



IFT/TB-M-72

15

JORGE RODRIGO REYES MARTINEZ

GEOMETRIA QUÂNTICA DOS FÉRMIONS E BÓSONS QUIRAIS A DUAS

DIMENSÕES NUM CAMPO GRAVITACIONAL EXTERNO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA
NO INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA



ORIENTADOR: ABRAHAM H. ZIMERMAN

2300000003454

SÃO PAULO

SETEMBRO DE 1988

Agradecimentos

É um prazer poder agradecer aqui à orientação do Prof. Abraham Hirsz Zimmerman, funcionários, estudantes e professores do I.F.T., ao apoio financeiro da CAPES e à datilografia de Rosanne Grinberg que, foram fundamentais na elaboração, incentivo, apoio e conclusão desta tese.

Resumo

Neste trabalho calcula-se a anomalia gravitacional dos bósons quirais a duas dimensões interagindo com um campo de fundo utilizando métodos geométricos ligados à aparição de uma fase geométrica na variação adiabática do campo de fundo.

Abstract

In this work we calculate the anomaly of chiral bosons in two dimensions interacting with an external background using geometrical methods related to the appearance of a geometrical phase in the adiabatic variation of the external background.

GEOMETRIA QUÂNTICA DOS FÉRMIONS E BÓSONS QUIRAIS A DUAS DIMEN

SÕES NUM CAMPO GRAVITACIONAL EXTERNO

Jorge Rodrigo Reyes Martinez

Orientador: Abraham Hirsz Zimmerman

Í N D I C E

	Página
INTRODUÇÃO.....	1
Capítulo I	
<u>A fase de Berry na Mecânica Quântica.....</u>	5
1) Aproximação de Born-Oppenheimer.....	6
2) A Fase de Berry.....	8
3) Verificação Experimental da fase de Berry.....	15
4) A Fase de Hannay.....	20
Capítulo II	
<u>As Hamiltonianas para um bóson e férmion quirais ereais .</u>	24
1) A Hamiltoniana de um férmion de Majorana-Weyl no es- paço a duas dimensões.....	24
2) A Hamiltoniana de bósons quirais no espaço a duas di- mensões.....	28

Capítulo III

Geometria Quântica de uma teoria de Campos Conforme.....37

1) Caso Fermiônico no Contínuo.....37

2) Caso Fermiônico no Círculo.....48

2.1) Férmions de Neveu-Schwarz.....48

2.2) Férmions de Ramond.....54

3) Caso Bosônico no Contínuo.....58

4) Caso Bosônico no Círculo.....65

4.1) Condições de Contorno Antiperiódicas.....65

4.2) Condições de Contorno Periódicas.....69

Capítulo IV

A Fase de Berry e a Anomalia Gravitacional.....72

1) Significado Dinâmico da Fase de Berry.....72

2) A Fase de Berry na Teoria Quântica de Campos.....76

Capítulo V

Álgebras de Virasoro.....82

1) Caso Fermiônico.....82

2) Caso Bosônico.....90

3) Conclusão.....96

Apêndices

A) Alguns Resultados de geometria Riemanniana.....97

B) Sobre a Ação Efetiva.....102

C) A ação Efetiva de um férmion de Majorana-Weyl num campo gravitacional externo.....107

D) A ação efetiva de um bóson quirial real num campo gravitacional externo.....110

Referências.....112

Introdução

Frequentemente a quantização de um sistema viola as simetrias presentes classicamente. Se não existe um processo de quantização que reestabeleça estas simetrias a teoria possui uma anomalia nas correspondentes simetrias.

Uma consequência das anomalias é que elas modificam os comutadores da densidade de carga que geram as simetrias locais da teoria [14,17]:

$$[p_\alpha(x), p_\beta(y)] - \int_{\alpha\beta}^r p_r(x) \delta(x-y) = A_{\alpha\beta}(x, y) \quad (1)$$

Se a quantização satisfaz a identidade de Jacobi nos comutadores obtemos uma condição de consistência para a parte anômala da eq. (1)

$$[p_\alpha(x), A_{\beta\gamma}(y, z)] + \int_{\beta\gamma}^\epsilon A_{\alpha\epsilon}(x, y) \delta(y-z) + \text{permutações cicl.} = 0 \quad (2)$$

Isto se os $\int_{\alpha\beta}^r$ também satisfazem a apropriada identidade de Jacobi.

Bowick e Rajeev [13] enfatizaram as semelhanças das eqs. (1) e (2) com as equações que definem a curvatura em geometria diferencial.

Se introduzirmos um campo vetorial X^α que gera transformações infinitesimais de "gauge" e ∇_X como derivada covariante atuando nas funções de onda então

$$F(X^\alpha, X^\beta)\psi = \{ [\nabla_{X^\alpha}, \nabla_{X^\beta}] - \nabla_{[X^\alpha, X^\beta]} \} \psi \quad (3)$$

determina a curvatura. Supomos que os vetores base não-comutam

de forma que o segundo termo (essencial na definição geométrica da curvatura) é diferente de zero e $[,]$ denota o parênteses de Lie

$$[X^\alpha, X^\beta] = f^{\alpha\beta}_\gamma X^\gamma \quad (4)$$

Bowick e Rajeev prosseguem na sua análise introduzindo o espaço de todas as estruturas complexas \mathcal{M} sobre o espaço de fase clássico para relacionar as anomalias perturbativas com a curvatura no fibrado vetorial hermítico das funções de onda quânticas definido sobre \mathcal{M} . Contudo a fase de Berry descoberta na evolução adiabática de um sistema quântico permite a relação de curvatura com o de anomalia de uma forma física.

Consideremos por exemplo uma teoria de campos de gauge quirais (femions de Weyl num campo potencial externo). É sabido que esta teoria possui uma anomalia de gauge. De fato se fizermos uma variação adiabática dos potenciais de gauge externos no vácuo da teoria introduz-se após um circuito completo uma fase que pode ser relacionada com o termo de Schwinger (o lado direito da equação (1)) da álgebra dos geradores de transformação de gauge [14]. Em termos algébricos uma representação projetiva dos elementos do grupo de gauge. A ligação desta fase com uma curvatura é imediata. A expressão da fase de Berry introduz naturalmente uma integral de linha de uma conexão e pelo teorema de Stokes a integral de linha sob um circuito fechado é equivalente a integral do rotacional da conexão sobre uma superfície limitada por esta curva.

O espaço natural desta curvatura é o fibrado. Matematicamente o fibrado é uma estrutura localmente composta do produto de uma vizinhança de um espaço chamado base vezes um

espaço onde atua um grupo de Lie. Não precisamos aqui dos conceitos de geometria diferencial mas devemos dizer que o espaço de base é no caso da fase de Berry o espaço dos parâmetros externos e que a fibra é o espaço vetorial de Hilbert das funções de onda. A introdução de uma conexão permite o transporte de vetores de um ponto a outro do espaço de base e este transporte define o transporte paralelo de um vetor. Se um vetor depois de realizar um trajeto fechado não retornar à mesma posição dizemos que o fibrado é não trivial ou possui uma curvatura.

No caso de teoria de campos escolhemos por simplicidade o vetor a ser transportado como vácuo da teoria. A construção é então feita seguindo os seguintes passos:

- 1º) resolvemos a teoria com um campo de fundo clássico para vários valores deste campo.
- 2º) Calculamos a conexão impondo certas condições geométricas
- 3º) Calculamos a curvatura (anomalia) da teoria.

Este procedimento foi aplicado por M.N.Sonielevici e G.W. Senenoff no cálculo da anomalia gravitacional de uma teoria de fermions de Weyl-Majorana na presença de um campo gravitacional externo.

O Segundo passo é realizado mediante a imposição que o fermion seja covariantemente constante e que a curvatura do operador de transporte paralelo que surge naturalmente como a derivada covariante seja nula.

A curvatura surge aqui quando se projeta este operador de transporte paralelo sobre o vácuo sucessivamente para diversos pontos do espaço das métricas. Este procedimento permite também fazer a ligação desta projeção com a fase de Berry.

Neste trabalho fazemos uma revisão deste cálculo para os fermions como foi feito na Ref. [15] e estendemos este cálculo para bosons quirais.

Verificamos também como a curvatura determina o termo de Schwinger da álgebra de difeomorfismos (transformações conformes dos campos da teoria).

A seguir fazemos um resumo deste trabalho.

No Capítulo I fazemos uma revisão da Fase de Berry na mecânica quântica, seguindo o caminho histórico de sua descoberta e posterior confirmação experimental.

No Capítulo II discutimos classicamente as simetrias das lagrangeanas dos fermions e bósons quirais num campo gravitacional externo, obtendo as respectivas Hamiltonianas.

No Capítulo III quantizaremos os fermions e bósons da teoria pelo esquema geométrico já mencionado calculando a curvatura para os casos no discreto e contínuo.

No capítulo IV a curvatura será relacionada com a anomalia gravitacional pelo uso da fase de Berry.

No capítulo V daremos uma nova interpretação da curvatura como termo central da álgebra de Virasoro.

No apêndice A fazemos uma pequena revisão da geometria Riemanniana necessária neste trabalho.

No apêndice B definimos a ação efetiva de um sistema quântico e nos apêndices C e D calculamos a ação efetiva dos fermions e bósons respectivamente.

CAPÍTULO I

A Fase de Berry na Mecânica Quântica

Antes de considerarmos o surgimento da fase de Berry na teoria quântica de campos, faremos uma revisão de como a fase de Berry surgiu na mecânica quântica.

O efeito Aharonov-Bohm e o monopolo de Dirac são dois exemplos de como a estrutura topológica dos campos eletromagnéticos envolvidos no problema pode proporcionar efeitos puramente quânticos, no primeiro caso de interferência e no segundo a quantificação da carga.

Neste capítulo será discutido um terceiro exemplo de efeito topológico que aparece quando um dado sistema quântico é transportado adiabaticamente no espaço de parâmetros da Hamiltoniana do problema: ele adquire uma fase além da fase dinâmica (a fase de Berry [1]) que é precisamente a holonomia numa linha de fibrado hermitiano, já que o teorema adiabático define naturalmente uma conexão em tal fibrado (Simon [2]).

Resumidamente o conteúdo deste capítulo é o seguinte: Primeiro veremos como uma conexão surge naturalmente na aproximação de Born-Oppenheimer - onde o movimento dos núcleos da molécula equivale ao transporte adiabático do sistema e a conexão é o potencial eletromagnético que resulta na Hamiltoniana correspondente dos núcleons. Será visto em seguida que a fase de Berry não é mais do que uma generalização das consequências de um transporte adiabático. A degenerescência acidental da Hamiltoniana provoca a quantização desta fase que levou à confirmação experimental no limite semi-clássico [3] e [4].

Num exemplo veremos como pode surgir um monopolo no espaço de parâmetros da Hamiltoniana (o caso confirmado experimentalmente) e o efeito Aharonov-Bohm neste espaço. A última sessão tratará o análogo clássico da fase de Berry.

I.1) Aproximação de Born-Oppenheimer

Seja uma molécula com N núcleos e n elétrons. A eq. de Schrödinger independente do tempo é:

$$\left[- \sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} \nabla_j^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 + V(R,r) \right] \Psi(r_i, R_j) = E \Psi(r_i, R_j) \quad (1)$$

Onde $V(R,r)$ inclui as interações eletrostáticas dos núcleos entre si, dos elétrons entre si e dos núcleos com os elétrons. Se desprezarmos a energia cinética dos núcleos o sistema teria como função de onda: $\varphi_n(r_i, R_j)$ onde R_j é um parâmetro, e a equação acima fica:

$$\left[- \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 + V(R,r) \right] \varphi_n(r_i, R_j) = E_n(R_j) \varphi_n(r_i, R_j) \quad (2)$$

Se os núcleos estivessem separados uns dos outros com distâncias constantes R_j o sistema permaneceria no estado φ_n , o termo cinético dos núcleos correlaciona diferentes autoestados da eq. (2). A solução geral da eq.(1) é $\Psi(r_i, R_j) = \sum_n w_n(R_j) \varphi_n(r_i, R_j)$ onde os coeficientes w_n dependem de R_j uma vez que a expansão é nas variáveis r_i . Agora o teorema adiabático - ou no caso particular considerado aqui, a aproximação de Born-Oppenheimer - supõe que a energia cinética dos núcleos é suficientemente pequena de maneira que se-

ja necessário somente um termo da série acima. Substituindo $\Psi(r_i, R_j) = w_n(R_j) \varphi_n(r_i, R_j)$ na eq. (1) resulta:

$$-\sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} \nabla_j^2 (w_n \varphi_n) + \epsilon_n(R_j) w_n \varphi_n = E w_n \varphi_n \quad (3)$$

Multiplicando a eq. (3) por $\varphi_n(r_i, R_j)$, integrando em r_i e supondo a função normalizada, temos (onde mudamos a notação de $\varphi_n(r_i, R_j)$ para $|n, R_i\rangle$):

$$-\sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} \langle R_i, n | [w_n(R_k) \nabla_j^2 + 2 \nabla_j w_n(R_k) \cdot \nabla_j + \nabla_j^2 w_n(R_k)] | n, R_i \rangle + \epsilon_n(R) w_n(R_k) = E w_n(R_k) \quad (4)$$

$$\text{Definindo } \vec{A}(R_k) = \langle n, R_j | i \vec{\nabla}_R | n, R_j \rangle \quad (5)$$

podemos reescrever o primeiro termo do lado esquerdo da eq. acima como

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} [\vec{\nabla}_j - i \vec{A}(R_k)]^2 w_n(R_k) &= -\sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} [\nabla_j^2 w_n - i 2 \vec{A}(R) \cdot \vec{\nabla}_j w_n - \\ &- i (\vec{\nabla}_j \cdot \vec{A}) w_n - \vec{A}^2 w_n] = \sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} [\nabla_j^2 w_n + 2 \langle n(R) | \vec{\nabla}_j | n(R) \rangle \cdot \vec{\nabla}_j w_n + \\ &+ \langle n(R) | \nabla_j^2 | n(R) \rangle w_n + \langle \nabla_j (n(R)) | \nabla_j | n(R) \rangle w_n + \langle n(R) | \vec{\nabla}_j | n(R) \rangle \cdot \langle n(R) | \times \\ &\times \vec{\nabla}_j | n(R) \rangle w_n \end{aligned} \quad (6)$$

Se desprezamos os termos de segunda ordem em $\vec{\nabla}_j |n(R)\rangle$ observa-se que (4) e (6) são idênticos. Logo a Hamiltoniana para os núcleos é:

$$H_n^{ef.} \equiv -\sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2M_j} [\vec{\nabla}_j - i \vec{A}(R_j)]^2 + \epsilon_n(R_j) \quad (7)$$

Desta aproximação resulta que cada núcleo da molécula está se movimentando num campo eletromagnético de potencial vetorial $\vec{A}(\mathbf{R}_j)$. A negligência dos termos em segunda ordem em (retornando à notação antiga $\nabla_j \psi_n(r_i, \mathbf{R}_j)$) significa fisicamente que a parte eletrônica $\psi_n(r_i, \mathbf{R}_j)$ da função de onda total $\Psi(r_i, \mathbf{R}_j) = \omega_n(\mathbf{R}_j) \psi_n(r_i, \mathbf{R}_j)$ não se modifica muito quando os núcleos se movem, o que é consistente com o teorema adiabático utilizado anteriormente.

Já que $i\vec{\nabla}_j$ é Hermitiano, vemos que (5) é real. Mudando localmente a fase de $|u(\mathbf{R})\rangle \rightarrow e^{i\gamma_n(\mathbf{R})} |u(\mathbf{R})\rangle$, temos de (5) $\vec{A}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \vec{A}_n(\mathbf{R}) + \vec{\nabla}_R \gamma_n(\mathbf{R})$ logo $\vec{A}(\mathbf{R})$ se transforma como um potencial de "gauge" $U(1)$ quando mudamos localmente as fases de $|u(\mathbf{R})\rangle$. Se $|u\rangle$ pertence a um nível N -degenerado será então uma matriz $N \times N$ que se transforma como um potencial de "gauge" $U(N)$ [5].

A aproximação levando a (7) difere da usual (aproximação de Born-Oppenheimer) onde $|u(\mathbf{R})\rangle$ é escolhido real de maneira que $\vec{A}(\mathbf{R}) \equiv 0$ já que $\langle u | \vec{\nabla}_j | u \rangle$ é real e $\vec{A}(\mathbf{R})$ também; logo de (5) temos o resultado mencionado. Como veremos, esta escolha de "gauge" não é possível globalmente.

I.2) A fase de Berry

Generalizamos agora o caso precedente para um transporte qualquer do sistema no espaço de parâmetros do Hamiltoniano.

Modificaremos a Hamiltoniana \hat{H} variando os parâmetros $\vec{R} = (X, Y, \dots)$ dos quais depende. A variação no tempo t pode ser representada como o transporte ao longo da trajetória $\vec{R}(t)$ no espaço de parâmetros do espaço de Hilbert em

que atuam os operadores $\hat{H}(\vec{R})$; se $\vec{R}(T) = \vec{R}(0)$ o trajeto se rá fechado que rotularemos como C . Para que o teorema adiabático seja válido, T deve ser grande em relação ao período próprio do sistema em consideração.

Seja o estado $|\psi(t)\rangle$ que satisfaz a eq. de Schrödinger:

$$\hat{H}(\vec{R}(t))|\psi(t)\rangle = i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle \quad (1)$$

Em cada instante teremos uma base natural que consiste nos auto-estados $|n(\vec{R})\rangle$ (assumidos discretos) de $\hat{H}(\vec{R})$, satisfazendo:

$$\hat{H}(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle = E_n(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle \quad (2)$$

com energias $E_n(\vec{R})$. Esta equação de autovalores não implica em nenhuma ligação entre as fases dos autoestados $|n(\vec{R})\rangle$ para diferentes \vec{R} . Ver-se a seguir que isto é irrelevante.

Pelo teorema adiabático o sistema evolui continuamente do autoestado $|n(\vec{R}(0))\rangle$ até o estado $|n(\vec{R}(t))\rangle$ no tempo t sempre satisfazendo (2). Logo $|\psi\rangle$ pode ser escrito como:

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(\vec{R}(t'))\right\} e^{i\gamma_n(t)} |n(\vec{R}(t))\rangle \quad (3)$$

Onde a primeira exponencial é o fator de fase dinâmico familiar. A função γ_n pode ser determinada substituindo (3) em (1).

$$\dot{\gamma}_n(t) = i \langle n(\vec{R}(t)) | \frac{d}{dt} |n(\vec{R}(t))\rangle = i \langle n(\vec{R}) | \vec{\nabla}_{\vec{R}} n(\vec{R}) \rangle \cdot \dot{\vec{R}}(t) \quad (4)$$

É curioso notar que este fator de fase era já conhecido (ver p. ex. a referência [6]). Ele adquire um significado geométrico definido e ao mesmo tempo torna-se mensurável se o trajeto no espaço dos parâmetros for fechado, podemos então escrever (4) na forma:

$$\gamma_n(C) = i \oint_C \langle u(\vec{R}) | \vec{\nabla}_{\vec{R}} u(\vec{R}) \rangle \cdot d\vec{R} \quad (5)$$

Podemos observar que na eq. (5) aparece a conexão introduzida no parágrafo precedente eq. (1.5) e a solução da eq. (1.7) para os núcleos é justamente a eq. (3) sendo γ_n dado pela eq. (5). De (5) vemos que esta fase não é integrável, o que se manifesta em que podemos ter $\gamma_n(T) \neq \gamma_n(0)$.

Esta fase é real: seja $\langle u|u \rangle = 1$ logo $\langle \dot{u}|u \rangle + \langle u|\dot{u} \rangle = 0$ e cada termo é complexo conjugado do outro, portanto cada um é puramente imaginário e $\langle u|\dot{u} \rangle = i\alpha(t)$ onde $\alpha(t)$ é real.

Para calcularmos (5) consideramos o espaço dos parâmetros tridimensional (caso importante nas aplicações). Aplicando o teorema de Stokes em (5), temos uma notação abreviada.

$$\gamma_n(C) = -\text{Im} \iint d\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \times \langle u | \vec{\nabla} u \rangle \quad (6a)$$

$$= -\text{Im} \iint d\vec{S} \cdot \langle \vec{\nabla} u | \times | \vec{\nabla} u \rangle \quad (6b)$$

$$= -\text{Im} \iint d\vec{S} \cdot \sum_{m \neq n} \langle \vec{\nabla}_m | m \rangle \times \langle m | \vec{\nabla} u \rangle \quad (6c)$$

onde $d\vec{S}$ denota o elemento de área da superfície que envolve o circuito C e a exclusão do termo $\langle u | \vec{\nabla} u \rangle$ é devida ao fato dele ser imaginário.

Os elementos fora da diagonal são obtidos de (2):

$$\langle m | \vec{\nabla} n \rangle = \langle m | \vec{\nabla} \hat{H} | n \rangle / (E_n - E_m) \quad (m \neq n) \quad (7)$$

Logo γ_n pode ser expresso como:

$$\gamma_n(c) = - \iint d\vec{S} \cdot \vec{V}_n(\vec{R}) \quad (8)$$

onde

$$V_n(\vec{R}) \equiv \text{Im} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n(\vec{r}) | \vec{\nabla}_{\vec{r}} \hat{H}(\vec{r}) | m(\vec{r}) \rangle \times \langle m(\vec{r}) | \vec{\nabla}_{\vec{r}} \hat{H}(\vec{r}) | n(\vec{r}) \rangle}{(E_m(\vec{r}) - E_n(\vec{r}))^2} \quad (9)$$

Desta equação vemos porque não precisamos escolher fases determinados para os autoestados $|n(\vec{r})\rangle$. A fórmula (9) é independente destas fases. Isto é devido ao fato de $\gamma_n(c)$ ser, segundo (6a), a integral de um rotacional e quando $|n\rangle$ muda de fase $|n\rangle \rightarrow e^{i\mu(\vec{r})} |n(\vec{r})\rangle$, $\langle n | \vec{\nabla} n \rangle \rightarrow \langle n | \vec{\nabla} n \rangle + i \vec{\nabla}_{\vec{r}} \mu(\vec{r})$. Logo $\gamma_n(c)$ é invariante com respeito a transformação de "gauge", como é toda magnitude observável.

Vejamos agora dois exemplos da fase de Berry:

Exemplo 1 Spin em Campo Magnético

Seja uma partícula de spin S (inteiro ou semi-inteiro) que interage com um campo magnético \vec{B} via o Hamiltoniano:

$$\hat{H}(\vec{B}) = k \hbar \vec{B} \cdot \vec{S} \quad (10)$$

onde k é uma constante envolvendo o fator giromagnético e o operador de spin com $2S+1$ autovalores n separados por inteiros entre $-S$ e S . Os autovalores de energia são:

$$E_n(\vec{B}) = \kappa \hbar B_n \quad (11)$$

logo há uma $2s+1$ - degenerescência quando $B=0$. Considere mos os componentes de \vec{B} como os parâmetros \vec{R} e calculemos a mudança de fase $\gamma_n(C)$ para o autoestado $|n, s(\vec{B}')\rangle$ de \vec{S} ao longo da direção de \vec{B} , se \vec{B} é variado lentamente ao redor do circuito C .

O vetor $\vec{V}_n(\vec{B})$, dado por (9), pode ser expresso, utilizando (10) e (11), como:

$$\vec{V}_n(\vec{B}) = \frac{1}{B^2} \text{Im} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n, s(\vec{B}') | \vec{S} | m, s(\vec{B}') \rangle \times \langle m, s(\vec{B}') | \vec{S} | n, s(\vec{B}') \rangle}{(m-n)^2} \quad (12)$$

Para calcularmos os elementos matriciais rodamos temporariamente os eixos de maneira que \vec{B} aponte na direção do eixo z . De:

$$\begin{aligned} (\hat{S}_x + i\hat{S}_y) |n, s\rangle &= [s(s+1) - n(n+1)]^{\frac{1}{2}} |n+1, s\rangle \\ (\hat{S}_x - i\hat{S}_y) |n, s\rangle &= [s(s+1) - n(n-1)]^{\frac{1}{2}} |n-1, s\rangle \\ \hat{S}_z |n, s\rangle &= n |n, s\rangle \end{aligned} \quad (13)$$

é claro que somente estados com elemento $m = n \pm 1$ dão contribuições não nulas quando acoplados a $|n\rangle$ em (13) e que V_x e V_y são nulos porque envolvem termos não diagonais de \hat{S}_z . Para achar V_z fazemos uso de (13)

$$\begin{aligned} \langle n \pm 1, s | \hat{S}_x | n, s \rangle &= \frac{1}{2} [s(s+1) - n(n \pm 1)]^{\frac{1}{2}} \\ \langle n \pm 1, s | \hat{S}_y | n, s \rangle &= \mp \frac{1}{2} i [s(s+1) - n(n \pm 1)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (14)$$

De (12) temos:

$$V_z^n = \frac{Im}{B^2} \left\{ \langle n | S_x | n+1 \rangle \langle n+1 | S_y | n \rangle - \langle n | S_y | n+1 \rangle \times \right. \\ \times \langle n+1 | S_x | n \rangle + \langle n | S_x | n-1 \rangle \langle n-1 | S_y | n \rangle - \langle n | S_y | n-1 \rangle \times \\ \left. \times \langle n-1 | S_x | n \rangle \right\} = \frac{n}{B^2} \quad (15)$$

E de forma geral, portanto:

$$\vec{V}_n(\vec{B}) = \frac{n\vec{B}}{B^3} \quad (16)$$

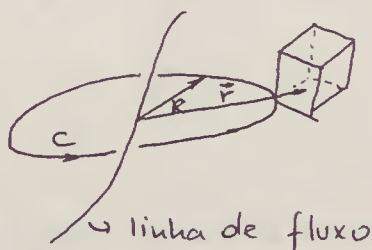
Agora, (8) mostra que $\gamma_n(C)$ é o fluxo através de C de um campo magnético de um monopolo $-n$ situado na origem do espaço de campo magnético.

Logo, o fator de fase geométrico é:

$$\exp \{ i \gamma_n(C) \} = \exp \{ -in \Omega(C) \} \quad (17)$$

onde $\Omega(C)$ é o ângulo sólido subtendido por C em relação a $\vec{B}=0$. O valor de γ_n depende somente do autovalor n da componente de spin ao longo de \vec{B} e não do spin S da partícula.

Exemplo 2 Efeito Aharonov-Bohm



Consideramos um sistema (p.ex. partículas de carga q numa caixa) à distância \vec{R} de uma linha de fluxo de campo magnético de valor $\Phi = \oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$. Suponhamos

que o sistema não seja atravessado pelo campo magnético. Na ausência de fluxo ($\vec{A}=0$) a Hamiltoniana das partículas depende da posição \vec{r} e do momento conjugado \vec{p} como segue:

$$\hat{H} = H(\vec{p}, \vec{r} - \vec{R}) \quad (18)$$

já que a origem é arbitrária. As funções de onda têm a forma $\psi_n(\vec{r} - \vec{R})$ com E_n independente de \vec{R} . Para fluxo não nulo os estados $|n(\vec{R})\rangle$ satisfazem.

$$H(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}), \vec{r} - \vec{R}) |n(\vec{R})\rangle = E_n |n(\vec{R})\rangle \quad (19)$$

cuja solução é: $\langle \vec{r} | n(\vec{R}) \rangle = \exp \left\{ \frac{iq}{\hbar} \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}') \right\} \psi_n(\vec{r} - \vec{R})$ (20)

Devido ao fato da função de onda adquirir somente um fator da fase, a energia não é afetada pelo potencial vetor.

Transportemos agora a caixa ao redor de um circuito \mathcal{C} que envolve a linha de fluxo (sem interceptá-la). Neste caso o transporte não precisa ser adiabático. Após ter-se completado o circuito haverá um fator de fase geométrico que pode ser calculado de (5):

$$\begin{aligned} \langle n(\vec{R}') | \vec{\nabla}_{\vec{R}} n(\vec{R}) \rangle &= \iiint d^3 r \psi_n^*(\vec{r} - \vec{R}') \left\{ -\frac{iq}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}) \psi_n(\vec{r} - \vec{R}) + \right. \\ &+ \left. \vec{\nabla}_{\vec{R}} \psi_n(\vec{r} - \vec{R}) \right\} = -\frac{iq}{\hbar} \vec{A}(\vec{R}) \end{aligned} \quad (21)$$

(O segundo termo é nulo devido à normalização de ψ_n . Logo

$$\gamma_n(\mathcal{C}) = \frac{q}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}} \vec{A}(\vec{R}) \cdot d\vec{R} = \frac{q\Phi}{\hbar}$$

que mostra que a fase é independente de \mathcal{N} e também do circuito ao redor da linha de fluxo. Este exemplo mostra que não é necessária a presença de degenerescências na Hamiltoniana do sistema a ser transportado para que exista um fator de fase geométrico. Por último vemos que a fase de Berry é uma generalização do efeito Aharonov-Bohm.

I.3) Verificação Experimental da fase de Berry

As primeiras verificações da fase de Berry [4] foram realizadas por intermédio de experimentos ópticos com um feixe de laser canalizado por uma fibra ótica. O fundamento da experiência foi descrito em [3].

O fóton é um bóson de spin 1 sem massa. Sua helicidade $\vec{S} \cdot \vec{k}$, onde \vec{S} é o operador de spin e \vec{k} a direção de propagação, pode ser +1 ou -1. Façamos, agora, a direção de \vec{k} mudar; ela fará o transporte adiabático do sistema. Se não há descontinuidade no meio da propagação a helicidade continuará sendo +1 ou -1 (devido à massa nula do fóton). Logo a helicidade é um invariante adiabático.

Seja o meio de propagação um fibra ótica torcida em forma de hélice. Seja \mathcal{T} o caminho ótico (igual ao índice de refração do meio vezes o comprimento de trajeto percorrido, ele será o equivalente ao tempo de propagação). Então a invariância adiabática da helicidade do fóton implica que em cada ponto \mathcal{T} , o estado de spin do fóton $|\vec{k}(\mathcal{T}), \sigma\rangle$ satisfaz:

$$\vec{S} \cdot \vec{k}(\mathcal{T}) |\vec{k}(\mathcal{T}), \sigma\rangle = \sigma |\vec{k}(\mathcal{T}), \sigma\rangle \quad (1)$$

onde $\vec{k}(\mathcal{T})$ é a direção de propagação em \mathcal{T} e $\sigma = \pm 1$ é o número quântico de helicidade que é independente de \mathcal{T} . Formalmente

esta equação é idêntica à equação para uma partícula de spin num campo magnético $\vec{B}(t)$ (onde $\vec{B}(t)$ é variado adiabaticamente).

$$g \vec{s} \cdot \vec{B}(t) |\vec{B}(t), n, s\rangle = E_n |\vec{B}(t), n, s\rangle \quad (2)$$

onde g está relacionado com o fator giromagnético, e n é a componente do spin na direção de $\vec{B}(t)$. Aqui E_n é o autovalor de energia que é constante quando \vec{B} varia sua direção mas mantém o módulo constante. A medida que o campo magnético é variado adiabaticamente, os parâmetros $\vec{B}(t)$ traçam uma outra fechada C na superfície de uma esfera de raio B no espaço de parâmetros (B_x, B_y, B_z) . Ignorando a fase dinâmica, o estado adquire um fator de fase geométrico $e^{i\gamma(C)}$, onde $\gamma(C)$ é a fase de Berry, que já foi calculada no parágrafo 2, fórmula (17):

$$\gamma_n(C) = -n \Omega(C) \quad (3)$$

onde $\Omega(C)$ é o ângulo sólido subtendido por C em relação à origem $\vec{B}=0$. Para o caso especial de que C é um círculo, o qual subtende um cone com ápice na origem e ângulo θ , temos:

$$\gamma(C) = -2\pi n (1 - \cos \theta) \quad (4)$$

Para $\theta=60^\circ$ e $n=1$, $\gamma_n=-\pi$ ou seja até mesmo bósons podem adquirir um fator de fase -1 depois de uma rotação azimutal de 360° que classicamente retorna o sistema ao estado original. Podemos estender este resultado para o caso do fóton, a variação de \vec{k} será provocada por uma hélice de passo constante e logo com ângulo θ entre a direção local da fibra

e o eixo da hélice (θ é o ângulo de passo da hélice), portanto (4) fica:

$$\gamma(C) = -\sigma \Omega(C) \quad (5)$$

onde $\Omega(C)$ é o ângulo sólido do laço C em relação a $\vec{k}=0$, para a hélice uniforme:

$$\Omega(C) = 2\pi N \sigma (1 - \cos \theta)$$

onde N é o número de voltas completas da hélice. Veremos agora a influência do fator dinâmico. A evolução do spin do fóton satisfaz a eq.:

$$i \frac{d}{d\tau} |\vec{k}(\tau), \sigma\rangle = \hat{H}(\tau) |\vec{k}(\tau), \sigma\rangle \quad (6)$$

$$\hat{H}(\tau) = \hat{H}_0 + \kappa \vec{S} \cdot \vec{k}(\tau) \quad (7)$$

onde $\hat{H}_0 |\vec{k}(\tau), \sigma\rangle = E_0 |\vec{k}(\tau), \sigma\rangle$ define a propagação de fundo. \hat{H} é o hamiltoniano, mais geral que pode ser construído com dois vetores \vec{S} e $\vec{k}(\tau)$ para um meio isotrópico com seção transversal constante.

Injetemos em feixe de laser polarizado linearmente, p.ex.:

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) \quad (8)$$

onde $| \pm \rangle$ são auto-estados de $\sigma = \pm 1$. Depois da propagação do fóton pela hélice (de fibra ótica) temos:

$$|x'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \exp[-i(E_0\tau + \kappa\tau - \gamma_+)] |+\rangle + \exp[-i(E_0\tau - \kappa\tau + \gamma_+)] |-\rangle \right\} \quad (9)$$

onde γ_+ é a fase de Berry para $\sigma = +1$, logo $|\langle x|x'\rangle|^2 = \cos^2(\kappa\tau - \gamma_+)$. O que implica que o ângulo de polarização foi girado de $\kappa\tau - \gamma_+$. Se a fibra fosse uma reta γ_+ seria nulo e o ângulo de rotação do plano de polarização seria que surge então, pela atividade ótica do meio,

κ estando relacionado com o coeficiente de atividade ótica que pode ser medido e subtraído experimentalmente. Note que γ_+ é medido independente de κ sendo um efeito puramente geométrico.

Para que o teorema adiabático seja válido, somente é necessário que $L, R_c, R_t \gg d$ (10) onde d é o diâmetro da seção transversal da fibra, L o comprimento total, R_c o raio de curvatura e R_t o raio de torção da hélice.; isto proporciona uma evolução contínua da direção de propagação do fóton $\vec{k}(\tau)$. Os elementos de matriz não diagonais que levariam a uma violação deste teorema são dados por: $\langle \vec{k}(\tau), - | \frac{\partial}{\partial \tau} | \vec{k}'(\tau), + \rangle$; este elemento de matriz é nada mais que a amplitude de probabilidade de que o sistema (fóton no caso) pule no tempo do estado de spin +1 para $\sigma = -1$. para calcularmos esta expressão derivemos ambos lados da eq. de auto-valores

$$\hat{H} | \vec{k}'(\tau), + \rangle = (E_0 + \kappa) | \vec{k}'(\tau), + \rangle \quad (11)$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \tau} | \vec{k}'(\tau), + \rangle + \hat{H} \frac{\partial}{\partial \tau} | \vec{k}'(\tau), + \rangle = \frac{\partial E_+}{\partial \tau} | \vec{k}'(\tau), + \rangle + E_+ \frac{\partial}{\partial \tau} | \vec{k}'(\tau), + \rangle$$

multiplicando por $\langle \vec{k}(\tau), - |$ ambos lados da equação acima:

$$\langle -, \vec{k}(\tau) | \frac{\partial \hat{H}}{\partial \tau} | \vec{k}'(\tau), + \rangle + E_- \langle -, \vec{k}(\tau) | \frac{\partial}{\partial \tau} | \vec{k}'(\tau), + \rangle = E_+ \times$$

$$\times \langle -, \vec{k}(\tau) | \frac{\partial}{\partial \tau} | \vec{k}'(\tau), + \rangle \Rightarrow \langle -, \vec{k}(\tau) | \frac{\partial}{\partial \tau} | \vec{k}'(\tau), + \rangle = \frac{\langle -, \vec{k}(\tau) | \frac{\partial \hat{H}}{\partial \tau} | \vec{k}'(\tau), + \rangle}{(E_+ - E_-)}$$

De (7) $E_+ = E_0 + \kappa$, $E_- = E_0 - \kappa$, logo:

$$\langle - | \frac{\partial}{\partial \tau} | + \rangle = \frac{1}{2\kappa} \langle - | \frac{\partial \hat{H}}{\partial \tau} | + \rangle$$

Sendo $\hat{H}(\tau) = \hat{H}_0 + \kappa \vec{S} \cdot \vec{k}(\tau)$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \tau} = \kappa \vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{k}}{\partial \tau} = \frac{\kappa}{n} \vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{k}}{\partial \ell} = \kappa \frac{\vec{S} \cdot \vec{n}}{n R_c}, \quad \text{já que } \tau = \ell \cdot n \text{ onde}$$

ℓ é o comprimento do arco de fibra, n é o índice de refração e \vec{n} é a normal principal. Como \vec{S} é um operador vetorial, o elemento matricial resulta igual, pelo teorema de Wigner-Eckart:

$$\frac{1}{2nR_c} \langle \vec{k}(\tau), - | \vec{S} \cdot \vec{n}(\tau) | \vec{k}(\tau), + \rangle = 0$$

i.e. $\Delta \sigma = \pm 2$ é proi-

bido. Logo o teorema adiabático é válido exatamente. Esta situação especial é devida à forma da hamiltoniana eq. (7) e as propriedades especiais do fóton (i.e. sua massa nula e seu spin igual a 1). Isto resolve o paradoxo sobre a aplicabilidade do teorema adiabático para este problema. Normalmente, para se satisfazer este teorema o sistema deve evoluir muito lentamente mas em nosso caso o fóton viaja à velocidade da luz, de maneira que leva pouco tempo para percorrer o trajeto inteiro da fibra ótica. Contudo, há outra escala de tempo muito mais rápida: o tempo para a luz cruzar o diâmetro do guia de onda. Este é o tempo empregado para que a isotropia local do sistema seja comunicada através de todo o sistema localmente. Também este é o tempo para que a direção $\vec{k}(\tau)$ e logo \vec{S} seja estabelecida. Em resumo, a Eq.(10) é a única condição relevante. Já que o diâmetro de uma fibra ótica é da ordem de microns, esta condição pode ser facilmente satisfeita experimentalmente.

Cabe ressaltar que o experimento de luz conduzida por uma fibra ótica somente verifica a fase de Berry no limite clássico, a rotação da polarização de um ângulo que é a fase de Berry foi comprovado experimentalmente em [4]. Este ângulo pode ser calculado classicamente ver [7]. Na seção seguinte será visto de uma forma resumida a expressão clássica da fase de Berry.

I.4) A Fase de Hannay

O fator de fase geométrico descoberto por H.V. Berry tem um análogo clássico descoberto por J.H. Hannay e H.V. Berry. O análogo clássico consiste num ângulo extra varrido pelo sistema na sua evolução clássica durante um trajeto adiabático. A exposição a seguir baseia-se em [8].

Seja $H(p_i, q_i, B(t))$ a Hamiltoniana clássica de um sistema onde o parâmetro $B(t)$ evolui adiabaticamente; expressemos este sistema por meio de uma transformação canônica nas variáveis canônicas (I_i, θ_i) onde I_i denomina-se nesta relação variável de ação, e θ_i , variável angular. O teorema adiabático clássico diz que numa evolução adiabática as variáveis de ação $I_i(t; B)$ são invariantes adiabáticos, enquanto que os ângulos θ_i podem ser calculados integrando as frequências instantâneas do sistema dadas por $\omega_i(t; B) = \frac{\partial H(p(I, \theta, B), q(I, \theta, B), B)}{\partial I_i}$ logo

$$\theta_i(T; B) = \int_0^T \omega_i(t; B) dt \quad (1)$$

Hannay mostrou que para alguns hamiltonianos esta não é toda a história, na realidade há uma defasagem $\Delta\theta_i$ que depende somente da geometria do circuito. De maneira que a resposta completa é:

$$\theta_i(T; B) = \int_0^T \omega_i(t; B) dt + \Delta\theta_i(I; C)$$

Chamaremos $\Delta\theta_i$ como os ângulos de Hannay. Primeiramente temos que transformar para as variáveis de ação e ângulo $(p, q) \rightarrow (I, \theta)$ porque é nessas variáveis que o fenômeno surge. Esta transformação canônica é realizada pela função geradora $S^{(\alpha)}(q, I; B(t))$, a qual depende das velhas coor-

denadas q e dos novos momentos I , e nós dá os velhos momentos e as novas coordenadas pelas expressões (ver [9]):

$$p_i^{(\alpha)} = \frac{\partial S^{(\alpha)}}{\partial q_i} \quad ; \quad \theta_i^{(\alpha)} = \frac{\partial S^{(\alpha)}}{\partial I_i}$$

O índice (α) especifica os diferentes ramos de $S^{(\alpha)}$ que é uma função multivalente devido ao mapeamento $q \rightarrow \theta$. A nova Hamiltoniana é:

$$\bar{H}(\theta, I; B) = \mathcal{H}(I, B) + \frac{\partial}{\partial t} S^{(\alpha)}(q, I; B) \quad (2)$$

onde $\mathcal{H} = H(q(\theta, I; B), p(\theta, I; B); B)$ e

$$\frac{\partial S^{(\alpha)}}{\partial t} = \frac{dB_e}{dt} \frac{\partial S^{(\alpha)}}{\partial B_e}$$

Para fazer \bar{H} uniforme faremos $S^{(\alpha)}$ uniforme especificando os valores de θ para os quais q em $S^{(\alpha)}$ se refere.

A função univalente é:

$$\mathcal{S}(\theta, I; B) = S^{(\alpha)}(q(\theta, I; B), I; B); \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (3)$$

logo em (2) podemos substituir:

$$\frac{\partial S^{(\alpha)}}{\partial B_e} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial B_e} - \frac{\partial S^{(\alpha)}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial B_e} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial B_e} - p_i \frac{\partial q_i}{\partial B_e}$$

e obter

$$\bar{H}(\theta, I; t) = \mathcal{H}(I; B(t)) + \frac{dB_e}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{S}(\theta, I; B(t))}{\partial B_e} - p_i \frac{\partial q_i}{\partial B_e} \right)$$

A equação canônica para θ é então:

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial I_j} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_j} + \frac{dB_e}{dt} \frac{\partial}{\partial I_j} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial B_e} - p_i \frac{\partial q_i}{\partial B_e} \right) \quad (4)$$

Integrando nós obtemos:

$$\Theta_j(\tau) = \int_0^\tau dt \omega_j(I; t) + \int_0^\tau dt \frac{d\vec{B}}{dt} \frac{\partial}{\partial I_j} (\vec{\nabla}_{\vec{B}} \lambda - \rho_i \vec{\nabla}_{\vec{B}} q_i) \quad (5)$$

O primeiro termo de (5) é a fase dinâmica que aparece na equação (1), enquanto que o segundo termo é a defasagem adicional:

$$\Delta\Theta_j = \int_0^\tau dt \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial I_j} (\vec{\nabla}_{\vec{B}} \lambda - \rho_i \vec{\nabla}_{\vec{B}} q_i) \quad (6)$$

A origem deste termo é devida ao segundo termo da eq. (2) que se originou da transformação canônica dependente do tempo $(p, q) \rightarrow (I, \theta)$, o funcional gerador $S^{(\alpha)}$ depende explicitamente de t por meio de $B(t)$.

No limite adiabático estamos interessados somente em quantidades médias em relação ao movimento rápido de q, p . Logo uma quantidade mais natural para estudar é ao invés (6) a média:

$$\Delta\Theta_j(I; c) = \frac{1}{(2\pi)^N} \oint d\vec{B} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial I_j} \oint d\theta [\vec{\nabla}_{\vec{B}} \lambda - \rho_i \vec{\nabla}_{\vec{B}} q_i] \right)$$

onde $d\theta = \prod_{k=1}^N d\theta_k$. O primeiro termo entre parênteses cai fora por ser um gradiente (poderia ter sido eliminado já em (6)) e obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_j(I; c) &= - \frac{1}{(2\pi)^N} \frac{\partial}{\partial I_j} \oint d\vec{B} \cdot \oint d\theta \rho_i(\theta, I; B) \vec{\nabla}_{\vec{B}} q_i(\theta, I; B) = \\ &= \frac{\partial}{\partial I_j} \oint d\vec{B} \cdot \vec{A}(I; B) \end{aligned} \quad (7)$$

onde definimos $\vec{A}(I; B) = \frac{1}{(2\pi)^N} \oint d\theta \rho_i \vec{\nabla}_{\vec{B}} q_i$. Esta

1-forma $A = \vec{A} \cdot d\vec{B}$ é o análogo à conexão A introduzida na fase de Berry.

A 1-forma A possui um tipo de invariância de "gauge" também presente no caso clássico. Enquanto que no caso quântico nós temos a liberdade de multiplicar as funções de onda por uma fase dependente de B (ver as explicações posteriores à eq. 2.9) $\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha(B)}$, no caso clássico nós temos a liberdade de mudar o valor inicial de $\Theta(t; B)$ numa quantidade dependente de B :

$$\Theta(t; B) \rightarrow \Theta(t; B) + \alpha(B) \quad (8)$$

De novo, todas as quantidades físicas, incluindo os ângulos de Hannay $\Delta\Theta$, são invariantes a esta mudança, enquanto que $\vec{A}(I; B)$ (o potencial de gauge) varia como um campo de gauge:

$$\vec{A}(I, B) \rightarrow \vec{A}(I, B) + \vec{\nabla}_B \alpha(B) \quad (9)$$

Utilizando o teorema de Stokes podemos colocar a eq. (7) como uma integral de superfície análoga a eq. 2.8 do quântico:

$$\Delta\theta_j = - \frac{\partial}{\partial I_j} \iint d\vec{S} \cdot \vec{\omega}(I; B) \quad (10)$$

$$\vec{\omega}(I; B) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^N \oint d\theta \vec{\nabla}_B p_i(\theta, I; B) \times \vec{\nabla}_B q_i(\theta, I; B)$$

CAPÍTULO II

As Hamiltonianas para um bóson e fermion quirais e reais

Neste capítulo acharemos as Hamiltonianas para o bóson e fermion quiral e real [10,15,16] na presença de um campo gravitacional de fundo. Veremos que a duas dimensões este campo é representado nas respectivas Hamiltonianas por uma única função $\nu(x)$. Esta função fará posteriormente o papel do parâmetro que varia adiabaticamente no tempo para o cálculo da Fase de Berry na teoria quântica de campos dos bósons e férmions.

II.1) A Hamiltoniana de um fermion de Majorana-Weyl no espaço a duas dimensões

A ação de um fermion de Majorana-Weyl acoplado a um campo gravitacional externo estático, no espaço a duas dimensões, é dada por:

$$S = \int d^2x e^{-1} \frac{1}{2} \psi(x) e_{-}^{\mu}(x) i \partial_{\mu} \psi(x) = \int d^2x \mathcal{L} \quad (1)$$

Observemos que a conexão de spin (ver apêndice A) não está presente devido ao caráter grassmânico de $\psi(x)$ ($\psi(x)^2 = 0$ classicamente) (1).

Na expressão (1) e_{-}^{μ} é uma das componentes do "zweibein" (a outra é e_{+}^{μ}),

Esta ação é invariante sob as seguintes transformações :

(1) O caráter grassmânico de $\psi(x)$ é obrigatório senão a ação (1) seria identicamente nula como se comprova integrando por partes (1) com e_{-}^{μ} independente de x .

$$\delta e_{\pm}^{\mu} = \tilde{\xi}^{\nu} \partial_{\nu} e_{\pm}^{\mu} - e_{\pm}^{\nu} \partial_{\nu} \tilde{\xi}^{\mu} + (\tilde{\xi}_W \pm \tilde{\xi}_L) e_{\pm}^{\mu}$$

$$\delta \psi = \tilde{\xi}^{\mu} \partial_{\mu} \psi + \frac{1}{2} (\tilde{\xi}_W + \tilde{\xi}_L) \psi \quad (2)$$

onde $\tilde{\xi}^{\mu}$, $\tilde{\xi}_L$ e $\tilde{\xi}_W$ são os parâmetros infinitesimais das transformações gerais de coordenadas, de Lorentz e de Weyl respectivamente. Para a verificação da simetria por transformações gerais de coordenadas utilizamos as seguintes equações:

$$\delta_{\tilde{\xi}} e = \tilde{\xi}^{\nu} \partial_{\nu} e - \partial_{\nu} \tilde{\xi}^{\nu} e \quad (3)$$

que é devido a expressão explícita para e :

$$e = e_{+}^{+} e_{-}^{-} - e_{-}^{+} e_{+}^{-} \quad (4)$$

e às transformações (2) para os "zweibein" com $\tilde{\xi}_W$ e $\tilde{\xi}_L$ nulos.

Definido $\Omega = \frac{1}{2} \psi(x) e_{\pm}^{\mu} i \partial_{\mu} \psi(x)$ e aplicando as transformações (2) temos:

$$\delta_{\tilde{\xi}} \Omega = \tilde{\xi}^{\nu} \partial_{\nu} \Omega \quad (5)$$

De (3) e (4) segue facilmente que a ação (1) é invariante sob transformações gerais de coordenadas. A simetria sob transformações de Weyl e Lorentz é verificada mais facilmente.

Uma parametrização conveniente para os cálculos é a seguinte:

$$e_{+}^{+} = e^{\sigma+\rho}$$

$$e_{-}^{-} = e^{\sigma-\rho}$$

$$e_{-}^{+} = e^{\sigma-\rho} h_{-}^{+}$$

$$e_{+}^{-} = e^{\sigma+\rho} h_{+}^{-} \quad (6)$$

Nesta parametrização as transformações de Weyl (ou de escala) e de Lorentz correspondem a mudanças em σ e ℓ respectivamente. Utilizando esta parametrização e a definição $\partial_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_t \pm \partial_x)$ o Lagrangiano em (1) adquire a forma:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} A (\psi \dot{\psi} - u(x) \psi \psi') \quad (7)$$

onde
$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sigma - \ell} \frac{1 + h_{\pm}^+}{1 - h_{\pm}^+ h_{\pm}^-} = \frac{e^- + e^+}{\sqrt{2} e} \quad (8)$$

e
$$u(x) = \frac{1 - h_{\pm}^+}{1 + h_{\pm}^+} \quad (9)$$

O ponto representa derivadas temporais e a plica de derivadas espaciais. Observamos de (7) que o fator A multiplica toda a lagrangiana. Este fator se transforma sob transformações gerais de coordenadas, de Lorentz e de Weyl, como:

$$\delta A = \xi^r \partial_r A + e^{-1} (e^- \partial_x \xi^+ - e^+ \partial_x \xi^-) - (\xi_L + \xi_W) A \quad (10)$$

Este fator é necessário para a covariância da Lagrangiana (7). Podemos definir um novo campo $\chi = \sqrt{A} \psi$ (supondo $A > 0$). A densidade de lagrangeana adquire a forma simplificada:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\chi \dot{\chi} - u(x) \chi \chi') \quad (11)$$

Da definição de χ em termos de ψ podemos ver como este campo se transforma sob transformações gerais de coordenadas, de Lorentz e de Weyl:

$$\delta \chi = \xi^r \partial_r \chi + \frac{1}{2} A^{-1} e^{-1} (e^- \partial_x \xi^+ - e^+ \partial_x \xi^-) \chi \quad (12)$$

O segundo termo do lado direito de (12) pode ser interpretado como uma transformação de Weyl e Lorentz onde os parâmetros to mam o valor específico:

$$\bar{\xi}_L + \bar{\xi}_W = e^{-1} (e^- \partial_x \bar{\xi}^+ - e^+ \partial_x \bar{\xi}^-) A^{-1} \quad (13)$$

Podemos simplificar a expressão (13) se impusermos que:

$$\bar{\xi}^+ = -\bar{\xi}^- \quad (14a)$$

e definindo $f(x) = \sqrt{2} \bar{\xi}^+(x)$ (14b)

temos que (12) é agora:

$$\delta_f \chi = f(x) \partial_x \chi(x) + \frac{1}{2} \partial_x f(x) \chi(x) \quad (15)$$

e (13) acaba sendo uma equação envolvendo somente parâmetros

$$\bar{\xi}_L + \bar{\xi}_W = \partial_x \bar{\xi}^+ \quad (16)$$

A transformação de $n(x)$ definido em (9) sob as mesmas condições (14) resulta (a demonstração é dada no parágrafo seguinte)

$$\delta n(x) = f(x) \partial_x n(x) - n(x) \partial_x f(x) \quad (17)$$

Na equação (16) podemos impor que $\bar{\xi}_L = 0$ e considerar (15) e (17) como uma simetria conforme de coordenadas da Lagrangiana (11) (ver as considerações do capítulo V).

Investiguemos agora o sistema descrito pela densidade de lagrangeana (11) utilizando o método de Dirac para um sistema com vínculos.

Da densidade de lagrangiana (11) obtemos a densidade de Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{n(x)}{2} \chi(x) i \partial_x \chi(x) \quad (18)$$

e o vínculo de segunda classe:

$$\omega \equiv \pi_\chi - \frac{1}{2} \chi \quad (19)$$

onde π_χ é o momento conjugado ao campo χ . De acordo com nossa interpretação de $n(x)$ como um parâmetro não introduzimos um momento conjugado a $n(x)$. O parênteses de Poisson de ω consigo mesmo é igual a

$$\{ \omega(x), \omega(y) \} = - \delta(x-y) \quad (20)$$

Introduzindo o parênteses de Dirac para o campo :

$$\{ \chi(x), \chi(y) \}_D = - \delta(x-y) \quad (21)$$

Podemos considerar o vínculo (19) como uma equação forte. A teoria (18), (21) com simetria conforme clássica dada por (15) e (17) será nosso ponto de partida a quantização e a posterior obtenção da anomalia nesta simetria.

II.2) A Hamiltoniana de bósons quirais no espaço a duas dimensões

A ação clássica para um bóson quiral, minimamente acoplado à gravidade pode ser escrita

$$S = \int d^2x e^{-1} [e_+^\mu \partial_\mu \phi e_-^\nu \partial_\nu \phi + h^{--} (e_-^\mu \partial_\mu \phi)^2] = \int d^2x \mathcal{L} \quad (1)$$

onde e_\pm^μ são componentes do "zweibein", $e = \det(e_a^\mu)$ e h^{--} é um campo auxiliar.

Esta ação é invariante sob as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} \delta e_\pm^\mu &= \bar{\xi}^\nu \partial_\nu e_\pm^\mu - e_\pm^\nu \partial_\nu \bar{\xi}^\mu + (\bar{\xi}_w \pm \bar{\xi}_L) e_\pm^\mu \\ \delta \phi &= \bar{\xi}^\mu \partial_\mu \phi + \epsilon^- e_-^\mu \partial_\mu \phi \\ \delta h^{--} &= \bar{\xi}^\mu \partial_\mu h^{--} + 2\bar{\xi}_L h^{--} - e_+^\mu D_\mu \epsilon^- + \epsilon^- e_-^\mu D_\mu h^{--} - h^{--} e_-^\mu D_\mu \epsilon^- \end{aligned} \quad (2)$$

onde $\bar{\xi}^\mu$, $\bar{\xi}_L$, $\bar{\xi}_w$ e ϵ^- são os parâmetros infinitesimais das transformações gerais de coordenadas, de Lorentz locais, de Weyl e Siegel respectivamente. D_μ é a derivada covariante apropriada do grupo de Lorentz:

$$\begin{aligned} D_\mu h^{--} &= (\partial_\mu - 2\omega_\mu) h^{--} \\ D_\mu \epsilon^- &= (\partial_\mu - \omega_\mu) \epsilon^- \end{aligned} \quad (3)$$

Em (3) ω_μ é a conexão de spin. O determinante é dado explicitamente por

$$e = e_+^+ e_-^- - e_-^+ e_+^- \quad (4)$$

Uma parametrização conveniente para os "zweibein" nos cálculos que seguem é:

$$\begin{aligned}
 e_+^+ &= e^{\sigma+\ell} \\
 e_-^- &= e^{\sigma-\ell} \\
 e_+^- &= e^{\sigma+\ell} h_+^- \\
 e_-^+ &= e^{\sigma-\ell} h_-^+
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Nesta parametrização as transformações de Weyl (ou de escala) e de Lorentz correspondem a mudanças em σ e ℓ respectivamente. Utilizando esta parametrização e a definição $\partial_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_t \pm \partial_x)$ a Lagrangiana em (1) adquire a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [A(\lambda) \dot{\phi}^2 + 2B(\lambda) \dot{\phi} \phi' + C(\lambda) \phi'^2]
 \tag{6}$$

onde

$$\begin{aligned}
 A(\lambda) &= (1 - h_+^+ h_-^-)^{-1} [(1 + h_+^+)(1 + h_-^-) + \lambda(1 + h_+^+)^2] \\
 B(\lambda) &= 1 - \frac{1 - h_+^+}{1 + h_+^+} A(\lambda) \\
 C(\lambda) &= A(\lambda)^{-1} [B(\lambda)^2 - 1] \\
 \lambda &= \lambda^{-} e^{-2\ell}
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

O ponto representa derivadas temporais e a plica derivadas espaciais. Notemos que λ se transforma como um escalar sob transformações gerais de coordenadas, de Lorentz e de Weyl. Investiguemos agora o sistema descrito por (6) e (7) utilizando o método de Dirac para um sistema com vínculos.

Da densidade de lagrangiana (1) achamos a densidade de Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2A(\lambda)} (\pi_\phi - \phi')^2 + \frac{1-h_\pm^+}{1+h_\pm^+} \pi_\phi \cdot \phi' + \mathcal{N}_\pm^+ \pi_\pm^+ + \mathcal{N}_\pm^- \pi_\pm^- + \mathcal{N}_\lambda \pi_\lambda \quad (8)$$

onde π_ϕ , π_\pm^+ , π_\pm^- e π_λ são os momentos conjugados aos campos ϕ , h_\pm^+ , h_\pm^- e λ respectivamente e \mathcal{N}_\pm^+ , \mathcal{N}_\pm^- e \mathcal{N}_λ são os multiplicadores de Lagrange para os três vínculos primários:

$$\pi_\pm^+ \approx 0, \quad \pi_\pm^- \approx 0, \quad \pi_\lambda \approx 0 \quad (9)$$

Impondo a conservação de (9) no tempo obtemos dois vínculos secundários:

$$\Omega \equiv \pi_\phi - \phi' \approx 0 \quad (10a)$$

$$\pi_\phi \cdot \phi' \approx 0 \quad (10b)$$

Observemos que no lugar de (10a) temos o vínculo original

$$(\pi_\phi - \phi')^2 \approx 0 \quad (11)$$

e o qual, classicamente dá (10a). O vínculo (10b) é de primeira classe enquanto que o vínculo (10a) é de segunda classe pois se calcularmos o parênteses de Poisson temos o resultado não nulo:

$$\{ \Omega(x,t), \Omega(y,t) \} = -2 \partial_x \delta(x-y) \quad (12)$$

Introduzindo o parênteses de Dirac para o campo :

$$\{\phi(x,t), \phi(y,t)\}_0 = -\frac{1}{4} \epsilon(x-y) \quad (13)$$

Podemos verificar que o vínculo possui parênteses de Poisson nulo e portanto podemos considerar (10a) como uma igualdade forte. Eliminando da densidade de Hamiltoniana (8) temos:

$$\mathcal{H} = \frac{1-h_{\pm}^+}{1+h_{\pm}^+} (\phi')^2 + \mathcal{N}_{\pm}^+ \pi_{\pm}^+ + \mathcal{N}_{\pm}^- \pi_{\pm}^- + \mathcal{N}_{\lambda} \pi_{\lambda} \quad (14)$$

enquanto que o vínculo (10b) é agora

$$(\phi')^2 \approx 0 \quad * \quad (15)$$

Vemos agora que \mathcal{H} é uma combinação de vínculos de primeira classe. Uma outra consequência é de que o campo λ em (8) definido por (7) se desaclopa completamente do sistema. Logo o último termo em (14) pode ser descartado. Esta é uma consequência de fato da ação original (1) ser invariante por transformações de Siegel. A densidade de Hamiltoniana (14) pode ser obtida à partir da seguinte densidade de Lagrangeana:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \dot{\phi} \cdot \phi' - \frac{1-h_{\pm}^+}{1+h_{\pm}^+} \phi'^2 \quad (16)$$

que é a Lagrangiana original (6) com uma escolha especial para λ^{--}

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} (\lambda^{--} = \lambda_0^{--}) \quad (17)$$

* Considerando h_{\pm}^+ como um parâmetro (o que será feito no capítulo seguinte) não teremos este vínculo.

onde
$$h_0^{--} = e^{-2\ell} \frac{1+h_+^-}{1+h_+^+} = - \frac{e_+^+ + e_+^-}{e_-^+ + e_-^-} \quad (18)$$

Quando se quantiza a teoria o último termo da Hamiltoniana (14) pode também ser descartado por que pertence a um setor disjunto do espaço de Hilbert. Desta discussão vemos que \mathcal{L} com a escolha (18) para h^{--} (a qual foi imposta pelos vínculos de segunda classe da teoria) é a Lagrangiana do qual devemos partir para quantizar a teoria.

Devido á condição (18) que elimina a dependência da Lagrangeana no grau de liberdade λ , a nova Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}$ obtido pelo método de Dirac não possui mais a invariância de Siegel, e nem é invariante sob transformações gerais de coordenadas, de Lorentz e de Weyl obtidas pondo $\epsilon^- = 0$ em (2). Embora não tenhamos mais a simetria de Siegel ela é ainda necessária, como veremos para compensar o efeito das outras transformações a fim de manter a condição (18). Logo para mantermos a covariância da ação (16) o campo ϕ passará a se transformar por uma lei não convencional.

A imposição da invariância da ação determina ϵ^- como uma função dos outros parâmetros. À seguir veremos como $\epsilon^- (\xi^\mu, e_+^\mu, e_-^\mu)$ é determinado.

Utilizando as transformações (2) para os "zweibein" obtemos facilmente:

$$\delta \left[- \frac{e_+^+ + e_+^-}{e_-^+ + e_-^-} \right] = (\xi^\mu \partial_\mu + 2\xi_L) \left[- \frac{e_+^+ + e_+^-}{e_-^+ + e_-^-} \right] - \frac{e}{(e_-^+ + e_+^+)^2} (\partial_- - \partial_+) (\xi^- + \xi^+) \quad (19)$$

O primeiro termo do lado direito de (19) contém a transformação padrão sob transformações gerais de coordenadas, transformações de Lorentz e Weyl de acordo com (2) logo o segundo termo deve ser entendido como uma transformação de Siegel compensadora. Comparando (2) com (19) somos capazes de identificar a equação que o parâmetro ϵ^- deve satisfazer para manter a ação invariante sob transformações gerais de coordenadas (As transformações de Lorentz e Weyl não são modificadas).

Já que a Lagrangiana (16) não possui a simetria de Siegel clássica segue-se que não temos anomalia de Siegel quântica. O que não seria óbvio para a Lagrangiana original (1).

Analisemos novamente a densidade de Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}$ (16):

$$\tilde{\mathcal{L}} = \dot{\phi} \cdot \phi' - n(x) \phi'^2 \quad (20)$$

onde

$$n(x) = \frac{1 - h_{\pm}^+}{1 + h_{\pm}^+} \quad (21)$$

Se considerarmos agora uma transformação estática (independente do tempo) do campo e da métrica:

$$\delta_f n(x) = f(x)n'(x) - n(x)f'(x) \quad (22a)$$

$$\delta_f \phi(x) = f(x) \partial_x \phi(x) \quad (22b)$$

onde $n(x)$ é independente do tempo temos que a ação:

$$S = \int d^4x \tilde{\mathcal{L}} \quad (23)$$

é invariante.

Já que as transformações (2) englobam todas as simetrias da teoria, devemos obter as transformações (22) à partir delas. Consideremos primeiro (22b). Se impusermos as seguintes restrições dos parâmetros da transformação (2) para ϕ (com $\epsilon^- = 0$)

$$\bar{z}^+ = -\bar{z}^- \quad (24a)$$

e definindo
$$f(x) = \sqrt{2} \bar{z}^+(x) \quad (24b)$$

obteremos com as equações (24) a transformação (22b). Observe mos que devido à condição (24a) o segundo termo de (19) é automaticamente nulo e portanto podemos impor $\epsilon^- = 0$ consistentemente. As condições (24) devem também ser suficientes para determos a transformação de $n(x)$ (22a). De fato, a expressão para h_-^+ em termos do "zweibein" e das definições (5)

$$h_-^+ = \frac{e_-^+}{e_-^-} \quad (25)$$

Substituindo em (21), temos para :

$$n(x) = \frac{1-h_-^+}{1+h_-^+} = \frac{e_-^- - e_-^+}{e_-^- + e_-^+} \quad (26)$$

Realizando uma transformação geral de coordenadas com a ajuda das expressões (2) temos as seguintes transformações para e_-^- e e_-^+

$$\begin{aligned} \delta e_-^+ &= \bar{z}^r \partial_r e_-^+ - e_-^r \partial_r \bar{z}^+ = \bar{z}^+ \partial_+ e_-^+ + \bar{z}^- \partial_- e_-^+ - e_-^+ \partial_+ \bar{z}^+ \\ &- e_-^- \partial_- \bar{z}^+ = \sqrt{2} \bar{z}^+ \partial_x e_-^+ - (e_-^+ - e_-^-) \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x \bar{z}^+ = \\ &= f(x) \partial_x e_-^+ + \frac{1}{2} (e_-^- - e_-^+) \partial_x f(x) \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} \delta e^- &= \xi^r \partial_r e^- - e^- \partial_r \xi^r = \sqrt{2} \xi^+ \partial_x e^- + \frac{1}{\sqrt{2}} (e_-^+ - e_-^-) \partial_x \xi^+ = \\ &= f(x) \partial_x e^- + \frac{1}{2} (e_-^+ - e_-^-) \partial_x f(x) \end{aligned} \quad (27b)$$

À partir de (27a,b) calculamos a variação de $u(x)$ em (26):

$$\begin{aligned} \delta u(x) &= \frac{(e_-^- + e_-^+)(\delta e_-^- - \delta e_-^+) - (e_-^- - e_-^+)(\delta e_-^- + \delta e_-^+)}{(e_-^- + e_-^+)^2} = \\ &= \frac{2e_-^+ \delta e_-^- - 2e_-^- \delta e_-^+}{(e_-^- + e_-^+)^2} = \frac{2}{(e_-^- + e_-^+)^2} \left\{ e_-^+ (f(x) \partial_x e_-^- + \frac{1}{2} (e_-^+ - e_-^-) \partial_x f(x)) - \right. \\ &- e_-^- (f(x) \partial_x e_-^+ + \frac{1}{2} (e_-^- - e_-^+) \partial_x f(x)) \left. \right\} = \frac{2}{(e_-^- + e_-^+)^2} \left\{ f(x) \times \right. \\ &\times [e_-^+ \partial_x e_-^- - e_-^- \partial_x e_-^+] + \frac{1}{2} \partial_x f(x) [e_-^{+2} - e_-^-/e_-^+ - e_-^-^2 + e_-^-/e_-^+] \left. \right\} = \\ &= \left\{ + \frac{1}{2} \partial_x f(x) (e_-^{+2} - e_-^-)^2 + f(x) (e_-^+ \partial_x e_-^- - e_-^- \partial_x e_-^+) \right\} \frac{2}{(e_-^- + e_-^+)^2} \end{aligned}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \delta u(x) &= 2f(x) \frac{e_-^+ \partial_x e_-^- - e_-^- \partial_x e_-^+}{(e_-^+ + e_-^-)^2} + \partial_x f(x) \frac{e_-^+ - e_-^-}{e_-^+ + e_-^-} \\ &= f(x) \partial_x u(x) - \partial_x f(x) u(x) \end{aligned}$$

que é a relação (22a). Após a quantização da teoria a invariância ou não da teoria sob as transformações (22) mostrará se a teoria possui ou não uma anomalia gravitacional:

CAPÍTULO III

Geometria Quântica de uma teoria de Campos Conforme

Neste capítulo quantizaremos as teorias bosônica e fermiônica, tanto no caso contínuo como discreto. Verificaremos que um bóson quiral real possui a mesma anomalia que um férmion de Weyl complexo. Esta é uma indicação de que as teorias são equivalentes. No apêndice C e D se confirmará esta hipótese pelo cálculo das respectivas ações efetivas.

III.1) Caso Fermiônico no Contínuo

A Hamiltoniana de um campo de Majorana-Weyl em duas dimensões interagindo com um campo gravitacional externo, foi obtida no capítulo II (com uma troca de sinal na Hamiltoniana e na relação de anticomutação):

$$H = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, u(x) \Psi(x) i \partial_x \Psi(x) \quad (1)$$

$$\{ \Psi(x), \Psi(y) \} = \delta(x-y) \quad (2)$$

Para quantizar a teoria utilizaremos a representação holomórfica [18]. A equação de movimento para o campo fermiônico:

$$i \partial_t \Psi(x) = [\Psi(x), H] = h \Psi(x) \quad (3)$$

dá
$$-\frac{1}{2} \int dy \, u(y) [\Psi(y) i \partial_y \Psi(y), \Psi(x)] = \frac{u(x)}{2} i \partial_x \Psi(x) +$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{1}{2} \int dy n(y) \Psi(y) i \partial_y \delta(y-x) &= \frac{1}{2} n(x) i \partial_x \Psi(x) + \frac{1}{2} i \partial_x n(x) \Psi(x) \\
 + \frac{1}{2} n(x) i \partial_x \Psi(x) &= n(x) i \partial_x \Psi(x) + \frac{1}{2} i \partial_x n(x) \Psi(x)
 \end{aligned}$$

Portanto

$$h = i (n(x) \partial_x + \frac{1}{2} \partial_x n(x)) \quad (4)$$

Este operador possui autovalores contínuos $\omega \in \mathbb{R}$ com auto estados já normalizados:

$$\Psi_\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n(x)}} e^{i\omega \int_{-\infty}^x \frac{dy}{n(y)}} \quad (5)$$

com

$$h \Psi_\omega(x) = \omega \Psi_\omega(x) \quad (6)$$

A fim de obter o operador Hamiltoniano da teoria de campos quântica expandimos o operador fermiônico $\Psi(x)$ na base (5):

$$\Psi(x) = \int_0^\infty d\omega \Psi_\omega(x) \frac{\delta}{\delta a_\omega} + \int_0^\infty d\omega \Psi_\omega^*(x) a_\omega \quad (7)$$

Já que $\Psi_\omega^*(x) = \Psi_{-\omega}(x)$, $\Psi(x)$ é um operador real.

O vácuo da teoria é definido de forma que

$$\frac{\delta}{\delta a_\omega} |vac\rangle = 0$$

Definindo $a_{-\omega} = \frac{\delta}{\delta a_\omega}$ (7) simplifica-se para:

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Psi_{\omega}(x) a_{\omega} \quad (8)$$

Devido à ortonormalidade das funções :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi_{\omega}^*(x) \Psi_{\omega'}(x) = \delta(\omega - \omega') \quad (9)$$

Segue-se de (8) que:

$$a_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi(x) \Psi_{\omega}^*(x)$$

donde podemos obter a relação de anticomutação dos operadores a_{ω} :

$$\begin{aligned} \{a_{\omega}, a_{\omega'}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \{ \Psi(x), \Psi(y) \} \Psi_{\omega}^*(x) \Psi_{\omega'}^*(y) = \quad (10) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi_{\omega}^*(x) \Psi_{\omega'}^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2u(x)\pi} e^{i(\omega + \omega')\xi(x)} \end{aligned}$$

Onde empregamos a relação de anticomutação (2) e definimos

$$\xi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dy}{u(y)} \quad (11)$$

Introduzindo a variável $u = \xi(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{u(x)}$ e portanto o último termo da série de igualdades (10) pode ser reescrito como:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\xi(-\infty)}^{\xi(\infty)} du e^{i(\omega + \omega')u} \stackrel{\text{def.}}{=} \delta(\omega + \omega') \quad (12)$$

e portanto
$$\{a_\omega, a_{\omega'}\} = \delta(\omega + \omega') \quad (13)$$

A definição (12) é justificada devido ao fato de que a expansão (7) agora verifica a relação de anticomutação (2).

Em resumo para cada valor de $u(x)$ obtivemos um espaço de Fock particular e o uso da expansão (7) em termos das funções de onda (5) permite a diagonalização do operador Hamiltoniano quântico (1) na forma:

$$:H: = \int_0^\infty d\omega \omega a_\omega \frac{\delta}{\delta a_\omega}$$

onde o ordenamento normal é com relação ao vácuo definido por $\frac{\delta}{\delta a_\omega} |vac\rangle = 0$. Podemos dizer que resolvemos a teoria de campos para cada $u(x)$. Agora devemos examinar a relação entre soluções com diferentes $u(x)$, isto é, preescrever o transporte dos vetores do espaço de Fock sobre o espaço \mathcal{M} das funções positivas $u(x) \in \mathcal{M}$.

O operador que realiza o transporte paralelo sobre \mathcal{M} permite comparar o vetor do espaço de Hilbert $\Phi[u(x) - \delta u(x), a]$ em $(u(x) - \delta u(x))$ com outro valor $\Phi[u(x), a]$ em $u(x)$. Isto pode ser realizado por meio de um operador unitário:

$$\begin{aligned} \Phi[u(x), a] &= e^{i \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta u(x) \Pi(x)} \Phi[u(x) - \delta u(x), a] = \\ &= \left(1 + i \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta u(x) \Pi(x) + \dots \right) \Phi[u(x) - \delta u(x), a] \end{aligned}$$

O operador $\Pi(x)$ realiza a translação de $u(x)$:

$$e^{i \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta u(x) \Pi(x)} n(x') e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta u(x) \Pi(x)} = n(x') + \delta u(x')$$

e portanto:

$$[n(x), \Pi(x')] = i \delta(x-x') \quad (14)$$

Os vetores de nosso espaço de Fock, como já foi dito anteriormente são representados (rep. holomórfica) por:

$$\Phi [n(x), a] = \sum_{k=0}^{\infty} \int dw_1 \dots dw_k \Phi_k [n; w_1, \dots, w_k] a_{w_1} \dots a_{w_k} \quad (15)$$

e o produto escalar é dado pela integral de Berezin:

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \int_{w>0} \prod da_w da_w^+ e^{\int_{w>0} da_w a_w^+} \Phi_1 [n, a] \Phi_2^* [n, a] \quad (16)$$

com a medida normalizada de forma que:

$$\int_{w>0} \prod da_w da_w^+ e^{\int_{w>0} da_w a_w^+} = 1 \quad (17)$$

O estado fundamental normalizado de H é o elemento unitário $|\text{vac}\rangle \equiv 1$ e os estados excitados são dados pela aplicação de a_w no vácuo. Utilizando (17), (16) pode ser colocado na forma de soma de produto de funções de um espaço hilbert:

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \int dw_1 \dots dw_k \Phi_{1k}^* [n; w_1, \dots, w_k] \Phi_{2k} [n; w_1, \dots, w_k]$$

Lembremos que $\int da = \int da^+ = 0$ e $\int daa = \int da^+ a^+ = 1$ com

$da, a, da^\dagger, a^\dagger$ anticomutando entre si:

Contudo é da expressão (15) que podemos definir de forma mais explícita o operador de transporte paralelo $\Pi(x)$. Ele consiste de duas partes uma derivada funcional em relação a $u(x)$ e um operador conexão que leva em conta a transformação dos números Grassmanianos $a_\omega, \omega \in \mathbb{R}$:

$$\Pi(x) = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} + \Gamma(x) \quad (18)$$

Escolhemos $\Gamma(x)$ de forma que o campo fermiônico seja constante covariantemente:

$$[\Pi(x), \Psi(y)] = 0 \quad (19)$$

e que uma condição de curvatura nula seja satisfeita

$$[\Pi(x), \Pi(y)] = 0 \quad (20)$$

A primeira condição exprime o fato de que o operador $\Psi(x)$ não depende da base em que é expandido (ou seja poderíamos ter expandido Ψ com um outro sistema completo de funções e outros números grassmanianos a_ω diferentes de (7)). Enquanto que (20) é uma condição de independência de trajeto sobre o espaço das funções $\mathcal{M} = \{u(x) / u(x) > 0\}$ (para todo x).

Pode-se justificar esta segunda condição à posteriori devido ao fato de que a condição (20) sempre pode ser imposta. Também veremos no capítulo IV que $\Pi(x)$ definido por (20) permite a obtenção da fase de Berry para uma versão projetada de $\Pi(x)$ no vácuo. Se permitíssemos $\Pi(x)$ ter um comutador anômalo este não seria o caso.

Podemos obter $\Gamma(x)$ a partir das condições (19) e (20). A equação (19) implica:

$$\int_0^\infty dw \left\{ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} \psi_w(y) \frac{\delta}{\delta a_w} + \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} \psi_w^*(y) a_w \right\} = - \int_0^\infty dw \times$$

$$\times \left\{ \psi_w(y) \left[\Gamma(x), \frac{\delta}{\delta a_w} \right] + \psi_w^*(y) \left[\Gamma(x), a_w \right] \right\} \quad (21)$$

ou

$$\left[\Gamma(x), \frac{\delta}{\delta a_w} \right] = - \int_0^\infty dw' \left\{ \langle w | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | w' \rangle \frac{\delta}{\delta a_{w'}} + \langle w | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | -w' \rangle a_{w'} \right\} \quad (22)$$

$$\left[\Gamma(x), a_w \right] = - \int_0^\infty dw' \left\{ \langle -w | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | w' \rangle \frac{\delta}{\delta a_{w'}} + \langle -w | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | -w' \rangle a_{w'} \right\} \quad (23)$$

As equações (22) e (23) têm como solução:

$$\Gamma(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} dw dw' \langle w | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | w' \rangle \left\{ \theta(w) \theta(w') a_w \frac{\delta}{\delta a_{w'}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \theta(w) \theta(-w') a_w a_{-w'} + \frac{1}{2} \theta(-w) \theta(w') \frac{\delta}{\delta a_w} \frac{\delta}{\delta a_{w'}} \right\} + A(x) \quad (24)$$

onde

$$\theta(w) = \begin{cases} 1, & w > 0 \\ 0, & w \leq 0 \end{cases}$$

$A(x)$ é um funcional de $u(x)$ independente de a_w e $\frac{\delta}{\delta a_w}$ a ser determinado. Podemos calcular o operador matricial da fórmula (24) utilizando (5):

$$\langle w | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | w' \rangle = \frac{i}{2n(x)} \psi_{w'}(x) \psi_w^*(x) + \frac{w'}{n^2(x)} \int_x^\infty dy \psi_w^*(y) \psi_{w'}(y) \quad (25)$$

Já que

$$\frac{\delta \psi_w(y)}{\delta u(x)} = -\frac{1/2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta(x-y)}{n(x)^{3/2}} e^{-iw\zeta(x)} - \frac{iw}{\sqrt{2\pi n(x)}} \frac{\delta \zeta(y)}{\delta u(x)} e^{-iw\zeta(x)}$$

onde

$$\zeta(y) = \int_{-\infty}^y \frac{dy'}{n(y')} \quad ; \quad \frac{\delta \zeta(y)}{\delta u(x)} = -\frac{1}{n^2(x)} \theta(y-x)$$

A integral em (25) é calculada assim:

$$\begin{aligned} \int_x^\infty dy \psi_\omega^*(y) \psi_{\omega'}(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_x^\infty \frac{dy}{n(y)} e^{i(\omega-\omega')\zeta(y)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta(x)}^{\zeta(\infty)} du e^{iu(\omega-\omega')} = \frac{i}{2\pi} \frac{e^{i\zeta(x)(\omega-\omega')}}{\omega-\omega'+i\epsilon} \end{aligned}$$

Portanto (25) é

$$\langle \omega | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | \omega' \rangle = \frac{i}{4\pi n^2(x)} e^{i\zeta(x)(\omega-\omega')} \left(\frac{\omega + \omega'}{\omega - \omega' - i\epsilon} \right) \quad (26)$$

Além disso (26) verifica a igualdade: $\langle \omega | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | \omega' \rangle = - \langle -\omega' | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | -\omega \rangle$ que é uma consequência do espectro de h .

Agora voltemos à condição de curvatura nula (20).

Considere o comutador:

$$C(x, y; u) = [\pi(x), \pi(y)] \quad (27)$$

A identidade de Jacobi e (19) implicam que:

$$[\Psi(x), C(y, z; u)] = 0 \quad (28)$$

Logo $C(y, z; u)$ é independente dos graus de liberdade fermiônicos a_ω e $\frac{\delta}{\delta a_\omega}$. Então a identidade de Jacobi

$$[\pi(x), [\pi(y), \pi(z)]] + [\pi(y), [\pi(z), \pi(x)]] + [\pi(z), [\pi(x), \pi(y)]] = 0 \quad (29)$$

$$\text{dá: } \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} C(y, z; u) + \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(y)} C(z, x; u) + \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(z)} C(x, y; u) = 0$$

Localmente (29) tem como solução:

$$C(x, y; u) = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} A(y, u) - \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(y)} A(x, u)$$

assim temos

$$[\pi(x) - A(x), \pi(y) - A(y)] = 0 \quad (30)$$

Este argumento algébrico nos mostra ⁽¹⁾ que qualquer mutador anômalo de $\pi(x)$ consigo mesmo pode ser cancelado com u ma redefinição de $A(x)$ indo para $A(x) - A(x; u)$ em (24) de for ma que $\pi(x) \rightarrow \pi(x) - A(x; u)$. Desta forma chegamos à con dição (20).

Para calcular o comutador de dois operadores bili-neares (com notação matricial óbvia) introduzimos o operador

$$O = a A a + \frac{\delta}{\delta a} B \frac{\delta}{\delta a} + a C \frac{\delta}{\delta a} \quad (31)$$

Vale:

$$\begin{aligned} [O_1, O_2] = & a (2C_1 A_2 - 2C_2 A_1) a + \frac{\delta}{\delta a} (2B_1 C_2 - 2B_2 C_1) \frac{\delta}{\delta a} + \\ & + a (4A_1 B_2 - 4A_2 B_1 + C_1 C_2 - C_2 C_1) \frac{\delta}{\delta a} + 2 \text{tr}(B_1 A_2 - B_2 A_1) \end{aligned}$$

Desta fórmula e da condição (20) segue-se:

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} \Gamma(y) - \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(y)} \Gamma(x) = - [\Gamma(x), \Gamma(y)] \quad (32)$$

(1) Se assumirmos a integrabilidade do sistema

e tomando o valor esperado no vácuo da eq. (33) segue-se:

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} A(x) - \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(y)} A(y) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \langle \omega | \frac{\delta}{\delta u(x)} | \omega' \rangle \langle \omega' | \frac{\delta}{\delta u(y)} | \omega \rangle [\theta(\omega) \theta(-\omega') - \theta(-\omega) \theta(\omega')] \end{aligned} \quad (34)$$

Utilizando (26) temos:

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{1}{32\pi^2 n^2(x) n^2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \exp \left\{ i(\omega - \omega') [\xi(x) - \xi(y)] \right\} \times \\ &\times \frac{(\omega + \omega')^2}{(\omega - \omega')^2 - \epsilon^2} [\theta(\omega) \theta(-\omega') - \theta(-\omega) \theta(\omega')] \end{aligned} \quad (35)$$

e fazendo uma mudança de variáveis: $\sigma = \omega - \omega'$ (35) re
escreve-se como:

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{1}{32\pi^2 n^2(x) n^2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \frac{1}{\sigma^2 - \epsilon^2} e^{i\sigma(\xi(x) - \xi(y))} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' (\sigma + 2\omega')^2 [\theta(\sigma + \omega') \theta(-\omega') - \theta(-\omega' - \sigma) \theta(\omega')] \end{aligned} \quad (36)$$

A segunda integral em (36) é calculada, assim:

$$\left\{ \theta(\sigma) \int_{-\sigma}^0 d\omega' - \theta(-\sigma) \int_0^{-\sigma} d\omega' \right\} (\sigma + 2\omega')^2 = \frac{1}{3} \sigma^3$$

Logo (36) é igual a:

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y) &= \frac{1}{96\pi^2 n^2(x) n^2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \sigma e^{i\sigma(\zeta(x) - \zeta(y))} \\ &= \frac{-i}{48\pi n^2(x) n^2(y)} \frac{\partial}{\partial \zeta(x)} \delta(\zeta(x) - \zeta(y)) \end{aligned}$$

obtendo finalmente para $\Gamma(x, y)$:

$$\Gamma(x, y) = \frac{-i}{48\pi n(x)n(y)} \partial_x \delta(x-y) \quad (37)$$

onde utilizamos:

$$1) \text{ Se } u = \zeta(x) \rightarrow du = \frac{dx}{n(x)}$$

$$2) \delta(\zeta(x) - \zeta(y)) = \frac{1}{|d\zeta(y)/dy|} \delta(x-y)$$

O termo $A(x)$ da expressão da conexão (24) é

$$A(x) = \frac{1}{96\pi n^2(x)} \partial_x u(x) + \frac{\delta}{\delta u(x)} \int [u] \quad (38)$$

onde $\int [u]$ é um funcional arbitrário de $u(x)$.

No capítulo IV verifica-se que o primeiro termo do lado direito da equação (38) dá a anomalia gravitacional dos férmions no limite adiabático. Pode-se relacionar também este termo com o termo central da álgebra de Virasoro.

III.2) Caso fermiônico no Círculo

III.2)1. Fermions de Neveu-Schwartz

Consideremos primeiramente fermions no círculo de comprimento 2π com condições antiperiódicas (σ sendo o parâmetro correspondente):

$$\Psi(\sigma=0) = -\Psi(\sigma=2\pi) \quad (1)$$

No círculo a Hamiltoniana é dada por:

$$H = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\sigma \, n(\sigma) \Psi(\sigma) i \partial_\sigma \Psi(\sigma) \quad (2)$$

com a equação de movimento

$$i \partial_t \Psi(\sigma) = [\Psi(\sigma), H] = \hbar \Psi(\sigma)$$

com a Hamiltoniana de uma partícula dada por:

$$\hbar = i \left[n(\sigma) \partial_\sigma + \frac{1}{2} \partial_\sigma n(\sigma) \right] \quad (3)$$

O problema de autovalores:

$$\hbar \psi_m(\sigma) = \omega_m \psi_m(\sigma) \quad (4)$$

tem por solução

$$\psi_m(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{n(\sigma)L}} \exp(-i\omega_m \xi(\sigma)) \quad (5)$$

com

$$\omega_m = \frac{(2m+1)\pi}{L}, \quad L = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma'}{n(\sigma')}, \quad \xi(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{d\sigma'}{n(\sigma')} \quad (6)$$

e $\xi(2\pi) = L$

O operador fermiônico $\Psi(\sigma)$ é expresso na representação holomórfica, assim:

$$\Psi(\sigma) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \Psi_m(\sigma) \frac{\delta}{\delta a_m} + \Psi_m^*(\sigma) a_m \right\} \quad (7)$$

onde os a_m são operadores grassmanianos:

$$\{ a_{m_1}, a_{m_2} \} = \left\{ \frac{\delta}{\delta a_{m_1}}, \frac{\delta}{\delta a_{m_2}} \right\} = 0$$

$$\left\{ a_{m_1}, \frac{\delta}{\delta a_{m_2}} \right\} = \delta_{m_1, m_2}$$

A condição de covariância do fermion:

$$[\pi(\sigma), \Psi(\sigma')] = 0$$

Implica em

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} \Psi(\sigma) = -[\Gamma(\sigma), \Psi(\sigma')] \quad (8)$$

utilizando (7), (8) é:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} \Psi_m(\sigma) \frac{\delta}{\delta a_m} + \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} \Psi_m^*(\sigma) a_m \right\} = \\ & = - \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \Psi_m(\sigma) \left[\Gamma(\sigma), \frac{\delta}{\delta a_m} \right] + \Psi_m^*(\sigma) \left[\Gamma(\sigma), a_m \right] \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

ou

$$\left[\Gamma(\sigma), \frac{\delta}{\delta a_k} \right] = - \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \langle w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_m \rangle \frac{\delta}{\delta a_m} + \langle w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | -w_m \rangle a_m \right\} \quad (10)$$

$$\left[\Gamma(\sigma), a_k \right] = - \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \langle -w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_m \rangle \frac{\delta}{\delta a_m} + \langle -w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | -w_m \rangle a_m \right\} \quad (11)$$

onde foi utilizada a ortogonalidade da função de onda do problema de autovalores (4). De (10) e (11) temos a solução:

$$\Gamma(\sigma) = - \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} \langle w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_m \rangle \left\{ \Theta(w_k) \Theta(w_m) a_k \frac{\delta}{\delta a_m} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Theta(w_k) \Theta(-w_m) a_k a_{-m-1} + \frac{1}{2} \Theta(-w_k) \Theta(w_m) \frac{\delta}{\delta a_{-k-1}} \frac{\delta}{\delta a_m} \right\} + A(\sigma) \quad (12)$$

onde

$$\Theta(w_k) = \begin{cases} 1, & w_k > 0 \\ 0, & w_k \leq 0 \end{cases}$$

Onde foi usado que $w_{-m-1} = -w_m$ é uma funcional de $u(x)$ ainda a ser determinada independente de a_m e $\delta/\delta a_m$.

de (5) e (6) temos o elemento matricial da expressão (12):

$$\langle w_n | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_m \rangle = \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} d\sigma' \psi_n^*(\sigma') \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} \psi_m(\sigma') = \\ = \frac{i}{2n^2(\sigma)L} \exp\left\{i(w_n - w_m) \frac{\xi(\sigma)}{L}\right\} + \frac{w_m}{n^2(\sigma)} \int_0^{2\pi} \psi_n^*(\sigma') \psi_m(\sigma') d\sigma' = \\ = \frac{i}{2n^2(\sigma)L} \exp\left\{i(w_n - w_m) \frac{\xi(\sigma)}{L}\right\} + \frac{w_m}{n^2(\sigma)} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma'}{n(\sigma')} e^{i(w_n - w_m) \frac{\xi(\sigma')}{L}} = \\ = \frac{i}{2n^2(\sigma)L} \left\{ 1 + \frac{2w_m}{w_n - w_m} \left[e^{i(w_n - w_m) \frac{\xi(\sigma)}{L}} - \frac{i w_n}{w_n - w_m} \frac{1}{n^2(\sigma)L} \right] \right\} \quad (13)^*$$

$$\langle w_n | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_m \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{i}{2n^2(\sigma)L} \left\{ \frac{n+m+1}{n-m} \right\} \exp\left\{2\pi i(n-m) \frac{\xi(\sigma)}{L}\right\} \quad (14a)$$

onde definimos o valor do elemento matricial à menos do termo de contorno em (14a). Temos três motivos para isso:

1º) tornar a matriz Hermitiana para que a exponenciação de $\Gamma(\sigma)$ seja um operador unitário ; 2º) tornar o 2º e 3º termos da expressão (12) antissimétricas já que a parte simétrica é anulada pela antissimetria dos números Grassmanianos e por último a definição (14b) tem a seguinte simetria:

$$\langle w_n | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_m \rangle = - \langle -w_m | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | -w_n \rangle \quad (15)$$

que foi utilizada na obtenção de (12).

Da segunda condição imposta para a determinação da conexão Γ :

$$[\pi(\sigma), \pi(\sigma')] = 0$$

temos

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} \Gamma(\sigma') - \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma')} \Gamma(\sigma) = - [\Gamma(\sigma), \Gamma(\sigma')] \quad (16)$$

que nos permite calcular o rotacional de $A(\sigma)$:

$$F(\sigma, \sigma') = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} A(\sigma') - \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma')} A(\sigma) \quad (17)$$

Se lembrarmos da seção anterior que o valor esperado na vácuo do comutador de dois operadores bilineares nos fermions $O = aAa + \frac{\delta}{\delta a} B \frac{\delta}{\delta a} + aC \frac{\delta}{\delta a}$ é

(*)eq. 13 Para $m=n$ temos $\langle w_n | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_n \rangle = \frac{(2n+1)\pi}{Ln^2(\sigma)} \left(1 - \frac{\xi(\sigma)}{L}\right)$ (14b)

$$\langle \text{vac} | [O_1, O_2] | \text{vac} \rangle = 2 \text{tr} (B_1 A_2 - B_2 A_1) \quad (18)$$

segue de (12) que:

$$[B(\sigma)]_{-k-1, m} = \langle w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_m \rangle \frac{1}{2} \theta(-w_k) \theta(w_m)$$

$$[A(\sigma)]_{m, -k-1} = \langle w_m | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_k \rangle \frac{1}{2} \theta(w_m) \theta(-w_k)$$

Logo de (16) e (17) temos:

$$\begin{aligned} G(x, y) = & \frac{1}{2} \sum_{k, m} \langle w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | w_m \rangle \langle w_m | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(y)} | w_k \rangle \times \\ & \times [\theta(w_k) \theta(-w_m) - \theta(-w_k) \theta(w_m)] \end{aligned} \quad (19)$$

Utilizando (13) obtemos:

$$\begin{aligned} G(\sigma, \sigma') = & \frac{1}{8n^2(\sigma)n^2(\sigma')L^2} \sum_{k, m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{k+m+1}{k-m} \right]^2 \exp \left[2\pi i (k-m) \frac{\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma')}{L} \right] \times \\ & \times [\theta(w_k) \theta(-w_m) - \theta(-w_k) \theta(w_m)] \end{aligned} \quad (20)$$

e fazendo uma mudança de variáveis $n = k - m$ (20) é modificada para:

$$\begin{aligned} G(\sigma, \sigma') = & \frac{1}{8n^2(\sigma)n^2(\sigma')L^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left[2\pi i n \frac{\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma')}{L} \right] \times \\ & \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (n + 2m + 1)^2 [\theta(w_{n+2m}) \theta(-w_m) - \theta(-w_{n+2m}) \theta(w_m)] \end{aligned} \quad (21)$$

A segunda soma em (21) pode ser escrita como:

$$\left[\theta(\omega_{n-1}) \sum_{m=-n}^{-1} - \theta(-\omega_n) \sum_{m=0}^{-n-1} \right] (n+2m+1)^2 \quad (22)$$

Agora

$$\sum_{m=-n}^{-1} (n+2m+1)^2 = \frac{1}{3} n (n^2-1)$$

e

$$\sum_{m=0}^{-n-1} (n+2m+1)^2 = -\frac{1}{3} n (n^2-1)$$

logo (22) é igual a $\frac{1}{3} n (n^2-1)$. A expressão (21) dá portanto:

$$\begin{aligned} G(\sigma, \sigma') &= \frac{1}{8n^2(\sigma)n^2(\sigma')L^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{n^2-1}{3n} \exp\left[2\pi i n \frac{\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma')}{L}\right] = \\ &= \frac{-i}{48\pi n(\sigma)n(\sigma')} \partial_{\sigma} \delta(\sigma-\sigma') - \frac{i\pi}{24n^2(\sigma)n^2(\sigma')L^2} \operatorname{sgn}(\sigma-\sigma') + \\ &\quad + \frac{i\pi [\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma')]}{12n^2(\sigma)n^2(\sigma')L^3} \end{aligned} \quad (23)$$

Desta expressão deduzimos:

$$A(\sigma) = \frac{1}{96\pi n^2(\sigma)} \partial_{\sigma} n(\sigma) + \frac{\pi}{24n^2(\sigma)L} \left\{ \frac{\zeta(\sigma)}{L} - \frac{1}{2} \right\} + \frac{\delta}{\delta n(\sigma)} F[n] \quad (24)$$

O primeiro termos de (24) é o mesmo do caso contínuo 1.(38). O termo de colchetes foi definido de forma que fosse antiperiódico o terceiro termo em (24) proporcional a $\frac{1}{2}$. Pode ser eliminado se redefinirmos F :

$$F[n] \rightarrow F[n] + \frac{\pi}{48L} \int_0^\sigma \frac{ds'}{n(s')} \quad (25)$$

III.2) 2. Fermions de Ramond

A condição de contorno é agora periódica:

$$\Psi(\sigma=0) = \Psi(\sigma=2\pi) \quad (1)$$

e o problema de autovalores é:

$$h \Psi_m(\sigma) = \omega_m \Psi_m(\sigma) \quad (2)$$

onde h é naturalmente a mesma Hamiltoniana do item 2.1 (3).

As auto-funções de (2) são:

$$\Psi_m(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{n(\sigma)L}} \exp(i\omega_m \xi(\sigma)) \quad (3)$$

$$\text{com } \omega_m = \frac{2m\pi}{L}, \quad L = \int_0^{2\pi} \frac{ds'}{n(s')}, \quad \xi(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{ds'}{n(s')} \quad (4)$$

O espectro é simétrico:

$$\Psi_m^*(\sigma) = \Psi_{-m}(\sigma) \quad ; \quad \omega_{-m} = \omega_m \quad (5)$$

e temos um modo zero para $m=0$. Utilizando as matrizes de Pauli τ^i expandimos o operador fermiônico como:

$$\Psi(\sigma) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \Psi_m(\sigma) \tau^1 \otimes \frac{\delta}{\delta a_m} + \Psi_m^*(\sigma) \tau^1 \otimes a_m \right\} + \frac{1}{\sqrt{2}} \tau^2 \otimes \mathbb{I} \Psi_0(\sigma) \quad (6)$$

onde \mathbb{I} é o elemento unitário da álgebra de Grassmann. A com-

pleteza das funções de onda junto com o modo zero e a forma particular da expansão (6) garantem que $\Psi(\sigma)$ satisfaz a relação canônica de anti-comutação:

$$\{\Psi(\sigma), \Psi(\sigma')\} = \delta(\sigma - \sigma') \quad (7)$$

Os estados quânticos são agora produtos diretos de espinores bidimensionais e funções das variáveis a_m Grassmanianas a_m é de $n(x)$. O vácuo é degenerado duas vezes:

$$|vac, +\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes I \quad (8)$$

$$|vac, -\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes I \quad (9)$$

Podemos definir o operador número fermiônico $F = \tau^3 \otimes I$ que anticomuta com $\Psi(\sigma)$:

$$\{F, \Psi(\sigma)\} \quad (10)$$

os vácuos (8) e (9) são auto estados de F com autovalores ± 1 . O Hamiltoniano é diagonal:

$$H = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m I \otimes a_m \frac{\delta}{\delta a_m} \quad (11)$$

e cada um de seus estados é duplamente degenerado. Podemos dizer que resolvemos a teoria para cada $n(\sigma)$ do espaço \mathcal{M} .

Seguindo um procedimento análogo ao caso de Neveu-Schwartz obtemos a relação da teoria para diversos $n(\sigma)$. O elemento matricial da derivada funcional do operador conexão é agora:

$$\langle w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_m \rangle = \frac{i}{2u^2(\sigma)L} \left[\frac{k+m}{k-m} \right] \exp \left\{ 2\pi i (k-m) \frac{\xi(\sigma)}{L} \right\}, \quad m \neq k \quad (12)$$

$$= \frac{2\pi m}{u^2(\sigma)L} \left\{ 1 - \frac{\xi(\sigma)}{L} \right\}, \quad m = k \quad (13)$$

Empregando a expansão (6) e a condição de que $\Psi(\sigma)$ e $\Pi(\sigma)$ comutam, obtemos a equação:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} \Psi_m(\sigma') \tau' \otimes \frac{\delta}{\delta a_m} + \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} \Psi_m^*(\sigma') \tau' \otimes a_m \right\} + \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} \Psi_0(\sigma') \times \quad (14)$$

$$\times \frac{\tau^2}{\sqrt{2}} \otimes I = - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \Psi_m(\sigma') [\Gamma(\sigma), \tau' \otimes \frac{\delta}{\delta a_m}] + \Psi_m^*(\sigma') [\Gamma(\sigma), \tau' \otimes a_m] \right\} + \\ + \Psi_0(\sigma') [\Gamma(\sigma), \frac{\tau^2}{\sqrt{2}} \otimes I]$$

a qual implica:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \langle w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_m \rangle \tau' \otimes \frac{\delta}{\delta a_m} + \langle w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | -w_m \rangle \tau' \otimes a_m \right\} + \langle w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | 0 \rangle \times \\ \times \frac{\tau^2}{\sqrt{2}} \otimes I = - [\Gamma(\sigma), \tau' \otimes \frac{\delta}{\delta a_k}] \quad , \quad w_k > 0 \quad (15)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \langle -w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_m \rangle \tau' \otimes \frac{\delta}{\delta a_m} + \langle -w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | -w_m \rangle \tau' \otimes a_m \right\} + \\ + \langle -w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | 0 \rangle \frac{\tau^2}{\sqrt{2}} \otimes I = - [\Gamma(\sigma), \tau' \otimes a_k] \quad , \quad w_k > 0 \quad (16)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \langle 0 | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_m \rangle \tau' \otimes \frac{\delta}{\delta a_m} + \langle 0 | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | -w_m \rangle \tau' \otimes a_m \right\} + \\ + \langle 0 | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | 0 \rangle \frac{\tau^2}{\sqrt{2}} \otimes I = - [\Gamma(\sigma), \frac{\tau^2}{\sqrt{2}} \otimes I] \quad (17)$$

Utilizando (13) para $m=0$: $\langle 0 | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | 0 \rangle = 0$ (18)

Obtemos a solução:

$$\Gamma(\sigma) = \sum_{\substack{k,m=-\infty \\ k,m \neq 0}}^{\infty} \langle w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_m \rangle \left\{ \theta(w_k) \theta(w_m) a_k \frac{\delta}{\delta a_m} + \frac{1}{2} \theta(-w_k) \theta(w_m) \right. \\ \times \frac{\delta}{\delta a_k} \frac{\delta}{\delta a_m} + \frac{1}{2} \theta(w_k) \theta(-w_m) a_k a_{-m} \left. \right\} + A(\sigma) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \langle w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | 0 \rangle \times \\ \times \left[\theta(-w_k) i \tau^3 \otimes \frac{\delta}{\delta a_{-k}} + \theta(w_k) i \tau^3 \otimes a_k \right] \quad (19)$$

Por causa de (18) a conexão adiabática $A(\sigma)$ é a mesma para os dois vácuos degenerados (8) e (9).

A condição de curvatura nula nos dá:

$$\mathcal{F}(\sigma, \sigma') = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} A(\sigma') - \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma')} A(\sigma) = - \langle \text{vac} | [\Gamma(\sigma), \Gamma(\sigma')] | \text{vac} \rangle \quad (20)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,m=-\infty \\ k,m \neq 0}}^{\infty} \langle w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_m \rangle \langle w_m | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma')} | w_k \rangle \times \left[\theta(w_k) \theta(-w_m) - \right. \\ \left. - \theta(-w_k) \theta(w_m) \right] = \frac{1}{8u^2(\sigma)u^2(\sigma')L^2} \sum_{\substack{k,m=-\infty \\ k,m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{k+m}{k-m} \right)^2 \times \quad (21)$$

$$\times \exp \left[2\pi i \frac{k-m}{L} (\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma')) \right] \times \left[\theta(w_k) \theta(-w_m) - \theta(-w_k) \theta(w_m) \right]$$

Mudando de índices (21) pode-se reescrever como:

$$\mathcal{F}(\sigma, \sigma') = \frac{1}{8u^2(\sigma)u^2(\sigma')L^2} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{l^2} e^{\frac{2\pi i l}{L} (\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma'))} \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2m+l)^2 \left[\theta(w_{2+m}) \theta(-w_m) - \theta(-w_{2+m}) \theta(w_m) \right] \quad (22)$$

A segunda soma em (22) é:

$$\left\{ \Theta(\omega_{\ell-1}) \sum_{m=\ell}^{-1} - \Theta(-\omega_{\ell}) \sum_{m=0}^{-\ell-1} \right\} (\ell+2m)^2$$

$$\sum_{m=-\ell}^{-1} (\ell+2m)^2 = \frac{1}{3} \ell(\ell^2+2)$$

$$\sum_{m=0}^{-\ell-1} (\ell+2m)^2 = -\frac{1}{3} \ell(\ell^2+2)$$

e portanto (22) dá:

$$\mathcal{G}(\sigma, \sigma') = \frac{-i}{48\pi n(\sigma)n(\sigma')} \partial_{\sigma} \delta(\sigma-\sigma') + \frac{i\pi}{12n^2(\sigma)n^2(\sigma')} \operatorname{sgn}(\sigma-\sigma') - \frac{i\pi [\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma')]}{6n^2(\sigma)n^2(\sigma')L^3} \quad (23)$$

e

$$A(\sigma) = \frac{1}{96\pi n^2(\sigma)} \partial_{\sigma} n(\sigma) - \frac{\pi \zeta(\sigma)}{12n^2(\sigma)L^2} + \frac{\delta}{\delta n(\sigma)} F[\mu] \quad (24)$$

Podemos observar que este caso difere de Neveu-Schwartz dado no item 2.1 (23) e (24), somente nos coeficientes do segundo termo em $A(\sigma)$ e no segundo e terceiro termos de \mathcal{G} .

Como veremos o primeiro termo de \mathcal{G} determina a anomalia gravitacional a qual é insensível às condições de contorno. O segundo e terceiro termos correspondem a termos de Casimir para a álgebra de Virasoro os quais dependem das condições de contorno como também do nível do mar de Fermi.

III. 3) Caso Bosônico na contínuo

Iremos calcular a curvatura para o caso de um campo —

bosônico quiral seguindo um procedimento análogo àquele considerado no caso fermiônico. À menos do fator $\frac{1}{2}$ a Hamiltoniana de um boson quiral na presença de um campo gravitacional externo escreve-se como:

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) [\partial_x \Phi(x)]^2 dx \quad (1)$$

com relações de comutação a tempos iguais:

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = -\frac{i}{2} \epsilon(x-y) \quad (2)$$

A equação de movimento quântico é:

$$\begin{aligned} i \partial_t \Phi(x) &= [\Phi(x), H] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(y) [\Phi(x), (\partial_y \Phi(y))^2] dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(y) \left(-\frac{i}{2}\right) \partial_y \epsilon(x-y) (\partial_y \Phi(y)) dy = i u(x) \partial_x \Phi(x) \end{aligned} \quad (3)$$

Para $u(x) = 1$ esta é a condição de vínculo que define o boson quiral.

A Hamiltoniana de uma partícula (no sentido de Mecânica quântica) obtida à partir de (3) é:

$$h = i u(x) \partial_x \quad (4)$$

cujas autofunções já normalizadas são:

$$\begin{aligned} h \phi_\omega(x) &= \omega \phi_\omega(x) ; \\ \phi_\omega(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega \int_{-\infty}^x \frac{dy}{u(y)}} \end{aligned} \quad (5)$$

Vamos expandir operador bosônico na base (5):

$$\Phi(x) = \int_{0^+}^{\infty} d\omega \frac{\phi_{\omega}(x)}{\sqrt{\omega}} \frac{\delta}{\delta b_{\omega}} + \int_{0^+}^{\infty} d\omega \frac{\phi_{\omega}^*(x)}{\sqrt{\omega}} b_{\omega} \quad (6)$$

o fator $\omega^{\frac{1}{2}}$ sendo introduzido por conveniência para simplificar as relações de comutação entre os b_{ω} e $\frac{\delta}{\delta b_{\omega}}$ e deixar a Hamiltoniana do campo na forma simples

$$H = \int_0^{\infty} d\omega \omega b_{\omega} \frac{\delta}{\delta b_{\omega}}$$

A ortonormalidade das funções (5) é realizada com peso $n(x)^{-1}$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n(x)} \phi_{\omega}^*(x) \phi_{\omega'}(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{n(x)} e^{i(\omega-\omega')\xi(x)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi(-\infty)}^{\xi(\infty)} du e^{-i(\omega-\omega')u} \stackrel{\text{def.}}{=} \delta(\omega-\omega') \end{aligned} \quad (7)$$

Desta relação obtemos:

$$\begin{aligned} b_{\omega} &= \sqrt{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \phi_{\omega}(x) \frac{dx}{n(x)} \\ \frac{\delta}{\delta b_{\omega}} &= \sqrt{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \phi_{\omega}^*(x) \frac{dx}{n(x)} \end{aligned} \quad \omega > 0 \quad (8)$$

Daí podemos calcular as relações de comutação entre b_{ω} e

$\delta/\delta b_{\omega}$:

$$\left[\frac{\delta}{\delta b_{\omega}}, b_{\omega'} \right] = \sqrt{\omega'} \sqrt{\omega} \left(-\frac{i}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \varepsilon(x-y) \phi_{\omega}^*(y) \phi_{\omega'}(y)$$

onde utilizamos (2). Usando a expressão (5) temos:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta}{\delta b_{\omega}}, b_{\omega'} \right] &= \sqrt{\omega'} \sqrt{\omega} \left(-\frac{i}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\phi_{\omega}^*(x)}{n(x)} \left\{ \int_{-\infty}^x \frac{\phi_{\omega'}(y)}{n(y)} dy - \right. \\ &\quad \left. - \int_x^{\infty} \frac{\phi_{\omega'}(y)}{n(y)} dy \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

Introduzindo:

$$A = \int_{-\infty}^x \frac{\phi_{\omega'}(y)}{n(y)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi(x)} du e^{-i\omega'u} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega'\xi(x)}}{\omega' + i\epsilon}$$

$$B = \int_x^{\infty} \frac{\phi_{\omega'}(y)}{n(y)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi(x)}^{\infty} du e^{-i\omega'u} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega'\xi(x)}}{\omega' - i\epsilon}$$

e portanto:

$$A - B = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega'\xi(x)}}{\omega' + i\epsilon} \left(\frac{1}{\omega' + i\epsilon} - \frac{1}{\omega' - i\epsilon} \right) = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega'\xi(x)}}{\omega'}$$

Esta equação dá o valor de colchetes da expressão (9) e portanto:

$$\left[\frac{\delta}{\delta b_{\omega}}, b_{\omega'} \right] = \frac{\sqrt{\omega'} \sqrt{\omega}}{2\pi \omega'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{n(x)} e^{i(\omega - \omega')\xi(x)} = \frac{\sqrt{\omega'} \sqrt{\omega}}{\omega'} \delta(\omega - \omega') = \delta(\omega - \omega')$$

(10)

Analogamente ao caso fermiônico introduzimos o operador de transporte paralelo $\Pi(x)$. Da covariância do operador bosônico, isto é, $[\Pi(x), \Phi(y)] = 0$ temos com $\Pi(x) = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} + \Gamma(x)$:

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} \Phi(y) = - [\Gamma(x), \Phi(y)] \quad (11)$$

ou em forma expandida:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d\omega \left\{ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\phi(\omega(y))}{\sqrt{\omega}} \frac{\delta}{\delta b_\omega} + \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\phi^*(\omega(y))}{\sqrt{\omega}} b_\omega \right\} = \\ & = - \int_0^\infty d\omega \left\{ \frac{\phi(\omega(y))}{\sqrt{\omega}} [\Gamma(x), \frac{\delta}{\delta b_\omega}] + \frac{\phi^*(\omega(y))}{\sqrt{\omega}} [\Gamma(x), b_\omega] \right\} \end{aligned}$$

ou:

$$[\Gamma(x), \frac{\delta}{\delta b_{\omega'}}] = - \int_0^\infty d\omega \left\{ \langle \omega' | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | \omega \rangle \frac{\delta}{\delta b_\omega} + \langle \omega' | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | -\omega \rangle b_\omega \right\} \quad (12)$$

$$[\Gamma(x), b_{\omega'}] = - \int_0^\infty d\omega \left\{ \langle -\omega' | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | \omega \rangle \frac{\delta}{\delta b_\omega} + \langle -\omega' | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | -\omega \rangle b_\omega \right\} \quad (13)$$

As equações (12) e (13) admitem a solução:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) = & \iint_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \langle \omega | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | \omega' \rangle \left\{ \theta(\omega) \theta(\omega') b_\omega \frac{\delta}{\delta b_{\omega'}} + \frac{1}{2} \theta(\omega) \theta(-\omega') b_\omega b_{-\omega'} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \theta(-\omega) \theta(\omega') \frac{\delta}{\delta b_{-\omega}} \frac{\delta}{\delta b_{\omega'}} \right\} + \mathcal{A}(x) \end{aligned} \quad (14)$$

onde definimos:

$$\begin{aligned}
 \langle w | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | w' \rangle &= \frac{\sqrt{|w|}}{\sqrt{|w'|}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{u(y)} \phi_w^*(y) \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} \phi_{w'}(y) = \\
 &= \sqrt{\left| \frac{w}{w'} \right|} \int_x^{\infty} \frac{dy}{u(y)} \phi_w^*(y) \frac{i w'}{i u^2(x)} \phi_{w'}(y) = \text{sgn } w w' \frac{\sqrt{|w w'|}}{2\pi i u^2(x)} \int_{\zeta(x)}^{\infty} du e^{i(w-w')u} \\
 &= \frac{\sqrt{|w w'|} \text{sgn } w w'}{2\pi i u^2(x)} \frac{e^{i(w-w')\zeta(x)}}{w-w' + i\epsilon} \quad (15)
 \end{aligned}$$

De (15) obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle w | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | w' \rangle &= - \langle -w' | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | -w \rangle \\
 \langle w | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | -w' \rangle &= \langle w' | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | -w \rangle \quad (16) \\
 \langle -w | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | w' \rangle &= \langle -w' | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | w \rangle
 \end{aligned}$$

A fim de calcular o comutador de operadores bilineares nos bosons do tipo:

$$0 = b A b + \frac{\delta}{\delta b} B \frac{\delta}{\delta b} + b C \frac{\delta}{\delta b} \quad (17)$$

usamos

$$\begin{aligned}
 [O_1, O_2] &= b (2C_1 A_2 - 2C_2 A_1) b + \frac{\delta}{\delta b} (2B_1 C_2 - 2B_2 C_1) \frac{\delta}{\delta b} \\
 &+ b (4B_1 A_2 - 4B_2 A_1 + C_1 C_2 + C_2 C_1) \frac{\delta}{\delta b} + 2\text{Tr}(B_1 A_2 - B_2 A_1) \quad (18)
 \end{aligned}$$

Da condição de curvatura nula $[\Pi(x), \Pi(y)] = 0$ temos:

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} \Gamma(y) - \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(y)} \Gamma(x) = -[\Gamma(x), \Gamma(y)] \quad (19)$$

Tomando-se o valor esperado no vácuo segue-se:

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} A(y) - \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(y)} A(x) = -\frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} dw dw' \langle w | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} | w' \rangle \times \\ &\times \langle w' | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(y)} | w \rangle [\theta(w)\theta(-w') - \theta(-w)\theta(w)] \end{aligned} \quad (20)$$

Há uma mudança de sinal em relação à fórmula análoga para o caso dos férmions devido a mudança de sinal de termo B em (14).

Substituindo (15) em (20) é integrando, obtemos:

$$\begin{aligned} G(x, y) &= -\frac{1}{8\pi n^2(x)n^2(y)} \iint_{-\infty}^{\infty} dw dw' \frac{ww'}{(w-w')^2 - \epsilon^2} e^{i(w-w')(\zeta(x) - \zeta(y))} \times \\ &\times [\theta(w)\theta(-w') - \theta(-w)\theta(w)] = -\frac{1}{8\pi n^2(x)n^2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \frac{1}{\sigma^2 - \epsilon^2} e^{i\sigma(\zeta(x) - \zeta(y))} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dw' w' (w' + \sigma) [\theta(w' + \sigma)\theta(-w') - \theta(-w' - \sigma)\theta(w')] \end{aligned} \quad (21)$$

Agora:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega' (\omega' + \sigma) [\Theta(\omega' + \sigma) \Theta(-\omega') - \Theta(-\omega' - \sigma) \Theta(\omega')] = \\
& = \Theta(\sigma) \int_{-\sigma}^0 d\omega' \omega' (\omega' + \sigma) - \Theta(-\sigma) \int_0^{-\sigma} d\omega' \omega' (\omega' + \sigma) = \Theta(\sigma) \left(-\frac{1}{6} \sigma^3\right) \\
& \quad - \Theta(-\sigma) \left(\frac{1}{6} \sigma^3\right) = -\frac{1}{6} \sigma^3
\end{aligned}$$

o qual introduzido em (21) dá:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1(x, y) &= \frac{1}{48 \pi^2 n^2(x) n^2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \sigma e^{i\sigma(\xi(x) - \zeta(y))} = \frac{-i}{24 \pi n(x) n(y)} \partial_x \delta(x - y) \\
& \qquad \qquad \qquad (22)
\end{aligned}$$

o que é, conforme o esperado, o dobro do valor correspondente da curvatura para os férmions de Majorana-Weyl.

III. 4) Caso bosônico no círculo

III. 4.1) Condições de contorno antiperiódicas

O problema do autovalores com condições de contorno antiperiódicos

$$\Phi(\sigma=0) = -\Phi(\sigma=2\pi) \tag{1}$$

tem como autofunções

$$\begin{aligned}
h \phi_n(\sigma) &= \omega_n \phi_n(\sigma) \\
\phi_n(\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\omega_n \zeta(\sigma)} \tag{2}
\end{aligned}$$

onde $h = i n(\sigma) d\sigma$; $\int_0^{2\pi} n(\sigma) d\sigma = L$

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{L} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

onde $\xi(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{d\sigma'}{n(\sigma')}$. De modo similar ao caso do contínuo a expansão do operador bosônico é:

$$\Phi(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\phi_n(\sigma)}{\sqrt{\omega_n}} \frac{\delta}{\delta b_n} + \frac{\phi_n^*(\sigma)}{\sqrt{\omega_n}} b_n \right\} \quad (4)$$

onde o fator $\omega_n^{-\frac{1}{2}}$ com $n \geq 0$ é introduzido pelo mesmo argumento caso do contínuo. As relações de comutação entre b_n e $\frac{\delta}{\delta b_m}$ são determinadas à partir da correspondente relação de comutação do operador bosônico (4): $[\Phi(\sigma), \Phi(\sigma')] = -\frac{i}{2} \epsilon(\sigma - \sigma')$ dando::

$$\left[\frac{\delta}{\delta b_n}, b_m \right] = \delta_{n,m} \quad (5)$$

com a Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\sigma n(\sigma) : (\partial_\sigma \Phi(\sigma))^2 : = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k b_k \frac{\delta}{\delta b_k} \quad (6)$$

Com a nossa experiência adquirida anteriormente no caso contínuo podemos, sem mais, escrever a forma explícita do operador conexão:

$$\begin{aligned} \Gamma(\sigma) = & \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} \langle \omega_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | \omega_m \rangle \left\{ \theta(\omega_k) \theta(\omega_m) b_k \frac{\delta}{\delta b_m} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \theta(\omega_k) \theta(-\omega_m) b_k b_{-m-1} - \frac{1}{2} \theta(-\omega_k) \theta(\omega_m) \frac{\delta}{\delta b_{-k-1}} \frac{\delta}{\delta b_m} \right\} + A(\sigma) \quad (7) \end{aligned}$$

De forma semelhante ao caso contínuo o rotacional de $A(\sigma)$ escreve-se:

$$G(\sigma, \sigma') = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} A(\sigma') - \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma')} A(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} \langle w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_m \rangle \times$$

$$\times \langle w_m | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma')} | w_k \rangle [\theta(w_k) \theta(-w_m) - \theta(-w_k) \theta(w_m)] \quad (8)$$

Agora por definição temos:

$$\langle w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | w_m \rangle = \sqrt{\frac{|w_k|}{|w_m|}} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma'}{n(\sigma')} \phi_k^*(\sigma') \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} \phi_m(\sigma') =$$

$$= \text{sgn } w_m \frac{\sqrt{|w_m w_k|}}{L n^2(\sigma)} \times \frac{e^{i(w_k - w_m)\zeta(\sigma)}}{w_k - w_m} \quad ; m \neq k \quad (9)$$

Substituindo (9) em (8) segue-se:

$$G(\sigma, \sigma') = -\frac{1}{2 n^2(\sigma) n^2(\sigma') L^2} \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} \frac{w_m w_k}{(w_k - w_m)^2} e^{i(w_k - w_m)(\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma'))} \times$$

$$\times [\theta(w_k) \theta(-w_m) - \theta(-w_k) \theta(w_m)] = -\frac{1}{8 n^2(\sigma) n^2(\sigma') L^2} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{l^2} e^{2\pi i l \frac{\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma')}{L}} \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (2m+1)(2m+2l+1) [\theta(w_{2+m}) \theta(-w_m) - \theta(-w_{2+m}) \theta(w_m)] \quad (10)$$

Agora vale:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (2m+1)(2m+2l+1) [\theta(w_{2+m}) \theta(-w_m) - \theta(-w_{2+m}) \theta(w_m)] =$$

$$= \left[\theta(w_{l-1}) \sum_{m=-l}^{-1} - \theta(-w_l) \sum_{m=0}^{l-1} \right] (2m+1)(2m+2l+1) = -\frac{1}{3} l(2l^2+1)$$

e portanto (10) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 F(\sigma, \sigma') &= \frac{1}{8n^2(\sigma)n^2(\sigma')L^2} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{2l^2+1}{3l} e^{2\pi i l \frac{\xi(\sigma)-\xi(\sigma')}{L}} = \\
 &= -\frac{i}{24\pi n(\sigma)n(\sigma')} \partial_{\sigma} S(\sigma-\sigma') + \frac{i\pi}{24n^2(\sigma)n^2(\sigma')L^2} \operatorname{sgn}(\sigma-\sigma') - \\
 &\quad - \frac{i\pi [\xi(\sigma) - \xi(\sigma')]}{12n^2(\sigma)n^2(\sigma')L^3}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Daí podemos escrever:

$$A(\sigma) = \frac{1}{48\pi n^2(\sigma)} \partial_{\sigma} n(\sigma) - \frac{\pi}{24n^2(\sigma)L} \left[\frac{\xi(\sigma)}{L} - \frac{1}{2} \right] + \frac{\delta}{\delta n(\sigma)} F[n(\sigma)] \tag{12}$$

Notemos que o segundo termo de $A(\sigma)$ é não local em $n(\sigma)$ e que o último termo é uma derivada funcional total que corresponde à liberdade de "gauge". O colchete do segundo termo da expressão (12) é antiperiódico em σ .

Observamos que para $L \rightarrow \infty$ recaímos nas expressões já obtidos no caso do contínuo. O terceiro termo em (12) proporcional a $\frac{1}{2}$ é trivial porque pode ser observado por uma redefinição de F :

$$F \rightarrow F + \frac{\pi}{48L} \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma'}{n(\sigma')} \tag{13}$$

III.4.2) Condições de contorno periódicas

O problema de autovalores com condições anitperiódicas

$$\Phi(\sigma=0) = +\Phi(\sigma=2\pi) \quad (14)$$

tem como autofunções

$$\begin{aligned} h\phi_n(\sigma) &= \omega_n \phi_n(\sigma) \\ \phi_n(\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\omega_n \xi(\sigma)} \end{aligned} \quad (15)$$

onde

$$\begin{aligned} h &= i\hbar(\sigma) \partial_r, \quad \xi(2\pi) = L \\ \omega_n &= \frac{2n\pi}{L} \quad n=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

onde $\xi(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{d\sigma'}{v(\sigma')}$

Expandimos agora o operador bosônico de forma idêntica a (4), excluimos contudo o modo zero devido a ser singular o que representamos pela prima do sinal de somatório.

$$\Phi(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{b_n}{\sqrt{\omega_n}} \phi_n^*(\sigma) + \frac{\phi_n(\sigma)}{\sqrt{\omega_n}} \frac{\delta}{\delta b_n} \right\} \quad (17)$$

Da relação de comutação dos $\Phi(\sigma)$:

$$[\Phi(\sigma), \Phi(\sigma')] = -\frac{i}{2} \epsilon(\sigma - \sigma') \quad (18)$$

deduzimos de (17) a relação de comutação para os b_n e $\delta/\delta b_n$:

$$\left[\frac{\delta}{\delta b_n}, b_m \right] = \delta_{n,m} \quad (19)$$

A Hamiltoniana calculada a partir de (17) é:

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k b_k \frac{\delta}{\delta b_k} \quad (20)$$

O operador conexão tem naturalmente a mesma forma do caso antiperiódico (7), da mesma forma o elemento matricial e expressado por (9), mas agora com ω_m dada por (16). A curvatura também possui a mesma forma:

$$\begin{aligned} F(\sigma, \sigma') &= \frac{-1}{2n^2(\sigma)n^2(\sigma')L^2} \sum_{\substack{k,m=-\infty \\ k,m \neq 0}}^{\infty} \frac{\omega_m \omega_k}{(\omega_k - \omega_m)^2} e^{i(\omega_k - \omega_m)(\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma'))} \\ &\times [\theta(\omega_k)\theta(-\omega_m) - \theta(-\omega_k)\theta(\omega_m)] = -\frac{1}{8n^2(\sigma)n^2(\sigma')L^2} \sum_{\substack{\ell=-\infty \\ \ell \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} \times \\ &\times e^{2\pi i \ell \frac{\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma')}{L}} \times \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} (2m)(2m+2\ell) [\theta(\omega_{\ell+m})\theta(-\omega_m) - \\ &- \theta(-\omega_{\ell+m})\theta(\omega_m)] \quad (21) \end{aligned}$$

A segunda soma em (21) é

$$\left[\theta(\omega_{\ell-1}) \sum_{m=-\ell+1}^{-1} - \theta(-\omega_{\ell+1}) \sum_{m=1}^{-\ell-1} \right] 4(m^2 + m\ell) = -\frac{2}{3} \ell(\ell^2 - 1) \quad (22)$$

e portanto (21) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 F(\sigma, \sigma') &= \frac{1}{8n^2(\sigma)n^2(\sigma')L^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{2(l^2-1)}{3l} e^{2\pi i l \frac{\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma')}{L}} = \\
 &= \frac{-i}{24\pi n(\sigma)n(\sigma')} \partial_{\sigma} \delta(\sigma - \sigma') - \frac{i\pi}{12n^2(\sigma)n^2(\sigma')L^2} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma') - \\
 &\quad - \frac{i\pi [\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma')]}{6n^2(\sigma)n^2(\sigma')L^3}
 \end{aligned} \tag{23}$$

Daí podemos escrever

$$A(\sigma) = \frac{1}{48\pi n^2(\sigma)} \partial_{\sigma} n(\sigma) + \frac{\pi}{12n^2(\sigma)L} \frac{\zeta(\sigma)}{L} + \frac{\delta}{8n(\sigma)} F[n(\sigma)] \tag{24}$$

Podemos observar que o termo mais singular é o mesmo do caso antiperiódico como deve ser e que os termos de contorno (24) são o dobro do caso antiperiódico. Este comportamento, semelhante ao caso fermiônico, nos indica que as teorias bosônica e fermiônica são equivalentes para condições o postas de contorno.

CAPÍTULO IV

A fase de Berry e a Anomalia Gravitacional

No capítulo anterior calculamos a curvatura do fibrado vetorial de espaços de Hilbert sobre a variedade \mathcal{M} . Neste capítulo veremos a relação desta curvatura com a anomalia gravitacional com o auxílio da fase de Berry.

Esta relação é devida ao fato de que a fase de Berry pode ser interpretada como a ação efetiva da teoria considerada. No apêndice B fazemos uma revisão do conceito de ação efetiva, e nos apêndices C e D calculamos a ação efetiva da teoria fermiônica e bosônica, os resultados coincidindo com os obtidos neste capítulo. Antes de passarmos para a fase de Berry no contexto da teoria quântica de campos, faremos uma pequena revisão de como a fase de Berry na mecânica quântica pode ser vista como uma modificação da ação efetiva.

IV.1) Significado Dinâmico da Fase de Berry

No capítulo I vimos como um trajeto adiabático ao longo de um laço fechado C no espaço de parâmetros externos da Hamiltoniana a função de onda do sistema ganha uma fase extra em adição à fase dinâmica convencional.

$$\psi_n(T) = \exp[i\Gamma_n(C)] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^T E_n(R(t)) dt\right] |u_n(R(T))\rangle \quad (1)$$

Como vimos a fase de Berry está associada com o cruzamento dos níveis de energia que proporciona uma topologia não trivial ao espaço de parâmetros. Nesse sentido B.

Simon [2] deu à fase de Berry o significado topológico de holonomia do fibrado vetorial das funções de onda parametrizadas.

Na expressão (1) a fase de Berry tem um significado estático, i.e., o desenvolvimento no tempo dos parâmetros externos é dado no começo. Mas na verdade os parâmetros são objetos dinâmicos, por exemplo no caso da teoria de Born-Oppenheimer, a distância internuclear que é congelada no processo adiabático, deve ser considerada um objeto dinâmico. Uma indicação do significado dinâmico da Fase de Berry é a de potencial vetor que aparece na Hamiltoniana como vimos no ítem I.1). O argumento contudo tinha natureza local, agora generalizaremos [11] esta interpretação para ressaltar a natureza global do problema. Para isto adaptaremos a formulação de integral de trajetória para o problema da interação de dois sistemas, cujas variáveis são denotadas convencionalmente como internas e externas; q e X respectivamente. Adaptaremos como Hamiltoniana $\hat{H} = \hat{h}(q, X) + \hat{H}_0(p, X)$ onde a Hamiltoniana interna \hat{h} não depende do momento conjugado a X . Consideremos o traço do operador evolução $K(T) = \text{Tr} [\exp(-i\hat{H}T/\hbar)]$ que é escrito como:

$$K(T) = \sum_n \int \langle n(x_0), x_0 | \exp[-i\hat{H}T/\hbar] | n(x_0), x_0 \rangle d\mu(x_0) \quad (2)$$

Na equação (2) é considerado uma transição do estado inicial na forma de produto $|n(x_0), x_0\rangle (\equiv |n(x_0)\rangle \otimes |x_0\rangle)$ retornando via laços fechados ao mesmo estado, onde $|x_0\rangle$ denota o autoestado de \hat{X} e $|n(x_0)\rangle$ é o autoestado de $\hat{h}(q, x_0)$ quando $X = x_0$ com autovalor $E_n(x_0)$. Discretizando o tempo e utilizando a relação de completeza para X , temos

$$\begin{aligned} & \langle u(x_0), x_0 | \exp[-i\hat{H}T/\hbar] | u(x_0), x_0 \rangle = \\ & = \int \prod_{k=1}^{N-1} d\mu(x_k) \langle u(x_0), x_0 | \exp[-i\hat{H}\epsilon/\hbar] | x_{N-1} \rangle \cdots \langle x_1 | \exp[-i\hat{H}\epsilon/\hbar] | u(x_0), x_0 \rangle \end{aligned}$$

com $\epsilon = T/N$. Para $\epsilon \approx 0$ temos:

$$\begin{aligned} \langle x_k | \exp[-i\hat{H}\epsilon/\hbar] | x_{k-1} \rangle & \approx \langle x_k | \exp[-i\hat{H}_0\epsilon/\hbar] | x_{k-1} \rangle \times \\ & \times \exp[-i\hat{h}(x_k)\epsilon/\hbar] = \int dP_k \exp[(iP_k(x_k - x_{k-1}) - i\hat{H}_0(x_k, P_k)\epsilon)/\hbar] \times \\ & \times \exp[-i\hat{h}(x_k)\epsilon/\hbar] \end{aligned} \quad (4)$$

A equação (2) pode ser reescrita como:

$$K(T) = \sum_{\tilde{c}} \int T_{in}(c) \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_0(c)\right] \prod_t d\mu(x_t, p_t) \quad (5)$$

onde $S_0(c) \equiv \int (p\dot{x} - H_0) dt$ é a ação para o sistema externo ao longo de laços fechados c . $T_{in}(c)$ é a amplitude de transição interna dada por:

$$T_{in}(c) = \langle u(x_0) | \exp[-i\hat{h}(N)\epsilon/\hbar] \cdots \exp[-i\hat{h}(1)\epsilon/\hbar] | u(x_0) \rangle \quad (6)$$

(6) é o produto ordenado no tempo onde $\hat{h}(k)$ denota a Hamiltoniana no ponto $X=x_k$ do laço c . Se chamarmos de $|\phi_u(t)\rangle$ a solução da eq. de Schrödinger dependente do tempo;

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{h}(q, x_t)\right) |\phi_u(t)\rangle = 0 \quad \text{com condição inicial}$$

$$|\phi_u(0)\rangle = |u(x_0)\rangle, \quad T_{in}(c) \text{ é escrito como}$$

$$T_{in}(c) = \langle u(x_0) | \phi_u(T) \rangle.$$

Suponhamos agora que o período T seja grande. Inserindo a relação de completeza para os estados do sistema interno para cada ponto das variáveis externas x_k ; $\sum_{m_k} |m_k\rangle\langle m_k| = 1$ a eq. (6) é reescrita como:

$$T_{nn}(C) = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_{N-1}} \langle n(x_0) | \exp[-i\hat{h}(N)\epsilon/\hbar] | m_{N-1} \rangle \cdots \times \langle m_k | \exp[-i\hat{h}(k)\epsilon/\hbar] | m_{k-1} \rangle \cdots \times \langle m_1 | \exp[-i\hat{h}(1)\epsilon/\hbar] | n(x_0) \rangle \quad (7)$$

Da aproximação adiabática considera-se somente transições entre estados com o mesmo número quântico n ;

$\langle n_k | \exp[-i\hat{h}(k)\epsilon/\hbar] | n_{k-1} \rangle$. Utilizando a relação $\hat{h}(k) | n_k \rangle = E_n(k) | n_k \rangle$ ($E_n(k)$ é a energia do nível adiabático no ponto $x=x_k$) obtemos:

$$T_{nn}(C) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^T E_n(x_t) dt\right] \langle n(x_0) | n(x_T) \rangle_C \quad (8)$$

onde $\langle n(x_0) | n(x_T) \rangle_C$ é dado como um produto infinito

$$\langle n(x_0) | n(x_T) \rangle_C = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \langle n(x_k) | n(x_{k-1}) \rangle \quad (9)$$

onde foi adaptada a convenção de fase $|n(x_0)\rangle = |n(x_T)\rangle$. A expressão (9) envolve a história da excursão no espaço a qual é indicada pelo sufixo C . Cada fator $\langle n(x_k) | n(x_{k-1}) \rangle$ define uma "conexão" entre os pontos separados infinitesimalmente x_{k-1} e x_k , (9) nos dá uma conexão finita ao longo do Circuito C pela divisão de pontos $\{x_k\}$ logo da relação aproximada

$$\langle n(x_k) | n(x_{k-1}) \rangle \approx 1 - \langle n | \frac{\partial}{\partial x_i} | n \rangle \Delta x_i \approx \exp[iw]$$

A eq. (9) é reescrita como:

$$\langle u(x_0) | u(x_T) \rangle_c = \exp [i \Gamma_u(c)] \quad (10)$$

com

$$\Gamma_u(c) = \oint_c \omega = \oint_c \langle u | i \frac{\partial}{\partial x_k} | u \rangle dx_k \quad (11)$$

A eq. (11) é a fase de Berry, que foi agora derivada com um argumento similar ao de B. Simon [2]. Podemos agora escrever a integral de trajetória efetiva associada à mudança adiabática da variável externa X :

$$K^{ef}(T) = \sum_n \int \exp \left[\frac{i}{\hbar} (S_n^{ad} + \hbar \Gamma_u(c)) \right] \prod_t d\mu(x_t, p_t) \quad (12)$$

onde

$$S_n^{ad} = S_0 - \int_0^T E_n(x_t) dt$$

é ação adiabática.

De (12) temos o significado dinâmico da fase $\Gamma_u(c)$: é uma ação topológica que modifica a ação efetiva usual. Se escrevermos $\omega = A_i x_i dt$ com $A_i = \langle u | i \frac{\partial}{\partial x_i} | u \rangle$ a ação efetiva (12) pode ser interpretada como a ação de um campo "gauge" efetivo descrito pelo "potencial vetor A ".

IV.2) Fase de Berry em teoria quântica de campos

Para fixar as idéias consideremos o transporte a-

diabático do vácuo de um sistema de bósons e férmions situados num campo gravitacional externo.

Nos interessam fermions de Weyl-Majorana descritos pela Hamiltoniana:

$$H_F = -\frac{1}{2} \int dx u(x) : \chi(x) i \partial_x \chi(x) : \quad (13a)$$

ou bósons quirais descritos por:

$$H_B = \frac{1}{2} \int dx u(x) : [\partial_x \Phi(x)]^2 : \quad (13b)$$

como foi visto anteriormente o campo gravitacional é representado pela função positiva $u(x)$.

Façamos agora $u(x)$ depender do tempo t de modo adiabático com a condição $u(x,0) = u(x,T)$. A eq. de Schrödinger dependente do tempo é:

$$\{ i \partial_t - H [u(x,t)] \} \Psi [u(x,t)] = 0 \quad (14)$$

neste caso a eq. (11) da fase de Berry, com a substituição do índice discreto k pelo contínuo x é:

$$\gamma(T) = \int_0^T dt \int dx \dot{u}(x,t) \langle \text{vac}, u(x,t) | \frac{1}{i} \frac{\Delta}{\Delta u(x,t)} | \text{vac}, u(x,t) \rangle \quad (15)$$

A fase de Berry (15) pode ser reescrita, lembrando a definição de $\Pi(x)$ introduzido no capítulo III como operador de transporte paralelo dos funcionais de onda do sistema quântico:

$$\begin{aligned}
 n(T) &= \int_0^T dt \int dx \dot{u}(x,t) \langle \text{vac}, u(x,t) | \Pi(x,t) | \text{vac}, u(x,t) \rangle = \\
 &= \int_0^T dt \int dx \dot{u}(x,t) A(x,t) \quad (16)
 \end{aligned}$$

onde: $\Pi(x) = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)} + \Gamma(x)$

com $A(x,t) = \langle \text{vac}, u(x,t) | \Gamma(x) | u(x,t), \text{vac} \rangle$ (17)

Na expressão (16) foi usado o fato de que sempre podemos redefinir o vácuo por uma fase funcional de $u(x)$:

$$| \text{vac}, u(x,t) \rangle \Rightarrow e^{i\kappa[u]} | \text{vac}, u(x,t) \rangle \quad (18)$$

Como anteriormente podemos reescrever a fase de Berry (16) como uma integral de "loop" no espaço dos $u(x)$:

$$\nu = \oint du(x) A = \int \mathcal{F} \quad [\text{mod } 2\pi] \quad (19)$$

com $\mathcal{F} = \delta A$ (20)

A expressão (20) mostra que a teoria é invariante pelas transformações de "gauge" de uma fase funcional de $u(x)$:

$$A \rightarrow A + d\Lambda[u] = A + \frac{\delta}{\delta u(x)} \Lambda[u]$$

Isto é consistente com o procedimento indicado em (18).

Na expressão (20) é a curvatura do fibrado construído sobre \mathcal{M} (espaço dos $u(x)$). A fibra sendo o espaço de

Fock para cada $u(x)$.

Veremos agora que o termo (16) corresponde à aproximação adiabática da anomalia gravitacional de fermions ou bósons quirais.

No caso dos fermions de Majorana-Weyl com condições de contorno de Neveu-Schwartz temos III 2.1. (24):

$$A(x) = \frac{1}{96\pi} \frac{\partial_x u(x)}{u^2(x)} + \frac{\pi}{24u^2(x)L} \left\{ \frac{\zeta(x)}{2} - \frac{1}{2} \right\} + \frac{\delta}{8u(x)} F[u] \quad (21)$$

onde $\zeta(x) = \int_0^x \frac{dy}{u(y)}$. No caso de condições de contorno de Ramond a expressão para $A(x)$ é análoga a (21) com o 2º termo dependente em L trocando de sinal e sendo multiplicado por 2. No caso dos bósons quirais com condições de contorno periódicas a expressão é análoga a (21) a menos de um fator 2 que multiplica toda a expressão. Com o auxílio de expressão (21) podemos escrever a ação efetiva (ítem IV.1) como:

$$S_{\text{ef.}} = S_0 + S_1 + \dots = S_0 + \int dx dt u(x,t) A(x,t) = S_0 + \int dx dt \left[\frac{1}{96\pi} (\partial_t \log u(x,t)) (\partial_x \log u(x,t)) + \frac{\pi}{24L^2} (\partial_t u^{-1}(x,t)) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\partial_x} u^{-1}(x,t) + \dots \right] \quad (22)$$

onde S_0 é o componente estática e a aproximação adiabática sendo exata à menos de correções de segunda ordem nos derivadas temporais.

Consideremos agora um campo gravitacional fraco:

$$u(x) = \frac{1-h_+^+}{1+h_+^+} \cong 1-2h_+^+ \quad (23)$$

Até segunda ordem em h_+^+ a ação efetiva (22) escreve-se:

$$S_{\text{ef}} = S_0 - \frac{1}{24\pi} \int d^2x h_+^+ \partial_t \partial_x h_+^+(x,t) - \frac{\pi}{6L^2} \int d^2x h_+^+(x,t) \frac{\partial_t}{\partial_x} h_+^+(x,t) \quad (24)$$

O segundo termo do lado direito desta última expressão reproduz a ação efetiva do apêndice C na aproximação adiabática:

$$S_{\text{anom.}} = -\frac{1}{48\pi} \int d^2x h_+^+(x,t) \frac{\partial_+^3}{\partial_-} h_+^+(x,t) \quad (25)$$

$$\text{com } \partial_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_t \pm \partial_x)$$

De fato:

$$\begin{aligned} \frac{p_+^3}{p_-} &= \frac{1}{2} \frac{(p_x + p_t)^2}{p_t - p_x} = \frac{1}{2} \frac{(p_x^3 + 3p_x^2 p_t + 3p_x p_t^2 + p_t^3)}{p_t - p_x} \cong \\ &\cong \frac{1}{2} (p_x^3 + 3p_x^2 p_t + 3p_x p_t^2 + p_t^3) \frac{1}{p_x} \left(-1 + \frac{p_t}{p_x}\right) \cong -\frac{1}{2} p_x^2 + 2p_x p_t \end{aligned}$$

na aproximação linear em ∂_t .

Observe que a expressão (25) é a única ação inva

riante de Lorentz adimensional e que reproduz o termo linear em ∂_t na fase de Berry.

O último termo de (24) corresponde a correção de volume finito do espaço e desaparece para $L \rightarrow \infty$

Por um procedimento análogo [15] o último termo de expressão (24) pode ser obtido à partir da aproximação adiabática de quantidade covariante de Lorentz:

$$+ \frac{\pi}{12L^2} \int d^3x h_+^+(x,t) \frac{\partial_+}{\partial_-} h_-^+(x,t)$$

CAPÍTULO V

Álgebra de Virasoro

No capítulo IV interpretamos a curvatura \mathbb{F} como uma anomalia gravitacional, neste capítulo veremos que a curvatura também surge na álgebra dos geradores de difeomorfismos (i.e. transformações conformes) como um termo de Schwinger. Obtemos assim a conhecida álgebra de Virasoro [19] com extensão central.

V.1) Caso Fêrmiônico

Queremos examinar agora a relação entre a curvatura $\mathbb{F}(s,s')$ do caso discreto (Neveu-Schwartz ou Ramond) com a álgebra de Virasoro. Devido a nossa interpretação da curvatura como uma anomalia gravitacional fazemos as considerações que se seguem. Consideremos uma transformação infinitesimal geral de coordenadas:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + f'^\mu(x) \quad (1)$$

Neste caso os "zweibein" transformam-se como

$$\delta_f' e_\mu^a(x) = f'^r \partial_r e_\mu^a - \partial_\mu f'^r(x) e_r^a(x) \quad (2)$$

e da definição de $\nu(x)$ no Capítulo II:

$$\nu(x) = \frac{e_-^- - e_-^+}{e_-^- + e_-^+} \quad (3)$$

temos para uma transformação estática com $f'^0(x)=0$, que $\nu(x)$ se

transforma como (ver seção II.2)

$$\delta_f u(x) = f(x) \partial_x u(x) - u(x) \partial_x f(x) = (f, u)(x) \quad (4)$$

onde introduzimos o parênteses de Lie:

$$(f, g)(x) = f(x) \partial_x g(x) - g(x) \partial_x f(x) \quad (5)$$

Obtemos assim um álgebra de Lie para os

$$(\delta_f \delta_g - \delta_g \delta_f) u(x) = -\delta_{(f, g)} u(x) \quad (6)$$

Na teoria quântica de campos conforme, uma simetria contínua é dada pela exponenciação de um operador Hermiteano. Para a simetria (6) ela é realizada quanticamente pela exponenciação do seguinte gerador infinitesimal:

$$T_f = \int_0^{2\pi} d\sigma (f, u)(\sigma) \Pi(\sigma) \quad (7)$$

$$[u(\sigma), T_f] = i \delta_f u(\sigma)$$

onde $\Pi(\sigma)$ é o operador que realiza o transporte paralelo em \mathcal{M} , (7) satisfaz a álgebra:

$$[T_f, T_g] = i T_{(f, g)} \quad (8)$$

Obtemos portanto uma representação fiel da álgebra (6). A unitariedade da representação do grupo pode ser comprovada considerando o domínio de T_f . É suficiente que a norma

do estado criado por T_f do vácuo seja finita:

$$\|T_f|vac,u\rangle\|^2 - \|\langle vac,u|T_f|vac,u\rangle\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{2\pi} d\sigma (f,u)(\sigma) \cdot \right. \\ \left. \times \langle w_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} |w_m\rangle \right|^2 \theta(w_k) \theta(-w_m) < \infty$$

Onde este resultado é válido tanto para o caso de condições de contorno periódicas ou antiperiódicas.

Já que $\Pi(\sigma)$ comuta com o operador fermiônico, T_f não transforma os campos. Sua ação é uma transformação passiva da métrica. No nível clássico a covariância da Hamiltoniana implica em que uma transformação passiva da métrica seja equivalente a uma transformação ativa dos campos. Veremos que quanticamente isto não é mais certo, devido à presença das anomalias.

Com esse fim consideremos o operador

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\sigma f(\sigma) : \Psi(\sigma) i \partial_\sigma \Psi(\sigma) : \quad (9)$$

que gera uma transformação infinitesimal conforme no fermion (o qual possui peso conforme meio:

$$i \delta_f \Psi(\sigma) = [\Psi(\sigma), \mathcal{L}_f] = +i \left[f(\sigma) \partial_\sigma + \frac{1}{2} \partial_\sigma f(\sigma) \right] \Psi(\sigma) \quad * (10)$$

Para simplificar a notação particularizamos agora para o caso de condições de contorno de Neveu-Schwartz. Neste caso \mathcal{L}_f é expandido como:

(*) eq. 10 - No caso geral de um campo primário de peso Δ_n a transformação infinitesimal correspondente é:

$$\delta_\epsilon \phi_n(z) = \epsilon(z) \frac{\partial}{\partial z} \phi_n(z) + \Delta_n \epsilon'(z) \phi_n(z) \quad (10a)$$

$$\mathcal{L}_f = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} l_f(k,m) \left\{ \theta(\omega_k)\theta(\omega_m) a_k \frac{\delta}{\delta a_m} + \frac{1}{2} \theta(\omega_k)\theta(-\omega_m) a_k a_{m-1} + \frac{1}{2} \theta(-\omega_k)\theta(\omega_m) \frac{\delta}{\delta a_{k-1}} \frac{\delta}{\delta a_m} \right\} \quad (11)$$

onde o operador \mathcal{L}_f foi ordenado normalmente de maneira que o valor esperado no vácuo seja nulo e tornado hermiteano com:

$$l_f(k,m) = - \frac{\omega_k + \omega_m}{2L} \int_0^{2\pi} d\delta \frac{f(\delta)}{n^2(\delta)} e^{i(\omega_k - \omega_m)\xi(\delta)} \quad (12)$$

Outro tipo de ordenamento de \mathcal{L}_f difereriria de (11) pela adição de funcionais de $n(x)$ independentes de a_m e $\delta/\delta a_m$.

Utilizando (11) podemos calcular a álgebra dos \mathcal{L}_f , com a ajuda da fórmula (18) do parágrafo 1) do capítulo III

$$[\mathcal{L}_f, \mathcal{L}_g] = i\mathcal{L}(f,g) + \frac{1}{2} \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} l_f(m,k) l_g(k,m) [\theta(\omega_k)\theta(-\omega_m) - \theta(\omega_m)\theta(-\omega_k)] \quad (13)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (13) pode ser obtido facilmente à partir da cálculo ingênuo da expressão que define \mathcal{L}_f , (9); já o segundo termo é o termo de Schwinger cujo cálculo apresentamos à seguir:

$$\begin{aligned} T.S &= \frac{1}{2} \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} l_f(m,k) l_g(k,m) [\theta(\omega_k)\theta(-\omega_m) - \theta(\omega_m)\theta(-\omega_k)] = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\delta d\delta' \frac{f(\delta)g(\delta')}{8L^2 n^2(\delta)n^2(\delta')} \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} (\omega_k + \omega_m)^2 e^{i(\omega_k - \omega_m)(\xi(\delta) - \xi(\delta'))} \\ &\quad \times [\theta(\omega_k)\theta(-\omega_m) - \theta(\omega_m)\theta(-\omega_k)] \end{aligned} \quad (14)$$

Definindo $k-m=n$ a soma da expressão (14) é:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n \frac{\xi(\sigma) - \xi(\sigma')}{L}} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi^2}{L^2} (2m+n+1)^2 [\theta(w_{m+n})\theta(-w_m) + \theta(w_m)\theta(-w_{m+n})] = \frac{4\pi^2}{3L^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n^2-1) e^{2\pi i n \frac{\xi(\sigma) - \xi(\sigma')}{L}} \quad (15)$$

Inserindo (15) na expressão (14), temos:

$$T.S. = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma d\sigma' \frac{f(\sigma)g(\sigma')}{24L^2 n^2(\sigma)n^2(\sigma')} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi^2}{L^2} (n^3-n) e^{2\pi i n \frac{\xi(\sigma) - \xi(\sigma')}{L}} \quad (16)$$

Agora

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k \frac{\xi(\sigma) - \xi(\sigma')}{L}} = L n(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') \quad (17)$$

logo

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k e^{2\pi i k \frac{\xi(\sigma) - \xi(\sigma')}{L}} = \frac{i}{2\pi} L n(\sigma) \partial_{\sigma'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k \frac{\xi(\sigma) - \xi(\sigma')}{L}} =$$

$$= iL^2 n(\sigma) (n(\sigma') \partial_{\sigma'}) \delta(\sigma - \sigma') \quad (18)$$

$$e \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^3 e^{2\pi i k \frac{\xi(\sigma) - \xi(\sigma')}{L}} = \frac{-iL^3}{8\pi^3} n(\sigma) (n(\sigma') \partial_{\sigma'})^3 \delta(\sigma - \sigma') \quad (19)$$

Inserindo (18) e (19) em (16) obtemos que o termo de Schwinger:

$$T.S. = \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{-i}{48\pi} \left[\frac{f(\sigma)}{n^2(\sigma)} \right] \left\{ [n(\sigma) \partial_{\sigma}]^3 + \frac{4\pi^2}{L^2} n(\sigma) \partial_{\sigma} \right\} \left[\frac{g(\sigma)}{n(\sigma)} \right] \quad (20)$$

Da mesma forma podemos calcular o comutador de T_f com \mathcal{L}_f obtendo:

$$[T_f, \mathcal{L}_f] = \frac{i}{48\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{f(\sigma)}{n^2(\sigma)} \left\{ [u(\sigma)\partial_\sigma]^3 + \frac{4\pi^2}{L^2} u(\sigma)\partial_\sigma \right\} \frac{g(\sigma)}{n(\sigma)} \quad (21)$$

Os termos de Schwinger (20) e (21) são não triviais isto é, não podem ser removidos pela adição de um funcional de um funcional de $u(\sigma)$ independente de a_n e $\delta/\delta a_n$. Para que pudesse ser anulado o termo de Schwinger deveria ser função de $(f, g)(\sigma)$ e somente o segundo termo do lado direito das equações (20) e (21) pode ser reescrito assim. Para anularmos este termo redefinimos o gerador \mathcal{L}_f :

$$\tilde{\mathcal{L}}_f^{NS} = \mathcal{L}_f - \frac{\pi}{24L^2} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{f(\sigma)}{n^2(\sigma)} \quad (22)$$

que satisfaz a álgebra:

$$[\tilde{\mathcal{L}}_f^{NS}, \tilde{\mathcal{L}}_g^{NS}] = i \tilde{\mathcal{L}}_{(f,g)}^{NS} - \frac{i}{48\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{f(\sigma)}{n^2(\sigma)} [u(\sigma)\partial_\sigma]^3 \frac{g(\sigma)}{n(\sigma)} \quad (23)$$

$$[T_f, \tilde{\mathcal{L}}_g^{NS}] = \frac{i}{48\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{f(\sigma)}{n^2(\sigma)} [u(\sigma)\partial_\sigma]^3 \frac{g(\sigma)}{n(\sigma)} \quad (24)$$

A mesma álgebra seria obtida para as condições de contorno de Ramond com o gerador redefinido:

$$\tilde{\mathcal{L}}_f^R = \mathcal{L}_f + \frac{\pi}{12L^2} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{f(\sigma)}{n^2(\sigma)} \quad (25)$$

Notemos que estas redefinições são não locais em $u(x)$ e se anulam no limite do contínuo $L \rightarrow \infty$.

Quando $u(x) = 1$ (23) é a álgebra de Virasoro com extensão central $c = \frac{1}{2}$ como é esperado para um fermion de Majorana-Weyl.

Agora definimos o operador que será o gerador adiabático das transformações do férmion:

$$T_f^{ad} \equiv T_f + \mathcal{L}_f \quad (26)$$

O Hamiltoniano é dado por $H = \mathcal{L}_u$ de (9). Notando que os termos de Schwinger (20) e (21) são nulos quando $f(\sigma) = u(\sigma)$ ou $g(\sigma) = u(\sigma)$ segue-se que

$$[T_f^{ad}, H] = [T_f^{ad}, \mathcal{L}_u] = 0 \quad (27)$$

logo T_f^{ad} não cria nem destrói fermions. Gera portanto transformações adiabáticas em \mathcal{M} . O operador que realiza o transporte paralelo no vácuo pode ser definido como a projeção de $\mathbb{T}(\sigma)$ sobre o vácuo:

$$\mathbb{T}^{ad}(\sigma) \equiv \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} + \langle vac | \mathbb{T}(\sigma) | vac \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} + \mathcal{A}(\sigma) \quad (28)$$

Calculemos agora explicitamente (26):

$$T_f^{ad} = \int_0^{2\pi} d\sigma (f, u)(\sigma) \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} + \int_0^{2\pi} d\sigma (f, u)(\sigma) \frac{1}{i} \mathbb{T}(\sigma) - \quad (29)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\sigma f(\sigma) : \Psi(\sigma) i \partial_\sigma \Psi(\sigma) :$$

Se considerarmos a expansão de $\Gamma(\sigma)^*$ e do operador \mathcal{L}_f expressão (11) teremos como resultado final:

$$T_f^{ad} = \int_0^{2\pi} d\sigma (f, u)(\sigma) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} + A(\sigma) \right) = \int_0^{2\pi} d\sigma (f, u)(\sigma) \Pi^{ad}(\sigma) \quad (30)$$

que justifica a denominação de adiabático para T_f^{ad} definido por (26). O operador T_f^{ad} gera transformações conformes no operador fermiônico:

$$[T_f, \Psi(\sigma)] = [\mathcal{L}_f, \Psi(\sigma)] = -i \delta_f \Psi(\sigma) \quad (31)$$

Onde utilizamos que $[T_f, \Psi(\sigma)] = 0$ e a expressão (10). Construimos portanto um operador que preserva o vácuo e realiza transformações conformes de $\Psi(\sigma)$. Já que $[\mathcal{L}_f, u(\sigma)] = 0$ mostemos também que T_f^{ad} gera transformações de $u(\sigma)$:

$$[T_f^{ad}, u(\sigma)] = [T_f, u(\sigma)] = -i \delta_f u(\sigma) \quad (32)$$

T_f^{ad} satisfaz à seguinte álgebra. De (28) temos:

$$\begin{aligned} [T_f^{ad}, T_g^{ad}] &= i T_{(f,g)}^{ad} + \int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^{2\pi} d\sigma' (f, u)(\sigma) G(\sigma, \sigma') (g, u)(\sigma') = \\ &= i T_{(f,g)}^{ad} + \frac{i}{48\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{f(\sigma)}{u^2(\sigma)} \left\{ [u(\sigma) \partial_\sigma]^3 + \frac{4\pi^2}{L^2} u(\sigma) \partial_\sigma \right\} \frac{g(\sigma)}{u(\sigma)} \end{aligned} \quad (33)$$

* Fórmula (12) de III 2.1.

com extensão central idêntica (à menos de sinal) da álgebra dos \mathcal{L}_f (20), determinada pela curvatura $\mathcal{G}(\sigma, \sigma')$ dada no caso de Neveu-Schwarz pela expressão (23) do item 2.1 do capítulo III. Para o caso de Ramond a extensão central seria dada por (23) do item 2.2.

V. 2) Caso bosônico

Podemos analisar o caso bosônico de forma análoga ao caso fermiônico. Como foi visto no cap. II, item 2 (22a) a variação de métrica por uma transformação ativa de coordenadas pode-se escrever:

$$\delta_f n(\sigma) = (f, n)(\sigma) \quad (1)$$

O gerador das transformações conformes do campo bosônico é definido por:

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\sigma f(\sigma) : [\partial_\sigma \Phi(\sigma)]^2 : \quad (2)$$

$$i \delta_f \Phi(\sigma) = [\Phi(\sigma), \mathcal{L}_f] = i f(\sigma) \partial_\sigma \Phi(\sigma)$$

que é a transformação esperada de um campo de peso conforme n .

O operador \mathcal{L}_f expandido com o auxílio da expressão (4) do item III)4.1. pode ser usado:

$$\partial_\sigma \Phi(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} \left\{ \partial_\sigma \phi_n(\sigma) \frac{\delta}{\delta b_n} + \partial_\sigma \phi_n^*(\sigma) b_n \right\}$$

$$\rightarrow \text{com } \phi_n(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_n \zeta(\sigma)}, \quad \partial_\sigma \phi_n(\sigma) = \frac{-i\omega_n}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i\omega_n \zeta(\sigma)}}{\zeta'(\sigma)} = -\frac{i\omega_n}{n(\sigma)} \phi_n(\sigma)$$

e portanto:

$$\partial_\sigma \Phi(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\sqrt{\omega_n}}{n(\sigma)} \left\{ -\phi_n(\sigma) \frac{\delta}{\delta b_n} + \phi_n^*(\sigma) b_n \right\}$$

Logo:

$$\begin{aligned} :[\partial_\sigma \Phi(\sigma)]^2: &= - \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\omega_n} \sqrt{\omega_k}}{n^2(\sigma)} \left\{ \phi_n(\sigma) \phi_k(\sigma) \frac{\delta}{\delta b_n} \frac{\delta}{\delta b_k} + \right. \\ &+ \phi_n^*(\sigma) \phi_k^*(\sigma) b_n b_k - \phi_n(\sigma) \phi_k^*(\sigma) \frac{\delta}{\delta b_n} b_k - \phi_n^*(\sigma) \phi_k(\sigma) b_n \frac{\delta}{\delta b_n} \left. \right\} = \\ &= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\omega_n} \sqrt{\omega_k}}{n^2(\sigma)} \left\{ 2 \phi_n^*(\sigma) \phi_k(\sigma) b_n \frac{\delta}{\delta b_k} - \phi_n^*(\sigma) \phi_k^*(\sigma) b_n b_k - \right. \\ &- \left. \phi_n(\sigma) \phi_k(\sigma) \frac{\delta}{\delta b_n} \frac{\delta}{\delta b_k} \right\} = 2 \sum_{m,k=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{|\omega_m \omega_k|}}{n^2(\sigma)} \frac{e^{i(\omega_m - \omega_k)\tau(\sigma)}}{L} \times \\ &\times \left\{ \Theta(\omega_m) \Theta(\omega_k) b_m \frac{\delta}{\delta b_k} - \frac{1}{2} \Theta(\omega_m) \Theta(-\omega_k) b_m b_{-k-1} - \frac{1}{2} \Theta(-\omega_m) \times \right. \\ &\times \left. \Theta(\omega_k) \frac{\delta}{\delta b_{-m-1}} \frac{\delta}{\delta b_k} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

Substituindo (5) na expressão (2) segue-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f &= \sum_{m,k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_f(k,m) \left\{ \Theta(\omega_m) \Theta(\omega_k) b_m \frac{\delta}{\delta b_k} - \frac{1}{2} \Theta(\omega_m) \Theta(-\omega_k) b_m b_{-k-1} - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \Theta(-\omega_m) \Theta(\omega_k) \frac{\delta}{\delta b_{-m-1}} \frac{\delta}{\delta b_k} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

com

$$l_f(k, m) = \frac{\sqrt{|w_k w_m|}}{L} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{f(\sigma)}{n^2(\sigma)} e^{i(w_k - w_m)\zeta(\sigma)} \quad (7)$$

A álgebra dos \mathcal{L}_f é idêntica à expressão 1.(13) do caso fermiônico:

$$[\mathcal{L}_f, \mathcal{L}_g] = i\mathcal{L}_{(f, g)} + \frac{1}{2} \sum_{k, m=-\infty}^{\infty} l_f(m, k) l_g(k, m) [\theta(w_k) \theta(-w_m) - \theta(w_m) \theta(-w_k)] = i\mathcal{L}_{(f, g)} + T.S. \quad (8)$$

O termo de Schwinger T.S. de (8) é calculado à seguir:

$$T.S. = \int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^{2\pi} d\sigma' \frac{f(\sigma) g(\sigma')}{2L^2 n^2(\sigma) n^2(\sigma')} \sum_{k, m=-\infty}^{\infty} w_k w_m e^{i(w_k - w_m)(\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma'))} \times \quad (9)$$

$$\times [\theta(w_k) \theta(-w_m) - \theta(w_m) \theta(-w_k)]$$

Introduzindo $k - m = n$, a soma da expressão acima escreve-se:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n \frac{(\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma'))}{L}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\pi^2}{L^2} (2n + 2m + 1)(2m + 1) \times [\theta(w_{n+m}) \theta(-w_m) - \theta(w_m) \theta(-w_{n+m})] = \frac{\pi^2}{3L^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(2n^2 + 1) e^{2\pi i n \frac{(\zeta(\sigma) - \zeta(\sigma'))}{L}} \quad (10)$$

Inserindo (10) em (9) temos:

$$\begin{aligned}
 T.S. &= \int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^{2\pi} d\sigma' \frac{f(\sigma)g(\sigma')}{6L^2 n^2(\sigma)n^2(\sigma')} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2n^3+n) e^{2\pi i n \frac{\tau(\sigma)-\tau(\sigma')}{L}} = \\
 &= -\frac{i}{48\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{f(\sigma)}{n^2(\sigma)} \left\{ 2 [n(\sigma)\partial_\sigma]^3 - \frac{4\pi^2}{L^2} n(\sigma)\partial_\sigma \right\} \frac{g(\sigma)}{n(\sigma)}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Analogamente ao caso fermiônico introduzimos o operador T_f associado ao operador $\Pi(\sigma)$ que complementa o transporte paralelo em \mathcal{M} :

$$T_f = \int_0^{2\pi} d\sigma (f, n)(\sigma) \Pi(\sigma) \tag{12}$$

$$[n(\sigma), T_f] = i \delta_f n(\sigma)$$

satisfazendo a álgebra:

$$[T_f, T_g] = i T_{(f,g)} \tag{13}$$

A expressão explícita de T_f pode ser obtida à partir da expressão (7) do item III.4.1. para $\Gamma(\sigma)$:

$$\begin{aligned}
 T_f &= \int_0^{2\pi} d\sigma (f, n)(\sigma) \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta n(\sigma)} + \Gamma(\sigma) \right] = \int_0^{2\pi} d\sigma (f, n)(\sigma) \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta n(\sigma)} + A(\sigma) \right] + \\
 &+ \int_0^{2\pi} d\sigma (f, n)(\sigma) \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} \langle \omega_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta n(\sigma)} | \omega_m \rangle \left\{ \theta(\omega_k) \theta(\omega_m) b_k \frac{\delta}{\delta b_m} + \right. \\
 &\left. + \frac{\delta}{\delta b_k} \right\}
 \end{aligned} \tag{14}$$

+ $\frac{\delta}{\delta b_k}$

$$+ \frac{1}{2} \theta(\omega_k) \theta(-\omega_m) b_k b_{-m-1} - \frac{1}{2} \theta(-\omega_k) \theta(\omega_m) \frac{\delta}{\delta b_{k-1}} \frac{\delta}{\delta b_m} \}$$

Lembremos que:

$$\langle \omega_k | \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} | \omega_m \rangle = \frac{\sqrt{|\omega_k \omega_m|}}{L i u^2(\sigma)} \frac{e^{i(\omega_k - \omega_m)\zeta(\sigma)}}{\omega_k - \omega_m} \operatorname{sgn} \omega_m \quad (15)$$

e integramos por partes na última integral de (14) somente o termo correspondente a $-f'(\sigma)u(\sigma)$. Obtemos então para a última integral (14) a expressão:

$$\int_0^{2\pi} d\sigma \frac{f(\sigma)}{u^2(\sigma)L} \sqrt{|\omega_k \omega_m|} \left\{ \theta(\omega_k) \theta(\omega_m) b_k \frac{\delta}{\delta b_m} - \frac{1}{2} \theta(\omega_k) \theta(-\omega_m) b_k b_{-m-1} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \theta(-\omega_k) \theta(\omega_m) \frac{\delta}{\delta b_{k-1}} \frac{\delta}{\delta b_m} \right\} \quad (16)$$

Observe a troca assimétrica de sinais ocorrida no 2º e 3º termos da expressão (16) devido à presença $\operatorname{sgn} \omega_m$ na expressão (15). A expressão final de (14) é:

$$T_f = T_f^{\text{ad}} + \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{f(\sigma)}{u^2(\sigma)L} \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} \sqrt{|\omega_k \omega_m|} \left\{ \theta(\omega_k) \theta(\omega_m) b_k \frac{\delta}{\delta b_m} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \theta(\omega_k) \theta(-\omega_m) b_k b_{-m-1} - \frac{1}{2} \theta(-\omega_k) \theta(\omega_m) \frac{\delta}{\delta b_{k-1}} \frac{\delta}{\delta b_m} \right\} \quad (17)$$

onde

$$T_f^{ad} = \int_0^{2\pi} d\sigma (f, u)(\sigma) \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\sigma)} + A(\sigma) \right] = \int_0^{2\pi} d\sigma (f, u)(\sigma) \Pi^{ad}(\sigma) \quad (18)$$

Das expressões (6) e (17) temos que o gerador adiabático T_f^{ad} escreve-se:

$$T_f^{ad} = T_f - \mathcal{L}_f \quad (19)$$

Da expressão (18) segue-se a álgebra dos T_f^{ad} :

$$\begin{aligned} [T_f^{ad}, T_g^{ad}] &= i T_{(f,g)}^{ad} + \int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^{2\pi} d\sigma' (f, u)(\sigma) G(\sigma, \sigma') (g, u)(\sigma') = \\ &= i T_{(f,g)}^{ad} + \frac{i}{48\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{f(\sigma)}{u^2(\sigma)} \left[2 [u(\sigma) \partial_\sigma]^3 - \frac{4\pi^2}{L^2} u(\sigma) \partial_\sigma \right] \frac{g(\sigma)}{u(\sigma)} \end{aligned} \quad (20)$$

Observe que neste último caso aparece o mesmo termo de Schwinger que dos \mathcal{L}_f na expressão (11). De (8), (13) e (20) obtemos:

$$[T_f, \mathcal{L}_g] = -\frac{i}{48\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{f(\sigma)}{u^2(\sigma)} \left[2 (u(\sigma) \partial_\sigma)^3 - \frac{4\pi^2}{L^2} u(\sigma) \partial_\sigma \right] \frac{g(\sigma)}{u(\sigma)} \quad (21)$$

Observe que $H = \mathcal{H}_u$. Note também que para $g(\sigma) = u(\sigma)$ o T.S.

da expressão se anula assim como em (20) e (21). Segue - se então que:

$$[T_f^{ad}, H] \equiv [T_f^{ad}, \mathcal{L}_u] = 0 \quad (22)$$

o que está de acôrdo com a interpretação de T_f^{ad} como um operador adiabático, isto é, quando atua em um estado qualquer não cria nem destrói bosons.

V.3) Conclusão

A ligação dos conceitos de anomalia com o de curvatura provou ser não somente elucidativo do ponto de vista físico-matemático como prático para o cálculo de anomalias. Há muitas extensões possíveis deste método de cálculo, p. ex, a análise de um sistema supersimétrico contendo férmions e bósons, e sistemas bosônicos ou fermiônicos com um campo de gauge. Lamentavelmente o método não tem uma generalização simples para mais de duas dimensões.

APÊNDICE A

Alguns resultados de geometria Riemanniana

Os "Vielbein" especificam um sistema local ortonormal de vetores para cada ponto da variedade geométrica M sob consideração. Eles são definidos à menos de rotações locais

$$e^a \rightarrow L^a_b e^b \quad (a = 1 \dots d = \text{dimensão de variedade})$$

com os L^a_b satisfazendo: $L^c_a L^d_b \eta_{cd} = \eta^{ab}$, ou seja, são representações de $SO(d)$ ou $SO(1, d-1)$ dependendo da assinatura de M (Euclideana ou Minkowskiana). O formalismo dos "vielbein" é necessário somente para teorias com spin semiteiros já que estas teorias não podem ser representadas por campos tensoriais $T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ representações de $GL(d, R)$ (grupo linear real de dimensão d o qual é simplesmente conexo e não possui representações espinoriais).

A fim de definir o transporte paralelo na variedade devemos introduzir uma conexão que no caso Riemanniano pode ser determinada pelas duas condições:

- I) A métrica é covariantemente constante.
- II) A conexão tem torsão nula.

As conexões podem ser definidas no sistema de coordenadas dx^μ ou no sistema tangente dos "vielbein". Introduziremos a conexão nos dois casos definindo a derivada covariante apropriada e tensor de torsão. Mostraremos como se determina univocamente a conexão em cada caso. Isto nos permitirá determinar a relação entre os dois tipos de conexão.

Definiremos primeiramente a 1-forma conexão na base tangente:

$$\omega^a{}_b = \omega^a{}_{b\mu} dx^\mu$$

Esta conexão define o transporte dos sistemas ortogonais de vetores pela variedade. Para uma translação por um vetor infinitesimal ξ o sistema $e^a = e^a{}_\mu dx^\mu$ gira para $\omega^a{}_b(\xi)e^b = \omega^a{}_{b,\mu}\xi^\mu e^b$. Já que o transporte paralelo deve manter a ortogonalidade dos sistemas (isto é, deixar a métrica plana η_{ab} invariante) impomos $\eta_{cb}\omega^c{}_a + \eta_{ac}\omega^c{}_b = 0$. Isto significa que a matriz $\omega_{ab} = \eta_{ac}\omega^c{}_b$ é antissimétrica:

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba}$$

Esta expressão é equivalente à condição I) como será justificado adiante.

Vamos definir agora a derivada covariante que atua num tensor arbitrário que é uma ρ -forma $\Sigma^a{}_{b\dots}{}_{\alpha_1\dots\alpha_\rho} dx^{\alpha_1}\dots dx^{\alpha_\rho}$ no sistema tangencial (a e b sendo índices de Lorentz locais):

$$D\Sigma = d\Sigma + [\omega, \Sigma]$$

onde

$$[\omega, \Sigma]_{b\dots}{}^a{}_{\dots} = \omega^a{}_{a'} \sum_{b'\dots}{}^{a'\dots} \quad (\text{soma sobre todos os índices } a') - \\ - (-1)^\rho \sum_{b'\dots}{}^{a'\dots} \omega^{b'}{}_b \quad (\text{soma sobre todos os índices } b')$$

A curvatura e a torsão são 2-formas tensoriais de finidas por meio dos "vielbein" e de conexão de spin por meio de:

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \omega^c{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{bcd} e^c e^d$$

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b e^b = De^a$$

A fim de se ver que a conexão é univocamente determinada pela condição de torsão nula, seja $de^a = \frac{1}{2} \xi^a{}_{b,c} e^b e^c$, $\omega^a{}_b = \omega^a{}_{b,c} e^c$, logo

$$T^a = 0 = de^a + \omega^a{}_b e^b \quad (1)$$

Daí temos:

$$\xi^a{}_{b,c} = \omega^a{}_{b,c} - \omega^a{}_{c,b}$$

(os índices no sistema tangencial são elevados ou descidos por η^{ab} ou η_{ba}) que por permutações cíclicas dá:

$$\omega^a{}_{b,c} = \frac{1}{2} (\xi^a{}_{b,c} + \xi^a{}_{c,b} - \xi^a{}_{c,b}) \quad (2)$$

Lembremos agora a conexão na base das coordenadas $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta} = \Gamma^{\alpha}{}_{r\beta} dx^r$ chamada de conexão de Christoffel. Da mesma maneira que antes, definimos derivada covariante agindona forma tensorial $\Sigma^{\alpha}{}_{\beta}$ (na base das coordenadas) por:

$$\nabla = d + [\Gamma,]$$

com a curvatura definida por: $R^{\alpha}{}_{\beta} = d\Gamma^{\alpha}{}_{\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{r} \Gamma^r{}_{\beta} = \frac{1}{2} R^{\alpha}{}_{\beta\delta\gamma} dx^{\delta} dx^{\gamma}$

A condição I) $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ e a condição II) $T^\alpha = \frac{1}{2} T^\alpha_{\beta\gamma} dx^\beta dx^\gamma = d^2x^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} dx^\beta dx^\gamma = 0$ ou equivalentemente $T^\alpha_{\beta\gamma} = (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}) = 0$ implicando a simetria dos Γ . As condições I) e II) definem univocamente a conexão por meio de:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = g^{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} (\partial_\beta g^\alpha_\gamma + \partial_\gamma g^\alpha_\beta - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}) \quad (3)$$

O tensor de torsão tanto no sistema tangencial como no sistema de coordenadas devem corresponder ao mesmo objeto geométrico ou seja:

$$T^a = e^a_\alpha T^\alpha$$

Esta expressão permite relacionar as duas conexões. Temos

$$\begin{aligned} T^a &= de^a + \omega^a_b e^b = de^a_\mu dx^\mu + \omega^a_b e^b_\mu dx^\mu = \\ &= e^a_\alpha \Gamma^\alpha_{\nu\mu} dx^\nu dx^\mu = \partial_\nu (e^a_\mu) dx^\nu dx^\mu + \omega^a_{b,\nu} e^b_\mu dx^\nu dx^\mu \end{aligned}$$

e portanto:

$$e^a_\alpha \Gamma^\alpha_{\nu\mu} = \partial_\nu (e^a_\mu) + \omega^a_{b,\nu} e^b_\mu$$

Daí segue-se:

$$\omega^a_{b,\nu} = -E^r_b \nabla_\nu e^a_r \quad (4)$$

com $E^r_\alpha e_\mu^b = \delta_\alpha^b$. Notando que devido a condição I):

$$0 = \nabla_\alpha (g^{\mu\nu} e^a_\mu e^b_\nu) = (\nabla_\alpha g^{\mu\nu}) e^a_\mu e^b_\nu + E^{b\mu} \nabla_\alpha e^a_\mu + E^{a\mu} \nabla_\alpha e^b_\mu$$

implica usando $\nabla_\alpha (g^{\mu\nu}) = 0$.

$$E^{\gamma}_b \nabla_{\alpha} e_{a\gamma} = - E^{\mu}_a \nabla_{\alpha} e_{b\mu}$$

que por (4) dá $\omega_{ab,\mu}$ antissimétrico. É fácil de se verificar que o tensor de curvatura no sistema de coordenadas é:

$$R^{\alpha}_{\beta} = E^{\alpha}_a R^a_b E^b_{\beta}$$

ou seja R^{α}_{β} e R^a_b descrevem o mesmo objeto geométrico devido a (4).

APÊNDICE B

Sobre a ação efetiva

Vamos ilustrar o conceito de ação efetiva para o caso de um campo de "gauge" externo não abeliano, interagindo com férmions quirais. Neste caso a ação efetiva para um fermion de Weyl em duas dimensões escreve-se:

$$e^{iW[A]} = \int d\psi d\bar{\psi} e^{i \int d^2x \bar{\psi} i \not{D}_+ \psi} \quad (1)$$

$$\not{D}_+ = \not{D} P_+ \quad , \quad P_+ = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \quad , \quad \not{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$$

Graficamente a ação efetiva representa a soma de todos os laços de férmions conexos com fatores de simetria $1/n!$ onde n dá o número de vértices de cada laço. Ilustremos agora como a ação efetiva está ligada com a divergência da corrente fermiônica. Sob uma transformação de gauge infinitesimal $A \rightarrow A - D\sigma$, de (1) segue:

$$W[A - D\sigma] - W[A] = - \int (D_\mu \sigma)^a \frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu^a} = \int \sigma^a \left[D_\mu \frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu^a} \right] \quad (2)$$

Observe que:

$$\frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu^a} = \left\langle \bar{\psi}(x) i \gamma^\mu \frac{1}{2} P_+ \psi(x) \right\rangle^A = J_\mu^A(x) \quad (3)$$

representa a corrente fermiônica num campo de "gauge" de fundo.

Dessa maneira se a corrente não for conservada covariantemente a ação efetiva não é covariante de "gauge" e viceversa.

A ação efetiva de um fermion num campo gravitacional externo escreve-se:

$$e^{iW[e, \omega]} = \int d\psi d\bar{\psi} e^{\int d^4x e \frac{i}{2} \bar{\psi} \not{D} \psi} \quad (4)$$

onde: $\not{D} = e^\mu_\alpha \gamma^\alpha [\partial_\mu + A_\mu - \omega_{cd, \mu} \Sigma^{cd}]$

$$\Sigma^{cd} = \frac{1}{4} [\gamma^c, \gamma^d]$$

$e = |\det e^\mu_\alpha| = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}$, e^μ_α sendo o "vielbein" e d^4x sendo o elemento de volume invariante (o qual geralmente não se escreve na linguagem das formas o que será feito à seguir).

A ação clássica (1) é invariante sob transformações de Lorentz locais e sob transformações gerais de coordenadas:

$$e^\alpha_\mu(x) \rightarrow (L^{-1}(x))^\alpha_b e^b_\mu(x)$$

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$$

Sob estas transformações o férmion transforma-se respectivamente como:

(transformação ativa).

Sob uma transformação de Lorentz infinitesimal local $L(x) = 1 + \alpha(x)$ a variação de W é dada por:

$$\delta_{\alpha}^L W = - \int d^2x \alpha^a_b e^b_{\mu} \frac{\delta W}{\delta e^a_{\mu}} \quad (5)$$

o tensor de energia momento é definido por:

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta W}{\delta g_{\mu\nu}}$$

Esta definição é adequada se a ação for um funcional de $g_{\mu\nu}$: $W[g_{\mu\nu}]$. Entretanto no caso dos férmions a ação é um funcional do "vielbein" $e^a_{\mu}(x)$ e da conexão de spin ω^a_b : $W[e, \omega]$. Podemos expressar o tensor de energia momento $T^{\mu\nu}$ em termos das derivadas funcionais em relação ao "vielbein" da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta e^a_{\sigma}} &= \frac{\delta W}{\delta g_{\mu\nu}} \frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta e^a_{\sigma}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{g}} T^{\mu\nu} \right) (2\eta_{ab} g^{\sigma}_{\mu} e^b_{\nu}) = \\ &= e T^{\sigma\nu} e_{\nu a} \end{aligned}$$

Multiplicando esta última expressão por $e_{b\sigma}$ segue:

$$e e_{\nu a} e_{b\sigma} T^{\sigma\nu} = e_{b\sigma} \frac{\delta W}{\delta e^a_{\sigma}} \quad (6)$$

Definindo $T_{ab} = e_{a\mu} e_{b\nu} T^{\mu\nu}$, segue-se:

$$e T_{ab} = e_{a\mu} \frac{\delta W}{\delta e^b_{\mu}} \quad (6a)$$

e portanto (5) dá: $\delta_\alpha^L W = - \int \alpha^{ab} T_{ab}$.

e como α^{ab} é antissimétrico, T_{ab} deve ser simétrico para que a teoria seja localmente invariante de Lorentz.

Sob uma transformação ativa de coordenadas considere-se a variação na forma dos tensores e não no ponto do espaço-tempo:

$$\sum_{r\beta\dots}^{\mu\kappa\dots} (x) \rightarrow \sum_{r\beta\dots}^{\mu\alpha\dots} (x)$$

e o volume de integração $e(x)d^4x$ é invariante.

Portanto se fizermos uma transformação infinitesimal de coordenadas $x^\alpha \rightarrow x^\alpha - \xi^\alpha(x)$ a métrica varia como:

$$\delta^A g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$$

onde ∇_μ dá a derivada covariante. Por exemplo:

$$\nabla_\mu \xi_\nu = \partial_\mu \xi_\nu - \xi_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$$

com:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

é a conexão de Christoffel.

Agora da definição dos "vielbein" temos:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$$

podemos obter a transformação correspondente:

$$\delta^A e_\mu^a = e_\nu^a \nabla_\mu \xi^\nu + \xi^\nu \nabla_\nu e_\mu^a$$

A variação de W sob a transformação infinitesimal é:

$$\delta^A W = \int d^2x \left(e^a_\nu \nabla_\mu \bar{z}^\nu + \bar{z}^\nu \nabla_\nu e^a_\mu \right) \frac{\delta W}{\delta e^a_\mu} = - \int \bar{z}^\nu \left(\nabla_\mu T^\mu_\nu + \omega_{ab,\mu} T^{ab} \right) \quad (7)$$

onde foi feita uma integração por partes no primeiro termo e utilizada a expressão (6.a). Quanto ao segundo termo utiliza-se a expressão para a conexão: (fórmula 4 do apêndice A)

$$\omega^a_{b,\mu} = - E^{\nu}_b \nabla_\mu e^a_\nu$$

onde $E^{\nu}_b = g^{\nu\sigma} e_{\sigma b}$. Daí segue $e^b_\mu \omega_{ab,\nu} = - \nabla_\nu e_{a\mu}$ a qual é empregada diretamente no segundo termo de (7).

Se a simetria de Lorentz for preservada T^{ab} é simétrico o segundo termo sendo nulo devido o antissimétrico de $\omega_{ab,\mu}$ e teremos:

$$\delta_{\bar{z}} W = - \int \bar{z}_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu} \quad (8)$$

Para que a ação efetiva seja invariante por transformações gerais de coordenadas é necessária a conservação covariante de tensor de energia-momento. Assumindo simetria de Lorentz e W dependendo só de $g_{\mu\nu}$ devido ao fato :

$$\delta_{\bar{z}} g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \bar{z}_\nu + \nabla_\nu \bar{z}_\mu$$

temos

$$\delta_{\bar{z}} W = \int d^2x \left(\nabla_\mu \bar{z}^\mu + \nabla_\nu \bar{z}^\nu \right) \frac{\delta W}{\delta g_{\mu\nu}}$$

Substituindo $\frac{\delta W}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{g} T^{\mu\nu}$ é integrando por partes, segue-se (8).

APÊNDICE C

A ação efetiva de um férmion de Majorana-Weyl num campo gravitacional externo

Do capítulo II temos que a densidade de Lagrangiana para um férmion de Majorana-Weyl a duas dimensões é:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\dot{\chi} \chi - u(x) \chi \chi') \quad (1)$$

onde

$$u(x) = \frac{1 - h_-^+}{1 + h_-^+} \quad (2)$$

Segundo o método do campo de fundo supomos que h_-^+ é infinitesimal e até segunda ordem em h_-^+ a densidade de Lagrangeana (1) fica:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \dots \quad (3)$$

onde

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2} (\dot{\chi} \chi - \chi \chi') = \frac{1}{\sqrt{2}} \chi i \partial_- \chi \quad (4)$$

e

$$\mathcal{L}_1 = h_-^+ i \chi \chi' = \frac{1}{2} h_-^+ \chi i \overleftrightarrow{\partial}_x \chi = \frac{1}{2\sqrt{2}} h_-^+ \chi (\overleftrightarrow{\partial}_+ - \overleftrightarrow{\partial}_-) \chi \quad (5)$$

onde

$$A \overleftrightarrow{\partial}_x B = A \left(\frac{\partial}{\partial x} B \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} A \right) B$$

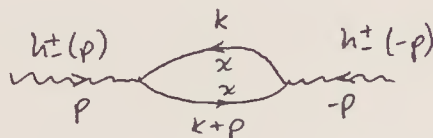
Da Lagrangiana livre (4) podemos calcular o propagador:

$$\langle 0 | T \chi(x) \chi(0) | 0 \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k_- + i\epsilon/k_+} \quad (6)$$

A forma do polo em $k_- = -i\epsilon/k_+$ é necessária pela transformação de Lorentz. Do termo de interação calculamos o vértice da teoria:

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} h^+(-p) (2k_+ + p_+ - 2k_- - p_-)$$

A única contribuição para a ação efetiva provém do seguinte diagrama de Feynman



Utilizando as regras de Feynman temos que o diagrama tem valor:

$$(-1)(2) \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(2k_+ + p_+ - 2k_- - p_-)^2}{(k_- + i\epsilon/k_+)(k_+ + p_+ + i\epsilon/k_+ + p_+)} \quad (7)$$

O primeiro, segundo e quarto termos na frente da integral (7) são devidos a, o laço de férmions e a realidade do férmion. Integrando por resíduos em relação a k_- devemos ter polos com sinias contrários para que a integral não se anule. Se supormos que $p_+ > 0$ k_+ fica restrito ao intervalo $0 > k_+ > -p_+$. O resultado destas operações em (7) é:

$$-\frac{i}{16\pi} \int_{-p_+}^0 dk_+ \frac{(2k_+ + p_+ - p_-)^2}{p_-} \stackrel{ef.}{=} \frac{-i}{48\pi} \frac{p_+^3}{p_-} \quad (8)$$

No espaço de coordenadas a contribuição para a ação efetiva é:

$$S_{ef} = -\frac{1}{48\pi} \int d^2x h_-^+(x) \frac{\partial_+^3}{\partial_-} h_-^+(x) \quad (9)$$

No cálculo de (8) nos usamos o critério de que (9) fosse invariante de Lorentz para descartar todos os termos locais (i.e. polinômios no momento externo) [12] .

APÊNDICE DA ação efetiva de um bóson quiral real num campo gravitacional externo

Do capítulo II calculamos a lagrangiana de um bóson quiral real em duas dimensões:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi} \phi' - \frac{1}{2} u(x) (\phi')^2 \quad (1)$$

onde

$$u(x) = \frac{1-h_-^+}{1+h_-^+} \quad (2)$$

Expandindo em potências de h_-^+ , temos que (1) até segunda ordem em h_-^+ é:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \dots \quad (3)$$

onde

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\dot{\phi} \phi' - \phi'^2) \quad (4)$$

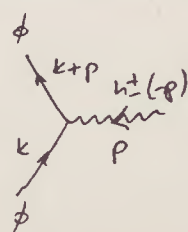
e

$$\mathcal{L}_1 = h_-^+ (\phi')^2 \quad (5)$$

Da lagrangiana livre (4) temos o propagador:

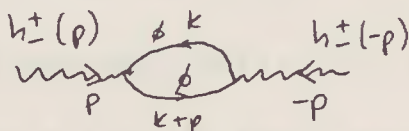
$$\langle 0 | T \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{i e^{-ik \cdot x}}{k_x (k_t - k_x) + i\epsilon}$$

Do termo de interação (5) temos o vértice da teoria



$$\Rightarrow h_-^+(-p) k_x (k_x + p_x)$$

Igualmente ao caso fermiônico a única contribuição para a ação efetiva provém do diagrama:



Que tem como valor:

$$(2) \times (i)^2 \times \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k_x (k_x + p_x)}{(k_t - k_x + i\epsilon/k_x)(k_t + p_t - k_x - p_x + \frac{i\epsilon}{k_x + p_x})} \quad (6)$$

Integrando por resíduos em relação a k_t , temos pelo menos ar gumento do caso fermiônico:

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-p_x}^0 dk_x \frac{k_x (k_x + p_x)}{p_t - p_x} = - \frac{i}{24\pi} \frac{p_+^3}{p_-} \quad (7)$$

No espaço de coordenadas a contribuição para a ação efetiva é:

$$- \frac{1}{24\pi} \int d^2 x h_+^-(x) \frac{\partial_+^3}{\partial_-} h_+^-(x) \quad (8)$$

No cálculo de (7) utilizamos o mesmo critério do apêndice C de tornar (8) invariante de Lorentz.

REFERÊNCIAS

- 1 Proc. R. Soc. London A 392, 45 (184) - M.V.Berry.
- 2 B. Simon Phys. Rev. Lett., 51, 2167 (1983)
- 3 R. V. Chiao e Y.S. Wu Phys. Rev. Lett. 57,933 (1986)
- 4 A. Tomita e R.V. Chiao Phys. Rev. Lett. 57,937 (1986)
- 5 F. Wilczek e A. Zee Phys. Rev. Lett. 52, 2111 (1984)
- 6 L. Schiff, Quantum Mechanics, 3ª ed., pag. 290
- 7 J.N. Ross Opt. and Quantum Elet. 16,455 (1984)
- 8 E. Gozzi e W.D. Thacker, MPI preprint 57/86, setembro
- 9 Landau e Lifshitz, Mecânica, ed. MLR (1978)
- 10 S. Bellucci, M.F.L. Golterman, D.N. Petcher
Preprint UCD - 88 - 19 (May,1988)
- 11 H. Kuratsuji e S. Iida Progr. Theor. Phys. 74 (739)(1985)
- 12 L.A. Gaumé, E. Witten Nucl. Phys. B134, 269 (1984)
- 13 M.J. Bowick e S.G. Rajeev Nucl. Phys. B296 (1988) 1007
- 14 L. Faddeev Phys. Lett. 145B (1984), 81
- 15 G. W. Semenoff, M.W. Sanielevici Phys. Rev. (37)
- 16 Floreanini - Jackiw Phys. Rev. Lett. 2934 (1988)
- 17 S. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino and E. Witten
Current algebra and anomalies (Princeton University
Press, Princeton, NJ, and World Scientific, Singapore, 1985);
L. Alvarez - Gaumé, HUTP - 85/A092 (1985), in Erice School
Math, Phys. (1985) p.93
- 18 F.A. Berezin The Method of Second Quantization (Pergamon,
New York, 1966); L.D. Faddeev, in Methods in Field Theory,
edited by R. Balian and J. Zinn Justin (North-Holland,
Amsterdam, 1975)

- 19 Superstring Theory, Vol.1 M.B. Green, J.H. Schwarz,
E. Witten Cambridge University Press (1987).

