1 a_1 a_2^3 - 249900 c_3 b_2 a_1 a_2^3 - 1884 c_6 b_2^2 a_1 a_2^2 - 716550 c_5 b_2 a_2^2 a_1^2 - \\
 & - 1192550 a_2^3 c_1 a_1^2 - 3404250 c_4 a_2^3 a_1^2 - 366775 c_5 b_2 a_2^4 - 792455 c_3 b_3 a_2^4 - \\
 & - 1134835 c_5 b_1 a_2^4 - 1276105 c_3 b_1 a_2^4 + 178925 c_3 b_2 a_2^4 - 1030285 c_5 b_3 a_2^4 + \\
 & + 80228 c_6 b_3^2 a_2^3 - 269292 c_6 b_1^2 a_2^3 - 23132 c_6 b_2^2 a_2^3 + 1658775 a_2^4 a_1 c_1 + \\
 & + 639625 a_2^4 a_1 c_4 - 639625 c_2 a_2^4 a_1 + 3404250 a_1^3 a_2^2 c_1 + 1192550 a_1^3 a_2^2 c_4 - \\
 & - 1192550 a_1^3 a_2^2 c_2 + 639625 a_1^4 a_2 c_2 - 1658775 a_1^4 a_2 c_4 - 639625 a_1^4 a_2 c_1 - \\
 & - 1335945 a_1^4 c_3 b_1 - 993565 a_1^4 c_5 b_3 - 297004 c_6 b_1^2 a_1^3 + 6276 c_6 b_2^2 a_1^3 - \\
 & - 1268115 a_1^4 c_5 b_1 + 8925 a_1^4 c_3 b_2 - 366775 a_1^4 c_5 b_2 - 132444 c_6 b_3^2 a_1^3 - \\
 & - 369495 a_1^4 c_3 b_3 - 552925 a_1^5 c_2 + 1745475 a_1^5 c_1 + 552925 a_1^5 c_4 - 1745475 a_2^5 c_4 - \\
 & - 552925 a_2^5 c_1 + 552925 a_2^5 c_2) \\
 v_{4,1} = & \frac{1}{707200}(-2093969475 a_1^4 a_2^3 c_4 - 263691675 c_2 a_2^6 a_1 - 756168075 a_1^4 a_2^3 c_1 - \\
 & - 721261125 a_2^5 a_1^2 c_1 - 2128876425 a_2^5 a_1^2 c_4 - 686354175 a_1^6 a_2 c_4 - \\
 & - 263691675 a_1^6 a_2 c_1 + 263691675 a_1^6 a_2 c_2 - 47932629 c_6 b_3^2 a_1^5 + \\
 & + 2128876425 a_1^5 a_2^2 c_1 + 263691675 a_2^6 a_1 c_4 + 686354175 a_2^6 c_1 a_1 - \\
 & - 470978625 c_5 b_1 a_2^6 - 530980125 c_3 b_1 a_2^6 + 73165365 c_3 b_2 a_2^6 - 425947665 c_5 b_3 a_2^6 + \\
 & + 32169105 c_6 b_3^2 a_2^5 - 151405995 c_5 b_2 a_2^6 - 327797145 c_3 b_3 a_2^6 - \\
 & - 105606715 c_6 b_1^2 a_2^5 - 9374475 c_6 b_2^2 a_2^5 + 756168075 a_1^4 a_2^3 c_2 - \\
 & - 151405995 a_1^6 c_5 b_2 - 160230525 a_1^6 c_3 b_3 + 2959251 c_6 b_2^2 a_1^5 + 5075265 a_1^6 c_3 b_2 + \\
 & + 721261125 a_2^5 a_1^2 c_2 + 756168075 a_2^4 a_1^3 c_4 + 2093969475 a_2^4 a_1^3 c_1 - \\
 & - 756168075 a_2^4 a_1^3 c_2 - 410977125 a_1^6 c_5 b_3 + 721261125 a_1^5 a_2^2 c_4 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 524098185 a_1^6 c_5 b_1 - 554158605 a_1^6 c_3 b_1 - 721261125 a_1^5 a_2^2 c_2 - \\
& - 118223889 c_6 b_1^2 a_1^5 + 76450530 c_5 a_1^5 b_1 a_2 + 67937610 a_1^5 c_5 b_3 a_2 - \\
& - 209939742 c_6 a_2^3 a_1^2 b_1^2 + 153076755 a_2^4 a_1^2 c_3 b_2 + 84986655 c_3 b_2 a_2^2 a_1^4 - \\
& - 1517504235 c_5 b_1 a_2^2 a_1^4 + 144388140 a_1^3 a_2^3 c_5 b_3 - 33209670 a_2^5 c_5 b_2 a_1 + \\
& + 67937610 a_2^5 c_5 b_1 a_1 + 76450530 a_2^5 c_5 b_3 a_1 - 1176101 c_6 a_2^4 b_2^2 a_1 - \\
& - 99629010 a_2^5 c_3 b_2 a_1 - 1759699 c_6 b_2^2 a_1^4 a_2 - 34880430 a_1^5 c_5 b_2 a_2 + \\
& + 87999990 c_3 a_1^5 b_1 a_2 - 91116090 a_1^5 c_3 b_2 a_2 - 83549249 c_6 a_2^4 b_1^2 a_1 - \\
& - 74336565 c_6 a_2^4 b_3^2 a_1 + 86329230 a_2^5 c_3 b_1 a_1 - 48180210 a_2^5 c_3 b_3 a_1 - \\
& - 1249572675 c_5 b_3 a_2^2 a_1^4 + 46077578 c_6 a_2^3 a_1^2 b_3^2 - 639745275 a_1^4 a_2^2 c_3 b_3 - \\
& - 1464384675 a_2^4 c_5 a_1^2 b_1 - 445705065 a_2^4 a_1^2 c_5 b_2 - 98031180 a_2^3 c_3 b_3 a_1^3 + \\
& + 174329220 c_3 b_1 a_1^3 a_2^3 - 1624631775 a_2^4 c_3 a_1^2 b_1 - 807311895 a_2^4 c_3 a_1^2 b_3 - \\
& - 445705065 c_5 b_2 a_1^4 a_2^2 - 1264543215 c_5 a_2^4 b_3 a_1^2 - 190745100 c_3 b_2 a_1^3 a_2^3 - \\
& - 10255478 c_6 a_2^3 a_1^2 b_2^2 - 68090100 a_2^3 c_5 b_2 a_1^3 - 52047958 c_6 a_2^5 b_3 b_1 - \\
& - 17808310 c_6 a_2^5 b_2 b_1 - 21943662 c_6 a_2^5 b_2 b_3 - 168787546 c_6 b_1 a_1^5 b_3 + \\
& + 67811718 c_6 b_1 a_1^5 b_2 + 60196942 c_6 b_3 a_1^5 b_2 - 1647810255 a_1^4 a_2^2 c_3 b_1 + \\
& + 144388140 c_5 a_2^3 b_1 a_1^3 + 14787169 c_6 a_1^4 a_2 b_3^2 + 847878 a_1^3 a_2^2 c_6 b_2^2 - \\
& - 103454331 c_6 a_1^4 a_2 b_1^2 - 200837866 c_6 a_2^2 a_1^3 b_1^2 - 121333922 c_6 a_2^2 a_1^3 b_3^2 - \\
& - 49850970 a_1^5 c_3 b_3 a_2 - 721261125 a_2^7 c_4 + 228784725 a_2^7 c_2 - 228784725 a_2^7 c_1 - \\
& - 228784725 a_1^7 c_2 + 721261125 a_1^7 c_1 + 228784725 a_1^7 c_4 - 36818406 c_6 b_3 a_1^4 b_1 a_2 - \\
& - 43276974 c_6 b_3 a_1^4 b_2 a_2 - 347716340 c_6 a_2^2 a_1^3 b_1 b_3 - 177058250 c_6 a_2^4 b_3 b_1 a_1 + \\
& + 61470630 c_6 a_2^4 b_2 b_1 a_1 + 86072350 c_6 a_2^4 b_2 b_3 a_1 + 131039740 c_6 b_1 a_1^3 a_2^2 b_2 - \\
& - 57553574 c_6 b_1 a_1^4 a_2 b_2 + 144511900 c_6 b_3 a_1^3 a_2^2 b_2 - 87108972 c_6 a_2^3 a_1^2 b_3 b_1 - \\
& - 67091180 c_6 a_2^3 a_1^2 b_2 b_3 - 73491340 c_6 a_2^3 a_1^2 b_2 b_1) \\
v_{5,1} &= -\frac{1}{52332800} (a_2^2 + a_1^2) (-3478334099825 a_1^4 a_2^3 c_4 - 434754940425 c_2 a_2^6 a_1 - \\
& - 1249957275775 a_1^4 a_2^3 c_1 - 1195649730275 a_2^5 a_1^2 c_1 - 3532641645325 a_2^5 a_1^2 c_4 - \\
& - 1141342184775 a_1^6 a_2 c_4 - 434754940425 a_1^6 a_2 c_1 + 434754940425 a_1^6 a_2 c_2 - \\
& - 73353784465 c_6 b_3^2 a_1^5 + 3532641645325 a_1^5 a_2^2 c_1 + 434754940425 a_2^6 a_1 c_4 + \\
& + 1141342184775 a_2^6 c_1 a_1 - 786807661965 c_5 b_1 a_2^6 - 890150141595 c_3 b_1 a_2^6 + \\
& + 118698272355 c_3 b_2 a_2^6 - 706807410075 c_5 b_3 a_2^6 + 50007615905 c_6 b_3^2 a_2^5 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 250270536165 c_5 b_2 a_2^6 - 544325105025 c_3 b_3 a_2^6 - 163518810299 c_6 b_1^2 a_2^5 - \\
& - 14603276675 c_6 b_2^2 a_2^5 + 1249957275775 a_1^4 a_2^3 c_2 - 250270536165 a_1^6 c_5 b_2 - \\
& - 284423575605 a_1^6 c_3 b_3 + 4727211047 c_6 b_2^2 a_1^5 + 12873991455 a_1^6 c_3 b_2 + \\
& + 1195649730275 a_2^5 a_1^2 c_2 + 1249957275775 a_2^4 a_1^3 c_4 + 3478334099825 a_2^4 a_1^3 c_1 - \\
& - 1249957275775 a_2^4 a_1^3 c_2 - 683465182335 a_1^6 c_5 b_3 + 1195649730275 a_1^5 a_2^2 c_4 - \\
& - 869289715125 a_1^6 c_5 b_1 - 925947739275 a_1^6 c_3 b_1 - 1195649730275 a_1^5 a_2^2 c_2 - \\
& - 183523846493 c_6 b_1^2 a_1^5 + 118918438080 c_5 a_1^5 b_1 a_2 + 105185493660 a_1^5 c_5 b_3 a_2 - \\
& - 325266312494 c_6 a_2^3 a_1^2 b_1^2 + 252950793225 a_2^4 a_1^2 c_3 b_2 + \\
& + 147126512325 c_3 b_2 a_2^2 a_1^4 - 2522706835155 c_5 b_1 a_2^2 a_1^4 + \\
& + 224103931740 a_1^3 a_2^3 c_5 b_3 - 51572011920 a_2^5 c_5 b_2 a_1 + 105185493660 a_2^5 c_5 b_1 a_1 + \\
& + 118918438080 a_2^5 c_5 b_3 a_1 - 1966719729 c_6 a_2^4 b_2^2 a_1 - 154716035760 a_2^5 c_3 b_2 a_1 - \\
& - 2569899579 c_6 b_2^2 a_1^4 a_2 - 54252268980 a_1^5 c_5 b_2 a_2 + 136734322140 c_3 a_1^5 b_1 a_2 - \\
& - 140983091340 a_1^5 c_3 b_2 a_2 - 128371004173 c_6 a_2^4 b_1^2 a_1 - 115118765233 c_6 a_2^4 b_3^2 a_1 + \\
& + 134054065080 a_2^5 c_3 b_1 a_1 - 74914239660 a_2^5 c_3 b_3 a_1 - 2076418031805 c_5 b_3 a_2^2 a_1^4 + \\
& + 70553885018 c_6 a_2^3 a_1^2 b_3^2 - 1099439311815 a_1^4 a_2^2 c_3 b_3 - \\
& - 2440224781995 a_2^4 c_5 a_1^2 b_1 - 737078664075 a_2^4 a_1^2 c_5 b_2 - \\
& - 152508736380 a_2^3 c_3 b_3 a_1^3 + 270788387220 c_3 b_1 a_1^3 a_2^3 - \\
& - 2719980966885 a_2^4 c_3 a_1^2 b_1 - 1359340841235 a_2^4 c_3 a_1^2 b_3 - \\
& - 737078664075 c_5 b_2 a_1^4 a_2^2 - 2099760259545 c_5 a_2^4 b_3 a_1^2 - \\
& - 295699127100 c_3 b_2 a_1^3 a_2^3 - 15361534006 c_6 a_2^3 a_1^2 b_2^2 - \\
& - 105824280900 a_2^3 c_5 b_2 a_1^3 - 80976484134 c_6 a_2^5 b_3 b_1 - 27508609854 c_6 a_2^5 b_2 b_1 - \\
& - 34202540630 c_6 a_2^5 b_2 b_3 - 260514875218 c_6 b_1 a_1^5 b_3 + 104971737926 c_6 b_1 a_1^5 b_2 + \\
& + 92938360830 c_6 b_3 a_1^5 b_2 - 2755778564565 a_1^4 a_2^2 c_3 b_1 + 224103931740 c_5 a_2^3 b_1 a_1^3 + \\
& + 22357911361 c_6 a_1^4 a_2 b_3^2 + 876752942 a_1^3 a_2^2 c_6 b_2^2 - 159935859947 c_6 a_1^4 a_2 b_1^2 - \\
& - 310011112290 c_6 a_2^2 a_1^3 b_1^2 - 186588811322 c_6 a_2^2 a_1^3 b_3^2 - 77594496720 a_1^5 c_3 b_3 a_2 - \\
& - 1195649730275 a_2^7 c_4 + 380447394925 a_2^7 c_2 - 380447394925 a_2^7 c_1 - \\
& - 380447394925 a_1^7 c_2 + 1195649730275 a_1^7 c_1 + 380447394925 a_1^7 c_4 - \\
& - 56909729942 c_6 b_3 a_1^4 b_1 a_2 - 67389852246 c_6 b_3 a_1^4 b_2 a_2 - \\
& - 538185088740 c_6 a_2^2 a_1^3 b_1 b_3 - 273902736770 c_6 a_2^4 b_3 b_1 a_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 94709668934 c_6 a_2^4 b_2 b_1 a_1 + 134433084718 c_6 a_2^4 b_2 b_3 a_1 + \\
 & + 203304691356 c_6 b_1 a_1^3 a_2^2 b_2 - 91239121326 c_6 b_1 a_1^4 a_2 b_2 + \\
 & + 223748161052 c_6 b_3 a_1^3 a_2^2 b_2 - 134262929580 c_6 a_2^3 a_1^2 b_3 b_1 - \\
 & - 105359869628 c_6 a_2^3 a_1^2 b_2 b_3 - 114980254428 c_6 a_2^3 a_1^2 b_2 b_1), \\
 v_{6,1} & = \frac{1}{209331200} (a_2^2 + a_1^2)^2 (-423570241328325 a_1^4 a_2^3 c_4 - 52548490657325 c_2 a_2^6 a_1 \\
 & - 151474700148525 a_1^4 a_2^3 c_1 - 145303928325075 a_2^5 a_1^2 c_1 - \dots \\
 v_{7,1} & = -\frac{1}{16746496000} (a_1^2 + a_2^2)^3 (462643195354357875 a_1^7 c_1 - \\
 & - 166523840316601625 a_1^6 a_2 c_1 + 1369465423265350125 a_1^5 a_2^2 c_1 - \dots \\
 v_{8,1} & = \frac{1}{1373212672000} (a_1^2 + a_2^2)^4 (1920871660446110659625 a_1^7 c_1 - \\
 & - 688647034952413184375 a_1^6 a_2 c_1 + 5690080259132767532125 a_1^5 a_2^2 c_1 - \dots \\
 v_{9,1} & = -\frac{1}{277388959744000} (a_1^2 + a_2^2)^5 (24394684342835376301665375 a_1^7 c_1 - \\
 & - 8716340141459297401140125 a_1^6 a_2 c_1 + \dots \\
 v_{10,1} & = \frac{1}{67682906177536000} (a_1^2 + a_2^2)^6 (455362879697844396526063037625 a_1^7 c_1 - \\
 & - 162239561715243494841919298375 a_1^6 a_2 c_1 + \dots \\
 v_{11,1} & = -\frac{1}{3925608558297088000} (a_1^2 + a_2^2)^7 (\\
 & 2417242159364919334602633524618625 a_1^7 c_1 - \dots
 \end{aligned}$$

Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema

5.3

No 1º caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{4,1}$, $v_{5,1}$ e $v_{6,1}$ do sistema (5.11) com a condição $a_3 = 0$ e devido ao tamanho excessivo dos coeficientes focais $v_{7,1}$, $v_{8,1}$, $v_{9,1}$, $v_{10,1}$ e $v_{11,1}$ vamos omitir boa parte das suas expressões.

1º Caso O sistema (5.11) com a condição $a_3 = 0$.

$$\begin{aligned}
 v_{1,1} & = -\frac{1}{4} (c_4 a_1 - 3c_4 a_2 - c_2 a_1 + 3c_1 a_1 + c_2 a_2 - c_1 a_2), \\
 v_{2,1} & = \frac{1}{40} (-8c_3 b_3 a_1 - 18c_3 b_1 a_1 + 6c_5 b_4 a_2 - 48c_3 b_1 a_2 + 10c_5 b_2 a_1 + 4c_5 b_3 a_1 - 2c_3 b_2 a_2 - \\
 & - 12c_3 b_4 a_2 + 20c_3 b_2 a_1 + 24c_5 b_4 a_1 - 4c_5 b_2 a_2 - 10c_5 b_3 a_2 - 36c_5 b_1 a_2 - 6c_5 b_1 a_1 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 42c_3b_4a_1 - 10c_3b_3a_2 - 225c_4a_1^2a_2 + 85a_1^2c_2a_2 - 85c_1a_2a_1^2 + 225c_1a_2^2a_1 + 85c_4a_2^2a_1 \\
& - 85a_2^2c_2a_1 - 75a_2^3c_1 - 235a_2^3c_4 + 75a_2^3c_2 - 75a_1^3c_2 + 235a_1^3c_1 + 75a_1^3c_4) \\
v_{3,1} = & -\frac{1}{54400}(-3490950a_2^5c_4 + 1105850a_2^5c_2 - 2385100a_2^3a_1^2c_1 - 567460a_2^3c_5b_1 + \\
& + 1279250c_4a_2^4a_1 - 164900c_3a_2^3b_3 + 171700c_5b_2a_1^3 - 7077c_6b_4^2a_2 - 68340c_5a_2^3b_2 - \\
& - 3317550a_2a_1^4c_4 + 7645c_6b_3^2a_2 - 736780c_3a_2^3b_1 + 105060c_5a_2^3b_4 - 304980c_3b_1a_1^3 - \\
& - 205020c_3a_2^3b_4 + 10478c_6b_4b_2a_1 + 5097c_6b_4^2a_1 + 3490950a_1^5c_1 + 1105850a_1^5c_4 + \\
& + 5474c_6b_2b_1a_2 + 404940a_2^2c_5b_4a_1 - 184620a_1^2c_3b_4a_2 - 117980c_3b_3a_1^3 + 3774c_6b_2b_3a_2 \\
& - 24820c_3a_2^3b_2 - 1122c_6b_4b_1a_2 + 43860a_1^2c_5b_4a_2 + 398140c_5b_4a_1^3 + 704820c_3a_2^2b_4a_1 - \\
& - 168300a_2^3c_5b_3 + 21519c_6b_1^2a_1 + 88740a_2^2c_5b_3a_1 + 317900c_3b_2a_1^3 - 105060c_5b_1a_1^3 + \\
& + 68340c_5b_3a_1^3 + 2987c_6b_2^2a_2 + 91149c_6b_1^2a_2 - 1279250a_2a_1^4c_1 + 575620c_3b_4a_1^3 - \\
& - 43860a_2^2c_5b_1a_1 + 1279250a_1^4c_2a_2 - 6808500a_2^3a_1^2c_4 - 147900a_2a_1^2c_5b_3 + \\
& + 2385100a_2^3a_1^2c_2 + 31c_6b_3^2a_1 + 2105c_6b_2^2a_1 + 2385100c_4a_1^3a_2^2 - 2385100c_2a_1^3a_2^2 + \\
& + 49446c_6b_3b_1a_2 - 32742c_6b_1b_2a_1 - 151980c_3a_2^2b_3a_1 - 1105850a_1^5c_2 + \\
& + 270300c_3a_2^2b_2a_1 + 9730c_6b_3b_1a_1 - 32742c_6b_3b_4a_1 + 137700a_2^2c_5b_2a_1 - \\
& - 88740a_1^2c_5b_2a_2 + 2730c_6b_4b_2a_2 - 76500a_1^2c_3b_3a_2 + 5474c_6b_4b_3a_2 - 70074c_6b_1b_4a_1 - \\
& - 743580c_3a_2a_1^2b_1 - 615060a_2a_1^2c_5b_1 - 14042c_6b_3b_2a_1 - 1105850a_2^5c_1 - \\
& - 1279250a_2^4c_2a_1 + 3317550c_1a_2^4a_1 + 6808500a_2^2a_1^3c_1 - 72420a_1^2c_3b_2a_2 - , \\
& - 243780c_3a_2^2b_1a_1) \\
v_{4,1} = & \frac{1}{707200}(-228784725a_1^7c_2 + 228784725a_2^7c_2 + 228784725a_1^7c_4 - 228784725a_2^7c_1 - \\
& - 721261125a_2^7c_4 + 721261125a_1^7c_1 - 263691675a_2^6c_2a_1 - 686354175a_1^6c_4a_2 - \\
& - 93784c_6a_1^3b_3^2 + 185170c_6a_1^3b_2^2 - 41112630c_3a_2^5b_4 + 34462740a_1^5c_5b_2 + \\
& + 2128876425a_1^5c_1a_2^2 + 721261125a_2^5a_1^2c_2 - 756168075a_2^3a_1^4c_1 + 721261125c_4a_1^5a_2^2 \\
& - 1656306c_6a_1^3b_4^2 + 263691675a_1^6a_2c_2 - 721261125a_2^5a_1^2c_1 - 22760790a_1^5c_3b_3 - \\
& - 1793106c_6b_4^2a_2^3 - 33627360a_2^5c_5b_3 - 2093969475a_2^3a_1^4c_4 + 5359716c_6a_1^3b_1^2 + \\
& + 21202740c_5a_2^5b_4 - 263691675a_1^6c_1a_2 - 21202740a_1^5c_5b_1 + 263691675a_2^6c_4a_1 + \\
& + 756168075a_2^3a_1^4c_2 + 19358544c_6b_1^2a_2^3 + 756168075c_4a_2^4a_1^3 + 686354175a_2^6c_1a_1 + \\
& + 2093969475c_1a_2^4a_1^3 + 79129050a_1^5c_5b_4 - 111616050a_2^5c_5b_1 - 61022520a_1^5c_3b_1 + \\
& + 13717470a_1^5c_5b_3 - 4521660c_3a_2^5b_2 + 1892940c_6b_3^2a_2^3 - 62316c_6a_1^2b_2b_4a_2 + \\
& + 2844192c_6a_2b_4b_3a_1^2 + 4714164c_6a_2b_4b_1a_1^2 + 9808584c_6b_3b_1a_1^2a_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 1770132c_6b_3b_2a_1^2a_2 + 4037592c_6a_2b_2b_1a_1^2 - 2800200c_6b_2b_3a_2^2a_1 - \\
 & - 5173740c_6b_2b_1a_2^2a_1 + 824568c_6b_3b_1a_2^2a_1 + 2604684c_6b_4b_2a_2^2a_1 - \\
 & - 8700900c_6b_4b_3a_2^2a_1 - 16422120c_6a_2^2b_4b_1a_1 + 11343364c_6a_2^3b_3b_1 - \\
 & - 27010620a_2^2a_1^3c_5b_1 + 31797480a_2^2a_1^3c_5b_3 - 7751640c_6a_1^3b_2b_1 - 6575920c_6a_1^3b_4b_3 + \\
 & + 1435356c_6b_4b_3a_2^3 - 208728c_6b_4b_1a_2^3 + 754344c_6b_4b_2a_2^3 + 1037556c_6b_2b_1a_2^3 + \\
 & + 847496c_6b_2b_3a_2^3 - 74466c_6a_2^2b_3^2a_1 + 1456362c_6a_2^2b_1^2a_1 + 563652c_6a_2^2b_2^2a_1 + \\
 & + 1053648c_6a_2^2b_4^2a_1 - 6576960a_2^4c_5b_1a_1 + 18849090a_2^4c_5b_3a_1 - 46051980a_2^4c_3b_1a_1 - \\
 & - 31233930a_2^4c_3b_3a_1 + 2067732c_6a_1^3b_3b_1 + 26122200a_2^4c_5b_2a_1 + 51084150c_3a_2^4b_2a_1 + \\
 & + 140781420c_3a_2^4b_4a_1 + 80972190a_2^4c_5b_4a_1 - 15344940c_6a_1^3b_4b_1 + 565920c_6a_1^3b_4b_2 - \\
 & - 369216c_6a_1^2b_4^2a_2 + 283020c_6a_1^2b_2^2a_2 - 145336230a_1^4c_3b_1a_2 - 11801400a_1^4c_3b_3a_2 - \\
 & - 123298110a_1^4c_5b_1a_2 - 28442700a_1^4c_5b_3a_2 + 21461814c_6a_1^2b_1^2a_2 + 1147650c_6a_1^2b_3^2a_2 - \\
 & - 16336320a_1^4c_3b_2a_2 - 35795370a_1^4c_3b_4a_2 - 18849090a_1^4c_5b_2a_2 + 6576960a_1^4c_5b_4a_2 - \\
 & - 54180360c_3a_2^2a_1^3b_3 + 160286880a_2^2a_1^3c_5b_4 + 114433800c_3a_2^2a_1^3b_2 + \\
 & + 249539940c_3a_2^2a_1^3b_4 + 60399300a_2^2a_1^3c_5b_2 - 62255700a_2^3a_1^2c_5b_3 - \\
 & - 234728520a_2^3a_1^2c_5b_1 - 290208360a_2^3a_1^2c_3b_1 - 43824300a_2^3a_1^2c_3b_3 - \\
 & - 20672340c_3a_2^3b_2a_1^2 - 77093640c_3a_2^3b_4a_1^2 - 31797480a_2^3a_1^2c_5b_2 + \\
 & + 27010620a_2^3a_1^2c_5b_4 - 3070860c_6a_1^3b_2b_3 - 106888860c_3b_1a_1^3a_2^2 - \\
 & - 2128876425a_2^5a_1^2c_4 - 13717470c_5a_2^5b_2 - 144103050c_3a_2^5b_1 - 32791980c_3a_2^5b_3 - \\
 & - 721261125a_1^5a_2^2c_2 - 756168075a_2^4a_1^3c_2 + 62580570a_1^5c_3b_2 + 109527600a_1^5c_3b_4 + \\
 & + 713450c_6b_2^2a_2^3) \\
 v_{5,1} = & -\frac{1}{209331200}(-315961733100a_1^4c_5b_2a_2^3 + 315961733100a_2^4a_1^3c_5b_3 - \\
 & - 567720639c_6a_2^4b_3^2a_1 - 233346231300a_1^4c_3a_2^3b_2 + 296563599540a_2^5a_1^2c_5b_4 + \\
 & + 282803671020a_2^2a_1^5c_5b_3 - 699131046900a_1^4c_3a_2^3b_4 + 38877219420a_1^6a_2c_5b_4 - \\
 & - 877719998c_6a_1^3b_3^2a_2^2 - 532241747700a_2^4a_1^3c_3b_3 + 5813374090c_6a_2^3a_1^2b_2^2 - \\
 & - 195110252220a_2^6c_3b_3a_1 + 118486201860a_2^6c_5b_3a_1 - 203428223700a_2^4a_1^3c_5b_1 - \\
 & - 733800218580a_2^5c_3a_1^2b_4 + 12687655278c_6a_1^5b_1b_3 - 103633171980a_1^6a_2c_3b_2 - \\
 & - 2697249683700c_3b_1a_1^4a_2^3 + 6172451518c_6a_2^5b_2b_1 + 255956109702c_6a_2^3b_1^2a_1^2 + \\
 & + 3653881015c_6a_2^4b_2^2a_1 + 503264749260a_2^6c_5b_4a_1 + 534449537700a_2^4a_1^3c_5b_2 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 38877219420a_2^6c_5b_1a_1 - 296563599540a_2^2a_1^5c_5b_1 - 477641629140a_2^2a_1^5c_3b_3 + \\
& + 18105850790c_6a_2^3a_1^2b_3^2 - 1040394544020a_2^2a_1^5c_3b_1 - 1255559406c_6b_4b_1a_2^5 + \\
& + 9382991838c_6b_4b_3a_2^5 + 2418469587300a_2^4a_1^3c_3b_4 + 1022822498100a_2^4a_1^3c_3b_2 - \\
& - 282803671020a_2^5a_1^2c_5b_2 + 18498062014c_6a_1^4b_3b_4a_2 - 28965573210c_6b_2b_1a_2^4a_1 - \\
& - 95688391380c_6a_2^2b_4b_3a_1^3 - 36533606860c_6a_2^2a_1^3b_2b_3 - 199962737100c_6a_2^2a_1^3b_1b_4 + \\
& + 18554703620c_6a_2^2a_1^3b_2b_4 + 3094272782c_6b_3b_1a_2^4a_1 + 59357768346c_6a_1^4b_3b_1a_2 - \\
& - 57073135290c_6b_4b_3a_2^4a_1 + 16844349090c_6b_4b_2a_2^4a_1 - 16780833110c_6a_2^4b_2b_3a_1 + \\
& + 17689460388c_6a_2^3a_1^2b_2b_3 + 131014567572c_6a_2^3a_1^2b_3b_1 + 17317079964c_6a_1^3b_3b_1a_2^2 + \\
& + 33974792828c_6a_2^3a_1^2b_2b_1 + 2833565772c_6a_2^3a_1^2b_2b_4 - 103826985750c_6a_2^4b_1b_4a_1 + \\
& + 36828867378c_6a_1^4b_1b_4a_2 - 78392247060c_6a_2^2a_1^3b_1b_2 + 35900649636c_6a_2^3a_1^2b_1b_4 + \\
& + 30545303454c_6a_1^4b_1a_2b_2 + 12073835634c_6a_1^4b_3a_2b_2 - 1081773834c_6a_1^4b_4b_2a_2 + \\
& + 29969332668c_6b_4b_3a_2^3a_1^2 - 11431321878c_6a_2^3a_1^2b_4^2 - 118486201860a_1^6a_2c_5b_2 - \\
& - 1739019761700a_2^8c_2a_1 + 4565368739100a_2^8c_1a_1 + 6304388500800a_1^7c_4a_2^2 + \\
& + 28043902980600c_1a_2^4a_1^5 + 6738848864800a_2^6c_4a_1^3 - 140510133660a_1^7c_3b_3 - \\
& - 379292925180a_1^7c_3b_1 + 85328139780a_1^7c_5b_3 - 132012595260a_1^7c_5b_1 + \\
& + 491124847980a_1^7c_5b_4 + 214328818860a_1^7c_5b_2 + 625853703c_6a_1^5b_2^2 - \\
& - 13756071753c_6a_1^5b_4^2 + 18478705138400a_2^6c_1a_1^3 - 750233647c_6a_1^5b_3^2 + \\
& + 34529364033c_6a_1^5b_1^2 + 18913165502400a_1^7c_1a_2^2 + 1739019761700a_1^8a_2c_2 - \\
& - 6304388500800a_1^7a_2^2c_2 - 28043902980600a_2^5a_1^4c_4 + 387790463580a_1^7c_3b_2 + \\
& + 675111272940a_1^7c_3b_4 + 12177599371c_6b_3^2a_2^5 - 208968304740a_2^7c_5b_3 + \\
& + 132012595260a_2^7c_5b_4 - 85328139780a_2^7c_5b_2 - 4565368739100a_1^8a_2c_4 - \\
& - 1739019761700a_1^8a_2c_1 - 9782428024200a_2^4a_1^5c_2 + 6304388500800a_2^7a_1^2c_2 - \\
& - 9782428024200a_2^5a_1^4c_1 - 6304388500800a_2^7a_1^2c_1 - 18913165502400a_2^7a_1^2c_4 - \\
& - 6738848864800a_1^6a_2^3c_1 - 18478705138400a_1^6a_2^3c_4 - 6738848864800a_2^6c_2a_1^3 + \\
& + 119602542747c_6b_1^2a_2^5 + 9782428024200a_2^5a_1^4c_2 + 6738848864800a_1^6a_2^3c_2 - \\
& - 11610264435c_6b_4^2a_2^5 - 691671660420a_2^7c_5b_1 - 27590996940c_3a_2^7b_2 - \\
& - 255652760220c_3a_2^7b_4 - 203607790620c_3a_2^7b_3 - 892218472860c_3a_2^7b_1 + \\
& + 4538718269c_6b_2^2a_2^5 + 9782428024200c_4a_1^5a_2^4 + 1739019761700a_2^8c_4a_1 - \\
& - 4782598921100a_2^9c_4 - 1521789579700a_1^9c_2 + 4782598921100a_1^9c_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1521789579700a_1^9c_4 + 1521789579700a_2^9c_2 - 1521789579700a_2^9c_1 + \\
& + 6380388519c_6a_2^4b_4^2a_1 - 70186625340a_1^6c_3b_3a_2 + 314346612060a_2^6c_3b_2a_1 + \\
& + 874848562380a_2^6c_3b_4a_1 - 796225299c_6a_1^4b_4^2a_2 - 899346200220a_1^6c_3b_1a_2 - \\
& - 95483422998c_6a_1^5b_4b_1 + 829885954c_6a_1^5b_4b_2 - 2223413793900a_2^3a_1^4c_5b_1 + \\
& + 1164826205c_6a_1^4b_2^2a_2 - 49213663962c_6a_1^5b_2b_1 - 19100445398c_6a_1^5b_2b_3 - \\
& - 40132922682c_6a_1^5b_4b_3 + 136030727451c_6a_1^4b_1^2a_2 - 157304056260a_2^5c_3a_1^2b_2 + \\
& + 37315260642c_6a_2^2a_1^3b_1^2 - 9023727762c_6a_2^2a_1^3b_4^2 + 5047310670c_6a_2^2a_1^3b_2^2 + \\
& + 6470750155c_6a_1^4b_3^2a_2 - 766626621540a_1^6c_5b_1a_2 + 71437139994c_6a_2^5b_3b_1 + \\
& + 5288283090c_6b_2b_3a_2^5 - 561252108300a_2^3a_1^4c_5b_3 + 203428223700a_2^3a_1^4c_5b_4 + \\
& + 160815914220a_2^6c_5b_2a_1 - 2690121956340a_2^5c_3a_1^2b_1 - 944421422100c_3b_1a_1^3a_2^4 + \\
& + 587962442340a_2^2a_1^5c_5b_2 + 5000337078c_6a_2^5b_4b_2 + 4761282801c_6a_2^4b_1^2a_1 + \\
& + 1096266349620a_1^5c_3a_2^2b_2 - 220983588540a_1^6a_2c_3b_4 + 1487025554820a_2^2a_1^5c_5b_4 - \\
& - 283319803260a_2^6c_3b_1a_1 - 594834066060a_2^5a_1^2c_5b_3 + 2218732297860a_1^5c_3a_2^2b_4 - \\
& - 2148458832780a_2^5a_1^2c_5b_1 + 1499165456100a_2^4a_1^3c_5b_4 - 337642230900c_3a_2^3a_1^4b_3 - \\
& - 175386346980a_1^6c_5b_3a_2 - 471063396180a_2^5c_3a_1^2b_3), \\
v_{6,1} = & \frac{1}{209331200}(-40342982975880 a_1^7c_3b_1a_2^2 - 17569914666720 a_1^7c_3b_3a_2^2 + \\
& + 22795546555080 a_1^7c_5b_2a_2^2 - 11077106989260 a_2^5a_1^4c_3b_2 + \\
& + 248974435314 c_6a_2^4a_1^3b_2^2 + 12182201555160 a_2^7a_1^2c_5b_4 - \\
& - 20660684601440 a_2^6c_3a_1^3b_3 - 696280410738 c_6a_1^5b_4^2a_2^2 + \\
& + 1118299819590 c_6a_2^4a_1^3b_1^2 + 10547851385214 c_6a_2^5a_1^2b_1^2 - \\
& - 40712945780520 a_2^5a_1^4c_3b_4 - 9551336845960 a_1^6c_3a_2^3b_2 - \\
& - 124218983717400 a_2^5a_1^4c_5b_1 - 32855687577180 a_2^5a_1^4c_5b_3 + \\
& + 1987533531162 c_6a_1^5b_1^2a_2^2 + 846036131070 c_6a_2^5a_1^2b_3^2 + \\
& + 2010396766980 c_6a_2^7b_3b_1 - 1121741057190 a_2^8c_5a_1b_1 - \\
& - 34917212470920 a_2^6a_1^3c_3b_1 - 23043154128540 a_2^5a_1^4c_3b_3 - \\
& - 38611705194 c_6a_2^4a_1^3b_3^2 + 289097847090 c_6a_2^5b_2^2a_1^2 - \\
& - 112906025694 c_6a_2^4b_4^2a_1^3 + 11031487126362 c_6a_2^3a_1^4b_1^2 - \\
& - 45126844662 c_6a_2^2a_1^5b_3^2 - 56422668339180 a_2^4a_1^5c_3b_1 - \\
& - 28695427697040 a_2^4a_1^5c_3b_3 - 80708444197680 a_2^7c_5a_1^2b_1 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 22840503046920 a_2^7 c_5 a_1^2 b_3 - 1121455131816 c_6 a_1^7 b_3 b_4 - \\
& - 101844347910240 a_2^7 c_3 a_1^2 b_1 - 19188461215560 a_2^7 c_3 a_1^2 b_3 + \\
& + 14236390698660 a_2^5 a_1^4 c_5 b_4 - 5248110134280 a_2^7 a_1^2 c_3 b_2 - \\
& - 28111091427120 a_2^7 a_1^2 c_3 b_4 - 16506039578 c_6 a_2^6 b_3^2 a_1 + \\
& + 4575399219690 a_2^8 c_5 b_2 a_1 + 14297788357320 a_2^8 c_5 b_4 a_1 + \\
& + 189253888662 c_6 a_1^4 b_2^2 a_2^3 - 10446530274960 a_2^7 c_5 a_1^2 b_2 + \\
& + 24855596890410 a_2^8 c_3 b_4 a_1 - 8062320927570 a_2^8 c_3 b_1 a_1 - \\
& - 5540278269240 a_2^8 c_3 b_3 a_1 + 679682912250 c_6 a_1^4 b_3^2 a_2^3 + \\
& + 93591520626760 a_2^6 a_1^3 c_3 b_4 + 60276954037560 a_2^4 a_1^5 c_3 b_2 + \\
& + 8945941039620 a_2^8 c_3 b_2 a_1 + 5666834180 c_6 a_1^7 b_4 b_2 - 6278448930780 a_2 a_1^8 c_3 b_4 - \\
& - 1387652309064 c_6 a_1^7 b_1 b_2 - 2679484187736 c_6 a_1^7 b_1 b_4 - 4985114019210 a_1^8 c_5 b_3 a_2 - \\
& - 488460275632550 a_2^7 a_1^4 c_1 + 52548490657325 a_1^{10} a_2 c_2 - 52548490657325 a_1^{10} a_2 c_1 - \\
& - 500801819279450 a_2^6 a_1^5 c_2 - 488460275632550 a_2^4 a_1^7 c_2 + \\
& + 500801819279450 a_2^6 a_1^5 c_4 + 256571681463175 a_2^8 a_1^3 c_4 + \\
& + 256571681463175 a_2^3 a_1^8 c_2 + 500801819279450 a_2^5 a_1^6 c_2 + \\
& + 11020181658980 a_1^9 c_3 b_2 - 3749917822950 a_1^9 c_5 b_1 - 139133156501625 a_1^{10} a_2 c_4 - \\
& - 720348869801925 a_2^9 a_1^2 c_4 - 329020032630 c_6 a_2^7 b_4^2 + 128032854314 c_6 a_2^7 b_2^2 + \\
& + 344531729830 c_6 a_2^7 b_3^2 + 3350898763206 c_6 a_2^7 b_1^2 + 3749917822950 a_2^9 c_5 b_4 + \\
& + 238059365992825 a_1^9 a_2^2 c_4 + 720348869801925 a_2^2 a_1^9 c_1 - 406630354002 c_6 a_1^7 b_4^2 + \\
& + 488460275632550 a_2^4 a_1^7 c_4 - 3994893301880 a_1^9 c_3 b_3 + 238059365992825 a_2^9 a_1^2 c_2 + \\
& + 13952319919720 a_1^9 c_5 b_4 + 977240837034 c_6 a_1^7 b_1^2 + 1428356195956950 a_2^4 a_1^7 c_1 - \\
& - 7262562001500 a_2^9 c_3 b_4 - 52548490657325 a_2^{10} c_2 a_1 + 139133156501625 a_2^{10} c_1 a_1 + \\
& + 52548490657325 a_2^{10} c_4 a_1 - 785363317570 a_2^9 c_3 b_2 - 5936810845290 a_2^9 c_5 b_3 - \\
& - 19658550894580 a_2^9 c_5 b_1 - 10775206180050 a_1^9 c_3 b_1 - 238059365992825 a_2^9 a_1^2 c_1 - \\
& - 500801819279450 a_2^5 a_1^6 c_1 + 13794298526 c_6 a_1^7 b_2^2 + 488460275632550 a_2^7 a_1^4 c_2 + \\
& + 1416014652310050 a_2^6 a_1^5 c_1 + 701836554331575 a_2^8 a_1^3 c_1 - \\
& - 701836554331575 a_2^3 a_1^8 c_4 - 1428356195956950 a_2^7 a_1^4 c_4 - \\
& - 1416014652310050 a_2^5 a_1^6 c_4 - 256571681463175 a_2^8 c_2 a_1^3 + \\
& + 19214022926410 a_1^9 c_3 b_4 + 6088367942410 a_1^9 c_5 b_2 - 256571681463175 a_2^3 a_1^8 c_1 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 25364781869440 a_2^9 c_3 b_1 - 22166461286 c_6 a_1^7 b_3^2 - 2424166666740 a_2^9 c_5 b_2 + \\
& + 2424166666740 a_1^9 c_5 b_3 - 5785253748170 a_2^9 c_3 b_3 - 238059365992825 a_1^9 a_2^2 c_2 - \\
& - 13466632242 c_6 a_1^6 b_4^2 a_2 - 634535870670 c_6 a_2^5 b_4^2 a_1^2 + \\
& + 177598748802 c_6 a_2^6 b_4^2 a_1 + 12324843432720 a_2^6 c_5 a_1^3 b_3 - \\
& - 21777748005780 a_1^8 c_5 a_2 b_1 - 20937109394760 a_2^3 a_1^6 c_5 b_3 + \\
& + 107152407702 c_6 a_2^6 b_1^2 a_1 + 148423850424 c_6 a_2^7 b_2 b_3 + \\
& + 177580901218 c_6 a_1^6 b_3^2 a_2 + 28786505678 c_6 a_1^6 b_2^2 a_2 - \\
& - 2021992941930 a_1^8 c_3 b_3 a_2 - 3363323245620 a_1^8 c_5 b_2 a_2 - 2936976673410 a_2 a_1^8 c_3 b_2 + \\
& + 354580918732 c_6 a_1^7 b_3 b_1 + 1121741057190 a_1^8 c_5 b_4 a_2 + 3833936894562 c_6 a_1^6 b_1^2 a_2 + \\
& + 10446530274960 a_1^7 c_5 b_3 a_2^2 - 12182201555160 a_1^7 c_5 b_1 a_2^2 + \\
& + 56199704608320 a_1^7 c_5 b_4 a_2^2 + 142545162684 c_6 a_2^7 b_4 b_2 - 35017185192 c_6 a_2^7 b_4 b_1 - \\
& - 153155059543200 a_2^5 a_1^4 c_3 b_1 + 19769609109640 a_2^6 a_1^3 c_5 b_2 + \\
& + 38047297748720 a_2^6 a_1^3 c_3 b_2 + 131830273508700 a_2^4 a_1^5 c_3 b_4 + \\
& + 42195778987440 a_2^2 a_1^7 c_3 b_2 + 82308372698760 a_2^2 a_1^7 c_3 b_4 - \\
& - 12324843432720 a_2^3 a_1^6 c_5 b_2 - 16983883795320 a_2^5 a_1^4 c_5 b_2 - \\
& - 14236390698660 a_2^4 a_1^5 c_5 b_1 + 16983883795320 a_2^4 a_1^5 c_5 b_3 - \\
& - 6925848023640 a_2^6 a_1^3 c_5 b_1 + 3363323245620 a_2^8 c_5 b_3 a_1 + \\
& + 56890641483520 a_2^6 a_1^3 c_5 b_4 - 11661939603080 a_1^6 c_3 b_3 a_2^3 + \\
& + 6925848023640 a_1^6 c_5 a_2^3 b_4 - 84946838420080 a_2^3 a_1^6 c_5 b_1 - \\
& - 102236202833440 a_1^6 c_3 b_1 a_2^3 + 266547362744 c_6 a_2^7 b_3 b_4 - \\
& - 319580080074 c_6 a_1^4 b_4^2 a_2^3 - 535953542456 c_6 a_1^7 b_3 b_2 + \\
& + 84840237814800 a_2^4 a_1^5 c_5 b_4 - 25560709331040 a_1^8 c_3 b_1 a_2 - \\
& - 26142865285680 a_1^6 c_3 a_2^3 b_4 + 31901388502620 a_2^4 a_1^5 c_5 b_2 + \\
& + 160203132606 c_6 a_1^5 b_2^2 a_2^2 + 171260920568 c_6 a_2^7 b_2 b_1 + \\
& + 103420318994 c_6 a_2^6 b_2^2 a_1 + 145303928325075 a_1^{11} c_1 + 46377718833875 a_2^{11} c_2 - \\
& - 145303928325075 a_2^{11} c_4 - 46377718833875 a_2^{11} c_1 + 46377718833875 a_1^{11} c_4 - \\
& - 46377718833875 a_1^{11} c_2 + 993643060956 c_6 a_2^4 a_1^3 b_4 b_2 + 1136088474432 c_6 a_2^5 a_1^2 b_1 b_2 + \\
& + 1130614700352 c_6 a_2^5 b_3 b_4 a_1^2 - 3808597277328 c_6 a_2^2 a_1^5 b_3 b_4 + \\
& + 851427214008 c_6 a_2^3 a_1^4 b_2 b_3 - 34037784492 c_6 a_1^6 b_2 a_2 b_4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1024352449776 c_6 a_2^5 a_1^2 b_4 b_1 - 8307295253424 c_6 a_1^5 b_4 b_1 a_2^2 - \\
& - 465902559776 c_6 a_2^6 b_3 b_2 a_1 + 896006682704 c_6 a_1^6 b_1 a_2 b_2 + \\
& + 520334688080 c_6 a_1^6 b_3 a_2 b_4 - 3575125294128 c_6 a_1^5 b_2 b_1 a_2^2 + \\
& + 209836081260 c_6 a_2^5 b_2 a_1^2 b_4 - 4308615386472 c_6 a_2^4 a_1^3 b_3 b_4 - \\
& - 8553076910424 c_6 a_2^4 b_1 a_1^3 b_4 + 5683870159188 c_6 a_2^5 a_1^2 b_1 b_3 + \\
& + 477421278140 c_6 a_2^6 b_4 b_2 a_1 + 653808355536 c_6 a_2^5 a_1^2 b_2 b_3 + \\
& + 520179181476 c_6 a_1^5 b_4 a_2^2 b_2 - 791351734752 c_6 a_2^6 b_1 b_2 a_1 + \\
& + 344333273376 c_6 a_1^6 b_3 b_2 a_2 - 1493210134392 c_6 a_2^4 b_3 a_1^3 b_2 + \\
& + 558058634580 c_6 a_2^4 b_1 a_1^3 b_3 - 2977629500232 c_6 a_2^4 b_2 a_1^3 b_1 + \\
& + 34448353668 c_6 a_2^3 a_1^4 b_4 b_2 + 1382692590168 c_6 a_2^3 a_1^4 b_3 b_4 + \\
& + 1081759438848 c_6 a_2 a_1^6 b_4 b_1 - 1562065897488 c_6 a_1^5 b_3 a_2^2 b_2 + \\
& + 5326863532284 c_6 a_2^3 a_1^4 b_3 b_1 + 1654585359660 c_6 a_1^6 b_1 a_2 b_3 + \\
& + 2142838509336 c_6 a_1^4 b_4 b_1 a_2^3 + 840949629708 c_6 a_1^5 b_1 b_3 a_2^2 - \\
& - 2924070625152 c_6 a_2^6 b_1 b_4 a_1 - 1622668460544 c_6 a_2^6 b_3 b_4 a_1 + \\
& + 73399359124 c_6 a_2^6 b_3 b_1 a_1 + 1859124801048 c_6 a_2^3 a_1^4 b_1 b_2), \\
v_{7,1} &= -\frac{1}{6698598400} (a_1^2 + a_2^2) (185057278141743150 a_1^{11} c_1 - \\
& - 66609536126640650 a_1^{10} a_2 c_1 + 917900725589626350 a_1^9 a_2^2 c_1 - \dots), \\
v_{8,1} &= \frac{1}{1373212672000} (a_1^2 + a_2^2)^2 (1920871660446110659625 a_1^{11} c_1 - \\
& - 688647034952413184375 a_1^{10} a_2 c_1 + 9531823580024988851375 a_1^9 a_2^2 c_1 - \dots), \\
v_{9,1} &= -\frac{1}{1109555838976000} (a_1^2 + a_2^2)^3 (97578737371341505206661500 a_1^{11} c_1 - \\
& - 34865360565837189604560500 a_1^{10} a_2 c_1 + \dots), \\
v_{10,1} &= \frac{1}{67682906177536000} (a_1^2 + a_2^2)^4 (455362879697844396526063037625 a_1^{11} c_1 - \\
& - 162239561715243494841919298375 a_1^{10} a_2 c_1 + \dots), \\
v_{11,1} &= -\frac{1}{15702434233188352000} (a_1^2 + a_2^2)^5 (\\
& 9668968637459677338410534098474500 a_1^{11} c_1 - \dots.
\end{aligned}$$

Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema

5.4

No 1º caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{4,1}$, $v_{5,1}$ e $v_{6,1}$ do sistema (5.12) com a condição $a_3 = 0$ e devido ao tamanho excessivo dos coeficientes focais $v_{7,1}$, $v_{8,1}$, $v_{9,1}$, $v_{10,1}$, $v_{11,1}$, $v_{12,1}$ e $v_{13,1}$ vamos omitir boa parte das suas expressões.

1º Caso O sistema (5.12) com a condição $a_3 = 0$.

$$\begin{aligned}
 v_{1,1} &= -\frac{1}{4}(-c_2 a_1 - 3 c_4 a_2 - c_1 a_2 + c_2 a_2 + 3 c_1 a_1 + c_4 a_1) \\
 v_{2,1} &= \frac{1}{40}(-c_3 b_4 + 3 c_5 b_2 + 3 c_5 b_4 - 225 a_2 a_1^2 c_4 + 85 a_2 a_1^2 c_2 - 85 a_2 a_1^2 c_1 - 85 a_2^2 a_1 c_2 + \\
 &+ 225 a_2^2 a_1 c_1 + 85 a_2^2 a_1 c_4 + 17 c_5 b_1 + 5 c_5 b_3 + 13 c_5 b_5 - c_3 b_2 - 75 a_1^3 c_2 + \\
 &+ 75 a_2^3 c_2 + 21 c_3 b_1 - 75 a_2^3 c_1 - 235 a_2^3 c_4 + 9 c_3 b_5 + 235 a_1^3 c_1 + 75 a_1^3 c_4 + \\
 &+ 5 c_3 b_3) \\
 v_{3,1} &= -\frac{1}{320}(-20535 a_2^5 c_4 + 260 c_5 b_2 a_1 a_2 - 60 c_3 b_3 a_1 a_2 + 220 a_2 a_1 c_5 b_4 + 460 c_3 a_1 a_2 b_2 + \\
 &+ 340 c_3 a_1 a_2 b_4 - 420 c_3 a_1 a_2 b_1 + 220 c_3 a_1 a_2 b_5 - 180 c_5 a_1 a_2 b_1 + 20 c_5 a_1 a_2 b_3 - \\
 &- 180 c_5 a_1 a_2 b_5 + 290 c_3 b_3 a_1^2 + 6505 a_2^5 c_2 - 6505 a_2^5 c_1 - 6505 a_1^5 c_2 + \\
 &+ 20535 a_1^5 c_1 + 6505 a_1^5 c_4 + 19515 a_2^4 c_1 a_1 + 14030 c_4 a_1^3 a_2^2 + 254 a_1^2 c_5 b_4 + \\
 &+ 254 a_2^2 c_5 b_2 + 314 a_2^2 c_5 b_4 + 7525 a_2^4 c_4 a_1 + 40050 a_1^3 c_1 a_2^2 + 314 a_1^2 c_5 b_2 - \\
 &- 40050 a_2^3 a_1^2 c_4 - 14030 a_2^3 a_1^2 c_1 - 14030 c_2 a_1^3 a_2^2 - 7525 a_2^4 c_2 a_1 + \\
 &+ 14030 a_1^2 c_2 a_2^3 - 7525 a_2 a_1^4 c_1 - 19515 a_2 a_1^4 c_4 + 2 c_3 a_1^2 b_2 + 7525 a_2 a_1^4 c_2 + \\
 &+ 882 c_3 b_5 a_2^2 + 1294 c_5 b_5 a_2^2 - 158 c_3 b_4 a_2^2 + 1086 a_2^2 c_5 b_1 + 410 a_2^2 c_5 b_3 + \\
 &+ 1958 c_3 a_1^2 b_1 + 22 c_3 a_1^2 b_5 + 1218 a_2^2 c_3 b_1 + 390 a_2^2 c_3 b_3 + 1706 c_5 a_1^2 b_1 + \\
 &+ 430 c_5 a_1^2 b_3 + 954 c_5 a_1^2 b_5 + 22 c_3 a_1^2 b_4 - 138 a_2^2 c_3 b_2) \\
 v_{4,1} &= \frac{1}{707200}(-5864235 c_3 b_4 a_2^4 + 37393 c_6 b_5^2 a_2 + 36362235 a_2^4 c_3 b_1 + \\
 &+ 13254475 a_2^4 c_5 b_3 + 33082595 a_2^4 c_5 b_1 + 44013255 c_5 b_5 a_2^4 - 263691675 a_2 a_1^6 c_1 - \\
 &- 686354175 a_1^6 a_2 c_4 + 721261125 a_2^5 a_1^2 c_2 - 2128876425 a_2^5 a_1^2 c_4 - \\
 &- 721261125 a_2^5 a_1^2 c_1 - 756168075 a_2^3 a_1^4 c_1 - 384281 c_6 b_1^2 a_1 + 24127 c_6 b_4^2 a_1 + \\
 &+ 12480975 a_2^4 c_3 b_3 + 686354175 a_2^6 c_1 a_1 - 263691675 a_2^6 c_2 a_1 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 263691675 a_2^6 c_4 a_1 - 2093969475 a_2^3 a_1^4 c_4 + 756168075 a_2^3 a_1^4 c_2 + \\
& + 10830105 a_2^4 c_5 b_4 + 8288605 a_2^4 c_5 b_2 - 4869735 a_2^4 c_3 b_2 - 28907 c_6 b_4^2 a_2 - \\
& - 47471 c_6 b_2^2 a_2 + 756168075 a_2^4 a_1^3 c_4 + 2093969475 a_2^4 a_1^3 c_1 - \\
& - 756168075 a_2^4 a_1^3 c_2 + 721261125 a_2^2 a_1^5 c_4 + 2128876425 a_2^2 a_1^5 c_1 - \\
& - 721261125 a_2^2 a_1^5 c_2 - 57195 c_6 b_3^2 a_2 - 1325735 c_6 b_1^2 a_2 + 1450865 c_3 a_1^4 b_4 + \\
& + 898365 c_3 a_1^4 b_2 + 8288605 c_5 a_1^4 b_4 + 10830105 c_5 a_1^4 b_2 + 263691675 a_1^6 a_2 c_2 - \\
& - 31565 c_6 b_3^2 a_1 - 89025 c_6 b_5^2 a_1 + 9099 c_6 b_2^2 a_1 + 29904615 c_3 b_5 a_2^4 + \\
& + 29802955 c_5 a_1^4 b_5 + 14027975 c_5 a_1^4 b_3 + 58121895 c_5 a_1^4 b_1 - 2869685 c_3 a_1^4 b_5 + \\
& + 8480875 c_3 a_1^4 b_3 + 228784725 a_2^7 c_2 - 721261125 a_2^7 c_4 - 713754 c_6 b_5 b_1 a_1 + \\
& + 303654 c_6 b_2 b_5 a_1 + 340782 c_6 b_4 b_5 a_1 + 340782 c_6 b_2 b_1 a_1 + 18278910 c_5 b_2 a_2^2 a_1^2 + \\
& + 27945450 c_5 b_3 a_2^2 a_1^2 - 3838770 c_3 b_4 a_2^2 a_1^2 - 29614 c_6 b_3 b_4 a_2 - 43758 c_6 b_5 b_2 a_2 - \\
& - 73814 c_6 b_5 b_4 a_2 - 73814 c_6 b_1 b_2 a_2 + 9083100 c_3 a_1^3 a_2 b_5 - 17702100 c_3 a_1^3 a_2 b_1 + \\
& + 119782 c_6 b_2 b_3 a_1 + 119782 c_6 b_4 b_3 a_1 + 26886 c_6 b_2 b_4 a_1 + 9215700 c_5 a_2^3 b_4 a_1 - \\
& - 708438 c_6 b_5 b_1 a_2 - 125174 c_6 b_5 b_3 a_2 + 101962770 a_2^2 c_3 b_1 a_1^2 + \\
& + 22508850 a_2^2 c_3 b_3 a_1^2 - 43758 c_6 b_1 b_4 a_2 - 530046 c_6 b_1 b_3 a_2 - 68598 c_6 b_2 b_4 a_2 - \\
& - 228784725 a_2^7 c_1 - 228784725 a_1^7 c_2 + 721261125 a_1^7 c_1 + 228784725 a_1^7 c_4 - \\
& - 7757100 a_1^3 c_5 b_1 a_2 + 73772010 c_5 b_5 a_2^2 a_1^2 + 8862100 a_2 a_1^3 c_5 b_4 + \\
& + 18365100 c_3 a_1^3 a_2 b_2 + 11735100 c_3 a_1^3 a_2 b_4 + 10099700 c_5 a_2^3 b_2 a_1 - \\
& - 231242 c_6 b_3 b_1 a_1 + 1082900 c_5 a_1^3 a_2 b_3 - 6077500 c_5 a_1^3 a_2 b_5 + 11072100 c_5 b_2 a_1^3 a_2 - \\
& - 1878500 c_3 b_3 a_1^3 a_2 + 9348300 c_3 a_2^3 b_5 a_1 - 2762500 c_3 b_3 a_1 a_2^3 + \\
& + 17657900 c_3 a_1 a_2^3 b_2 + 14121900 c_3 a_1 a_2^3 b_4 - 16199300 c_3 a_1 a_2^3 b_1 - \\
& - 6077500 c_5 a_1 a_2^3 b_1 - 7757100 c_5 a_1 a_2^3 b_5 + 1082900 c_5 a_1 a_2^3 b_3 + \\
& + 23808330 c_3 a_1^2 b_5 a_2^2 - 5164770 c_3 a_1^2 b_2 a_2^2 + 303654 c_6 b_4 b_1 a_1 - \\
& - 172898 c_6 b_3 b_5 a_1 + 18278910 a_1^2 c_5 b_4 a_2^2 + 89922690 c_5 b_1 a_2^2 a_1^2 - \\
& - 29614 c_6 b_3 b_2 a_2 + 65467935 c_3 a_1^4 b_1), \\
v_{5,1} = & - \frac{1}{52332800} (434754940425 a_2^8 a_1 c_4 - 2445607006050 a_2^5 a_1^4 c_1 + \\
& + 434754940425 a_1^8 c_2 a_2 + 101401586910 a_1^6 c_3 b_1 + 12853099220 a_1^6 c_3 b_3 + \\
& + 112018765 c_6 a_1^3 b_5^2 - 1576097125200 a_2^7 a_1^2 c_1 - 4728291375600 a_2^7 a_1^2 c_4 - \\
& - 43942895 c_6 a_1^3 b_3^2 + 1576097125200 a_2^7 c_2 a_1^2 - 4619676284600 a_2^3 a_1^6 c_4 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 105808165 c_6 b_3^2 a_2^3 - 2096120305 c_6 b_1^2 a_2^3 + 46447976640 c_3 b_5 a_2^6 + \\
 & + 12782449940 a_2^6 c_5 b_2 - 7587765380 a_2^6 c_3 b_2 - 61224497 c_6 b_4^2 a_2^3 - \\
 & - 87644421 c_6 b_2^2 a_2^3 + 19191337230 a_2^6 c_3 b_3 - 434754940425 a_1^8 c_1 a_2 - \\
 & - 1141342184775 a_1^8 c_4 a_2 + 16878063930 a_2^6 c_5 b_4 + 4619676284600 a_2^6 c_1 a_1^3 + \\
 & + 27583581 c_6 a_1^3 b_2^2 - 9254973910 c_3 b_4 a_2^6 + 2445607006050 a_2^5 a_1^4 c_2 + \\
 & + 2445607006050 a_2^4 a_1^5 c_4 - 1684712216200 a_2^3 a_1^6 c_1 + 68394799330 c_5 b_5 a_2^6 + \\
 & + 50526909550 a_2^6 c_5 b_1 + 20405539960 a_2^6 c_5 b_3 + 55447419300 a_2^6 c_3 b_1 + \\
 & + 78160423 c_6 b_5^2 a_2^3 - 1576097125200 a_1^7 a_2^2 c_2 + 12782449940 a_1^6 c_5 b_4 + \\
 & + 90341622020 a_1^6 c_5 b_1 + 45606399800 a_1^6 c_5 b_5 - 4871447750 a_1^6 c_3 b_5 + \\
 & + 1684712216200 a_1^6 a_2^3 c_2 - 780059819 c_6 a_1^3 b_1^2 + 52670913 c_6 a_1^3 b_4^2 + \\
 & + 21619742690 a_1^6 c_5 b_3 + 1631883890 a_1^6 c_3 b_2 + 2393080820 a_1^6 c_3 b_4 + \\
 & + 16878063930 a_1^6 c_5 b_2 - 7010975745150 a_2^5 a_1^4 c_4 + 7010975745150 a_2^4 a_1^5 c_1 - \\
 & - 2445607006050 a_2^4 a_1^5 c_2 + 1684712216200 a_2^6 a_1^3 c_4 - 1684712216200 a_2^6 a_1^3 c_2 + \\
 & + 4728291375600 a_1^7 a_2^2 c_1 + 1576097125200 a_1^7 a_2^2 c_4 + 1141342184775 a_2^8 a_1 c_1 + \\
 & + 44803418400 a_2^4 c_5 a_1^2 b_4 - 54899194 c_6 a_2^3 b_3 b_4 + 380447394925 a_1^9 c_4 + \\
 & + 380447394925 a_2^9 c_2 - 380447394925 a_2^9 c_1 - 1195649730275 a_2^9 c_4 - \\
 & - 380447394925 a_1^9 c_2 + 1195649730275 a_1^9 c_1 - 14934472800 c_3 b_4 a_2^4 a_1^2 + \\
 & + 40808545050 c_5 b_2 a_2^4 a_1^2 + 44803418400 c_5 a_1^4 b_2 a_2^2 - 3258943350 c_3 a_1^4 b_4 a_2^2 + \\
 & + 228605615550 a_2^2 a_1^4 c_5 b_1 - 2736596590 a_1^5 c_3 b_3 a_2 - 32196073 c_6 b_5^2 a_1^2 a_2 - \\
 & - 2639692929 c_6 b_1^2 a_1^2 a_2 + 188818377800 c_5 a_1^2 a_2^4 b_1 + 15073072950 c_3 a_2^5 b_5 a_1 + \\
 & + 37872689 c_6 b_4^2 a_1 a_2^2 + 65017780100 a_2^2 a_1^4 c_5 b_3 + 33716224100 a_2^3 a_1^3 c_5 b_2 + \\
 & + 28886887900 a_2^3 a_1^3 c_5 b_4 + 56878394300 a_2^3 a_1^3 c_3 b_2 + 40395197700 a_2^3 a_1^3 c_3 b_4 + \\
 & + 17859303930 c_5 a_1^5 b_2 a_2 - 15957824350 c_3 a_1^2 b_2 a_2^4 + 1852989970 c_5 a_1 a_2^5 b_3 - \\
 & - 12558645450 c_5 a_1 a_2^5 b_5 + 14058143710 a_1^5 c_5 b_4 a_2 - 12558645450 a_1^5 c_5 b_1 a_2 - \\
 & - 9189067290 a_1^5 c_5 b_5 a_2 + 14492833030 a_1^5 c_3 b_5 a_2 - 28474358250 a_1^5 c_3 b_1 a_2 - \\
 & - 7312691100 c_3 b_3 a_1^3 a_2^3 - 53877435300 c_3 a_1^3 a_2^3 b_1 - 1375313098 c_6 b_5 b_1 a_2^3 - \\
 & - 255996034 c_6 b_5 b_3 a_2^3 - 68414258 c_6 b_1 b_4 a_2^3 - 910303146 c_6 b_1 b_3 a_2^3 + \\
 & + 9673805 c_6 a_2^2 b_2^2 a_1 - 1135896286 c_6 a_1^3 b_5 b_1 + 17865845530 c_3 a_1^5 b_4 a_2 - \\
 & - 411836358 c_6 a_1^3 b_3 b_1 - 307135291 c_6 a_2^2 a_1 b_1^2 - 55217535 c_6 a_2^2 a_1 b_3^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 258591083400 a_1^4 c_3 a_2^2 b_1 + 30306415100 a_1^4 c_3 a_2^2 b_5 + 36709314 c_6 a_1 a_2^2 b_2 b_4 + \\
& + 189456946 c_6 a_2^2 a_1 b_3 b_4 + 734641586 c_6 a_2^2 a_1 b_5 b_4 - 293071746 c_6 b_4 a_1^2 b_1 a_2 + \\
& + 321440682 c_6 a_1 a_2^2 b_4 b_1 - 434754940425 a_2^8 a_1 c_2 - 84210298 c_6 a_2^3 b_5 b_2 - \\
& - 154408474 c_6 a_2^3 b_5 b_4 + 81525098850 a_2^4 a_1^2 c_3 b_5 - 9189067290 a_2^5 c_5 a_1 b_1 - \\
& - 136083178 c_6 a_2^3 b_2 b_4 - 31754293 c_6 a_1^2 b_2^2 a_2 + 14801269470 c_5 a_2^5 b_4 a_1 + \\
& + 212536175150 a_2^4 c_3 b_1 a_1^2 - 79680245 c_6 a_1^2 b_3^2 a_2 + 7175775 c_6 a_1^2 b_4^2 a_2 - \\
& - 104788514 c_6 a_2^3 b_1 b_2 + 1852989970 a_1^5 c_5 b_3 a_2 + 29086161390 c_3 a_1^5 b_2 a_2 + \\
& + 574921466 c_6 a_1^3 b_1 b_4 - 181376382 c_6 a_1^3 b_5 b_3 + 679463338 c_6 a_1^3 b_1 b_2 + \\
& + 3605239300 a_2^3 a_1^3 c_5 b_3 + 159466627450 a_2^2 a_1^4 c_5 b_5 - 162425923 c_6 a_2^2 b_5^2 a_1 - \\
& - 4548619790 a_2^5 c_3 b_3 a_1 + 29593380700 c_3 a_1^3 a_2^3 b_5 - 25430551770 a_2^5 c_3 b_1 a_1 + \\
& + 69417314 c_6 a_1^3 b_2 b_4 + 182282501700 a_2^4 c_5 a_1^2 b_5 + 63776102650 a_2^4 c_5 a_1^2 b_3 + \\
& + 216664378 c_6 a_1^3 b_3 b_2 + 203600418 c_6 a_1^3 b_3 b_4 + 489822946 c_6 a_1^3 b_5 b_2 + \\
& + 515981058 c_6 a_1^3 b_5 b_4 - 49261874 c_6 a_2^3 b_3 b_2 + 54365602200 c_3 b_3 a_1^2 a_2^4 + \\
& + 47926623550 c_3 b_3 a_1^4 a_2^2 - 6765649800 c_3 a_1^4 a_2^2 b_2 + 40808545050 a_2^2 a_1^4 c_5 b_4 + \\
& + 22630092810 c_3 a_1 a_2^5 b_4 + 27691492270 c_3 a_1 a_2^5 b_2 - 21646972100 c_5 a_1^3 a_2^3 b_5 + \\
& + 15884394890 c_5 a_2^5 b_2 a_1 - 21646972100 a_1^3 c_5 b_1 a_2^3 - 1199080446 c_6 a_2^2 a_1 b_5 b_1 - \\
& - 390870738 c_6 a_1^2 b_1 b_2 a_2 - 11792778 c_6 b_4 a_1^2 b_2 a_2 - 1034919018 c_6 a_1^2 b_5 b_1 a_2 - \\
& - 245683626 c_6 b_2 a_1^2 b_5 a_2 - 242010858 c_6 a_2 a_1^2 b_5 b_4 - 104868138 c_6 a_1^2 b_3 b_4 a_2 - \\
& - 121780098 c_6 a_1^2 b_3 b_2 a_2 - 148217698 c_6 a_1^2 b_5 b_3 a_2 - 913569802 c_6 b_1 a_1^2 b_3 a_2 + \\
& + 150265066 c_6 a_1 a_2^2 b_2 b_3 + 244194746 c_6 a_2^2 a_1 b_2 b_1 + 576736242 c_6 b_2 b_5 a_1 a_2^2 - \\
& - 305675366 c_6 b_3 a_1 a_2^2 b_1 - 332635934 c_6 a_2^2 a_1 b_5 b_3), \\
v_{6,1} &= \frac{1}{209331200} (500801819279450 a_2^5 a_1^6 c_2 + 7772224149365 a_2^8 c_5 b_5 - \\
& - 7373071632 c_6 a_2^5 b_4^2 - 10141824448 c_6 a_2^5 b_2^2 - 859451312265 a_2^8 c_3 b_2 + \\
& + 256571681463175 a_2^8 a_1^3 c_4 - 1428356195956950 a_2^7 a_1^4 c_4 + \\
& + 52548490657325 a_1^{10} c_2 a_2 + 720348869801925 a_1^9 c_1 a_2^2 - \\
& - 500801819279450 a_2^5 a_1^6 c_1 + 488460275632550 a_2^7 a_1^4 c_2 - \\
& - 233363529024 c_6 a_2^5 b_1^2 + 182282787895 a_1^8 c_3 b_2 - 488460275632550 a_2^4 a_1^7 c_2 - \\
& - 488460275632550 a_2^7 a_1^4 c_1 + 2321842509805 a_2^8 c_5 b_3 - 103601000832 c_6 a_1^4 a_2 b_1 b_3 \\
& - 209274912736 c_6 b_1 a_1^2 b_3 a_2^3 + 18578304680 c_6 a_2^4 b_1 b_2 a_1 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 81214634496 c_6 a_1^3 b_3 a_2^2 b_1 - 40206346616 c_6 a_1^4 b_1 a_2 b_4 - \\
 & - 54538060968 c_6 a_1^4 b_2 b_1 a_2 + 238059365992825 a_2^9 a_1^2 c_2 + \\
 & + 1428356195956950 a_1^7 a_2^4 c_1 + 6317585864 c_6 a_1^5 b_4^2 + 139133156501625 a_2^{10} c_1 a_1 + \\
 & + 488460275632550 a_2^4 a_1^7 c_4 - 1416014652310050 a_2^5 a_1^6 c_4 + \\
 & + 10265544032185 a_1^8 c_5 b_1 - 52548490657325 a_2^{10} c_2 a_1 + 5772533729625 a_2^8 c_5 b_1 - \\
 & - 92767474680 c_6 a_1^5 b_1^2 - 4679432200 c_6 a_1^5 b_3^2 - 238059365992825 a_1^9 c_2 a_2^2 + \\
 & + 1416014652310050 a_2^6 a_1^5 c_1 + 256571681463175 a_1^8 a_2^3 c_2 + 9375778848 c_6 b_5^2 a_2^5 + \\
 & + 264827313335 a_1^8 c_3 b_4 - 272241588544 c_6 a_2^3 b_5 a_1^2 b_1 + \\
 & + 10463146016 c_6 a_1^3 b_2 b_4 a_2^2 + 142619624176 c_6 a_2^2 a_1^3 b_5 b_4 - \\
 & - 32310022800 c_6 b_3 a_1 a_2^4 b_1 + 15219495000 c_6 a_1 a_2^4 b_2 b_3 - \\
 & - 266698662304 c_6 a_1^3 a_2^2 b_5 b_1 + 67175320840 c_6 a_2^4 b_5 b_2 a_1 + \\
 & + 122161637872 c_6 a_1^3 b_5 b_2 a_2^2 + 98427647472 c_6 a_1^3 b_1 a_2^2 b_4 - \\
 & - 15428800608 c_6 a_1^4 b_3 b_5 a_2 - 50028553104 c_6 a_2^3 a_1^2 b_5 b_4 - \\
 & - 256571681463175 a_1^8 c_1 a_2^3 + 5195400251925 a_1^8 c_5 b_5 - 720348869801925 a_2^9 a_1^2 c_4 - \\
 & - 256571681463175 a_2^8 a_1^3 c_2 - 238059365992825 a_2^9 a_1^2 c_1 + 1454075311195 a_1^8 c_5 b_4 - \\
 & - 490879824175 a_1^8 c_3 b_5 + 3596759160 c_6 a_1^5 b_2^2 - 139133156501625 a_1^{10} a_2 c_4 + \\
 & + 20666448520 c_6 a_2^4 b_3 b_4 a_1 - 39066354480 c_6 a_2^4 a_1 b_5 b_3 + 95934598896 c_6 a_1^3 b_1 b_2 a_2^2 - \\
 & - 21094221584 c_6 a_1^2 a_2^3 b_2 b_3 - 45404710928 c_6 a_2^3 a_1^2 b_4 b_1 - 30424011336 c_6 a_1^4 b_2 b_5 a_2 - \\
 & - 27085609048 c_6 a_1^4 b_4 b_5 a_2 - 56970058624 c_6 a_1^3 b_5 a_2^2 b_3 - 112386803872 c_6 a_1^4 b_1 b_5 a_2 - \\
 & - 15643486328 c_6 a_1^4 b_3 b_2 a_2 - 14056457344 c_6 b_4 a_1^2 b_2 a_2^3 - 44085380064 c_6 a_1^2 b_5 b_3 a_2^3 - \\
 & - 19952206224 c_6 a_1^2 b_3 b_4 a_2^3 + 29521815000 c_6 a_2^4 b_4 b_1 a_1 - 43409078928 c_6 b_2 a_1^2 b_5 a_2^3 - \\
 & - 135344963152 c_6 a_2^4 b_5 b_1 a_1 + 88913531640 c_6 a_2^4 b_5 b_4 a_1 + 3876153488 c_6 a_2^4 b_2 b_4 a_1 + \\
 & + 1774148288 c_6 a_1^4 b_2 b_4 a_2 - 12698466888 c_6 a_1^4 b_3 b_4 a_2 + 41087314416 c_6 a_1^3 b_3 a_2^2 b_2 + \\
 & + 44912486896 c_6 a_1^3 b_3 b_4 a_2^2 - 58876277264 c_6 a_2^3 a_1^2 b_2 b_1 + 11696288808750 a_1^4 c_3 a_2^4 b_3 - \\
 & - 110203227940 a_1^6 c_3 b_4 a_2^2 - 603638732580 a_1^6 c_3 b_2 a_2^2 + 6953833479060 a_1^6 c_3 b_3 a_2^2 + \\
 & + 80372032200 c_6 a_1^5 b_1 b_2 - 3856057327200 a_1^5 c_5 a_2^3 b_1 - 2860671771360 a_2^7 a_1 c_3 b_1 - \\
 & - 6342047496 c_6 a_2^5 b_3 b_4 + 9783615520 c_6 a_1^3 b_4^2 a_2^2 - 47081228016 c_6 a_1^5 b_3 b_1 - \\
 & - 17755893584 c_6 a_1^5 b_5 b_3 + 27277485036100 a_2^6 a_1^2 c_5 b_1 + 5828502800640 a_2^3 a_1^5 c_5 b_2 + \\
 & + 4983949532640 a_2^3 a_1^5 c_3 b_5 - 9301389832800 a_2^3 a_1^5 c_3 b_1 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 40972215391380 a_2^2 a_1^6 c_3 b_1 - 3456661247520 a_2^3 a_1^5 c_5 b_5 - 8537787920 c_6 a_1^4 b_3^2 a_2 + \\
& + 8398433323540 c_3 b_3 a_1^2 a_2^6 - 517768948320 a_2^7 c_3 b_3 a_1 + 8683967824 c_6 a_1^5 b_2 b_4 + \\
& + 6088081175020 c_5 b_2 a_2^6 a_1^2 + 9716281409250 c_5 a_1^4 b_2 a_2^4 + 4849083982080 a_1^5 c_5 b_4 a_2^3 \\
& + 5278904266545 a_2^8 c_3 b_5 + 2185270909965 a_2^8 c_3 b_3 + 1917817185115 a_2^8 c_5 b_4 + \\
& + 52548490657325 a_2^{10} c_4 a_1 + 9687319374720 a_1^5 c_3 a_2^3 b_2 - 2609393133750 a_1^4 c_3 a_2^4 b_2 - \\
& - 8939610569760 a_2^5 c_3 b_1 a_1^3 + 3050427396900 a_1^6 c_3 b_5 a_2^2 - 5524640536 c_6 a_2^5 b_3 b_2 + \\
& + 3140284896 c_6 a_1^3 b_2^2 a_2^2 - 1341382554720 c_3 a_1^3 a_2^5 b_3 + 212919921760 a_1^7 c_5 b_3 a_2 + \\
& + 2140529088 c_6 a_1^4 b_4^2 a_2 - 1814650320 c_6 a_1^4 b_2^2 a_2 - 312112349952 c_6 a_1^4 b_1^2 a_2 + \\
& + 38870052688350 a_2^4 a_1^4 c_5 b_5 + 28497754445940 a_2^6 c_5 a_1^2 b_5 - \\
& - 18527277624 c_6 a_2^5 b_5 b_4 + 30603015332500 a_2^6 c_3 b_1 a_1^2 + 9716281409250 a_2^4 a_1^4 c_5 b_4 \\
& - 9850619400 c_6 a_2^5 b_5 b_2 + 53699032375950 a_2^4 a_1^4 c_3 b_1 + 1994850453440 a_1^7 a_2 c_3 b_4 - \\
& - 1423641866400 a_1^7 a_2 c_5 b_1 - 1024245786720 a_1^7 c_5 b_5 a_2 - 125922589328 c_6 a_1^5 b_1 b_5 + \\
& + 54761053928 c_6 a_1^5 b_5 b_2 - 27256040824 c_6 a_2^4 a_1 b_1^2 - 3456661247520 c_5 a_1^3 a_2^5 b_1 + \\
& + 9522840000960 a_2^5 a_1^3 c_3 b_2 + 67038553176 c_6 a_1^5 b_4 b_1 + 4095624024 c_6 a_2^4 b_4^2 a_1 + \\
& + 47498728908150 a_2^4 a_1^4 c_5 b_1 - 1125274257120 a_1^5 c_3 b_3 a_2^3 + \\
& + 2558725906880 a_2^7 c_3 a_1 b_4 + 6088081175020 a_1^6 c_5 b_4 a_2^2 + 623287572960 a_1^5 c_5 b_3 a_2^3 \\
& + 7000092730540 a_1^6 c_5 b_2 a_2^2 + 9583930858580 a_2^6 c_5 a_1^2 b_3 - \\
& - 113513382672 c_6 a_1^3 b_1^2 a_2^2 - 7495025944 c_6 b_1 b_4 a_2^5 + 4938329722560 a_2^5 c_5 a_1^3 b_4 - \\
& - 30516477696 c_6 b_5 b_3 a_2^5 - 161496800864 c_6 b_5 b_1 a_2^5 - 16066626560 c_6 a_2^5 b_2 b_4 - \\
& - 103348725344 c_6 b_1 b_3 a_2^5 - 3222451034400 a_1^7 c_3 b_1 a_2 - 18658364184 c_6 a_2^4 b_5^2 a_1 - \\
& - 5491602016 c_6 a_1^4 b_5^2 a_2 - 11267242408 c_6 a_2^5 b_1 b_2 + 623287572960 a_2^5 a_1^3 c_5 b_3 + \\
& + 5054386864800 a_2^5 a_1^3 c_3 b_5 + 6532954621440 c_3 a_1^5 b_4 a_2^3 + \\
& + 36259321633860 a_1^6 c_5 b_1 a_2^2 + 9861258065620 a_1^6 a_2^2 c_5 b_3 + \\
& + 1636442731040 a_1^7 c_3 b_5 a_2 + 3278775518720 a_1^7 c_3 b_2 a_2 - 11486476880 c_6 a_1^3 b_3^2 a_2^2 \\
& - 543506412192 c_6 b_1^2 a_1^2 a_2^3 + 1668558816 c_6 b_5^2 a_1^2 a_2^3 - 2069122389750 c_3 a_1^4 b_4 a_2^4 \\
& + 3114296144960 c_3 a_1 a_2^7 b_2 + 1010906664 c_6 a_2^4 b_2^2 a_1 + \\
& + 56967981752 c_6 a_1^5 b_5 b_4 + 5593586094720 a_2^5 a_1^3 c_5 b_2 + 3989124336 c_6 a_1^3 a_2^2 b_5^2 + \\
& + 14664932304750 a_2^4 a_1^4 c_5 b_3 + 1706880063200 a_2^7 c_3 b_5 a_1 - \\
& - 2682922925540 a_2^6 c_3 a_1^2 b_2 - 12884735504 c_6 a_1^2 b_2^2 a_2^3 + 1674463818560 c_5 a_2^7 b_4 a_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 20900748320 c_6 a_1^2 b_3^2 a_2^3 - 1423641866400 a_2^7 c_5 b_5 a_1 + 1787617798720 c_5 a_2^7 b_2 a_1 \\
 & - 4068260880 c_6 a_2^3 a_1^2 b_4^2 - 2744141834980 a_2^6 c_3 a_1^2 b_4 - 3856057327200 a_2^5 a_1^3 c_5 b_5 \\
 & + 212919921760 a_2^7 a_1 c_5 b_3 - 6314246120 c_6 a_2^4 a_1 b_3^2 - 1024245786720 a_2^7 c_5 b_1 a_1 + \\
 & + 24937870296 c_6 a_1^5 b_3 b_2 + 1585218078080 a_1^7 a_2 c_5 b_4 + 2022534504640 a_1^7 a_2 c_5 b_2 - \\
 & - 301660650720 a_1^7 a_2 c_3 b_3 + 23083445096 c_6 a_1^5 b_3 b_4 + 7000092730540 a_2^6 a_1^2 c_5 b_4 + \\
 & + 14574523386020 a_2^6 a_1^2 c_3 b_5 + 12836926340550 a_2^4 a_1^4 c_3 b_5 + \\
 & + 23339922643700 a_2^2 a_1^6 c_5 b_5 + 1470707083885 a_1^8 c_3 b_3 - \\
 & - 701836554331575 a_1^8 c_4 a_2^3 + 238059365992825 a_1^9 c_4 a_2^2 + \\
 & + 1917817185115 a_1^8 c_5 b_2 - 12246638320 c_6 a_2^5 b_3^2 + 2458414109645 a_1^8 c_5 b_3 + \\
 & + 7096830074880 a_2^5 a_1^3 c_3 b_4 + 701836554331575 a_2^8 a_1^3 c_1 - \\
 & - 500801819279450 a_2^6 a_1^5 c_2 - 52548490657325 a_1^{10} a_2 c_1 + \\
 & + 17812928808 c_6 a_1^5 b_5^2 - 1050049986505 a_2^8 c_3 b_4 + 500801819279450 a_2^6 a_1^5 c_4 + \\
 & + 1454075311195 a_2^8 c_5 b_2 + 11526531140605 a_1^8 c_3 b_1 + 6349667207325 a_2^8 c_3 b_1 + \\
 & + 46377718833875 a_2^{11} c_2 - 46377718833875 a_1^{11} c_2 + 145303928325075 a_1^{11} c_1 + \\
 & + 46377718833875 a_1^{11} c_4 - 46377718833875 a_2^{11} c_1 - 145303928325075 a_2^{11} c_4), \\
 v_{7,1} &= \frac{1}{3349299200} (-92528639070871575 a_1^{13} c_1 + 33304768063320325 a_1^{12} a_2 c_1 - \\
 & - 551479001865684750 a_1^{11} a_2^2 c_1 + 196135775820377250 a_1^{10} a_2^3 c_1 - \dots, \\
 v_{8,1} &= \frac{1}{274642534400} (384174332089222131925 a_1^{15} c_1 - \\
 & - 137729406990482636875 a_1^{14} a_2 c_1 + 2674713380183442034125 a_1^{13} a_2^2 c_1 - \dots, \\
 v_{9,1} &= -\frac{1}{277388959744000} (a_1^2 + a_2^2) (24394684342835376301665375 a_1^{15} c_1 - \\
 & - 8716340141459297401140125 a_1^{14} a_2 c_1 + \dots, \\
 v_{10,1} &= \frac{1}{67682906177536000} (a_1^2 + a_2^2)^2 (455362879697844396526063037625 a_1^{15} c_1 - \\
 & - 162239561715243494841919298375 a_1^{14} a_2 c_1 + \dots, \\
 v_{11,1} &= -\frac{1}{3925608558297088000} (a_1^2 + a_2^2)^3 (\\
 & 2417242159364919334602633524618625 a_1^{15} c_1 - \dots, \\
 v_{12,1} &= 1/31404868466376704000 (a_1^2 + a_2^2)^4 (\\
 & 2087207758942912386868335511174104375 a_1^{15} c_1 - \dots \\
 v_{13,1} &= -1/12373518175752421376000 (a_1^2 + a_2^2)^5 (\\
 & 103394063430183176230722057478014624022500 a_1^{15} c_1 - \dots.
 \end{aligned}$$

Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema

5.5

No 1º caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{4,1}$, $v_{5,1}$, $v_{6,1}$, $v_{7,1}$, $v_{8,1}$ e $v_{9,1}$ do sistema (5.13).

1º Caso O sistema (5.12).

$$\begin{aligned}
v_{1,1} &= -\frac{1}{4}(a_2c_2 - 4a_3c_4 - 4a_3c_1 + 3c_1a_1 - a_2c_1 + c_4a_1 - 3a_2c_4 - c_2a_1), \\
v_{2,1} &= \frac{1}{8}(-52a_3c_1a_2^2 - 60a_3c_4a_2^2 + 2a_3c_2a_2^2 - 2c_2a_1^2a_3 - 60a_1^2a_3c_1 - 52a_1^2a_3c_4 + \\
&+ 45a_2^2a_1c_1 + 17a_2^2a_1c_4 - 17a_2a_1^2c_1 + 17a_2a_1^2c_2 - 45a_2a_1^2c_4 - 15a_2^3c_1 + \\
&+ 4a_1a_3c_1a_2 - 4a_1a_3c_4a_2 - 8a_1a_3c_2a_2 + 15c_4a_1^3 - 15a_1^3c_2 + 15a_2^3c_2 - \\
&- 17a_2^2a_1c_2 + 47a_1^3c_1 - 47a_2^3c_4), \\
v_{3,1} &= -\frac{1}{64}(a_2^2 + a_1^2)(4107a_1^3c_1 + 1301c_4a_1^3 - 1301a_1^3c_2 - 4440a_1^2a_3c_4 + \\
&+ 1505a_2a_1^2c_2 - 3903a_2a_1^2c_4 - 1505a_2a_1^2c_1 - 200c_2a_1^2a_3 - 5208a_1^2a_3c_1 + \\
&+ 3903a_2^2a_1c_1 - 400a_1a_3c_4a_2 + 1505a_2^2a_1c_4 - 768a_1a_3c_2a_2 - 1505a_2^2a_1c_2 + \\
&+ 400a_1a_3c_1a_2 + 1301a_2^3c_2 - 4107a_2^3c_4 - 1301a_2^3c_1 - 5208a_3c_4a_2^2 - \\
&- 4440a_3c_1a_2^2 + 200a_3c_2a_2^2), \\
v_{4,1} &= \frac{3}{128}(a_2^2 + a_1^2)^2(-13803a_1^3c_2 + 43515a_1^3c_1 + 13803c_4a_1^3 - 55264a_1^2a_3c_1 - \\
&- 47456a_1^2a_3c_4 - 15909a_2a_1^2c_1 - 2054c_2a_1^2a_3 - 41409a_2a_1^2c_4 + 15909a_2a_1^2c_2 + \\
&+ 4108a_1a_3c_1a_2 - 7808a_1a_3c_2a_2 + 15909a_2^2a_1c_4 - 15909a_2^2a_1c_2 + 41409a_2^2a_1c_1 - \\
&- 4108a_1a_3c_4a_2 - 43515a_2^3c_4 + 2054a_3c_2a_2^2 - 55264a_3c_4a_2^2 + 13803a_2^3c_2 - \\
&- 13803a_2^3c_1 - 47456a_3c_1a_2^2), \\
v_{5,1} &= -\frac{1}{256}(a_2^2 + a_1^2)^3(1861061c_4a_1^3 + 5848843a_1^3c_1 - 1861061a_1^3c_2 - \\
&- 7451070a_1^2a_3c_1 - 258834c_2a_1^2a_3 - 5583183a_2a_1^2c_4 - 2126721a_2a_1^2c_1 - \\
&- 6468990a_1^2a_3c_4 + 2126721a_2a_1^2c_2 + 517668a_1a_3c_1a_2 - 982080a_1a_3c_2a_2 + \\
&+ 2126721a_2^2a_1c_4 + 5583183a_2^2a_1c_1 - 2126721a_2^2a_1c_2 - 517668a_1a_3c_4a_2 - \\
&- 5848843a_2^3c_4 + 1861061a_2^3c_2 - 7451070a_3c_4a_2^2 - 1861061a_2^3c_1 + \\
&+ 258834a_3c_2a_2^2 - 6468990a_3c_1a_2^2), \\
v_{6,1} &= \frac{1}{1024}(a_2^2 + a_1^2)^4(226869115c_4a_1^3 + 710793339a_1^3c_1 - 226869115a_1^3c_2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 680607345 a_2 a_1^2 c_4 - 257055109 a_2 a_1^2 c_1 - 29412202 c_2 a_1^2 a_3 - \\
& - 908250252 a_1^2 a_3 c_1 - 796629732 a_1^2 a_3 c_4 + 257055109 a_2 a_1^2 c_2 + \\
& + 257055109 a_2^2 a_1 c_4 + 680607345 a_2^2 a_1 c_1 - 257055109 a_2^2 a_1 c_2 + \\
& + 58824404 a_1 a_3 c_1 a_2 - 111620520 a_1 a_3 c_2 a_2 - 58824404 a_1 a_3 c_4 a_2 - \\
& - 710793339 a_2^3 c_4 - 226869115 a_2^3 c_1 + 29412202 a_3 c_2 a_2^2 - 796629732 a_3 c_1 a_2^2 - \\
& - 908250252 a_3 c_4 a_2^2 + 226869115 a_2^3 c_2), \\
v_{7,1} = & -\frac{1}{16384} (a_1^2 + a_2^2)^5 (452628783519 a_1^3 c_1 - 162919251869 a_1^2 a_2 c_1 + \\
& + 434564297475 a_1 a_2^2 c_1 - 144854765825 a_2^3 c_1 - 579877287920 a_1^2 a_3 c_1 + \\
& + 35212522848 a_1 a_2 a_3 c_1 - 513020997104 a_2^2 a_3 c_1 - 144854765825 a_1^3 c_2 + \\
& + 162919251869 a_1^2 a_2 c_2 - 162919251869 a_1 a_2^2 c_2 + 144854765825 a_2^3 c_2 - \\
& - 17606261424 a_1^2 a_3 c_2 - 66856290816 a_1 a_2 a_3 c_2 + 17606261424 a_2^2 a_3 c_2 + \\
& + 144854765825 a_1^3 c_4 - 434564297475 a_1^2 a_2 c_4 + 162919251869 a_1 a_2^2 c_4 - \\
& - 452628783519 a_2^3 c_4 - 513020997104 a_1^2 a_3 c_4 - 35212522848 a_1 a_2 a_3 c_4 - \\
& - 579877287920 a_2^2 a_3 c_4), \\
v_{8,1} = & \frac{1}{32768} (a_1^2 + a_2^2)^6 (45836397997861 a_1^3 c_1 - 16432695751675 a_1^2 a_2 c_1 + \\
& + 44105553369279 a_1 a_2^2 c_1 - 14701851123093 a_2^3 c_1 - 58850861030784 a_1^2 a_3 c_1 + \\
& + 3374776180340 a_1 a_2 a_3 c_1 - 52439748990080 a_2^2 a_3 c_1 - 14701851123093 a_1^3 c_2 + \\
& + 16432695751675 a_1^2 a_2 c_2 - 16432695751675 a_1 a_2^2 c_2 + 14701851123093 a_2^3 c_2 - \\
& - 1687388090170 a_1^2 a_3 c_2 - 6411112040704 a_1 a_2 a_3 c_2 + 1687388090170 a_2^2 a_3 c_2 + \\
& + 14701851123093 a_1^3 c_4 - 44105553369279 a_1^2 a_2 c_4 + 16432695751675 a_1 a_2^2 c_4 - \\
& - 45836397997861 a_2^3 c_4 - 52439748990080 a_1^2 a_3 c_4 - 3374776180340 a_1 a_2 a_3 c_4 - \\
& - 58850861030784 a_2^2 a_3 c_4), \\
v_{9,1} = & -\frac{1}{65536} (a_1^2 + a_2^2)^7 (5763495542748039 a_1^3 c_1 - 2059325172991253 a_1^2 a_2 c_1 + \\
& + 5556255554635179 a_1 a_2^2 c_1 - 1852085184878393 a_2^3 c_1 - \\
& - 7413500532876246 a_1^2 a_3 c_1 + 404160389500372 a_1 a_2 a_3 c_1 - \\
& - 6645365332624854 a_2^2 a_3 c_1 - 1852085184878393 a_1^3 c_2 + \\
& + 2059325172991253 a_1^2 a_2 c_2 - 2059325172991253 a_1 a_2^2 c_2 + \\
& + 1852085184878393 a_2^3 c_2 - 202080194750186 a_1^2 a_3 c_2 - \\
& - 768135200251392 a_1 a_2 a_3 c_2 + 202080194750186 a_2^2 a_3 c_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1852085184878393a_1^3c_4 - 5556255554635179a_1^2a_2c_4 + \\
& + 2059325172991253a_1a_2^2c_4 - 5763495542748039a_2^3c_4 - \\
& - 6645365332624854a_1^2a_3c_4 - 404160389500372a_1a_2a_3c_4 - \\
& - 7413500532876246a_2^2a_3c_4).
\end{aligned}$$

Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema

5.6

No 1º caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{4,1}$, $v_{5,1}$, $v_{6,1}$, $v_{7,1}$, $v_{8,1}$, $v_{9,1}$, $v_{10,1}$ e $v_{11,1}$ do sistema (5.14) com a condição $a_4 = -a_1$, $a_3 = 0$, $a_5 = 0$ e $a_6 = 0$.

1º Caso O sistema (5.14) com a condição $a_4 = -a_1$, $a_3 = 0$, $a_5 = 0$ e $a_6 = 0$.

$$\begin{aligned}
v_{1,1} &= \frac{1}{20}(13b_1c_3 + 11b_1c_5 - b_2c_3 + 3b_2c_5 + 7b_3c_3 + 9b_3c_5), \\
v_{2,1} &= \frac{1}{40}(a_2b_1c_3 - 13a_2b_1c_5 - 3a_2b_2c_3 - a_2b_2c_5 + 13a_2b_3c_3 - 9a_2b_3c_5 + 28a_4b_1c_3 + \\
& + 16a_4b_1c_5 - 12a_4b_2c_3 - 4a_4b_2c_5 + 16a_4b_3c_3 + 12a_4b_3c_5), \\
v_{3,1} &= \frac{1}{320}(-143a_2^2b_1c_3 - 101a_2^2b_1c_5 + 11a_2^2b_2c_3 - 33a_2^2b_2c_5 - 49a_2^2b_3c_3 - 123a_2^2b_3c_5 - \\
& - 44a_2a_4b_1c_3 - 28a_2a_4b_1c_5 - 28a_2a_4b_2c_3 + 44a_2a_4b_2c_5 + 44a_2a_4b_3c_3 + 28a_2a_4b_3c_5 - \\
& - 516a_4^2b_1c_3 - 492a_4^2b_1c_5 - 44a_4^2b_2c_3 - 188a_4^2b_2c_5 - 252a_4^2b_3c_3 - 404a_4^2b_3c_5), \\
v_{4,1} &= -\frac{1}{640}(a_2^2 + 4a_4^2)(25a_2b_1c_3 - 205a_2b_1c_5 - 51a_2b_2c_3 - 17a_2b_2c_5 + 205a_2b_3c_3 - \\
& - 145a_2b_3c_5 + 452a_4b_1c_3 + 264a_4b_1c_5 - 180a_4b_2c_3 - 60a_4b_2c_5 + 248a_4b_3c_3 + \\
& + 196a_4b_3c_5), \\
v_{5,1} &= \frac{1}{1280}(a_2^2 + 4a_4^2)(901a_2^2b_1c_3 + 647a_2^2b_1c_5 - 69a_2^2b_2c_3 + 207a_2^2b_2c_5 + 323a_2^2b_3c_3 + \\
& + 761a_2^2b_3c_5 + 252a_2a_4b_1c_3 + 164a_2a_4b_1c_5 + 164a_2a_4b_2c_3 - 252a_2a_4b_2c_5 - \\
& - 252a_2a_4b_3c_3 - 164a_2a_4b_3c_5 + 3276a_4^2b_1c_3 + 3092a_4^2b_1c_5 + 228a_4^2b_2c_3 + \\
& + 1156a_4^2b_2c_5 + 1620a_4^2b_3c_3 + 2540a_4^2b_3c_5), \\
v_{6,1} &= \frac{1}{5120}(a_2^2 + 4a_4^2)^2(381a_2b_1c_3 - 3033a_2b_1c_5 - 759a_2b_2c_3 - 253a_2b_2c_5 + 3033a_2b_3c_3 - \\
& - 2149a_2b_3c_5 + 6700a_4b_1c_3 + 3920a_4b_1c_5 - 2652a_4b_2c_3 - 884a_4b_2c_5 + 3664a_4b_3c_3 + \\
& + 2908a_4b_3c_5),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{7,1} &= -\frac{1}{81920}(a_2^2 + 4a_4^2)^2(156675a_2^2b_1c_3 + 36700a_2a_4b_1c_3 + 578740a_4^2b_1c_3 - \\
&- 11999a_2^2b_2c_3 + 23980a_2a_4b_2c_3 + 25404a_4^2b_2c_3 + 60701a_2^2b_3c_3 - \\
&- 36700a_2a_4b_3c_3 + 290764a_4^2b_3c_3 + 115745a_2^2b_1c_5 + 23980a_2a_4b_1c_5 + \\
&+ 536380a_4^2b_1c_5 + 35997a_2^2b_2c_5 - 36700a_2a_4b_2c_5 + 191948a_4^2b_2c_5 + \\
&+ 128447a_2^2b_3c_5 - 23980a_2a_4b_3c_5 + 440388a_4^2b_3c_5), \\
v_{8,1} &= -\frac{1}{163840}(a_2^2 + 4a_4^2)^3(35957a_2b_1c_3 + 646452a_4b_1c_3 - 72999a_2b_2c_3 - \\
&- 257124a_4b_2c_3 + 293081a_2b_3c_3 + 354456a_4b_3c_3 - 293081a_2b_1c_5 + \\
&+ 377704a_4b_1c_5 - 24333a_2b_2c_5 - 85708a_4b_2c_5 - 207373a_2b_3c_5 + 280372a_4b_3c_5), \\
v_{9,1} &= \frac{1}{327680}9(a_2^2 + 4a_4^2)^3(291249a_2^2b_1c_3 + 57228a_2a_4b_1c_3 + 1090204a_4^2b_1c_3 - \\
&- 22321a_2^2b_2c_3 + 37396a_2a_4b_2c_3 + 25172a_4^2b_2c_3 + 119927a_2^2b_3c_3 - \\
&- 57228a_2a_4b_3c_3 + 554500a_4^2b_3c_3 + 220203a_2^2b_1c_5 + 37396a_2a_4b_1c_5 + \\
&+ 995268a_4^2b_1c_5 + 66963a_2^2b_2c_5 - 57228a_2a_4b_2c_5 + 342644a_4^2b_2c_5 + \\
&+ 232789a_2^2b_3c_5 - 37396a_2a_4b_3c_5 + 816700a_4^2b_3c_5), \\
v_{10,1} &= \frac{1}{1310720}9(a_2^2 + 4a_4^2)^4(140387a_2b_1c_3 + 2594612a_4b_1c_3 - 291849a_2b_2c_3 - \\
&- 1038084a_4b_2c_3 + 1178471a_2b_3c_3 + 1427216a_4b_3c_3 - 1178471a_2b_1c_5 + \\
&+ 1513424a_4b_1c_5 - 97283a_2b_2c_5 - 346028a_4b_2c_5 - 832443a_2b_3c_5 + \\
&+ 1124292a_4b_3c_5), \\
v_{11,1} &= -\frac{1}{2621440}(a_2^2 + 4a_4^2)^4(125594265a_2^2b_1c_3 + 21035912a_2a_4b_1c_3 + \\
&+ 474903492a_4^2b_1c_3 - 9631457a_2^2b_2c_3 + 13736784a_2a_4b_2c_3 + \\
&+ 3545996a_4^2b_2c_3 + 54068739a_2^2b_3c_3 - 21035912a_2a_4b_3c_3 + \\
&+ 243748524a_4^2b_3c_3 + 96629455a_2^2b_1c_5 + 13736784a_2a_4b_1c_5 + \\
&+ 428589644a_4^2b_1c_5 + 28894371a_2^2b_2c_5 - 21035912a_2a_4b_2c_5 + \\
&+ 143051052a_4^2b_2c_5 + 98402453a_2^2b_3c_5 - 13736784a_2a_4b_3c_5 + \\
&+ 351537988a_4^2b_3c_5).
\end{aligned}$$

Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema

5.7

No 1º caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}$ e $v_{2,1}$ do sistema (5.15) com a condição $a_3 = 0$ e devido ao tamanho excessivo dos coeficientes focais $v_{3,1}$, $v_{4,1}$, $v_{5,1}$ e $v_{6,1}$ vamos omitir boa parte das suas expressões.

1º Caso O sistema (5.15) com a condição $a_3 = 0$.

$$\begin{aligned}
 v_{1,1} &= -\frac{1}{20} (-5 a_1 c_2 + 15 a_1 c_1 + 5 a_1 c_4 + 5 c_2 a_2 + b_2 c_3 - 3 b_2 c_5 - 5 c_1 a_2 - 13 b_1 c_3 - \\
 &\quad - 11 b_1 c_5 - 7 b_4 c_3 - 9 b_4 c_5 - 15 a_2 c_4), \\
 v_{2,1} &= \frac{1}{200} (-375 a_2^3 c_1 + 1175 c_1 a_1^3 - 1175 a_2^3 c_4 + 2 b_2 b_4 b_6 c_5 - 150 b_2 c_3 a_1 a_2 - \\
 &\quad - 30 b_2 a_2 c_6 b_4 + 24 b_2 a_2 b_3 c_5 + 42 b_2 a_2 b_3 c_3 - 10 b_2 a_2 b_5 c_5 - 30 b_2 a_2 b_5 c_3 - 50 b_2 a_2 c_5 a_1 + \\
 &\quad + 30 b_2 b_5 c_6 b_4 + 18 b_2 b_5 c_3 a_1 - 5 b_2 b_5 b_3 c_5 - 5 b_2 b_5 b_3 c_3 + 26 b_2 b_5 c_5 a_1 + 40 b_2 a_1 b_3 c_5 + \\
 &\quad + 50 b_2 a_1 b_3 c_3 + 110 b_2 a_1 c_6 b_4 - 10 b_2 b_4 c_6 b_3 - 14 b_2 b_4 b_6 c_3 + 130 b_1 c_3 a_1 a_2 + 90 b_1 b_4 b_6 c_5 + \\
 &\quad + 90 b_1 b_4 b_6 c_3 + 196 b_1 b_4 c_6 b_3 - 112 b_1 a_2 b_3 c_5 - 74 b_1 a_2 c_6 b_4 - 30 b_1 a_2 c_6 b_2 - 10 b_1 b_2 c_6 b_3 - \\
 &\quad - 60 b_1 a_2 b_5 c_5 - 116 b_1 a_2 b_3 c_3 - 302 b_1 a_1 c_6 b_4 - 80 b_1 a_1 b_3 c_3 - 60 b_1 a_1 b_3 c_5 + 12 b_1 b_5 c_5 a_1 - \\
 &\quad - 5 b_1 b_5 b_3 c_3 + 25 b_1 b_5 b_3 c_5 + 86 b_1 b_5 c_3 a_1 - 8 b_1 b_5 c_6 b_4 - 90 b_1 a_2 b_5 c_3 + 30 b_1 b_2 c_6 b_5 - \\
 &\quad - 14 b_1 b_2 b_6 c_3 + 2 b_1 b_2 b_6 c_5 + 110 b_1 b_2 c_6 a_1 + 110 b_1 c_5 a_1 a_2 - 70 b_4 c_3 a_1 a_2 - 38 b_4 a_2 b_3 c_5 - \\
 &\quad - 34 b_4 a_2 b_3 c_3 + 10 b_4 a_2 b_5 c_5 - 60 b_4 a_2 b_5 c_3 + 110 b_4 a_2 c_5 a_1 + 164 b_4 b_5 c_3 a_1 - 5 b_4 b_5 b_3 c_5 - \\
 &\quad - 35 b_4 b_5 b_3 c_3 + 38 b_4 b_5 c_5 a_1 - 90 b_4 a_1 b_3 c_5 - 170 b_4 a_1 b_3 c_3 + 20 b_4 b_5^2 c_3 + b_2^2 c_6 a_1 + \\
 &\quad + 10 b_4 b_5^2 c_5 - 275 b_4 c_3 a_1^2 - 535 b_4 c_3 a_2^2 + 72 b_4^2 c_6 b_3 + 53 b_4^2 b_6 c_3 + 41 b_4^2 b_6 c_5 - \\
 &\quad - 695 b_4 c_5 a_2^2 - 675 b_4 c_5 a_1^2 + 35 b_4 b_3^2 c_5 + 35 b_4 b_3^2 c_3 + 47 a_2 c_6 b_4^2 - 6 b_5 c_6 b_4^2 - \\
 &\quad - 119 a_1 c_6 b_4^2 + 5 b_2 b_5^2 c_3 + 5 b_2 b_5^2 c_5 + 15 b_2 c_3 a_1^2 + 115 b_2 c_3 a_2^2 - 245 b_2 c_5 a_2^2 - \\
 &\quad - 245 b_2 c_5 a_1^2 - 13 a_2 c_6 b_2^2 - 10 b_2 b_3^2 c_5 - 425 c_2 a_1 a_2^2 + 425 c_2 a_1^2 a_2 + 20 b_1 b_5^2 c_3 - \\
 &\quad - 10 b_2 b_3^2 c_3 + 2 b_2^2 c_6 b_3 + 5 b_2^2 b_6 c_5 + 5 b_2^2 b_6 c_3 + 4 b_2^2 c_6 b_5 - 425 a_2 a_1^2 c_1 - \\
 &\quad - 1125 a_2 a_1^2 c_4 + 425 a_1 c_4 a_2^2 + 1125 a_1 a_2^2 c_1 + 20 b_1 b_5^2 c_5 - 915 b_1 c_3 a_1^2 - 875 b_1 c_3 a_2^2 + \\
 &\quad + 132 b_1^2 c_6 b_3 + 57 b_1^2 b_6 c_3 + 69 b_1^2 b_6 c_5 - 775 b_1 c_5 a_2^2 - 855 b_1 c_5 a_1^2 + 25 b_1 b_3^2 c_3 - \\
 &\quad - 173 a_2 c_6 b_1^2 + 14 b_5 c_6 b_1^2 - 179 a_1 c_6 b_1^2 + 35 b_1 b_3^2 c_5 + 375 c_4 a_1^3 + 375 c_2 a_2^3 - \\
 &\quad - 375 c_2 a_1^3),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{3,1} &= \frac{1}{272000}(-17454750a_1^5c_1 + 6396250a_1^4a_2c_1 - 34042500a_1^3a_2^2c_1 + \\
&+ 11925500a_1^2a_2^3c_1 - 16587750a_1a_2^4c_1 + 5529250a_2^5c_1 + 5529250a_1^5c_2 - \dots, \\
v_{4,1} &= \frac{1}{601120000}(613071956250a_1^7c_1 - 224137923750a_1^6a_2c_1 + \\
&+ 1809544961250a_1^5a_2^2c_1 - 642742863750a_1^4a_2^3c_1 + \dots, \\
v_{5,1} &= \frac{1}{196614329600000}(-4492056036643175000a_1^9c_1 + \\
&+ 1633374311176725000a_1^8a_2c_1 - 17764190698129200000a_1^7a_2^2c_1 + \dots, \\
v_{6,1} &= \frac{1}{16077153731392000000}(11159700959328543747937500a_1^{11}c_1 - \\
&- 4035854008625710236062500a_1^{10}a_2c_1 + \dots
\end{aligned}$$

No 2º caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}$, $v_{2,1}$ e $v_{3,1}$ do sistema (5.15) com a condição $b_1 = b_2 = b_4 = 0$ e devido ao tamanho excessivo dos coeficientes focais $v_{4,1}$, $v_{5,1}$ e $v_{6,1}$ vamos omitir boa parte das suas expressões.

2º Caso O sistema (5.15) com a condição $b_1 = b_2 = b_4 = 0$.

$$\begin{aligned}
v_{1,1} &= \frac{1}{4}(-3a_1c_1 + a_2c_1 + 4a_3c_1 + a_1c_2 - a_2c_2 - a_1c_4 + 3a_2c_4 + 4a_3c_4) \\
v_{2,1} &= \frac{1}{40}(235a_1^3c_1 - 85a_1^2a_2c_1 + 225a_1a_2^2c_1 - 75a_2^3c_1 - 300a_1^2a_3c_1 + \\
&+ 20a_1a_2a_3c_1 - 260a_2^2a_3c_1 - 19a_1a_3b_3c_1 - 43a_2a_3b_3c_1 + 9a_3b_3^2c_1 + \\
&+ 17a_1a_3b_5c_1 - 41a_2a_3b_5c_1 + 6a_3b_3b_5c_1 + 11a_3b_5^2c_1 - 75a_1^3c_2 + 85a_1^2a_2c_2 - \\
&- 85a_1a_2^2c_2 + 75a_2^3c_2 - 10a_1^2a_3c_2 - 40a_1a_2a_3c_2 + 10a_2^2a_3c_2 + 13a_1a_3b_3c_2 + \\
&+ 11a_2a_3b_3c_2 - 3a_3b_3^2c_2 + 11a_1a_3b_5c_2 - 13a_2a_3b_5c_2 - 2a_3b_3b_5c_2 + 3a_3b_5^2c_2 + \\
&+ 75a_1^3c_4 - 225a_1^2a_2c_4 + 85a_1a_2^2c_4 - 235a_2^3c_4 - 260a_1^2a_3c_4 - 20a_1a_2a_3c_4 - \\
&- 300a_2^2a_3c_4 - 41a_1a_3b_3c_4 - 17a_2a_3b_3c_4 + 11a_3b_3^2c_4 + 43a_1a_3b_5c_4 - \\
&- 19a_2a_3b_5c_4 - 6a_3b_3b_5c_4 + 9a_3b_5^2c_4), \\
v_{3,1} &= -\frac{1}{1600}(102675a_1^5c_1 - 37625a_1^4a_2c_1 + 200250a_1^3a_2^2c_1 - 70150a_1^2a_2^3c_1 + \\
&+ 97575a_1a_2^4c_1 - 32525a_2^5c_1 - 130200a_1^4a_3c_1 + 10000a_1^3a_2a_3c_1 - \\
&- 241200a_1^2a_2^2a_3c_1 + 10000a_1a_2^3a_3c_1 - 111000a_2^4a_3c_1 - 9420a_1^3a_3b_3c_1 - \\
&- 20860a_1^2a_2a_3b_3c_1 - 8060a_1a_2^2a_3b_3c_1 - 18940a_2^3a_3b_3c_1 + 4300a_1^2a_3b_3^2c_1 - \\
&- 1092a_1a_2a_3b_3^2c_1 + 2656a_2^2a_3b_3^2c_1 + 160a_1a_3b_3^3c_1 + 492a_2a_3b_3^3c_1 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 40a_3b_3^4c_1 + 8100a_1^3a_3b_5c_1 - 20020a_1^2a_2a_3b_5c_1 + 6180a_1a_2^2a_3b_5c_1 - \\
 & - 18660a_2^3a_3b_5c_1 + 3652a_1^2a_3b_3b_5c_1 + 960a_1a_2a_3b_3b_5c_1 + 532a_2^2a_3b_3b_5c_1 - \\
 & - 252a_1a_3b_3^2b_5c_1 + 648a_2a_3b_3^2b_5c_1 - 40a_3b_3^3b_5c_1 + 4664a_1^2a_3b_5^2c_1 + \\
 & + 2028a_1a_2a_3b_5^2c_1 + 3980a_2^2a_3b_5^2c_1 + 72a_1a_3b_3b_5^2c_1 + 788a_2a_3b_3b_5^2c_1 - \\
 & - 120a_3b_3^2b_5^2c_1 - 548a_1a_3b_5^3c_1 + 560a_2a_3b_5^3c_1 - 40a_3b_3b_5^3c_1 - 80a_3b_5^4c_1 - \\
 & - 32525a_1^5c_2 + 37625a_1^4a_2c_2 - 70150a_1^3a_2^2c_2 + 70150a_1^2a_2^3c_2 - 37625a_1a_2^4c_2 + \\
 & + 32525a_2^5c_2 - 5000a_1^4a_3c_2 - 19200a_1^3a_2a_3c_2 - 19200a_1a_2^3a_3c_2 + \\
 & + 5000a_2^4a_3c_2 + 6380a_1^3a_3b_3c_2 + 3940a_1^2a_2a_3b_3c_2 + 4460a_1a_2^2a_3b_3c_2 + \\
 & + 5300a_2^3a_3b_3c_2 - 1280a_1^2a_3b_3^2c_2 + 1164a_1a_2a_3b_3^2c_2 - 812a_2^2a_3b_3^2c_2 - \\
 & - 120a_1a_3b_3^3c_2 - 244a_2a_3b_3^3c_2 + 20a_3b_3^4c_2 + 5300a_1^3a_3b_5c_2 - \\
 & - 4460a_1^2a_2a_3b_5c_2 + 3940a_1a_2^2a_3b_5c_2 - 6380a_2^3a_3b_5c_2 - 844a_1^2a_3b_3b_5c_2 - \\
 & - 844a_2^2a_3b_3b_5c_2 - 156a_1a_3b_3^2b_5c_2 - 176a_2a_3b_3^2b_5c_2 + 40a_3b_3^3b_5c_2 + \\
 & + 812a_1^2a_3b_5^2c_2 + 1164a_1a_2a_3b_5^2c_2 + 1280a_2^2a_3b_5^2c_2 + 176a_1a_3b_3b_5^2c_2 - \\
 & - 156a_2a_3b_3b_5^2c_2 - 244a_1a_3b_5^3c_2 + 120a_2a_3b_5^3c_2 + 40a_3b_3b_5^3c_2 - \\
 & - 20a_3b_5^4c_2 + 32525a_1^5c_4 - 97575a_1^4a_2c_4 + 70150a_1^3a_2^2c_4 - 200250a_1^2a_2^3c_4 + \\
 & + 37625a_1a_2^4c_4 - 102675a_2^5c_4 - 111000a_1^4a_3c_4 - 10000a_1^3a_2a_3c_4 - \\
 & - 241200a_1^2a_2^2a_3c_4 - 10000a_1a_2^3a_3c_4 - 130200a_2^4a_3c_4 - 18660a_1^3a_3b_3c_4 - \\
 & - 6180a_1^2a_2a_3b_3c_4 - 20020a_1a_2^2a_3b_3c_4 - 8100a_2^3a_3b_3c_4 + 3980a_1^2a_3b_3^2c_4 - \\
 & - 2028a_1a_2a_3b_3^2c_4 + 4664a_2^2a_3b_3^2c_4 + 560a_1a_3b_3^3c_4 + 548a_2a_3b_3^3c_4 - \\
 & - 80a_3b_3^4c_4 + 18940a_1^3a_3b_5c_4 - 8060a_1^2a_2a_3b_5c_4 + 20860a_1a_2^2a_3b_5c_4 - \\
 & - 9420a_2^3a_3b_5c_4 - 532a_1^2a_3b_3b_5c_4 + 960a_1a_2a_3b_3b_5c_4 - 3652a_2^2a_3b_3b_5c_4 - \\
 & - 788a_1a_3b_3^2b_5c_4 + 72a_2a_3b_3^2b_5c_4 + 40a_3b_3^3b_5c_4 + 2656a_1^2a_3b_5^2c_4 + \\
 & + 1092a_1a_2a_3b_5^2c_4 + 4300a_2^2a_3b_5^2c_4 + 648a_1a_3b_3b_5^2c_4 + 252a_2a_3b_3b_5^2c_4 - \\
 & - 120a_3b_3^2b_5^2c_4 - 492a_1a_3b_5^3c_4 + 160a_2a_3b_5^3c_4 + 40a_3b_3b_5^3c_4 - \\
 & - 40a_3b_5^4c_4) \\
 v_{4,1} &= \frac{1}{544000}(554816250a_1^7c_1 - 202839750a_1^6a_2c_1 + 1637597250a_1^5a_2^2c_1 - \\
 & - 581667750a_1^4a_2^3c_1 + 1610745750a_1^3a_2^4c_1 - \dots \\
 v_{5,1} &= \frac{1}{1202240000}(-27467628938750a_1^9c_1 + 9987613496250a_1^8a_2c_1 - \\
 & - 108622909980000a_1^7a_2^2c_1 + 38702848210000a_1^6a_2^3c_1 - \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{6,1} &= \frac{1}{393228659200000} (272953429358653387500a_1^{11}c_1 - \\ &- 98712339699785012500a_1^{10}a_2c_1 + 1353175351922916112500a_1^9a_2^2c_1 - \dots \end{aligned}$$

No 3° caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}, v_{4,1}, v_{5,1}, v_{6,1}, v_{7,1}$ e $v_{8,1}$ do sistema (5.15) com a condição $b_1 = -b_4, a_3 = 1, a_1 = a_2 = b_3 = b_5 = 0$ e $b_6 = 2$.

3° Caso O sistema (5.15) com a condição $b_1 = -b_4, a_3 = 1, a_1 = a_2 = b_3 = b_5 = 0$ e $b_6 = 2$.

$$\begin{aligned} v_{1,1} &= -\frac{1}{20} (-3c_5b_2 - 20c_1 - 20c_4 + 2c_5b_4 + 6c_3b_4 + c_3b_2) \\ v_{2,1} &= -\frac{1}{40} (4b_4^2 + b_2^2) (c_5 + 3c_3 - 2c_6) \\ v_{3,1} &= \frac{1}{320} (4b_4^2 + b_2^2) (-21c_5b_2 + 7c_3b_2 - 144c_1 + 14c_5b_4 - 144c_4 + 42c_3b_4) \\ v_{4,1} &= \frac{41}{3200} (4b_4^2 + b_2^2)^2 (c_5 + 3c_3 - 2c_6) \\ v_{5,1} &= -\frac{3}{32000} (4b_4^2 + b_2^2)^2 (241c_3b_2 - 723c_5b_2 - 4900c_4 - 4900c_1 + 482c_5b_4 + \\ &+ 1446c_3b_4) \\ v_{6,1} &= -\frac{1681}{128000} (4b_4^2 + b_2^2)^3 (c_5 + 3c_3 - 2c_6) \\ v_{7,1} &= \frac{1}{10240000} (b_2^2 + 4b_4^2)^3 (-8971200c_1 + 444559b_2c_3 + 2667354b_4c_3 - 8971200c_4 - \\ &- 1333677b_2c_5 + 889118b_4c_5) \\ v_{8,1} &= \frac{501917}{20480000} (b_2^2 + 4b_4^2)^4 (3c_3 + c_5 - 2c_6) \end{aligned}$$

No 4° caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}, v_{4,1}$ e $v_{5,1}$ do sistema (5.15) com a condição $b_1 = -b_4, b_3 = 2, b_5 = -1, a_2 = 0, a_1 = a_3 = 1$ e $b_6 = 2$, devido ao tamanho excessivo dos coeficientes focais $v_{6,1}, v_{7,1}$ e $v_{8,1}$ vamos omitir boa parte das suas expressões.

4° Caso O sistema (5.15) com a condição $b_1 = -b_4, b_3 = 2, b_5 = -1, a_2 = 0, a_1 = a_3 = 1$ e $b_6 = 2$.

$$\begin{aligned} v_{1,1} &= -\frac{1}{20} (2c_5b_4 + 6c_3b_4 - 15c_4 - 5c_1 + c_3b_2 - 3c_5b_2 - 5c_2), \\ v_{2,1} &= -\frac{1}{200} (211c_5b_2 - 87c_3b_2 - 472c_3b_4 + 15c_3b_2^2 + 5c_5b_2^2 + 60c_3b_4^2 + 20c_5b_4^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 65 b_2 c_4 - 15 b_2 c_2 + 35 b_2 c_1 - 44 c_6 b_4^2 - 11 c_6 b_2^2 - 174 c_5 b_4 - 30 b_4 c_2 + 375 c_2 + \\
& + 425 c_1 + 1225 c_4 - 20 b_4 c_1 - 80 b_4 c_4), \\
v_{3,1} = & \frac{1}{272000} (5529250 c_2 - 1319824 c_3 b_2 - 2639648 c_5 b_4 - 7002204 c_3 b_4 + \\
& + 3067602 c_5 b_2 + 18338750 c_4 + 6413250 c_1 + 226045 c_3 b_2^2 + 187545 c_5 b_2^2 + \\
& + 796060 c_3 b_4^2 + 312940 c_5 b_4^2 + 1596170 b_2 c_4 - 105900 b_2 c_2 + 770230 b_2 c_1 - \\
& - 774332 c_6 b_4^2 - 189333 c_6 b_2^2 - 326140 b_4 c_2 - 155400 b_4 c_1 - 742200 b_4 c_4 + \\
& + 8500 c_6 b_2 b_4 + 6188 c_6 b_4 b_2^2 - 71400 c_5 b_4^2 b_2 - 218620 c_3 b_4 b_2 + 54060 c_5 b_4 b_2 + \\
& + 35700 c_3 b_2^2 b_4 + 23800 c_3 b_4^2 b_2 - 28900 b_2 b_4 c_1 + 11900 b_4 c_5 b_2^2 + 28900 b_2 b_4 c_4 + \\
& + 8500 b_2 b_4 c_2 - 35088 c_6 b_4^2 b_2 + 142800 c_3 b_4^3 + 47600 c_5 b_4^3 + 5950 c_3 b_2^3 - \\
& - 17850 c_5 b_2^3 - 166940 b_4^2 c_1 - 423300 b_4^2 c_4 - 19465 b_2^2 c_2 - 37485 b_2^2 c_1 - \\
& - 110075 b_2^2 c_4 - 8772 c_6 b_2^3 + 24752 c_6 b_4^3 - 135660 b_4^2 c_2), \\
v_{4,1} = & \frac{1}{601120000} (-194467016250 c_2 + 46273914588 c_3 b_2 + 92547829176 c_5 b_4 + \\
& + 245773157008 c_3 b_4 - 108051124754 c_5 b_2 - 643494263750 c_4 - 224889323750 c_1 - \\
& - 6148575715 c_3 b_2^2 - 11103708570 c_5 b_2^2 - 15879922660 c_3 b_4^2 - 6909957880 c_5 b_4^2 - \\
& - 77868045180 b_2 c_4 - 4081930630 b_2 c_2 - 34174711620 b_2 c_1 + 26594537968 c_6 b_4^2 + \\
& + 6460784492 c_6 b_2^2 + 2303215960 b_4 c_2 - 4889083840 b_4 c_1 - 4531217960 b_4 c_4 - \\
& - 366307500 c_6 b_2 b_4 + 27423040 c_6 b_4 b_2^2 + 3477452136 c_5 b_4^2 b_2 + 18771223200 c_3 b_4 b_2 \\
& - 3690322600 c_5 b_4 b_2 - 2215920318 c_3 b_2^2 b_4 - 1299661152 c_3 b_4^2 b_2 + 342743800 b_2 b_4 c_1 \\
& - 771778376 b_4 c_5 b_2^2 - 3010213800 b_2 b_4 c_4 + 63423600 b_2 b_4 c_2 + 1583406860 c_6 b_4^2 b_2 - \\
& - 8863681272 c_3 b_4^3 - 3087113504 c_5 b_4^3 - 324915288 c_3 b_2^3 + 869363034 c_5 b_2^3 + \\
& + 8917765820 b_4^2 c_1 + 23488639900 b_4^2 c_4 + 1034138220 b_2^2 c_2 + 1899542005 b_2^2 c_1 + \\
& + 5478836925 b_2^2 c_4 + 395851715 c_6 b_2^3 + 109692160 c_6 b_4^3 + 7489510480 b_4^2 c_2 + \\
& + 184844400 c_3 b_2^2 b_4^2 + 23105550 c_3 b_2^4 + 369688800 c_3 b_4^4 + 123229600 c_5 b_4^4 - \\
& - 168082400 b_4^3 c_2 - 20664945 c_6 b_2^4 + 50748400 b_2^3 c_1 + 92769000 b_2^3 c_4 - \\
& - 19204050 b_2^3 c_2 - 330639120 c_6 b_4^4 - 459452200 b_4^3 c_4 - 152187400 b_4^3 c_1 + \\
& + 7701850 c_5 b_2^4 + 61614800 c_5 b_2^2 b_4^2 - 76816200 b_2 b_4^2 c_2 - 42020600 b_4 b_2^2 c_2 - \\
& - 38046850 b_4 b_2^2 c_1 - 114863050 b_4 b_2^2 c_4 - 165319560 c_6 b_2^2 b_4^2 + 202993600 b_2 b_4^2 c_1 + \\
& + 371076000 b_2 b_4^2 c_4), \\
v_{5,1} = & -\frac{1}{196614329600000} (-1429340862733225000 c_2 + 336704992331819208 c_3 b_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 673409984663638416 c_5 b_4 + 1800334140173761808 c_3 b_4 - \\
& - 798150345865130904 c_5 b_2 - 4701508667546275000 c_4 - \\
& - 1638793493636325000 c_1 - 29585992896251340 c_3 b_2^2 - \\
& - 114062390359784310 c_5 b_2^2 - 21795004761684320 c_3 b_4^2 - \\
& - 14923599957129160 c_5 b_4^2 - 724659068563468000 b_2 c_4 - \\
& - 90892800901479520 b_2 c_2 - 298226660236552800 b_2 c_1 + \\
& + 182997182466702560 c_6 b_4^2 + 44394884014138140 c_6 b_2^2 - \\
& - 52751454371186400 b_4 c_2 - 113981053749762560 b_4 c_1 - \\
& - 261184412787522240 b_4 c_4 - 2620500361700000 c_6 b_2 b_4 + \\
& + 2637585394845512 c_6 b_4 b_2^2 + 25327828943255376 c_5 b_4^2 b_2 + \\
& + 221095225056234040 c_3 b_4 b_2 - 37957300070845520 c_5 b_4 b_2 - \\
& - 16451535060460288 c_3 b_2^2 b_4 - 8536755905902912 c_3 b_4^2 b_2 - \\
& - 6553617143848200 b_2 b_4 c_1 - 6804090991706456 b_4 c_5 b_2^2 - \\
& - 39397978014659800 b_2 b_4 c_4 + 2726071945556000 b_2 b_4 c_2 + \\
& + 11567872161724648 c_6 b_4^2 b_2 - 77270109271559552 c_3 b_4^3 - \\
& - 27743766781798624 c_5 b_4^3 - 2068263624604128 c_3 b_2^3 + \\
& + 4898961107099044 c_5 b_2^3 + 69619776967154640 b_4^2 c_1 + \\
& + 187709614737847600 b_4^2 c_4 + 5375281163141690 b_2^2 c_2 + \\
& + 11578454682358160 b_2^2 c_1 + 32996242146344400 b_2^2 c_4 + \\
& + 2931214103878662 c_6 b_2^3 + 10705175363942048 c_6 b_4^3 + \\
& + 60617974173442360 b_4^2 c_2 + 1066995736564680 c_3 b_2^2 b_4^2 + \\
& + 163709747798285 c_3 b_2^4 + 1648626981486160 c_3 b_4^4 + 631385446137680 c_5 b_4^4 + \\
& + 216957999172480 b_4^3 c_2 - 223314340082436 c_6 b_2^4 + 811185793775860 b_2^3 c_1 + \\
& + 1845392991585940 b_2^3 c_4 + 153808654221800 b_2^3 c_2 - 3615142540369856 c_6 b_4^4 + \\
& + 1454726893114400 b_4^3 c_4 + 830448285488800 b_4^3 c_1 + 273082993269905 c_5 b_2^4 + \\
& + 1250178334614040 c_5 b_2^2 b_4^2 + 363124002235200 b_2 b_4^2 c_2 - \\
& - 127510597436880 b_4 b_2^2 c_2 + 81556764046200 b_4 b_2^2 c_1 + \\
& + 489737030604600 b_4 b_2^2 c_4 - 1797042995422208 c_6 b_2^2 b_4^2 + \\
& + 3608243369563440 b_2 b_4^2 c_1 + 7018071771883760 b_2 b_4^2 c_4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 485364491643200 c_5 b_4^3 b_2 - 1868971223090400 c_3 b_4^3 b_2 + \\
& + 121341122910800 c_5 b_2^3 b_4 - 467242805772600 c_3 b_2^3 b_4 + \\
& + 139102847756080 c_6 b_2^3 b_4 + 556411391024320 c_6 b_4^3 b_2 + \\
& + 71076080150400 c_3 b_4^4 b_2 - 106614120225600 b_4^2 c_5 b_2^3 + \\
& + 35538040075200 c_3 b_2^3 b_4^2 - 213228240451200 c_5 b_4^4 b_2 + \\
& + 71076080150400 c_5 b_4^3 b_2^2 + 213228240451200 c_3 b_4^3 b_2^2 + \\
& + 26653530056400 c_3 b_2^4 b_4 + 8884510018800 c_5 b_2^4 b_4 - \\
& - 595658708333000 b_4^2 c_4 b_2^2 - 210522430266200 b_4^2 c_1 b_2^2 + \\
& + 13887777550400 b_4^3 b_2 c_2 + 3471944387600 b_2^3 b_4 c_2 + 21354206716960 c_6 b_4^3 b_2^2 - \\
& - 167912891153800 b_2^2 b_4^2 c_2 - 28731403226240 c_6 b_4^2 b_2^3 - \\
& - 57462806452480 c_6 b_4^4 b_2 + 12069567632200 b_2^3 b_4 c_4 - 48278270528800 b_4^3 b_2 c_1 + \\
& + 48278270528800 b_4^3 b_2 c_4 - 12069567632200 b_2^3 b_4 c_1 + 2669275839620 c_6 b_2^4 b_4 - \\
& - 434932638082800 b_4^4 c_1 - 1177429639115600 b_4^4 c_4 - 25447317686375 b_2^4 c_1 - \\
& - 75325324638525 b_2^4 c_4 - 3591425403280 c_6 b_2^5 - 17971719486175 b_2^4 c_2 - \\
& - 384104052836400 b_4^4 c_2 + 42708413433920 c_6 b_4^5 + 142152160300800 c_5 b_4^5 + \\
& + 426456480902400 c_3 b_4^5 - 13326765028200 c_5 b_2^5 + 4442255009400 c_3 b_2^5), \\
v_{6,1} &= \frac{1}{80385768656960000000} (-20242192003544786620312500 c_1 - \\
& - 4247225581083229472691800 b_2 c_1 + 57275119940937145030750 b_2^2 c_1 + \dots, \\
v_{7,1} &= 1/525851544246369536000000000 (5244204718295179606157529453125000 c_1 + \\
& + 1233857867205523035367328877619000 b_2 c_1 + \dots, \\
v_{8,1} &= \frac{1}{8814770558470255576537600000000000} (- \\
& - 4432599921110850429339521687933808984375000 c_1 - \dots.
\end{aligned}$$

No 5° caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{4,1}$, $v_{5,1}$, $v_{6,1}$ e $v_{7,1}$ do sistema (5.15) com a condição $b_1 = -b_4$, $b_2 = -b_4$, $b_3 = 2$, $b_5 = a_2 = 0$, $a_1 = a_3 = 1$ e $b_6 = 2$.

5° Caso O sistema (5.15) com a condição $b_1 = -b_4$, $b_2 = -b_4$, $b_3 = 2$, $b_5 = a_2 = 0$, $a_1 = a_3 = 1$ e $b_6 = 2$.

$$v_{1,1} = -\frac{1}{4}(-3c_4 + c_5 b_4 + c_3 b_4 - c_2 - c_1),$$

$$\begin{aligned}
 v_{2,1} &= -\frac{1}{120}(15 c_5 b_4^2 + 45 c_3 b_4^2 - 210 c_3 b_4 - 180 c_5 b_4 - 40 b_4 c_2 - 45 c_6 b_4^2 - \\
 &\quad - 230 b_4 c_4 - 130 b_4 c_1 + 201 c_1 + 669 c_4 + 213 c_2), \\
 v_{3,1} &= \frac{1}{1920}(-4208 b_4^2 c_4 - 1071 c_5 b_4^2 + 4041 c_3 b_4^2 + 1050 c_3 b_4^3 + 1050 c_5 b_4^3 + \\
 &\quad + 1230 c_6 b_4^3 - 36198 c_3 b_4 - 30342 c_5 b_4 - 4209 b_4 c_2 - 8460 c_6 b_4^2 - 33567 b_4 c_4 - \\
 &\quad - 1024 b_4^2 c_2 - 832 b_4^2 c_1 + 34230 c_1 + 116010 c_4 + 36630 c_2 - 22401 b_4 c_1), \\
 v_{4,1} &= \frac{1}{979200}(-2684130 b_4^3 c_1 - 1102620 c_6 b_4^4 - 835380 b_4^3 c_2 + 18795040 b_4^2 c_2 + \\
 &\quad + 29073100 b_4^2 c_1 + 82453020 b_4^2 c_4 + 940950 c_3 b_4^4 + 313650 c_5 b_4^4 - \\
 &\quad - 279067410 c_1 - 942102090 c_4 + 294877800 c_3 b_4 + 249153840 c_5 b_4 - \\
 &\quad - 5436120 c_3 b_4^2 - 5342820 c_6 b_4^3 - 14890225 c_5 b_4^3 + 28855410 c_5 b_4^2 + \\
 &\quad + 8672394 b_4 c_2 - 19492495 c_3 b_4^3 - 4606830 b_4^3 c_4 + 153627798 b_4 c_1 + \\
 &\quad + 65466270 c_6 b_4^2 + 184267602 b_4 c_4 - 297923130 c_2) \\
 v_{5,1} &= -\frac{1}{76377600}(444666132540 c_5 b_4 + 519482356020 c_3 b_4 - 1652334560370 c_4 - \\
 &\quad - 524358299790 c_2 - 493469050230 c_1 + 75698958636 c_5 b_4^2 + 26868487500 c_3 b_4^2 - \\
 &\quad - 21318338844 b_4 c_2 + 106951137480 c_6 b_4^2 + 187467625278 b_4 c_4 + \\
 &\quad + 219059361432 b_4 c_1 + 195198528972 b_4^2 c_4 - 43177548963 c_3 b_4^3 - \\
 &\quad - 29355030012 c_5 b_4^3 + 588905235 c_6 b_4^3 + 42482096262 b_4^2 c_2 + 80222698710 b_4^2 c_1 - \\
 &\quad - 5956532524 b_4^3 c_1 - 4151773395 c_6 b_4^4 - 1091034028 b_4^3 c_2 + 1188142635 c_3 b_4^4 - \\
 &\quad - 269667780 c_5 b_4^4 - 7024556516 b_4^3 c_4 - 190112445 b_4^4 c_1 - 212644755 b_4^4 c_2 - \\
 &\quad - 768605445 b_4^4 c_4 + 141624450 c_6 b_4^5 + 215707050 c_5 b_4^5 + 215707050 b_4^5 c_3) \\
 v_{6,1} &= -\frac{1}{1529792409600}(-275998876433738640 c_5 b_4 - 318573885951253800 c_3 b_4 + \\
 &\quad + 1009153104251341140 c_4 + 321352367921856180 c_2 + 303776366605753860 c_1 - \\
 &\quad - 57697227967637028 c_5 b_4^2 - 33288830716580244 c_3 b_4^2 + 30381844460653044 b_4 c_2 \\
 &\quad - 60876673628428980 c_6 b_4^2 - 48327383777761188 b_4 c_4 - \\
 &\quad - 107794929049482372 b_4 c_1 - 133731596829915765 b_4^2 c_4 + \\
 &\quad + 27859952211182526 c_3 b_4^3 + 17386581807346228 c_5 b_4^3 - \\
 &\quad - 5264307945551412 c_6 b_4^3 - 27801162191562093 b_4^2 c_2 - \\
 &\quad - 60071480042508457 b_4^2 c_1 + 2139649666485312 b_4^3 c_1 + \\
 &\quad + 2998527142258581 c_6 b_4^4 - 231358833731450 b_4^3 c_2 + 235907536174383 c_3 b_4^4 + \\
 &\quad + 817366258086899 c_5 b_4^4 - 167016047001764 b_4^3 c_4 + 432298358861270 b_4^4 c_1 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 304790373313446 b_4^4 c_2 + 1183637310342082 b_4^4 c_4 - 19634308351298 c_6 b_4^5 - \\
& - 259967737916067 c_5 b_4^5 - 314130541458397 b_4^5 c_3 + 2511309609900 c_5 b_4^6 + \\
& + 7533928829700 c_3 b_4^6 - 21576927031110 b_4^5 c_1 - 37410820228170 b_4^5 c_4 - \\
& - 8405644877730 c_6 b_4^6 - 6691272336360 b_4^5 c_2), \\
v_{7,1} = & \frac{1}{1468600713216000} (11721713741201700709200 c_1 - \\
& - 3320723389761503095140 b_4 c_1 - 2552188386069813280908 b_4^2 c_1 - \\
& - 13060167624368728723 b_4^3 c_1 + 25757518087869246216 b_4^4 c_1 - \\
& - 1225016835499017984 b_4^5 c_1 - 37276584161940000 b_4^6 c_1 + \\
& + 12352977610448618379600 c_2 + 1685400333040297492380 b_4 c_2 - \\
& - 1049560829051615373324 b_4^2 c_2 - 46213193141979621715 b_4^3 c_2 + \\
& + 14991477556765870152 b_4^4 c_2 - 267101042673508032 b_4^5 c_2 - \\
& - 39541077763178400 b_4^6 c_2 - 12252561144790036225680 b_4 c_3 - \\
& - 1778810384620244189196 b_4^2 c_3 + 1041609628852028791284 b_4^3 c_3 + \\
& + 47249386143277133287 b_4^4 c_3 - 15366435936211357362 b_4^5 c_3 + \\
& + 300147014230933080 b_4^6 c_3 + 39848612333166000 b_4^7 c_3 + \\
& + 38678166052055015194800 c_4 + 156154346843317792740 b_4 c_4 - \\
& - 5309299466577054876852 b_4^2 c_4 - 215625699874951694637 b_4^3 c_4 + \\
& + 59103372132446071032 b_4^4 c_4 - 1648626457916211456 b_4^5 c_4 - \\
& - 131811887543824800 b_4^6 c_4 - 10722891673283918340240 b_4 c_5 - \\
& - 2552327610028704013068 b_4^2 c_5 + 596783052166460264436 b_4^3 c_5 + \\
& + 49279694888550440359 b_4^4 c_5 - 11486998385351753202 b_4^5 c_5 + \\
& + 1814582628808440 b_4^6 c_5 + 39848612333166000 b_4^7 c_5 - \\
& - 2188469333963494824480 b_4^2 c_6 - 345261060760589033976 b_4^3 c_6 + \\
& + 109465811630376399744 b_4^4 c_6 + 4949059703805188970 b_4^5 c_6 - \\
& - 737318601117201624 b_4^6 c_6 + 14291021049224400 b_4^7 c_6).
\end{aligned}$$

No 6° caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{4,1}$, $v_{5,1}$ e $v_{6,1}$ do sistema (5.15) com a condição $b_1 = b_4 = 0$, $b_2 = -b_6 + 1$, $b_3 = b_6$, $b_5 = -b_6 + 1$, $a_2 = 0$ e $a_1 = a_3 = 1$, devido ao tamanho excessivo do coeficiente focal $v_{7,1}$ vamos omitir boa parte de sua expressão.

6° Caso O sistema (5.15) com a condição $b_1 = b_4 = 0, b_2 = -b_6 + 1, b_3 = b_6, b_5 = -b_6 + 1, a_2 = 0$ e $a_1 = a_3 = 1$.

$$\begin{aligned}
v_{1,1} &= \frac{1}{20}(c_3 b_6 - 3 c_5 b_6 + 5 c_2 + 3 c_5 - c_3 + 15 c_4 + 5 c_1), \\
v_{2,1} &= \frac{1}{600}(-2960 c_4 + 204 c_3 - 35 b_6^2 c_1 + 48 c_5 b_6^2 + 57 c_6 b_6^2 - 123 c_3 b_6 - 96 c_6 b_6 + \\
&\quad + 369 c_5 b_6 - 1150 c_1 - 30 b_6 c_2 + 15 c_5 b_6^3 - 96 c_3 b_6^2 + 5 b_6^2 c_4 - 6 c_6 b_6^3 - 432 c_5 - \\
&\quad - 5 b_6^2 c_2 - 270 b_6 c_4 + 15 c_3 b_6^3 - 1090 c_2 + 45 c_6 + 60 b_6 c_1), \\
v_{3,1} &= -\frac{1}{816000}(-15877085 c_1 - 1319283 c_3 b_6 + 3585699 c_5 b_6 + 2848929 c_3 - \\
&\quad - 5482377 c_5 - 14855615 c_2 - 39869995 c_4 + 44360 b_6^2 c_1 + 2017770 c_5 b_6^2 + \\
&\quad + 786831 c_6 b_6^2 - 1316448 c_6 b_6 - 2258920 b_6 c_2 - 96759 c_5 b_6^3 - 1827660 c_3 b_6^2 + \\
&\quad + 1483600 b_6^2 c_4 - 121410 c_6 b_6^3 + 422750 b_6^2 c_2 - 9172700 b_6 c_4 + 298143 c_3 b_6^3 - \\
&\quad - 819220 b_6 c_1 + 623175 c_6 + 32244 c_6 b_6^4 + 63205 b_6^3 c_1 + 291755 b_6^3 c_4 + \\
&\quad + 103645 b_6^3 c_2 - 23703 c_5 b_6^4 - 6219 c_3 b_6^4 + 390 b_6^4 c_2 + 3090 b_6^4 c_4 + \\
&\quad + 990 b_6^4 c_1 - 4392 c_6 b_6^5 - 630 c_5 b_6^5 + 6090 c_3 b_6^5), \\
v_{4,1} &= \frac{1}{5410080000}(-1585139155855 c_1 - 112841006708 c_3 b_6 + 314245707459 c_5 b_6 + \\
&\quad + 288019802747 c_3 - 565955509686 c_5 - 1485771189670 c_2 - 4014169528335 c_4 + \\
&\quad + 70868030540 b_6^2 c_1 + 284759927148 c_5 b_6^2 + 60452670927 c_6 b_6^2 - \\
&\quad - 115757623515 c_6 b_6 - 381771871350 b_6 c_2 - 22692560637 c_5 b_6^3 - \\
&\quad - 204248828941 c_3 b_6^2 + 268325145210 b_6^2 c_4 - 3009776763 c_6 b_6^3 + \\
&\quad + 93022415435 b_6^2 c_2 - 1328408733855 b_6 c_4 + 22037218324 c_3 b_6^3 - \\
&\quad - 250766998695 b_6 c_1 + 57239436090 c_6 + 1535007477 c_6 b_6^4 + 15823268475 b_6^3 c_1 + \\
&\quad + 81996102915 b_6^3 c_4 + 25871091030 b_6^3 c_2 - 10328254062 c_5 b_6^4 + 6913902794 c_3 b_6^4 - \\
&\quad - 1000357075 b_6^4 c_2 - 2717064105 b_6^4 c_4 - 511418815 b_6^4 c_1 - 505880238 c_6 b_6^5 - \\
&\quad - 384455676 c_5 b_6^5 + 274231642 c_3 b_6^5 - 6012900 c_6 b_6^7 - 6843690 c_5 b_6^7 + \\
&\quad + 3627630 c_3 b_6^7 - 622710 b_6^6 c_2 + 8284950 b_6^6 c_1 + 3927510 b_6^6 c_4 + 52178922 c_6 b_6^6 + \\
&\quad + 361989144 c_5 b_6^6 - 158947488 c_3 b_6^6 - 552611910 b_6^5 c_2 - 1788190590 b_6^5 c_4 - \\
&\quad - 485156850 b_6^5 c_1), \\
v_{5,1} &= \frac{1}{5308586899200000}(33757900883248396925 c_1 + 2178710808182595945 c_3 b_6 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 6425766602463666195 c_5 b_6 - 6187914032187016869 c_3 + \\
 & + 12682907355186598977 c_5 + 31797622636123579715 c_2 + \\
 & + 86693702444682974935 c_4 - 2565860994527710620 b_6^2 c_1 - \\
 & - 7289469825788058090 c_5 b_6^2 - 988401947633197422 c_6 b_6^2 + \\
 & + 2181033220290313344 c_6 b_6 + 10445675946823260210 b_6 c_2 + \\
 & + 564159123832907706 c_5 b_6^3 + 4621716291537183150 c_3 b_6^2 - \\
 & - 7635160115265134400 b_6^2 c_4 - 84583763529580632 c_6 b_6^3 - \\
 & - 2775566557259043600 b_6^2 c_2 + 34298159851979808990 b_6 c_4 - \\
 & - 313083339908844942 c_3 b_6^3 + 7999772234257293090 b_6 c_1 - \\
 & - 1118636432448672990 c_6 + 2858863513886220 c_6 b_6^4 - \\
 & - 697921566256266060 b_6^3 c_1 - 3130432939044303600 b_6^3 c_4 - \\
 & - 987489793654623840 b_6^3 c_2 + 494137834289895585 c_5 b_6^4 - \\
 & - 311251713831003645 c_3 b_6^4 + 75208604998671045 b_6^4 c_2 + \\
 & + 209824358701781745 b_6^4 c_4 + 67637358250769295 b_6^4 c_1 + \\
 & + 8194915579191540 c_6 b_6^5 - 5215653742919007 c_5 b_6^5 + \\
 & + 2672509558409109 c_3 b_6^5 - 140787069249528 c_6 b_6^7 + \\
 & + 253364258914800 c_5 b_6^7 + 244416524105160 c_3 b_6^7 - \\
 & - 847948906480940 b_6^6 c_2 - 1199719546236620 b_6^6 c_1 - \\
 & - 2083616700120820 b_6^6 c_4 - 344917488944604 c_6 b_6^6 - \\
 & - 21212209486331340 c_5 b_6^6 + 9055700215698480 c_3 b_6^6 + \\
 & + 38032912812521130 b_6^5 c_2 + 118160360027863710 b_6^5 c_4 + \\
 & + 32194409436062070 b_6^5 c_1 - 1366077203416980 b_6^7 c_4 - \\
 & - 432913005686580 b_6^7 c_2 - 318385355235660 b_6^7 c_1 + \\
 & + 157741702560 c_6 b_6^9 + 890936708220 c_3 b_6^9 + 1365005788380 c_5 b_6^9 + \\
 & + 405864877860 b_6^8 c_2 - 925709997420 b_6^8 c_1 - 508028828580 b_6^8 c_4 + \\
 & + 205248906869184 c_5 b_6^8 - 151531027834608 c_3 b_6^8 + 20691044551512 c_6 b_6^8), \\
 v_{6,1} = & - \frac{1}{5064303425388480000000} (962070373554778618912903825 c_1 + \\
 & + 58898979702433912649955793 c_3 b_6 - 181864991079718780846699524 c_5 b_6 - \\
 & - 177570103166574652377276495 c_3 + 378444611041759308471763860 c_5 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 910648474068790402692881950 c_2 + 2503459866026501202392058875 c_4 - \\
& - 95259055217086184639516700 b_6^2 c_1 - 234685046132396327972602068 c_5 b_6^2 - \\
& - 22421053609157671567494052 c_6 b_6^2 + 55833505361224513384648205 c_6 b_6 + \\
& + 342336283961893525120355470 b_6 c_2 + 17885761030823170543805809 c_5 b_6^3 + \\
& + 136765950218099974805169376 c_3 b_6^2 - 263240809586293187675484150 b_6^2 c_4 - \\
& - 4756710603151812592334816 c_6 b_6^3 - 96606510227377521867973600 b_6^2 c_2 + \\
& + 1093205467817567423082684615 b_6 c_4 - 6226055163879002678882563 c_3 b_6^3 + \\
& + 280753437582514151025067785 b_6 c_1 - 29415287399496979421928225 c_6 + \\
& + 488479554857823973276082 c_6 b_6^4 - 31429479813898673087402570 b_6^3 c_1 - \\
& - 126594056839130839884367330 b_6^3 c_4 - 40492227002753609779217640 b_6^3 c_2 + \\
& + 21988713290899927576944128 c_5 b_6^4 - 12512251169052396935229871 c_3 b_6^4 + \\
& + 4148460182888655612389180 b_6^4 c_2 + 11427244473307628766889935 b_6^4 c_4 + \\
& + 4211906753581342706397115 b_6^4 c_1 + 292183580155133559465181 c_6 b_6^5 - \\
& - 648823946597498274297485 c_5 b_6^5 + 119872774428393789462520 c_3 b_6^5 - \\
& - 12992271130473858111838 c_6 b_6^7 + 11461299194676431851903 c_5 b_6^7 + \\
& + 11882736125823433145529 c_3 b_6^7 - 85295339456400140895545 b_6^6 c_2 - \\
& - 100873065268214565245385 b_6^6 c_1 - 216373246355622557386265 b_6^6 c_4 - \\
& - 9915552088709621479240 c_6 b_6^6 - 1156071051555860525183326 c_5 b_6^6 + \\
& + 525656755446925031140532 c_3 b_6^6 + 2102311302803913927625200 b_6^5 c_2 + \\
& + 6484826604122275637604425 b_6^5 c_4 + 1796631744720195604304125 b_6^5 c_1 - \\
& - 145076447037761049578350 b_6^7 c_4 - 46444227537668962160650 b_6^7 c_2 - \\
& - 37973152729754796254300 b_6^7 c_1 + 15034025668513930308 c_6 b_6^9 - \\
& - 20830459447024928059 c_3 b_6^9 + 7045394842002963237 c_5 b_6^9 + \\
& + 483050272802444556465 b_6^8 c_2 + 656877910464828385795 b_6^8 c_1 + \\
& + 1095119186335363050855 b_6^8 c_4 + 24557295098499964355756 c_5 b_6^8 - \\
& - 14010378771099068538392 c_3 b_6^8 + 1778680838899385488851 c_6 b_6^8 + \\
& + 269299720108510310310 b_6^9 c_1 + 1127396059704552573390 b_6^9 c_4 + \\
& + 358935908948169346170 b_6^9 c_2 - 2540682976173353856 c_6 b_6^{10} - \\
& - 178802210370958418790 c_5 b_6^{10} + 98180290831332515130 c_3 b_6^{10} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 341910737043466500 c_3 b_6^{11} + 9308413585516500 c_5 b_6^{11} - \\
& - 235393415582106600 c_6 b_6^{11} - 21658343326483500 b_6^{10} c_4 + \\
& + 171454223621362500 b_6^{10} c_1 + 30263230903405500 b_6^{10} c_2), \\
v_{7,1} &= \frac{1}{198771883725127684608000000000} (\\
& 1491041964287692735245305209263807500 c_1 + \dots,
\end{aligned}$$

Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema 5.8

No 1º caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{4,1}$, $v_{5,1}$, $v_{6,1}$ e $v_{7,1}$ do sistema (5.16) com a condição $b_1 = b_2 = b_4 = 0$.

1º Caso O sistema (5.16) com a condição $b_1 = b_2 = b_4 = 0$.

$$\begin{aligned}
v_{2,1} &= \frac{1}{40} (-6 b_3 b_5 c_4 + 11 b_5^2 c_1 - 3 c_2 b_3^2 + 11 b_3^2 c_4 + 9 b_5^2 c_4 + 9 b_3^2 c_1 + 6 b_3 b_5 c_1 - \\
& - 2 b_3 b_5 c_2 + 3 b_5^2 c_2), \\
v_{3,1} &= \frac{1}{80} (b_5^2 + b_3^2) (-c_2 b_3^2 + 4 b_3^2 c_4 + 2 b_3^2 c_1 + 2 b_3 b_5 c_1 - 2 b_3 b_5 c_4 - 2 b_3 b_5 c_2 + \\
& + 2 b_5^2 c_4 + 4 b_5^2 c_1 + b_5^2 c_2), \\
v_{4,1} &= \frac{1}{21760} (b_5^2 + b_3^2)^2 (35 b_3^2 c_1 - 21 c_2 b_3^2 + 101 b_3^2 c_4 + 42 b_3 b_5 c_1 - 66 b_3 b_5 c_2 - \\
& - 42 b_3 b_5 c_4 + 21 b_5^2 c_2 + 101 b_5^2 c_1 + 35 b_5^2 c_4), \\
v_{5,1} &= \frac{7}{2828800} (b_5^2 + b_3^2)^3 (103 b_3^2 c_4 - 18 c_2 b_3^2 + 27 b_3^2 c_1 - 76 b_3 b_5 c_2 + \\
& + 36 b_3 b_5 c_1 - 36 b_3 b_5 c_4 + 103 b_5^2 c_1 + 27 b_5^2 c_4 + 18 b_5^2 c_2), \\
v_{6,1} &= \frac{21}{837324800} (b_5^2 + b_3^2)^4 (-55 c_2 b_3^2 + 367 b_3^2 c_4 + 77 b_3^2 c_1 + 110 b_3 b_5 c_1 - \\
& - 290 b_3 b_5 c_2 - 110 b_3 b_5 c_4 + 55 b_5^2 c_2 + 77 b_5^2 c_4 + 367 b_5^2 c_1), \\
v_{7,1} &= \frac{33}{41866240000} (b_3^2 + b_5^2)^5 (52 b_3^2 c_1 - 39 b_3^2 c_2 + 298 b_3^2 c_4 + 78 b_3 b_5 c_1 - 246 b_3 b_5 c_2 - \\
& - 78 b_3 b_5 c_4 + 298 b_5^2 c_1 + 39 b_5^2 c_2 + 52 b_5^2 c_4)
\end{aligned}$$

No 2º caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{4,1}$, $v_{5,1}$, $v_{6,1}$, $v_{7,1}$ e $v_{8,1}$ do sistema (5.16) com a condição $b_1 = -b_4$ e $b_3 = b_5 = b_6 = 0$.

2° Caso O sistema (5.16) com a condição $b_1 = -b_4$ e $b_3 = b_5 = b_6 = 0$.

$$\begin{aligned}
v_{1,1} &= -\frac{1}{20} (c_3 b_2 + 2 c_5 b_4 + 6 c_3 b_4 - 3 c_5 b_2), \\
v_{2,1} &= -\frac{1}{40} (b_2^2 + 4 b_4^2) (c_5 + 3 c_3), \\
v_{3,1} &= \frac{11}{320} (b_2^2 + 4 b_4^2) (c_3 b_2 + 2 c_5 b_4 + 6 c_3 b_4 - 3 c_5 b_2), \\
v_{4,1} &= \frac{17}{640} (b_2^2 + 4 b_4^2)^2 (c_5 + 3 c_3), \\
v_{5,1} &= -\frac{69}{1280} (b_2^2 + 4 b_4^2)^2 (c_3 b_2 + 2 c_5 b_4 + 6 c_3 b_4 - 3 c_5 b_2), \\
v_{6,1} &= -\frac{253}{5120} (b_2^2 + 4 b_4^2)^3 (c_5 + 3 c_3), \\
v_{7,1} &= \frac{11999}{81920} (b_2^2 + 4 b_4^2)^3 (b_2 c_3 + 6 b_4 c_3 - 3 b_2 c_5 + 2 b_4 c_5), \\
v_{8,1} &= \frac{24333}{163840} (b_2^2 + 4 b_4^2)^4 (3 c_3 + c_5)
\end{aligned}$$

Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema

5.9

No 1° caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{4,1}$ e $v_{5,1}$ do sistema (5.17) com a condição $a_1 = a_3 = 0$ e devido ao tamanho excessivo dos coeficientes focais $v_{6,1}$ e $v_{7,1}$ vamos omitir boa parte das suas expressões.

1° Caso O sistema (5.17) com a condição $a_1 = a_3 = 0$.

$$\begin{aligned}
v_{1,1} &= \frac{1}{20} (-c_3 b_2 + 3 c_5 b_2 + 9 c_5 b_4 + 11 c_5 b_1 + 13 c_3 b_1 + 7 c_3 b_4) \\
v_{2,1} &= \frac{1}{200} (5 c_5 b_6 b_2^2 + 5 c_3 b_6 b_2^2 + 2 c_6 b_3 b_2^2 - 10 c_5 b_3^2 b_2 + 5 c_3 b_5^2 b_2 + 4 c_6 b_5 b_2^2 + \\
&+ 20 c_3 b_5^2 b_1 + 20 c_3 b_5^2 b_4 + 57 c_3 b_6 b_1^2 + 53 c_3 b_6 b_4^2 + 69 c_5 b_6 b_1^2 + 41 c_5 b_6 b_4^2 + \\
&+ 5 c_5 b_5^2 b_2 + 14 c_6 b_1^2 b_5 + 72 c_6 b_4^2 b_3 + 132 c_6 b_1^2 b_3 - 6 c_6 b_4^2 b_5 + 25 c_3 b_3^2 b_1 + \\
&+ 35 c_3 b_3^2 b_4 + 20 c_5 b_5^2 b_1 + 10 c_5 b_5^2 b_4 + 35 c_5 b_3^2 b_1 + 35 c_5 b_3^2 b_4 - 10 c_3 b_3^2 b_2 - \\
&- 10 c_6 b_2 b_3 b_1 - 10 c_6 b_2 b_3 b_4 - 14 c_3 b_6 b_2 b_1 - 14 c_3 b_6 b_2 b_4 + 2 c_5 b_6 b_2 b_1 + 2 c_5 b_6 b_2 b_4 + \\
&+ 196 c_6 b_4 b_3 b_1 + 90 c_5 b_6 b_1 b_4 - 5 c_3 b_5 b_3 b_2 + 30 c_6 b_5 b_1 b_2 + 30 c_6 b_5 b_4 b_2 - 5 c_5 b_3 b_5 b_2 + \\
&+ 25 c_5 b_5 b_3 b_1 - 5 c_5 b_5 b_3 b_4 + 90 c_3 b_6 b_1 b_4 - 8 c_6 b_1 b_5 b_4 - 5 c_3 b_5 b_3 b_1 - 35 c_3 b_5 b_3 b_4), \\
v_{3,1} &= \frac{1}{272000} (18946 c_3 b_6 b_2 b_5^2 b_4 + 74594 c_5 b_6 b_5^2 b_1 b_4 - 33576 c_6 b_6 b_4^2 b_3 b_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 557112 c_6 b_6 b_4^2 b_3 b_1 + 46168 c_6 b_6 b_4^2 b_5 b_2 - 7480 c_6 b_3^2 b_5 b_2 b_1 + 4760 c_6 b_3^2 b_5 b_2 b_4 + \\
 & + 144040 c_6 b_5^2 b_4 b_3 b_1 + 183806 c_5 b_3^2 b_6 b_1 b_4 - 55782 c_5 b_3 b_6 b_4^2 b_5 - 9126 c_3 b_6 b_3 b_1^2 b_5 + \\
 & + 25840 c_6 b_2 b_3 b_5^2 b_1 + 9520 c_6 b_2 b_3 b_5^2 b_4 - 107046 c_3 b_3 b_6 b_4^2 b_5 + 42138 c_5 b_5 b_6 b_3 b_1^2 + \\
 & + 16798 c_5 b_6 b_2 b_5^2 b_1 + 13122 c_5 b_6 b_2 b_5^2 b_4 - 11480 b_6^2 c_5 b_1 b_4 b_2 - 33576 b_6 c_6 b_3 b_2 b_1^2 - \\
 & - 30014 c_3 b_3^2 b_6 b_2 b_1 - 32546 c_3 b_3^2 b_6 b_2 b_4 + 116578 c_3 b_3^2 b_6 b_4 b_1 - 181512 b_6 c_6 b_5 b_1^2 b_4 - \\
 & - 241176 b_6 c_6 b_5 b_1 b_4^2 + 141822 c_3 b_6 b_5^2 b_4 b_1 - 37600 c_6 b_4 b_3^2 b_5 b_1 - 474 c_3 b_6 b_2^2 b_3 b_5 + \\
 & + 1062 c_5 b_6 b_2^2 b_5 b_3 + 21960 c_6 b_2^2 b_6 b_3 b_1 + 16664 c_6 b_2^2 b_6 b_3 b_4 + 46168 c_6 b_6 b_1^2 b_2 b_5 + \\
 & + 628264 c_6 b_6 b_1^2 b_3 b_4 + 8280 c_6 b_5 b_2^2 b_6 b_1 + 6408 c_6 b_5 b_2^2 b_6 b_4 - 35838 c_5 b_3^2 b_6 b_2 b_1 - \\
 & - 32162 c_5 b_3^2 b_6 b_2 b_4 - 26840 c_3 b_6^2 b_2 b_4 b_1 + 16414 c_3 b_6 b_2 b_5^2 b_1 + 1725 c_3 b_5^4 b_2 + \\
 & + 525 c_5 b_5^4 b_2 - 1675 c_3 b_3^4 b_2 + 740 c_6 b_3^3 b_2^2 + 2480 c_6 b_5^3 b_2^2 + 83204 b_6^2 c_3 b_4^3 + \\
 & + 6475 c_3 b_5^4 b_1 + 3725 c_3 b_5^4 b_4 + 62108 b_6^2 c_5 b_4^3 + 3075 c_3 b_3^4 b_1 + 7125 c_3 b_3^4 b_4 + \\
 & + 5925 c_5 b_3^4 b_1 + 11075 c_5 b_3^4 b_4 + 92932 b_6^2 c_5 b_1^3 + 74860 c_6 b_1^2 b_3^3 - 2875 c_5 b_3^4 b_2 + \\
 & + 72140 c_6 b_4^2 b_3^3 - 17920 c_6 b_5^3 b_4^2 + 28 c_5 b_6^2 b_2^3 - 9760 c_6 b_5^3 b_1^2 + 2525 c_5 b_5^4 b_1 + \\
 & + 875 c_5 b_5^4 b_4 - 996 c_3 b_6^2 b_2^3 + 71836 b_6^2 c_3 b_1^3 - 104148 c_3 b_6 b_3 b_1 b_5 b_4 - \\
 & - 5844 c_3 b_5 b_6 b_3 b_2 b_4 - 13196 c_3 b_5 b_6 b_3 b_2 b_1 - 12052 c_5 b_6 b_2 b_3 b_5 b_1 - 6988 c_5 b_6 b_2 b_3 b_5 b_4 - \\
 & - 63408 b_6 c_6 b_3 b_2 b_4 b_1 + 81744 c_6 b_5 b_4 b_6 b_2 b_1 - 32596 c_5 b_5 b_6 b_3 b_1 b_4 - 3340 c_6 b_5^2 b_3 b_2^2 + \\
 & + 183052 b_6^2 c_5 b_4^2 b_1 + 200276 b_6^2 c_3 b_4^2 b_1 + 188684 b_6^2 c_3 b_4 b_1^2 + 55183 c_5 b_6 b_5^2 b_1^2 + \\
 & + 101217 c_5 b_3^2 b_6 b_1^2 + 8524 b_6^2 c_5 b_4 b_2^2 - 936 c_6 b_2^3 b_6 b_3 + 10516 b_6^2 c_5 b_1 b_2^2 - \\
 & - 15412 b_6^2 c_3 b_4^2 b_2 - 5684 b_6^2 c_5 b_1^2 b_2 + 71889 c_3 b_6 b_5^2 b_1^2 + 39200 c_6 b_3^2 b_1^2 b_5 + \\
 & + 205908 b_6^2 c_5 b_1^2 b_4 - 94232 c_6 b_4^3 b_5 b_6 + 32063 c_5 b_6 b_5^2 b_4^2 + 81409 c_3 b_6 b_5^2 b_4^2 + \\
 & + 9548 c_3 b_6^2 b_2^2 b_1 + 9492 c_3 b_6^2 b_2^2 b_4 + 3450 c_3 b_5^2 b_3^2 b_2 + 1050 c_5 b_5^2 b_3^2 b_2 + \\
 & + 51871 c_3 b_3^2 b_6 b_1^2 + 5769 c_3 b_6 b_2^2 b_3^2 - 1700 c_3 b_3^3 b_5 b_2 - 1700 c_5 b_5^3 b_3 b_2 + \\
 & + 1897 c_5 b_5^2 b_6 b_2^2 + 1031 c_3 b_5^2 b_6 b_2^2 + 4903 c_5 b_6 b_2^2 b_3^2 - 5100 c_5 b_5 b_3^3 b_2 - \\
 & - 1700 c_3 b_3^3 b_5 b_1 + 70780 c_6 b_5^2 b_4^2 b_3 - 27080 b_6 c_6 b_5 b_1^3 + 269480 c_6 b_6 b_1^3 b_3 + \\
 & + 80431 c_3 b_3^2 b_6 b_4^2 - 2960 c_6 b_3^2 b_5 b_2^2 + 6150 c_3 b_5^2 b_3^2 b_1 + 14250 c_3 b_5^2 b_3^2 b_4 - \\
 & - 5100 c_3 b_5^3 b_3 b_1 - 8500 c_3 b_5^3 b_3 b_4 + 11850 c_5 b_3^2 b_5^2 b_1 + 8550 c_5 b_3^2 b_5^2 b_4 - \\
 & - 5100 c_3 b_5^3 b_3 b_2 + 2648 c_6 b_2^3 b_6 b_5 - 28560 c_6 b_2 b_3^3 b_1 - 23120 c_6 b_2 b_3^3 b_4 - \\
 & - 15412 b_6^2 c_3 b_1^2 b_2 - 11900 c_3 b_3^3 b_5 b_4 - 56000 c_6 b_4^2 b_3^2 b_5 + 177144 c_6 b_6 b_4^3 b_3 - \\
 & - 5684 b_6^2 c_5 b_4^2 b_2 + 84380 c_6 b_3 b_5^2 b_1^2 + 152200 c_6 b_4 b_3^3 b_1 - 26720 c_6 b_5^3 b_1 b_4 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 5100 c_5 b_3^3 b_5 b_1 - 5100 c_5 b_3^3 b_5 b_4 + 1700 c_5 b_5^3 b_3 b_1 - 1700 c_5 b_5^3 b_3 b_4 + \\
 & + 97137 c_5 b_3^2 b_6 b_4^2 + 6120 c_6 b_2 b_5^3 b_1 + 2040 c_6 b_2 b_5^3 b_4) \\
 v_{4,1} = & \frac{1}{601120000} (-154801296 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2 b_1^2 + 984779796 b_6^2 c_5 b_1^2 b_4 b_3^2 + \\
 & + 988766636 b_6^2 c_5 b_1 b_4^2 b_3^2 - 58784440 b_6^3 c_5 b_2 b_4^2 b_1 - 79451320 b_6^3 c_3 b_2 b_1^2 b_4 - \\
 & - 79451320 b_6^3 c_3 b_2 b_1 b_4^2 + 514731828 b_6^2 c_3 b_3^2 b_1^2 b_4 + 615649268 b_6^2 c_3 b_3^2 b_1 b_4^2 + \\
 & + 96911880 b_6^2 c_6 b_2 b_1^3 b_5 - 113351160 b_6^2 c_6 b_4^3 b_2 b_3 + 2539172944 c_6 b_6^2 b_1^3 b_3 b_4 + \\
 & + 3420756592 c_6 b_6^2 b_1^2 b_3 b_4^2 - 27403960 c_3 b_3^4 b_6 b_4 b_2 + 23879050 c_6 b_5^4 b_4 b_3 b_2 - \\
 & - 4983550 c_6 b_3^4 b_4 b_5 b_2 - 2674100 c_6 b_5^2 b_3^3 b_1 b_2 + 30230630 c_3 b_6 b_5^4 b_1 b_2 + \\
 & + 2258375024 b_6^2 c_6 b_4^3 b_3 b_1 + 94952676 b_6^2 c_5 b_3 b_1^3 b_5 - 1695568192 b_6^2 c_6 b_4^3 b_1 b_5 + \\
 & + 219048288 b_6 c_6 b_3^2 b_1^3 b_5 - 19651620 c_3 b_3^4 b_6 b_1 b_2 + 1458718156 c_6 b_6 b_4 b_3^3 b_1^2 + \\
 & + 1446087904 c_6 b_6 b_4^2 b_3^3 b_1 - 390813852 b_6^2 c_3 b_3 b_4^3 b_5 - 2852005 c_5 b_6 b_2^2 b_5^2 b_3^2 - \\
 & - 3716285 c_3 b_5^3 b_6 b_3 b_2^2 + 12798440 c_5 b_6 b_5^4 b_1 b_2 + 23127650 c_6 b_5^4 b_3 b_1 b_2 - \\
 & - 557566 c_6 b_2^3 b_6 b_3^2 b_5 - 229230006 c_6 b_1^2 b_3^3 b_6 b_2 - 1250860 c_5 b_6^2 b_2^3 b_5 b_3 - \\
 & - 9357400 c_6 b_2^3 b_6^2 b_3 b_4 + 59413640 b_6^3 c_3 b_4 b_2^2 b_1 + 1764158 c_6 b_5^2 b_2^3 b_6 b_3 + \\
 & + 11393824 c_5 b_6^2 b_2^2 b_5^2 b_4 - 44836150 c_5 b_3^4 b_6 b_2 b_4 + 167497940 c_5 b_3^4 b_6 b_1 b_4 + \\
 & + 42958916 c_5 b_6^2 b_2^2 b_3^2 b_1 + 41429596 c_5 b_6^2 b_2^2 b_3^2 b_4 + 13356200 c_6 b_2^3 b_6^2 b_5 b_1 - \\
 & - 56596400 c_6 b_5^3 b_4 b_3^2 b_1 + 34413028 c_3 b_6^2 b_2^2 b_3^2 b_1 - 28276950 c_6 b_2 b_3^4 b_5 b_1 + \\
 & + 76674590 c_3 b_3^4 b_6 b_1 b_4 + 88238500 c_6 b_5^4 b_3 b_1 b_4 + 45384730 c_5 b_6 b_5^4 b_1 b_4 + \\
 & + 123844825 c_5 b_3^2 b_6 b_5^2 b_4^2 - 2852005 c_3 b_5^2 b_3^2 b_6 b_2^2 + 59413640 b_6^3 c_5 b_4 b_2^2 b_1 - \\
 & - 1944545 c_5 b_5^3 b_6 b_2^2 b_3 + 19939712 b_6^2 c_3 b_5^2 b_2^2 b_4 + 15424864 c_5 b_6^2 b_2^2 b_5^2 b_1 + \\
 & + 3351295 c_3 b_6 b_2^2 b_3^3 b_5 + 14831096 c_6 b_5^3 b_2^2 b_6 b_4 + 17058164 c_6 b_5^3 b_2^2 b_6 b_1 + \\
 & + 38444068 c_3 b_6^2 b_2^2 b_3^2 b_4 + 38327072 c_6 b_3^3 b_2^2 b_6 b_4 + 136208080 c_3 b_6 b_5^4 b_4 b_1 + \\
 & + 4839900 c_6 b_3^3 b_5^2 b_2 b_4 - 13861312 b_6^2 c_6 b_4^2 b_2^2 b_5 - 321331764 b_6^2 c_5 b_3 b_4^3 b_5 - \\
 & - 11183535 c_3 b_3^3 b_6 b_1^2 b_5 + 510351504 b_6^2 c_5 b_5^2 b_4^2 b_1 + 560774864 b_6^2 c_5 b_5^2 b_4 b_1^2 + \\
 & + 25470588 b_6^2 c_3 b_5 b_3 b_1^3 - 59413640 c_3 b_3 b_6^2 b_4 b_5 b_1 b_2 - 59413640 b_6^2 c_5 b_1 b_5 b_4 b_3 b_2 + \\
 & + 62128812 c_6 b_3^2 b_5 b_4 b_6 b_1 b_2 + 279298644 c_6 b_3 b_5^2 b_1 b_6 b_4 b_2 + 114734360 b_6^2 c_5 b_5^2 b_4 b_1 b_2 \\
 & - 282378524 c_6 b_1^2 b_6 b_3^2 b_4 b_5 + 1458841168 b_6 c_6 b_5^2 b_1 b_4^2 b_3 - 30866084 b_6 c_6 b_5^3 b_1 b_4 b_2 + \\
 & + 1368013772 b_6 c_6 b_5^2 b_1^2 b_4 b_3 + 6651590 c_3 b_3^3 b_6 b_5 b_4 b_2 - 18154810 c_5 b_3 b_5^3 b_6 b_1 b_2 + \\
 & + 4223050 c_3 b_5^2 b_3^2 b_6 b_1 b_2 - 29669590 c_5 b_3 b_5^3 b_6 b_4 b_2 + 25425790 c_3 b_5^2 b_3^2 b_6 b_4 b_2 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 120743690 c_3 b_5^3 b_3 b_6 b_1 b_4 - 50767610 c_5 b_3^3 b_6 b_4 b_5 b_1 + 192930790 c_3 b_3^2 b_6 b_4 b_5^2 b_1 - \\
& - 64902770 c_5 b_6 b_5^3 b_3 b_1 b_4 - 63953490 c_3 b_5^3 b_6 b_3 b_2 b_4 - 11989532 c_6 b_2^2 b_6 b_3^2 b_5 b_1 - \\
& - 25727368 c_6 b_2^2 b_6 b_3^2 b_5 b_4 - 42303310 c_3 b_5^3 b_6 b_3 b_2 b_1 - 13668170 c_6 b_5^5 b_1^2 + \\
& + 97920 c_6 b_5^5 b_2^2 + 625430 b_6^3 c_5 b_2^4 + 306425 c_5 b_5^6 b_1 + 625430 c_3 b_6^3 b_2^4 + \\
& + 351050 c_3 b_5^6 b_2 - 229075 c_3 b_3^6 b_2 + 34576640 c_6 b_3^5 b_1^2 - 12585270 c_6 b_5^5 b_4^2 + \\
& + 1184050 c_3 b_3^6 b_4 + 886550 c_5 b_3^6 b_1 + 2483700 c_5 b_3^6 b_4 + 2392410 c_6 b_3^5 b_2^2 + \\
& + 362950 c_3 b_3^6 b_1 + 80325 c_5 b_5^6 b_4 + 603925 c_3 b_5^6 b_4 + 1606075 c_3 b_5^6 b_1 + 53550 c_5 b_5^6 b_2 + \\
& + 251068766 b_6^3 c_5 b_1^4 + 187797454 b_6^3 c_5 b_4^4 + 55416940 c_6 b_3^5 b_4^2 + 240958302 b_6^3 c_3 b_4^4 + \\
& + 197907918 b_6^3 c_3 b_1^4 - 526575 c_5 b_3^6 b_2 - 348075 c_3 b_3^5 b_5 b_2 + 707625 c_5 b_5^4 b_3^2 b_2 - \\
& + 255000 c_6 b_2^2 b_5^3 b_3^2 + 2143700 c_5 b_6^2 b_2^3 b_5^2 - 4923880 c_5 b_6^2 b_2^3 b_3^2 - \\
& - 4923880 c_3 b_6^2 b_2^3 b_3^2 + 1068937220 b_6^3 c_5 b_4^2 b_1^2 + 371895004 b_6^2 c_5 b_4^3 b_3^2 - \\
& - 3863912 c_3 b_6^3 b_2^3 b_4 + 1517250 c_5 b_5^4 b_3^2 b_4 + 711639032 b_6^3 c_3 b_1^3 b_4 + \\
& + 2626500 c_5 b_5^4 b_3^2 b_1 + 28344628 b_6^3 c_5 b_4^2 b_2^2 + 36072452 b_6^3 c_5 b_1^2 b_2^2 - \\
& - 3991226 c_6 b_2^3 b_6 b_3^3 + 1426504 c_6 b_2^4 b_6^2 b_3 - 5584500 c_6 b_3^3 b_5^2 b_2^2 + \\
& + 3191920 c_3 b_5^4 b_6 b_2^2 + 33656324 b_6^3 c_3 b_4^2 b_2^2 + 1361445 c_5 b_5^4 b_6 b_2^2 + \\
& + 3932015 c_3 b_3^4 b_6 b_2^2 - 162350 c_6 b_2^2 b_3 b_5^4 + 30760756 b_6^3 c_3 b_2^2 b_1^2 + \\
& + 5762490 c_5 b_3^4 b_6 b_2^2 + 1751000 c_6 b_2^2 b_3^4 b_5 + 873868 c_6 b_2^4 b_6^2 b_5 + \\
& + 45551500 c_6 b_5^4 b_4^2 b_3 + 105435740 c_5 b_3^4 b_6 b_4^2 - 31635656 b_6^3 c_3 b_4^3 b_2 + \\
& + 167362572 b_6^2 c_3 b_3^2 b_1^3 - 31635656 b_6^3 c_3 b_1^3 b_2 - 21525192 b_6^3 c_5 b_1^3 b_2 - \\
& - 1475175 c_5 b_3^5 b_5 b_2 + 93348020 c_6 b_3^5 b_1 b_4 - 4143750 c_3 b_5^3 b_3^3 b_4 - 1823250 c_3 b_5^3 b_3^3 b_1 + \\
& + 3206625 c_5 b_3^4 b_5^2 b_1 + 3920625 c_5 b_3^4 b_5^2 b_4 - 3863912 c_3 b_6^3 b_2^3 b_1 - 27847360 c_6 b_5^5 b_1 b_4 + \\
& + 4099125 c_3 b_3^4 b_5^2 b_4 - 70643500 c_6 b_5^3 b_4^2 b_3^2 - 267726620 c_6 b_6^2 b_1^4 b_5 + \\
& + 33079325 c_5 b_6 b_5^4 b_1^2 + 49551600 c_6 b_5^4 b_3 b_1^2 + 25230625 c_3 b_3^4 b_6 b_1^2 + \\
& + 284404172 b_6^2 c_3 b_3^2 b_4^3 + 786157528 b_6^3 c_3 b_4^3 b_1 + 79620680 c_3 b_6 b_5^4 b_1^2 + \\
& + 329387968 b_6^2 c_3 b_1^3 b_5^2 - 1823250 c_5 b_3^3 b_5^3 b_2 - 1823250 c_3 b_5^3 b_3^3 b_2 + \\
& + 241897136 b_6^2 c_5 b_1^3 b_5^2 + 602895840 b_6^2 c_6 b_4^4 b_3 + 500937532 c_6 b_4^3 b_3^3 b_6 + \\
& + 57680840 c_3 b_6 b_5^4 b_4^2 - 494428940 c_6 b_6^2 b_4^4 b_5 - 60162150 c_6 b_3^4 b_4^2 b_5 - \\
& - 239411724 c_6 b_4^3 b_5^3 b_6 + 382012488 b_6^2 c_3 b_4^3 b_5^2 + 16212345 c_5 b_6 b_5^4 b_4^2 + \\
& + 519570008 c_6 b_1^3 b_3^3 b_6 + 19038300 c_6 b_3^2 b_1^2 b_5^3 + 58894385 c_3 b_3^4 b_6 b_4^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 66699120 c_5 b_3^4 b_6 b_1^2 + 127500 c_5 b_3^4 b_5^2 b_2 + 1020000 c_3 b_3^4 b_5^2 b_2 + \\
& + 175349616 b_6^2 c_5 b_4^3 b_5^2 + 796719600 c_6 b_6^2 b_1^4 b_3 + 30602550 c_6 b_3^4 b_1^2 b_5 + \\
& + 108783000 c_6 b_5^2 b_3^3 b_4^2 + 91942800 c_6 b_5^2 b_3^3 b_1^2 + 374025444 b_6^2 c_5 b_1^3 b_3^2 - \\
& - 170760896 b_6 c_6 b_5^3 b_1^3 + 1068937220 b_6^3 c_3 b_4^2 b_1^2 + 1600125 c_3 b_5^4 b_3^2 b_2 - \\
& - 348075 c_5 b_5^5 b_3 b_2 - 1475175 c_3 b_5^5 b_3 b_2 - 21525192 b_6^3 c_5 b_4^3 b_2 + 13356200 b_6^2 c_6 b_4 b_2^3 b_5 \\
& - 1250860 c_3 b_6^2 b_2^3 b_3 b_5 + 5123035 c_5 b_3^3 b_6 b_2^2 b_5 - 11895155 c_3 b_5^3 b_3 b_6 b_1^2 - \\
& - 127164335 c_3 b_3^3 b_6 b_5 b_4^2 + 96911880 b_6^2 c_6 b_4^3 b_2 b_5 + 117533585 c_5 b_3^2 b_6 b_5^2 b_1^2 - \\
& - 24541200 c_6 b_3^4 b_4 b_5 b_1 - 15580500 c_6 b_2 b_5^3 b_3^2 b_1 - 26100100 c_6 b_2 b_5^3 b_3^2 b_4 + \\
& + 18410392 b_6^2 c_3 b_1 b_5^2 b_2^2 - 9357400 c_6 b_2^3 b_6^2 b_1 b_3 + 53340924 c_5 b_6^2 b_2 b_5^2 b_4^2 - \\
& - 30804578 c_6 b_5^3 b_2 b_6 b_4^2 + 77734228 c_3 b_6^2 b_2 b_1^2 b_5^2 + 8170982 c_6 b_2 b_6 b_1^2 b_5^3 + \\
& + 69968236 b_6^2 c_5 b_1^2 b_2 b_5^2 + 96069012 b_6^2 c_3 b_4^2 b_2 b_5^2 + 517279496 b_6 c_6 b_5^2 b_1^3 b_3 + \\
& + 933892232 b_6^2 c_3 b_5^2 b_4 b_1^2 + 980399472 b_6^2 c_3 b_5^2 b_4^2 b_1 + 1204875 c_3 b_3^4 b_5^2 b_1 + \\
& + 701082616 b_6^3 c_5 b_4^3 b_1 - 21593910 c_6 b_3^5 b_2 b_1 - 23246990 c_6 b_3^5 b_2 b_4 - \\
& - 579560012 b_6 c_6 b_5^3 b_1^2 b_4 - 639302568 b_6 c_6 b_5^3 b_1 b_4^2 + 4853488 b_6^2 c_6 b_2^2 b_1^2 b_5 - \\
& - 194426926 b_6 c_6 b_3^3 b_2 b_4^2 + 113470424 c_6 b_2^2 b_6^2 b_3 b_1^2 + 581179164 c_6 b_6 b_4^3 b_3 b_5^2 - \\
& - 52677815 c_5 b_6 b_4^2 b_5^3 b_3 + 64174045 c_3 b_3^2 b_6 b_5^2 b_1^2 + 177204365 c_3 b_3^2 b_6 b_4^2 b_5^2 - \\
& - 113351160 b_6^2 c_6 b_1^3 b_2 b_3 - 138173984 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2 b_4^2 + 86758024 b_6^2 c_6 b_4^2 b_2^2 b_3 + \\
& + 4870585 c_5 b_6 b_5^3 b_3 b_1^2 - 112073208 c_3 b_3^2 b_6^2 b_2 b_1^2 - 130407992 c_3 b_3^2 b_6^2 b_2 b_4^2 - \\
& - 559614748 c_6 b_6 b_4^3 b_3^2 b_5 - 112317555 c_3 b_6 b_4^2 b_5^3 b_3 - 58784440 b_6^3 c_5 b_2 b_1^2 b_4 - \\
& - 40453210 c_5 b_3^4 b_6 b_2 b_1 - 2236453496 b_6^2 c_6 b_4^2 b_1^2 b_5 + 10113800 c_5 b_5^4 b_6 b_2 b_4 + \\
& + 39827628 c_6 b_3^3 b_2^2 b_6 b_1 - 110398595 c_5 b_3^3 b_6 b_4^2 b_5 + 30915390 c_3 b_6 b_5^4 b_4 b_2 + \\
& + 48456205 c_5 b_3^3 b_6 b_1^2 b_5 - 1317022752 b_6^2 c_6 b_4 b_1^3 b_5 + 165957400 c_6 b_5^2 b_3^3 b_1 b_4 - \\
& - 11601990 c_3 b_3^3 b_6 b_1 b_5 b_2 - 273279760 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2 b_1 b_4 - 302623880 b_6^2 c_6 b_4^2 b_1 b_2 b_3 - \\
& - 3264176 c_6 b_5^2 b_2^2 b_6 b_3 b_4 + 8863270 c_5 b_5^2 b_3^2 b_6 b_1 b_2 + 90973018 c_6 b_5^2 b_4^2 b_6 b_2 b_3 + \\
& + 237310840 b_6^2 c_6 b_2 b_1^2 b_5 b_4 - 228710716 b_6^2 c_5 b_1^2 b_4 b_3 b_5 + 237310840 b_6^2 c_6 b_4^2 b_2 b_5 b_1 + \\
& + 165228440 b_6^2 c_3 b_4 b_2 b_5^2 b_1 - 588454516 b_6^2 c_5 b_3 b_4^2 b_5 b_1 - 50543324 b_6^2 c_5 b_1^2 b_2 b_3 b_5 + \\
& + 88412614 c_6 b_2 b_6 b_4^2 b_3^2 b_5 - 48835852 c_3 b_5 b_6^2 b_3 b_2 b_1^2 - 15581228 b_6^2 c_3 b_3 b_4^2 b_5 b_2 - \\
& - 13873756 b_6^2 c_5 b_3 b_2 b_4^2 b_5 - 28514066 b_6 c_6 b_3^2 b_2 b_1^2 b_5 + 195382258 c_6 b_6 b_1^2 b_2 b_5^2 b_3 - \\
& - 222785680 c_3 b_3^2 b_6^2 b_2 b_1 b_4 + 3467756 c_6 b_3 b_5^2 b_1 b_6 b_2^2 - 1006090216 c_6 b_6 b_4^2 b_3^2 b_5 b_1 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 253003348 b_6^2 c_3 b_5 b_3 b_1^2 b_4 - 612747148 b_6^2 c_3 b_3 b_4^2 b_5 b_1 + 30066010 c_5 b_3^2 b_6 b_5^2 b_4 b_2 - \\
 & - 17496910 c_5 b_3^3 b_6 b_2 b_5 b_4 - 45885890 c_5 b_3^3 b_6 b_2 b_5 b_1 - 106608530 c_3 b_3^3 b_6 b_4 b_5 b_1 + \\
 & + 192930790 c_5 b_3^2 b_6 b_5^2 b_1 b_4 - 15998768 b_6^2 c_6 b_2^2 b_1 b_5 b_4 - 407692028 b_6 c_6 b_3^3 b_2 b_4 b_1 + \\
 & + 188816416 c_6 b_2^2 b_6^2 b_3 b_1 b_4 - 3382548 c_3 b_5 b_6^2 b_3 b_2^2 b_1 + 7693764 c_5 b_6^2 b_2^2 b_3 b_5 b_1 - \\
 & - 6441396 c_5 b_6^2 b_2^2 b_3 b_5 b_4 - 302623880 b_6^2 c_6 b_1^2 b_2 b_3 b_4 - 17517708 c_3 b_5 b_6^2 b_3 b_2^2 b_4 - \\
 & - 1447784 b_6^3 c_5 b_2^3 b_1 - 1447784 b_6^3 c_5 b_2^3 b_4 + 796713944 b_6^3 c_5 b_1^3 b_4 + \\
 & + 812175 c_5 b_3^5 b_5 b_1 - 1475175 c_5 b_3^5 b_5 b_4 - 1823250 c_5 b_3^3 b_5^3 b_4 + 497250 c_5 b_3^3 b_5^3 b_1 - \\
 & - 348075 c_3 b_3^5 b_5 b_1 - 2635425 c_3 b_3^5 b_5 b_4 + 2448000 c_3 b_5^4 b_3^2 b_1 + 3519000 c_3 b_5^4 b_3^2 b_4 + \\
 & + 2143700 c_3 b_6^2 b_2^3 b_5^2 + 2058122 c_6 b_2^3 b_5^3 b_6 - 5487430 c_6 b_5^5 b_2 b_4 - 348075 c_5 b_5^5 b_3 b_4 \\
 & - 2932670 c_6 b_5^5 b_2 b_1 - 1475175 c_3 b_5^5 b_3 b_1 - 1508325 c_3 b_5^5 b_3 b_4 - 314925 c_5 b_5^5 b_3 b_1), \\
 v_{5,1} = & \frac{1}{196614329600000} (-1100041733544 b_1 b_6^2 c_3 b_3^2 b_4 b_5^2 b_2 - \\
 & - 88833960928752 b_1 b_6^2 c_3 b_5^3 b_4 b_3 b_2 - 27422347847856 b_1 b_5 b_6^2 c_5 b_3^3 b_4 b_2 - \\
 & - 60108949598880 b_1 c_6 b_4 b_3^2 b_5^3 b_6 b_2 + 99240960767520 b_1 c_6 b_2 b_5^4 b_3 b_6 b_4 - \\
 & - 42161554724640 b_1 b_5 b_6^2 c_6 b_3^2 b_4 b_2^2 - 40776079903728 b_1 b_5 b_6^3 c_3 b_3 b_4^2 b_2 - \\
 & - 25233436937280 b_1 b_5 b_6 c_6 b_3^4 b_4 b_2 - 36362323295376 b_1 b_5 b_6^3 c_5 b_3 b_4^2 b_2 + \\
 & + 1458463888752 b_1 b_5 c_3 b_3^3 b_6^2 b_4 b_2 + 178757403214656 b_1 b_5 b_6^2 c_6 b_3^2 b_4^2 b_2 + \\
 & + 15643264884000 b_1 b_6 c_6 b_3^3 b_2 b_4 b_5^2 - 11435805012528 b_1 b_5 b_6^3 c_5 b_4 b_2^2 b_3 - \\
 & - 14986592101104 b_1 b_5 b_6^3 c_3 b_4 b_2^2 b_3 - 54705927471312 b_5 b_6^3 c_3 b_1^2 b_4 b_3 b_2 + \\
 & + 91043465699712 b_5 c_6 b_6^2 b_4 b_3^2 b_1^2 b_2 + 303737502938112 b_1 b_6^2 c_6 b_5^2 b_2 b_3 b_4^2 + \\
 & + 37957122197280 b_1 b_6^2 c_6 b_4 b_2^2 b_5^2 b_3 + 37850823866232 b_1 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2 b_4 b_5^2 - \\
 & - 59953149192144 b_1 b_6^2 c_5 b_3 b_5^3 b_2 b_4 + 356968741034304 b_6^2 c_6 b_4 b_1^2 b_2 b_3 b_5^2 - \\
 & - 59119684079664 b_5 b_6^3 c_5 b_4 b_1^2 b_3 b_2 - 691002468000 c_6 b_5^7 b_4^2 + \\
 & + 63585640119768 b_1 c_5 b_3^2 b_6^3 b_2^2 b_4 + 110513773965816 b_6^3 c_5 b_4 b_5^2 b_1^2 b_2 - \\
 & - 30864455809224 b_6^2 c_3 b_5^3 b_3 b_1^2 b_2 - 401342905054832 b_1 b_5 b_6^3 c_3 b_3 b_4^3 - \\
 & - 3576087013200 b_1 b_5 c_5 b_3^5 b_6 b_4 - 7400200867800 b_1 b_5 c_3 b_3^5 b_6 b_4 - \\
 & - 5034300484200 b_1 b_5 c_5 b_3^5 b_6 b_2 - 631312578000 b_1 b_5 c_3 b_3^5 b_6 b_2 + \\
 & + 76544001997164 b_1 b_6^2 c_3 b_4 b_2 b_5^4 + 22403386541904 b_6^2 c_6 b_3 b_2^2 b_1^2 b_5^2 + \\
 & + 3274471911600 b_1 c_5 b_3^2 b_5^4 b_6 b_2 + 273761365958652 b_6^2 c_5 b_3^2 b_4 b_5^2 b_1^2 + \\
 & + 1520859540206976 b_1 b_6^2 c_6 b_4^3 b_3 b_5^2 - 182526183618792 b_1 b_2 b_6^3 c_3 b_3^2 b_4^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 11855210072576 b_1 b_5 b_6^3 c_6 b_4 b_2^3 - 371722818720 b_1 b_5 c_6 b_2^3 b_6^2 b_3^2 + \\
& + 6204662684640 b_1 c_6 b_2^3 b_6^2 b_3 b_5^2 + 468174052718640 b_1 c_6 b_4^2 b_3^3 b_6 b_5^2 + \\
& + 5453867975760 b_1 c_6 b_2^2 b_5^4 b_6 b_3 - 5602941661200 b_1 c_3 b_5^5 b_6 b_2 b_3 - \\
& - 3288322239864 b_1 c_5 b_6^2 b_2^2 b_5^3 b_3 + 41428243107576 b_1 b_6^3 c_3 b_2^2 b_4 b_5^2 - \\
& - 312422632494480 b_1 c_6 b_4^2 b_3^2 b_5^3 b_6 - 167513688923352 b_1 b_5 b_6^2 c_3 b_3^3 b_4^2 - \\
& - 209027594636184 b_1 b_5 b_6^2 c_5 b_3^3 b_4^2 - 203046280126320 b_1 b_5 c_6 b_4^2 b_3^4 b_6 - \\
& - 578957451692464 b_1 b_5 b_6^3 c_5 b_3 b_4^3 + 82510819693952 b_1 b_5 c_6 b_6^3 b_4^3 b_2 - \\
& - 75252674842464 b_1 b_5 b_6^3 c_6 b_4^2 b_2^2 - 31548104271840 b_1 c_6 b_5^5 b_2 b_6 b_4 + \\
& + 1966585556100 b_1 c_3 b_6 b_2 b_3^2 b_5^4 + 32392861174908 b_1 c_5 b_6^2 b_2 b_5^4 b_4 + \\
& + 54636055256416 b_6^3 c_6 b_3 b_2^2 b_4^3 - 6805114212000 b_1 c_6 b_5^5 b_4 b_3^2 + \\
& + 5447849872400 b_1 c_6 b_5^6 b_4 b_3 + 1091118550176 b_4 c_6 b_2^3 b_6^2 b_5^3 + \\
& + 2241103098000 b_4 c_6 b_2 b_3 b_5^6 + 2431070585700 b_4 c_3 b_5^6 b_6 b_2 + \\
& + 14261750833200 b_1 c_6 b_3^5 b_4 b_5^2 + 603219115800 b_4 c_5 b_5^6 b_6 b_2 + \\
& + 248381281200 b_4 c_6 b_3^5 b_5^2 b_2 - 3865006236000 b_4 c_6 b_2 b_5^5 b_3^2 + \\
& + 217529187820560 c_6 b_4^3 b_3^3 b_6 b_5^2 - 9952971392480 b_1 c_6 b_2^3 b_6^2 b_3^3 - \\
& - 2316005273504 b_1 b_6^4 c_5 b_2^3 b_4 - 1313044665749872 b_1 b_5 c_6 b_6^3 b_4^4 + \\
& + 2671278302056 b_1 b_6^3 c_5 b_2^3 b_5^2 + 216195873712566 b_1 b_6^2 c_3 b_4^2 b_5^4 + \\
& + 3093740919048 b_1 c_3 b_6^3 b_2^3 b_5^2 - 196508490048 c_6 b_2^4 b_6^2 b_3 b_5^2 - \\
& - 345463443000 c_3 b_3^4 b_6 b_2^2 b_5^2 + 720715918000 c_6 b_3^3 b_5^2 b_2^3 b_6 - \\
& - 1017397065672 c_3 b_6^2 b_2^3 b_3 b_5^3 - 63062382708 b_5 c_3 b_6^3 b_2^4 b_3 + \\
& + 32388107804 b_5 c_5 b_6^3 b_2^4 b_3 - 297152215360 b_5 b_6 c_6 b_3^4 b_2^3 - \\
& - 46796431760 c_6 b_2^3 b_5^4 b_6 b_3 - 1197165773700 c_3 b_5^5 b_6 b_2^2 b_3 - \\
& - 467556127064 c_5 b_6^2 b_2^3 b_5^3 b_3 - 967683996136 b_5 b_6^2 c_5 b_3^3 b_2^3 - \\
& - 417843057528 b_5 c_3 b_6^2 b_2^3 b_3^3 - 328532868144 b_5 c_6 b_2^4 b_6^2 b_3^2 + \\
& + 1056865227600 b_5 c_5 b_3^5 b_6 b_2^2 + 347835855900 b_5 c_3 b_3^5 b_6 b_2^2 + \\
& + 593761318800 c_3 b_6 b_2^2 b_3^2 b_5^4 - 488136402000 c_5 b_3 b_5^5 b_6 b_2^2 + \\
& + 418543369400 c_3 b_5^3 b_6 b_3^3 b_2^2 - 49998377111814 b_2 b_6^2 c_5 b_3^4 b_4^2 - \\
& - 515390200800768 b_5 b_6^2 c_6 b_4^4 b_3^2 + 6466678165376 b_5 b_6^3 c_6 b_4^2 b_2^3 - \\
& - 4491102772000 b_4 c_6 b_2 b_3^4 b_5^3 + 17057979414600 c_3 b_5^4 b_3^2 b_6 b_4^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2015658517904 b_4 b_6^3 c_6 b_2^4 b_3 - 1339376940960 b_4 c_6 b_2^2 b_5^5 b_6 + \\
& + 498320747652 c_5 b_6^2 b_2^3 b_3^2 b_5^2 - 178626346768960 b_2 c_6 b_6^2 b_1^3 b_3^3 - \\
& - 50047915113248 b_2 c_6 b_6^3 b_1^4 b_3 - 60041121524280 b_2 b_6^3 c_3 b_1^3 b_3^2 - \\
& - 55340174558448 b_2 b_6^4 c_3 b_4^2 b_1^2 - 38972992715488 b_2 b_6^4 c_3 b_1^3 b_4 - \\
& - 50336234013936 b_2 b_6^4 c_5 b_4^2 b_1^2 - 35030965320416 b_2 b_6^4 c_5 b_1^3 b_4 - \\
& - 45211798554000 b_2 c_6 b_1^2 b_3^5 b_6 - 19345072841502 b_2 b_6^2 c_3 b_3^4 b_1^2 + \\
& + 86190411759162 b_1 b_6^2 c_5 b_4^2 b_5^4 - 50047915113248 b_2 c_6 b_6^3 b_4^4 b_3 - \\
& - 157911728896128 b_2 b_6^2 c_6 b_4^3 b_3^3 - 49175423334960 b_2 c_6 b_4^2 b_3^5 b_6 - \\
& - 72787688792520 b_2 b_6^3 c_3 b_3^2 b_4^3 - 80478502144040 b_2 b_6^3 c_5 b_3^2 b_4^3 - \\
& - 29877401383422 b_2 b_6^2 c_3 b_3^4 b_4^2 + 1944632289728544 b_6^2 c_6 b_4^2 b_3^3 b_1^2 + \\
& + 207621730965198 b_6^2 c_5 b_3^4 b_1^2 b_4 + 352557810266792 b_6^3 c_3 b_1^3 b_4 b_3^2 + \\
& + 977368741707852 b_6^3 c_5 b_4^2 b_1^2 b_3^2 + 572974399076196 b_6^3 c_3 b_4^2 b_1^2 b_3^2 + \\
& + 673287629140984 b_6^3 c_5 b_4 b_1^3 b_3^2 + 77616269011794 b_6^2 c_3 b_3^4 b_1^2 b_4 - \\
& - 44334323191014 b_2 b_6^2 c_5 b_3^4 b_1^2 - 2440368375696 b_6^2 c_6 b_4^2 b_2^2 b_5^3 + \\
& + 34856360637800 b_6^3 c_5 b_4^3 b_2 b_5^2 + 18183291038400 c_3 b_3^4 b_6 b_4^2 b_5^2 - \\
& - 188814620800 c_5 b_3^3 b_6 b_2^2 b_5^3 + 556797974850 c_5 b_3^2 b_5^4 b_6 b_2^2 - \\
& - 308500099050 c_5 b_3^4 b_6 b_2^2 b_5^2 + 509277146196 c_3 b_3^2 b_6^2 b_2^3 b_5^2 - \\
& - 716688272560 c_6 b_2^3 b_3^2 b_5^3 b_6 - 137587758782072 b_5 b_6^2 c_5 b_3^3 b_4^3 - \\
& - 192202985049140 b_5 b_6^3 c_3 b_3 b_4^4 - 11525837840400 b_5 c_5 b_3^5 b_6 b_4^2 - \\
& - 9995826707100 b_5 c_3 b_3^5 b_6 b_4^2 + 40585047199458 b_6^2 c_3 b_4^2 b_2 b_5^4 - \\
& - 18363870320640 c_6 b_5^5 b_2 b_6 b_4^2 + 15595796849946 c_5 b_6^2 b_2 b_5^4 b_4^2 + \\
& + 152316754814484 b_6^2 c_5 b_3^2 b_4^3 b_5^2 + 184754970222732 b_6^2 c_3 b_3^2 b_4^3 b_5^2 - \\
& - 18881805558200 c_3 b_3^3 b_6 b_5^3 b_4^2 + 23040245358468 b_6^3 c_3 b_2^2 b_4^2 b_5^2 - \\
& - 138075155948320 b_5 c_6 b_4^3 b_3^4 b_6 - 212029023442340 b_5 b_6^3 c_5 b_3 b_4^4 + \\
& + 27094383088864 b_5 c_6 b_6^3 b_4^4 b_2 - 29238242976928 b_5 b_6^3 c_6 b_4^3 b_2^2 - \\
& - 113460810438776 b_5 b_6^2 c_3 b_3^3 b_4^3 - 59019239578944 b_6^2 c_6 b_5^3 b_4^3 b_2 - \\
& - 14174116112000 c_5 b_5^3 b_6 b_3^3 b_4^2 - 119563199257224 b_6^2 c_3 b_5^3 b_4^3 b_3 - \\
& - 3405821718000 c_5 b_6 b_4^2 b_5^5 b_3 - 7618105563900 c_3 b_6 b_4^2 b_5^5 b_3 + \\
& + 100773681329200 c_6 b_6 b_4^3 b_3 b_5^4 + 63608643887880 b_6^3 c_3 b_4^3 b_2 b_5^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 18602775583050 c_5 b_3^4 b_6 b_4^2 b_5^2 - 7043319650432 b_6^3 c_6 b_2^3 b_3 b_4^2 + \\
& + 51051342059088 b_6^2 c_6 b_3^3 b_2^2 b_4^2 + 33165197891124 c_5 b_3^2 b_6^3 b_2^2 b_4^2 + \\
& + 7603703666046 b_4 c_3 b_6^2 b_2^2 b_5^4 + 491228678256624 b_6^2 c_6 b_4^4 b_3 b_5^2 - \\
& - 80603041880648 b_6^2 c_5 b_3 b_4^3 b_5^3 + 9464596393950 c_5 b_3^2 b_6 b_5^4 b_4^2 + \\
& + 11056164640716 b_6^3 c_5 b_4^2 b_2^2 b_5^2 + 4330130350000 b_4 c_6 b_3^3 b_5^4 b_2 + \\
& + 2818083904242 b_4 c_5 b_6^2 b_2^2 b_5^4 - 1125528071200 b_4 b_5 c_6 b_3^6 b_2 + \\
& + 203073151568 b_4 b_5 b_6^3 c_6 b_2^4 - 1709990772500 b_4 b_2 c_3 b_3^6 b_6 - \\
& - 4025977716200 b_4 b_2 c_5 b_3^6 b_6 + 12085201288242 b_4 c_5 b_3^4 b_6^2 b_2^2 + \\
& + 9794432230800 b_4 c_6 b_2^2 b_3^5 b_6 - 6195041489624 b_4 b_6^3 c_5 b_3^2 b_2^3 - \\
& - 5772578872632 b_4 b_6^3 c_3 b_2^3 b_3^2 + 7876581075486 b_4 c_3 b_3^4 b_6^2 b_2^2 - \\
& - 9210253432288 b_4 c_6 b_2^3 b_6^2 b_3^3 + 3435712638072 b_4 c_3 b_6^3 b_2^3 b_5^2 + \\
& + 135032007760 c_6 b_2^3 b_5^5 b_6 + 107326274250 c_5 b_5^6 b_6 b_2^2 - \\
& - 119984303400 c_6 b_3^5 b_5^2 b_2^2 - 457444806000 c_6 b_2^2 b_5^5 b_3^2 - \\
& - 34688381000 c_6 b_3^3 b_5^4 b_2^2 + 278615013378 c_5 b_6^2 b_2^3 b_5^4 - \\
& - 1266386616222 c_5 b_3^4 b_6^2 b_2^3 - 31138016000 b_2 c_3 b_5^7 b_3 - 68114410000 b_2 c_5 b_3^5 b_5^3 - \\
& - 93265585504 b_6^3 c_6 b_2^5 b_3 - 5838378000 b_2 b_5 c_3 b_3^7 + 135289570000 c_6 b_2^2 b_3^4 b_5^3 - \\
& - 31138016000 b_2 b_5 c_5 b_3^7 + 22498794500 b_2 c_3 b_3^6 b_5^2 + 1196604500 b_2 c_5 b_3^6 b_5^2 + \\
& + 40013928500 b_2 c_3 b_5^6 b_3^2 - 68114410000 b_2 c_3 b_5^5 b_3^3 + 306971696200 c_6 b_2^2 b_3 b_5^6 + \\
& + 399454538600 c_3 b_5^6 b_6 b_2^2 + 8623390550050 c_5 b_3^6 b_6 b_4^2 - 36914779200 c_6 b_3^2 b_1^2 b_5^5 + \\
& + 41641709112254 b_6^2 c_5 b_1^3 b_5^4 - 199566743008512 b_6^2 c_6 b_5^3 b_1^4 + \\
& + 155874047556110 b_6^3 c_5 b_1^4 b_5^2 + 6692235147000 c_6 b_3^5 b_5^2 b_1^2 - \\
& - 39724309278400 b_6 c_6 b_5^5 b_1^3 + 18711738500 b_2 c_5 b_5^6 b_3^2 - 42814772000 b_2 c_5 b_3^3 b_5^5 - \\
& - 772440472960 c_6 b_2^3 b_3^5 b_6 + 561327081666 b_6^3 c_5 b_3^2 b_2^4 + 543751440518 b_6^3 c_3 b_2^4 b_3^2 - \\
& - 842035257206 c_3 b_3^4 b_6^2 b_2^3 + 524103002800 b_5 c_6 b_3^6 b_2^2 + 134768282272 b_5 b_6^3 c_6 b_2^5 + \\
& + 217773223200 b_2^2 c_3 b_3^6 b_6 + 509901487550 b_2^2 c_5 b_3^6 b_6 + 414185092048 c_6 b_2^4 b_6^2 b_5^3 + \\
& + 7932751463000 c_6 b_5^4 b_3^3 b_1^2 - 1247911594800 b_1 b_2 c_6 b_3^7 + 671856773016 b_1 b_6^4 c_5 b_2^4 + \\
& + 624250427528 b_1 c_3 b_6^4 b_2^4 + 813480070408720 b_6^4 c_3 b_4^2 b_1^3 + \\
& + 194067100453330 b_6^3 c_5 b_3^2 b_1^4 + 344102997310480 b_3 c_6 b_6^3 b_1^5 + \\
& + 64412150994174 b_6^2 c_5 b_3^4 b_1^3 + 373190199098736 c_6 b_6^2 b_1^4 b_3^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 90416100733270 b_6^3 c_3 b_1^4 b_3^2 - 1210898290160 b_6^4 c_5 b_2^3 b_1^2 + \\
& + 19448316186000 b_6^4 c_5 b_1^3 b_2^2 + 1804820721600 b_5 c_6 b_3^6 b_1^2 + \\
& + 3110916224000 c_6 b_3^4 b_1^2 b_5^3 + 204723860865290 b_6^3 c_3 b_1^4 b_5^2 + \\
& + 812418157259280 b_1^2 b_6^4 c_5 b_4^3 + 844090607795760 b_1^2 b_6^4 c_3 b_4^3 + \\
& + 419457748066968 b_6^4 c_3 b_1^4 b_4 + 845152520945200 b_6^4 c_5 b_4^2 b_1^3 + \\
& + 471915101589256 b_6^4 c_5 b_1^4 b_4 + 2767653410600 c_6 b_5^6 b_3 b_1^2 + \\
& + 2047545387950 c_5 b_6 b_5^6 b_1^2 - 205922863350320 b_5 c_6 b_6^3 b_1^5 - \\
& - 9968639620264 b_2 b_6^4 c_5 b_1^4 - 11577964893352 b_2 b_6^4 c_3 b_1^4 - \\
& - 1834716714480 b_6^4 c_3 b_2^3 b_1^2 + 27581076250 b_2 c_5 b_3^4 b_5^4 - \\
& - 5838378000 b_2 c_5 b_5^7 b_3 + 59534361250 b_2 c_3 b_3^4 b_5^4 + 702966372394 c_3 b_6^2 b_2^3 b_5^4 - \\
& - 42814772000 b_2 c_3 b_3^5 b_5^3 + 599598232896 c_6 b_2^4 b_6^2 b_3^3 + 173868621082 c_3 b_6^3 b_2^4 b_5^2 + \\
& + 156292979934 b_6^3 c_5 b_2^4 b_5^2 + 3598526765000 c_3 b_3^6 b_6 b_4^2 + 289914231132752 b_3 c_6 b_6^3 b_4^5 \\
& - 1840645970800 b_4 b_2 c_6 b_3^7 + 603091908744 b_4 b_6^4 c_5 b_2^4 + 650698254232 b_4 c_3 b_6^4 b_2^4 + \\
& + 369934841139312 b_6^2 c_6 b_4^4 b_3^3 + 93870087837600 c_6 b_4^3 b_3^5 b_6 + \\
& + 202501655020210 b_6^3 c_5 b_3^2 b_4^4 + 49699210668998 b_6^2 c_3 b_3^4 b_4^3 + \\
& + 95347716784186 b_6^2 c_5 b_3^4 b_4^3 + 153651841711030 b_6^3 c_3 b_3^2 b_4^4 - \\
& - 1834716714480 b_6^4 c_3 b_2^3 b_4^2 + 15778882757040 b_6^4 c_5 b_4^3 b_2^2 - \\
& - 1210898290160 b_6^4 c_5 b_2^3 b_4^2 - 306018693576816 b_5 c_6 b_6^3 b_4^5 + \\
& + 69921322655398 b_6^2 c_3 b_4^3 b_5^4 + 11270524363800 c_6 b_3^5 b_4^2 b_5^2 + \\
& + 232732402900010 b_6^3 c_3 b_4^4 b_5^2 - 5562022096800 c_6 b_5^5 b_4^2 b_3^2 + \\
& + 2526000165000 c_6 b_5^6 b_4^2 b_3 + 11676756000 b_1 b_5 c_5 b_3^7 - 31138016000 b_1 c_3 b_5^7 b_3 + \\
& + 9730630000 b_1 c_5 b_3^5 b_5^3 + 48534804500 b_1 c_5 b_5^6 b_3^2 - 15569008000 b_1 c_5 b_3^3 b_5^5 + \\
& + 16402701181360 b_6^4 c_3 b_1^3 b_2^2 + 7072409173000 c_3 b_6 b_5^6 b_1^2 + \\
& + 87290215227442 b_6^2 c_3 b_1^3 b_5^4 + 9859416203000 c_6 b_5^4 b_3^3 b_4^2 + \\
& + 129081403179950 b_6^3 c_5 b_4^4 b_5^2 - 35081103468560 c_6 b_4^3 b_5^5 b_6 + \\
& + 753084648150 c_5 b_6 b_5^6 b_4^2 - 9895321852000 c_6 b_3^4 b_4^2 b_5^3 + 3230758587600 c_3 b_6 b_5^6 b_4^2 - \\
& - 250930625853184 c_6 b_6^2 b_4^4 b_5^3 - 5024302223200 b_5 c_6 b_3^6 b_4^2 - \\
& - 9968639620264 b_2 b_6^4 c_5 b_4^4 - 11577964893352 b_2 b_6^4 c_3 b_4^4 + 98588376250 b_1 c_5 b_3^4 b_5^4 - \\
& - 584727457600 b_1 c_6 b_5^7 b_2 - 13622882000 b_1 c_5 b_5^7 b_3 + 59205623750 b_1 c_3 b_3^4 b_5^4 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2100670946400 b_1 c_6 b_5^7 b_4 + 417125045944984 b_1 b_6^4 c_5 b_4^4 + \\
& + 469582399467272 b_1 b_6^4 c_3 b_4^4 - 5838378000 b_1 b_5 c_3 b_3^7 + 5277258027600 b_1 c_6 b_3^7 b_4 + \\
& + 64045940687920 c_6 b_1^3 b_3^5 b_6 + 20509874474642 b_6^2 c_3 b_3^4 b_1^3 + \\
& + 3509049040650 c_5 b_3^6 b_6 b_1^2 + 1031375101200 c_3 b_3^6 b_6 b_1^2 - 42814772000 b_1 c_3 b_3^5 b_5^3 + \\
& + 19684801500 b_1 c_3 b_3^6 b_5^2 + 66049938500 b_1 c_5 b_3^6 b_5^2 + 76122455500 b_1 c_3 b_5^6 b_3^2 - \\
& - 68114410000 b_1 c_3 b_5^5 b_3^3 - 31138016000 b_4 b_5 c_5 b_3^7 - 23353512000 b_4 c_3 b_5^7 b_3 - \\
& - 68114410000 b_4 c_5 b_3^5 b_5^3 + 23471857500 b_4 c_5 b_5^6 b_3^2 - 42814772000 b_4 c_5 b_3^3 b_5^5 + \\
& + 18824497761680 b_6^4 c_3 b_4^3 b_2^2 + 26019046135866 b_6^2 c_5 b_4^3 b_5^4 - \\
& - 120659812000 b_4 c_3 b_3^5 b_5^3 + 87352128500 b_4 c_3 b_3^6 b_5^2 + 114939779500 b_4 c_5 b_3^6 b_5^2 + \\
& + 69836994500 b_4 c_3 b_5^6 b_3^2 - 95360174000 b_4 c_3 b_5^5 b_3^3 + 91158908750 b_4 c_5 b_3^4 b_5^4 - \\
& - 499431535200 b_4 c_6 b_5^7 b_2 - 5838378000 b_4 c_5 b_5^7 b_3 + 130541661250 b_4 c_3 b_3^4 b_5^4 - \\
& - 48653150000 b_4 b_5 c_3 b_3^7 + 759383625 b_4 c_5 b_5^8 + 91416929437288 b_6^4 c_5 b_4^5 + \\
& + 5867964375 b_2 c_3 b_5^8 + 542416875 b_2 c_5 b_5^8 - 2889602625 b_2 c_3 b_3^8 - 8215150125 b_2 c_5 b_3^8 \\
& + 3937108325800 c_6 b_3^7 b_4^2 + 112963533950904 b_6^4 c_3 b_4^5 - 68631373200 c_6 b_5^7 b_2^2 - \\
& - 34382432136 c_3 b_6^4 b_2^5 - 13223913352 b_6^4 c_5 b_2^5 + 221675773800 b_2^2 c_6 b_3^7 + \\
& + 12376966875 b_1 c_5 b_3^8 + 4191403125 b_1 c_3 b_3^8 + 1527137094600 c_6 b_3^7 b_1^2 + \\
& + 3619399875 b_1 c_5 b_5^8 + 32410230125 b_1 c_3 b_5^8 - 1343010281600 c_6 b_5^7 b_1^2 + \\
& + 93026254710376 b_6^4 c_3 b_1^5 + 114572859223992 b_6^4 c_5 b_1^5 + 46493344625 b_4 c_5 b_3^8 + \\
& + 17702514375 b_4 c_3 b_3^8 + 8944947375 b_4 c_3 b_5^8 - 2598195561000 b_1 c_5 b_3 b_5^5 b_6 b_2 + \\
& + 322421184871188 b_1 b_6^2 c_5 b_3^2 b_4^2 b_5^2 - 4719167346400 b_1 c_3 b_5^3 b_6 b_3^3 b_2 + \\
& + 15713797078200 b_1 c_3 b_3^4 b_6 b_4 b_5^2 - 1612443393392 b_1 b_5 c_3 b_6^3 b_2^3 b_3 + \\
& + 103548850182024 b_1 b_6^3 c_5 b_4^2 b_2 b_5^2 + 7950628244664 b_1 b_5 b_6^2 c_5 b_3^3 b_2^2 + \\
& + 3926114945592 b_1 b_5 c_3 b_6^2 b_2^2 b_3^3 - 172018381851264 b_2 b_6^3 c_6 b_4 b_3 b_1^3 - \\
& - 10017510914640 b_1 c_6 b_3^3 b_5^2 b_2^2 b_6 - 5736769039032 b_1 c_3 b_6^2 b_2^2 b_3 b_5^3 - \\
& - 2217754899360 b_1 b_6^2 c_6 b_4 b_2^2 b_5^3 + 5709081608640 b_1 b_5 b_6 c_6 b_3^4 b_2^2 - \\
& - 1415798376174272 b_1 b_5 b_6^2 c_6 b_4^3 b_3^2 - 15630824841600 b_5 c_6 b_4 b_3^4 b_6 b_1^2 - \\
& - 1301877069033216 b_5 b_6^2 c_6 b_4^2 b_3^2 b_1^2 - 1616920400784 b_1 b_5 c_5 b_6^3 b_2^3 b_3 - \\
& - 245433182844096 b_2 b_6^3 c_6 b_4^2 b_3 b_1^2 - 171147503226648 b_2 b_6^3 c_3 b_1^2 b_4 b_3^2 - \\
& - 475352536864128 b_2 c_6 b_6^2 b_4 b_3^3 b_1^2 + 45947253932424 b_1 b_6^3 c_3 b_2^2 b_4 b_3^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 155288948377264 b_5 b_6^3 c_5 b_4 b_1^3 b_3 - 68116362172968 b_5 b_6^2 c_3 b_3^3 b_1^2 b_4 + \\
 & + 160716253956768 b_1 b_6^3 c_6 b_3 b_2^2 b_4^2 - 13340514616832 b_1 b_6^3 c_6 b_2^3 b_3 b_4 + \\
 & + 101209720878240 b_1 b_6^2 c_6 b_3^3 b_2^2 b_4 - 46940866722216 b_5 b_6^2 c_5 b_3^3 b_1^2 b_4 + \\
 & + 22325598260368 b_5 b_6^3 c_3 b_1^3 b_4 b_3 - 551569758898392 b_5 b_6^3 c_5 b_4^2 b_1^2 b_3 - \\
 & - 2570214588480 b_5 b_6^2 c_6 b_3^2 b_1^3 b_2 - 248391413148216 b_5 b_6^3 c_3 b_4^2 b_1^2 b_3 - \\
 & - 45785224283760 b_5 c_6 b_3^4 b_1^2 b_6 b_2 + 82510819693952 b_5 b_6^3 c_6 b_4 b_2 b_1^3 - \\
 & - 20584917726168 b_6^2 c_5 b_5^3 b_1^2 b_3 b_2 - 13275600747708 b_6^2 c_3 b_3^2 b_1^2 b_5^2 b_2 - \\
 & - 10440220636560 b_6 c_6 b_3^2 b_5^3 b_1^2 b_2 - 139087141929360 b_6 c_6 b_3^2 b_5^3 b_1^2 b_4 + \\
 & + 250099389264036 b_6^2 c_3 b_3^2 b_4 b_5^2 b_1^2 - 1096296646068 b_1 c_5 b_6^2 b_2^2 b_3^2 b_5^2 - \\
 & - 457608790832064 b_1 b_2 b_6^2 c_6 b_4^2 b_3^3 + 209125338191280 c_6 b_5^4 b_4 b_3 b_6 b_1^2 - \\
 & - 60013461878232 b_6^2 c_3 b_5^3 b_4 b_3 b_1^2 - 172018381851264 b_1 b_2 c_6 b_6^3 b_4^3 b_3 + \\
 & + 436830772248 b_5 b_6^3 c_3 b_3 b_1^2 b_2^2 - 62658284909664 b_5 b_6^3 c_6 b_4 b_2^2 b_1^2 + \\
 & + 317091281100 b_1 c_3 b_3^4 b_6 b_2 b_5^2 - 92837412819840 b_1 b_2 c_6 b_4 b_3^5 b_6 - \\
 & - 15354658420400 b_1 c_3 b_3^3 b_6 b_5^3 b_4 - 231935166887736 b_2 b_6^3 c_5 b_1^2 b_4 b_3^2 - \\
 & - 193349228801448 b_1 b_6^2 c_3 b_5^3 b_4^2 b_3 - 6666090272400 b_1 c_5 b_6 b_4 b_5^5 b_3 + \\
 & + 171493317771168 b_6^3 c_6 b_3 b_2^2 b_4 b_1^2 - 25928502101840 b_5 b_6^3 c_3 b_3 b_1^3 b_2 - \\
 & - 3249043463568 b_5 b_6^2 c_6 b_3^2 b_1^2 b_2^2 + 112989165726528 b_5 b_6^3 c_6 b_4^2 b_1^2 b_2 + \\
 & + 3952959139896 b_5 b_6^3 c_5 b_3 b_1^2 b_2^2 - 30360166739760 b_5 b_6^3 c_5 b_3 b_1^3 b_2 + \\
 & + 164336513843112 b_1 b_6^3 c_3 b_4^2 b_2 b_5^2 + 22680568790100 b_1 c_5 b_3^4 b_6 b_4 b_5^2 - \\
 & - 172173733350696 b_1 b_6^2 c_5 b_3 b_4^2 b_5^3 - 5096749470800 b_1 c_5 b_3^3 b_6 b_2 b_5^3 - \\
 & - 10490204127000 b_1 c_3 b_6 b_4 b_5^5 b_3 + 23282064070200 b_1 c_3 b_5^4 b_3^2 b_6 b_4 + \\
 & + 346083161565804 b_1 b_6^2 c_3 b_3^2 b_4^2 b_5^2 + 244126136477760 b_1 c_6 b_6 b_4^2 b_3 b_5^4 - \\
 & - 101527367591064 b_6^2 c_5 b_5^3 b_4 b_3 b_1^2 + 16315292358300 b_1 c_5 b_3^2 b_6 b_5^4 b_4 - \\
 & - 11757264178400 b_1 c_5 b_5^3 b_6 b_3^3 b_4 - 148999786874112 b_1 b_6^2 c_6 b_5^3 b_4^2 b_2 - \\
 & - 1738221568044 b_1 c_3 b_3^2 b_6^2 b_2^2 b_5^2 - 2545074358800 b_1 c_6 b_2^2 b_3^2 b_5^3 b_6 + \\
 & + 3962958713844 b_6^2 c_5 b_3^2 b_1^2 b_5^2 b_2 + 23789856920232 b_1 b_6^3 c_5 b_4 b_2^2 b_5^2 + \\
 & + 50545489868640 b_6 c_6 b_5^4 b_1^2 b_3 b_2 - 13231984907256 b_5 c_3 b_3^3 b_6^2 b_2 b_1^2 - \\
 & - 307715531129280 b_5 c_6 b_6^2 b_1^3 b_3^2 b_4 - 1937720356800 b_1 c_5 b_3^4 b_6 b_2 b_5^2 - \\
 & - 38171648332392 b_5 c_3 b_3^3 b_6^2 b_2 b_1^2 + 152957833450968 b_6^3 c_3 b_4 b_2 b_1^2 b_5^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 8641082408400 b_6 c_6 b_3^3 b_2 b_4^2 b_5^2 - 224970243103944 b_1 b_2 b_6^3 c_5 b_3^2 b_4^2 + \\
 & + 1886156331385248 b_6^2 c_6 b_4^2 b_3 b_5^2 b_1^2 - 17295808811112 b_5 b_6^3 c_3 b_4^2 b_2^2 b_3 - \\
 & - 13779680443464 b_5 b_6^3 c_5 b_4^2 b_2^2 b_3 - 40645583326488 b_6^2 c_5 b_3 b_5^3 b_2 b_4^2 + \\
 & + 30561918088884 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2 b_4^2 b_5^2 + 18758308072656 b_6^2 c_6 b_4^2 b_2^2 b_5^2 b_3 - \\
 & - 46002551358036 b_1 b_2 b_6^2 c_3 b_3^4 b_4 - 90153692180292 b_1 b_2 b_6^2 c_5 b_3^4 b_4 - \\
 & - 119761807702464 b_6^2 c_6 b_1^2 b_4 b_5^3 b_2 + 1157304218033280 b_6^2 c_6 b_4 b_3 b_5^2 b_1^3 + \\
 & + 2973824881800 b_4 c_5 b_3^4 b_6 b_2 b_5^2 - 936201038916 b_4 c_3 b_3^2 b_6^2 b_2^2 b_5^2 + \\
 & + 524975040240 b_4 c_6 b_2^2 b_3^2 b_5^3 b_6 + 85833228178624 b_6^2 c_6 b_5^2 b_2 b_3 b_4^3 - \\
 & - 4005694806216 b_4 c_5 b_6^2 b_2^2 b_5^3 b_3 + 6087934821000 b_4 c_5 b_3^2 b_5^4 b_6 b_2 - \\
 & - 9298696841200 b_5 b_6^3 c_3 b_3 b_4^3 b_2 - 7720855027600 b_4 c_5 b_3^3 b_6 b_2 b_5^3 - \\
 & - 4867032203280 b_5 b_6^3 c_5 b_3 b_4^3 b_2 + 16590338160240 b_5 b_6 c_6 b_3^4 b_4^2 b_2 - \\
 & - 7380875080800 b_4 c_3 b_5^5 b_6 b_2 b_3 - 37084466445072 b_5 b_6^2 c_6 b_3^2 b_4^2 b_2^2 + \\
 & + 3976508804064 b_4 c_6 b_2^3 b_6^2 b_3 b_5^2 + 1665938526300 b_4 c_3 b_3^4 b_6 b_2 b_5^2 - \\
 & - 2977887174600 b_4 c_5 b_3 b_5^5 b_6 b_2 - 932976962736 b_4 b_5 c_5 b_6^3 b_2^3 b_3 + \\
 & + 3642483607200 b_4 c_6 b_2^2 b_5^4 b_6 b_3 + 797524821600 b_4 b_5 c_3 b_3^5 b_6 b_2 + \\
 & + 8342746458900 b_4 c_3 b_6 b_2 b_3^2 b_5^4 + 2487994292616 b_4 b_5 b_6^2 c_5 b_3^3 b_2^2 + \\
 & + 39547493448 b_4 b_5 c_3 b_6^2 b_2^2 b_3^3 + 2016597350112 b_4 b_5 c_6 b_2^3 b_6^2 b_3^2 - \\
 & - 1578125960892 b_4 c_5 b_6^2 b_2^2 b_3^2 b_5^2 + 16565229935304 b_5 c_3 b_3^3 b_6^2 b_4^2 b_2 + \\
 & + 358650976080 b_4 b_5 b_6 c_6 b_3^4 b_2^2 + 13323358627332 b_6^2 c_3 b_3^2 b_4^2 b_5^2 b_2 - \\
 & - 65585246751624 b_6^2 c_3 b_5^3 b_4^2 b_3 b_2 - 8339366685840 b_4 c_6 b_3^3 b_5^2 b_2^2 b_6 - \\
 & - 8098437152000 b_4 c_3 b_5^3 b_6 b_3^3 b_2 - 46989801402960 c_6 b_4^2 b_3^2 b_5^3 b_6 b_2 + \\
 & + 6285691852248 b_5 b_6^2 c_5 b_3^3 b_4^2 b_2 + 94697003601792 b_5 b_6^2 c_6 b_3^2 b_4^3 b_2 - \\
 & - 8030208105288 b_4 c_3 b_6^2 b_2^2 b_3 b_5^3 - 937453970128 b_4 b_5 c_3 b_6^3 b_2^3 b_3 + \\
 & + 56208049285440 c_6 b_2 b_5^4 b_3 b_6 b_4^2 - 5514482079600 b_6 c_6 b_3^3 b_2 b_1^2 b_5^2 + \\
 & + 147977081797120 b_6^2 c_6 b_5^2 b_2 b_3 b_1^3 + 401779315853040 c_6 b_1^2 b_3^3 b_6 b_5^2 b_4 - \\
 & - 2207221278600 b_4 b_5 c_5 b_3^5 b_6 b_2 + 2333783590424 b_4 b_6^3 c_5 b_2^3 b_5^2 + \\
 & + 27379241307132 b_6^3 c_3 b_2^2 b_4^2 b_3^2 + 2151470094800 b_1 c_6 b_2 b_3 b_5^6 + \\
 & + 3225661146100 b_1 c_3 b_5^6 b_6 b_2 + 909674202400 b_1 c_5 b_5^6 b_6 b_2 - \\
 & - 2032923219600 b_1 c_6 b_3^5 b_5^2 b_2 - 5619645460000 b_1 c_6 b_3^4 b_4 b_5^3 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2039095219200 b_1 c_6 b_2 b_5^5 b_3^2 + 1366458470000 b_1 c_6 b_3^3 b_5^4 b_2 + \\
 & + 10060362044200 b_1 c_3 b_6 b_5^6 b_4 - 115722301156560 b_6 c_6 b_5^5 b_1^2 b_4 + \\
 & + 18798062720826 c_5 b_6^2 b_2 b_5^4 b_1^2 + 2478488303200 c_5 b_5^3 b_6 b_3^3 b_1^2 + \\
 & + 5120883208 b_6^2 c_5 b_5^3 b_1^3 b_3 + 74924655696228 b_6^2 c_3 b_3^2 b_1^3 b_5^2 - \\
 & - 124522869900 c_3 b_5^5 b_6 b_3 b_1^2 + 1343634166407168 b_1 b_6^2 c_6 b_4^3 b_3^3 + \\
 & + 245824198764720 b_1 c_6 b_4^2 b_3^5 b_6 + 694404408485944 b_1 b_6^3 c_5 b_3^2 b_4^3 + \\
 & + 102956223249366 b_1 b_6^2 c_3 b_3^4 b_4^2 + 234946399986042 b_1 b_6^2 c_5 b_3^4 b_4^2 + \\
 & + 14432342678000 b_1 c_6 b_5^4 b_3^3 b_4 + 473400463996616 b_1 b_6^3 c_5 b_4^3 b_5^2 + \\
 & + 1887225273120 b_1 c_6 b_2^3 b_6^2 b_5^3 - 110882053373280 b_1 c_6 b_4^2 b_5^5 b_6 + \\
 & + 2583260491500 b_1 c_5 b_6 b_5^6 b_4 + 7633329128874 b_1 c_3 b_6^2 b_2^2 b_5^4 + \\
 & + 2440781823924896 b_3 c_6 b_6^3 b_4^3 b_1^2 + 24132069226504 b_6^2 c_3 b_1^3 b_5^3 b_3 + \\
 & + 3740609310600 c_3 b_3^4 b_6 b_5^2 b_1^2 + 748458435671128 b_6^3 c_3 b_1^3 b_5^2 b_4 + \\
 & + 14667979557036 b_6^3 c_5 b_2^2 b_1^2 b_5^2 - 1266389576969088 c_6 b_4^2 b_5^3 b_6^2 b_1^2 + \\
 & + 107362871104476 b_6^2 c_5 b_1^3 b_3^2 b_5^2 - 171582054776560 c_6 b_4^3 b_3^2 b_5^3 b_6 + \\
 & + 2501738515990048 b_3 b_6^3 c_6 b_1^3 b_4^2 - 7043319650432 b_6^3 c_6 b_2^3 b_3 b_1^2 + \\
 & + 67569411587168 b_6^3 c_6 b_3 b_2^2 b_1^3 + 34227115443924 c_5 b_3^2 b_6^3 b_2^2 b_1^2 + \\
 & + 53362951236432 b_6^2 c_6 b_3^3 b_1^2 b_2^2 + 22243034726172 b_6^3 c_3 b_3^2 b_1^2 b_2^2 + \\
 & + 49300660944912 b_6^4 c_5 b_2^2 b_1^2 b_4 + 46635896704176 b_6^4 c_3 b_2^2 b_4 b_1^2 + \\
 & + 9024099936000 c_3 b_5^4 b_3^2 b_6 b_1^2 + 706219967775348 b_6^3 c_5 b_4^2 b_1^2 b_5^2 + \\
 & + 6466678165376 b_5 c_6 b_2^3 b_6^3 b_1^2 - 2362042085917408 b_5 c_6 b_6^3 b_4^3 b_1^2 + \\
 & + 8604615391350 c_5 b_3^2 b_6 b_5^4 b_1^2 + 231673187748594 b_6^2 c_3 b_5^4 b_4 b_1^2 - \\
 & - 88793404774360 b_2 b_6^3 c_5 b_3^2 b_1^3 + 1396048574026000 b_3 b_6^3 c_6 b_1^4 b_4 + \\
 & + 297040824696 b_5 b_6^2 c_3 b_3^3 b_1^3 + 3375478860000 b_5 c_5 b_3^5 b_6 b_1^2 - \\
 & - 836804985900 b_5 c_3 b_3^5 b_6 b_1^2 + 35270507381980 b_5 b_6^3 c_5 b_3 b_1^4 - \\
 & - 13198673985120 c_6 b_2 b_6 b_1^2 b_5^5 + 99683011011918 b_6^2 c_5 b_5^4 b_4 b_1^2 + \\
 & + 67472739867360 b_6 c_6 b_5^4 b_1^3 b_3 - 2229201143000 c_3 b_3^3 b_6 b_1^2 b_5^3 - \\
 & - 1654534003200 c_5 b_6 b_5^5 b_1^2 b_3 + 20453936141028 b_6^3 c_3 b_2^2 b_1^2 b_5^2 + \\
 & + 106322067684736 b_5 c_6 b_6^2 b_1^4 b_3^2 - 1069103732273840 b_5 b_6^3 c_6 b_1^4 b_4 - \\
 & - 2215212483931744 b_5 b_6^3 c_6 b_1^3 b_4^2 + 27094383088864 b_5 b_6^3 c_6 b_2 b_1^4 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 55096545775180 b_5 b_6^3 c_3 b_1^4 b_3 + 55342493639440 b_5 c_6 b_1^3 b_3^4 b_6 + \\
& + 155513235338960 c_6 b_1^3 b_3^3 b_6 b_5^2 - 816404252302400 b_6^2 c_6 b_4 b_1^3 b_5^3 + \\
& + 316741174108272 c_6 b_6^2 b_1^4 b_3 b_5^2 + 38919038449218 b_6^2 c_3 b_1^2 b_5^4 b_2 + \\
& + 11333992331250 c_5 b_3^4 b_6 b_1^2 b_5^2 + 20272294646800 b_6 c_6 b_3^2 b_5^3 b_1^3 + \\
& + 50862076619640 b_6^3 c_3 b_2 b_1^3 b_5^2 + 512538493083656 b_6^3 c_5 b_4 b_1^3 b_5^2 - \\
& - 520140036240 b_1 c_6 b_2^2 b_5^5 b_6 + 1340898445616640 c_6 b_6^2 b_1^3 b_3^3 b_4 + \\
& + 217757668575360 c_6 b_4 b_3^5 b_6 b_1^2 + 458484465898472 b_1 b_6^3 c_3 b_3^2 b_4^3 + \\
& + 11484283497700 b_1 c_5 b_3^6 b_6 b_4 + 4007181945000 b_1 c_3 b_3^6 b_6 b_4 + \\
& + 1285215700815824 b_1 b_3 c_6 b_6^3 b_4^4 + 43171263268120 b_6^3 c_5 b_2 b_1^3 b_5^2 + \\
& + 2050658292336 b_6^2 c_6 b_5^3 b_1^2 b_2^2 + 39257198201272 b_5 b_6^2 c_5 b_3^3 b_1^3 - \\
& - 15151603676064 b_5 b_6^3 c_6 b_1^3 b_2^2 - 4064623160000 b_1 c_6 b_2 b_3^4 b_5^3 - \\
& - 26596833515520 b_6^2 c_6 b_5^3 b_1^3 b_2 + 1110614310407004 b_6^3 c_3 b_4^2 b_1^2 b_5^2 + \\
& + 2285195082448 b_1 b_6^3 c_6 b_2^4 b_3 + 48846110670864 b_1 b_6^4 c_3 b_4^2 b_2^2 + \\
& + 794130282870808 b_1 b_6^3 c_3 b_4^3 b_5^2 - 2787431173200 b_1 b_2 c_5 b_3^6 b_6 - \\
& - 3394373971872 b_1 b_6^4 c_3 b_2^3 b_4 + 46181346430128 b_1 b_6^4 c_5 b_4^2 b_2^2 + \\
& + 11256586176918 b_1 c_5 b_3^4 b_6^2 b_2^2 + 9632312023200 b_1 c_6 b_2^2 b_3^5 b_6 - \\
& - 6532536201256 b_1 b_6^3 c_5 b_3^2 b_2^3 - 5430607153608 b_1 b_6^3 c_3 b_2^3 b_3^2 + \\
& + 6470966415114 b_1 c_3 b_3^4 b_6^2 b_2^2 + 3424708916118 b_1 c_5 b_6^2 b_2^2 b_5^4 - \\
& - 901167911319616 b_1 c_6 b_6^2 b_4^3 b_5^3 - 915202194400 b_1 b_5 c_6 b_3^6 b_4 - \\
& - 2610255398400 b_1 b_5 c_6 b_3^6 b_2 + 389604322576 b_1 b_5 b_6^3 c_6 b_2^4 - \\
& - 959579703300 b_1 b_2 c_3 b_3^6 b_6 - 35030965320416 b_1 b_2 b_6^4 c_5 b_4^3 - \\
& - 38972992715488 b_1 b_2 b_6^4 c_3 b_4^3), \\
v_{6,1} &= \frac{1}{16077153731392000000} (-5516898391453627620 b_4 b_6^2 c_5 b_3^3 b_1^2 b_5^3 + \\
& + 7681999882667219604 b_4 c_3 b_3^4 b_6^2 b_1^2 b_5^2 - \dots), \\
v_{7,1} &= \frac{1}{105170308849273907200000000} (342098863404346477973907520 b_1^7 b_3 b_6^5 c_6 - \\
& - 401589403686179134991376960 b_1^7 b_5 b_6^5 c_6 + \dots).
\end{aligned}$$

No 2º caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em

ϵ , $v_{1,1}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{4,1}$, $v_{5,1}$, $v_{6,1}$, $v_{7,1}$, $v_{8,1}$, $v_{9,1}$, $v_{10,1}$ e $v_{11,1}$ do sistema (5.17) com a condição $b_1 = b_2 = b_4 = 0$.

2° Caso O sistema (5.17) com a condição $b_1 = b_2 = b_4 = 0$.

$$\begin{aligned}
v_{1,1} &= a_1 (c_4 + c_1), \\
v_{2,1} &= \frac{a_1}{40} (11 b_3^2 c_4 + 3 c_2 b_5^2 - 2 b_5 b_3 c_2 - 3 b_3^2 c_2 + 9 b_5^2 c_4 + 6 b_3 b_5 c_1 + 9 b_3^2 c_1 - \\
&\quad - 6 b_5 b_3 c_4 + 11 b_5^2 c_1), \\
v_{3,1} &= \frac{a_1}{80} (b_5^2 + b_3^2) (-b_3^2 c_2 + 2 b_3^2 c_1 + 4 b_3^2 c_4 + 2 b_3 b_5 c_1 - 2 b_5 b_3 c_4 - 2 b_5 b_3 c_2 + \\
&\quad + 2 b_5^2 c_4 + 4 b_5^2 c_1 + c_2 b_5^2), \\
v_{4,1} &= \frac{a_1}{21760} (b_5^2 + b_3^2)^2 (101 b_3^2 c_4 - 21 b_3^2 c_2 + 35 b_3^2 c_1 + 42 b_3 b_5 c_1 - 42 b_5 b_3 c_4 - \\
&\quad - 66 b_5 b_3 c_2 + 21 c_2 b_5^2 + 35 b_5^2 c_4 + 101 b_5^2 c_1), \\
v_{5,1} &= \frac{7a_1}{2828800} (b_5^2 + b_3^2)^3 (-18 b_3^2 c_2 + 27 b_3^2 c_1 + 103 b_3^2 c_4 - 76 b_5 b_3 c_2 - 36 b_5 b_3 c_4 + \\
&\quad + 36 b_3 b_5 c_1 + 27 b_5^2 c_4 + 103 b_5^2 c_1 + 18 c_2 b_5^2), \\
v_{6,1} &= \frac{21a_1}{837324800} (b_5^2 + b_3^2)^4 (77 b_3^2 c_1 + 367 b_3^2 c_4 - 55 b_3^2 c_2 + 110 b_3 b_5 c_1 - \\
&\quad - 290 b_5 b_3 c_2 - 110 b_5 b_3 c_4 + 367 b_5^2 c_1 + 77 b_5^2 c_4 + 55 c_2 b_5^2), \\
v_{7,1} &= \frac{33a_1}{41866240000} (b_3^2 + b_5^2)^5 (52 b_3^2 c_1 - 39 b_3^2 c_2 + 298 b_3^2 c_4 + 78 b_3 b_5 c_1 - 246 b_3 b_5 c_2 - \\
&\quad - 78 b_3 b_5 c_4 + 298 b_5^2 c_1 + 39 b_5^2 c_2 + 52 b_5^2 c_4), \\
v_{8,1} &= \frac{33a_1}{1339719680000} (b_3^2 + b_5^2)^6 (27 b_3^2 c_1 - 21 b_3^2 c_2 + 181 b_3^2 c_4 + 42 b_3 b_5 c_1 - 154 b_3 b_5 c_2 - \\
&\quad - 42 b_3 b_5 c_4 + 181 b_5^2 c_1 + 21 b_5^2 c_2 + 27 b_5^2 c_4), \\
v_{9,1} &= \frac{11a_1}{109857013760000} (b_3^2 + b_5^2)^7 (85 b_3^2 c_1 - 68 b_3^2 c_2 + 653 b_3^2 c_4 + 136 b_3 b_5 c_1 - \\
&\quad - 568 b_3 b_5 c_2 - 136 b_3 b_5 c_4 + 653 b_5^2 c_1 + 68 b_5^2 c_2 + 85 b_5^2 c_4), \\
v_{10,1} &= \frac{11a_1}{26107196211200000} (b_3^2 + b_5^2)^8 (209 b_3^2 c_1 - 171 b_3^2 c_2 + 1811 b_3^2 c_4 + \\
&\quad + 342 b_3 b_5 c_1 - 1602 b_3 b_5 c_2 - 342 b_3 b_5 c_4 + 1811 b_5^2 c_1 + 171 b_5^2 c_2 + 209 b_5^2 c_4), \\
v_{11,1} &= \frac{19a_1}{3185077937766400000} (b_3^2 + b_5^2)^9 (126 b_3^2 c_1 - 105 b_3^2 c_2 + 1216 b_3^2 c_4 + 210 b_3 b_5 c_1 - \\
&\quad - 1090 b_3 b_5 c_2 - 210 b_3 b_5 c_4 + 1216 b_5^2 c_1 + 105 b_5^2 c_2 + 126 b_5^2 c_4).
\end{aligned}$$

No 3° caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{4,1}$, $v_{5,1}$, $v_{6,1}$, $v_{7,1}$, $v_{8,1}$ e $v_{9,1}$ do sistema (5.17) com a condição $b_1 = -b_4$, $b_3 = b_5 = a_3 = 0$ e $b_6 = 2a_1$.

3° Caso O sistema (5.17) com a condição $b_1 = -b_4$, $b_3 = b_5 = a_3 = 0$ e $b_6 = 2a_1$.

$$\begin{aligned}
v_{1,1} &= \frac{1}{20} (20 a_1 c_1 - 6 c_3 b_4 + 20 a_1 c_4 + 3 c_5 b_2 - c_3 b_2 - 2 c_5 b_4), \\
v_{2,1} &= \frac{1}{40} a_1 (4 b_4^2 + b_2^2) (c_5 + 3 c_3 - 2 c_6), \\
v_{3,1} &= -\frac{1}{320} a_1^2 (4 b_4^2 + b_2^2) (-7 c_3 b_2 + 21 c_5 b_2 - 14 c_5 b_4 + 144 a_1 c_1 - 42 c_3 b_4 + \\
&\quad + 144 a_1 c_4), \\
v_{4,1} &= \frac{41}{3200} a_1^3 (4 b_4^2 + b_2^2)^2 (c_5 + 3 c_3 - 2 c_6), \\
v_{5,1} &= \frac{3}{32000} a_1^4 (4 b_4^2 + b_2^2)^2 (723 c_5 b_2 - 241 c_3 b_2 - 482 c_5 b_4 - 1446 c_3 b_4 + 4900 a_1 c_4 + \\
&\quad + 4900 a_1 c_1), \\
v_{6,1} &= -\frac{1681}{128000} a_1^5 (4 b_4^2 + b_2^2)^3 (c_5 + 3 c_3 - 2 c_6), \\
v_{7,1} &= -\frac{a_1^6}{10240000} (b_2^2 + 4 b_4^2)^3 (8971200 a_1 c_1 + 8971200 a_1 c_4 - 444559 b_2 c_3 + \\
&\quad + 1333677 b_2 c_5 - 2667354 b_4 c_3 - 889118 b_4 c_5), \\
v_{8,1} &= \frac{501917 a_1^7}{20480000} (b_2^2 + 4 b_4^2)^4 (3 c_3 + c_5 - 2 c_6), \\
v_{9,1} &= \frac{a_1^8}{40960000} (b_2^2 + 4 b_4^2)^4 (113214780 a_1 c_1 + 113214780 a_1 c_4 - 5631659 b_2 c_3 + \\
&\quad + 16894977 b_2 c_5 - 33789954 b_4 c_3 - 11263318 b_4 c_5).
\end{aligned}$$

Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema

5.10

No 1° caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{4,1}$ e $v_{5,1}$ do sistema (5.18) com a condição $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$ e devido ao tamanho excessivo dos coeficientes focais $v_{6,1}$ e $v_{7,1}$ vamos omitir boa parte das suas expressões.

1° Caso O sistema (5.18) com a condição $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$.

$$\begin{aligned}
v_{1,1} &= \frac{1}{20} (3 c_5 b_2 - c_3 b_2 + 11 c_5 b_1 + 7 c_3 b_4 + 13 c_3 b_1 + 9 c_5 b_4), \\
v_{2,1} &= \frac{1}{200} (196 c_6 b_1 b_3 b_4 + 90 c_5 b_6 b_4 b_1 - 8 c_6 b_1 b_5 b_4 - 10 c_6 b_4 b_3 b_2 - 5 c_3 b_3 b_5 b_1 - \\
&\quad - 35 c_3 b_3 b_5 b_4 - 5 c_5 b_5 b_3 b_2 - 5 c_3 b_3 b_5 b_2 + 2 c_5 b_6 b_1 b_2 + 30 c_6 b_4 b_5 b_2 - 14 c_3 b_6 b_4 b_2 + \\
&\quad + 90 c_3 b_6 b_4 b_1 + 30 c_6 b_1 b_5 b_2 + 2 c_5 b_6 b_4 b_2 + 25 c_5 b_3 b_5 b_1 - 5 c_5 b_3 b_5 b_4 - 14 c_3 b_6 b_1 b_2 - \\
&\quad - 10 c_6 b_1 b_3 b_2 + 53 c_3 b_6 b_4^2 + 41 c_5 b_6 b_4^2 + 69 c_5 b_6 b_1^2 - 6 c_6 b_4^2 b_5 + 57 c_3 b_6 b_1^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 5 c_5 b_6 b_2^2 + 4 c_6 b_2^2 b_5 + 5 c_3 b_6 b_2^2 + 132 c_6 b_1^2 b_3 + 14 c_6 b_1^2 b_5 - 10 c_3 b_3^2 b_2 + \\
 & + 5 c_5 b_5^2 b_2 - 10 c_5 b_3^2 b_2 + 72 c_6 b_4^2 b_3 + 20 c_5 b_5^2 b_1 + 10 c_5 b_5^2 b_4 + 20 c_3 b_5^2 b_1 + \\
 & + 20 c_3 b_5^2 b_4 + 25 c_3 b_3^2 b_1 + 35 c_3 b_3^2 b_4 + 35 c_5 b_3^2 b_1 + 35 c_5 b_3^2 b_4 + 5 c_3 b_5^2 b_2 + \\
 & + 2 c_6 b_2^2 b_3), \\
 v_{3,1} = & \frac{1}{272000} (-5684 c_5 b_6^2 b_2 b_4^2 + 5925 c_5 b_3^4 b_1 - 241176 c_6 b_4^2 b_5 b_6 b_1 + \\
 & + 21960 c_6 b_1 b_6 b_3 b_2^2 + 16414 c_3 b_6 b_5^2 b_2 b_1 + 18946 c_3 b_6 b_5^2 b_2 b_4 + 4760 c_6 b_4 b_5 b_3^2 b_2 - \\
 & - 32546 c_3 b_3^2 b_6 b_4 b_2 + 1062 c_5 b_6 b_2^2 b_3 b_5 - 30014 c_3 b_6 b_3^2 b_2 b_1 + 141822 c_3 b_6 b_1 b_5^2 b_4 + \\
 & + 16664 c_6 b_4 b_6 b_3 b_2^2 + 42138 c_5 b_3 b_6 b_1^2 b_5 - 33576 c_6 b_1^2 b_6 b_3 b_2 - 33576 c_6 b_4^2 b_6 b_3 b_2 + \\
 & + 9520 c_6 b_5^2 b_3 b_2 b_4 + 8280 c_6 b_5 b_6 b_2^2 b_1 + 6408 c_6 b_5 b_6 b_2^2 b_4 - 37600 c_6 b_4 b_5 b_3^2 b_1 + \\
 & + 144040 c_6 b_5^2 b_3 b_1 b_4 - 474 c_3 b_3 b_6 b_5 b_2^2 - 181512 c_6 b_5 b_6 b_1^2 b_4 + 46168 c_6 b_5 b_6 b_1^2 b_2 + \\
 & + 74594 c_5 b_6 b_5^2 b_1 b_4 - 107046 c_3 b_6 b_3 b_4^2 b_5 + 46168 c_6 b_4^2 b_5 b_6 b_2 - 9126 c_3 b_6 b_1^2 b_5 b_3 - \\
 & - 55782 c_5 b_3 b_6 b_4^2 b_5 + 16798 c_5 b_6 b_5^2 b_1 b_2 - 35838 c_5 b_3^2 b_6 b_2 b_1 - 32162 c_5 b_3^2 b_6 b_2 b_4 + \\
 & + 25840 c_6 b_5^2 b_3 b_1 b_2 + 13122 c_5 b_6 b_5^2 b_4 b_2 - 11480 c_5 b_6^2 b_1 b_4 b_2 + 183806 c_5 b_3^2 b_6 b_1 b_4 + \\
 & + 628264 c_6 b_1^2 b_6 b_3 b_4 - 26840 c_3 b_6^2 b_2 b_1 b_4 + 116578 c_3 b_3^2 b_6 b_4 b_1 + 557112 c_6 b_4^2 b_6 b_3 b_1 \\
 & - 7480 c_6 b_1 b_3^2 b_5 b_2 - 6988 c_5 b_6 b_2 b_3 b_5 b_4 - 63408 c_6 b_4 b_6 b_3 b_1 b_2 + 81744 c_6 b_4 b_5 b_6 b_1 b_2 - \\
 & - 5844 c_3 b_3 b_6 b_5 b_2 b_4 - 13196 c_3 b_6 b_1 b_5 b_3 b_2 - 104148 c_3 b_6 b_3 b_4 b_5 b_1 - 12052 c_5 b_6 b_2 b_3 b_5 b_1 \\
 & - 32596 c_5 b_3 b_6 b_1 b_5 b_4 + 1050 c_5 b_5^2 b_3^2 b_2 - 5100 c_5 b_3^3 b_5 b_2 - 5684 c_5 b_6^2 b_2 b_1^2 + \\
 & + 84380 c_6 b_5^2 b_3 b_1^2 - 27080 c_6 b_5 b_6 b_1^3 + 81409 c_3 b_6 b_5^2 b_4^2 - 56000 c_6 b_4^2 b_5 b_3^2 - \\
 & - 15412 c_3 b_6^2 b_2 b_1^2 + 32063 c_5 b_6 b_5^2 b_4^2 + 269480 c_6 b_1^3 b_6 b_3 - 3340 c_6 b_5^2 b_3 b_2^2 + \\
 & + 177144 c_6 b_4^3 b_6 b_3 + 10516 c_5 b_6^2 b_2^2 b_1 + 8524 c_5 b_6^2 b_2^2 b_4 + 55183 c_5 b_6 b_5^2 b_1^2 + \\
 & + 200276 c_3 b_6^2 b_4^2 b_1 + 4903 c_5 b_3^2 b_6 b_2^2 - 26720 c_6 b_5^3 b_1 b_4 - 15412 c_3 b_6^2 b_2 b_4^2 - \\
 & - 1700 c_5 b_5^3 b_3 b_2 - 94232 c_6 b_4^3 b_5 b_6 + 3450 c_3 b_3^2 b_5^2 b_2 + 39200 c_6 b_1^2 b_3^2 b_5 - \\
 & - 5100 c_3 b_3 b_5^3 b_2 + 71889 c_3 b_6 b_1^2 b_5^2 + 6150 c_3 b_3^2 b_5^2 b_1 - 1700 c_5 b_5^3 b_3 b_4 + \\
 & + 188684 c_3 b_6^2 b_4 b_1^2 - 28560 c_6 b_3^3 b_2 b_1 + 1700 c_5 b_5^3 b_3 b_1 + 6120 c_6 b_5^3 b_2 b_1 + \\
 & + 2040 c_6 b_5^3 b_2 b_4 - 1700 c_3 b_3^3 b_5 b_2 + 1897 c_5 b_6 b_5^2 b_2^2 + 101217 c_5 b_3^2 b_6 b_1^2 + \\
 & + 14250 c_3 b_3^2 b_5^2 b_4 - 1700 c_3 b_3^3 b_5 b_1 - 11900 c_3 b_3^3 b_5 b_4 + 205908 c_5 b_6^2 b_1^2 b_4 - \\
 & - 936 c_6 b_6 b_2^3 b_3 + 152200 c_6 b_3^3 b_1 b_4 + 5769 c_3 b_6 b_3^2 b_2^2 + 11850 c_5 b_5^2 b_3^2 b_1 + \\
 & + 8550 c_5 b_5^2 b_3^2 b_4 - 5100 c_5 b_3^3 b_5 b_4 + 5100 c_5 b_3^3 b_5 b_1 + 51871 c_3 b_3^2 b_6 b_1^2 + \\
 & + 70780 c_6 b_5^2 b_3 b_4^2 + 80431 c_3 b_3^2 b_6 b_4^2 + 97137 c_5 b_3^2 b_6 b_4^2 - 23120 c_6 b_3^3 b_2 b_4 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 9548 c_3 b_6^2 b_2^2 b_1 + 9492 c_3 b_6^2 b_2^2 b_4 - 2960 c_6 b_3^2 b_5 b_2^2 + 183052 c_5 b_6^2 b_4^2 b_1 + \\
 & + 1031 c_3 b_6 b_5^2 b_2^2 - 5100 c_3 b_3 b_5^3 b_1 - 8500 c_3 b_3 b_5^3 b_4 + 2648 c_6 b_5 b_6 b_2^3 + \\
 & + 6475 c_3 b_5^4 b_1 - 1675 c_3 b_3^4 b_2 + 3725 c_3 b_5^4 b_4 + 525 c_5 b_5^4 b_2 + 1725 c_3 b_5^4 b_2 - \\
 & - 2875 c_5 b_3^4 b_2 - 996 c_3 b_6^2 b_2^3 + 71836 c_3 b_6^2 b_1^3 - 9760 c_6 b_5^3 b_1^2 - 17920 c_6 b_5^3 b_4^2 + \\
 & + 92932 c_5 b_6^2 b_1^3 + 2480 c_6 b_5^3 b_2^2 + 3075 c_3 b_3^4 b_1 + 2525 c_5 b_5^4 b_1 + 28 c_5 b_6^2 b_2^3 + \\
 & + 62108 c_5 b_6^2 b_4^3 + 72140 c_6 b_3^3 b_4^2 + 74860 c_6 b_3^3 b_1^2 + 83204 c_3 b_6^2 b_4^3 + 740 c_6 b_3^3 b_2^2 + \\
 & + 11075 c_5 b_3^4 b_4 + 875 c_5 b_5^4 b_4 + 7125 c_3 b_3^4 b_4), \\
 v_{4,1} = & \frac{1}{601120000} (-13668170 c_6 b_5^5 b_1^2 - 348075 c_5 b_5^5 b_3 b_4 - 314925 c_5 b_5^5 b_3 b_1 + \\
 & + 1426504 c_6 b_6^2 b_2^4 b_3 - 5487430 c_6 b_5^5 b_2 b_4 + 2058122 c_6 b_5^3 b_6 b_2^3 - \\
 & - 255000 c_6 b_5^3 b_3^2 b_2^2 - 1447784 c_5 b_6^3 b_2^3 b_4 + 1361445 c_5 b_6 b_5^4 b_2^2 + \\
 & + 873868 b_6^2 c_6 b_2^4 b_5 + 2143700 c_5 b_6^2 b_2^3 b_5^2 - 5584500 c_6 b_3^3 b_5^2 b_2^2 - \\
 & - 162350 c_6 b_5^4 b_3 b_2^2 + 2143700 c_3 b_6^2 b_2^3 b_5^2 + 3932015 c_3 b_3^4 b_6 b_2^2 + \\
 & + 5762490 c_5 b_3^4 b_6 b_2^2 + 1751000 c_6 b_3^4 b_2^2 b_5 - 3991226 c_6 b_2^3 b_6 b_3^3 + \\
 & + 3191920 c_3 b_6 b_5^4 b_2^2 - 1475175 c_5 b_3^5 b_5 b_4 + 66699120 c_5 b_3^4 b_6 b_1^2 + \\
 & + 79620680 c_3 b_5^4 b_6 b_1^2 + 45551500 c_6 b_5^4 b_3 b_4^2 + 812175 c_5 b_3^5 b_5 b_1 + \\
 & + 2448000 c_3 b_3^2 b_5^4 b_1 + 3519000 c_3 b_3^2 b_5^4 b_4 + 33079325 c_5 b_5^4 b_6 b_1^2 - \\
 & - 4923880 c_5 b_6^2 b_2^3 b_3^2 - 4923880 c_3 b_6^2 b_2^3 b_3^2 + 284404172 c_3 b_6^2 b_4^3 b_3^2 + \\
 & + 57680840 c_3 b_5^4 b_6 b_4^2 - 170760896 c_6 b_5^3 b_1^3 b_6 + 701082616 c_5 b_6^3 b_1 b_4^3 + \\
 & + 707625 c_5 b_5^4 b_3^2 b_2 + 1020000 c_3 b_3^4 b_5^2 b_2 + 796713944 c_5 b_6^3 b_1^3 b_4 + \\
 & + 30602550 c_6 b_3^4 b_5 b_1^2 - 60162150 c_6 b_3^4 b_5 b_4^2 + 1068937220 b_6^3 c_3 b_4^2 b_1^2 + \\
 & + 786157528 b_6^3 c_3 b_4^3 b_1 + 105435740 c_5 b_3^4 b_6 b_4^2 - 267726620 c_6 b_5 b_6^2 b_1^4 + \\
 & + 93348020 c_6 b_3^5 b_1 b_4 + 167362572 c_3 b_3^2 b_6^2 b_1^3 - 2932670 c_6 b_5^5 b_2 b_1 + \\
 & + 3920625 c_5 b_3^4 b_5^2 b_4 + 3206625 c_5 b_3^4 b_5^2 b_1 + 1517250 c_5 b_5^4 b_3^2 b_4 + \\
 & + 2626500 c_5 b_5^4 b_3^2 b_1 - 23246990 c_6 b_3^5 b_2 b_4 - 21593910 c_6 b_3^5 b_2 b_1 - \\
 & - 3863912 c_3 b_6^3 b_2^3 b_4 - 3863912 c_3 b_6^3 b_2^3 b_1 - 2635425 c_3 b_3^5 b_5 b_4 - \\
 & - 348075 c_3 b_3^5 b_5 b_1 + 374025444 c_5 b_6^2 b_1^3 b_3^2 + 36072452 c_5 b_6^3 b_2^2 b_1^2 + \\
 & + 500937532 c_6 b_3^3 b_4^3 b_6 + 58894385 c_3 b_3^4 b_6 b_4^2 + 382012488 c_3 b_6^2 b_5^2 b_4^3 + \\
 & + 25230625 c_3 b_3^4 b_6 b_1^2 - 494428940 c_6 b_4^4 b_5 b_6^2 - 31635656 c_3 b_6^3 b_2 b_1^3 - \\
 & - 21525192 c_5 b_6^3 b_2 b_1^3 - 239411724 c_6 b_4^3 b_5^3 b_6 + 49551600 c_6 b_5^4 b_3 b_1^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 175349616 c_5 b_6^2 b_5^2 b_4^3 - 1508325 c_3 b_5^5 b_3 b_4 - 1475175 c_3 b_5^5 b_3 b_1 + \\
& + 4099125 c_3 b_3^4 b_5^2 b_4 + 1204875 c_3 b_3^4 b_5^2 b_1 - 27847360 c_6 b_5^5 b_4 b_1 - \\
& - 1823250 c_5 b_5^3 b_3^3 b_4 + 497250 c_5 b_5^3 b_3^3 b_1 - 4143750 c_3 b_3^3 b_5^3 b_4 - \\
& - 1823250 c_3 b_3^3 b_5^3 b_1 - 1475175 c_5 b_3^5 b_5 b_2 + 1600125 c_3 b_3^2 b_5^4 b_2 + 625430 c_3 b_6^3 b_2^4 - \\
& - 526575 c_5 b_3^6 b_2 + 351050 c_3 b_5^6 b_2 + 2392410 c_6 b_3^5 b_2^2 + 97920 c_6 b_5^5 b_2^2 + \\
& + 80325 c_5 b_5^6 b_4 + 306425 c_5 b_5^6 b_1 + 1184050 c_3 b_3^6 b_4 + 362950 c_3 b_3^6 b_1 + \\
& + 1606075 c_3 b_5^6 b_1 + 603925 c_3 b_5^6 b_4 + 34576640 c_6 b_3^5 b_1^2 + 55416940 c_6 b_3^5 b_4^2 + \\
& + 886550 c_5 b_3^6 b_1 + 2483700 c_5 b_3^6 b_4 + 53550 c_5 b_5^6 b_2 - 229075 c_3 b_3^6 b_2 + \\
& + 197907918 c_3 b_6^3 b_1^4 - 12585270 c_6 b_5^5 b_4^2 + 240958302 c_3 b_6^3 b_4^4 + \\
& + 187797454 c_5 b_6^3 b_4^4 + 251068766 c_5 b_6^3 b_1^4 + 625430 c_5 b_6^3 b_2^4 + \\
& + 279298644 b_6 c_6 b_5^2 b_3 b_2 b_4 b_1 + 62128812 b_6 c_6 b_3^2 b_5 b_2 b_1 b_4 - 59413640 c_3 b_6^2 b_2 b_5 b_3 b_4 b_1 - \\
& - 59413640 c_5 b_6^2 b_2 b_3 b_5 b_1 b_4 - 13861312 c_6 b_5 b_6^2 b_2^2 b_4^2 + 2539172944 c_6 b_1^3 b_6^2 b_4 b_3 - \\
& - 229230006 c_6 b_3^3 b_1^2 b_6 b_2 - 559614748 b_6 c_6 b_3^2 b_5 b_4^3 + 933892232 c_3 b_6^2 b_1^2 b_5^2 b_4 + \\
& + 113470424 c_6 b_6^2 b_2^2 b_3 b_1^2 + 69968236 c_5 b_6^2 b_5^2 b_1^2 b_2 + 59413640 c_3 b_6^3 b_2^2 b_1 b_4 + \\
& + 59413640 c_5 b_6^3 b_2^2 b_4 b_1 - 52677815 c_5 b_5^3 b_3 b_6 b_4^2 - 4983550 c_6 b_3^4 b_2 b_5 b_4 - \\
& - 2236453496 b_6^2 c_6 b_5 b_1^2 b_4^2 + 117533585 c_5 b_3^2 b_6 b_5^2 b_1^2 + 53340924 c_5 b_6^2 b_2 b_5^2 b_4^2 + \\
& + 4870585 c_5 b_5^3 b_3 b_6 b_1^2 - 11895155 c_3 b_3 b_6 b_5^3 b_1^2 - 112073208 c_3 b_3^2 b_6^2 b_1^2 b_2 - \\
& - 113351160 b_6^2 c_6 b_3 b_1^3 b_2 + 3420756592 c_6 b_1^2 b_6^2 b_4^2 b_3 + 48456205 c_5 b_3^3 b_6 b_5 b_1^2 + \\
& + 8170982 c_6 b_5^3 b_6 b_2 b_1^2 - 194426926 c_6 b_3^3 b_4^2 b_6 b_2 + 177204365 c_3 b_3^2 b_6 b_5^2 b_4^2 - \\
& - 30804578 c_6 b_4^2 b_5^3 b_6 b_2 - 11183535 c_3 b_3^3 b_5 b_6 b_1^2 + 1458718156 c_6 b_3^3 b_1^2 b_6 b_4 - \\
& - 579560012 c_6 b_5^3 b_1^2 b_6 b_4 + 514731828 c_3 b_3^2 b_6^2 b_1^2 b_4 + 1446087904 c_6 b_3^3 b_1 b_6 b_4^2 + \\
& + 64174045 c_3 b_3^2 b_6 b_5^2 b_1^2 + 988766636 c_5 b_3^2 b_6^2 b_4^2 b_1 + 4853488 c_6 b_5 b_6^2 b_2^2 b_1^2 - \\
& - 138173984 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2 b_4^2 + 14831096 b_6 c_6 b_5^3 b_2^2 b_4 + 17058164 b_6 c_6 b_5^3 b_2^2 b_1 + \\
& + 615649268 c_3 b_3^2 b_6^2 b_1 b_4^2 + 96069012 b_6^2 c_3 b_5^2 b_2 b_4^2 + 19939712 c_3 b_6^2 b_2^2 b_5^2 b_4 + \\
& + 18410392 c_3 b_6^2 b_2^2 b_5^2 b_1 + 560774864 c_5 b_6^2 b_5^2 b_1^2 b_4 + 77734228 b_6^2 c_3 b_5^2 b_2 b_1^2 - \\
& - 154801296 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2 b_1^2 - 113351160 b_6^2 c_6 b_4^3 b_3 b_2 - 1317022752 b_6^2 c_6 b_5 b_1^3 b_4 + \\
& + 2258375024 c_6 b_1 b_6^2 b_4^3 b_3 + 165957400 c_6 b_3^3 b_5^2 b_4 b_1 - 56596400 c_6 b_5^3 b_3^2 b_1 b_4 + \\
& + 45384730 c_5 b_5^4 b_6 b_4 b_1 + 76674590 c_3 b_3^4 b_6 b_1 b_4 + 96911880 c_6 b_2 b_6^2 b_4^3 b_5 + \\
& + 42958916 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2^2 b_1 + 167497940 c_5 b_3^4 b_6 b_1 b_4 - 639302568 c_6 b_4^2 b_5^3 b_6 b_1 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 15580500 c_6 b_5^3 b_3^2 b_2 b_1 + 86758024 c_6 b_6^2 b_2^2 b_3 b_4^2 - 79451320 c_3 b_6^3 b_2 b_4 b_1^2 - \\
& - 28276950 c_6 b_3^4 b_2 b_5 b_1 + 11393824 c_5 b_6^2 b_2^2 b_5^2 b_4 + 15424864 c_5 b_6^2 b_2^2 b_5^2 b_1 - \\
& - 26100100 c_6 b_5^3 b_3^2 b_2 b_4 - 79451320 c_3 b_6^3 b_2 b_4^2 b_1 + 3351295 c_3 b_3^3 b_6 b_5 b_2^2 - \\
& - 1250860 c_5 b_6^2 b_2^3 b_3 b_5 - 1944545 c_5 b_3 b_6 b_5^3 b_2^2 - 27403960 c_3 b_3^4 b_6 b_2 b_4 - \\
& - 24541200 c_6 b_3^4 b_5 b_1 b_4 + 96911880 c_6 b_1^3 b_5 b_6^2 b_2 + 136208080 c_3 b_5^4 b_6 b_1 b_4 + \\
& + 88238500 c_6 b_5^4 b_3 b_1 b_4 + 41429596 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2^2 b_4 + 219048288 b_6 c_6 b_3^2 b_5 b_1^3 + \\
& + 38327072 c_6 b_2^2 b_6 b_3^3 b_4 + 39827628 c_6 b_2^2 b_6 b_3^3 b_1 + 13356200 b_6^2 c_6 b_2^3 b_5 b_4 - \\
& - 127164335 c_3 b_3^3 b_5 b_6 b_4^2 - 110398595 c_5 b_3^3 b_6 b_5 b_4^2 + 25470588 c_3 b_6^2 b_1^3 b_3 b_5 + \\
& + 13356200 b_6^2 c_6 b_2^3 b_5 b_1 - 321331764 b_6^2 c_5 b_5 b_3 b_4^3 + 123844825 c_5 b_3^2 b_6 b_5^2 b_4^2 + \\
& + 30915390 c_3 b_6 b_5^4 b_2 b_4 + 30230630 c_3 b_6 b_5^4 b_2 b_1 + 984779796 c_5 b_6^2 b_1^2 b_3^2 b_4 + \\
& + 980399472 c_3 b_6^2 b_5^2 b_4^2 b_1 - 9357400 c_6 b_6^2 b_2^3 b_3 b_1 - 58784440 c_5 b_6^3 b_2 b_4^2 b_1 - \\
& - 9357400 c_6 b_6^2 b_2^3 b_3 b_4 - 1695568192 c_6 b_4^3 b_5 b_6^2 b_1 - 58784440 c_5 b_6^3 b_2 b_1^2 b_4 + \\
& + 510351504 c_5 b_6^2 b_5^2 b_4^2 b_1 + 10113800 c_5 b_6 b_5^4 b_2 b_4 + 12798440 c_5 b_6 b_5^4 b_2 b_1 - \\
& - 112317555 c_3 b_3 b_6 b_5^3 b_4^2 + 94952676 c_5 b_3 b_6^2 b_1^3 b_5 - 130407992 b_6^2 c_3 b_3^2 b_2 b_4^2 - \\
& - 2674100 c_6 b_3^3 b_5^2 b_2 b_1 - 390813852 c_3 b_6^2 b_4^3 b_5 b_3 + 581179164 b_6 c_6 b_5^2 b_3 b_4^3 + \\
& + 4839900 c_6 b_3^3 b_5^2 b_2 b_4 + 34413028 c_3 b_6^2 b_3^2 b_2^2 b_1 + 517279496 b_6 c_6 b_5^2 b_3 b_1^3 + \\
& + 38444068 c_3 b_6^2 b_3^2 b_2^2 b_4 + 23879050 c_6 b_5^4 b_3 b_2 b_4 + 23127650 c_6 b_5^4 b_3 b_2 b_1 - \\
& - 40453210 c_5 b_3^4 b_6 b_2 b_1 - 1250860 c_3 b_6^2 b_2^3 b_5 b_3 - 44836150 c_5 b_3^4 b_6 b_2 b_4 + \\
& + 1764158 c_6 b_5^2 b_6 b_2^3 b_3 - 2852005 c_3 b_3^2 b_6 b_5^2 b_2^2 - 19651620 c_3 b_3^4 b_6 b_2 b_1 - \\
& - 3716285 c_3 b_6 b_5^3 b_2^2 b_3 - 557566 b_6 c_6 b_3^2 b_5 b_2^3 + 5123035 c_5 b_3^3 b_6 b_5 b_2^2 - \\
& - 2852005 c_5 b_3^2 b_6 b_2^2 b_5^2 + 195382258 b_6 c_6 b_5^2 b_3 b_2 b_1^2 - 13873756 c_5 b_6^2 b_2 b_3 b_5 b_4^2 + \\
& + 7693764 c_5 b_6^2 b_2^2 b_3 b_5 b_1 - 11601990 c_3 b_3^3 b_6 b_5 b_2 b_1 + 6651590 c_3 b_3^3 b_6 b_5 b_2 b_4 - \\
& - 273279760 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2 b_1 b_4 - 282378524 b_6 c_6 b_3^2 b_5 b_1^2 b_4 + 30066010 c_5 b_3^2 b_6 b_2 b_5^2 b_4 + \\
& + 8863270 c_5 b_3^2 b_6 b_2 b_5^2 b_1 + 90973018 b_6 c_6 b_5^2 b_3 b_2 b_4^2 - 15998768 c_6 b_5 b_6^2 b_2^2 b_4 b_1 - \\
& - 50543324 c_5 b_6^2 b_2 b_3 b_5 b_1^2 - 28514066 b_6 c_6 b_3^2 b_5 b_2 b_1^2 + 88412614 b_6 c_6 b_3^2 b_5 b_2 b_4^2 - \\
& - 29669590 c_5 b_5^3 b_3 b_6 b_2 b_4 + 4223050 c_3 b_3^2 b_6 b_5^2 b_2 b_1 + 25425790 c_3 b_3^2 b_6 b_5^2 b_2 b_4 - \\
& - 15581228 c_3 b_6^2 b_2 b_5 b_3 b_4^2 - 48835852 c_3 b_6^2 b_2 b_5 b_3 b_1^2 + 165228440 b_6^2 c_3 b_5^2 b_2 b_1 b_4 - \\
& - 302623880 b_6^2 c_6 b_3 b_1 b_2 b_4^2 - 302623880 b_6^2 c_6 b_3 b_1^2 b_2 b_4 + 192930790 c_3 b_3^2 b_6 b_5^2 b_1 b_4 + \\
& + 192930790 c_5 b_3^2 b_6 b_5^2 b_4 b_1 + 1458841168 b_6 c_6 b_5^2 b_3 b_4^2 b_1 + 237310840 c_6 b_2 b_6^2 b_4^2 b_5 b_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 237310840 c_6 b_1^2 b_5 b_6^2 b_2 b_4 - 106608530 c_3 b_3^3 b_5 b_6 b_4 b_1 - 18154810 c_5 b_5^3 b_3 b_6 b_2 b_1 - \\
 & - 407692028 c_6 b_2 b_6 b_3^3 b_1 b_4 - 3264176 b_6 c_6 b_5^2 b_3 b_2^2 b_4 - 17517708 c_3 b_6^2 b_2^2 b_5 b_3 b_4 - \\
 & - 3382548 c_3 b_6^2 b_2^2 b_5 b_3 b_1 - 63953490 c_3 b_3 b_6 b_5^3 b_2 b_4 - 42303310 c_3 b_3 b_6 b_5^3 b_2 b_1 + \\
 & + 114734360 c_5 b_6^2 b_2 b_5^2 b_1 b_4 - 30866084 c_6 b_5^3 b_6 b_2 b_1 b_4 - 50767610 c_5 b_3^3 b_6 b_5 b_1 b_4 - \\
 & - 45885890 c_5 b_3^3 b_6 b_5 b_2 b_1 - 6441396 c_5 b_6^2 b_2^2 b_3 b_5 b_4 - 612747148 c_3 b_6^2 b_4^2 b_5 b_3 b_1 - \\
 & - 1006090216 b_6 c_6 b_3^2 b_5 b_1 b_4^2 - 17496910 c_5 b_3^3 b_6 b_5 b_2 b_4 - 228710716 b_6^2 c_5 b_5 b_3 b_4 b_1^2 + \\
 & + 188816416 c_6 b_6^2 b_2^2 b_3 b_4 b_1 - 588454516 b_6^2 c_5 b_5 b_3 b_4^2 b_1 + 3467756 b_6 c_6 b_5^2 b_3 b_2^2 b_1 - \\
 & - 64902770 c_5 b_5^3 b_3 b_6 b_1 b_4 - 120743690 c_3 b_3 b_6 b_5^3 b_1 b_4 - 25727368 b_6 c_6 b_3^2 b_5 b_2^2 b_4 - \\
 & - 11989532 b_6 c_6 b_3^2 b_5 b_2^2 b_1 + 1368013772 b_6 c_6 b_5^2 b_3 b_1^2 b_4 - 253003348 c_3 b_6^2 b_4 b_5 b_3 b_1^2 - \\
 & - 222785680 b_6^2 c_3 b_3^2 b_2 b_4 b_1 - 1823250 c_5 b_5^3 b_3^3 b_2 - 1823250 c_3 b_3^3 b_5^3 b_2 - \\
 & - 1475175 c_3 b_5^5 b_3 b_2 + 127500 c_5 b_3^4 b_5^2 b_2 - 348075 c_5 b_5^5 b_3 b_2 - 348075 c_3 b_3^5 b_5 b_2 + \\
 & + 1068937220 c_5 b_6^3 b_1^2 b_4^2 - 1447784 c_5 b_6^3 b_2^3 b_1 + 16212345 c_5 b_5^4 b_6 b_4^2 + \\
 & + 108783000 c_6 b_3^3 b_5^2 b_4^2 + 30760756 c_3 b_6^3 b_2^2 b_1^2 + 241897136 c_5 b_6^2 b_5^2 b_1^3 - \\
 & - 21525192 c_5 b_6^3 b_2 b_4^3 - 70643500 c_6 b_5^3 b_3^2 b_4^2 + 19038300 c_6 b_5^3 b_3^2 b_1^2 + \\
 & + 519570008 c_6 b_3^3 b_1^3 b_6 + 602895840 c_6 b_4^4 b_6^2 b_3 + 796719600 c_6 b_1^4 b_6^2 b_3 + \\
 & + 711639032 c_3 b_6^3 b_4 b_1^3 + 371895004 c_5 b_3^2 b_6^2 b_4^3 + 28344628 c_5 b_6^3 b_2^2 b_4^2 + \\
 & + 91942800 c_6 b_3^3 b_5^2 b_1^2 + 33656324 c_3 b_6^3 b_2^2 b_4^2 + 329387968 c_3 b_6^2 b_1^3 b_5^2 - \\
 & - 31635656 c_3 b_6^3 b_2 b_4^3) \\
 v_{5,1} &= \frac{1}{196614329600000} (17702514375 b_4 c_3 b_3^8 + 203073151568 b_4 b_6^3 c_6 b_2^4 b_5 - \\
 & - 2362042085917408 b_6^3 c_6 b_5 b_1^2 b_4^3 + 2333783590424 b_4 b_6^3 c_5 b_5^2 b_2^3 + \\
 & + 7603703666046 b_4 c_3 b_6^2 b_5^4 b_2^2 - 308500099050 b_2^2 c_5 b_3^4 b_5^2 b_6 - \\
 & - 46796431760 c_6 b_5^4 b_3 b_2^3 b_6 - 1017397065672 b_6^2 c_3 b_3 b_5^3 b_2^3 - \\
 & - 467556127064 b_6^2 c_5 b_3 b_5^3 b_2^3 + 15595796849946 b_4^2 c_5 b_6^2 b_5^4 b_2 + \\
 & + 1804820721600 b_1^2 c_6 b_3^6 b_5 + 49300660944912 b_4 b_6^4 c_5 b_2^2 b_1^2 + \\
 & + 46635896704176 b_4 b_6^4 c_3 b_2^2 b_1^2 + 2241103098000 b_4 b_2 c_6 b_5^6 b_3 + \\
 & + 418543369400 b_2^2 c_3 b_3^3 b_5^3 b_6 - 171582054776560 b_6 c_6 b_5^3 b_3^2 b_4^3 - \\
 & - 2316005273504 b_4 b_1 c_5 b_6^4 b_2^3 + 344102997310480 b_6^3 c_6 b_1^5 b_3 - \\
 & - 371722818720 b_1 b_6^2 c_6 b_3^2 b_5 b_2^3 + 373190199098736 b_6^2 c_6 b_3^3 b_1^4 - \\
 & - 1612443393392 b_1 b_6^3 c_3 b_2^3 b_5 b_3 + 8623390550050 b_4^2 c_5 b_3^6 b_6 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 5024302223200 b_4^2 c_6 b_3^6 b_5 + 813480070408720 b_4^2 c_3 b_6^4 b_1^3 + \\
& + 3509049040650 b_1^2 c_5 b_3^6 b_6 - 31138016000 b_2 b_3 c_3 b_5^7 + \\
& + 155874047556110 b_6^3 c_5 b_5^2 b_1^4 + 16402701181360 b_6^4 c_3 b_2^2 b_1^3 + \\
& + 19448316186000 b_6^4 c_5 b_2^2 b_1^3 - 5034300484200 b_1 b_2 c_5 b_3^5 b_5 b_6 + \\
& + 3274471911600 b_1 b_2 c_5 b_5^4 b_3^2 b_6 - 1937720356800 b_1 b_2 c_5 b_3^4 b_5^2 b_6 - \\
& - 7720855027600 b_4 b_2 c_5 b_5^3 b_3^3 b_6 + 3976508804064 b_4 b_6^2 c_6 b_5^2 b_3 b_2^3 - \\
& - 2977887174600 b_4 b_2 c_5 b_5^5 b_3 b_6 - 936201038916 b_4 b_6^2 c_3 b_3^2 b_2^2 b_5^2 + \\
& + 8342746458900 b_4 b_2 c_3 b_3^2 b_6 b_5^4 - 92837412819840 b_4 b_1 c_6 b_3^5 b_2 b_6 - \\
& - 937453970128 b_4 b_6^3 c_3 b_2^3 b_5 b_3 + 6087934821000 b_4 b_2 c_5 b_5^4 b_3^2 b_6 + \\
& + 2973824881800 b_4 b_2 c_5 b_3^4 b_5^2 b_6 - 8098437152000 b_4 b_2 c_3 b_3^3 b_5^3 b_6 + \\
& + 7072409173000 b_1^2 c_3 b_5^6 b_6 + 2047545387950 b_1^2 c_5 b_5^6 b_6 + 23471857500 b_4 c_5 b_5^6 b_3^2 - \\
& - 1210898290160 b_1^2 c_5 b_6^4 b_2^3 + 7932751463000 b_1^2 c_6 b_3^3 b_5^4 + \\
& + 2767653410600 b_1^2 c_6 b_5^6 b_3 - 5838378000 b_2 b_3 c_5 b_5^7 - 68114410000 b_2 c_3 b_3^3 b_5^5 + \\
& + 399454538600 b_2^2 c_3 b_5^6 b_6 + 40013928500 b_2 c_3 b_5^6 b_3^2 - 31138016000 b_2 c_5 b_3^7 b_5 + \\
& + 59534361250 b_2 c_3 b_3^4 b_5^4 - 5838378000 b_1 c_3 b_3^7 b_5 - 120659812000 b_4 c_3 b_3^5 b_5^3 - \\
& - 48653150000 b_4 c_3 b_3^7 b_5 + 130541661250 b_4 c_3 b_3^4 b_5^4 - 1840645970800 b_4 b_2 c_6 b_3^7 + \\
& + 603091908744 b_4 c_5 b_6^4 b_2^4 - 5838378000 b_4 b_3 c_5 b_5^7 - 23353512000 b_4 b_3 c_3 b_5^7 - \\
& - 68114410000 b_4 c_5 b_3^5 b_5^3 + 87352128500 b_4 c_3 b_3^6 b_5^2 + 3230758587600 b_4^2 c_3 b_5^6 b_6 - \\
& - 1210898290160 b_4^2 c_5 b_6^4 b_2^3 + 3598526765000 b_4^2 c_3 b_3^6 b_6 - \\
& - 95360174000 b_4 c_3 b_3^3 b_5^5 + 11270524363800 b_4^2 c_6 b_3^5 b_5^2 - 13622882000 b_1 b_3 c_5 b_5^7 - \\
& - 68114410000 b_1 c_3 b_3^3 b_5^5 - 42814772000 b_1 c_3 b_3^5 b_5^3 - 1247911594800 b_1 b_2 c_6 b_3^7 + \\
& + 671856773016 b_1 c_5 b_6^4 b_2^4 + 624250427528 b_1 c_3 b_6^4 b_2^4 - \\
& - 199566743008512 c_6 b_5^3 b_1^4 b_6^2 + 194067100453330 c_5 b_6^3 b_1^4 b_3^2 + \\
& + 90416100733270 b_6^3 c_3 b_3^2 b_1^4 + 204723860865290 b_6^3 c_3 b_5^2 b_1^4 - \\
& - 306018693576816 c_6 b_4^5 b_5 b_6^3 + 69921322655398 b_6^2 c_3 b_5^4 b_4^3 - \\
& - 35081103468560 b_6 c_6 b_5^5 b_4^3 + 812418157259280 b_6^4 c_5 b_1^2 b_4^3 + \\
& + 417125045944984 b_6^4 c_5 b_1 b_4^4 + 650698254232 b_4 c_3 b_6^4 b_2^4 + 76122455500 b_1 c_3 b_5^6 b_3^2 + \\
& + 11676756000 b_1 c_5 b_3^7 b_5 - 42814772000 b_2 c_3 b_3^5 b_5^3 + 22498794500 b_2 c_3 b_3^6 b_5^2 + \\
& + 129081403179950 c_5 b_6^3 b_5^2 b_4^4 + 232732402900010 c_3 b_6^3 b_5^2 b_4^4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1196604500 b_2 c_5 b_3^6 b_5^2 - 36914779200 b_1^2 c_6 b_3^2 b_5^5 + \\
& + 3110916224000 b_1^2 c_6 b_3^4 b_5^3 + 6692235147000 b_1^2 c_6 b_3^5 b_5^2 - \\
& - 1834716714480 b_1^2 c_3 b_6^4 b_2^3 - 584727457600 b_1 b_2 c_6 b_5^7 + 753084648150 b_4^2 c_5 b_5^6 b_6 - \\
& - 31138016000 b_4 c_5 b_3^7 b_5 + 69836994500 b_4 c_3 b_5^6 b_3^2 - 499431535200 b_4 b_2 c_6 b_5^7 - \\
& - 1834716714480 b_4^2 c_3 b_6^4 b_2^3 + 15778882757040 b_6^4 c_5 b_2^2 b_4^3 - \\
& - 9968639620264 b_6^4 c_5 b_2 b_4^4 - 250930625853184 b_6^2 c_6 b_4^4 b_5^3 + \\
& + 20509874474642 c_3 b_3^4 b_6^2 b_1^3 + 26019046135866 b_6^2 c_5 b_5^4 b_4^3 - \\
& - 9895321852000 b_4^2 c_6 b_3^4 b_5^3 - 5562022096800 b_4^2 c_6 b_3^2 b_5^5 - \\
& - 42814772000 b_4 c_5 b_5^5 b_3^3 + 91158908750 b_4 c_5 b_5^4 b_3^4 + 469582399467272 b_6^4 c_3 b_4^4 b_1 + \\
& + 2431070585700 b_4 b_2 c_3 b_5^6 b_6 + 74924655696228 c_3 b_3^2 b_6^2 b_5^2 b_1^3 - \\
& - 19345072841502 b_1^2 c_3 b_6^2 b_3^4 b_2 + 18798062720826 b_1^2 c_5 b_6^2 b_5^4 b_2 + \\
& + 18183291038400 b_4^2 c_3 b_3^4 b_5^2 b_6 - 110882053373280 b_4^2 c_6 b_5^5 b_1 b_6 + \\
& + 106322067684736 b_6^2 c_6 b_3^2 b_5 b_1^4 + 20272294646800 b_6 c_6 b_5^3 b_3^2 b_1^3 + \\
& + 27379241307132 b_4^2 c_3 b_6^3 b_3^2 b_2^2 + 86190411759162 b_4^2 c_5 b_5^4 b_6^2 b_1 + \\
& + 67569411587168 c_6 b_6^3 b_2^2 b_3 b_1^3 - 7618105563900 b_4^2 c_3 b_5^5 b_3 b_6 + \\
& + 498320747652 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2^3 b_5^2 - 716688272560 b_6 c_6 b_3^2 b_5^3 b_2^3 - \\
& - 7043319650432 b_4^2 b_6^3 c_6 b_2^3 b_3 + 17057979414600 b_4^2 c_3 b_3^2 b_6 b_5^4 + \\
& + 46181346430128 b_4^2 b_6^4 c_5 b_2^2 b_1 + 55096545775180 c_3 b_6^3 b_1^4 b_3 b_5 + \\
& + 512538493083656 b_4 b_6^3 c_5 b_5^2 b_1^3 + 4007181945000 b_4 b_1 c_3 b_3^6 b_6 + \\
& + 11484283497700 b_4 b_1 c_5 b_3^6 b_6 - 915202194400 b_4 b_1 c_6 b_3^6 b_5 + \\
& + 5447849872400 b_4 b_1 c_6 b_5^6 b_3 + 4330130350000 b_4 b_2 c_6 b_3^3 b_5^4 + \\
& + 248381281200 b_4 b_2 c_6 b_3^5 b_5^2 - 4491102772000 b_4 b_2 c_6 b_3^4 b_5^3 - \\
& - 3865006236000 b_4 b_2 c_6 b_3^2 b_5^5 + 14432342678000 b_4 b_1 c_6 b_3^3 b_5^4 + \\
& + 706219967775348 b_4^2 b_6^3 c_5 b_5^2 b_1^2 + 102956223249366 b_4^2 c_3 b_3^4 b_6^2 b_1 - \\
& - 55340174558448 b_4^2 c_3 b_6^4 b_2 b_1^2 - 29877401383422 b_4^2 c_3 b_6^2 b_3^4 b_2 + \\
& + 234946399986042 b_4^2 c_5 b_3^4 b_6^2 b_1 - 5772578872632 b_4 c_3 b_6^3 b_3^2 b_2^3 + \\
& + 1091118550176 b_4 b_6^2 c_6 b_5^3 b_2^3 + 40585047199458 b_4^2 c_3 b_6^2 b_5^4 b_2 + \\
& + 216195873712566 b_4^2 b_6^2 c_3 b_5^4 b_1 - 49998377111814 b_4^2 c_5 b_3^4 b_6^2 b_2 + \\
& + 245824198764720 b_4^2 c_6 b_3^5 b_1 b_6 - 6805114212000 b_4 b_1 c_6 b_3^2 b_5^5 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2583260491500 b_4 b_1 c_5 b_5^6 b_6 + 10060362044200 b_4 b_1 c_3 b_5^6 b_6 - \\
& - 11525837840400 b_4^2 c_5 b_3^5 b_5 b_6 + 603219115800 b_4 b_2 c_5 b_5^6 b_6 - \\
& - 3394373971872 b_4 b_1 c_3 b_6^4 b_2^3 + 14261750833200 b_4 b_1 c_6 b_3^5 b_5^2 - \\
& - 5619645460000 b_4 b_1 c_6 b_3^4 b_5^3 + 77616269011794 b_4 c_3 b_3^4 b_6^2 b_1^2 + \\
& + 2501738515990048 b_4^2 b_6^3 c_6 b_1^3 b_3 + 11056164640716 b_4^2 b_6^3 c_5 b_5^2 b_2^2 - \\
& - 38972992715488 b_4 c_3 b_6^4 b_2 b_1^3 + 3435712638072 b_4 c_3 b_6^3 b_2^3 b_5^2 + \\
& + 1396048574026000 b_4 b_6^3 c_6 b_1^4 b_3 + 231673187748594 b_4 b_6^2 c_3 b_5^4 b_1^2 + \\
& + 217757668575360 b_4 c_6 b_3^5 b_1^2 b_6 - 50336234013936 b_4^2 c_5 b_6^4 b_2 b_1^2 + \\
& + 207621730965198 b_4 c_5 b_3^4 b_6^2 b_1^2 - 115722301156560 b_4 c_6 b_5^5 b_1^2 b_6 + \\
& + 99683011011918 b_4 c_5 b_5^4 b_6^2 b_1^2 - 1069103732273840 b_4 b_6^3 c_6 b_5 b_1^4 - \\
& - 35030965320416 b_4 c_5 b_6^4 b_2 b_1^3 + 12085201288242 b_4 c_5 b_3^4 b_6^2 b_2^2 + \\
& + 7876581075486 b_4 c_3 b_6^2 b_3^4 b_2^2 + 2818083904242 b_4 c_5 b_6^2 b_5^4 b_2^2 + \\
& + 2015658517904 b_4 b_6^3 c_6 b_2^4 b_3 + 9794432230800 b_4 c_6 b_3^5 b_2^2 b_6 - \\
& - 1339376940960 b_4 c_6 b_5^5 b_2^2 b_6 + 32410230125 b_1 c_3 b_5^8 + 46493344625 b_4 c_5 b_3^8 + \\
& + 8944947375 b_4 c_3 b_5^8 + 112963533950904 b_6^4 c_3 b_4^5 + 12376966875 b_1 c_5 b_3^8 + \\
& + 93026254710376 c_3 b_6^4 b_1^5 + 114572859223992 c_5 b_6^4 b_1^5 + 1527137094600 b_1^2 c_6 b_3^7 - \\
& - 1343010281600 b_1^2 c_6 b_5^7 + 759383625 b_4 c_5 b_5^8 + 3937108325800 b_4^2 c_6 b_3^7 - \\
& - 691002468000 b_4^2 c_6 b_5^7 - 68631373200 b_2^2 c_6 b_5^7 - 34382432136 c_3 b_6^4 b_2^5 + \\
& + 91416929437288 b_6^4 c_5 b_4^5 + 221675773800 b_2^2 c_6 b_3^7 - 2889602625 b_2 c_3 b_3^8 + \\
& + 5867964375 b_2 c_3 b_5^8 - 13223913352 c_5 b_6^4 b_2^5 + 3619399875 b_1 c_5 b_5^8 + \\
& + 542416875 b_2 c_5 b_5^8 + 4191403125 b_1 c_3 b_3^8 - 8215150125 b_2 c_5 b_3^8 + \\
& + 797524821600 b_4 b_2 c_3 b_3^5 b_5 b_6 - 36362323295376 b_4^2 c_5 b_6^3 b_2 b_3 b_5 b_1 - \\
& - 88833960928752 b_4 b_1 b_6^2 c_3 b_3 b_5^3 b_2 - 14986592101104 b_4 b_1 b_6^3 c_3 b_2^2 b_5 b_3 - \\
& - 1100041733544 b_4 b_1 b_6^2 c_3 b_3^2 b_2 b_5^2 + 178757403214656 b_4^2 b_6^2 c_6 b_3^2 b_5 b_2 b_1 + \\
& + 303737502938112 b_4^2 b_6^2 c_6 b_5^2 b_3 b_2 b_1 - 40776079903728 b_4^2 b_6^3 c_3 b_2 b_5 b_3 b_1 - \\
& - 60108949598880 b_4 b_1 b_6 c_6 b_3^2 b_5^3 b_2 + 37850823866232 b_4 b_1 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2 b_5^2 - \\
& - 11435805012528 b_4 b_1 c_5 b_6^3 b_2^2 b_3 b_5 - 27422347847856 b_4 b_1 c_5 b_3^3 b_6^2 b_5 b_2 + \\
& + 1458463888752 b_4 b_1 c_3 b_3^3 b_6^2 b_5 b_2 + 15643264884000 b_4 b_1 c_6 b_3^3 b_2 b_6 b_5^2 - \\
& - 59953149192144 b_4 b_1 b_6^2 c_5 b_3 b_5^3 b_2 - 54705927471312 b_4 b_6^3 c_3 b_2 b_5 b_3 b_1^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 59119684079664 b_4 c_5 b_6^3 b_2 b_3 b_5 b_1^2 + 91043465699712 b_4 b_6^2 c_6 b_3^2 b_5 b_2 b_1^2 + \\
& + 99240960767520 b_4 b_1 c_6 b_5^4 b_3 b_2 b_6 + 37957122197280 b_4 b_1 b_6^2 c_6 b_5^2 b_3 b_2^2 + \\
& + 356968741034304 b_4 b_6^2 c_6 b_5^2 b_3 b_2 b_1^2 - 42161554724640 b_4 b_1 b_6^2 c_6 b_3^2 b_5 b_2^2 - \\
& - 25233436937280 b_4 b_1 c_6 b_3^4 b_2 b_5 b_6 - 68114410000 b_2 c_5 b_3^5 b_5^3 - \\
& - 1709990772500 b_4 b_2 c_3 b_3^6 b_6 - 4025977716200 b_4 b_2 c_5 b_3^6 b_6 - \\
& - 1125528071200 b_4 b_2 c_6 b_3^6 b_5 - 29238242976928 c_6 b_5 b_6^3 b_2^2 b_4^3 - \\
& - 515390200800768 b_6^2 c_6 b_3^2 b_5 b_4^4 - 1313044665749872 b_6^3 c_6 b_4^4 b_5 b_1 + \\
& + 694404408485944 c_5 b_3^2 b_6^3 b_4^3 b_1 - 9210253432288 b_4 b_6^2 c_6 b_2^3 b_3^3 - \\
& - 2787431173200 b_1 b_2 c_5 b_3^6 b_6 - 488136402000 b_2^2 c_5 b_5^5 b_3 b_6 - \\
& - 63062382708 b_6^3 c_3 b_2^4 b_5 b_3 - 1197165773700 b_2^2 c_3 b_5^5 b_3 b_6 - \\
& - 345463443000 b_2^2 c_3 b_3^4 b_5^2 b_6 + 458484465898472 c_3 b_3^2 b_6^3 b_1 b_4^3 + \\
& + 491228678256624 b_6^2 c_6 b_5^2 b_3 b_4^4 - 80478502144040 c_5 b_3^2 b_6^3 b_2 b_4^3 + \\
& + 1343634166407168 c_6 b_3^3 b_1 b_6^2 b_4^3 - 35030965320416 c_5 b_6^4 b_2 b_4^3 b_1 + \\
& + 34856360637800 c_5 b_6^3 b_2 b_5^2 b_4^3 - 59019239578944 c_6 b_5^3 b_6^2 b_2 b_4^3 - \\
& - 901167911319616 c_6 b_5^3 b_1 b_6^2 b_4^3 + 27094383088864 b_6^3 c_6 b_2 b_4^4 b_5 - \\
& - 137587758782072 c_5 b_3^3 b_6^2 b_5 b_4^3 + 63608643887880 b_6^3 c_3 b_5^2 b_2 b_4^3 - \\
& - 72787688792520 b_6^3 c_3 b_3^2 b_2 b_4^3 - 188814620800 b_2^2 c_5 b_5^3 b_3^3 b_6 + \\
& + 347835855900 b_2^2 c_3 b_3^5 b_5 b_6 + 556797974850 b_2^2 c_5 b_5^4 b_3^2 b_6 + \\
& + 18602775583050 b_4^2 c_5 b_3^4 b_5^2 b_6 - 49175423334960 b_4^2 c_6 b_3^5 b_2 b_6 - \\
& - 18363870320640 b_4^2 c_6 b_5^5 b_2 b_6 + 473400463996616 b_6^3 c_5 b_5^2 b_1 b_4^3 + \\
& + 1285215700815824 b_6^3 c_6 b_1 b_4^4 b_3 + 1056865227600 b_2^2 c_5 b_3^5 b_5 b_6 + \\
& + 1366458470000 b_1 b_2 c_6 b_3^3 b_5^4 + 593761318800 b_2^2 c_3 b_3^2 b_6 b_5^4 + \\
& + 2151470094800 b_1 b_2 c_6 b_5^6 b_3 - 2610255398400 b_1 b_2 c_6 b_3^6 b_5 - \\
& - 297152215360 c_6 b_3^4 b_2^3 b_5 b_6 + 2285195082448 b_1 b_6^3 c_6 b_2^4 b_3 + \\
& + 3424708916118 b_1 c_5 b_6^2 b_5^4 b_2^2 - 959579703300 b_1 b_2 c_3 b_3^6 b_6 - \\
& - 328532868144 b_6^2 c_6 b_3^2 b_5 b_2^4 + 34227115443924 b_1^2 b_6^3 c_5 b_3^2 b_2^2 - \\
& - 2440368375696 b_4^2 b_6^2 c_6 b_5^3 b_2^2 + 23040245358468 b_4^2 c_3 b_6^3 b_2^2 b_5^2 + \\
& + 509277146196 b_6^2 c_3 b_3^2 b_2^3 b_5^2 - 5430607153608 b_1 c_3 b_6^3 b_3^2 b_2^3 + \\
& + 1887225273120 b_1 b_6^2 c_6 b_5^3 b_2^3 - 2032923219600 b_1 b_2 c_6 b_3^5 b_5^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3093740919048 b_1 c_3 b_6^3 b_2^3 b_5^2 - 4064623160000 b_1 b_2 c_6 b_3^4 b_5^3 + \\
& + 217529187820560 c_6 b_3^3 b_5^2 b_4^3 b_6 + 794130282870808 c_3 b_6^3 b_5^2 b_4^3 b_1 - \\
& - 157911728896128 c_6 b_2 b_6^2 b_3^3 b_4^3 + 3225661146100 b_1 b_2 c_3 b_5^6 b_6 + \\
& + 152316754814484 c_5 b_3^2 b_6^2 b_5^2 b_4^3 - 196508490048 b_6^2 c_6 b_5^2 b_3 b_2^4 - \\
& - 80603041880648 c_5 b_5^3 b_3 b_6^2 b_4^3 - 14174116112000 b_4^2 c_5 b_5^3 b_3^3 b_6 - \\
& - 967683996136 c_5 b_3^3 b_6^2 b_5 b_2^3 + 53362951236432 b_1^2 b_6^2 c_6 b_2^2 b_3^3 + \\
& + 6466678165376 b_1^2 b_6^3 c_6 b_2^3 b_5 + 50862076619640 b_6^3 c_3 b_5^2 b_2 b_1^3 - \\
& - 45211798554000 b_1^2 c_6 b_3^5 b_2 b_6 - 7043319650432 b_1^2 b_6^3 c_6 b_2^3 b_3 - \\
& - 15151603676064 c_6 b_5 b_6^3 b_2^2 b_1^3 - 88793404774360 c_5 b_3^2 b_6^3 b_2 b_1^3 + \\
& + 3375478860000 b_1^2 c_5 b_3^5 b_5 b_6 - 2229201143000 b_1^2 c_3 b_3^3 b_5^3 b_6 + \\
& + 24132069226504 c_3 b_3 b_6^2 b_5^3 b_1^3 + 316741174108272 b_6^2 c_6 b_5^2 b_3 b_1^4 + \\
& + 27094383088864 b_6^3 c_6 b_1^4 b_5 b_2 + 297040824696 b_6^2 c_3 b_3^3 b_5 b_1^3 - \\
& - 178626346768960 c_6 b_2 b_6^2 b_3^3 b_1^3 - 124522869900 b_1^2 c_3 b_5^5 b_3 b_6 + \\
& + 3740609310600 b_1^2 c_3 b_3^4 b_5^2 b_6 + 14667979557036 b_1^2 b_6^3 c_5 b_5^2 b_2^2 + \\
& + 2478488303200 b_1^2 c_5 b_5^3 b_3^3 b_6 + 20453936141028 b_1^2 c_3 b_6^3 b_2^2 b_5^2 - \\
& - 1654534003200 b_1^2 c_5 b_5^5 b_3 b_6 + 38919038449218 b_1^2 c_3 b_6^2 b_5^4 b_2 - \\
& - 44334323191014 b_1^2 c_5 b_3^4 b_6^2 b_2 - 6532536201256 b_1 b_6^3 c_5 b_3^2 b_2^3 + \\
& + 9632312023200 b_1 c_6 b_3^5 b_2^2 b_6 + 1110614310407004 b_4^2 b_6^3 c_3 b_5^2 b_1^2 + \\
& + 572974399076196 b_4^2 b_6^3 c_3 b_3^2 b_1^2 + 155513235338960 c_6 b_3^3 b_5^2 b_1^3 b_6 - \\
& - 520140036240 b_1 c_6 b_5^5 b_2^2 b_6 + 2671278302056 b_1 b_6^3 c_5 b_5^2 b_2^3 + \\
& + 7633329128874 b_1 c_3 b_6^2 b_5^4 b_2^2 + 11256586176918 b_1 c_5 b_3^4 b_6^2 b_2^2 - \\
& - 3405821718000 b_4^2 c_5 b_5^5 b_3 b_6 - 212029023442340 b_6^3 c_5 b_5 b_3 b_4^4 - \\
& - 113460810438776 c_3 b_3^3 b_5 b_6^2 b_4^3 + 55342493639440 b_6 c_6 b_3^4 b_5 b_1^3 - \\
& - 9952971392480 b_1 b_6^2 c_6 b_2^3 b_3^3 + 389604322576 b_1 b_6^3 c_6 b_2^4 b_5 + \\
& + 6470966415114 b_1 c_3 b_6^2 b_3^4 b_2^2 + 9024099936000 b_1^2 c_3 b_3^2 b_6 b_5^4 + \\
& + 22243034726172 b_1^2 c_3 b_6^3 b_3^2 b_2^2 + 2050658292336 b_1^2 b_6^2 c_6 b_5^3 b_2^2 - \\
& - 50047915113248 b_6^3 c_6 b_3 b_1^4 b_2 + 673287629140984 b_4 c_5 b_6^3 b_1^3 b_3^2 - \\
& - 816404252302400 b_4 c_6 b_5^3 b_1^3 b_6^2 + 184754970222732 c_3 b_3^2 b_6^2 b_5^2 b_4^3 + \\
& + 2440781823924896 b_6^3 c_6 b_1^2 b_4^3 b_3 - 50047915113248 b_6^3 c_6 b_4^4 b_3 b_2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2215212483931744 b_4^2 b_6^3 c_6 b_5 b_1^3 + 1944632289728544 b_4^2 b_6^2 c_6 b_3^3 b_1^2 + \\
& + 6466678165376 b_4^2 b_6^3 c_6 b_2^3 b_5 + 48846110670864 b_4^2 b_6^4 c_3 b_2^2 b_1 + \\
& + 33165197891124 b_4^2 b_6^3 c_5 b_3^2 b_2^2 - 138075155948320 b_6 c_6 b_3^4 b_5 b_4^3 + \\
& + 51051342059088 b_4^2 b_6^2 c_6 b_2^2 b_3^3 + 1340898445616640 b_4 b_6^2 c_6 b_3^3 b_1^3 + \\
& + 748458435671128 b_4 b_6^3 c_3 b_5^2 b_1^3 + 352557810266792 b_4 b_6^3 c_3 b_3^2 b_1^3 - \\
& - 18881805558200 b_4^2 c_3 b_3^3 b_5^3 b_6 + 9464596393950 b_4^2 c_5 b_5^4 b_3^2 b_6 - \\
& - 9995826707100 b_4^2 c_3 b_3^5 b_5 b_6 - 192202985049140 c_3 b_6^3 b_4^4 b_5 b_3 + \\
& + 54636055256416 c_6 b_6^3 b_2^2 b_3 b_4^3 - 38972992715488 c_3 b_6^4 b_2 b_4^3 b_1 + \\
& + 977368741707852 b_4^2 c_5 b_6^3 b_1^2 b_3^2 - 1266389576969088 b_4^2 c_6 b_5^3 b_1^2 b_6^2 + \\
& + 100773681329200 b_6 c_6 b_5^4 b_3 b_4^3 - 119563199257224 c_3 b_3 b_6^2 b_5^3 b_4^3 - \\
& - 2039095219200 b_1 b_2 c_6 b_3^2 b_5^5 + 720715918000 c_6 b_3^3 b_2^3 b_6 b_5^2 - \\
& - 417843057528 c_3 b_3^3 b_6^2 b_5 b_2^3 + 32388107804 c_5 b_6^3 b_2^4 b_3 b_5 - \\
& - 6195041489624 b_4 b_6^3 c_5 b_3^2 b_2^3 + 39257198201272 c_5 b_3^3 b_6^2 b_5 b_1^3 + \\
& + 35270507381980 c_5 b_3 b_6^3 b_1^4 b_5 + 11333992331250 b_1^2 c_5 b_3^4 b_5^2 b_6 - \\
& - 13198673985120 b_1^2 c_6 b_5^5 b_2 b_6 + 909674202400 b_1 b_2 c_5 b_5^6 b_6 + \\
& + 8604615391350 b_1^2 c_5 b_5^4 b_3^2 b_6 + 67472739867360 b_6 c_6 b_5^4 b_3 b_1^3 - \\
& - 60041121524280 b_6^3 c_3 b_3^2 b_2 b_1^3 + 5120883208 c_5 b_5^3 b_3 b_6^2 b_1^3 + \\
& + 107362871104476 c_5 b_3^2 b_6^2 b_5^2 b_1^3 - 26596833515520 c_6 b_5^3 b_6^2 b_2 b_1^3 + \\
& + 43171263268120 c_5 b_6^3 b_2 b_5^2 b_1^3 - 836804985900 b_1^2 c_3 b_3^5 b_5 b_6 + \\
& + 6204662684640 b_1 b_6^2 c_6 b_5^2 b_3 b_2^3 + 5709081608640 b_1 c_6 b_3^4 b_2^2 b_5 b_6 - \\
& - 2598195561000 b_1 b_2 c_5 b_5^5 b_3 b_6 - 1738221568044 b_1 b_6^2 c_3 b_3^2 b_2^2 b_5^2 - \\
& - 1616920400784 b_1 c_5 b_6^3 b_2^3 b_3 b_5 - 1096296646068 b_1 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2^2 b_5^2 - \\
& - 4719167346400 b_1 b_2 c_3 b_3^3 b_5^3 b_6 - 5096749470800 b_1 b_2 c_5 b_5^3 b_3^3 b_6 - \\
& - 38171648332392 b_1^2 c_5 b_3^3 b_6^2 b_5 b_2 - 631312578000 b_1 b_2 c_3 b_3^5 b_5 b_6 - \\
& - 2545074358800 b_1 b_6 c_6 b_3^2 b_5^3 b_2^2 + 7950628244664 b_1 c_5 b_3^3 b_6^2 b_5 b_2^2 + \\
& + 5453867975760 b_1 c_6 b_5^4 b_3 b_2^2 b_6 - 5602941661200 b_1 b_2 c_3 b_5^5 b_3 b_6 + \\
& + 317091281100 b_1 b_2 c_3 b_3^4 b_5^2 b_6 + 1966585556100 b_1 b_2 c_3 b_3^2 b_6 b_5^4 - \\
& - 3288322239864 b_1 b_6^2 c_5 b_3 b_5^3 b_2^2 - 10017510914640 b_1 c_6 b_3^3 b_2^2 b_6 b_5^2 + \\
& + 3926114945592 b_1 c_3 b_3^3 b_6^2 b_5 b_2^2 + 30561918088884 b_4^2 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2 b_5^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 46989801402960 b_4^2 b_6 c_6 b_3^2 b_5^3 b_2 + 6285691852248 b_4^2 c_5 b_3^3 b_6^2 b_5 b_2 + \\
& + 56208049285440 b_4^2 c_6 b_5^4 b_3 b_2 b_6 - 13275600747708 b_1^2 b_6^2 c_3 b_3^2 b_2 b_5^2 + \\
& + 1665938526300 b_4 b_2 c_3 b_3^4 b_5^2 b_6 - 25928502101840 b_6^3 c_3 b_2 b_5 b_3 b_1^3 + \\
& + 147977081797120 b_6^2 c_6 b_5^2 b_3 b_2 b_1^3 + 16315292358300 b_4 b_1 c_5 b_5^4 b_3^2 b_6 + \\
& + 152957833450968 b_4 b_6^3 c_3 b_5^2 b_2 b_1^2 + 82510819693952 b_4 b_6^3 c_6 b_1^3 b_5 b_2 + \\
& + 358650976080 b_4 c_6 b_3^4 b_2^2 b_5 b_6 + 2016597350112 b_4 b_6^2 c_6 b_3^2 b_5 b_2^3 + \\
& + 23282064070200 b_4 b_1 c_3 b_3^2 b_6 b_5^4 - 13340514616832 b_4 b_1 b_6^3 c_6 b_2^3 b_3 + \\
& + 15713797078200 b_4 b_1 c_3 b_3^4 b_5^2 b_6 - 7380875080800 b_4 b_2 c_3 b_5^5 b_3 b_6 - \\
& - 6666090272400 b_4 b_1 c_5 b_5^5 b_3 b_6 - 2217754899360 b_4 b_1 b_6^2 c_6 b_5^3 b_2^2 + \\
& + 41428243107576 b_4 b_1 c_3 b_6^3 b_2^2 b_5^2 + 45947253932424 b_4 b_1 c_3 b_6^3 b_3^2 b_2^2 + \\
& + 23789856920232 b_4 b_1 b_6^3 c_5 b_5^2 b_2^2 - 3576087013200 b_4 b_1 c_5 b_3^5 b_5 b_6 - \\
& - 31548104271840 b_4 b_1 c_6 b_5^5 b_2 b_6 + 22680568790100 b_4 b_1 c_5 b_3^4 b_5^2 b_6 + \\
& + 76544001997164 b_4 b_1 c_3 b_6^2 b_5^4 b_2 - 90153692180292 b_4 b_1 c_5 b_3^4 b_6^2 b_2 - \\
& - 15354658420400 b_4 b_1 c_3 b_3^3 b_5^3 b_6 - 11757264178400 b_4 b_1 c_5 b_5^3 b_3^3 b_6 + \\
& + 32392861174908 b_4 b_1 c_5 b_6^2 b_5^4 b_2 - 10490204127000 b_4 b_1 c_3 b_5^5 b_3 b_6 - \\
& - 2207221278600 b_4 b_2 c_5 b_3^5 b_5 b_6 - 46002551358036 b_4 b_1 c_3 b_6^2 b_3^4 b_2 - \\
& - 401342905054832 c_3 b_6^3 b_4^3 b_5 b_3 b_1 - 578957451692464 b_6^3 c_5 b_5 b_3 b_4^3 b_1 - \\
& - 172018381851264 b_4 b_6^3 c_6 b_3 b_1^3 b_2 + 1520859540206976 b_6^2 c_6 b_5^2 b_3 b_1 b_4^3 - \\
& - 1415798376174272 b_6^2 c_6 b_3^2 b_5 b_1 b_4^3 - 8030208105288 b_4 b_6^2 c_3 b_3 b_5^3 b_2^2 + \\
& + 101209720878240 b_4 b_1 b_6^2 c_6 b_2^2 b_3^3 - 68116362172968 b_4 b_6^2 c_3 b_3^3 b_5 b_1^2 + \\
& + 22325598260368 b_4 c_3 b_6^3 b_1^3 b_3 b_5 + 11855210072576 b_4 b_1 b_6^3 c_6 b_2^3 b_5 + \\
& + 63585640119768 b_4 b_1 b_6^3 c_5 b_3^2 b_2^2 - 7400200867800 b_4 b_1 c_3 b_3^5 b_5 b_6 - \\
& - 8339366685840 b_4 c_6 b_3^3 b_2^2 b_6 b_5^2 + 39547493448 b_4 c_3 b_3^3 b_6^2 b_5 b_2^2 + \\
& + 94697003601792 b_6^2 c_6 b_3^2 b_5 b_2 b_4^3 - 9298696841200 b_6^3 c_3 b_2 b_5 b_3 b_4^3 + \\
& + 273761365958652 b_4 c_5 b_3^2 b_6^2 b_5^2 b_1^2 - 46940866722216 b_4 c_5 b_3^3 b_6^2 b_5 b_1^2 - \\
& - 155288948377264 b_4 c_5 b_3 b_6^3 b_1^3 b_5 - 4005694806216 b_4 b_6^2 c_5 b_3 b_5^3 b_2^2 - \\
& - 932976962736 b_4 c_5 b_6^3 b_2^3 b_3 b_5 - 1578125960892 b_4 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2^2 b_5^2 - \\
& - 60013461878232 b_4 c_3 b_3 b_6^2 b_5^3 b_1^2 - 101527367591064 b_4 c_5 b_5^3 b_3 b_6^2 b_1^2 + \\
& + 82510819693952 b_6^3 c_6 b_1 b_5 b_2 b_4^3 + 85833228178624 b_6^2 c_6 b_5^2 b_3 b_2 b_4^3 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 4867032203280 \, c_5 b_6^3 b_2 b_3 b_5 b_4^3 + 524975040240 \, b_4 b_6 c_6 b_3^2 b_5^3 b_2^2 + \\
 & + 2487994292616 \, b_4 c_5 b_3^3 b_6^2 b_5 b_2^2 + 3642483607200 \, b_4 c_6 b_5^4 b_3 b_2^2 b_6 - \\
 & - 475352536864128 \, b_4 c_6 b_2 b_6^2 b_3^3 b_1^2 - 172018381851264 \, b_6^3 c_6 b_3 b_1 b_2 b_4^3 + \\
 & + 209125338191280 \, b_4 b_6 c_6 b_5^4 b_3 b_1^2 + 1157304218033280 \, b_4 b_6^2 c_6 b_5^2 b_3 b_1^3 + \\
 & + 401779315853040 \, b_4 c_6 b_3^3 b_5^2 b_1^2 b_6 - 15630824841600 \, b_4 b_6 c_6 b_3^4 b_5 b_1^2 + \\
 & + 171493317771168 \, b_4 c_6 b_6^3 b_2^2 b_3 b_1^2 - 62658284909664 \, b_4 c_6 b_5 b_6^3 b_2^2 b_1^2 - \\
 & - 171147503226648 \, b_4 b_6^3 c_3 b_3^2 b_2 b_1^2 + 110513773965816 \, b_4 c_5 b_6^3 b_2 b_5^2 b_1^2 + \\
 & + 244126136477760 \, b_4^2 b_6 c_6 b_5^4 b_3 b_1 - 231935166887736 \, b_4 c_5 b_3^2 b_6^3 b_2 b_1^2 + \\
 & + 250099389264036 \, b_4 c_3 b_3^2 b_6^2 b_5^2 b_1^2 - 119761807702464 \, b_4 c_6 b_5^3 b_6^2 b_2 b_1^2 - \\
 & - 307715531129280 \, b_4 b_6^2 c_6 b_3^2 b_5 b_1^3 - 139087141929360 \, b_4 b_6 c_6 b_5^3 b_3^2 b_1^2 + \\
 & + 468174052718640 \, b_4^2 c_6 b_3^3 b_5^2 b_1 b_6 - 203046280126320 \, b_4^2 b_6 c_6 b_3^4 b_5 b_1 + \\
 & + 13323358627332 \, b_4^2 b_6^2 c_3 b_3^2 b_2 b_5^2 - 37084466445072 \, b_4^2 b_6^2 c_6 b_3^2 b_5 b_2^2 + \\
 & + 18758308072656 \, b_4^2 b_6^2 c_6 b_5^2 b_3 b_2^2 - 457608790832064 \, b_4^2 c_6 b_2 b_6^2 b_3^3 b_1 - \\
 & - 248391413148216 \, b_4^2 c_3 b_6^3 b_1^2 b_3 b_5 - 17295808811112 \, b_4^2 b_6^3 c_3 b_2^2 b_5 b_3 - \\
 & - 167513688923352 \, b_4^2 b_6^2 c_3 b_3^3 b_5 b_1 - 193349228801448 \, b_4^2 c_3 b_3 b_6^2 b_5^3 b_1 - \\
 & - 209027594636184 \, b_4^2 c_5 b_3^3 b_6^2 b_5 b_1 - 245433182844096 \, b_4^2 b_6^3 c_6 b_3 b_1^2 b_2 - \\
 & - 551569758898392 \, b_4^2 c_5 b_3 b_6^3 b_1^2 b_5 + 16590338160240 \, b_4^2 c_6 b_3^4 b_2 b_5 b_6 - \\
 & - 172173733350696 \, b_4^2 c_5 b_5^3 b_3 b_6^2 b_1 + 322421184871188 \, b_4^2 c_5 b_3^2 b_6^2 b_5^2 b_1 - \\
 & - 30360166739760 \, c_5 b_6^3 b_2 b_3 b_5 b_1^3 - 5736769039032 \, b_1 b_6^2 c_3 b_3 b_5^3 b_2^2 - \\
 & - 2570214588480 \, b_6^2 c_6 b_3^2 b_5 b_2 b_1^3 + 22403386541904 \, b_1^2 b_6^2 c_6 b_5^2 b_3 b_2^2 - \\
 & - 45785224283760 \, b_1^2 c_6 b_3^4 b_2 b_5 b_6 - 3249043463568 \, b_1^2 b_6^2 c_6 b_3^2 b_5 b_2^2 - \\
 & - 148999786874112 \, b_4^2 c_6 b_5^3 b_6^2 b_2 b_1 + 3952959139896 \, b_1^2 c_5 b_6^3 b_2^2 b_3 b_5 + \\
 & + 3962958713844 \, b_1^2 c_5 b_3^2 b_6^2 b_2 b_5^2 + 436830772248 \, b_1^2 b_6^3 c_3 b_2^2 b_5 b_3 - \\
 & - 30864455809224 \, b_1^2 b_6^2 c_3 b_3 b_5^3 b_2 - 20584917726168 \, b_1^2 b_6^2 c_5 b_3 b_5^3 b_2 - \\
 & - 5514482079600 \, b_1^2 c_6 b_3^3 b_2 b_6 b_5^2 - 13231984907256 \, b_1^2 c_3 b_3^3 b_6^2 b_5 b_2 - \\
 & - 312422632494480 \, b_4^2 b_6 c_6 b_5^3 b_3^2 b_1 - 1301877069033216 \, b_4^2 b_6^2 c_6 b_3^2 b_5 b_1^2 - \\
 & - 10440220636560 \, b_1^2 b_6 c_6 b_3^2 b_5^3 b_2 + 160716253956768 \, b_4^2 c_6 b_6^3 b_2^2 b_3 b_1 + \\
 & + 8641082408400 \, b_4^2 c_6 b_3^3 b_2 b_6 b_5^2 + 346083161565804 \, b_4^2 c_3 b_3^2 b_6^2 b_5^2 b_1 + \\
 & + 1886156331385248 \, b_4^2 b_6^2 c_6 b_5^2 b_3 b_1^2 + 103548850182024 \, b_4^2 c_5 b_6^3 b_2 b_5^2 b_1 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 40645583326488 b_4^2 b_6^2 c_5 b_3 b_5^3 b_2 - 65585246751624 b_4^2 b_6^2 c_3 b_3 b_5^3 b_2 + \\
& + 164336513843112 b_4^2 b_6^3 c_3 b_5^2 b_2 b_1 - 13779680443464 b_4^2 c_5 b_6^3 b_2^2 b_3 b_5 + \\
& + 16565229935304 b_4^2 c_3 b_3^3 b_6^2 b_5 b_2 - 75252674842464 b_4^2 c_6 b_5 b_6^3 b_2^2 b_1 - \\
& - 224970243103944 b_4^2 c_5 b_3^2 b_6^3 b_2 b_1 + 112989165726528 b_4^2 b_6^3 c_6 b_1^2 b_5 b_2 + \\
& + 50545489868640 b_1^2 c_6 b_5^4 b_3 b_2 b_6 - 182526183618792 b_4^2 b_6^3 c_3 b_3^2 b_2 b_1 - \\
& - 205922863350320 b_6^3 c_6 b_5 b_1^5 + 41641709112254 c_5 b_5^4 b_6^2 b_1^3 - \\
& - 39724309278400 c_6 b_5^5 b_1^3 b_6 + 1031375101200 b_1^2 c_3 b_3^6 b_6 - \\
& - 11577964893352 c_3 b_6^4 b_2 b_1^4 + 135289570000 b_2^2 c_6 b_3^4 b_5^3 - \\
& - 2100670946400 b_4 b_1 c_6 b_5^7 + 64412150994174 c_5 b_3^4 b_6^2 b_1^3 + \\
& + 64045940687920 c_6 b_3^5 b_1^3 b_6 + 87290215227442 b_6^2 c_3 b_5^4 b_1^3 + \\
& + 369934841139312 c_6 b_3^3 b_4^4 b_6^2 + 49699210668998 c_3 b_3^4 b_6^2 b_4^3 + \\
& + 93870087837600 c_6 b_3^5 b_4^3 b_6 + 845152520945200 b_4^2 c_5 b_6^4 b_1^3 + \\
& + 2526000165000 b_4^2 c_6 b_5^6 b_3 + 9859416203000 b_4^2 c_6 b_3^3 b_5^4 + \\
& + 18824497761680 b_6^4 c_3 b_2^2 b_4^3 + 114939779500 b_4 c_5 b_3^6 b_5^2 - \\
& - 5838378000 b_2 c_3 b_3^7 b_5 + 27581076250 b_2 c_5 b_5^4 b_3^4 - 42814772000 b_2 c_5 b_5^5 b_3^3 + \\
& + 18711738500 b_2 c_5 b_5^6 b_3^2 - 11577964893352 b_6^4 c_3 b_2 b_4^4 + 5277258027600 b_4 b_1 c_6 b_3^7 + \\
& + 471915101589256 b_4 c_5 b_6^4 b_1^4 + 419457748066968 b_4 c_3 b_6^4 b_1^4 + \\
& + 153651841711030 b_6^3 c_3 b_3^2 b_4^4 - 9968639620264 c_5 b_6^4 b_2 b_1^4 + \\
& + 173868621082 c_3 b_6^3 b_2^4 b_5^2 + 414185092048 b_6^2 c_6 b_5^3 b_2^4 + \\
& + 543751440518 c_3 b_6^3 b_3^2 b_2^4 + 289914231132752 b_6^3 c_6 b_4^5 b_3 + \\
& + 202501655020210 b_6^3 c_5 b_3^2 b_4^4 + 95347716784186 c_5 b_3^4 b_6^2 b_4^3 - \\
& - 772440472960 c_6 b_3^5 b_2^3 b_6 + 561327081666 b_6^3 c_5 b_3^2 b_2^4 + 134768282272 b_6^3 c_6 b_2^5 b_5 + \\
& + 702966372394 c_3 b_6^2 b_5^4 b_2^3 + 156292979934 b_6^3 c_5 b_5^2 b_2^4 + 107326274250 b_2^2 c_5 b_5^6 b_6 \\
& - 457444806000 b_2^2 c_6 b_3^2 b_5^5 - 93265585504 b_6^3 c_6 b_2^5 b_3 + 278615013378 c_5 b_6^2 b_5^4 b_2^3 - \\
& - 842035257206 c_3 b_6^2 b_3^4 b_2^3 - 1266386616222 c_5 b_3^4 b_6^2 b_2^3 + \\
& + 844090607795760 b_6^4 c_3 b_4^3 b_1^2 + 48534804500 b_1 c_5 b_5^6 b_3^2 + \\
& + 509901487550 b_2^2 c_5 b_3^6 b_6 + 217773223200 b_2^2 c_3 b_3^6 b_6 - 119984303400 b_2^2 c_6 b_3^5 b_5^2 + \\
& + 59205623750 b_1 c_3 b_3^4 b_5^4 + 135032007760 c_6 b_5^5 b_2^3 b_6 + 524103002800 b_2^2 c_6 b_3^6 b_5 + \\
& + 66049938500 b_1 c_5 b_3^6 b_5^2 + 19684801500 b_1 c_3 b_3^6 b_5^2 + 9730630000 b_1 c_5 b_3^5 b_5^3 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 31138016000 b_1 b_3 c_3 b_5^7 - 15569008000 b_1 c_5 b_5^5 b_3^3 + 599598232896 b_6^2 c_6 b_2^4 b_3^3 - \\
& - 34688381000 b_2^2 c_6 b_3^3 b_5^4 + 306971696200 b_2^2 c_6 b_5^6 b_3 + 98588376250 b_1 c_5 b_5^4 b_3^4) \\
v_{6,1} &= \frac{1}{16077153731392000000} (36857059650010860 b_4^2 b_6 c_3 b_3^8 + \\
& + 613367586126750 b_4 c_3 b_3^6 b_5^4 - 1174965142317944848 b_2 b_6^5 c_5 b_1^5 - \dots) \\
v_{7,1} &= \frac{1}{105170308849273907200000000} (342098863404346477973907520 b_1^7 b_3 b_6^5 c_6 - \\
& - 401589403686179134991376960 b_1^7 b_5 b_6^5 c_6 + \dots)
\end{aligned}$$

Coeficientes focais de primeira ordem em ϵ do Teorema

5.11

No 1º caso vamos apresentar as expressões dos coeficientes focais de primeira ordem em ϵ , $v_{1,1}$, $v_{2,1}$, $v_{3,1}$, $v_{4,1}$, $v_{5,1}$, $v_{6,1}$, $v_{7,1}$, $v_{8,1}$, $v_{9,1}$, $v_{10,1}$ e $v_{11,1}$ do sistema (5.19) com a condição $b_1 = 0$.

1º Caso O sistema (5.19) com a condição $b_1 = 0$.

$$\begin{aligned}
v_{1,1} &= a_1(c_1 + c_4) \\
v_{2,1} &= \frac{1}{40} a_1 b_2^2 (9c_1 - 3c_2 + 11c_4) \\
v_{3,1} &= \frac{1}{80} a_1 b_2^4 (2c_1 - c_2 + 4c_4) \\
v_{4,1} &= \frac{1}{21760} a_1 b_2^6 (35c_1 - 21c_2 + 101c_4) \\
v_{5,1} &= \frac{7}{2828800} a_1 b_2^8 (27c_1 - 18c_2 + 103c_4) \\
v_{6,1} &= \frac{21}{837324800} a_1 b_2^{10} (77c_1 - 55c_2 + 367c_4) \\
v_{7,1} &= \frac{33}{41866240000} a_1 b_2^{12} (52c_1 - 39c_2 + 298c_4) \\
v_{8,1} &= \frac{33}{1339719680000} a_1 b_2^{14} (27c_1 - 21c_2 + 181c_4) \\
v_{9,1} &= \frac{11}{109857013760000} a_1 b_2^{16} (85c_1 - 68c_2 + 653c_4) \\
v_{10,1} &= \frac{11}{26107196211200000} a_1 b_2^{18} (209c_1 - 171c_2 + 1811c_4) \\
v_{11,1} &= \frac{19}{3185077937766400000} a_1 b_2^{20} (126c_1 - 105c_2 + 1216c_4)
\end{aligned}$$