

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

GABRIEL MARCONDES CAIRES DA ROCHA

Estados de uma partícula e representações na relatividade muito especial

Guaratinguetá

2021

Gabriel Marcondes Caires da Rocha

Estados de uma partícula e representações na relatividade muito especial

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia
do Campus de Guaratinguetá, Universidade Esta-
dual Paulista, para a obtenção do Título de Mestre
em Física na área de Partículas e Campos

Orientador: Prof^o Dr. Julio Marny Hoff da Silva.
Coorientador: Prof^o Dr. Mário Cezar Ferreira
Gomes Bertin

Guaratinguetá

2021

R672e	<p>Rocha, Gabriel Marcondes Caires da</p> <p>Estados de uma partícula e representações na relatividade muito especial / Gabriel Marcondes Caires da Rocha – Guaratinguetá, 2021. 94 f : il. Bibliografia: f. 94</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2021.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva Coorientador: Prof. Dr. Mário Cezar Ferreira Gomes Bertin</p> <p>1. Relatividade especial (Física). 2. Hilbert, Espaço de. 3. Teoria quântica de campos. I. Título.</p> <p>CDU 530.12(043)</p>
-------	---

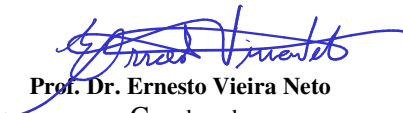
Luciana Máximo
Bibliotecária/CRB-8 3595

GABRIEL MARCONDES CAIRES DA ROCHA


**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”**


**PROGRAMA: FÍSICA
CURSO: MESTRADO**


APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA
Orientador - UNESP
participou por videoconferência


Prof. Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
UNESP
participou por videoconferência


Prof. Dr. ROLDÃO DA ROCHA JÚNIOR
Universidade Federal do ABC
participou por videoconferência

DADOS CURRICULARES

GABRIEL MARCONDES CAIRES DA ROCHA

NASCIMENTO 29.12.1996 - Salvador / BA

FILIAÇÃO José Domingos da Rocha
Maria das Graças Caires dos Santos

2015 / 2018 Curso de Graduação - Bacharelado em Física,
Universidade Federal da Bahia

2019 / 2021 Curso de Pós-Graduação em Física, nível
Mestrado,
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - UNESP

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Maria das Graças que sempre esteve ao meu lado me apoiando ao longo desta trajetória. À meu pai, José Rocha que, enquanto o destino permitiu, me deu lições para a vida (e que pra sempre vou me culpar por não ter perguntado mais enquanto pude).

À minha companheira Poliana Martins por estar sempre comigo me dando forças e me ajudando a compreender que a vida deve ser encarada com mais leveza. Por cada momento feliz. Por cada plano e "te amo". Por ter me feito mais feliz.

Agradeço ao meu orientador Julio Marny Hoff da Silva por aceitar me orientar nesta dissertação, e, além disso, queria agradecer pela paciência e conselhos que você me deu. E pelo maravilhoso curso de fundamentos de TQC.

Ao meu coorientador Mario Cezar Ferreira Gomes Bertin, pelos ensinamentos, em especial um dito na última reunião de IC ainda na Mondo. E prepare-se que nos próximos quatro anos vou fazer diferente as coisas e parar de tentar fazer o máximo possível sozinho.

Aos professores que com os quais tive o grande prazer de ter aulas em disciplinas: Marcio Alves, Marco Dias, Carlos Senise, Saulo Pereira e Rogério Teixeira.

À meus grandes amigos, Gabriel (seu nome não é Jorge kk), Jozi, Lucas, Pedro, Thales, Vinicius, Wallace, Di, e toda a galera da resenha, por essa maravilhosa amizade, por momento de chorar de tanto rir e por todas as futuras partidas de sinuca regadas à comemorações ensurdecedoras para cada jogada improvável que, magicamente, deu certo.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade:

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior

*"O futuro está lá... olhando para nós. Tentando entender a ficção em que teremos nos tornado."
(William Gibson)*

RESUMO

Nesta dissertação será estudada a inserção das simetrias da Relatividade muito especial no contexto de mecânica quântica, assim será construída a atuação de transformações de $ISIM(2)$ em estados pertencentes ao espaço de Hilbert em mecânica quântica. Porém, para tal, nos capítulos anteriores à este resultado, serão apresentados os fundamentos necessários para alcançar uma compreensão do tema. Serão abordados os tópicos de teoria de grupos, Relatividade restrita, Relatividade muito especial e mecânica quântica.

Após concluir esta primeira etapa, surge um foco acerca da busca pela existência, ou não, de representações projetivas de $SIM(2)$ e $ISIM(2)$. Serão estudados aspectos algébricos e topológicos de $SIM(2)$ e $ISIM(2)$, e, subsequentemente, esta dissertação adentra no estudo da teoria de representações de raio de grupos contínuos, teoria esta construída por Bargmann em 1954. Neste estudo haverá uma exposição dos tópicos trabalhados por Bargmann, com o adendo de alguns comentários.

PALAVRAS-CHAVE: Relatividade muito especial. $SIM(2)$. Estados de uma partícula. Espaço de Hilbert. Representações de raio.

ABSTRACT

In this thesis, the insertion of very special Relativity symmetries in the context of quantum mechanics will be studied, thus the performance of ISIM(2) transformations in states belonging to the Hilbert space in quantum mechanics will be constructed. However, to this end, in the chapters prior to this result, the necessary foundations to reach an understanding of the theme will be presented. Topics of group theory, special relativity, very special relativity and quantum mechanics will be addressed. After completing this first stage, there is a focus on the search for the existence, or not, of projective representations of SIM(2) and ISIM(2). Algebraic and topological aspects of SIM(2) and ISIM(2) will be studied, and, subsequently, this thesis enters into the study of the theory of unitary ray representations of continuous groups, a theory built by Bargmann in 1954. In this study there will be an exposition of the topics worked by Bargmann, with the addition of some comments.

KEYWORDS: Very Special Relativity. SIM(2). One particle states. Hilbert space. Ray representations.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Grupos da VSR e seus Geradores.	38
Tabela 2 – Álgebra dos Geradores dos grupos da VSR.	38
Tabela 3 – Álgebra dos Geradores de ISIM(2) em uma Rep. Ordinária.	51
Tabela 4 – Grupos de isotropia na VSR.	58
Tabela 5 – Álgebra dos Geradores de ISIM(2) em uma Rep. Projetiva.	65
Tabela 6 – Álgebra dos Geradores de SIM(2) em uma Rep. Projetiva.	66
Tabela 7 – Álgebra dos Geradores redefinidos de SIM(2) em uma Rep. Projetiva.	67

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	TEORIA DE GRUPOS E REPRESENTAÇÕES	15
2.1	Grupos	15
2.2	Representação de Grupos	16
2.3	Grupos de Lie	16
3	SIMETRIAS E TEORIAS DE CINEMÁTICA	22
3.1	Relatividade Especial	22
3.1.1	Transformações de Lorentz	22
3.1.2	Dilatação do Tempo	27
3.1.3	Contração do Espaço	28
3.1.4	Soma de Velocidades	29
3.1.5	O grupo de Lorentz $O(1,3)$ e o grupo $SO(1,3)$	31
3.1.6	O grupo de Poincaré	35
3.2	Relatividade Muito Especial	37
3.2.1	Introdução à VSR e aos grupos $SIM(2)$ e $HOM(2)$	37
3.2.2	Dilatação do Tempo, Contração do Espaço e Soma de Velocidades	41
3.2.3	Os grupos $ISIM(2)$ e $IHOM(2)$	43
4	MECÂNICA QUÂNTICA	44
4.1	Estados, o Espaço de Hilbert e o Produto Interno	44
4.2	Operadores em Mecânica Quântica	45
5	ÁLGEBRAS QUÂNTICAS	47
5.1	Representação dos grupos $ISIM(2)$ e $IHOM(2)$ em Mecânica Quântica	47
5.2	Estados de uma Partícula	50
5.3	O Grupo de Isotropia e a constante de Normalização	56
5.4	Mecânica Quântica, Representações Projetivas e a VSR	61
5.4.1	Álgebra	65
5.4.2	Topologia	67
6	REPRESENTAÇÕES DE RAIO UNITÁRIAS DE GRUPOS CONTÍNUOS	72
6.1	Raios vetoriais e operatoriais	73
6.2	Fatores e expoentes locais	79
6.3	Fatores e expoentes definidos sobre o grupo inteiro	87
6.3.1	Existência de representações de raio compatíveis com um dado fator ω	87
6.3.2	Representação de raios de G induzida por representações ordinárias	90

6.3.3	Extensão de representativos locais	90
6.3.4	Extensão de expoentes locais	91
7	CONCLUSÃO	94
	REFERÊNCIAS	95

1 INTRODUÇÃO

Apesar do grande número de previsões assertivas do Modelo Padrão da física de partículas, ainda existem fenômenos não explicados pelo mesmo, tais como a origem da massa dos neutrinos, a assimetria entre matéria e anti-matéria, a energia e matéria escuras, entre outros. Muitas são as tentativas de resolução destes problemas, tais como violações na invariância de Lorentz, nas quais as quebras usualmente são feitas a partir da introdução de campos de fundo. Porém, um meio de se alcançar violação de Lorentz sem a necessidade de introdução de campos adicionais é através da utilização de um outro grupo de simetrias. Ao substituir o grupo de simetria de uma teoria por um de seus subgrupos próprios não necessariamente o subgrupo fornecerá uma teoria com as mesmas previsões anteriores a substituição. Este fato pode ser exemplificado ao tomar os subgrupos de $SO(1,3)$ gerados por $A_+ = (J_i + iK_i)/2$ e $A_- = (J_i - iK_i)/2$, ambos isomorfos a $SU(2)$. Individualmente, suas transformações não são o suficiente para recuperar as predições da relatividade especial. Porém para o caso do grupo de Lorentz, alguns de seus subgrupos próprios tem chamado uma atenção em particular, pois estes subgrupos fornecem uma cinemática relativística consistente, fornecendo contração e dilatação do espaço e do tempo, soma de velocidades, invariância e maximalidade da velocidade da luz no vácuo.

Estes subgrupos próprios compõem uma teoria que recebe o nome de VSR (acrônimo do inglês para relatividade muito especial). Esta é uma teoria que estuda a cinemática formada por um conjunto de simetrias que possuem uma característica em comum: o foco em subgrupos do grupo de simetrias de Lorentz os quais ao terem seus elementos compostos com simetrias de paridade e reversão temporal recuperam o grupo das transformações de Lorentz usual em Ahluwalia e Horvath, 2010, (porém complexificado), e não mais os subgrupos inicialmente tratados.

Estes conceitos foram utilizados pela primeira vez por Cohen e Glashow em 2006, onde os autores definem novos geradores utilizando de combinações lineares dos já conhecidos geradores de rotações e boosts, e, curiosamente, por conta da forma dos novos geradores, surge uma anisotropia natural na teoria privilegiando-se desta forma um eixo espacial. Mantendo os postulados de invariância da velocidade da luz e do princípio da relatividade, esta teoria de dinâmica relativística modificada trará consigo alguns resultados já conhecidos a partir do estudo de dois subgrupos que compõem as simetrias da VSR, os grupos $SIM(2)$ e $HOM(2)$.

Deste cenário surgirá um campo de estudos com alguns desdobramentos interessantes, pois, por conta desta violação de Lorentz, a matéria ordinária não deve ser descrita por uma teoria com este tipo de simetrias. Em Das e Mohanty, 2011, vê-se algo que reforça esta ideia, o eletromagnetismo é incompatível com estas novas transformações de simetria. Este trabalho visa introduzir as bases para uma construção do formalismo de representação de partículas em teoria quântica de campos. Aqui é apresentada a construção de estados de uma partícula invariante pela ação dos grupos $SIM(2)$ e $HOM(2)$.

Nas seções 2 à 4 estão contidas as bases para o início deste estudo, já na seção 5 encontra-se a inserção das simetrias da VSR em Mecânica Quântica através da representação de $SIM(2)$ e $HOM(2)$ no espaço de Hilbert. A princípio, a construção se dá de modo usual, porém ao lançar mão do estudo da topologia dos grupos $SIM(2)$ e de $HOM(2)$, observa-se que esses são fundamentalmente diferentes do grupo de Lorentz, uma vez que neste cenário, ao que tudo indica, pode haver a possibilidade de construção de não apenas representações ordinárias, mas também das chamadas representações projetivas. Representações com este formato surgem para o grupo de Galilei, fato este apresentado em Weinberg (1995), cujas razões de aprecio são topológicas, trazendo assim uma suspeita de sua existência também para $SIM(2)$ e de $HOM(2)$ e seus grupos inomogêneos.

Um interesse em representações projetivas se justifica ao passo que observa-se o surgimento de detalhes matemáticos intrínsecos à estas estruturas, observados nos trabalhos Filippelli (2011) e Wawrzycki (2004). Assim, na seção 6 visa-se estudar a teoria de representações de raio (ou representações projetivas), desenvolvida em Bargmann (1954), na tentativa de elucidar as questões relacionadas a representações projetivas e os grupos $SIM(2)$ e de $HOM(2)$, juntamente com seus grupos inomogêneos. Nesta seção será feita uma abordagem profunda, porém de apenas parte da teoria construída por Bargmann.

2 TEORIA DE GRUPOS E REPRESENTAÇÕES

Durante esta construção, comumente surgirão estruturas algébricas chamadas de grupos. Estas estruturas desempenham um papel importante em diversas áreas da física, pois, a partir do estudo das aplicações deste tema, as noções de simetrias e invariantes se tornaram parte central das formulações da física moderna. Nas próximas seções um tipo bem particular de grupo, que será fundamental na construção dos próximos capítulos, o chamado de Grupo de Lie, nome dado em homenagem ao matemático norueguês Sophus Lie, será o foco desta análise que tem por intuito o desenvolvimento e demonstração das propriedades essenciais do mesmo. Os conteúdos aqui tratados podem ser vistos com mais profundidade e exemplos em Hamermesh (1989).

2.1 GRUPOS

Um grupo, (G, \cdot) , é uma estrutura algébrica abstrata formada por um conjunto, G , dotado de uma operação, \cdot , entre seus elementos de tal forma que essa satisfaz as seguintes propriedades:

1. A operação entre os elementos do grupo é fechada, ou seja:

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_3 = g_1 \cdot g_2. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

2. A operação entre os elementos é associativa, isto é, para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$, ocorre:

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3). \quad (2.1.2)$$

3. Existe um elemento, e , chamado de neutro, com a propriedade:

$$g \cdot e = e \cdot g = g, \quad (2.1.3)$$

para todo $g \in G$.

4. Para todo elemento $g \in G$, deve existir um elemento $g^{-1} \in G$, tal que:

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e. \quad (2.1.4)$$

Um exemplo bem comum é o grupo que contém apenas dois elementos, e e g_1 , com a operação dada pela seguinte lei de composição: e o elemento neutro e $g_1 \cdot g_1 = e$. Uma forma de visualizar esta estrutura, que para grupos finitos é bem comum, é usar da construção de tabelas das operações entre os elementos, nas quais as interseções entre colunas e linhas são os resultados dos produtos realizados pelos elementos à esquerda e a cima. Para o exemplo em questão, a tabela é:

\cdot	e	g_1
e	e	g_1
g_1	g_1	e

2.2 REPRESENTAÇÃO DE GRUPOS

Algo interessante a se perceber nesta altura é que no exemplo de grupo dado por (G, \cdot) tanto o conjunto como a operação não precisavam ser definidos da forma escolhida. Caso fossem tomados um conjunto dado por $\{0, 1\}$ e uma operação sendo definida como adição módulo 2, $+_2$, ocorreriam de o elemento neutro ser 0 e de $1 +_2 1 = 0$. Tem-se então que a tabela de operações será:

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

Assim se percebe que este é o mesmo grupo tratado anteriormente, diferindo apenas nos símbolos que descrevem os elementos. Este grupo, descrito desta maneira, é chamado de Z_2 . A mesma noção pode ser empregada na construção de uma generalização deste grupo para os n primeiros inteiros, seu nome é Z_n , um grupo com a operação sendo a adição módulo n . Como dito anteriormente, grupos são descritos apenas pela lei de composição de seus elementos, e assim a noção de grupo se torna algo plenamente abstrata. Mas, para aplicações físicas, o mais natural é procurar por uma forma de descrever a lei de composição de um grupo abstrato em termos de um conjunto formado por objetos conhecidos, como por exemplo procurar a descrição dos elementos do grupo dado por um conjunto de operadores lineares que atuam sobre um espaço vetorial. Assim o objetivo é o de construir uma função, ρ , que toma elementos do grupo e retorna elementos do espaço dos operadores lineares de tal forma que a lei de composição seja mantida. Assim defina ρ da seguinte maneira:

$$\rho : G \rightarrow T(\mathcal{V}) \quad (2.2.1)$$

$$g \mapsto \rho(g) = T_g, \quad (2.2.2)$$

onde T_g é uma transformação linear dada por:

$$T_g : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \quad (2.2.3)$$

$$v \mapsto T_g v = v^g. \quad (2.2.4)$$

Como dito, esta função deve ser tal que preserve a lei de composição, assim, sejam g_1, g_2 e $g_3 \in G$ e sejam T_{g_1}, T_{g_2} e $T_{g_3} \in T(\mathcal{V})$. Então se ρ preserva a composição, temos:

$$g_1 \cdot g_2 = g_3 \quad \Rightarrow \quad T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_3}. \quad (2.2.5)$$

Funções ρ deste tipo são chamadas de representações de G . Um tipo especial de representações são as representações fieis nas quais ρ é injetiva.

2.3 GRUPOS DE LIE

Grupos de Lie são grupos que possuem um forte apelo geométrico pois além de possuírem infinitos elementos, podem ter seus elementos organizados em algum espaço de maneira tal a formarem

superfícies. Nestas superfícies é possível construir parametrizações as quais permitem a obtenção de uma estrutura diferencial ponto a ponto. Estas estruturas são chamadas de *Variiedades Diferenciáveis*. Mas grupos de Lie, mesmo possuindo a possibilidade de construção de parametrizações, ainda podem possuir certos elementos que realizam transformações discretas. Assim as superfícies formadas por grupos de Lie podem ser dadas pela união de superfícies que não possuem pontos em comum, ou seja, superfícies *desconexas* ou *disjuntas*. Um exemplo deste tipo de grupo é o grupo de rotações em $2D$ com a simetria de reflexão de um dos eixos. Este grupo vai ser descrito geometricamente por dois círculos disjuntos. Por conta disto uma classe importante surge, a dos grupos de Lie *conexos*, nos quais todos os elementos do grupo estão interligados por curvas contínuas e suaves, de tal maneira que todos os elementos podem ser obtidos através de caminhos partindo da identidade. Assim sendo, esta seção se dedica a estudar propriedades desta classe especial de grupos que serão de grande importância a diante.

Como dito, grupos de Lie são grupos contínuos cujos elementos são parametrizáveis. Logo um elemento g que pertença ao grupo poderá ser descrito em termos de um conjunto de coordenadas x^1, x^2, \dots, x^n e assim seus elementos serão funções destas coordenadas, $g = g(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Desse modo, a composição de dois elementos do grupo será dada por:

$$g(x^1, x^2, \dots, x^n)g(x^{01}, x^{02}, \dots, x^{0n}) = g(x^{001}, x^{002}, \dots, x^{00n}), \quad (2.3.1)$$

onde cada conjunto coordenado acima se refere a um ponto distinto da superfície do grupo, e em particular as coordenadas do ponto $(x^{001}, x^{002}, \dots, x^{00n})$ devem ser funções dos pontos (x^1, x^2, \dots, x^n) e $(x^{01}, x^{02}, \dots, x^{0n})$:

$$x^{00i} = \phi^i(x^1, x^2, \dots, x^n, x^{01}, x^{02}, \dots, x^{0n}). \quad (2.3.2)$$

De maneira a tornar a notação mais compacta, a n -úpla (x^1, x^2, \dots, x^n) será denotada por (x^i) e analogamente para as demais, de modo que $(x^{00i}) = \phi^i(x, x^0)$. Este aspecto da composição de elementos é de extrema importância para *Grupos de Lie Conexos*. Os elementos destes grupos são continuamente ligados a identidade do grupo (a qual em alguma parametrização será a origem, $\mathbb{1} = g(0, 0, \dots, 0)$), assim a composição de um elemento com sua inversa possui uma característica fundamental:

$$g(x^i)g^{-1}(x^j) = g(x^i)g(x^j) = g(\varphi^i(x, -x)) = \mathbb{1}. \quad (2.3.3)$$

Assim tem-se que $\varphi^i(x, -x) = (0, 0, \dots, 0) = \varphi^i(-x, x)$. Uma outra propriedade pode surgir:

$$g(x^i)\mathbb{1} = g(\varphi^i(x, 0)) = g(x) = g(\varphi^i(0, x)) = \mathbb{1}g(x). \quad (2.3.4)$$

Daqui se obtém que

$$\varphi^i(x, 0) = \varphi^i(0, x) = (x^i), \quad (2.3.5)$$

e que

$$g(0)g(0) = g(\varphi(0, 0)) = g(0) \quad \varphi(0, 0) = 0. \quad (2.3.6)$$

Estas propriedades são o que é preciso para simplificar o que vem a seguir. Como foi dito anteriormente, em Grupos de Lie Conexos todos os elementos estão conectados a identidade por caminhos suaves, cuja parametrização pode ser tal que a origem estará na identidade, assim sendo, seus elementos podem ser descritos em termos de uma *Serie de Taylor* em torno da identidade:

$$g(x) = \mathbb{1} + x^i \left(\frac{\partial g}{\partial x^i} \right)_{x=0} + \frac{x^i x^j}{2!} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{x=0} + \dots \quad (2.3.7)$$

Definindo:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x^i} \right)_{x=0} = iX_i, \quad (2.3.8)$$

e substituindo (2.3.8) em (2.3.7), obtém-se

$$g(x) = \mathbb{1} + ix^i X_i + \frac{x^i x^j}{2!} X_{ij} + \dots \quad (2.3.9)$$

Nesta série, termos do tipo X_{ijk} , X_{ijkl} , ... irão em algum momento aparecer, porém estes são completamente determinados por X_i , por conta disto X_i recebe o nome de *gerador*. A demonstração disto se dá pela investigação de propriedades da função $\varphi^i(x, x^\theta)$. Tome a expansão de $\varphi^i(x, x^\theta)$

$$\begin{aligned} \varphi^k(x, x^\theta) &= \varphi^k(0, 0) + x^i \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i} \Big|_{x=0=x^\theta} + x^{\theta i} \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^{\theta i}} \Big|_{x=0=x^\theta} + \\ &+ \frac{x^i x^j}{2!} \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_{x=0=x^\theta} + \frac{x^{\theta i} x^{\theta j}}{2!} \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x^{\theta i} \partial x^{\theta j}} \Big|_{x=0=x^\theta} + \frac{x^i x^{\theta j}}{2!} \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x^i \partial x^{\theta j}} \Big|_{x=0=x^\theta} + \dots \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Aqui, usando das relações (2.3.1), (2.3.4) e (2.3.6), obtém-se:

$$\frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i} \Big|_{x=0=x^\theta} = \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i}(x, x^\theta) \Big|_{x=0=x^\theta} = \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i}(x, 0) \Big|_{x=0=x^\theta} = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \Big|_{x=0=x^\theta} = \delta_i^k = \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^{\theta i}} \Big|_{x=0=x^\theta} \quad (2.3.11)$$

e

$$\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_{x=0=x^\theta} = \frac{\partial \delta_i^k}{\partial x^j} = 0 = \frac{\partial \delta_i^k}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x^{\theta i} \partial x^{\theta j}} \Big|_{x=0=x^\theta}. \quad (2.3.12)$$

Das derivadas de segunda ordem o termo restante é o de derivadas mistas, portanto tem-se:

$$\varphi^k(x, x^\theta) = x^k + x^{\theta k} + \frac{1}{2} C_{ij}^k x^i x^{\theta j} + \dots \quad (2.3.13)$$

com $C_{ij}^k = \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x^i \partial x^{\theta j}} \Big|_{x=0=x^\theta}$.

Tomando uma situação em particular de (2.3.13): o caso em que $x^\theta = x$, obtém-se:

$$0 = x^k - x^k + \frac{1}{2} C_{ij}^k x^i x^{\theta j} + \dots \quad (2.3.14)$$

de todo modo, ordem a ordem o polinômio tem de se cancelar, deste modo é obtido que:

$$C_{ij}^k x^i x^{\theta j} = 0. \quad (2.3.15)$$

Ao se tomar a simetrização e anti-simetrização de C_{ij}^k nos índices i e j :

$$C_{ij}^k = \frac{1}{2}(C_{ij}^k + C_{ji}^k) + \frac{1}{2}(C_{ij}^k - C_{ji}^k). \quad (2.3.16)$$

Definindo:

$$\begin{aligned} e_{ij}^k &= \frac{1}{2}(C_{ij}^k + C_{ji}^k), \\ f_{ij}^k &= \frac{1}{2}(C_{ij}^k - C_{ji}^k). \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Assim substituindo (2.3.17) em (2.3.15):

$$e_{ij}^k x^i x^{lj} + f_{ij}^k x^i x^{lj} = 0. \quad (2.3.18)$$

Como e_{ij}^k e $x^i x^{lj}$ são simétricos em i, j e $x^i x^{lj}$ não são necessariamente nulos, o tensor e_{ij}^k tem de ser nulo para todos os valores dos índices i, j , obtendo então que:

$$C_{ij}^k = f_{ij}^k, \quad (2.3.19)$$

então $\varphi(x, x^\theta)$ é da forma:

$$\varphi^k(x, x^\theta) = x^k + x^{\theta k} \frac{1}{2} f_{ij}^k x^i x^{lj} + \dots \quad (2.3.20)$$

Agora, considere o produto $g(x)g(x^\theta) = g(\varphi(x, x^\theta))$ expandido em série de Taylor:

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} + ix^i X_i + \frac{1}{2!} x^i x^j X_{ij} + \dots)(\mathbb{1} + ix^{\theta i} X_i + \frac{1}{2!} x^{\theta i} x^{\theta j} X_{ij} + \dots) &= \\ = \mathbb{1} + i\varphi(x, x^\theta)^i X_i + \frac{1}{2!} \varphi(x, x^\theta)^i \varphi(x, x^\theta)^j X_{ij} + \dots \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Valendo-se de (2.3.20), a equação anterior retornará

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} + ix^i X_i + \frac{1}{2} x^i x^j X_{ij} + \dots)(\mathbb{1} + ix^{\theta i} X_i + \frac{1}{2} x^{\theta i} x^{\theta j} X_{ij} + \dots) &= \\ = \mathbb{1} + i f x^i + x^{\theta i} \frac{1}{2} f_{mn}^i x^m x^{\theta n} + \dots g X_i + \\ + \frac{1}{2} f x^i + x^{\theta i} \frac{1}{2} f_{mn}^i x^m x^{\theta n} + \dots g f x^j + x^{\theta j} \frac{1}{2} f_{kl}^j x^k x^{\theta l} + \dots g X_{ij} + \dots \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Realizando as distribuições

$$\begin{aligned}
& \mathbb{1} + ix^i X_i + ix^{\ell i} X_i \quad x^i x^{\ell j} X_i X_j + \frac{1}{2} x^i x^j X_{ij} + \frac{1}{2} x^{\ell i} x^{\ell j} X_{ij} \\
& + \frac{i}{2} x^i x^{\ell k} x^{\ell j} X_i X_{kj} + \frac{i}{2} x^i x^j x^{\ell k} X_{ij} X_k + \frac{1}{4} x^i x^j x^{\ell k} x^{\ell l} X_{ij} X_{kl} + \dots \\
& = \\
& \mathbb{1} + ix^i X_i + ix^{\ell i} X_i \quad \frac{i}{2} f_{mn}^i x^m x^{\ell n} X_i + \frac{1}{2} x^i x^j X_{ij} + \frac{1}{2} x^i x^{\ell j} X_{ij} \\
& \quad \frac{1}{4} x^i f_{kl}^j x^k x^{\ell l} X_{ij} + \frac{1}{2} x^{\ell i} x^j X_{ij} + \frac{1}{2} x^{\ell i} x^{\ell j} X_{ij} \quad \frac{1}{4} x^{\ell i} f_{kl}^j x^k x^{\ell l} X_{ij} \\
& \quad \frac{1}{4} f_{pq}^i x^p x^{\ell q} x^j X_{ij} \quad \frac{1}{4} f_{pq}^i x^p x^{\ell q} x^{\ell j} X_{ij} + \frac{1}{8} f_{pq}^i f_{kl}^j x^p x^{\ell q} x^k x^{\ell l} X_{ij} + \dots
\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Simplificando os termos que se repetem em ambos os lados e aproximando para até ordem dois nos parâmetros

$$x^i x^{\ell j} X_i X_j = \frac{i}{2} f_{mn}^i x^m x^{\ell n} X_i + \frac{1}{2} x^i x^{\ell j} X_{ij} + \frac{1}{2} x^j x^{\ell i} X_{ij}. \tag{2.3.24}$$

Que pode ser reescrita na forma:

$$x^i x^{\ell j} X_i X_j = \frac{i}{2} f_{mn}^i x^m x^{\ell n} X_i \quad \frac{1}{2} (x^i x^{\ell j} + x^{\ell j} x^i) X_{ij}. \tag{2.3.25}$$

Simetrizando e antissimetrizando o tensores $X_i X_j$ e $x^m x^{\ell n}$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} x^i x^{\ell j} \left(f X_i, X_j g + [X_i, X_j] \right) = \\
& = \frac{i}{4} f_{mn}^i \left((x^m x^{\ell n} + x^n x^{\ell m}) + (x^m x^{\ell n} \quad x^n x^{\ell m}) \right) X_i \quad \frac{1}{2} (x^i x^{\ell j} + x^{\ell j} x^i) X_{ij}.
\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

Como o tensor f_{mn}^i é antissimétrico, seu produto pelo termo $(x^m x^{\ell n} + x^n x^{\ell m})$ se anula, restando apenas:

$$\frac{1}{2} x^i x^{\ell j} \left(f X_i, X_j g + [X_i, X_j] \right) = \frac{i}{4} f_{mn}^i (x^m x^{\ell n} \quad x^n x^{\ell m}) X_i \quad \frac{1}{2} (x^i x^{\ell j} + x^{\ell j} x^i) X_{ij}. \tag{2.3.27}$$

Simetrizando e antissimetrizando agora o tensor $x^i x^{\ell j}$, resulta:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \left((x^i x^{\ell j} + x^j x^{\ell i}) + (x^i x^{\ell j} \quad x^j x^{\ell i}) \right) \left(f X_i, X_j g + [X_i, X_j] \right) = \\
& = \frac{i}{4} f_{mn}^i (x^m x^{\ell n} \quad x^n x^{\ell m}) X_i \quad \frac{1}{2} (x^i x^{\ell j} + x^{\ell j} x^i) X_{ij}.
\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

Novamente, os termos restantes do produto do lado esquerdo da equação são os produtos de tensores simétricos com simétricos, e antissimétricos com antissimétricos, em vista disso se obtém:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} (x^i x^{\ell j} + x^j x^{\ell i}) f X_i, X_j g + \frac{1}{4} (x^i x^{\ell j} \quad x^j x^{\ell i}) [X_i, X_j] = \\
& = \frac{i}{4} f_{mn}^i (x^m x^{\ell n} \quad x^n x^{\ell m}) X_i \quad \frac{1}{2} (x^i x^{\ell j} + x^{\ell j} x^i) X_{ij}.
\end{aligned} \tag{2.3.29}$$

Agora, igualando os termos que vêm multiplicados pelos parâmetros $(x^i x^{lj} + x^j x^{li})$ e $(x^i x^{lj} - x^j x^{li})$, fato que resulta em:

$$\begin{cases} fX_i, X_j g = 2X_{ij}, \\ [X_i, X_j] = i f_{ij}^k X_k. \end{cases} \quad (2.3.30)$$

Assim é possível ver o motivo de X_i ser chamado de gerador. Note que a relação entre os geradores é dada por f_{ij}^k . Essas são chamadas de *constantes de estrutura do grupo*. Por fim, a segunda equação de (2.3.30) é chamada de *álgebra dos geradores do grupo*.

3 SIMETRIAS E TEORIAS DE CINEMÁTICA

Esta seção visa construir através das noções de invariantes as relações que atrelam teorias de cinemática a grupos de simetria. Quais suas conexões com grupos e álgebras de Lie, que, por conseguinte, fornecerão base para as seções seguintes. Seções essas que visam introduzir representações destas simetrias em espaços de Hilbert. Deste modo, aqui serão apresentadas fundamentações da relatividades especial e muito especial. Os conteúdos tratados nesta seção podem receber o devido aprofundamento nas seguintes referências Bergmann (1976), Cohen e Glashow (2006) e Ahluwalia e Horvath (2010).

3.1 RELATIVIDADE ESPECIAL

3.1.1 Transformações de Lorentz

A relatividade restrita é uma teoria cujo objetivo é introduzir ideias não abordadas pela cinemática galileana, como as observações de Michelson e Morley a cerca da invariância da velocidade da luz. Estas ideias vão surgir na construção através dos seguintes postulados:

1. *A velocidade da luz é uma constante universal, todo e qualquer referencial visualizará um feixe se propagar com velocidade igual a c , não importando a velocidade relativa entre o referencial e a fonte.*

2. *Todo e qualquer referencial inercial com velocidade inferior ou igual a c precisa ver a física de maneira covariante, logo a causalidade precisa ser mantida por transformações entre referenciais inerciais.*

De posse dos presentes postulados, vê-se que a luz é um objeto físico de importância. Desse modo faz-se natural observar com mais afinco propriedades deste.

Começando pelo seguinte sistema: Dado um referencial inercial S , em que, no instante $t_i = 0$, liga-se uma lanterna a partir de sua origem e apontada em uma direção qualquer. Dado isso, em um tempo t posterior a $t_i = 0$, ocorrerá que

$$c = \frac{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}}{(t - t_i)}, \quad (3.1.1)$$

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 - c^2(t - t_i)^2 = 0. \quad (3.1.2)$$

Pode-se então a partir disso definir a seguinte forma quadrática:

$$s^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 - c^2(t - t_i)^2. \quad (3.1.3)$$

Como, pelos postulados, é fundamental que c seja uma constante no universo, se faz necessário então que para observações a cerca do trajeto da luz sempre ocorra $s^2 = 0$, não importando o referencial inercial em questão. Em outras palavras, foi imposta a invariância de s^2 apenas para um intervalo da trajetória da luz .

Tomando agora dois referenciais inerciais, S e S^0 , de tal forma que em $t_i = 0$ suas origens coincidirão sobre o mesmo ponto e que S^0 se moverá em uma velocidade $\hat{v} = v_x \hat{i}$ com relação a S . Ao ligar, agora, uma lanterna em direção a x positivo, haverão então as seguintes formas quadráticas:

$$\begin{aligned} s^2 &= (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 - c^2(t - t_i)^2, \\ s^{02} &= (x^0 - x_i^0)^2 + (y^0 - y_i^0)^2 + (z^0 - z_i^0)^2 - c^2(t^0 - t_i^0)^2. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Para escrever de uma maneira mais comum na literatura, toma-se a notação da seguinte forma: $(x^0 - x_i^0) = x^{01}$, $(y^0 - y_i^0) = x^{02}$, $(z^0 - z_i^0) = x^{03}$ e $c(t^0 - t_i^0) = x^{00}$. Escritos desta maneira, estas coordenadas compõem as coordenadas de um espaço vetorial chamado espaço de Minkowski, no qual a descrição dos eventos não mais são dadas pela trinca de coordenadas de posição, mas sim por coordenadas de posição espaço-temporal. Como as transformações de Galileu não produzem o resultado de invariância da velocidade da luz, surge então a necessidade de encontrar um conjunto de transformações de coordenadas que relacionem ambos os sistemas de S e S^0 de maneira a deixar s^2 invariante. Tais transformações deverão ser lineares, assim, por essas lidarem com vetores do espaço de Minkowski deverão ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x^{00} \\ x^{01} \\ x^{02} \\ x^{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}, \quad (3.1.5)$$

$$X^0 = X. \quad (3.1.6)$$

Agora procedendo para a seguinte análise: a forma quadrática s^2 pode ser vista como o produto interno de um vetor X , do espaço de Minkowski, por ele mesmo:

$$hX, X i = X^T \eta X = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \quad (3.1.7)$$

com:

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.1.8)$$

comumente denotada por $\eta = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$.

Assim, se tomar a transformação $X \mapsto (X) = X^0$, pelo o que foi visto deverá ocorrer a

igualdade:

$$hX, Xi = hX^0, X^0i. \quad (3.1.9)$$

Fato que também pode ser visualizado da seguinte forma:

$$hX^0, X^0i = h \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} X, \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} = X^T \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} X = X^T \eta X = hX, Xi, \quad (3.1.10)$$

O penúltimo passo de (3.1.10) leva a duas informações importantes:

1. Para a igualdade valer, necessita-se de: $A^2 - C^2 = 1$;
2. O determinante de $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ tem de ser 1;

De 1. é possível obter:

$$A^2 - C^2 = 1, \quad (3.1.11a)$$

$$D^2 - B^2 = 1, \quad (3.1.11b)$$

$$AB - CD = 0. \quad (3.1.11c)$$

De 2. temos que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 1$, assim:

$$AD - BC = 1. \quad (3.1.12)$$

Recaptulando, haviam quatro entradas não determinadas na matriz $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, porém de (3.1.11) foram obtidos os primeiros três vínculos entre essas entradas, restando apenas um parâmetro livre para essa transformação. Assim esta transformação é completamente descrita por um parâmetro livre. Todavia parametrizações podem ser tomadas para as quatro entradas. Inicialmente existem as seguinte possibilidades de parametrização:

$$\begin{cases} A = D = \cosh(\phi_x), \\ B = C = \sinh(\phi_x). \end{cases} \quad (3.1.13)$$

Porém nem todas destas possibilidades fornecem transformações da forma necessária. Por exemplo: uma das imposições físicas exige $jAj > 0$, pois A é o coeficiente relacionado com a seta temporal, e a forma como o tempo evolui não deve ser do futuro para o passado (os motivos para isto estão relacionados com o fato de que transformações que invertem a direção temporal levam a conclusões absurdas como efeitos ocorrendo anteriormente a sua causa). Ou também, escolher $D = \cosh(\phi_x)$ leva a uma transformação de paridade no eixo x , muito embora nem toda transformação imponha uma paridade. Portanto, tem-se $A = D$, fato que, uma vez incluso na equação (3.1.11c), retorna $C = B$.

Já os sinais de C e de B são obtidos através da seguinte observação:

Independentemente do significado de $\cosh(\phi_x)$ e $\sinh(\phi_x)$, as expansões dos coeficientes desta transformação deverão retornar, em aproximação de primeira ordem, as transformações de Galileu.

Por conseguinte deve-se avaliar o que ocorre com a expansão da componente x_1^θ em função do parâmetro ϕ_x

$$x^\theta = \cosh(\phi_x)x^1 - \sinh(\phi_x)x^0. \quad (3.1.14a)$$

$$x^\theta = [1 + \mathcal{O}^2(\phi_x)]x^1 - [\phi_x + \mathcal{O}^3(\phi_x)]x^0 - \phi_x ct. \quad (3.1.14b)$$

Como foi suposto inicialmente que S^θ se desloca em direção a x positivo, tem-se assim duas informações importantes aqui: ao comparar esta expressão com a transformação de Galileu, resulta que o sinal de ϕ_x será o negativo.

Estas análises despontam nas seguintes escolhas:

$$\begin{cases} A = D = \cosh(\phi_x), \\ B = C = -\sinh(\phi_x). \end{cases} \quad (3.1.15)$$

Desse modo sucede que

$$\begin{cases} x^\theta = x^0 \cosh(\phi_x) - x^1 \sinh(\phi_x), \\ x^1 = x^0 \sinh(\phi_x) + x^1 \cosh(\phi_x), \end{cases} \quad (3.1.16)$$

ou, na forma matricial,

$$x = \begin{bmatrix} \cosh(\phi_x) & -\sinh(\phi_x) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi_x) & \cosh(\phi_x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.17)$$

Para finalizar a obtenção das transformações de Lorentz deve-se observar o seguinte, S^θ se desloca com velocidade v com relação a S , assim, nas coordenadas de S , v pode ser expresso como:

$$\frac{x^1}{t} = v. \quad (3.1.18)$$

Por outro lado, como S^θ está centrado no sistema de coordenadas x^θ , obtém-se a partir das transformações de Lorentz o seguinte:

$$\cosh(\phi_x)x^1 - \sinh(\phi_x)ct = 0 \quad) \quad x^1 - \tanh(\phi_x)ct = 0 \quad) \quad \frac{x^1}{t} = c \tanh(\phi_x). \quad (3.1.19)$$

Portanto

$$\frac{v}{c} = \tanh(\phi_x). \quad (3.1.20)$$

Por conta dessa relação entre ϕ_x e a velocidade v , é dado para ϕ_x o nome de *Rapidez*.

Com isso foi possível obter relações que perfazem paralelos entre as funções hiperbólicas da parametrização e grandezas físicas. Para tal, faremos as seguintes manipulações: tomando a identidade trigonométrica das funções hiperbólicas e a dividindo por $\cosh^2(\phi_x)$ é possível isolar $\cosh^2(\phi_x)$, obtendo-se assim

$$\cosh^2(\phi_x) - \sinh^2(\phi_x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cosh^2(\phi_x) = \frac{1}{1 - \tanh^2(\phi_x)}. \quad (3.1.21)$$

Tomando $\beta = \frac{v}{c}$ e definindo o fator de Lorentz como $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, as seguintes três relações podem ser obtidas:

$$\tanh(\phi_x) = \frac{v}{c} = \beta, \quad (3.1.22a)$$

$$\cosh(\phi_x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma, \quad (3.1.22b)$$

$$\sinh(\phi_x) = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \beta\gamma. \quad (3.1.22c)$$

Temos portanto as transformações de Lorentz na direção \hat{x} :

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad (3.1.23a)$$

$$x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad (3.1.23b)$$

$$x^{2'} = x^2, \quad (3.1.23c)$$

$$x^{3'} = x^3. \quad (3.1.23d)$$

Já as transformações inversas podem ser obtidas ao buscar a matriz inversa a A , dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cosh(\phi_x) & \sinh(\phi_x) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi_x) & \cosh(\phi_x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.24)$$

Após substituir as definições anteriores, é possível obter

$$x^0 = \gamma(x^{0'} + \beta x^{1'}), \quad (3.1.25a)$$

$$x^1 = \gamma(x^{1'} + \beta x^{0'}), \quad (3.1.25b)$$

$$x^2 = x^{2'}, \quad (3.1.25c)$$

$$x^3 = x^{\beta_3}. \quad (3.1.25d)$$

No caso estudado até aqui, os referenciais se moviam apenas no eixo \hat{x} . Uma investigação semelhante centrada em referenciais com movimentos relativos dados nos eixos \hat{y} e \hat{z} levaria a transformações dadas pelas seguintes matrizes: para a direção \hat{y}

$$y = \begin{bmatrix} \cosh(\phi_y) & 0 & \sinh(\phi_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh(\phi_y) & 0 & \cosh(\phi_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.1.26)$$

já para \hat{z}

$$z = \begin{bmatrix} \cosh(\phi_z) & 0 & 0 & \sinh(\phi_z) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\phi_z) & 0 & 0 & \cosh(\phi_z) \end{bmatrix}. \quad (3.1.27)$$

Mas caso se queira estudar um movimento mais geral entre os observadores S e S^0 , com $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. A matriz que efetuará esta transformação será:

$$= \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & \gamma\beta_z \\ \gamma\beta_x & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_x^2}{j\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_y\beta_x}{j\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_z\beta_x}{j\beta^2} \\ \gamma\beta_y & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_y}{j\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_y^2}{j\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_z\beta_y}{j\beta^2} \\ \gamma\beta_z & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_z}{j\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_y\beta_z}{j\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_z^2}{j\beta^2} \end{bmatrix}, \quad (3.1.28)$$

Com $\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \vec{v}/c$.

Esta matriz de transformação será útil para uma comparação futura, pois percebe-se que esta não demonstra possuir eixos preferenciais, fato que posteriormente irá contrastar com a construção da VSR e com as transformações de seus grupos de simetria.

3.1.2 Dilatação do Tempo

Em linhas gerais, a dilatação do tempo é um fenômeno atrelado a uma mudança de escala nas medições de tempo. Mais especificamente, novamente sejam dois referenciais S e S^0 . Em $t = 0$ suas origens coincidem, mas para $t > 0$ se movem um com relação ao outro com $\vec{v} = v_x \hat{i}$ sendo a velocidade de S^0 vista por S, assim S^0 verá S com velocidade $\vec{v}^0 = -v_x \hat{i}^0$. Fato este que pode ser visto da seguinte maneira, tomando o sistema de coordenadas de S^0 , o referencial S se move da seguinte maneira

$$\frac{dx^0}{dt^0} = v_x \quad \text{ou} \quad \frac{dx^0}{dx^{00}} = \frac{v_x}{c} = \beta_x. \quad (3.1.29)$$

Em vista disso, para S^θ , S se moverá com a relação

$$dx^{\theta 1} = \beta_x dx^{\theta 0}. \quad (3.1.30)$$

Já S, se observará como não possuindo deslocamento em x, portanto

$$dx^1 = 0. \quad (3.1.31)$$

Assim, tomando as formas quadráticas ds^2 e $ds^{\theta 2}$, com ambos visando observar a variação do estado de S no tempo, teremos:

$$ds^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 = (dx^0)^2, \quad (3.1.32a)$$

$$ds^{\theta 2} = (dx^{\theta 0})^2 + (dx^{\theta 1})^2 = (dx^{\theta 0})^2 + \beta_x^2 (dx^{\theta 0})^2 = (1 + \beta_x^2)(dx^{\theta 0})^2. \quad (3.1.32b)$$

Utilizando do fato de que ds^2 é um escalar e assim deverá ser um invariante por mudança de coordenadas. Obtém-se a igualdade

$$dx^{\theta 0} = \gamma dx^0. \quad (3.1.33)$$

Este resultado fornece um dado importante. Como $\gamma \geq 1$, o fator de Lorentz fará com que a medida de tempo no referencial S^θ seja superior ou igual a medida de tempo realizada pelo referencial S, significando que a passagem de tempo em S será reduzida tanto quanto maior for a velocidade do referencial S com relação S^θ .

O detalhe da construção desse resultado foi o fato de que quem observou o movimento foi S^θ e a informação da observação da movimentação de S com relação a S^θ foi introduzida através de (3.1.29). Caso a mesma análise fosse feita, usando agora que $dx^1/dx^0 = \beta$, como sendo a velocidade de S^θ vista por S, o resultado seria agora que $dx^0 = \gamma dx^{\theta 0}$. Tudo depende de qual referencial é usado para observar o movimento do outro.

Mas para que deixe de existir esta ambiguidade relativa a qual referencial deve-se tomar como estando em repouso, basta tomar que para haver uma comparação entre as medidas de tempo realizadas por cada referencial individualmente, os referenciais precisarão se reencontrar, mas para que isto ocorra, pelo menos um desses terá de sofrer uma aceleração para que retorne ao encontro do referencial. Desta maneira, quebra-se a simetria existente, e passa-se a ser possível tomar uma escolha sobre qual será o referencial dito inercial.

3.1.3 Contração do Espaço

A análise deste fenômeno é semelhante a anterior. Para obter o resultado da dilatação do tempo foi utilizado o artifício de manter S na mesma posição do início ao fim da medição do tempo e aqui a noção será a mesma. Porém nesta etapa o objetivo é comparar medidas de comprimentos usando medições de tempo.

Para tal, S^θ se moverá com velocidade $\hat{v} = v_x \hat{i}$ com relação a S e carregará consigo uma barra repousada sobre o eixo \hat{i}^θ . Ambos os observadores, S e S^θ , irão medir o intervalo de tempo que levará para que a barra passe completamente pela origem de S.

Assim, do ponto de vista de S, a extremidade da barra irá se encontrar na origem de S no instante inicial $t_i = 0$, e o fim da barra estará na origem no instante final $t_f = t$, assim o intervalo de tempo total para a passagem da barra será $t = t$ e portanto o comprimento da barra, medida por S, será dada por $x^1 = v t = vt$.

Do ponto de vista de S^θ , a situação prosseguirá de modo análogo. Quando a extremidade inicial da barra passar sobre a origem de S, começará a contar um cronômetro em S^θ , de tal forma que o mesmo será parado no instante em que a extremidade final da barra passar pela origem de S. Assim S^θ medirá um intervalo de tempo igual a t^θ associado a passagem da barra pela origem de S, deste modo o comprimento da barra será dado por $x^\theta = v t^\theta$.

Tomando agora a equação que codifica o fenômeno da dilatação do tempo, (3.1.33). A substituição dos tempos aqui obtidos por S e S^θ resultará em

$$x^\theta = \frac{1}{\gamma} x^1, \quad (3.1.34)$$

ou na forma diferencial:

$$dx^\theta = \frac{1}{\gamma} dx^1. \quad (3.1.35)$$

Como $\gamma \geq 1$, esse resultado exprime que do ponto de vista de S^θ objetos que acompanhem S terão seus comprimentos reduzidos.

3.1.4 Soma de Velocidades

A soma de velocidades talvez seja a propriedade mais importante a se analisar, porque justamente o que motivou o desenvolvimento de um novo conjunto de transformações que mantivesse a velocidade da luz como um invariante foi de fato a incongruência entre esse novo conceito e a soma de velocidades galileana. Além de que após obtidas novas leis de transformação entre referenciais, somente a partir de uma expressão de soma de velocidades se tornará possível construir uma teoria cinemática.

Assim, novamente será usado o mesmo estratagema. Tome dois referenciais S e S^θ de tal forma que S^θ terá uma velocidade, $\vec{v} = v_x \hat{i}$, relativa a S. Neste cenário, suponha a existência de uma partícula P com velocidade, $\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$, com respeito a S. Deste modo, a pergunta natural é: qual será a velocidade de P com respeito a S^θ ?

Do ponto de vista de S^θ , P possuirá uma velocidade \vec{V}^θ . Analisando primeiro a componente x ,

assim na forma diferencial, tem-se

$$V_x^\theta = \frac{dx^\theta}{dt^\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{V_x^\theta}{c} = \frac{dx^\theta}{dx^{0\theta}}. \quad (3.1.36)$$

Observando agora esta expressão do ponto de limite de funções

$$\frac{dx^\theta}{dx^{0\theta}} = \lim_{x^{0\theta} \rightarrow 0} \frac{x^\theta}{x^{0\theta}}. \quad (3.1.37)$$

A substituição das transformações de Lorentz obtidas em (3.1.23) resulta em

$$\frac{dx^\theta}{dx^{0\theta}} = \lim_{x^{0\theta} \rightarrow 0} \frac{x^1 - \beta x^0}{x^0 - \beta x^1}, \quad (3.1.38)$$

fazendo ressalvas para um ponto importante: houve uma mudança no parâmetro da operação de limite, mas isto só é possível pois a convergência $x^{0\theta} \rightarrow 0$ implica em $x^0 \rightarrow 0$. Este resultado pode ser obtido através da observação de que a velocidade V_x já é conhecida, e seu valor é $V_x = c x^1 / x^0$. Concomitantemente, ao tomar a transformação de Lorentz para a componente $x^{0\theta}$, e introduzindo que $x^1 = x^0 V_x / c$, obtém-se

$$x^{0\theta} = \gamma(x^0 - \beta x^1) = \gamma(x^0 - \beta \frac{x^0 V_x}{c}) = \gamma(1 - \beta \frac{V_x}{c}) x^0. \quad (3.1.39)$$

Esta relação fornece que $x^{0\theta}$ e x^0 se relacionam de maneira afim. Esta relação seria invalidada caso o coeficiente $(1 - \beta V_x / c)$ se anule ou venha a divergir. Para que se anule, V_x teria de assumir o valor de $c / \beta = c^2 / v$, sendo assim mais rápido que a luz, mas isto não é possível. Já para o caso de $(1 - \beta V_x / c)$ divergir, seria necessário que V_x divergisse, o que também é uma impossibilidade. Consequentemente, $x^{0\theta} \rightarrow 0$ implica em $x^0 \rightarrow 0$.

Prosseguindo, a fatoração de (3.1.38) resulta em

$$\frac{dx^\theta}{dx^{0\theta}} = \lim_{x^{0\theta} \rightarrow 0} \frac{x^1 / x^0 - \beta}{1 - \beta x^1 / x^0}. \quad (3.1.40)$$

Finalmente, aplicando o limite e introduzindo (3.1.36)

$$\frac{V_x^\theta}{c} = \frac{dx^\theta}{dx^{0\theta}} = \frac{V_x / c - \beta}{1 - \beta V_x / c} = \frac{1 - V_x / v}{1 - \beta V_x / c}. \quad (3.1.41)$$

Portanto

$$V_x^\theta = \frac{V_x - v}{1 - \beta V_x / c}. \quad (3.1.42)$$

Aplicando o raciocínio análogo é possível obter as demais componentes y e z . Por tanto, tem-se, ao avaliar a componente V_y , o seguinte

$$\frac{V_y^\theta}{c} = \frac{dx^{\theta 2}}{dx^{0\theta}} = \lim_{x^{0\theta} \rightarrow 0} \frac{x^{\theta 2}}{x^{0\theta}} = \lim_{x^{0\theta} \rightarrow 0} \frac{x^2}{\gamma(x^0 - \beta x^1)} = \lim_{x^{0\theta} \rightarrow 0} \frac{x^2 / x^0}{\gamma(1 - \beta x^1 / x^0)}, \quad (3.1.43)$$

dessa maneira

$$V_y^\theta = \frac{V_y}{\gamma(1 - vV_x/c^2)}. \quad (3.1.44)$$

Os exatos mesmos cálculos levam ao cálculo da componente z

$$V_z^\theta = \frac{V_z}{\gamma(1 - vV_x/c^2)}. \quad (3.1.45)$$

Destes resultados é possível perceber que, apesar de o movimento relativo entre os referenciais ser dado no eixo x , todas as componentes do vetor velocidade serão transformadas pelo fato de que todas dependem da transformação da transformação de Lorentz do fator dx^0 .

3.1.5 O grupo de Lorentz $O(1,3)$ e o grupo $SO(1,3)$

Estudar o conjunto de transformações, previamente obtidos, do ponto de vista da teoria de grupos é uma outra análise bastante frutífera que pode ser feita. Portanto o primeiro passo desta investigação se dá em buscar comprovar que o conjunto das transformações de Lorentz dotado do produto matricial efetivamente forma um grupo. Assim deve-se demonstrar que para essas transformações valem as propriedades descritas pelas equações (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) e (2.1.4).

1. O conjunto das transformações de Lorentz é fechado:

Para demonstrar isso, deve-se tomar duas transformações de Lorentz sucessivas e demonstrar que o resultado desta composição é também uma transformação de Lorentz. Assim tome três referenciais S , S^θ e $S^{\theta\theta}$. De tal forma que S e S^θ estão conectados por uma transformação dada por:

$$x^{\theta 0} = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad (3.1.46a)$$

$$x^{\theta 1} = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad (3.1.46b)$$

$$x^{\theta 2} = x^2, \quad (3.1.46c)$$

$$x^{\theta 3} = x^3. \quad (3.1.46d)$$

Já S^θ e $S^{\theta\theta}$ estão conectados por transformações dadas por:

$$x^{\theta\theta 0} = \gamma^\theta(x^{\theta 0} - \beta^\theta x^{\theta 1}), \quad (3.1.47a)$$

$$x^{\theta\theta 1} = \gamma^\theta(x^{\theta 1} - \beta^\theta x^{\theta 0}), \quad (3.1.47b)$$

$$x^{\theta\theta 2} = x^{\theta 2}, \quad (3.1.47c)$$

$$x^{03} = x^{03}. \quad (3.1.47d)$$

Ao compor as transformações (3.1.47) com as transformações (3.1.46) é possível obter

$$x^{00} = \gamma^0 \gamma (1 + \beta^0 \beta) \left[x^0 \quad \frac{\beta^0 + \beta}{1 + \beta^0 \beta} x^1 \right] = \gamma^{00} (x^{00} \quad \beta^{00} x^{01}), \quad (3.1.48a)$$

$$x^{01} = \gamma^0 \gamma (1 + \beta^0 \beta) \left[x^1 \quad \frac{\beta^0 + \beta}{1 + \beta^0 \beta} x^0 \right] = \gamma^{00} (x^{01} \quad \beta^{00} x^{00}), \quad (3.1.48b)$$

$$x^{02} = x^{02} = x^2, \quad (3.1.48c)$$

$$x^{03} = x^{03} = x^3. \quad (3.1.48d)$$

Após as identificações de $\gamma^{00} = \gamma^0 \gamma (1 + \beta^0 \beta)$ e $\beta^{00} = (\beta^0 + \beta) / (1 + \beta^0 \beta)$, as equações (3.1.48) revelam que a composição destas transformações é também uma transformação de Lorentz, portanto vale a propriedade de fechamento.

2. A composição das transformações de Lorentz é associativa:

Para a demonstração dessa propriedade, a lógica se dá através da argumentação de que a computação de transformações de Lorentz se dá pelo produto matricial, mas como o produto matricial é associativo, tem-se então que a composição transformações de Lorentz também será. Assim para transformações de Lorentz Λ_1 , Λ_2 e Λ_3 , ocorre que

$$(\Lambda_1 \Lambda_2) \Lambda_3 = \Lambda_1 (\Lambda_2 \Lambda_3). \quad (3.1.49)$$

De um ponto de vista físico, a mesma aferição poderia ser feita, ao levar em conta que nenhuma mudança na descrição dos eventos da cinemática parece ocorrer ao mudar a ordem de apreciação das transformações.

3. Existe no conjunto das transformações de Lorentz o elemento neutro:

A transformação de Lorentz que relaciona um referencial S a si mesmo terá o parâmetro $\beta = 0$ e conseqüentemente a matriz que a desempenha é a identidade, desta forma comprova a existência do elemento neutro no conjunto das transformações de Lorentz.

4. Para toda transformação de Lorentz existirá uma inversa:

Dá análise feita em (3.1.10), vem a tona o fato de que matrizes as quais efetuam transformações de Lorentz devem satisfazer ${}^T \eta = \eta$, e portanto tem seu determinante sendo +1 ou -1. Pelo estudo da álgebra linear é possível obter que matrizes inversíveis, ou não singulares, são aquelas cujo determinante é diferente de zero. Demonstrando assim a existência de que para cada transformação de

Lorentz haverá uma inversa.

De maneira explícita, é possível obter Λ^{-1} em função de Λ , basta observar que dada a existência de Λ^{-1} se torna possível o produto desta à esquerda de $\Lambda^T \eta = \eta$, obtendo então

$$\Lambda^T \eta = \eta \Lambda^{-1}, \quad (3.1.50)$$

em seguida, tomando-se o produto à direita por η , segue-se que

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta. \quad (3.1.51)$$

Os estudos realizados até agora foram centrados em encontrar transformações que envolvessem as coordenadas temporais e espaciais em simultâneo e que preservassem a forma quadrática (3.1.3). Mas um fato é o de que além destas transformações também existem outras transformações que preservam (3.1.3). Naturalmente rotações não influenciam na componente temporal e como já é sabido elas preservam o módulo de vetores, portanto deverão preservar também (3.1.3). Assim as matrizes que desempenham rotações ao redor dos eixos \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} são:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix}, \quad (3.1.52a)$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_2) & 0 & \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) \end{bmatrix}, \quad (3.1.52b)$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.52c)$$

Finalizada a busca por transformações contínuas que preservem (3.1.3), dá-se origem agora uma busca por informações acerca da conectividade do grupo de Lorentz. Assim, analisando uma característica importante dos elementos do grupo de Lorentz: seus determinantes podem ser ± 1 . Deste fato se obtém que deve haver uma simetria discreta que leve uma transformação de determinante 1 a -1. Caso contrário, haveria uma forma de levar continuamente o determinante de 1 a -1, o que faria o determinante em algum instante se anular. Assim esta matriz não deverá possuir inversa e assim não pertence ao grupo. Assim surgirão três transformações que efetuarão papéis de reflexão de eixos do

espaço-tempo, são elas: reversão temporal, paridade e sua composição

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad TP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.53)$$

O conjunto formado pelas rotações, transformações de Lorentz e reflexões dotado do produto matricial forma um grupo, de nome grupo ortogonal em 1+3 dimensões, ou apenas $O(1,3)$. Este é um grupo de Lie, pois seus elementos são descritos por um conjunto de parâmetros contínuos, e as componentes de suas matrizes são funções diferenciáveis. Mas, apesar de ser um grupo de Lie, nem todos os seus elementos podem ser escritos como desvios contínuos do elemento identidade, ocorrendo assim um impedimento na execução da teoria elaborada na seção anterior. Este fato motiva a definição de um novo grupo relacionado a $O(1,3)$. Este novo grupo será semelhante a $O(1,3)$, mas este permitirá a obtenção de geradores e suas álgebras de Lie. O grupo que surge dessa busca chama-se $SO(1,3)$, também chamado de grupo de Lorentz ortócrono próprio. Seus elementos são as transformações de $O(1,3)$, que possuem simultaneamente a entrada $\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}$ e $\det(\) = 1$. Já para $SO(1,3)$ a situação é distinta, todos os seus elementos podem ser totalmente descritos por desvios contínuos da identidade assim um estudo do ponto de vista da teoria dos grupos de Lie conexos pode ser realizado. Dito isso, o uso da expansão dada em (2.3.9) fornecerá as bases para o reconhecimento de seus geradores. Assim, ao tomar a expansão da matriz que efetua uma rotação ao redor de \hat{z} , se obtém:

$$R_3(\theta_3) = \mathbb{1} + i\theta_3 J_3 + \dots \quad (3.1.54)$$

Na forma matricial obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + i\theta_z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots \quad (3.1.55)$$

Obtido assim o primeiro gerador de transformações de rotação, J_3 . A replicação do mesmo processo nas demais transformações do grupo $SO(1,3)$ leva à obtenção dos demais geradores de rotações e

transformações de Lorentz:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1.56)$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.57)$$

De posse destes objetos torna-se possível obter relações que serão de grande importância no desenvolvimento deste trabalho. Como obtido em (2.3.30), do cálculo direto dos comutadores envolvendo os presentes geradores é possível obter relações as quais recebem o nome de álgebra de Lie do grupo de Lorentz:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad (3.1.58a)$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad (3.1.58b)$$

$$[K_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}J_k. \quad (3.1.58c)$$

A importância da obtenção da álgebra de Lie dos geradores se pronuncia ao passo que torna-se necessário identificar formas de introduzir em novos espaços simetrias já conhecidas de outros. De tal forma que ao obter operadores que perfaçam transformações lineares em outros espaços, caso seja possível garantir que estes irão satisfazer a álgebra de Lie da simetria desejada, tem-se que assim foi obtida uma nova representação da atuação desta simetria.

3.1.6 O grupo de Poincaré

Até este ponto muito se foi estudado acerca das transformações de Lorentz, porém estas não são as únicas isometrias existentes para o espaço de Minkowski. Também devem ser inclusas as transformações de translação nas análises. Da introdução de translações surge o estudo do chamado grupo de Poincaré, ou grupo de Lorentz inhomogêneo. Uma transformação desse grupo se dá pela junção da atuação de uma transformação de Lorentz e em sequência translada-se o vetor resultante por um outro quadri-vetor cujas componentes servirão de parâmetros de translação. Assim uma transformação geral deste tipo, que una dois observadores S e S⁰, será dada pela seguinte relação

$$X^\theta = X + a \quad P(\quad, a)X. \quad (3.1.59)$$

Para demonstrar que de fato este será um grupo, novamente será necessário demonstrar que esse satisfaz as quatro propriedades de um grupo descritas pelas equações (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) e (2.1.4).

1. O conjunto das transformações de Poincaré é fechado:

Para esta demonstração deve-se tomar duas transformações, uma que una os referenciais S e S^θ e outra que una S^θ com $S^{\theta\theta}$. As quais são dadas por

$$X^\theta = {}_1X + a_1 \quad P({}_1, a_1)X, \quad (3.1.60a)$$

$$X^{\theta\theta} = {}_2X^\theta + a_2 \quad P({}_2, a_2)X^\theta, \quad (3.1.60b)$$

assim a composição destas será dada por:

$$X^{\theta\theta} = {}_2[{}_1X + a_1] + a_2 = P({}_2 \quad {}_1, \quad {}_2a_1 + a_2)X = P({}_3, a_3)X. \quad (3.1.61)$$

Através das identificações ${}_3 = {}_2 \quad {}_1$ e $a_3 = {}_2a_1 + a_2$ foi possível perceber que sim, a composição dessas duas transformações resulta em uma transformação também pertencente ao conjunto das transformações de Poincaré.

2. A composição das transformações de Poincaré é associativa:

Para esta etapa, deve-se demonstrar que para três transformações de Poincaré $P({}_1, a_1)$, $P({}_2, a_2)$ e $P({}_3, a_3)$ valerá:

$$(P({}_1, a_1)P({}_2, a_2))P({}_3, a_3) = P({}_1, a_1)(P({}_2, a_2)P({}_3, a_3)). \quad (3.1.62)$$

Para esta realizar esta tarefa a maneira mais simples é pela computação individual de ambos os lados da equação, e, ao desenvolver ambos, buscar chegar a um mesmo resultado. Assim. computando o termo entre parêntesis do lado esquerdo de (3.1.62), se obtém

$$P({}_1, a_1)P({}_2, a_2) = P({}_1 \quad {}_2, \quad {}_1a_2 + a_1) = P({}^\theta, a^\theta), \quad (3.1.63)$$

as identificações: ${}^\theta = {}_1 \quad {}_2$, $a^\theta = {}_1a_2 + a_1$ visam facilitar a próxima etapa que será realizar então o produto à direita por $P({}_3, a_3)$ que resulta em

$$P({}^\theta, a^\theta)P({}_3, a_3) = P({}^\theta \quad {}_3, \quad {}^\theta a_3 + a^\theta) = P({}_1 \quad {}_2 \quad {}_3, \quad {}_1 \quad {}_2a_3 + {}_1a_2 + a_3). \quad (3.1.64)$$

Fazendo então o desenvolvimento do termo entre parêntesis do lado direito de (3.1.62):

$$P({}_2, a_2)P({}_3, a_3) = P({}_2 \quad {}_3, \quad {}_2a_3 + a_2) = P({}^{\theta\theta}, a^{\theta\theta}). \quad (3.1.65)$$

Novamente, identificar ${}^{\theta\theta} = {}_2 \quad {}_3$ e $a^{\theta\theta} = {}_2a_3 + a_2$, visa facilitar a substituição no próximo passo. Tomando o produto da esquerda por $P({}_1, a_1)$ que provém

$$P({}_1, a_1)P({}^{\theta\theta}, a^{\theta\theta}) = P({}_1 \quad {}^{\theta\theta}, \quad {}_1a^{\theta\theta} + a_1) = P({}_1 \quad {}_2 \quad {}_3, \quad {}_1 \quad {}_2a_3 + {}_1a_2 + a_1). \quad (3.1.66)$$

Confrontando os resultados, percebe-se que os lados direitos das equações (3.1.64) e (3.1.66) são iguais, logo via transitividade a igualdade (3.1.62) é confirmada.

3. Existe no conjunto das transformações de Poincaré o elemento neutro:

O elemento neutro é dado pela transformação $P(\mathbb{1}, 0)$, pois já foi obtido que $\mathbb{1}$ pertence ao conjunto das transformações de Lorentz e é sempre possível realizar uma translação por um vetor nulo.

4. Para toda transformação de Poincaré existirá uma inversa:

Para esta análise, a investigação deverá ser pautada na seguinte noção: dada uma transformação $P(\lambda_1, a_1)$, $P(\lambda_2, a_2)$ será sua inversa caso venha a obedecer que

$$P(\lambda_1, a_1)P(\lambda_2, a_2) = P(\mathbb{1}, 0). \quad (3.1.67)$$

Das identificações obtidas em (3.1.61), pode-se observar que isto ocorrerá caso satisfaçam:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \mathbb{1}, \quad (3.1.68a)$$

$$\lambda_1 a_2 + a_1 = 0. \quad (3.1.68b)$$

Fato que pode ser obtido através das relações

$$\lambda_2 = (\lambda_1)^{-1} \quad (3.1.69a)$$

$$a_2 = -(\lambda_1)^{-1} a_1. \quad (3.1.69b)$$

Consequentemente, para todo $P(\lambda_1, a_1)$, existirá $P((\lambda_1)^{-1}, -(\lambda_1)^{-1} a_1)$ tal que a composição destas resulte no elemento neutro. Deste modo foi comprovado que efetivamente as transformações de Poincaré constituem um grupo.

3.2 RELATIVIDADE MUITO ESPECIAL

3.2.1 Introdução à VSR e aos grupos SIM(2) e HOM(2)

A Relatividade muito especial, VSR, é uma teoria que visa estudar a cinemática gerada por subgrupos do grupo de Lorentz que possuem a seguinte propriedade: nestes não deve estar contida a simetria de paridade. Deste modo apenas quatro são os subgrupos que se encaixam nesta requisição. Mas antes de os enunciar, devem-se primeiro ser apresentadas duas matrizes que serão fundamentais. São elas

$$T_1 = K_1 + J_2, \quad (3.2.1a)$$

$$T_2 = K_2 \quad J_1. \quad (3.2.1b)$$

Que em forma matricial são descritas por

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2.2a)$$

Doravante, os quatro subgrupos que fazem parte da VSR são:

Tabela 1 – Grupos da VSR e seus Geradores.

T(2)	T_1, T_2
E(2)	T_1, T_2, J_3
HOM(2)	T_1, T_2, K_3
SIM(2)	T_1, T_2, K_3, J_3

Fonte: Cohen e Glashow (2006)

Tabela 2 – Álgebra dos Geradores dos grupos da VSR.

$[T_1, T_2] = 0$	$[T_1, K_3] = iT_1$	$[T_1, J_3] = iT_2$
$[J_3, K_3] = 0$	$[T_2, K_3] = iT_2$	$[T_2, J_3] = iT_1$

Fonte: Ahluwalia e Horvath (2010)

Apesar de satisfazerem o requerimento de não incluir paridade, as transformações pertencentes aos primeiros dois grupos não mantém (3.1.3) invariante, ou seja, a velocidade da luz não é covariante pela ação destas transformações. Já para HOM(2) e SIM(2) a situação muda de figura, estes grupos não só preservam a invariância de c , mas também permitem a construção de fatores semelhantes aos da relatividade restrita, como uma lei de soma de velocidades e a possibilidade de emular os fenômenos da dilatação do tempo e contração do espaço.

Para encontrar como devem ser matrizes que desempenham as transformações da VSR, basta tomar a exponenciação dos geradores que resultará nas seguintes matrizes

$$e^{i\alpha T_1} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\alpha^2}{2} & \alpha & 0 & \frac{\alpha^2}{2} \\ \alpha & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\alpha^2}{2} & \alpha & 0 & 1 + \frac{\alpha^2}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.2.3a)$$

$$e^{i\beta T_2} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\beta^2}{2} & 0 & \beta & \frac{\beta^2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & \beta \\ \frac{\beta^2}{2} & 0 & \beta & 1 + \frac{\beta^2}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.2.3b)$$

$$e^{i\phi K_3} = \begin{bmatrix} \cosh \phi & 0 & 0 & \sinh \phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \phi & 0 & 0 & \cosh \phi \end{bmatrix}, \quad (3.2.3c)$$

$$e^{i\theta J_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2.3d)$$

Destas matrizes, apenas as três primeiras realizam transformações que perfazem um papel semelhante ao das transformações de Lorentz, haja vista que diferentemente da quarta matriz (rotação em torno de \hat{z}) as demais possuem componentes não nulas nas linhas e colunas referentes a componente temporal. Assim para T(2) e E(2) uma matriz que desempenha uma transformação tipo-Lorentz é dada por:

$$B = e^{i\alpha T_1} e^{i\beta T_2} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) & \alpha & \beta & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \\ \alpha & 1 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 1 & \beta \\ \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) & \alpha & \beta & 1 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \end{bmatrix}. \quad (3.2.4)$$

Mas essa não preserva a invariância da velocidade da luz. De fato, isso ocorre pois a igualdade $B^T \eta B = \eta$ não se mantém. Assim já se torna possível descartar T(2) e E(2) como possíveis grupos que dêem origem a uma cinemática com viabilidade física.

Já para HOM(2) e SIM(2), ao analisar uma transformação análoga a Lorentz dada por

$$V_{SR} = e^{i\alpha T_1} e^{i\beta T_2} e^{i\phi K_3}, \quad (3.2.5)$$

que na forma matricial fica:

$$V_{SR} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 + (\alpha^2 + \beta^2))) & \alpha & \beta & \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi}(1 + (\alpha^2 + \beta^2))) \\ \alpha e^{-\phi} & 1 & 0 & \alpha e^\phi \\ \beta e^{-\phi} & 0 & 1 & \beta e^\phi \\ \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi}(1 - (\alpha^2 + \beta^2))) & \alpha & \beta & \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 - (\alpha^2 + \beta^2))) \end{bmatrix}, \quad (3.2.6)$$

esta sim preserva $V_{SR}^T \eta V_{SR} = \eta$, assim a invariância de c é mantida. Um detalhe que vale salientar é o de que efetivamente as transformações análogas aos boosts para a VSR são as mesmas para ambos os grupos SIM(2) e HOM(2), pois esses só diferem no que tangem rotações em torno de \hat{z} .

A transformação inversa a V_{SR} é dada pela expressão

$${}^1_{VSR} = e^{-i\phi K_3} e^{-i\beta T_2} e^{-i\alpha T_1}, \quad (3.2.7)$$

que por computação direta fornece:

$${}^1_{VSR} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 + (\alpha^2 + \beta^2))) & \alpha e^{-\phi} & \beta e^{-\phi} & \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi}(1 - (\alpha^2 + \beta^2))) \\ \alpha & 1 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 1 & \beta \\ \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi}(1 + (\alpha^2 + \beta^2))) & \alpha e^{-\phi} & \beta e^{-\phi} & \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 - (\alpha^2 + \beta^2))) \end{bmatrix}. \quad (3.2.8)$$

Para obter quais valores que os índices α , β e ϕ tomarão, basta tomar uma atuação direta destes. Suponha a situação de uma transformação que transforme um quadri-vetor de momentum p de um referencial S para um referencial S', onde este momentum será descrito por um outro quadri-vetor p^β . Ou seja

$$p^\beta = {}^1_{VSR} p. \quad (3.2.9)$$

Ao supor que os referenciais S e S' diferem por uma velocidade arbitrária, a transformação será também arbitrária, de tal forma que ocorrerá:

$$\begin{bmatrix} p^{\beta 0} \\ p^{\beta 1} \\ p^{\beta 2} \\ p^{\beta 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 + (\alpha^2 + \beta^2))) & \alpha & \beta & \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi}(1 + (\alpha^2 + \beta^2))) \\ \alpha e^{-\phi} & 1 & 0 & \alpha e^{-\phi} \\ \beta e^{-\phi} & 0 & 1 & \beta e^{-\phi} \\ \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi}(1 - (\alpha^2 + \beta^2))) & \alpha & \beta & \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 - (\alpha^2 + \beta^2))) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{bmatrix}. \quad (3.2.10)$$

Que culmina nas seguintes equações:

$$p^{\beta 0} = \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 + \alpha^2 + \beta^2))p^0 + \alpha p^1 + \beta p^2 + \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi}(1 + \alpha^2 + \beta^2))p^3, \quad (3.2.11a)$$

$$p^{\beta 1} = \alpha e^{-\phi} p^0 + p^1 - \alpha e^{-\phi} p^3, \quad (3.2.11b)$$

$$p^{\beta 2} = \beta e^{-\phi} p^0 + p^2 + \beta e^{-\phi} p^3, \quad (3.2.11c)$$

$$p^{\beta 3} = \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi}(1 - \alpha^2 - \beta^2))p^0 + \alpha p^1 + \beta p^2 + \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 - \alpha^2 - \beta^2))p^3. \quad (3.2.11d)$$

O parâmetro ϕ é obtido através da subtração da equação (3.2.11a) pela (3.2.11d), já os parâmetros α e β podem ser obtidos através da substituição de ϕ nas equações (3.2.11b) e (3.2.11c). Ao seguir estes passos é possível obter:

$$\alpha = \frac{p^{\beta 1} - p^1}{p^{\beta 0} - p^3}, \quad (3.2.12a)$$

$$\beta = \frac{p^{02}}{p^{00}} \frac{p^2}{p^{\beta 3}}, \quad (3.2.12b)$$

$$\phi = \ln \left[\frac{p^0}{p^{00}} \frac{p^3}{p^{\beta 3}} \right]. \quad (3.2.12c)$$

Existe um caso em particular de uma transformação que será importante no decorrer da construção. Esta transformação leva um quadri-momentum em repouso $k = (mc, 0, 0, 0)$ em um quadri-momentum genérico, através de $p = L(p)k$. Os parâmetros para este caso se tornam:

$$\alpha = \frac{p^{01}}{p^{00}} \frac{p^1}{p^{\beta 3}}, \quad (3.2.13a)$$

$$\beta = \frac{p^{02}}{p^{00}} \frac{p^2}{p^{\beta 3}}, \quad (3.2.13b)$$

$$\phi = \ln \left[\frac{mc}{p^{00}} \frac{p^3}{p^{\beta 3}} \right]. \quad (3.2.13c)$$

Assim, a forma matricial da transformação é dada por:

$$L(p) = \begin{bmatrix} \frac{p^0}{mc} & \frac{p^1}{p^0} & \frac{p^2}{p^0} & \frac{m^2 c^2}{mc} \frac{p^0(p^0 \quad p^3)}{p^3} \\ \frac{p^1}{p^2} & 1 & 0 & \frac{p^1}{p^2} \\ \frac{p^2}{p^3} & 0 & 1 & \frac{p^2}{p^3} \\ \frac{p^3}{mc} & \frac{p^1}{p^0} & \frac{p^2}{p^0} & \frac{m^2 c^2}{mc} \frac{p^3(p^0 \quad p^3)}{p^3} \end{bmatrix}. \quad (3.2.14)$$

Uma outra possível descrição desta transformação pode ser obtida ao utilizar velocidades para compor a matriz, e não mais o do quadri-momentum. Para efetuar essa transição, basta tomar $p = \gamma_v m(c, v_x, v_y, v_z)$. Portanto, a nova descrição será dada por:

$$L(v) = \begin{bmatrix} \gamma_v & \frac{\beta_x}{1} & \frac{\beta_y}{1} & \frac{1}{\gamma_v} \frac{\gamma_v^2(1 \quad \beta_z)}{(1 \quad \beta_z)} \\ \gamma_v \beta_x & 1 & 0 & \gamma_v \beta_x \\ \gamma_v \beta_y & 0 & 1 & \gamma_v \beta_y \\ \gamma_v \beta_z & \frac{\beta_x}{1} & \frac{\beta_y}{1} & \frac{1}{\gamma_v} \frac{\gamma_v^2 \beta_z(1 \quad \beta_z)}{(1 \quad \beta_z)} \end{bmatrix}, \quad (3.2.15)$$

3.2.2 Dilatação do Tempo, Contração do Espaço e Soma de Velocidades

Suponha dois referenciais S e S⁰ conectados por uma transformação L(v). Assim o quadri-vetor posição um objeto que se move junto a S será descrito apenas por sua componente temporal, mas ao ser descrito por S⁰ este ponto será descrito por $x^0 = L(v)x$. Portanto a componente x^0 será dada por:

$$x^0 = \gamma x^0. \quad (3.2.16)$$

Encontrando assim a expressão de dilatação do tempo, que curiosamente é idêntica ao caso usual.

Já no que diz respeito a contração do espaço, a investigação se dará da seguinte forma: tomando dois referenciais S e S', com S' se movendo com velocidade $\vec{v} = v_x \hat{i}$ com relação a S. Junto ao referencial S' estará uma barra apoiada sobre o eixo x, para S' a barra possui comprimento $l^0 = x^0_f - x^0_i$. Assim uma medida do comprimento da barra efetuado por S será da forma $l = x^1_f - x^1_i$, de tal forma que o intervalo de tempo entre a medida da posição das extremidades da barra seja nulo, ou seja $x^0 = 0$. Assim, da transformação (3.2.15), com a simplificação $\beta_y = \beta_z = 0$, se obtém as seguintes equações:

$$x^0 = \gamma(x^1 - v_x t^1), \quad (3.2.17a)$$

$$x^2 = x^2, \quad (3.2.17b)$$

$$x^3 = \beta_x x^1 + x^3/\gamma. \quad (3.2.17c)$$

Como, para S', o prolongamento da barra se dá apenas em \hat{x} , ocorre que $x^2 = x^3 = 0$. Portanto, resolvendo o sistema de equações, encontra-se

$$x^1 = \frac{x^0}{\gamma}. \quad (3.2.18)$$

Passando à busca de uma relação de soma de velocidades, um olhar atento sobre as equações (3.1.48) revela que da composição de duas transformações de Lorentz usuais obtêm-se uma terceira transformação cujo parâmetro β^0 é reconhecido a partir de um termo que exatamente o obtido na dedução de soma de velocidades. A mesma lógica também aqui será empregada, da composição de duas transformações de SIM(2) será obtida uma terceira, cujo parâmetro de transformação fornecerá a expressão de soma de velocidades no cenário da relatividade muito especial. Assim tomando três referenciais S, S⁰ e S⁰⁰ de tal forma que S será tomado como estando em repouso, assim S⁰ está relacionado ao referencial S por uma transformação da forma $L(v)$. Já S⁰⁰ estará conectado a S⁰ por uma transformação geral do tipo (3.2.6), cujos parâmetros de transformação serão:

$$\alpha^0 = \frac{\gamma_{v^0} v_x^0}{\gamma_{v^0}(c - v_z^0)}, \quad (3.2.19a)$$

$$\beta^0 = \frac{\gamma_{v^0} v_y^0}{\gamma_{v^0}(c - v_z^0)}, \quad (3.2.19b)$$

$$\phi^0 = \ln \left[\frac{\gamma_v(c - v_3)}{\gamma_{v^0}(c - v_3^0)} \right], \quad (3.2.19c)$$

estes parâmetros diferem dos encontrados em (3.2.12) pelas substituições dadas por $p = \gamma_v m(c, v_x, v_y, v_z)$ e $p^0 = \gamma_{v^0} m(c, v_x^0, v_y^0, v_z^0)$. Com isso a transformação dada pela combinação ${}_{VSR}L(v)$ resulta em uma transformação que relaciona S a S⁰⁰. Mas como S foi tomado como sendo um referencial em repouso,

ocorre que S^{00} poderá ser conectado a S também por uma transformação da forma $L(v^{00})$. Desde modo, ao efetuar o produto destas transformações e realizar as identificações entre as entradas da primeira coluna de $L(v^{00})$ com a primeira coluna de ${}_{VSR}L(v)$, se torna possível encontrar:

$$\gamma_{v^{00}} = \frac{\gamma_v[\gamma_v(v_x v_x^{00} + v_y v_y^{00}) + (v_z - 1)(v_z^{00} - 1)\gamma_v^2 + v_z^{00}]}{\gamma_v(v_x - 1)}, \quad (3.2.20a)$$

$$v_x^{00} = \frac{\gamma_v(v_z - 1)[v_x^{00} - \gamma_v v_x(v_z^{00} - 1)]}{\gamma_v(v_x v_x^{00} + v_y v_y^{00}) + \gamma_v^2(v_z - 1)(v_z^{00} - 1) + v_z^{00}}, \quad (3.2.20b)$$

$$v_y^{00} = \frac{\gamma_v(v_z - 1)[v_y^{00} - \gamma_v v_y(v_z^{00} - 1)]}{\gamma_v(v_x v_x^{00} + v_y v_y^{00}) + \gamma_v^2(v_z - 1)(v_z^{00} - 1) + v_z^{00}}, \quad (3.2.20c)$$

$$v_z^{00} = \frac{\gamma(v)(v_x v_x^{00} - v_y v_y^{00}) + \gamma_v^2 v_z(v_z - 1)(v_z^{00} - 1) + v_z^{00}}{\gamma_v(v_x v_x^{00} + v_y v_y^{00}) + \gamma_v^2(v_z - 1)(v_z^{00} - 1) + v_z^{00}}. \quad (3.2.20d)$$

3.2.3 Os grupos ISIM(2) e IHOM(2)

Da introdução de transformações de translação espaço-temporais no contexto do grupo de Lorentz surge o estudo do grupo de Lorentz inhomogêneo, ou grupo de Poincaré. E assim como Poincaré está para Lorentz, vão haver também grupos inhomogêneos no contexto da VSR. A discussão até aqui feita se restringiu à parte homogênea das transformações, porém translações podem também ser atuadas em simultâneo com transformações de SIM(2) e HOM(2), formando assim dois conjuntos de transformações que serão chamados de SIM(2) e HOM(2) inhomogêneos, ou simplesmente ISIM(2) e IHOM(2). Estes grupos possuem uma função análoga ao grupo de Poincaré de tal forma que a demonstração de que ISIM(2) e IHOM(2) são efetivamente grupos é idêntica a o que foi feito para Poincaré.

4 MECÂNICA QUÂNTICA

O outro pilar para a construção de uma teoria quântica de campos é mecânica quântica. Assim sendo, este capítulo será dedicado a fornecer os fundamentos necessários para o prosseguimento. De tal modo que um devido aprofundamento mais rebuscado pode ser obtido em Sakurai e Napolitano (2020)

Assim, três são os postulados da teoria quântica que se destacam quanto a relevância no desenvolver do presente trabalho.

1. *Todo estado quântico é completamente descrito por um raio. Onde raio é um conjunto funções de onda pertencentes a um espaço de Hilbert, conjunto este no qual seus elementos diferem apenas por uma fase.*
2. *A todo observável clássico corresponderá um operador que atua no espaço de Hilbert, o qual será linear, ou anti-linear, e hermitiano.*
3. *Toda medida física assumirá um dos valores pertencentes ao espectro de um operador que atua no espaço e o valor esperado de uma medida desse observável, para um estado normalizado, será dada pelo produto interno do estado com o resultante do produto do operador atuando sobre o estado inicialmente tratado.*

4.1 ESTADOS, O ESPAÇO DE HILBERT E O PRODUTO INTERNO

Desde o princípio dos postulados, a noção de espaço de Hilbert tem sido necessária, assim:

Espaço de Hilbert é um espaço vetorial que além de possuir um produto interno também possui a propriedade de que toda sequência de Cauchy converge para algum elemento do próprio espaço vetorial. A essa propriedade de convergência é dado o nome de completeza.

Tomando o Espaço de Hilbert como plano de fundo, será possível definir mais alguns elementos da teoria, começando pela noção de estado. Um estado físico é um vetor deste espaço. O corpo deste espaço vetorial é o corpo dos complexos. A razão disto é a de que propriedades da matéria, como o spin, que terá mais ênfase com o prosseguir dos capítulos, não podem ser descritas tomando como corpo os números reais, exigindo assim da utilização de outros corpos, como complexos e quatérnions (ponto salientado no primeiro capítulo de Sakurai e Napolitano (2020)).

Agora, por conta da mudança de corpo, surge a necessidade de uma modificação em certos conceitos como o de produto interno, no qual as propriedades de simetria e de bilinearidade sofrerão uma modificação da seguinte forma:

$$(\phi, \psi) = (\psi, \phi) , \quad (4.1.1)$$

$$(\phi, \phi) = (\phi, \phi) . \quad (4.1.2)$$

Onde " " denota o conjugado complexo.

Esta modificação surge para que a norma seja um número real. Outro ponto que sofre uma modificação, e de consequência imediata da mudança anterior, é a bilinearidade, que para a entrada da direita será dada da forma usual:

$$(\phi, \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \alpha_1(\phi, \psi_1) + \alpha_2(\phi, \psi_2). \quad (4.1.3)$$

Porém por conta de (4.1.1) tem-se que, para a segunda entrada, (4.1.3) será da forma:

$$(\beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2, \psi) = \beta_1(\phi_1, \psi) + \beta_2(\phi_2, \psi). \quad (4.1.4)$$

Já a noção de norma positiva e não degenerada se mantém, sendo $(\psi, \psi) > 0$ para $\psi \neq 0$ e $(\psi, \psi) = 0$ para $\psi = 0$.

4.2 OPERADORES EM MECÂNICA QUÂNTICA

Operadores desempenham papel fundamental na mecânica quântica, pois, como evidenciado nos postulados, observáveis físicos, ou seja, grandezas mensuráveis experimentalmente, estão atreladas a existência de operadores que fornecem em seu espectro todos os possíveis valores a serem medidos em experimentos¹. Assim sendo, estes operadores precisam satisfazer alguns requisitos:

- Seu espectro tem de conter todos os possíveis valores mensuráveis experimentalmente;
- Medidas físicas têm de ser descritas por números reais.

Por conta disto seus auto-vetores (que tradicionalmente são chamados de auto-funções em espaços de Hilbert de dimensão infinita) fornecem uma base do espaço de Hilbert (exceto para o caso de degenerescências) e também estes operadores serão Hermitianos. Ou seja, um operador Q associado a uma medida física, terá a seguinte propriedade:

$$Q = Q^\dagger, \quad (4.2.1)$$

pois ao se tomar dois auto-estados de Q , ψ_α e $\psi_{\alpha'}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} (\psi_{\alpha'}, Q\psi_\alpha) &= (\psi_{\alpha'}, \alpha\psi_\alpha) = \alpha(\psi_{\alpha'}, \psi_\alpha), \\ (Q\psi_{\alpha'}, \psi_\alpha) &= (\alpha'\psi_{\alpha'}, \psi_\alpha) = \alpha'(\psi_{\alpha'}, \psi_\alpha). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Ao saber que Q se trata de um operador Hermitiano, tem-se que ao tomar a transformação adjunta de Q na segunda linha de (4.2.2) obtém-se $(Q\psi_{\alpha'}, \psi_\alpha) = (\psi_{\alpha'}, Q\psi_\alpha)$, que pela Hermiticidade retorna

¹ Aqui os referidos estados são estados puros. Para estados mistos é necessário realizar uma extensão dos postulados.

$(Q\psi_{\alpha^0}, \psi_{\alpha}) = (\psi_{\alpha^0}, Q\psi_{\alpha})$. Assim a subtração entre as duas equações de (4.2.2) resultará em:

$$(\alpha - \alpha^0)(\psi_{\alpha^0}, \psi_{\alpha}) = 0. \quad (4.2.3)$$

Duas informações podem ser obtidas da equação (4.2.3), a primeira é a de que ao tomar $\psi_{\alpha^0} = \psi_{\alpha}$ será obtido:

$$\alpha - \alpha^0 = 0, \quad (4.2.4)$$

portanto α tem de ser real.

A segunda consequência obtida é a de que para $\alpha \neq \alpha^0$, tem-se que o produto interno $(\psi_{\alpha^0}, \psi_{\alpha}) = 0$, ou seja ψ_{α} e ψ_{α^0} são ortogonais. Também é possível mostrar, no caso de não haver degenerescências, que seus auto-estados fornecerão uma base para espaços de Hilbert de dimensão finita (já em caso de degenerescência, procura-se um outro operador, Q^0 , com as propriedades: $[Q, Q^0] = 0$ e que não possua degenerescências de auto-valores nos mesmos casos de Q . Assim pode-se descrever um estado qualquer como combinação linear dos auto-estados com índices que denotem os dois auto-valores, $\psi_{\alpha,\beta}$, onde $Q^0\psi_{\alpha,\beta} = \beta\psi_{\alpha,\beta}$).

Outra propriedade fundamental é a de que:

Operadores de simetria em mecânica quântica são lineares e unitários ou anti-lineares e anti-unitários².

A razão disto será explorada mais a frente. Mas operadores lineares e anti-lineares são aqueles que obedecem a seguintes propriedades: Dado um operador Q , escalares α e β e dois estados ψ e ϕ , Q será chamado de linear, se:

$$Q(\alpha\psi + \beta\phi) = \alpha Q\psi + \beta Q\phi, \quad (4.2.5)$$

e Q será chamado de anti-linear, se:

$$Q(\alpha\psi + \beta\phi) = \alpha Q\psi + \beta Q\phi. \quad (4.2.6)$$

Já os operadores U e U^0 são ditos unitários e anti-unitários, respectivamente, em caso de ocorrer:

$$(U\psi, U\phi) = (\psi, \phi), \quad (4.2.7)$$

e

$$(U^0\psi, U^0\phi) = (\psi, \phi). \quad (4.2.8)$$

Da definição de operador unitário é possível obter que $U^y = U^{-1}$, pois a igualdade (4.2.7), dotada da noção de adjunta, implica em:

$$(U\psi, U\phi) = (\psi, U^y U\phi) = (\psi, \mathbb{1}\phi) = (\psi, \phi), \quad (4.2.9)$$

² Esta propriedade é demonstrada no chamado Teorema de Wigner de representações de simetria em mecânica quântica.

5 ÁLGEBRAS QUÂNTICAS

O decorrer desta seção se baseia de maneira bem enfática nos trabalhos do professor Steven Weinberg que culminaram em Weinberg (1995) e no trabalho em um artigo bastante elucidativo do professor Lee (2016).

5.1 REPRESENTAÇÃO DOS GRUPOS ISIM(2) E IHOM(2) EM MECÂNICA QUÂNTICA

A busca por representações dos grupos ISIM(2) e IHOM(2) em Mecânica Quântica significa buscar formas de obter operadores unitários que satisfaçam as leis de composição dos grupos. Mas para que se possa utilizar da teoria dos grupos de Lie conexos, deve-se em primeiro momento reduzir as variedades dos grupos ISIM(2) e IHOM(2) para suas partes conexas ISIM(2)₊ e IHOM(2)₊. Assim, após concluída a representação desta parte, a busca por representar estes grupos se resume em buscar representar a única simetria discreta pertencente a eles, completando então a busca. Como HOM(2) e SIM(2) diferem apenas no que diz respeito ao gerador de rotações J_3 , basta realizar a construção para ISIM(2) que IHOM(2) virá como caso particular na construção. Deste modo, dadas transformações de ISIM(2)₊, $P(\alpha_1, a_1)$ e $P(\alpha_2, a_2)$ que satisfaçam

$$P(\alpha_2, a_2)P(\alpha_1, a_1) = P(\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_2 a_1 + a_2) = P(\alpha_3, a_3), \quad (5.1.1)$$

os operadores que representarão estas transformações no espaço de Hilbert, $U(\alpha_1, a_1)U(\alpha_2, a_2)$, terão de satisfazer:

$$U(\alpha_2, a_2)U(\alpha_1, a_1) = U(\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_2 a_1 + a_2) = U(\alpha_3, a_3). \quad (5.1.2)$$

Por conta da restrição à parte conexa $SIM(2)_+ \cap$ Translações, este será um *Grupo de Lie Conexo*, assim é possível realizar a expansão em série de Taylor para transformações infinitesimais. Portanto, para uma transformação infinitesimal

$$U \approx \mathbb{1} + \omega, \quad (5.1.3)$$

ocorrerá que a transformação $U(\alpha, a)$ será dada por:

$$U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) \approx \mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_\rho P^\rho, \quad (5.1.4)$$

com ϵ_ρ um conjunto de parâmetros infinitesimais de translações espaço-temporais. Enquanto $\omega_{\rho\sigma}$ são os parâmetros das demais transformações, rotação e transformações análogas a Lorentz.

Até este ponto, esta transformação tem o exato mesmo formato de uma expansão para a representação de transformações infinitesimais do grupo de Poincaré no espaço de Hilbert. A forma de se introduzir uma forma de visualizar os geradores de SIM(2) neste contexto é se utilizar de duas relações entre os parâmetros $\omega_{\rho\sigma}$, de tal forma que a partir de $J^{\rho\sigma}$ seja possível obter os geradores de

transformações da VSR. Assim as relações entre os parâmetros são:

$$\begin{cases} \omega_{01} = \omega_{31} \\ \omega_{02} = \omega_{23} \end{cases} \quad (5.1.5)$$

de tal forma que a equação (5.1.4) aliada com (5.1.5) se torna:

$$U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) = \mathbb{1} + i \left(\omega_{01}(J^{01} + J^{13}) + \omega_{02}(J^{02} + J^{23}) + \omega_{03}J^{03} + \omega_{12}J^{12} \right) i\epsilon_\rho P^\rho, \quad (5.1.6)$$

e assim identificando os geradores $T_1 = J^{01} + J^{13}$, $T_2 = J^{02} + J^{23}$, $K_3 = J^{03}$ e $J_3 = J^{12}$, e os parâmetros $\omega_{01} = \alpha$, $\omega_{02} = \beta$, $\omega_{03} = \phi$ e $\omega_{12} = \theta$ obtém-se:

$$U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) = \mathbb{1} + i \left(\alpha T_1 + \beta T_2 + \phi J^{03} + \theta J^{12} \right) i\epsilon_\rho P^\rho. \quad (5.1.7)$$

Para a obtenção da álgebra de Lie de ISIM(2), a seguinte estratégia pode ser usada:

Dado um operador arbitrário A e uma transformação infinitesimal de simetria $U = \mathbb{1} + i\epsilon T$, o operador transformado A^θ será escrito da seguinte maneira

$$A^\theta = UAU^{-1}, \quad (5.1.8)$$

cujo desenvolvimento, retorna

$$UAU^{-1} = (\mathbb{1} + i\epsilon T)A(\mathbb{1} - i\epsilon T) = A + i\epsilon[T, A] + O(\epsilon^2). \quad (5.1.9)$$

Portanto, transformações de simetria agindo sobre operadores implicam em transformá-los segundo:

$$A^\theta = A + i\epsilon[T, A] + O(\epsilon^2). \quad (5.1.10)$$

Assim foi encontrado um caminho para obter a álgebra de Lie de ISIM(2)₊. Deste modo, tomando a conjugação $U(\cdot, a)U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\cdot, a)$ e a desenvolvendo de acordo com as leis de composição de transformações de ISIM(2)₊, chega-se na igualdade:

$$U(\cdot, a)U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\cdot, a) = U(\mathbb{1} + \omega^{-1}, \epsilon - \omega^{-1}a), \quad (5.1.11)$$

onde, à direita da equação, identifica-se ω^{-1} como um ω^θ , parâmetro de transformações da parte de SIM(2)₊ resultante nesta operação e $\epsilon - \omega^{-1}a$ como o parâmetro de translação resultante da composição.

Por questão de $J^{\mu\nu}$ já fornecer uma notação adequada para os cálculos a seguir, torna-se mais prático o desenvolvimento seguindo esta notação. Vale salientar que, apesar de nas próximas linhas a notação de geradores de SIM(2) não vir a ser usada, as transformações se mantêm elementos do

grupo $SIM(2)_+$, e ainda estão empregados os vínculos (5.1.5). Dito isso, ao substituir a equação (5.1.4) em (5.1.11) e atentando-se aos fatos de que $(\omega^{-1})_{\mu\nu} = \omega_{\nu}^{\rho} \omega_{\rho\sigma}^{\sigma}$ e $(\omega^{-1}a)_{\mu} = \omega_{\nu}^{\rho} \omega_{\rho\sigma}^{\sigma} a^{\nu}$, se obtém:

$$U(\omega, a) \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i \epsilon_{\rho} P^{\rho} \right) U^{-1}(\omega, a) = \mathbb{1} + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} \left(\omega_{\mu}^{\rho} \omega_{\nu}^{\sigma} [J^{\mu\nu} + 2a^{\nu} P^{\mu}] - i \epsilon_{\rho} \omega_{\mu}^{\rho} P^{\mu} \right). \quad (5.1.12)$$

Ao antissimetrizando o termo $a^{\nu} P^{\mu}$ e identificar os termos associados aos parâmetros $\omega_{\rho\sigma}$ e ϵ_{ρ} , obtêm-se

$$U(\omega, a) P^{\rho} U^{-1}(\omega, a) = \omega_{\mu}^{\rho} P^{\mu}, \quad (5.1.13a)$$

$$U(\omega, a) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\omega, a) = \omega_{\mu}^{\rho} \omega_{\nu}^{\sigma} (J^{\mu\nu} + a^{\nu} P^{\mu} - a^{\mu} P^{\nu}). \quad (5.1.13b)$$

Tomando agora $\omega = \mathbb{1} + \omega$ e $a = \epsilon$

$$U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) P^{\rho} U^{-1}(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) = P^{\rho} + \omega_{\mu}^{\rho} P^{\mu}, \quad (5.1.14a)$$

$$U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) = J^{\rho\sigma} + \omega_{\mu}^{\rho} J^{\mu\sigma} + \omega_{\mu}^{\sigma} J^{\rho\mu} - \epsilon^{\rho} P^{\sigma} + \epsilon^{\sigma} P^{\rho}. \quad (5.1.14b)$$

Mudando agora o foco e aplicando conceito obtido em (5.1.10) nas equações (5.1.13), tomando T por $\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu} P^{\mu}$, o que resulta em:

$$U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) P^{\rho} U^{-1}(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) = P^{\rho} + i \left[\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu} P^{\mu}, P^{\rho} \right], \quad (5.1.15a)$$

$$U(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) = J^{\rho\sigma} + i \left[\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu} P^{\mu}, J^{\rho\sigma} \right]. \quad (5.1.15b)$$

Igualando as equações (5.1.14) e (5.1.15)

$$i \left[\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu} P^{\mu}, P^{\rho} \right] = \omega_{\mu}^{\rho} P^{\mu}, \quad (5.1.16a)$$

$$i \left[\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu} P^{\mu}, J^{\rho\sigma} \right] = \omega_{\mu}^{\rho} J^{\mu\sigma} + \omega_{\mu}^{\sigma} J^{\rho\mu} - \epsilon^{\rho} P^{\sigma} + \epsilon^{\sigma} P^{\rho}. \quad (5.1.16b)$$

Aqui um ponto tem de ser avaliado com cautela, para ser possível comparar os termos que acompanham $\omega_{\rho\sigma}$ com os que acompanham ω_{μ}^{ρ} , primeiro será necessário abaixar o índice ρ , mas com apenas isso na comparação sobrar um fator $1/2$, o qual pode ser eliminado caso ω_{μ}^{ρ} seja antissimetrizado¹. Assim, tomando a antissimetrização e abaixamento do índice ρ , obtêm-se

$$\omega_{\mu}^{\rho} = \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} (\delta_{\mu}^{\alpha} \eta^{\rho\beta} - \delta_{\mu}^{\beta} \eta^{\alpha\rho}), \quad (5.1.17a)$$

¹ Valendo ressaltar que ω é antissimétrico, basta olhar para a equação $(\delta_{\mu}^{\rho} + \omega_{\mu}^{\rho}) \eta_{\rho\sigma} (\delta_{\nu}^{\sigma} + \omega_{\nu}^{\sigma}) = \eta_{\mu\nu}$ que resulta em $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$.

$$\omega_{\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(\delta_{\mu}^{\alpha}\eta^{\sigma\beta} - \delta_{\mu}^{\beta}\eta^{\alpha\sigma}). \quad (5.1.17b)$$

Que ao substituir em (5.1.16) e tomar $\alpha \neq \mu$ e $\beta \neq \nu$ retorna

$$i \left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu}P^{\mu}, P^{\rho} \right] = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(\eta^{\rho\nu}P^{\mu} - \eta^{\mu\rho}P^{\nu}), \quad (5.1.18a)$$

$$i \left[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu}P^{\mu}, J^{\rho\sigma} \right] = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(\eta^{\rho\nu}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + \eta^{\sigma\nu}J^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma}J^{\rho\nu}) - \epsilon_{\mu}\eta^{\rho\mu}P^{\sigma} + \epsilon_{\mu}\eta^{\sigma\mu}P^{\rho}. \quad (5.1.18b)$$

Através da comparação de termos atrelados aos mesmos parâmetros em (5.1.18a) é possível obter os comutadores que relacionam o operador $J^{\mu\nu}$ com P^{ρ} e P^{μ} com P^{ρ} . Analogamente, de (5.1.18b) é possível obter os comutadores de $J^{\mu\nu}$ com $J^{\rho\sigma}$ e P^{μ} com $J^{\rho\sigma}$. Notando que o comutador de P com J foi obtido duas vezes, apenas com índices modificados. Assim

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\rho\nu}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + \eta^{\sigma\nu}J^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma}J^{\rho\nu}, \quad (5.1.19a)$$

$$i[P^{\rho}, J^{\mu\nu}] = \eta^{\mu\rho}P^{\nu} - \eta^{\rho\nu}P^{\mu}, \quad (5.1.19b)$$

$$i[P^{\mu}, P^{\rho}] = 0. \quad (5.1.19c)$$

Caso estivessem sendo analisadas as relações obtidas para o caso usual, estas equações seria chamadas de álgebra de Lie dos geradores do grupo de Poincaré, ou álgebra de Lie quânticas dos geradores do grupo de Poincaré. Estas mesmas relações escritas sob uma notação que evidencia os geradores J_i e K_i , são elas:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_j, K_i] = i\epsilon_{ijk}J_k,$$

$$[K_i, H] = iP_i, \quad [J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k, \quad [K_i, P_j] = i\delta_{ij}H,$$

$$[J_i, H] = [P_i, H] = [H, H] = 0, \quad [P_i, P_j] = 0.$$

Assim obtendo um resultado exatamente igual ao caso usual de Poincaré. Como esperado, pois todo pertencente a $SIM(2)_+$ também é elemento do grupo de Lorentz e dada a notação tomada os resultados tem de ser iguais. Porém ao se colocar de maneira explícita os vínculos de (5.1.5) se torna possível obter relações entre os geradores T_1, T_2, K_3 e P^{μ} , completando a álgebra de Lie de $ISIM(2)_+$.

5.2 ESTADOS DE UMA PARTÍCULA

Ao iniciar a desenvolvimento das representações de simetrias da VSR sobre o espaço de Hilbert, vê-se logo de início um problema: os grupos de Lie $HOM(2)$ e $SIM(2)$ são grupos não compactos portanto não admitem a construção de representações unitárias de dimensão finita, tal qual ocorre com

Tabela 3 – Álgebra dos Geradores de ISIM(2) em uma Rep. Ordinária.

$[T_1, T_2] =$	0	$[T_1, K_3] =$	iT_1
$[J_3, K_3] =$	0	$[T_2, K_3] =$	iT_2
$[P_\mu, P_\nu] =$	0	$[T_1, J_3] =$	iT_2
		$[T_2, J_3] =$	iT_1
$[T_1, P_0] =$	iP_1	$[T_2, P_0] =$	iP_2
$[T_1, P_1] =$	$iP_0 \quad iP_3$	$[T_2, P_1] =$	0
$[T_1, P_2] =$	0	$[T_2, P_2] =$	$iP_0 \quad iP_3$
$[T_1, P_3] =$	iP_1	$[T_2, P_3] =$	iP_2
$[K_3, P_0] =$	iP_3	$[J_3, P_0] =$	0
$[K_3, P_1] =$	0	$[J_3, P_1] =$	iP_2
$[K_3, P_2] =$	0	$[J_3, P_2] =$	iP_1
$[K_3, P_3] =$	iP_0	$[J_3, P_3] =$	0

Fonte: Autor

o caso Lorentz. O mesmo verifica-se para transformações em VSR inhomogênea, e justamente pelos mesmos motivos, os parâmetros de transformações de boosts são não compactos, pois para um intervalo ser compacto ele precisa ser fechado e limitado e é sabido que todos os pontos de aderência no conjunto dos parâmetros de boost pertencem ao conjunto, porém o conjunto é ilimitado conseqüentemente é não-compacto. O mesmo acontece para os parâmetros de translações espaço-temporais. Assim sendo, o cenário se mostra favorável para a utilização do mesmo artifício usado na construção de representações do grupo de Poincaré no espaço de Hilbert: tomando uma possível base dada por auto-estados do operador P^μ ($P^\mu \psi_p = p^\mu \psi_p$), pois tomando a equação (3.1.61), uma transformação geral da VSR pode ser escrita da seguinte maneira:

$$U(\mathbb{1}, a) = U(\mathbb{1}, 0)U(\mathbb{1}, a), \quad (5.2.1)$$

e assim a representação do operador translação espaço-temporal será dada por:

$$U(\mathbb{1}, a)\psi_p = e^{ia_\mu P^\mu} \psi_p = e^{ia_\mu p^\mu} \psi_p, \quad (5.2.2)$$

obteve-se assim a atuação de P^μ sobre os estados. A escolha da notação para o estado ψ_p se dá pelo fato de que, até este ponto, os únicos auto-valores que descrevem a base de auto-estados são os auto-valores do operador momentum, mas que se mostrarão insuficientes para descrever uma base por completo.

Para prosseguir na construção vale notar que

$$P^\mu(U(\mathbb{1})\psi_p) = p^\mu U(\mathbb{1})\psi_p, \quad (5.2.3)$$

pois:

$$P^\mu(U(\Lambda)\psi_p) = U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)P^\mu(U(\Lambda)\psi_p), \quad (5.2.4)$$

onde $U(\Lambda, 0) = U(\Lambda)$.

Mas, como demonstrado em (5.1.13a):

$$U(\Lambda)PU^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu. \quad (5.2.5)$$

Em particular, tomando Λ^{-1} ao invés de

$$U(\Lambda^{-1})P^\mu U^{-1}(\Lambda^{-1}) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu P^\nu, \quad (5.2.6)$$

Como $U(\Lambda^{-1}) = U^{-1}(\Lambda)$ e $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda^\nu{}_\mu$, se obtém então:

$$U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu. \quad (5.2.7)$$

Utilizando (5.2.7) em (5.2.4) resulta em:

$$P^\mu(U(\Lambda)\psi_p) = U(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu \psi_p = U(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu \psi_p = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu (U(\Lambda)\psi_p), \quad (5.2.8)$$

identificando, assim, que $U(\Lambda)\psi_p \propto \psi_{\Lambda p}$.

O próximo problema se dá na construção das demais transformações da VSR. No caso usual de uma mecânica quântica invariante por Poincaré um fato experimental pode ser utilizado no presente ponto: os únicos observáveis de dimensão infinita detectados experimentalmente são o momentum e a posição, os quais são conectados por transformadas de Fourier. Assim, a representação das transformações de Lorentz devem ser descritas em termos de representações de dimensão finita, ou seja, representações matriciais, de tal forma que deve haver um rótulo discreto intrínseco aos estados. Porém para a VSR não há motivos experimentais para esse tipo de suposição e por conta disto se torna válido realizar o desenvolvimento de representações com dimensões finita e infinita para a parte homogênea das transformações. Mas por razões topológicas, que serão exploradas mais a frente, representações de dimensão infinita serão impedidas de existir, mas a título educacional a apresentação de transformações de dimensão infinita se mostra frutífera. Desse modo, as informações anteriores culminam nas seguintes expressões:

$$U(\Lambda)\psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma^\theta} C_{\sigma^\theta\sigma}(\Lambda, p)\psi_{\Lambda p, \sigma^\theta}, \quad (5.2.9a)$$

$$U(\Lambda)\psi(p, \sigma) = \int_{\sigma^\theta} C_\sigma(\Lambda, p, \sigma^\theta)\psi(\Lambda p, \sigma^\theta)d\sigma^\theta. \quad (5.2.9b)$$

Atenção à mudança de notação entre as equações (5.2.9a) e (5.2.9b), haja vista que no segundo caso σ^θ se trata não só de um parâmetro contínuo, mas também de uma variável de integração, por isto opta-se pela notação de σ^θ sendo um argumento de função.

O próximo passo a ser tratado agora é avaliar se a composição de transformações irá satisfazer as condições para ser uma representação. Ou seja, procura-se obter o seguinte:

$$U(\sigma_1)U(\sigma_2) = U(\sigma_1\sigma_2), \quad (5.2.10)$$

assim para transformações $U(\sigma_1)$ e $U(\sigma_2)$ a composição $U(\sigma_1)U(\sigma_2)$ será dada por:

$$U(\sigma_1)U(\sigma_2)\psi_{p,\sigma} = U(\sigma_1)\left(\sum_{\sigma^0} C_{\sigma^0\sigma}(\sigma_2, p)\psi_{\sigma_2 p, \sigma^0}\right). \quad (5.2.11)$$

O operador $U(\sigma_1)$ é linear, portanto comuta com as constantes $C_{\sigma^0\sigma}(\sigma_2)$. Fazendo com que a atuação de $U(\sigma_1)$ se dê por:

$$U(\sigma_1)U(\sigma_2)\psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma^{00}} \sum_{\sigma^0} C_{\sigma^{00}\sigma^0}(\sigma_1, \sigma_2 p) C_{\sigma^0\sigma}(\sigma_2, p) \psi_{\sigma_1 \sigma_2 p, \sigma^{00}}. \quad (5.2.12)$$

Agora, partindo da equação (5.2.9a), deve-se desenvolver a ação de $U(\sigma_1\sigma_2)$ sobre um estado, assim:

$$U(\sigma_1\sigma_2)\psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma^{00}} C_{\sigma^{00}\sigma}(\sigma_1\sigma_2, p) \psi_{\sigma_1 \sigma_2 p, \sigma^{00}}. \quad (5.2.13)$$

Igualar as equações (5.2.12) com (5.2.13) retorna:

$$C_{\sigma^{00}\sigma}(\sigma_1\sigma_2, p) = \sum_{\sigma^0} C_{\sigma^{00}\sigma^0}(\sigma_1, \sigma_2 p) C_{\sigma^0\sigma}(\sigma_2, p). \quad (5.2.14)$$

Aqui, um problema análogo ao caso Lorentz se evidencia, não foi obtida uma representação. Para que fosse obtido uma representação seria necessário obter um resultado diferente de (5.2.14), o qual deveria ser da forma:

$$C_{\sigma^{00}\sigma}(\sigma_1\sigma_2, p) = \sum_{\sigma^0} C_{\sigma^{00}\sigma^0}(\sigma_1, p) C_{\sigma^0\sigma}(\sigma_2, p), \quad (5.2.15)$$

assim sendo, novamente a solução será a mesma do caso Lorentz: tomar uso do método de representações induzidas. Para tal é necessário selecionar transformações pertencentes aos grupos da VSR que mantenham invariantes a norma do quadri-vetor momentum e o sinal da componente temporal do momentum. Assim, tome:

$$p^\mu = L(p)^\mu_\nu k^\nu, \quad (5.2.16)$$

nesta equação foi utilizada a transformação $L(p)^\mu_\nu$ definida em (3.2.14), portanto a partir de (5.2.16) tem-se também:

$$p_\mu = \eta_{\mu\gamma} L(p)^\gamma_\alpha k^\alpha. \quad (5.2.17)$$

Partindo de (5.2.16) e de (5.2.17) se obtém a norma a partir de:

$$p^\mu p_\mu = L(p)^\mu_\nu L(p)^\gamma_\alpha \eta_{\mu\gamma} k^\alpha k^\nu. \quad (5.2.18)$$

Como enunciado anteriormente em (3.2.6), as contrações dadas por $L(p)^\mu_\nu L(p)^\gamma_\alpha \eta_{\mu\gamma}$ se resumem em $\eta_{\nu\alpha}$, assim:

$$p^\mu p_\mu = \eta_{\alpha\nu} k^\alpha k^\nu = k^\alpha k_\alpha = m^2. \quad (5.2.19)$$

Deste modo é possível garantir duas informações:

1. $p^\mu p_\mu = k^\alpha k_\alpha = m^2$
2. O sinal de p^0 é o mesmo de k^0 (por conta da construção de $L(p)^0_0$)

Diante dos fatos anteriores, defina:

$$\bar{\psi}_{p,\sigma} = N(p) U(L(p)) \psi_{k,\sigma} = N(p) \sum_{\sigma^0} C_{\sigma^0\sigma}(L(p), k) \psi_{p,\sigma^0}. \quad (5.2.20)$$

Agora, uma transformação $U(\)$ agindo sobre o estado $\bar{\psi}_{p,\sigma}$ é da forma:

$$U(\) \bar{\psi}_{p,\sigma} = N(p) U(\) U(L(p)) \psi_{k,\sigma} = N(p) U(\ L(p)) \psi_{k,\sigma}. \quad (5.2.21)$$

Doravante, ao introduzir a identidade $L(\ p) L(\ p)^{-1} = \mathbb{1}$ em $U(\ L(p))$, obtém-se:

$$U(\ L(p)) = U(L(\ p) L(\ p)^{-1} L(p)) = U(L(\ p)) U(L(\ p)^{-1} L(p)). \quad (5.2.22)$$

Um detalhe que surge é o funcionamento da composição $L(\ p)^{-1} L(p)$ que é igual a $L(k)$, pois se $p = L(p)k$, então $k = L(\ p)^{-1} p$. Agora aplicando $L(\ p)^{-1} L(p)$ em um quadri-momentum em repouso k se obtém $L(\ p)^{-1} L(p)k = L(\ p)^{-1} p = k$. Portanto $L(\ p)^{-1} p = L(k)$. Esta transformação é de tamanha importância que se define:

$$W(\ , p) = L(\ p)^{-1} L(p). \quad (5.2.23)$$

Ao contrário do que possa parecer a transformação $L(k)$ não necessariamente é a matriz identidade, apesar de $k^\mu = L(k)^\mu_\nu k^\nu$ dar a entender que $L(k)^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$, mas na realidade desde o início foi suposto que k é um estado de repouso de alguma órbita das transformações da VSR, por exemplo: o estado de repouso da órbita das partículas massivas é $k^\mu = (\kappa, 0, 0, 0)$, e portanto as únicas exigências são as de que $L(k)^0_0 = 1$ e $L(k)^i_0 = 0 = L(k)^0_i$, já as demais componentes são livres. Estas transformações são de tal forma que o conjunto das que realizam isso formará um grupo, chamado de *Grupo de Isotropia*, ou *Little Group*. Para cada caso de quadri-momentum representativo de uma órbita distinta poderá levar a um grupo de isotropia diferente.

Novamente, uma estrutura análoga é obtida. Porém como estes são o grupos de isotropia associados aos grupos de simetria da VSR, ocorre que não serão os mesmos do caso Lorentz.

Assim, voltando ao ponto que gerou o interesse no grupo de isotropia, em (5.2.22). Substituir a

definição de uma transformação pertencente ao grupo de isotropia, resulta em:

$$U(L(p)) = U(L(p))U(W(p)). \quad (5.2.24)$$

Portanto caso seja possível construir representações para estas transformações, teremos construído uma representação das transformações da VSR sobre os estados $\bar{\psi}_{p,\sigma}$. Fazendo a verificação da possibilidade de $U(W(p))$ constituir uma representação do grupo de isotropia, deseja-se obter:

$$U(W_1)U(W_2) = U(W_1W_2), \quad (5.2.25)$$

onde W_i indica a transformação $W(p_i, p_i)$.

Uma atuação de uma transformação da forma $U(W(p))$ sobre um estado em repouso $\psi_{k,\sigma}$ será dada por:

$$U(W(p))\psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma^0} C_{\sigma^0\sigma}(W(p), k)\psi_{Wk,\sigma^0} = \sum_{\sigma^0} D_{\sigma^0\sigma}(W(p), k)\psi_{k,\sigma^0}. \quad (5.2.26)$$

Para explicitar ainda mais a diferença das transformações do grupo de isotropia nos estados, é comum adotar a notação das componentes destas transformações por $D_{\sigma^0\sigma}(W_2, k)$ e não pelo usual $C_{\sigma^0\sigma}(W_2, k)$.

Então, atuando o lado esquerdo de (5.2.25) no estado $\psi_{k,\sigma}$ resulta:

$$U(W_1)U(W_2)\psi_{k,\sigma} = U(W_1)\left(\sum_{\sigma^0} D_{\sigma^0\sigma}(W_2)\psi_{k,\sigma^0}\right) = \sum_{\sigma^0\sigma^0} D_{\sigma^0\sigma^0}(W_1)D_{\sigma^0\sigma}(W_2)\psi_{k,\sigma^0\sigma^0}, \quad (5.2.27)$$

apenas com o intuito não carregar a notação em demasia, a seguinte notação foi tomada:

$$D_{\sigma^0\sigma^0}(W(p_i, p_i), k) = D_{\sigma^0\sigma^0}(W_i). \quad (5.2.28)$$

Já o lado direito da equação (5.2.25) atuado sobre o mesmo estado $\psi_{k,\sigma}$ retornará com:

$$U(W_1W_2)\psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma^0\sigma^0} D_{\sigma^0\sigma^0}(W_1W_2)\psi_{k,\sigma^0\sigma^0}. \quad (5.2.29)$$

Comparando as equações (5.2.27) e (5.2.29) obtém-se:

$$\sum_{\sigma^0} D_{\sigma^0\sigma^0}(W_1, k)D_{\sigma^0\sigma}(W_2, k) = D_{\sigma^0\sigma}(W_1W_2, k), \quad (5.2.30)$$

assim obtendo a expressão da composição de duas transformações de uma representação. Portanto parte do trabalho esta concluída, basta observar como este resultado irá impactar na construção da representação das transformações da VSR sobre os estados $\bar{\psi}_{p,\sigma}$. Assim

$$U(p)\bar{\psi}_{p,\sigma} = N(p)U(L(p))\psi_{k,\sigma} = N(p)U(L(p))U(W(p))\psi_{k,\sigma}, \quad (5.2.31)$$

cujo desenvolvimento da expressão anterior se dá no uso de (5.2.26):

$$\begin{aligned} U(\mathbf{a})\bar{\psi}_{p,\sigma} &= N(p)U(L(\mathbf{p}))\sum_{\sigma^0} D_{\sigma^0\sigma}(W(\mathbf{a}, p), k)\psi_{k,\sigma^0} \\ &= N(p)\sum_{\sigma^0} D_{\sigma^0\sigma}(W(\mathbf{a}, p), k)U(L(\mathbf{p}))\psi_{k,\sigma^0}. \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

Pela definição de (5.2.20) pode-se construir:

$$\bar{\psi}_{p,\sigma} = N(\mathbf{p})U(L(\mathbf{p}))\psi_{k,\sigma} \quad U(L(\mathbf{p}))\psi_{k,\sigma} = \frac{\bar{\psi}_{p,\sigma}}{N(\mathbf{p})}, \quad (5.2.33)$$

portanto (5.2.32) se torna:

$$U(\mathbf{a})\bar{\psi}_{p,\sigma} = \frac{N(p)}{N(\mathbf{p})}\sum_{\sigma^0} D_{\sigma^0\sigma}(W(\mathbf{a}, p), k)\bar{\psi}_{p,\sigma}. \quad (5.2.34)$$

Assim, então, foi possível construir uma representação das transformações de SIM(2) e HOM(2) na base dos estados $\bar{\psi}_{p,\sigma}$, faltando apenas a determinação do quociente das constantes de normalização. Para concluir a transformação mais geral para os estados $\bar{\psi}_{p,\sigma}$ basta utilizar da equação (5.2.2) que fornece a representação de P , e assim tomar que uma transformação completa, $U(\mathbf{a}, a)$, pode ser decomposta no produto das partes homogênea e translação: $U(\mathbf{a}, 0)U(\mathbb{1}, \mathbf{a})$. Porém aqui surge um detalhe, como definir a aplicação de uma translação sobre a base $\bar{\psi}_{p,\sigma}$, pois, se até o momento, só foi definida sobre a base $\psi_{p,\sigma}$? Porém, como demonstrado em (5.2.8) temos que $P^\mu(L(p)\psi_{k,\sigma}) = L(p)^\mu k^\nu(L(p)\psi_{k,\sigma}) = p^\mu(L(p)\psi_{k,\sigma})$, portanto a atuação da translação tem a mesma forma nos estados $\bar{\psi}_{p,\sigma}$ sendo da forma $e^{i(\mathbf{a})_\mu P^\mu}$. Assim, seja a transformação geral da IVSR sobre o estado $\bar{\psi}_{p,\sigma}$, que pode ser escrita das seguintes duas maneiras:

$$U(\mathbf{a}, a)\bar{\psi}_{p,\sigma} = e^{i(\mathbf{a})_\mu P^\mu} \frac{N(p)}{N(\mathbf{p})} \sum_{\sigma^0} D_{\sigma^0\sigma}(W(\mathbf{a}, p), k)\bar{\psi}_{p,\sigma}, \quad (5.2.35)$$

$$U(\mathbf{a}, a)\bar{\psi}_{p,\sigma} = e^{ia_\mu(\mathbf{p})^\mu} \frac{N(p)}{N(\mathbf{p})} \sum_{\sigma^0} D_{\sigma^0\sigma}(W(\mathbf{a}, p), k)\bar{\psi}_{p,\sigma}. \quad (5.2.36)$$

5.3 O GRUPO DE ISOTROPIA E A CONSTANTE DE NORMALIZAÇÃO

Na seção anterior o problema de representar as transformações dos grupos ISIM(2) e IHOM(2) foi praticamente completo com a utilização do método das representações induzidas em órbitas para determinados quadri-momentos em repouso. Portanto obteve-se, através do *Little Group*, uma forma de descrever transformações gerais da VSR atuando em estados de uma partícula, a menos da identificação das constantes de normalização $N(p)$. Agora as últimas peças que faltam neste quebra cabeças são: encontrar, de maneira explícita, a constante de normalização e encontrar os coeficientes $D_{\sigma^0\sigma}(W(\mathbf{a}, p), k)$. O último destes pode ser obtido através da análise: as transformações W preservam os quadri-vetores de momento em suas órbitas de camada de massa. Assim, tomando transformações infinitesimais do grupo de isotropia sobre candidatos de momento para cada órbita, faz-

se possível realizar a identificação dos geradores destas transformações. Em vista disso, transformações infinitesimais do grupo de isotropia serão escritos da seguinte maneira:

$$W = \mathbb{1} + \omega. \quad (5.3.1)$$

Desta forma as informações dos geradores estão presentes em ω , assim como informações sobre os parâmetros da transformação. Agora, deve-se escolher a qual grupo de simetria a análise será feita, pois, na VSR, dois são os possíveis grupos de simetria a se tomar: SIM(2) e HOM(2) e nada garante que para cada um desses os mesmos grupos de isotropia surgirão nas análises. Após isso, basta tomar a atuação de W sobre os quadri momentos padrão.

Para SIM(2):

Começando para o caso massivo, tem-se $k^\mu = (mc, 0, 0, 0)$, assim:

$$W_{\nu}^{\mu} k^{\nu} = k^{\mu} \quad) \quad \delta_{\nu}^{\mu} k^{\nu} + \omega_{\nu}^{\mu} k^{\nu} = k^{\mu} \quad) \quad \omega_{\nu}^{\mu} k^{\nu} = 0 \quad) \quad \omega_{\mu\nu} k^{\nu} = 0. \quad (5.3.2)$$

Logo $\omega_{\mu 0} = 0$, portanto $\omega_{10} = \omega_{20} = \omega_{30} = 0$. Para que estes objetos forneçam transformações da VSR são necessários dois vínculos sobre os parâmetros: $\omega_{01} = \omega_{31}$ e $\omega_{02} = \omega_{23}$. Portanto $\omega_{31} = \omega_{23} = 0$, restando não-nulo apenas ω_{12} . Assim o único gerador de transformação presente no grupo de isotropia de SIM(2) no caso massivo é J_3 , portanto pode-se fazer o reconhecimento de que este se trata do grupo SO(2).

Tomando agora o caso não massivo, $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$:

$$\omega_{\nu}^{\mu} k^{\nu} = (\omega_0^{\mu} + \omega_3^{\mu}) \kappa = 0. \quad) \quad \omega_{\mu 0} = \omega_{\mu 3}. \quad (5.3.3)$$

Assim se obtêm, para o caso de seta do tempo apontando no sentido de t positivo, $\omega_{\mu 3} = \omega_{3\mu}$. Isso resulta em: $\omega_{00} = \omega_{03}, \omega_{10} = \omega_{13}, \omega_{20} = \omega_{23}$ e $\omega_{30} = \omega_{33}$. Das relações de vínculo entre parâmetros de transformação da VSR tem-se também $\omega_{01} = \omega_{31}$ e $\omega_{02} = \omega_{23}$. Portanto o grupo de isotropia associado a SIM(2) para o caso não-massivo é o grupo gerado por J_3 , este grupo é chamado de SO(2).

Para HOM(2):

A análise para HOM(2) é em essência a mesma, diferindo apenas no fato de não incluir o gerador de rotações J_3 . Portanto para os casos massivo e não-massivo, o grupo de isotropia é o grupo com apenas o elemento identidade. Esses são resultados importantes que, até onde sabemos, não haviam ainda sido reportados na literatura.

Agora, para investigar o valor da constante de normalização, é natural observar mais a fundo como a constante de normalização afeta o produto interno dos estados $\overline{\psi}_{p,\sigma}$, e assim investigar como a invariância das probabilidades afetam a forma das constantes de normalização. Deste modo, dados os

Tabela 4 – Grupos de isotropia na VSR.

SIM(2)	Massivo	SO(2)
	Não-massivo	SO(2)
HOM(2)	Massivo	{e}
	Não-massivo	{e}

Fonte: Autor

estados ortonormais ψ_{k^0, σ^0} e $\psi_{k, \sigma}$, tem-se:

$$(\psi_{k^0, \sigma^0}, \psi_{k, \sigma}) = \delta^3(\vec{k}^0 - \vec{k}) \delta_{\sigma^0 \sigma}. \quad (5.3.4)$$

Assim, para trazer a tona a presença dos estados $\bar{\psi}_{p, \sigma}$ será necessário introduzir transformações do tipo $U(L(p))$, portanto:

$$\begin{aligned} (\psi_{k^0, \sigma^0}, \psi_{k, \sigma}) &= (U^{-1}(L(p))U(L(p))\psi_{k^0, \sigma^0}, \psi_{k, \sigma}) \\ &= (U^\dagger(L(p))U(L(p))\psi_{k^0, \sigma^0}, \psi_{k, \sigma}) \\ &= (U(L(p))\psi_{k^0, \sigma^0}, U(L(p))\psi_{k, \sigma}). \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Além disto, tomando $k^0 = k^2 = m^2$, temos: $p = L(p)k$ e $p^0 = L(p)k^0$

$$U(L(p))\psi_{k, \sigma} = \frac{\bar{\psi}_{p, \sigma}}{N(p)}, \quad (5.3.6)$$

que leva a

$$\begin{aligned} (\psi_{k^0, \sigma^0}, \psi_{k, \sigma}) &= \left(\frac{\bar{\psi}_{p^0, \sigma^0}}{N(p^0)}, \frac{\bar{\psi}_{p, \sigma}}{N(p)} \right) \\ &= (N(p^0) N(p))^{-1} (\bar{\psi}_{p^0, \sigma^0}, \bar{\psi}_{p, \sigma}). \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Portanto

$$(\bar{\psi}_{p^0, \sigma^0}, \bar{\psi}_{p, \sigma}) = N(p) N(p^0) (\psi_{k^0, \sigma^0}, \psi_{k, \sigma}) = N(p^0) N(p) \delta^3(\vec{k}^0 - \vec{k}) \delta_{\sigma^0 \sigma}. \quad (5.3.8)$$

Agora, avaliando a mudança de base da função delta, o argumento atual é dado pelos momentos \vec{k} mas, como a dependência dos estados $\bar{\psi}_{p, \sigma}$ é dada em termos dos momentos p , requer-se como argumentos da delta os vetores \vec{p} . Assim a estratégia aqui é observar como se comporta uma mudança de base de deltas através de invariância por integração.

Sejam as seguintes integrais:

$$\int_1^1 \delta(x - x^0) dx = 1 = \int_1^1 \delta(y - y^0) dy. \quad (5.3.9)$$

Supondo uma mudança de base entre dx e dy dada por

$$dy = jJ(x, y)j dx, \quad (5.3.10)$$

tem-se:

$$\int_1^1 \delta(x - x^0) dx = \int_1^1 \delta(y - y^0) dy = \int_1^1 \delta(y - y^0) j J(x, y) j dx. \quad (5.3.11)$$

Agora, tomando apenas a primeira e a última integral de (5.3.11), temos

$$\begin{aligned} \int_1^1 \delta(x - x^0) dx &= \int_1^1 \delta(y - y^0) j J(x, y) j dx \\ &+ \\ \delta(x - x^0) &= j J(x, y) j \delta(y - y^0). \end{aligned}$$

Usando esta noção, é possível construir algo semelhante visando buscar uma invariância destas integrais também por transformações da VSR. Deste modo é essencial identificar como é o formato de uma integral VSR-invariante. Assim seja a integral:

$$\int d^4 p \delta(p^2 - m^2) (p^0) f(p^\mu). \quad (5.3.13)$$

Tomar $p^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu}$, com $\det \Lambda = 1$, resulta em $d^4 p^0 = d^4 p$. A função $\theta(p^0)$, conhecida como função theta de Heaviside, está presente com o intuito de integrar apenas em momentos de energia positiva. A função $f(p^\mu)$ é um escalar, portanto invariante por transformações da VSR. Assim, desenvolvendo a equação (5.3.13), temos:

$$\int d^4 p \delta(p^2 - m^2) (p^0) f(p^\mu) = \int d^4 p \delta((p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2) (p^0) f(p^\mu), \quad (5.3.14)$$

usando que:

$$\delta(x^2 - a^2) = \delta[(x - a)(x + a)] = \frac{1}{2a} \{ \delta(x - a) + \delta(x + a) \}, \quad (5.3.15)$$

e fazendo as substituições:

$$\begin{cases} x \mapsto p^0 \\ a \mapsto \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \end{cases}, \quad (5.3.16)$$

o lado direito da equação (5.3.14) se torna:

$$\int d^3 p \left[\int dp^0 \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \left\{ \delta(p^0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}) + \delta(p^0 + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}) \right\} (p^0) f(p^\mu) \right]. \quad (5.3.17)$$

Observação: $\delta(p^0 + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})$ só tem suporte em $p^0 = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} < 0$, e $\theta(p^0)$ só tem suporte em $p^0 > 0$, assim, a integral associada a esta delta se anula, sobrando apenas:

$$\int d^4 p \delta(p^2 - m^2) (p^0) f(p^\mu) = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \frac{f(\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \vec{p})}{2}. \quad (5.3.18)$$

Logo, definindo $f(\frac{\rho}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}, \vec{p}) = \bar{f}(\vec{p})$ que é um escalar, e portanto VSR-invariante, obteve-se que $\frac{d^3 p}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$ é, também, um invariante. Deste modo foi obtida a forma com a qual se dá a mudança de

base de d^3p , (forma esta que é a mesma obtida para o caso usual da relatividade restrita).

$$\frac{d^3p}{p^0} = \frac{d^3p^\theta}{p^{\theta 0}}. \quad (5.3.19)$$

Portanto, agora, ao tomar uma integral na parte espacial do momento da forma:

$$\int d^3p F(\vec{p}) \delta^3(\vec{p} - \vec{p}^\theta). \quad (5.3.20)$$

Nesta integral a função $F(\vec{p})$ é um escalar e portanto é invariante por transformações de coordenada. Assim multiplicando e dividindo o integrando por p^0 :

$$\int \frac{d^3p}{p^0} F(\vec{p}) [p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}^\theta)], \quad (5.3.21)$$

obtendo assim a mudança de coordenadas das funções delta:

$$p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}^\theta) = k^0 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}^\theta). \quad (5.3.22)$$

Substituindo este resultado no produto interno de $\bar{\psi}_{p^\theta, \sigma^\theta}$ com $\bar{\psi}_{p, \sigma}$, chega-se em:

$$(\bar{\psi}_{p^\theta, \sigma^\theta}, \bar{\psi}_{p, \sigma}) = N(p^\theta) N(p) (\psi_{k^\theta, \sigma^\theta}, \psi_{k, \sigma}) = N(p^\theta) N(p) \frac{p^0}{k^0} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}^\theta) \delta_{\sigma^\theta \sigma}. \quad (5.3.23)$$

Como a equação (5.3.23) só tem suporte em $\vec{p} = \vec{p}^\theta$

$$1 = N(p)^2 \frac{p^0}{k^0} \Rightarrow N(p) = \sqrt{\frac{k^0}{p^0}}. \quad (5.3.24)$$

Em particular

$$\begin{cases} N(p) = \sqrt{\frac{k^0}{p^0}} \\ N(p^\theta) = \sqrt{\frac{k^0}{(p^\theta)^0}} \end{cases} \Rightarrow \frac{N(p)}{N(p^\theta)} = \sqrt{\frac{(p^\theta)^0}{p^0}}, \quad (5.3.25)$$

e a equação (5.2.34) será:

$$U(p^\theta) \bar{\psi}_{p, \sigma} = \sqrt{\frac{(p^\theta)^0}{p^0}} \sum_{\sigma^\theta} D_{\sigma^\theta \sigma}(p^\theta, p) \bar{\psi}_{p^\theta, \sigma^\theta}. \quad (5.3.26)$$

Vale notar que, como visto, a forma das constantes de normalização são exatamente as mesmas das obtidas para a relatividade restrita. Porém no que tange aos grupos de isotropia, viu-se que estes sim diferem do caso usual.

5.4 MECÂNICA QUÂNTICA, REPRESENTAÇÕES PROJATIVAS E A VSR

Esta subseção inteira foi fortemente baseada na subseção 2.7 de Weinberg (1995), onde é realizado um estudo naquilo que tangencia a obtenção de representações projetivas do grupo de Poincaré através do estudo das cargas centrais da álgebra de Lie.

Ao lidar com transformações de simetria em mecânica quântica, deve-se sempre estar atento às mais diversas especificidades que surgem desta. Uma delas (introduzida anteriormente) é a de que, em mecânica quântica, estados físicos não são descritos simplesmente por uma função de onda, mas por um conjunto de funções de onda, as quais diferem entre si apenas por uma fase $e^{i\theta}$, e a este conjunto é dado o nome de raio. Assim sendo, transformações entre estados não simplesmente levam um estado, ψ , a outro, ψ^0 , pois nada formalmente a priori garante que uma transformação unitária, $U(T)$, fará $\psi \mapsto \psi^0 = U(T)\psi$ e não $\psi \mapsto e^{i\theta}\psi^0 = U(T)\psi$. Apenas pode-se afirmar que $U(T)$ levará um estado de um raio R em R^0 , onde $\psi \in R$ e $\psi^0, e^{i\theta}\psi^0 \in R^0$.

Assim, ao realizar a composição de duas transformações $U(T_1)$ e $U(T_2)$, teremos que $U(T_1)$ levará o raio R para um raio R^0 . De maneira semelhante temos que $U(T_2)$ aplicado em elementos do raio R^0 os levará ao raio R^{00} . Agora, se tomarmos a atuação da composição de T_1 com T_2 , $U(T_2T_1)$, esta transformação toma elementos do raio R para R^{00} , mas novamente, nada garante que a atuação da composição levará um estado ψ ao mesmo estado dado pela atuação sequencial de $U(T_1)$ e $U(T_2)$. Assim estes estados podem diferir por uma fase ϕ tal que:

$$U(T_2)U(T_1)\psi = e^{i\phi(T_2, T_1)}U(T_2T_1)\psi. \quad (5.4.1)$$

A notação não foi ao acaso, denotamos a fase como sendo dependente apenas das transformações T_1 e T_2 . Pois caso seja possível separar o estado ψ em uma combinação de estados linearmente independentes ψ_A e ψ_B , teremos:

$$\begin{aligned} e^{i\phi_{AB}}U(T_2T_1)(\psi_A + \psi_B) &= U(T_2)U(T_1)(\psi_A + \psi_B) \\ &= U(T_2)U(T_1)\psi_A + U(T_2)U(T_1)\psi_B \\ &= e^{i\phi_A}U(T_2T_1)\psi_A + e^{i\phi_B}U(T_2T_1)\psi_B. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Sabendo que estas transformações são elementos de um grupo e assim possuem inversa, podemos multiplicar, pela esquerda, sua inversa, e assim:

$$e^{i\phi_{AB}}(\psi_A + \psi_B) = e^{i\phi_A}\psi_A + e^{i\phi_B}\psi_B, \quad (5.4.3)$$

e como ψ_A e ψ_B são linearmente independentes

$$e^{i\phi_{AB}} = e^{i\phi_A} = e^{i\phi_B}. \quad (5.4.4)$$

Obtivemos assim que a fase de (5.4.1) não depende dos estados.

Voltando a (5.4.1), duas são as situações possíveis: se $\phi = 0$, ocorrerá então que $U(T)$ fornece uma representação ordinária do grupo de simetria em questão. Porém para fases genéricas, esta transformação $U(T)$ será uma representação projetiva, também chamada de representação a menos de uma fase. Tomando agora as transformações $U(T_1), U(T_2)$ e $U(T_3)$, como estas são representações de elementos de um grupo de simetria, então estas satisfazem a associatividade, portanto:

$$\begin{aligned} U(T_3)(U(T_2)U(T_1)) &= (U(T_3)U(T_2))U(T_1) \\ e^{i\phi(T_2, T_1)}U(T_3)U(T_2T_1) &= e^{i\phi(T_3, T_2)}U(T_3T_2)T_1 \\ e^{i\phi(T_2, T_1)}e^{i\phi(T_3, T_2T_1)}U(T_3T_2T_1) &= e^{i\phi(T_3, T_2)}e^{i\phi(T_3T_2, T_1)}U(T_3T_2T_1) \\ e^{i\phi(T_2, T_1)}e^{i\phi(T_3, T_2T_1)} &= e^{i\phi(T_3, T_2)}e^{i\phi(T_3T_2, T_1)} \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

$$\phi(T_2, T_1) + \phi(T_3, T_2T_1) = \phi(T_3, T_2) + \phi(T_3T_2, T_1).$$

Uma solução imediata é construir a fase da seguinte forma:

$$\phi(T_i, T_j) = \alpha(T_iT_j) - \alpha(T_i) - \alpha(T_j). \quad (5.4.6)$$

Nesses casos, a representação projetiva pode ser substituída por uma representação ordinária ao ser realizada a seguinte mudança

$$\mathcal{U}(T_1) = e^{i\alpha(T_1)}U(T_1), \quad (5.4.7)$$

pois

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(T_2)\mathcal{U}(T_1) &= e^{i\alpha(T_2)}U(T_2)e^{i\alpha(T_1)}U(T_1) \\ &= e^{i\alpha(T_2)}e^{i\alpha(T_1)}e^{i\phi(T_2, T_1)}U(T_2T_1) \\ &= e^{i\alpha(T_2) + i\alpha(T_1) + i\phi(T_2, T_1)}U(T_2T_1) \\ &= e^{i\alpha(T_2) + i\alpha(T_1) + i\phi(T_2, T_1)}U(T_2T_1) \\ &= e^{i\alpha(T_2T_1)}U(T_2T_1) \\ &= \mathcal{U}(T_2T_1). \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Representações com este tipo de lei de composição recebem o nome de cociclo, e, além destas, ainda existem outras possibilidades para a construção de $\phi(T_1, T_2)$, como por exemplo: tomar como base fases que satisfaçam (5.4.6) adicionada de um termo $\phi(T_1, T_2)$ ao lado direito da equação (5.4.6). Fases com esta forma são chamadas de 2-cociclo. Um 2-cociclo trivial é aquele que contém $\phi = 0$, e estes, também, podem ser eliminados por redefinição de $U(T)$. Assim, a procura por representações "intrinsecamente" projetivas se torna a busca por 2-cociclos não triviais, nos quais ϕ não pode ser eliminado por redefinições. Uma característica importante da dependência de ϕ com relação aos elementos do grupo é a de que:

$$U(T_1) = U(T_1)U(\mathbb{1}) = e^{i\phi(T_1, \mathbb{1})}U(T_1\mathbb{1}) = U(T_1), \quad (5.4.9)$$

portanto

$$\phi(T_1, \mathbb{1}) = \phi(\mathbb{1}, T_1) = 0. \quad (5.4.10)$$

O mesmo vale para a própria identidade

$$U(\mathbb{1})U(\mathbb{1}) = e^{i\phi(\mathbb{1},\mathbb{1})}U(\mathbb{1}\mathbb{1}) = U(\mathbb{1}). \quad (5.4.11)$$

Procurando entender como se dá a dependência de ϕ em relação aos elementos do grupo, há de se perpassar pelos seguintes pontos: ϕ é um funcional que toma valores reais a partir de elementos genéricos do grupo. Porém um ponto importante é o de que o grupo de estudo em questão é um *grupo de Lie*, assim seus elementos são inteiramente descritos por um conjunto de parâmetros θ^a . Em vista disso, uma forma de construir a dependência de ϕ com relação aos elementos do grupo, independentemente da escolha de representação, é tomar a dependência de ϕ diretamente em relação aos parâmetros do grupo. Tomando a expansão em série polinomial com relação aos parâmetros do grupo. Porém utilizando (5.4.10) obtém-se que a expansão não deverá ter nem termos constantes e nem termos de primeira ordem que dependam exclusivamente de parâmetros das transformações da primeira ou da segunda entradas da fase ϕ . Assim a expansão polinomial será:

$$\phi(T(\theta), T(\theta^\theta)) = f_{ab}\theta^a\theta^{b\theta} + \dots \quad (5.4.12)$$

Valendo-se da mesma ideia, ocorre também que

$$T(\theta)T(\theta^\theta) = T(f(\theta, \theta^\theta)). \quad (5.4.13)$$

Em uma representação projetiva tem-se que

$$U(T(\theta))U(T(\theta^\theta)) = e^{i\phi(T(\theta), T(\theta^\theta))}U(T(f(\theta, \theta^\theta))). \quad (5.4.14)$$

Sabendo que $f^a(\theta, \theta^\theta)$ deve satisfazer

$$f^a(\theta, \theta^\theta) = \theta^a + \theta^{a\theta} + f_{bc}^a\theta^b\theta^{c\theta} + \dots \quad (5.4.15)$$

e utilizando também as expressões

$$U(T(\theta)) = 1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c t_{bc} + \dots \quad (5.4.16)$$

e

$$e^{i\phi(T(\theta), T(\theta^\theta))} = 1 + i\phi \frac{\phi^2}{2} + \dots \quad (5.4.17)$$

Temos, substituindo as expressões anteriores em (5.4.14), que:

$$[t_b, t_c] = iC_{bc}^a t_a + iC_{bc} \mathbb{1}, \quad (5.4.18)$$

onde os coeficientes C_{bc} são dados por:

$$C_{bc} = f_{bc} + f_{cb}. \quad (5.4.19)$$

Ao inserirmos a fase na representação projetiva, apareceram mudanças nos comutadores. Estes coeficientes antissimétricos que surgiram são chamados de *Cargas Centrais*. O caminho a se tomar agora é o de investigar quais restrições podem ser introduzidas nestes coeficientes, para assim restringirmos os coeficientes de expansão da fase ϕ . O primeiro passo será observar que por termos uma álgebra de Lie, a identidade de Jacobi será satisfeita. A priori, sabemos que os geradores de transformações, T_1 e T_2 , já satisfazem a identidade de Jacobi na ausência de cargas centrais, e este fato será importante a seguir, pois na nova identidade de Jacobi, agora na presença de cargas centrais, teremos termos extras, relacionados com os coeficientes C_{ab} , mas haverão também os termos relacionados apenas com as constantes de estrutura, e estes se anularão no uso da primeira identidade de Jacobi. De tal forma que o decorrer destes cálculos resulta em

$$C_{bc}^a C_{ad}^e + C_{cd}^a C_{ab}^e + C_{db}^a C_{ac}^e = 0 \quad (5.4.20)$$

e também em

$$C_{bc}^a C_{ad} + C_{cd}^a C_{ab} + C_{db}^a C_{ac} = 0. \quad (5.4.21)$$

Uma possível solução para esta relação é tomar os coeficientes C_{ab} da forma

$$C_{ab} = C_{ab}^c \kappa_c, \quad (5.4.22)$$

com κ_c sendo dado por constantes reais. Este tipo de solução permite a supressão das cargas centrais através de uma redefinição dos geradores

$$t_a \rightarrow \tilde{t}_a = t_a + \kappa_a \quad (5.4.23)$$

e assim os novos geradores irão satisfazer a álgebra de Lie sem cargas centrais.

Não são todas as álgebras de Lie que permitem a construção de representações projetivas "intrínsecas", de tal forma que apenas algumas permitem a construção de uma representação projetiva que não se torna uma representação ordinária através de alguma redefinição de transformações. Tendo em vista estas discussões, pode-se então investigar a existência de representações projetivas através de um teorema fundamental. As fases de qualquer representação $U(T)$ de algum grupo podem ser tomadas como nulas caso duas condições sejam satisfeitas:

- a) Os geradores do grupo nesta representação podem ser redefinidos, de forma tal que todas as cargas centrais possam ser eliminadas da álgebra de Lie.
- b) O grupo é simplesmente conexo, ou seja, quaisquer dois elementos do grupo podem ser conectados por um caminho contínuo também pertencente ao grupo, e quaisquer dois destes caminhos podem ser continuamente deformados um no outro. (Outra maneira equivalente de expor esta ideia é através de dizer que todo caminho fechado na variedade do grupo pode ser deformada em um ponto.)

5.4.1 Álgebra

Passando agora à segunda parte da análise, devem ser investigadas como se comportam cargas centrais ao serem adicionadas nas álgebras de Lie dos grupos de simetria da VSR. Assim, as relações de comutação, dos geradores da ISIM(2), já com as cargas centrais, são:

Tabela 5 – Álgebra dos Geradores de ISIM(2) em uma Rep. Projetiva.

$[T_1, T_2] =$	iC_{T_1, T_2}	$[T_1, K_3] =$	$iT_1 + iC_{T_1, K_3}$
$[J_3, K_3] =$	iC_{J_3, K_3}	$[T_2, K_3] =$	$iT_2 + iC_{T_2, K_3}$
$[P_\mu, P_\nu] =$	iC_{P_μ, P_ν}	$[T_1, J_3] =$	$iT_2 + iC_{T_1, J_3}$
		$[T_2, J_3] =$	$iT_1 + iC_{T_2, J_3}$
$[T_1, P_0] =$	$iP_1 + iC_{T_1, P_0}$	$[T_2, P_0] =$	$iP_2 + iC_{T_2, P_0}$
$[T_1, P_1] =$	$iP_0 \quad iP_3 + iC_{T_1, P_1}$	$[T_2, P_1] =$	iC_{T_2, P_1}
$[T_1, P_2] =$	iC_{T_1, P_2}	$[T_2, P_2] =$	$iP_0 \quad iP_3 + iC_{T_2, P_2}$
$[T_1, P_3] =$	$iP_1 + iC_{T_1, P_3}$	$[T_2, P_3] =$	$iP_2 + iC_{T_2, P_3}$
$[K_3, P_0] =$	$iP_3 + iC_{K_3, P_0}$	$[J_3, P_0] =$	iC_{J_3, P_0}
$[K_3, P_1] =$	iC_{K_3, P_1}	$[J_3, P_1] =$	$iP_2 + iC_{J_3, P_1}$
$[K_3, P_2] =$	iC_{K_3, P_2}	$[J_3, P_2] =$	$iP_1 + iC_{J_3, P_2}$
$[K_3, P_3] =$	$iP_0 + iC_{K_3, P_3}$	$[J_3, P_3] =$	iC_{J_3, P_3}

Fonte: Autor

Ocorre também que estas cargas são antissimétricas nos índices, pois tomando geradores genéricos T_i , temos:

$$\begin{aligned} [T_i, T_j] &= iJ_{i,j}^k T_k + iC_{T_i, T_j}, \\ [T_j, T_i] &= iJ_{i,j}^k T_k + iC_{T_j, T_i}. \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

Somando as duas linhas na equação (5.4.24), obtém-se

$$C_{T_i, T_j} = -C_{T_j, T_i}. \quad (5.4.25)$$

O primeiro passo a se tomar neste ponto é o de procurar relações entre estas 23 constantes. Portanto se faz necessário procurar relações entre os comutadores, as quais podem ser encontradas nas identidades de Jacobi que podem ser construídas a partir dos geradores acima. Para SIM(2), vão haver apenas as seguintes quatro possíveis combinações de geradores, que fornecem equações linearmente independentes através de Jacobi: (T_1, T_2, K_3) , (T_1, T_2, J_3) , (T_1, K_3, J_3) e (T_2, K_3, J_3) . Assim as identidades de Jacobi fornecem:

1. (T_1, T_2, K_3)

$$\begin{aligned} [T_1, [T_2, K_3]] &= [T_1, iT_2 + iC_{T_2, K_3}] = i[T_1, T_2] = -C_{T_1, T_2}, \\ [K_3, [T_1, T_2]] &= i[K_3, C_{T_1, T_2}] = 0, \\ [T_2, [K_3, T_1]] &= i[T_2, T_1 + C_{T_1, K_3}] = -i[T_2, T_1] = C_{T_1, T_2}, \end{aligned}$$

$$[T_1, [T_2, K_3]] + [K_3, [T_1, T_2]] + [T_2, [K_3, T_1]] = 0,$$

portanto:

$$C_{T_1, T_2} = 0. \quad (5.4.26)$$

2. (T_1, T_2, J_3)

$$[T_1, [T_2, J_3]] = i[T_1, T_1 + C_{T_2, J_3}] = i[T_1, T_1] = 0,$$

$$[J_3, [T_1, T_2]] = i[J_3, C_{T_1, T_2}] = 0,$$

$$[T_2, [J_3, T_1]] = i[T_2, T_2 - C_{T_1, J_3}] = i[T_2, T_2] = 0.$$

Esta identidade não forneceu informação sobre cargas centrais.

3. (T_1, K_3, J_3)

$$[T_1, [K_3, J_3]] = i[T_1, C_{K_3, J_3}] = 0,$$

$$[J_3, [T_1, K_3]] = i[J_3, T_1 + C_{T_1, K_3}] = i[J_3, T_1] = T_2 + C_{T_1, J_3},$$

$$[K_3, [J_3, T_1]] = i[K_3, T_2 - C_{T_1, J_3}] = i[K_3, T_2] = T_2 + C_{T_2, K_3},$$

$$[T_1, [K_3, J_3]] + [J_3, [T_1, K_3]] + [K_3, [J_3, T_1]] = 0,$$

portanto obtém-se:

$$C_{T_1, J_3} = C_{T_2, K_3}. \quad (5.4.27)$$

4. (T_2, K_3, J_3)

$$[T_2, [K_3, J_3]] = i[T_2, C_{K_3, J_3}] = 0,$$

$$[J_3, [T_2, K_3]] = i[J_3, T_2 + C_{T_2, K_3}] = i[J_3, T_2] = T_1 + C_{T_2, J_3},$$

$$[K_3, [J_3, T_2]] = i[K_3, T_1 - C_{T_2, J_3}] = i[T_1, K_3] = T_1 + C_{T_1, K_3},$$

$$[T_2, [K_3, J_3]] + [J_3, [T_2, K_3]] + [K_3, [J_3, T_2]] = 0,$$

a última relação entre os geradores de $SIM(2)$ é:

$$C_{T_2, J_3} = C_{T_1, K_3}. \quad (5.4.28)$$

Utilizando as relações obtidas através das identidades de Jacobi, é possível reescrever as relações de comutação entre os geradores de $SIM(2)$ com cargas centrais.

Tabela 6 – Álgebra dos Geradores de $SIM(2)$ em uma Rep. Projetiva.

$[T_1, T_2] = 0$	$[T_1, K_3] = iT_1 + iC_{T_1, K_3}$	$[T_1, J_3] = iT_2 - iC_{T_2, K_3}$
$[J_3, K_3] = iC_{J_3, K_3}$	$[T_2, K_3] = iT_2 + iC_{T_2, K_3}$	$[T_2, J_3] = iT_1 + iC_{T_1, K_3}$

Fonte: Autor

Apenas uma das cargas centrais se anulou com Jacobi. Porém é possível remover mais cargas ao realizar uma redefinição dos geradores, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\bar{T}_1 &= T_1 + C_{T_1, K_3}, \\ \bar{T}_2 &= T_2 + C_{T_2, K_3}.\end{aligned}\tag{5.4.29}$$

Assim o novo cálculo dos comutadores será dado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}[\bar{T}_1, K_3] &= [T_1 + C_{T_1, K_3}, K_3] \\ &= [T_1, K_3] \\ &= iT_1 + iC_{T_1, K_3} \\ &= i(T_1 + C_{T_1, K_3}) \\ &= i\bar{T}_1.\end{aligned}\tag{5.4.30}$$

Efetuada os mesmos cálculos para os demais comutadores, obtém-se:

Tabela 7 – Álgebra dos Geradores redefinidos de SIM(2) em uma Rep. Projetiva.

$$\begin{array}{llll}[\bar{T}_1, \bar{T}_2] = & 0 & [\bar{T}_1, K_3] = & i\bar{T}_1 & [\bar{T}_1, J_3] = & i\bar{T}_2 \\ [J_3, K_3] = & iC_{J_3, K_3} & [\bar{T}_2, K_3] = & i\bar{T}_2 & [\bar{T}_2, J_3] = & i\bar{T}_1\end{array}$$

Fonte: Autor

Esta é praticamente a álgebra de Lie de SIM(2), exceto por $[J_3, K_3] = iC_{J_3, K_3}$. Esta carga central que permanece na álgebra não pode ser removida por uma redefinição de geradores dada pela soma do gerador com um elemento do centro da álgebra, pois não há termos, ao lado direito do comutador, que possam incorporar esta carga em sua redefinição, mas ainda não está claro, neste ponto, se essa carga sobrevive de fato, ou se pode ser removida de modo mais engenhoso.

Para HOM(2) a situação não é diferente. Esta álgebra, por não incluir o gerador de boost K_3 , não terá problemas com relação a carga central C_{J_3, K_3} , porém, em contrapartida, não conseguirá anular a carga central C_{T_1, T_2} , pois não poderá utilizar a relação de Jacobi entre os geradores T_1 , T_2 e K_3 , que é a relação que fornece a informação de que $C_{T_1, T_2} = 0$ em SIM(2). Vale ressaltar que esta impossibilidade de remoção de parte das cargas centrais, pela redefinição dos geradores, pode indicar que representações projetivas sobrevivam nesses casos.

Agora, deve-se observar as relações que podem ser obtidas através de identidades de Jacobi para as álgebras de Lie de SIM(2) e HOM(2) inomogêneas, onde deve-se incluir os geradores de translações espaço-temporais P^μ .

5.4.2 Topologia

O estudo da topologia de ISIM(2) e de IHOM(2) se dará de modo parecido ao estudo da topologia do grupo de Poincaré, prosseguindo para a construção da representação das transformações de SIM(2)

e $\text{HOM}(2)$ no espaço das matrizes 2×2 complexas. Nesta representação, os quadri-vetores do espaço de Minkowski são representados por:

$$v = V^\mu \sigma_\mu = \begin{bmatrix} V^0 + V^3 & V^1 & iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 & V^3 \end{bmatrix}. \quad (5.4.31)$$

Aqui, σ_i são as matrizes de Pauli, e $\sigma_0 = \mathbb{1}_{2 \times 2}$. Assim foi estabelecida uma relação entre matrizes hermitianas e quadri-vetores V^μ . Além disto, tem-se também que $\text{Det}(v)$ tem uma característica importante:

$$\text{Det}(v) = (V^0)^2 - (V^1)^2 - (V^2)^2 - (V^3)^2 = V_\mu V^\mu. \quad (5.4.32)$$

Agora, já de posse deste isomorfismo entre espaços vetoriais, voltemo-nos à construção das representações das transformações tanto dos grupos $\text{SIM}(2)$ e $\text{HOM}(2)$ no espaço vetorial das matrizes hermitianas 2×2 . As transformações neste novo espaço tem de ser construídas de uma maneira relativamente diferente da usual no sentido de álgebra linear, neste espaço vetorial não se deve simplesmente definir as transformações na forma:

$$v \mapsto \lambda v + v^\theta, \quad (5.4.33)$$

com λ uma matriz 2×2 complexa.

A motivação para não se tomar transformações deste tipo surge pelo fato de que certos espaços nos possibilitam identificar subespaços que possuem elementos com características distintas dos demais. Os elementos destes subespaços especiais são chamados de espinores², e suas leis de transformação diferem das usuais para os demais elementos. Esta diferença se torna facilmente evidenciável ao construir transformações tensoriais da seguinte maneira:

Seja λ uma matriz 2×2 complexa. Podemos construir a transformação de v através de:

$$v \mapsto \lambda v \lambda^\gamma + v^\theta. \quad (5.4.34)$$

Transformações deste tipo são chamadas de *transformações por conjugação*, e caso λ tenha determinante diferente de zero (ou seja, λ seja não singular) diz-se que esta é uma *transformação de similaridade*.

Para obter novamente o quadri-vetor a partir da matriz v , procede-se da seguinte forma:

$$V^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(v \sigma_\mu). \quad (5.4.35)$$

Uma forma de observar onde surge a diferença entre as transformações (5.4.33) e (5.4.34) para quadri-

² Mais especificamente, dentro deste espaço, é possível construir todos os quatro espinores chamados de espinores de Weyl Vaz e Rocha (2012).

vetores, vem do fato de que uma rotação de θ ao redor do eixo z é dado pela seguinte transformação:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V^{00} + V^{\beta\beta} & V^{\alpha\beta} & iV^{\alpha\beta} \\ V^{\alpha\beta} + iV^{\beta\alpha} & V^{00} & V^{\beta\beta} \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^0 + V^3 & V^1 & iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 & V^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} V^0 + V^3 & e^{i\theta}V^1 & ie^{i\theta}V^2 \\ e^{-i\theta}V^1 + ie^{-i\theta}V^2 & V^0 & V^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4.36)$$

Agora, ao utilizar a inversa da transformação, dada por (5.4.35), obtém-se que $V^{\hat{\mu}} = (V^0, \cos(\theta)V^1, \sin(\theta)V^2, \cos(\theta)V^2, \sin(\theta)V^1, V^3)$, que é o esperado para uma rotação usual em torno do eixo z. Construir as transformações de v desta forma também é útil, pois um requisito das transformações, tanto da relatividade especial quanto da muito especial, é o de que a forma quadrática (5.4.32) seja invariante por transformações de seus grupos de simetria. Dito isso, o passo a se seguir é o de investigar quais as propriedades λ precisa ter para que seja uma transformação de simetria. Precisa-se que em uma transformação de coordenadas obtenha-se: $Det(v^{\hat{\nu}}) = Det(v)$, assim:

$$\begin{aligned} Det(v^{\hat{\nu}}) &= Det(\lambda\nu\lambda^{\nu}) = \\ &= Det(\lambda)Det(\nu)Det(\lambda^{\nu}) = \\ &= Det(\lambda)Det(\lambda^{\nu})Det(\nu) = \\ &= Det(v). \end{aligned} \quad (5.4.37)$$

Portanto para a obtenção de $Det(v^{\hat{\nu}}) = Det(v)$ é necessário que $Det(\lambda)Det(\lambda^{\nu}) = 1$, e tal requisito pode ser obtido de duas maneiras, a primeira seria impor que $\lambda^{-1} = \lambda^{\nu}$, ou então impor $jDet(\lambda)j = 1$. A primeira imposição é mais forte, pois λ seria uma matriz unitária, e transformações unitárias já possuem o módulo do determinante igual a um, porém nem toda matriz com determinante igual a um, em módulo, é unitária. Portanto a escolha menos restritiva e que nos fornece a invariância da forma quadrática é dada por:

$$jDet(\lambda)j = 1. \quad (5.4.38)$$

Matrizes com estas características constituem um grupo, o qual é chamado de $SL(2, \mathbb{C})$, esta notação vem de "transformações lineares especiais"(especiais, por sua vez, vem pelo fato de serem transformações que possuem determinante igual a um) para o espaço vetorial \mathbb{C}^2 . Cada elemento deste grupo possui quatro parâmetros complexos e uma equação, complexa, de vínculo (determinante igual a um). Assim são 8 parâmetros reais e duas equações reais de vínculos entre os parâmetros, portanto 6 parâmetros reais ao todo, assim como para o grupo de Lorentz. A formulação de uma representação das transformações da VSR nesse contexto das matrizes de $SL(2, \mathbb{C})$ se dá de um modo análogo ao utilizado na representação no espaço de Minkowski: impõe-se a existência de mais dois vínculos reais, resultando nos quatro parâmetros reais esperados de uma transformação de $SIM(2)$.

Um ponto de diferença entre descrever transformações de $SIM(2)$ via matrizes 4×4 reais e matrizes

2 2 complexas é o de que para cada matriz 4 4 real, que desempenha uma transformação, vão existir duas matrizes em $SL(2, \mathbb{C})$ que realizam a mesma transformação, λ e $-\lambda$. Isso ocorre pois o sinal da matriz $-\lambda$ não irá interferir na atuação por conjugação $v^\theta = \lambda v \lambda^\theta$. No cenário de $SL(2, \mathbb{C})$, os geradores de transformações de $SIM(2)$ são:

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \kappa_3 = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \iota_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4.39)$$

Assim, é possível construir uma transformação λ da representação de $SIM(2)$ através da seguinte expressão:

$$\lambda = u e^h, \quad (5.4.40)$$

na qual u é uma matriz unitária que perfaz a rotação no eixo z, e portanto depende de um único parâmetro pertencente ao intervalo $[0, 2\pi]$, o conjunto de todas as matrizes unitárias, que realizam rotações em torno de z, formam o grupo $U(1)$. Já h é uma combinação linear dos geradores e parâmetros $\alpha^\theta \tau_1$, $\beta^\theta \tau_2$ e $\phi^\theta \kappa_3$, de tal forma que os parâmetros são completamente independentes e pertencentes a reta \mathbb{R} . Assim o espaço topológico das transformações u é homeomorfo ao espaço topológico do grupo $U(1)$ que por sua vez é homeomorfo a esfera S^1 , enquanto o espaço topológico gerado pelas transformações h é homeomorfo ao espaço \mathbb{R}^3 . Portanto, como o espaço das transformações λ é o produto direto dos espaços das transformações u e e^h , obtém-se então que a topologia do espaço das transformações λ é homeomorfo a $\mathbb{R}^3 \times S^1$. Pronto, encontrada a topologia do espaço das transformações λ e deste modo, para encontrar a topologia de $SIM(2)$ basta observar que λ fornece um recobrimento duplo de $SIM(2)$, ou seja, para cada elemento de $SIM(2)$, existem dois λ 's que perfazem a mesma transformação. Por conta disto a topologia de $SIM(2)$ é $\mathbb{R}^3 \times S^1 / Z_2$. Entende-se S^1 / Z_2 como sendo o círculo com seus antípodas identificados. Com isto se conclui que a topologia de $SIM(2)$ inhomogêneo será $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3 \times S^1 / Z_2$, pois a topologia do espaço formado pelos elementos do grupo das translações espaço-temporais é \mathbb{R}^4 . Portanto, assim, foi obtido que $SIM(2)$ e $ISIM(2)$ não são simplesmente conexos, pois laços em S^1 / Z_2 não necessariamente podem ser contraídos em um ponto. Assim o segundo requisito para o teorema também não é satisfeito e, no contexto da VSR pode, ao que tudo indica, vir a ser possível construir representações intrinsecamente projetivas de $SIM(2)$.

A topologia do grupo de Poincaré é $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3 \times S^3 / Z_2$. Neste espaço laços com um número qualquer de voltas sempre caem em duas possibilidades, os casos de o número de voltas ser par, e portanto o laço se contrai, e o caso de um número ímpar de voltas, e nestes o laço não se contrai. Matematicamente esta informação se traduz no fato de que transformações de Lorentz representadas no espaço de Hilbert, podem ser tais que o seguinte ocorre:

$$U(\theta) U(\theta) = e^{i\phi(\theta, \theta)} U(\theta). \quad (5.4.41)$$

Assim aplicação de $U(\theta) U(\theta)$ duas vezes não deverá ter a presença da fase:

$$\left[U(\theta) U(\theta) \right]^2 = [e^{i\phi(\theta, \theta)}]^2 [U(\theta)]^2 = [U(\theta)]^2, \quad (5.4.42)$$

que leva a:

$$[e^{i\phi(\cdot, \cdot)}]^2 = 1. \quad (5.4.43)$$

Portanto a fase $\exp(i\phi)$ tem de ser ± 1 . Já no caso VSR a fase não terá o mesmo formato, é necessário n aplicações sucessivas para que a fase se anule. O que se traduz em:

$$e^{in\phi(\cdot, \cdot)} = 1. \quad (5.4.44)$$

Portanto a composição de duas transformações de representações projetivas de $SIM(2)$, caso existam, deverão ser da forma:

$$U(\cdot)U(\cdot) = e^{in\phi(\cdot, \cdot)}U(\cdot). \quad (5.4.45)$$

6 REPRESENTAÇÕES DE RAIOS UNITÁRIAS DE GRUPOS CONTÍNUOS

Na subseção 5.4 do presente trabalho, foi realizada uma tentativa (baseada em Weinberg (1995) subseção 2.7) de se investigar a existência, ou não, de representações projetivas. Porém esta análise não se mostrou suficiente para o caso de $SIM(2)$, apresentando indícios, mas não provas. Assim esta seção busca realizar uma investida em um ferramental teórico mais robusto. Portanto, esta seção terá um viés mais matemático, se comparada com as seções anteriores. Uma vez que, para obter critérios e resultados mais precisos sobre este tópico, somente será possível obter respostas para estas questões via formalização matemática.

Deste modo, durante esta seção será apresentada a construção de parte da, bastante rigorosa, teoria de representações de raios proposta em Bargmann (1954). Vamos aqui realizar um estudo, com alguns comentários e desenvolvimentos de passagens que, por vezes, não receberam um desenvolvimento amplo pelo autor.

A teoria construída por Bargmann pode ter seus passos elencados do seguinte modo:

1. Serão construídas duas estruturas que servirão de base para os demais passos, são elas: os raios vetoriais e os raios operatoriais. Será a partir deste estudo que questões envolvendo continuidade serão sanadas, permitindo a introdução de ferramentas do cálculo.
2. Em tendo as estruturas anteriores já bem definidas, pode-se então realizar uma investida num estudo restringindo os fatores de uma representação projetiva a apenas uma vizinhança da identidade do grupo. Desta forma o estudo dos fatores $\omega = e^{i\phi(T_2, T_1)}$ se dará em definir apenas esses como funções que tomam elementos de uma vizinhança do grupo, "próximos" o suficiente da identidade (fatores definidos em apenas uma vizinhança do grupo, serão chamados de *fatores locais*). Com isso resultados importantes surgirão, e, além disso, será definida uma estrutura de grande importância, o *grupo local* H . Através do grupo local será realizada uma relação entre a teoria de representações ordinárias e a teoria de representações projetivas.
3. Com todo este arcabouço local, pode-se estudar agora em quais situações se torna possível estender os fatores e os expoentes locais em fatores e expoentes globais. Sendo agora estes fatores tomados como funções definidas sobre o grupo G inteiro.
4. Por fim, ao introduzir a hipótese de que G será um grupo de Lie, irão surgir relações, advindas da teoria de álgebras de Lie, que permitirão a existência de critérios para a definição de classes de equivalência entre representações projetivas.

Ao estar munido deste preâmbulo, torna-se mais fácil adentrar à construção (dos três primeiros tópicos) que vem a seguir.

6.1 RAIOS VETORIAIS E OPERATORIAIS

Dos postulados de construção da mecânica quântica tem-se que estados físicos são descritos por vetores num espaço de Hilbert. Porém múltiplos vetores, $e^{i\alpha}\psi$, podem descrever o mesmo estado. Por este motivo surge uma possibilidade de definir uma estrutura, dada pela classe de equivalência contendo todos os vetores que diverjam apenas por uma fase, $\psi = fe^{i\alpha}\psi$. Pode-se assim construir um objeto único que contém toda a informação sobre o estado quântico, este objeto, ψ , será chamado mais adiante de *raio vetorial*.

Para simetrias serem introduzidas em mecânica quântica neste novo cenário de raios vetoriais será necessário, primeiro, obter algumas propriedades, para esse espaço, advindas de estruturas já conhecidas para os espaços de Hilbert. Assim, tomando vetores $\psi, \psi^0 \dots$ de um espaço de Hilbert, H , sob o corpo dos complexos (não havendo particularização para a dimensão de H), segue-se que é possível construir um produto interno, $(\psi, \psi^0)^1$, pela definição de espaços de Hilbert. Já a partir de um produto interno é possível construir uma norma, a qual será dada por

$$||\psi|| = (\psi, \psi)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.1.1)$$

Será útil mais a diante veremos que para vetores normalizados à unidade ocorre a seguinte propriedade

$$\begin{aligned} ||\psi + \psi^0||^2 &= (\psi + \psi^0, \psi + \psi^0) \\ &= (\psi, \psi) + (\psi^0, \psi^0) + (\psi, \psi^0) + (\psi^0, \psi) \\ &= 2 \quad [(\psi, \psi) + (\psi, \psi^0)] \\ &= 2(1 + \text{Re}(\psi, \psi^0)) \\ &= 2||1 + (\psi, \psi^0)||. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Dotados desta construção inicial, já se torna possível adentrar à estrutura daquilo que receberá o nome de *raio vetorial*.

Definição 6.1.1. Um raio vetorial, ψ , é um conjunto formado por todos os vetores da forma $e^{i\alpha}\psi_0$, com ψ_0 sendo um vetor fixado em H e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observação: qualquer vetor ψ pertencente a um raio vetorial ψ será chamado de representativo do raio ψ .

Uma vez dotado da definição dos raios vetoriais se torna possível definir de maneira indireta uma definição para o produto interno entre dois raios:

$$(\psi, \psi') = j(\psi, \psi^0)j. \quad (6.1.3)$$

¹ Vale ressaltar que este produto será linear na primeira entrada e anti-linear na segunda entrada, ou seja: para $\lambda \in \mathbb{C}$, tem-se $(\psi, \lambda\psi^0) = \lambda(\psi, \psi^0)$ e $(\lambda\psi, \psi^0) = \lambda^* (\psi, \psi^0)$.

Vale notar que caso fossem utilizados vetores $e^{i\alpha}\psi$ e $e^{i\alpha^0}\psi^0$ ocorreria que:

$$|\psi - \psi'| = |(e^{i\alpha}\psi, e^{i\alpha^0}\psi^0)| = |e^{i\alpha}j e^{i\alpha^0}j| |(\psi, \psi^0)| = j(\psi, \psi^0)j. \quad (6.1.4)$$

Pode-se definir, através da norma, a distância entre raios vetoriais, assim:

Definição 6.1.2. A distância, $d(\psi, \psi')$, entre dois raios vetoriais será definida como a menor das distâncias, $j|\psi - \psi'|j$, entre representativos de ψ e ψ' .

Assim, sejam $\psi = e^{i\alpha}\psi_0$ e $\psi^0 = e^{i\alpha^0}\psi_0^0$. Tem-se que:

$$(\psi_0, \psi_0^0) = e^{i\lambda}j(\psi_0, \psi_0^0)j = e^{i\lambda}\psi - \psi'. \quad (6.1.5)$$

Já, pela equação (6.1.2):

$$j|\psi - \psi'|j^2 = 2(1 - \operatorname{Re}(e^{i\lambda} \psi - \psi')). \quad (6.1.6)$$

Portanto, quanto maior a parte real de $e^{i\lambda} \psi - \psi'$, menor $j|\psi - \psi'|j^2$. O produto $\psi - \psi'$ já é real, por conseguinte basta encontrar qual o maior valor da parte real de $e^{i\lambda} \psi - \psi'$ e este valor é 1. Ou seja, quando $\lambda = \alpha - \alpha^0$ obtém-se o menor valor de $j|\psi - \psi'|j^2$. O que resulta em:

$$d(\psi, \psi') = [2(1 - \psi - \psi')]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.1.7)$$

Da relação anterior, conclui-se que $d(\psi, \psi') = 0$ se e somente se $\psi = \psi'$.

Para aplicações futuras, note que

$$1 - (\psi - \psi')^2 = d^2(1 - \frac{1}{4}d^2) - d^2, \quad (6.1.8)$$

com $d = d(\psi, \psi')$, o que pode ser demonstrado facilmente.

Lema 6.1.1. O produto escalar $\psi - \psi'$ é contínuo, em ambas entradas, com respeito à métrica $d(\psi, \psi')$.

Antes de prosseguir a demonstração, vale resaltar que o jargão "é contínuo com respeito à" se refere ao fato de que nas regiões do domínio nas quais $d(\psi, \psi')$ é contínua e limitada, ocorrerá que $\psi - \psi'$ também será.

Demonstração. Considere os raios ψ_1, ψ_2, ψ'_1 e ψ'_2 , e sejam ψ_1, ψ_2, ψ_1^0 e ψ_2^0 representativos de cada

raio, respectivamente. Assim:

$$\begin{aligned}
 j\psi_1 \quad \psi'_1 \quad \psi_2 \quad \psi'_2 j &= j\psi_1 \quad \psi'_1 \quad \psi_2 \quad \psi'_1 + \psi_2 \quad \psi'_1 \quad \psi_2 \quad \psi'_2 j \\
 &= jj(\psi_1, \psi'_1)j \quad j(\psi_2, \psi'_1)jj + jj(\psi_2, \psi'_1)j \quad j(\psi_2, \psi'_2)jj \\
 &= j(\psi_1, \psi'_1) \quad (\psi_2, \psi'_1)j + j(\psi_2, \psi'_1) \quad (\psi_2, \psi'_2)j \\
 &= j(\psi_1 \quad \psi_2, \psi'_1)j + j(\psi_2, \psi'_1 \quad \psi'_2)j \\
 &= jj\psi_1 \quad \psi_2 jj + jj\psi'_1 \quad \psi'_2 jj \\
 &= d(\psi_1, \psi_2) + d(\psi'_1, \psi'_2).
 \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

□

A liberdade de escolha de fase na descrição de um estado físico em mecânica quântica traz uma consequência extra. Neste contexto do uso de raios vetoriais também surge a necessidade de se definir uma nova estrutura, os *raios operatoriais*.

Definição 6.1.3. Um raio operatorial unitário, \mathbf{U} , é o conjunto formado por todos os operadores lineares, que agem sobre H , do tipo $e^{i\beta}U_0$, com U_0 fixo e $\beta \in \mathbb{R}$.

Observação: assim como para os raios vetoriais, aqui também haverá o conceito de representativo. Qualquer elemento U pertencente ao raio \mathbf{U} é dito ser um representativo de \mathbf{U} .

O produto entre dois raios operatoriais, \mathbf{UV} é dado simplesmente pelo conjunto de todas as combinações de produtos possíveis entre os elementos dos raios. Ou seja, é o conjunto formado por todos os possíveis UV com $U \in \mathbf{U}$ e $V \in \mathbf{V}$. Será chamado de $\mathbb{1}$ o raio que contém o operador identidade, e \mathbf{U}^{-1} será chamado de o raio inverso à \mathbf{U} , que consiste no conjunto de todos os operadores U^{-1} tais que $U \in \mathbf{U}$. Assim, $\mathbf{UU}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U} = \mathbb{1}$. Tem-se também que o raio $\mathbf{U}\psi$ consiste no conjunto de todos os vetores da forma $U\psi$ com $U \in \mathbf{U}$ e $\psi \in \psi$. Além disso, ocorrerá que:

$$\mathbf{U}\psi \quad \mathbf{U}\psi' = \psi \quad \psi', \tag{6.1.10}$$

pois esta é uma propriedade herdada do fato de U ser uma transformação unitária². Além disso:

$$d(\mathbf{U}\psi, \mathbf{U}\psi') = d(\psi, \psi'). \tag{6.1.11}$$

Dotados de todo este ferramental, já se torna possível dar um passo a mais, pois agora tornou-se factível uma análise sobre como seria possível associar elementos de grupos a raios operatoriais. Assim se faz necessário definir o que será chamada de uma *representação de raios*.

Definição 6.1.4. Uma representação de raios de um grupo G é um mapa $r : G \rightarrow \mathbf{U}_r$, de elementos $r \in G$

² Basta ver que $\mathbf{U}\psi \quad \mathbf{U}\psi' = j(U\psi, U\psi')j = j(\psi, \psi')j = \psi \quad \psi'$.

em raios operatoriais unitários, tais que:

$$U_r U_s = U_{rs}, \quad (6.1.12)$$

com r e $s \in G$.

Segue daqui que:

$$\begin{aligned} U_e &= \mathbb{1}, \\ U_{r^{-1}} &= (U_r)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

A construção a ser feita no presente texto valerá quase que integralmente para grupos topológicos (salvo menção de requisitos adicionais, pois, em certos momentos, serão exigidas propriedades extras). Assim, em particular, esta construção também valerá para grupos de Lie, que são o interesse maior da presente investigação.

Definição 6.1.5. *Uma representação de raio de um grupo G será dita contínua se satisfizer o seguinte: Para qualquer elemento $r \in G$, qualquer raio vetorial ψ e qualquer real $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança N de r em G tal que $d(U_s \psi, U_r \psi) < \epsilon$ se $s \in N$.*

Vale a pena tentar visualizar esta definição de maneira conceitual. Esta definição de continuidade pode ser vista como: a métrica $d(U_s \psi, U_r \psi)$ varia continuamente com respeito a s , uma vez que para qualquer ϵ tão pequeno quanto se queira, deverá haver um s na vizinhança N de r , tal que a distância entre $U_s \psi$ e $U_r \psi$ sempre será menor que ϵ .

Uma forma análoga de se postular o mesmo poderia ser em tomar $r = e$, pois

$$d(U_s \psi, U_r \psi) = d(U_{sr^{-1}} \psi, \psi). \quad (6.1.14)$$

Teorema 6.1.1. *Seja U_r uma representação de raio contínua de um grupo G . Assim, para todo r em uma vizinhança, adequadamente escolhida, N_0 do elemento identidade de G , sempre será possível escolher um conjunto de representativos fortemente contínuos $U_r \in U_r$ (ou seja, para todo vetor ψ , todo $r \in N_0$ e todo $\epsilon > 0$ irá existir uma vizinhança N de r tal que $\|U_s \psi - U_r \psi\| < \epsilon$ se $s \in N$).³*

Observação: um conjunto de representativos U_r que satisfaz as condições do teorema (6.1.1) será chamado de conjunto de representativos admissíveis.

Este teorema é o que permite a existência de muito daquilo que veio a ser desenvolvido no último século em Mecânica Quântica. Resultados como o próprio conceito de partícula, proposto por Wigner, não poderiam ser obtidos caso este resultado não assim fosse.

Demonstração. Seja ψ um raio vetorial fixado em H e ψ um dado representativo. Defina $g_r = \langle \psi, U_r \psi \rangle$ para $r \in G$. Como o produto interno é contínuo, g_r será uma função contínua de r . É possível selecionar

³ Este teorema foi obtido primeiramente em Wigner (1939).

uma vizinhança N , com $r \in \mathbb{N}$, tal que $\alpha < g_r - 1$, para $\alpha \in (0, 1)$. Como estratégia para esta demonstração, deve-se selecionar representativos $U_r \in \mathbf{U}_r$ tais que

$$g_r = \|\psi - \mathbf{U}_r \psi\| = \|\psi - U_r \psi\|. \quad (6.1.15)$$

Vale notar que aqui não há o módulo, diferindo da definição inicial de produto interno para raios vetoriais em (6.1.3)⁴. As consequências de se adotar a definição estipulada em (6.1.3) são abordadas em Silva e Rocha (2021). Dito isto, agora basta definir alguns objetos que serão úteis no decorrer da demonstração.

Sejam $\psi \in \mathcal{H}$, $r, s \in \mathbb{N}$, assim:

$$d_{r,s}(\psi) = d(\mathbf{U}_r \psi, \mathbf{U}_s \psi), \quad (6.1.16)$$

$$\sigma_{r,s}(\psi) = (U_r \psi, U_s \psi), \quad (6.1.17)$$

$$Z_{r,s}(\psi) = U_s \psi - \sigma_{r,s}(\psi) U_r \psi. \quad (6.1.18)$$

Agora, observando com mais atenção a definição de $Z_{r,s}(\psi)$, esta é a projeção de $U_s \psi$ na direção perpendicular à $U_r \psi$, fato este que pode ser visto via

$$(U_r \psi, Z_{r,s}(\psi)) = (U_r \psi, U_s \psi) - \sigma_{r,s}(\psi) = 0. \quad (6.1.19)$$

Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} \|Z_{r,s}(\psi)\|^2 &= \|U_s \psi - \sigma_{r,s}(\psi) U_r \psi\|^2 = \|U_s \psi\|^2 - 2\sigma_{r,s}(\psi) (U_s \psi, U_r \psi) + \sigma_{r,s}(\psi)^2 \|U_r \psi\|^2 \\ &= 1 - \sigma_{r,s}(\psi)^2. \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

Fazendo uso de (6.1.17), obtêm-se

$$\|Z_{r,s}(\psi)\|^2 = 1 - \sigma_{r,s}(\psi)^2. \quad (6.1.21)$$

Tendo em vista a equação (6.1.8), a análise da equação anterior resulta em

$$\|Z_{r,s}(\psi)\|^2 = d_{r,s}^2(\psi). \quad (6.1.22)$$

A computação de $(\psi, Z_{r,s}(\psi))$ leva a

$$\begin{aligned} (\psi, Z_{r,s}(\psi)) &= (\psi, U_s \psi - \sigma_{r,s}(\psi) U_r \psi) \\ &= (\psi, U_s \psi) - \sigma_{r,s}(\psi) (\psi, U_r \psi) \\ &= g_s - \sigma_{r,s}(\psi) g_r. \end{aligned} \quad (6.1.23)$$

⁴ Esta foi a escolha feita em Wigner (1939), p. 169.

Assim é possível obter

$$\sigma_{r,s}(\psi) = \frac{1}{g_r} [g_s (\psi, Z_{r,s}(\psi))]. \quad (6.1.24)$$

Retomando a equação (6.1.2), substituindo ψ por $U_s\psi$ e ψ^θ por $U_r\psi$

$$jjU_s\psi \quad U_r\psi jj^2 \quad 2j1 \quad (U_r\psi, U_s\psi)j = 2j1 \quad \sigma_{r,s}(\psi)j \quad (6.1.25)$$

e usando (6.1.24), obtém-se

$$jjU_s\psi \quad U_r\psi jj^2 \quad 2 \left| \frac{1}{g_r} [g_r \quad g_s + (\psi, Z_{r,s}(\psi))] \right|. \quad (6.1.26)$$

Como foi assumido inicialmente que $g_r > \alpha$, se torna possível reescrever a equação anterior de tal forma que ela se torna:

$$jjU_s\psi \quad U_r\psi jj^2 \quad \frac{2}{\alpha} jg_r \quad g_s + (\psi, Z_{r,s}(\psi))j \quad \frac{2}{\alpha} [jg_r \quad g_sj + j(\psi, Z_{r,s}(\psi))j]. \quad (6.1.27)$$

Pela definição de g_r é possível obter:

$$jg_r \quad g_sj = j(\psi, U_r\psi) \quad (\psi, U_s\psi)j = j(\psi, U_r\psi \quad U_s\psi)j \quad jjU_r\psi \quad U_s\psi jj. \quad (6.1.28)$$

Um caso particular para essa desigualdade é o de valor mínimo para do lado direito da equação (L.D.E.), ou seja, quando ocorre $jjU_r\psi \quad U_s\psi jj_{\min} = d_{r,s}(\psi)$. Portanto

$$j(\psi, Z_{r,s}(\psi))j \quad d_{r,s}(\psi). \quad (6.1.29)$$

A união destes resultados leva a

$$jjU_s\psi \quad U_r\psi jj^2 \quad \frac{4}{\alpha} d_{r,s}(\psi). \quad (6.1.30)$$

Assim foi provada a continuidade para $U_r\psi$, de acordo com a definição prévia ao teorema. Para concluir a demonstração do teorema, basta provar que o mesmo vale para um vetor χ dado por $\chi = (\psi + \varphi) / \sqrt{2}$, onde assume-se φ como sendo um vetor normalizado e ortogonal⁵ à ψ . Note que

$$(U_r\psi, Z_{r,s}(\chi)) = (U_r\psi, U_s\chi) \quad \sigma_{r,s}(\chi)(U_r\psi, U_r\chi). \quad (6.1.31)$$

Ao adicionar e subtrair $(U_s\psi, U_s\chi)$ em (6.1.31) o resultado pode ser reescrito como

$$(U_r\psi, Z_{r,s}(\chi)) = (U_r\psi \quad U_s\psi, U_s\chi) + (U_s\psi, U_s\chi) \quad \sigma_{r,s}(\chi)(U_r\psi, U_r\chi). \quad (6.1.32)$$

Por conseguinte $(U_m\psi, U_m\chi) = (\psi, U_m^\theta U_m\chi) = (\psi, \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi + \varphi]) = 1/\sqrt{2}$ para todo $m \geq G$, em

⁵ Com esta construção, proposta por Wigner, não há suposição a cerca da dimensão do espaço de Hilbert em questão, assim esta demonstração abarca sistemas com quaisquer dimensões.

particular para $m \geq N \in G$. Retornando à (6.1.31) têm-se então que

$$(U_r\psi, Z_{r,s}(\chi)) + (U_s\psi - U_r\psi, U_s\chi) = \frac{1}{2}(1 - \sigma_{r,s}(\chi)). \quad (6.1.33)$$

Aplicando agora a equação (6.1.33) em (6.1.25) temos

$$jjU_s\chi - U_r\chi jj^2 \leq 2^{2/3} \left\{ j(U_r\psi, Z_{r,s}(\chi))j + j(U_s\psi - U_r\psi, U_s\chi)j \right\}. \quad (6.1.34)$$

Os termos do L.D.E. em (6.1.34) são limitados à direita via teorema de Cauchy–Schwarz⁶. Assim, usando (6.1.22), obtém-se:

$$jjU_s\chi - U_r\chi jj^2 \leq 2^{2/3} \left\{ d_{r,s}(\chi) + jjU_s\psi - U_r\psi jj \right\}. \quad (6.1.35)$$

Assim a continuidade de $U_r\psi$ implica a continuidade de $U_r\chi$ (e também na continuidade de $U_r\varphi$). Definindo agora um vetor $\psi = \lambda_1\psi + \lambda_2\varphi$, tem-se $U_r\psi$ também contínuo⁷. \square

Como resultado de uma análise da demonstração do teorema anterior, pode-se perceber que o resultado do teorema é independente da escolha dos representativos U_r . Assim, seja $\mathcal{F}U_r\mathcal{G}$ um conjunto de representativos admissíveis que satisfaz o teorema 6.1.1 em uma vizinhança N_0 de e . Assim, para qualquer função contínua de valores complexos, $\phi(r)$, definida para todo $r \in N_0$ com $j\phi(r)j = 1$, desse modo pode-se definir:

$$U_r^\theta = \phi(r)U_r. \quad (6.1.36)$$

Logo o conjunto formado pelos operadores U_r^θ também será de representativos admissíveis em N_0 . Dito de outro modo, seja U_r^θ um conjunto de representativos admissíveis definidos em alguma vizinhança N_0^θ de e , e seja $N_1 = (N_0 \setminus N_0^\theta)$.

6.2 FATORES E EXPOENTES LOCAIS

Nesta seção a estratégia será a de restringir o domínio onde estarão definidas as fases da representação projetiva, e, assim, buscar informações sobre as mesmas. Aqui estas fases definidas apenas localmente serão chamadas de fatores locais, $\omega(r, s)$.

Seja U_r um conjunto de representativos admissíveis definido sobre uma representação de raio contínua de um grupo G em uma vizinhança N_0 , e seja $U_e = 1$. (No seguir do texto sempre será assumido que $U_e = 1$.) Se r, s e rs estão na vizinhança N_0 , portanto U_{rs} estando bem definido, será possível escrever

$$U_r U_s = \omega(r, s) U_{rs}, \quad (6.2.1)$$

⁶ Basta desenvolver os termos envolvendo $Z_{r,s}(\chi)$ e $U_s\chi$ e utilizar expressões análogas à $j(\psi, \phi)j^2 = j(\psi, \psi)jj(\phi, \phi)j$.

⁷ Tanto a dedução para este teorema, quanto discussões acerca de consequências do teorema da escolha feita em (6.1.15) pode ser vista com detalhes em Silva e Rocha (2021)

onde $\omega(r, s)$ é um número complexo de módulo 1. Como $U_e = 1$, temos

$$\omega(e, e) = 1 = \omega(e, s) = \omega(r, e). \quad (6.2.2)$$

Já tomando N_0 e três de seus elementos, r, s e t escolhidos de tal forma que rs, st e rst estão também em N_0 , ocorrerá da lei de associatividade que leva a

$$\begin{aligned} (U_r U_s) U_t &= U_r (U_s U_t) \\ \omega(r, s) U_{rs} U_t &= \omega(s, t) U_r U_{st} \\ \omega(r, s) \omega(rs, t) U_{rst} &= \omega(s, t) \omega(r, st) U_{rst}. \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Logo

$$\omega(r, s) \omega(rs, t) = \omega(s, t) \omega(r, st). \quad (6.2.4)$$

Estas funções $\omega(r, s)$ são chamadas de *fatores locais* de uma dada representação.

Como os operadores U_r são fortemente contínuos têm-se que as funções $\omega(r, s)$ serão contínuas em r e em s . De fato, seja ψ um vetor unitário, e considere dois pares r, s e r^θ, s^θ para os quais ω está definido. Então de (6.2.1)

$$\omega(r, s) (U_{r^\theta} U_{s^\theta}) \psi + U_{r^\theta} (U_{s^\theta} U_s) \psi + (U_{r^\theta} U_r) U_s \psi = (\omega(r^\theta, s^\theta) \omega(r, s)) U_{r^\theta s^\theta} \psi. \quad (6.2.5)$$

A expressão anterior surge da subtração de:

$$\begin{cases} U_{r^\theta} U_{s^\theta} \psi = \omega(r^\theta, s^\theta) U_{r^\theta s^\theta} \psi \\ U_r U_s \psi = \omega(r, s) U_{rs} \psi \end{cases} \quad (6.2.6)$$

$$U_{r^\theta} U_{s^\theta} \psi - U_r U_s \psi = \omega(r^\theta, s^\theta) U_{r^\theta s^\theta} \psi - \omega(r, s) U_{rs} \psi \quad (6.2.7)$$

Tomando também a adição e subtração dos termos:

$$\begin{cases} U_{r^\theta s^\theta} \psi & \text{(no lado esquerdo da equação),} \\ \omega(r, s) U_{r^\theta s^\theta} \psi & \text{(no lado direito da equação).} \end{cases} \quad (6.2.8)$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} U_{r^\theta} U_{s^\theta} \psi - U_r U_s \psi + U_{r^\theta} U_{s^\theta} \psi - U_{r^\theta} U_s \psi &= \\ = \omega(r^\theta, s^\theta) U_{r^\theta s^\theta} \psi - \omega(r, s) U_{rs} \psi + \omega(r, s) U_{r^\theta s^\theta} \psi - \omega(r, s) U_{r^\theta s^\theta} \psi. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Colocando em evidência U_{r^θ} à direita e U_s no lado esquerdo da equação (L.E.E.), ocorrerá que

$$\begin{aligned} U_{r^\theta} (U_{s^\theta} U_s) \psi + (U_{r^\theta} U_r) U_s \psi &= \\ = \omega(r^\theta, s^\theta) U_{r^\theta s^\theta} \psi - \omega(r, s) U_{rs} \psi + \omega(r, s) U_{r^\theta s^\theta} \psi - \omega(r, s) U_{r^\theta s^\theta} \psi. \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Ajeitando agora o L.D.E., e colocando em evidência à direita $U_{r^0s^0}$ (no primeiro e no ultimo termos) e à esquerda $\omega(r, s)$ (no segundo e terceiro termos), ficaremos com

$$U_{r^0}(U_{s^0} U_s)\psi + (U_{r^0} U_r)U_s\psi = \omega(r, s)(U_{r^0s^0} U_{rs})\psi + (\omega(r^0, s^0) \omega(r, s))U_{r^0s^0}\psi. \quad (6.2.11)$$

Ao passar o primeiro termo do L.D.E. para o L.E.E, resultará finalmente a expressão

$$\omega(r, s)(U_{rs} U_{r^0s^0})\psi + U_{r^0}(U_{s^0} U_s)\psi + (U_{r^0} U_r)U_s\psi = (\omega(r^0, s^0) \omega(r, s))U_{r^0s^0}\psi. \quad (6.2.12)$$

Tomando então a norma em ambos os lados:

$$\begin{aligned} jj\omega(r, s)(U_{rs} U_{r^0s^0})\psi + U_{r^0}(U_{s^0} U_s)\psi + (U_{r^0} U_r)U_s\psi jj = \\ = jj(\omega(r^0, s^0) \omega(r, s))U_{r^0s^0}\psi jj. \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Da desigualdade triangular, temos que no lado esquerdo da equação anterior ocorrerá

$$\begin{aligned} jj\omega(r, s)(U_{rs} U_{r^0s^0})\psi + U_{r^0}(U_{s^0} U_s)\psi + (U_{r^0} U_r)U_s\psi jj \\ jj\omega(r, s)(U_{rs} U_{r^0s^0})\psi jj + jjU_{r^0}(U_{s^0} U_s)\psi jj + jj(U_{r^0} U_r)U_s\psi jj. \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Obtêm-se assim:

$$\underbrace{jj(\omega(r^0, s^0) \omega(r, s))U_{r^0s^0}\psi jj}_1 = \underbrace{jj\omega(r, s)(U_{rs} U_{r^0s^0})\psi jj}_2 + \underbrace{jjU_{r^0}(U_{s^0} U_s)\psi jj}_3 + \underbrace{jj(U_{r^0} U_r)U_s\psi jj}_4. \quad (6.2.15)$$

O termo 1 da equação anterior pode ter seu módulo desenvolvido como em

$$jj(\omega(r^0, s^0) \omega(r, s))U_{r^0s^0}\psi jj = j\omega(r^0, s^0) \omega(r, s)j jjU_{r^0s^0}\psi jj. \quad (6.2.16)$$

A função ψ é normalizada e $U_{r^0s^0}$ é unitário, portanto $jjU_{r^0s^0}\psi jj = 1$. Assim

$$jj(\omega(r^0, s^0) \omega(r, s))U_{r^0s^0}\psi jj = j\omega(r^0, s^0) \omega(r, s)j. \quad (6.2.17)$$

O termo 2 pode ser desenvolvido da seguinte forma

$$jj\omega(r, s)(U_{rs} U_{r^0s^0})\psi jj = j\omega(r, s)j jj(U_{rs} U_{r^0s^0})\psi jj. \quad (6.2.18)$$

Mas, como é sabido, $j\omega(r, s)j = 1$, assim

$$jj\omega(r, s)(U_{rs} U_{r^0s^0})\psi jj = jj(U_{rs} U_{r^0s^0})\psi jj. \quad (6.2.19)$$

O termo 3 fica simplesmente

$$jjU_{r^0}(U_{s^0} \quad U_s)\psi jj = jj(U_{s^0} \quad U_s)\psi jj. \quad (6.2.20)$$

O motivo disso é que, apesar de ψ ser normalizado, têm-se que $U_{s^0} \quad U_s$ não é necessariamente unitário, e, portanto, não vai obrigatoriamente preservar o módulo de ψ . Por outro lado, U_{r^0} é unitário, e vai preservar o módulo de $(U_{s^0} \quad U_s)\psi$, por isso consegue-se fazer esta simplificação.

O termo 4 não pode ser simplificado, e assim obteremos

$$j\omega(r^0, s^0) \quad \omega(r, s)j \quad jj(U_{r^0s^0} \quad U_{rs})\psi jj + jj(U_{s^0} \quad U_s)\psi jj + jj(U_{r^0} \quad U_r)U_s\psi jj. \quad (6.2.21)$$

Consequentemente, para o par $\underline{r, s}$ e um ϵ positivo, vai existir uma vizinhança N_1 tal que $j\omega(r^0, s^0) \quad \omega(r, s)j < \epsilon$.

Se uma vizinhança N é escolhida de tal forma que N^2 (a qual consiste em todos os produtos rs ($r \geq N, s \geq N$)) está contida em N_0 então $\omega(r, s)$ está definido para quaisquer elementos r, s de N , e (6.2.4) se mantém caso rs e st estejam em N .

De maneira mais geral, qualquer função unimodular complexa contínua $\omega(r, s)$, definida para os elementos \underline{r} e \underline{s} de alguma vizinhança N , será chamada de fator local de G definida em N se $\omega(e, e) = 1$ e se (6.2.4) mantém-se sempre que rs e st pertencem a N . Caso N coincida com G , então (6.2.4) vale no grupo G inteiro, e assim ω será chamado de fator de G (sem o adjetivo "local").

Para um conjunto de representativos admissíveis diferentes $U_r^0 = \phi(r)U_r$, com ($r \geq N_0$), pode-se obter através de (6.2.1) que

$$U_r^0 U_s^0 = \omega^0(r, s) U_{rs}^0, \quad (6.2.22)$$

assim, ao substituir a relação $U_r^0 = \phi(r)U_r$ e fazendo o reconhecimento de (6.2.1), se obtém

$$\omega^0(r, s) = \omega(r, s) \frac{\phi(r)\phi(s)}{\phi(rs)} \quad (j\phi(r)j = 1). \quad (6.2.23)$$

De maneira geral, dois fatores locais ω e ω^0 definidos em N e N^0 , respectivamente, serão ditos equivalentes se a relação (6.2.23) se mantém em alguma vizinhança N_1 (contida em $N \setminus N^0$) onde $\phi(r)$ é uma função complexa contínua com respeito a r definida em N_1^2 . (Note que $\phi(e) = 1$ pois $\omega(e, e) = \omega^0(e, e) = 1$.)

Além disso, se ω é um fator local definido em N e $\phi(r)$ ($j\phi(r)j = 1, j\phi(e)j = 1$) uma função complexa definida em N^2 então a função ω^0 , obtida em (6.2.23), é também um fator local definido em N já que este satisfaz (6.2.2) e (6.2.4).

Uma mudança pode ser feita ao substituir o fator local por uma exponencial. Assim pode-se definir

aquilo que será chamado de expoente local, dado por:

$$\omega(r, s) = e^{i\xi(r, s)}. \quad (6.2.24)$$

Definição 6.2.1. *Um expoente local, do grupo G , definido em uma vizinhança N , é uma função real contínua, $\xi(r, s)$, a qual é definida para todos os elementos r, s de N e satisfaz as relações:*

$$\xi(e, e) = 0, \quad (6.2.25a)$$

$$\xi(r, s) + \xi(rs, t) = \xi(s, t) + \xi(r, st). \quad (6.2.25b)$$

As equações (6.2.25a) e (6.2.25b) vêm diretamente da substituição de (6.2.24) em (6.2.2) e (6.2.4). Caso N coincida com G , ξ será chamado de expoente de G , também sem o adjetivo "local".

Para qualquer expoente ξ têm-se que ao tomar em (6.2.25b) $s = t = e$, resulta em:

$$\xi(r, e) + \xi(r, e) = \xi(e, e) + \xi(r, e). \quad (6.2.26)$$

Como já sabemos que $\xi(e, e) = 0$, obtivemos $2\xi(r, e) = \xi(r, e)$, tem-se

$$\xi(r, e) = 0. \quad (6.2.27)$$

Já, ao se tomar $r = s = e$ em (6.2.25b), resulta em:

$$\xi(e, e) + \xi(e, t) = \xi(e, t) + \xi(e, t). \quad (6.2.28)$$

Aqui, de modo análogo, resulta em $\xi(e, t) = 2\xi(e, t)$, portanto

$$\xi(e, t) = 0. \quad (6.2.29)$$

Uma terceira análise também pode ser feita ao tomar $s = r^{-1}$, e $t = r$ em (6.2.25b)

$$\xi(r, r^{-1}) + \xi(rr^{-1}, r) = \xi(r^{-1}, r) + \xi(r, r^{-1}r), \quad (6.2.30)$$

ao substituir na equação anterior as expressões de (6.2.27) e (6.2.29), obtém-se

$$\xi(r, r^{-1}) = \xi(r^{-1}, r). \quad (6.2.31)$$

Dois expoentes locais ξ e ξ^0 definidos em N e N^0 , respectivamente, serão ditos expoentes locais equivalentes se uma relação da forma

$$\xi^0(r, s) = \xi(r, s) + r_{,s}[\zeta]; \quad r_{,s}[\zeta] = \zeta(r) + \zeta(s) - \zeta(rs) \quad (6.2.32)$$

vale em alguma vizinhança N_1 , contida em $N \setminus N^0$, com $\zeta(r)$ uma função real e contínua definida em

\mathbb{N}_1^2 . Pela equação (6.2.25a), $\zeta(e) = 0$.

Se ξ é um expoente local definido em \mathbb{N} , e $\zeta(r)$ uma função real contínua em \mathbb{N}^2 que se anula para $r = e$, então a função ξ^θ definida por (6.2.32) também será um expoente local em \mathbb{N} , pois isto satisfaz as relações (6.2.25a) e (6.2.25b). Já a relação (6.2.32) poderá ser escrita de maneira abreviada, na forma:

$$\xi^\theta = \xi + [\zeta]. \quad (6.2.33)$$

Todo expoente local define univocamente um fator local $\omega = e^{i\xi}$, e dois expoentes equivalentes definem dois fatores equivalentes, com $\phi(r) = e^{i\zeta(r)}$.

Reciprocamente, se para um dado fator local ω a vizinhança \mathbb{N} é escolhida de tal forma que $j\omega - 1j$ é suficientemente pequeno, então $\xi = i \ln \omega$ (o logaritmo sendo definido em função de séries de potência de $(\omega - 1)$) é um expoente local definido em \mathbb{N} . Ademais, dois fatores locais equivalentes dão origem a dois expoentes locais; a relação de equivalência (6.2.32) vale em uma vizinhança onde $j\phi(r) - 1j$ é suficientemente pequeno, com $\zeta(r) = i \ln \phi(r)$. Assim as séries de Taylor, dadas por

$$\ln \omega = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\omega - 1)^{k+1} (\omega - 1)^k}{k}, \quad j\omega - 1j < 1, \quad (6.2.34)$$

retornarão valores pequenos o suficiente.

Proposição 6.2.1. *Para uma representação de raios contínua com dimensão finita $U(r)$ do grupo G todo fator local é equivalente a 1.*

Demonstração. Denotando o determinante de U_r por $D(r)$. Note que $D(r)$ é contínuo, com $jD(r)j = 1^8$. Assim ao tomar r e s em \mathbb{N} e

$$U_r U_s = \omega(r, s) U_{rs} = e^{i\xi(r, s)} U_{rs} \quad (6.2.35)$$

ocorrerá que

$$D(r)D(s) = e^{in\xi(r, s)} D(rs), \quad (6.2.36)$$

onde n é a dimensão do espaço da representação finita. Se \mathbb{N} é adequadamente escolhido (de tal forma que $j\omega - 1j$ e $jD - 1j$ são suficientemente pequenos) obtêm-se que

$$\delta(r) + \delta(s) = n\xi(r, s) + \delta(rs), \quad (6.2.37)$$

com $\delta(r) = i \ln D(r)$. Portanto $\xi^\theta(r, s) = \xi(r, s) + {}_{r, s}[\zeta] = 0$ (reconhecendo $\zeta(r) = \delta(r)/n$). O operador correspondente tem determinante igual a 1. \square

A equivalência entre dois expoentes locais ξ^θ e ξ será expressa por

$$\xi^\theta = \xi. \quad (6.2.38)$$

⁸ $jD(r)j = 1$ decorre de U_r ser uma transformação unitária.

Esta relação de equivalência é simétrica, reflexiva e transitiva. As primeiras duas características são imediatas. Sobre o caráter transitivo: assumamos $\xi^\theta = \xi + [\zeta]$ em N , e $\xi^{\theta^0} = \xi^\theta + [\zeta^\theta]$ em N^θ . Então $\xi^{\theta^0} = \xi + [\zeta + \zeta^\theta]$ em algum N^{θ^0} contido em $N \setminus N^\theta$.

É evidente que os operadores U contidos em todos os raios operatoriais U_r de uma representação de raio contínua de G formam um grupo com a operação de multiplicação. Seja U_r um conjunto de representativos admissíveis definidos em N_0 , e seja $N^2 \subset N_0$. Então os operadores contidos em U_r ($r \in N_0$) tem a forma de $e^{i\theta}U_r$ (com θ real).

Se r e s estão em N ,

$$(e^{i\theta}U_r)(e^{i\theta^0}U_s) = e^{i(\theta+\theta^0)}\omega(r,s)U_{rs} = e^{i(\theta+\theta^0+\xi(r,s))}U_{rs}. \quad (6.2.39)$$

Isso sugere a seguinte definição de *grupo local* H . (Para uma introdução mais aprofundada ao conceito de grupo local, ver Gamkrelidze e Pontriagin (1987), p. 83.). Seja ξ um expoente local de G definido em N . H consiste de pares $f\theta, rg$ onde θ é real e r um elemento de N^2 . (Como espaço topológico, H é dado pelo produto de N^2 com a reta real.) O produto então em H será definido do seguinte modo: para dois elementos do tipo $f\theta_1, r_1g$ e $f\theta_2, r_2g$ se r_1 e r_2 estão em N , então

$$f\theta_1, r_1g \cdot f\theta_2, r_2g = f\theta_1 + \theta_2 + \xi(r_1, r_2), r_1r_2g. \quad (6.2.40)$$

Ao tomar a lei de associatividade para a lei multiplicativa dada em (6.2.40) temos

$$\begin{aligned} \left(f\theta_1, r_1g \cdot f\theta_2, r_2g \right) \cdot f\theta_3, r_3g &= f\theta_1, r_1g \cdot \left(f\theta_2, r_2g \cdot f\theta_3, r_3g \right) \\ f\theta_1 + \theta_2 + \xi(r_1, r_2), r_1r_2g \cdot f\theta_3, r_3g &= f\theta_1, r_1g \cdot f\theta_2 + \theta_3 + \xi(r_2, r_3), r_2r_3g \\ f\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \xi(r_1, r_2) + \xi(r_1r_2, r_3), r_1r_2r_3g &= f\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \xi(r_2, r_3) + \xi(r_1, r_2r_3), r_1r_2r_3g. \end{aligned} \quad (6.2.41)$$

Vê-se assim surgir a definição (6.2.25b). O elemento identidade e de H é $f0, eg$ (veja (6.2.27)), e a inversa de $f\theta, rg$ é dada por $f(-\theta - \xi(r, r^{-1})), r^{-1}g$, se r e r^{-1} pertencem à N (veja mais em 6.2.31).

Tomando elementos $t(\theta) = f\theta, eg$ de um subgrupo a um parâmetro T , pertencente ao centro de H , têm-se que quaisquer elementos $f\theta, rg$ de H podem ser unicamente escritos na forma $t(\theta) \cdot f\theta, rg = f\theta, rg \cdot t(\theta)$. Segue de (6.2.40) que o grupo quociente H/T é localmente isomorfo à G .

A extensão local do grupo G da forma de (6.2.40) fornece uma ferramenta útil na investigação dos expoentes locais de G . Ao concentrar atenções nos grupos locais H , segue-se a construção feita por Schur (1904), porém, descrita por Bargmann.

Sejam ξ e ξ^θ dois expoentes locais, e seja $\xi^\theta = \xi + [\zeta]$ em N_1 . Então os correspondentes grupos locais H e H^θ (definidos por (6.2.40)) são localmente isomórficos⁹. Denote por $r = f\theta, rg$,

⁹ Um isomorfismo de grupos constitui uma relação de homomorfismo onde a função que realiza o homomorfismo é uma

$r^\theta = f\theta^\theta$, $r^\theta g$ os elementos de H e H^θ respectivamente. Um mapa isomórfico $r^\theta = f(r)$ ($r \in \mathbb{N}_1^2$) é dado por

$$\theta^\theta = \theta \quad \zeta(r), \quad r^\theta = r, \quad (6.2.42)$$

tal que $f(r_1)f(r_2) = f(r_1r_2)$ se $r_1, r_2 \in \mathbb{N}_1$. Pode-se também dizer que (6.2.42) define uma parametrização diferente para o grupo local H .

Para provar este isomorfismo basta checar individualmente cada lado da expressão $f(r_1)f(r_2) = f(r_1r_2)$ e checar sua igualdade. Assim vamos investigar o resultado de $f(r_1)f(r_2)$ (que também pode ser escrito como $r_1^\theta r_2^\theta$)

$$f(r_1)f(r_2) = r_1^\theta r_2^\theta = f\theta_1^\theta + \theta_2^\theta + \xi^\theta(r_1^\theta, r_2^\theta), r_1^\theta r_2^\theta g = f\theta_1 + \theta_2 \quad \zeta(r_1) \quad \zeta(r_2) + \xi^\theta(r_1, r_2), r_1 r_2 g. \quad (6.2.43)$$

Pela relação de equivalência entre expoentes locais, tem-se $\xi^\theta(r_1, r_2) \quad \zeta(r_1) \quad \zeta(r_2) = \xi(r_1, r_2) \quad \zeta(r_1 r_2)$ e ao substituir em (6.2.43) resulta em

$$f(r_1)f(r_2) = f\theta_1 + \theta_2 \quad \zeta(r_1 r_2) + \xi(r_1, r_2), r_1 r_2 g. \quad (6.2.44)$$

Vamos agora investigar o termo $f(r_1 r_2)$. Nele iremos primeiro observar o resultado do produto $r_1 r_2$ e após iremos introduzi-lo como argumento da função f . Assim, como visto anteriormente $r_1 r_2 = f\theta_1 + \theta_2 + \xi(r_1, r_2), r_1 r_2 g$. Assim introduzir este resultado no argumento da função f , resulta em

$$f(r_1 r_2) = f\theta_1 + \theta_2 \quad \zeta(r_1 r_2) + \xi(r_1, r_2), r_1 r_2 g. \quad (6.2.45)$$

Portanto, ao comparar (6.2.44) com (6.2.45) vê-se que a expressão $f(r_1)f(r_2) = f(r_1 r_2)$ foi obtida. Além disso $f(e) = e^\theta$, pois $\zeta(e) = 0$, concluindo o homomorfismo. Para completar basta ver que (6.2.42) é uma função afim que define uma bijeção e assim comprova-se o isomorfismo entre H e H^θ .

Note também que o grupo local H construído com base em ξ é localmente isomórfico a qualquer grupo local H^θ construído com base em $\xi^\theta = \gamma\xi$ onde γ é uma constante não nula. Assim um mapa isomórfico entre estes grupos locais pode ser dado por:

$$\theta^\theta = \gamma\theta, \quad r^\theta = r, \quad (6.2.46)$$

se ξ está definido em \mathbb{N} e $r \in \mathbb{N}$.

Para ver isso, pode-se checar o homomorfismo da seguinte maneira

$$f(r_1)f(r_2) = f\gamma\theta_1, r_1 g \quad f\gamma\theta_2, r_2 g = f\gamma(\theta_1 + \theta_2) + \xi(r_1, r_2), r_1 r_2 g, \quad (6.2.47)$$

e

$$f(r_1 r_2) = f(f\theta_1 + \theta_2 + \xi(r_1, r_2), r_1 r_2 g) = f\gamma(\theta_1 + \theta_2) + \xi(r_1, r_2), r_1 r_2 g. \quad (6.2.48)$$

bijeção. Por sua vez, um homomorfismo de grupos é dado por uma função $f : H \rightarrow H^\theta$, com $r \in H$ $r^\theta = f(r)$, tal que, dados $r_1, r_2 \in H$, ocorre $f(r_1)f(r_2) = f(r_1 r_2)$ e f levará o elemento neutro de H no elemento neutro de H^θ ($f(e) = e^\theta$).

Temos também que $f(e) = e^\theta$, pois $0 = \gamma 0$. Além disso a relação $\theta^\theta = \gamma \theta$ define uma bijeção dos reais para os reais, checando assim o isomorfismo.

6.3 FATORES E EXPOENTES DEFINIDOS SOBRE O GRUPO INTEIRO

Até este ponto os fatores locais foram analisados apenas visando obter propriedades locais dos mesmos, porém a partir desta seção o objetivo se torna estudar fatores e expoentes definidos sobre o grupo inteiro (ou seja, aqui visa-se estudar $N = G$). Também aqui serão discutidas relações entre fatores e expoentes definidos em grupos simplesmente conexos.

6.3.1 Existência de representações de raio compatíveis com um dado fator ω

Se para uma representação de raio contínua de G for possível selecionar um conjunto de representativos admissíveis sobre o grupo inteiro (e não apenas sobre abertos ao redor do elemento identidade), então um fator ω poderá ser selecionado sobre G inteiro. Ou, visto por outro ângulo, para um dado fator ω definido sobre G inteiro é possível construir uma representação de raio compatível com ω ¹⁰.

No decorrer desta análise, será necessário assumir que existe uma medida invariante por translações¹¹ em G ¹².

Teorema 6.3.1. *Para todo fator ω de um grupo localmente compacto G haverá uma representação de raios contínua compatível com ω .*

Demonstração. Denotando por dt uma medida invariante à esquerda em G , e tomando H como o conjunto de todas as funções de quadrado integrável $f(t)$ em G , tais que:

$$(f, g) = \int_G \overline{f(t)} g(t) dt, \quad (6.3.1)$$

com $\overline{f(t)}$ sendo o complexo conjugado de $f(t)$.

Assim define-se, para um fator $\omega(r, s)$, a transformação $g = U_r f$ pelas equações:

$$g(t) = \omega(r, r^{-1}t) f(r^{-1}t) \quad (6.3.2a)$$

ou

$$g(rt) = \omega(r, t) f(t). \quad (6.3.2b)$$

Por conta desta definição de U_r tem-se:

1. U_r é isométrica e unitária;

É isométrica, pois de $jg(t)j = jf(r^{-1}t)j$ tem-se que:

$$\int_G jg(t)j^2 dt = \int_G jf(r^{-1}t)j^2 dt = \int_G jf(t)j^2 d(rt) = \int_G jf(t)j^2 dt, \quad (6.3.3)$$

¹⁰ Ou seja, uma família de operadores fortemente contínuos U_r que satisfazem (6.2.1).

¹¹ também chamada de medida de Haar, por ter demonstrado a sua existencia.

¹² Neste caso, G tem de ser um grupo localmente compacto. Requisição esta que é satisfeita por grupos de Lie.

onde na última igualdade foi usado que $d(rt) = dt$, pois, das premissas, aprecia-se que a medida em questão é invariante à esquerda.

Também é unitária, pois de (6.3.3), temos $(g, g) = (U_r f, U_r f) = (f, f)$, logo U_r é unitária.

2. $U_e = 1$, pois $\omega(e, t) = 1$.

3. Deseja-se obter $U_r U_s = \omega(r, s) U_{rs}$.

A obtenção desta expressão vem da seguinte análise: tomando $g = U_s f$ e $h = U_r g = U_r U_s f$, por (6.3.2)

$$h(r(st)) = \omega(r, st)g(st) = \omega(r, st)\omega(s, t)f(t). \quad (6.3.4)$$

Portando, pela (6.2.4), $h((rs)t) = \omega(r, s)\omega(rs, t)f(t)$, isto é $h = \omega(r, s)U_{rs}f$, e então $U_r U_s f = \omega(r, s)U_{rs}f$.

4. Os operadores U_r são fortemente contínuos em r :

Tomando em, (6.3.2), $g(t) = \omega(r, r^{-1}t)f_1(t)$ e $f_1 = V_r f$. Como operadores V_r , que definem representações ordinárias de G , são fortemente contínuos em r e sua multiplicação por $\omega(r, r^{-1}t)$ não afeta essa propriedade (pois, como visto, também são funções contínuas), tem-se o caráter fortemente contínuo de U_r .

□

Para as demais demonstrações será necessário realizar algumas definições. Agora serão dadas as definições de: grupos conexos, localmente conexos e simplesmente conexos, assim

Definição 6.3.1. *Um grupo topológico G é dito ser um grupo conexo se este não puder ser descrito como a união de dois ou mais conjuntos abertos disjuntos e não-vazios.*

Definição 6.3.2. *Um grupo topológico G é dito ser um grupo localmente conexo se para todo elemento do grupo houver uma coleção de vizinhanças abertas e conexas, N_i , cuja união resulta em qualquer aberto do grupo. Ou seja: dado um aberto N^0 qualquer ocorrerá que*

$$N^0 = \bigcup N_i. \quad (6.3.5)$$

Definição 6.3.3. *Um grupo é dito ser simplesmente conexo se todo caminho fechado na variedade do grupo puder ser deformada em um ponto. Ou, equivalentemente, se quaisquer dois elementos do grupo podem ser conecta-dos por um caminho contínuo também pertencente ao grupo de tal forma que quaisquer dois destes caminhos poderão sempre ser continuamente deformados um no outro.*

Doravante seção será assumido que G é *localmente conexo* (Tal condição é naturalmente satisfeita por grupos de Lie). Para

Para preparar parte do ferramental necessário, esta parte será dedicada ao estudo de representações ordinárias, e não de representações de raio. Além disso, para relacionar propriedades locais com propriedades locais, será assumido que G é conexo.

Definição 6.3.4. *Uma representação local unitária de um grupo G , definida em uma vizinhança N , é um mapa de N^2 em operadores V_r ($r \in N^2$) tais que $V_r V_s = V_{rs}$ se r e s pertencem à N ¹³.*

Fatos cruciais:

- 1) Uma propriedade que será de grande utilidade é: se G é um grupo conexo, então qualquer elemento r de G pode ser escrito como um produto finito:

$$r = r_1 r_2 \dots r_n \quad (6.3.6)$$

com $r_i \in M$.

- 2) Se G , além de conexo, é *simplesmente conexo*, uma representação local sempre poderá ser estendida à uma representação sobre o grupo inteiro. Com isso, pode-se obter que: para toda representação local de um grupo simplesmente conexo G existe uma vizinhança $N \subseteq N$ tal que

$$V_{r_1} V_{r_2} \dots V_{r_n} = V_{r_1^\theta} V_{r_2^\theta} \dots V_{r_n^\theta} \quad (r_i, r_i^\theta \in N), \quad (6.3.7)$$

caso $r_1 r_2 \dots r_n = r_1^\theta r_2^\theta \dots r_n^\theta$

Lema 6.3.1. *Para uma representação local unitária V_r de um grupo conexo e simplesmente conexo G definida em N existe uma, única e determinada, representação W_r , sobre o grupo G inteiro, que coincide com a representação local em alguma vizinhança $N \subseteq N$. Os operadores W_r serão fortemente contínuos caso os operadores V_r sejam fortemente contínuos.*

Demonstração. Seja W_r uma representação de G que coincide com V_r em uma vizinhança $M \subseteq N$. Se r é expresso na forma de (6.3.6) então $W_r = W_{r_1} W_{r_2} \dots W_{r_n}$, e, como $W_{r_i} = V_{r_i}$ em M ,

$$W_r = V_{r_1} V_{r_2} \dots V_{r_n} \quad (r = r_1 \dots r_n; r_i \in M). \quad (6.3.8)$$

1. *Unicidade de W_r :* Seja W_r^θ uma segunda representação, que coincide com V_r em $M^\theta \subseteq (M \setminus M^\theta)$. Ao aplicar (6.3.8) em M_1 ao invés de tomar em M , obtêm-se a mesma expressão para W_r e W_r^θ .
2. *Existência de W_r :* (6.3.8) pode ser usada para definir W_r (com $N = M$) pois, por (6.3.7), o produto em (6.3.8) depende de r mas não na decomposição nos elementos r_i . Em particular $W_r = V_r$ se $r \in N$. Assim estrutura de representação é uma consequência imediata. Seja $r = r_1 \dots r_n$, $s = s_1 \dots s_m$. Então $rs = r_1 \dots r_n s_1 \dots s_m$, e como $W_{rs} = V_{r_1} \dots V_{r_n} V_{s_1} \dots V_{s_m} = W_r W_s$.

¹³ Vale notar que nenhuma imposição sobre continuidade é feita.

3. Caso os operadores V_r formem um conjunto fortemente contínuo então o conjunto dos operadores W_r também o será, pois se r e s estão suficientemente próximos, tais que $r^{-1}s \geq N$, tem-se que para todo vetor ψ vale

$$jj(W_s - W_r)\psi jj = jj(W_{r^{-1}s} - W_r)\psi jj = jj(W_{r^{-1}s} - 1)\psi jj = jj(V_{r^{-1}s} - 1)\psi jj, \quad (6.3.9)$$

o que prova a afirmação. □

6.3.2 Representação de raios de G induzida por representações ordinárias

Qualquer representação unitária fortemente contínua de G dá origem a uma única e determinada representação de raios contínua de G . Estas representações projetivas são ditas *induzidas* pela representação U_r . Para os representativos U_r , o fator ω é igual a 1, e assim todo fator local da representação de raios é equivalente à 1.

Como consequência do lema 6.3.1

Teorema 6.3.2. *Toda representação de raio contínua U_r de um grupo conexo e simplesmente conexo G com fator local equivalente a 1 é induzida por uma representação unitária fortemente contínua U_r de G .*

Demonstração. Por hipótese, existe um conjunto de representativos admissíveis $U_r \geq U_r$ ($r \geq N^2$) tal que $U_r U_s = U_{rs}$ ($r, s \geq N$), isto é: U_r é uma representação local de G . Seja U_r^0 ($r \geq G$) uma representação de G construída de acordo com (6.3.8)¹⁴. Resta mostrar que $U_r^0 \geq U_r$ para todo r . Pela equação (6.3.8), é evidente que $U_r^0 = U_{r_1} \dots U_{r_n} \geq U_{r_1} \dots U_{r_n} = U_r$. □

Corolário 6.3.1. *Toda representação de raios de dimensão finita de um grupo conexo e simplesmente conexo G é induzida por uma representação unitária de G .*

Demonstração. Pela proposição 6.2.1, todo fator local é equivalente à 1. Assim basta agora fazer uso do teorema 6.3.2.¹⁵ □

6.3.3 Extensão de representativos locais

Para uma representação de raios contínua de um grupo G nem sempre é possível estender, de maneira contínua, um conjunto de representativos admissíveis, definidos em uma vizinhança N , em um conjunto de representativos definidos no grupo G inteiro. Porém, para grupos conexos e simplesmente conexos, existe o seguinte teorema:

Teorema 6.3.3. *Seja G um grupo conexo e simplesmente conexo, ω um fator local definido sobre G inteiro, e U_r uma representação de raios tal que o fator local definido por um conjunto de*

¹⁴ Tomando $U_r = V_r, U_r^0 = W_r$

¹⁵ Este resultado foi primeiramente obtido por Weyl em Weyl (1931), pp. 183-184.

representativos U_r , adequadamente escolhidos, coincide com ω em alguma vizinhança N . Então existe um único e determinado conjunto de representativos admissíveis U_r^0 para o grupo inteiro, tal que $U_r^0 U_s^0 = \omega(r, s) U_{rs}$ para todo $r, s \in G$ e $U_r^0 = U_r$ em alguma vizinhança $N \subset G$.

Demonstração. Como G é conexo e simplesmente conexo, a equação $e^{i\xi(r,s)} = \omega(r, s)$ tem uma única solução $\xi(r, s)$ (para todo $r, s \in G$), que satisfaz as equações (6.2.25a) e (6.2.25b), assim $\xi(r, s)$ é um expoente de G . Então a extensão central H é um grupo, o qual também é conexo e simplesmente conexo.

1. Será agora utilizado o Lema 6.3.1 em H . Tomando $r = f\theta, rg$, $V_r = V(\theta, r) = e^{i\theta} U_r$ ($r \in N^2$). De acordo com as equações (6.2.39) e (6.2.40) V_r é uma representação local unitária de H definida em M ($1 < \theta < 1, r \in N$). Pela definição dada pela equação (6.3.8) obtêm-se uma representação unitária fortemente contínua $W_r = W(\theta, r)$ de H , a qual coincide com V_r em algum $M \subset M$. M contém uma vizinhança M^0 da forma ($c < \theta < c, r \in N$), para algum c adequadamente escolhido e $N \subset N$.
2. Para todo $\theta, f\theta, eg = f\theta_1, eg^n$, onde $\theta_1 = \theta/n, j\theta_1 j < c$. Então, pela equação (6.3.8), $W(\theta, e) = (V(\theta_1, e))^n = e^{i\theta} 1$. Seja agora $U_r^0 = W(0, r)$ para todo r . Como $f\theta, rg = f\theta, eg f\theta, rg$ tem-se para todo r que

$$W(\theta, r) = e^{i\theta} U_r^0, \quad (6.3.10)$$

e $U_r^0 = U_r$ se $r \in N$. Além disso, $f\theta, rg f\theta, sg = f\xi(r, s), rsg$ com isso

$$U_r^0 U_s^0 = e^{i\xi(r,s)} U_{rs}^0 = \omega(r, s) U_{rs}^0 \quad (r, s \in G). \quad (6.3.11)$$

3. Basta agora mostrar que $U_r^0 \supset U_r$. Para isso toma-se $r = r_1 \dots r_n$ ($r_k \in N$). Assim, $U_{r_k}^0 \supset U_{r_k}$. Pela equação (6.3.11), $U_{rs}^0 \supset U_{rs}$ se $U_r^0 \supset U_r$ e $U_s^0 \supset U_s$. Portanto, por indução, $U_r^0 \supset U_{r_1} \dots U_{r_n} = U_r$.
4. Qualquer conjunto formado por U_r^0 com as devidas propriedades define, através de (6.3.10) e de (6.2.39), uma representação $W(\theta, r) = e^{i\theta} U_r^0$ de H que também é, por conta do lema 6.3.1, unicamente determinada¹⁶.

□

6.3.4 Extensão de expoentes locais

Assim como os expoentes locais se mostraram ferramentas úteis no estudo de representações de raios locais o mesmo ocorrerá com expoentes associados à fatores definidos sobre o grupo inteiro. Por

¹⁶ Se G não é simplesmente conexo, o teorema pode falhar em dois aspectos: (1) Pode ser impossível selecionar algum conjunto de representativos admissíveis, definidos sobre o grupo inteiro, independentemente da equação (6.3.11). (2) Pode ser impossível de satisfazer a equação (6.3.11) mesmo se a continuidade de U_r^0 não for assumida. As representações "a menos de um sinal" falham nestes dois aspectos.

conta disso esta seção tem por objetivo definir uma noção de extensão de expoentes locais e mostrar que equivalências entre expoentes locais implicam em equivalências entre suas extensões.

Definição 6.3.5. Um expoente ξ_1 de G é dito ser uma extensão de um expoente local ξ de G se $\xi_1(r, s) = \xi(r, s)$ em alguma vizinhança.

Teorema 6.3.4. Sejam ξ e ξ^θ dois expoentes locais equivalentes de um grupo conexo e simplesmente conexo G , tais que $\xi^\theta = \xi + [\zeta]$ em alguma vizinhança, e assumamos que os expoentes ξ_1 e ξ_1^θ de G sejam extensões de ξ e ξ^θ respectivamente. Então, para todo $r, s \in G$, $\xi_1^\theta(r, s) = \xi_1(r, s) + \zeta_{r,s}$, onde $\zeta_1(r)$ é contínua em r e $\zeta_1 = \zeta$ em alguma vizinhança N .

Demonstração. Os dois expoentes ξ_1 e ξ_1^θ definem dois grupos conexos e simplesmente conexos H_1 e H_1^θ (com elementos r e r^θ , respectivamente) para os quais a multiplicação é dada por (6.2.40). A equação (6.2.42) define um mapa isomórfico local $r^\theta = f(r)$ de H_1 em H_1^θ

$$f(r) = f(\theta, r) = f\theta \zeta(r), rg \quad (r \in N_1^2). \quad (6.3.12)$$

Para provar este isomorfismo temos que mostrar primeiro que $f(r)f(s) = f(rs)$, para isto basta ver que ao tomar elementos $r^\theta = f\alpha^\theta, rg$ e $s^\theta = f\beta^\theta, sg$, seu produto deverá ser dado por

$$f(r)f(s) = f\alpha^\theta, rg \ f\beta^\theta, sg = f\alpha^\theta + \beta^\theta + \xi^\theta(r, s), rsg. \quad (6.3.13)$$

Ao mesmo tempo por (6.3.12) tem-se que $r^\theta = f(\alpha, r) = f\alpha \zeta(r), rg$ e $s^\theta = f(\beta, s) = f\beta \zeta(s), sg$, portanto $\alpha^\theta = \alpha + \zeta(r)$ e $\beta^\theta = \beta + \zeta(s)$. Substituindo α^θ e β^θ em (6.3.13), obtém-se

$$f\alpha^\theta, rg \ f\beta^\theta, sg = f\alpha + \beta + \xi^\theta(r, s) \zeta(r) \zeta(s), rsg. \quad (6.3.14)$$

Fazendo uso da relação de equivalência entre expoentes locais, $\xi^\theta(r, s) \zeta(r) \zeta(s) = \xi(r, s) \zeta(rs)$, resultará em

$$f\alpha^\theta, rg \ f\beta^\theta, sg = f\alpha + \beta + \xi(r, s) \zeta(rs), rsg = f(rs). \quad (6.3.15)$$

Pronto, foi mostrado que $f(r)$ é um homomorfismo, agora, para que este f seja um isomorfismo basta ver que $\theta^\theta = \theta \zeta(r)$ define uma bijeção dos reais para os reais.

Retornando para a equação (6.3.12), se N_1 é escolhido tal que $\xi_1 = \xi$, $\xi_1^\theta = \xi^\theta$ e $\xi^\theta = \xi + [\zeta]$ é satisfeita em N_1 . (6.3.12) pode ser, unicamente, elevado a um isomorfismo $f_1(r) = f_1(\theta, r) = r^\theta$ entre os grupos H_1 e H_1^θ tal que $f_1(r) = f(r)$ em alguma vizinhança M ($c < \theta < c$, $r \in N \cap N$) em H_1 . Assim como na prova do teorema 6.3.3, encontra-se a partir de (6.3.12) que $f_1(\theta, e) = f\theta, eg$ para todo θ . Tomando $f_1(0, r) = f \zeta_1(r), g(r)g$ onde $\zeta_1(r)$ é uma função contínua de r e $g(r)$ um elemento de G a ser determinado. A equação $f\theta, rg = f\theta, eg \ f0, rg$ implica em $f_1(\theta, r) = f\theta \zeta_1(r), g(r)g$.

A computação do L.E.E de $f_1(0, r)f_1(0, s) = f_1(\xi(r, s), rs)$ resulta em

$$\begin{aligned} f_1(0, r)f_1(0, s) &= f \zeta_1(r), g(r)g \ f \zeta_1(s), g(s)g \\ &= f\xi^\theta(r, s) \zeta_1(r) \zeta_1(s), g(r)g(s)g \\ &= f\xi(r, s) \zeta_1(rs), g(r)g(s)g, \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

já a computação do L.D.E. com a substituição da relação de equivalência entre expoentes leva a

$$f_1(\xi(r, s), rs) = \tilde{f}_\xi(r, s) \quad \zeta_1(rs), g(rs)g, \quad (6.3.17)$$

resultando em

$$g(rs) = g(r)g(s). \quad (6.3.18)$$

Tomar $r \geq \mathbb{N}$ resulta em $g(r) = r$, pois em \mathbb{N} os grupos locais associados a ξ e ξ_1 são isomorfos. Mas, como (6.3.18) foi um resultado obtido tomando qualquer $r \geq G$, tem-se que, isso mostra que $g(r) = r$ para todo r ¹⁷. Então

$$f_1(r) = f_1(\theta, r) = \tilde{f}_\theta \quad \zeta_1(r), rg \quad (\text{para todo } r \geq G). \quad (6.3.19)$$

Finalmente, $f_1(0, r)f_1(0, s) = f_1(\xi_1(r, s), rs)$. Consequentemente

$$\tilde{f}_{\xi_1^\theta}(r, s) \quad \zeta_1(r) \quad \zeta_1(s), rsg = \tilde{f}_{\xi_1}(r, s) \quad \zeta_1(rs), rsg, \quad (6.3.20)$$

tal que $\xi_1^\theta = \xi_1 + [\zeta_1]$ no grupo inteiro, e, pela equação (6.3.12), $\zeta_1(r) = \zeta(r)$ para $r \geq \mathbb{N}$. \square

¹⁷ A igualdade $g(r) = r$ para todo $r \geq G$ pode ser ter sua demonstração vista com detalhes em Gamkrelidze e Pontriagin (1987)

7 CONCLUSÃO

No presente trabalho detalhes bastante intrigantes da construção da Teoria Quântica de Campos foram trazidos à tona. Foi mostrado um pouco da importância do estudo de representações de simetrias naquilo que permeia a construção dos estados de uma partícula invariante pela atuação das simetrias da VSR, bem como também foram apresentadas as bases para este estudo. Aqui, percebeu-se a causa de um possível impedimento para a construção de uma mecânica quântica relativística invariante pelas simetrias de $HOM(2)$ para o caso massivo. Também foi obtido o formato da atuação de uma transformação de $ISIM(2)$ sobre estados de uma partícula.

Deste ponto em diante, o estudo mudou um pouco de figura, sendo o interesse central não mais nas representações ordinárias, e sim a busca por possíveis representações projetivas de $SIM(2)$ e $ISIM(2)$. Uma primeira investida no tópico é feita utilizando uma estratégia focada em analisar características algébricas e topológicas de $SIM(2)$. A fundamentação para esta análise encontra-se na seção 2.7 de Weinberg (1995), porém para o caso em questão obtivemos apenas um indício da possível existência de representações projetivas para $SIM(2)$ e $ISIM(2)$.

Diante disso uma nova empreitada foi elaborada ao ser iniciado um estudo de uma teoria bem mais robusta sobre a teoria de representações de raio para grupos contínuos, apresentada em Bargmann (1954). Neste trabalho, proposto por Bargmann, encontram-se resultados que revelam propriedades profundas da natureza matemática da Mecânica Quântica, e apontam firmemente em uma direção de possível resolução para a questão da existência ou não de representações projetivas de $SIM(2)$. Aqui foram exibidas as origens das fases de representações projetivas e algumas de suas propriedades. A partir da análise destas fases foram construídos os expoentes locais que são essenciais para a construção de uma ferramenta central da teoria: o grupo local, que, em continuações futuras do presente trabalho, se mostrarão fundamentais para obter todas as possíveis representações projetivas de um determinado grupo.

Este trabalho abre as portas para um prosseguimento natural, a obtenção de campos quânticos invariantes por transformações de $ISIM(2)$, ao analisar a teoria de espalhamento para estes estados. Além disso, se concretizada a existência de representações projetivas de $SIM(2)$, podemos estudá-las sob a ótica de alguns trabalhos como Filippelli (2011) e Wawrzycki (2004).

A princípio esperava-se ser obtido, ao fim deste trabalho, além do formato da atuação de transformações de $ISIM(2)$ sobre estados de uma partícula, uma resposta final sobre a existência ou não de representações projetivas para $SIM(2)$ e $ISIM(2)$. Entretanto, as tentativas executadas, até o presente momento, se mostraram insuficientes em comprovar a sua (não) existência, muito embora já estamos continuando estes estudos no projeto de doutorado com o início da aplicação da teoria proposta por Bargmann para os grupos $SIM(2)$ e $ISIM(2)$.

REFERÊNCIAS

- AHLUWALIA, D.; HORVATH, S. Very special relativity as relativity of dark matter: the elko connection. **JHEP**, 2010.
- BARGMANN, V. On unitary ray representations of continuous groups. **Annals of Mathematics**, JSTOR, 1954. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1969831>>.
- BERGMANN, P. **Introduction to the theory of relativity**. [S.l.]: Dover Publications, 1976. (Dover Classics of Science and Mathematics).
- COHEN, A. G.; GLASHOW, S. L. Very special relativity. **Phys.Rev.Lett.**, 2006.
- FILIPPELLI, G. Time dependent quantum generators for the galilei group. **Journal of Mathematical Physics**, AIP Publishing, v. 52, n. 8, Aug 2011. ISSN 1089-7658. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1063/1.3621518>>. Acesso em: 10 de out. 2021.
- GAMKRELIDZE, R.; PONTRIAGIN, L. **Topological groups**. Taylor & Francis, 1987. (Classics of Soviet Mathematics). ISBN 9782881241338. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=3T9CYGGJW5kC>>.
- HAMERMESH, M. **Group theory and its application to physical problems**. Dover Publications, 1989. (Addison Wesley Series in Physics). ISBN 9780486661810. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=c0o9_wICzgcC>.
- LEE, C. Y. Quantum field theory with a preferred direction: The very special relativity framework. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 93, n. 4, Feb 2016. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.93.045011>>.
- SAKURAI, J.; NAPOLITANO, J. **Modern quantum mechanics**. Cambridge University Press, 2020. ISBN 9781108473224. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=GdX7DwAAQBAJ>>.
- SCHUR, J. Über die darstellung der endlichen gruppen durch gebrochen lineare substitutionen. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 127, p. 20–50, 1904. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/149177>>.
- SILVA, J. M. Hoff da; ROCHA, G. M. Caires da. Strongly continuous representations in the hilbert space: A far-reaching concept. **Universe**, v. 7, n. 8, 2021. ISSN 2218-1997. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2218-1997/7/8/285>>.
- VAZ, J.; ROCHA, R. da. **Álgebras de clifford e espinores**. São Paulo: Livraria da Física, 2012.
- WAWRZYCKI, J. A generalization of the bargmann's theory of ray representations. **Communications in Mathematical Physics**, Springer Science and Business Media LLC, v. 250, n. 2, p. 215–239, Jul 2004. ISSN 1432-0916. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00220-004-1141-4>>.
- WEINBERG, S. **The quantum theory of fields**. [S.l.]: Cambridge university press, 1995. v. 1.
- WEYL, H. **The theory of groups and quantum mechanics**. Dover Publications, 1931. (Dover Books on Mathematics). ISBN 9780486602691. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=jQbEcDDqGb8C>>.
- WIGNER, E. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. **Annals of Mathematics**, Annals of Mathematics, v. 40, n. 1, p. 149–204, 1939. ISSN 0003486X. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1968551>>.