

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.005/2023

Geração de Vórtices e Turbulência em Misturas Binárias de Condensados de Bose-Einstein

Anacé Nunes da Silva

Orientador

Prof. Dr. Lauro Tomio

Junho de 2023

S586g Silva, Anacé Nunes da.
Geração de vórtices e turbulência em misturas binárias de condensados de Bose-Einstein / Anacé Nunes da Silva. – São Paulo, 2023
118 f.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo
Orientador: Lauro Tomio

1. Equações de Gross-Pitaevskii. 2. Condensação de Bose-Einstein. 3. Física nuclear. I. Título

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo. Dados fornecidos pelo autor(a).

*Dedico esta tese a toda minha família e
em memória meu pai Aldo Leite da Silva!*

Agradecimentos

Agradeço a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho. Em especial, quero agradecer à minha amada família.

Ao meu pai, Aldo Leite da Silva, que sempre foi minha maior referência como pessoa. Ele acreditava firmemente que a educação pode transformar o mundo em um lugar melhor para todos. Meu pai participou intensamente de toda a minha formação acadêmica, me incentivou incansavelmente e estava sempre disposto a ajudar-me. Infelizmente, ele partiu antes de poder testemunhar a conclusão desta tese. Sua influência e exemplo continuam a me guiar e inspirar.

À minha mãe, Maria Lúcia Nunes da Silva, expresso minha gratidão pelo apoio constante e pelo suporte psicológico ao longo desta jornada. Sua presença e incentivo foram fundamentais para que eu superasse os desafios e persistisse em meus estudos. Sua dedicação e amor incondicional são tesouros que carregarei para sempre.

Quero expressar meu profundo agradecimento à minha amada esposa, Thaís Marques Martins, por seu apoio incansável, paciência, compreensão, suporte emocional e companheirismo ao longo de todo o processo. Sua presença ao meu lado tem sido um pilar de força e conforto, e sou verdadeiramente grato por ter você como minha parceira de vida. Seu amor e apoio incondicionais são tesouros que valorizo além das palavras.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão às minhas irmãs, Ita Nunes da Silva e Inúbia Nunes da Silva, assim como ao meu cunhado, Rogério Paiva, por seu constante apoio e crença em meu potencial. Sua presença e incentivo têm sido fundamentais em minha jornada.

Além disso, desejo mencionar meus amados sobrinhos, Kayk Nunes, Kauã Nunes e Mateus Nunes, cuja visão única do mundo sempre me surpreende, mesmo com a minha ausência ao longo desses anos. Suas perspectivas e experiências são uma fonte de inspiração constante para mim.

Em geral, gostaria de expressar minha sincera gratidão à minha avó, Eloiza Lima da Silva, e a todos os meus tios, tias, primos e primas. Seu apoio e estímulo ao longo da minha jornada acadêmica foram fundamentais para que eu me tornasse o primeiro membro da família a concluir um doutorado. Sou imensamente grato por todo o incentivo e encorajamento que recebi de vocês.

Expresso minha imensa gratidão ao Professor Dr. Lauro Tomio por ter aberto as portas para mim e aceitado me orientar nesta jornada acadêmica. Sua generosidade ao compartilhar sua valiosa experiência profissional foi fundamental para o meu crescimento e desenvolvimento como estudante de física teórica. O Professor Lauro Tomio não apenas me encorajou a enfrentar os desafios que surgiram ao longo do curso, mas também

despertou em mim um amor ainda mais profundo pela área. Sua dedicação exemplar, ética e comprometimento com a pesquisa servem como um modelo inspirador para mim e para todos os que têm o privilégio de trabalhar com ele. Ao longo dos anos, suas contribuições têm impulsionado o avanço técnico e científico em nosso país, e sou extremamente grato por ter tido a oportunidade de aprender e crescer sob sua orientação.

Estou profundamente grato a Kishor, membro do grupo do Bradley, por desempenhar um papel crucial no desenvolvimento deste trabalho. Os códigos e métodos aprimorados por ele foram indispensáveis para as análises realizadas, especialmente no exame do espectro das energias cinéticas. Seu apoio computacional inestimável foi fundamental para o progresso deste estudo. Sua dedicação e contribuição foram essenciais para a conclusão desta tese, e sou extremamente grato pela oportunidade de colaborar com ele nesse projeto.

Gostaria também de agradecer a todo o grupo do Instituto de Física Teórica da Unesp. Aos professores, pelas suas contribuições técnicas e motivadoras. Aos alunos Denner, Gabriel, Jorgean, Johan, Luis, Rafael e tantos outros, pelas inúmeras contribuições para o desenvolvimento deste trabalho. Não posso esquecer o pessoal da limpeza, que contribuiu ao longo desses anos para a organização e limpeza do laboratório, e a Dona Jô, sempre acolhedora e fornecendo aquele cafézinho gostoso.

Expresso meu profundo agradecimento ao Projeto Temático FAPESP 2017/05660-0, coordenado pelos ilustres professores Dr. Brett Vern Carlson (ITA), Dr. Lauro Tomio (UNESP) e Tobias Frederico (ITA), pelos valiosos recursos tecnológicos e contribuições fundamentais que proporcionaram o desenvolvimento bem-sucedido da minha pesquisa. A participação do projeto temático foi de suma importância para impulsionar o avanço científico em nosso país. Sou imensamente grato por todo o apoio e investimento na ciência, que certamente deixará um legado duradouro.

Agradeço imensamente à Dra. Marijama Brtko, Dr. Jose Francisco Gomes, Dr. Tobias Frederico, Dr. Varese Salvador Timóteo e ao Dr. Lauro Tomio por dedicarem seu tempo e expertise como membros da banca examinadora de minha tese de doutorado. Suas valiosas contribuições e orientações foram fundamentais para o aprimoramento deste trabalho e representam um marco significativo em minha jornada acadêmica.

Esta pesquisa tornou-se possível graças aos recursos computacionais disponibilizados pelo Núcleo de Computação Científica (NCC/GridUNESP) da Universidade Estadual Paulista (UNESP).

Agradeço ao estimado Prof. Dr. João Pacheco Bicudo Cabral de Melo por sua orientação valiosa durante meu mestrado e pelo constante estímulo e apoio para que eu prosseguisse rumo ao doutorado na UNESP. Sua paixão pela divulgação científica e seu exemplo como acadêmico exemplar têm sido uma inspiração. Suas orientações e incentivos foram fundamentais para meu crescimento acadêmico e profissional, desafiando-me a

explorar novas áreas de pesquisa. Sou grato por ter sido orientado por um mentor dedicado e comprometido com a formação de jovens pesquisadores. Seu legado na academia é um exemplo a ser seguido, e expressei minha profunda gratidão pelo impacto positivo que teve em minha trajetória acadêmica.

Agradeço de coração aos queridos amigos que me acompanharam ao longo desta jornada, desde o mestrado até o doutorado. O apoio incondicional foram fundamentais para me motivar a seguir adiante e enfrentar os desafios. Em particular, expressei minha gratidão aos estimados Dr. Clayton Santos Mello, Dr. George Yabusaki, Dr. Samuel Bueno Soltau, Dr. Rômulo Moita, Me. Paulo Cruz, Me. Jonatan Paschoal e tantos outros, que não apenas me incentivaram, mas também se disponibilizaram para me ajudar de diversas formas. Sua sabedoria, experiência e generosidade contribuíram significativamente para o meu crescimento acadêmico e pessoal. Sou verdadeiramente grato por ter tido a oportunidade de contar com a amizade e o apoio de pessoas tão especiais ao longo dessa trajetória.

Expressei minha sincera gratidão aos professores que tive durante a minha graduação em Física, em especial ao Dr. Luis Coelho Dos Santos. Foi sob sua orientação e inspiração que despertei a esperança de fazer a diferença no mundo através da sala de aula e também de seguir uma carreira acadêmica. Sua paixão pelo ensino e dedicação em transmitir conhecimentos deixaram uma marca profunda em mim, motivando-me a buscar constantemente o aprimoramento e a contribuição para a educação e a ciência. Sou imensamente grato por ter tido a oportunidade de aprender com um professor tão inspirador e comprometido com a formação dos seus alunos.

Desejo expressar meu profundo apreço pelo período em que pude usufruir da Licença Sem Vencimentos, com base no artigo 202, como professor da rede pública estadual de São Paulo. Durante esse afastamento, tive a valiosa oportunidade de dedicar-me integralmente à minha tese de doutorado, aprimorando minha formação acadêmica e enriquecendo minha prática docente.

Embora não tenha contado com apoio financeiro do Estado, essa experiência reforçou ainda mais a importância do comprometimento e da paixão pela educação. Acredito firmemente no potencial transformador de um professor bem formado e motivado, capaz de impactar positivamente a vida de seus alunos e contribuir para o progresso da sociedade.

Ao enfrentar os desafios financeiros durante esse período, desenvolvi uma resiliência ainda maior, entendendo que, mesmo diante das adversidades, a busca pelo conhecimento e pela excelência educacional deve permanecer inabalável. Inspiro-me a continuar meu trabalho com entusiasmo, compartilhando com meus alunos a importância da dedicação, perseverança e superação de obstáculos.

Tenho convicção de que investir em educação é investir no futuro do nosso país. Portanto, é fundamental que sejam oferecidos incentivos e apoios financeiros aos profissionais

da rede pública, reconhecendo seu valor e proporcionando condições adequadas para o desenvolvimento de suas atividades acadêmicas e pesquisa.

Que possamos, juntos, inspirar e formar cidadãos preparados e comprometidos com a construção de uma sociedade mais justa e próspera.

*“Bem unidos façamos
Nesta luta final
Uma terra sem amos
A Internacional”*

Hino *“A Internacional”*

Resumo

A produção dinâmica de vórtices e turbulência em condensados atômicos de Bose-Einstein, confinados em armadilhas harmônicas submetidas a perturbações elípticas periódicas dependentes do tempo, é estudada considerando-se dois sistemas binários acoplados, que possuem massas diferentes. O estudo é feito no sistema referencial do laboratório, considerando-se que ambas as espécies estão inicialmente confinadas por uma armadilha harmônica tipo panqueca (o que permite um tratamento quasi-bidimensional), que é ligeiramente modificada elipticamente por uma interação periódica dependente do tempo, cuja frequência caracteriza a rede final de vórtices obtida dinamicamente. Para verificar o efeito da diferença de massa para a geração de vórtices, nossa abordagem foi aplicada a duas misturas binárias experimentalmente acessíveis ^{85}Rb - ^{133}Cs e ^{85}Rb - ^{87}Rb . Para a compreensão do processo dinâmico subjacente, calculamos para ambas as espécies a evolução temporal das respectivas contribuições de energia (total e cinética) geradas pelos vórtices, juntamente com as velocidades associadas. Coletivamente, através da análise da evolução temporal das energias cinéticas compressivas e não-compressivas, procurou-se distinguir fluxos turbulentos de não turbulentos. Usando-se também a propagação temporal dos valores esperados do momento angular e do momento de inércia de ambos os componentes do sistema binário, foram determinadas as frequências efetivas de rotação obtidas quando da formação de redes estáveis de vórtices. Tais frequências efetivas foram posteriormente utilizadas em simulações no sistema referencial em rotação desligando-se a perturbação periódica temporal. Conforme foi demonstrado, para o caso do uso da perturbação temporal, a produção dinâmica de redes estáveis de vórtices para misturas binárias de condensados com massas assimétricas ocorre de forma mais rápida quando as diferenças de massa são maiores, do que ocorre para misturas com diferenças pequenas entre as espécies.

Palavras Chaves: Gross - Pitaevskii; Turbulência; Vórtices; Condensados de Bose-Einstein; Sistemas Binários Acoplados.

Áreas do conhecimento: Física da Matéria Condensada; Física Nuclear.

Abstract

The dynamical production of vortices and turbulence in atomic Bose-Einstein condensates (BEC) confined in harmonic traps under time-dependent periodic elliptic perturbations (stirring potential), is studied by using two kinds of mass-imbalanced coupled systems. The study is done in the condensate laboratory frame, by considering that both species are confined by a pancake-like harmonic trap (allowing a quasi-two-dimensional treatment), slightly modified elliptically by a time-dependent periodic interaction, with a frequency that is going to characterize the final pattern of vortices. To verify the effect of mass differences on the vortex generation, our approach was applied to two experimentally accessible binary mixtures, ^{85}Rb - ^{133}Cs and ^{85}Rb - ^{87}Rb . For the understanding of the underlying dynamical process, we calculate for both species the time evolution of the respective energy contributions generated by the vortices, together with the associated velocities. Collectively, through the analysis of the time-evolution of the compressible and non-compressible kinetic energies, our aim was to distinguish turbulent from non-turbulent flows. By using the temporal evolution of the mean-expected values for the angular momentum and moment of inertia of both components of the binary system, effective rotation frequencies were extracted, which were further considered within simulations in the rotating frame without the stirring interaction. As it was verified, the dynamic production of stable vortices occurs in a hastier form than for mixtures with small mass differences between the species.

Keywords: Gross - Pitaevskii; Turbulence; Vortices; Bose-Einstein condensates; Binary coupled systems.

Areas of knowledge.:

Condensed Matter Physics; Nuclear Physics.

Índice

1	Introdução	3
1.1	Apresentação	3
2	Conceitos Históricos e Teóricos	7
2.1	Previsão e Comprovação do Condensado de Bose-Einstein	7
2.2	Contextualização Histórica	10
2.2.1	A Origem da Equação de Schrödinger	13
2.2.2	Equação de Schrödinger Linear	17
2.2.3	Equação de Schrödinger Não-Linear	18
2.2.4	Princípio da Incerteza	19
2.2.5	Princípio de Exclusão de Pauli	20
2.2.6	Estatística de Férmions e Bósons	21
3	Formalismo e Propriedades do Condensado de Bose-Einstein	23
3.1	Experimentos de Resfriamento e Armadilhamento	24
3.2	A Interação de Dois e Três Corpos na Física de Sistemas de Muitos Corpos	26
3.3	O formalismo de Ginzburg-Pitaevskii-Gross	28
3.4	Ressonância de Feshbach	30
3.4.1	Estados Efimov	31
3.5	Desenvolvimento da Equação de Schrödinger e suas Implicações Quânticas	32
3.5.1	Equação de Gross-Pitaevskii	33
3.5.2	Potencial Químico	34
3.6	Redução Dimensional Espacial	35
3.6.1	Redução Dimensional de 3D para 1D da Equação de Gross-Pitaevskii	35
4	Instabilidades	42
4.1	Caos	42
4.2	Natureza dos Vórtices	44
4.3	Vórtices e Estados de Momento Angular	45
4.4	Vórtices Ópticos	47
4.5	Turbulência	47
4.5.1	Turbulência Clássica	48
4.5.2	Equação de Navier-Stokes	49

5	Vórtices e Turbulência Através de Perturbação Periódica de Condensados de Bose-Einstein Acoplados	56
5.1	Condensados de Bose-Einstein Agitados	60
5.1.1	Dinâmica de Condensados Binários em Armadilhas Agitadas	61
5.1.2	Simulação Numérica e Parâmetros	64
5.1.3	Análise da Formação de Vórtices	65
5.1.4	Espectro de Energia Cinética no Referencial Rotativo	67
5.2	Formação de Vórtices	68
5.2.1	Mistura Binária $^{85}\text{Rb}-^{133}\text{Cs}$	69
5.2.2	Mistura Binária $^{85}\text{Rb}-^{87}\text{Rb}$	78
5.3	Espectros de Energia Cinética Incompressível	84
5.3.1	Espectros de Energia Cinética $^{85}\text{Rb}-^{133}\text{Cs}$	84
5.3.2	Espectros de Energia Cinética $^{85}\text{Rb}-^{87}\text{Rb}$	87
5.4	Considerações Finais	88
A	Apêndice	91
A.1	Resolução Equação Schrodinger Para o Poço Potencial	91
A.1.1	Solução do Poço	93
A.1.2	Método de Newton-Raphson Aplicado à Função Transcendental	95
A.1.3	Algoritmo Runge-Kutta Para o Poço de Potencial	99
A.1.4	Métodos Numéricos para descrever CBE	100
A.2	Lagrange	101
A.3	Método Variacional	102
A.4	Método de Crank-Nicolson Aplicado ao Condensado de Bose-Einstein	104
A.5	Método $\frac{1}{3}$ de Simpson	106
	Referências	109

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação

Neste trabalho investigamos a produção dinâmica de vórtices e turbulência em pares atômicos com massas distintas de condensados atômicos de Bose-Einstein (CBE) acoplados, confinados em armadilhas harmônicas submetidas a perturbações temporais elipticamente deformadas dependentes do tempo. A formação de vórtices é investigada no sistema-laboratório dos condensados, considerando duas misturas binárias de isótopos do Rubídio e Césio, quais sejam, ^{85}Rb - ^{87}Rb e ^{85}Rb - ^{133}Cs , experimentalmente acessíveis, de modo a que nos permitam verificar possíveis efeitos da massa na dinâmica de ambas as espécies. Essas misturas binárias são confinadas por uma armadilha harmônica tipo panqueca, levemente modificada elipticamente por um potencial periódico dependente do tempo. Para distinguir fluxos dinâmicos turbulentos de não turbulentos, analisamos a evolução temporal para ambas as espécies, com a contribuição da energia com as velocidades associadas. Usando os valores médios do momento angular e momento de inércia.

Os principais resultados alcançados vão detalhados no capítulo 5, no qual modelamos duas misturas atômicas que atualmente são facilmente acessíveis e controláveis em experimentos de átomos frios [^{85}Rb - ^{133}Cs e ^{85}Rb - ^{87}Rb]. Essa misturas de dois condensados foram consideradas no regime miscível, que implica que as interações repulsivas entre átomos diferentes são menores do que as interações entre átomos idênticos. Com a mistura confinada, sujeita a um potencial perturbativo periódico dependente do tempo, a dinâmica passa por diferentes etapas de instabilidade, com deformação da forma, quebra de simetria, regime de turbulência e nucleação de vórtices. Para esse estudo, consideramos a evolução temporal dos observáveis relevantes, como energias total e cinética, densidades de corrente, torques e momento angular efetivo.

As evoluções temporais das respectivas contribuições de energia, juntamente com as velocidades associadas, são estudadas em ambas as espécies de forma a distinguir escoamentos turbulentos de não turbulentos. Usando os valores médios do momento angular e do momento de inércia, são sugeridas frequências de rotação clássicas efetivas, que são consideradas dentro de simulações no sistema de laboratório da armadilha em

rotação direta, no qual o operador momento angular é aplicado diretamente ao estado fundamental. No modelo do sistema agitado periodicamente, é realizada uma análise espectral para ambas as espécies, com foco principal nas energias cinéticas incompressíveis. No regime turbulento transiente, antes que padrões de vórtices estáveis sejam produzidos, o comportamento característico de Kolmogorov ($k^{-5/3}$) é claramente identificado para ambas as espécies em momentos intermediários. Emergindo da análise relacionada ao desequilíbrio de massa, foi relevante observar que a mudança verificada no escalonamento espectral ocorre em menores energias cinéticas incompressíveis para maiores diferenças de massa entre as espécies. Conseqüentemente, quanto maior é a diferença de massa, muito mais rápida é a produção dinâmica de vórtices estáveis. Ou seja, notamos que a mistura com maior desequilíbrio de massa tem uma frequência de rotação maior do que a mistura com menor desequilíbrio de massa. Isso também é refletido no número visível de vórtices mostrados na rede final de vórtices.

Com a energia cinética separada em parte compressível e parte incompressível, O regime de possível turbulência é verificado considerando a parte incompressível, através da análise do espectro correspondente que evidenciou seguir aproximadamente a lei de escala de Kolmogorov [$k^{-5/3}$], conhecida do comportamento de sistemas clássicos com turbulência. Essa escala desaparece uma vez que as configurações de vórtice se cristalizam em formas estáveis. O comportamento seguindo uma lei de escala no espaço dos momentos, conhecida como escala de Kolmogorov, é observado por um tempo maior no caso de grande desequilíbrio de massa.

Resumindo essa introdução, considerando como principal objetivo detalhar uma investigação sobre a produção dinâmica de vórtices e turbulência em condensados acoplados de Bose-Einstein, utilizando uma armadilha quasi-bidimensional, elipticamente deformada por uma perturbação periódica no tempo. Com esse objetivo, cuja discussão vai mais detalhada no capítulo 5, buscamos nos outros capítulos fornecer uma visão mais abrangente dos conceitos e notações empregados, assim como do contexto no qual esse estudo se insere. Alguns dos tópicos, que podem ser obtidos em vários artigos e livros textos, foram incluídos com objetivos motivacionais a leitores menos familiarizados com conceitos empregados na mecânica quântica.

Detalhamos, a seguir, a estrutura dos capítulos e sessões que foram empregados ao longo dessa tese.

- No capítulo 1 temos essa introdução geral com os objetivos principais.
- No capítulo 2, em uma sessão inicial, procuramos destacar o contexto histórico da previsão dos condensados de Bose-Einstein, e sua comprovação em 1995. A seguir, nas outras sessões, procuramos estabelecer as bases para a compreensão dos temas explorados nos capítulos subsequentes, detalhando alguns conceitos históricos e básicos da teoria quântica. Nessa parte, foi levado em consideração

possíveis leitores não familiarizados com a física quântica. Nosso objetivo também foi fixar algumas notações utilizadas a partir do formalismo linear de Schrödinger, de modo a se entender a necessidade de utilizarmos formalismos não-lineares para descrever a física dos condensados.

- No capítulo 3, aprofundamos nossa apresentação sobre os condensados de Bose-Einstein. Nesse contexto, apresentamos as equações básicas do formalismo, proporcionando uma visão mais detalhada dessa importante área de pesquisa. Exploramos os fundamentos teóricos e conceituais, fornecendo uma compreensão abrangente dos condensados de Bose-Einstein e preparando o terreno para as análises subsequentes.
- No capítulo 4, detalhamos os principais resultados obtidos em nossa investigação. Modelamos misturas atômicas acessíveis em experimentos com átomos frios, considerando o regime miscível e analisando a evolução temporal dos observáveis relevantes. Observamos a influência do desequilíbrio de massa na frequência de rotação e no número de vórtices.
- No capítulo 5, temos os resultados mais relevantes de nosso estudo, no qual nos concentramos em estudar a dinâmica associada, desde o regime de turbulência até a cristalização de padrões de vórtices. Discutimos a aplicação da lei de escala de Kolmogorov, conhecida no contexto de sistemas clássicos com turbulência, e como essa escala se modifica à medida que as configurações de vórtice se cristalizam em formas estáveis. Apresentamos as conclusões e perspectivas futuras da pesquisa realizada, destacando os principais achados e seu impacto no campo dos condensados de Bose-Einstein.
- No capítulo A, temos apêndices, onde procuramos colocar alguns detalhes de métodos computacionais comumente empregados na solução de equações diferenciais, que foram ilustrados através de problemas da mecânica quântica.

Capítulo 2

Conceitos Históricos e Teóricos

2.1 Previsão e Comprovação do Condensado de Bose-Einstein

O Condensado de Bose-Einstein (CBE) é popularmente conhecido como o quinto estado da matéria, formado por partículas de spin inteiro (Bósons) sendo o estado fundamental de um gás extremamente diluído de bósons, obtido com temperaturas muito baixas, próximas ao zero absoluto, usando técnicas de aprisionamento óptico-magnéticas, com resfriamento evaporativo e utilizando técnicas de resfriamento a laser.

Nesse limite do condensado, as partículas bosônicas passam a se comportar coletivamente como se formassem um super átomo, em temperaturas próximas ao zero absoluto, da ordem de $10^{-9}K$, pois já não tem energia livre suficiente para movimentar-se umas em relação as outras, formando um condensado que se comporta como se fosse uma única partícula.

Para descrever um condensado de Bose-Einstein, um sistema quântico de bósons idênticos, em sua forma mais simples, utiliza-se comumente a equação de Gross–Pitaevskii, que é uma equação de campo médio não-linear de Schrödinger, com não-linearidade cúbica. Essa equação recebeu esse nome pelo reconhecimento aos trabalhos de Eugene P. Gross[1] e Lev Petrovich Pitaevskii [2], em 1961, no desenvolvimento da teoria. No entanto, importante observar que, ao nível de colisões de duas partículas, Bogoliubov em 1947 [3] já havia demonstrado para um gás homogêneo que um condensado de Bose-Einstein seria somente possível para sistemas com potenciais repulsivos. Também, no desenvolvimento teórico inicial da teoria, juntamente com Pitaevskii tivemos a participação de Ginzburg em 1958 [4].

Historicamente, o condensado de Bose-Einstein foi previsto em 1924 por Satyendra Nath Bose e Albert Einstein [5, 6], tendo sido comprovado experimentalmente somente em 1995, por Carl Wieman e Eric Cornell da Universidade de Colorado [7, 8], que resfriaram um gás de rubídio em uma armadilha magneto-óptica. No mesmo ano, o grupo de Wolfgang Ketterle do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) produziu um

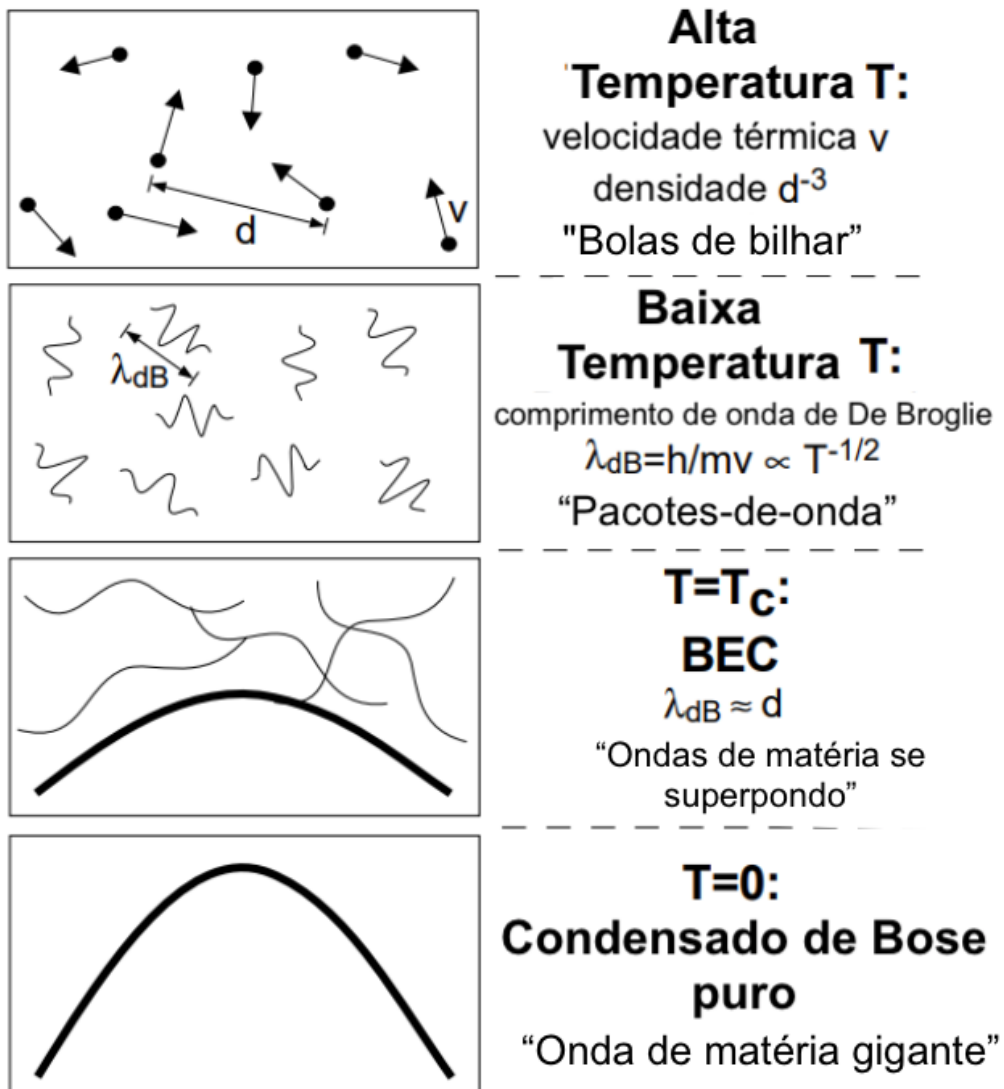


Figura 2.1: A **Dualidade partícula-onda** nos fornece essa representação de como acontece a condensação de Bose-Einstein.

condensado de Bose-Einstein usando átomos de sódio [9]. Dessa forma, ficou comprovada a teoria de Bose e Einstein, mostrando que as partículas bosônicas passam a se comportar como uma única onda abaixo de uma temperatura crítica; ou seja, os átomos passam a ocupar o mesmo estado quântico e agem coletivamente como um super-átomo, possuindo características de super-condutividade e super-fluidéz. Pela comprovação experimental em 2001, os cientistas Carl Wieman, Eric Cornell e Wolfgang Ketterle receberam o prêmio Nobel de Física [10]. Note-se também que no mesmo ano de 1995 em que foram obtidos os condensados de Bose-Einstein por Cornell, Wieman e Ketterle, o grupo liderado por Randall Hulet [11], da Universidade de Rice (Texas) publicou também seus resultados experimentais, com evidências do condensado de Bose-Einstein com gás de Lítio, cujas interações entre partículas é atrativa.

A partir de 1995, desde a comprovação experimental inial do CBE, tivemos o surgimento de inúmeros laboratórios experimentais, em várias partes do mundo, que também conseguiram obter o condensado. Seguiu-se intensas investigações téóricas e experimentais sobre as propriedades dos átomos nesse regime ultra-frio, o que pode ser verificado em várias revisões. Para uma revisão bem recente, de 2023, com alguns detalhes sobre as experiências, temos a Ref. [12]. Podemos aqui também citar uma retrospectiva de Georgescu, sobre os 25 anos da descoberta experimental dos condensados, publicada na Nature Reviews Physics [13].

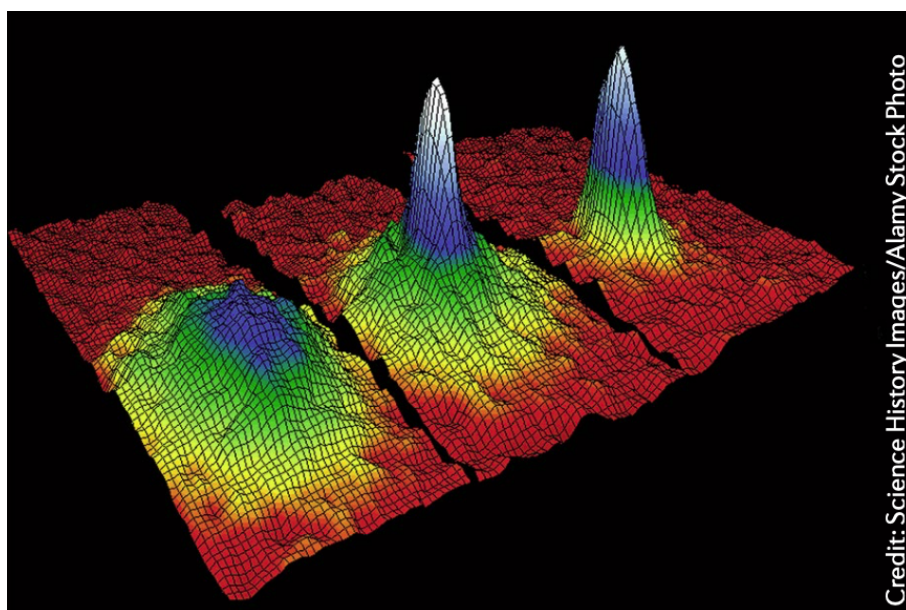


Figura 2.2: Densidades atômicas observadas próximas e no limite em que se verifica o condensado de Bose-Einstein.

As equações que descreveram teoricamente o CBE são equações não-lineares, com a teoria de campo médio, conhecidas como equação tipo Gross-Pitaevskii (EGP). Essas equações possuem termos não lineares derivados da interação de duas ou mais partículas. Tais equações, além de possuírem soluções numéricas mais complexas, que podem levar a sistemas caóticos ou que possuem ondas de choque [14, 15], podem também admitir soluções bem controladas e exatas, do “tipo Sólitons”, que podem ser obtidas analiticamente [16] ou numericamente. Sóliton é uma onda solitária que não perde energia e mantém suas características constantes, pois sua dispersão é compensada por efeitos não-lineares. Em 1834, o fenômeno de propagação de uma onda solitária foi observado por John Scott Russel, sendo essa onda denominada Sóliton. Atualmente temos inúmeras aplicações de estudos desse tipo de ondas solitárias na física de partículas, biologia molecular, oceanografia, astrofísica e óptica não linear. Através de manipulação das interações lineares e/ou não-lineares, pode-se obter soluções analíticas ou simulações numéricas da equação não-linear correspondente, que podem descrever também sistemas condensados de Bose-Einstein.

Nossa pesquisa dá-se no âmbito da física teórica, através da Equação de Gross Pitaevskii, a partir da qual obtemos os observáveis do CBE, ou seja, construímos um modelo, que descreve o Condensado de Bose-Einstein, onde estudamos o comportamento solitônico, a variações de massa e frequência, a geração de vórtice, análise da miscibilidade e imiscibilidade entre condensados, sistemas perturbados e não perturbados[17]. Para um estudo mais detalhado relacionado aos princípios que são considerados no condensado de Bose-Einstein, assim como sobre a correspondente realização experimental, podemos mencionar os primeiros dois capítulos da seguinte coletânea: [18], que se refere a uma escola realizada em São Carlos em Março de 2022. Nessa coletânea, os outros capítulos são também de grande interesse dos estudos que realizamos nessa tese; em particular o capítulo 3 sobre os modos coletivos e vórtices.

2.2 Contextualização Histórica

Na subseção presente, realizamos uma breve revisão histórica com o intuito de contextualizar os estudos mais recentes da Física Quântica, em particular os condensados de Bose-Einstein, que são o foco de interesse neste trabalho.

A incessante busca pela compreensão das interações e do universo levou os cientistas a investigarem e compreenderem o meio em que vivemos através da experimentação. Desenvolveram-se técnicas e métodos de investigação que nos permitem analisar fenômenos complexos. No âmbito deste projeto, nosso estudo se concentra no condensado de Bose-Einstein e nos fenômenos associados a turbulências e vórtices.

Do ponto de vista histórico do desenvolvimento científico e tecnológico, é importante

mencionar os alquimistas, que, através da manipulação de substâncias, descobriram algumas propriedades dos materiais e elementos químicos. Seu objetivo era obter novas substâncias e materiais. Os alquimistas acreditavam que a matéria era composta por cinco elementos: água, fogo, terra, ar e éter. Essa visão prevaleceu do século V ao XV e envolvia uma combinação de diversas ciências e conceitos místicos.

Com o desenvolvimento do método científico no século XVI, atribuído a Galileu Galilei, que é conhecido como o "pai da ciência experimental", foram realizados diversos experimentos que proporcionaram um grande avanço na compreensão de vários fenômenos naturais, como os movimentos dos astros e as estruturas dos materiais. No século XIX, chegou-se à conclusão de que existem apenas três estados físicos fundamentais da matéria: sólido, líquido e gasoso. Posteriormente, identificou-se o plasma como o quarto estado da matéria, reconhecimento que ocorreu no século XX. A determinação desses estados físicos é baseada na distância entre as partículas, nas forças de coesão e na energia cinética das partículas. Esses fatores influenciam as propriedades das substâncias, como forma e volume [19].

Para exemplificar os estados até então conhecidos no século XIX, temos:

a) O estado sólido: em que as forças de coesão entre as partículas são intensas, onde as partículas estão muito próximas umas das outras, com pouca quantidade de energia cinética, formando uma rede geométrica que define sua forma e volume. Não são facilmente comprimidos, sendo que para isso necessário uma pressão muito alta.

b) O estado líquido: as forças de coesão entre as partículas são mais fracas, onde as partículas praticamente deslizam umas sobre as outras, com um pouco mais de energia cinética, onde mantém um maior distanciamento entre as partículas que são suficientes para adequar ao meio, o volume é definido pelo objeto que os contém e que apresentam uma superfície delimitadora.

c) O estado gasoso: as partículas possuem um maior distanciamento, alto grau de energia cinética, onde as forças de coesão entre as partículas, são pouco interagentes, podemos considerar-las desprezíveis, as partículas movimentam-se livremente interagindo umas com outras, através de colisões e seu volume preenche todo o ambiente que o contém, apresentando um alto grau de liberdade entre as partículas.

d) O plasma: é obtido no estado gasoso, quando uma substância é aquecida a uma temperatura muito alta capaz de superar a energia de ligação que mantém os elétrons em órbita no núcleo do átomo e ocorrerá a ionização dos gases, tornando a substância condutora de calor e eletricidade [20].

A investigação sobre o comportamento dos gases, líquidos e sólidos é recorrente e primordial para compreender todo o processo transição de um estado para o outro. Um estudo publicada em 1873 por Johannes Diderik van der Waals [21] em sua tese de doutorado, propôs uma Equação de Estado que relacionando o volume de uma substância,

com a pressão e temperatura, ou seja, introduziu o conceito de volume molecular e atração molecular entre as partícula, foi agraciado com o prêmio Nobel 1910.

A equação de estado de J.D. van der Waals contribuiu para o trabalho de James Clerk Maxwell, possibilitando a a unificação das teorias da eletricidade e do magnetismo, que ficou definida como eletrognatismo, em relação a teoria cinética dos gases, descobriu uma distribuição de probabilidade, que ficou conhecida como distribuição de Maxwell-Boltzmann [20].

As observações e experimentos deram origem a todo um arcabouço de teoria de física, cientistas acreditavam ter solucionado todos os mistérios do Universo até o fim do século XIX, na literatura todo o escopo ficou denominado como física clássica.

O espectro eletromagnético do experimento da radiação do corpo negro, quebrou o paradigma da teoria clássica, que naquele momento acreditavam que o estudo da física estaria completa, a mecânica estatística clássica não conseguiu explicar o fenômeno. Max Karl Ernst Ludwig Planck sugere a possibilidade de que a energia seja quantizada, desta forma conseguia explicar o espectro eletromagnético. Foi o início de uma nova história no saber científico, surge assim a Física Quântica, agora com uma estatística na teoria quântica abrindo um universo de possibilidades para interpretar e compreender os fenômenos da natureza [22].

Em 1924, Satyendra Nath Bose propôs uma nova interpretação da estatística da fórmula de Boltzmann, porém a comunidade científica da época não deu muita atenção, foi então que Nath Bose encaminhou uma carta para Albert Einstein, mostrando sua pesquisa. A partir dela, Einstein propôs algumas adaptações e sugeriu um novo comportamento da matéria, ou seja, previu que com a estatística de Bose, todas as partículas em baixas temperaturas se aglutinariam no estado fundamental, ocorrendo um comportamento atípico aos estados da matéria até então conhecidos, propôs um novo estado da matéria, teoricamente ficou conhecido como condensado de Bose-Einstein(CBE).

Verifica-se que na natureza existe duas características intrínseca para sistemas físicos, sistemas simétricas e sistemas anti-simétricas. Sistemas simétricos são constituído de muitas partículas idênticas com spin inteiro e ocupam um único estado de energia, conhecido como distribuição estatística de Bose-Einstein e sistemas anti-simétrico são constituído por partículas de spin semi-inteiro, que não podem ocupar o mesmo nível de energia, conhecido com distribuição de Fermi-Dirac.

Em 1925 Wolfgang Pauli formulou a teoria onde afirma que dois férmions idênticos não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente, ficou conhecido na literatura como princípio de exclusão de Pauli para a mecânica quântica.

O Condensado de Bose-Einsten foi comprovado experimentalmente somente em 1995, por Carl Wieman e Eric Cornell da Universidade de Colorado[5, 6, 7, 8, 10], onde resfriaram um gás de rubídio e colocaram numa armadilha magneto-óptica, conseguindo

comprovar a teoria de Einstein e Bose, mostrando que as partículas passam a comportarem-se como uma única onda, nos remetendo a alusão do sólito, ou seja, passam a ocupar o mesmo estado quântico e agem coletivamente como um super-átomo, a busca para obter o CBE, possibilitou um grande desenvolvimento em técnicas de resfriamento, assim como descobrir fenômenos muito interessantes como a superfluidez e também fenômenos como a super-condutividade [23, 24].

2.2.1 A Origem da Equação de Schrödinger

Na segunda metade do século XIX, os fenômenos ligados a eletrodinâmica clássica revelaram algumas inconsistências nesta teoria, como a radiação do corpo negro, que não encontrava explicação realista com o que era observado experimentalmente. Marx Plank para tentar explicar esse fenômeno, postula que a energia que até então era considerada uma grandeza contínua, deveria ser quantizada, ou seja, agora considerada como uma grandeza discreta, múltipla de uma constante " h " (constante de Planck) multiplicada por uma frequência " ν ". Dessa forma, foi possível regularizar a discrepância experimental [25].

Essa constante h , denominada como constante de Plank, tem dimensão de energia multiplicada pelo tempo, possuindo o seguinte valor numérico

$$h \cong 4.136 \cdot 10^{-15} eV \cdot s \cong 6.6261 \cdot 10^{-34} J \cdot s, \quad (2.1)$$

de modo que a energia teria dimensão dessa constante multiplicada pela frequência linear. Por conveniência, já que normalmente as energias passaram a ser quantizadas, sendo multiplicadas por uma frequência angular, foi definido outra constante equivalente, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, que fornece uma energia ao ser multiplicada pela frequência angular:

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \cong 1.0546 \cdot 10^{-34} J \cdot s \cong 6.582 \cdot 10^{-16} eV \cdot s. \quad (2.2)$$

Assim, *um quantum* de energia seria dado por

$$E = h\nu = \frac{h\omega}{2\pi} = \hbar\omega. \quad (2.3)$$

Isso se deu com o Advento da quantização da energia, proposta por Marx Plank em 1900, a qual inspirou Albert Einstein a concluir sua teoria da eletrodinâmica dos corpos em movimento e até mesmo a sua explicação do efeito foto-elétrico em 1905 [26], onde propôs que a luz, que na física clássica é de natureza ondulatória, agora se comporta como pequenos corpúsculos, cuja unidade seria um "quantum de luz". Tais corpúsculos seriam os fótons, com a energia deles dada por $E = h\nu = \hbar\omega$.

Também possibilitou compreender a radiação do corpo negro. Havia uma inconsistência na teoria clássica ao relacionar a distribuição de energia do corpo com a frequência de radiação emitida pelos mesmo. Na região do ultravioleta (altas energias) havia uma descontinuidade ao relacionar distribuição de energia com estes comprimentos de onda. Tal discussão ficou conhecida como "catástrofe do ultravioleta"[27].

Da teoria da relatividade de Einstein, supomos que uma partícula sem massa, demonstra-se que o momento desta partícula é dado pela energia sobre a velocidade da luz.

$$P = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{\lambda\nu} = \frac{h}{\frac{2\pi}{k}} = \hbar k \quad (2.4)$$

Em 1924 Louis de Broglie, especula que os fótons, são energia e tem natureza dual, ou seja, ela é onda e tem comprimento de onda (λ) e também é partícula representada pelo seu momento(P) e a constante de plank (h), relacionou as variáveis na seguinte fórmula:

$$\lambda = \frac{h}{P} \quad (2.5)$$

Em 1926 Schrödinger preparou um colóquio para tentar explicar a dualidade da matéria, deu base para formular sua versão para a mecânica quântica.

Em 1928 Max Born descobriu a relação entre a função de onda e a probabilidade de se encontrar a partícula em uma determinada posição, descobriu que a densidade de probabilidade é representa pela grandeza estatística.

A função de onda (representada por $\Psi = \Psi(x, t)$) é uma ferramenta matemática usada para descrever qualquer sistema físico na mecânica quântica. Ela é composta por uma amplitude (A), uma parte dependente do espaço e outra parte dependente do tempo. Substituindo as equações anteriores, obtemos a forma geral da função de onda de Schrödinger:

$$\Psi(x, t) = A.e^{i(kx-\omega t)} \quad (2.6)$$

Nessa equação, x representa a posição, t é o tempo, k é o número de onda e ω é a frequência angular. A função de onda descreve a evolução temporal e espacial de uma partícula quântica, e sua interpretação estatística fornece informações sobre a probabilidade de encontrar a partícula em uma determinada posição.

A equação de Schrödinger, baseada na função de onda, desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da mecânica quântica. Ela possibilitou o cálculo de propriedades físicas de partículas quânticas e permitiu a compreensão de fenômenos

intrincados, como a interferência e o emaranhamento quântico. A equação de Schrödinger revolucionou nossa compreensão do mundo microscópico e continua sendo uma ferramenta essencial na física moderna.

Vamos demonstrar a formulação de Schrödinger, para isso temos que representar a função de onda. A função de onda é uma ferramenta matemática que usamos para descrever qualquer sistema físico na mecânica quântica, na eq. 2.7, temos amplitude A , uma parte dependente do espaço e outra parte dependente do tempo, substituímos equações 2.3 e 2.4, obtemos assim:

$$\Psi(x, t) = A.e^{ikx} \cdot e^{-i\omega t} = A.e^{ikx} \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad (2.7)$$

Agora faremos a derivada parcial em função do tempo e a derivada parcial, duas vezes em relação ao espaço e obter a famosa equação de Schrödinger:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\frac{E}{\hbar}\Psi \quad (2.8)$$

Para a partícula livre, temos:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + k^2\Psi = 0 \quad (2.9)$$

Substituindo $k = \frac{p}{\hbar}$:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{p^2}{\hbar^2} \left(\frac{2m}{2m} \right) \Psi = 0 \quad (2.10)$$

Temos que $E = \frac{p^2}{2m}$:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad (2.11)$$

Isolando a energia (E):

$$E\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

Finalmente temos para a partícula livre:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (2.13)$$

Para uma partícula que não livre, sobre a influência de um potencial V , precisa relacionar a mecânica com a óptica, que conhecemos por mecânica Hamiltoniana, ou seja, trajetória de uma partícula no espaço é análoga a trajetória de um raio de luz, ou seja, o índice de refração " n " na mecânica óptica equivale a $n = \sqrt{1 - \frac{V}{E}}$ na mecânica. Neste caso o número de ondas " k ", pode ser descrito como $k = nk_0$ no vácuo:

$$k = \sqrt{1 - \frac{V}{E}} k_0 \quad (2.14)$$

Agora substituímos a equação 2.14 em 2.9, obtemos:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + n^2 k_0^2 \Psi = 0 \quad (2.15)$$

Substituindo $k = \frac{p}{\hbar}$:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \left(\sqrt{1 - \frac{V}{E}} \right)^2 \frac{p^2}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad (2.16)$$

Multiplicando o segundo termo da equação por $\frac{2m}{2m}$ para extrair a energia $E = \frac{p^2}{2m}$:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{V}{E} \right) \frac{p^2}{\hbar^2} \left(\frac{2m}{2m} \right) \Psi = 0 \quad (2.17)$$

Multiplicado a equação 2.17 por $\frac{\hbar^2}{2m}$:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + E\Psi - \frac{V}{E} E\Psi = 0 \quad (2.18)$$

Isolando a $E\Psi$:

$$E\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi \quad (2.19)$$

Finalmente obtemos a Equação de Schrödinger para uma partícula em um potencial V .

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi \quad (2.20)$$

Na mecânica clássica o interesse é encontrar a posição da partícula em qualquer instante, na mecânica quântica encontramos a função de onda para todo o instante. Na mecânica quântica não conseguimos descobrir a posição exata de uma partícula, por conta das dimensões das partículas são muito pequena, por isso função de onde está relacionada a probabilidade de encontrar a partícula em uma determinada posição e um determinado instante.

2.2.2 Equação de Schrödinger Linear

A Equação de Schrödinger é uma equação fundamental na teoria quântica que descreve a evolução temporal de uma função de onda associada a uma partícula quântica. No entanto, existem diferentes formas da equação de Schrödinger, e nesta seção, focaremos na Equação de Schrödinger linear, que é uma forma particularmente importante e amplamente utilizada na descrição de sistemas quânticos.

A Equação de Schrödinger linear é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, que pode ser escrita na forma geral:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\mathbf{r})\Psi \quad (2.21)$$

onde $\Psi = \psi(\mathbf{r}, t)$ é a função de onda associada à partícula quântica, \hbar é a constante de Planck reduzida ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$, onde h é a constante de Planck), m é a massa da partícula, $V(\mathbf{r})$ é o potencial que atua sobre a partícula, ∇^2 é o operador laplaciano espacial e i é a unidade imaginária.

A Equação de Schrödinger linear descreve a evolução temporal da função de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$, fornecendo informações sobre a probabilidade de encontrar a partícula em diferentes posições e momentos ao longo do tempo. A parte à esquerda da equação representa a taxa de variação temporal da função de onda, enquanto a parte à direita descreve a dinâmica espacial da partícula, levando em consideração o efeito do potencial $V(\mathbf{r})$.

Além disso, a Equação de Schrödinger linear apresenta propriedades notáveis. Primeiramente, ela é uma equação linear, o que significa que a superposição de soluções também é uma solução válida. Isso reflete o princípio fundamental da superposição quântica, permitindo que diferentes estados quânticos se combinem e produzam estados

mais complexos.

Outra propriedade importante da Equação de Schrödinger linear é a conservação da probabilidade. A função de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ é normalizada, o que implica que a probabilidade total de encontrar a partícula em todo o espaço é preservada ao longo do tempo. Essa propriedade é garantida pelo termo $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$, que está relacionado à derivada temporal da função de onda.

A Equação de Schrödinger linear tem aplicações em uma ampla gama de áreas, incluindo física atômica, física de partículas, química quântica e óptica quântica. Ela permite a descrição e predição de propriedades quânticas de partículas, como estados ligados, estados dispersivos, comportamento de interferência e evolução temporal de sistemas.

2.2.3 Equação de Schrödinger Não-Linear

A Equação de Schrödinger não-linear descreve a dinâmica de condensados de Bose-Einstein (CBEs), que são sistemas quânticos formados por átomos ultrafrios com propriedades coletivas e comportamento de onda de matéria. Enquanto a Equação de Schrödinger linear é adequada para descrever sistemas quânticos diluídos, em que as interações entre partículas são fracas, a Equação de Schrödinger não-linear se torna essencial para descrever os efeitos das interações fortes em CBEs.

A forma geral da Equação de Schrödinger não-linear para um CBE é dada por:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\Psi|^2 \right] \Psi \quad (2.22)$$

onde $\Psi(\mathbf{r}, t)$ é a função de onda macroscópica que descreve o condensado de Bose-Einstein, \hbar é a constante de Planck reduzida, m é a massa dos átomos, $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ é o potencial externo que confina o condensado e g é o coeficiente de interação não-linear que determina a força das interações entre os átomos no condensado.

A presença do termo $g|\Psi|^2$ na Equação de Schrödinger não-linear é o que confere a não-linearidade ao sistema. Esse termo descreve as interações repulsivas entre os átomos do condensado, que se tornam significativas quando a densidade de átomos aumenta e as interações individuais se tornam importantes.

A Equação de Schrödinger não-linear em CBEs tem propriedades únicas e desafia a intuição clássica. Ela permite a formação de estruturas coletivas chamadas sólitons, que são pacotes de onda localizados e estáveis que podem se propagar através do condensado sem sofrer dispersão significativa. Esses sólitons podem assumir várias formas, como sólitons de ondas de densidade (sólitons de condensado) e sólitons de fase (sólitons de fase topológica).

O estudo da Equação de Schrödinger não-linear em CBEs tem implicações importantes para a compreensão de fenômenos de transporte, interferência quântica e comportamento coletivo em sistemas quânticos de muitos corpos. Além disso, a capacidade de manipular e controlar os sólitons em CBEs abre novas possibilidades para aplicações em áreas como óptica quântica, informação quântica e simulações de sistemas físicos complexos [29, 30].

2.2.4 Princípio da Incerteza

O Princípio de Incerteza de Heisenberg é um dos princípios fundamentais da física quântica, conforme a ref.[28]. Ele foi formulado pelo físico alemão Werner Heisenberg em 1927 e descreve a limitação fundamental na precisão com que podemos medir certas propriedades quânticas, como a posição e o momento de uma partícula.

O princípio de incerteza estabelece que, quanto mais precisamente medimos a posição de uma partícula, menos precisamente podemos medir o seu momento e vice-versa. Essa relação é expressa matematicamente pela seguinte equação:

$$\Delta x_i \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi} \quad (2.23)$$

Onde Δx_i é a incerteza na medida da posição da partícula, Δp_i é a incerteza na medida do momento da partícula e h é a constante de Planck, uma constante fundamental da física quântica.

Essa equação implica que, para uma partícula, não podemos conhecer simultaneamente a sua posição e o seu momento com precisão arbitrária. Quanto mais precisamente medimos a posição, maior será a incerteza na medida do momento, e quanto mais precisamente medimos o momento, maior será a incerteza na medida da posição.

Essa limitação fundamental na precisão das medidas quânticas tem implicações importantes na física quântica. Por exemplo, ela implica que não é possível determinar com precisão absoluta a trajetória de uma partícula quântica. Isso ocorre porque, para determinar a trajetória, seria necessário medir simultaneamente a posição e o momento da partícula em cada instante de tempo, o que é impossível devido ao princípio de incerteza.

Além disso, o princípio de incerteza é um dos principais responsáveis pela estranha natureza da física quântica, na qual as partículas podem ter comportamentos aparentemente contraditórios, como estar em dois lugares ao mesmo tempo, ou estar emaranhadas com outras partículas mesmo que estejam separadas por grandes distâncias.

O princípio de incerteza de Heisenberg é um dos princípios fundamentais da física quântica, que descreve a limitação na precisão com que podemos medir certas propriedades quânticas. Essa limitação tem implicações importantes na física quântica e é um dos principais responsáveis pela natureza estranha e aparentemente contraditória da física

quântica.

Temos como exemplo o gato de Schrödinger que é uma experiência mental proposta pelo físico Erwin Schrödinger para ilustrar a interpretação da mecânica quântica de que uma partícula pode estar em vários estados simultaneamente. A experiência envolve um gato colocado em uma caixa opaca com um dispositivo que pode matá-lo ou deixá-lo vivo, dependendo do estado de uma partícula quântica. De acordo com a interpretação de Schrödinger, enquanto a caixa estiver fechada, o gato estará em um estado quântico de morto e vivo ao mesmo tempo, até que a caixa seja aberta e o observador veja o resultado.

O princípio de incerteza de Heisenberg está diretamente relacionado ao gato de Schrödinger, pois ele afirma que não é possível medir simultaneamente a posição e o momento de uma partícula quântica com precisão arbitrária. Isso significa que, enquanto a caixa estiver fechada, não podemos saber com certeza a posição e o momento da partícula quântica que determinará o destino do gato, o que implica que o gato está em um estado de superposição quântica de morto e vivo.

Assim, o gato de Schrödinger é uma das muitas ilustrações da estranheza da mecânica quântica e da relação entre o princípio de incerteza e a natureza probabilística da realidade quântica. Embora o experimento seja puramente teórico e não tenha sido realizado na prática, ele continua a ser um exemplo poderoso da teoria quântica e suas implicações para a compreensão do mundo físico.

2.2.5 Princípio de Exclusão de Pauli

Exclusão de Pauli é um princípio fundamental da física quântica que descreve partículas idênticas que não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente. Este princípio se aplica a partículas com spin semi-inteiro, conhecidas como férmions, como elétrons, prótons e nêutrons.

O princípio da exclusão de Pauli foi proposto pelo físico austríaco Wolfgang Pauli em 1925, enquanto ele tentava explicar as propriedades da luz emitida por átomos. Ele percebeu que a luz emitida tinha apenas certas energias, e que isso só poderia ser explicado se os elétrons no átomo estivessem confinados a certos níveis de energia e se os elétrons nesses níveis de energia tivessem propriedades quânticas específicas.

O princípio de exclusão de Pauli afirma que dois elétrons não podem ter os mesmos quatro números quânticos: o número quântico principal (n), o número quântico do momento angular (l), o número quântico magnético (m) e o número quântico de spin (s). Isso significa que dois elétrons não podem ocupar exatamente o mesmo estado quântico. Se dois elétrons têm os mesmos valores para n , l , m e s , então eles devem ter spin oposto, o que significa que um elétron tem spin "para cima" e o outro tem spin "para baixo".

Este princípio tem implicações importantes para a estrutura dos átomos e a natureza dos materiais. Ele explica por que os elétrons ocupam diferentes níveis de energia em um

átomo e por que os átomos se ligam para formar moléculas. Ele também é a base para o princípio de exclusão de Pauli estendido, que se aplica a todas as partículas com spin semi-inteiro.

2.2.6 Estatística de Férmions e Bósons

A estatística de férmions e bósons é um ramo da física estatística que estuda o comportamento de sistemas compostos por partículas quânticas que obedecem a diferentes princípios de exclusão. As partículas quânticas são divididas em dois grupos principais: férmions e bósons.

Os férmions são partículas com spin semi-inteiro, como elétrons, prótons e nêutrons. Essas partículas obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, que estabelece que duas partículas idênticas não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente. Por isso, sistemas compostos por férmions são descritos por funções de onda antissimétricas, ou seja, que mudam de sinal quando as partículas são permutadas.

A distribuição de Boltzmann para sistemas de férmions é dada pela fórmula:

$$f_F(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1} \quad (2.24)$$

Onde E é a energia, μ é o potencial químico, k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura. Essa distribuição é conhecida como distribuição de Fermi-Dirac.

Os bósons, por sua vez, são partículas com spin inteiro, como fótons, glúons e bósons W e Z. Essas partículas não obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, o que significa que um número arbitrário de bósons pode ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente. Sistemas compostos por bósons são descritos por funções de onda simétricas, ou seja, que não mudam de sinal quando as partículas são permutadas.

A distribuição de Boltzmann para sistemas de bósons é dada pela fórmula:

$$f_B(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1} \quad (2.25)$$

Essa distribuição é conhecida como distribuição de Bose-Einstein.

A estatística de férmions e bósons tem aplicações em diversos campos da física, incluindo a física de partículas, a física da matéria condensada e a astrofísica.

Capítulo 3

Formalismo e Propriedades do Condensado de Bose-Einstein

Em 1995, na Universidade do Colorado, foi produzido experimentalmente o primeiro condensado de Bose-Einstein pelos físicos Eric Cornell e Carl Wieman e também por Wolfgang Ketterle no MIT. Atualmente, continuam sendo realizados experimentos, porém com tecnologias e os métodos de produção mais avançados. O primeiro condensado de Bose-Einstein foi produzido em um gás de átomos de rubídio 87, onde foi confinado por campos magnéticos e resfriado por evaporação, com a temperatura aproximada de 170 nanokelvin e uma densidade de $2,5 \cdot 10^{12}$ por centímetro cúbico e pode ser observada por aproximadamente por 15 segundos.

Três assinaturas primárias de condensação de Bose-Einstein foram vistas.

- (i) No topo de uma ampla distribuição de velocidade térmica, apareceu um pico estreito que estava centralizado na velocidade zero.
- (ii) A fração dos átomos que estavam neste pico de baixa velocidade aumentou abruptamente quando a temperatura da amostra foi reduzida.
- (iii) O pico exibiu uma distribuição de velocidade não térmica e anisotrópica esperada do estado quântico de energia mínima da armadilha magnética em contraste com a distribuição de velocidade isotrópica e térmica observada na fração ampla não condensada.

Um gás extremamente rarefeito de partículas bosônicas (de spin inteiro) é preparado e colocado em uma região de campo magnético intenso, o que faz com que essas partículas fiquem aprisionadas em uma pequena região do espaço;

Um laser atinge as partículas no sentido oposto ao seu movimento, fazendo com que elas percam cada vez mais velocidade;

O campo magnético é lentamente reduzido, de modo que as partículas mais externas, e que se movam mais rapidamente, escapem. Esse processo, que se assemelha à condensação da água, resfria ainda mais as partículas internas, que ficam com temperaturas próximas do zero absoluto.

3.1 Experimentos de Resfriamento e Armadilhamento

Os experimentos de resfriamento e armadilhamento são técnicas usadas em laboratórios de desenvolvimento científico para diminuir a temperatura de átomos (moléculas) para valores extremamente baixos e, em seguida, manipulá-los e estudá-los com precisão em diversos tipos de fenômenos físicos, por exemplo na pesquisa de condensados de Bose-Einstein, como também na criação relógios atômicos extremamente precisos, colaborando nas pesquisas para manuseio de diversas materias e possibilitando a computação quântica.

Essas técnicas geralmente envolvem o uso de lasers para resfriar e controlar o movimento dos átomos, o que permite investigar suas propriedades quânticas. Alguns exemplos de experimentos de resfriamento e armadilhamento incluem a armadilha magneto-óptica (MOT), a armadilha de Paul, a armadilha de dipolo eletromagnético (ou armadilha óptica) e a resfriamento evaporativo.

Atualmente existem vários experimentos de resfriamento e armadilhamento, e cada um funcionam de formas um pouco diferente e dependendo da pesquisa podem ser associados para investigação mais de um tipo de resfriamento, segue alguns métodos de resfriamento, como:

Armadilha Magneto-Óptica (MOT): Na MOT, os átomos são resfriados usando lasers e campos magnéticos. Os átomos são primeiro presos em uma armadilha magnética, onde um campo magnético mantém os átomos confinados em uma pequena região do espaço. Em seguida, lasers são usados para resfriar ainda mais os átomos, fazendo com que eles percam energia e reduzam sua temperatura.

Armadilha de Paul: A armadilha de Paul usa campos elétricos para prender átomos ou íons em uma pequena região do espaço. Dois eletrodos em forma de anel geram um campo elétrico oscilante que confina os átomos na região central. O resfriamento pode ser alcançado por meio de colisões elásticas entre os átomos

Armadilha de Dipolo Eletromagnético (ou Armadilha Óptica): Nesse método, os átomos são confinados usando um gradiente de intensidade de luz laser, em vez de um campo magnético ou elétrico. A luz é focada em um ponto pequeno, criando um gradiente de intensidade que atrai os átomos para o centro. Essa técnica é particularmente útil para resfriar átomos a temperaturas extremamente baixas.

Resfriamento Evaporativo: Nesse método, os átomos são inicialmente presos em uma armadilha magnética ou óptica e, em seguida, o gás é gradualmente resfriado removendo os átomos mais energéticos da armadilha. Isso pode ser feito de várias maneiras, como reduzindo a intensidade do campo magnético ou a intensidade da luz laser. À medida que os átomos mais energéticos são removidos, os átomos restantes se resfriam e a temperatura do gás diminui.

Esses são apenas alguns exemplos de como os experimentos de resfriamento e armadilhamento funcionam. Cada método tem suas próprias vantagens e limitações, e a escolha do método depende dos objetivos do experimento.

O condensado de Bose-Einstein é um estado da matéria que ocorre quando um grupo de átomos é resfriado a uma temperatura muito próxima do zero absoluto (-273,15 °C). Em teoria, isso pode ser alcançado com qualquer elemento químico que seja um boson, ou seja, um tipo de partícula que obedece à estatística de Bose-Einstein. Na prática, no entanto, alguns elementos são mais comumente usados devido à sua facilidade de manipulação e resfriamento.

Alguns dos elementos químicos comuns usados para a obtenção do condensado de Bose-Einstein incluem:

O rubídio-87 (^{87}Rb): é um dos elementos mais utilizados em experimentos de condensado de Bose-Einstein. Ele é um átomo alcalino que tem propriedades óticas e magnéticas muito convenientes para resfriamento e manipulação.

O sódio-23 (^{23}Na): é outro átomo alcalino comumente utilizado em experimentos de condensado de Bose-Einstein. Ele tem uma estrutura eletrônica simples que torna a manipulação mais fácil e é mais fácil de ser resfriado do que alguns outros átomos.

O lítio-7 (^7Li): é um elemento químico leve que é um dos bosons mais leves. Como resultado, pode ser resfriado a temperaturas muito baixas e é frequentemente usado em experimentos de condensado de Bose-Einstein para estudar efeitos quânticos de sistemas fortemente correlacionados.

Outros elementos químicos, como o hidrogênio (^1H), o hélio (^2He) e o potássio (^{19}K), também foram usados em experimentos de condensado de Bose-Einstein. No entanto, o rubídio (^{87}Rb), o sódio (^{23}Na) e o lítio (^7Li) são alguns dos elementos mais comuns devido às suas propriedades físicas e à disponibilidade de técnicas para resfriamento e manipulação.

Na seção 2.2.1 apresentamos como a equação de Schrödinger e a hipótese de De Broglie são importantes para entender o comportamento quântico de átomos e moléculas, e são fundamentais para descrever o condensado de Bose-Einstein, ou seja, a equação de Schrödinger e a hipótese de De Broglie são essenciais para a descrição e compreensão do condensado de Bose-Einstein, observamos acima alguns métodos de resfriamento, desenvolvimento das técnicas de resfriamento e armadilhamento de átomos trouxe uma nova era na física atômica e na óptica quântica.

Os experimentos iniciais com radiação e átomos, realizados por Lebedev, Nichols e Hull no início do século XX, mediram a pressão da radiação sobre objetos macroscópicos [31, 32, 33]. Em 1933, Frisch demonstrou a pressão da luz sobre átomos, observando o desvio da radiação de ressonância de uma lâmpada em um feixe de sódio atômico. Esses experimentos sentaram as bases para o entendimento da interação entre átomos e luz.

A interação da radiação eletromagnética com átomos é governada por forças elétricas e magnéticas. Na década de 1960, os cientistas começaram a compreender que a interação entre a radiação e os átomos pode ser descrita em termos de momentos de dipolo. Um dipolo é uma distribuição de carga com um polo positivo e um polo negativo separados por uma distância. Quando uma partícula carregada, como um elétron em um átomo, é submetida a um campo elétrico oscilante da radiação, ela experimenta uma força que pode ser representada como um dipolo induzido.

Essa compreensão dos efeitos dipolares na interação radiação-átomo é essencial para explicar fenômenos como a absorção, emissão e espalhamento da luz por átomos. Além disso, o reconhecimento da força da radiação como força dipolo e dipolo induzido permitiu o desenvolvimento de técnicas avançadas de manipulação e controle dos átomos utilizando campos eletromagnéticos.

A partir da década de 1960, ocorreram avanços significativos nos estudos sobre a interação da radiação com átomos. Durante essa época, foi reconhecida a força da radiação como força dipolo e dipolo induzido em 1962, e em 1968, Letokhov propôs a utilização da força radiativa para aprisionar átomos [35, 36, 37].

No entanto, a técnica de resfriamento a laser de átomos só foi desenvolvida na década de 1970, com a utilização de feixes de laser de banda estreita e intensa para manipulação dos átomos. Essa técnica culminou com a descoberta do condensado de Bose-Einstein por Cornell, Wieman e Ketterle em 1995 [10].

Desde então, o resfriamento a laser de átomos tem sido amplamente utilizado em diversos experimentos e aplicações na física. Essas aplicações incluem a realização de relógios atômicos ultra-precisos e estudos em física quântica.

3.2 A Interação de Dois e Três Corpos na Física de Sistemas de Muitos Corpos

Aqui apresentamos nossa abordagem, na qual expandimos a equação não-linear original de Ginzburg-Pitaevskii-Gross [2, 4], que inclui um termo proporcional à densidade (interação de dois corpos), adicionando um termo adicional proporcional à densidade ao quadrado (interação de três corpos). Em seguida, normalizamos essa equação para unidades adimensionais e investigamos numericamente a solução da onda s , variando os parâmetros adimensionais correspondentes, que estão relacionados ao comprimento de espalhamento de dois corpos, à intensidade da interação de três corpos e ao número de átomos no estado condensado. Como mencionado em [38], para incorporar todos os processos de espalhamento de dois corpos em um sistema de muitas partículas, substituímos o potencial de dois corpos pela matriz T de muitos corpos. Geralmente, em energias

muito baixas, aproximamos isso usando a matriz de espalhamento de dois corpos, que é diretamente proporcional ao comprimento de espalhamento [39]. Portanto, para obter a equação desejada, consideramos primeiramente a Lagrangiana efetiva, que descreve a função de onda condensada na aproximação de Hartree, resultando no funcional de energia para a equação de Ginzburg-Pitaevskii-Gross (GPG). A Lagrangiana é expressa como (Para maiores detalhes, ver [40, 41]):

$$\mathcal{L} = \int d^3r \left[\frac{i\hbar}{2} \psi^\dagger(\vec{r}) \frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial \psi^\dagger(\vec{r})}{\partial t} \psi(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2m} \psi^\dagger(\vec{r}) \nabla^2 \psi(\vec{r}) - \frac{m}{2} \omega^2 r^2 |\psi(\vec{r})|^2 \right] + \mathcal{L}_I, \quad (3.1)$$

onde \mathcal{L}_I contém a não linearidade, conforme derivado em [40], onde foram mantidos os termos de espalhamento de dois e três corpos para energia total zero.

Nesse caso, a equação não-linear de Schrödinger resultante contém termos não-lineares cúbico e quártico, correspondente às interações de dois e três corpos, respectivamente, conforme abaixo:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{m}{2} \omega^2 r^2 - N \frac{4\pi\hbar^2 |a|}{m} |\psi(\vec{r})|^2 + \lambda_3 N^2 |\psi(\vec{r}, t)|^4 \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (3.2)$$

Ressalte-se que nesse caso particular considerado em [40] estava sendo considerado que o comprimento de espalhamento de dois corpos era atrativo, daí estar sendo assumido $-|a|$ no formalismo. O objetivo era estudar como o termo de três corpos repulsivo poderia evitar o colapso previsto do condensado para determinados números críticos de átomos.

A solução estacionária correspondente à equação acima obtém-se com a separação da parte temporal, que contém o potencial químico μ ,

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{-i\mu t/\hbar} \psi(\vec{r}), \quad (3.3)$$

de formas que obtemos

$$\mu \psi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{m}{2} \omega^2 r^2 - N \frac{4\pi\hbar^2 |a|}{m} |\psi(\vec{r})|^2 + \lambda_3 N^2 |\psi(\vec{r})|^4 \right] \psi(\vec{r}) \quad (3.4)$$

A interação de dois e três corpos é fundamental para a compreensão da física de sistemas de poucos e muitos corpos. As interações de dois corpos são descritas pelo comprimento de espalhamento a de duas partículas, enquanto as interações de três corpos são consideradas como um efeito perturbativo de ordem superior para um sistema bastante diluído como o condensado de Bose-Einstein. Efeitos superiores de mais corpos também devem estar presentes, porém são negligenciados considerando que a contribuição esperada seria bastante pequena. Logo, após considerar a contribuição não-linear

principal, que vem do termo de interação de dois corpos, o próximo termo relevante a ser incluído seria o efeito devido a interação de três partículas. No desenvolvimento das pesquisas teóricas e experimentais sobre a condensação de Bose-Einstein (BEC)[6], vem sendo destacada a importância das contribuições devido a interações de três corpos.

A relevância dos condensados de Bose-Einstein para se entender as propriedades do líquido ^4He foi apontada já em 1938 por London[56], sugerindo que a peculiar transição de fase que o hélio líquido sofre a 2,18 K seria uma manifestação da condensação de Bose-Einstein. Desde então, a pesquisa sobre BEC tem recebido considerável apoio experimental e teórico [7, 55, 63, 125]

No entanto, o estudo da interação de dois e três corpos é especialmente importante em sistemas com interações atrativas de dois corpos, nos quais acredita-se amplamente que o condensado não tenha uma solução estável acima de um certo número crítico de átomos N_{max} [57, 58, 59]. A adição de um potencial repulsivo derivado de interações de três corpos é consistente com um número de átomos maior que N_{max} [60], o que estende a região de estabilidade do condensado consideravelmente. Além disso, para um grande número de bósons, a repulsão de três corpos pode superar a atração de dois corpos, e um condensado estável pode aparecer na armadilha [61].

Foi relatado que um gás de Bose suficientemente diluído e frio exibe dinâmica de três corpos semelhante para ambos os sinais do comprimento de espalhamento átomo-átomo na onda-s [62]. Para sistemas de átomos com comprimento de espalhamento átomo-átomo de s onda negativo, como no caso de ^7Li , o número de átomos permitidos no estado condensado de Bose é limitado a um valor máximo, consistente com a previsão de campo médio [57].

A interação de dois e três corpos é fundamental para a compreensão da física de sistemas de poucos e muitos corpos, especialmente em sistemas com interações atrativas de dois corpos, nos quais a adição de um potencial repulsivo derivado de interações de três corpos estende a região de estabilidade do condensado consideravelmente [7, 55, 56, 63, 125].

3.3 O formalismo de Ginzburg-Pitaevskii-Gross

O formalismo de Ginzburg-Pitaevskii-Gross é uma abordagem teórica na física de sistemas de muitos corpos, particularmente na teoria da superfluidade e supercondutividade. Ele leva o nome dos físicos que desenvolveram a teoria: Lev Landau, Vitaly Ginzburg, Evgeny Lifshitz, Lev Pitaevskii e Eugene Gross.

O formalismo descreve a evolução temporal da função de onda de um condensado de Bose-Einstein, que é um estado da matéria em que uma grande fração de partículas bosônicas está no mesmo estado quântico. A função de onda é descrita por uma equação

diferencial parcial não linear, conhecida como equação de Gross-Pitaevskii, que inclui termos que representam as interações entre partículas.

O formalismo é usado para descrever uma ampla gama de sistemas, incluindo átomos ultrafrios em armadilhas magnéticas, spinors de Bose-Einstein, polaritons em cavidades ópticas e muitos outros sistemas de física de matéria condensada. Ele também tem aplicações em outras áreas da física, como física de partículas, cosmologia e teoria da informação quântica.

As soluções da equação de Gross-Pitaevskii podem fornecer informações sobre a distribuição de densidade de partículas e a fase da função de onda, que são importantes para entender as propriedades do condensado de Bose-Einstein, como a superfluidade e a coerência de fase. O formalismo também permite a análise da estabilidade do condensado em diferentes regimes, como em presença de potenciais externos e flutuações térmicas.

O formalismo de Ginzburg-Pitaevskii-Gross (GPG) é uma abordagem teórica poderosa para descrever o comportamento de sistemas quânticos que consistem em muitos átomos ou moléculas em um estado de condensado de Bose-Einstein (BEC). O formalismo foi desenvolvido de forma independente por Eugene Gross, Lev Pitaevskii e Vitaly Ginzburg na década de 1960.

O formalismo GPG fornece uma maneira de descrever o estado de um condensado de Bose-Einstein através de uma equação de onda não linear, que é uma generalização da equação de Schrödinger. Essa equação é uma equação de continuidade para a função de onda do condensado, que descreve a evolução do condensado no tempo e no espaço.

O formalismo GPG tem sido aplicado a uma ampla gama de problemas na física da matéria condensada, incluindo a dinâmica de vórtices em condensados de Bose-Einstein [64], até a formação de solitons [34, 65].

A Lagrangiana de Ginzburg-Pitaevskii-Gross (GPG) descreve a dinâmica de um condensado de Bose em termos de sua função de onda macroscópica. A equação da Lagrangiana GPG é dada por:

$$L = i\hbar \left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - V_{ext}(\mathbf{r}) |\psi|^2 + \frac{1}{2} g |\psi|^4 \quad (3.5)$$

Onde ψ é a função de onda macroscópica que descreve o condensado de Bose, \hbar é a constante de Planck reduzida, m é a massa dos átomos do condensado, $V_{ext}(\mathbf{r})$ é o potencial externo que confina o condensado, g é a constante de interação de dois átomos e $|\nabla \psi|^2$ representa o gradiente da função de onda.

A partir da Lagrangiana GPG, pode-se obter a equação de movimento de Gross-Pitaevskii, que descreve a evolução temporal da função de onda macroscópica do conden-

sado de Bose. Essa equação é uma equação não-linear de Schrödinger, dada por:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\psi|^2 \right] \psi.$$

As equações GPG são amplamente utilizadas na física teórica e experimental de condensados de Bose, incluindo o estudo de solitões, vórtices, condensados em redes ópticas, entre outros.

3.4 Ressonância de Feshbach

A ressonância é um fenômeno que ocorre quando a frequência de um sistema é igual ou muito próxima à frequência natural do sistema. Quando as frequências são iguais, os materiais se quebram, comprometendo sua estrutura.

A ressonância de Feshbach é uma característica de sistemas de muitos corpos, onde é determinado se o acoplamento está em estado ligado ou desligado em relação aos graus de liberdade. O nome ressonância de Feshbach é uma homenagem ao físico Herman Feshbach [66].

A ressonância de Feshbach torna-se muito importante nos estudos de átomos frios, como nos Condensados de Bose-Einstein, bem como nos gases de Fermi. Podemos controlar através da ressonância de Feshbach e a constante de espalhamento dos gases, variando as frequências e, assim, a força e energia da interação atômica em uma nuvem de átomos. A temperaturas ultra-frias, essas propriedades são proporcionais à densidade e ao comprimento de espalhamento a , que influenciam a dinâmica das colisões.

O comprimento de espalhamento a pode ter sinal negativo ou positivo, resultando em atração quando $a < 0$ e repulsão quando $a > 0$, sendo mais estável a interação neste último caso. O ^{87}Rb e o ^{23}Na possuem propriedades favoráveis para a obtenção de Condensados de Bose-Einstein. No entanto, espécies atômicas como ^{39}K , ^{85}Rb e ^{133}Cs não são favoráveis à obtenção de Condensados de Bose-Einstein e a ressonância de Feshbach se faz necessária. Ela permite sintonizar as frequências e tornar o comprimento de espalhamento positivo, facilitando a formação do Condensado de Bose-Einstein.

$$a(B) = a_f \left(1 - \frac{\Delta}{B - B_0} \right) \quad (3.6)$$

A Equação 3.6 descreve o comprimento de espalhamento $a(B)$ em função do campo magnético B . Esse comprimento é diretamente proporcional ao comprimento de espalhamento de fundo a_f . A razão entre a largura de ressonância, o parâmetro Δ , e a diferença do campo magnético sintonizável B e o campo magnético B_0 onde o comprimento de

espalhamento diverge. A ressonância de Feshbach permite ligar ou desligar a interação atômica em um regime de temperatura muito baixa através da aplicação desse campo magnético sintonizável.

No limite de baixas temperaturas, um dos observáveis relevantes é o comprimento de espalhamento na onda s (ou seja, para momento angular $\ell = 0$, $a_s = a(B)$). Isso fornece uma aproximação relevante para a interação de partículas em um gás bastante diluído. Nesse caso, temos a constante de acoplamento (g), que é diretamente proporcional a esse comprimento de espalhamento, expresso na Equação 3.7. Para interações atrativas, temos $g < 0$, enquanto para interações repulsivas, $g > 0$.

$$g \equiv \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \quad (3.7)$$

Com as experiências em laboratórios de átomos ultra-frios, também tivemos várias descobertas de fenômenos previamente previstos. Entre esses fenômenos, está a realização experimental do efeito Efimov.

A ressonância de Feshbach ressalta a importância desse fenômeno em sistemas de muitos corpos, especialmente em estudos de átomos frios, como os Condensados de Bose-Einstein e gases de Fermi. Através da ressonância de Feshbach, é possível controlar e ajustar a interação atômica em nuvens de átomos ultra-frios, modificando as frequências e, por consequência, a energia das colisões. Além disso, a capacidade de manipular o comprimento de espalhamento a e a constante de acoplamento g por meio da ressonância de Feshbach desempenha um papel fundamental na formação de Condensados de Bose-Einstein, tornando possível alcançar estados altamente correlacionados e estudar fenômenos surpreendentes, como o efeito Efimov. As descobertas experimentais nesse campo reforçam a profunda relação entre a física quântica e os fenômenos observáveis, conduzindo a novas perspectivas na compreensão das propriedades da matéria em temperaturas ultra-baixas [52, 53].

3.4.1 Estados Efimov

O fenômeno conhecido como efeito Efimov é um fascinante resultado da física quântica que emerge em sistemas de três partículas interagindo, apresentando uma peculiaridade intrincada. Nesse contexto, a característica proeminente do efeito Efimov é a sua capacidade de gerar uma infinidade de estados ligados excitados ou estados ressonantes. Especificamente, quando se considera um sistema composto por três partículas, a natureza quântica dessas partículas possibilita que, em certas circunstâncias, eles possam formar estados ligados que desafiam a intuição clássica.

O cerne desse fenômeno reside na divergência do comprimento de espalhamento de

dois corpos, que pode se tornar mais ou menos infinito. Essa peculiaridade teórica tem implicações surpreendentes. Em um cenário em que o comprimento de espalhamento entre duas partículas atinge extremos, o que implica em uma energia de ligação entre esses dois corpos sendo nula, observa-se algo contraintuitivo: a proliferação de estados ligados de três corpos. Ou seja, mesmo que a interação entre pares de partículas não seja suficientemente forte para ligá-las, o sistema trímero consegue alcançar estados ligados devido à interação quântica entre todas as três partículas.

A notável amplificação na quantidade de estados ligados de três partículas conforme nos aproximamos do limite $|a_s| \rightarrow \infty$ é um traço fundamental desse fenômeno. Uma analogia intrigante para essa situação é a formação de estados Borromeanos, que são configurações onde três elementos estão interligados, mas qualquer par de elementos não está ligado. Esse arranjo ilustra como a natureza quântica e os efeitos de três corpos podem gerar resultados profundamente não triviais, mesmo em circunstâncias onde a física clássica tradicional não prevê tais comportamentos.

O efeito Efimov deve seu nome ao físico russo Vitaly Efimov, que o propôs pela primeira vez em 1970. Desde então, suas implicações têm ecoado na física atômica e nuclear, abrindo portas para compreender sistemas complexos de partículas. Esse fenômeno exemplifica de maneira vívida a intrincada interação entre os princípios quânticos e os resultados observáveis, reforçando como a mecânica quântica pode revelar aspectos inesperados e fundamentais da natureza [52, 53].

3.5 Desenvolvimento da Equação de Schrödinger e suas Implicações Quânticas

A equação de Schrödinger é uma das mais importantes equações da física, descrevendo a evolução temporal de sistemas quânticos. Ela foi proposta pelo físico austríaco Erwin Schrödinger em 1926, como uma maneira de unificar a mecânica ondulatória de Louis de Broglie e a mecânica matricial de Werner Heisenberg.

A origem da equação de Schrödinger pode ser rastreada até as tentativas de Max Planck e Albert Einstein de explicar a radiação eletromagnética emitida por corpos quentes, conhecida como radiação de corpo negro. Em 1900, Planck propôs que a energia da radiação eletromagnética era quantizada em pacotes discretos, chamados de "quanta". Isso levou à ideia de que a energia da matéria também poderia ser quantizada.

Em 1924, Louis de Broglie propôs que todas as partículas poderiam ter propriedades ondulatórias, uma ideia que foi confirmada experimentalmente pouco depois por Davisson e Germer, que observaram a difração de elétrons por um cristal. Essa teoria de dualidade onda-partícula foi a base para a mecânica ondulatória.

Enquanto isso, Heisenberg e outros desenvolveram uma teoria matricial da mecânica quântica, que descrevia como as grandezas físicas, como posição e momento, eram representadas por matrizes. No entanto, a interpretação física dessas matrizes não era óbvia.

Schrödinger percebeu que a mecânica ondulatória de de Broglie poderia ser expressa matematicamente como uma equação diferencial, que descrevia a evolução temporal de uma função de onda. Ele derivou essa equação em 1926, baseando-se em ideias de Hamilton e de Hamilton-Jacobi e utilizando um método matemático chamado de "separação de variáveis". A equação resultante tornou-se conhecida como a equação de Schrödinger, conforme demonstrado no seção 2.2.1.

A equação de Schrödinger permitiu aos físicos calcular as propriedades dos sistemas quânticos, como a energia dos estados permitidos e as probabilidades de medições em diferentes posições. Ela tornou possível prever e explicar uma série de fenômenos quânticos, como a difração de elétrons por um cristal, a estrutura dos átomos e a explicação da superposição de estados quânticos.

3.5.1 Equação de Gross-Pitaevskii

A equação de Gross-Pitaevskii é uma ferramenta fundamental para a descrição de sistemas de condensados de Bose-Einstein em física atômica e óptica quântica. Essa equação é uma forma não linear da equação de Schrödinger que descreve o comportamento de uma condensação de Bose em um potencial externo.

A partir da equação de Gross-Pitaevskii, é possível obter o valor esperado de uma observável em um sistema de condensado de Bose. Para isso, é necessário determinar a densidade do condensado, que pode ser obtida a partir da solução da equação.

Além disso, a equação de Gross-Pitaevskii permite o cálculo do potencial químico do sistema, que representa a energia necessária para adicionar uma partícula ao condensado. Esse valor é de grande importância para a compreensão do comportamento do condensado em diferentes regimes termodinâmicos.

Outra aplicação da equação de Gross-Pitaevskii é na descrição do potencial da armadilha em um sistema de condensado de Bose. O potencial da armadilha é um potencial externo que é aplicado para manter o condensado confinado em uma região do espaço. A equação de Gross-Pitaevskii pode ser utilizada para determinar a forma do potencial da armadilha que melhor se adequa ao sistema em questão.

A equação de Gross-Pitaevskii também é importante na descrição da miscibilidade de diferentes espécies de condensados de Bose em um mesmo sistema. A miscibilidade é a capacidade de duas espécies de condensados coexistirem em um mesmo espaço. A equação de Gross-Pitaevskii permite a determinação das condições para a miscibilidade em sistemas de condensados de Bose.

Por fim, a equação de Gross-Pitaevskii é útil na descrição de vórtices em condensados de Bose. Vórtices são regiões do condensado onde a fase da função de onda se altera abruptamente. A equação de Gross-Pitaevskii permite a determinação da forma desses vórtices e sua interação com outras partículas no sistema.

Em resumo, a equação de Gross-Pitaevskii é uma ferramenta essencial para a compreensão de sistemas de condensados de Bose-Einstein em física atômica e óptica quântica. A partir dessa equação, é possível obter informações importantes sobre a densidade, o potencial químico, a forma da armadilha, a miscibilidade e a formação de vórtices em um sistema de condensado de Bose.

3.5.2 Potencial Químico

O potencial químico μ_i de uma espécie i em uma mistura atômica é definido como a razão de variação da energia livre de um sistema termodinâmico com relação a variação no número de átomos ou moléculas da espécie adicionadas ao sistema. Logo, é a derivada parcial da energia livre com relação ao número de átomos da espécie, como todas outras espécies permanecendo constantes. O potencial químico é uma grandeza que depende da temperatura, pressão e número de partículas do sistema, e é definido como a variação da energia livre de Gibbs com relação ao número de partículas, mantendo-se a temperatura T e a pressão P constantes. Na mecânica quântica, é comum descrever o potencial químico em termos da densidade de energia livre de Gibbs, que é a energia livre por unidade de volume. Considerando-se várias espécies i , sendo

$$dU = TdS - PdV + \sum_i u_i dN_i$$

a variação infinitesimal da energia interna U , com S, P, V , respectivamente, entropia, pressão e volume do sistema termodinâmico, o potencial químico da espécie i seria

$$\mu_i = \left(\frac{\partial U}{\partial N_i} \right)_{S, V, N_{j \neq i}} .$$

Na equação não-linear de Schrödinger, o potencial químico é a auto-solução estacionária, que se identifica com auto-valor de energia para o caso linear.

Em sistemas quânticos, o potencial químico é importante porque afeta a distribuição de partículas no sistema. Ele determina a probabilidade de se encontrar uma partícula em uma determinada região do espaço, e é crucial para a descrição de fenômenos como a condensação de Bose-Einstein, em que um grande número de partículas ocupam um mesmo estado quântico.

3.6 Redução Dimensional Espacial

Considerando a simetria da armadilha que é utilizada em sistemas atômicos condensados, para simplificar o formalismo, é útil se providenciar uma redução dimensional do caso tri-dimensional (3D) no espaço, para o caso bi-dimensional (2D), ou para o caso uni-dimensional (1D). No caso da redução da equação não-linear 3D para 2D, resolvemos analiticamente de forma exata uma das dimensões através de um ansatz Gaussiano, considerando-se que o sistema armadilhado é tipo-panqueca (ou tipo-pizza), de modo que a não-linearidade não afete uma das dimensões que estaria mais confinada. No outro caso de redução de 3D para 1D, o sistema confinado é tipo charuto, com a não-linearidade não afetando duas dimensões, que poderiam ser resolvidas analiticamente, com ansatz Gaussianos.

Nessa sessão, vamos exemplificar o caso da redução dimensional de 3D para 1D, lembrando-se que no capítulo principal da tese onde temos dois condensados acoplados, a redução foi realizada de 3D para 2D.

3.6.1 Redução Dimensional de 3D para 1D da Equação de Gross-Pitaevskii

A equação de Gross-Pitaevskii é uma equação não linear que descreve a evolução temporal da função de onda de um condensado de Bose-Einstein. Ela é obtida a partir da equação de Schrödinger para um sistema de muitas partículas, usando uma aproximação média do campo de partículas.

O formalismo da equação de Gross-Pitaevskii é baseado na representação de segunda quantização, que descreve o sistema em termos de operadores de criação e destruição de partículas. Na representação de segunda quantização, a função de onda do sistema é substituída por um operador de campo, que é uma função que descreve a amplitude e a fase do condensado em cada ponto do espaço. O operador de campo é definido como a média dos operadores de criação e destruição de partículas do condensado, e pode ser escrito como uma soma de funções de onda espaciais e temporais.

A equação de Gross-Pitaevskii é obtida a partir da equação de Schrödinger para o operador de campo, que descreve a evolução temporal da amplitude e da fase do condensado. A equação de Schrödinger é transformada em uma equação de evolução para o operador de campo, que inclui um termo não linear que descreve a interação entre as partículas do condensado. Esse termo não linear é proporcional à densidade do condensado ao quadrado e depende do potencial externo que confina o condensado.

A equação de Gross-Pitaevskii é uma equação não linear que pode ser resolvida numericamente para obter a dinâmica temporal da função de onda do condensado. Ela é

amplamente usada em diversas áreas da física quântica, como a física atômica, a física da matéria condensada e a astrofísica, para descrever a dinâmica de sistemas quânticos de muitas partículas.

Na descrição da onda quantizada de um sistema formado por N bósons interagentes de massa m , confinados por um potencial externo $V_{ext}(\vec{r})$, obtemos o hamiltoniano do sistema de muitos corpos:

$$\mathcal{H} = \int d\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) \right] \hat{\Psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d\vec{r} d\vec{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') \quad (3.8)$$

A equação de Gross-Pitaevskii consiste em duas partes principais o termo não linear e o potencial externo:

O termo não linear descreve a interação entre as partículas do condensado. Essa interação é a chave para a formação do condensado e influencia sua estabilidade e comportamento coletivo. O termo não linear é proporcional à densidade do condensado elevada ao quadrado, capturando a interação entre as partículas vizinhas.

A seguir temos a equação de Gross-Pitaevskii:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V_{ext}(\vec{r}) \Psi + g |\Psi|^2 \Psi \quad (3.9)$$

onde Ψ é a função de onda:

$$\Psi \equiv \Psi(\vec{r}, t) = \exp\left(\frac{-i\mu t}{\hbar}\right) \psi(\vec{r}) \quad (3.10)$$

e Ψ^* é a função de onda conjugada:

$$\Psi^* \equiv \Psi^*(\vec{r}, t) = \exp\left(\frac{i\mu t}{\hbar}\right) \psi^*(\vec{r}) \quad (3.11)$$

a constante de acoplamento g que carrega a constante de espalhamento a_s :

$$g \equiv \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \quad (3.12)$$

O termo do potencial externo representa a influência de um potencial sobre o condensado de Bose-Einstein. Isso pode ser um potencial magnético, óptico ou elétrico, por exemplo. O termo do potencial externo é geralmente dado por uma função que depende das coordenadas espaciais, descrevendo a forma e a intensidade do potencial em diferentes regiões do espaço, temos o potencial externo $V_{ext}(\vec{r})$ dado por:

$$V_{ext}(\vec{r}) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (3.13)$$

O laplaciano é um operador diferencial que desempenha um papel importante na descrição matemática de fenômenos físicos, incluindo o potencial externo em sistemas quânticos. No contexto do potencial externo, o laplaciano atua sobre a função de onda de um sistema para descrever como ela se curva ou se espalha em resposta à influência do potencial.

$$\Delta = \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (3.14)$$

Equação de Gross Pitaevkii explicita

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) + \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} |\Psi|^2 \right] \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.15)$$

A obtenção de soluções tipo charuto ou tipo panqueca para a equação de Gross-Pitaevskii depende das condições iniciais e das características do sistema físico em consideração. Essas soluções correspondem a diferentes perfis espaciais da função de onda e estão associadas a diferentes regimes de comportamento do sistema.

Solução tipo charuto é quando reduzimos de $3D$ para $1D$. A solução tipo charuto refere-se a uma distribuição espacial da função de onda que é fortemente confinada em uma direção e mais difusa em outras direções. Essa forma é tipicamente encontrada em sistemas altamente anisotrópicos, onde a frequência de oscilação harmônica é muito maior em uma direção do que nas outras. Por exemplo, em armadilhas unidimensionais extremamente apertadas, onde a oscilação ocorre predominantemente ao longo de um eixo, a função de onda assume uma forma alongada, parecida com um charuto.

A seguir apresentamos a função de onda, onde separamos em duas funções uma dependente do espaço $R(x, y)$ e outra espaço-tempo $Z(z, t)$, assim reduzimos de $3D$ para $1D$.

$$\Psi(\vec{r}, t) = R(x, y)Z(z, t) \quad (3.16)$$

Agora substituindo [3.16](#) em [3.15](#)

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial R(x,y)Z(z,t)}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) R(x,y)Z(z,t) \\
&+ \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) R(x,y)Z(z,t) \\
&+ \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} |R(x,y)Z(z,t)|^2 R(x,y)Z(z,t)
\end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados da equação (Sanduichando), por $R(x,y)^*$ para encontrar o valor esperado, realizando a integração dos dois lados da equação, ou seja, aplicando a propriedade de completude, temos:

$$\begin{aligned}
\int R(x,y)^* i\hbar \frac{\partial R(x,y)Z(z,t)}{\partial t} dx dy &= - \int R(x,y)^* \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) R(x,y)Z(z,t) dx dy \\
&+ \int R(x,y)^* \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) R(x,y)Z(z,t) dx dy \\
&+ \int R(x,y)^* \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} |R(x,y)Z(z,t)|^2 R(x,y)Z(z,t) dx dy
\end{aligned}$$

Função de onda $R(x,y)$:

$$R(x,y) = \sqrt{\frac{m(\omega_x + \omega_y)}{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{m(x^2 + y^2)(\omega_x + \omega_y)}{2\hbar}\right) \quad (3.17)$$

Realizando mudança de variáveis:

$$R(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi l_{\perp}}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2l_{\perp}^2}\right) \quad (3.18)$$

Considerando as frequências

$$\omega_{\perp} = \omega_x = \omega_y \gg \omega_z \quad (3.19)$$

Normalização

$$\int R(x,y)^* R(x,y) dx dy = 1 \quad (3.20)$$

Realizando os cálculos e separando as funções em $R(x,y)$ e em $Z(z)$ que representam o oscilador harmônico, obtemos o potencial químico:

$$\mu' Z(z) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{m}{2} (\omega_z^2 z^2) + 2\omega_\perp \hbar a_s |Z(z)|^2 \right] Z(z) \quad (3.21)$$

Mudanças de variáveis:

$$\tau = \omega_\perp \cdot t, \alpha^2 = \left(\frac{\omega_z}{\omega_\perp} \right)^2, Z \equiv \frac{z}{l_\perp}, z = Z \cdot l_\perp, l_\perp = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_\perp}}, l_\perp^2 = \frac{\hbar}{m\omega_\perp}$$

Obtemos:

$$2i \frac{\partial Z(z, \tau)}{\partial(\tau)} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z, \tau) + \alpha^2 z^2 Z(z, \tau) + |Z'|^2 Z(z, \tau) \quad (3.22)$$

$$Z(z, \tau) = u(z, \tau) = u \exp\left(\frac{i\omega_z t}{\hbar}\right) = u \exp\left(\frac{i\omega_z \omega_\perp t}{\hbar \omega_\perp}\right) \quad (3.23)$$

A função de onda

$$\alpha = \left(\frac{\omega_z}{\omega_\perp} \right)^2, \sqrt{\alpha} = \frac{\omega_z}{\omega_\perp} e \tau = \omega_\perp t \quad (3.24)$$

$$Z(z, \tau) = u(z, \tau) = u \exp\left(\frac{i\omega_z t}{\hbar}\right) = u \exp\left(\frac{i\omega_z t}{\hbar}\right) \quad (3.25)$$

$$= u \exp\left(\frac{i\omega_z \omega_\perp t}{\hbar \omega_\perp}\right) = u \exp\left(\frac{i\sqrt{\alpha} \tau}{\hbar}\right) \quad (3.26)$$

Função de onda:

$$u(z, \tau) \equiv \sqrt{4|a_{s0}|} Z(z, t) \exp\left(\frac{i\omega t}{\hbar}\right) \quad (3.27)$$

Solução tipo panqueca é quando reduzimos de 3D para 2D

$$\Psi(\vec{r}, t) = R(x, y, t) Z(z) \quad (3.28)$$

A solução tipo panqueca refere-se a uma distribuição espacial da função de onda que é ampla em uma direção e muito confinada em outras direções. Essa forma é encontrada

em sistemas altamente anisotrópicos, onde a frequência de oscilação harmônica é muito maior em duas direções do que na terceira. Por exemplo, em armadilhas bidimensionais altamente apertadas, onde as oscilações ocorrem principalmente em dois eixos, a função de onda assume uma forma achatada, parecida com uma panqueca.

A obtenção dessas soluções depende da modelagem adequada do potencial, das condições iniciais e das interações entre as partículas no sistema. As características do sistema, como o formato do potencial e as frequências de oscilação harmônica ao longo dos diferentes eixos, influenciam diretamente a forma da solução.

Capítulo 4

Instabilidades

A compreensão das instabilidades é uma questão fundamental em diversas áreas da física, como na física clássica e na física quântica. Em ambas as áreas, fenômenos como o caos, vórtices e turbulências podem surgir em fluidos e em sistemas de muitas partículas, resultando em comportamentos complexos e imprevisíveis.

Na física clássica, a turbulência é um fenômeno complexo que ocorre em fluidos em movimento, resultante da interação entre forças que causam o movimento e as forças de viscosidade que tendem a suavizar o fluxo. Vórtices também são regiões de rotação em um fluido que podem afetar o fluxo do fluido. O caos, por sua vez, refere-se a um tipo específico de comportamento dinâmico que pode ocorrer em sistemas físicos, onde pequenas mudanças nas condições iniciais podem levar a grandes diferenças no comportamento futuro do sistema.

Na física quântica, a turbulência quântica surge em sistemas de muitas partículas, como no condensado de Bose-Einstein. Nesse sistema, todas as partículas estão em um mesmo estado quântico, o que leva a comportamentos coletivos complexos, como a formação de filamentos de vórtices e instabilidades decorrentes da interação entre esses vórtices. O estudo das instabilidades em sistemas quânticos é fundamental para entendermos as propriedades de muitos materiais, desde superfluidos até semicondutores.

Este capítulo explorará as instabilidades em sistemas físicos, tanto na física clássica quanto na física quântica, com foco nas aplicações em turbulências, vórtices e caos. Discutiremos a formação e a interação de vórtices em fluidos, bem como a turbulência quântica em sistemas de muitas partículas, incluindo o condensado de Bose-Einstein. Além disso, abordaremos as implicações dessas instabilidades em propriedades físicas e em aplicações práticas, como em engenharia de fluidos e na fabricação de materiais.

4.1 Caos

O caos é um fenômeno complexo e intrigante que ocorre em diversos sistemas dinâmicos da natureza, desde sistemas climáticos e biológicos até sistemas físicos e matemáticos. O termo "caos" é geralmente utilizado para descrever um estado de desordem aparente e imprevisibilidade, mas na matemática e na física, o caos tem um significado mais preciso

e técnico.

Na física, o caos é um fenômeno caracterizado pela imprevisibilidade das trajetórias de um sistema dinâmico determinístico. Isso significa que, embora as equações que descrevem o sistema sejam completamente determinísticas, pequenas variações nas condições iniciais podem levar a grandes diferenças nos resultados finais. Ou seja, sistemas caóticos são altamente sensíveis às condições iniciais, conforme a ref. [14].

Na matemática, o estudo do caos está relacionado à teoria dos sistemas dinâmicos. Os sistemas dinâmicos são aqueles que mudam com o tempo, e podem ser descritos por equações matemáticas. O estudo do caos em sistemas dinâmicos é importante para entender como eles se comportam e evoluem, e como pequenas mudanças nas condições iniciais podem afetar significativamente sua dinâmica.

Algumas características distintivas que o distinguem de outros fenômenos dinâmicos. Em sistemas caóticos, a evolução temporal pode parecer aparentemente aleatória e complexa, mesmo que as equações que descrevem o sistema sejam completamente determinísticas. Isso ocorre porque, em sistemas caóticos, pequenas perturbações nas condições iniciais são amplificadas e se propagam pelo sistema, resultando em uma ampla gama de comportamentos possíveis.

Outra característica importante do caos é a presença de fractais. Os fractais são estruturas matemáticas auto-similares, ou seja, que se repetem em diferentes escalas. Os sistemas caóticos muitas vezes geram padrões fractais, que são formas geométricas complexas e irregulares que se repetem infinitamente em diferentes escalas.

Os sistemas caóticos muitas vezes apresentam uma propriedade chamada de sensibilidade às condições iniciais. Isso significa que pequenas mudanças nas condições iniciais podem levar a grandes diferenças nos resultados finais. Essa propriedade é uma das principais razões pelas quais os sistemas caóticos são imprevisíveis a longo prazo.

Existem aplicações do caos em várias áreas da ciência e da tecnologia. Em física, o estudo do caos é importante para entender a dinâmica de sistemas físicos complexos, como fluidos turbulentos e sistemas gravitacionais. Na biologia, o caos é encontrado em muitos sistemas biológicos, como a dinâmica populacional de espécies, e pode ter implicações para o controle e prevenção de doenças.

Na matemática, o estudo do caos tem aplicações em várias áreas, como a teoria dos sistemas dinâmicos e a geometria fractal. Além disso, o estudo do caos também tem aplicações na engenharia e na tecnologia. Por exemplo, o caos pode ser usado para melhorar a eficiência de sistemas de controle, como na estabilização de circuitos eletrônicos. Também temos a aleatoriedade aparente dos sistemas caóticos pode ser usada em aplicações como criptografia e geração de números aleatórios.

Embora os sistemas caóticos sejam imprevisíveis a longo prazo, é possível controlar e prever seu comportamento em curto prazo. Essa abordagem é conhecida como controle

do caos e envolve a aplicação de pequenas perturbações no sistema para direcioná-lo a um estado desejado. O controle do caos tem aplicações em áreas como comunicações, processamento de sinal e controle de processos industriais.

A previsibilidade do caos também pode ser melhorada por meio de técnicas de modelagem matemática e simulação numérica. Modelos matemáticos precisos podem fornecer informações valiosas sobre a dinâmica de um sistema caótico, permitindo que os pesquisadores entendam melhor seu comportamento e prevejam seu futuro a curto prazo, conforme ref. [43].

O estudo do caos é um campo fascinante e em constante evolução, com aplicações em diversas áreas da ciência, da tecnologia e da engenharia. Embora os sistemas caóticos sejam imprevisíveis a longo prazo, é possível controlar e prever seu comportamento em curto prazo por meio de técnicas de controle e modelagem matemática.

O caos também tem implicações filosóficas e culturais. A imprevisibilidade e complexidade dos sistemas caóticos nos lembram que o mundo natural é complexo e inerentemente incerto, e que a compreensão e a previsão de seu comportamento requerem um esforço constante de pesquisa e aprendizado.

4.2 Natureza dos Vórtices

Os vórtices aparecem naturalmente em uma ampla gama de gases e fluidos. Pode-se observar um vórtice, por exemplo, quando a água se funde em um movimento circular no ralo de uma banheira cheia, depois de puxar o tampão do ralo. Ou, por exemplo, durante tempestades, quando os tornados, que são vórtices extremamente grandes, se formam. Mas os vórtices também existem em escalas muito pequenas, por exemplo em líquidos quânticos como o superfluido Hélio, gases atômicos ultrafrios ou em supercondutores nos quais os vórtices têm propriedades regidas pelas leis da física quântica, que às vezes tem implicações estranhas e não intuitivas.

O tamanho de um vórtice é caracterizado pela corrente total de partículas que circulam em torno do centro do vórtice, seu núcleo. Em líquidos quânticos, os vórtices não vêm em tamanhos arbitrários, mas existem apenas em um conjunto quantizado de tamanhos. O menor vórtice tem um único quantum. Nenhum vórtice menor pode existir em um líquido quântico homogêneo. Todos os vórtices maiores têm múltiplos inteiros do tamanho do menor vórtice. A quantização do tamanho do vórtice ocorre porque o líquido é forçado pelas leis da mecânica quântica a um movimento de travamento circulante em torno do núcleo do vórtice.

Em experimento [44] já foi gerado um único vórtice quântico em um pequeno sanduíche em forma de rosquinha feito de dois eletrodos supercondutores em forma de anel de 100 microns de diâmetro separados por um filme dielétrico muito fino. Nesse

sistema, conseguiram confinar o vórtice em um poço de potencial usando um pequeno campo magnético. O vórtice no poço de potencial se comporta essencialmente como uma bola de gude em uma tigela. Se alguém deslocar a bola de gude do centro da tigela, ela rolará de volta para o centro em um movimento oscilatório. Em seguida, investigaram experimentalmente com muito cuidado a dinâmica de tal vórtice preso em um poço de potencial a temperaturas muito baixas. Observando que, quando o vórtice oscila no fundo do poço, ele o fará apenas com um conjunto discreto de amplitudes permitidas pelas leis da mecânica quântica. Da mesma forma que os próprios vórtices existem apenas em um conjunto quantizado de tamanhos, em baixas temperaturas eles também podem oscilar apenas com um certo conjunto discreto de amplitudes no potencial. Observamos essa propriedade do vórtice ao confiná-lo com radiação de micro-ondas de um de seus estados oscilatórios para o outro.

Além disso, como foi baixado uma das bordas do poço de potencial (correspondente a uma inclinação da tigela), os pesquisadores puderam observar o vórtice escapando do poço por um túnel através da parede lateral do poço, ou seja, o vórtice pode escapar do poço mesmo que a amplitude de suas oscilações seja pequena demais para superar o topo da barreira, esse processo é permitido para minúsculos vórtices pelas regras da mecânica quântica.

Essas propriedades mecânicas genuinamente quânticas na dinâmica de um único vórtice isolado foram observadas pela primeira vez nestes experimentos [44]. Tais experimentos ajudarão os cientistas a entender melhor as propriedades de baixa temperatura de vórtices e materiais que contêm vórtices. Por um lado, os vórtices frequentemente limitam o desempenho de materiais ou dispositivos supercondutores, como filmes supercondutores usados para transporte de corrente, sensores de campo magnético sensíveis (SQUIDs) ou outros eletrônicos supercondutores. Por outro lado, a dinâmica quântica controlada de vórtices também pode abrir um caminho viável para a construção de elementos para um computador quântico baseado no fenômeno observado.

4.3 Vórtices e Estados de Momento Angular

Em materiais supercondutores, a formação de vórtices na presença de um campo magnético aplicado já vem sendo estudada há muito tempo [45]. Quando o supercondutor é submetido a um campo magnético, as supercorrentes de pares de Cooper em seu interior se ajustam de maneira a expulsar o campo, o que é conhecido como efeito Meissner. Porém, especialmente em ligas supercondutoras, se o campo for maior que um certo campo crítico, ele é capaz de penetrar na amostra supercondutora, formando uma linha de fluxo magnético quantizado, ao redor da qual se forma um vórtice na supercorrente. A medida que o campo aumenta, mais vórtices vão entrando na amostra de maneira quantizada e se

agrupando em uma rede triangular. Porém, em 2003, Chibotaru e coautores estudaram supercondutores de tamanho mesoscópico com várias geometrias e verificaram que o padrão de vórtices formado nessas estruturas não só segue a formação da rede triangular, como também acompanha a mesma simetria do sistema [46]; desta forma, se o sistema é quadrado, por exemplo, esperam-se padrões de vórtices com tal simetria.

Inspirados por essa tendência de se estudar a geometria da rede de vórtices em sistemas mesoscópicos, em 2005, Slachmuylders et al. investigaram um efeito parecido em pontos quânticos semicondutores. A ideia geral é a seguinte: se elétrons em um sistema semiconductor plano de geometria circular são submetidos a um campo magnético perpendicular externo, as energias dos autoestados formam um padrão com uma série de cruzamentos entre estados no espectro como função do campo. Como o momento angular neste caso comuta com o Hamiltoniano, os autoestados de energia também são autoestados de momento angular, e os cruzamentos no espectro, na prática, representam cruzamentos entre estados diferentes de momento angular. Porém, se essa simetria circular é quebrada por um potencial de confinamento triangular, ou quadrado, é necessário que haja anti-cruzamentos, ao invés de cruzamentos, no espectro, uma vez que autoestados de momento angular não são mais autoestados do sistema. Isso indica a possibilidade de um estado exatamente sobre um desses anti-cruzamentos ser uma combinação de estados de momento angular diferentes. Mais ainda, como o sistema não é circular, círculos menores de corrente eletrônica induzidos pelo campo magnético dentro da geometria confinante podem ser responsáveis pela quantização de momento angular no sistema. Tais correntes circulantes seriam análogas aos vórtices em supercondutores, enquanto a quantização de momento angular seria análoga à quantização do fluxo magnético. A analogia parece se justificar ainda mais quando percebemos que a primeira equação de Ginzburg-Landau, que descreve a densidade de pares de Cooper no supercondutor, e, na verdade, é a mesma equação de Schrödinger que rege elétrons no semiconductor, mas com um potencial não linear adicional. A possibilidade de se combinar estados de momento angular positivo e negativo nos estados dos anti-cruzamentos do espectro do ponto quântico semiconductor, prevendo assim a existência de uma rede de vórtices e anti-vórtices, torna ainda mais interessante este tipo de estudo. Uma investigação bastante completa foi feita então para se estudar estes estados de vórtices em pontos quânticos semicondutores quadrados e triangulares e sua comparação com o esperado em supercondutores mesoscópicos similares [47].

Com a descoberta do grafeno, surge agora um novo sistema para se investigar a formação deste tipo de vórtice. Na verdade, um padrão de vórtices nas conexões de Berry de um ponto quântico de grafeno com geometria triangular zigzag, no modelo contínuo, foi feito em 2010 por Ezawa. Porém, esforços no sentido de se estudar a formação de vórtices induzidos por campos magnéticos nesta e em outras geometrias e

outros tipos de borda ainda são escassos na literatura. Mais uma motivação para este estudo surge quando lembramos que, diferentemente dos semicondutores, onde elétrons de baixa energia obedecem à equação de Schrödinger do modelo de massa efetiva, e dos supercondutores, onde pares de Cooper obedecem à equação de Schrödinger não-linear, no grafeno, os elétrons de baixa energia obedecem à equação de Dirac para partículas sem massa. Torna-se então interessante investigar se há de fato a formação de texturas de vórtices de correntes em algum dos autoestados de energia dessas estruturas de grafeno e, se há, então, sob que condições de intensidade de campo, geometria e tipo de borda, e como estes vórtices se relacionam com estados de momento angular.

4.4 Vórtices Ópticos

Os vórtices atraíram a atenção dos físicos em parte por causa de sua estabilidade excepcional. Os vórtices podem ocorrer naturalmente como redemoinhos e tornados na Terra e como vórtices gravitacionais em torno de buracos negros no espaço. Na física quântica, os vórtices são geralmente encontrados em conjuntos de partículas, como superfluidos, supercondutores e condensados de Bose-Einstein. No entanto, se o movimento de uma única partícula poderia representar um vórtice não foi abordado até 1992, quando Allen et al. sugeriram que os fótons em um feixe de laser podem transportar momento angular orbital como um vórtice. Desde então, vários métodos para geração e detecção de feixes de vórtices ópticos foram desenvolvidos e aplicados em muitas áreas científicas, e também foram gerados feixes de vórtices de outra partícula elementar, o elétron.

4.5 Turbulência

A compreensão da turbulência é um dos maiores desafios atuais da física, tanto em seu contexto clássico quanto quântico. Embora a turbulência clássica seja governada pelas leis da mecânica clássica, a turbulência quântica é construída sobre emaranhados de filamentos de vórtices discretos, o que torna seu estudo ainda mais complexo.

Uma das principais dificuldades em entender a turbulência é a falta de uma teoria de primeiros princípios para explicar a intermitência espaço-temporal observada. Os fluxos turbulentos podem ser considerados como uma intrínseca coleção de vórtices que interagem mutuamente, mas a imagem se torna ainda mais precisa na turbulência quântica.

Recentemente, foram estudadas as estatísticas de circulação de velocidade em turbulência quântica e clássica. Os resultados mostraram que, em fluxos quânticos, a turbulência de Kolmogorov surge da correlação das orientações dos vórtices, enquanto os desvios associados à intermitência se originam de seu arranjo espacial não trivial.

Além disso, foi possível vincular a distribuição espacial de vórtices na turbulência quântica à dissipação de energia de granulação grosseira na turbulência clássica. Isso permitiu a aplicação de modelos existentes de intermitência da turbulência clássica ao caso quântico, iniciando um caminho promissor para uma melhor compreensão desta última.

Os resultados deste estudo fornecem uma conexão entre a intermitência da turbulência quântica e clássica e podem ajudar a avançar nossa compreensão deste fenômeno complexo. No entanto, ainda há muito a ser explorado nesta área, especialmente no que diz respeito à turbulência quântica, que ocorre em escalas extremamente pequenas e é governada pelas leis da mecânica quântica. Novas ferramentas teóricas e experimentais serão necessárias para compreender completamente este fenômeno e suas implicações em vários campos da física.

4.5.1 Turbulência Clássica

Turbulência clássica é um fenômeno complexo e altamente dissipativo que ocorre em fluxos de fluidos com alto número de Reynolds. Ela é caracterizada por uma ampla gama de escalas fortemente interativas, resultantes da não linearidade dos fluxos turbulentos. A dissipação de energia em turbulência clássica é fortemente associada à mistura rápida e aumento nas taxas de transferência de momentum, calor e massa. A vorticidade desempenha um papel fundamental na descrição dos fluxos turbulentos, que não são características exclusivas de fluidos, mas sim de fluxos de fluidos. A teoria da turbulência sofre da falta de métodos matemáticos robustos devido à não linearidade da equação de movimento, o que resulta em cada padrão de fluxo individual apresentando características únicas associadas às suas condições iniciais e de contorno. A compreensão da turbulência clássica é crucial para diversos campos da física, incluindo a aerodinâmica, oceanografia, geofísica e engenharia de processos.

Os fluxos turbulentos são altamente dissipativos e requerem uma fonte de energia para serem mantidos. A energia é fornecida em grandes escalas de comprimento e dissipada em escalas menores. Além disso, a turbulência é caracterizada pela ampla gama de escalas fortemente interagindo entre si, bem como pela intrínseca aleatoriedade espacial e temporal. A vorticidade é uma grandeza fundamental na descrição dos fluxos turbulentos, que apresentam altos níveis de flutuações vorticais. Embora não haja uma teoria geral para descrever a turbulência clássica, os teóricos concentram-se em famílias de fluxos com condições de contorno relativamente simples. A compreensão da turbulência clássica é fundamental para a modelagem e previsão de muitos fenômenos naturais e industriais.

4.5.2 Equação de Navier-Stokes

Nesta seção da tese, será abordada a equação de Navier-Stokes, que é amplamente utilizada para descrever o movimento de fluidos. A equação é dada por:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (4.1)$$

onde ρ é a densidade do fluido, \mathbf{v} é o vetor de velocidade do fluido, t é o tempo, p é a pressão, μ é a viscosidade dinâmica e \mathbf{f} é a força por unidade de massa.

A equação de Navier-Stokes é um conjunto de equações diferenciais parciais não lineares que descrevem a dinâmica do fluido. Ela é derivada das leis de conservação da massa, do momento e da energia. Embora a equação de Navier-Stokes tenha uma base cinética limitada, é amplamente aceita como adequada para descrever fluxos de fluidos reais.

No entanto, a solução geral da equação de Navier-Stokes não pode ser dada devido à falta de desenvolvimento matemático das equações diferenciais parciais não lineares. Por esta razão, a solução do problema da equação de Navier-Stokes sujeita a condições iniciais e de contorno pode ser obtida apenas numericamente.

Embora não haja uma solução geral para a equação de Navier-Stokes, a solução pode ser aproximada em problemas específicos utilizando-se técnicas de simulação numérica. A equação de Navier-Stokes é frequentemente utilizada em aplicações que envolvem a dinâmica de fluidos, tais como aerodinâmica, engenharia de combustão, oceanografia, entre outras áreas.

Além disso, a equação de Navier-Stokes é uma equação não integrável e não local. A propriedade de não-localidade no espaço físico é devida à pressão, que é diretamente definida pelo campo de velocidade. Portanto, o campo de velocidade é não-local tanto no espaço físico quanto em qualquer outro espaço (há um acoplamento entre as escalas de comprimento grande e pequeno). As dificuldades descritas acima são principalmente de natureza formal ou técnica. Há ainda uma outra dificuldade de natureza geral: a falta de conhecimento sobre os processos físicos subjacentes à turbulência e sua geração e origem.

Por causa dessas dificuldades, a abordagem estatística deve ser adotada nas teorias de turbulência desde o início, devido à extrema complexidade. Nas teorias de turbulência, no entanto, as equações de movimento sempre levam a situações em que há mais incógnitas do que equações. Isso é chamado de problema de fechamento da teoria da turbulência.

Em muitas circunstâncias, é possível argumentar que alguns aspectos da estrutura da turbulência dependem apenas de algumas variáveis ou parâmetros independentes. Se tal situação prevalecer, os métodos dimensionais muitas vezes ditam a relação entre as variáveis dependentes e independentes, resultando em uma solução conhecida exceto por um coeficiente numérico. Além disso, outra abordagem frequentemente utilizada

é explorar algumas das propriedades assintóticas dos fluxos turbulentos. Qualquer descrição proposta da turbulência deve se comportar adequadamente no limite em que Re se aproxima do infinito, uma vez que se pode considerar efeitos moleculares de viscosidade nula. Em geometrias de fluxo simples, as características do movimento turbulento em algum ponto no tempo e espaço parecem ser controladas principalmente pelo ambiente imediato (invariância local).

Considerando a equação de Navier-Stokes incompressível (densidade constante), em que μ é a viscosidade cinemática, p é a pressão e m e ρ são a massa e densidade da partícula, respectivamente. A equação de Navier-Stokes é o resultado de uma grosseira gradação sobre os efeitos moleculares estocásticos. Embora a equação de Navier-Stokes tenha uma fundação cinética limitada, é comumente considerada adequada para descrever fluxos de fluido reais.

No entanto, a matemática das equações diferenciais parciais não lineares não foi desenvolvida a ponto de se obter uma solução geral. Portanto, há pouco uso analítico substancial da equação de Navier-Stokes na turbulência. No entanto, simulações numéricas têm sido amplamente utilizadas. Além disso, a equação de Navier-Stokes é não integrável e não local. A propriedade de não-localidade no espaço físico é devido à pressão, que é diretamente definida pelo campo de velocidade. Assim, o campo de velocidade é não local no espaço físico e em qualquer outro espaço (há um acoplamento entre as escalas de comprimento grandes e pequenas). As dificuldades descritas acima são principalmente de natureza formal ou técnica. Há outra dificuldade de natureza geral: a falta de conhecimento sobre os processos físicos subjacentes da turbulência e sua geração e origem.

Como a solução geral da equação de Navier-Stokes é inatingível, adota-se uma abordagem estatística na teoria da turbulência desde o início, devido à extrema complexidade. Na teoria da turbulência, no entanto, as equações de movimento sempre levam a situações em que há mais incógnitas do que equações. Isso é chamado de problema de fechamento da teoria da turbulência. É preciso usar suposições estatísticas para tornar o número de equações igual ao número de incógnitas.

Considerações de simetria são centrais para o estudo da turbulência totalmente desenvolvida. Em Re mais alto, quando o fluxo se torna turbulento, suas propriedades estatísticas são invariantes sob translações. Comentários semelhantes podem ser feitos sobre todas as outras simetrias da equação de Navier-Stokes: o mecanismo responsável pela geração do fluxo turbulento geralmente não é consistente com a maioria das possíveis simetrias. No entanto, os aspectos qualitativos de muitos fluxos turbulentos sugerem alguma forma de homogeneidade, isotropia e possível invariância de escala. No limite de Re infinito, todas as possíveis simetrias da equação de Navier-Stokes, normalmente quebradas pelo mecanismo que produz o fluxo turbulento, são restauradas em um sentido

estatístico em pequenas escalas (\mathcal{L} , com \mathcal{L} sendo a escala característica da produção de turbulência). Sob a mesma suposição, o fluxo turbulento é auto-similar em pequenas escalas, ou seja, possui um único expoente de escala h . Assim, existe um expoente de escala $h \in \mathbb{R}$, tal que,

$$dv(r, k') \sim |k'| \equiv k' \pmod{n^h}, \quad dv(r, k') \quad (4.2)$$

é a densidade espectral de energia de dissipação de turbulência. Essa invariância de escala sugere que o fluxo turbulento é governado por uma hierarquia de estruturas, que se repetem em todas as escalas menores, até as escalas em que a viscosidade molecular se torna importante. Essas estruturas são chamadas de "redemoinhos" ou "vórtices" e a sua dinâmica é uma das principais questões em aberto no estudo da turbulência. A busca por uma descrição detalhada dessas estruturas e sua interação é uma área ativa de pesquisa na física da turbulência.

Leis de Kolmogorov

Andrey Nikolaevich Kolmogorov foi um matemático e estatístico russo que nasceu em Tambov, Rússia, em 25 de abril de 1903, e faleceu em Moscou, Rússia, em 20 de outubro de 1987. Ele é considerado um dos maiores matemáticos do século XX e fez contribuições importantes em várias áreas da matemática, incluindo teoria da probabilidade, análise, topologia e mecânica quântica.

Kolmogorov estudou na Universidade de Moscou e começou a trabalhar na universidade aos 20 anos de idade. Ele se tornou professor na universidade em 1931 e permaneceu lá pelo resto de sua carreira. Em 1933, ele publicou seu famoso livro "Foundations of the Theory of Probability", que se tornou um clássico e estabeleceu as bases para a teoria moderna da probabilidade.

Além de suas contribuições para a teoria da probabilidade, Kolmogorov fez importantes contribuições para a análise, desenvolvendo o conceito de espaço métrico, e para a teoria dos conjuntos, trabalhando com a teoria da medida e estabelecendo os axiomas de Kolmogorov para a probabilidade. Ele também fez contribuições para a mecânica quântica, propondo uma interpretação probabilística da teoria.

Kolmogorov recebeu vários prêmios em reconhecimento ao seu trabalho, incluindo a Medalha de Ouro da Academia de Ciências da URSS em 1941, o Prêmio Stalin em 1946 e a Medalha Lomonosov em 1958. Ele também foi eleito para várias academias de ciências, incluindo a Academia de Ciências da Rússia e a Academia de Ciências da França.

Em resumo, Kolmogorov foi um dos matemáticos mais influentes do século XX, cujas contribuições à teoria da probabilidade, análise, topologia e mecânica quântica ainda são amplamente estudadas e aplicadas hoje em dia.

As leis de Kolmogorov são um conjunto de três hipóteses formuladas por Andrey Kolmogorov em 1941 que descrevem o comportamento estatístico de um fluxo turbulento de fluido incompressível. Essas leis são fundamentais para o estudo da turbulência e são amplamente utilizadas na modelagem numérica de fenômenos turbulentos.

A primeira lei de Kolmogorov, também conhecida como hipótese de isotropia local, afirma que, em uma escala suficientemente pequena, a turbulência é estatisticamente isotrópica. Isso significa que as propriedades estatísticas do fluxo não variam com a direção, mas apenas com a distância. Matematicamente, essa hipótese pode ser expressa como:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\langle \delta u_i(x) \delta u_j(x+r) \rangle}{r/2} = 2\nu \delta_{ij}, \quad (4.3)$$

onde $\delta u_i(x) = u_i(x+r) - u_i(x)$ é a flutuação da velocidade no ponto x e na direção i , $\langle \cdot \rangle$ denota a média estatística e ν é a viscosidade cinemática do fluido.

A segunda lei de Kolmogorov, ou hipótese de similaridade estatística, estabelece que as estatísticas do fluxo turbulento dependem apenas da taxa de dissipação de energia por unidade de massa. Isso significa que, para um dado valor de taxa de dissipação ε , as propriedades estatísticas do fluxo são as mesmas, independentemente da escala de observação. Matematicamente, essa hipótese pode ser expressa como:

$$\frac{\langle (\delta u_\ell)^p \rangle}{\langle (\delta u_r)^p \rangle} \sim \left(\frac{\ell}{r} \right)^{\zeta_p}, \quad (4.4)$$

onde δu_r e δu_ℓ são as flutuações de velocidade em escalas de comprimento r e ℓ , respectivamente, p é um número inteiro positivo e ζ_p é o expoente de escala, que é uma constante universal dependente apenas de p .

A terceira lei de Kolmogorov, ou hipótese de dissipação de energia, afirma que a taxa de dissipação de energia em uma escala de comprimento ℓ é proporcional a $\varepsilon^{1/3} \ell^{4/3}$. Matematicamente, essa hipótese pode ser expressa como:

$$\varepsilon \sim \nu^{3/4} \langle (\delta u_\ell)^3 \rangle^{4/3}. \quad (4.5)$$

Essas três hipóteses de Kolmogorov têm implicações profundas para a natureza da turbulência e são a base da teoria da turbulência de cascata, que descreve como a energia é transferida das grandes escalas para as pequenas escalas, onde é finalmente dissipada em calor pela viscosidade do fluido.

As leis de Kolmogorov possuem diversas consequências práticas e teóricas. Algumas delas incluem:

Espectro de energia: As leis de Kolmogorov permitem determinar o espectro de energia das turbulências, que é uma representação gráfica da quantidade de energia em cada comprimento de onda. O espectro de energia é usado em diversas aplicações, desde

o projeto de aerofólios de aviões até a previsão de ondas em oceanos.

Análise de dados experimentais: As leis de Kolmogorov são utilizadas para analisar dados experimentais de turbulência, como velocidade e pressão em diferentes pontos do fluxo. Através da análise dos dados, é possível inferir informações importantes sobre a dinâmica do escoamento, como a taxa de dissipação de energia e o tamanho das estruturas turbulentas.

Modelagem numérica: A compreensão das leis de Kolmogorov é fundamental para o desenvolvimento de modelos numéricos de turbulência. Esses modelos são utilizados em diversas áreas, como na engenharia aeronáutica e na simulação de escoamentos em rios e oceanos.

Previsão do tempo: As leis de Kolmogorov também têm implicações na previsão do tempo, pois permitem modelar o comportamento da turbulência na atmosfera. Modelos numéricos baseados nas leis de Kolmogorov são utilizados em diversas agências meteorológicas para prever condições atmosféricas adversas, como tempestades e furacões.

A Lei de Kolmogorov 5/3 é uma consequência das leis de Kolmogorov que descrevem o comportamento das escalas de energia em fluidos turbulentos. Essa lei é particularmente importante, pois é considerada um marco na compreensão da turbulência, uma vez que é baseada na teoria da cascata de energia de Kolmogorov.

De acordo com essa lei, o espectro de energia das flutuações de velocidade em fluidos turbulentos em escala inercial é dado por:

$$E(k) \propto k^{-5/3} \quad (4.6)$$

onde $E(k)$ é a energia cinética contida em cada comprimento de onda k . Essa lei foi observada em muitas condições turbulentas diferentes, incluindo ventos atmosféricos, ondas oceânicas, turbulência em escoamentos e jatos supersônicos.

A lei de Kolmogorov 5/3 implica que a energia é transferida dos grandes redemoinhos aos menores, em uma cascata de energia, até que as escalas sejam suficientemente pequenas para que a viscosidade dissipe a energia em forma de calor. A lei também fornece uma relação entre a energia e a escala espacial ou temporal, permitindo que sejam feitas previsões sobre a turbulência em diferentes condições.

A Lei de Kolmogorov 5/3 tem sido amplamente utilizada em muitas áreas da física, incluindo a meteorologia, engenharia, física de plasmas e geofísica, entre outras. É uma das leis mais importantes e bem conhecidas na teoria da turbulência, e seu sucesso em descrever as características da turbulência é um testemunho do poder da teoria de Kolmogorov.

Energia de cascata

A cascata de energia é um conceito fundamental na dinâmica dos fluidos e na teoria da turbulência. O termo se refere à transferência de energia em um fluxo turbulento do regime de grandes escalas para o regime de pequenas escalas, onde a energia é dissipada em forma de calor devido à viscosidade do fluido.

O processo de cascata de energia é descrito pela lei de Kolmogorov, que postula a existência de uma estrutura hierárquica de vórtices de diferentes tamanhos, empilhados em uma hierarquia decrescente. A energia é introduzida no topo da cascata a uma taxa constante, e é transferida de vórtices maiores para vórtices menores por meio de interações não lineares, até que ela atinge a escala dissipativa de Kolmogorov, onde é dissipada pela viscosidade do fluido.

A cascata de energia é um fenômeno não trivial que ocorre em sistemas turbulentos, e sua compreensão requer uma abordagem multifacetada, envolvendo a teoria matemática, a modelagem numérica e a experimentação física. Em particular, a teoria da turbulência fornece uma estrutura conceitual para entender a dinâmica dos fluidos turbulentos e a transferência de energia entre as diferentes escalas.

Um aspecto importante da cascata de energia é que ela não ocorre apenas em uma direção, ou seja, da escala maior para a menor. Na verdade, a transferência de energia também ocorre em escalas menores para maiores, devido à natureza não linear das equações de Navier-Stokes que governam o movimento dos fluidos. Essa transferência reversa de energia é conhecida como cascata inversa e é mais proeminente em sistemas com fortes gradientes de energia, como a turbulência geofísica e a turbulência magneto-hidrodinâmica.

A cascata de energia tem implicações significativas em várias áreas da ciência e da engenharia. Por exemplo, ela afeta o transporte de calor e massa em sistemas geofísicos, como a atmosfera e os oceanos, e é crucial para entender a dinâmica de combustão em motores a jato e em reatores nucleares. A cascata de energia também é importante em aplicações industriais, como em turbinas hidráulicas e eólicas, onde a eficiência do processo depende da transferência de energia entre as diferentes escalas, ou seja, é um processo fundamental que ocorre em sistemas turbulentos, caracterizado pela transferência de energia do regime de grandes escalas para o regime de pequenas escalas, onde a energia é dissipada em forma de calor. Seu estudo é crucial para entender a dinâmica dos fluidos turbulentos e tem implicações significativas em várias áreas da ciência e da engenharia.

Capítulo 5

Vórtices e Turbulência Através de Perturbação Periódica de Condensados de Bose-Einstein Acoplados

Vórtices são fenômenos amplamente observados e estudados em diversos sistemas naturais, abrangendo desde correntes oceânicas e atmosféricas até a formação de turbilhões em rios e nuvens. Esses padrões de escoamento giratório ao redor de um centro de rotação são caracterizados pela presença de vorticidade, uma grandeza matemática que descreve a circulação ou rotação de um fluido em um determinado ponto de seu campo de escoamento. Em particular, no contexto dos condensados de Bose-Einstein (BECs), que são estados altamente correlacionados de um grande número de átomos ultrafrios, a formação de vórtices tem sido objeto de intensa pesquisa.

Nossa pesquisa se concentra na produção de vórtices em condensados de Bose-Einstein (BECs) agitados e acoplados. Investigamos a dinâmica da formação de vórtices em sistemas confinados por armadilhas harmônicas e exploramos a geração de vórtices em um quadro rotativo. Para isso, consideramos a frequência de rotação efetiva da armadilha, que é calculada a partir do momento de inércia e do momento angular efetivo do condensado. Realizamos simulações para BECs de duas espécies, levando em conta os efeitos da diferença de massa entre as espécies, a fim de examinar como isso influencia a formação de vórtices. Observamos que sistemas com maior assimetria de massa tendem a produzir vórtices de forma mais rápida.

Além disso, investigamos a produção dinâmica de vórtices em misturas experimentalmente acessíveis, como ^{85}Rb - ^{133}Cs e ^{85}Rb - ^{87}Rb . Para isso, resolvemos numericamente as equações de movimento e analisamos a dinâmica do sistema usando uma variedade de medidas, incluindo espectros de energia. Nossas análises revelaram evidências da lei clássica característica de Kolmogorov $k^{-5/3}$ associada à turbulência, com modificações na escala do núcleo de vórtice universal k^{-3} no regime ultravioleta. Além disso, consideramos a mistura no referencial do laboratório, confinada em uma armadilha harmônica tipo panqueca levemente perturbada de forma elíptica por um potencial periódico dependente do tempo. Essa perturbação introduz dinâmica turbulenta, resultando em padrões estáveis

finais de vórtices induzidos pela periodicidade da perturbação. Como resultado, nosso estudo tem como objetivo principal distinguir entre fluxos turbulentos e não turbulentos em BECs bidimensionais, com efeitos interessantes sendo observados devido ao desequilíbrio das massas atômicas.

As observações experimentais de vórtices em condensados de Bose-Einstein (BECs) têm sido um tema de grande relevância na pesquisa em física quântica, especialmente no estudo da superfluidez. A superfluidez é um fenômeno quântico que ocorre em certos fluidos, nos quais a viscosidade é completamente eliminada e as partículas podem mover-se livremente e sem obstáculos. A formação de matrizes de vórtices é uma característica fundamental da superfluidez, tendo sido verificada anteriormente em um superfluido de hélio em rotação [75].

Desde então, a formação de vórtices em BECs tem sido amplamente investigada por meio de estudos teóricos e experimentais. Diversas revisões [64, 79, 80, 81, 82] descrevem os avanços realizados após as primeiras observações, abrangendo técnicas como rotação da armadilha magnética, agitação a laser e excitação oscilatória sobrepondo o potencial de confinamento para a nucleação de vórtices em BECs.

As observações experimentais de vórtices em BECs foram motivadas pela sua importância esperada para os aspectos fundamentais da mecânica quântica, como a superfluidez. Os primeiros registros experimentais foram relatados em [67], seguidos por outros estudos [68, 69, 70, 71, 72, 73, 74]. Esses experimentos foram realizados utilizando técnicas como rotação da armadilha magnética e excitação oscilatória para induzir a formação de vórtices em BECs.

Desde então, inúmeros estudos teóricos e experimentais têm sido conduzidos para compreender a formação dinâmica de vórtices em BECs e os mecanismos envolvidos em sua geração. Essas investigações têm sido fundamentais para o desenvolvimento da física de BECs e para a compreensão dos fenômenos quânticos associados à superfluidez em sistemas de muitas partículas. As observações experimentais de vórtices em BECs continuam sendo um tema de pesquisa importante, com várias questões ainda a serem elucidadas.

Os conceitos da turbulência de fluidos têm sido aplicados no estudo da dinâmica de condensados de Bose-Einstein (BECs) submetidos a rotação, apresentando uma deformação elíptica fraca e dependente do tempo em seu potencial de confinamento [83]. Essa deformação introduz uma instabilidade quadrupolar e gera um fluxo turbulento, no qual a energia injetada é dissipada por meio de interações entre ondas de som, vórtices e perda de partículas. A formação de uma rede de vórtices, que ocorre ao longo de períodos de tempo prolongados e em equilíbrio com a rotação, é resultado desse processo turbulento.

Os regimes clássico e quântico de turbulência bidimensional em condensados de Bose-Einstein (CBE) confinados têm sido objeto de estudo em várias pesquisas, utilizando

análise espectral para decompor a energia cinética em componentes compressíveis (som) e incompressíveis (vórtice) [84, 85, 86, 87, 88]. É importante ressaltar as revisões recentes que abordam a área consolidada da turbulência quântica em gases quânticos [89, 90, 91].

Recentemente, houve um grande interesse em compreender as diferenças fundamentais entre a turbulência quântica e clássica em sistemas de rotação [92]. Em particular, estudos recentes em sistemas binários têm investigado a dinâmica de vórtices e a formação de padrões [93], com o objetivo de compreender os mecanismos de formação de vórtices e sua relação com as excitações de ondas sonoras [30, 94]. Além disso, simulações têm observado a emergência de estruturas coerentes de vórtice de alta energia em fluidos quânticos turbulentos bidimensionais (2D), o que está em acordo com experimentos recentes [86, 88].

Outro aspecto interessante é o estudo de estruturas tridimensionais de vórtices em condensados de Bose-Einstein dipolares [96]. Esses estudos consideram armadilhas totalmente anisotrópicas com aumento da excentricidade, o que pode resultar em um comportamento complexo de vórtices.

Além disso, a produção de vórtices em condensados de Bose-Einstein de múltiplos componentes é um tema intrigante, pois existem várias fases de rede de vórtices que podem ser observadas além dos padrões triangulares de Abrikosov, inicialmente previstos em supercondutores do tipo II [95, 97, 98]. Para uma visão mais atualizada da teoria da rede de vórtices focada em experimentos em condensados de Bose-Einstein, recomendamos a leitura de [99].

É importante destacar que a produção de dois condensados de Bose-Einstein sobrepostos utilizando dois estados de hiperfino diferentes do mesmo isótopo de rubídio, ^{87}Rb , foi relatada por Myatt et al. (1997) [100]. Esse trabalho foi seguido por estudos sobre as oscilações coletivas resultantes da colisão de dois condensados de Bose-Einstein [101] e investigações das propriedades atômicas e moleculares de condensados de Bose-Einstein acoplados [102].

Para dois isótopos diferentes de rubídio, ^{85}Rb e ^{87}Rb , a teoria existente indica que um condensado duplo misto de isótopos estáveis pode ser formado por resfriamento evaporativo simpático, permitindo o controle parcial das interações entre os estados de hiperfino [103]. Essa possibilidade foi confirmada experimentalmente na produção de uma mistura condensada acoplada de potássio e rubídio (^{41}K e ^{87}Rb) [104]. As propriedades colisionais dessa mistura foram estudadas mais detalhadamente [105], incluindo o controle das interações entre as espécies [106]. A observação de separação de fase controlável [107] foi seguida pela produção de condensados de Bose-Einstein acoplados de ^{87}Rb e ^{133}Cs [108], isótopos de estrôncio $^{84,88}\text{Sr}$ [109], potássio ^{39}K [110] e sódio ^{23}Na [111]. Gases ultrafrios fortemente dipolares de disprósio (Dy) e érbio (Er) [112, 113] também têm sido objeto de vários estudos em misturas dipolares.

O alto controle experimental de sistemas binários acoplados de duas componentes

sugere a possibilidade de rotação de condensados de Bose-Einstein em misturas atômicas. Esses estudos têm se concentrado principalmente nas estruturas de vórtices no estado fundamental em relação à miscibilidade, que é uma característica relevante de gases ultrafrios de múltiplas componentes. O comportamento miscível desses sistemas depende da natureza das interações interatômicas entre as diferentes espécies. Condensados de Bose-Einstein de duas componentes miscíveis ou imiscíveis podem ser distinguidos pela sobreposição ou separação espacial de suas respectivas funções de onda de cada componente. Para diferentes misturas dipolares binárias confinadas, algumas propriedades rotacionais foram estabelecidas [115, 116, 117]. A transição miscível-imiscível de misturas dipolares de condensados de Bose-Einstein com vórtices foi estudada em geometrias tipo panquecas e tipo charutos, considerando isótopos de disprósio ($^{162,164}\text{Dy}$) e érbio (^{168}Er). Após estudos exploratórios da ocorrência de padrões de vórtices em misturas binárias em rotação [119, 120], a sensibilidade do desequilíbrio de massa em misturas dipolares foi destacada em [121], juntamente com o papel das interações dipolo-dipolo na formação de separações de fase.

No presente trabalho, nosso objetivo é analisar a geração e estabilização de vórtices em condensados de Bose-Einstein binários desequilibrados em massa sob agitação. Como sistemas exemplares, estudamos duas misturas acessíveis experimentalmente: ^{85}Rb - ^{133}Cs e ^{85}Rb - ^{87}Rb , o que nos permite distinguir os efeitos do desequilíbrio de massa. Para entender o processo de formação de vórtices, analisamos a decomposição da energia cinética em partes compressíveis e incompressíveis para ambos os componentes da mistura. Tomamos cuidado extra para remover os efeitos da rotação do corpo rígido nos espectros de energia cinética, calculando uma frequência média instantânea de rotação na qual a análise pode ser afetada sem introduzir artefatos.

A Seção 5.1 está dividida em quatro partes, com detalhes do formalismo de campo médio fornecidos na Seção 5.1A. Na Seção 5.1B, descrevemos os parâmetros e a abordagem numérica utilizada. Na Seção 5.1C, apresentamos as relações energéticas dependentes do tempo para o modelo de agitação, com uma análise da formação de vórtices. O formalismo relacionado aos espectros de energia cinética no campo em rotação é incluído na Seção 5.1D. Nas Seções 5.2 e 5.3, apresentamos os principais resultados e discutimos aspectos relevantes devido às diferenças de massa nas misturas, em relação aos padrões de vórtice e à distribuição de energia. A Seção 5.2 fornece detalhes sobre a evolução temporal de observáveis relacionados aos dois tipos de sistemas acoplados com desequilíbrio de massa que estamos estudando, considerando o potencial de agitação. Os resultados finais dos padrões de vórtice também são comparados com os resultados do estado fundamental, obtidos sem o potencial de agitação, mas assumindo a correspondente frequência de rotação clássica. Na Seção 5.3, realizamos uma análise dos espectros de energia cinética, com foco na análise do comportamento dos espectros incompressíveis

durante a evolução temporal, desde a nucleação de vórtices até a região de tempo em que os padrões de vórtice estáveis são estabelecidos. Finalmente, na Seção 5.4, apresentamos um resumo com nossas conclusões gerais e perspectivas.

5.1 Condensados de Bose-Einstein Agitados

Em nossa abordagem atual, consideramos um sistema composto por dois tipos de átomos, $i = 1, 2$, com massas diferentes, m_i . Ambos os tipos de átomos possuem o mesmo número de átomos, $N_i \equiv N$, e estão confinados em armadilhas harmônicas altamente achatadas. As frequências longitudinais e transversais das armadilhas são denotadas por $\omega_{i,z}$ e $\omega_{i,\perp}$, respectivamente, com uma relação fixa de aspecto $\lambda \equiv \lambda_i = \omega_{i,z}/\omega_{i,\perp} = 10$.

Nosso estudo tem como foco a análise da ocorrência dinâmica de vórtices em um sistema binário miscível inicialmente estável. Para isso, consideramos que os comprimentos de espalhamento intraespécies são fixos e idênticos, $a_{11} = a_{22} = 60a_0$ (onde a_0 é o raio de Bohr), de modo que a força relativa é controlada pelo comprimento de espalhamento interespcies a_{12} . Além disso, para garantir que o sistema acoplado esteja em um estado miscível, assumimos $a_{12}/a_{ii} = 1/2$, onde a interação entre espécies é cerca de metade da interação intraespécies. Essas suposições relacionadas às interações não lineares dependem das possibilidades experimentais reais de controlar as interações por meio de mecanismos de ressonância de Feshbach [123].

A equação de Gross-Pitaevskii (GP) acoplada é expressa em uma forma adimensional, em que as unidades de energia e comprimento são dadas, respectivamente, por $\hbar\omega_\rho$ e $\ell_\rho \equiv \sqrt{\hbar/(m_1\omega_\rho)}$, assumindo a primeira espécie (a menos massiva) como referência em nosso sistema de unidades. Portanto, as variáveis espaciais tridimensionais \mathbf{r} e a variável temporal t são substituídas por variáveis adimensionais. Para conveniência, mantemos a mesma representação, $\mathbf{r}/\ell_\rho \rightarrow \mathbf{r}$ e $\omega_\rho t \rightarrow t$, com as novas variáveis sendo entendidas como adimensionais. Dentro dessas unidades, ajustamos inicialmente as frequências de confinamento das armadilhas para ambas as espécies de forma que $m_2\omega_{2,\perp}^2 = m_1\omega_\rho^2$, permitindo que as armadilhas tridimensionais não perturbadas (3D) para ambas as espécies sejam representadas pela mesma expressão:

$$V_{i,3D}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2) \equiv V_0(x, y) + \frac{1}{2}\lambda^2 z^2, \quad (5.1)$$

onde $V_0(x, y)$ é a armadilha harmônica 2D. Dessa forma, não há um fator explícito dependente da massa no potencial da armadilha, que permanece apenas no termo de energia cinética. Ao escolher valores muito grandes para a razão de aspecto λ , podemos fazer a aproximação usual, em que a função de onda total 3D, $\psi_i(x, y, t)\chi_i(z)$, é fatorizada, com $\chi_i(z) \equiv (\lambda_i/\pi)^{1/4} e^{-\lambda_i z^2/2}$. Nesse caso, a energia do estado fundamental para a

armadilha harmônica na direção z se torna uma constante que é adicionada à energia total. Podemos assumir uma função de onda transversal comum independente da massa para ambas as componentes, com $\lambda_i = \lambda$, pois qualquer dependência da massa pode ser absorvida ao alterar a razão de aspecto correspondente. Essa abordagem de redução para 2D implica que também precisamos ajustar os parâmetros não lineares de acordo, pois a integração na direção z resultará em uma dependência em λ nos parâmetros não lineares.

5.1.1 Dinâmica de Condensados Binários em Armadilhas Agitadas

Motivados por estudos anteriores nos quais espécies atômicas condensadas foram submetidas a potenciais de agitação [68, 72, 73], desenvolvemos uma abordagem que considera condensados binários acoplados. Nesse cenário, ambos os componentes são confinados em armadilhas harmônicas de formato achatado, conhecidas como armadilhas "panqueca", e são afetados por potenciais de agitação que variam com o tempo. Esses potenciais são representados por perturbações elípticas idênticas que oscilam nas direções x e y , conforme descrito em um estudo anterior [83]. A expressão que utilizamos para descrever o potencial de agitação dependente do tempo em duas dimensões é dada por:

$$V_s(x, y, t) = \frac{\epsilon}{2} [(x^2 - y^2) \cos(2\Omega_E t) - 2xy \sin(2\Omega_E t)], \quad (5.2)$$

onde Ω_E é o parâmetro de frequência de agitação a laser, medido em unidades de ω_ρ , e ϵ representa a força correspondente. A equação de Gross-Pitaevskii (GP) acoplada em duas dimensões, que descreve a dinâmica do sistema, pode ser escrita como:

$$i \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = \left[-\frac{m_1}{2m_i} \nabla^2 + V_0(x, y) + V_s(x, y, t) + \sum_j g_{ij} |\psi_j|^2 \right] \psi_i, \quad (5.3)$$

onde as funções de onda de duas componentes, $\psi_i \equiv \psi_i(x, y, t)$, são normalizadas para um valor total de probabilidade de 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy, |\psi_i|^2 \equiv \int d^2r, |\psi_i|^2 = 1, \quad (5.4)$$

e o operador ∇^2 é o laplaciano que atua nas coordenadas espaciais x e y . Os parâmetros g_{ij} representam as interações de contato entre os dois componentes do condensado e são relacionados aos comprimentos de espalhamento intra e interespecies, denotados por a_{ii} e a_{12} , respectivamente. Esses parâmetros são dados por:

$$g_{ij} \equiv \sqrt{2\pi\lambda} \frac{m_1 a_{ij} N_j}{\mu_{ij} \ell_\rho}, \quad (5.5)$$

onde $\mu_{ij} \equiv \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$ representa a massa reduzida das espécies i e j . Para realizar nossas simulações numéricas, ajustamos a unidade de comprimento para $\ell_\rho = 1\mu\text{m}$ (aproximadamente $1.89 \times 10^4 a_0$), de modo que os comprimentos de espalhamento a_{ij} possam ser convenientemente expressos em termos de a_0 . O potencial total da armadilha, incluindo o potencial de agitação dependente do tempo $V_s(x, y, t)$, pode ser expresso em coordenadas polares, quando apropriado, da seguinte forma:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad (0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \text{ e } r^2 \equiv x^2 + y^2. \quad (5.6)$$

Dentro dessas coordenadas, assumindo que o potencial de agitação tem a mesma forma para ambas as componentes do condensado, o potencial total da armadilha $V_0(x, y) + V_s(x, y, t)$ pode ser escrito como:

$$V(r, \theta, t) = \frac{r^2}{2} [1 + \epsilon \cos(2\theta + 2\Omega_E t)], \quad (5.7)$$

onde r e θ representam as coordenadas polares e t é o tempo.

A interação usual da armadilha é afetada por uma pequena perturbação de força $\epsilon = 0.025$ (conforme descrito em Ref.[83]) para manter os condensados com uma forma aproximadamente simétrica em 2D durante a evolução, baseado em experimentos anteriores com potenciais anarmônicos[68, 72]. Essa perturbação periódica serve para acionar a dinâmica, afetando a posição angular axial θ . A força total da armadilha oscila entre $1 - \epsilon$ e $1 + \epsilon$ em meio período $T = \pi/\Omega_E$, implicando que, em média, ao longo de um intervalo de tempo longo, a força da armadilha não é alterada. No entanto, a frequência de agitação tem o papel de acionar a dinâmica, que passa por diferentes estágios, resultando na formação de um padrão final de vórtices. Esta abordagem de agitação dependente do tempo induz, em última instância, uma rotação na armadilha, mas difere da abordagem que obtém diretamente a rotação da armadilha no referencial em rotação através do operador de momento angular no estado fundamental.

Com o potencial de armadilha agitada acima aplicado aos condensados acoplados, o processo dinâmico começa com a energia injetada nos condensados, excitando uma oscilação de modo quadrupolar. A dinâmica completa depende da frequência perturbada apropriada Ω_E da pequena perturbação elíptica, que deve estar próxima de uma ressonância quadrupolar quando a amplitude das oscilações se torna grande o suficiente. Ao mudar Ω_E para valores em que as oscilações quadrupolares têm amplitude reduzida, o sistema se torna estável. Portanto, neste processo dinâmico, a excitação imita rotação, mas o sistema continua irrotacional, conforme observado em [83].

Além disso, para analisar a formação de padrões de vórtices, consideramos também uma abordagem independente, na qual vamos para o referencial rotativo com rotação

direta da armadilha, aplicando o operador de momento angular na função de onda do estado fundamental. A formalização GP (5.3) é alterada para:

$$V_s(x, y, t) \rightarrow \Omega_0 L_z = -i\Omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (5.8)$$

Esse modelo nos permite verificar a correspondência entre a frequência rotacional clássica assintótica, obtida a partir do modelo de agitação, e a abordagem direta independente do tempo para a produção de padrões de vórtices. Conforme mostrado, padrões semelhantes são produzidos no fluido quântico, com uma frequência de quadro rotativo $\Omega_0 < 1$, associada à frequência rotacional clássica assintótica.

Em nosso estudo atual, investigamos sistemas condensados acoplados com desequilíbrio de massa, o que torna a dinâmica mais complexa dentro do mecanismo de agitação, levando mais tempo do que no caso de um único condensado para chegar à fase final com configurações estáveis de vórtices em ambos os condensados. Além da dinâmica, que é verificada pela interação entre as densidades de nuvem interna e externa de um único condensado, também temos o acoplamento entre dois condensados com desequilíbrio de massa.

Na armadilha agitada (5.7), comum a ambos os condensados acoplados, ao assumir um pequeno valor $\epsilon = 0.025$ para a força da perturbação em nossas simulações numéricas, buscamos pelo parâmetro apropriado Ω_E para desencadear a dinâmica de forma a produzir, ao longo de um intervalo de tempo longo, configurações de padrões de vórtices estáveis em cada uma das nuvens condensadas. Descobrimos que Ω_E precisa ser maior que 0,9, sendo $\Omega_E = 1,25$ fixado ao considerar um padrão com quase 10 ou mais vórtices. Isso reflete que uma rotação menor efetiva da armadilha é induzida assintoticamente, com Ω_E sendo apenas um parâmetro de frequência na pequena perturbação dependente do tempo, gerando uma instabilidade quadrupolar necessária para iniciar e manter a dinâmica. Como nenhum amortecimento é assumido no formalismo, todas as energias cinéticas produzidas são transferidas para a produção de ondas sonoras (parte compressível) e vorticidade (parte incompressível), como será mostrado. Portanto, primeiro exploramos a dinâmica completa fornecida pela Eq.(5.3) com a perturbação dependente do tempo deformada elipticamente (5.7), na qual uma dada frequência do laser induz a dinâmica no sistema acoplado, passando por diferentes regimes na evolução de longo tempo para alcançar padrões estáveis de vórtices.

Em seguida, considerando os resultados obtidos com o modelo de potencial de agitação, realizamos uma análise semi-clássica dos observáveis de rotação relevantes para definir uma frequência clássica efetiva Ω_{cl} . Essa frequência é obtida através da média temporal. Portanto, com $\Omega_0 = \Omega_{cl}$, ao irmos para o referencial rotativo sem a perturbação dependente do tempo, estabelecemos uma correspondência aproximada entre as duas abordagens para gerar padrões de vórtices semelhantes.

5.1.2 Simulação Numérica e Parâmetros

Para entender melhor o comportamento dinâmico dos sistemas condensados acoplados com desequilíbrio de massa, realizamos simulações numéricas. Utilizamos uma abordagem computacional para modelar o sistema e estudar como ele evolui ao longo do tempo. Nossas simulações são fundamentais para obter informações importantes sobre a formação de padrões de vórtices no fluido quântico.

Na simulação, utilizamos alguns parâmetros essenciais que influenciam o comportamento do sistema. Primeiramente, consideramos a força da perturbação, representada por $\epsilon = 0.025$. Além disso, precisamos escolher uma frequência adequada Ω_E para iniciar e manter as dinâmicas do sistema. Descobrimos que a frequência Ω_E deve ser maior que 0,9 para produzir um padrão específico com cerca de 10 ou mais vórtices. Para nossos estudos, fixamos o valor de Ω_E em 1,25, pois isso nos proporcionou os resultados desejados.

Utilizamos também um modelo de potencial de agitação elíptico para analisar as propriedades rotacionais do sistema. Através de uma análise semi-clássica, determinamos a frequência clássica efetiva Ω_{cl} , que é obtida por média temporal. Essa frequência é crucial para estabelecer uma correspondência aproximada entre as abordagens de simulação e obter padrões de vórtices semelhantes.

Para realizar as simulações numéricas, resolvemos a equação de campo médio acoplada GP 2D. Utilizamos o método de Crank-Nicolson com passo de tempo dividido e um algoritmo de discretização apropriado, conforme detalhado em Ref. [127]. Nossas unidades adimensionais são escolhidas com base na frequência transversal da armadilha ω_ρ e na constante de Planck reduzida \hbar . A unidade de tempo é definida como $1/\omega_\rho$, e a unidade de comprimento é $\ell_\rho = \sqrt{\hbar/(m_1\omega_\rho)} = 1\mu m$, onde m_1 é a massa da primeira espécie.

O tamanho do passo espacial é definido como 0,05, enquanto os passos de tempo são de 10^{-4} . Essa discretização espaço-tempo foi escolhida para garantir a estabilidade e a precisão dos resultados durante a evolução temporal do sistema acoplado. Os passos espaciais são mais de quatro vezes menores que os comprimentos de cura, que são os comprimentos de corte nos tamanhos do núcleo de vórtice.

Consideramos uma mistura binária completamente miscível, em que os comprimentos de espalhamento intraespécies são iguais ($a_{11} = a_{22}$). O parâmetro de miscibilidade $\delta \equiv a_{12}/a_{11}$, que mede a interação entre as espécies, deve ser menor que 1 para que o sistema seja miscível. Para nossos estudos, assumimos comprimentos de espalhamento intraespécies repulsivos, com $a_{ii} = 60a_0$, sendo a_0 o raio de Bohr. O comprimento de espalhamento interespcies é definido como $a_{12} = 30a_0$, resultando em $\delta = 0,5$, indicando a miscibilidade do sistema, dado por (5.5), ligeiramente menor devido às diferenças de massa dos sistemas binários considerados.

Os comprimentos de cura (healing lengths) estão relacionados aos potenciais químicos

adimensionais μ_i (unidades $\hbar\omega_\rho$), que são obtidos a partir das soluções estacionárias da equação de campo médio acoplada GP 2D com $V_s = 0$, onde $\psi_i = \sqrt{n_i}e^{-i\mu_i t}$, dadas pela Eq. (5.3)

Os comprimentos de cura, medidos em unidades de $\ell_\rho = 1\mu\text{m}$, e as velocidades do som, medidas em unidades de $\ell_\rho\omega_\rho$, são importantes para entender a dinâmica do sistema. Para a mistura binária ^{85}Rb - ^{133}Cs , temos $\mu_1 = \mu_{^{85}\text{Rb}} = 15,10$, $\mu_2 = \mu_{^{133}\text{Cs}} = 12,87$, $\xi_1 = \xi_{^{85}\text{Rb}} = 0,257$, $\xi_2 = \xi_{^{133}\text{Cs}} = 0,223$, $v_{s,1} = v_{^{85}\text{Rb}} = 3,43$, $v_{s,2} = v_{^{133}\text{Cs}} = 3,71$. Para a mistura de quase massas idênticas, ^{85}Rb - ^{87}Rb , os valores são $\mu_1 = \mu_{^{85}\text{Rb}} = 15,53$, $\mu_2 = \mu_{^{87}\text{Rb}} = 15,40$, $\xi_1 = \xi_{^{85}\text{Rb}} = 0,254$, $\xi_2 = \xi_{^{87}\text{Rb}} = 0,252$ e $v_1 = v_{^{85}\text{Rb}} \approx v_2 = v_{^{87}\text{Rb}} = 4,04$. Ressaltamos que a escolha de nossas unidades está baseada na primeira espécie, o que implica que os comprimentos de cura dimensionais completos $\tilde{\xi}_i = \ell_\rho\sqrt{m_1/(m_i\mu_i)} \equiv \ell_\rho\xi_i$ contêm um fator de massa em relação ao potencial químico.

5.1.3 Análise da Formação de Vórtices

De modo geral, os gases quânticos são fluidos compressíveis, o que significa que sua densidade correspondente pode variar quando sujeitos a uma força. Essa afirmação é verdadeira até certo ponto, já que uma parte do fluido pode se comportar como um fluido incompressível, semelhante a um líquido. No cenário que estamos considerando, o condensado é submetido a um potencial de agitação que depende do tempo, associado a um torque. Esse torque é principalmente resultado de uma parcela da energia cinética rotacional, que podemos chamar de componente compressível.

Portanto, para analisarmos esse comportamento, começamos considerando a energia total. Nela, consideramos apenas o potencial harmônico somado ao potencial de agitação que depende do tempo como o potencial total da armadilha, conforme a Equação (5.3). Desse modo, para cada componente da mistura, as energias totais $E_i(t)$ correspondentes podem ser expressas como:

$$E_i(t) = \int d^2\mathbf{r} \left[\frac{m_1}{2m_i} |\nabla\psi_i|^2 + V_i(x, y, t)n_i(x, y, t) \right] + \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} g_{ij} \int d^2\mathbf{r} n_i(x, y, t)n_j(x, y, t), \quad (5.9)$$

onde $n_{i=1,2}(x, y, t) \equiv |\psi_i|^2$ são as densidades respectivas dependentes do tempo. Para cada espécie, considerando as densidades de corrente $\mathbf{j}_i(x, y, t)$ em termos das densidades e dos campos de velocidade correspondentes $\mathbf{v}_i(x, y, t)$, temos:

$$\mathbf{j}_i(x, y, t) = n_i(x, y, t) \mathbf{v}_i(x, y, t),$$

o que nos permite expressar as velocidades na forma:

$$\mathbf{v}_i(x, y, t) = \frac{1}{2i|\psi_i|^2} [\psi_i^* \nabla \psi_i - \psi_i \nabla \psi_i^*]. \quad (5.10)$$

As energias cinéticas associadas, que são dadas por

$$E_i^K(t) = \frac{m_1}{2m_i} \int d^2\mathbf{r} n_i(x, y, t) |\mathbf{v}_i(x, y, t)|^2, \quad (5.11)$$

podem ser decompostas em partes compressíveis $E_i^c(t)$ e incompressíveis $E_i^{nc}(t)$. Para isso, o componente i do campo de velocidade ponderado pela densidade, definido como

$$\mathbf{u}_i(x, y, t) \equiv \sqrt{n_i(x, y, t)} \mathbf{v}_i(x, y, t),$$

é dividido em uma parte incompressível,

$$\mathbf{u}_i^{(nc)} \equiv \mathbf{u}_i^{(nc)}(x, y, t), \quad \text{satisfazendo } \nabla \cdot \mathbf{u}_i^{(nc)} = 0,$$

e uma parte compressível,

$$\mathbf{u}_i^{(c)} \equiv \mathbf{u}_i^{(c)}(x, y, t), \quad \text{satisfazendo } \nabla \times \mathbf{u}_i^{(c)} = 0.$$

Portanto, com

$$\mathbf{u}_i(x, y, t) = \mathbf{u}_i^{(nc)}(x, y, t) + \mathbf{u}_i^{(c)}(x, y, t),$$

a energia cinética total se divide em duas partes, não compressível e compressível, podendo ser escrita na forma

$$\begin{aligned} E_i^K(t) &= E_i^{nc}(t) + E_i^c(t) \\ &\equiv \frac{m_1}{2m_i} \int d^2\mathbf{r} \left[|\mathbf{u}_i^{(nc)}|^2 + |\mathbf{u}_i^{(c)}|^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

No espaço dos momentos bi-dimensional, com $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ e $d^2k = dk_x dk_y$, essas duas partes das energias cinéticas, com $(\alpha) \equiv (c), (nc)$, podem ser escritas como

$$\begin{aligned} E_i^{(\alpha)}(t) &= \frac{m_1}{2m_i} \int d^2\mathbf{k} |\mathcal{F}_i^{(\alpha)}(\mathbf{k}, t)|^2, \\ &= \frac{m_1}{8\pi^2 m_i} \int d^2\mathbf{k} \left| \int d^2\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{u}_i^{(\alpha)} \right|^2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Para analisar as contribuições das ondas sonoras, bem como dos vórtices, são determinadas as partes compressíveis e incompressíveis das energias cinéticas. O torque experimentado pelo potencial de agitação dependente do tempo, $V_s(r, \theta, t)$, que é dado pela Eq. (5.7), pode ser obtido através do operador de torque correspondente.

$$\tau_z(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial \theta} V_s(r, \theta, t) = \epsilon r^2 \sin(2\theta + 2\Omega_E t), \quad (5.14)$$

Isso corresponde a aplicar uma rotação na parte elíptica do potencial que varia no tempo, com $2\Omega_E t \rightarrow 2\Omega_E t - \pi/2$. Devido a essa mudança no potencial que varia no tempo, segue-se que os valores esperados dos momentos angulares induzidos, $\langle L_z(t) \rangle_i$, e do respectivo momento de inércia, $\langle I(t) \rangle_i$, são dados por

$$\langle L_z(t) \rangle_i = -i \int d^2r \psi_i^* \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_i \quad \text{and} \quad \langle I(t) \rangle_i = \int d^2r |\psi_i|^2 r^2,$$

com a velocidade rotacional clássica associada sendo

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\langle L_z(t) \rangle_i}{\langle I(t) \rangle_i}. \quad (5.15)$$

Somos conscientes de que calcular o momento de inércia de um sistema superfluido ou de um condensado não é um problema trivial. Na literatura, a teoria de perturbação é frequentemente empregada para determinar o momento de inércia de gases de Bose ideais confinados. Este é um tratamento dependente da temperatura, que considera tanto as partes condensadas quanto as não condensadas na avaliação do momento de inércia de um sistema quântico. No entanto, uma vez que estamos trabalhando com um modelo GP puro, as nuvens térmicas não condensadas não entram em consideração. Nós utilizamos somente a relação clássica para estimar velocidades rotacionais aproximadas.

O fator de estrutura nos fornece informações sobre a periodicidade da densidade do condensado. No caso da geometria da rede triangular, observam-se picos periódicos em uma estrutura hexagonal regular. Ao analisar a posição desses picos no fator de estrutura, é possível distinguir entre a rede de Abrikosov e a rede de vórtices fixados.

Além disso, podemos considerar o fator de estrutura da densidade para o sistema acoplado, como discutido em [124]. Esse fator de estrutura é uma função de $k \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ e fornece informações sobre a ordem da rede e a periodicidade da densidade do condensado. Ele pode ser expresso como:

$$s_i(k) = \frac{1}{2\pi} \int d^2r |\psi_i|^2 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (5.16)$$

5.1.4 Espectro de Energia Cinética no Referencial Rotativo

O campo de velocidade em um referencial em rotação, em uma frequência Ω dada, é definido subtraindo-se o campo de velocidade de um corpo rígido correspondente, como

$$\mathbf{v}_\Omega = \mathbf{v} - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})_z, \quad (5.17)$$

de forma que, para cada componente de densidade n_i , a corrente de partículas associada

$$\mathbf{j}_{i,\Omega}(\mathbf{r}, t) \equiv n_i(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}_{i,\Omega}(\mathbf{r}, t) \quad (5.18)$$

satisfaça a equação de continuidade

$$\frac{\partial n_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{i,\Omega}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (5.19)$$

Portanto, seguindo as equações (5.11) até (5.13), ao considerar um referencial em rotação em uma frequência Ω dada, obtemos

$$\begin{aligned} E_{i,\Omega}^{(\alpha)}(t) &= \frac{m_1}{2m_i} \int d^2\mathbf{k} |\mathcal{F}_{i,\Omega}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, t)|^2 \\ &\equiv \frac{m_1}{m_i} \int_0^\infty dk E_{i,\Omega}^{(\alpha)}(k, t), \end{aligned} \quad (5.20)$$

que nos define a *densidade espectral de potência de velocidade* no espaço k , dada por

$$E_{i,\Omega}^{(\alpha)}(k, t) = k \int_0^{2\pi} d\theta_k |\mathcal{F}_{i,\Omega}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, t)|^2. \quad (5.21)$$

Dentro desta definição, por conveniência, estamos removendo a diferença na razão de massa relativa, que não afeta o comportamento espectral correspondente de cada componente. Esta equação é usada para calcular as densidades espectrais de potência de energia cinética (ou velocidade) apresentadas neste trabalho. Os métodos computacionais para o cálculo do espectro de potência de velocidade usando energias cinéticas decompostas são discutidos em mais detalhes em Ref. [126].

5.2 Formação de Vórtices

No nosso estudo, examinamos duas misturas com desequilíbrio de massa, o que permite a comparação dos resultados entre uma mistura com uma discrepância considerável de massa entre os componentes, representada por $^{85}\text{Rb} - ^{133}\text{Cs}$, e um sistema com uma diferença de massa negligenciável, exemplificado por $^{85}\text{Rb} - ^{87}\text{Rb}$. Em ambos os casos, observamos padrões de rede estáveis, e as frequências médias derivadas dos resultados são obtidas pelo modelo de agitação. Esse modelo é então aplicado para deduzir os padrões de rede com base nos resultados independentes do tempo do estado fundamental.

Dessa forma, dividimos os nossos resultados em duas seções, cada uma correspon-

dendo aos dois sistemas binários que estamos investigando.

5.2.1 Mistura Binária ^{85}Rb - ^{133}Cs

Nesta subseção, apresentamos os principais resultados referentes ao sistema binário com desequilíbrio de massa composto por ^{85}Rb e ^{133}Cs . Como mencionado anteriormente, os resultados da amostra que obtivemos correspondem a comprimentos de espalhamento fixos em uma configuração miscível, ou seja, $\delta = 0,5$. Considerando o controle experimental atual sobre a condensação dessas duas espécies atômicas, podemos argumentar que as técnicas de ressonância de Feshbach [123] podem ser empregadas para aproximar o sistema acoplado a essa condição hipotética.

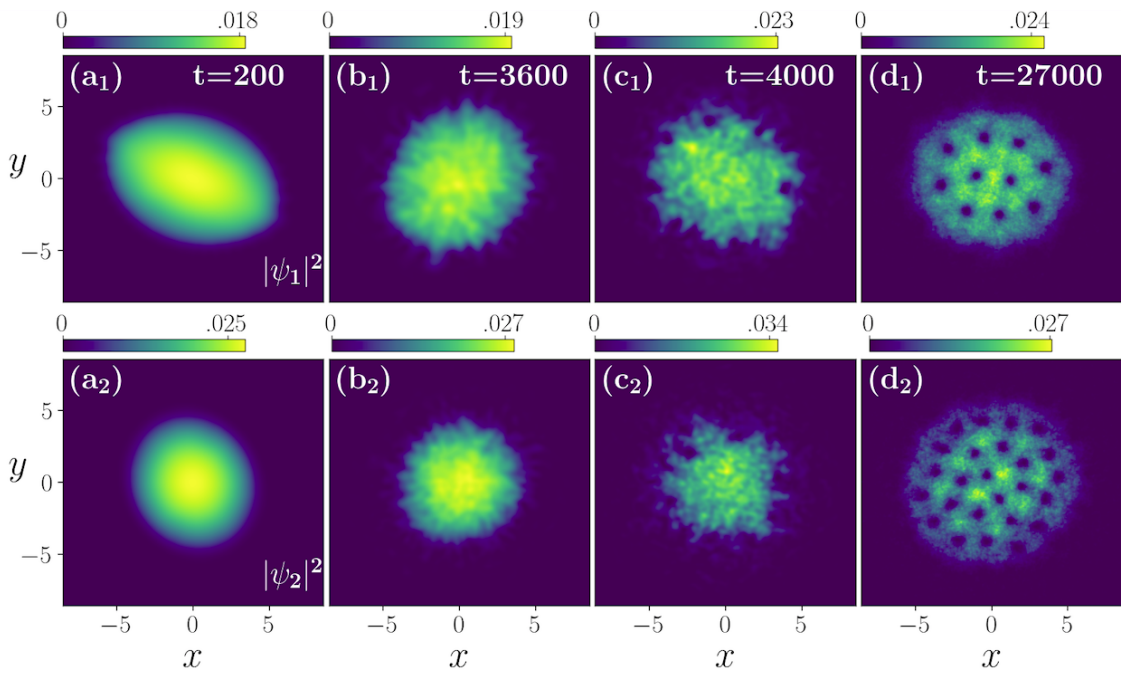


Figura 5.1: Conjunto de painéis que indicam a evolução temporal das densidades para a mistura condensada ^{85}Rb - ^{133}Cs em uma configuração miscível com $\delta = 0,5$. Os painéis superiores representam o ^{85}Rb (componente 1), enquanto os painéis inferiores correspondem ao ^{133}Cs (componente 2). O sistema começa em um estado fundamental e evolui no tempo com parâmetros $\Omega_E = 1,25$ e $\epsilon = 0,025$. Os níveis de densidade estão indicados na parte superior dos painéis. Todas as quantidades são adimensionais, considerando as unidades fornecidas.

Na Fig.5.1, por meio da evolução temporal das densidades, temos os principais resultados para as densidades, em que é mostrado o caminho para o reticulado de vórtices gerado pelo potencial de agitação. Ao considerar quatro conjuntos de painéis, dentro

do espaço 2D definido pelas coordenadas cartesianas (unidades de ℓ_ρ), fornecemos os resultados das densidades em alguns intervalos de tempo específicos, caracterizando regimes específicos, tanto para as espécies ^{85}Rb (painéis superiores, com rótulos 1) quanto para ^{133}Cs (painéis inferiores, com rótulos 2). Para obter soluções de estado fundamental não-rotativas estáveis, primeiro resolvemos a Eq.(5.3) acoplada usando tempo imaginário ($t \rightarrow -it$), com $\epsilon = 0$ (sem o potencial de agitação). Em seguida, essa solução de estado fundamental é evoluída em tempo real, considerando uma frequência elíptica rotativa $\Omega_E = 1,25$ com a intensidade do potencial de agitação $\epsilon = 0,025$, conforme dado em Eq.(5.7). Os primeiros painéis acoplados da Fig.5.1, (a₁) e (a₂), são para $t = 200$, que se refere ao intervalo de tempo em que deformações de forma começam a ocorrer no sistema. Conforme verificado, o sistema condensado já está exibindo deformações elípticas (excitações quadrupolares), devido ao potencial de agitação, que periodicamente reverte de volta ao poço de 2D simétrico, com o ciclo completo esperado dado por π/Ω_E . A deformação de forma é mais perceptível no primeiro componente mais leve (^{85}Rb) do que no segundo (^{133}Cs). Esse comportamento periódico continua até ocorrer uma quebra na simetria, com a nucleação de vórtices ocorrendo na superfície das espécies condensadas, após tempo de evolução suficientemente longo ($t > 3000$). Para este segundo intervalo, antes e no momento em que a nucleação de vórtices começa a aparecer, selecionamos dois conjuntos de gráficos na Fig. 5.1, para $t = 3600$ [painéis b₁) e (b₂)] e para $t = 4000$ [painéis c₁) e (c₂)].

O intervalo de tempo, no qual podemos observar a quebra da simetria, é representado pelos dois conjuntos de painéis (b_i) e (c_i), dentro de um intervalo de $\Delta t = 400$ (com $t = 3600$ e 4000). À medida que o tempo aumenta, após um intervalo em que comportamentos turbulentos são verificados, os vórtices nucleados se movem da superfície para a parte interna dos condensados, com padrões de rede começando a aparecer em ambos os condensados acoplados, e suas posições se tornando estáveis. Na configuração final, notamos que o número de vórtices nucleados emergindo no componente mais pesado é significativamente maior do que o número de vórtices obtidos para a espécie mais leve.

As evoluções de densidade representadas na Fig.5.1 podem ser melhor analisadas ao considerar as energias cinéticas correspondentes, que são mostradas na Fig.5.2 no referencial do laboratório. Para isso, considerando as duas espécies condensadas, as energias cinéticas totais são mostradas no painel (a), as quais são decompostas em duas partes mostradas no painel (b), uma que é compressível e outra, incompressível. No intervalo de tempo inicial, as oscilações de energia correspondem às oscilações do modo de respiração dos condensados. As energias exibem comportamentos crescentes, a partir das fases de deformação elíptica dos condensados, voltando às energias estabelecidas à medida que seguem a simetria da armadilha. A deformação da forma é mais perceptível no primeiro componente (^{85}Rb) do que no segundo (^{133}Cs), o que pode ser compreendido pela diferente inércia das espécies. O aumento das energias de ambos os componentes

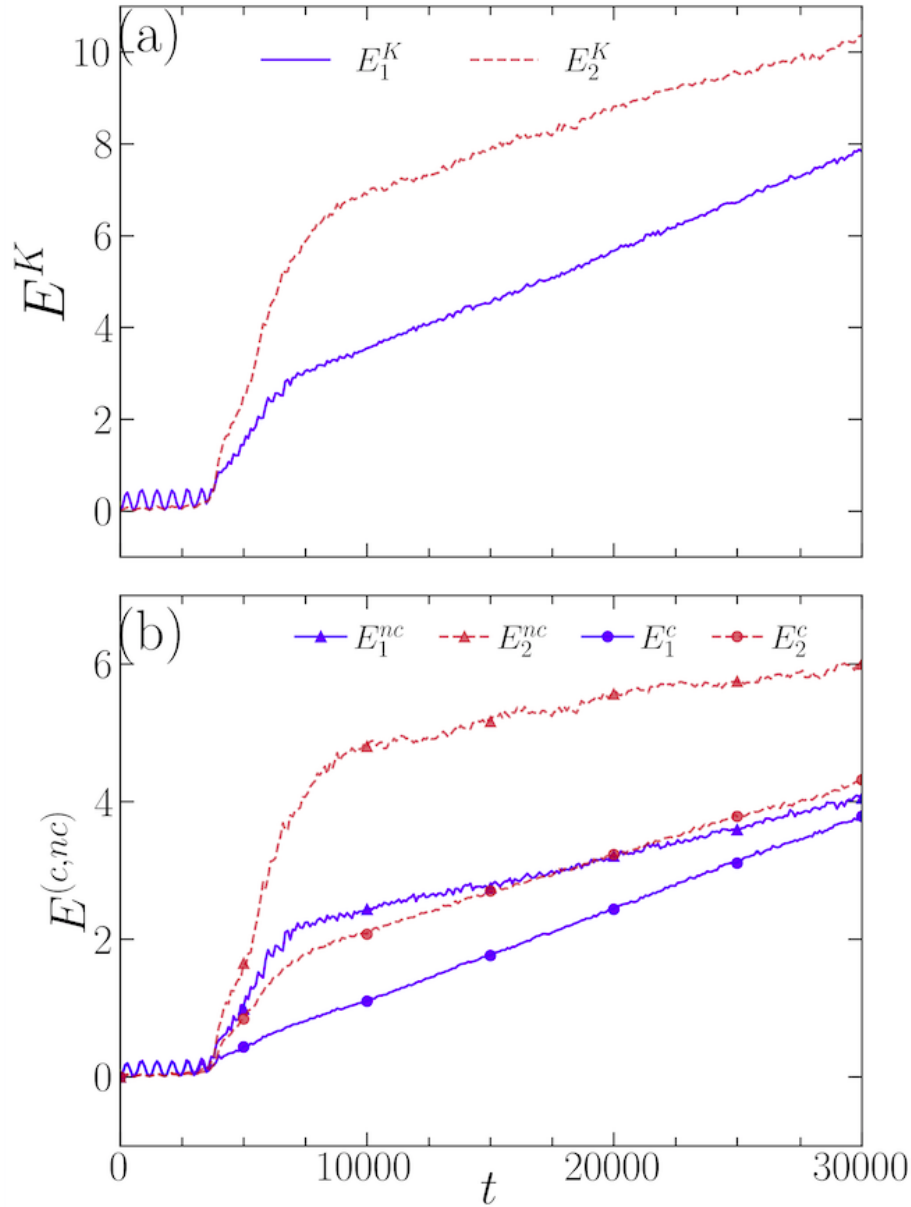


Figura 5.2: Para cada componente da mistura, ^{85}Rb ($i=1$, linhas sólidas azuis) e ^{133}Cs ($i=2$, linhas tracejadas vermelhas), são apresentadas as evoluções temporais (no referencial do laboratório) das energias cinéticas, $E_i^K \equiv E_i^K(t)$ [painel (a)] e suas partes correspondentes compressíveis (E_i^c , indicado com marcadores) e incompressíveis (E_i^{nc} , indicado com triângulos) [painel (b)]. Com a configuração inicial sendo elipsoidal, a evolução é mostrada até que padrões de vórtice estáveis sejam verificados. Todas as quantidades são adimensionais dentro das unidades fornecidas.

ocorre devido à nucleação de vórtices. Neste caso, observamos que um aumento mais drástico é verificado para o mais pesado. Na configuração final, também é notado que o número de vórtices nucleados emergindo no componente condensado mais pesado é significativamente maior do que no mais leve. Em geral, as energias no referencial rotativo diminuem quando a frequência de rotação ou o número de vórtices aumenta. O crescimento contínuo das energias no referencial do laboratório, verificado mesmo após a saturação do número de vórtices, está associado ao potencial de agitação dependente do tempo aplicado a um sistema acoplado.

Para analisar os diferentes comportamentos dinâmicos, uma observável relevante é a energia cinética, que separamos da energia total. A energia cinética é decomposta em duas partes, considerando a compressibilidade de cada parte condensada da mistura. Os comportamentos das energias cinéticas totais de ambas as componentes são apresentados no painel (a) da Fig.5.2, com a decomposição correspondente em partes compressíveis e incompressíveis mostradas no painel (b). O aumento das energias pode ser verificado visualmente nos gráficos mostrados em Fig.5.2, que se torna linear no intervalo de tempo longo, para $t > 10^4$. É mais significativo analisar a energia cinética do sistema para entender a geração de vórtices, porque todas as informações sobre os campos de velocidade podem ser extraídas das energias cinéticas associadas, como os elementos relacionados à propagação de ondas sonoras e geração de vórtices. Portanto, é apropriado distinguir na energia cinética total, as partes correspondentes às ondas acústicas (propagação compressível) das relacionadas à geração de vórtices (incompressíveis). A contribuição da energia cinética total tem um comportamento semelhante de oscilação como a energia total na evolução do tempo inicial, com enormes contribuições de energia decorrentes da produção de vórtices e ondas sonoras ao longo da rotação dinâmica de longo tempo. Nesse processo, as principais contribuições nas energias cinéticas virão das energias incompressíveis, mas contribuições significativas também das partes compressíveis, como verificado em painel (b) da Fig.5.2. Comparado com a energia total (não mostrada na figura), devemos destacar que, na primeira etapa da evolução do tempo, antes da nucleação de vórtices, a energia cinética é apenas uma pequena fração da energia total, com o comportamento oscilatório mais forte na componente mais leve. No entanto, na evolução de tempo mais longa, a energia cinética total da componente ^{133}Cs cresce para ser mais de 20% da energia total; enquanto, o aumento correspondente na energia cinética total do elemento ^{85}Rb tornando-se próximo de 16% da energia total. Isso é consistente com o número observado de vórtices emergindo no caso de ^{133}Cs em comparação com o número correspondente para ^{85}Rb , como verificado pelos resultados dados em Fig.5.1.

A nucleação de vórtices, responsável pelo aumento das energias cinéticas, começa a ocorrer na superfície, movendo-se para a parte interna dos condensados, com as partes incompressíveis fornecendo a principal contribuição para a energia cinética total. Ao

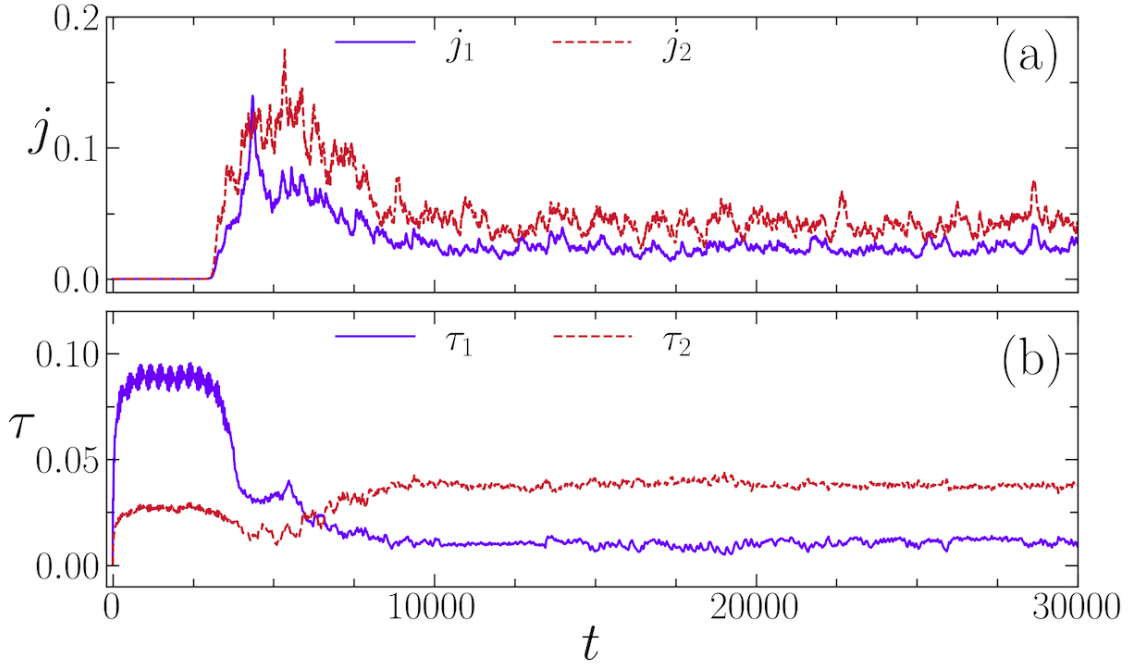


Figura 5.3: Para a mistura de ^{85}Rb ($i = 1$) e ^{133}Cs ($i = 2$), as respectivas evoluções temporais das densidades de corrente [painel (a), dadas por (5.10)] e torques [painel (b), dadas por (5.14)] são mostradas até que padrões estáveis de vórtices sejam verificados. Em unidades fornecidas, todas as quantidades são adimensionais.

comparar ambas as componentes, as partes compressíveis e incompressíveis da energia cinética da segunda componente (^{133}Cs) são maiores do que as obtidas para a primeira componente (^{85}Rb), por um fator que, em um intervalo de tempo mais longo, pode ser associado à razão de massa correspondente entre as duas espécies. Para melhorar nossa compreensão da dinâmica da formação da rede de vórtices, a partir da armadilha elíptica rotativa, neste caso de uma mistura de massa desequilibrada grande, também plotamos a evolução completa do tempo da densidade de corrente ($\mathbf{j} = n\mathbf{v}$) e do correspondente torque para as duas espécies, até que os padrões de vórtices sejam gerados e se tornem estáveis. Os resultados são apresentados na Fig. 5.3, com as densidades de corrente mostradas no quadro superior (a), e os torques dados no quadro inferior (b). Como verificado, na evolução inicial, as densidades de corrente são zero para ambas as componentes da mistura, até que ocorra uma quebra de simetria próximo a $t \sim 3000$, com vórtices sendo nucleados na superfície. As densidades de corrente atingem seus máximos em torno de $t \sim 5000$, quando a mistura está em condição turbulenta, diminuindo para um valor médio consistente com a estabilização do número de vórtices sendo gerados. Consistentemente, em toda a evolução temporal, a corrente é maior para o elemento mais massivo da mistura, o ^{133}Cs no presente caso. Essa corrente mais alta é consistente com o maior número de vórtices sendo gerados.

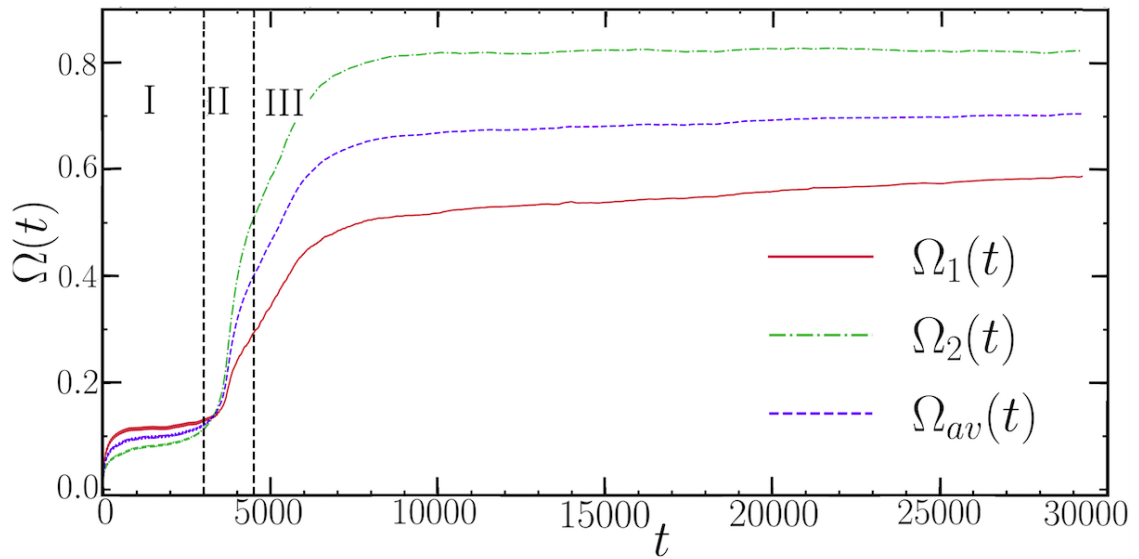


Figura 5.4: Evoluções temporais das frequências de rotação [Eq. (5.15)]: $\Omega_1(t)$, para ^{85}Rb (linha vermelha sólida); $\Omega_2(t)$, para ^{133}Cs (linha verde pontilhada); com a média correspondente, $\Omega_{av}(t) \equiv [\Omega_1(t) + \Omega_2(t)]/2$ (linha azul tracejada). As linhas verticais aproximadamente dividem o gráfico em três intervalos de tempo: (I) deformações de forma; (II) regime turbulento, com início de nucleações de vórtices; e (III) quando os padrões de vórtices estão estabelecidos. Dentro das unidades fornecidas, todas as quantidades são adimensionais.

No painel (b) da Fig.5.3, em correspondência com o painel (a), os torques experimentados por ambos os componentes, devido ao potencial de agitação, são mostrados durante a evolução temporal do sistema. O potencial de agitação dependente do tempo fornece a energia rotacional inicial para o sistema girar. Esse aumento na energia rotacional é distribuído entre os dois componentes, sendo mais eficaz no caso do componente mais leve, com o pico no torque alcançando seu máximo no intervalo de tempo $t < 3000$. O elemento mais pesado, com uma inércia correspondente mais alta, sente um torque inicial que é cerca de 30% do torque do mais leve. No entanto, em um intervalo de tempo mais longo, com ambos os valores médios variando perto de pontos fixos estáveis, verifica-se que o elemento mais pesado experimenta um torque mais alto do que o mais leve. Esses resultados podem ser associados aproximadamente com o número de vórtices induzidos nas densidades de ambos os componentes mostrados na Fig.5.1. A raiz quadrada da razão de torque está na mesma ordem que o quadrado das razões de massa, e também a razão entre o número de vórtices.

As evoluções temporais obtidas para as velocidades rotacionais clássicas $\Omega_i(t)$ são mostradas na Fig.5.4, obtidas a partir das razões de valor esperado entre o momento angular induzido $\langle L_z \rangle_i$ e o momento de inércia correspondente $\langle I \rangle_i$, como dado pela

Eq.(5.15). Os condensados rotativos sempre refletem o momento angular, que é uma quantidade conservada, no estado de equilíbrio. Quando o momento angular do sistema aumenta, a velocidade rotacional também aumenta, correspondendo. Podemos claramente observar três intervalos de tempo na evolução da velocidade rotacional, dada pela Eq.(5.15), como indicado na figura. O intervalo inicial (I) corresponde ao período em que temos as deformações de forma dos condensados. A nucleação de vórtices ocorre na região identificada por (II) na figura, que corresponde ao aumento das velocidades observadas na Fig.5.3(a). Na região (III), temos as formações de rede de vórtices, com $\Omega_i(t)$ convergindo para valores quase constantes.

A evolução temporal geral dos valores esperados fornecerá a correspondente frequência rotacional clássica definida no tempo para cada componente da mistura, dada por uma linha sólida vermelha para a espécie mais leve (^{85}Rb) e uma linha verde pontilhada para a espécie mais pesada (^{133}Cs). Como mostrado na Fig. 5.4, as frequências crescem mais rapidamente para o componente mais leve do que para o mais pesado no intervalo de tempo inicial, quando o sistema acoplado ainda está no intervalo de tempo dado pela região I, antes da nucleação de vórtices. Na região II, notamos a transição com nucleação de vórtices na superfície, quando as frequências começam a crescer mais rapidamente para o elemento mais pesado. A estabilização das frequências, que acontece mais rapidamente para o componente de massa maior, é verificada no intervalo de tempo longo dado pela região III, com a emergência de padrões de vórtices estáveis.

Para simular a solução de estado fundamental de uma abordagem independente do tempo, como fornecido pela substituição (5.8), consideramos a frequência Ω_0 correspondendo a uma média temporal das frequências rotacionais $\Omega_i(t)$, em que assumimos para o tempo total de média o intervalo de zero até o ponto em que a frequência se torna quase constante, de forma que $\Omega_i(t \geq T) \approx \Omega_i(T)$. Com esta prescrição, obtemos

$$\Omega_0 \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \Omega_{av}(t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T [\Omega_1(t) + \Omega_2(t)] dt. \quad (5.22)$$

A partir dos resultados mostrados na Figura 5.4, em que $T \sim 30000$ e a frequência média saturada é $\Omega_{av}(T) \sim 0.72$, a prescrição acima nos dá $\Omega_0 \sim 0.63$. Como mostrado na Figura 5.5, esta prescrição fornece um valor aproximadamente bom para a frequência rotacional clássica, quando usado na equação (5.3), sem o potencial de agitação.

Na Fig.5.5, fornecemos uma comparação entre os resultados das densidades acopladas, obtidos com o potencial de agitação [painéis (a_i)] e sem ele [painéis (b_i)], usando a prescrição (5.22). Considerando o potencial de agitação a laser (5.7), com $\Omega_E = 1.25$ e $\epsilon = 0.025$, os resultados estáveis correspondentes, apresentados nos painéis (a₁) e (a₂), são os mesmos previamente mostrados nos painéis (d₁) e (d₂) da Fig.5.1, respectivamente, para $t = 27000$. Sem o potencial de agitação, usando (5.8), obtemos as soluções completas em estado fundamental das densidades acopladas, considerando a frequência Ω_0 como

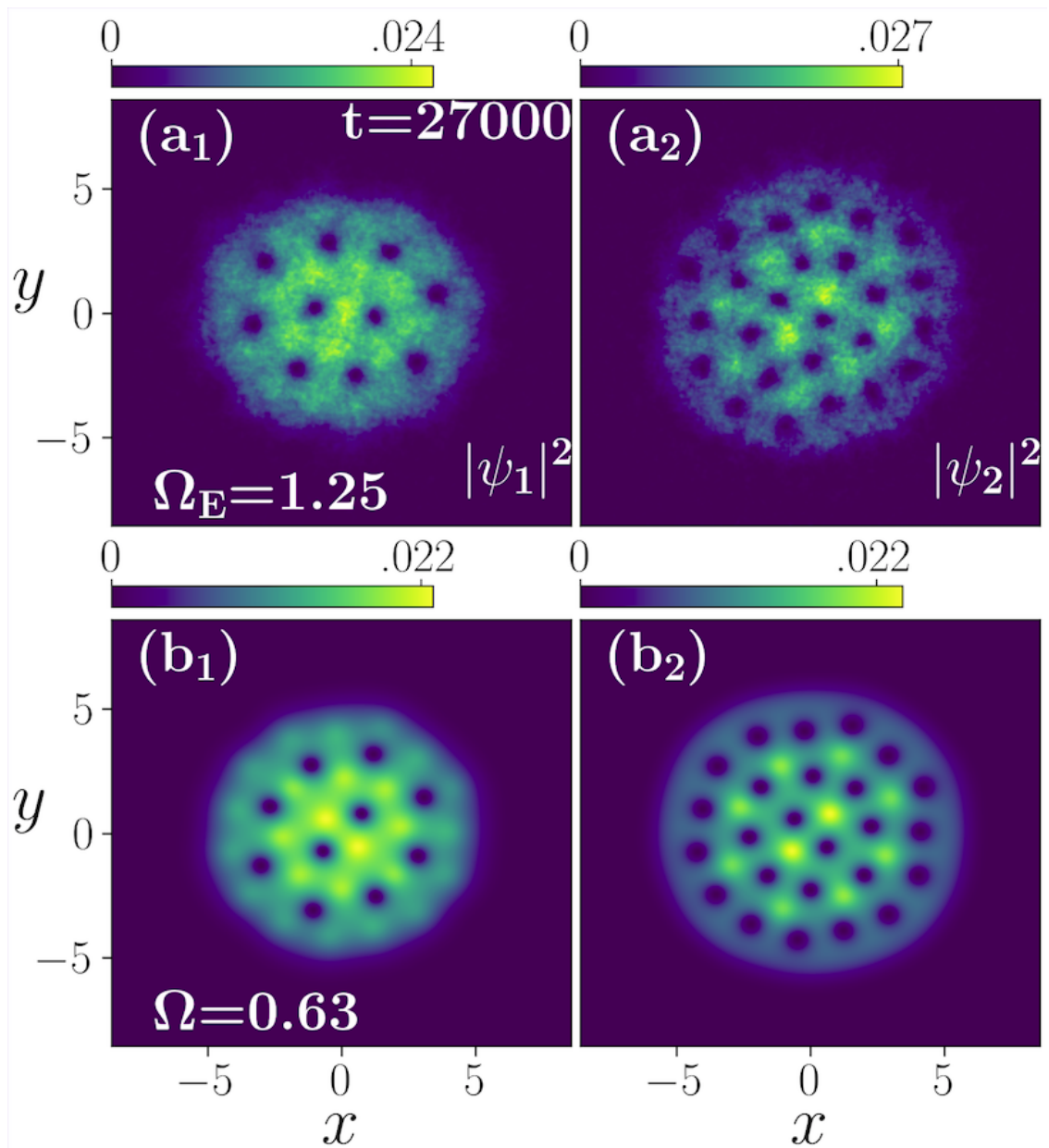


Figura 5.5: As soluções de padrões de vórtices, obtidas em $t = 27000$ com o potencial de agitação $[(a_i) = (d_i)]$ da Fig.5.1, são comparadas com as soluções de estado fundamental da Eq.(5.3), usando (5.8) com $\Omega_0 = 0.63$ [mostrado nos painéis (b_i)]. Os níveis de densidade são indicados no topo de cada painel. Todas as quantidades apresentadas nos gráficos são adimensionais.

dada pela frequência média temporal (5.22), que nos dará aproximadamente $\Omega_0 = 0.63$ no presente caso. Os resultados verificados nos painéis (b₁) e (b₂) da Fig.5.5, calculados diretamente para as soluções em estado fundamental, como obtidas para as soluções em estado fundamental, não são afetados por propagações de ondas sonoras. A correspondência entre os painéis de densidade (a_i) com (b_i) também foi confirmada examinando as ordens de rede obtidas a partir da Eq.(5.16), com os fatores de estrutura fornecendo boa concordância nas posições dos picos associados.

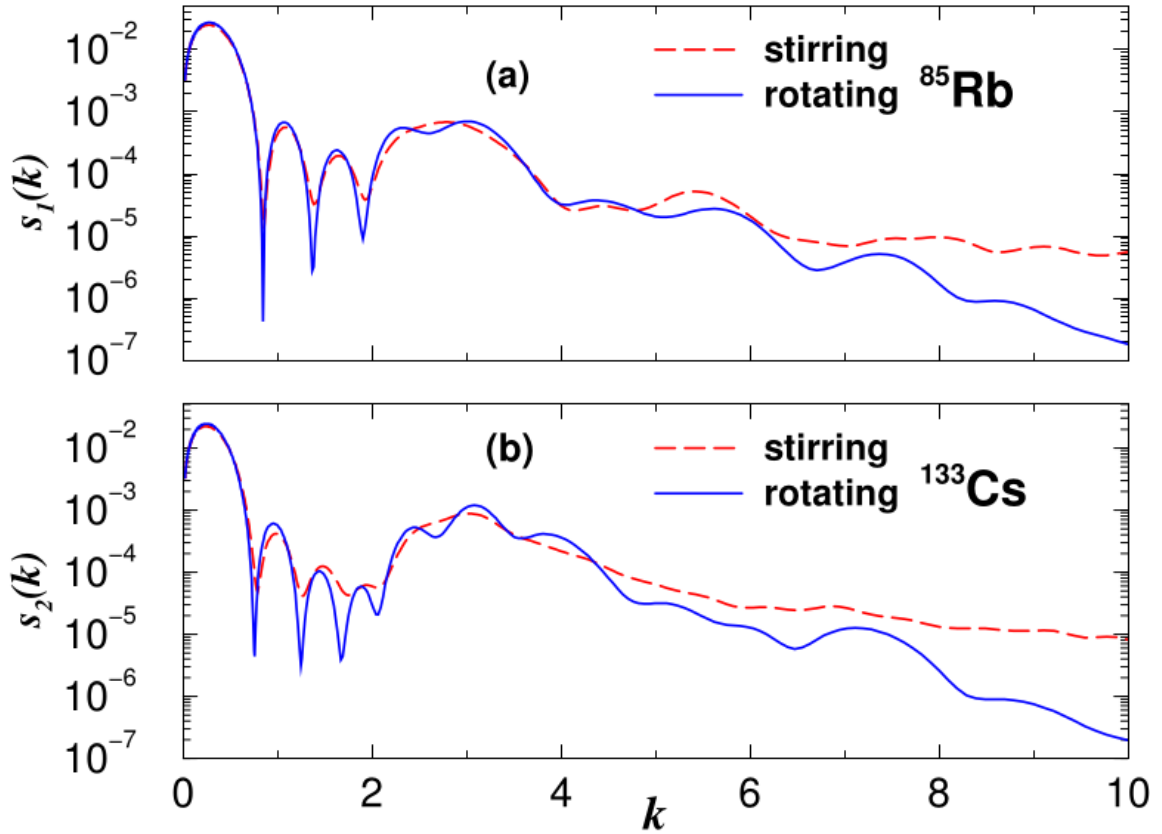


Figura 5.6: A figura apresenta os fatores de estrutura para o isótopo de rubídio ^{85}Rb e o isótopo de césio ^{133}Cs , mostrando os efeitos da agitação na formação de padrões de vórtices. A análise dos mínimos nos gráficos permite comparar a influência da agitação nos dois sistemas, determinando qual deles é mais propenso à geração de padrões de vórtices. Essa figura é relevante para o estudo de sistemas com diferenças de massa e comportamento dinâmico similar ao do ^{85}Rb - ^{133}Cs , fornecendo informações importantes sobre os efeitos da agitação nesse processo

A Figura é apresentada no contexto de um estudo sobre uma mistura binária de dois isótopos de rubídio, ^{85}Rb e ^{87}Rb . O objetivo principal do estudo é verificar os efeitos da

diferença de massa na formação de padrões de vórtices usando um potencial de agitação. A Figura 5.6 mostra os fatores de estrutura ($s_i(k)$) para o ^{85}Rb e o ^{133}Cs (previamente estudado) em função do número de onda (k). As linhas tracejadas azuis representam os resultados obtidos com o potencial de agitação, enquanto as linhas sólidas azuis mostram os resultados da rotação sem agitação. Os mínimos nos gráficos correspondem às ordens da rede.

A Figura 5.6 ajuda a comparar os efeitos da agitação na formação de padrões de vórtices entre o ^{85}Rb e o ^{133}Cs . Observa-se que as posições dos mínimos nos gráficos (correspondentes às ordens da rede) são indicadas por linhas vermelhas. Essa análise permite determinar qual sistema é mais favorável na produção de padrões de vórtices usando um potencial de agitação.

No geral, a Figura 5.6 fornece informações importantes sobre os efeitos da agitação na formação de padrões de vórtices em uma mistura binária de ^{85}Rb - ^{87}Rb , e sua análise é relevante para o estudo de sistemas com diferenças de massa e comportamento dinâmico similar ao do ^{85}Rb - ^{133}Cs .

5.2.2 Mistura Binária ^{85}Rb — ^{87}Rb

Para o caso de dois isótopos da mesma espécie, assumimos a mistura binária ^{85}Rb - ^{87}Rb . O objetivo principal é, repetindo o mesmo tipo de cálculos previamente realizados para ^{85}Rb - ^{133}Cs , verificar claros efeitos de desequilíbrio de massa em nossos resultados. Particularmente, tentaremos apontar o sistema que é mais favorável na produção de padrões de vórtices usando um potencial de agitação. Para isso, seguimos as mesmas parametrizações anteriores para as interações de armadilha e partículas, considerando uma configuração completamente miscível, com $\delta = a_{12}/a_{11} = 0.5$ (onde $a_{22} = a_{11} = 60a_0$).

A evolução temporal das densidades pode ser verificada pelos quatro conjuntos de painéis mostrados na Figura 5.7, para as duas espécies, sendo a fileira superior para ^{85}Rb e a inferior para ^{87}Rb . Como esperado, devido à pequena diferença de massa entre os componentes, o comportamento dinâmico observado para ambas as espécies é semelhante ao longo da evolução temporal, até que os padrões de vórtice se tornem estáveis. Em comparação com a Figura 5.1, deve-se observar que o tempo para atingir a condição na qual ocorrem os vórtices nucleados na superfície se movem da superfície para a parte interna dos condensados é menor. Esse comportamento pode ser melhor verificado considerando os resultados obtidos para os outros observáveis, em correspondência com o caso de desequilíbrio de massa mais forte anterior. Para isso, estamos apresentando os resultados de evolução temporal para as energias cinéticas na Figura 5.8, correntes e torques na Figura 5.9, com as correspondentes velocidades de rotação clássicas mostradas na Figura 5.10.

Neste caso, com ambas as espécies tendo aproximadamente a mesma massa, o número

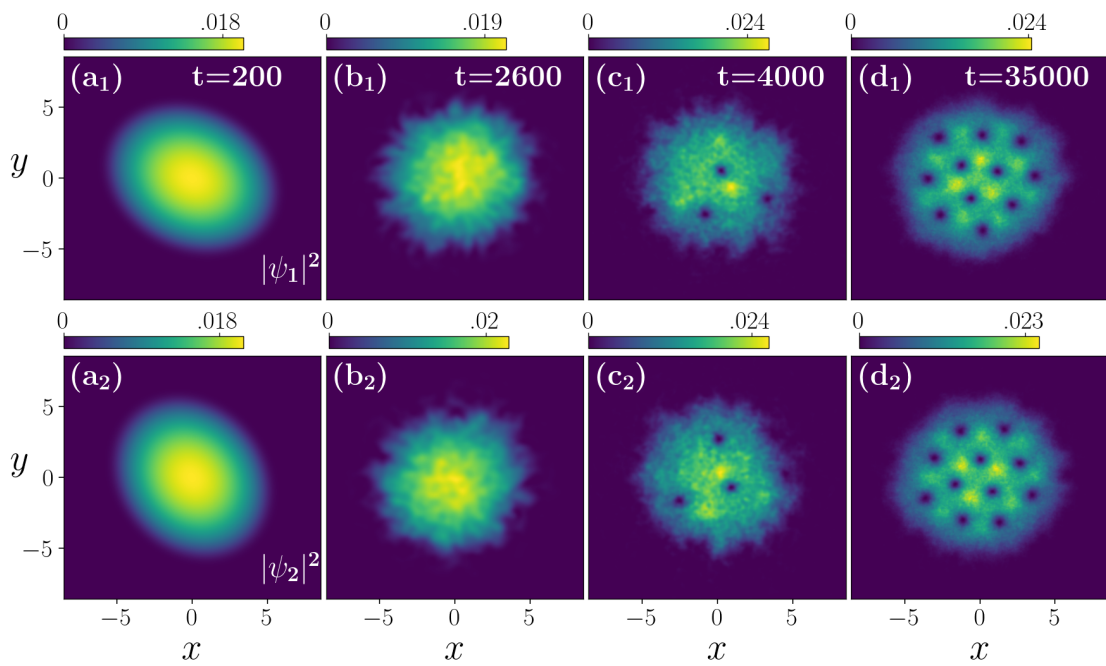


Figura 5.7: Conjunto de painéis indicando a evolução temporal das densidades para a mistura ^{85}Rb - ^{87}Rb . Os painéis superiores são para ^{85}Rb (componente 1), com os painéis inferiores para ^{87}Rb (componente 2). Como no caso da Figura 5.1, a partir de uma solução de estado fundamental, o sistema é evoluído em tempo real com $\Omega_E = 1.25$ e $\epsilon = 0.025$. Os níveis de densidade são indicados no topo dos painéis. Dentro das unidades fornecidas, as grandezas plotadas são adimensionais.

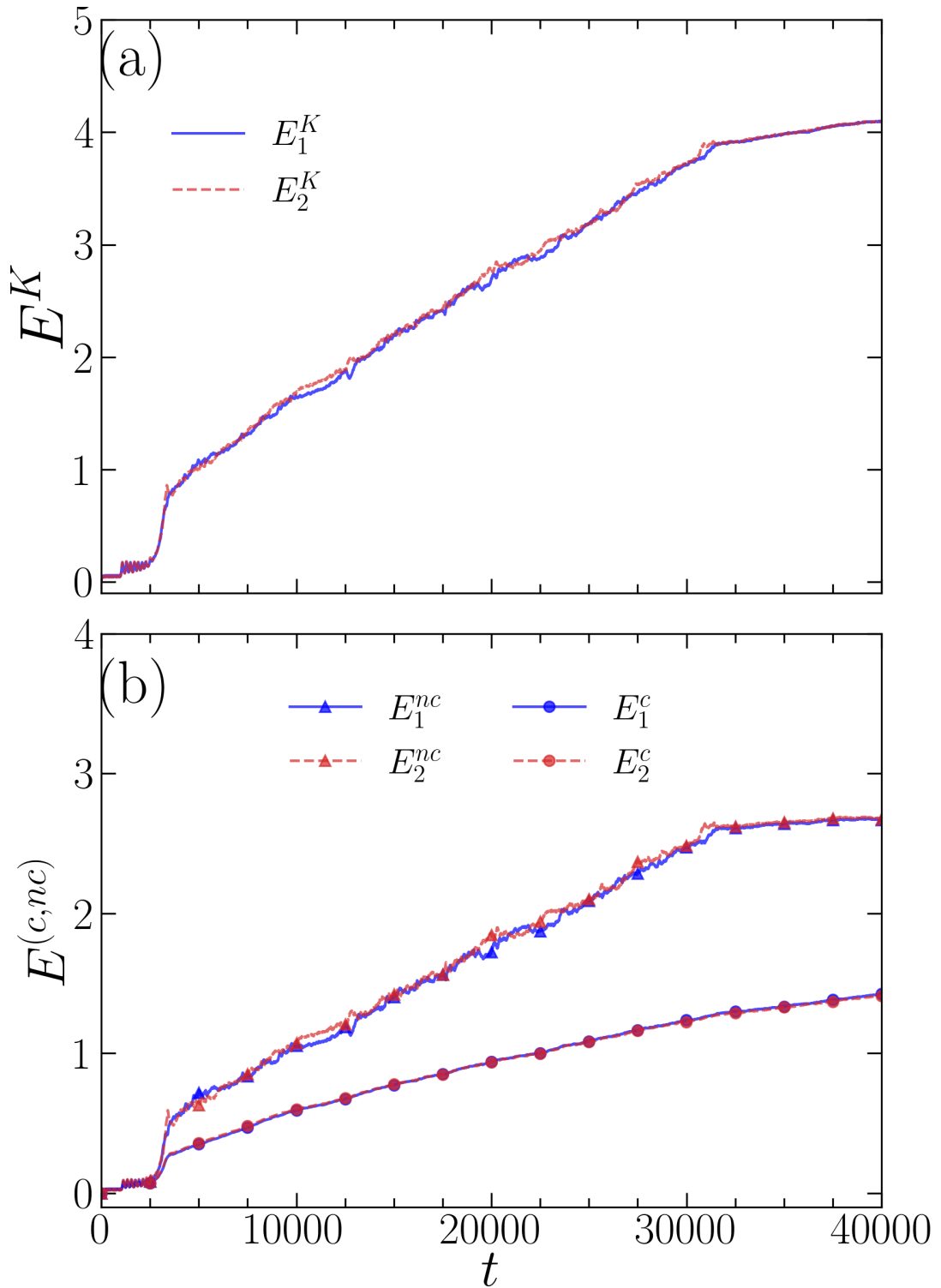


Figura 5.8: Para ambos os componentes, ^{85}Rb ($i = 1$) e ^{87}Rb ($i = 2$), o painel (a) mostra a quase completa sobreposição das energias cinéticas totais (sólido-azul para E_1^K , com tracejado-vermelho para E_2^K). As partes compressíveis (círculos) e incompressíveis (triângulos) de E_i^K são mostradas no painel (b). Dentro das unidades fornecidas, todas as grandezas são adimensionais.

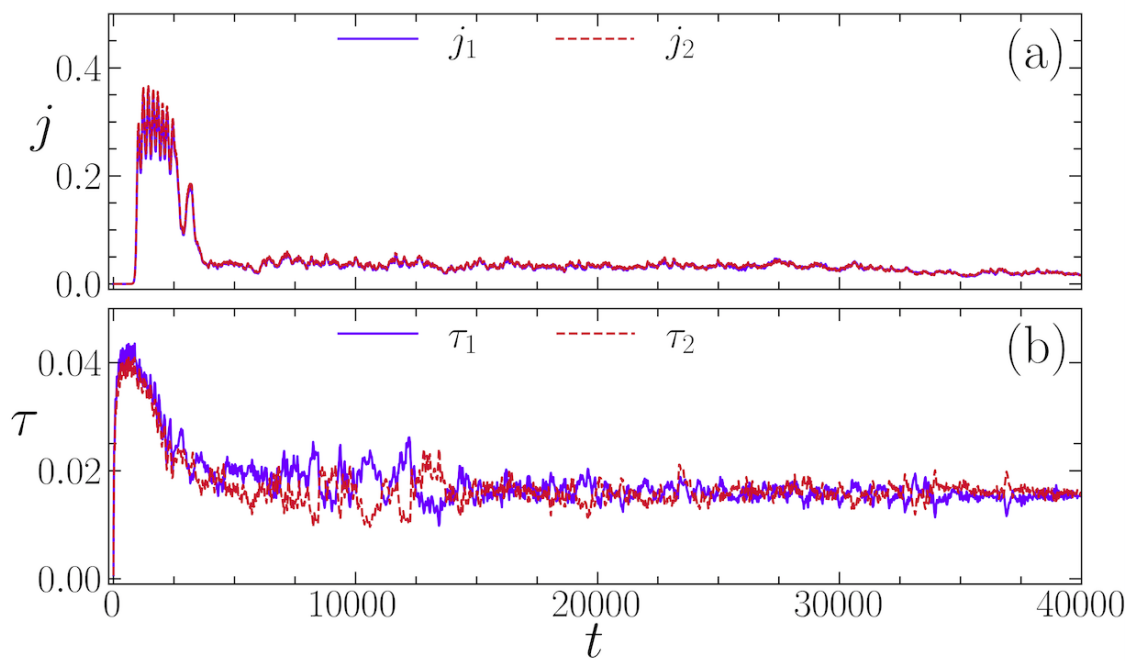


Figura 5.9: As densidades de corrente [no painel (a)] com os torques [no painel (b)], respectivamente dados pelas equações (5.10) e (5.14) para ambos os componentes, são mostrados para a mistura ^{85}Rb - ^{87}Rb , durante o processo dinâmico que ocorre até a geração de vórtices. Dentro das unidades fornecidas, todas as grandezas são adimensionais.

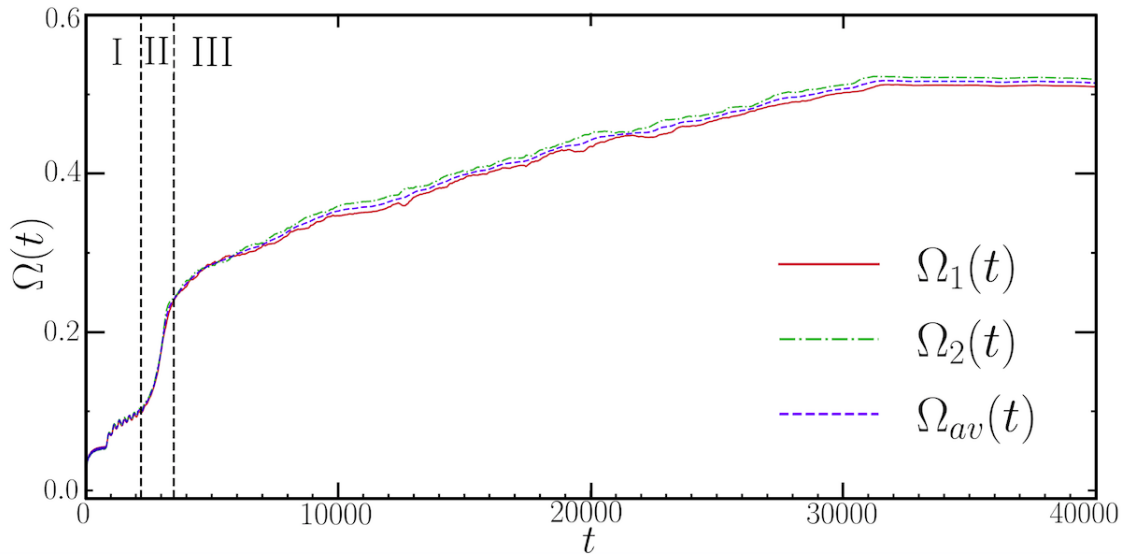


Figura 5.10: Evolução temporal de $\Omega_i(t)$ (Eq. (5.15)) de ambos os componentes, ^{85}Rb (curva sólida vermelha) e ^{87}Rb (curva tracejada verde), com o resultado médio correspondente, $\Omega_c(t) = [\Omega_1(t) + \Omega_2(t)]/2$ (curva tracejada azul). As linhas verticais indicam três intervalos de tempo na evolução: (I) deformações de forma; (II) período de transição com nucleação de vórtices na superfície; e (III) com formação de lattices de vórtices. Todas as quantidades são adimensionais.

final de vórtices verificado para ambas as componentes é o mesmo, como mostrado na Figura 5.7. Também como esperado, os resultados respectivos são muito próximos para as energias cinéticas de ambas as espécies, de forma que estamos representando as energias cinéticas totais no painel (a) da Figura 5.8, com as partes compressível e incompressível das energias cinéticas no painel (b). Como no caso de $^{85}\text{Rb}-^{133}\text{Cs}$, considerando a Figura 5.2, inicialmente as energias cinéticas são uma fração muito pequena da energia total (não mostrada na figura), tornando-se uma fração grande (cerca de 13Esses resultados, juntamente com os resultados mostrados para a corrente e torques, também estão bastante em contraste com os correspondentes verificados para o caso de desequilíbrio de massa mais forte, onde o processo de nucleações de vórtice e o movimento para a parte interna do condensado se torna muito mais rápido. O tempo para estabilizar os padrões finais de vórtice é muito mais longo no caso de sistemas acoplados com massas semelhantes, como se pode verificar em particular a partir dos resultados obtidos para as frequências rotacionais clássicas. Ao comparar a Figura 5.10 com a Figura 5.4, notamos que as frequências médias já estão atingindo a convergência em $t \sim 30000$ para $^{85}\text{Rb}-^{133}\text{Cs}$. No entanto, para $^{85}\text{Rb}-^{87}\text{Rb}$, é necessário um tempo muito mais longo para uma convergência final.

Na Figura 5.11, seguimos o mesmo procedimento feito na Figura 5.5 para $^{85}\text{Rb}-^{133}\text{Cs}$, agora considerando o sistema de massas quase idênticas, $^{85}\text{Rb}-^{87}\text{Rb}$, fornecendo uma comparação entre os resultados para as densidades acopladas, obtidas com o potencial de

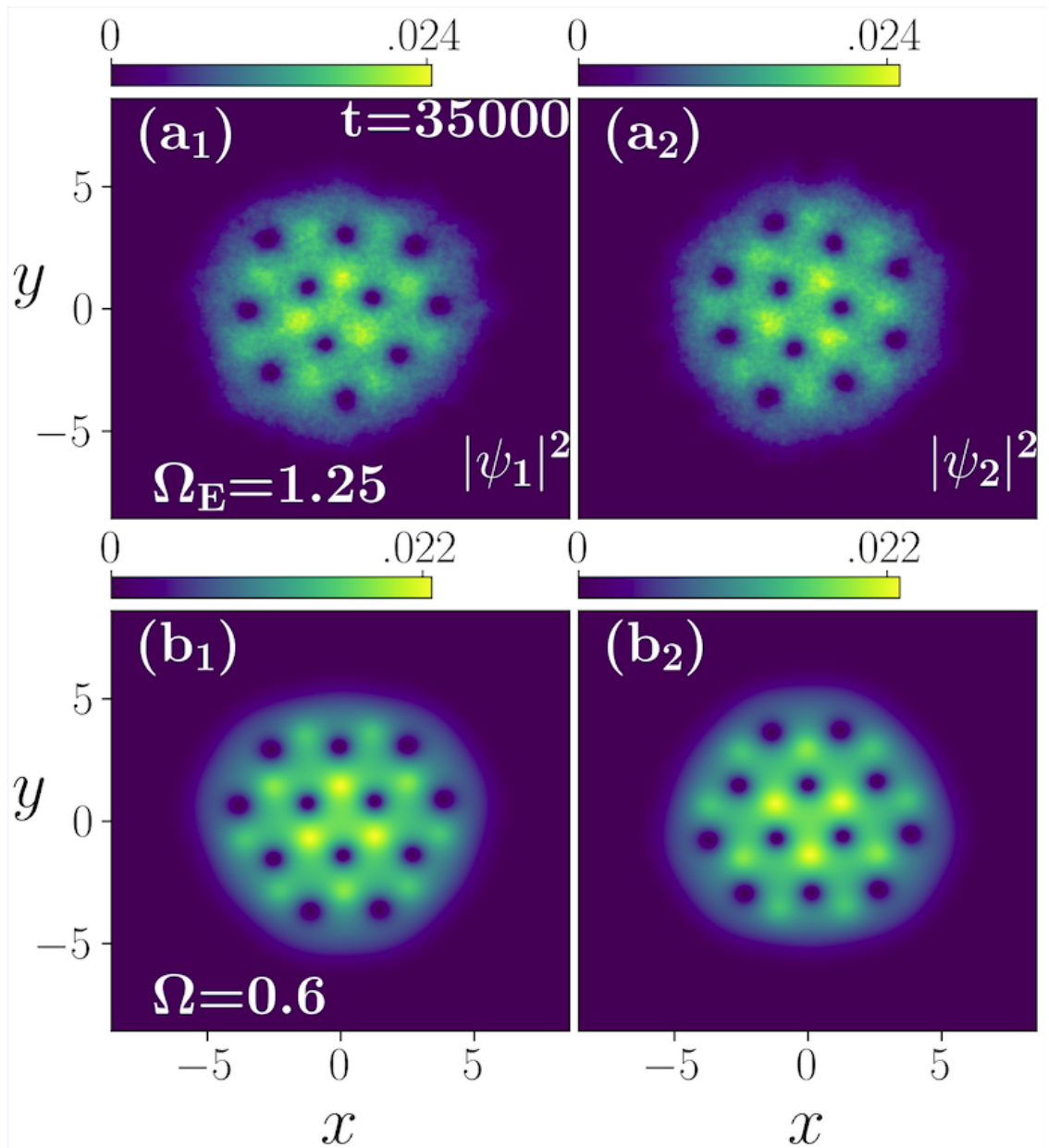


Figura 5.11: Os resultados do padrão de vórtices, em $t = 35000$ com o potencial de agitação [(a_i) = (d_i) da Fig.5.7], são comparados com as soluções em estado fundamental da Eq.(5.3), usando (5.8) com $\Omega_0 = 0.6$ [painéis (b_i)], para o sistema acoplado ^{85}Rb (espécie 1) e ^{87}Rb (espécie 2) em configuração miscível $a_{12}/a_{11} = 0.5$. Os níveis de densidade são indicados no topo de cada painel. Dentro das unidades fornecidas, todas as quantidades são adimensionais.

agitação (usando os mesmos parâmetros $\Omega_E = 1.25$ e $\epsilon = 0.025$) [painéis (a_i)] e sem ele [painéis (b_i)]. Os resultados estáveis correspondentes, apresentados nos painéis (a₁) e (a₂), são os mesmos anteriormente mostrados nos painéis (d₁) e (d₂) da Figura 5.7, respectivamente, para $t = 35000$. Usando (5.8), ou seja, removendo a perturbação dependente do tempo, obtemos as soluções completas de estado fundamental das densidades acopladas com $\Omega_0 = 0.6$ nos painéis inferiores. Neste caso, a prescrição (5.22) fornece um valor para a frequência próxima ao limite assintótico verificado na Figura 5.10, $\Omega_{av} \approx 0,52$, indicando um valor menor para Ω_0 para melhorar a concordância entre os painéis de densidade (a_i) e (b_i).

5.3 Espectros de Energia Cinética Incompressível

Nesta seção, consideramos as densidades espectrais de potência de velocidade no espaço k , conforme dado pelas equações (5.20) e (5.21), para a análise dos espectros de energia cinética incompressível das duas componentes, que é a parte mais apropriada da energia cinética relacionada às características de fluidez na produção de vórtices. Os métodos espectrais de energia cinética para análise de fluxos turbulentos em fluidos quânticos de quebra de simetria dentro do limite de Gross-Pitaevskii podem ser encontrados em Ref. [126]. O espectro $E^{(nc)}$ incompressível é esperado se comportar como k^{-3} quando as configurações de vórtice se tornam bem estabelecidas dentro do condensado. No regime de evolução temporal, antes de atingir a configuração de padrão de vórtice, o espectro é esperado se aproximar do comportamento de Kolmogorov $k^{-5/3}$, caracterizando o regime turbulento de um fluido. A fim de realçar o efeito das diferenças de massa neste estudo do comportamento dinâmico de potência da lei de potência, na próxima seção, ambos os comportamentos dos sistemas acoplados com desequilíbrio de massa, ^{85}Rb - ^{133}Cs e ^{85}Rb - ^{87}Rb , serão analisados comparativamente ao longo da evolução temporal das misturas.

Portanto, a seguir, ambos os sistemas acoplados com desequilíbrio de massa, ^{85}Rb - ^{133}Cs e ^{85}Rb - ^{87}Rb , têm seus espectros de energia cinética incompressível, $E^{(nc)}(k, t)$, apresentados nas Figuras 5.12 a 5.13. Os resultados são exibidos como funções do número de onda k multiplicado pelos correspondentes comprimentos de cura ξ . Para ambos os casos, no conjunto selecionado de painéis acoplados, estamos considerando instantes de tempo, com as correspondentes frequências rotacionais clássicas, que são representativas dos intervalos de tempo antes e depois da nucleação dos vórtices.

5.3.1 Espectros de Energia Cinética ^{85}Rb - ^{133}Cs

Primeiramente, examinamos os espectros de energia cinética para o caso em que há um desequilíbrio de massa mais forte entre as espécies. Ao considerarmos as três

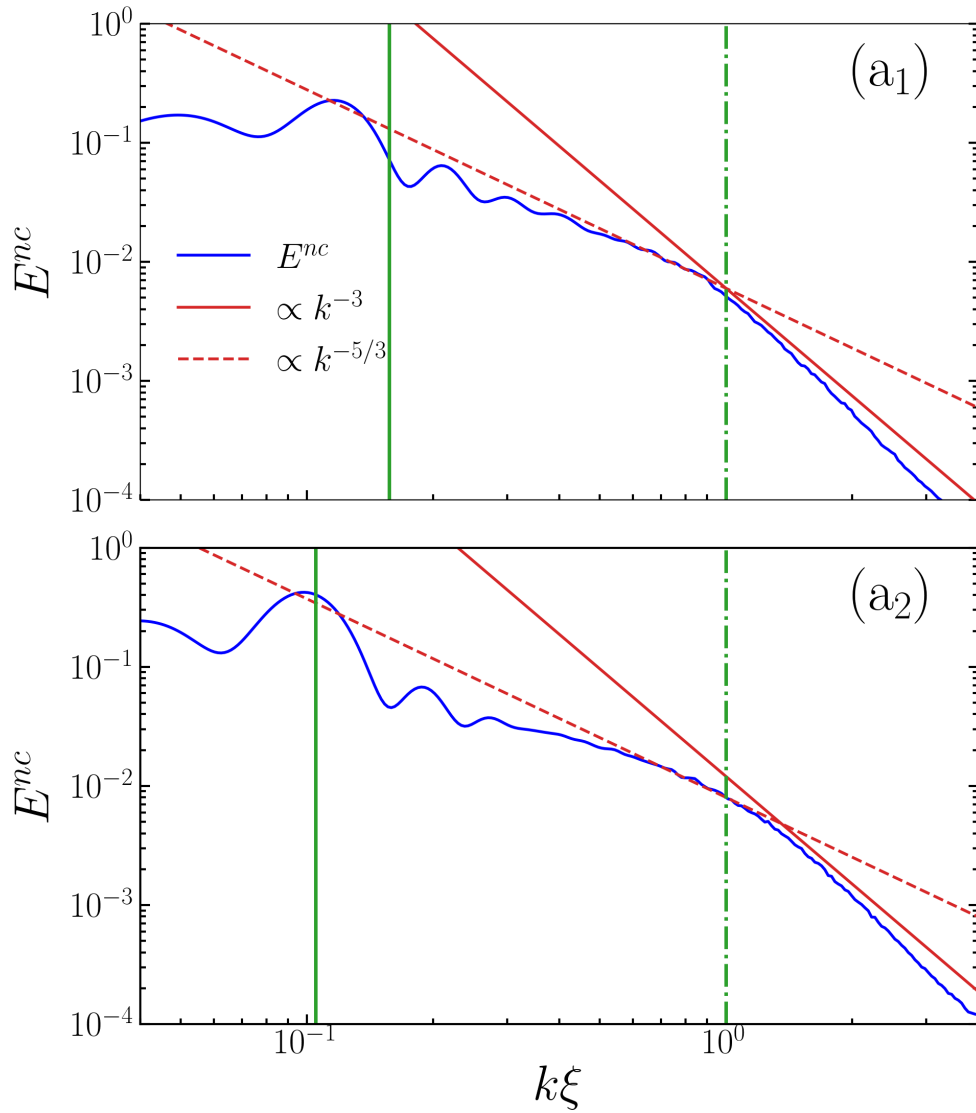


Figura 5.12: Espectros de energia cinética incompressível, $E^{nc} \equiv E^{nc}(k, t)$, para a mistura ^{85}Rb - ^{133}Cs , obtidos pela média de 50 amostras no intervalo de tempo turbulento (II) indicado na Fig. 5.4, que aproximadamente concordam com o comportamento de lei de potência de Kolmogorov clássico $k^{-5/3}$ na faixa mostrada $0.1 < k\xi < 1$ (linhas pontilhadas vermelhas), sendo modificado para k^{-3} na região do ultravioleta. Todas as quantidades são adimensionais.

regiões definidas na Figura 5.4, podemos selecionar intervalos de tempo representativos da evolução. O primeiro intervalo (I), correspondendo também aos painéis (a_i) da Figura 5.1, refere-se ao intervalo de deformação da forma, quando percebemos que a frequência de rotação é muito mais lenta para o componente mais pesado. Como não há formação de vórtices nesta fase, analisar o espectro neste regime não fornece informações úteis sobre

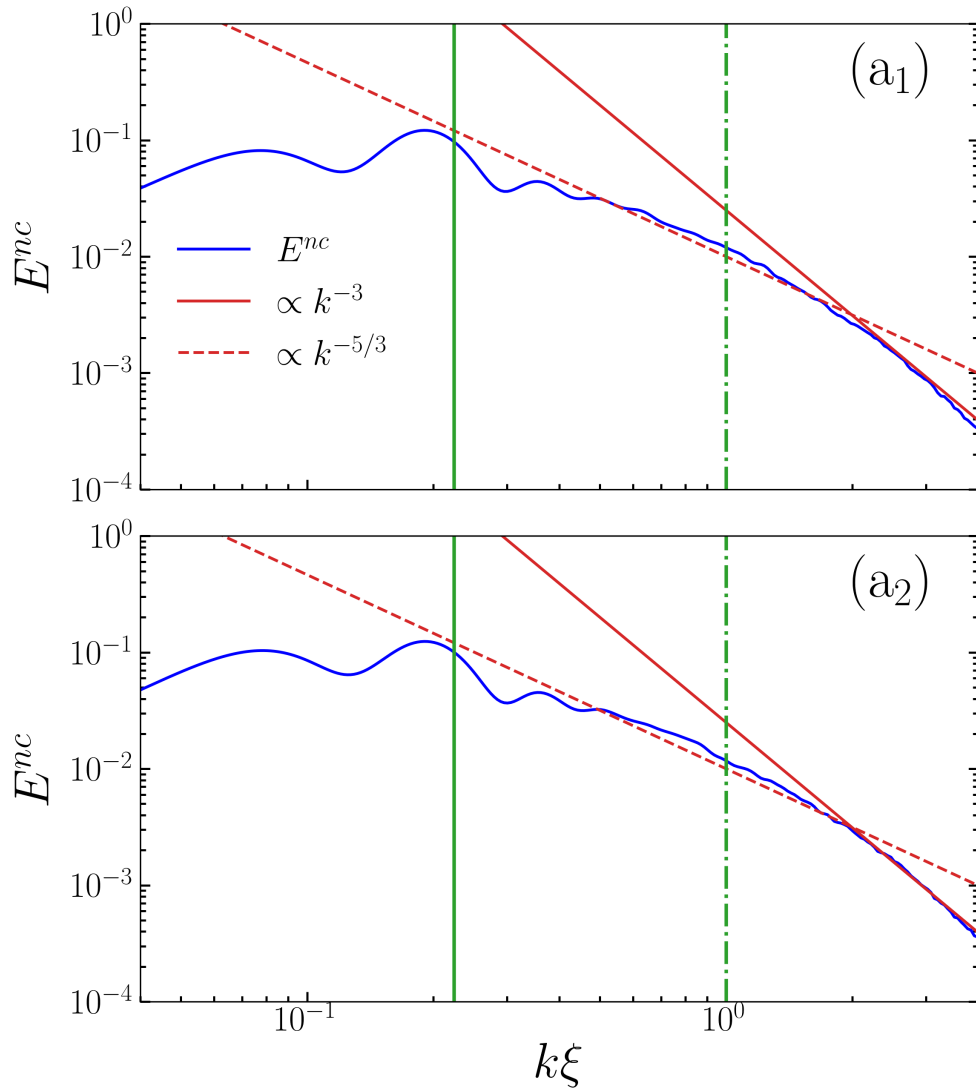


Figura 5.13: Espectros de energia cinética incompressível, $E^{nc} \equiv E^{nc}(k, t)$, para a mistura ^{85}Rb - ^{87}Rb , obtidos através da média de 50 amostras no intervalo turbulento (II), indicado na Fig.5.10. Com um comportamento semelhante ao observado para o caso de maior desbalanceamento de massa, na Fig.5.12, a mudança no comportamento de lei de potência é verificada para valores maiores de $k\xi$. Todas as quantidades estão sem dimensão.

o comportamento da lei de potência. Além disso, na última parte do intervalo (III), não se deve esperar nenhum comportamento turbulento, considerando que o sistema já está próximo do equilíbrio. À medida que o sistema se aproxima deste intervalo de tempo, com um padrão de vórtices já estabelecido, deve-se notar o comportamento característico da lei de potência k^{-3} , que é perdido quando as ondas sonoras começam a afetar os núcleos

dos vórtices.

Portanto, o intervalo de tempo (II) é o mais relevante para caracterizar o regime turbulento no qual os vórtices começam a ser formados na superfície (próximo a $t \sim 3500 - 4000$), entrando na parte interna dos condensados na última parte do intervalo (quando t está próximo de 4500). Consideramos este intervalo para examinar com mais detalhes o possível comportamento da lei de potência esperada. Para caracterizar melhor este regime, indo da turbulência à formação de padrões de vórtices, na Figura 5.12, exibimos os espectros de energia cinética incompressível para os dois componentes da mistura ^{85}Rb - ^{133}Cs , em termos de $k\zeta$ (onde ζ se refere ao comprimento de cura específico de cada espécie de condensado). Os resultados, obtidos pela média de 50 amostras no intervalo de tempo turbulento (II) definido na Figura 5.4, confirmam claramente o comportamento da lei de potência de Kolmogorov $k^{-5/3}$ no regime turbulento (II) para $k\zeta \lesssim 1$, que muda para k^{-3} para momentos maiores.

Significativamente, um fluido quântico é mais turbulento nessa fase devido a um grande número de gerações de vórtices na superfície. O fluido quântico parece mais turbulento até que o torque, experimentado pelos condensados devido ao agitação a laser, alcance a região mais estável (como observado na Figura 5.3). Ao longo do processo, os condensados acoplados têm uma injeção contínua de energia devido ao potencial de agitação a laser. O espectro de energia cinética de velocidade é dominado pelo espectro de rotação de corpo rígido no regime do infravermelho. Neste trabalho, removemos a grande contribuição do infravermelho calculando o espectro no quadro de referência giratório, já que a amplitude do sinal do infravermelho é grandemente reduzida em tal quadro. Os espectros de energia cinética incompressível, correspondentes às configurações de vórtices apresentadas nos painéis (d_i) da Figura 5.1, são mostrados em $k\zeta$ em escala logarítmica. Da mesma forma que em Ref. [84], também considerando nossos resultados atuais de sistemas acoplados, os espectros são analisados para os regimes do infravermelho ($k\zeta \ll 2\pi$) e ultravioleta ($k\zeta \gg 2\pi$). O espectro incompressível se torna mais importante quando os vórtices entram no sistema. No regime ultravioleta, o espectro de energia cinética incompressível apresenta um comportamento de escala universal k^{-3} que surge da estrutura do núcleo do vórtice. No regime do infravermelho, o espectro incompressível segue a lei de potência de Kolmogorov $k^{-5/3}$. Esta característica de lei de potência é mantida até $k\zeta \sim 2\pi$, mudando para k^{-3} em momentos mais altos. Esses comportamentos desaparecem depois que os vórtices entram na parte interna das densidades, com o sistema acoplado relaxando para a cristalização de padrões de rede.

5.3.2 Espectros de Energia Cinética ^{85}Rb - ^{87}Rb

Seguindo uma análise semelhante à realizada na seção anterior para ^{85}Rb - ^{133}Cs , na Figura 5.13 apresentamos nossos resultados para os espectros ao considerar a mistura

^{85}Rb - ^{87}Rb . Para esta mistura, as respectivas distribuições de densidade são dadas na Figura 5.7. Neste caso, seguindo a mesma ordem que antes, temos o intervalo inicial de deformação da forma sendo representado em (a_i) , em $t = 200$. Os outros instantes de tempo são para o intervalo de tempo em que a nucleação de vórtices começa $[(b_i)$, em $t = 2600]$, entrando na parte interna $[(c_i)$, em $t = 4000]$, e quando os padrões de vórtices se tornam estáveis $[(d_i)$, em $t = 35000]$.

Como consideramos antes, para este sistema também estamos focando particularmente na região (II), indicada na Figura 5.10, onde ocorre o regime turbulento, até que padrões de vórtices se formem para cada componente. Os resultados correspondentes são mostrados na Figura 5.13, com o painel superior mostrando os espectros para o componente ^{85}Rb e o painel inferior para o componente ^{87}Rb . Novamente, nossos resultados foram obtidos pela média de 50 amostras na região (II), considerando intervalos de tempo fixos. Ao compararmos os dois tipos de misturas, observamos que o comportamento de lei de potência de Kolmogorov $k^{-5/3}$ no regime turbulento (II) (verificado para $k\zeta \lesssim 1$) é deslocado para valores maiores de $k\zeta$ quando consideramos diferenças de massa próximas entre as espécies. Também observamos o mesmo tipo de mudança ocorrendo para o comportamento k^{-3} , que começa para valores maiores de $k\zeta$.

5.4 Considerações Finais

Nós estudamos a dinâmica de nucleação de vórtices e os fluxos turbulentos associados produzidos pela agitação a laser elíptica de dois tipos de condensados Bose-Einstein acoplados de massa desigual, confinados em uma geometria de "panqueca" efetiva bidimensional. Modelamos dois sistemas facilmente acessíveis e controláveis em experimentos de átomos frios: misturas de ^{85}Rb - ^{133}Cs e ^{85}Rb - ^{87}Rb , ambos no regime miscível.

Durante a agitação, observamos as etapas de instabilidade conhecidas no sistema de componente único [83]: deformação da forma, quebra de simetria envolvendo nucleação de vórtices e, finalmente, a abordagem do equilíbrio do referencial em rotação. Para caracterizar a nucleação de vórtices no sistema de BEC acoplado, calculamos a evolução temporal de observáveis dinâmicos relevantes para cada um dos dois componentes da mistura, incluindo as energias total e cinética, as densidades de corrente e os torques.

Durante o regime de deformação da forma, a energia cinética injetada é principalmente compressível, mudando para energia incompressível quando a nucleação de vórtices começa. Para baixa desigualdade de massa, as últimas redes de vórtices são semelhantes, enquanto para o sistema de alta desigualdade de massa, a espécie mais pesada suporta mais vórtices na mesma frequência de rotação. Isso é consistente com a regra de Feynman para a densidade de vórtices em uma rede rigidamente rotativa [64], enquanto a densidade de vórtices é proporcional à massa atômica.

O torque inicial experimentado pelos condensados acoplados logo após ligar o laser agitador é mais forte para a espécie atômica menos massiva. Quando os vórtices se aproximam de configurações de rede estabilizadas, para ambos os elementos, os torques saturam, sendo mais fortes para o mais massivo. Para calcular a frequência de rotação efetiva dependente do tempo de cada componente, usamos a relação de rotação clássica, obtida a partir dos valores esperados dos operadores de momento angular e momento de inércia. A mistura com maior desequilíbrio de massa tem uma frequência de rotação maior do que a mistura com menor desequilíbrio de massa. Isso também é refletido no número visível de vórtices mostrados na rede final de vórtices.

Como medida de energia do vórtice, calculamos a energia cinética incompressível, tomando cuidado para subtrair o campo de velocidade do corpo rígido não interessante associado à rotação. No regime turbulento, a energia cinética incompressível mostra algumas evidências de uma escala Kolmogorov $k^{-5/3}$, para valores dos momentos k (como uma função do inverso do comprimento de cura ξ^{-1}) menores do que 1, o que é modificado para um comportamento de lei de potência k^{-3} no regime ultravioleta determinado pela estrutura do núcleo do vórtice [84]. Embora a faixa de escala Kolmogorov seja um pouco limitada, o espectro é consistente com o transporte de energia para grandes escalas à medida que os vórtices desordenados entram no sistema e começam a se organizar. Os vórtices nesta etapa estão próximos à fronteira do condensado, e a escala de lei de potência de Kolmogorov desaparece uma vez que as configurações de vórtice estáveis se desenvolvem.

Ao comparar os sistemas com grande e pequeno desequilíbrio de massa, são observadas duas características notáveis. Primeiro, notamos que um sistema com grande desequilíbrio de massa apresenta o comportamento aproximado de lei de potência $k^{-5/3}$ por um período de tempo mais longo. Nesse sentido, ver as figuras 5.12 e 5.13, nas quais também se pode notar que a mudança no comportamento de escala, de $k^{-5/3}$ para k^{-3} , ocorre em energias cinéticas incompressíveis mais baixas para diferenças de massa maiores entre as espécies. Segundo, a produção dinâmica de padrões estáveis de vórtices é verificada como um processo muito mais rápido para sistemas com maior desequilíbrio de massa do que para sistemas com desequilíbrio de massa menor.

Além dos resultados acima, também devemos destacar que, no caso em que um único condensado é confinado sob as mesmas condições de interação de agitação (implicando em nenhuma interação entre partículas, ou $g_{12} = 0$), o processo de produção de um padrão estável de vórtices será muito mais rápido. Esses resultados podem ter impacto em investigações experimentais em que são consideradas configurações miscíveis com massas iguais ou quase iguais de duas partículas, como quando dois componentes spinoriais do mesmo átomo estão sendo estudados em experimentos de átomos frios condensados.

O outro extremo, com misturas miscíveis com grande desequilíbrio de massa, também

é de interesse, considerando que a produção mais rápida de padrões estáveis pode ser alcançada. Finalmente, de outra perspectiva, o presente estudo com condensados acoplados pode ser estendido usando termos imaginários dissipativos Gross-Pitaevskii, com um tratamento dos condensados com seus componentes térmicos correspondentes. Isso pode ser útil para calcular precisamente a velocidade rotacional efetiva das nuvens térmicas.

Como resultado da minha pesquisa de doutorado, tive a oportunidade de publicar um artigo que contribui significativamente para o avanço do conhecimento na área, na *Physical Review A* [[129](#)] e também disponível no Arxiv 2205.1465.

Apêndice A

Apêndice

Neste Apêndice consistes na utilização de sistema físicos que é uma técnica de produzir teorias e formulações conceituais que possam criar condições de aplicação empírica, aplicamos no Oscilador de Duffing, na resolução de EDOs não-lineares, com sua variação do estado não forçado, fracamente não linear e forçado, produzindo dados numéricos com a utilização do fortran, com os dados podemos plotar os gráficos, favorecendo uma melhor interpretação do comportamento físico, obviamente utilizamos métodos numéricos para escrever os programas.

Resolvemos a também equação de Schrodinger independente do tempo para o caso do poço potencial, utilizando método numérico e programação em fortran, o qual pode ser reproduzido por qualquer compilador.

A.1 Resolução Equação Schrodinger Para o Poço Potencial

Nesta seção, apresentamos uma resolução simplificada da equação de Schrödinger, que é uma das principais equações para sistemas quânticos. Utilizamos o método numérico Newton-Raphson e Runge-Kutta para o Poço de Potencial, que é um modelo clássico que ilustra a aplicação da equação de Schrödinger.

A equação de Schrödinger é dada por:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \quad (\text{A.1})$$

Onde $\Psi(\vec{x}, t)$ é a função de onda, \hbar é a constante de Planck reduzida, e \hat{H} é o operador Hamiltoniano.

Para um sistema quântico de uma partícula em uma dimensão, a equação de Schrödinger pode ser escrita como:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x}, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi \quad (\text{A.2})$$

Onde m é a massa da partícula e $V(x, t)$ é o potencial que atua na partícula na posição x no tempo t .

Para obter as soluções estacionárias dessa equação para um potencial $V(x)$, podemos usar a seguinte forma de onda:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \Psi(x) e^{-i \frac{Et}{\hbar}} \quad (\text{A.3})$$

Onde E é a energia total do sistema, dada por:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (\text{A.4})$$

Substituindo essa forma de onda na equação dependente do tempo, obtemos a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x) \Psi = E \Psi, \quad (\text{A.5})$$

Que pode ser resolvida para um dado potencial $V(x)$, a fim de se obter as soluções $\Psi(\vec{x}, t)$ e os autovalores ou autoestados de energia E .

A equação de Schrödinger é amplamente utilizada na física quântica e em outras áreas da ciência, como a química, onde é usada para modelar a estrutura eletrônica dos átomos e moléculas. A equação de Gross-Pitaevskii, por exemplo, é uma equação de Schrödinger não linear que é usada para descrever a dinâmica de condensados de Bose-Einstein em física atômica e óptica quântica. Nesta seção demonstramos de um forma simples a resolução da equação de Schrödinger, utilizando o método numérico Newton-Raphso e Runge-Kutta para o Poço de Potencial. Para um sistema quântico geral, temos:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad (\text{A.6})$$

Onde:

$\Psi(\vec{x}, t)$: função de onda:

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$: constante de Planck reduzida ($h \cong 6,63 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$)

\hat{H} : operador Hamiltoniano.

No caso de uma partícula única em uma dimensão, a equação de Schrödinger se torna:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x}, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi \quad (\text{A.7})$$

Onde $\Psi(\vec{x}, t)$ é a função de onda, que fisicamente representa a amplitude de probabilidade para que a partícula seja encontrada na posição x no instante t ; m é a massa da partícula e $V(x, t)$ é o potencial* da partícula na posição x no tempo t .

* ENERGIA POTENCIAL

No caso em que desejamos obter as soluções estacionárias dessa equação para o potencial $V = V(x)$, obtemos:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \Psi(x) e^{-i \frac{Et}{\hbar}} \quad (\text{A.8})$$

Onde E é a energia total do sistema:

$$E = T(p) + V(x) \implies E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (\text{A.9})$$

Substituindo $\Psi(\vec{x}, t)$ na equação dependente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x) \Psi = E \Psi, \quad (\text{A.10})$$

que é a equação de Schrödinger independente do tempo.

Essa equação pode ser resolvida para um dado potencial $V(x)$, a fim de se obter as soluções $\Psi(\vec{x}, t)$ e os autovalores ou auto-estados de energia E .

Schrödinger Independente do Tempo Para o Poço de Potencial

a) Resolveremos a equação de Schrödinger independente do tempo para o poço de potencial

$$v(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -a \\ -V_0, & -a < x < a \\ 0, & \text{se } x > a \end{cases}$$

Usamos o método Neqton-Raphon para obtermos os auto-estados de energia do sistema no caso $E < 0$ e $V_0 > 0$.

Usamos o método de Runge-Kutta para resolver a equação e compare com a solução analítica.

A.1.1 Solução do Poço

solução analítica da equação de Schrödinger

Na região dentro do poço $-a/2 < x < a/2$, temos:

$$\Psi(x) = A \text{ sen}(k_I x) + B \text{ cos}(k_I x) \quad -a/2 < x < a/2 \quad (\text{A.11})$$

Com $k_I = \sqrt{2mE}/\hbar$

Nas regiões fora do poço $x < a/2$ e $x > a/2$ é dada por:

$$\Psi(x) = Ce^{k_{II}x} + De^{-k_{II}x} \quad x < -a/2 \quad (\text{A.12})$$

$$\Psi(x) = Fe^{k_{II}x} + Ge^{-k_{II}x} \quad x > a/2 \quad (\text{A.13})$$

$$k_{II} = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$$

Para determinar as constantes arbitrárias, inicialmente impomos a exigência de que as autofunções permaneçam finitas para todos os x . As condições de que a função são quando $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow +\infty$ levam a $D = 0$ e $F = 0$ respectivamente

$$\Psi(x) = Ce^{k_{II}x} \quad x < -a/2 \quad (\text{A.14})$$

$$\Psi(x) = Ge^{-k_{II}x} \quad x > a/2 \quad (\text{A.15})$$

Imponhamos agora a exigência de que as autofunções e suas primeiras derivadas sejam contínuas em $x = -a/2$ e $x = +a/2$. São obtidas quatro equações.

$$-A \operatorname{sen}(k_I a/2) + B \operatorname{cos}(k_I a/2) = Ce^{-k_{II} a/2} \quad (\text{A.16})$$

$$Ak_I \operatorname{cos}(k_I a/2) + Bk_I \operatorname{sen}(k_I a/2) = Ck_{II}e^{-k_{II} a/2} \quad (\text{A.17})$$

$$A \operatorname{sen}(k_I a/2) + B \operatorname{cos}(k_I a/2) = Ge^{-k_{II} a/2} \quad (\text{A.18})$$

$$Ak_I \operatorname{cos}(k_I a/2) - Bk_I \operatorname{sen}(k_I a/2) = Gk_{II}e^{-k_{II} a/2} \quad (\text{A.19})$$

Através de algumas manipulações algébricas, encontraremos:

$$\begin{aligned} k_I \operatorname{tg}(k_I a/2) &= k_{II} & \text{se } B \neq 0 \text{ e } (G + C) \neq 0 \\ k_I \operatorname{cotg}(k_I a/2) &= -k_{II} & \text{se } A \neq 0 \text{ e } (G - C) \neq 0 \end{aligned}$$

é fácil ver que as duas equações não podem ser satisfeitas simultaneamente. As autofunções são de dois tipos. Analisaremos somente para o primeiro tipo:

$$k_I \operatorname{tg}(k_I a/2) = k_{II} \quad \text{se } B = 0 \text{ e } (G + C) = 0 \quad (\text{A.20})$$

Então (G-4 – 13) fica

$$\begin{aligned} B \operatorname{cos}(k_I a/2) &= Ge^{-k_{II} a/2} \\ G &= B \operatorname{cos}(k_I a/2)e^{-k_{II} a/2} = C \end{aligned}$$

e as autofunções são

$$\Psi(\vec{x}) = \begin{cases} [B \cos(k_I a/2) e^{k_{II} a/2}] e^{k_{II} x} & x < -a/2 \\ [B] \cos(k_I x) & -a/2 < x < a/2 \\ [B \cos(k_I a/2) e^{k_{II} a/2}] e^{-k_{II} x} & x > a/2 \end{cases}$$

Substituindo K_I e K_{II} na equação 4 – 15, e multiplicando por $a/2$, a equação fica

$$\sqrt{mEa^2/2\hbar^2} \operatorname{tg}(\sqrt{mEa^2/2\hbar^2}) = \sqrt{m(V_0 - E)a^2/2\hbar^2} \quad (\text{A.21})$$

Para uma dada partícula de massa m e um dado poço de potencial com profundidade V_0 e largura a , essa equação é uma equação com uma incógnita, E . Suas soluções são os possíveis valores de energia total da partícula - os autovalores para as autofunções do primeiro tipo. Podemos obter soluções dessa equação transcendental apenas por gráficos ou numéricos. Apresentamos um método simples que ilustra as características importantes da equação. Fazemos a troca da variável

$$\epsilon \equiv \sqrt{mEa^2/2\hbar^2} \quad (\text{A.22})$$

de forma que fica

$$\epsilon \tan \epsilon = \sqrt{mV_0 a^2/2\hbar^2 - \epsilon^2} \quad (\text{A.23})$$

A.1.2 Método de Newton-Raphson Aplicado à Função Transcendental

Para determinar a solução da equação de Schrodinger utilizamos do Método de Newton-Raphson para a determinação do auto-valor de energia através da solução da função transcendental:

Algoritmo método Newton Raphson, para o compilador Force 2.0 ou Fortran F77

```

C      Funcao: newtonraphson
      real function f(x)
      real k
      common k
      f=x**2*((tan(x))**2)-k+x**2      ! entrar com a funcao
      return
      end

      real function g(x)
      g=2.*x*(tan(x)**-2+x*tan(x)**-1+x*tan(x)**-3+1.) ! derivada da

      return
      end

      program newtonraphson
      common k
      external f,g

      integer n
      real x,erro,faux,k,energia,Vo
      k=16.
      n=0
      Vo=1.
      erro=0.001      ! entrar com o erro
      x=4. ! entrar com o chute inicial

      write (*,*) x, f(x),n

      faux=f(x)

      do while (faux.ge.erro)
      n=n+1
      x=x-f(x)/g(x)      ! metodo newton-raphson
      faux=f(x)
      write (*,*) x , faux ,n
      end do
      write (*,*) "raiz = " , x
      Energia=(x**2/k)*Vo

```

```

write (*,*) "Autovalores de Energia = ", Energia
read (*,*)
end

```

Obtemos as raízes através desse programa, apenas a solução par, são $\varepsilon = 1.25$ e $\varepsilon = 3.6$, estes valores foram utilizados para o Programa Runge-Kutta que nos fornece os autovalores:

$$E = \varepsilon^2 \frac{2\hbar^2}{ma^2} = \varepsilon^2 \frac{2\hbar^2}{mV_0a^2} V_0 \simeq \left(\frac{1.25}{4} \right)^2 \simeq 0.0980 V_0 \quad (\text{A.24})$$

$$E = \varepsilon^2 \frac{2\hbar^2}{ma^2} = \varepsilon^2 \frac{2\hbar^2}{mV_0a^2} V_0 \simeq \left(\frac{3.60}{4} \right)^2 \simeq 0.808 V_0 \quad (\text{A.25})$$

A partir desta constante podemos calcular a solução da equação de Schödinger.

Através do cálculo obtido nas iterações pelo Método de Newton-Raphson para a solução de $k' = k \tan ka$ obtemos o valor da constante $A = 1.25$ e 3.60 e adotando $2m = 1$ e $\hbar = 1$ temos para a solução par da equação de Schödinger:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \chi} = 1,25 \cdot \phi \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \chi} = 3.6 \cdot \phi \quad (\text{A.27})$$

Para solução desta equação temos que utilizar do Método de Runge-Kutta de quarta ordem. Por se tratar de uma equação diferencial de segunda ordem devemos reescrevê-la na forma de um sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} = \frac{dz}{d\chi} \\ \frac{dz}{d\chi} = 1,25 \cdot \phi \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \phi}{d\chi^2} = \frac{dz}{d\chi} \\ \frac{dz}{d\chi} = 3.6 \cdot \phi \end{array} \right.$$

A.1.3 Algoritmo Runge-Kutta Para o Poço de Potencial

```
C      Funcao: rungekuttacomposta
      real function f(x,t)
      real E
      common alfa,E
      f=alfa*cos(E*x)
      return
      end

      real function g(z,t)
      g=z
      return
      end

      program rkuttaschro
      external f,g
      common alfa,E
      integer i,n

      real k1,k2,k3,k4,l1,l2,l3,l4,a,b,x,z,h,alfa,E

      open(17,FILE='xvst1.dat')
      open(18,FILE='xvsz1.dat')
      open(19,FILE='senvst1.dat')
      alfa= 1.25235343      ! entre com o alfa
C      alfa= 3.59533477      ! entre com o alfa
      a=0.          ! entre com a malha
      b=30.         ! entre com a malha
      E=1.
      x=0.          ! entre com a x inicial
      z=1.          ! entre com a z inicial
      h=0.1         ! entre com o passo
      t=0.          ! entre com o tempo inicial
      i=0.

      n=int((b-a)/h)

      write(*,*) "i = " , "t="           ", " x(t)=           ", "z(t)= "
```

```

write(*,*) i, " ",t," ", x , " ", z

write(17,*) t, " ",x
write(18,*) z, " ",x
write(19,*) t, " ",sin(t)
do i=1,n+1

k1=f(x,t)
l1=g(z,t)

k2=f(x+h*l1/2.,t+h)
l2=g(z+h*k1/2.,t+h)

k3=f(x+h*l2/2.,t+h)
l3=g(z+h*k2/2.,t+h)

k4=f(x+h*l3,t+h)
l4=g(z+h*k3,t+h)

x=x+h*(l1+2.*l2+2.*l3+l4)/6.
z=z+h*(k1+2.*k2+2.*k3+k4)/6.

t=t+h

write(*,*) i, " ",t," ", x , " ", z
write(17,*) t, " ",x
write(18,*) z, " ",x
write(19,*) t, " ",sin(t)
end do
write(*,*)
read (*,*)
end

```

A.1.4 Métodos Numéricos para descrever CBE

Métodos Numéricos são técnicas matemáticas que são amplamente utilizadas na ciência para resolver problemas complexos que envolvem equações diferenciais, integrais

e outras equações matemáticas. Na física, os Métodos Numéricos

O condensado de Bose-Einstein é um estado da matéria que ocorre a temperaturas extremamente baixas e densidades muito altas, onde um grande número de átomos se funde em um único estado quântico. Esse fenômeno é descrito por equações diferenciais não lineares que são extremamente difíceis de serem resolvidas analiticamente.

Por causa disso, Métodos Numéricos são amplamente utilizados para estudar o condensado de Bose-Einstein. Métodos como o Método de Diferenças Finitas, o Método de Elementos Finitos e o Método de Monte Carlo são utilizados para discretizar essas equações diferenciais e permitir a solução numérica.

Além disso, os Métodos Numéricos também são utilizados para estudar as propriedades termodinâmicas do condensado de Bose-Einstein, como sua temperatura crítica e densidade crítica. Esses estudos são importantes para o desenvolvimento de novos materiais e tecnologias baseadas no condensado de Bose-Einstein.

Os Métodos Numéricos são uma ferramenta essencial para a compreensão e estudo do condensado de Bose-Einstein e outros sistemas complexos na física e na ciência em geral. A aplicação desses métodos permite a obtenção de resultados precisos e confiáveis, que são fundamentais para o avanço do conhecimento científico e tecnológico.

A.2 Lagrange

A mecânica de Lagrange ou mecânica Lagrangiana é uma formulação da mecânica clássica que relaciona conservação de energia com o momento linear.

$$q = \{q_i\} \tag{A.28}$$

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{A.29}$$

$$\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt}, \tag{A.30}$$

$$S \equiv \int_{t_i}^{t_f} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \tag{A.31}$$

Equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad (\text{A.32})$$

sistema não-conservativo (ou dissipativo)

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i^{ext} \quad (\text{A.33})$$

$$Q_i^{ext} = \sum_j^N \vec{F}_j^{ext} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \quad (\text{A.34})$$

$$\mathcal{L}_{(q_i, \dot{q}_i, t)} = T - U \quad (\text{A.35})$$

$$\mathcal{L} = T - U = T = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] \quad (\text{A.36})$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_x \quad (\text{A.37})$$

Coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta \quad (\text{A.38})$$

$$y = r \sin \theta \quad (\text{A.39})$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \quad (\text{A.40})$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \quad (\text{A.41})$$

$$\mathcal{L}_{(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, t)} = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2] \quad (\text{A.42})$$

A.3 Método Variacional

O método variacional é uma importante ferramenta matemática utilizada na mecânica quântica para aproximar soluções de equações diferenciais não resolvíveis anali-

ticamente. Ele consiste em escolher uma função de onda candidata que se aproxima da solução exata e, em seguida, calcular o valor esperado da energia da função de onda candidata. O objetivo é minimizar o valor esperado da energia, o que leva a uma aproximação mais precisa da solução exata da equação diferencial.

Um exemplo de aplicação do método variacional na mecânica quântica é a determinação da energia do átomo de hidrogênio. A equação de Schrödinger descreve o comportamento do elétron no átomo de hidrogênio, mas não pode ser resolvida analiticamente. No entanto, o método variacional pode ser usado para obter uma aproximação da energia do elétron.

Para isso, uma função de onda candidata é escolhida, como uma combinação linear de funções de onda de hidrogênio com diferentes valores de n , l e m . Em seguida, o valor esperado da energia é calculado a partir da função de onda candidata. O objetivo é minimizar o valor esperado da energia, variando os parâmetros da função de onda candidata, até que ele atinja um mínimo, o que leva a uma aproximação mais precisa da energia do elétron.

O método variacional é amplamente utilizado na mecânica quântica para aproximar soluções de equações diferenciais não resolvíveis analiticamente. Ele é uma ferramenta poderosa para obter aproximações precisas de soluções de equações diferenciais, e é uma técnica importante para a compreensão e previsão de fenômenos físicos na escala quântica.

A equação de Schrödinger descreve o comportamento quântico do elétron em torno do núcleo do átomo de hidrogênio. Para resolver essa equação usando o método variacional, é necessário escolher uma função de onda de teste (ou "trial") que depende de alguns parâmetros ajustáveis. A ideia é escolher a função de teste que leva à menor energia possível, ou seja, a função de onda que melhor representa o estado fundamental do elétron.

A função de onda de teste para o átomo de hidrogênio pode ser escrita como uma combinação linear de funções de onda mais simples, que são as funções de onda dos estados estacionários de energia conhecidos (chamados de estados de energia "base" ou "fundamentais"). Portanto, podemos escrever a função de onda de teste como:

$$\psi_{trial}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l c_{nlm} \psi_{nlm}(\mathbf{r}) \quad (\text{A.43})$$

onde $\psi_{nlm}(\mathbf{r})$ é a função de onda dos estados de energia base, que são dados pelas soluções analíticas da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio.

A energia média do elétron na função de onda de teste pode ser escrita como:

$$\langle E \rangle = \frac{\int \psi_{trial}^*(\mathbf{r}) \hat{H} \psi_{trial}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\int \psi_{trial}^*(\mathbf{r}) \psi_{trial}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}} \quad (\text{A.44})$$

onde \hat{H} é o operador Hamiltoniano para o átomo de hidrogênio.

Para encontrar os valores dos coeficientes c_{nlm} que minimizam a energia média, podemos tomar a derivada em relação a esses coeficientes e igualar a zero, ou seja:

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial c_{nlm}} = 0 \quad (\text{A.45})$$

Essa equação nos dá um conjunto de equações algébricas que podem ser resolvidas numericamente para obter os valores dos coeficientes c_{nlm} que minimizam a energia média.

Note que a escolha da função de onda de teste não é única, e diferentes funções de teste podem levar a diferentes resultados. Portanto, é importante escolher uma função de teste adequada que leve à melhor aproximação do estado fundamental do elétron no átomo de hidrogênio.

O método variacional é uma ferramenta matemática muito importante na mecânica quântica é o método variacional, que está relacionado com o cálculo variacional que consiste solucionar problemas de máximos e mínimos de funções contínuas definidas sobre algum espaço funcional. Constituem uma generalização do cálculo elementar de máximos e mínimos de funções reais de uma variável.

A.4 Método de Crank-Nicolson Aplicado ao Condensado de Bose-Einstein

O método de Crank-Nicolson é um Método de Diferenças Finitas (MDF) usado para resolver equações diferenciais parciais, como por exemplo a equação do calor, a equação de Gross-Pitaevskii, ou seja, um equação de 2ª ordem no tempo e no espaço, com o tempo implícito e numericamente estável foi desenvolvido pelo físico e matemático John Crank e pela matemática Phyllis Nicolson, onde uma solução contínua $u(x, t)$ é necessário, o que satisfaz a equação diferencial parcial de segunda ordem $u_t - u_{xx} = 0$ para $t > 0$, sujeito a uma condição inicial do formulário $u(x, 0) = f(x)$ para tudo real x . Eles consideraram métodos numéricos que encontram uma solução aproximada em uma grade de valores de x e t , substituindo $u_t(x, t)$ e $u_{xx}(x, t)$ por aproximações de diferenças finitas Ref. [128].

O método de Crank-Nicolson é baseado em diferenças centradas no espaço, e na regra

trapezoidal no tempo, é de segunda no tempo e no espaço. Por exemplo, para um caso unidimensional, se a equação diferencial parcial for

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^n \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (\text{Euler explícito})$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^{n+1} \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (\text{Euler implícito})$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(F_i^{n+1} \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + F_i^n \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right) \quad (\text{Crank-Nicolson})$$

O método de Crank-Nicolson é uma técnica numérica amplamente utilizada para resolver equações diferenciais parciais de segunda ordem no tempo e no espaço. Ele fornece uma solução precisa e estável para muitas equações físicas, incluindo a equação do calor e a equação de Gross-Pitaevskii. A combinação de diferenças centradas no espaço e da regra trapezoidal no tempo torna o método Crank-Nicolson um dos mais populares em aplicações práticas. Sua implementação é relativamente simples e eficiente, tornando-o uma ferramenta poderosa para resolver problemas complexos em várias áreas da física e engenharia.

A.5 Método $\frac{1}{3}$ de Simpson

A regra de Simpson é uma homenagem ao matemático britânico Thomas Simpson (1710 – 1761) inventor da regra de Simpson que aproxima integrais definidas.

A regra $\frac{1}{3}$ de Simpson utiliza uma parábola para aproximar a função no intervalo de integração e assim tem como vantagem um erro menor do que a integral calculada pela regra do trapézio.

Para calcular o polinômio de segundo grau é necessário ter 3 pontos que interpoem a função. Dois pontos são obtidos nas extremidades, sendo $x_0 = a$ e $x_2 = b$

O ponto x_1 pode ser obtido de qualquer valor x no intervalo $[a, b]$. Por convenção, faz-se x_1 o ponto médio do intervalo.

Assim, $x_1 = x_0 + h$, de forma a ter dois subintervalos de mesmo tamanho, $h = \frac{b-a}{2}$.

De posse de 3 pontos, pode-se encontrar a o polinômio de segundo grau que passa por todos os pontos utilizando a técnica de Lagrange:

$$P(x) = f(a) \frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m) \frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b) \frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)} \quad (\text{A.46})$$

$$\int_a^b P(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (\text{A.47})$$

$$\int_a^b P(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (\text{A.48})$$

$$\int_a^b P(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (\text{A.49})$$

$$M = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (\text{A.50})$$

$$T = \frac{1}{2}(b-a)(f(a) + f(b)). \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(a) + O((b-a)^4) \quad (\text{A.52})$$

$$-\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(a) + O((b-a)^4) \quad (\text{A.53})$$

A regra de Simpson $\frac{1}{3}$ é uma técnica de integração numérica que aproxima a integral definida de uma função utilizando um polinômio de segundo grau. Essa técnica é baseada na ideia de que uma parábola é capaz de aproximar de maneira mais precisa a função do que uma reta, utilizada na regra do trapézio.

Para calcular a regra de Simpson $\frac{1}{3}$, é necessário utilizar três pontos que interpolam a função no intervalo de integração, sendo dois pontos nas extremidades e um ponto no meio do intervalo, que é o ponto médio. Com esses três pontos, é possível encontrar o polinômio de segundo grau que passa por todos eles utilizando a técnica de Lagrange.

A regra de Simpson $\frac{1}{3}$ é amplamente utilizada na prática para aproximar integrais definidas, especialmente quando se tem pouca informação sobre a função a ser integrada. Essa técnica pode ser aplicada em diversas áreas do conhecimento, como engenharia, física, economia, entre outras, permitindo obter resultados aproximados de integrais de maneira rápida e eficiente.

Referências

- [1] GROSS, Eugene P. Structure of a quantized vortex in boson systems. *II Nuovo Cimento (1955-1965)*, v. 20, n. 3, p. 454-477, 1961.
- [2] PITAEVSKII, Lev P. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, v. 13, n. 2, p. 451-454, 1961.
- [3] BOGOLIUBOV, N. On the theory of superfluidity. *J. Phys.*, v. 11, n. 1, p. 23, 1947.
- [4] GINSBURG, V. L. and PITAEVSKII, L. P. On the theory of superfluidity. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, **34**, 1240, 1958 (tradução para o inglês: *Sov. Phys.-JETP*, **7**, 858).
- [5] EINSTEIN, Albert. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases: Abhandlung 2. 1925.
- [6] BOSE, S. N. Thermal equilibrium of the radiation field in the presence of matter. *Zeitschrift für Physik*, v. 26, p. 178, 1924.
- [7] ANDERSON, Mike H. et al. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, v. 269, n. 5221, p. 198-201, 1995.
- [8] WIEMAN, Carl; FLOWERS, Gwenn; GILBERT, Sarah. Inexpensive laser cooling and trapping experiment for undergraduate laboratories. *American Journal of Physics*, v. 63, n. 4, p. 317-330, 1995.
- [9] KETTERLE, Wolfgang. Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser. *Reviews of Modern Physics*, v. 74, n. 4, p. 1131, 2002.
- [10] CORNELL, Eric A.; WIEMAN, Carl E. Nobel Lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. *Reviews of Modern Physics*, v. 74, n. 3, p. 875, 2002.
- [11] BRADLEY, C. C.; Sackett, C. A.; Tollett, J. J.; Hulet R. G., Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687-1690 (1995).
- [12] WANG, Boyuan. Review on Bose-Einstein Condensation. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, v. 38, p. 19-29, 2023.

- [13] GEORGESCU, Iulia. 25 years of BEC. *Nature Reviews Physics*, v. 2, n. 8, p. 396-396, 2020.
- [14] VICTO FILHO, S. et al. Chaos in collapsing Bose-condensed gas. *Physical Review A*, v. 62, n. 3, p. 033605, 2000.
- [15] KAMCHATNOV, A. M.; GAMMAL, Arnaldo; KRAENKEL, Roberto André. Dissipationless shock waves in Bose-Einstein condensates with repulsive interaction between atoms. *Physical Review A*, v. 69, n. 6, p. 063605, 2004.
- [16] KONOTOP, V. V.; SALERNO, M. Modulational instability in Bose-Einstein condensates in optical lattices. *Physical Review A*, v. 65, n. 2, p. 021602, 2002.
- [17] KUMAR, R. Kishor; GAMMAL, A.; TOMIO, L.. Mass-imbalanced Bose-Einstein condensed mixtures in rotating perturbed trap. *Physics Letters A*, v. 384, n. 22, p. 126535, 2020.
- [18] MADEIRA, L.; BAGNATO, V. S. (editores) *São Paulo School of Advanced Science on Quantum Fluids and Applications*. 2022. Ver, em particular o capítulo introdutório de V.S. Bagnato e M. AL. M. Armijos, sobre os princípios dos condensados de Bose-Einstein; o capítulo 2, sobre a produção experimental, de E.D.M. Gutierrez e A. D. García-Orozco; e o capítulo 3 sobre excitações, modos coletivos e vórtices, de G. Tomishiyó, S. J. Bereta, e M. A. Caracanhas.
- [19] ATKINS, Peter; JONES, Loreta; LAVERMAN, Leroy. *Princípios de Química: Questionando a Vida Moderna e o Meio Ambiente*. Bookman Editora, 2018.
- [20] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor*. Editora Blucher, 2018.
- [21] VAN DER WAALS, Johannes Diderik; ROTH, Friedrich. *The continuity of the liquid and gaseous states*. 1873.
- [22] SAKURAI, Jun John; COMMINS, Eugene D. *Modern quantum mechanics, revised edition*. 1995.
- [23] DAHMEN, Sílvio R. Bose e Einstein: do nascimento da estatística quântica à condensação sem interação I. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 2, p. 271-282, 2005.
- [24] DAHMEN, Sílvio R. Bose e Einstein: do nascimento da estatística quântica à condensação sem interação II. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 2, p. 283-298, 2005.

- [25] EISBERG, Robert; RESNICK, Robert. *Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*. Reimpressão. Editora Campus LTDA., Rio de Janeiro, Brasil, pp. 19 - 42, 1979.
- [26] EINSTEIN, Albert. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt *Annalen der Physik* 17. 1905.
- [27] RIGDEN, J. S. *Einstein 1905: the standard of greatness*. Harvard University Press, 2005.
- [28] GRIFFITHS, D. J. Time-Dependent Perturbation Theory. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2005, pp. 340-359.
- [29] DALFOVO, F. et al. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Reviews of Modern Physics*, v. 71, n. 3, p. 463, 1999.
- [30] PETHICK, C. J.; SMITH, H. *Bose–Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge University Press, 2008.
- [31] LEBEDEV, P. N. *Untersuchungen über die Druckkräfte des Lichtes*. *Annalen der Physik*, 311(8), 433-458, 1901.
- [32] NICHOLS, E. F.; HULL, G. F. *The pressure due to radiation*. *Physical Review*, 17(1), 26-29, 1903.
- [33] FRISCH, R. *Zur Elektrodynamik des von einem Körper mit großer Geschwindigkeit durchdrungenen Raum*. *Naturwissenschaften*, 21(48), 946-946, 1933.
- [34] ABDULLAEV F. Kh, GAMMAL A, MALOMED B.A, TOMIO L. Bright solitons in Bose–Einstein condensates with field-induced dipole moments. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 47, n. 7, p. 075301, 2014.
- [35] LETOKHOV, V. S.; MISHIN, V. I.; PURETZKY, A. A. Selective photoionization of atoms by laser radiation and its applications. *Progress in Quantum Electronics*, v. 5, p. 139-203, 1977.
- [36] MINOGIN, V. G.; LETOKHOV, V. S. *Laser light pressure on atoms*. CRC Press, 1987.
- [37] LETOKHOV, V. S.; OL'SHANII, M. A.; OVCHINNIKOV, Yu B. Laser cooling of atoms: a review. *Quantum and Semiclassical Optics: Journal of the European Optical Society Part B*, v. 7, n. 1, p. 5, 1995.
- [38] HOUBIERS, M.; STOOF, H. T. C. Stability of Bose condensed atomic ${}^7\text{Li}$. *Physical Review A*, v. 54, n. 6, p. 5055, 1996.

- [39] BAYM, G.; PETHICK, Christopher J. Ground-state properties of magnetically trapped Bose-condensed rubidium gas. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 1, p. 6, 1996.
- [40] GAMMAL, A. et al. Atomic Bose-Einstein condensation with three-body interactions and collective excitations. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 33, n. 19, p. 4053, 2000.
- [41] GAMMAL, A. et al. Liquid-gas phase transition in Bose-Einstein condensates with time evolution. *Physical Review A*, v. 61, n. 5, p. 051602, 2000.
- [42] FILHO, V. S.; HOLZ, S. M.; TOMIO, L. Dynamics of Bose-Einstein condensates with atomic pumping and dissipative processes. *Physics Letters A*, v. 372, n. 45, p. 6778-6783, 2008.
- [43] SAVI, Marcelo Amorim. *Dinâmica não-linear e caos*. Editora E-papers, 2006.
- [44] WALLRAFF, Andreas et al. Quantum dynamics of a single vortex. *Nature*, v. 425, n. 6954, p. 155-158, 2003.
- [45] BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. Theory of superconductivity. *Physical Review*, v. 108, n. 1175, p. 57, 1957.
- [46] CHIBOTARU, L. F. et al. Vorticity quantum numbers for confined electrons. *Europhysics Letters*, v. 63, n. 2, p. 159, 2003.
- [47] SLACHMUYLDERS, A. F.; PARTOENS, B.; PEETERS, F. M. Geometry and magnetic-field-induced vortices and antivortices in mesoscopic two-dimensional systems. *Physical Review B*, v. 71, n. 24, p. 245405, 2005.
- [48] ABDULLAEV, F. Kh et al. Faraday waves and droplets in quasi-one-dimensional Bose gas mixtures. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 52, n. 19, p. 195301, 2019.
- [49] PETROV, D. S. Quantum mechanical stabilization of a collapsing Bose-Bose mixture. *Physical Review Letters*, v. 115, n. 15, p. 155302, 2015.
- [50] PETROV, D. S.; ASTRAKHARCHIK, G. E. Ultradilute low-dimensional liquids. *Physical Review Letters*, v. 117, n. 10, p. 100401, 2016.
- [51] Nobel Lecture: Laser cooling and trapping of neutral atoms, William D. Phillips, *Rev. Mod. Phys.* 70, 721,(1998).

- [52] YAMASHITA, Marcelo Takeshi. Sistemas fracamente ligados de três corpos: moléculas e núcleos exóticos leves. 2004. Tese (Doutorado em Física) - Instituto de Física, Universidad de São Paulo, São Paulo, 2004. doi:10.11606/T.43.2004.tde-04032005-105331.
- [53] FREDERICO, T. et al. Scales and universality in few-body systems. *Few-Body Systems*, v. 51, p. 87-112, 2011.
- [54] AMES, William F. Métodos numéricos para equações diferenciais parciais. Imprensa acadêmica, 2014.
- [55] DAVIS, Kendall B. et al. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Physical Review Letters*, v. 75, n. 22, p. 3969, 1995.
- [56] LONDON, Fritz. The λ -phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy. *Nature*, v. 141, n. 3571, p. 643-644, 1938.
- [57] EDWARDS, Mark; BURNETT, Keith. Numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation for small samples of trapped neutral atoms. *Physical Review A*, v. 51, n. 2, p. 1382, 1995.
- [58] WEINER, John et al. Experiments and theory in cold and ultracold collisions. *Reviews of Modern Physics*, v. 71, n. 1, p. 1, 1999.
- [59] KAGAN, Yu; SHLYAPNIKOV, G. V.; WALRAVEN, J. T. M. Bose-Einstein condensation in trapped atomic gases. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 15, p. 2670, 1996.
- [60] AKHMEDIEV, Nail; DAS, Mukunda P.; VAGOV, A. V. Bose-Einstein condensation of atoms with attractive interaction. *International Journal of Modern Physics B*, v. 13, n. 05n06, p. 625-631, 1999.
- [61] JOSSERAND, Christophe; RICA, Sergio. Coalescence and droplets in the subcritical nonlinear Schrödinger equation. *Physical Review Letters*, v. 78, n. 7, p. 1215, 1997.
- [62] ESRY, B. D. et al. Role of the scattering length in three-boson dynamics and Bose-Einstein condensation. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 29, n. 2, p. L51, 1996.
- [63] FRIED, Dale G. et al. Bose-Einstein condensation of atomic hydrogen. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 18, p. 3811, 1998.
- [64] FETTER, Alexander L. *Rotating trapped Bose-Einstein condensates*. *Reviews of Modern Physics*, v. 81, n. 2, p. 647, 2009.

- [65] CORNISH, S. L.; THOMPSON, S. T.; WIEMAN, C. E. Formation of bright matter-wave solitons during the collapse of attractive Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, v. 96, n. 17, p. 170401, 2006.
- [66] DESHALIT, A.; FESHBACH, H. *Theoretical nuclear physics. Volume I. Nuclear structure*. 1974.
- [67] MATTHEWS, M. R. et al. Vortices in a Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, v. 83, n. 13, p. 2498, 1999.
- [68] MADISON, K. W.; CHEVY, F. Wohlleben et J. Dalibard. Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate, *Physical Review Letters*. **84**, 806 (2000).
- [69] CHEVY, Frédéric; MADISON, K. W.; DALIBARD, Jean. Measurement of the angular momentum of a rotating Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 11, p. 2223, 2000.
- [70] ANDERSON, Brian P. et al. Vortex precession in Bose-Einstein condensates: Observations with filled and empty cores. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 14, p. 2857, 2000.
- [71] MADISON, Kirk W. et al. Stationary states of a rotating Bose-Einstein condensate: Routes to vortex nucleation. *Physical Review Letters*, v. 86, n. 20, p. 4443, 2001.
- [72] HODBY, E. et al. Vortex nucleation in Bose-Einstein condensates in an oblate, purely magnetic potential. *Physical Review Letters*, v. 88, n. 1, p. 010405, 2001.
- [73] ABO-SHAEER, Jamil R. et al. *Observation of vortex lattices in Bose-Einstein condensates*. *Science*, v. 292, n. 5516, p. 476-479, 2001.
- [74] BEWLEY, Gregory P.; LATHROP, Daniel P.; SREENIVASAN, Katepalli R. *Visualization of quantized vortices*. *Nature*, v. 441, n. 7093, p. 588-588, 2006.
- [75] YARMCHUK, E. J.; GORDON, M. J. V.; PACKARD, R. E. *Observation of stationary vortex arrays in rotating superfluid helium*. *Physical Review Letters*, v. 43, n. 3, p. 214, 1979.
- [76] DONNELLY, Russell J. *Quantized vortices in helium II*. Cambridge University Press, 1991.
- [77] TSUBOTA, Makoto; KASAMATSU, Kenichi; KOBAYASHI, Michikazu. *Quantized vortices in superfluid helium and atomic Bose-Einstein condensates*, *Novel Superfluids*, Vol. 1, ed. K. H. Bennemann and J. B. Ketterson, (Oxford Univ. Pr., Oxford), p. 156 (Chap.3), 2013

- [78] TSUBOTA, Makoto; KOBAYASHI, Michikazu; TAKEUCHI, Hiromitsu. *Quantum hydrodynamics*. Physics Reports, v. 522, n. 3, p. 191-238, 2013.
- [79] ZWIERLEIN, Martin W. et al. *Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas*. Nature, v. 435, n. 7045, p. 1047-1051, 2005.
- [80] COOPER, Nigel R. *Rapidly rotating atomic gases*. Advances in Physics, v. 57, n. 6, p. 539-616, 2008.
- [81] BLOCH, Immanuel; DALIBARD, Jean; ZWERGER, Wilhelm. *Many-body physics with ultracold gases*. Reviews of Modern Physics, v. 80, n. 3, p. 885, 2008.
- [82] FETTER, Alexander L. *Rotating trapped Bose-Einstein condensates*. Reviews of Modern Physics, v. 81, n. 2, p. 647, 2009.
- [83] PARKER, Nick G.; ADAMS, Charles S. *Emergence and decay of turbulence in stirred atomic Bose-Einstein condensates*. Physical Review Letters, v. 95, n. 14, p. 145301, 2005.
- [84] BRADLEY, Ashton S.; ANDERSON, Brian P. *Energy spectra of vortex distributions in two-dimensional quantum turbulence*. Physical Review X, v. 2, n. 4, p. 041001, 2012.
- [85] REEVES, M. T.; ANDERSON, B. P.; BRADLEY, A. S. *Classical and quantum regimes of two-dimensional turbulence in trapped Bose-Einstein condensates*. Physical Review A, v. 86, n. 5, p. 053621, 2012.
- [86] REEVES, Matthew T. et al. *Signatures of coherent vortex structures in a disordered two-dimensional quantum fluid*. Physical Review A, v. 89, n. 5, p. 053631, 2014.
- [87] BILLAM, Thomas P. et al. *Onsager-Kraichnan condensation in decaying two-dimensional quantum turbulence*. Physical Review Letters, v. 112, n. 14, p. 145301, 2014.
- [88] GAUTHIER, Guillaume et al. *Giant vortex clusters in a two-dimensional quantum fluid*. Science, v. 364, n. 6447, p. 1264-1267, 2019.
- [89] TSATSOS, Marios C. et al. *Quantum turbulence in trapped atomic Bose-Einstein condensates*. Physics Reports, v. 622, p. 1-52, 2016.
- [90] MADEIRA, Lucas et al. *Quantum turbulence in quantum gases*. Annual Review of Condensed Matter Physics, v. 11, p. 37-56, 2020.
- [91] MADEIRA, Lucas et al. *Quantum turbulence in Bose-Einstein condensates: Present status and new challenges ahead*. AVS Quantum Science, v. 2, n. 3, 2020.
- [92] ESTRADA, Julian Amette; BRACHET, Marc E.; MININNI, Pablo D. *Turbulence in rotating Bose-Einstein condensates*. Physical Review A, v. 105, n. 6, p. 063321, 2022.

- [93] DASTIDAR, Madhura Ghosh et al. *Pattern formation and evidence of quantum turbulence in binary Bose-Einstein condensates interacting with a pair of Laguerre-Gaussian laser beams*. Physics Letters A, v. 421, p. 127776, 2022.
- [94] STEVENSON, P. M. *How do sound waves in a Bose-Einstein condensate move so fast?*. Physical Review A, v. 68, n. 5, p. 055601, 2003.
- [95] FEYNMAN, R. P.(edited by BREWER, Douglas Forbes). *Progress in Low Temperature Physics*. Elsevier, 1986.
- [96] KUMAR, Ramavarmaraja Kishor et al. *Three-dimensional vortex structures in a rotating dipolar Bose-Einstein condensate*. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, v. 49, n. 15, p. 155301, 2016.
- [97] ABRIKOSOV, Alexei A. *On the magnetic properties of superconductors of the second group*. Soviet Physics-JETP, v. 5, p. 1174-1182, 1957; Sov. Phys. J. Exp. Theor. Phys., v. 32, p. 1442, 1955.
- [98] ABRIKOSOV, Aleksej A. *Nobel Lecture: Type-II superconductors and the vortex lattice*. Reviews of modern physics, v. 76, n. 3, p. 975, 2004.
- [99] NEWTON, Paul K.; CHAMOUN, George. *Vortex lattice theory: A particle interaction perspective*. SIAM review, v. 51, n. 3, p. 501-542, 2009.
- [100] MYATT, C. J. et al. *Production of two overlapping Bose-Einstein condensates by sympathetic cooling*. Physical Review Letters, v. 78, n. 4, p. 586, 1997.
- [101] MADDALONI, P. et al. *Collective oscillations of two colliding Bose-Einstein condensates*. Physical review letters, v. 85, n. 12, p. 2413, 2000.
- [102] LAHAYE, Thierry et al. *The physics of dipolar bosonic quantum gases*. Reports on Progress in Physics, v. 72, n. 12, p. 126401, 2009.
- [103] BURKE JR, James P. et al. *Prospects for mixed-isotope Bose-Einstein condensates in rubidium*. Physical review letters, v. 80, n. 10, p. 2097, 1998.
- [104] MODUGNO, G. et al. *Two atomic species superfluid*. Physical Review Letters, v. 89, n. 19, p. 190404, 2002.
- [105] FERRARI, G. et al. *Collisional properties of ultracold K-Rb mixtures*. Physical review letters, v. 89, n. 5, p. 053202, 2002.
- [106] THALHAMMER, G. et al. *Double species Bose-Einstein condensate with tunable interspecies interactions*. Physical review letters, v. 100, n. 21, p. 210402, 2008.

- [107] PAPP, S. B.; PINO, J. M.; WIEMAN, C. E. *Tunable miscibility in a dual-species Bose-Einstein condensate*. *Physical review letters*, v. 101, n. 4, p. 040402, 2008.
- [108] MCCARRON, D. J. et al. *Dual-species Bose-Einstein condensate of ^{87}Rb and ^{133}Cs .* *Physical Review A*, v. 84, n. 1, p. 011603, 2011.
- [109] PASQUIOU, Benjamin et al. *Quantum degenerate mixtures of strontium and rubidium atoms*. *Physical Review A*, v. 88, n. 2, p. 023601, 2013.
- [110] WACKER, L. et al. *Tunable dual-species Bose-Einstein condensates of ^{39}K and ^{87}Rb* . *Physical Review A*, v. 92, n. 5, p. 053602, 2015.
- [111] WANG, Fudong et al. *A double species ^{23}Na and ^{87}Rb Bose-Einstein condensate with tunable miscibility via an interspecies Feshbach resonance*. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 49, n. 1, p. 015302, 2015.
- [112] TRAUTMANN, A. et al. *Dipolar quantum mixtures of erbium and dysprosium atoms*. *Physical Review Letters*, v. 121, n. 21, p. 213601, 2018.
- [113] NATALE, G. et al. *Excitation spectrum of a trapped dipolar supersolid and its experimental evidence*. *Physical Review Letters*, v. 123, n. 5, p. 050402, 2019.
- [114] ZHANG, Xiao-Fei et al. *Two-component dipolar Bose-Einstein condensate in concentrically coupled annular traps*. *Scientific Reports*, v. 5, n. 1, p. 1-9, 2015.
- [115] WILSON, Ryan M.; RONEN, Shai; BOHN, John L. *Stability and excitations of a dipolar Bose-Einstein condensate with a vortex*. *Physical Review A*, v. 79, n. 1, p. 013621, 2009.
- [116] WILSON, Ryan M. et al. *Roton immiscibility in a two-component dipolar Bose gas*. *Physical Review A*, v. 86, n. 3, p. 033606, 2012.
- [117] ZHANG, Xiao-Fei et al. *Exotic vortex lattices in a rotating binary dipolar Bose-Einstein condensate*. *Scientific Reports*, v. 6, n. 1, p. 1-9, 2016.
- [118] KUMAR, Ramavarmaraja Kishor et al. *Miscibility in coupled dipolar and non-dipolar Bose-Einstein condensates*. *Journal of Physics Communications*, v. 1, n. 3, p. 035012, 2017.
- [119] KUMAR, Ramavarmaraja Kishor et al. *Vortex lattices in binary Bose-Einstein condensates with dipole-dipole interactions*. *Physical Review A*, v. 96, n. 6, p. 063624, 2017.
- [120] KUMAR, Ramavarmaraja Kishor; TOMIO, L.; GAMMAL, Arnaldo. *Vortex patterns in rotating dipolar Bose-Einstein condensate mixtures with squared optical lattices*. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 52, n. 2, p. 025302, 2018.

- [121] KUMAR, Ramavarmaraja Kishor; TOMIO, L.; GAMMAL, Arnaldo. *Spatial separation of rotating binary Bose-Einstein condensates by tuning the dipolar interactions*. *Physical Review A*, v. 99, n. 4, p. 043606, 2019.
- [122] TOMIO, L.; KUMAR, Ramavarmaraja Kishor; GAMMAL, Arnaldo. *Dipolar condensed atomic mixtures and miscibility under rotation*. *SciPost Physics Proceedings*, n. 3, p. 023, 2020.
- [123] TIMMERMANS, Eddy; HUSSEY, Nicola E.; KUPERMAN, Ezra. *Feshbach resonances in atomic Bose-Einstein condensates*. *Physics Reports*, v. 315, n. 1-3, p. 199-230, 1999.
- [124] SATO, T.; ISHIYAMA, T.; NIKUNI, T. *Vortex lattice structures of a Bose-Einstein condensate in a rotating triangular lattice potential*. *Physical Review A*, v. 76, n. 5, p. 053628, 2007.
- [125] BRADLEY, Curtis Charles; SACKETT, C. A.; HULET, R. G. *Bose-Einstein condensation of lithium: Observation of limited condensate number*. *Physical Review Letters*, v. 78, n. 6, p. 985, 1997.
- [126] BRADLEY, Ashton S. et al. *Spectral analysis for compressible quantum fluids*. *Physical Review A*, v. 106, n. 4, p. 043322, 2022.
- [127] KUMAR, Ramavarmaraja Kishor et al. *C and Fortran OpenMP programs for rotating Bose-Einstein condensates*. *Computer Physics Communications*, v. 240, p. 74-82, 2019.
- [128] CRANK, John; NICOLSON, Phyllis. *A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type*. *Advances in Computational Mathematics*, v. 6, n. 1, p. 207-226, 1996.
- [129] DA SILVA, Anacé N., KUMAR, R. Kishor., BRADLEY, Ashton S., e TOMIO, Lauro. *Vortex generation in stirred binary Bose-Einstein condensates*. *Physical Review A*, v. 107, n. 3, p. 033314, 2023. [veja também em arXiv:2205.14654]