



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Lucas Carato Mazzi

**EXPERIMENTAÇÃO-COM-GEOGEBRA: REVISITANDO ALGUNS CONCEITOS
DA ANÁLISE REAL**

Rio Claro
2014

FOLHA DE ROSTO

Lucas Carato Mazzi

EXPERIMENTAÇÃO-COM-GEOGEBRA: REVISITANDO ALGUNS CONCEITOS DA ANÁLISE REAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Rio Claro, na Área de Concentração: Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Marcelo de Carvalho Borba

Coorientador: Henrique Lazari

Rio Claro

2014

510.07 Mazzi, Lucas Carato
M477e Experimentação-com-GeoGebra: revisitando alguns conceitos da
análise real / Lucas Carato Mazzi. - Rio Claro, 2014
136 f. : il., figs., quadros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de
Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Marcelo de Carvalho Borba
Coorientador: Henrique Lazari

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Tecnologias e análise. 3.
Seres-humanos-com-mídias. 4. Experimentação-com-tecnologia. 5.
Educação matemática. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado à D. Alzira, que infelizmente não pode ver essa jornada chegar ao fim. Vó, este trabalho é para você.

AGRADECIMENTOS

Essa é uma parte fundamental desse trabalho. Sem dúvida essa pesquisa não teria sido concluída, ou até mesmo iniciada, se não fossem essas pessoas que fazem parte da minha vida e que ajudam a me definir. Primeiramente agradeço a Deus e a Nossa Senhora por iluminar meu caminho. Em todos os momentos pude contar com suas graças.

Um obrigado ao meu orientador, Marcelo, que soube ser bem mais que isso nesses anos, ajudando em minha formação profissional e pessoal. Agradeço, também, às professoras Lulu e Sueli, pela leitura cuidadosa desde a banca de qualificação até o momento final da defesa. Suas contribuições foram, de fato, muito importantes para o desenvolvimento dessa pesquisa. Agradeço ao meu coorientador, Henrique, pelas inúmeras discussões matemáticas ao longo dessa jornada.

Agradeço aos meus pais e irmão, que sempre compreenderam minha ausência nos almoços de domingo, nos churrascos de fim de semana, e em vários outros momentos especiais. Vocês sempre me deram força e me incentivaram à correr atrás dos meus sonhos. Esse é mais um realizado e vocês são responsáveis por ele.

Na ausência de minha família, construí uma nova em Rio Claro. Quando a saudade de casa apertava e as tarefas ficavam mais árduas, vocês estiveram presentes (às vezes mesmo que à distância) para me ajudar. Um super obrigado aos meus companheiros de república Valter, Glalco e Givan e aos meus grandes amigos Erica, Bah, Vini, Dea, Tati, Caritá, Clau e Gabi. Com vocês aprendi muito mais do que qualquer curso de formação poderia me oferecer.

Obrigado também aos queridos e queridas Ju, Malinosky, Niltinho, Luanita, Peralta, Hannah, Shera, Bruna, Nana, Coxim, Sambarilove, Bia, Maitê, Mone, Miliam, Fabian, Fers, Rica, por todos os momentos agradáveis, seja discutindo sobre pesquisas ou relaxando em uma mesa qualquer. Vocês fizeram a diferença nesse processo.

Agradeço também aos membros do GPIMEM. Sem dúvida fazer parte desse grupo fez com que eu crescesse muito, tanto como pesquisador como quanto pessoa. As inúmeras reuniões foram fundamentais para minha formação e os vários churrascos foram importantes para minha caminhada ao longo do mestrado.

Gostaria de agradecer, também, aos professores que me incentivaram, desde os tempo de escola até o mestrado. Obrigado Soraia, Marcelo, Nilton, Elíris, Miriam, Alice, Marta, Rosa, Paula, César, Arlete, Maria por me ensinarem um pouco do que é ser professor. Vocês fazem com que eu tenha esperança como um futuro profissional. Agradeço, também, a todos os professores que me mostraram como não ser e como não agir em uma sala de aula.

Gostaria de agradecer toda a turma do vôlei e do boxe, que foram responsáveis por acabar com todo meu stress diário, fazendo com que eu mantivesse o foco no trabalho.

De modo geral, agradeço a todos aqueles que, de algum modo, torceram para que esse trabalho fosse realizado.

E, por fim, agradeço ao CNPq pelo financiamento dessa pesquisa.

RESUMO

Esta pesquisa objetiva identificar as possibilidades e limitações do *software* GeoGebra, na experimentação de alguns conceitos fundamentais da Análise Matemática como *seqüências convergentes*, *seqüências limitadas* e *seqüências monótonas*, além de investigar o *Teorema do Valor Intermediário*. Este trabalho está apoiado no constructo teórico Seres-humanos-com-Mídias, o qual ressalta o papel das mídias na produção de conhecimento e defende que este é produzido por um coletivo de Humanos-com-Mídias. A investigação em questão é de cunho qualitativo, já que a preocupação é com o aprofundamento da compreensão de determinado grupo social, nesse caso, dos Alunos-com-GeoGebra. A fim de alcançar o objetivo esperado, realizei experimentos de ensino, com o objetivo de explorar a matemática produzida pelos estudantes. Os elementos que constituem os experimentos são: seqüência de episódios de ensino constituído por um agente de ensino; um ou mais estudantes; testemunhas e um método de gravação. No caso, os experimentos foram realizados com duas duplas de alunos regularmente matriculados no curso de licenciatura em matemática da Unesp - Rio Claro. Os resultados da pesquisa indicam que o *software* contribuiu para que os alunos elaborassem conjecturas, testassem-nas e, quando o caso, refutassem-nas. A experimentação-com-tecnologia mostrou-se importante para o convencimento e para a compreensão de algumas ideias matemáticas discutidas ao longo do trabalho, além de proporcionar uma mudança no estilo de comunicação dos alunos.

Palavras-chave: Seres-humanos-com-Mídias. Análise Real. GeoGebra. Experimentação-com-tecnologia. Educação Matemática.

ABSTRACT

The aim of this research is to identify the possibilities and the limitations of the software GeoGebra, in an experimentation process of some fundamental concepts of Mathematical Analysis, as *convergent sequences*, *bounded sequences* and *monotone sequences*, besides investigating the Intermediate Value Theorem. This work is supported by the theoretical construct *Humans-with-Media*. This epistemological conception emphasizes the role of media in the process of producing knowledge and argues that it is produced by a collective Humans-with-Media. This inquiry has a qualitative approach since the concern is the deep understanding of a particular social group, in this case, Student-with-GeoGebra. In order to achieve the goal, I used Teaching Experiments, which are exploratory tools and aim to investigate the student's mathematics. The elements that constitute the Teaching Experiments are: a sequence of teaching episodes with a teaching agent, one or more students; witnesses and a recording method. In this particular case, the teaching experiments were performed with two pairs of students enrolled in the undergraduate program in mathematics at UNESP - Rio Claro. The survey results indicate that the software helped the students draw up conjectures, test them and, when appropriate, refute them. The experimentation-with-technology proved to be important for the conviction and for understanding some mathematical ideas discussed throughout the work, and provide a change in the communication style of the students.

Key words: Humans-with-Media. Real Analysis. GeoGebra. Experimentation-with-technology. Mathematics Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Intuição e rigor	22
Figura 2 - Polígono complexo	28
Figura 3 - Adriele e Karen	43
Figura 4 - Gislaine e Patrícia	43
Figura 5 - Tela Inicial do GeoGebra.....	44
Figura 6 - Comando "controle deslizante"	45
Figura 7 - Comando "sequência"	46
Figura 8 - Comando "polígono"	46
Figura 9 - Resposta Adriele: Questão 1 - Atividade 1	57
Figura 10 - Resposta Karen: Questão 1 - Atividade 1	57
Figura 11 - Resposta Gislaine: Questão 1 - Atividade 1	58
Figura 12 - Resposta Gislaine: Questão 1 - Atividade 1	58
Figura 13 - Resposta Adriele: Questão 2 - Atividade 1	58
Figura 14 - Domínio Discreto.....	60
Figura 15 - Problema de escala.....	61
Figura 16 - Uso da malha na visualização de sequências	62
Figura 17 - Exploração da desigualdade $xn - L < \epsilon$	63
Figura 18 - Exploração da desigualdade $xn - L \geq \epsilon$	64
Figura 19 - Construindo a faixa poligonal.....	67
Figura 20 - Utilizando o <i>zoom</i> para verificar se o ponto pertence à faixa poligonal.....	69
Figura 21 - Usando gestos para explicar a relação entre $n0$ e ϵ	71
Figura 22 - Resposta Karen: Questão 1 - Atividade 2.....	73
Figura 23 - Resposta Gislaine: Questão 1 - Atividade 2.....	73
Figura 24 - Resposta Patrícia: Questão 1 - Atividade 2.....	73
Figura 25 - Resposta Adriele: Questão 2 - Atividade 2.....	74
Figura 26 - Resposta Patrícia: Questão 2 - Atividade 2.....	74
Figura 27 - Resposta Gislaine: Questão 2 - Atividade 2.....	75
Figura 28 - Investigando a sequência $yn = 8n$	78
Figura 29 - Sequência definida por partes	79
Figura 30 - Sequência definida por partes	80
Figura 31 - Definição de sequência monótona (Adriele, Gislaine e Karen)	81
Figura 32 - Definição de sequência monótona	81

Figura 33 - Sequência monótona e não convergente.....	82
Figura 34 - Elaborando uma sequência a partir da função $f(x) = e^x$	83
Figura 35 - Investigando a sequência $x_n = \sin(n)$	84
Figura 36 - Sequência limitada e não convergente	86
Figura 37 - Sequência convergente e limitada (faixa poligonal).....	88
Figura 38 - Construção da atividade 3 elaborada por Adrielle e Karen	89
Figura 39 - Karen apontando para o computador para explicar seu ponto de vista	92
Figura 40 - Resposta Adrielle questão 1 da atividade 3.....	92
Figura 41 - Resposta Karen questão 1 da atividade 3.....	93
Figura 42 - Exploração da função cúbica pela dupla Adrielle e Karen.....	94
Figura 43 - Investigando a função $f(x) = x + 1$	96
Figura 44 - Investigando a função $f(x) = x^3$	97
Figura 45 - Investigando a função $f(x) = 13 - x$	98
Figura 46 - Investigando a função $f(x) = x - 3 x - 3 + x - 0.5$	99
Figura 47 - Resposta Adrielle questão 4 da atividade 3.....	102
Figura 48 - Resposta Karen questão 4 da atividade 3.....	102
Figura 49 - Resposta Patrícia questão 4 da atividade 3	103
Figura 50 - Resposta Gislaine questão 4 da atividade 3	103
Figura 51 - Investigando a função $f(x) = x + 1$	108
Figura 52 - Investigando a função $f(x) = x - 3 x - 3 + x - 0.5$	110
Figura 53 - Malha	114

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Questionamentos anteriores à experimentação da atividade 1	48
Quadro 2 - Passos da construção da atividade 1	48
Quadro 3 - Questionamentos anteriores à experimentação da atividade 2	49
Quadro 4 - Passos da construção da atividade 2.....	50
Quadro 5 - Questionamentos concomitantes à experimentação da atividade 2.....	50
Quadro 6 - Passos da construção da atividade 3.....	51
Quadro 7 - Questionamentos posteriores à atividade 3	52

SUMÁRIO

1 OS PRIMEIROS PASSOS	12
1.1. O Pesquisador e a Construção da Pergunta Diretriz.....	12
1.2. Objetivo	14
1.3. Relevância	14
1.4. Estrutura da Dissertação	16
2 UM OLHAR PARA A LITERATURA	18
2.1. Análise Matemática.....	18
2.2. Análise Matemática e Educação Matemática	21
2.3. Experimentação-com-Tecnologia.....	25
2.3.1. <i>Experimentação-com-GeoGebra</i>	29
2.4. Visualização	32
3 OS CAMINHOS DA PESQUISA	36
3.1. Metodologia de Pesquisa Qualitativa.....	36
3.2. Seres-humanos-com-Mídias	37
3.3. Experimentos de Ensino	39
3.4. Fonte de Dados	41
3.5. Os Participantes.....	42
3.6. O Software GeoGebra.....	43
3.7. As Atividades	47
3.8. Análise de Dados	52
4 UM PRIMEIRO OLHAR PARA OS DADOS	56
4.1. Atividade 1 - Convergência de Sequências	57
<i>Episódio A - Domínio Discreto</i>	59
<i>Episódio B - O zoom e o ponto grande</i>	60
<i>Episódio C - Tão pequeno quanto eu queira</i>	63
<i>Episódio D - Faixa Poligonal</i>	67
<i>Episódio E - Quer que eu desenhe?</i>	72
4.2. Atividade 2 - Resultados de Convergência.....	73
<i>Episódio F - Enxergando com o software</i>	75

<i>Episódio G - Elaborando definições</i>	78
<i>Episódio H - Relacionando Conceitos</i>	82
4.3. Atividade 3 - Teorema do Valor Intermediário	89
<i>Episódio I: Discussões iniciais sobre o TVI</i>	89
<i>Episódio J: Domínio ou Contradomínio?</i>	93
<i>Episódio K: Relevância das Hipóteses</i>	95
<i>Episódio L: Verdade Matemática</i>	100
<i>Episódio M: Demonstração com software</i>	101
4.4. Síntese dos Episódios	104
5 REFLETINDO SOBRE DADOS	106
5.1. Elaboração e Refutação de Conjecturas	106
5.2. A Visualização e a Compreensão de Ideias Matemáticas	111
5.3. Estilo de Comunicação	115
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	118
6.1. Uma síntese da pesquisa	118
6.2. Alunas-com-GeoGebra e testes formais	120
6.3. Dificuldades da Pesquisa	122
6.4. Pesquisas Futuras	123
APÊNDICE A – CONCEITOS MATEMÁTICOS	133

1 OS PRIMEIROS PASSOS

Neste capítulo inicial apresento a trajetória percorrida até o surgimento dessa pesquisa de mestrado. Para tal, faço um breve resumo sobre minha formação acadêmica e trago momentos relevantes para a consolidação da pergunta diretriz. O objetivo e a relevância da pesquisa são apresentados na sequência e, para finalizar, a estrutura da dissertação é apresentada a fim de propiciar um panorama geral da mesma.

1.1. O Pesquisador e a Construção da Pergunta Diretriz

Graduei-me no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” em dezembro de 2011. Durante a graduação, no período de 2009 a 2011, fui bolsista do Programa de Educação Tutorial (PET). Considero este período importante em minha formação, pois foi participando de tal programa que tive meu primeiro contato com pesquisas científicas - fiz pesquisas em Matemática Aplicada, Educação Matemática e em Teoria da Probabilidade (MAZZI, 2011).

Em 2010, tornei-me membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática¹, e foi neste grupo de pesquisa que tive a oportunidade de conhecer a Educação Matemática e, em particular, o uso das tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Durante esse mesmo ano, em nível de Iniciação Científica, pesquisei sobre as possibilidades e as limitações do uso da Lousa Digital no contexto da Educação Matemática, resultando em um artigo sobre a mesma (MAZZI; SIQUEIRA; BORBA, 2012). Ao longo da escrita desse artigo, realizei leituras e discuti tendências da Educação Matemática, fato que me proporcionou um olhar crítico sobre assuntos da Matemática em relação a seu ensino e aprendizagem.

Dentre as leituras realizadas, destaco dois trabalhos que discutem sobre o tema demonstrações (HANNA, 1983; REID; KNIPPING, 2010). Essas duas obras trazem discussões filosóficas acerca do papel das demonstrações e provas na Educação Matemática. Hanna (1983) faz uma análise dos currículos implementados desde a década de 20, dando destaque nas mudanças quanto ao rigor matemático em cada época. A autora discorre, também, sobre as escolas filosóficas Logicismo, Intuicionismo e Formalismo, destacando seus surgimentos, assim como os motivos de suas crises. Como fechamento, a autora

¹ GPIMEM, UNESP - Rio Claro. Disponível em: <<http://www.rc.unesp.br/gpimem/>>. Acesso em 02 jun. 2014

questiona o rigor e a prova na prática Matemática. Já Reid e Knipping (2010) fazem um levantamento histórico sobre a noção de demonstração na Matemática, discutindo seu surgimento sob diferentes pontos de vista. Ao longo da obra, são apresentadas e discutidas pesquisas sobre o papel das provas na Educação Matemática e são aclaradas e ressaltadas as diferenças entre os raciocínios dedutivo, indutivo e abduutivo. Para finalizar, os autores trazem algumas implicações do tema no ensino da Matemática.

Conforme fui me aprofundando nas leituras, já em 2012, como aluno especial do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM), decidi pesquisar sobre demonstrações. A fim de unir essa temática com as pesquisas do GPIMEM, questionei-me como seria uma demonstração utilizando um *software*. Será que seria possível tal feito? Surge, então, uma primeira versão da pergunta diretriz dessa pesquisa, a saber: *Qual o papel do software GeoGebra na demonstração do Teorema do Valor Intermediário (TVI)?* A escolha pelo *software* GeoGebra se deu pelo fato de ser um *software* livre e com inúmeras funções; já a escolha pelo TVI² ocorreu por ser um resultado importante na Matemática, sendo abordado, inicialmente, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e, geralmente, demonstrado na disciplina de Análise Real.

Após várias discussões com os membros do meu grupo de pesquisa e algumas leituras realizadas, conheci o termo **experimentação**, utilizado por Michael de Villiers. Aprofundando-me nos trabalhos deste matemático optei por adotar essa noção ao realizar esta pesquisa, aqui relatada. Segundo De Villiers (2003), experimentação é considerada como qualquer método não dedutivo, incluindo os raciocínios intuitivo, indutivo ou por analogia.

Em outras palavras, [a experimentação] é especificamente utilizada quando: (i) conjecturas matemáticas e/ou sentenças são numericamente ou visualmente validadas; (ii) conjecturas, generalizações ou conclusões são feitas baseadas na intuição, analogia ou na experiência obtida através do procedimento experimental (DE VILLIERS, 2003, p. 174).

O GPIMEM tem tradição em pesquisas com experimentação e possui trabalhos que relatam como *software* de geometria, de funções ou de generalização de padrões, como o *Winggeom*³, *Winplot*⁴, e o *MiGen*⁵, podem transformar as possibilidades do fazer matemática de alunos e professores (BARBOSA, 2009; SCUCUGLIA, 2006; TREVISANI, 2013).

² Esse teorema garante que se uma função real f , definida em $[a, b]$ é contínua, então qualquer ponto d tal que $f(a) \leq d \leq f(b)$ ou $f(a) \geq d \geq f(b)$ é da forma $f(c)$, para algum ponto c do intervalo $[a, b]$.

³ Disponível em: <<http://math.exeter.edu/rparris/winggeom.html>>. Acesso em 17 maio. 2014.

⁴ Disponível em: <<http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>>. Acesso em 17 maio. 2014.

⁵ Disponível em: <<http://www.migen.org>>. Acesso em 17 maio. 2014.

A partir da noção de experimentação de De Villiers (2003), a pergunta diretriz foi revisitada e reelaborada, chegando à seguinte formulação: *Qual o papel do software GeoGebra na investigação de conceitos da disciplina Análise Real?*

Esta pergunta me acompanhou durante boa parte da pesquisa. As atividades foram elaboradas com base na mesma, e uma análise inicial dos dados também foi feita na tentativa de se obter uma resposta para tal. No entanto, após novas reflexões sobre a pesquisa, reestruturei uma vez mais a pergunta norteadora, assumindo, então, o seguinte enunciado:

Quais os papéis do software GeoGebra na revisitação de alguns conceitos da disciplina Análise Real?

1.2. Objetivo

Esta pesquisa objetiva identificar as possibilidades do uso do *software* GeoGebra na revisitação de alguns conceitos da disciplina Análise Real. A fim de alcançá-lo, propus a quatro alunas experimentos de ensino com o *software*, abordando alguns conceitos como *convergência de sequências numéricas, sequências limitadas, sequências monótonas*, além de investigar o *Teorema do Valor Intermediário*.

1.3. Relevância

A escolha do trabalho com Análise Matemática⁶ se deu, dentre outros fatores, pelo fato de ser uma disciplina considerada problemática e, em geral, tida como geradora de grande ansiedade nos alunos. Seu conteúdo trata primordialmente dos processos infinitos, em cujo centro encontra-se o conjunto dos números reais, sendo que o formalismo e abstração presentes em sua estrutura causam forte impacto nos alunos e o índice de reprovação costuma ser alto (BARONI; OTERO-GARCIA, 2013). A taxa média de reprovação⁷ do período 2008-2012 na UNESP, *campus de Rio Claro*, foi de 42,72%. E, no ano em que cursei a disciplina, 2010, a taxa foi ainda maior, chegando a 68,40%. Essa situação fez com que eu levantasse questionamentos sobre o ensino dos conteúdos dessa disciplina.

Na busca por referenciais que discutissem sobre problemas com a Análise, encontrei algumas pesquisas que apresentavam trabalhos nessa direção. Otero-Garcia e Cammarota (2013) apontam problemas de afetividade por parte dos alunos quanto à avaliação da

⁶ A fim de evitar repetições utilizarei os termos Análise e Análise Real como sinônimos de Análise Matemática.

⁷ Dados liberados pela Seção de Graduação do Instituto de Geociências e Ciências Exatas - IGCE.

disciplina Análise. Esses autores, baseados em três pesquisas de Roberta Bortolotti (BORTOLOTTI, 2003, 2006, 2009) mostram que o nervosismo e a ansiedade estão presentes nos alunos na hora de uma avaliação da disciplina.

Os depoentes citaram quatro causas de tal ansiedade por parte dos colegas: pressa para resolver a prova e livrar-se da obrigação, preparação inadequada, preocupação com o próprio desempenho e a disciplina de análise em si. (...) Os alunos relataram que os depoimentos dos colegas sobre a disciplina, o histórico de reprovação que existe nela e até falas de professores é que causaram tal sentimento com relação à análise (OTERO-GARCIA; CAMMAROTA, 2013, p. 334).

Como afirmado pelos autores, a própria disciplina Análise, independente de outros pontos, é causadora de ansiedade. Será que a abordagem tradicional seria responsável por tal ansiedade? Será que um trabalho diferenciado poderia contribuir com tal problema afetivo? Mesmo não tendo a intenção de responder a esses questionamentos, eles me inquietaram e me movimentaram durante a realização desta pesquisa.

Como dito anteriormente, algumas pesquisas do GPIMEM (BONAFINI, 2004; SCHEFFER, 2001) argumentam sobre a importância de se trabalhar a matemática de modo experimental. As autoras sugerem a utilização de tecnologias nesse momento de experimentação e ressaltam alguns pontos importantes das mesmas. A mídia, com seu rápido *feedback* e seu *design* que privilegia nossa capacidade visual, reorganiza a forma com que a Matemática é produzida, podendo levar a uma diferente significação dos conceitos trabalhados. Tendo em vista essas características das mídias, acredito que uma abordagem experimental-com-tecnologia pode modificar a forma com que a Análise tem sido apresentada nos cursos de licenciatura, podendo possibilitar uma nova forma de se discutir conceitos referentes a essa disciplina.

Quanto à importância dos conceitos convergência de seqüências, seqüências limitadas e monótonas, Nunes (2001, p. 9) afirma que "o estudo de seqüências faz parte de um campo essencial nos fundamentos da Análise Matemática, campo que concerne às funções numéricas, limites, aos números reais", sendo necessário um trabalho mais cuidadoso com tal assunto. Aline Robert (1982, p. 320) defende que "os princípios da Análise não são tão simples para os estudantes, não apenas em razão do caráter não algorítmico das ferramentas postas à sua disposição, mas também da *riqueza* do conjunto dos reais".

Outro fator de relevância para a pesquisa é a falta de trabalhos que vão nessa direção. Na busca por referências, identifiquei vários trabalhos na literatura que discorrem sobre o uso

de *software* com conteúdos de Cálculo, de Geometria e de Álgebra Linear, porém tive dificuldade em encontrar pesquisas que relacionassem o uso de tecnologias digitais e a disciplina Análise Real. Encontrei dois artigos (ALVES, 2012; ALVES; BORGES NETO, 2012) que discutem a utilização do *software* GeoGebra no ensino de conceitos de Análise, contudo não deixam claro se tal uso já foi feito com alunos.

De modo a ter uma visão mais ampla, fiz uma busca no Banco de Teses da Capes⁸, com as palavras-chave: “Análise Real e Análise Matemática”. Em relação à primeira palavra-chave, encontrei sete pesquisas, contudo nenhuma delas utilizava tecnologias digitais. Já em relação à segunda, o site elencou 49 trabalhos, porém nenhum deles era no contexto da Educação Matemática.

Em âmbito internacional os resultados foram semelhantes. Busquei nos *proceedings* da *9th Delta Conference* e da *37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* artigos que tivessem relação com esta pesquisa, entretanto não encontrei nenhum trabalho que investigasse o uso de tecnologias digitais na disciplina Análise. Nas edições anteriores da *Delta Conference* os resultados foram semelhantes. Britton e Henderson (2013) fizeram uma revisão dos *proceedings* dessa conferência e observaram que apenas 6 trabalhos tinham como enfoque a Matemática Avançada, na qual a Análise se encaixaria, entretanto nenhum deles investigava o uso da tecnologia na mesma.

Dada a escassez de referências que discutem o uso de tecnologias digitais na disciplina Análise e a importância da mesma na formação inicial em Matemática, essa pesquisa se torna relevante à medida que objetiva criar novas possibilidades de abordagem dos conteúdos dessa disciplina, tendo como objetivo final a compreensão de conceitos por parte dos alunos.

1.4. Estrutura da Dissertação

Esse trabalho encontra-se dividido em seis capítulos. Neste primeiro, apresentei um recorte de minha trajetória acadêmica e também trouxe um panorama geral da pesquisa, como a pergunta diretriz, o objetivo e a relevância.

No segundo capítulo é apresentada uma revisão de literatura, na qual elenco alguns trabalhos relevantes para a pesquisa. Inicialmente trago alguns fatos históricos que fizeram com que a Análise chegasse aos moldes atuais. Em seguida, aponto algumas questões importantes sobre essa disciplina no contexto da Educação Matemática. Na sequência defino a

⁸ Disponível em: <http://bancodeteses.capes.gov.br/>. Acesso em: 09 jun. 2014

ideia de experimentação-com-tecnologia e destaco algumas pesquisas que investigaram possibilidades do uso do GeoGebra no ensino da Matemática. No encerramento do capítulo, busco articular algumas ideias sobre a importância da visualização na Matemática.

No terceiro capítulo apresento a Metodologia de Pesquisa adotada nesta pesquisa, assim como suas características. Defino e descrevo os experimentos de ensino, procedimento utilizado para a produção de dados. Logo após, apresento como se deram esses experimentos e os sujeitos participantes do trabalho. Para fechar, trago as atividades elaboradas assim como se deu a análise dos dados produzidos.

O quarto capítulo possui como objetivo apresentar os dados produzidos durante a pesquisa. Inicialmente faço uma síntese de alguns conceitos matemáticos necessários para uma melhor compreensão das atividades. Na sequência, apresento alguns episódios que considero relevantes na busca de uma possível resposta para a pergunta diretriz.

No quinto capítulo discuto os episódios apresentados anteriormente com base na revisão teórica e em minha visão de conhecimento. O capítulo está dividido em três temas. Cada um deles é uma possível resposta para a pergunta norteadora. Os temas elencados são elaboração e refutação de conjecturas; a visualização e a compreensão de ideias matemáticas e, por fim, estilo de comunicação.

O sexto e último capítulo traz uma síntese dos resultados obtidos a partir da pesquisa. Na sequência discorro sobre o uso de testes para avaliar conhecimento e questiono a relação entre saber resolver exercícios e a compreensão dos conceitos envolvidos nos mesmos. A seguir elenco algumas dificuldades encontradas na realização deste trabalho e, para finalizar, concluo a pesquisa com algumas indicações para investigações futuras.

2 UM OLHAR PARA A LITERATURA

Neste capítulo busco na literatura pesquisas que possuam relação com o trabalho aqui proposto. Na primeira seção apresento alguns fatos históricos que levaram à consolidação da Análise Matemática como uma área da Matemática. Na sequência faço uma breve revisão de literatura sobre Análise no âmbito da Educação Matemática, destacando alguns pontos que geram discussão nesse contexto. Na terceira seção trago algumas pesquisas que definem e discutem experimentação-com-tecnologia, com o intuito de mostrar as pesquisas que têm sido feitas nessa perspectiva e apresento alguns trabalhos que utilizam tecnologias no ensino da Análise. Na quarta e última seção, teço algumas considerações sobre a visualização no ensino da Matemática.

2.1. Análise Matemática

A história da Análise Matemática ou do Cálculo Infinitesimal possui um papel central nas transformações que culminaram com a imagem da Matemática que temos hoje, forjada, principalmente ao longo dos séculos XIX e início do XX (ROQUE, 2012). Tal história costuma ser dividida em três momentos:

Um primeiro, de natureza geométrica, em que problemas e métodos de investigação geométrica eram predominantes; um estágio analítico ou algébrico, que começou por volta de 1740 com os trabalhos de Euler e atingiu sua forma final com Lagrange, no final do século XVIII; e o período em que foi forjada uma nova arquitetura para a análise matemática, proposta inicialmente por Cauchy no início do século XIX e continuada por diversos outros matemáticos nas décadas seguintes (ROQUE, 2012, p. 343).

A Análise Matemática, diferente do que se pensa, inicialmente se desenvolveu de forma não rigorosa, em constante interação com as ciências naturais. Vários matemáticos deram valiosas contribuições com trabalhos que aplicavam métodos da Análise em disciplinas das ciências naturais, como por exemplo, a mecânica e a dinâmica com Euler (BARONI; OTERO-GARCIA, 2013).

Segundo Boyer (1996), pode ser dito com justiça que Leonard Euler fez pela Análise de Newton e Leibniz o que Euclides fizera pela Geometria. Ele tomara o Cálculo Diferencial e o Método de Fluxos tornando-os parte de um ramo mais geral da Matemática que, a partir daí, é chamado **Análise**. Seu trabalho *Introductio in analysin infinitorum* de 1748 é

considerado como "chave de abóbada da Análise", servindo como "fonte para os florescentes desenvolvimentos da Matemática durante toda a segunda metade do século dezoito" (BOYER, 1996, p. 306).

Esta obra de Euler representou um importante momento na história da análise porque o conceito de função foi colocado em seu centro, ou seja, foram as funções (ao invés das curvas) os principais objetos de estudo, que permitiam a algebrização da geometria e a consequente separação da análise infinitesimal da geometria propriamente dita (BARONI; OTERO-GARCIA, 2013, p. 18).

Segundo Katz (2009), já no final do século XVIII, a Revolução Francesa foi responsável por uma reestruturação da Educação em todo o continente europeu. Os matemáticos sentiram a necessidade de ensinar e não só pesquisar e, com isso, aumentou-se a preocupação de como as ideias matemáticas deveriam ser apresentadas aos alunos e, de forma concomitante, preocupou-se também com o rigor (KATZ, 2009). A disciplina Análise, como é ensinada atualmente nas universidades, é fruto desse período, também conhecido como a "era do rigor".

Não foi apenas uma questão de tornar mais claros determinados conceitos básicos e mudar as demonstrações de uns poucos teoremas. Foi um processo de criação que produziu novas áreas e conceitos na matemática como, por exemplo, continuidade uniforme e pontual, convergência uniforme e pontual, compacidade, completude, etc. (BARONI; OTERO-GARCIA, 2013, p. 23).

Esse movimento de rigorização da Análise teve dois nomes fundamentais, Cauchy e Weierstrass. Augustin-Louis Cauchy, engenheiro e matemático francês nascido em 1789, produziu grande parte de seus trabalhos sobre a fundamentação da Análise enquanto lecionava na *Académie Royale des Sciences*, em Paris.

Cauchy pesquisou em diversas áreas do conhecimento e possui trabalhos que discutem sobre funções complexas, álgebra, teoria dos erros, mecânica celeste, física matemática, teoria dos determinantes, dentre outros. Em seu livro *Cours d'analyse* (1821) trouxe importantes definições como a de variável, limite, quantidade infinitamente pequena, continuidade e convergência (BARONI; OTERO-GARCIA, 2013; BOYER, 1996; EVES, 2004; ROQUE, 2012).

Um destaque em sua obra, talvez, seja o conceito de continuidade, porém, a maior contribuição desse matemático para a Análise foi a definição da convergência de séries; além

de provar diversos testes de convergência como o da raiz, o do quociente e aquele que, por vezes, é conhecido como critério de Cauchy (BARONI; OTERO-GARCIA, 2013).

Entretanto, com o passar do tempo e com o aprimoramento das ideias, foi-se percebendo que faltava exatidão à frases de Cauchy como: "se aproxima indefinidamente", "infinitamente pequeno" e "tão pequeno quanto se queira". Um importante nome que sobressaiu a todos os outros na tentativa de tornar essas ideias de Cauchy mais precisas foi Karl Weierstrass (BARONI; OTERO-GARCIA, 2013).

Weierstrass, nascido na Alemanha em 1815, iniciou seus estudos em Matemática por conta própria, tornando-se professor da Universidade de Berlin em 1856 e sendo reconhecido pelo "rigor weierstrassiano" em suas aulas. Weierstrass teve grande impacto no que chamamos de refundamentação da Análise (EVES, 2004).

A abordagem de Weierstrass aos fundamentos da Análise é encontrada em sua discussão geral sobre funções e séries, de maneira muito semelhante ao que é feito hoje em dia, e, em sua construção dos reais, ele resolveu questões sobre completude que haviam escapado a Cauchy e Bolzano (BARONI; OTERO-GARCIA, 2013, p. 60).

Weierstrass descobriu a convergência uniforme; investigou a teoria das funções complexas por meio de séries de potências e definiu o conceito que atualmente se entende por continuidade pontual, utilizando épsilons e deltas (BARONI; OTERO-GARCIA, 2013). Embora Cauchy já houvesse usado esses quantificadores em algumas demonstrações, Weierstrass os utilizou em todas suas provas. É considerado, junto com Gauss e Riemann, um dos matemáticos mais importantes da Alemanha do século XIX, tornando-se conhecido como o "pai da Análise moderna" (EVES, 2004).

Todo esse movimento do rigor discutido até o momento tinha como objetivo encontrar uma alternativa à abordagem dos infinitésimos, que, apesar de se mostrar útil, possuía algumas inconsistências lógicas.

Nesse contexto é que surge uma conceptualização rigorosa do conceito de limite de uma função, que passou a fundamentar o cálculo. Tal conceptualização dependeu de releituras da definição de função e do conceito de número (notadamente o de número real), pois a partir delas é que foi possível se demonstrar, sem o recurso da geometria, teoremas fundamentais da análise (BARONI; OTERO-GARCIA, 2013, p. 65).

Esse processo é conhecido como "arimetização da Análise". Eves (2004) defende que esse programa acabou se concretizando através de Weierstrass e de seus seguidores, fazendo

com que a Análise, hoje, possa ser "deduzida logicamente de um conjunto de postulados que caracterizem o sistema dos números reais" (EVES, 2004, p. 611). Entretanto, outros matemáticos tiveram participação nesse processo. Tanto Dedekind quanto Cantor e Hilbert apresentaram suas construções para o conjunto dos números reais. Tais construções não serão expostas nesse capítulo, contudo, a partir delas a aritmetização da Análise se concluiu e chegou praticamente na forma como é encontrada em grande parte dos livros usados nas disciplinas de Análise (BARONI; OTERO-GARCIA, 2013).

2.2. Análise Matemática e Educação Matemática

Na seção anterior, discorri sobre alguns fatos históricos que foram relevantes para que a Análise chegasse à forma como encontramos atualmente nos livros. De acordo com Ávila (2002), no Brasil, primeiramente aprendia-se o Cálculo juntamente com a Análise e foi somente a partir de 1960, com a substituição dos livros europeus pelos americanos, é que começou a se ensinar o cálculo primeiro, ficando a Análise Matemática para um momento posterior, como uma disciplina separada.

A partir de 1997, o Conselho Nacional de Educação (CNE), vem modificando os cursos de licenciatura no país, em particular a Licenciatura em Matemática. Alguns questionamentos foram levantados sobre o papel de algumas disciplinas na formação do professor e a Análise está entre elas (OTERO-GARCIA, 2011), fato que pode ter contribuído com o surgimento de pesquisas em Educação Matemática nessa temática. Otero-Garcia (2011) faz uma busca por tais pesquisas e observa que a produção brasileira que discute Análise no âmbito da Educação Matemática é relativamente recente, sendo o trabalho mais antigo o de doutorado de Frederico Reis em 2001.

Em sua tese, mediante análise de manuais didáticos e de entrevistas com quatro professores-pesquisadores que se destacam na área de Análise, Reis (2001) apresenta alguns estudos sobre o ensino do Cálculo e da Análise, dando ênfase nas contribuições do Prof. Roberto Baldino e dos estudos do *Advanced Mathematical Thinking*⁹. Na sequência, a influência de alguns aspectos históricos dessas disciplinas é levantada, dentre eles, a tradição dos "limites" e do rigor do Cálculo são colocadas em pauta. O pesquisador discorre, também, sobre o rigor e a intuição no ensino do Cálculo e da Análise, mostrando o que há de rigoroso

⁹ *Advanced Mathematical Thinking* é um livro escrito por vários autores que pesquisam o Ensino da Matemática Avançada. Esta obra foi editada por David Tall e possui três focos centrais: os processos envolvidos na concepção do pensamento matemático avançado; a teoria cognitiva do pensamento matemático avançado e o ensino e a aprendizagem do pensamento matemático avançado.

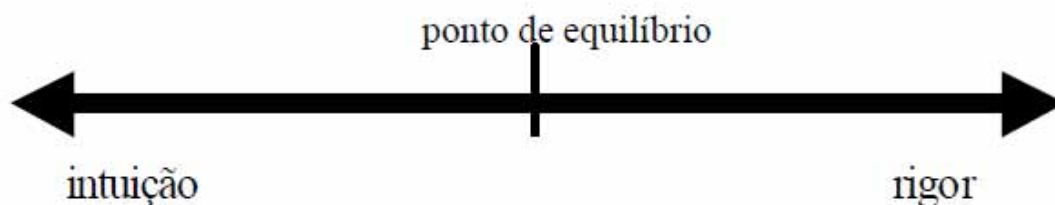
em uma disciplina e o que há de intuitivo na outra. Uma das conclusões apresentadas pelo autor diz que

Os manuais analisados refletem uma relação desigual e dicotômica entre rigor e intuição na apresentação dos conteúdos, ocorrendo uma primazia do primeiro elemento deste par tensional em detrimento do segundo (REIS, 2001, p. 195).

Defende-se, também, que não se deve transpor o "rigor acadêmico", dominante no mundo das publicações e apresentações de trabalhos científicos, de uma maneira direta ou simplista para o ensino. Deve-se optar por uma "abordagem que permita uma exploração múltipla e flexível dos conceitos e ideias matemáticas, e não sob um enfoque teórico único, por melhor que este seja" (REIS, 2001, p. 197).

Uma metáfora (fig. 1) é apresentada pelo autor a fim de sugerir o trabalho do professor quanto ao rigor e à intuição.

Figura 1 - Intuição e rigor



Fonte: Metáfora Intuição e Rigor (REIS, 2001)

Quanto a essa metáfora, ele discorre que

O trabalho do professor pode situar-se em qualquer um dos pontos dessa reta contínua. O professor tem autonomia para deslocar-se para qualquer ponto dessa reta. Se o deslocamento tenderá a ser, com mais frequência, para a esquerda (intuição), isso pode denotar uma preocupação pedagógica mais voltada à produção de sentidos e significados e à formação de conceitos. Se o deslocamento for, com mais frequência, para a direita (rigor), isso poderá significar uma preocupação e uma ação pedagógica mais sintático-procedimental (REIS, 2001, p. 203).

Reis defende que o ponto ideal é o ponto de equilíbrio, mas que sabe que é algo difícil de ser conseguido no ensino, pois depende das concepções, valores e conhecimentos do professor.

Outra pesquisa que investiga a disciplina Análise é a de Moreira, Cury e Vianna (2005). Esses autores discutem a importância da Análise Real na licenciatura. Para tal pesquisa, os autores analisaram as respostas de 31 matemáticos a um questionário sobre o papel dessa disciplina nos cursos de Licenciatura em Matemática. De início é reforçada a importância da Análise na Matemática, como identificamos abaixo

Ela [a análise] pode ser vista, ao lado do estudo das estruturas algébricas, como uma das formas de introdução dos futuros matemáticos a conceitos, métodos, técnicas e valores próprios da matemática avançada, além de servir de base para a Análise do R^n e, daí, para estudos mais gerais, envolvendo outros espaços e estruturas, como variedades diferenciáveis, espaços de Banach, etc. (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 13).

Entretanto, esses conceitos não fazem parte da realidade do professor do ensino fundamental ou do ensino médio. Um primeiro argumento apresentado pelos participantes da pesquisa aponta que a Análise permite ao licenciado um contato com a cultura Matemática e possibilita o desenvolvimento do "pensar matematicamente". Contudo, os autores questionam a validade de se desenvolver concepções e práticas específicas de uma "cultura" que será totalmente diferente da vivida na sala de aula.

Um segundo argumento é de que a Análise proporciona uma maior segurança ao futuro professor, explicando os vários "porquês" da Matemática. Todavia, os autores questionam "em que aspectos a promoção de uma percepção avançada da Matemática elementar pode ser tomada como um *aprofundamento* do conhecimento matemático visando a prática docente escolar?" (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 35). Para reforçar esse questionamento, os autores apresentam pesquisas que defendem que

(...) a noção de conhecer matemática, no sentido da matemática "avançada" (isto é, submetida a um modelo de organização axiomática, utilizando uma linguagem formal, com os conceitos 'unificados' num alto grau de abstração e generalidade, etc.) nem sempre pressupõe um conhecimento da matemática escolar, no sentido de ser capaz de dar respostas às questões que se colocam para o professor em sua prática docente escolar (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 37).

Para os autores, é necessário que se pense maneiras de integrar os conteúdos matemáticos, em especial a Análise, com a prática docente. Para eles "não se trata de uma

concepção que implique necessariamente 'baixar o nível' da formação na licenciatura" (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 40), mas sim de trabalhar a formação Matemática do futuro professor preparando-o para sua prática.

Com objetivo semelhante, tentando identificar qual a contribuição da disciplina de Análise na formação do professor de Matemática, Bolognezi (2006) faz uma pesquisa com professores do ensino médio e, também, com alunos e professores do curso de Matemática de uma instituição do Paraná que oferece ambas as modalidades, licenciatura e bacharelado. Nessa universidade, a disciplina de Análise é ofertada para as duas modalidades conjuntamente.

Um das conclusões apresentadas por Bolognezi (2006) é a falta de momentos distintos para cada modalidade durante a disciplina. Visto que há objetivos diferentes para a licenciatura e para o bacharelado apontados pelas Diretrizes Curriculares, esperava-se que uma abordagem diferenciada fosse realizada dentro da disciplina, focando a formação do professor.

A análise matemática deve sim, ser mostrada ao futuro professor de forma contextualizada, aplicada, com uma metodologia voltada para o ensino, com demonstrações que lhe servirão para um entendimento e aplicação em sala de aula do ensino médio (BOLOGNEZI, 2006, p. 81).

A pesquisa mostra que, infelizmente, não há esse diferencial para a licenciatura e, através dos questionários, os alunos apontaram essa falta de relação/contribuição da disciplina Análise com as disciplinas didático-pedagógicas na licenciatura. Em sua conclusão, a autora, baseada nos questionários, afirma que a disciplina pouco ou nada contribui com a formação do professor e culpa o excesso de rigor pela falta de interesse dos alunos. A pesquisadora, entretanto, não dá indícios de como mudar essa situação.

Pasquini (2007) investiga as possibilidades de um tratamento dos números reais via medição de segmentos para cursos de formação de professores de Matemática. Baseado em um material apresentado no VI Seminário Nacional de História da Matemática (BARONI; NASCIMENTO, 2005), a autora levanta questionamentos acerca do uso de tal material em uma disciplina de Análise em um curso de pós-graduação. A escolha por se discutir os números reais se deu pela importância dessa temática na análise.

(...) a forma como os conceitos de número real e irracional têm sido abordados influi de forma direta para que concepções precárias, limitadas e

inconsistentes a respeito desses conceitos estejam presentes na formação do futuro professor (PASQUINI, 2007, p. 38).

A autora discute que, se continuarmos a insistir em apresentar o conjunto dos números reais apenas como um Corpo Ordenado Completo, esse cenário não mudará, sendo formados professores com um conhecimento distinto do necessário à sua prática. A pesquisadora defende o uso deste material investigado, por ter sido importante no surgimento de questionamentos acerca do conceito de número real, de incomensurabilidade e sobre a noção de infinito. Pasquini defende que abordagens nas quais se introduz os números reais a partir de processos infinitos, como essa, evita a circularidade da definição comumente utilizada na sala de aula (os números reais são formados por números racionais e irracionais; enquanto os números irracionais são aqueles que não são números racionais).

Essa breve revisão de literatura da Análise no contexto da Educação Matemática nos mostra que, neste âmbito, as pesquisas são recentes. Acredito ser necessário o desenvolvimento de novos trabalhos com o intuito de compreender profundamente essa disciplina e propor alternativas em seu desenvolvimento. Os conteúdos envolvidos na Análise não são elementares, e distintas abordagens para ensiná-los pode ser uma forma de mudar esse panorama “problemático” que as pesquisas apontam.

Na sequência apresentarei as noções de experimentação e de experimentação-com-tecnologia, conceitos que dão suporte para minha pesquisa. E, mais adiante, apresento alguns trabalhos com o GeoGebra que utilizam essas ideias.

2.3. Experimentação-com-Tecnologia

Em aparente contraste com o rigor e a abstração pelos quais a Matemática passava nos séculos XIX e XX, surge o computador, gerando novas possibilidades no ensino da Matemática.

Não há dúvida que a visão formalista da matemática prevaleceu soberanamente no século XX, mas em meio desse domínio do formalismo, acabou se insinuando no terreno da demonstração matemática, um estranho no ninho, o computador, para o constrangimento dos mais puristas (DOMINGUES, 2002, p. 65).

Desde sua aparição, o computador vem surpreendendo com suas variadas funções e a velocidade com que as reproduz. Uma vez inserido em âmbito educacional, propôs mudanças

no quadro geral e causou polêmicas, como por exemplo, em 1976, quando foi apresentada uma demonstração computacional para o Teorema das Quatro Cores. De Villiers (2010) defende que o computador criou uma oportunidade única para pesquisadores formularem um grande número de conjecturas e imediatamente testá-las, variando apenas alguns parâmetros, levando a uma nova forma de pesquisar em Matemática. A noção de experimentação ganha, então, uma nova dimensão.

De Villiers (2003) entende a experimentação como todos métodos não dedutivos, incluindo os raciocínios intuitivo, indutivo ou analógico. Em outras palavras, a experimentação é utilizada quando:

- (i) conjecturas matemáticas e/ou sentenças são numericamente ou visualmente validadas, por meios de casos especiais, cuidadosas construções e medições geométricas, etc. (ii) conjecturas, generalizações ou conclusões são feitas com base na intuição, analogia ou experiência obtida através de algum método experimental, etc. (DE VILLIERS, 2003, p. 174, tradução nossa).¹⁰

Para Borba e Villarreal (2005), uma abordagem experimental em Educação Matemática implica no uso de experimentos e tentativas que suportem a criação de conjecturas matemáticas; na descoberta de resultados matemáticos previamente desconhecidos; na possibilidade de testar diferentes caminhos para alcançar o objetivo. Para os autores, a experimentação é um novo modo de aprender Matemática e que ganha uma nova dimensão e poder com o uso da tecnologia.

Há uma sinergia entre as noções de De Villiers (2003) e de Borba e Villarreal (2005). Ambos acreditam no potencial da experimentação na aprendizagem matemática, porém De Villiers (2010) considera o computador apenas como uma ferramenta importante de exploração, já Borba e Villarreal (2005) defendem que o computador possui papel importante na produção do conhecimento matemático. Utilizarei, então, o termo experimentação-com-tecnologia para reforçar essa visão de que a tecnologia não é apenas uma ferramenta, mas sim uma atriz nesse processo.

Alguns autores (ARZARELLO *et al.*, 2012; DE VILLIERS, 2010; HSIEH; HORNG; SHY, 2012) defendem a o uso da tecnologia juntamente com a experimentação no processo matemático, tendo importante papel na formulação de conjecturas, na refutação das mesmas e

¹⁰ (i) Mathematical conjectures and/or statements are numerically or visually evaluated, by means of special cases, accurate geometric construction and measurement, etc. (ii) Conjectures, generalizations or conclusions are made on the basis of intuition, analogy or experience obtained through any of the proceeding experimental methods, etc.

no convencimento de algum resultado. Segundo De Villiers (2003), algumas das funções da experimentação são:

i) Conjecturar

Através da experimentação é possível criar conjecturas e testá-las. Um exemplo da história da Matemática de conjectura elaborada a partir da intuição e de testes é o famoso Teorema do Número Primo, de Gauss. A partir de um padrão numérico obtido da contagem dos números primos e de logaritmos, Gauss descobriu que o número de números primos menor ou igual a um número n é sempre aproximadamente $\frac{n}{\log n}$, e a aproximação fica melhor na medida em que n aumenta. Essa conjectura fora elaborada em 1792 e usada sem uma demonstração formal até 1896, quando Hadamard e Poussin finalmente a demonstraram (DE VILLIERS, 2003).

ii) Verificar

A experimentação possui, também, a função de convencer. Contrário ao que muitos acreditam, matemáticos muitas vezes são convencidos de algum resultado muito antes de se obter uma prova formal para tal. De Villiers (1990) defende que o convencimento é um pré-requisito para se buscar por uma demonstração.

iii) Refutação Global

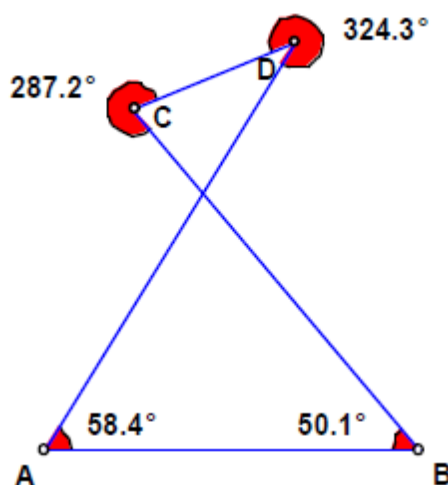
A refutação global é outro papel fundamental da experimentação. Tal termo, para De Villiers (2003) significa a produção de um contraexemplo lógico, que contenha as condições de uma sentença, mas que refute a conclusão e, assim, a validade da proposição. Um exemplo clássico é uma conjectura elaborada por chineses no século XV. A sentença dizia que *se $2^n - 2$ é divisível por n então n é um número primo*. Tal conjectura foi refutada. Para $n = 341$, temos que $2^{341} - 2$ é divisível por 341, contudo $341 = 11 \times 31$, ou seja, não é primo (DE VILLIERS, 2010).

iv) Compreensão

A investigação experimental pode, algumas vezes, nos levar a novas perspectivas e a uma compreensão mais profunda de conceitos e definições, ajudando-nos a melhor entender o que está sendo discutido. Um exemplo apresentado por De Villiers (2003) vem de sua própria experiência e pauta sobre ângulos internos de um polígono complexo.

O autor afirma que a intuição pode gerar a falsa impressão de que em polígonos complexos os ângulos internos são, de fato, internos ao polígono, o que pode não ser verdade em alguns casos nos quais os polígonos possuem lados que se cruzam entre si (fig. 2). De Villiers (2003, p. 181, tradução nossa) afirma que "esta observação contraintuitiva provavelmente não teria sido possível sem a investigação experimental. Ela também me ajudou a repensar cuidadosamente o significado de ângulos internos, em tais casos, levando a uma definição consistente".

Figura 2 - Polígono complexo



Fonte: Soma de ângulos internos (DE VILLIERS, 2004)

Visto os papéis assumidos pela experimentação, apresentados acima, busquei por trabalhos que corroborassem as ideias de De Villiers. Nessa busca, descobri que a literatura em Educação Matemática possui várias pesquisas sobre o uso da experimentação-com-tecnologia no ensino e aprendizagem. Hanna (2000) investigou o uso de *software* de geometria dinâmica e discutiu questões acerca da visualização, exploração e heurística, principalmente no que se refere às possibilidades de gerar conjecturas e convencimento matemático.

Bonafini (2004) analisou como os alunos trabalham conceitos matemáticos e físicos em um ambiente de experimentação. Um dos conceitos investigados foi a temperatura de uma mistura de duas soluções. A autora utilizou calculadoras gráficas e sensores de temperatura para obter dados reais, levando a uma generalização dos resultados obtidos a partir das experimentações.

Scucuglia (2006) utilizou calculadoras gráficas para investigar o Teorema Fundamental do Cálculo. Uma das atividades elaboradas pelo pesquisador consistia em

calcular a área da figura plana delimitada em um dado intervalo sob a curva $f(x) = x^2$ utilizando retângulos superiores e inferiores. Conforme os alunos alteravam a quantidade de retângulos utilizados, algumas conjecturas surgiam a respeito do valor dessa área.

Olimpio Junior (2006) utilizou o *software Maple* para observar compreensões de alunos ingressantes no curso de Matemática sobre alguns tópicos de Cálculo, como função, limite, continuidade e derivada. Os resultados da pesquisa apontam para a importância de uma abordagem mais dinâmica no Cálculo Diferencial e Integral.

Javaroni (2007) analisou as possibilidades de se introduzir equações diferenciais ordinárias a partir da análise qualitativa de alguns modelos matemáticos com o auxílio de planilhas do Excel e dos *softwares Winplot e Maple*. Os resultados da pesquisa apontam que a interação entre os alunos e as mídias possibilitou novas abordagens para o estudo dos modelos matemáticos investigados, sugerindo uma ênfase no aspecto geométrico dos modelos no ensino das equações diferenciais ordinárias.

É possível observar que os trabalhos supracitados defendem o papel da experimentação na Matemática e utilizam a tecnologia para realizá-la. Apresentarei, na sequência, pesquisas que trabalharam com experimentação-com-tecnologia, todavia a tecnologia em particular foi o *software GeoGebra*, mídia utilizada nessa pesquisa, aqui relatada.

2.3.1. Experimentação-com-GeoGebra

Richit (2010) investiga as possibilidades do GeoGebra em um curso de formação continuada de professores de Matemática a distância. Nesse curso discutiu-se criticamente o uso das TIC na sala de aula de Cálculo, além de serem desenvolvidas atividades sobre *Soma de Riemann* com o *software*. Sobre o uso do GeoGebra, a autora afirma que

O professor de Cálculo Diferencial e Integral tem aí uma chance de poder tornar significativo para os estudantes a abordagem de certos conceitos, gerando novas compreensões em função da ampliação das formas de interação aluno-conteúdo, comparando-se com estratégias metodológicas clássicas, que priorizam a abordagem estática do conteúdo (RICHIT, 2010, p. 103).

A autora conclui que o uso do GeoGebra possibilitou uma ampliação e uma ressignificação quanto aos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral por parte dos professores, gerando momentos de formação no curso oferecido.

Em outro trabalho, Richit et al (2012) apresentam uma pesquisa que, a partir de atividades exploratório-investigativas, investigou como a produção de conhecimento dos alunos podia ser reelaborada no contexto das TIC, em particular, utilizando o GeoGebra enquanto alternativa teórico-metodológica na introdução e visualização de conceitos matemáticos para alunos de um curso de Geologia. Os autores afirmam que a inserção da tecnologia "proporcionou uma motivação nos alunos, de forma que houve um envolvimento maior por parte deles durante a execução das atividades" (RICHIT et al., 2012, p. 98) e, corroborando De Villiers (2003, 2010), observou-se que a partir da experimentação "os alunos puderam levantar hipóteses a partir de um problema dado" (RICHIT et al., 2012, p. 98).

Alves e Neto (2012b) trazem alguns exemplos de limites vinculados ao surgimento de algumas categorias de indeterminações (0^0 , $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0 , 1^∞ , $0 \cdot \infty$, etc.), a fim de discutir a utilização da *Regra de L'Hopital*. Os autores afirmam que muitos alunos não entendem a necessidade da utilização de tal regra, e sugerem uma abordagem diferenciada para o trabalho com tal tema, utilizando o *software* GeoGebra, de forma que "suavize o caráter hegemônico de tarefas algorítmicas" (ALVES; BORGES NETO, 2012b, p. 330). Os pesquisadores concluem que com o auxílio do *software* é possível "construir um cenário de aprendizagem que possibilite ao estudante o entendimento acerca da manifestação da noção de indeterminação, sobretudo no quadro geométrico" (ALVES; BORGES NETO, 2012b, p. 336).

A pesquisa de Brunet, Leivas e Leyser (2009) busca criar alternativas que ofereçam ao futuro professor formas diferenciadas de desenvolver conteúdos, tendo como fundamento a intuição geométrica ancorada pelas tecnologias computacionais. O trabalho desenvolveu-se como um estudo de caso, cujos sujeitos foram alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA). De início trabalhou-se com a ideia intuitiva de limite, discutindo alguns casos sobre continuidade e descontinuidade de funções. Esses pesquisadores concluíram que a utilização da tecnologia foi um facilitador no entendimento de limite de funções pelos alunos.

Percebe-se certa facilidade em encontrar pesquisas com conteúdos do Cálculo, utilizando o GeoGebra. Entretanto, na área da Análise há uma escassez de trabalhos que discutem o uso do *software*, com a exceção de algumas pesquisas de Francisco Alves e Hermínio Borges Neto.

Alves (2012) faz uma breve discussão de algumas noções topológicas no contexto da transição do Cálculo Diferencial e Integral para a Análise utilizando o *software* GeoGebra.

Nesse artigo o autor levanta a possibilidade de trabalho com sequências numéricas, teorema do confronto, conjuntos dos valores de aderência, conjunto compacto, entre outros, com o auxílio do GeoGebra. O autor defende, ainda, a importância dos *software* na produção de conhecimento em comparação com as mídias tradicionais lápis e papel.

Ferramentas computacionais como o *GeoGebra*, ou o *CAS Maple* possibilitam explorar a visualização, a evolução de imagens mentais, o uso de metáforas, a produção de *insights* e, por fim, a *apreensão cognitiva* do aprendiz em relação aos objetos do IR^2 ou no IR^3 , o que se mostra inviável quando restringimos nosso ensino às mídias lápis/papel e priorizamos a formalização da teoria (ALVES, 2012, p. 176).

Alves e Neto (2012a) trazem alguns usos do GeoGebra em definições de Análise, como imagem limitada e convergência de sequências. Os autores destacam a importância da ressignificação dos conceitos propiciada pelo uso do *software* e chamam atenção às dificuldades geradas devido ao caráter formal que a Análise possui.

Em nosso trabalho, evidenciamos a significação proporcionada pela exploração do software Geogebra, pertinente às definições e alguns teoremas essenciais nesta teoria, que adquirem um significado que ultrapassa os limites do formalismo e o olhar estrutural dos objetos matemáticos (ALVES; BORGES NETO, 2012a, p. 328).

Os autores afirmam que o GeoGebra funciona como elemento impulsionador de uma ressignificação para teoremas e definições formais da Análise e defendem que ter domínio formal sobre inferências lógicas não garante uma compreensão efetiva dos conceitos discutidos por eles.

Visto a complexidade dos conteúdos abordados na disciplina análise, acredito ser importante um trabalho diferenciado que objetiva a compreensão dos conceitos discutidos. Essa pesquisa, então, tem a intenção de apresentar o trabalho de experimentação-com-tecnologia de alunos da Licenciatura em Matemática com o GeoGebra no qual é discutido a noção de convergência de sequências, alguns resultados de convergência a partir de sequências limitadas e monótonas, além de investigar o Teorema do Valor Intermediário, resultado importante na Análise. A revisão de literatura nos dá indícios quanto a necessidade de investigações nessa temática, reforçando a importância da pesquisa.

Dado que carrego a noção "Experimentação-com-Tecnologia" na pesquisa, algo que emerge nesse processo é a visualização. Sendo assim, na próxima seção, destacarei aspectos

relevantes sobre a mesma, apresentarei algumas definições encontradas na literatura sobre o termo, assim como seu uso na Matemática.

2.4. Visualização

Durante a produção dos dados, os participantes utilizaram, muitas vezes, a visualização como forma de validar alguma conjectura ou resultado obtido com o GeoGebra. Devido a esse fato, achei importante elencar algumas características gerais que possam explicar ou reforçar esse forte apelo visual na Matemática comumente utilizado pelos alunos.

De acordo com Phillips, Norris e Macnab (2010), a visualização pode ser usada para ajudar estudantes na interpretação de problemas matemáticos, para mostrar como certas quantidades variam em determinado intervalo de tempo e para salientar relações entre conceitos matemáticos. Segundo Borba e Villarreal (2005, p. 79, tradução nossa), “a visualização tem sido considerada como uma forma de raciocínio em pesquisas matemáticas, assim como no aprendizado da Matemática”¹¹. Mas, afinal, o que é visualização?

O termo visualização provém do campo da psicologia e, inicialmente, o termo era associado às habilidades visuais que os indivíduos tinham e podiam desenvolver para interpretar imagens. A partir da década de 80 do século XX, as pesquisas em educação matemática se ancoraram nesta perspectiva cognitivista e se apropriaram do termo visualização (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012, p. 32).

Como apontado por Flores, Wagner e Buratto (2012), buscou-se na psicologia um aporte para a ideia de visualização. A fim de investigar quais as diferentes concepções existentes nas diversas áreas, Phillips, Norris e Macnab (2010) fizeram uma busca em aproximadamente 250 artigos, livros e capítulos, elencando 28 definições explícitas do termo. Dentre os autores pesquisados, alguns discutem a noção de visualização no contexto da Matemática e Educação Matemática. Dentre destes, destaco as ideias de Ben-Chaim, Lappan, Houang (1989), Habre (1999), Linn (2003) e Zaraycki (2004).

Segundo Ben-Chaim, Lappan, Houang (1989), a visualização engloba a habilidade de compreender e interpretar informações através de imagens e, também, de traduzir relações abstratas em termos visuais, isto é, ela "é um componente central de vários processos na transição do concreto para o abstrato. É uma ferramenta para representar ideias e informações

¹¹ Visualization has been considered as a way of reasoning in mathematics research as well in mathematics learning.

matemáticas" (BEN-CHAIM; LAPPAN; HOUANG, 1989, p. 50). Para Habre (1999) e Zaraycki (2004), visualização é o processo de utilizar geometria para ilustrar conceitos matemáticos. Já para Linn (2003), a visualização é a representação de qualquer fenômeno em duas ou três dimensões, ou a partir de uma animação, tendo como função revelar aspectos de fenômenos que as palavras não são capazes de descrever.

Além dos autores apresentados por Phillips, Norris e Macnab (2010), outros autores, como Zimmermann e Cunningham (1991), também investigam sobre a temática. Esses autores defendem que a visualização na Matemática é o processo de formação de imagens, podendo essa formação ser mental, com lápis e papel ou com a tecnologia, e usando-as com o propósito de obter uma melhor compreensão matemática, assim como, usando-as como forma de estimulação no processo de descoberta matemática. Com ideias semelhantes, Arcavi (2003) considera a visualização como uma habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação e o uso da reflexão sobre retratos, imagens, diagramas em nossas mentes ou no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar informações, pensando e desenvolvendo ideias anteriormente desconhecidas e avançando os entendimentos já existentes.

Indo ao encontro destas ideias, Borba e Villarreal (2005) apontam algumas potencialidades da visualização, defendendo seu uso na Educação Matemática.

Visualização constitui uma alternativa para acessar o conhecimento matemático; A compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e a representação visual pode transformar o entendimento; A visualização é parte da atividade matemática e um caminho para a resolução de problemas (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 96, tradução nossa).¹²

Corroborando as ideias supracitadas, defendo que a visualização seja um importante componente no ensino e no aprendizado da Matemática. Admito a visualização como uma compreensão a partir de imagens, cujo objetivo é obter informações matemáticas. Essa visualização, como afirmado por Zimmermann e Cunningham (1991), pode ser gerado por meio de tecnologias.

A partir da década de 80, com o aumento do uso do computador em contextos educacionais e científicos, surgiu-se a necessidade de uma investigação acerca da visualização computacional ou, também chamada, visualização computacional científica. De acordo com a

¹² Visualization constitutes an alternative way of accessing mathematical knowledge. The comprehension of mathematical concepts requires multiple representations, and visual representation may transform understanding in itself. Visualization is part of mathematical activity and a way of solving problems.

National Science Foundation (NSF), a visualização científica foi definida como um método computacional que transforma o simbólico no geométrico, possibilitando a pesquisadores observar suas simulações e seus cálculos, oferecendo um método de ver o não visto.

Segundo Phillips, Norris e Macnab (2010, p. 33), "no início da década de 90, as animações geradas pelo computador têm tido um crescente papel no discurso da visualização"¹³. Rieber (1990) defende que usar animações interativas, pode ser interessante na medida em que os estudantes têm a possibilidade de controlar seu aprendizado manipulando a tecnologia em questão.

Borwein e Jorgenson (2001) discutem sobre a importância da visualização na Matemática e do uso da tecnologia nesse contexto. Os autores apontam que

A visualização amplia a capacidade natural do matemático de prever seu objeto, de ver suas entidades e objetos que fazem parte de seu trabalho com a ajuda de *softwares* e *hardwares*. (...) as imagens e as interfaces podem, também, promover novas formas de exposição e, até mesmo, de demonstrações (BORWEIN; JORGENSON, 2001, p. 909).¹⁴

Os autores defendem que a visualização associada aos *software* pode gerar novas possibilidades no fazer matemática. Tall (1993) afirma que o computador pode ser uma rica fonte de imagens que fazem a exploração de conceitos matemáticos possíveis. O autor afirma que negar a importância da visualização é negar as raízes da matemática, dado que muitas ideias importantes surgiram a partir dela. Tall (1991, p. 105) defende que "negar essas ideias ao estudante é o mesmo que cortá-lo das raízes históricas"¹⁵.

Nesse sentido, a função do *software* é suprema, promovendo aos estudantes a oportunidade de explorar ideias matemáticas, analisar exemplos e contraexemplos, ganhar a intuição visual necessária para alcançar os conhecimentos formais (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 91).¹⁶

Borba e Villarreal (2005) reconhecerem a importância de momentos experimentais, como percebemos no excerto acima, no entanto os autores afirmam que ainda existe a ideia de

¹³Since the early 1990s, computer-generated animation has taken an increasing role in the discourse of visualization.

¹⁴ Visualization extends the natural capacity of the mathematician to envision his subject, to see the entities and objects that are part of his work with the aid of software and hardware. (...) the images and interfaces may also provide new forms of exposition and possibly even proof.

¹⁵ To deny these ideas to students is to cut them off from the historical roots of the subject

¹⁶ In this sense, the function of the software is paramount, providing the students with the opportunity to explore mathematical ideas, analyze examples and counter-examples, and then gain the necessary visual intuitions to attain powerful formal insights.

que o objetivo final da experimentação deve ser a demonstração matemática. Mesmo concordando com a importância destas, acredito que de nada vale seu ensino sem a compreensão. É nessa perspectiva que defendo a utilização da visualização no ensino da Matemática, pois ela pode possibilitar interpretações e compreensões de conceitos matemáticos, até então, abstratos, dando novos significados aos mesmos.

Neste capítulo elaborei uma revisão de literatura acerca de temas relevantes para o desenvolvimento da pesquisa como um todo. Iniciei o capítulo com uma breve história do desenvolvimento da Análise como área de pesquisa da Matemática, indicando aspectos importantes até o surgimento da mesma como disciplina. Na sequência, selecionei algumas pesquisas no contexto da Educação Matemática que investigaram a Análise Matemática, apontando as problemáticas levantadas por cada uma delas, de modo a situar o leitor do que tem sido feito nesse âmbito. Logo após, apresentei a definição de experimentação-com-tecnologia adotada nessa pesquisa, assim como algumas pesquisas que utilizam essa noção e discuti, também, alguns papéis da experimentação no ensino da Matemática. Para concluir, sintetizei alguns trabalhos sobre a visualização na Matemática, a fim de compreender a importância do aspecto visual na produção de conhecimento matemático.

A seguir, apresentarei a metodologia utilizada para a realização dessa pesquisa, assim como um importante referencial teórico e alguns aspectos metodológicos relevantes para que se compreenda como se deu a realização desse trabalho.

3 OS CAMINHOS DA PESQUISA

Nesse capítulo, apresento algumas características da metodologia de pesquisa qualitativa, justifico sua escolha e mostro sua ressonância com a visão de conhecimento adotada nessa pesquisa. Na sequência, detalho o processo de produção de dados, identificando aspectos relevantes sobre os experimentos de ensino, procedimento metodológico utilizado para a produção. Apresento, também, os participantes da pesquisa e as atividades desenvolvidas, assim como o modo que as análises foram realizadas. Finalizo o capítulo com algumas considerações sobre os dados produzidos.

3.1. Metodologia de Pesquisa Qualitativa

Optei pela metodologia de pesquisa qualitativa, visto que me preocupo com o aprofundamento da compreensão de um grupo particular de Alunos-com-GeoGebra. Entende-se que esse tipo de pesquisa se preocupa em compreender como as pessoas agem e pensam sobre determinados assuntos, em contextos bem estabelecidos. Goldenberg (2004) discorre sobre o foco da pesquisa qualitativa.

Na pesquisa qualitativa a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc. (GOLDENBERG, 2004, p.14).

De acordo com D'Ambrósio (2012), a pesquisa qualitativa, tem como foco entender e interpretar dados e discursos envolvendo grupos de participantes. Corroborando essa ideia, Denzin (2006) afirma que esse tipo de abordagem enfatiza as qualidades das entidades e dos processos, e os significados não são examinados ou medidos em termos de quantidades, volume, intensidade ou frequência.

Para Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa possui cinco características. São elas:

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
2. A investigação qualitativa é descritiva;
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que pelos resultados;
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
5. O significado é de vital importância na abordagem qualitativa. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, pp. 47-50).

Essas características dão uma "forma" à abordagem qualitativa, entretanto, nem todas devem, necessariamente, ser abordadas. No ato de pesquisar, não há exatamente um caminho a seguir. O pesquisador é livre o suficiente para analisar quais os melhores passos para alcançar seu objetivo. Bogdan e Biklen (1998) argumentam que um dos enfoques do pesquisador nas ciências qualitativas é

Melhor compreender o comportamento e a experiência humana. Eles procuram compreender o processo pelo qual as pessoas constroem significados e descrevem o que são aqueles significados. Usam observação empírica por que é com eventos concretos do comportamento humano que os investigadores podem pensar mais clara e profundamente sobre a condição humana (BODGAN; BIKLEN, 1998, p.38).

O pesquisador é considerado o principal instrumento de investigação e deve estar ciente que sua presença influencia nos resultados.

Em Educação, o investigador não é apenas um espectador do que se passa no terreno da prática educativa, mas também um actor, ao lado de outros actores, na transformação desse terreno e dos próprios participantes (PONTE, 2005, p. 112).

Para esse autor, o pesquisador faz parte da pesquisa, é um ator importante e integrante de todo o pesquisar. É ele que guiará os procedimentos a fim de que o objetivo do estudo seja alcançado. Tão importante quanto o pesquisador é a visão de conhecimento assumida pelo mesmo. De acordo com Araújo e Borba (2004) e Lincoln e Guba (1985) é de extrema relevância que a visão de conhecimento que o pesquisador possui esteja em ressonância com a metodologia e com os procedimentos metodológicos adotados. Na próxima seção apresentarei a visão adotada nessa dissertação, que destaca o papel das diversas tecnologias no processo de produção de conhecimento.

3.2. Seres-humanos-com-Mídias

Conforme as tecnologias digitais foram ganhando espaço na sala de aula, notou-se que o ensino poderia ganhar uma nova dimensão, podendo transformar o processo de ensino e aprendizagem. Tikhomirov (1981), a fim de compreender como a informática afeta na educação, discute três teorias, a saber, da substituição, suplementação e reorganização. A

teoria da suplementação defende que o computador complementa o pensamento humano no processamento de informação, aumentando o volume e a velocidade desse processo, tendo apenas uma visão quantitativa do pensamento. A teoria da substituição afirma que o computador substitui o ser humano em todas as esferas do trabalho intelectual, deixando de lado os complexos processos humanos necessários para a realização do pensamento. O autor refuta ambas as teorias argumentando que os computadores reorganizam a atividade humana.

Na análise da atividade prática, os psicólogos enfatizam a ferramenta como o mais importante componente da atividade humana. Este componente cria uma singularidade qualitativa da atividade humana em comparação com o comportamento animal. A ferramenta não é simplesmente adicionada na atividade humana: antes, ela a transforma (TIKHOMIROV, 1981, p. 270, tradução nossa)¹⁷.

A terceira teoria, a da reorganização, defende que a informática, enquanto instrumento de mediação, reorganiza a cognição humana. Segundo Tikhomirov, a estrutura da atividade intelectual humana é modificada pelo uso do computador, reorganizando os processos de criação, de busca e de armazenamento de informações, emergindo novas formas de atividades.

Em sinergia com a noção de reorganização do pensamento, Lévy (1993) apresenta algumas ideias que contemplam dimensões técnicas e coletivas da cognição humana, propondo a noção de um coletivo pensante homens-coisas. O estudo dessas dimensões técnicas e coletivas da cognição é definido por Lévy (1993) como ecologia cognitiva. Esse filósofo descreve as tecnologias da inteligência, oralidade, escrita e informática, associadas à memória e ao conhecimento. Para o autor, a técnica e o ser humano devem ser vistos de forma conjunta, de forma que não haja uma dicotomia entre eles.

Já nessa época, Lévy defendia a incorporação de *software* no dia-a-dia das escolas. Os *software* educacionais, segundo o autor, têm a capacidade de realçar o componente visual da Matemática atribuindo um papel importante à visualização, pois ela alcança uma nova dimensão se for considerado o ambiente de aprendizagem com computadores como um particular coletivo pensante, onde professores, alunos, mídias e conteúdos matemáticos residem juntos e, mais que isso, pensam juntos.

¹⁷ In analyzing practical activity, psychologists emphasize the tool as the most important component of human activity. This component creates the qualitative uniqueness of human activity in comparison with animal behavior. The tool is not simply added on to human activity: rather, it transforms it.

As tecnologias são produtos humanos, e são impregnados de humanidade, e reciprocamente o ser humano é impregnado de tecnologia. Nesse sentido, o conhecimento produzido é condicionado pelas tecnologias (BORBA, 2004, p. 331).

Borba e Villarreal (2005), no livro *Humans-with-media and Reorganization of Mathematical Thinking*, trazem os conceitos de Tikhomirov (1981) e Lévy (1993) para o âmbito da Educação Matemática e defendem que a produção do conhecimento se dá a partir do coletivo formado por seres humanos e não humanos, ressaltando a importância das mídias nesse processo.

Para esses autores, os computadores e humanos não são considerados separadamente constituindo-se unidades disjuntas. Os computadores não são apenas assistentes dos humanos ao se fazer Matemática, pois eles mudam a natureza do que é feito, sugerindo que diferentes coletivos de humanos com mídias produzem diferentes matemáticas. Por exemplo, a Matemática produzida por humanos com lápis e papel é qualitativamente distinta da produzida por humanos com *software*, a partir de experimentações.

Como defendido por Lévy (1993), e destacado no capítulo anterior, um aspecto potencializado pelas mídias digitais é a visualização. Segundo Javaroni (2007, p. 153), "a visualização no ensino da matemática tem sido considerada como uma componente chave do raciocínio na resolução de problemas e não somente relacionada às finalidades ilustrativas". Um aluno, ou uma pessoa de modo geral, pode ter um *insight* a partir de uma visualização e, partindo deste *insight*, é possível que sejam elaboradas conjecturas e compreensões acerca de algum conceito matemático, em particular de conceitos de análise, como investigamos nesta dissertação.

A fim de acompanhar de perto esses possíveis *insights*, a partir da investigação com o *software*, na seção seguinte apresentarei os experimentos de ensino, procedimento utilizado na produção dos dados com o objetivo de se observar o trabalho dos Alunos-com-GeoGebra de forma mais aprofundada.

3.3. Experimentos de Ensino

Alguns pesquisadores acreditavam que educadores matemáticos não poderiam apenas "se apropriar" de modelos de pesquisa de diferentes campos com a expectativa de que eles pudessem explicar o desenvolvimento da Matemática dos estudantes. Era necessário que novas metodologias fossem capazes de investigar o aprendizado e o desenvolvimento matemático (STEFFE; THOMPSON, 2000). Diferentes metodologias de pesquisa emergiram

para dar suporte às pesquisas que não possuíam metodologias que as sustentavam e os experimentos de ensino marcaram uma revolução na prática da pesquisa em Educação Matemática nesse sentido (COBB; STEFFE, 1983).

O experimento de ensino é uma ferramenta conceitual que os pesquisadores usam na organização de suas atividades. É primariamente uma ferramenta exploratória [e tem por] objetivo explorar a matemática dos estudantes. Por envolver experimentação com modos e meios de influenciar o conhecimento matemático dos estudantes, o experimento de ensino é mais que uma entrevista clínica (STEFFE; THOMPSON, 2000, p.273).¹⁸

Steffe e Thompson (2000) entendem o termo "experimento de ensino" como sendo vários encontros entre o pesquisador e os estudantes, durante certo período de tempo, nos quais o pesquisador busca uma estruturação da forma como os estudantes estão pensando no processo de exploração de problemas. Durante esses encontros, o pesquisador possui um papel muito importante que é o de conduzir a pesquisa, cooperando com os alunos de forma que o conhecimento seja construído conjuntamente.

Embora Steffe e Thompson (2000) tenham sugerido que esse período de tempo seja longo, um semestre ou um ano, nessa pesquisa será utilizada uma variação desse procedimento, seguindo a tradição de outras pesquisas realizadas (BARBOSA, 2009; BENEDETTI, 2003; OLIMPIO JUNIOR, 2006; SCUCUGLIA, 2006), nas quais os alunos puderam ser filmados e observados atentamente em períodos de tempo que dependiam das atividades e dos objetivos propostos por cada pesquisa.

Dizemos que é uma variação dos experimentos de ensino, pois compartilhamos algumas de suas preocupações acerca do tipo de observação que pode ser feita em um ambiente em que alunos são filmados e podem ser observados de perto, entretanto não desenvolvemos experimentos longos, ao longo de um semestre ou um ano, como Steffe e Thompson (2000) sugerem (BORBA; VILLARREAL, 2005, p.189, tradução nossa)¹⁹.

Os elementos que constituem os experimentos são: sequência de episódios de ensino constituído por um agente de ensino; um ou mais estudantes e um método de gravação. Nesse

¹⁸ The teaching experiment is a conceptual tool that researchers use in the organization of their activities; It is primarily an exploratory tool (...) and aimed at exploring students' mathematics. Because it involves experimentation with the ways and means of influencing students' mathematics knowledge, the teaching experiment is more than a clinical interview.

¹⁹ We say that is a variation of the teaching experiment because we share some of their concerns regarding the kind of observation that can be done in a setting where students are filmed and can be closely observed, although we did not develop long term experiments, for an entire semester or a year, as Steffe and Thompson (2000) have suggested.

caso, utilizarei câmeras fixas e o *software Blueberry*²⁰. As câmeras fixas são necessárias, pois poderão captar algumas ações ou gestos dos alunos que o *software* possa perder. Outro aspecto relevante é que optei por separar os alunos em duplas e trabalhar com cada uma delas separadamente. A opção por trabalhar em pares se deu pelo fato de que dois alunos trabalhando juntos produzem mais verbalização do que apenas um (BUSSE; FERRI, 2003).

3.4. Fonte de Dados

A produção de dados foi dividida em quatro momentos. No primeiro momento foi feita uma introdução ao *software* GeoGebra, apresentando suas funções básicas e seus principais comandos, dando destaque nas ferramentas que seriam utilizadas nas próximas etapas.

O segundo momento foi voltado para o trabalho com os conceitos de *Convergência de Sequências Numéricas*. A terceira etapa destinou-se para os resultados de convergência de sequências, observando o comportamento de *sequências limitadas e monótonas*. E, por fim, no quarto momento, investigou-se o *Teorema do Valor Intermediário*.

Após cada experimento de ensino, realizei uma entrevista com as duplas a fim de clarear alguns pontos que ficaram obscuros durante a realização das atividades. Este momento também possibilitou que os sujeitos levantassem apontamentos que acharam relevantes. A entrevista foi escolhida devido ao fato de ser uma importante técnica de coleta de dados em pesquisa social. É mais que um diálogo; é uma discussão orientada para um objetivo definido, que através da comunicação leva o entrevistado a expor sobre temas específicos, podendo ir além do que aparecera durante a coleta de dados (ROSA; ARNOLDI, 2006).

Poupart (2010) afirma que a entrevista é uma forma de enriquecer o material de análise e o conteúdo da pesquisa, já que cria a possibilidade de o entrevistado falar sobre os assuntos que ele julga pertinentes, favorecendo "a emergência de dimensões novas não imaginadas, de início, pelo pesquisador" (POUPART, 2010, p.225).

É possível observar que há vários momentos durante a produção de dados: os *applets* do *software* GeoGebra, fichas de respostas, gravações das interações dos alunos com o GeoGebra e anotações no diário de campo. Esse processo de elaboração e articulação entre diferentes dados para discutir sobre a investigação da pesquisa é o que Araújo e Borba (2004)

²⁰ Com uma *webcam* e um microfone conectados ao computador, esse programa captura a imagem da tela do computador e da *webcam* simultaneamente, bem como o áudio do ambiente, podendo comparar o que está sendo falado pelos alunos e o que está sendo feito no computador, ao mesmo tempo.

chamam de triangulação. Goldenberg (2004, p.63) argumenta que esse processo "tem por objetivo abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do objeto de estudo". Todos esses procedimentos durante a pesquisa levaram a uma melhor compreensão do fenômeno estudado.

3.5. Os Participantes

A pesquisa foi realizada com quatro alunas do curso de graduação em Licenciatura em Matemática, e estas separadas em duplas. As alunas participantes da pesquisa foram:

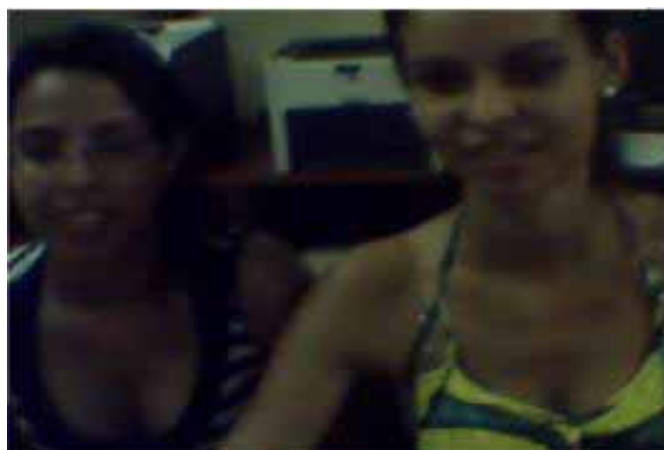
- i) Adriele e Karen (fig. 3)
- ii) Gislaine e Patrícia (fig. 4)

Em relação às estudantes, todas estavam devidamente matriculadas no curso de Licenciatura em Matemática da UNESP de Rio Claro. No ano da produção de dados, 2013, Adriele se encontrava no quarto ano do curso, enquanto Gislaine, Karen e Patrícia no quinto ano. Todas as alunas já haviam concluído as disciplinas de Cálculo e Análise, nas quais os conceitos trabalhados nessa pesquisa geralmente são abordados. As alunas haviam reprovado a disciplina Cálculo pelo menos uma vez, enquanto na disciplina Análise todas passaram sem reprovas.

O fato de as alunas já terem tido contato com os conceitos aqui investigados não invalida a pesquisa e sim nos faz refletir acerca do fato de que, mesmo tendo estudado tais conceitos anteriormente, as alunas tiveram dificuldades em discuti-los no decorrer das atividades propostas.

Todas as participantes permitiram as filmagens dos experimentos de ensino, assim como a divulgação de seus nomes, imagens e discussões que foram realizadas.

Figura 3 - Adriele e Karen



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Figura 4 - Gislaine e Patrícia



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

3.6. O Software GeoGebra

Para realizar tal pesquisa, busquei me aprofundar na literatura sobre experimentações, e também, aprender a trabalhar com o *software*. Fiz um curso²¹ a distância sobre o GeoGebra durante 10 semanas, o que fez com que eu conhecesse várias funções básicas e avançadas do software, propiciando-me maior segurança para utilizá-lo nessa pesquisa.

De acordo com o Instituto São Paulo GeoGebra²², o GeoGebra é um *software* gratuito de matemática dinâmica, que pode ser utilizado para todos os níveis de ensino. Ele combina

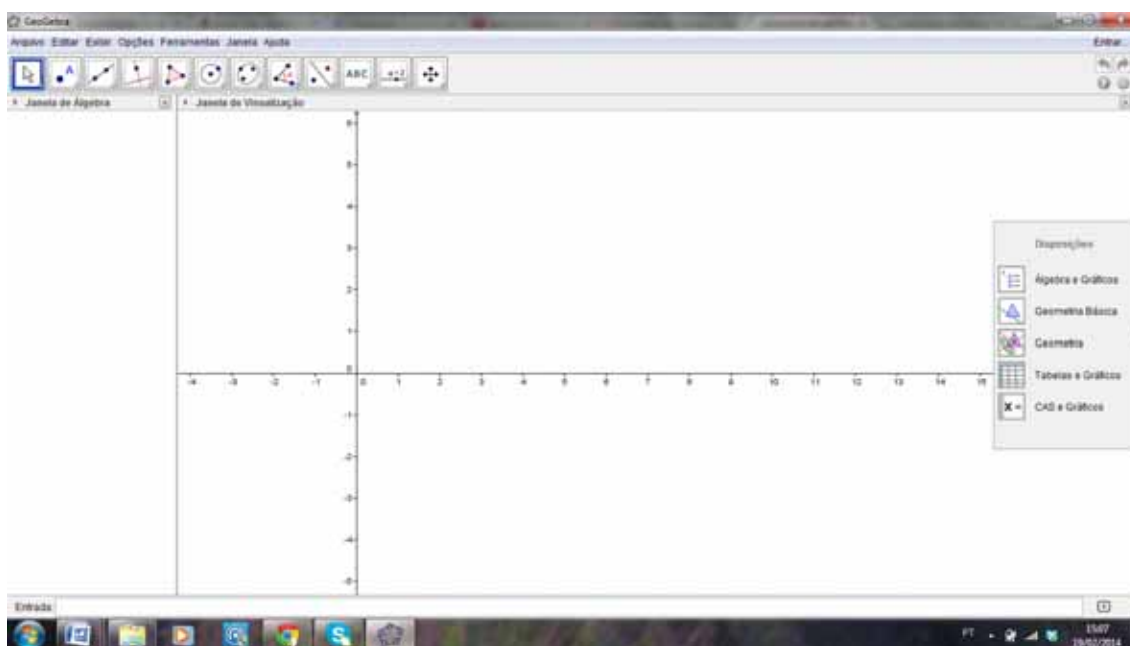
²¹ Ensinando Matemática com o GeoGebra - Oferecido pela UNESP - Rio Claro, 40 horas.

²² Disponível em: <<http://www.pucsp.br/geogebra/geogebra.html>>. Acesso em: 05 fev 2014.

geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em uma única aplicação. O *software* foi criado em 2001, como tese de Markus Hohenwarter, e a sua popularidade tem crescido desde então. Atualmente, o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de 300000 downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de *software* educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo.

O GeoGebra vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático.

Figura 5 - Tela Inicial do GeoGebra



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

A figura 5 mostra a tela inicial do *software* GeoGebra 4.0, versão utilizada no trabalho, que contém as principais janelas do mesmo, a saber:

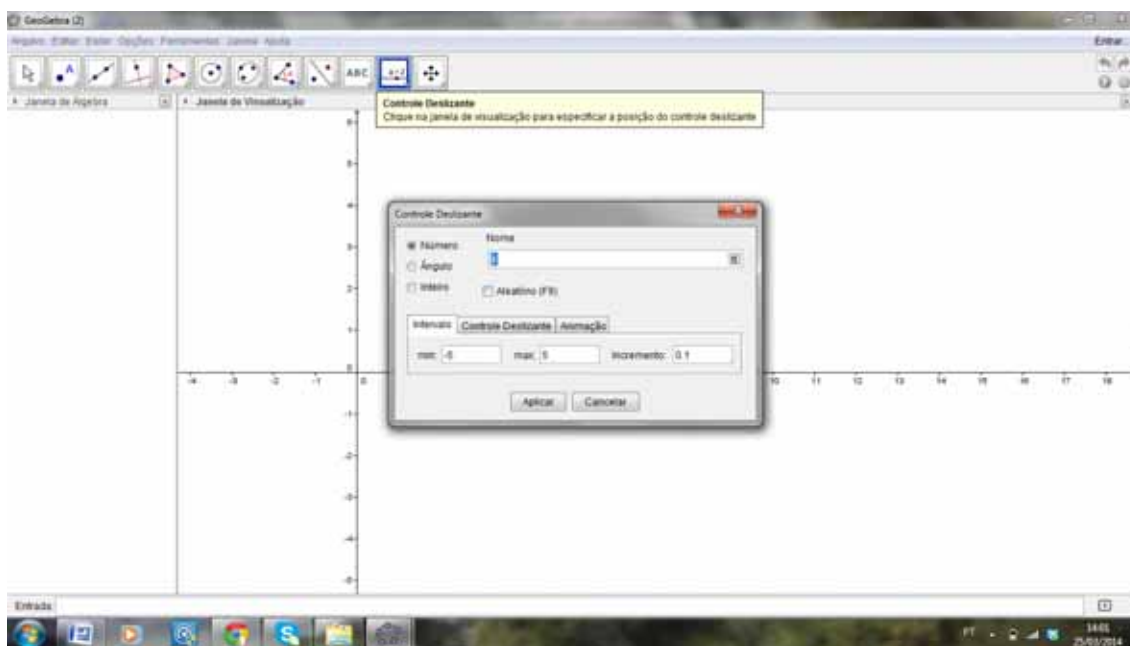
- *Janela de Álgebra*: local onde aparecem indicações dos objetos (coordenadas de pontos, equações de retas, leis de funções, etc.).
- *Janela de Visualização*: possui um sistema de coordenadas no qual aparecem pontos, retas, figuras geométricas, entre outros.

- *Caixa de Entrada*: local destinado à entrada de comandos, determinando o que se quer construir.

A partir dessas janelas e da caixa de entrada conseguimos fazer as construções necessárias para a realização dessa pesquisa. Apresentarei na sequência alguns comandos utilizados para a elaboração dos *applets* utilizados na coleta de dados.

Comando "Controle Deslizante": Para criar um controle deslizante, basta ativar a respectiva ferramenta e clicar sobre o local desejado na janela geométrica. Feito isto, aparecerá uma janela onde você poderá nomear, especificar o intervalo e incremento e alterar as propriedades do controle deslizante. Esse comando possibilita variar objetos (manualmente ou automaticamente), podendo também assumir a função de uma variável (fig. 6).

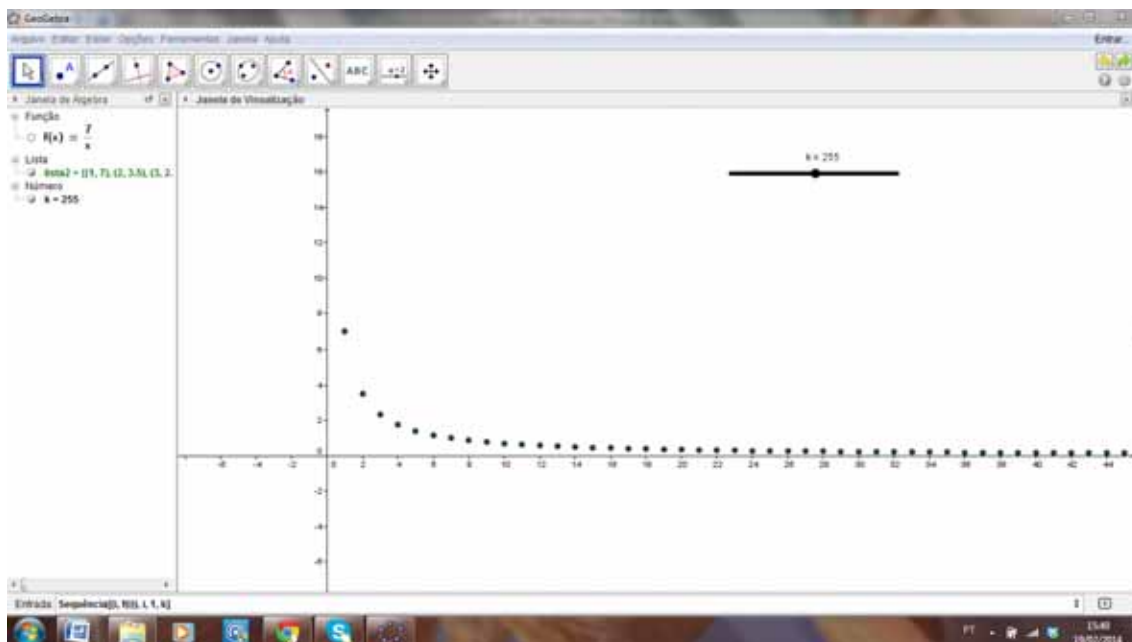
Figura 6 - Comando "controle deslizante"



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Comando "Sequência": Esse comando cria uma sequência de pontos a partir de uma função dada. Para entender como o mesmo funciona, digite na Caixa de Entrada: Sequência[<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>] e substitua cada entrada pelo objeto que lhe corresponde. Por exemplo, se quisermos construir a sequência $x_n = 7/n$, primeiramente construímos a função $f(x) = 7/x$. Em seguida, basta digitar na Caixa de Entrada: Sequência[(i, f(i)), i, 1, k], onde k é a quantidade de pontos que você deseja plotar (fig.7).

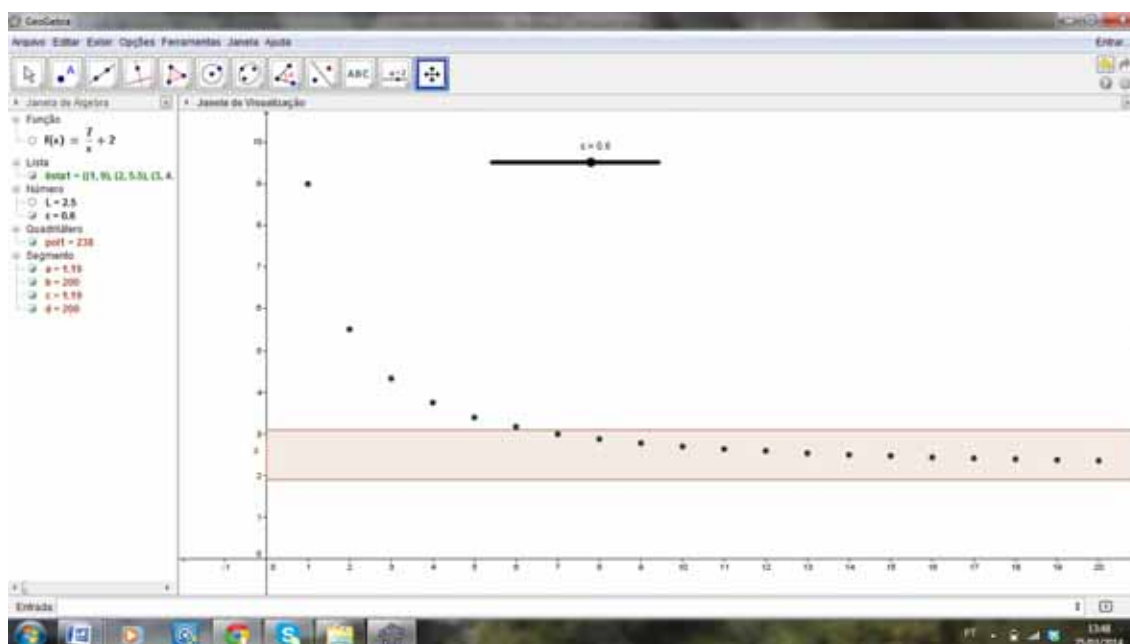
Figura 7 - Comando "sequência"



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Comando "polígono": esse comando cria um polígono dadas as coordenadas de seus vértices Um exemplo utilizado na pesquisa: Polígono $[(0, L + \epsilon), (0, L - \epsilon), (2k, L - \epsilon), (2k, L + \epsilon)]$, no qual o L era um valor fixo, ϵ variava no comando deslizante e k é a quantidade de pontos da sequência (fig. 8).

Figura 8 - Comando "polígono"



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

3.7. As Atividades

Visto que acredito que a tecnologia assume um papel importante na produção de conhecimento, produzi atividades que permitissem aos alunos experimentar e utilizar as potencialidades do GeoGebra no fazer matemático, de modo que o *software* não fosse utilizado apenas como uma ferramenta, mas sim, que tivesse um papel de destaque na experimentação dos conceitos matemáticos.

As atividades produzidas possuíam momentos experimentais, nos quais os alunos utilizaram o GeoGebra para explorar alguns tópicos da disciplina Análise Real. No total, foram criadas três atividades, dentre as quais duas possuíam como assunto principal o tema sequências numéricas e uma discutia sobre o Teorema do Valor Intermediário.

Em todas as atividades os alunos realizaram momentos experimentais-com-tecnologia e, também, houve momentos em que os estudantes escreviam suas observações, respondendo alguns questionamentos propostos em uma ficha de perguntas. Na sequência apresentarei cada uma das atividades, elencando seus objetivos e os conceitos matemáticos envolvidos nas mesmas.

Atividade 1 - Convergência de Sequências

A primeira atividade, nomeada *Convergência de Sequências*, possuía como objetivo compreender a relação entre ε e n_0 na definição de convergência de sequências numéricas. O design dessa atividade permitia que os alunos plotassem sequências numéricas com o GeoGebra e, a partir da criação de comandos deslizantes e de uma faixa poligonal em torno dos pontos das sequências, discutissem a noção do ε e n_0 presentes na definição.

O principal conceito envolvido na realização dessa atividade é a *convergência de sequências numéricas*. Antes de defini-la, vale lembrar que uma sequência de números reais é uma função $x_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n , chamado o *enésimo termo* da sequência. A partir dessa noção de sequência, tem-se a convergência de sequências, a saber:

Uma sequência x_n converge para L se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0$ tal que

$$|x_n - L| < \varepsilon.$$

Essa definição indica que para um valor $n > n_0$, a sequência se aproxima cada vez mais de um valor L , que o chamaremos de *valor de convergência* ou de *limite da sequência*. Ou seja, a distância entre os pontos da sequência e esse valor L fica tão pequena quanto eu queira, que é a ideia associada à n e à ϵ .

Inicialmente as alunas dissertaram sobre as questões apresentadas no quadro 1 e, posteriormente, utilizando o GeoGebra, seguiram os passos de construção apresentados no quadro 2.

Quadro 1 - Questionamentos anteriores à experimentação da atividade 1

Escreva com suas palavras o que significa uma sequência convergir.

Se você conhecer a definição de convergência, escreva-a e responda: qual a relação entre n_0 e ϵ nessa definição?

Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Quadro 2 - Passos da construção da atividade 1

1. *Plote a sequência $x_n = \frac{7}{n} + 1$.*
2. *Para $k = 250$ e utilizando a ferramenta zoom, o que é possível observar sobre os pontos de x_n ?*
3. *Crie um comando deslizante n_0 no software.*
4. *Essa sequência converge? Justifique.*
5. *Calcule $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.*
6. *Plote uma função $g(x) = L$, restrita ao intervalo $(0, +\infty)$.*
7. *Crie um comando deslizante $\epsilon > 0$.*
8. *Pela definição de convergência, temos que uma sequência x_n converge para L se, e somente se, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0$ tal que $|x_n - L| < \epsilon$.*
Vamos programar o software para realizar o cálculo $|x_n - L|$.
Dado $\epsilon = 0,5$, existe um valor de n_0 de forma que $|x_n - L|$ seja menor que ϵ ? E para $\epsilon = 0,2$? E para $\epsilon = 0,002$?
9. *Crie uma faixa, dependendo de ϵ em torno do ponto L .*
10. *Varie os valores de ϵ e analise a faixa e os pontos da sequência.*

Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Atividade 2 - Resultados de Convergência

A segunda atividade, nomeada *Resultados de Convergência*, possuía como objetivo compreender a relação entre sequências monótonas, limitadas e convergentes.

Os conceitos envolvidos nessa atividade são sequências monótonas e limitadas. Uma sequência (x_n) diz-se *limitada superiormente* quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, diz-se que uma sequência (x_n) é *limitada inferiormente* quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, diz-se que a sequência (x_n) é *limitada* quando ela é limitada superior e inferiormente. Isto equivale a dizer que existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso a sequência não seja limitada, dizemos que ela é *ilimitada*.

Uma sequência (x_n) chama-se *monótona* quando se tem $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ ou então $x_n \geq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. No primeiro caso diz-se que (x_n) é *monótona não decrescente* e, no segundo, que (x_n) é *monótona não crescente*. Se, mais precisamente, tivermos $x_n < x_{n+1}$ (respectivamente $x_n > x_{n+1}$), diremos que a sequência (x_n) é *crescente* (respectivamente *decrescente*).

Os alunos inicialmente responderam aos questionamentos apresentados no quadro 3 e, posteriormente, seguiram os passos de construção no GeoGebra apresentados no quadro 4. E, durante a experimentação-com-GeoGebra, os alunos responderam aos questionamentos apresentados no quadro 5.

Quadro 3 - Questionamentos anteriores à experimentação da atividade 2

Escreva com suas palavras o que significa uma sequência ser monótona.

Escreva com suas palavras o que significa uma sequência ser limitada.

Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Quadro 4 - Passos da construção da atividade 2

1. *Plote as sequências:*

$$x_n = n + 1;$$

$$y_n = 8/n;$$

$$z_n = \begin{cases} n, & 0 < n < 5 \\ 5, & \text{caso contrário} \end{cases};$$

$$w_n = \begin{cases} -0.5n + 10, & 0 < n < 4; \\ 8, & \text{caso contrário} \end{cases};$$

Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Quadro 5 - Questionamentos concomitantes à experimentação da atividade 2

1. *Todas essas sequências são monótonas. Observando os padrões, é possível definir esse termo matematicamente?*
2. *É possível criar um intervalo no eixo Y tal que todos os pontos de cada sequência permaneçam dentro do mesmo? Investigue para cada caso e dê um intervalo pedido.*
3. *Sempre é possível encontrar esse intervalo no eixo Y? É possível formalizar essa ideia?*
4. *Essas sequências convergem?*
5. *Observando esses casos, é possível estabelecer alguma relação entre os termos "sequência convergente, limitadas e monótona"?*

Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Atividade 3 - Teorema do Valor Intermediário

Nesta terceira atividade, propus às alunas uma investigação do Teorema do Valor Intermediário²³ (TVI). O objetivo desta atividade é compreender a importância das hipóteses do teorema, assim como o que este resultado representa. Uma forma de enunciar o TVI é a seguinte:

²³ No anexo A encontra-se uma demonstração desse teorema.

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ ou $f(b) < d < f(a)$ então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.

Este é um importante resultado da Análise e, a partir dele, obtemos alguns corolários e aplicações, como por exemplo: todo polinômio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real; a existência da raiz enésima de um número real $y \geq 0$; a imagem de um intervalo da reta por uma função contínua ainda é um intervalo, dentre outros.

Inicialmente as alunas fizeram a construção no *software* GeoGebra, seguindo os passos apresentados no quadro 6. Na sequência, responderam aos questionamentos apresentados no quadro 7.

Quadro 6 - Passos da construção da atividade 3

- 1) Plote a função $f(x) = x$.
- 2) Crie um ponto sobre f . Dê o nome de "A".
- 3) Crie a correspondente do ponto A no eixo x . Para isso, digite $(x(A), 0)$. Nomeie-o de "a".
- 4) Crie a correspondente do ponto A no eixo y . Para isso, digite $(0, y(A))$. Nomeie-o de " $f(a)$ ".
- 5) Construa o segmento pontilhado $[A, a]$. Oculte o nome do objeto.
- 6) Construa o segmento pontilhado $[f(a), A]$. Oculte o nome do objeto.

- 7) Crie um ponto sobre f . Dê o nome de "B".
- 8) Crie a correspondente do ponto B no eixo x . Para isso, digite $(x(B), 0)$. Nomeie-o de "b".
- 9) Crie a correspondente do ponto B no eixo y . Para isso, digite $(0, y(B))$. Nomeie-o de " $f(b)$ ".
- 10) Construa o segmento pontilhado $[B, b]$. Oculte o nome do objeto.
- 11) Construa o segmento pontilhado $[f(b), B]$. Oculte o nome do objeto.

- 12) Crie um ponto sobre o eixo y . Nomeie-o de "d".
- 13) Crie a reta $y=y(d)$. Nomeie-a de "h".
- 14) Defina o ponto de intersecção $[h, f]$. Nomeie-o de "C".
- 15) Crie a correspondente do ponto C no eixo x . Para isso, digite $(x(C), 0)$. Nomeie-o de "D".
- 16) Construa o segmento $[C, D]$. Oculte o nome do objeto.

Quadro 7 - Questionamentos posteriores à atividade 3

1. *O que esse applet nos mostra? Que resultado ele nos permite conjecturar? Você consegue definir matematicamente esse resultado?*
2. *Para qualquer f dada essa construção é possível?*
3. *Para f descontínua. O que acontece? Plote a função $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} + x - 0.5$*
4. *É possível considerar esse applet como uma demonstração? Justifique.*

Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

3.8. Análise de Dados

Os dados que constituem essa pesquisa são as fichas respondidas pelas estudantes durante a realização das atividades; os arquivos gerados pelo *software* GeoGebra; os vídeos gerados pela câmera fixa e pelo *software* Blueberry durante os experimentos de ensino, assim como entrevistas com as duplas no fim de cada encontro.

Segundo Lüdke e André (1986) uma análise de dados significa

"Trabalhar" todo material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos de observação, as transcrições de entrevista, as análises de documentos e as demais informações disponíveis. A tarefa de análise implica, num primeiro momento, a organização de todo material, dividindo-o em partes, relacionando essas partes e procurando identificar nelas tendências e padrões relevantes. Num segundo momento essas tendências e padrões são reavaliados, buscando-se relações e inferências num nível de abstração mais elevado (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p.45).

A análise dos dados começou durante a produção dos mesmos, na qual eu anotava acontecimentos importantes durante a realização das atividades, destacando fatos que poderiam ser relevantes para a pesquisa. Concluídos os experimentos de ensino, retornei aos dados de forma a ter uma visão geral do que havia sido produzido durante os encontros, sempre tendo em mente a problemática da pesquisa.

Visto que a maior quantidade de dados gerados foi produzido em formas de vídeos, achei necessário fazer uma análise dos mesmos. Considero esses videoteipes como uma fonte de dados fundamental dessa pesquisa. Para realizar a análise, baseei-me nas ideias de Powell, Francisco e Maher (2004).

Utilizando os registros de vídeo como dados, pesquisadores têm produzido descrições fascinantes de professores e estudantes em cenário clínicos e de sala de aula envolvidos numa matriz de tarefas matemáticas (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. X).

O vídeo "estende e aprimora as possibilidades da pesquisa observacional pela captura do desvelar momento-a-momento, de nuances sutis na fala e no comportamento não verbal" (MARTIN, 1999, p. 79). Alguns autores citados por Powell, Francisco e Maher (2004) apresentam dois potenciais principais dos vídeos: densidade e permanência. A noção de densidade é entendida como a possibilidade de analisar todos os episódios de forma detalhada, minuciosa, podendo focar em diversos acontecimentos que, durante a produção de dados, possa não ter sido notado. Já a ideia de permanência é entendida como a possibilidade de "assistir os eventos gravados com a frequência que for necessária e em formas flexíveis, tais como tempo real, câmera lenta, quadro a quadro, para adiante, para trás". O fato de poder retornar ao cenário de investigação traz mais credibilidade à pesquisa, reforçando as ideias defendidas. Esses dois potenciais foram importantes para minha análise, visto que, de fato, retornei aos vídeos várias vezes, com o objetivo de encontrar indícios de respostas para minha pergunta diretriz.

Para estudar o desenvolvimento do pensamento matemático, Powell, Francisco e Maher (2004) apresentam um modelo analítico composto por fases interativas e não lineares. São elas: (1) Observar atentamente os dados dos vídeos; (2) Descrever os dados dos vídeos; (3) Identificar eventos críticos; (4) Transcrever; (5) Codificar; (6) Construir o enredo; (7) Compor a narrativa.

Nas fases (1) e (2), o pesquisador assiste os vídeos várias vezes, sem impor uma lente analítica sobre o que observa. A ideia é mapear os dados do vídeo de tal forma que alguém, lendo as descrições, teria uma ideia objetiva do conteúdo dos videoteipes. O que se busca nessas fases é acostumar-se com a sessão de pesquisa em sua totalidade.

Na fase (3), pretende-se identificar momentos significativos da pesquisa, isto é, destacar um episódio em que alguma atitude do aluno tenha chamado a atenção do pesquisador.

Identificamos *eventos* como sequências conectadas de expressões e ações que, dentro do contexto de nossas - a priori ou a posteriori - questões de pesquisa, requerem explicação por nós, pelos estudantes ou por todos. Um evento é chamado *crítico* quando demonstra uma significativa ou constante mudança em relação a uma compreensão prévia, um salto conceitual em relação a uma concepção anterior, ou um salto interessantemente errado (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. X).

A fase (4), talvez seja aquela em que mais se tem divergência de ideias. Alguns pesquisadores transcrevem os dados em sua totalidade; outros apenas os eventos críticos e há aqueles que não transcrevem nada, apenas utilizam os vídeos em sua forma original. Powell, Francisco e Maher (2004) defendem que transcrições são, para propósitos práticos, um registro permanente e podem revelar categorias importantes que não são sempre passíveis de serem discernidas por meio da visualização de imagens.

Já a fase (5) tem por objetivo auxiliar o pesquisador a interpretar seus dados, sugerindo a criação de categorias a fim de clarear os temas emergentes dos eventos críticos.

A fase (6) requer que o pesquisador proponha organizações criteriosas e coerentes dos eventos críticos, e a última fase, (7), nada mais é que a escrita de uma narrativa final.

Realizei a análise dos vídeos com base nas fases supracitadas, contudo fiz algumas modificações que considerei necessárias. Assim como proposto pelos autores, assisti aos vídeos várias vezes em busca de momentos importantes para a pesquisa. Quanto mais eu assistia, mais nítidos os acontecimentos ficavam e, dessa maneira, fui capaz de encontrar alguns momentos de destaque, que aqui chamarei ora de eventos críticos, ora de episódios, a fim de evitar repetições. Após a identificação dos mesmos, optei por dividir os eventos críticos de acordo com cada atividade realizada. Sendo assim, obtive os seguintes episódios:

Atividade 1

Domínio discreto
O *zoom* e o ponto grande
Tão pequeno quanto eu queira
Faixa Poligonal
Quer que eu desenhe?

Atividade 2

Enxergando com o *software*
Elaborando definições

Atividade 3

Domínio ou Contradomínio?
Relevância das Hipóteses
Verdade Matemática
Demonstração com *Software*

Após essa divisão, procurei, dentro de todos os episódios, por possíveis convergências nas falas dos alunos que pudessem dar indícios de respostas para a questão diretriz. Nessa busca, encontrei quatro temas que poderiam ser possíveis respostas, a saber:

1. Elaboração e Refutação de Conjecturas
2. Compreensão
3. Convencimento de Resultados e o Entendimento Visual
4. Disparador de questões

Após destacar as possíveis respostas que emergiram dos episódios, trouxe a literatura para me ajudar a entender o que cada um desses itens pode contribuir de modo a ser uma resposta da questão norteadora. Vale ressaltar que em todos os momentos de análise dos vídeos, eu sempre estava com as fichas de respostas das atividades das alunas em mãos, de forma a confrontar os dados, obtendo resultados mais confiáveis. Esse confronto entre os diferentes métodos é o que Araújo e Borba (2012) chamam de triangulação. Utilizar o método da triangulação durante a análise faz com que a pesquisa ganhe força, visto que, de diferentes modos, obteve-se ideias semelhantes, ou, como poderia ter acontecido, aparecer contrastes entres os dados.

Apresentei nesse capítulo algumas características que considerei importantes para situar a pesquisa na Metodologia de Pesquisa Qualitativa, apontando minha visão de conhecimento e ressaltando que ambas estão em sinergia. Na sequência, defini o que seriam os experimentos de ensino, método utilizado para a produção de dados. Trouxe também uma breve síntese de que forma seriam produzidos os dados, assim como alguns detalhes sobre as alunas participantes. Para fechar, apresentei as atividades realizadas e a forma como a análise foi feita.

No capítulo que segue, apresentarei os dados de acordo com cada atividade, como citado anteriormente. Para tal, elenquei alguns episódios, e retirei alguns trechos das conversas dos alunos, que ocorreram nos experimentos de ensino, que considero relevantes para explicitar determinadas ideias.

4 UM PRIMEIRO OLHAR PARA OS DADOS

Neste capítulo apresento os dados produzidos nos experimentos de ensino e faço uma análise inicial dos mesmos. Os dados são provenientes das atividades desenvolvidas pelos Alunos-com-GeoGebra, com o intuito de responder à pergunta diretriz "*quais os papéis do software GeoGebra na investigação de alguns conceitos da disciplina Análise?*". Assistindo e analisando os vídeos gerados durante a produção de dados identifiquei alguns eventos críticos dentro de cada uma das atividades desenvolvidas, que achei relevantes na busca de indícios para uma possível resposta para a pergunta norteadora. Além das filmagens, analisei também as fichas nas quais os alunos participantes responderam às questões apresentadas no capítulo anterior e, por fim, trago alguns pontos relevantes das entrevistas a fim de confirmar algumas ideias que surgiram durante toda a produção de dados.

Optei por dividir a apresentação dos dados por atividade. Inicialmente, faço uma síntese da atividade apresentando seu objetivo e, na sequência, elenco os episódios que destaquei durante a análise inicial. Episódios, nesta pesquisa, são momentos da produção de dados que possuem discussão matemática entre as alunas participantes. Para apresentá-los achei que seria interessante trazer os diálogos que permearam esses momentos. Visto isso, este capítulo segue a seguinte estrutura:

Atividade 1

- Episódio 4.1.1 - Domínio discreto
- Episódio 4.1.2 - O *zoom* e o ponto grande
- Episódio 4.1.3 - Tão pequeno quanto eu queira
- Episódio 4.1.4 - Faixa Poligonal
- Episódio 4.1.5 - Quer que eu desenhe?

Atividade 2

- Episódio 4.2.1 - Enxergando com o *software*
- Episódio 4.2.2 - Elaborando definições

Atividade 3

- Episódio 4.3.1 - Domínio ou Contradomínio?
- Episódio 4.3.2 - Relevância das Hipóteses

Episódio 4.3.3 - Verdade Matemática

Episódio 4.3.4 - Demonstração com *Software*

4.1. Atividade 1 - Convergência de Sequências

Como dito anteriormente, essa primeira atividade possuía como objetivo compreender a relação entre ε e n_0 na definição de convergência de sequências, que é a seguinte:

Uma sequência x_n converge para L se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0$ tal que

$$|x_n - L| < \varepsilon.$$

Antes de iniciar a atividade com o GeoGebra, pedi para as alunas dissertarem sobre as seguintes questões:

Escreva com suas palavras o que significa uma sequência convergir.

Se você conhecer a definição de convergência, escreva-a e responda: qual a relação entre n_0 e ε nessa definição?

Seguem abaixo as respostas das alunas para a primeira questão.

Figura 9 - Resposta Adriele: Questão 1 - Atividade 1

Seja uma seq. (x_n) se ela converge para um a sei que todos os pontos dessa seq está chegando de uma

Fonte: Dados de Pesquisa (2013)

Figura 10 - Resposta Karen: Questão 1 - Atividade 1

Seja a_n uma sequência se $\lim a_n = L (L \in \mathbb{R})$ então a_n converge, se $\lim a_n = \infty$, então a_n diverge.

Fonte: Dados de Pesquisa (2013)

Figura 11 - Resposta Gislaire: Questão 1 - Atividade 1

Dizemos que uma sequência a_n converge quando a sequência de números que compõe a_n tendem para um único número. Em outras palavras,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

em que $a \in \mathbb{R}$.

Fonte: Dados de Pesquisa (2013)

Figura 12 - Resposta Gislaire: Questão 1 - Atividade 1

Uma sequência são termos x_n com n pertencente aos naturais (para cada n , temos um x_n). Uma sequência converge, significa que a partir de um n , os termos seguintes da sequência estão "dentro" de um raio ϵ .

Fonte: Dados de Pesquisa (2013)

Como podemos observar nas imagens acima (fig. 9-12), todas as alunas conseguiram expressar algumas ideias sobre a noção de convergência de sequências, ainda que imprecisas. Contudo, apenas Adriele soube definir formalmente o que significa uma sequência convergir (fig. 13).

Figura 13 - Resposta Adriele: Questão 2 - Atividade 1
$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n > n_0, |x_n - a| < \epsilon$$

Fonte: Dados de Pesquisa (2013)

O que podemos inferir desse fato é que a ideia de convergência não é algo desconhecido para as alunas, porém sua definição formal não está clara, com exceção de Adriele. Para investigar essa questão, as alunas seguiram os passos de construção

apresentados no capítulo de metodologia (quadro 2). A seguir, apresentarei os episódios que destaquei na análise inicial dessa atividade.

Episódio A - Domínio Discreto

Nesse primeiro episódio, apresento uma discussão das alunas Gislaine e Patrícia quanto à construção das sequências numéricas feitas com o *software*. Observemos o diálogo abaixo²⁴.

Gislaine: Ok. A gente construiu a função.

Patrícia: Mas eu não entendi o comando [sequência].

Lucas: Dá um duplo clique no comando... Vamos rever o que ele faz!

Gislaine: Ele nos dá a sequência de pontos que segue a seguinte lei $[(i, f(i)), i, 1, k]$... Então, para $i = 1$, ele calcula o $f(i) = f(1) = 8$. E faz esse cálculo até o valor escolhido k .

Patrícia: Ah, eu esqueci de olhar para a função. Ele [*software*] pega na função!

Lucas: Nós estamos partindo de um domínio contínuo [conjunto dos números reais] e indo para um discreto [conjunto dos números naturais].

Patrícia: Isso!

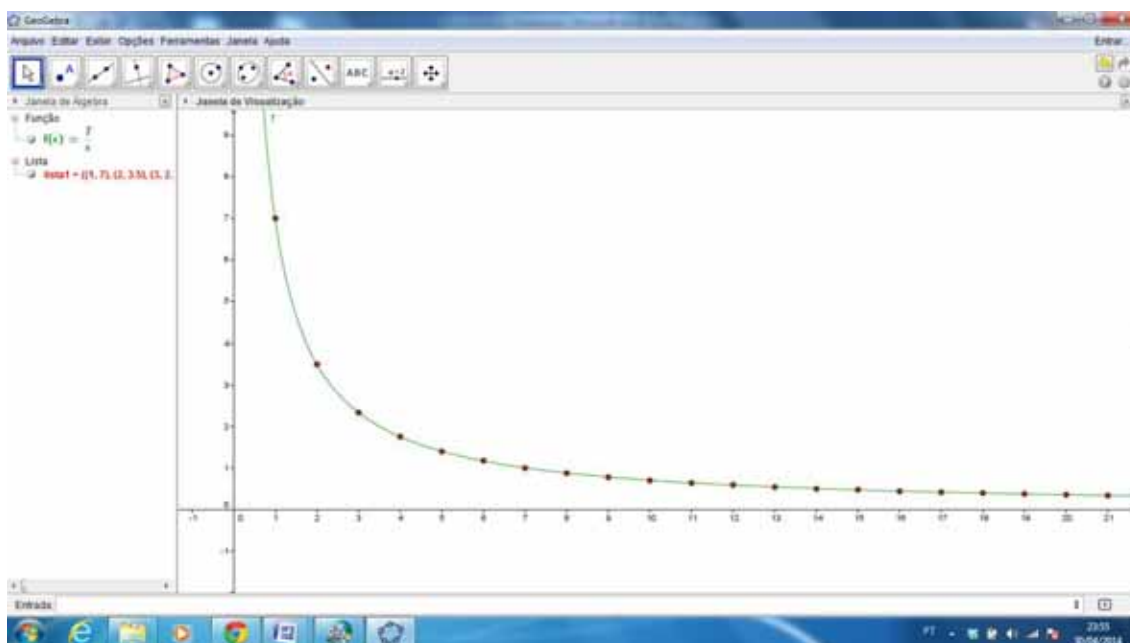
Gislaine: E conforme eu vou variando o K , ele [*software*] vai me dando o gráfico da sequência.

Patrícia: Que legal!

Nesse trecho, destaco um aspecto do *design* do GeoGebra para a construção das sequências. O *software* necessita que seja plotada uma função com domínio real, a priori, e a partir desta, a sequência é construída, ou seja, o *software* transforma o domínio da função plotada em um domínio discreto (fig. 14).

²⁴ As informações que se encontram em colchetes foram acrescentadas por mim para uma melhor compreensão dos diálogos.

Figura 14 - Domínio Discreto



Fonte: Dados de Pesquisa (2013)

Lucas: Por que não podemos trabalhar com o domínio real nessa atividade?

Gislaine: Por que o assunto é sequência numérica e não função...

Lucas: Mas uma sequência não pode ter domínio real? Vocês lembram da definição de sequência?

Gislaine: O domínio é real, não é?

Patrícia: Quando falamos de sequência não pensamos no gráfico contínuo. E o GeoGebra faz só os pontos também!

As alunas não recordam a definição de sequência. Patrícia afirma lembrar que não se pensa no contínuo quando se trabalha com esse assunto, e sim no discreto. Ela foi a única aluna que mencionou o domínio das sequências ao responder a questão 1 (fig. 12). O *design* do *software* possibilitou chamar a atenção para a definição de sequências numéricas, conceito que, muitas vezes, não é discutido, e sim, simplesmente assumido.

Episódio B - O zoom e o ponto grande

Esse segundo episódio ocorreu no início da construção da atividade 1, realizado pelas alunas Adriele e Karen. Primeiramente, as alunas plotaram a sequência $x_n = \frac{7}{n} + 1$ no

GeoGebra, através do comando "*sequência*[(*i*, *f*(*i*)), *i*, 1, *k*]" . A seguir, as alunas observaram o comportamento da mesma. Questionei-as, então, sobre esse comportamento.

Lucas: O que vocês podem falar sobre essa sequência?

Adrielle: Se aplicarmos o limite, a sequência vai pra um.

Karen: Mas olhando, parece que encosta no eixo x! Parece que vai pra zero.

Adrielle: Parece que encosta, mas o ponto está muito grande (fig. 15).

Posso por aquele negócio... A malha, só pra eu ver?

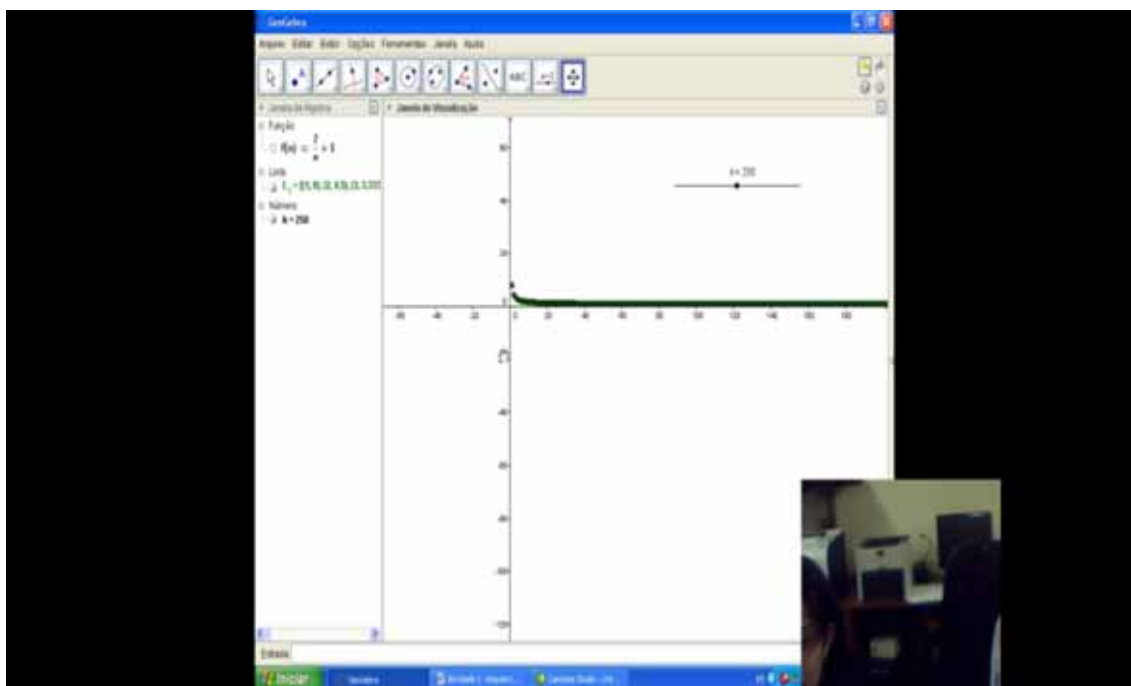
Lucas: Claro...

Adrielle: Oh, ele está chegando no um. Ele não desce da linha do um (fig. 16).

Karen: Ah, verdade... É que olhando daquele jeito, parece que é no zero. O negócio é o *zoom*.

Adrielle: O negócio é o *zoom* e também colocar uma malha pra termos uma direção... Parece que está no zero, mas não está... É só dar *zoom* que resolve... Quanto mais eu aumento o intervalo, dando *zoom*, ai melhor eu vejo pra qual número está indo...

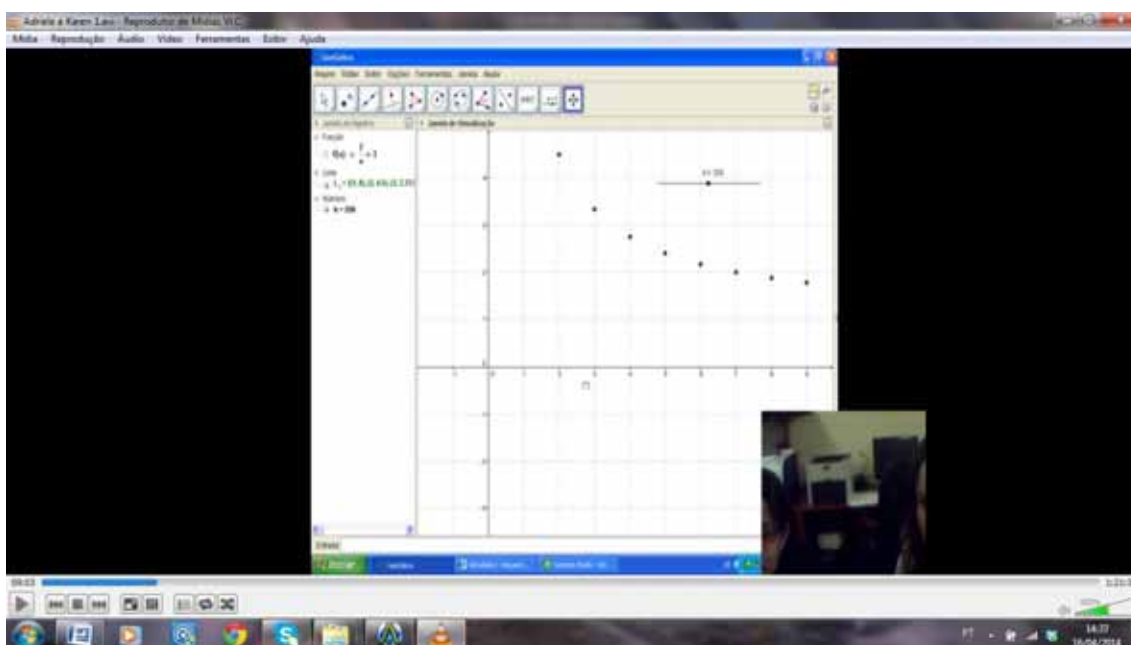
Figura 15 - Problema de escala



Fonte: Dados de Pesquisa (2013)

Nesse episódio as alunas plotaram a sequência pedida e notaram que "aparentemente ela toca o eixo x" (fig. 15). Contudo, Adrielle chama a atenção para uma possível explicação disso, falando que é culpa do "ponto grande". Essa foi uma limitação apontada pelas alunas quanto à utilização do *software*, pois pode gerar uma ideia errada acerca da convergência dessa sequência. Entretanto, para contornar a situação, Adrielle sugere a utilização da *ferramenta malha* (fig. 16) para visualizar melhor o comportamento da sequência e a dúvida é resolvida.

Figura 16 - Uso da malha na visualização de sequências



Fonte: Dados de Pesquisa (2013)

Essa mesma situação aconteceu com as alunas Patrícia e Gislaine, como podemos observar no diálogo que segue.

Lucas: O que está acontecendo com o gráfico?

Gislaine: Conforme eu aumento o K , o gráfico vai tendendo a 1... Ele vai convergindo pra um.

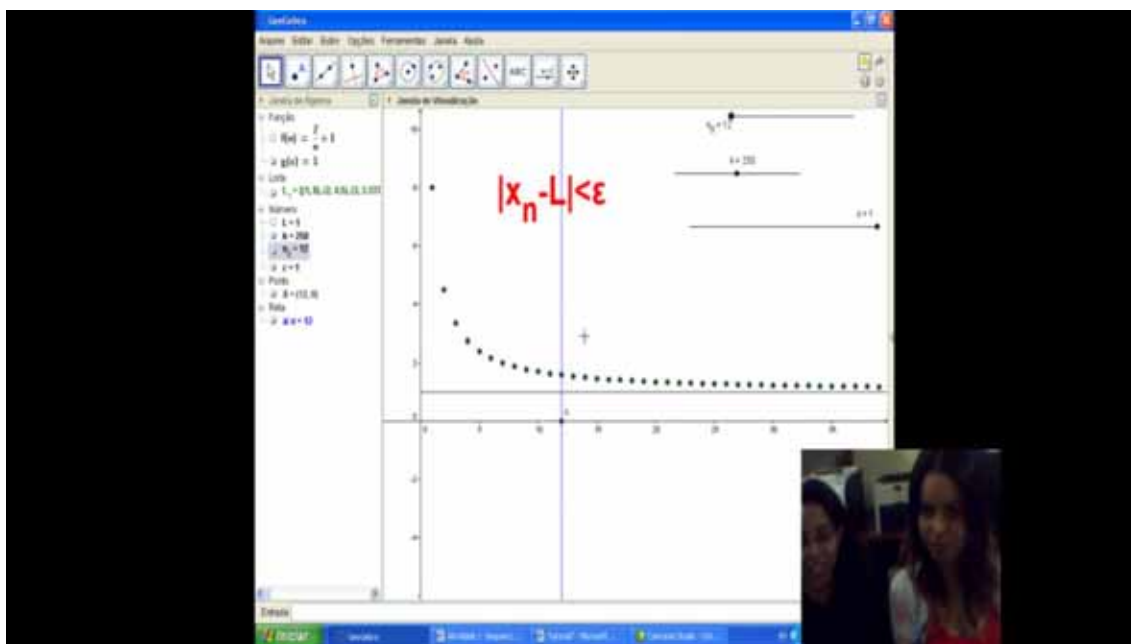
Patrícia: Isso... Mas olhando, ele vai pra zero... Pois tá muito grande. Tem que tirar o *zoom*.

Os dois últimos excertos apontam que o *software* também pode gerar ideias erradas, sendo necessário que se investigue a fundo o objeto de trabalho. Nos casos observados, as alunas afirmaram que, visualizando a tela do GeoGebra, tem-se a impressão de que a sequência em questão, $x_n = \frac{7}{x} + 1$, converge para 0. Elas explicam que essa impressão é causada devido ao tamanho do ponto criado pelo *software*. Para solucionar esse problema, Adriele sugeriu a inserção da *malha* para que fosse possível ver que a sequência convergia, na realidade, para 1 e não para 0. Nesse momento percebo que Adriele *pensou com* o GeoGebra para resolver uma situação problema, ou seja, o coletivo pensante Adriele-com-malha foi responsável por justificar a convergência da sequência para o valor 1, diferente do que o *software* indicava a priori.

Episódio C - Tão pequeno quanto eu queira

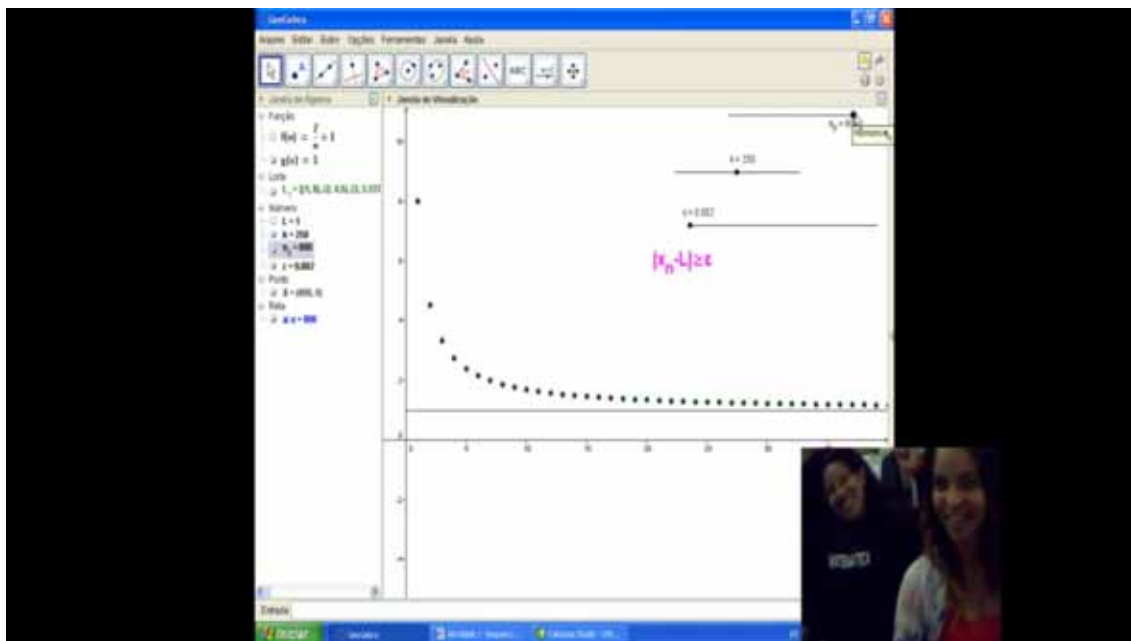
As alunas continuam a construção da atividade e configuram o *software* para realizar o cálculo $|x_n - L| < \epsilon$. Para isso, seguindo o tutorial de construção, elas criaram dois controles deslizantes, um chamado n_0 , variando de 1 a 500, e o outro chamado ϵ , variando de 0 a 1. Se a desigualdade $|x_n - L| < \epsilon$ for válida, ela aparecerá na tela do GeoGebra (fig. 17), caso contrário, a desigualdade $|x_n - L| \geq \epsilon$ aparece na tela (fig. 18).

Figura 17 - Exploração da desigualdade $|x_n - L| < \epsilon$



Fonte: Dados de Pesquisa (2013)

Figura 18 - Exploração da desigualdade $|x_n - L| \geq \epsilon$



Fonte: Dados de Pesquisa (2013)

Lucas: Nesse caso, o que quer dizer essa desigualdade (fig. 18)?

Adrielle: Que aqui a distância... O meu valor de $|x_n - L|$ não é menor que *épsilon*...

Karen: Eu não entendi o que está acontecendo...

Adrielle: Ele [o *software*] vai fazer essa conta aqui $|x_n - L|$... Então se eu mudar os valores... Olha, por exemplo, para $n_0 = 2$, ela [a sequência] assume um valor entre quatro e cinco... Ai menos um, que é o limite dela, ainda continua sendo maior que ϵ , pois nosso *épsilon* é menor que um... Aí põe no $n_0 = 8$... Essa desigualdade vai mudar... Vai ficar menor que *épsilon*...

Karen: Que legal!

Adrielle: Olha, se eu diminuir o meu *épsilon* aqui [$\epsilon = 0,5$], aí o $n_0 = 8$ não vai dar mais... A desigualdade vai ser maior!

Karen: Deixa eu ver... Verdade! O $|x_n - L|$ tem que ser menor que *épsilon*...

Adrielle: Aí eu pego o *épsilon* tão pequeno quanto eu queira...

Lucas: E quando eu pego o *épsilon* tão pequeno quanto eu queira, o que eu tenho que fazer para que $|x_n - L|$ continue sendo menor que *épsilon*?

Adrielle: Mandar a sequência para infinito? Os pontos têm que chegar mais pro infinito.

Karen: Você tem que ir aumentando [o n_0] olha... [manipulando no *software*]...

Nesse trecho, as alunas utilizaram a experimentação para verificar a desigualdade que aparece na definição de convergência de seqüências. A partir da simulação, elas vão percebendo que se fixarmos um n_0 , a desigualdade não se mantém, ou seja, é necessário variar o *épsilon* para que $|x_n - L|$ continue sendo menor que o *épsilon* escolhido. No final desse trecho, Adriele traz a frase "tão pequeno quanto eu queira", expressão já usada por Cauchy no século XIX, para explicar o que o controle deslizante está fazendo.

Seguindo com a experimentação-com-geogebra, Karen elabora uma conjectura para que a desigualdade $|x_n - L| < \epsilon$ ocorra. Esse é um dos papéis que De Villiers (2003) destaca no uso de experimentações na matemática. Vejamos a seguir.

Karen: Quando o $n_0 > \epsilon$, a desigualdade $[|x_n - L| < \epsilon]$ vai ser válida né? Oh, quando a gente colocou o $n_0 = 18$ e o $\epsilon = 0.5$, deu certo... Também para o caso $n_0 = 8$ e $\epsilon = 0.9$.

Lucas: O que você acha Adriele? Se o $n_0 > \epsilon$ essa desigualdade é válida?

Karen: Parece!

Adriele: Não.

Karen: Então volta lá que não foi isso que eu entendi... Mexe com o n_0 . Põe $n_0 = 1$.

Adriele: Vai ficar assim [fazendo o cálculo mentalmente] $\left| \left(\frac{7}{7} + 1 \right) - 1 \right| > \epsilon$, para $\epsilon < 1$. Quer ver só... Põe outro valor para n_0 .

Karen: Tá... No caso $n_0 = 25$ e $\epsilon = 0.3$.

Adriele: Olha que na tela ta aparecendo $|x_n - L| \geq \epsilon$! O $n_0 > \epsilon$...

Karen: Ah, verdade.

[A aluna Karen coloca valores diferentes para n_0 e ϵ e observa o que acontece com o *applet*]

Karen: Então não vale isso o que eu falei não...

Karen elaborou uma ideia para que a desigualdade $|x_n - L| < \epsilon$ ocorra. A partir de cálculos mentais e utilizando o GeoGebra, Adriele mostrou um contraexemplo para a afirmação da colega, refutando a conjectura inicial.

As estudantes continuam investigando alguns casos diferentes. Dentre eles, elas testam os seguintes casos pedidos na ficha:

Dado $\varepsilon = 0,5$ existe um valor de n_0 de forma que $|x_n - L| < \varepsilon$?

E para $\varepsilon = 0,2$? E para $\varepsilon = 0,002$?

Karen: Para $\varepsilon = 0.2$ se tomarmos $n_0 = 36$ dá certo!

Lucas: E para $\varepsilon = 0.002$? Existe n_0 que satisfaça a desigualdade?

Adrielle: Ah, não tem... Tem que ser mais que 500..

Karen: Acima dos 500... Tem que aumentar o controle deslizante...

Inicialmente, as alunas configuraram $1 < n_0 < 500$. Para esse *épsilon* escolhido ($\varepsilon = 0.002$), foi necessário reprogramar o controle deslizante para um valor maior, de modo a conseguir que a desigualdade $|x_n - L| < \varepsilon$ fosse válida.

Karen: Vou por $n_0 = 800$.

Adrielle: Poe $n_0 = 1000$ já.

Karen: Pra 800 não deu.

Adrielle: Falei pra por 1000!

Karen: Eu quero testar Adrielle!

Adrielle: Eu ainda acho pouco colocar 1000, pois esse *épsilon* é muito pequeno.

Karen: Não deu certo 1200 também... Nunca vai dar certo!

Adrielle: Vai... Quando chegarmos no infinito vai aparecer... [risos]

Lucas: Mas vocês acham que alguma hora vai dar certo?

Adrielle: Espero que sim.

Karen: Tem que dar.

Lucas: E o que garante a vocês isso?

Adrielle: É que a gente sabe que o limite dessa sequência é um, então a sequência converge... A sequência está chegando no um e nunca passa dele...

Karen: Isso... Mas vai ser um número infinitamente pequeno..

Lucas: Pequeno? Quem vai ser um número pequeno?

Karen: Calma aí... O *épsilon* é muito pequeno. O n_0 tem que ser muito... Muito grande [aumentando o valor de n_0]. Esse n_0 não está fácil de achar...

Adrielle: Aí oh [apontando pra tela]. Para $n_0 = 3501$ dá certo!

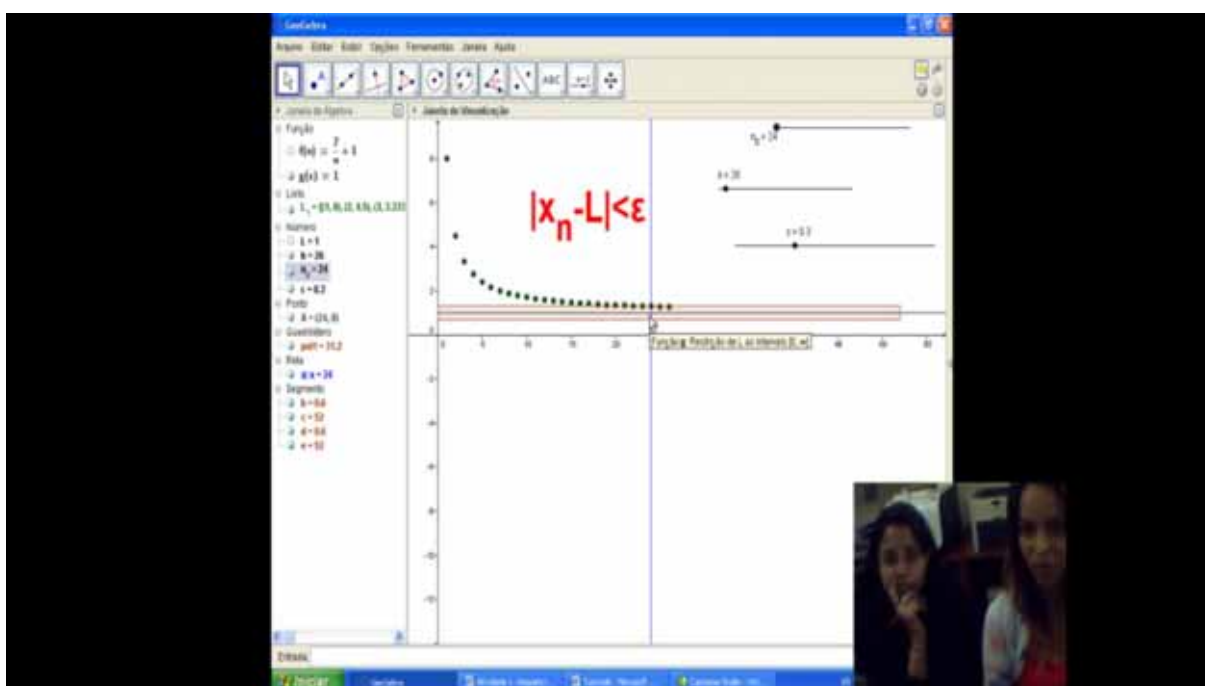
Karen: Nossa... Bem alto né? Impossível se isso fosse na mão...

Nesse trecho é possível perceber que o *software* contribuiu para a compreensão de Karen acerca da relação entre o ϵ e n_0 . Através da investigação, o coletivo Adriele-e-Karen-com-geogebra notou que, pelo fato de o *épsilon* ser muito pequeno, era necessário pegar um n_0 muito grande, como percebido na fala de Karen: "O n_0 tem que ser muito... muito grande". Aqui se observa outro papel da experimentação-com-tecnologia apontado por De Villiers (2003, 2010), que é o auxílio na compreensão.

Episódio D - Faixa Poligonal

Após a discussão anterior, as alunas construíram uma faixa poligonal (fig. 19) em torno dos pontos da sequência investigada. As observações sobre essa construção foram as seguintes:

Figura 19 - Construindo a faixa poligonal



Fonte: Dados de Pesquisa (2013)

Adrielle: Ah, esse polígono mostra pra gente que quando o ponto estiver dentro dele, quer dizer que a desigualdade é válida, não é?

Karen: Não entendi... Deixa eu mexer.

Adrielle: Vai indo com o n_0 ... Repara no que está aparecendo na tela... Para o $n_0 = 23$ o ponto está ficando quase dentro do polígono.

Karen: Se eu mudar meu n_0 , ai o ponto em que $n_0 = 24$ vai estar dentro do polígono?

Adrielle: Olhando não...

Karen: Tem que dar *zoom*...

Adrielle: É oh... O $n_0 = 23$, ta na fronteira... Mas o $n_0 = 24$ já está dentro da faixa!

Karen: É o que fala a definição né, dado um valor *épsilon*, vai ter um n_0 , e os pontos da sequência vão estar dentro do polígono...

Adrielle: E conforme eu aumento o *épsilon*, aumenta o meu polígono.

Karen: Ah, agora tudo faz sentido.

Nesse trecho, podemos notar que as alunas compreenderam a ideia de faixa de convergência e que, a partir de um n_0 , os pontos da sequência ficarão sempre dentro dessa faixa. Tal compreensão é confirmada pela frase de Karen "*Ah, agora tudo faz sentido*". Em entrevista, questionei as alunas sobre o trabalho com a faixa poligonal.

Lucas: O que vocês acharam dessa atividade?

Karen: Eu adorei. Eu estava acostumada a sempre calcular as coisas... Você vai, e calcula o módulo $[|x_n - L|]$ lá da definição. Mas nunca tinha enxergado esse fato.

A aluna afirma que estava acostumada a realizar cálculos, mas nunca tinha "enxergado" o que essa definição realmente queria dizer. Esse papel visual é uma das contribuições do *software* na experimentação, ajudando na compreensão do conceito de convergência. Nesse momento, acredito ter havido um pensamento-com-geogebra, concordando com as ideias de Borba e Villarreal (2005). As alunas, juntamente com o *software*, compreenderam a relação entre n_0 e ϵ da definição de sequência.

As participantes continuam discutindo sobre alguns aspectos da faixa poligonal, como observamos no trecho seguinte.

Karen: Então... A partir de um valor do n_0 , se esse módulo $[|x_n - L|]$ for menor que ϵ , esses pontos vão estar dentro do polígono...

Adrielle: É como se fosse uma bola... E esse um raio da bola...

Karen: Um raio de convergência!

Lucas: E se o ϵ for muito pequeno? O que acontece com a faixa?

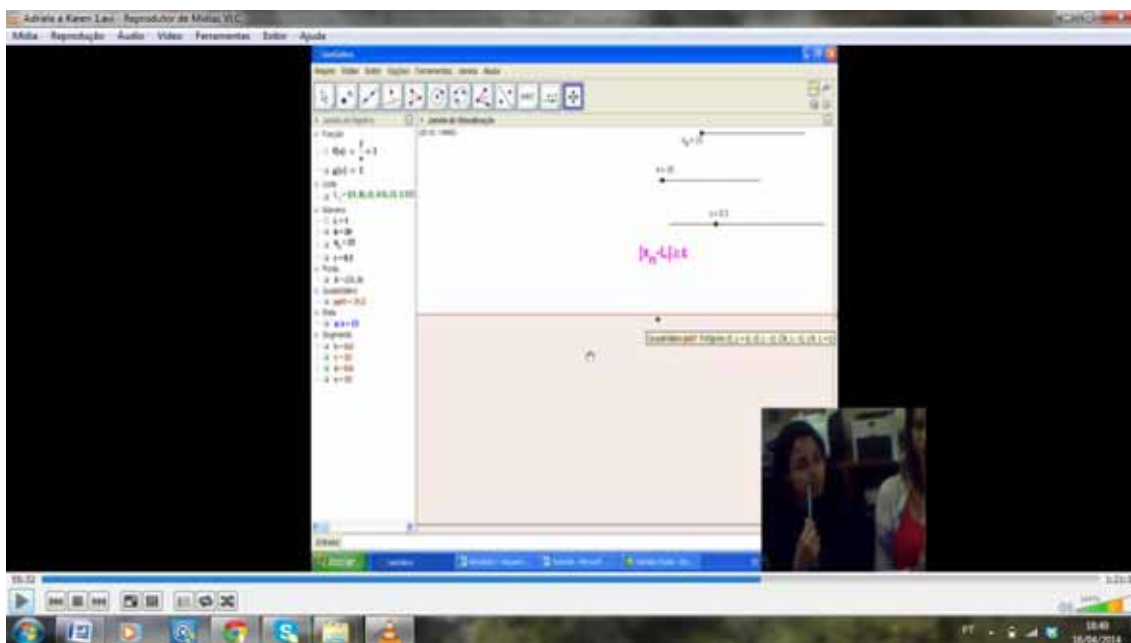
Adrielle: A faixa vai ficar bem pequena, olha [a aluna diminui o valor do controle deslizante ϵ]. A faixa vai tendendo a um.

Karen: Igual à Adrielle falou... Se você for diminuindo, vai chegar perto da convergência... Agora dá pra ver direitinho...

Adrielle: É, mas tem ponto que tem que dar muito *zoom* pra ver que ta dentro...

Karen: É, sem *zoom* não parece.

Figura 20 - Utilizando o *zoom* para verificar se o ponto pertence à faixa poligonal



Fonte: Dados de Pesquisa (2013)

Nesse diálogo Karen e Adrielle enfatizam o papel do *zoom* na investigação com o *software*. Assim como ocorreu antes, elas afirmam que é necessário utilizar a *ferramenta zoom* para "enxergar" o que está acontecendo com os pontos (fig. 20).

Lucas: Alguma outra consideração dessa faixa?

Karen: Só de ver que se for satisfeito esse módulo $[|x_n - L|]$ menor que *épsilon*, dá pra ver direitinho que está dentro do polígono... Nossa, muito bonito!

Lucas: E o que quer dizer estar dentro do polígono?

Adrielle: Que está convergindo..

Karen: Que esses pontos estão chegando cada vez mais perto do um.

Adrielle: Eu vou ver que está chegando... Posso pegar o *épsilon* tão pequeno quanto eu queira... Se eu tivesse uma sequência não convergente, aí não estariam dentro desse polígono se eu pegasse um *épsilon* muito pequeno.

Nesse momento reforça-se a compreensão da ideia de raio de convergência, proporcionada pela faixa poligonal. Esse fato me faz refletir sobre a importância de uma abordagem geométrica quanto se discute conceitos de Análise. Pela fala das alunas podemos induzir que "esse entendimento visual" da definição de convergência ocorreu graças a esse trabalho. Essas ideias são confirmadas no trecho que segue.

Karen: A visualização ajudou muito... Dá pra ver a faixa de convergência... Dá pra ver direitinho... Uns pontos a gente fica na dúvida se estão dentro da faixa ou não... Aí a gente coloca *zoom* e resolve tudo.

Lucas: Pra fecharmos essa discussão, vocês conseguem me dizer qual a relação que vocês veem entre n_0 e o ϵ ?

Karen: Que nosso *épsilon* é muito pequenininho... E o nosso n_0 tem que ir lá longe...

Adrielle: É... Eles estão interligados. Para convergir, dado um *épsilon* bem pequeno, sempre vai existir um n_0 muito grande, de forma que todos os pontos vão ficar dentro daquela faixa de convergência.

Karen: É, quanto menor esse *épsilon*, maior o n_0 .

O diálogo acima nos indica que Adrielle e Karen compreenderam a noção de convergência de sequências e, em particular, a relação entre n_0 e ϵ da mesma. Podemos, também, observar esse fato nas falas das alunas Gislaine e Patrícia no diálogo que segue.

Lucas: O que está acontecendo?

Patrícia: Eu estou vendo que vai ser só mais lá na frente que os pontos vão estar dentro da faixa...

Gislaine: Não entendi o que você ta falando Patrícia!

Patrícia: Assim oh... Aqui ele [o *software*] ta falando que você vai pegar os pontos... Não sei explicar! Bom, por exemplo, coloca lá no $n_0 = 200$. Vamos pensar... Mexe o *épsilon*...

[Gislaine varia o valor de *épsilon*]

Patrícia: Oh, para $\epsilon = 0,035$ tá dentro... Acho que é assim: para $n > n_0$, tenho que os pontos vão estar dentro do raio de convergência.

Gislaine: Ah sim... Verdade! E se aumentarmos o n_0 , esse ϵ aí vai ter que ser maior.

Figura 21 - Usando gestos para explicar a relação entre n_0 e ϵ .



Fonte: Dados de Pesquisa (2013)

Além do uso do GeoGebra para auxiliar Gislaine a compreender a relação da faixa poligonal com os controles deslizantes n_0 e ϵ , a aluna Patrícia utiliza gestos para explicar que quanto menor o ϵ , maior terá que ser o n_0 (fig. 21). O aspecto visual parece ser muito importante para Gislaine e Patrícia.

Os diálogos apresentados nesse episódio indicam que a visualização pode ser uma forte aliada no ensino da Análise. Como dito anteriormente, no capítulo 2, a Análise, em seu

início, possuía um caráter geométrico, porém com o tempo esse tipo de abordagem foi esquecido. Essa pesquisa me fez refletir sobre o porquê não dar ênfase no caráter geométrico em cursos de Análise, em particular, nos oferecidos para a Licenciatura. Será que essa mudança de abordagem traria mudanças significativas quanto ao ensino e a aprendizagem?

Na sequência, apresento o último episódio relacionado à Atividade 1. Nos diálogos que seguem, as alunas afirmam a importância da visualização, não especificamente na Análise, mas na Matemática como um todo.

Episódio E - Quer que eu desenhe?

Nesse episódio apresento um trecho da entrevista realizada com Gislaine e Patrícia sobre a atividade 1. Ao responderem, as alunas enfatizaram a importância da visualização na compreensão de ideias matemáticas, como é possível observar no diálogo a seguir.

Lucas: O que vocês acharam da atividade?

Gislaine: Muito interessante. Eu gosto de visualizar as coisas! Por exemplo, espaços topológicos... A topologia da caixa que eu não sei... Eu fico imaginando uma caixa, mas não é bem uma caixa... Eu preciso enxergar.

Patrícia: Eu também... Eu prefiro sempre visualizar as coisas... Eu sempre peço pro professor: "Professor, me mostra isso desenhando pra eu poder entender". Foi assim com a derivada, com a integral... Se eu não visualizo eu não entendo. Eu entendi a convergência por esse desenho [faixa poligonal].

Ambas as alunas reforçam a necessidade de "enxergar" os conceitos matemáticos. Patrícia até diz que geralmente pede ao professor que dê uma abordagem visual para o conteúdo, de forma que possa compreender melhor.

Esses cinco episódios apresentados até o momento serão retomados no próximo capítulo, no qual os analisarei à luz da literatura. A seguir, apresentarei os episódios que identifiquei na segunda atividade.

4.2. Atividade 2 - Resultados de Convergência

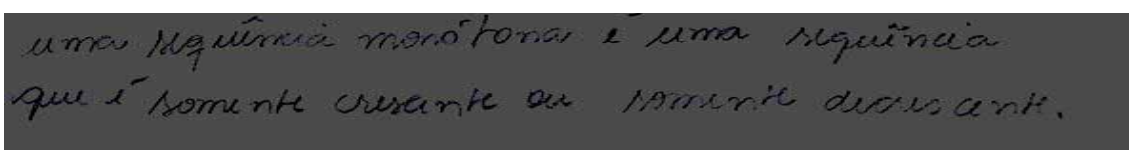
Essa segunda atividade possui como objetivo compreender os conceitos *sequência monótona* e *sequência limitada*, além de discutir alguns resultados de convergência relacionando os conceitos supracitados. Inicialmente, as alunas dissertaram sobre os seguintes questionamentos:

Escreva com suas palavras o que significa uma sequência ser monótona.

Escreva com suas palavras o que significa uma sequência ser limitada.

Com respeito à primeira questão, Adriele respondeu não lembrar o significado de monótona. Já as outras alunas arriscaram possíveis respostas, como podemos ver abaixo.

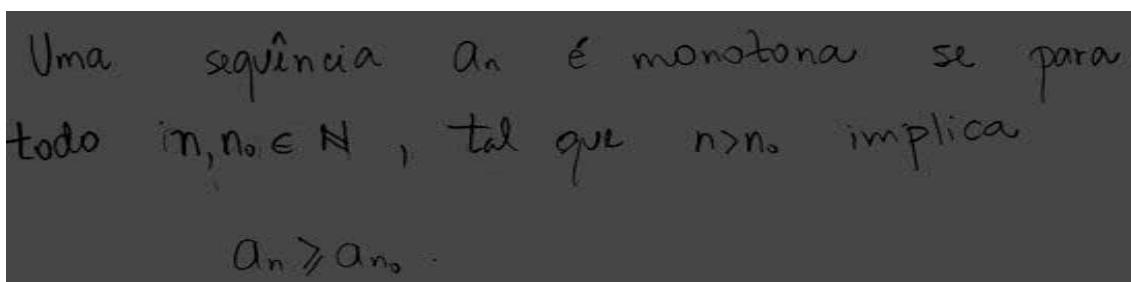
Figura 22 - Resposta Karen: Questão 1 - Atividade 2



uma sequência monótona é uma sequência que é somente crescente ou somente decrescente.

Fonte: Dados da pesquisa (2013)

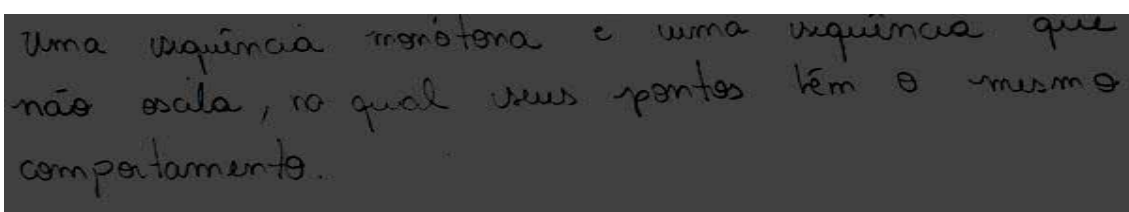
Figura 23 - Resposta Gislaire: Questão 1 - Atividade 2



Uma sequência a_n é monótona se para todo $m, n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0$ implica $a_n \geq a_{n_0}$.

Fonte: Dados da pesquisa (2013)

Figura 24 - Resposta Patrícia: Questão 1 - Atividade 2



Uma sequência monótona é uma sequência que não oscila, no qual seus pontos têm o mesmo comportamento.

Fonte: Dados da pesquisa (2013)

Na resposta da aluna Karen (fig. 22), podemos identificar alguns resquícios da definição correta de sequência monótona. Pela definição de Gislaine (fig. 23), uma sequência monótona seria somente crescente ou constante. Já Patrícia (fig. 24) conseguiu expressar a definição de sequência monótona correta, contudo não utilizando a linguagem matemática reconhecida como adequada.

Quanto à segunda pergunta, Karen respondeu que não se lembrava da definição de sequência limitada. Adrielle considerou o caso de a sequência ser limitada superiormente, desconsiderando o caso inferior (fig. 25). Patrícia (fig. 26) utilizou os termos limitado superiormente e inferiormente para definir o conceito de sequência limitada e exemplificou. E, por fim, Gislaine (fig. 27) foi a única que definiu formalmente o conceito e de forma correta.

Figura 25 - Resposta Adrielle: Questão 2 - Atividade 2

Dada uma seq. x_n diz que essa seq. é limitada se existe um L tal que todos os elementos da seq. não é maior que L , então todos os elementos da seq. é menor que L .

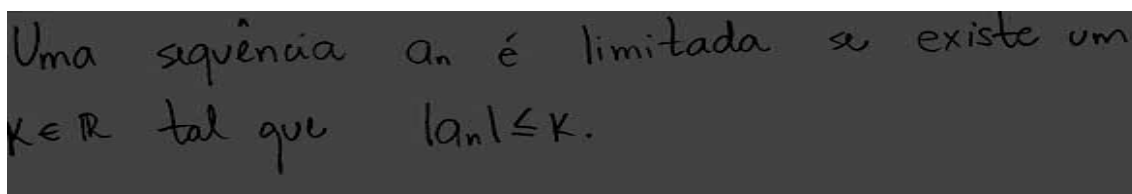
Fonte: Dados da pesquisa (2013)

Figura 26 - Resposta Patrícia: Questão 2 - Atividade 2

$\frac{1}{n}$ lida por $0 < 1$
Uma sequência limitada é uma sequência limitada superiormente e inferiormente. Por exemplo, a sequência $\frac{1}{n}$ tem como valor máximo 1 (nunca irá passar de 1) e tende a 0, então é limitada inferiormente por 0 e superiormente por 1 e portanto é uma sequência limitada.

Fonte: Dados da pesquisa (2013)

Figura 27 - Resposta Gislaine: Questão 2 - Atividade 2



Uma sequência a_n é limitada se existe um $k \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq k$.

Fonte: Dados da pesquisa (2013)

A fim de investigar esses conceitos, sequências monótonas e limitadas, as alunas fizeram a construção proposta no quadro 4, apresentada no capítulo anterior. A próxima seção diz respeito às considerações desse primeiro momento de investigação da segunda atividade.

Episódio F - Enxergando com o software

Nesse episódio, identifiquei que as alunas utilizaram o *design* visual do GeoGebra para justificar algumas ideias que elas possuíam sobre as sequências que estavam trabalhando. Apresento, a seguir, alguns diálogos que vão nessa direção.

Lucas: O que vocês podem falar dessa primeira sequência $x_n = n + 1$?

Karen: Que ela é crescente...

Adrielle: Dá pra ver que ela não converge...

Lucas: Por que ela não converge?

Adrielle: Porque ela vai para infinito... O valor dela está crescendo...

Karen: Ela não é limitada...

Lucas: O que é ser limitada?

Karen: Eu não sei falar com minhas próprias palavras... Seria existir um limite K ?

Adrielle: Pra qualquer valor aqui [aponta no *software* um dos pontos da sequência] que eu coloco, vai sempre existir um valor da sequência que vai ser maior que esse valor...

Karen: Não vai existir um valor que vai ser limite dessa sequência. Por exemplo, se eu aplicar o limite nessa sequência, não vai existir um limite.

Lucas: Ok. Então, toda sequência que possui um limite é limitada?

Karen: Se ela converge ela é limitada... Ou se ela é limitada ela é convergente? Estou nesse impasse...

Adrielle: Se ela é limitada ela converge... Não necessariamente se ela é convergente ela é limitada...

Karen: Ah, estou na dúvida ainda... Olha essa que construímos... Ela não é limitada, não converge... Parece que está certo...

Inicialmente, as alunas falam sobre a sequência $x_n = n + 1$. Karen afirma que a sequência em questão não é limitada, mas quando questionada sobre o que significa tal ideia, a aluna fala sobre a existência de um limite K . Questionei-a, então, se toda sequência que possui limite seria limitada também. Ela responde dizendo que apenas se a sequência for convergente.

Analisando a fala da aluna, podemos observar que o conceito de sequência limitada está errado, contudo a conjectura "*se toda sequência que possui limite seria limitada também*" está correta, com base na definição que a aluna tem por limitada. Já que a convergência de uma sequência quer dizer a existência de um limite dessa sequência, e visto que a definição que Karen possui por limitada é a existência de um limite, então tal conjectura é válida, entretanto, a definição inicial precisava ser reformulada.

Lucas: O que vocês podem dizer sobre a sequência $y_n = \frac{8}{n}$?

Karen: Ela é limitada... Parece...

Adrielle: É... Eu posso dizer que ela é limitada pelo -1.

Karen: Por que pelo -1?

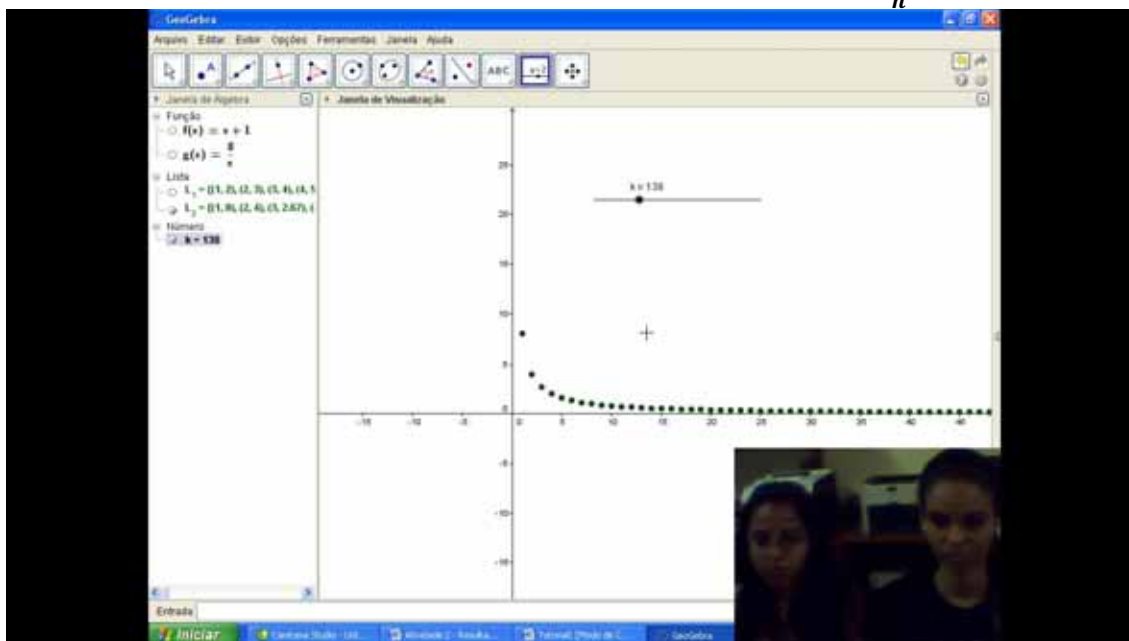
Adrielle: Observa aqui na sequência [aponta para o *software*]. Os pontos dessa sequência estão se aproximando da linha do zero [aponta para o eixo x]. Ela está chegando tão perto quanto eu queira do eixo x, mas em nenhum momento ela vai ser -0.2, -0.3. Ou seja, não vai ser menor que zero. Então ela é limitada pelo zero... Pelo -1... Pelo -2... Tanto faz.

Karen: Ah, entendi... Verdade...

Nesse trecho, Adrielle afirma que a sequência $y_n = \frac{8}{n}$ é limitada por -1. Apontando para o GeoGebra, a aluna explica para Karen que essa sequência "não chegará" no eixo x, sendo assim é limitada pelo zero. Uma vez que ela não alcançará o valor zero em nenhum momento, a aluna conclui que a sequência não alcançará nenhum valor negativo também, ou seja, pode-se dizer que a sequência é limitada por qualquer valor negativo.

Nota-se que, a partir desses exemplos plotados no GeoGebra, a definição de sequência limitada, para Adrielle, vai se expandindo. Inicialmente (fig. 25), a aluna considerava apenas sequência limitadas superiormente como definição.

Figura 28 - Investigando a sequência $y_n = \frac{8}{n}$



Fonte: Dados da pesquisa (2013)

Discutindo, também, sobre a sequência $y_n = \frac{8}{n}$, as alunas Gislaine e Patrícia discorrem sobre a convergência da mesma, como podemos observar no excerto que segue.

Lucas: O que mais podemos falar sobre essa sequência?

Gislaine: Ela é convergente e vai pra zero.

Lucas: Por quê?

Patrícia: Verdade. Dá pra ver com o *software* que ela converge.

Gislaine afirma que a sequência converge para zero. Quando peço uma justificativa para esse fato, Patrícia afirma que "*dá pra ver com o software*". É possível observar que o GeoGebra assumiu o papel de convencimento de uma ideia matemática, assim como De Villiers (2003) já destacou em suas pesquisas.

Episódio G - Elaborando definições

Nesse próximo episódio, observaremos como as alunas-com-geogebra elaboraram a definição do conceito *sequência monótona*.

Lucas: Vamos para a terceira sequência (fig. 29). O que podemos dizer sobre ela?

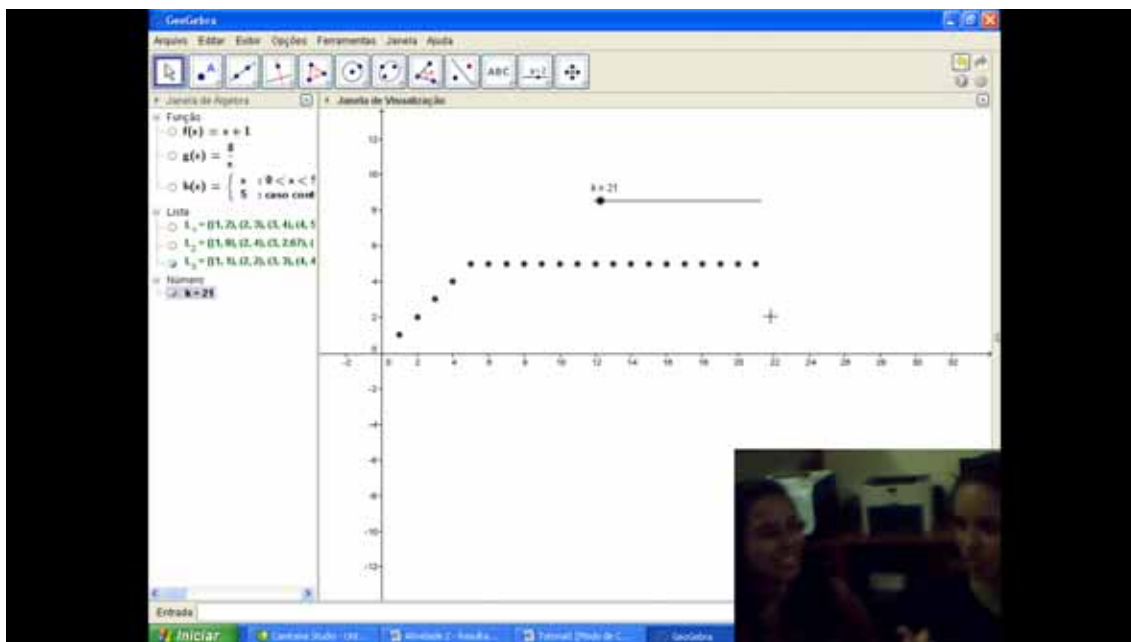
Adrielle: Ah... Eu acho que sei o que é monótona...

Lucas: O que você acha que é monótona?

Karen: Ela não é monótona... Quando ela é só crescente ou só decrescente aí ela é monótona... Nesse caso ela cresce e estaciona.

Adrielle: Até aqui ela é monótona [aponta para os pontos de $x < 5$]. E depois é não monótona.

Figura 29 - Sequência definida por partes



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Lucas: Vamos ver a última sequência ai discutiremos mais sobre todas essas coisas. O que podemos dizer sobre a última sequência (fig. 30)?

Karen: Ela está decrescendo e depois estaciona... Então a sequência não é monótona, eu acho... E ela é limitada... Pelo 8.

Karen: E converge... Então se ela é limitada ela é convergente... Acho que é isso...

Lucas: E se eu falar que todas essas sequências são monótonas? Vocês conseguem me dizer a definição de sequência monótona?

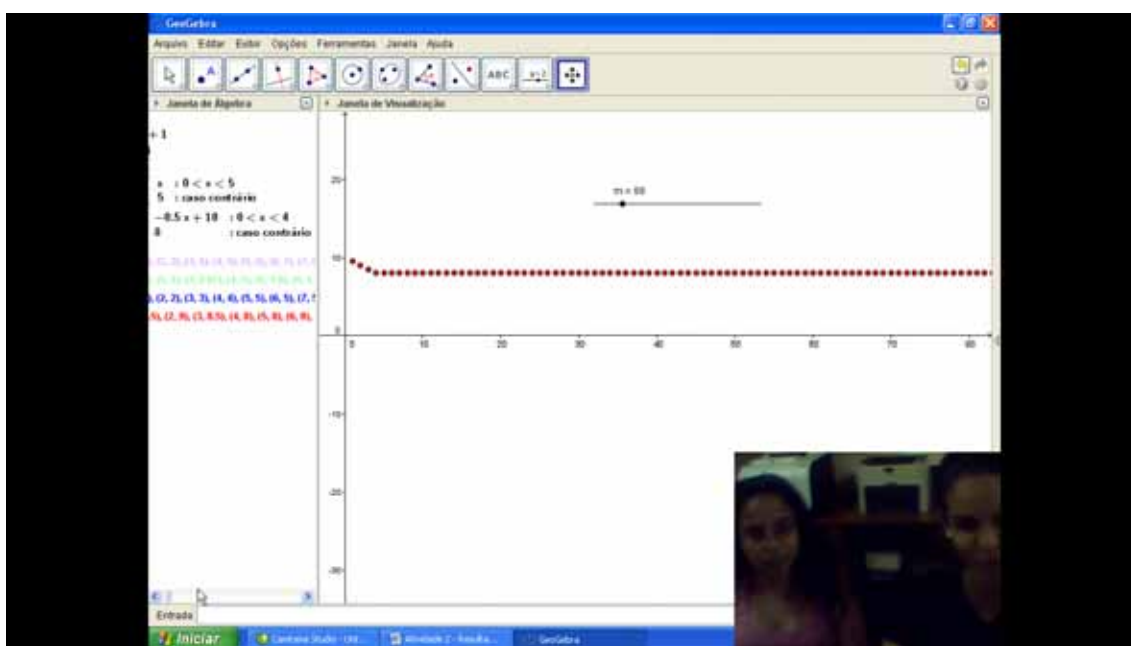
Karen: Ah, deixa eu ver as outras sequências mesmo... Só se for crescente, decrescente, não crescente e não decrescente.

Adrielle: Eu não lembro... Mas observando essas sequências deve ser isso.

Karen: Acho que é isso sim. São essas quatro coisas...

Lucas: A partir desses exemplos, então vocês conseguem definir o que é ser monótona?

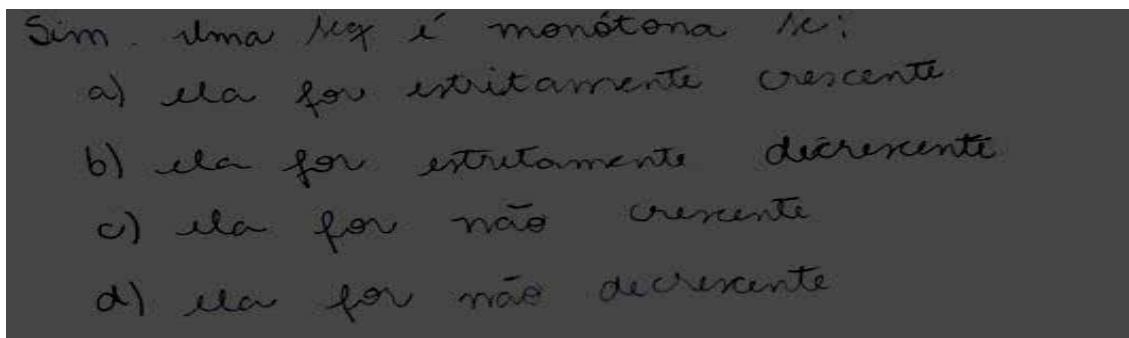
Figura 30 - Sequência definida por partes



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Após a investigação das quatro sequências, as alunas elaboraram uma definição para sequências monótonas. As alunas Adrielle, Karen e Gislaire escreveram da mesma forma a definição do conceito, sendo assim, apresentarei apenas uma das respostas (fig. 31).

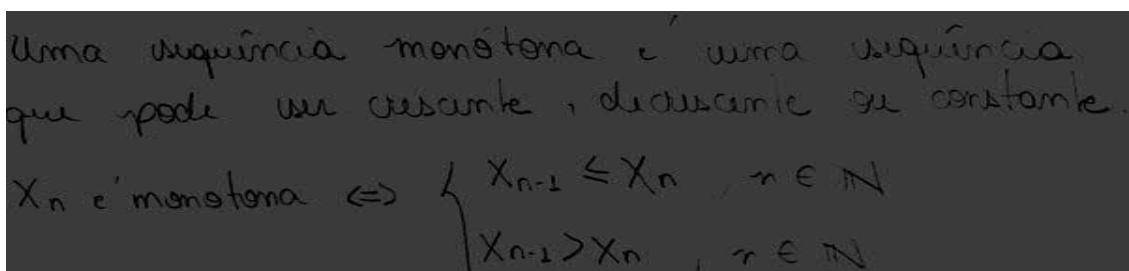
Figura 31 - Definição de sequência monótona (Adrielle, Gislaiane e Karen)



Fonte: Dados da pesquisa (2013)

Já Patrícia, elaborou a definição de forma matemática (fig. 32). Apesar de a aluna escrever $x_{n-1} > x_n$, acredito que ela quis dizer $x_{n-1} \geq x_n$.

Figura 32 - Definição de sequência monótona



Fonte: Dados da pesquisa (2013)

As alunas afirmaram, em entrevista posterior, que esse tipo de atividade foi muito interessante, pois difere do que ocorre na sala de aula. Karen disse que geralmente se passa a definição de início, e com o tempo se esquece, ressaltando a importância de uma atividade onde a investigação tem como objetivo final a definição. Patrícia concordou com essa ideia e disse que uma atividade dessa forma ajuda a fixar mais o conteúdo.

Visto que a ideia de sequência monótona estava mais clara para as alunas, seguimos com a atividade, a fim de investigar sequências limitadas. Apesar de as alunas conseguirem elaborar a definição de limitada, não identifiquei episódios nos quais a tecnologia possuiu um papel de destaque para alcançar essa definição. Acredito que a atividade exploratória foi importante, porém o GeoGebra não teve um papel relevante.

No próximo episódio, apresentarei como as alunas relacionaram os conceitos sequências limitadas, sequências monótonas e sequências convergentes. Para detalhar essas situações, elenquei alguns trechos dos diálogos com as alunas.

Episódio H - Relacionando Conceitos

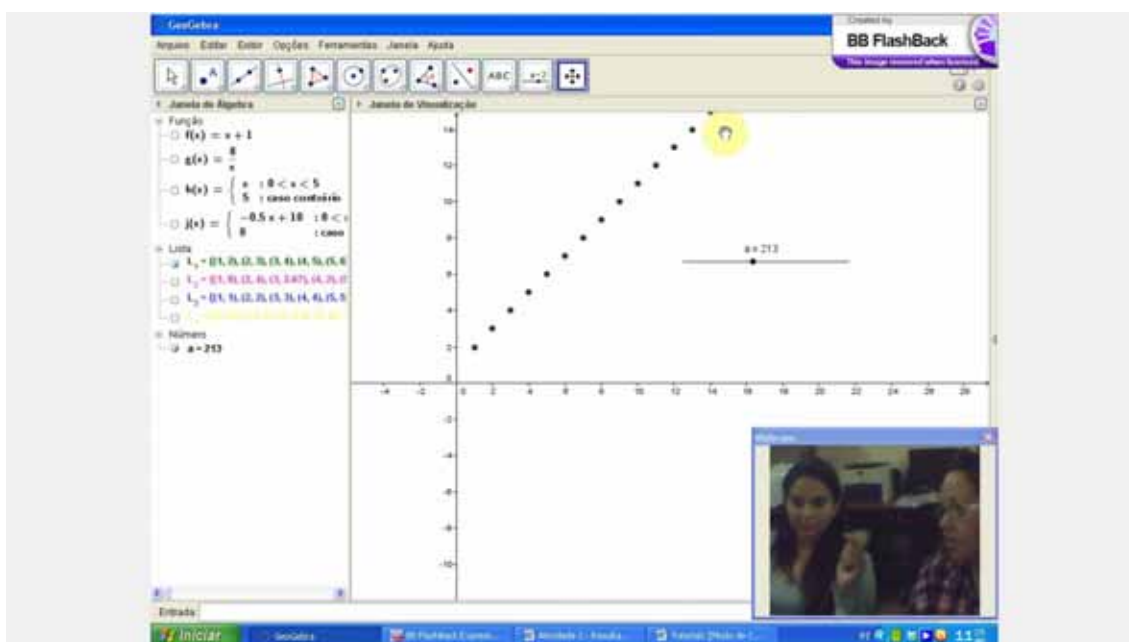
As alunas Patrícia e Gislaine tentam relacionar os conceitos monótona e convergente. Observemos o diálogo abaixo.

Gislaine: Toda sequência monótona é convergente.

Patrícia: Será? Não sei. Deixa eu ver... Ah, olha essa primeira sequência que plotamos, $x_n = n + 1$. Ela é monótona... só crescente e não converge (fig. 33).

Gislaine: Ah verdade. Exatamente.

Figura 33 - Sequência monótona e não convergente



Fonte: Dados da pesquisa (2013)

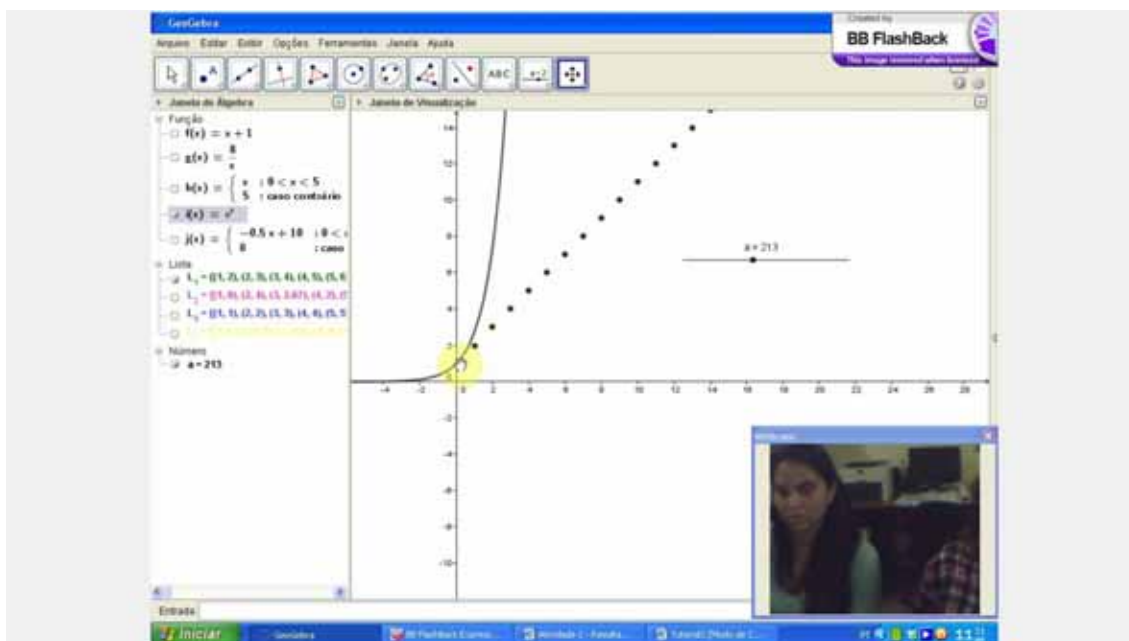
Patrícia: O que queremos agora?

Gislaine: Uma sequência convergente. Eu quero pensar em algo diferente. Algo com a exponencial. Vou digitar aqui (fig. 34).

Patrícia: Ah, mais aí ela não é convergente! Ela vai pra infinito, olha aí.

Gislaine: Verdade...

Figura 34 - Elaborando uma sequência a partir da função $f(x) = e^x$



Fonte: Dados da pesquisa (2013)

As alunas tentam fazer relações com os conceitos. Gislaine diz que quer pensar em alguma sequência diferente para investigar. Uma primeira tentativa é criar uma sequência a partir da função $f(x) = e^x$. Patrícia afirma que essa sequência vai para infinito, ou seja, não converge. Gislaine sugere, então, trabalhar com uma outra sequência, como veremos abaixo.

Gislaine: Se a gente colocar alguma sequência, do tipo daquelas que uma "explode" e a outra vai pra zero.

Patrícia: Pode ser alguma com cosseno.

Gislaine: Ah, e se for $x_n = \frac{\text{sen}(n)}{n}$?

Lucas: O que acontece nesse caso?

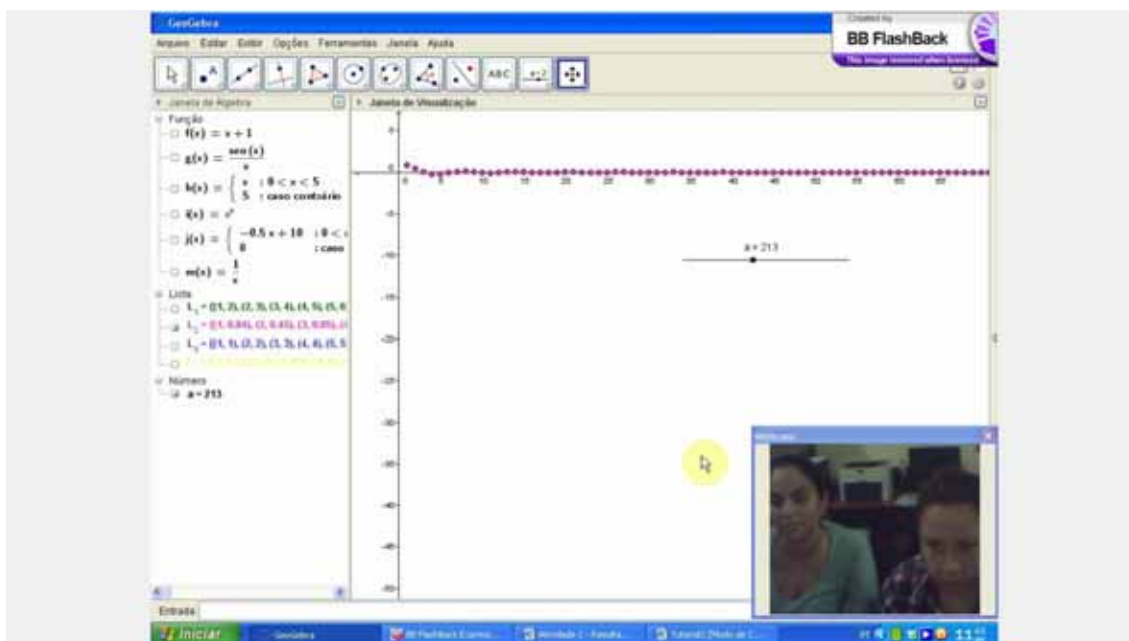
Gislaine: Não sei, tem que desenhar. Patrícia, coloca aí (fig. 35)

Patrícia: Ah, era um desse que eu queria! Olha só, ela fica oscilando no início, mas pelo desenho ela converge.

Gislaine: Então temos outro resultado... Pegamos uma sequência convergente, que não é monótona.

Patrícia: Isso. Então sequência convergente não implica em monótona.

Figura 35 - Investigando a sequência $x_n = \frac{\text{sen}(n)}{n}$



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Nesses momentos de experimentação, o coletivo formado pelas alunas-com-geogebra foi importante na criação de exemplos e contraexemplos de algumas ideias. Primeiramente, a dupla Gislaine e Patrícia investigaram a relação entre sequências monótonas e convergentes. Elas utilizaram a sequência $x_n = n + 1$ como contraexemplo para a sentença "toda sequência monótona converge". Na sequência, a dupla investiga se toda sequência convergente é monótona. Para tal, Gislaine sugere uma sequência "diferente". As alunas plotam a sequência $x_n = e^x$ (fig. 34) e observam seu comportamento. Contudo, como a sequência não converge, elas logo descartam-na.

Ainda analisando a conjectura "toda sequência convergente é monótona", Patrícia sugere alguma sequência que relacione alguma função trigonométrica. Gislaine, então, indica a sequência $x_n = \frac{\text{sen}(n)}{n}$ (fig. 35). A dupla observa o comportamento da sequência e conclui que tal conjectura não é válida, visto que obtiveram uma sequência convergente e que não é monótona, ou seja, uma sequência que oscila. O rápido *feedback* do GeoGebra possibilitou que as alunas elaborassem algumas sequências e analisassem se as mesmas estavam de acordo ou não com as conjecturas investigadas.

Também na tentativa de relacionar os conceitos envolvidos na Atividade 2, Adrielle e Karen discutem sobre os mesmos. Nos trechos que seguem, essa dupla relaciona a existência

da faixa poligonal, construída na atividade de convergência de sequências, com o fato de uma sequência ser ou não ser limitada.

Lucas: Essas sequências que investigamos, como justificar se são limitadas ou não?

Adrielle: Eu posso pensar naquele polígono que fizemos na primeira atividade? Tipo, pra ver se todos os pontos da sequência vão estar dentro desse polígono?

Lucas: Boa ideia!

Karen: Na primeira sequência, $x_n = n + 1$, a gente consegue construir...

Lucas: Então me dê um exemplo.

Karen: Ah não consigo um exemplo... Que intervalo eu pegaria? Vai ficar "umonte" de ponto pra fora... Para esse caso não vai ter um intervalo, então.

Adrielle: Eu acho que eu posso pegar um intervalo até o infinito. Tipo $(0, +\infty)$.

Karen: Mas isso é um intervalo?

Adrielle: Sim. E contém todos os pontos da sequência... Você estava pensando em um intervalo bonitinho né?

Lucas: O que é um intervalo bonitinho?

Adrielle: Um intervalo fechadinho...

Karen: Ah, eu não estava pensando nisso... Estava pensando em pegar um intervalo pequeno... E assim não dá... Essa foi minha dúvida... Eu estava pensando em um intervalo pequeno, bonitinho, fechado $[a,b]$. Eu não vou conseguir construir uma faixa nesse caso aqui. Ela não é limitada, então.

Adrielle retoma a ideia da faixa poligonal para a discussão de sequências limitadas, sugerindo a construção da faixa para justificar o fato de uma sequência ser limitada ou não. Essa ideia foi muito interessante, pois inicialmente não havia pensado nessa utilidade e a aluna enxergou uma nova possibilidade para tal construção, relacionando-a com outro conceito.

Lucas: Vamos para a última pergunta. Observando esses casos é possível fazer uma relação entre sequência monótona, limitada e convergente?

Karen: Bom, eu acho que se ela é limitada então ela é convergente. Ser monótona implica em ser limitada?

Adrielle: Não... Observa a primeira sequência, $x_n = n + 1$... Os pontos crescem... Ela é monótona, mas ela vai pro infinito...

Karen: Ser limitada implica em monótona?

Adrielle: Não sei... Pelos casos que fizemos sim... Mas temos que pensar em outros casos...

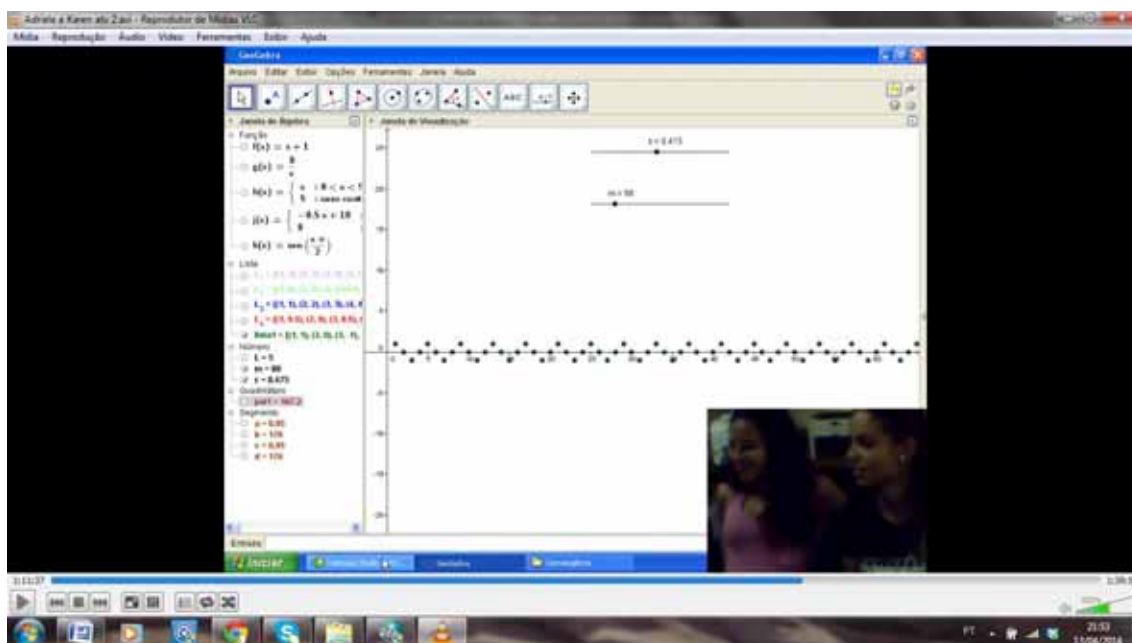
Lucas: O primeiro que vocês falaram... Limitada implica em convergente?

Karen: Para cada sequência que a gente viu aqui, exceto a primeira... Porque a primeira, aqui, oh se for aplicar limite aqui é infinito... Ela não é limitada...

Lucas: Mas eu não consigo construir uma sequência limitada não convergente?

Adrielle: Ah, vamos tentar alguma... Tipo o seno... Digita aí Karen... Seno de x...
Veze alguma coisa... Vamos ver se dá... (fig. 33).

Figura 36 - Sequência limitada e não convergente



Dados da Pesquisa (2013)

Karen elabora a conjectura "se a sequência é limitada então ela é convergente". Quando questionadas sobre a validade da conjectura, elas utilizam os exemplos trabalhados

como forma de convencimento. Contudo, Adriele sugere que pensem em algo diferente e pede que Karen construa uma sequência que tenha relação com a função seno.

Karen: Vou colocar $x_n = \text{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$...

Lucas: Bom o exemplo... O que acontece nesse caso?

Adriele: Ela é limitada...

Lucas: E ela converge?

Adriele: Não!

Karen: Ah... Então já furou lá... Se ela é limitada não implica em ser convergente... Ah, mas aqui é fácil ver isso... Na sala de aula que a gente faz na mão, eu não vou conseguir construir uma sequência complicada.

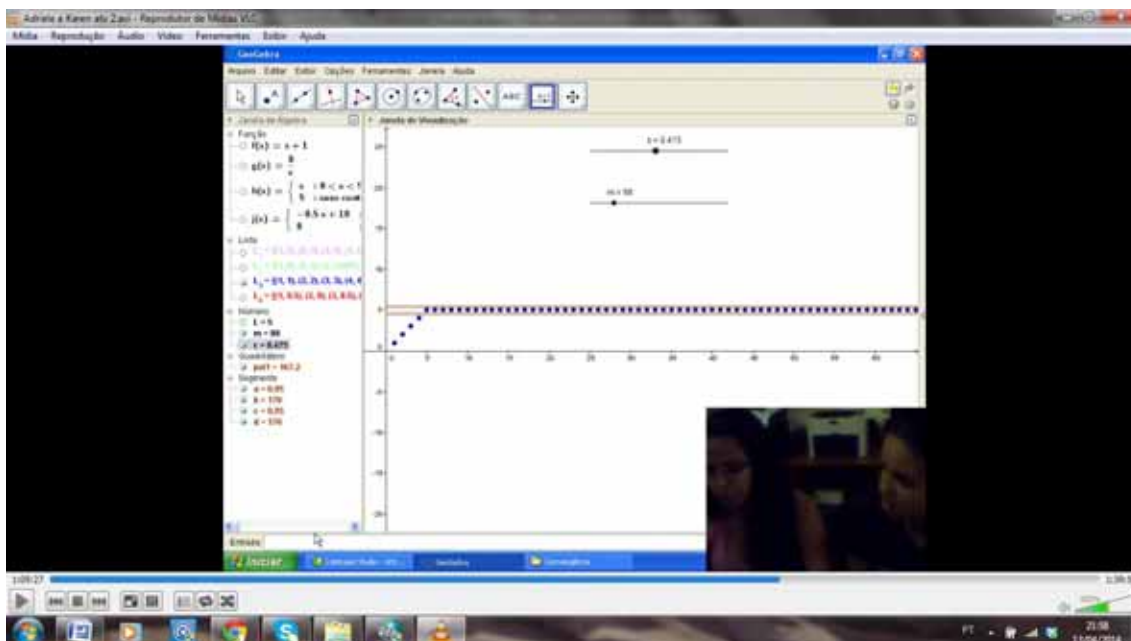
Nesse momento percebo na fala de Karen um aspecto importante das tecnologias digitais, em particular do GeoGebra, que é a facilidade possibilitada pelo *software* quanto ao plotar uma sequência com a lei de formação um pouco mais elaborada. Na presença da mídia, foi possível construir um contraexemplo para o enunciado em questão. A aluna diz que, se fosse utilizado o lápis e papel, ela não conseguiria construir sozinha e a conjectura, que é falsa, poderia não ser invalidada.

Karen: Bom, então é a volta que vale... Se for convergente a sequência é limitada!

Adriele: Isso... É aquela ideia do polígono (fig. 37). Se a sequência converge, ela vai ficar naquele espaço do polígono... Então é limitada!

Karen: Isso... O módulo da sequência menos o ponto de convergência vai ser menor do que o *épsilon* $[|x_n - L| < \epsilon]$... É a faixa do polígono. Os pontos da sequência não vão passar daquela faixa...

Figura 37 - Sequência convergente e limitada (faixa poligonal)



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

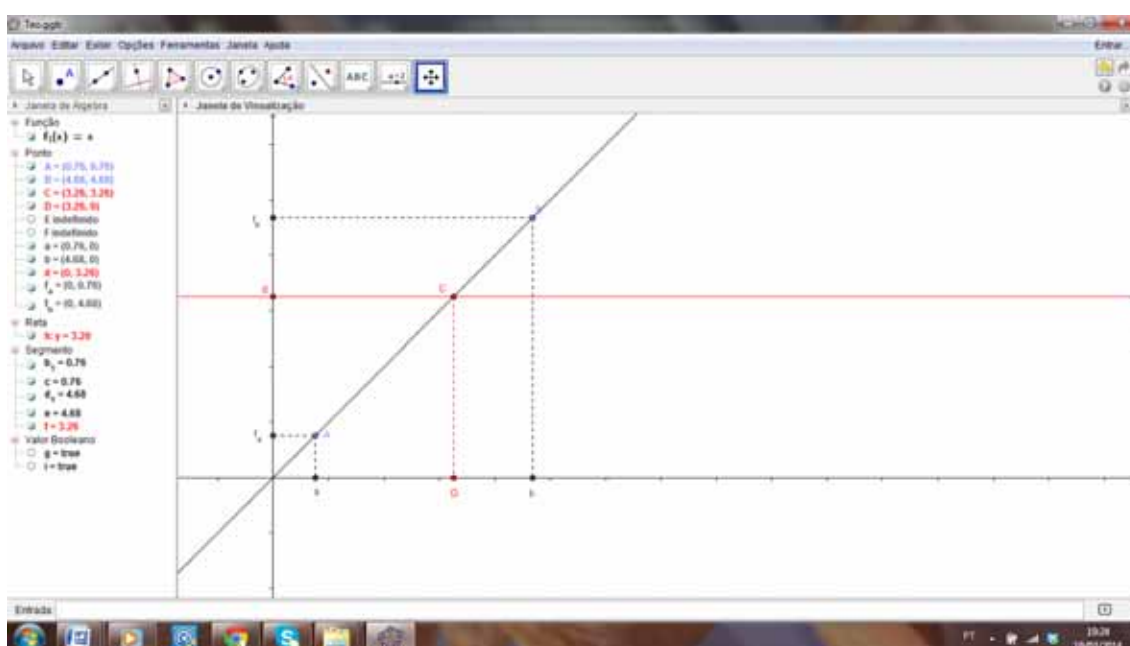
Novamente Adrielle utiliza a ideia da faixa poligonal para justificar a conjectura de Karen (se a sequência é convergente então é limitada). Esse fato me fez perceber a importância da abordagem geométrica na investigação de conceitos de análise e o quanto tal construção foi importante para Adrielle.

Nessa seção, podemos perceber o papel que o *software* assume na discussão das alunas. Elas utilizaram a experimentação como forma de convencimento de alguma ideia, na elaboração de conjecturas e na compreensão. A seguir, apresentarei os eventos críticos que identifiquei durante a realização da terceira atividade.

4.3. Atividade 3 - Teorema do Valor Intermediário

Para a realização desta atividade, as alunas seguiram os passos de construção apresentados no capítulo de metodologia (quadro 6). De modo geral, ambas as duplas não tiveram dificuldades na construção. Acredito que nesse momento as alunas já possuíam certa "fluência" no GeoGebra, devido ao constante contato com o mesmo. Ao fim da construção, a tela do GeoGebra se encontrava da forma esperada (fig. 38).

Figura 38 - Construção da atividade 3 elaborada por Adriele e Karen



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Apresentarei, a seguir, como as alunas investigaram tal resultado. As primeiras discussões ocorreram após a construção acima. Nesses momentos iniciais, não identifiquei nenhum papel de destaque do GeoGebra, contudo, essas descrições são necessárias para a compreensão dos episódios posteriores.

Episódio I: Discussões iniciais sobre o TVI

Uma vez construído o *applet* (fig. 38), pedi que as duplas falassem a respeito dessa construção e identificassem o que ela representava. Inicialmente, as alunas descreveram o que estavam vendo no *software*. Seguem, abaixo, as primeiras impressões de Adriele e Karen.

Lucas: O que podemos dizer sobre essa construção?

Adrielle: Que o ponto A da função tem o " a " como correspondente no eixo x e o $f(a)$ como correspondente no eixo y . O B tem o " b " como correspondente no eixo x e o $f(b)$ como correspondente no eixo y . E o ponto C tem a coordenada D como correspondente no eixo x e o " d " como correspondente no eixo y .

Karen: E que o " d " é menor que $f(b)$ e maior que $f(a)$ e que, então, o D está entre " a " e " b ".

Lucas: Certo. O que mais?

Adrielle: Temos uma função contínua... Então existe um ponto C [na função] entre A e B , tal que o " d " está entre $f(a)$ e $f(b)$... E o D está entre " a " e " b ".

Karen: Ficou confuso...

Nesse diálogo é possível observar que as alunas começaram a elaborar o enunciado do teorema a partir do que foi feito na construção do *applet*. Adrielle afirma que "*temos uma função contínua... então existe um ponto C , na função, entre A e B , tal que o " d " está entre $f(a)$ e $f(b)$... E o D ²⁵ está entre " a " e " b "*". Karen achou confusa a afirmação da colega e uma nova tentativa de esclarecer o que foi dito foi feita.

Karen: Precisamos melhorar essa frase... Eu nem sei escrever o que a gente falou.

Entre " a " e " b " existe D , tal que $f(D)$ está entre $f(a)$ e $f(b)$. É isso?

Adrielle: Óh, dado dois pontos, " a " e " b ", como isso é uma função contínua, vai existir $f(a)$ e $f(b)$. Entre eles sempre vai existir um " d " tal que no intervalo (a,b) vai existir um D , de forma que $f(D) = d$.

Nessa discussão, Karen se confunde e inverte a ordem da fala da colega. Esta havia dito que se pegarmos um elemento no contradomínio implicará na existência de um elemento no domínio. Já Karen, tentando explicar o que Adrielle havia dito, falou que se pegarmos um elemento D em um intervalo do domínio (a,b) , então $f(D)$ estará no intervalo $(f(a),f(b))$. Tal fala de Karen não está errada matematicamente, visto que pela definição de função tal fato

²⁵ Para diferenciar as letras D (maiúsculo) e d (minúsculo), as alunas utilizaram as palavras "deção" quando se referiam ao D e "dezinho" quando se referiam ao d .

pode ocorrer, contudo, não condiz com o que Adrielle estava tentando dizer. Visto tal divergência nas falas, intervimos e as questionamos.

Lucas: Ok. Calma... Adrielle, tente explicar pra Karen o que você disse.

Adrielle: Ta... Eu tenho um ponto A e um ponto B da função. Certo?

Karen: Certo.

Adrielle: Eu sei que esse ponto A vai estar relacionado com um " a " no domínio e um $f(a)$ na imagem. E o ponto B vai estar relacionado com um " b " no domínio e um $f(b)$ na imagem. Aí, no intervalo $(f(a), f(b))$ vai sempre existir um " d " tal que...

[A aluna para de falar, pensa por alguns momentos e continua]

Adrielle: Não! Está errado!

Karen: Ta certo!

Adrielle: Não. É no intervalo (a, b) . Vai sempre existir um D , tal que $f(D)$ está entre $(f(a), f(b))$.

Nesse momento, Adrielle modifica sua fala e, aparentemente, não percebe tal mudança. A fim de continuar o assunto, questionamos Karen acerca de tal fala.

Lucas: E aí, Karen. O que você acha?

Karen: Nossa... Me perdi. Eu estou visualizando assim: Dados dois pontos A e B . Existe o ponto C que está entre A e B , tal que a $f(D)$ tá entre $(f(a), f(b))$. Não é isso?

Várias vezes, as alunas utilizaram os pontos do gráfico ao invés de pegarem os elementos do domínio e da imagem. Nesse trecho acima, por exemplo, quando Karen utiliza os pontos A e B é possível notar, através de seu apontamento (fig. 39), que ela está se referindo aos elementos " a " e " b ", pertencentes ao domínio.

Figura 39 - Karen apontando para o computador para explicar seu ponto de vista



Fonte: Dados da pesquisa (2013)

Lucas: E aí, Adrielle. Ela falou algo diferente que você?

Adrielle: Não. Eu acho que ela falou a mesma coisa...

Karen: Sério? Porque parece que você falou muito e eu não entendi nada!

Percebendo que, apenas com a fala e observando o *software*, as alunas não estavam se entendendo, pedi que ambas respondessem à primeira pergunta da ficha investigativa, que era:

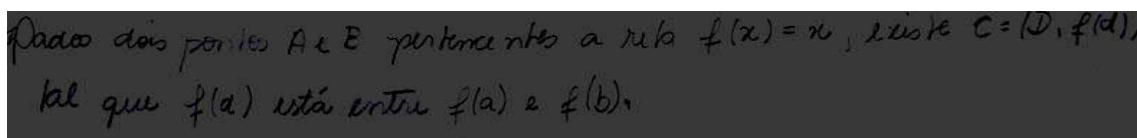
O que esse applet nos mostra? Que resultado ele nos permite conjecturar? Você consegue definir matematicamente esse resultado?

As respostas das alunas Karen e Adrielle foram respectivamente:

Figura 40 - Resposta Adrielle questão 1 da atividade 3

Seja que dado dos pontos A e B na $f(x) = x$ eixos dos pontos estão relacionados com suas coordenadas $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$. Existe um ponto $d \in (f(a), f(b))$, tal que $f(d) = d$ e $C = (d, f(d))$, onde C está entre A e B .

Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Figura 41 - Resposta Karen questão 1 da atividade 3


Dados dois pontos A e B pertencentes a reta $f(x) = x$, existe $C = (D, f(D))$ tal que $f(D)$ está entre $f(a)$ e $f(b)$.

Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Note que, mais uma vez, Adrielle inverte seu discurso do enunciado. Na resposta acima, ela afirma que se deve tomar $d \in (f(a), f(b))$ implicando a existência de um $C = (d, f(D))$, onde $C \in (a, b)$ e $f(D) = d$. Acredito que a aluna se confundiu na definição de C . A definição correta seria $C = (D, f(D))$.

Todas as discussões acima ocorreram com a dupla utilizando o GeoGebra apenas para visualizar o que haviam construído. Durante esses primeiros momentos, Karen e Adrielle apenas movimentaram alguns pontos do *software*, porém não foi possível observar nenhum papel de destaque do mesmo.

A seguir, apresentarei os episódios que elenquei a partir da produção de dados, nos quais as alunas-com-geogebra elaboraram algumas ideias sobre o teorema do valor intermediário.

Episódio J: Domínio ou Contradomínio?

Nesse episódio, as duplas utilizaram o GeoGebra para criar alguns exemplos, com o intuito de elaborar ideias sobre o *applet* construído.

Lucas: A partir do que vocês escreveram... Me expliquem o que está acontecendo.

Adrielle: Dados dois pontos na imagem, existe um no meio deles que será a imagem de alguém no domínio.

Karen: Eu coloquei que dados dois elementos do domínio " a " e " b ", existe um no meio deles " D " ... Aí a imagem dele estará entre $f(a)$ e $f(b)$.

Adrielle: Eu peguei o contrário da Karen!

Lucas: Vocês concordam que são coisas diferentes? Elas nos levam ao mesmo lugar? Tanto faz qual você usar?

Adrielle: Eu to pensando aqui... Às vezes dá certo porque estamos trabalhando com a função identidade, $f(x) = x$. E se fosse outra função? Será que daria na mesma também? Vou mudar a função aqui!

Adrielle questiona se o fato de utilizarmos um caso particular, $f(x) = x$, não seria responsável por tal confusão e sugere a utilização do *software* para testar novos exemplos.

Lucas: Que função não daria certo?

Karen: $f(x) = x^2$.

[Elas fazem a construção para $f(x) = x^2$.]

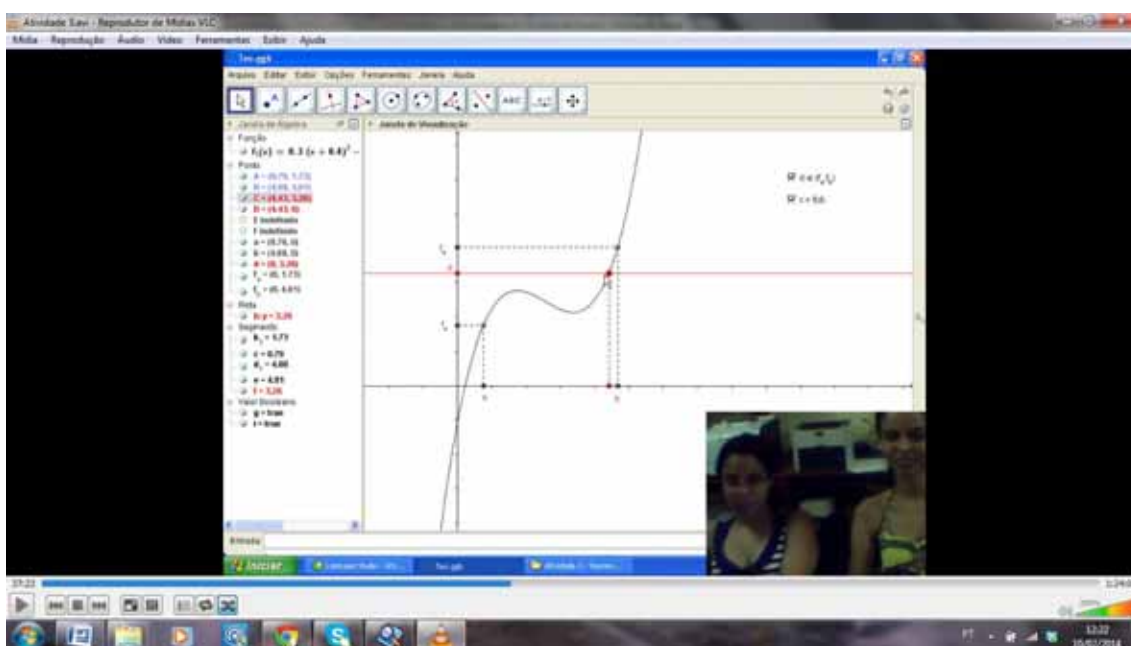
Lucas: E aí, o que vocês podem dizer?

Karen: A construção deu certo também. Acho que dá na mesma nesse caso também...

Adrielle: Nesse caso dá certo. Vamos colocar uma x^3 (fig. 24).

Nesse momento, o *software* foi importante na investigação e na tentativa de se elaborar uma justificativa para os questionamentos levantados. Como defendido por De Villiers (2003, 2010), a o uso da tecnologia associada à experimentação possibilita a verificação de ideias matemáticas, possibilitando rápidos *feedbacks* para o usuário. Nesse caso, as alunas buscaram outros exemplos a fim de se convencerem das ideias que estão surgindo.

Figura 42 - Exploração da função cúbica pela dupla Adrielle e Karen



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Na imagem acima observa-se a investigação com uma função cúbica. Essa função foi construída pela *ferramenta livre* do GeoGebra pelas alunas, e sua lei de formação é

$$f(x) = 0.3(x + 0.4)^3 - 2.67(x + 0.4)^2 + 7.33(x + 0.4) - 3.65$$

Após algumas investigações, Karen começa a acreditar que a conjectura elaborada por Adriele possa fazer sentido e ser verdadeira, como é possível perceber no seguinte trecho:

Karen: Olhando assim, faz sentido o que a Adriele falou.

Adriele: Como é a função é contínua, eu posso pegar no domínio que sempre vai existir uma imagem. E vice-versa também.

Lucas: A continuidade então justifica isso, então?

Adriele e Karen: Eu acho que sim.

A partir de alguns novos exemplos construídos pelas alunas, é possível perceber que algumas conjecturas são levantadas. Karen começa a se convencer da ideia elaborada por Adriele, e tenta justificar dizendo que o fato de a função ser contínua pode ser o motivo de tal conjectura ser verdadeira.

Veremos a seguir como a função de refutação aparece nas falas das alunas.

Episódio K: Relevância das Hipóteses

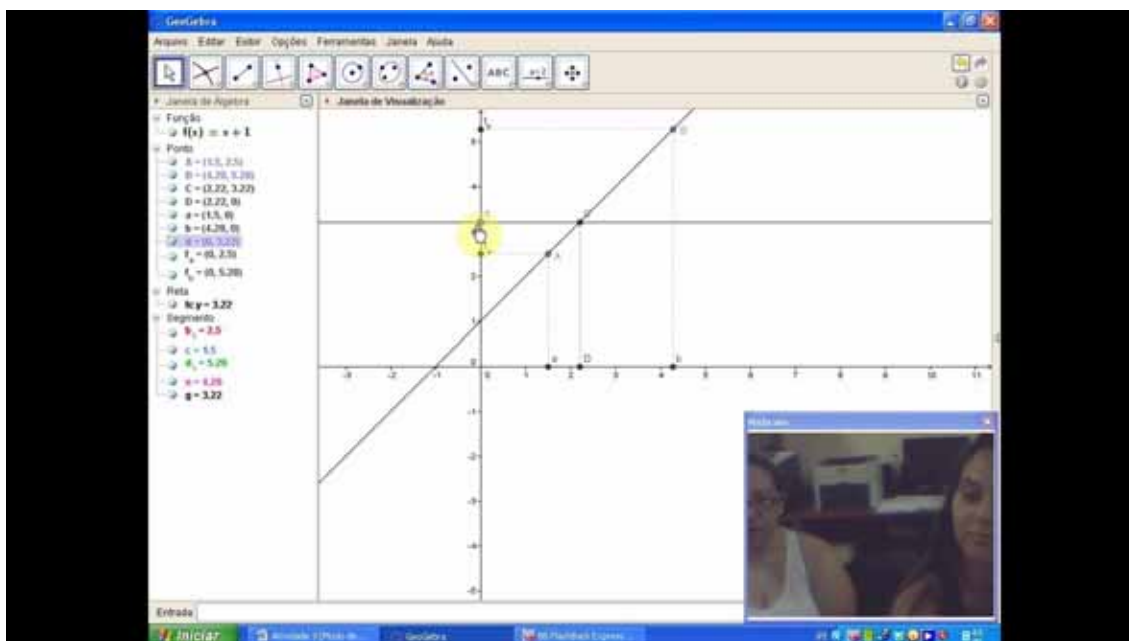
Nesse episódio, apresento como as alunas Gislaiane e Patrícia utilizaram o GeoGebra para se convencerem da importância das hipóteses do resultado investigado. Observemos os diálogos que seguem.

Lucas: O que está acontecendo? Vocês estão percebendo algo nessa construção?

Gislaiane: Estou pensando se é sempre possível encontrar esse "D" aqui. Se isso não está acontecendo só porquê pegamos a função identidade.

Patrícia: Eu estava pensando a mesma coisa... Será que dá certo se a função fosse diferente? Põe uma outra função, sei lá, $f(x) = x + 1$ (fig. 43).

Figura 43 - Investigando a função $f(x) = x + 1$



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

As alunas modificam no GeoGebra a função e movimentam os pontos no *software* a fim de tirar conclusões sobre o "D". Após a troca da função, retornamos o diálogo.

Patrícia: Dá pra achar nessa função também!

Gislaine: Será que é por ser uma reta?

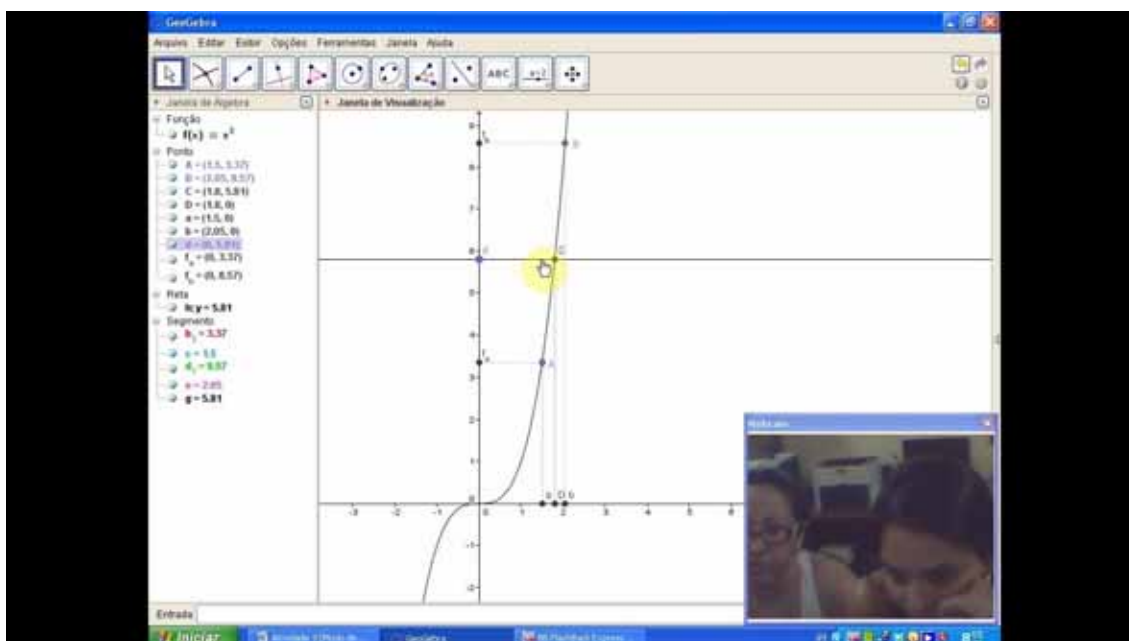
Patrícia: Desenha alguma função diferente.

Gislaine: Pode ser a $f(x) = x^3$?

Patrícia: Pode... Vamos ver.

As alunas modificam novamente a função plotada no GeoGebra com o intuito de identificar se esse resultado é válido só com "retas" ou se com outros tipos de funções ele é preservado. Gislaine sugere investigar a função $f(x) = x^3$ (fig. 44).

Figura 44 - Investigando a função $f(x) = x^3$



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Lucas: E nesse caso? O que vocês podem falar?

Gislaine: Aqui dá certo também.

Patrícia: Será que é por causa da continuidade?

Gislaine: Ah, não sei... Por que seria um problema?

Patrícia: Não sei Gi, mas se tiver um buraco, aí não vou conseguir pegar ninguém.

Gislaine: Mas se tiver buraco, aí a função não vai estar definida lá.

Patrícia: Ah, não sei. Vamos supor se ela fosse, por exemplo, $f(x) = \frac{1}{3-x}$.

[As alunas plotam a função acima (fig. 45)]

Patrícia: Ah, mas não era uma função assim que eu estava pensando. Eu queria algo com um salto, mas que continuava.

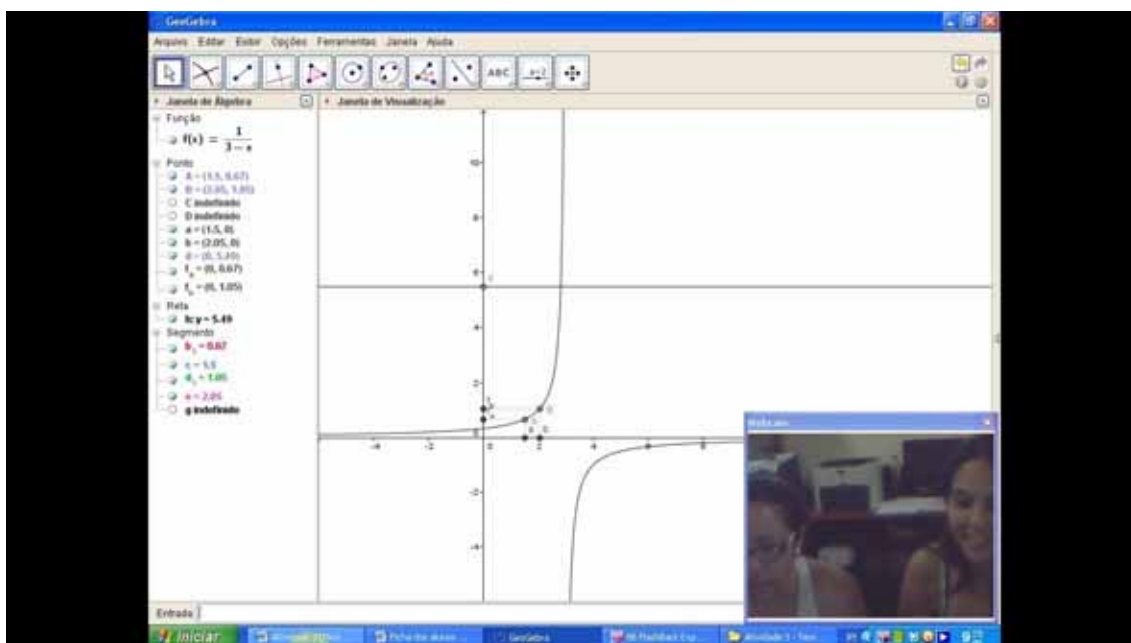
Gislaine: Você tava pensando em uma que é com "chave"... Uma por partes.

Patrícia: Isso.

As alunas conjecturaram que uma das causas do resultado dar certo pode ser a continuidade das funções que elas selecionaram até o momento. Patrícia diz que se colocassem uma função descontínua, a presença de um "buraco" na função poderia ser o responsável por não ser possível encontrar um "D". A aluna sugere então a função $f(x) =$

$\frac{1}{3-x}$, entretanto, ao ver o gráfico da mesma no GeoGebra (fig. 45), percebe que não era esse exemplo que estava em mente. Gislaiane diz que um exemplo seria uma função por parte.

Figura 45 - Investigando a função $f(x) = \frac{1}{3-x}$



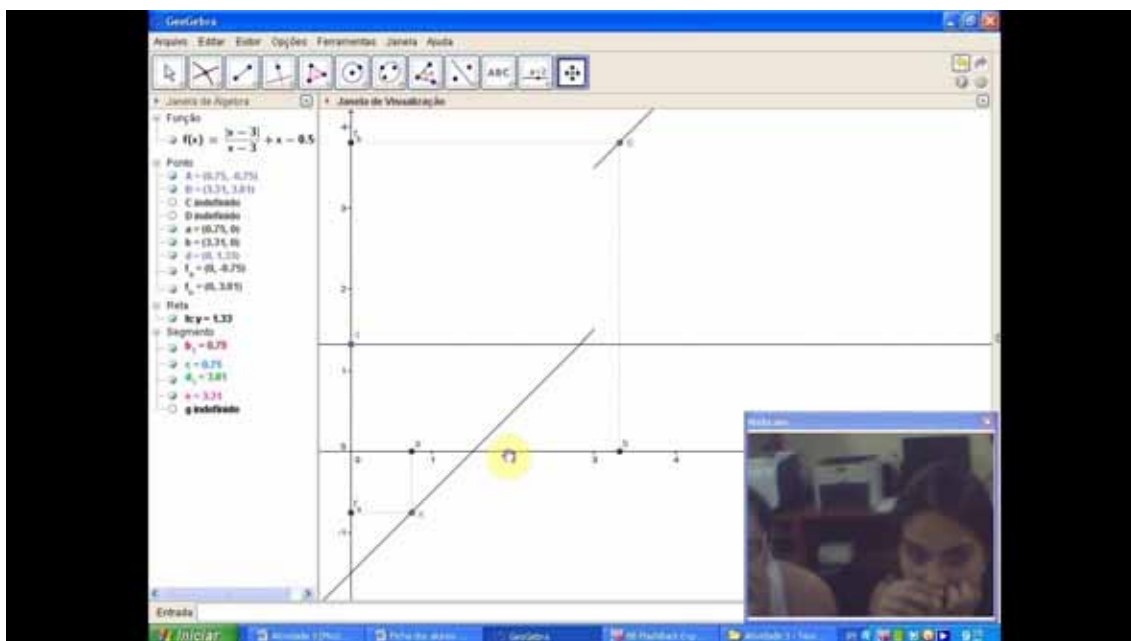
Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

A dupla não consegue elaborar um exemplo e, então, utilizaram a função

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} + x - 0.5,$$

proposta na ficha (quadro 7).

Figura 46 - Investigando a função $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} + x - 0.5$



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Patrícia: É isso que eu estava pensando!

Gislaine: Ah, entendi o que você estava dizendo [manipulando o "d" no GeoGebra]. Nesse caso aqui, nem sempre a gente vai conseguir "um carinha" para ter como imagem o "d".

Patrícia: É! A continuidade é importante.

Gislaine: Não é só pra retas ! Sendo contínua já basta.

No excerto acima podemos perceber que as alunas, após alguns testes, concluem a importância da continuidade para o resultado. Inicialmente, Gislaine conjecturou que era possível encontrar o "d" apenas em retas. Após uma mudança de função, as alunas percebem a validade para funções que não são retas, e Patrícia questiona se a continuidade não seria uma característica importante. Novamente as alunas alteraram a função e, a partir de uma função descontínua, concluíram a importância da continuidade.

Um fato relevante que as duplas não identificaram era que, além da continuidade, o problema com esses exemplos estava no domínio. As alunas não deram a importância necessária a hipótese do Teorema do Valor Intermediário que afirma que o domínio da função seja fechado e conexo.

Episódio L: Verdade Matemática

Nesse episódio apresentarei um pequeno trecho de um diálogo entre Karen e Adriele, no qual elas deixam claro o poder da verdade Matemática e do conhecimento do professor na sala de aula.

Adriele: Mas pelo que eu lembro, todo mundo passa a definição pra gente pegando os "carinhas" da imagem.

Lucas: Ta. Todo mundo passa. Mas você sabe o porquê disso?

Adriele: Não sei. Eu nunca perguntei.

Lucas: Você sempre aceitou?

Adriele: É... A gente pega e aceita... Acata isso.

Karen: Eu me lembro de um teorema de Análise 2 que ele faz isso. O Teorema de *Darboux*.

Lucas: Mas por que será que eles [os professores] sempre pegam na imagem? Eles poderiam pegar no domínio também?

Adriele: Não sei. Tem alguma coisa aí... Porque eles nunca falaram porque eles só pegam na imagem e simplesmente pegam.

Refletindo sobre esse excerto é possível observar a "verdade Matemática" que impera nos cursos de formação. A aluna Adriele disse que sempre viu a definição e que sempre a usou, mesmo sem questionar.

Lucas: Por que vocês acham que isso nunca incomodou vocês?

Adrielle: Porque nunca questionaram a gente...

Karen: Ah não, Adrielle. Não vem defender só a gente... A gente nunca foi questionada, e a pessoa que ensinou pra gente, a gente também nunca questionou. A gente chegou numa atividade como essa e está sendo questionada pelo Mazzi e nem tá sabendo responder... Por quê? Por falta de questionamento anterior.

Adrielle: É a gente também não perguntou!

Karen: É o que eu estou falando... A gente nunca perguntou pra quem tava ensinando... E a gente estudou pras provas, já passou por Cálculo e Análise I e não tá sabendo... Não nos questionamos pra resolver os exercícios... É uma falha nossa também!

Ao serem questionadas sobre o porquê de aceitar um resultado sem ter compreendido sua demonstração, Adrielle tenta culpar a falta de explicação por parte dos professores, enquanto Karen reconhece que a falha se encontra também em suas atitudes. Pela frase de Karen "numa atividade como essa", foi possível perceber que a experimentação-com-tecnologia proporcionou um momento crítico por parte das alunas, indo além dos papéis apresentados por De Villiers (2010).

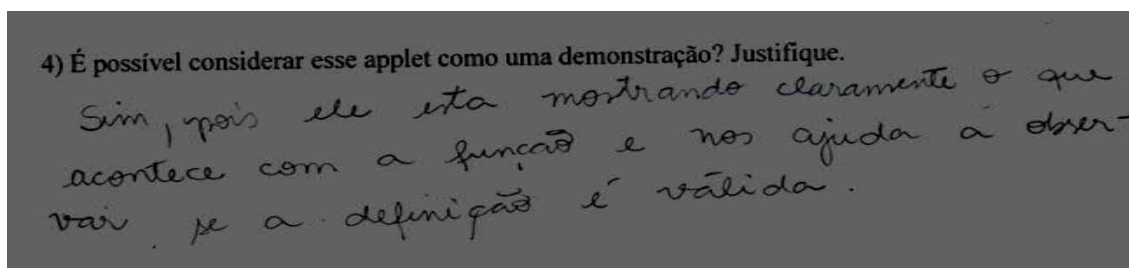
Episódio M: Demonstração com software

Nesse episódio, apresento e analiso as respostas que as alunas deram para a última pergunta do questionário da atividade 3, a saber:

É possível considerar esse applet como uma demonstração? Justifique.

Tivemos dois tipos de resposta: uma dupla afirmou considerar o *applet* como uma demonstração, enquanto a outra dupla discordou, não tinha certeza. Na sequência apresentarei e discutirei as respostas dadas.

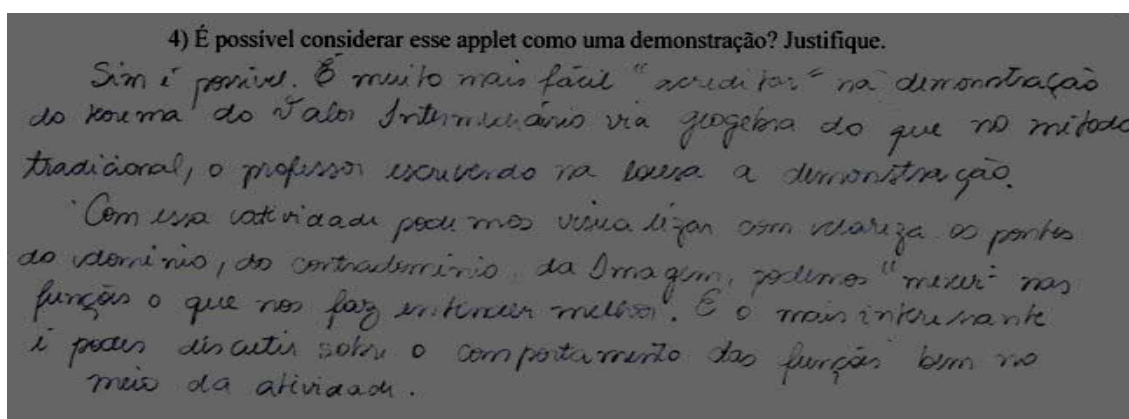
Figura 47 - Resposta Adriele questão 4 da atividade 3



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Adriele apenas diz considerar o *applet* como uma demonstração pelo fato de se ver claramente o que acontece com tal resultado. Já Karen discute um pouco mais sobre sua ideia relacionando-a com o método tradicional de demonstração, como podemos ver a seguir.

Figura 48 - Resposta Karen questão 4 da atividade 3

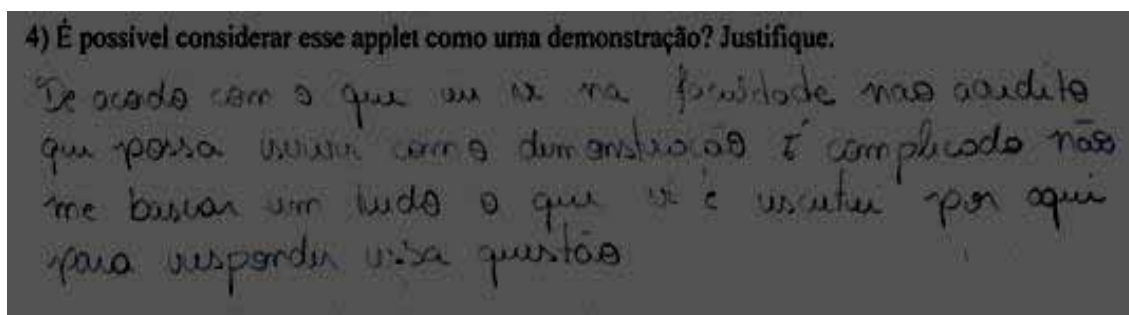


Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Na resposta de Karen temos um fator importante que é o "convencimento". A aluna argumenta que com o *software* fica "mais fácil de acreditar", devido ao caráter exploratório da atividade. Essa resposta de Karen corrobora uma das funções da experimentação-com-*tecnologia* apresentada por De Villiers (2003, 2010), que é a de auxiliar na compreensão e no convencimento de algum resultado ou ideia matemática. Karen levanta outro ponto importante que é "o método tradicional". Será que só pelo fato de se ter uma demonstração implica que aquele resultado faz sentido para o aluno? No próximo capítulo discutirei sobre a ideia de "verdade matemática" e o poder que ela possui sobre os alunos.

A seguir, Patrícia diz não considerar o *applet* uma demonstração e usa a experiência para justificar sua resposta.

Figura 49 - Resposta Patrícia questão 4 da atividade 3

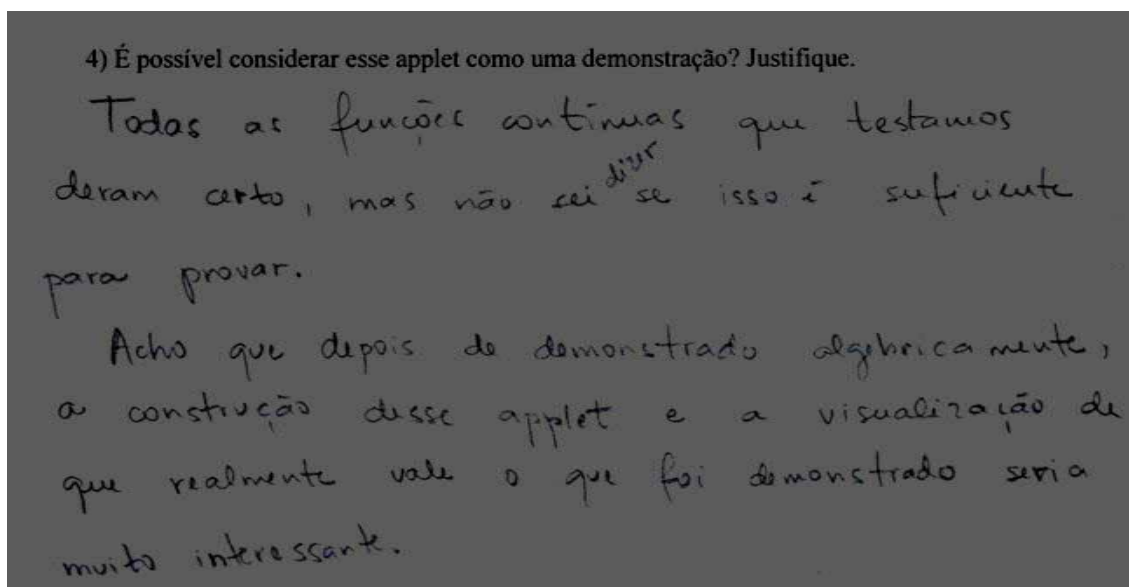


Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Na resposta de Patrícia percebemos o peso que sua vivência acadêmica possui ao responder essa pergunta. Por estar acostumada a escutar como uma demonstração deve ser, a aluna desconsidera a construção como uma forma de demonstração. Nesse caso podemos notar, mais uma vez, a presença da verdade matemática no discurso da aluna.

Por fim, Gislaine afirma que o *applet* é interessante após a demonstração algébrica do resultado.

Figura 50 - Resposta Gislaine questão 4 da atividade 3



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Gislaine compreende a validade do teorema nos casos investigados, mas não tem certeza se isso basta. A aluna acha ser necessária uma prova algébrica e, após a apresentação da mesma, utilizar o *software* para verificar a validade do resultado. Essa verificação é uma das funções apresentadas por De Villiers (2003, 2010).

Em suma, podemos perceber que a noção de demonstração difere entre as alunas. Nota-se nas respostas de Adriele e Karen que uma prova está intimamente relacionada com a ideia de "convencimento", enquanto para Patrícia e Gislaine ela é considerada um artifício matemático, baseado em suas experiências durante a vida acadêmica.

4.4. Síntese dos Episódios

A partir de cada episódio apresentado foi possível perceber que as alunas-com-geogebra pensaram e discutiram sobre os conceitos da disciplina Análise elencados nessa pesquisa. A seguir, uma síntese de cada episódio foi feita de modo a retomar as principais ideias discutidas ao longo desse capítulo.

Referente a Atividade 1, elenquei 5 episódios relevantes. No Episódio A foi possível discutir a definição de sequência numérica, destacando seu domínio, fato que, às vezes, não é dado muita importância. No Episódio B, as alunas discutiram que, dependendo do *zoom* dado, as informações provenientes da visualização proporcionada pelo GeoGebra pode confundir. As alunas discutiram o aspecto do "ponto grande" criado pelo *software* e sua relação com a ideia visual da convergência da sequência $x_n = \frac{7}{n} + 1$. O Episódio C foi responsável por gerar discussão acerca da definição de convergência, em particular, a relação entre ϵ e n_0 . A partir da experimentação-com-tecnologia, as estudantes concluíram que podemos tomar um valor para ϵ tão pequeno quanto queiramos, no entanto, esse fato está intimamente relacionado com o valor de n_0 , ou seja, quanto menor o valor de ϵ , maior o valor de n_0 . No Episódio D, as participantes discutiram sobre a faixa poligonal. Destaco nesse momento as ricas discussões proporcionadas por essa abordagem geométrica do conceito de convergência. A partir dos diálogos apresentados, concluo que as estudantes-com-tecnologia compreenderam a noção de convergência. No Episódio E as alunas reforçam a importância da visualização no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Com relação a Atividade 2, destaquei 3 episódios. O Episódio F apresentou a importância do GeoGebra na justificativa de sentenças matemáticas. As alunas utilizaram as informações provenientes do *software* para argumentar a respeito da veracidade de algumas hipóteses. No Episódio G, as estudantes elaboraram definições como sequências limitadas e monótonas, a partir da experimentação-com-tecnologia. Já o Episódio H foi responsável pela tentativa das alunas de relacionar a ideia de convergência com os conceitos definidos no Episódio H. A partir de exemplos e contraexemplos, as alunas-com-tecnologia foram capazes de refutar algumas conjecturas.

No que concerne à Atividade 3, foram destacados 4 episódios. Para a realização dessa atividade as alunas construíram um *applet* sobre o Teorema do Valor Intermediário. No Episódio I as alunas, experimentando esse *applet*, discutiram questões sobre domínio e contradomínio de funções. No Episódio J, as participantes investigaram sobre a importância das hipóteses do teorema. As alunas-com-geogebra criaram alguns exemplos, de modo que compreendessem a importância de se trabalhar com uma função contínua no TVI. No Episódio K as alunas discutiram sobre a noção de verdade matemática e seu aspecto irrefutável. E, por fim, no Episódio L, as alunas argumentaram sobre o que seria uma demonstração em Matemática e expuseram suas opiniões sobre o uso de tecnologias em demonstrações.

Em todos os episódios escolhidos foi possível identificar discussões produzidas pelo coletivo seres-humanos-com-mídias, nesse caso particular, alunas-com-geogebra. Essas discussões me fizeram concluir que, de fato, a utilização de um *software* no ensino da disciplina Análise pode trazer contribuições para a aprendizagem dos alunos.

A fim de responder a pergunta de pesquisa, no próximo capítulo analisarei os dados apresentados anteriormente. Dentro dos episódios que identifiquei, procurei por possíveis respostas para a pergunta diretriz. Na tentativa de respondê-la, estruturei o capítulo seguinte em três partes, as quais representam possíveis respostas, tendo como base a literatura, para ressaltar a importância de cada tema emergente.

5 REFLETINDO SOBRE DADOS

Nesse capítulo reflito sobre os dados apresentados anteriormente à luz da literatura. A análise se deu tendo em mente as ideias de experimentação, propostas por Michael de Villiers (2003, 2010), e o constructo teórico Seres-humanos-com-Mídias, de Borba e Villarreal (2005). O objetivo desse capítulo é, então, apresentar indícios que sejam capazes de responder a pergunta norteadora desse trabalho, a saber:

*Quais os papéis do software GeoGebra na investigação de alguns conceitos da disciplina
Análise?*

Para tentar respondê-la, retomo alguns autores apresentados no capítulo 2, assim como apresento outros que foram surgindo durante a elaboração da pesquisa. Estruturei, então, esse capítulo em forma de temas. Cada tema representa uma possível resposta para a questão supracitada. Esses temas emergiram das convergências encontradas nos dados do capítulo anterior. São eles:

1. Elaboração e Refutação de Conjecturas
2. A visualização e a Compreensão de Ideias Matemáticas
3. Disparador de Questões

5.1. Elaboração e Refutação de Conjecturas

A elaboração e refutação de conjecturas se mostraram presentes durante vários momentos das atividades realizadas pelas alunas participantes, corroborando a ideia proposta por Michel de Villiers. De acordo com Carvalho (2013), quando os estudantes articulam os resultados de medições e cálculos com a mudança dinâmica destes elementos na tela do computador, eles se engajam numa atividade de observação sistemática que converge, em muitas ocasiões, para a percepção de invariâncias. São estas invariâncias que dão origem às conjecturas.

Segundo Polya (1990, p. 68) conjectura é "uma descrição simples de fatos dentro dos limites da nossa experiência material e certa esperança de que essa descrição se possa aplicar além dos limites da nossa experiência material". Elaborar uma conjectura é observar fatos relevantes, examiná-los e compará-los, em busca de algum tipo de padrão. Se uma conjectura é refutada, significa que ela não pode ser verdadeira. A refutação é definitiva, a aceitação é provisória (MACHADO; SANTOS, 2011).

A história da matemática está repleta de exemplos em que conjecturas eram feitas com base na intuição, medição, construção geométrica ou investigação numérica. Um exemplo é a Hipótese de Riemann, que foi descoberta essencialmente através da indução e que, atualmente, é usada constantemente na Teoria dos Números para descobrir novos resultados (DE VILLIERS, 2004). Esse tipo de exemplo histórico mostra que matemáticos, às vezes, na ausência de provas rigorosas, aceitam conjecturas indutivamente confirmadas como teoremas, principalmente se o campo de pesquisa em questão for importante (HANNA, 1983).

A matemática experimental desempenha um importante papel na investigação de resultados e foi potencializada com a chegada do computador, alcançando novas dimensões.

A chegada do computador moderno, uma poderosa ferramenta para exploração experimental, tem, nas últimas décadas, revolucionado a pesquisa matemática em várias áreas, resultando em novos e excitantes resultados. De fato, pode-se dizer que o computador se tornou uma ferramenta indispensável para elaborar conjecturas e explorar relações complicadas e abstratas na matemática (DE VILLIERS, 2004, p. 400, tradução nossa).²⁶

Como ressaltado por De Villiers (2004), o computador, ou em particular o uso de *software*, possui papel importante na elaboração de conjecturas. Tal fato foi identificado durante a produção de dados dessa pesquisa, no episódio intitulado "Relevância das Hipóteses". Esse episódio se refere ao Teorema do Valor Intermediário.

Patrícia e Gislaine discutem se é sempre possível encontrar um elemento D no intervalo (a, b) , do domínio, tal que $f(D) = d$, conforme as alunas construíram no *applet*. Inicialmente, Gislaine faz uma primeira conjectura, como podemos observar abaixo.

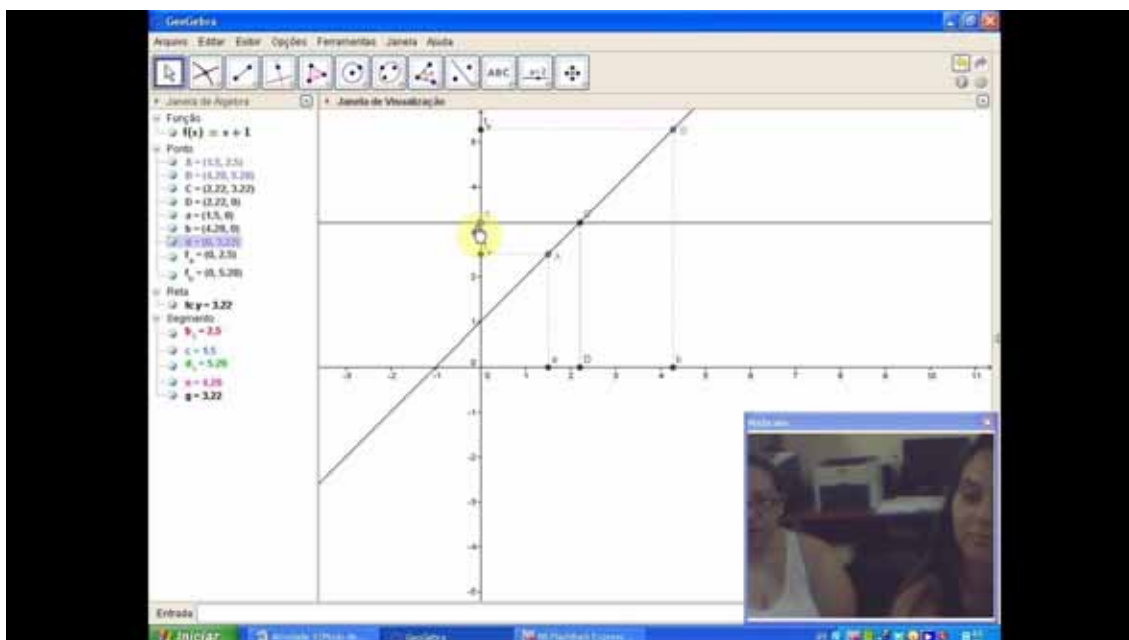
Gislaine: Estou pensando se é sempre possível encontrar esse "D" aqui. Se isso não está acontecendo só porquê pegamos a função identidade.

Patrícia: Eu estava pensando a mesma coisa... Será que dá certo se a função fosse diferente? Põe uma outra função, sei lá, $f(x) = x + 1$ (fig. 43).

²⁶ The arrival of the modern computer, as an extremely powerful tool for experimental exploration, has, in the past few decades, also revolutionized mathematical research in several areas, resulting in many new and exciting results. Indeed, one could say that the computer has become an indispensable tool for making conjectures and exploring complicated, abstract relationships in modern mathematics.

Gislaine questiona se tal resultado é válido devido ao fato de terem utilizado a função identidade como exemplo. Para investigar esse fato, Patrícia sugere que a função seja trocada e como exemplo indica $f(x) = x + 1$.

Figura 51 - Investigando a função $f(x) = x + 1$



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Após o surgimento dessa conjectura, as alunas retornam ao GeoGebra e alteram a função (fig. 51). Com esse novo exemplo, elas concluem que nesse novo caso também é possível encontrar um $D \in (a, b)$, ou seja, a ideia inicial de Gislaine é refutada.

Patrícia: Dá pra achar nessa função também!

Gislaine: Será que é por ser uma reta?

Patrícia: Desenha alguma função diferente.

Gislaine: Pode ser a $f(x) = x^3$?

Patrícia: Pode... Vamos ver.

As alunas-com-geogebra, então, elaboram uma nova conjectura. Gislaine questiona se o resultado seria sempre possível pelo fato de estarem trabalhando com retas. A dupla, com o intuito de investigar essa questão, modifica a função para $f(x) = x^3$.

Esse "retorno" ao *software* nos dá indícios que as alunas confiam no que ele indica. Simulando novamente, Patrícia e Gislaine concordam que a conjectura sobre retas também não é válida, pois no caso em que $f(x) = x^3$ também é possível encontrar um D no domínio.

Nota-se que as alunas-com-geogebra, a partir da experimentação-com-tecnologia, elaboram questionamentos e os investigam imediatamente, obtendo um *feedback* rápido do *software*. De Villiers (2004) defende que para elaborar conjecturas deve haver uma mudança na posição do aluno.

O ponto central de fazer novas conjecturas está no fato de buscar e de não ter medo de perguntar "E se...?" de diferentes perspectivas; em outras palavras, de ser um bom *questionador* (...). Esse é um importante hábito que devemos nos esforçar ativamente para incentivar em nossos alunos em todos os níveis (DE VILLIERS, 2004, p. 401, tradução nossa).²⁷

O autor defende que é papel do professor incentivar os alunos a questionar. Acredito que o uso da tecnologia sugere tal possibilidade. Um ambiente de investigação com tecnologia, no qual o professor não tem controle total sobre as atividades, pode deixar os alunos mais confortáveis e incentivá-los a questionar.

Ainda no mesmo episódio, Patrícia e Gislaine elaboram uma última conjectura, como pode ser observado no excerto a seguir.

Patrícia: Será que é por causa da continuidade?

Gislaine: Ah, não sei... Por que seria um problema?

Patrícia: Não sei Gi, mas se tiver um buraco, aí não vou conseguir pegar ninguém.

Gislaine: Mas se tiver buraco, aí a função não vai estar definida lá.

Patrícia: Ah, não sei.

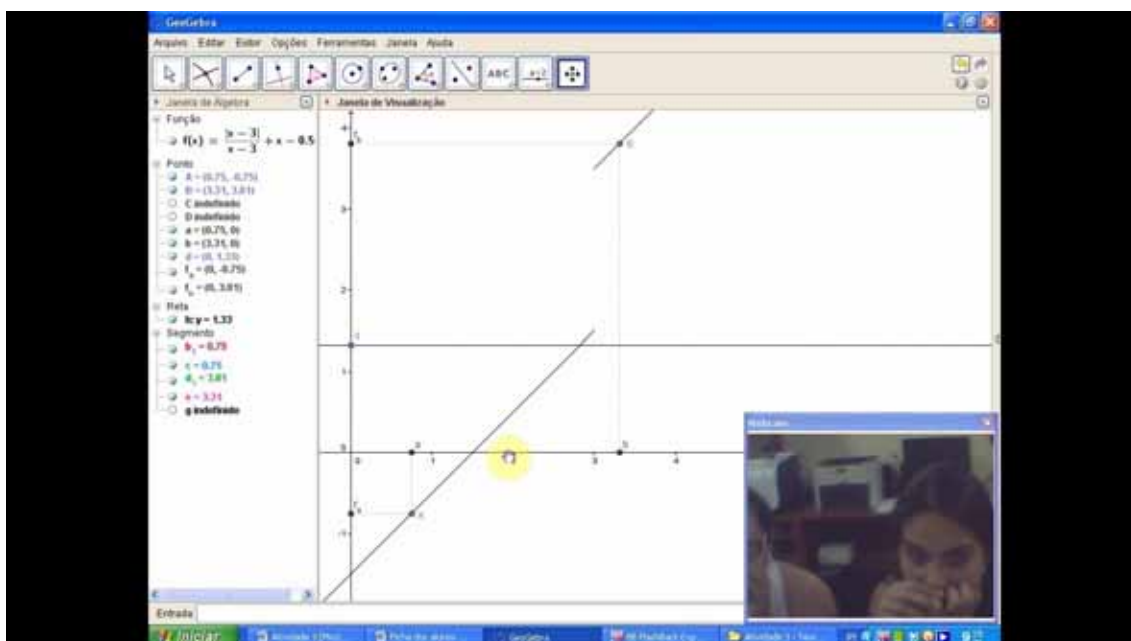
Mais uma vez a dupla elabora uma conjectura. Nesse momento as alunas questionam se a validade do resultado deve-se à continuidade das funções experimentadas. Para investigar essa nova situação as alunas utilizam a função descontínua $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} + x - 0.5$.

²⁷ At the heart of making such new conjectures lies the ability to look for and be unafraid to ask 'what if ...?' questions from many different perspectives; in other words, to become a good *problem poser* (...) This is an important habit of mind we should actively strive to encourage in our students at all levels.

Gislaine: Ah, entendi o que você estava dizendo [manipulando o "d" no GeoGebra]. Nesse caso aqui, nem sempre a gente vai conseguir "um carinha" para ter como imagem o "d".

Patrícia: É! A continuidade é importante.

Gislaine: Não é só pra retas ! Sendo contínua já basta.



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Apesar de não ter sido feita uma demonstração formal para o resultado, a partir da experimentação, as alunas-com-geogebra chegaram à conclusão de que para o resultado ser válido é relevante que a função seja contínua. Já quanto às funções descontínuas, como as alunas encontraram um contraexemplo, foi o suficiente para refutar nessa situação.

Esses exemplos corroboram às ideias de De Villiers (2003, 2004, 2010) acerca de um dos papéis da experimentação-com-tecnologia, elaborar e refutar conjecturas. Muitos pesquisadores já discutiram sobre as potencialidades dos *software* para esse papel. Dentre eles, ressaltamos Hoyles (2012), que afirma que

As tecnologias digitais podem fornecer ferramentas que são dinâmicas, gráficas e interativas. Mais do que isto, elas podem dar suporte a processos de criação e exploração de conjecturas, uma vez que elas oferecem ao

estudante a possibilidade de transitar entre o dinâmico e o estático, o que dá aos aprendizes um controle reflexivo (HOYLES, 2012, p. 4).

O uso da tecnologia permitiu que fossem elaboradas e refutadas algumas conjecturas, como as apresentadas acima. Mais do que isso, ela permitiu uma discussão e reflexão por parte das alunas quanto ao resultado investigado. Na próxima seção, apresentarei como a visualização se mostrou importante na compreensão das ideias matemáticas a partir da experimentação-com-tecnologia.

5.2. A Visualização e a Compreensão de Ideias Matemáticas

O segundo tema diz respeito ao papel da visualização na compreensão e no convencimento de ideias matemáticas. Segundo Latour (1990), a visualização é essencial para a ciência e para a tecnologia, e comumente usada convencer as pessoas sobre a veracidade de alguma explicação. No âmbito da educação matemática a visualização possui papel semelhante.

Adicionar visualização no contexto da educação matemática, além de promover a intuição e o entendimento, possibilita uma maior abrangência da cobertura em assuntos matemáticos, permitindo que os estudantes não somente aprendam matemática, mas também se tornem capazes de construir sua própria matemática (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012, p.34).

Dessa forma, nessa seção apresentarei e analisarei dados provenientes dos experimentos de ensino que deem indícios de que a visualização assumiu papel importante para a compreensão e o convencimento de alguns conceitos e/ou ideias matemáticas pelo coletivo alunas-com-geogebra.

De acordo com o Dicionário Aurélio (2004), a compreensão é a faculdade do perceber, percepção. É um conjunto das características gerais que formam um conceito e que são os atributos dos objetos designados por um termo. De Villiers (2004) afirma que a experimentação e a validação de resultados já provados anteriormente podem, às vezes, propiciar novas perspectivas e uma compreensão mais profunda de conceitos e definições. O autor ainda reforça que a experimentação nessa vertente é muito usada por matemáticos.

De fato, é prática comum entre os matemáticos, enquanto leem algum artigo de outro matemático, observar casos especiais e particulares para ajudá-los a

obter uma melhor compreensão, não só dos resultados, assim como das demonstrações dos mesmos (DE VILLIERS, 2004, p.409, tradução nossa).²⁸

Se, até mesmo no fazer matemática, a experimentação está presente, por que não inseri-la no cotidiano dos alunos? De Villiers (2003, 2004) defende que testes podem, às vezes, ajudar-nos a definir nossos conceitos, a priori intuitivos, mais rigorosamente, podendo levar os estudantes a novas investigações, até então desconhecidas.

Polya (1968) discorre que podemos testar um resultado já formulado, ou uma demonstração já feita a partir de casos particulares, a fim de compreender o que o resultado em questão nos traz. Essa situação pode ser observada no diálogo a seguir, retirado do episódio "Faixa Poligonal".

Adrielle: Ah, esse polígono mostra pra gente que quando o ponto estiver dentro dele, quer dizer que a desigualdade é válida, não é?

Karen: Não entendi... Deixa eu mexer.

Adrielle: Vai indo com o n_0 ... Repara no que está aparecendo na tela... Para o $n_0 = 23$ o ponto está ficando quase dentro do polígono.

Karen: Se eu mudar meu n_0 , aí o ponto em que $n_0 = 24$ vai estar dentro do polígono?

Adrielle: Olhando não...

Karen: Tem que dar *zoom*...

Adrielle: É oh... O $n_0 = 23$, tá na fronteira... Mas o $n_0 = 24$ já está dentro da faixa!

Karen: É o que fala a definição né, dado um valor *épsilon*, vai ter um n_0 , e os pontos da sequência vão estar dentro do polígono...

Adrielle: E conforme eu aumento o *épsilon*, aumenta o meu polígono.

Karen: Ah, agora tudo faz sentido.

É possível observar no excerto acima que as alunas, a partir da Experimentação-com-GeoGebra e da visualização (utilização do *zoom*), compreenderam a definição de convergência de sequências. Elas utilizaram uma faixa poligonal como sendo o raio de convergência da sequência e, a partir de simulações, notaram o que acontecia conforme se alteravam os valores do ϵ e do n_0 . Quanto ao uso das manipulações com o tecnologias, Rieber

²⁸ Indeed, it is common practice among mathematicians, while reading someone else's mathematical article, to look at special or limiting cases to help them unpack and better understand not only the results but also the proofs.

(1990) defende que usar animações interativas pode ser interessante na medida em que os estudantes têm a possibilidade de controlar seu aprendizado manipulando a tecnologia em questão.

No trecho abaixo, as alunas utilizaram uma ferramenta do GeoGebra para confirmar a ideia de convergência. Adriele, usando a noção de limite, afirma que a sequência $x_n = \frac{7}{n} + 1$ converge para um. Karen questiona a amiga dizendo que pela visualização esse fato pode não ser verdade. Adriele, então, utiliza a ferramenta *malha* para mostrar a Karen que sua fala está correta. Essa

Lucas: O que vocês podem falar sobre essa sequência [$x_n = \frac{7}{n} + 1$]?

Adriele: Se aplicarmos o limite, a sequência vai pra um.

Karen: Mas olhando, parece que encosta no eixo x! Parece que vai pra zero.

Adriele: Parece que encosta, mas o ponto está muito grande.

Posso por aquele negócio... A malha, só pra eu ver?

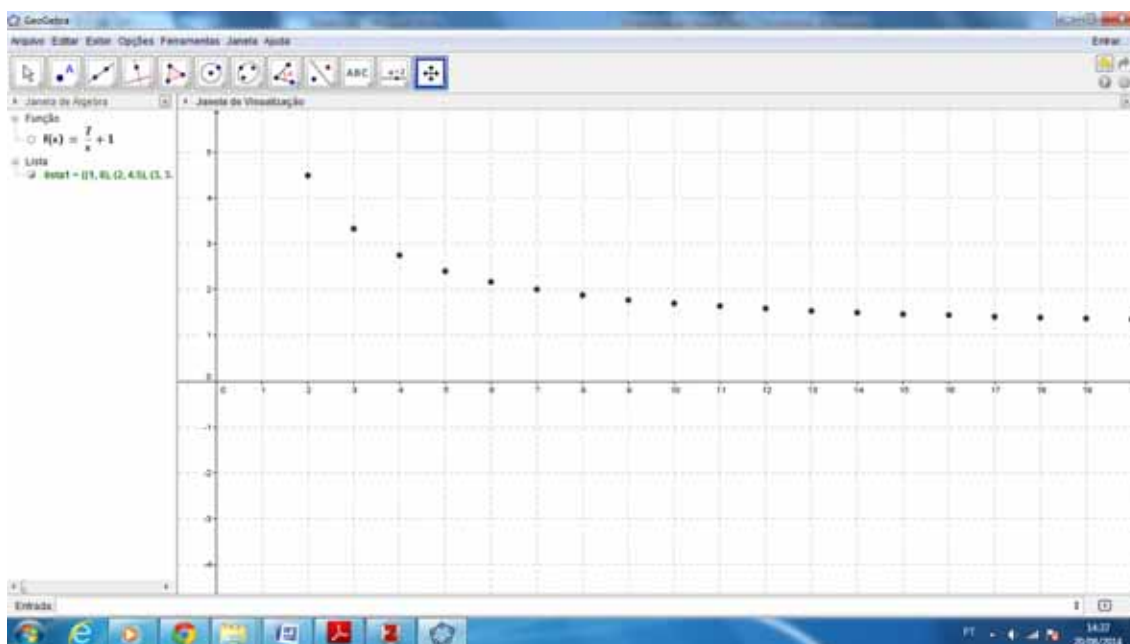
Lucas: Claro...

Adriele: Oh, ele está chegando no um. Ele não desce da linha do um (fig. 53).

Karen: Ah, verdade... É que olhando daquele jeito, parece que é no zero. O negócio é o *zoom*.

Adriele: O negócio é o *zoom* e também colocar uma malha pra termos uma direção... Parece que está no zero, mas não está... É só dar *zoom* que resolve... Quanto mais eu aumento o intervalo, dando *zoom*, ai melhor eu vejo pra qual número está indo...

Figura 53 - Malha



Fonte: Dados da Pesquisa (2013)

Nesse exemplo citado acima é possível perceber que, a priori, a visualização confundiu Karen, fazendo-a pensar que talvez o limite da função pudesse ser zero. Entretanto, Adrielle utiliza a *malha* e, a partir desta, Karen visualiza e se convence que, de fato, o limite é um, assim como Adrielle havia dito de início. Essa utilização de um método visual é interessante e está de acordo com Borba e Villarreal (2005), quando estes dizem que as abordagens visuais constituem uma alternativa para acessar o conhecimento matemático.

Durante a entrevista, perguntei para as alunas o que elas pensavam sobre a atividade 1. No trecho abaixo seguem as respostas de Gislaíne e Patrícia.

Lucas: O que vocês acharam da atividade?

Gislaíne: Muito interessante. Eu gosto de visualizar as coisas! Por exemplo, espaços topológicos... A topologia da caixa que eu não sei... Eu fico imaginando uma caixa, mas não é bem uma caixa... Eu preciso enxergar.

Patrícia: Eu também... Eu prefiro sempre visualizar as coisas... Eu sempre peço pro professor: "Professor, me mostra isso desenhando pra eu poder entender". Foi assim com a derivada, com a integral... Se eu não visualizo eu não entendo. Eu entendi a convergência por esse desenho [faixa poligonal].

A dupla deixa claro a importância da visualização para a aprendizagem. As estudantes afirmam que só conseguem compreender os conceitos estudados se houver uma abordagem visual dos mesmos. Borba e Villarreal (2005, p. 96) defendem que "a compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e a representação visual pode transformar o entendimento".

O uso da visualização é algo fortemente defendido no ensino e na aprendizagem, como a literatura do capítulo 2 nos indica. Tall (1991; 1993) afirma que negar a importância da visualização é negar as raízes da Matemática, já que muitas ideias importantes surgiram a partir dela. As atividades propostas nessas pesquisas têm, como um de seus objetivos, proporcionar esse olhar geométrico dos conceitos da Análise, assim como ocorria nos estudos de Euler.

Na seção que segue, apresentarei algumas questões elencadas pelas alunas, contudo não diretamente ligadas aos conceitos da Análise. Julgo essas discussões interessantes, pois provavelmente são resultados do cenário computacional utilizado nas atividades.

5.3. Estilo de Comunicação

Este último tema emergente possui uma característica distinta dos outros anteriormente discutidos. Esse papel assumido pelo *software* não é discutido nos trabalhos de De Villiers (2003, 2004, 2010), sendo, então, uma nova dimensão de suas pesquisas.

Analisando os dados produzidos pelo coletivo pensante alunas-com-geogebra, pude perceber que o *software* em questão não assumiu apenas papéis relacionados aos conceitos investigados. Houve momentos nos quais discussões emergiram e que não possuíam relação direta com os tópicos matemáticos investigados.

Borba (2005) chama atenção para a mudança qualitativa nas discussões ocorridas em ambientes onde a tecnologia está inserida e defende que as mídias são primordiais nos processos de comunicação. O autor afirma que a tecnologia não é a responsável pela existência da comunicação, contudo sua presença altera qualitativamente o processo comunicativo entre os indivíduos.

A seguir, apresentarei dois exemplos de diálogos nos quais as alunas discutem sobre questões que vão além dos conceitos investigados aqui nesta pesquisa, levando-as a refletirem sobre seus papéis e posicionamentos na sala de aula. No diálogo abaixo, por exemplo, chamo a atenção para o poder irrefutável da matemática. Quando questionei a dupla sobre o fato de aceitarem um resultado sem o compreenderem, Adriele diz que "A gente pega e aceita..."

Acata isso". Essa declaração da aluna me faz pensar que nos cursos de formação é muito comum aceitarmos o que os professores falam e não somos acostumados a questionar.

Adrielle: Mas pelo que eu lembro, todo mundo passa a definição pra gente pegando os "carinhas" da imagem.

Lucas: Ta. Todo mundo passa. Mas você sabe o porquê disso?

Adrielle: Não sei. Eu nunca perguntei.

Lucas: Você sempre aceitou?

Adrielle: É... A gente pega e aceita... Acata isso.

Outro exemplo em que discussões críticas sugiram pode ser identificado em um trecho de uma conversa entre as alunas Karen e Adrielle. No momento deste diálogo, questiono as alunas o fato de utilizarem resultados que não compreendem sem ao menos perguntar para o professor o porquê de tal validade.

Lucas: Por que vocês acham que isso nunca incomodou vocês?

Adrielle: Porque nunca questionaram a gente...

Karen: Ah não, Adrielle. Não vem defender só a gente... A gente nunca foi questionada, e a pessoa que ensinou pra gente, a gente também nunca questionou. A gente chegou numa atividade como essa e está sendo questionada pelo Mazzi e nem ta sabendo responder... Por quê? Por falta de questionamento anterior.

Adrielle: É a gente também não perguntou!

Karen: É o que eu estou falando... A gente nunca perguntou pra quem tava ensinando... E a gente estudou pras provas, já passou por Cálculo e Análise I e não ta sabendo... Não nos questionamos pra resolver os exercícios... É uma falha nossa também!

No excerto acima podemos perceber que Adrielle tenta, em um primeiro momento, "culpar" os professores pela falta de entendimento dos conteúdos. Contudo, Karen não aceita a justificativa e destaca que esta é uma falha delas, visto que já passaram por várias disciplinas, realizaram provas e mesmo assim não conseguem responder aos meus questionamentos. Adrielle concorda e assume também a falha como aluna. Nesses trechos podemos perceber uma mudança no posicionamento das alunas, indo em direção das ideias de

Borba (2005, p. 73), que afirma que "o estilo da comunicação, no qual o professor está no centro foi substituído por um no qual os alunos lideraram os argumentos matemáticos"

Considero que essa mudança foi possível graças ao contexto diferenciado, ou seja, devido ao ambiente utilizado ter sido fora da sala de aula; devido também à presença do GeoGebra e às atividades propostas . Faço tal afirmação baseado na frase de Karen "*A gente chegou numa atividade como essa e está sendo questionada pelo Mazzi e nem ta sabendo responder*". As atividades de experimentação-com-tecnologia possibilitaram que as alunas refletissem e discutissem sobre suas próprias atitudes em sala de aula.

No próximo capítulo apresentarei as considerações finais, onde retomarei alguns aspectos importantes da pesquisa e encerrarei a mesma com algumas inquietações que surgiram durante essa jornada.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo de encerramento faço uma breve síntese da pesquisa, retomando pontos relevantes da mesma e exponho os resultados obtidos. Na sequência, apresento alguns exercícios que comumente aparecem em provas da disciplina Análise e relaciono o conhecimento necessário para resolver tais questões com os dados produzidos nesse trabalho. A seguir, aponto as principais dificuldades encontradas durante a elaboração e o desenvolvimento desse estudo. E, por fim, concluo a dissertação com algumas sugestões para pesquisas futuras. Tais ideias foram inquietações que emergiram durante esse trabalho e que não puderam ser discutidas por não fazerem parte do objetivo principal do mesmo.

6.1. Uma síntese da pesquisa

Essa pesquisa consistiu em analisar como o coletivo pensante estudantes-com-geogebra revisitaram alguns conceitos da Análise Real, disciplina comum nos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, além de identificar o papel do *software* GeoGebra nessa experiência.

A Análise Matemática, uma das grandes áreas da Matemática, é relativamente nova e se desenvolveu a partir do Cálculo Diferencial de Newton e Leibniz, no século XVII. Suas ideias surgiram através de problemas da realidade como, por exemplo, o problema da propagação de calor em materiais. Como não havia uma teoria matemática capaz de resolver esse tipo de problema, matemáticos refinaram conceitos já existentes, e desenvolveram novos, de modo a se obter uma teoria bem definida capaz de solucionar alguns dos problemas físicos da época.

Uma vez desenvolvida e identificada sua importância, a Análise chegou nos cursos de formação inicial de professores de Matemática. Esse movimento fez com que pesquisadores se questionassem sobre alguns aspectos concernentes ao ensino e a aprendizagem da mesma. Visto que essa área na Matemática é bem recente, o mesmo ocorre na Educação Matemática.

No capítulo dois é possível encontrar algumas pesquisas que visavam investigar a Análise no âmbito da Educação Matemática. Tais referências nos dão indícios de que a Análise é uma disciplina considerada problemática pelos alunos e que, aos olhos de professores do Ensino Básico, pouca relação tem com a prática docente. Nessa busca por referenciais, identifiquei que poucas são as sugestões de mudanças no ensino da Análise.

Direcionando o foco para as tecnologias digitais, tema de meu interesse, encontrei alguns trabalhos que sugerem formas de utilizar alguns tipos de *software* como o Maple[®] e o

GeoGebra na investigação de conteúdos da Análise, entretanto, em seus trabalhos, os autores não apresentaram nenhuma experiência com alunos e sim, apenas sugestões de utilização dos *software*. Dado que o GeoGebra é um programa livre e de fácil acesso, optei por utilizá-lo para elaborar atividades e investigar como alunos de um curso de Licenciatura em Matemática experimentam alguns conceitos trabalhados na disciplina de Análise Real. A fim de alcançar esse objetivo, a pergunta norteadora que me guiou durante esse processo foi:

Quais os papéis do software GeoGebra na revisitação de alguns conceitos da disciplina Análise Real?

Na tentativa de responder tal pergunta diretriz, optei por utilizar a Metodologia dos Experimentos de Ensino, de modo a identificar como os participantes desenvolveriam os conceitos matemáticos envolvido nas atividades. Para a realização dos experimentos, elenquei os seguintes conteúdos: convergência de sequências, sequências monótonas, sequências limitadas e o Teorema do Valor Intermediário. Definido os conceitos que seriam abordados, elaborei 3 atividades a serem realizadas com o GeoGebra.

Uma vez preparadas as atividades, convidei alguns alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UNESP - Campus Rio Claro para participar da pesquisa. Quatro alunas aceitaram o convite e realizaram os experimentos. Toda a produção de dados ocorreu no Laboratório de Informática e Educação Matemática (LIEM), localizado nesse mesmo campus. Os experimentos foram filmados com a ajuda de uma câmera fixa, além da gravação proporcionada pelo *software Blueberry*.

Terminada essa fase de produção de dados, analisei o material que tinha em mãos, buscando algumas convergências que pudessem me levar à possíveis respostas para meu problema norteador. Os resultados indicaram que a tecnologia em questão possibilitou discussões sobre os conceitos abordados nas atividades e, mais do que isso, proporcionou um olhar diferenciado para os mesmos.

A partir da análise dos dados, elenquei três respostas que lidam com dimensões distintas do problema de pesquisa. A primeira resposta foi o papel assumido pelo GeoGebra na elaboração e refutação de conjecturas. Essa função já foi defendida por De Villiers como um dos principais aspectos da experimentação-com-tecnologia. Considero esse tema relevante, visto que é a partir de conjecturas que as ideias matemáticas surgem. Como dito por Polya (1964), um raciocínio errado leva a um melhor raciocínio, sendo assim, a elaboração e refutação de conjecturas, como vimos no capítulo anterior, levaram as alunas a novas ideias sobre as hipóteses do Teorema do Valor Intermediário.

A segunda resposta apresentada diz respeito ao papel assumido pelo *software* na compreensão de ideias matemáticas a partir da visualização. Como podemos ver no capítulo cinco, as alunas-com-geogebra investigaram o conceito de convergência de sequências e, a partir da construção da faixa poligonal, compreenderam a relação entre os termos n_0 e ϵ , presentes na definição de convergência. A abordagem visual proporcionada pelo GeoGebra fez com que as alunas se convencessem de ideias e compreendessem conceitos. Essa atribuição de significados que o *software* possibilitou é muito importante na Matemática. Concordo com Stewart (1996, p. 2) que “Matemática não trata de símbolos e de cálculos. Matemática trata de ideias. Em particular, das maneiras pelas quais diferentes ideias se relacionam (...) Acima de tudo, Matemática possui significado”.

A última resposta elencada se referia à mudança na postura dos alunos quanto a seus papéis nas aulas de Matemática. A partir das atividades de experimentação-com-tecnologia, o estilo de comunicação entre as duplas foi alterado qualitativamente. Surgiram momentos em que as alunas questionaram sobre problemas em suas formações, identificando falhas tanto no ensino por parte dos professores, quanto na aprendizagem por parte delas. Um papel mais ativo surgiu dentre as estudantes. Essas reflexões levantadas fizeram com que eu refletisse na importância da tecnologia para que questões, a princípio sem relação com os conceitos matemáticos, fossem discutidas.

Pesquisar sobre a utilização de tecnologias no ensino da Matemática não é uma tendência nova, contudo é relativamente novo se tratando desse uso na disciplina de Análise. Pode-se até considerar contraintuitivo o uso de tecnologias em uma disciplina considerada tão rigorosa como esta, no entanto, se essa utilização indica uma possibilidade de melhor compreensão dos conceitos envolvidos nessa disciplina, defendo que esses usos devem se tornar cada vez mais frequentes.

6.2. Alunas-com-GeoGebra e testes formais

Uma informação que pode ter passado despercebido pelo leitor é o fato de as alunas participantes desta pesquisa já terem cursado as disciplinas de Cálculo e de Análise. Todas as estudantes tiveram dificuldades na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, tendo reprovado na mesma. Quanto à disciplina de Análise Real, todas obtiveram sucesso, sendo aprovadas na primeira vez que a cursaram.

No entanto, algo que me inquieta é o fato de que, mesmo tendo sido aprovadas, as alunas tiveram dificuldades em conceitos que já haviam sido discutidos e trabalhados em

disciplinas anteriores. Apresento, na sequência, algumas questões que comumente fazem parte do rol de exercícios de provas de Análise, referentes aos conceitos aqui trabalhados.

1. *Mostre que toda sequência monótona limitada é crescente.*

2. *Se $0 < a < 1$, a sequência cujo n ésimo termo é $x_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$ é crescente e limitada. Prove que x_n converge.*

3. *Sejam $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$. Se $a < b$, prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < y_n$.*

4. *Seja $\lim x_n = 0$. Para cada n , ponha $y_n = \min\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$. Prove que y_n converge para zero.*

5. *Enuncie e prova o Teorema do Valor Intermediário.*

6. *Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua num intervalo I . Então $f(I)$ é um intervalo.*

7. *Seja x_n uma sequência não crescente tal que o conjunto $\{x_n\}$ tenha cota inferior. Demonstre que x_n é convergente e que seu limite é o ínfimo do conjunto $\{x_n\}$.*

8. *Seja $0 \leq \lambda < 1$. Suponhamos que a sequência x_n seja tal que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda|x_{n+1} - x_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que x_n converge.*

Para solucionar as questões acima, utiliza-se algumas das noções e dos conhecimentos aqui discutidos a partir da noção experimental-com-tecnologia. Desse modo, as participantes, supostamente, já responderam tais exercícios, dado que foram consideradas aptas na disciplina. Sendo assim, não seria esperado que elas soubessem discutir tais conteúdos?

Nessa direção, Borba e Villarreal (2005) afirmam que saber como e quando utilizar uma fórmula, por exemplo, não implica em compreensão. Os autores defendem que deve ser

privilegiado o entendimento das atividades do que simplesmente seus produtos finais. A partir dos dados apresentados e de minha própria experiência como aluno de Análise, é possível notar indícios de que o curso concluído pode não ter sanado as ideias básicas dessa área tão importante que é a Análise Matemática. Essas reflexões me levam a concluir que, de fato, as disciplinas ofertadas para a Licenciatura em Matemática geralmente são repletas de exercícios instrumentais, ou seja, prioriza-se a repetição de passos logicamente corretos, em detrimento da compreensão das noções.

Defendo uma Matemática que faça sentido, que não seja meramente mecânica. Uma Matemática em que seja necessário compreender suas ideias principais e tentar relacioná-las com os problemas existentes. Resolver questões simplesmente pelo fato de resolver, faz com que a Matemática se torne uma ciência vazia, sem sentido e distante da realidade dos alunos.

Nessa seção expus alguns inquietamentos sobre os tradicionais testes aplicados como forma avaliativa. Discuti a não existência de uma correlação entre resolver um exercício e compreender as ideias envolvidas no mesmo. Na sequência, apresento duas dificuldades que encontrei durante a elaboração e o desenvolvimento desse trabalho, com o objetivo de auxiliar a futuros pesquisadores que tenham interesse em seguir na direção aqui apresentada.

6.3. Dificuldades da Pesquisa

Durante a realização dessa pesquisa era previsto que surgissem algumas dificuldades. Nesse sentido, a realização de pilotos foi fundamental para tentar identificar o maior número possível dessas dificuldades e tentar solucioná-las antes mesmo que ocorressem. Nessa seção exponho os principais problemas que enfrentei ao desenvolver esta pesquisa, visando auxiliar futuros estudos ou pesquisas que porventura possam se basear nesse trabalho.

Talvez a primeira dificuldade encontrada tenha surgido antes mesmo da pesquisa iniciar, sendo essa a elaboração das atividades. Visto que não há na literatura muitas pesquisas nessa direção, elaborar atividades com o GeoGebra se tornou uma tarefa árdua. Criar atividades, as quais pudessem me levar ao objetivo do trabalho foi realmente uma experiência complicada. Acredito que a dificuldade tenha sido em pensar em problemas que teriam uma significação diferente daqueles resolvidos com a mídia lápis-papel. Para tal, busquei em sites como o GeoGebraTube²⁹ alguns exemplos de *applet* sobre conceitos de Cálculo que me inspirassem a desenvolver algo em Análise. Após oito meses de trabalho, as atividades foram elaboradas.

²⁹Disponível em: <www.geogebraTube.org>. Acesso em: 10 out. 2014.

Uma segunda dificuldade que identifiquei foi devido aos computadores utilizados. Mesmo sendo máquinas de alta qualidade, o fato de utilizar os *software* GeoGebra e *Blueberry*, simultaneamente, fez com que houvesse pequenos atrasos no tempo de resposta dos computadores. Era comum ter que esperar alguns minutos até que o GeoGebra respondesse à determinados comandos. Em um desses momentos, houve interrupção do desenvolvimento do trabalho, sendo necessário uma espera de 10 minutos para que a máquina se estabilizasse.

As dificuldades aqui expostas foram responsáveis por pequenos atrasos no desenvolvimento da pesquisa. Julgo importante apresentá-las para que fique claro ao leitor que nem sempre tudo o que planejamos acontece da maneira como imaginamos. No entanto, quero mencionar que mesmo tendo havido problemas durante o percurso, acredito que eles contribuíram para minha formação como pesquisador, influenciando a pesquisa como um todo.

6.4. Pesquisas Futuras

Nessa última seção apresento algumas ideias e pensamentos que emergiram durante esse trabalho. Essas ideias não foram abordadas nessa dissertação pois não tinham relação direta com o objetivo principal da pesquisa. Entretanto, elas permearam todo o processo aqui apresentado.

A revisão de literatura, apresentada no capítulo dois, indica que há um número relativamente pequeno de pesquisas que envolvam a Análise Matemática no contexto da Educação Matemática. Acredito que um dos motivos da existência dessa escassez pode estar relacionada com o fato de que a Análise é uma área relativamente nova. Alguns pesquisadores sugerem que a falta de pesquisas se dá pela demanda da disciplina. Visto que a Análise Matemática é uma disciplina, exclusivamente, dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, outros autores acabam direcionando seus olhares para conteúdos e disciplinas mais universais, como a Álgebra e o Cálculo. Independente da justificativa, pesquisas nessa linha são necessárias e esta dissertação é uma contribuição nessa direção.

Este trabalho analisou o coletivo pensante alunos-com-geogebra a fim de identificar os papéis que a tecnologia assume em discussões de conteúdos da Análise Real em um cenário diferente da sala de aula tradicional. Entretanto, durante a elaboração e o desenvolvimento desta pesquisa, algumas ideias e perguntas surgiram, as quais podem ser indicações para futuras pesquisas.

Como seria uma disciplina de Análise na qual todos os conceitos possuíssem uma abordagem de experimentação-com-tecnologia? Como seria, por exemplo, uma abordagem com tecnologia com conceitos como convergência de séries, funções lipschitz e continuidade uniforme? Será que é possível desenvolver demonstrações de resultados da Análise com tecnologias? Será que o uso da tecnologia poderia diminuir a alta taxa de reprovação existente nessa disciplina?

Além de ideias relacionadas ao uso da tecnologia, questiono-me, também, se uma abordagem histórica e contextualizada da Análise não seria um caminho para dar significado aos conceitos apresentados na disciplina. Acredito que pesquisas nessa linha são interessantes na medida que propõem uma nova maneira de se ensinar essa disciplina tão problemática.

Essas são algumas perguntas que surgiram durante essa caminhada e que me motivam a continuar pesquisando nessa direção. Espero que esse trabalho incentive novos pesquisadores a enfrentarem a dificuldade da Análise Real e que novos estudos sejam realizados a fim de mudar a realidade da disciplina.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, F. R. V. Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o GeoGebra. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, v. 1, p. 165–179, 2012.

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. Interpretação Geométrica de definições e teoremas: o caso da análise real. In: CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA, 1, 2012a, Montevidéu. *Anais...* Montevidéu: Editora Universitária, 2012. p. 322–329.

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. Interpretação geométrica para a Regra de L'Hopital com o auxílio do GeoGebra. In: CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA, 1, 2012b, Montevidéu. *Anais...* Montevidéu: Editora Universitária, 2012. p. 330–337.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. In: Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2003.

ARZARELLO, F. et al. Experimental Approaches to Theoretical Thinking: artefacts and proofs. In: HANNA, G.; DE VILLIERS, M. (Org.). *Proof and Proving in Mathematics Education*. New York: Springer, 2012. p. 97–137.

ÁVILA, G. O. Ensino do Cálculo e da Análise. *Revista Matemática Universitária*, v. 33, p. 83–95, 2002.

BARBOSA, S. M. *Tecnologias da Informação e Comunicação, Função Composta e Regra da Cadeia*. 2009. 199 f. Doutorado – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2009.

BARONI, R. L. S.; NASCIMENTO, V. M. *Um tratamento via medição para os números reais*. In: VI SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 2005, [S.l: s.n.], 2005.

BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. *Análise Matemática no Século XIX*. Campinas: Sbhmat, 2013.

BEN-CHAIM, D.; LAPPAN, G.; HOUANG, R. T. The role of visualization in the middle school mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, v. 11, p. 49–60, 1989.

BENEDETTI, F. C. *Funções*. Software Gráfico e Coletivos Pensantes. 2003. 316 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2003.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Portugal: Porto Editora, 1994.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Qualitative Research for Education: an introduction for theory and methods*. Boston: Allyn and Bacon, 1998.

BOLOGNEZI, R. A. L. *A Disciplina de Análise Matemática na Formação de Professores de Matemática para o Ensino Médio*. 2006. 109 f. Doutorado – Pontífica Universidade Católica, Curitiba, 2006.

BONAFINI, F. C. *Explorando conexões entre a matemática e a física com o uso da calculadora gráfica e do CBL*. 2004. 299 f. Mestrado – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2004.

BORBA, M. C. Dimensões da Educação Matemática a Distância. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004.

BORBA, M. C. Humans-with-Media: Transforming Communication in the Classroom. In: Chronaki; A. Christiansen, I. M. (Org.). *Challenging Perspectives on Mathematics Classroom Communication*. Estados Unidos: Information Age Publishing, 2005, v. 01, p. 51-78

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer, 2005. v. 39.

BORTOLOTTI, R. D. M. Afeto e cognição no contexto da disciplina de Análise real no curso de matemática. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. Recife: SBEM, 2009. p. 81–97.

BORTOLOTTI, R. D. M. *Emoções que emergem da prática avaliativa em Matemática*. 2003. 143 f. Mestrado – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2003.

BORTOLOTTI, R. D. M. O Comportamento Emocional e a Avaliação da Disciplina Análise Real: tecendo algumas considerações. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2006, Águas de Lindóia. *Anais...* Águas de Lindóia: SBEM, 2006. p. 1–14.

BORWEIN, P.; JORGENSON, L. Visual structures in number theory. *The American Mathematical Monthly*, v. 108, p. 897–910, 2001.

BOYER, C. *História da Matemática*. Tradução Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1996.

BRITTON, S.; HENDERSON, J. Issues and trends: a review of Delta conference papers from 1997 to 2011. In: LIGHTHOUSE DELTA, 2013, Australia. *Proceedings ...* Australia: Delta Conference, 2013. p. 50–58.

BRUNET, A. R. G.; LEIVAS, J. C. P.; LEYSER, M. Intuição, Visualização e Tecnologia no Ensino de Limites na Licenciatura em Matemática. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2009, Ijuí. *Anais...* Ijuí: Unijuí, 2009. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_15.pdf>.

BUSSE, A.; FERRI, R. B. Methodological reflections on a three-step-design combining observation, stimulated recall and interview. *ZDM*, v. 35, p. 257–264, 2003.

CARVALHO, C. C. O papel do computador no processo de formação de conjecturas e justificativas formais na matemática escolar. *Matter Revista Acadêmica da UNIBR*, v. 2, 2013.

COBB, P.; STEFFE, L. The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 14, p. 83–94, 1983.

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. p. 140.

DE VILLIERS, M. Experimentation and proof in mathematics. In: JAHNKE, H. B.; HANNA, G.; PULTE, H. (Org.). *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. Toronto: Springer, 2010. p. 205–221.

DE VILLIERS, M. The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, v. 24, p. 17–24, 1990.

DE VILLIERS, M. The value of experimentation in mathematics. In: NATIONAL CONGRESS OF AMESA, 9, 2003, Cape Town. *Anais...* Cape Town: University of the Western Cape, 2003. p. 174–185.

DE VILLIERS, M. The role and function of quasi-empirical Methods in Mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, p. 397–418, 2004.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. *O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens*. Tradução Sandra Regina Netz. Porto Alegre: Artmed, 2006.

DOMINGUES, H. A Demonstração ao Longo dos Séculos. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, v. 18, p. 55–67, 2002.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FLORES, C. R.; WAGNER, D. R.; BURATTO, I. C. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 14, p. 31–45, 2012.

GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Record, 2004.

HABRE, S. Visualization enhanced by technology in the learning of multivariable calculus. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, v. 8, p. 115–130, 1999.

HANNA, G. Proof, Explanation and Exploration: an overview. *Educational Studies In Mathematics*, v. 44, p. 4–23, 2000.

HANNA, G. *Rigorous proof in mathematics education*. Toronto: Oise Press, 1983.

HOYLES, C. Tackling the mathematics: potential and challenges for research in mathematics education. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2012, Petrópolis - RJ. *Anais...* Petrópolis - RJ: [s.n.], 2012. p. 1–11.

HSIEH, F. J.; HORNG, W. S.; SHY, H. Y. From Exploratory to Proof Production. *Proof and Proving in Mathematics Education*. New York: Springer, 2012. p. 279–304.

JAVARONI, S. L. *Abordagem Geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. 2007. 231 f. Doutorado – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2007.

KATZ, V. J. *A History of Mathematics: An Introduction*. 3. ed. Boston: Pearson, 2009.

LATOUR, B. Drawing things together. In: LYNCH, M.; WOOLGAR, S. (Org.). *Representation in scientific practice*. Cambridge: MIT Press, 1990.

LÉVY, P. *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. *Naturalistic Inquiry*. London: Sage Publications, 1985.

LINN, M. C. Technology and Science Education: starting points, research programs, and trends. *International Journal of Science Education*, v. 25, p. 727–758, 2003.

MACHADO, S.; SANTOS, L. A demonstração matemática no 8º ano no contexto de utilização do Geometer's Sketchpad. *Revista de Educação*, v. XVIII, p. 49–82, 2011.

MAZZI, L. C. A Distribuição Exponencial, Teoria da Confiabilidade e Aplicações. *Boletim de Iniciação Científica em Matemática*, v. 8, p. 23–27, 2011.

MAZZI, L. C.; SIQUEIRA, M. N.; BORBA, M. C. As possibilidades e limitações do uso da lousa digital na Educação Matemática. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 5, p. 07–18, 2012.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que Análise Real na Licenciatura? *Ze*, v. 23, p. 11–42, 2005.

NUNES, M. N. F. *Sequências Numéricas: um estudo da convergência através de atividades*. 2001. 126 f. Mestrado – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2001.

OLIMPIO JUNIOR, A. *Compreensões de conceitos de Cálculo Diferencial no primeiro ano de Matemática - uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática*. 2006. 273 f. Doutorado – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2006.

OTERO-GARCIA, S. C. Ensino de Análise: uma pesquisa do tipo estado do conhecimento. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2011, Re. *Anais...* Re: Universidade Federal de Pernambuco, 2011. p. 1–13.

OTERO-GARCIA, S. C.; CAMMAROTA, G. Análise Matemática e Afetividade: uma resenha de três trabalhos de Roberta D'Ângela Menduni Bortoloti. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, v. 27, p. 331–336, 2013.

PASQUINI, R. C. G. *Um Tratamento para os Números Reais via Medição de Segmentos*. 2007. 209 f. Doutorado – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2007.

PHILLIPS, L. M.; NORRIS, S. P.; MACNAB, J. S. *Visualization in Mathematics, Reading and Science Education*. [S.l.]: Springer, 2010.

POLYA, G. *Mathematics and Plausible Reasoning (Vol. I – Induction and analogy in mathematics)*. Princeton: Princeton University Press, 1990. v. I.

POLYA, G. *Mathematics and Plausible Reasoning (Vol. II - Patterns of Plausible Inference)*. Princeton: Princeton University Press, 1968. v. II.

PONTE, J. P. O interacionismo simbólico e a pesquisa sobre nossa própria prática. *Revista Pesquisa Qualitativa*, v. 1, p. 107–134, 2005.

POUPART, J. *et al. A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos*. Petrópolis: Vozes, 2010.

REID, D.; KNIPPING, C. *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching*. Canada: Sense Publishers, 2010.

REIS, F. S. *A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*. 2001. 212 f. Dou – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

RICHIT, A. *Aspectos conceituais e instrumentais do conhecimento da prática do professor de Cálculo Diferencial e Integral no contexto das tecnologias digitais*. 2010. 243 f. Dissertação – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2010.

RICHIT, A. et al. Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, v. 1, p. 90–99, 2012.

RIEBER, L. P. Animation in computer-based instruction. *Educational Technology Research and Development*, v. 38, p. 77–86, 1990.

ROBERT, A. L'Acquisition de La Notion de Convergence Des Suites Numeriques Dans L'Enseignement Superieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 3, p. 307–341, 1982.

ROQUE, T. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSA, M. V. F. C.; ARNOLDI, M. A. G. C. *A entrevista na pesquisa qualitativa: mecanismos para validação dos resultados*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

SCHEFFER, N. F. *Sensores, informática e o corpo: A noção de movimento no ensino fundamental*. 2001. 242 f. Doutorado – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2001.

SCUCUGLIA, R. *A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas*. 2006. 145 f. Mestrado – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2006.

STEFFE, L.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: underlying principles and essentials elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. (Org.). *Research design in mathematics and science education*. Hillsdale: Erlbaum, 2000. p. 267–307.

STEWART, I. *From Here to Infinity - A Guide to Today's Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 1996.

TALL, D. Intuition and rigor: the role of visualization in the Calculus. In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Org.). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington: Mathematical Association of America, 1991. p. 105–119.

TALL, D. Real Mathematics, rational computers and complex people. In: FIFTH ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON TECHNOLOGY IN COLLEGE MATHEMATICS TEACHING, 5, 1993, Addison-Wesley. *Anais...* Addison-Wesley: [s.n.], 1993. p. 243–258.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J. V. (Org.). *The concept of activity in soviet psychology*. New York: M. E. Sharpe. Inc, 1981. p. 256–278.

TREVISANI, F. M. *Estratégias de generalização de padrões matemáticos*. 2013. 113 f. Mestrado – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2013.

ZARAYCKI, P. From visualizing to proving. *Teaching Mathematics and its applications*, v. 23, p. 108–118, 2004.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. Editor’s Introduction: What is Mathematical Visualization? In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Org.). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington: Mathematical Association of America, 1991. p. 1–8.

APÊNDICE A – CONCEITOS MATEMÁTICOS

Apresentaremos nesse apêndice os conceitos matemáticos utilizados nessa dissertação. As definições e resultados que apresentarei a seguir foram retirados de Ávila (2006), Lima (2010) e Figueiredo (2011).

Definição 1: Uma sequência de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n , chamado o *enésimo termo* da sequência. É comum indicar uma sequência escrevendo, simplesmente, $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n) .

Exemplo 1: Um exemplo de sequência é dado pelos números pares $(x_n) = (2, 4, 6, 8, \dots)$ ou ainda, $(x_n) = 2n$.

Exemplo 2: Nem sempre o termo geral de uma sequência é dado por uma fórmula, como é o caso da sequência dos números primos.

$$(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots)$$

Como é bem sabido, não existe fórmula para o termo geral desta sequência, mas todos os seus termos estão perfeitamente determinados.

Definição 2: Uma sequência (x_n) diz-se *limitada superiormente* quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, diz-se que uma sequência (x_n) é *limitada inferiormente* quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, diz-se que a sequência (x_n) é *limitada* quando ela é limitada superior e inferiormente. Isto equivale a dizer que existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso a sequência não seja limitada, dizemos que ela é *ilimitada*.

Exemplo 3: Seja $(x_n) = (-1)^n$, ou seja, $(x_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ ou seja, (x_n) é limitada superiormente por 1 e inferiormente por -1. Logo, existe $k = 1$, tal que $|x_n| \leq k$.

Exemplo 4: Seja $(x_n) = 2n$, ou seja, $(x_n) = (2, 4, 6, 8, 10, \dots)$. Note que (x_n) é limitada inferiormente, contudo é ilimitada superiormente.

Definição 3: Uma sequência (x_n) chama-se *monótona* quando se tem $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ ou então $x_n \geq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. No primeiro caso diz-se que (x_n) é *monótona não decrescente* e, no segundo, que (x_n) é *monótona não crescente*. Se, mais

precisamente, tivermos $x_n < x_{n+1}$ (respectivamente $x_n > x_{n+1}$), diremos que a sequência (x_n) é *crescente* (respectivamente *decrecente*).

Exemplo 5: A sequência $(x_n) = 2n$ é monótona crescente.

Exemplo 6: A sequência $(x_n) = (1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, \dots)$ é monótona não-decrecente.

Definição 4: Seja $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ uma sequência de números reais. Dizemos que a sequência (x_n) *converge* para um número real L se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$,

$$|x_n - L| < \varepsilon.$$

Dizemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = L$ ou ainda que $x_n \rightarrow L$.

Em termos sugestivos, uma sequência (x_n) é convergente se, à medida que o índice n cresce, o elemento (x_n) vai se tornando arbitrariamente próximo de um certo número L , também chamado o *limite* da sequência. A proximidade entre (x_n) e L é medida pelo valor absoluto da diferença entre esses dois números, isto é, por $|x_n - L|$. Portanto, dizer que (x_n) vai se tornando arbitrariamente próximo de L significa dizer que $|x_n - L|$ torna-se inferior a qualquer número positivo ε , por menor que seja, desde que façamos o índice n suficientemente grande.

Exemplo 7: A sequência dada por $(x_n) = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ converge para 0. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que, para todo $n > n_0$, $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$. Basta tomar $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Neste caso, podemos dizer que

$$(x_n) \rightarrow 0.$$

Resultado 1: Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração: Seja $a = \lim x_n$. Tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - 1, a + 1)$. Sejam b o menor e c o maior elemento do conjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, a - 1, a + 1\}$. Todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[b, c]$, logo x_n é limitada.

Resultado 2: Toda sequência monótona limitada é convergente..

Demonstração: Seja (x_n) monótona, digamos não-decrescente, limitada. Escrevamos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ e $a = \sup X$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X . Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ e daí $a = \lim x_n$.

Teorema do Valor Intermediário

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ ou $f(b) < d < f(a)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração: Seja $A = \{x \in [a, b]; f(x) < d\}$. A não é vazio pois $f(a) < d$. Afirmamos que nenhum elemento de A é maior do que todos os outros. Com efeito, seja $\alpha \in A$. Como $f(\alpha) < d$, vemos que $\alpha \neq b$ e, portanto, $\alpha < b$. Tomando $\varepsilon = d - f(\alpha)$, a continuidade de f no ponto α nos dá um $\delta > 0$ (que tomaremos pequeno, de modo a ter $[\alpha, \alpha + \delta] \subset [a, b]$) tal que, para todo $x \in [\alpha, \alpha + \delta]$ tem-se $f(x) < f(\alpha) + \varepsilon$, ou seja, $f(x) < d$. Assim, todos os pontos do intervalo $[\alpha, \alpha + \delta]$ pertencem a A . Agora ponhamos $\sup A = c$. Como c é limite de uma sequência de pontos $x_n \in A$, temos $f(c) = \lim f(x_n) \leq d$. Como A não possui maior elemento, não se tem $c \in A$. Logo não vale $f(c) < d$, o que nos obriga a concluir que $f(c) = d$.