

WEBERTY DOMINGOS SILVA

**SISTEMAS DINÂMICOS SIMBÓLICOS EM
ALFABETOS INFINITOS**

São José do Rio Preto
2022

WEBERTY DOMINGOS SILVA

**SISTEMAS DINÂMICOS SIMBÓLICOS EM
ALFABETOS INFINITOS**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao programa de pós graduação em matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Ali Messaoudi

São José do Rio Preto

2022

S586s

Silva, Weberty Domingos

Sistemas dinâmicos simbólicos em alfabetos infinitos / Weberty Domingos Silva. -- São José do Rio Preto, 2022
81 f.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio
Preto

Orientador: Ali Messaoudi

1. Substituições. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Alfabetos infinitos. 4.
Medida invariante. 5. Ergodicidade. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

WEBERTY DOMINGOS SILVA

SISTEMAS DINÂMICOS SIMBÓLICOS EM ALFABETOS INFINITOS

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao programa de pós graduação em matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ali Messaoudi
Orientador

Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera
Universidade Federal do Rio Grande do
Sul

Prof. Dr. Glauco Valle Silva Coelho
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. José Régis Azevedo Varão filho
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita
Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho

São José do Rio Preto, 19 de Agosto de
2022.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me ter concedido vida, saúde e ânimo para realizar este trabalho.

Agradeço profundamente à minha família, em especial a minha mãe Sara, que me encorajou durante toda a minha vida acadêmica e me foi muito importante nos momentos em que estive perto de desanimar; as minhas irmãs shauane e Kauane pelo apoio.

Agradeço ao professor Dr. Ali Messaoudi que, ainda que não me conhecesse, aceitou o meu convite para ser meu orientador e tem me guiado durante essa jornada.

Agradeço a todos os professores do departamento de matemática do Ibilce, que foram muito amigáveis desde o primeiro dia que cheguei em Rio Preto.

Aos meus amigos Jéssica, Bruna, Elias, André, Rafael, Wyldson, João e tantos outros que fizeram parte da minha vida, pelas conversas e convivência.

Aos professores pelo apoio e torcida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

SILVA, Weberty Domingos. **Medidas Invariantes em Sistemas Dinâmicos de Substituições em Alfabetos Infinitos**. 2022. 82 páginas. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade, São José do Rio Preto, 2022.

RESUMO

Uma substituição é uma aplicação de um conjunto A (alfabeto) no conjunto das palavras finitas de A . A cada substituição σ , podemos associar de maneira natural um sistema dinâmico Ω_σ . Quando o alfabeto A é finito, é conhecido que o sistema dinâmico Ω_σ satisfaz diversas propriedades dinâmicas e topológicas. Em particular, se σ é primitiva, o sistema dinâmico associado é minimal, unicamente ergódico e tem entropia topológica nula.

Neste trabalho, consideramos o caso onde o alfabeto A é infinito enumerável. Em particular demos condições para que o sistema dinâmico associado possua uma única medida de probabilidade invariante. Estudamos ergodicidade, unicidade ergódica e minimalidade dos sistemas dinâmicos associados a essas substituições.

O nosso trabalho envolve matrizes enumeráveis e o teorema de Perron associado.

Palavras-chave: Substituições. Alfabetos infinitos. Sistemas dinâmicos. Medida invariante. Ergodicidade.

SILVA, Weberty Domingos. **Invariant measures of dynamical systems associated to substitution on infinite alphabet**. 2022. 82 pages. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade , São José do Rio Preto, 2022.

ABSTRACT

A substitution is an application from a set A (called alphabet) to the set of the finite words of A . Each substitution σ can be associated to a dynamical system Ω_σ in a natural way. If A is finite, is well know that Ω_σ has many dynamical and topological properties, particularly, if σ is a primitive substitution, then the associated dynamical system is minimal, uniquely ergodic, and have null topological entropy.

In this work we consider the case when A is infinite and countable. In particular we find sufficient conditions to the dynamical system have a unique invariant probability. We study the ergodicity, unique ergodicity ad minimality of the dynamical system associated with the substitution.

We use infinite matrices and the associated Perron theorem.

Keywords: Substitutions. Infinite alphabet. Dynamic systems. Invariant measures. Ergodicity.

Sumário

1	Introdução	9
2	Preliminares	13
2.1	Sistemas Dinâmicos	13
2.2	Sistemas Dinâmicos Simbólicos	14
2.2.1	Palavras, Linguagem e Cilindros	14
2.2.2	Sistema dinâmico associado a uma palavra infinita	15
2.2.3	Substituições	16
2.2.4	Sistemas Dinâmicos associados a Substituições	17
2.2.5	Matriz de uma Substituição	18
2.2.6	Matrizes Infinitas Enumeráveis	21
3	Medidas invariantes, Ergodicidade, Unicidade ergódica e Minimalidade	27
3.0.1	Sobre a não existência de medida invariante finita	30
3.1	Existência de Medida Invariante	36
3.1.1	A Substituição σ_I	37
3.1.2	Exemplo 1	45
3.1.3	Exemplo 2	46
3.1.4	Substituições de comprimento constante e unicidade ergódica . .	47
3.2	Cálculo da Medida Invariante	51
3.2.1	Exemplo 1	51
3.2.2	Exemplo 2	53
3.3	Substituições fortemente ergódicas de Comprimento não constante . . .	54
3.3.1	Exemplos	61
3.4	Substituição Fortemente Ergódica Estrela	64
3.5	A Medida Natural	67
3.5.1	Exemplo	68
3.6	Substituições Irredutíveis Periódicas	70
4	Conclusão	74
5	Anexo 1	75
5.1	Matrizes Estocásticas	76
	REFERÊNCIAS	81

1 INTRODUÇÃO

Um sistema dinâmico discreto é um par (X, f) onde X é um conjunto não vazio e $f : X \mapsto X$ é uma aplicação. Um dos objetivos dos sistemas dinâmicos é estudar propriedades assintóticas das órbitas dos pontos de X isto é, os conjuntos do tipo $O(u) = \{f^n(u), n \in \mathbb{N}\}$ onde $u \in X$ e $f^n(u) = f \circ f \circ \dots \circ f(u)$, n vezes.

Uma classe dos sistemas dinâmicos discretos são os sistemas dinâmicos simbólicos (X, f) que são sistemas onde X é um subconjunto fechado de $A^{\mathbb{N}}$, onde A (chamado de alfabeto) é um conjunto finito e $A^{\mathbb{N}}$ é o conjunto das sequências (palavras) infinitas sobre o alfabeto finito A munido com a topologia produto da topologia discreta de A .

Um exemplo de sistema dinâmico simbólico é o sistema $(A^{\mathbb{N}}, S)$ onde A é um conjunto finito e S é a aplicação deslocamento (shift) definida por $S(a_0a_1 \dots a_n \dots) = a_1a_2 \dots a_n \dots$. Outro exemplo são os sistemas dinâmicos associados a substituições.

Uma substituição é uma aplicação $\sigma : A \mapsto A^*$ onde A é um alfabeto e A^* é o conjunto das palavras finitas sobre A . Podemos estender σ para A^* e $A^{\mathbb{N}}$ por concatenação isto é $\sigma(a_1a_2 \dots a_n) = \sigma(a_1)\sigma(a_2) \dots \sigma(a_n)$ e $\sigma(a_1a_2 \dots a_n \dots) = \sigma(a_1)\sigma(a_2) \dots \sigma(a_n) \dots$.

Alguns exemplos clássicos de substituições são a substituição de Thue-Morse $A = \{0, 1\}$; $\sigma(0) = 01$, $\sigma(1) = 10$ e a substituição de Fibonacci, dada por $\sigma(0) = 01$, $\sigma(1) = 0$. O sistema dinâmico associado a uma substituição σ é (Ω_σ, S) , onde S é a aplicação deslocamento e Ω_σ é o conjunto das palavras infinitas $V \in A^{\mathbb{N}}$ tais que toda palavra finita v que aparece em V aparece em $\sigma^n(a)$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e $a \in A$. Se $u \in A^{\mathbb{N}}$ for um ponto periódico de σ , isto é $\sigma^k(u) = u$, definimos o sistema dinâmico associado a σ e a u como $(\overline{O(u)}, S)$ onde $\overline{O(u)}$ é o fecho da órbita de u . Considerando como exemplo a substituição de Fibonacci, temos que o ponto $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(0)$ é um ponto fixo.

Os sistemas dinâmicos de substituições foram inicialmente considerados por A. Hedlund e M. Morse [18] para estudar geodésicas em superfícies de curvatura negativa. Desde então essa teoria se desenvolveu e se conecta com várias áreas da matemática sistemas dinâmicos, frações contínuas, fractais, azulejamento do plano entre outras, com também tem relações com outras áreas entre elas química e física teórica.

Existem vários resultados clássicos sobre sistemas dinâmicos de substituições em alfabetos finitos. Dada uma substituição σ , associamos a ela uma matriz M_σ onde $(M_\sigma)_{ij}$ denota a quantidade de vezes que j aparece em $\sigma(i)$. Se uma substituição σ é primitiva (M_σ é primitiva) então σ possui um ponto periódico u , além disso o sistema dinâmico associado não depende da escolha do ponto periódico u (isto é $\Omega_\sigma = \Omega_u$), possui uma única medida de probabilidade invariante pelo shift S , é minimal e tem entropia topológica nula.

A medida invariante encontrada para esse sistema dinâmico é definida nos cilindros $[w]$, onde $\mu([w])$ é a frequência de ocorrência de w no ponto periódico u e $[w]$

é o conjunto das palavras de Ω_u que se iniciam com w .

Para substituições em alfabetos infinitos a literatura é bastante limitada ([21],[23],[7]). Parte da dificuldade de estudar sistemas dinâmicos associados a substituições em alfabetos infinitos está no fato que a matriz associada M_σ é uma matriz infinita enumerável. Além disso, Ω_σ não é compacto.

Os resultados obtidos dependem do fato da matriz M_σ associada a substituição ser transiente ou recorrente.

Uma matriz não negativa (ver [14]) $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ é dita irredutível e aperiódica se, para todo par $i, j \in \mathbb{N}$ existe um inteiro positivo n tal que $M_{ij}^k > 0$, para todo $k \geq n$.

O valor de Perron de M é denotado por λ , onde $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (M_{ij}^n)^{\frac{1}{n}}$. (esse limite existe). Dizemos que M é transiente se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{ij}^n}{\lambda^n} < \infty$, caso contrário dizemos que M é recorrente.

É conhecido (ver [14]) que se M é recorrente então M possui autovetores a direita e a esquerda r e l associados a λ . Dizemos que M é positivo recorrente se o produto escalar $l \cdot r$ for finito, caso contrário dizemos que M é nulo recorrente.

Em [21], Ferenczi mostrou que para a substituição σ definida em $A = 2\mathbb{N}$ por $\sigma(n) = (n-2)nn(n+2)$ o sistema dinâmico associado (Ω, S) não é minimal e não possui medida invariante finita mas possui uma medida infinita que é S -invariante, além disso a entropia de krengel do sistema (Ω, S, μ) é 0. O autor também provou que se σ é de comprimento constante (o comprimento da palavra $\sigma(n)$ é igual a uma constante para todo $n \in \mathbb{N}$), determinada a esquerda (definição (2.14)) e tem uma matriz associada que seja irredutível, aperiódica e positivo recorrente, então o sistema dinâmico associado possui uma medida de probabilidade ergódica.

Em [23], os autores construíram diagramas de Brattelli-Vershik (estacionários e não estacionários) para substituições determinadas a esquerda tais que M_σ seja irredutível, aperiódica e recorrente em um alfabeto enumerável. Como consequência, eles provaram que uma substituição $\sigma : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ de tamanho limitado, (isto é as letras de $\sigma(n)$ estão no conjunto $\{n-t, n-t+1, \dots, n+t\}$, onde $t \in \mathbb{Z}$ não depende de n). Então existe uma medida invariante pelo shift.

O objetivo deste trabalho é estudar sistemas dinâmicos associados a substituições em alfabetos infinitos enumeráveis e procurar condições para que estes possuam medidas que sejam invariantes com relação ao operador deslocamento. Também estudamos a ergodicidade e minimalidade desses sistemas.

Entre os resultados provados nessa tese, mostramos que se $\sigma : A \mapsto A^*$, $A = \mathbb{N}$, (Teorema 3.5) é uma substituição tal que $M_\sigma = M$ é irredutível, aperiódica e satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in A} \frac{M_{ij}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{ik}^n} = 0. \quad (1.1)$$

Então o sistema dinâmico associado a σ não possui medida invariante finita. Em particular, (1.1) é válida para uma classe grande de substituições como as substituições em que σ tem comprimento constante e M_σ é transiente ou quando M_σ é recorrente e o autovetor a esquerda l não está em l^1 .

Com isso encontramos vários exemplos de sistemas dinâmicos sem medida invariante finita como por exemplo a classe de substituições $\sigma_{a,b,c}$, $a, b, c \in \mathbb{N}$ dada por

$$\sigma_{a,b,c}(1) = 1^{a+b}2^c, \quad \sigma_{a,b,c}(n) = (n-1)^a(n)^b(n+1)^c.$$

Onde $a \leq c$.

Relacionado a $\sigma_{a,b,c}$ (exemplo 16) mostramos que $M_{\sigma_{abc}}$ é positivo recorrente se $a > c$ e nulo recorrente se $a \leq c$.

Um resultado surpreendente (proposição 3.8) é que o sistema dinâmico associado a $\sigma_{a,b,c}$ é sempre não minimal.

Um dos resultados centrais dessa tese, é o seguinte (Teorema 3.9). Seja σ uma substituição tal que M_σ seja positiva recorrente então o sistema dinâmico associado possui uma medida invariante. Além disso, essa medida é finita se e somente se o autovetor de Perron à esquerda l está em l^1 . Esse teorema estende o resultado de [23], onde os autores mostram a existência de medida invariante supondo condições suplementares como o fato da substituição ter tamanho limitado e ser determinada a esquerda. Além disso, os autores usaram diagramas de Brattelli e aqui utilizamos técnicas diferentes. Uma versão desse teorema para substituições em alfabetos finitos pode ser encontrada em [20].

Outro resultado importante é o Teorema 3.18, onde provamos que se σ é uma substituição de comprimento constante tal que M_σ seja scrambling então o sistema dinâmico associado possui uma única medida de probabilidade invariante.

A prova deste teorema é técnica, usamos ferramentas da teoria das matrizes infinitas e estocásticas, em particular matrizes scrambling e matrizes fortemente ergódicas.

Uma matriz não negativa $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ é dita scrambling se existe $a > 0$ tal que para todo i, k :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \min\{M_{ij}, M_{kj}\} > a. \quad (1.2)$$

Matrizes scrambling são muito importantes na teoria das matrizes estocásticas e estão relacionadas aos estudos de cadeias de Markov e ergodicidade forte.

Um resultado importante, que pode ser encontrado em [12] garante que uma matriz estocástica M é fortemente ergódica se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que M^n seja scrambling.

Uma matriz estocástica P é fortemente ergódica se P^n converge uniformemente para uma matriz Q que possui todas as linhas iguais a um vetor de probabilidade não

negativo π .

No caso das substituições de comprimento constante e fortemente ergódicas, mostramos que todas as palavras que ocorrem no ponto periódico possuem uma frequência de aparição e que a medida obtida através do Teorema 3.18 coincide com a medida das frequências.

Estendemos este resultado para substituições de comprimento não constante, definindo as noções de matriz (não estocástica) fortemente ergódica (Definição 3.21) e matriz (não estocástica) fortemente ergódica estrela (Definição 3.28). Mostramos que se σ é uma substituição de comprimento não constante tal que M_σ é scrambling então o sistema dinâmico associado a σ possui uma única medida de probabilidade invariante e ergódica (Teorema 3.22). Mostramos que, sobre certas condições, uma matriz fortemente ergódica é fortemente ergódica estrela e também que se σ é uma substituição tal que M_σ é estrela ergódica então o sistema dinâmico associado possui uma única medida de probabilidade invariante (Teorema 3.32). Mostramos também se σ é tal que M_σ é scrambling então o sistema dinâmico associado é minimal.

Também provamos a existência de medidas invariantes em substituições σ tal que a matriz M_σ é periódica de período $p \geq 2$. Nesse caso não temos unicidade ergódica, mas existem p medidas invariantes.

Essa tese está dividida em 3 capítulos. No capítulo 2, enunciamos alguns resultados preliminares, que são válidos para substituições em alfabetos finitos e também enunciamos alguns resultados clássicos que serão utilizados durante a tese.

No capítulo 3 encontram-se os resultados inéditos obtidos nessa tese.

No Anexo, colocamos as provas de alguns teoremas que foram utilizados na tese.

2 PRELIMINARES

Nesse capítulo, vamos fornecer algumas definições básicas sobre sistemas dinâmicos de substituições e enunciaremos alguns resultados que serão utilizados no decorrer desse trabalho.

2.1 SISTEMAS DINÂMICOS

Definição 2.1. Um *sistema dinâmico discreto* é um par (X, f) onde X é um conjunto não vazio e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação. Se em X temos uma topologia para a qual f é contínua, dizemos que (X, f) é um *Sistema dinâmico topológico*. Se X possuir uma σ -álgebra pela qual f é mensurável, dizemos que (X, f) é um *sistema dinâmico mensurável*.

Um dos objetivos dos sistemas dinâmicos é estudar o comportamento assintótico das órbitas, isto é, os conjuntos $O(x) = \{f^i(x); i \in \mathbb{N}\}$ onde $f^i(x) = f \circ f \circ \dots \circ f(x)$ (i vezes). Esse estudo pode ser feito de maneira topológica ou mensurável.

Exemplo 1. 1- Considere $X = [0, 1]$ e $S(x) = 10x \bmod 1$. O par (X, S) é um sistema dinâmico mensurável, uma vez que X é um intervalo e S é mensurável. Para o ponto $x = 0,1111\dots$ temos que $O(x) = \{x\}$ e para $x = 0,12121212\dots$ temos que $O(x) = \{0,121212\dots; 0,212121\dots\}$

2- Sejam $X = \{1, 2, \dots, d\}^{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as sequências infinitas $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tais que $a_i \in \{1, 2, \dots, d\}$ e $S(x_1x_2\dots) = x_2x_3\dots$ a aplicação deslocamento (shift). Temos que (X, S) é um sistema dinâmico discreto.

3- Sejam $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Considere $R_\theta(z) = ze^{i\theta}$ a rotação em S^1 . (S^1, R_θ) é um sistema dinâmico mensurável.

Definição 2.2. Seja (X, f) um sistema dinâmico topológico. Dizemos que o sistema é:

- **Topologicamente transitivo** se, para qualquer par U, V de subconjuntos abertos não vazios de X , existe um natural n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
- **Minimal** se os únicos conjuntos fechados e invariantes por f são $\emptyset$ e X . (um conjunto $A \subset X$ é invariante se $f(A) \subset A$).

Proposição 2.3. Seja (X, f) um sistema dinâmico topológico. As seguintes afirmações são válidas;

- 1- Se para algum $x \in X$, $O(x)$ é denso então, (X, f) é topologicamente transitivo.
- 2 - O sistema dinâmico (X, f) é minimal se, e somente se $O(x)$ é densa para todo $x \in X$.

Exemplo 2. Considerando $X = S^1$ e $R_\theta(z) = ze^{i\theta}$. Se $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, então o sistema dinâmico (X, R_θ) é minimal.

Seja $X = \{1, 2, \dots, d\}^{\mathbb{N}}$ e S a aplicação shift em X . O sistema dinâmico (X, S) é topologicamente transitivo mas não é minimal.

2.2 SISTEMAS DINÂMICOS SIMBÓLICOS

2.2.1 Palavras, Linguagem e Cilindros

Seja A um conjunto não vazio e enumerável. Chamamos A de alfabeto. O conjunto de todas as sequências finitas de A é denotado por A^* e o conjunto de todas as sequências infinitas de A é denotado por $A^{\mathbb{N}}$, ou seja

$$A^* = \{x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}; x_k \in A \forall 1 \leq k \leq n\},$$

$$A^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}; x_k \in A \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Um elemento de A é chamado de letra. Um elemento de A^* (respectivamente $A^{\mathbb{N}}$) é chamado de palavra (respectivamente palavra infinita).

Denotaremos $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ por $x_1 x_2 \dots x_n$ e $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ por $x_1 x_2 \dots$.

Definição 2.4. Dado uma palavra finita $w = w_1 w_2 \dots w_n \in A^*$, o **comprimento** de w , denotado por $|w|$ é n .

Dadas uma palavra finita u e uma palavra (finita ou infinita) w , denotamos por $|w|_u$ o número de ocorrências de u em w .

Dadas uma palavra finita u e uma palavra (finita ou infinita) $w = w_1 w_2 \dots$, dizemos que u é um **fator** de w se existem $k, n \in \mathbb{N}$ tais que $u = w_k w_{k+1} \dots w_{k+n}$.

Dada uma palavra w , o conjunto de todos os fatores de w é chamado de **linguagem** de w e denotado por $\mathcal{L}(w)$.

Exemplo 3. Considerando o alfabeto $A = \{1, 2\}$, as palavras finitas 12, 11 e 121 são elementos de A^* , a palavra 131 não é um elemento de A^* , uma vez que $3 \notin A$. As palavras infinitas $u = 1111 \dots, v = 1212121212 \dots$ e $w = 121121121 \dots$ são elementos de $A^{\mathbb{N}}$.

Temos que $|12| = 2$ e $|121| = 3$ além disso, $|12|_1 = 1, |12|_2 = 1$ e $|121|_1 = 2, |121|_2 = 1$.

Temos que 1, 11, 111, $\dots$, 1111 $\dots$ 1 são fatores de u , 121 e 212 são fatores de v e 21, 11 são fatores de w .

A linguagem de u é $\mathcal{L}(u) = \{(a_n)_{1 \leq n \leq N} : a_i = 1 \forall 1 \leq i \leq N\}$.

Definição 2.5. Dados um alfabeto A e $x = x_1 x_2 \dots x_n \in A^*$ uma palavra finita, o **cilindro** $[x] = [x_1 x_2 \dots x_n]$ é o conjunto

$$[x] = \{v = v_1 v_2 \dots \in A^{\mathbb{N}} : v_i = x_i \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

Ou seja, $[x]$ é o conjunto de todas as palavras infinitas que começam com x .

Exemplo 4. Seja $A = \{1, 2\}$, temos que $u = 1111 \dots$ é um elemento do cilindro $[1]$ mas não é um elemento de $[12]$. A palavra $w = 1212121212 \dots$ é um elemento de $[12]$ mas não é um elemento de $[1221]$.

Considere a aplicação $d : A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{R}$ definida por:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se, } x_i = y_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}. \\ 2^{-k} & \text{onde } k = \min\{i : x_i \neq y_i\}, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Proposição 2.6 ([20]). $(A^{\mathbb{N}}, d)$ é um espaço métrico e os cilindros são conjuntos abertos e fechados na topologia induzida pela métrica d . Além do mais essa topologia é gerada pelos cilindros e coincide com a topologia produto das topologias discretas sobre A . Se A é um conjunto finito, $A^{\mathbb{N}}$ é compacto. Se A é um conjunto enumerável infinito, $A^{\mathbb{N}}$ é fechado mas não é compacto.

Definição 2.7. Seja A um conjunto enumerável. O **deslocamento**, também chamado de **shift** é a aplicação:

$$S : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}, \quad \text{onde } S(a_1 a_2 a_3 \dots) = a_2 a_3 a_4 \dots, \quad \forall a_1 a_2 \dots \in A^{\mathbb{N}}.$$

Proposição 2.8. A aplicação shift é contínua e sobrejetora, mas não é injetora.

2.2.2 Sistema dinâmico associado a uma palavra infinita

Definição 2.9. Seja A um conjunto enumerável. Um sistema dinâmico simbólico é um sistema dinâmico topológico (X, f) , onde X é um subconjunto fechado de $A^{\mathbb{N}}$ munido com a topologia produto da topologia discreta em A .

Exemplo 5. Considerando $A = \{1, 2\}$, temos que $(A^{\mathbb{N}}, S)$ é um sistema dinâmico simbólico.

O conjunto $X = \{w\}$ onde $w = 1111 \dots$ é um subconjunto fechado de $A^{\mathbb{N}}$ e, (X, S) é um sistema dinâmico simbólico.

Definição 2.10. Sejam A um alfabeto e $w \in A^{\mathbb{N}}$ uma palavra infinita. O sistema dinâmico associado a palavra w é o sistema (Ω_w, S) onde $\Omega_w = \overline{O(w)}$ (fecho da órbita de w).

Definição 2.11. Uma palavra $w \in A^{\mathbb{N}}$ é minimal se para qualquer $u = u_1 \dots u_n$ fator de w , temos que u ocorre em w com lacunas limitadas, isto é, existe M tal que u ocorre em $w_j w_{j+1} \dots w_{j+M}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.12 ([20]). Sejam A um conjunto finito e $w \in A^{\mathbb{N}}$. Então (Ω_w, S) é minimal se, e somente se w é minimal.

Exemplo 6. Seja $A = \{1, 2\}$ e $w = 12121212 \dots \in A^{\mathbb{N}}$. Temos que (Ω_w, S) é minimal pois w é uma palavra minimal.

2.2.3 Substituições

Definição 2.13. *Seja A um alfabeto. Uma substituição é uma aplicação $\sigma : A \mapsto A^*$.*

Exemplo 7. *Seja $A = \{1, 2\}$.*

- *A substituição de Thue-Morse é dada por*

$$\sigma(1) = 12, \sigma(2) = 21.$$

- *A substituição de Fibonacci é dada por*

$$\sigma(1) = 12, \sigma(2) = 1.$$

Seja $A = \mathbb{N}$,

- *A substituição de Fibonacci infinito é dada por:*

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1(n+1), & \text{se } n \text{ é ímpar.} \\ n+1, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

- *A substituição 2-ádica é dada por:*

$$\sigma(n) = 1(n+1), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Observação. Uma substituição σ pode ser estendida para A^* (respectivamente $A^{\mathbb{N}}$) por concatenação, ou seja $\sigma(a_1 a_2 \dots a_n) = \sigma(a_1) \sigma(a_2) \dots \sigma(a_n)$ (respectivamente $\sigma(a_1 a_2 \dots) = \sigma(a_1) \sigma(a_2) \dots$).

No caso da substituição de Thue-Morse, temos que $\sigma(12) = 1221$ e $\sigma(1111 \dots) = 121212 \dots$.

Definição 2.14. *Seja σ uma substituição sobre A que possui um ponto fixo u . Dizemos que σ é **fracamente determinada a esquerda** se existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que se $w \in \mathcal{L}(u)$ é uma palavra com $|w| \geq N$ então w pode ser escrita como $w = w_1 \dots w_s$ onde cada w_i é $\sigma(a_i)$ para algum $a_i \in A$, exceto w_1 e w_s . Se essa decomposição for única, dizemos que σ é **determinada a esquerda**.*

Proposição 2.15. *Seja A um alfabeto finito e σ uma substituição em A . Se, para todo $a \in A$ temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma^n(a)| = \infty$ então σ possui um ponto periódico, isto é existe $u \in A^{\mathbb{N}}$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que $\sigma^p(u) = u$.*

Demonstração. Iniciaremos a demonstração mostrando o seguinte:

Afirmção: Existem $b \in A$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que $\sigma^p(b)$ começa com b .

Seja N a cardinalidade de A e $a \in A$. Considere as palavras $\sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{N+1}(a)$. Para cada k , seja a_k a primeira letra de $\sigma^k(a)$ e observe que $a_k \in A$ para todo $1 \leq k \leq N+1$. Como temos N letras em A e $\{a_1, a_2, \dots, a_{N+1}\} \subset A$, devemos ter que $a_n = a_m$ para $1 \leq n < m \leq N+1$. Consideramos então $b = a_n$ e $p = m - n$ e temos que $\sigma^p(b)$ começa com b e a afirmação é verdadeira.

Agora basta verificar que $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{np}(b)$ é um ponto periódico de σ . De fato

$$\sigma^p(u) = \sigma^p(\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{np}(b)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{(n+1)p}(b) = u.$$

□

Exemplo 8. Para a substituição de Fibonacci no alfabeto $A = \{1, 2\}$ temos que $\sigma(1)$ começa com 1. Usando a proposição temos que $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(1)$ é um ponto periódico de período 1 (ponto fixo).

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\sigma : A \mapsto A^*$ a substituição onde $\sigma(1) = 22$, $\sigma(2) = 13$, $\sigma(3) = 24$, $\sigma(4) = 33$. Temos que $\sigma^2(2) = 2224$ começa com 2, usando a proposição anterior temos que $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{2n}(2)$ é um ponto periódico por σ e tem período 2.

Definição 2.16. Uma substituição σ é **primitiva** se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer par $a, b \in A$ temos que a ocorre em $\sigma^k(b)$.

Exemplo 9. Considere $A = \{1, 2\}$. A substituição de Thue-Morse em A é primitiva, pois 1 e 2 ocorrem em $\sigma(1) = 12$ e em $\sigma(2) = 21$.

A substituição de Fibonacci em A é primitiva, uma vez que 1 e 2 ocorrem em $\sigma^2(1) = 121$ e em $\sigma^2(2) = 12$.

Seja $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\sigma : B \mapsto B^*$ a substituição dada por $\sigma(1) = 22$, $\sigma(2) = 13$, $\sigma(3) = 24$, $\sigma(4) = 33$. Essa substituição não é primitiva, pois se 1 ocorre em $\sigma^n(1)$ então n é par. Por outro lado, se 2 ocorre em $\sigma^n(1)$ então n é ímpar.

2.2.4 Sistemas Dinâmicos associados a Substituições

Definição 2.17. Seja A um alfabeto, σ uma substituição sobre A e $u \in A^{\mathbb{N}}$ um ponto periódico por σ . O **sistema dinâmico associado** ao ponto periódico u e a substituição σ é o par (Ω_u, S) , onde $\Omega_u = \overline{O(u)}$ (fecho da órbita de u).

Exemplo 10. Considerado a substituição de Fibonacci sobre $A = \{1, 2\}$, temos que $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(1)$ é um ponto fixo de σ . O sistema dinâmico associado a σ e ao ponto u é o sistema $(\overline{O(u)}, S)$.

Teorema 2.18. Sejam A um alfabeto finito e $\sigma : A \mapsto A^*$ uma substituição primitiva. O sistema dinâmico associado a σ é minimal e não depende do ponto periódico.

Demonstração. Sabemos que σ possui um ponto periódico $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{np}(u_1) = u_1 u_2 \dots$, logo existem $p \in \mathbb{N}$ e $u_1 \in A$ tais que $\sigma^p(u_1)$ começa com u_1 . Se $p = 1$ temos que u é um ponto fixo. Se $p \neq 1$ consideramos a substituição $\tau = \sigma^p$ e para a substituição τ vale que $\tau(u_1)$ começa com u_1 e u é um ponto fixo de τ . Portanto, podemos considerar sem perda de generalidade que existe $u_1 \in A$ tal que $\sigma(u_1)$ começa com u_1 e que o ponto periódico $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(u_1)$ é um ponto fixo.

Afirmção: O sistema (Ω_u, S) é minimal se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^k(a)$ contém u_1 para todo $a \in A$.

Suponhamos então que existe esse k . Como $u = \sigma^k(u)$ temos que u pode ser escrito como concatenação de palavras do tipo $\sigma^k(a)$ e todas elas contém u_1 . Com isso, u_1 aparece em u com lacunas limitadas e o mesmo vale para qualquer fator v de u , pois $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(u_1)$, e para k suficientemente grande v ocorre em $\sigma^k(u_1)$. Usando a proposição 2.12, temos que o sistema (Ω_u, S) é minimal e vale a afirmação.

Vejamos agora que o sistema não depende da escolha de u .

Sejam $v = v_1 v_2 \dots$ e $w = w_1 w_2 \dots$ pontos periódicos de σ , sendo assim existem $p, p' \in \mathbb{N}$ tais que $\sigma^p(v) = v$ e $\sigma^{p'}(w) = w$. Defina $m = pp'$ e note que $\sigma^m(v) = v$ e $\sigma^m(w) = w$. Seja $\tau = \sigma^m$ então $v = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau^n(v_1)$, $w = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau^n(w_1)$.

Seja agora $g \in \mathcal{L}(v)$. Para N suficientemente grande, g ocorre em $\tau^n(v_1) = \sigma^{mn}(v_1)$, $n \geq N$. Como σ é primitiva, existe um inteiro p tal que v_1 ocorre em $\sigma^k(w_1)$, $k \geq p$. Com isso, temos que $\sigma^{mn}(v_1)$ ocorre em $\sigma^{mnk}(w_1)$ e, conseqüentemente g é um fator de w . Portanto $\mathcal{L}(v) \subset \mathcal{L}(w)$. A inclusão contrária pode ser mostrada de modo análogo e concluímos que $\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(w)$.

Por outro lado, se $\mathcal{L}(v) \subset \mathcal{L}(w)$ então $v_1 \in \mathcal{L}(w)$. Como $\sigma^{p'}(w) = w$, temos que $\sigma^{pp'n}(v_1)$ é um fator de w , para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{pp'n}(v_1) = v$ e, portanto $v \in \Omega_w$. Podemos fazer o mesmo para obter que $w \in \Omega_v$ e, portanto $\Omega_v = \Omega_w$. $\square$

Observação. Para substituições primitivas, denotaremos o sistema dinâmico associado (Ω_u, S) por (Ω, S) uma vez que esse não depende da escolha de u .

2.2.5 Matriz de uma Substituição

Definição 2.19. Sejam $A = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ um alfabeto finito e σ uma substituição sobre A . A matriz $M_\sigma = (M)_{1 \leq i, j \leq n}$ dada por $M_{i,j} = |\sigma(i)|_j$ é chamada **matriz associada à substituição** σ .

Exemplo 1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e σ a substituição onde $\sigma(1) = 23, \sigma(2) = 31, \sigma(3) = 12$. Então

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sejam $A = \{1, 2\}$ e σ a substituição onde $\sigma(1) = 22$ e $\sigma(2) = 21$. Então

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observação. Sejam A um alfabeto e σ uma substituição sobre A . Existe apenas uma matriz M associada a substituição σ , o contrário não é verdadeiro. Dados um alfabeto A e uma matriz $(M_{i,j})_{i,j \in A}$, pode existir mais de uma substituição associada a M .

Tomando como exemplo $A = \{1, 2\}$ e σ a substituição de Thue-Morse $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 21$ e seja $\phi : A \mapsto A^*$ onde $\phi(1) = 21$, $\phi(2) = 12$. Temos que

$$M_\sigma = M_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que a matriz associada a uma substituição não

Observação. Em [20], o autor utiliza a matriz $M_{ij} = |\sigma(j)|_i$, que é a transposta da matriz que utilizamos nesse trabalho. Os resultados encontrados podem ser demonstrados de forma similar, com possível mudança nos índices da matriz associada.

Lema 2.20. *Seja σ uma substituição sobre o alfabeto $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Temos que $M_{ij}^n = |\sigma^n(i)|_j$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. A prova será feita por indução sobre n .

Seja $B \in A^*$, denotamos por $L(B) = (L(B)_i)_{1 \leq i \leq n}$, onde $L(B)_i = |B|_i$.

Observe que $L(i)$ é o vetor que tem todas as coordenadas iguais a zero, exeto na coordenada i , que é igual a 1. Portanto, $M(L(i))$ é o vetor $(M_{i1}, M_{i2}, \dots, M_{in})$ que é igual ao vetor $L(\sigma(i))$.

Suponhamos que, para k vale que:

$$M_{ij}^k = |\sigma^k(i)|_j \quad \text{e} \quad L(\sigma^n(i)) = M^{n-1}(L(\sigma(i))). \quad (2.1)$$

Observe que (2.1) vale para $k = 1$. Temos que

$$L(\sigma^{k+1}(i)) = L(\sigma^k(\sigma(i))) = M^k(L(\sigma(i))) = M^k(M(L(i))) = M^{k+1}(L(i)).$$

Observe que a igualdade acima é válida quando $k = 1$.

Portanto, $M_{ij}^n = |\sigma^n(i)|_j$. □

Definição 2.21. *Uma matriz não negativa $M = (M_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ é **primitiva** se existir $k \in \mathbb{N}$ tal que M^k possui todas as suas entradas estritamente positivas.*

Usando o lema 2.20, obtemos o seguinte resultado

Corolário 2.22. *Sejam A um alfabeto finito e σ uma substituição sobre A . Então σ é uma substituição primitiva se, e somente se, a matriz M_σ é uma matriz primitiva.*

Exemplo 11. *Para a substituição de Thue-Morse em $A = \{1, 2\}$ temos que:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que M é uma matriz primitiva.

Para a substituição de Fibonacci em $A = \{1, 2\}$ temos que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que M é uma matriz primitiva pois

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.23 (Perron-Frobenius para matrizes finitas). *Seja $M = (M_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $n \geq 2$, uma matriz não negativa e primitiva. Então:*

- (1) *Existe $\lambda > 0$ autovalor de M tal que $\lambda > |\theta|$ para qualquer $\lambda \neq \theta$ autovalor de M .*
- (2) *λ tem multiplicidade algébrica 1 (é um autovalor simples).*
- (3) *λ possui autovetores a esquerda e a direita l e r com coordenadas reais positivas.*

Definição 2.24. *Sejam A um alfabeto finito e $y \in A^{\mathbb{N}}$, para cada n seja $\epsilon_n(y)$ o conjunto das palavras de comprimento n que ocorrem em y . Chamamos de **função complexidade**, denotada por $p_y(n)$ a função onde*

$$p_y(n) = \#\epsilon_n(y).$$

Definição 2.25. *Sejam A um alfabeto finito com $\#A = s$ e $y \in A^{\mathbb{N}}$ a **entropia topológica** de y é o valor $h(y)$ onde*

$$h(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_s p_y(n)}{n}.$$

Um resultado importante é o seguinte:

Teorema 2.26. ([20]) *Seja σ uma substituição primitiva sobre um alfabeto finito A . O sistema dinâmico associado a σ possui uma única medida de probabilidade invariante μ . Além disso, esse sistema dinâmico tem entropia topológica nula.*

2.2.6 Matrizes Infinitas Enumeráveis

Definição 2.27. Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz não negativa. Dizemos que M é **irredutível** se dados $i, j \in \mathbb{N}$, existe um inteiro positivo k tal que $(M^k)_{ij} > 0$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos o **período** de i como $p_i = \text{mdc}\{k : (M^k)_{ii} > 0\}$. Se, para todo $i \in \mathbb{N}$ temos que $p_i = p$, dizemos que M é uma matriz **periódica de período p** , em particular se $p = 1$, M é dita **aperiódica**.

Exemplo 12. A matriz $(M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ onde $M_{ij} = 1$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$ é uma matriz irredutível e aperiódica.

Temos

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

M é uma matriz irredutível pois para $i, j \in \mathbb{N}$, temos que $M_{ij}^i > 0$. M é também aperiódica, uma vez que $M_{ij}^{i+1} > 0$.

Seja

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

É possível verificar que M matriz irredutível periódica de período $p = 2$.

Proposição 2.28 ([14]). Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz não negativa, irredutível e aperiódica. Para qualquer par de índices i, j , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $M_{i,j}^n > 0$ para todo $n \geq k$.

Corolário 2.29. Seja M uma matriz finita, então M é primitiva se, e somente se M é irredutível e aperiódica.

Proposição 2.30 ([14], pg 196). Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz enumerável, não negativa irredutível e aperiódica. Para qualquer i vale que:

- 1- Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $M_{ii}^n > 0$ para todo $n \geq k$.
- 2- $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_{i,i}^n}$ existe, não depende de i , j e é igual a $\sup\{(M_{i,i}^n)^{1/n}, n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstração. (1). Como M é uma matriz irredutível e aperiódica então existe uma matriz finita T , irredutível e aperiódica submatriz de M que contém o índice i . A matriz

T é primitiva, portanto (1) vale para T . Como M é uma matriz não-negativa, temos que (1) também vale para M .

Para (2) note que $(M^{n+m})_{ii} \geq M_{ii}^n \cdot M_{ii}^m$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\log(M_{ii}^{n+m}) \geq \log(M_{ii}^n) + \log(M_{ii}^m)$. Como $-\log(M_{ii}^{n+m})$ é subaditiva, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(M_{ii}^n)}{n}$ existe (ver [26]) e, consequentemente $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_{ii}^n}$ existe e é igual a $\sup\{(M_{ii}^n)^{1/n}, n \in \mathbb{N}\}$.

Uma demonstração semelhante pode ser feita no caso em que λ é infinito. $\square$

Observação. O valor λ é chamado de **valor de Perron** de M .

Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz não negativa, irredutível e aperiódica com valor de Perron de finito λ . Para cada i, j considere a série

$$T_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_{ij}^n z^n,$$

com

$$M_{i,j}^0 = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Definição 2.31. Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz não negativa, irredutível e aperiódica com valor de Perron finito λ . Dizemos que M é **transiente** se $T_{ij}(1/\lambda)$ é finito.

Se $T_{ij}(1/\lambda) = \infty$, M é dita **recorrente**.

Seja

$$L_{ij}(M, z) = L_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} l_{ij}(M, n) z^n, \quad (2.2)$$

onde $l_{ij}(M, n) = l_{ij}(n)$ é dado por:

$$l_{ij}(0) = 0; \quad l_{ij}(1) = M_{ij}; \quad l_{ij}(n+1) = \sum_{s \neq i} l_{is}(n) M_{sj}. \quad (2.3)$$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} n l_{ii}(n) / \lambda^n < \infty$, dizemos que M é **positivo recorrente**.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} n l_{ii}(n) / \lambda^n = \infty$, dizemos que M é **nulo recorrente**.

Observação. Podemos definir os coeficientes r_{ij} de modo semelhante aos coeficientes l_{ij} , onde:

$$r_{ij}(0) = 0, \quad r_{ij}(1) = M_{ij}, \quad \text{e} \quad r_{ij}(n+1) = \sum_{s \neq j} M_{is} r_{sj}(n). \quad (2.4)$$

Teorema 2.32 (Teorema de Perron Frobenius generalizado ([14]), pg 199). Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz enumerável, não negativa, irredutível, aperiódica e recorrente. Então existe um valor de Perron λ tal que:

1) $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_{ij}^n}$ para qualquer par de índices i, j , portanto $1/\lambda$ é o raio de convergência da série $T_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_{ij}^n z^n$.

2) λ possui autovetores a direita $r = (r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ e a esquerda $l = (l_i)_{i \in \mathbb{N}}$ estritamente positivos e únicos a menos de multiplicação por constante.

3) Sejam l, r os autovetores de λ então o produto escalar $l \cdot r$ é finito se, e somente se M for positivo recorrente.

Proposição 2.33. (ver. [14],[25]) Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz enumerável, irreduzível e aperiódica com valor de Perron finito λ . Então:

1) Se M é positivo recorrente então, para todo $i, j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{ij}^n / \lambda^n = L_{ij}(1/\lambda) / \mu(i) = R_{ij}(1/\lambda) / \mu(j) > 0.$$

Onde $\mu(i) = \sum_{n=0}^{\infty} n l_{ii}(n) / \lambda^n$.

2) Se M for transiente ou nulo recorrente então $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{ij}^n / \lambda^n = 0$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

Lema 2.34 ([14]). Sejam $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz não negativa, irreduzível e aperiódica com valor de Perron finito $\lambda > 0$.

(1) Se M é recorrente então para todo $i, j \in \mathbb{N}$,

$$(lM)_i = \lambda(l_i) \text{ e } (Mr)_j = \lambda(r_j), \quad \text{onde } \begin{cases} l = (L_{ij}(1/\lambda))_{i \in \mathbb{N}}, \\ r = (R_{ij}(1/\lambda))_{i \in \mathbb{N}}. \end{cases}$$

Em cada coordenada.

(2) Se M é transiente então para todo $i, j \in \mathbb{N}$,

$$(lM)_i \leq \lambda(l_i) \text{ e } (Mr)_j \leq \lambda(r_j).$$

Com a desigualdade acontecendo em algum dos índices.

Observação. Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz não negativa, irreduzível, aperiódica e positiva recorrente com valor de Perron finito $\lambda > 0$. O vetor $t = (t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ com $t_i = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{ij}^n / \lambda^n$ é um autovetor a esquerda de M associado ao valor de Perron λ . Além disso, temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n}{\lambda^n} = \frac{l_i r_j}{\sum_{k=1}^{\infty} l_k r_k}. \quad (2.5)$$

Onde $l = (l_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $r = (r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ são os autovetores a esquerda e a direita de M associados ao valor de Perron λ .

Lema 2.35. ([14], pg 204.) Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz recorrente com valor de Perron $\lambda > 0$, l, r os autovetores associados a λ ou seja $lM = \lambda l$ e $Mr = \lambda r$. Então:

(1) Se $x = (x_i) \geq 0$ é um vetor linha satisfazendo $xM \leq \lambda x$, então x é múltiplo de l .

(2) Se $y = (y_i) \geq 0$ é um vetor coluna satisfazendo $My \leq \lambda y$, então y é múltiplo de r .

Definição 2.36. Seja $v = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ um vetor enumerável. Dizemos que $x \in l^1$ se $\sum_{i=1}^{\infty} |v_i|$ é finito. Dizemos que $v \in l^\infty$ se existir $M > 0$ tal que $|v_i| < M$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definição 2.37. Um vetor não negativo $v = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é um **vetor estocástico** (também chamado de vetor de probabilidade) se $\sum_{i \in \mathbb{N}} v_i = 1$.

Uma matriz enumerável e não negativa $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ é uma **matriz estocástica** se, para cada linha de M a soma de seus elementos for igual a 1.

Definição 2.38. Seja M uma matriz estocástica. Dizemos que M é:

- **Ergódica** se para todo $i, j \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{ij}^n = \pi_j.$$

Onde $\pi = (\pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é um vetor estocástico.

- **Fortemente ergódica** se existe um vetor estocástico π tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|M^n - Q\|_s = 0$ onde $Q = (Q_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ com $Q_{ij} = \pi_j$ e $\|N\|_s = \sup_{i \geq 0} \sum_{j=0}^{\infty} |N_{ij}|$ para uma matriz enumerável de entradas complexas N . Em outras palavras:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \geq 0} \sum_{j \in \mathbb{N}} |M_{ij}^n - \pi_j| = 0.$$

Definição 2.39. Dada uma matriz estocástica M , o **coeficiente de Dobrushin** (também chamado de coeficiente de ergodicidade) de M é o valor $\delta(M)$ onde:

$$\delta(M) = 1/2 \sup_{i,k \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{\infty} |M_{ij} - M_{kj}|.$$

Proposição 2.40. Seja M uma matriz estocástica então:

$$\delta(M) = 1 - \inf_{i_1, i_2} \sum_{j=1}^{\infty} \min(M_{i_1 j}, M_{i_2 j}).$$

Demonstração. Ver anexo. □

Definição 2.41. Uma matriz não negativa é dita **scrambling** se $\delta(M) < 1$, isto é existe $a > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \min(M_{ij}, M_{kj}) > a, \quad \text{para todo } i, j, k \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Observação ([22], pg 66). Uma matriz M é scrambling se, e somente se M não possui linhas ortogonais (ou, alternativamente se quaisquer duas linhas de M se intersectam).

Observação. Se $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ é uma matriz cuja soma de suas linhas é constante igual a L então M/L é uma matriz estocástica. Além disso, M/L é scrambling se, e somente se M for scrambling.

Teorema 2.42 ([13]). *Uma matriz estocástica M é fortemente ergódica se, e somente se, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que M^n é scrambling.*

Demonstração. Ver anexo. □

Exemplo 2. Considere a matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Note que a soma dos elementos de qualquer linha de M é igual a 2. A matriz $M/2$ dada por:

$$M/2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

É uma matriz estocástica. Além disso, $M/2$ é fortemente ergódica, uma vez que a primeira coluna possui apenas entradas positivas.

Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$ e considere a matriz:

$$M = \begin{pmatrix} a+b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Note que a soma dos elementos de qualquer linha de M é igual a $a + b + c$. Portanto, a matriz:

$$\frac{M}{a+b+c} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{a+b+c} & \frac{c}{a+b+c} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{a}{a+b+c} & \frac{b}{a+b+c} & \frac{c}{a+b+c} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{a}{a+b+c} & \frac{b}{a+b+c} & \frac{c}{a+b+c} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{a}{a+b+c} & \frac{b}{a+b+c} & \frac{c}{a+b+c} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

É uma matriz estocástica mas não é fortemente ergódica pois nenhuma potência de

M é scrambling, uma vez que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, as palavras $\sigma^n(j)$ e $\sigma^n(j + 2n)$ não possuem letras em comum.

Proposição 2.43 ([11]). *Seja M uma matriz estocástica, então M é fortemente ergódica se, e somente se M for uniformemente geometricamente ergódica, ou seja, existem $0 < \beta < 1$ e $c > 0$ tais que para todo $i, j \in \mathbb{N}$,*

$$|M_{ij}^n - \pi_j| \leq c\beta^n.$$

Para algum vetor estocástico e positivo $\pi = (\pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Demonstração. Ver anexo.

□

3 MEDIDAS INVARIANTES, ERGODICIDADE, UNICIDADE ERGÓDICA E MINIMALIDADE

Agora vamos estudar substituições em alfabetos infinitos. Como já vimos no capítulo anterior, se A é um alfabeto finito e σ é uma substituição primitiva sobre A , então existe $u \in A^{\mathbb{N}}$ ponto periódico de σ . Além disso, o sistema dinâmico (Ω_u, S) possui uma única medida invariante, além do mais esse sistema dinâmico tem entropia topológica nula (estes resultados podem ser vistos mais detalhadamente em [20] e [9]). Buscamos encontrar resultados no mesmo espírito para substituições em alfabetos infinitos.

Seja A um alfabeto infinito enumerável. Podemos supor que $A = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Consideremos σ uma substituição em A e construímos a matriz M_σ de forma análoga ao que foi feito no caso de alfabeto finito, isto é $(M_\sigma)_{ij} = |\sigma(i)|_j$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Note que a matriz M_σ é uma matriz enumerável de entradas não negativas.

Vejamos alguns exemplos de matrizes associadas a substituições em alfabetos infinitos.

Exemplo 13. 1) Seja $A = \mathbb{N}$ e $\sigma : A \mapsto A^*$ a substituição dada por $\sigma(n) = 1(n+1)$. A matriz associada a σ é a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

2) Seja $A = \mathbb{Z}$ e $\sigma : A \mapsto A^*$ a substituição $\sigma(n) = (n-1)nn(n+1)$. A matriz associada a σ é a matriz:

$$M = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Definição 3.1. Seja σ uma substituição sobre o alfabeto A . Dizemos que σ tem **comprimento limitado** se, existe $L \in \mathbb{N}$ tal que $|\sigma(a)| \leq L$ para todo $a \in A$.

Se, para todo $a \in A$ temos que $|\sigma(a)| = L$, dizemos que σ é uma substituição de **comprimento constante** L .

Exemplo 14. 1-Seja $A = \mathbb{N}$ e $\sigma : A \mapsto A^*$ a substituição de Fibonacci infinito dada por:

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1(n+1), & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ n+1, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \quad (3.1)$$

σ é uma substituição de comprimento limitado por $L = 2$.

2- A substituição 2-ádica é dada por

$$\sigma(n) = 1(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

σ é uma substituição de comprimento constante igual a 2.

Observação. Neste trabalho vamos considerar apenas substituições de comprimento limitado.

Observação. No caso em que A é um alfabeto finito, temos que se σ é uma substituição sobre A tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma^n(a)| = \infty$, para todo $a \in A$, então existe $u \in A^{\mathbb{N}}$ ponto periódico por σ . Se A é um conjunto infinito, isso nem sempre é válido. A substituição $\sigma : A = \mathbb{N} \mapsto A^*$ onde $\sigma(n) = (n+1)(n+2)$ não possui pontos periódicos uma vez que, para quaisquer $k, n \in \mathbb{N}$, temos que $\sigma^k(n)$ começa com $n+k$ e, portanto é impossível que $\sigma^k(a)$ tenha como primeira letra a .

Em [21], para garantir a existência de um ponto fixo de uma substituição σ , o autor adiciona uma letra ω e define $\sigma(\omega) = \omega 1$. Deste modo, temos que $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(\omega) = \omega 1 \sigma(1) \sigma^2(1) \dots \sigma^n(1) \dots$ é um ponto fixo de σ . Ele considerou o sistema dinâmico (Ω, S) com $\Omega = \overline{O(u)}$.

Observação. Seja A um alfabeto e σ uma substituição sobre $A = \mathbb{N}$. Da definição da matriz associada M , temos que $\sum_{i=1}^{\infty} M_{ij} = |\sigma(i)|$. Se σ é uma substituição de comprimento constante L então $\sum_{i=1}^{\infty} M_{ij} = L$, para todo $i \in \mathbb{N}$ e, portanto M/L é uma matriz estocástica.

Se, para algum $a \in A$ temos que a é um fator de $\sigma(i)$, para qualquer i então a matriz associada M possui uma coluna onde todos os seus elementos são estritamente positivos. Nesse caso, a matriz M/L é scrambling e portanto fortemente ergódica.

Exemplo 15. Seja φ a seguinte substituição:

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1(n+1), & \text{Se } n \text{ é ímpar} \\ (n+1)(n+2), & \text{Se } n \text{ é par.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Note que σ é uma substituição de comprimento constante 2. Além disso, 1 ocorre em $\sigma^2(k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim σ^2 é uma substituição de comprimento constante igual a 4 e $M_{\sigma^2}/4$ é uma matriz fortemente ergódica, logo M_{σ} é fortemente ergódica, uma vez que M_{σ^2} é scrambling.

A matriz M_σ associada a substituição 2-ádica $\sigma(n) = 1(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ é fortemente ergódica.

Uma maneira de verificar que σ é fortemente ergódica é mostrando que $M_\sigma/2$ é scrambling. Temos

$$M/2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Note que a primeira coluna possui apenas valores positivos, portanto M_σ é scrambling também fortemente ergódica.

Também podemos mostrar que M_σ é fortemente ergódica usando a definição. Nesse caso, observe que:

$$v_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n}{2^n} = \frac{|\sigma^n(i)|_j}{2^n} = \frac{1}{2^j}.$$

Uma vez que $|\sigma^n(i)|_j = 2^{n-j}$, para todo $n > j - i$.

Como $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1$, temos que σ é ergódica. Além disso, temos que:

$$\frac{M_{ij}^n}{2^n} = \frac{|\sigma^n(i)|_j}{2^n} = \frac{|\sigma^{n-1}(i)|_{j-1}}{2^n} = \dots = \frac{|\sigma^{n-j-1}(i)|_1}{2^n} = \frac{2^{n-j}}{2^n} = \frac{1}{2^j}.$$

Observe que,

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \left| \frac{M_{ij}^n}{2^n} - \frac{1}{2^j} \right| = \sum_{j=1}^{i+n} \left| \frac{M_{ij}^n}{2^n} - \frac{1}{2^j} \right| + \sum_{j=i+n}^{\infty} \left| \frac{M_{ij}^n}{2^n} - \frac{1}{2^j} \right| = \frac{1}{2^{i+n}}.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_i \sum_{j \in \mathbb{N}} \left| \frac{M_{ij}^n}{2^n} - \frac{1}{2^j} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_i \sum_{j \in \mathbb{N}} \left| \frac{2^{n-j}}{2^n} - \frac{1}{2^j} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Portanto, M_σ é fortemente ergódica.

Definição 3.2. Seja A um alfabeto enumerável e σ uma substituição sobre A . O **sistema dinâmico** associado a substituição σ é o sistema (Ω, S) onde

$$\Omega = \{v \in A^{\mathbb{N}} : \text{se } u \text{ é um fator de } v \text{ então } u \text{ é fator de } \sigma^n(a), \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \text{ e } a \in A\}.$$

Observação. Seja σ é uma substituição irreduzível sobre o alfabeto enumerável $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ então para qualquer par de letras a_i, a_j temos que existe um inteiro positivo k tal que a_j ocorre em $\sigma^k(a_i)$. E, nesse caso temos que

$$\Omega = \{v \in A^{\mathbb{N}} : u \text{ é um fator de } v \text{ se, e somente se, } u \text{ é fator de } \sigma^n(a_1)\}.$$

Proposição 3.3. *Seja σ uma substituição irredutível e aperiódica. Se σ possui um ponto periódico u então $\Omega_u = \Omega$.*

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade que u é um ponto fixo e mostraremos que $\Omega_u \subset \Omega \subset \Omega_u$. A primeira inclusão pode ser facilmente verificada.

Seja $v = v_1 v_2 v_3 \dots \in \Omega$. Dado $n \in \mathbb{N}$, temos que $V_n = v_1 v_2 \dots v_n$ é um fator de v . Pela definição de Ω , V_n ocorre em $\sigma^k(a)$, para algum $a \in A$ e $k \in \mathbb{N}$. Como σ é irredutível e aperiódica, temos que para d suficientemente grande, a ocorre em $\sigma^d(u_1)$ e, portanto a ocorre em u . Como u é um ponto fixo, temos que $\sigma^k(u) = u$. Sendo assim, $\sigma^k(a)$ ocorre em u e portanto V_n ocorre em u . Como $v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$, temos que $v \in \overline{O(u)} = \Omega_u$, portanto $\Omega \subset \Omega_u$. $\square$

3.0.1 Sobre a não existência de medida invariante finita

Proposição 3.4. *Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz não negativa, irredutível e aperiódica com valor de Perron finito $\lambda > 0$ então:*

- 1) *Se a soma dos elementos das linhas de M é limitada por L , então $\lambda \leq L$.*
- 2) *Se M é positivo recorrente com soma de linhas constante igual a L então $\lambda = L$ e este é o único autovalor de M com autovetor a esquerda em l^1 .*
- 3) *Se M tem soma de linhas constante e é transiente ou M é positiva recorrente com o autovetor de Perron a esquerda $V = (v_i)_{i \in \mathbb{N}} \notin l^1$ então:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{i,a}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{k,a}^n} = 0 \quad \forall i, a \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. 1- Suponha que M tem soma de linhas limitada então

$$(M^n)_{jj} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (M^n)_{jk} \leq L^n, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Logo $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(M^n)_{jj}} \leq L$.

2- Se M é positivo recorrente com soma de linhas constante igual a L e λ é um autovalor de M com autovetor em l^1 então:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} w_i M_{i,j} = \lambda.$$

Para algum autovetor $w = (w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ com $|w|_1 = 1$, portanto $\lambda = L$.

3- Seja M transiente com soma de linhas constante igual a L . Sejam $i, j \in \mathbb{N}$ então para todo $n \geq 0$

$$\frac{(M^n)_{ij}}{\sum_{k=1}^{\infty} (M^n)_{ik}} = \frac{(M^n)_{ij} / \lambda^n}{(L / \lambda)^n}.$$

Como $\lambda \leq L$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (M^n)_{ij} / \lambda^n = 0$, usando a proposição (2.33), deduzimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(M^n)_{ij}}{\sum_{k=1}^{\infty} (M^n)_{ik}} = 0.$$

Agora suponha M é positiva recorrente e $V = (v_k)_{k \in \mathbb{N}} \notin l^1$ é o autovetor de Perron a esquerda. Sejam $i, j \in \mathbb{N}$. Como M é recorrente, temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(M^n)_{ik}}{(M^n)_{ij}} = \frac{L_{i,k}}{L_{i,j}} = cv_k, \text{ para todo } i, j, k \in \mathbb{N}.$$

Onde $c > 0$. Usando o lema de Fatou para séries e do fato que $V \notin l^1$ temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{ik}^n}{M_{ij}^n} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ik}^n}{M_{ij}^n} = c \sum_{k=1}^{\infty} v_k = \infty.$$

Deduzimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{ik}^n} = 0$. □

Observação. Em [21], o autor mostra que o sistema dinâmico associado a substituição σ em $A = 2\mathbb{Z}$ onde $\sigma(n) = (n-2)nn(n+2)$ não possui medida invariante finita, o próximo teorema busca estender esse resultado.

Teorema 3.5. *Seja $A = \mathbb{N}$ e $\sigma : A \rightarrow A^*$ uma substituição de comprimento limitado que possui um ponto periódico $u \in A^{\mathbb{N}}$. Suponha, além disso que σ é irredutível e aperiódica e que a matriz associada M satisfaz:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{M_{ij}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{ik}^n} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Então o sistema dinâmico (Ω_u, S) não possui medida invariante finita.

Observação. Existem várias classes de substituições que satisfazem as hipóteses do teorema uma delas, por exemplo é a classe das substituições $\sigma_{a,b,c}$ onde $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a \leq c$ e

$$\sigma_{a,b,c}(1) = 1^{a+b}2^c; \sigma_{a,b,c}(n) = (n-1)^a(n)^b(n+1)^c.$$

Para a demonstração do teorema, usaremos o lema a seguir:

Lema 3.6. *Sejam $\sigma : A \mapsto A^*$ $A = \mathbb{N}$, uma substituição, $V \in \mathcal{L}_u$ e $L = \max_{a \in A} |\sigma(a)|$. Então V pode ser escrito como:*

$$V = v_0 \sigma(v_1) \dots \sigma^{n-1}(v_{n-1}) \sigma^n(v_n) \sigma^{n-1}(w_{n-1}) \dots \sigma(w_1) w_0, \quad (3.5)$$

onde $n \geq 0$ é um inteiro e v_i, w_i são elementos de $\mathcal{L}_u$ de comprimento menor ou igual a L (que podem ser palavras vazias) e a palavra v_n é uma palavra não vazia.

Demonstração. Essa decomposição pode ser feita passo a passo. Pela definição de $\mathcal{L}_u$ temos que existe um $a \in A$ tal que V é um fator de $\sigma^{n+1}(a) = \sigma(\sigma^n(a))$, considerando o menor n com essa propriedade, temos que V não é um fator de $\sigma^n(a)$. Podemos encontrar V_1, v_0, w_0 tais que:

$$V = v_0\sigma(V_1)w_0.$$

Tomando V_1 como sendo o maior com essa propriedade então $|v_0|, |w_0| \leq L$. Agora fazemos a decomposição de V_1 que é um fator de $\sigma^n(a)$ e

$$V = v_0\sigma(V_1)w_0 = v_0\sigma(v_1\sigma(V_2)w_1)w_0 = v_0\sigma(v_1)\sigma^2(V_2)\sigma(w_1)w_0.$$

Continuamos o processo e encontramos uma sequência $V_j \in \mathcal{L}_u$ tal que $|V_{j+1}| < |V_j|$. O processo acaba quando chegamos em $V_n = v_n$ que é uma palavra não vazia e tem comprimento menor ou igual a L .

A decomposição é obtida quando substituímos todos os V_j . □

Observação. O lema anterior é clássico no caso de substituição sobre alfabeto finito.

Exemplo 3. Considere a substituição $\sigma(n) = 1(n+1)$ definida em $A = \mathbb{N}$ e o ponto fixo $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(1)$. Considere $V = 31214121312151$ e observe que V é um fator de u .

Para a decomposição de V , tomamos $v_0 = 3, w_0 = 1$ e $V_1 = 131214$. Assim

$$V = 3\sigma(131214)1.$$

Fazendo a decomposição de V_1 obtemos $v_1 = \emptyset, w_1 = \emptyset$ e $V_2 = 213$ e

$$V = 3\sigma(\sigma(213))1 = 3\sigma^2(213)1.$$

Fazemos a decomposição de V_2 e obtemos $v_2 = 2, w_2 = \emptyset$ e $V_3 = 2$. Note que $\max_{a \in A} |\sigma(a)| = 2$ e V_3 tem comprimento 1. Portanto, nesse caso $v_n = V_3$ e finalizamos a decomposição com

$$V = 3\sigma^2(2)\sigma^3(2)1.$$

Demonstração do Teorema (3.5). Suponha, sem perda de generalidade que $u = u_0u_1 \dots$ é um ponto fixo de σ . Por (3.4), temos que para todo $j \in A$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a \in A} \frac{|\sigma^n(a)|_j}{|\sigma^n(a)|} = 0. \quad (3.6)$$

Suponha que (Ω_u, S) possui uma medida invariante finita então existe uma medida finita ergódica μ . Pelo teorema ergódico de Birkhoff, deduzimos que para μ quase todo $x \in \Omega_u$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \# \{0 \leq k \leq N-1 : S^k(x) \in [j]\} = \mu([j]). \quad (3.7)$$

Onde $\#X$ representa o número de elementos do conjunto X .

Sejam $N \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega_u$ satisfazendo (3.7) e $V = u_k u_{k+1} \dots u_{k+N-1} \in \mathcal{L}(u)$ um prefixo de x .

Usando 3.6 temos que:

$$V = v_0 \sigma(v_1) \dots \sigma^{n-1}(v_{n-1}) \sigma^n(v_n) \sigma^{n-1}(w_{n-1}) \dots \sigma(w_1) w_0. \quad (3.8)$$

Onde $n \in \mathbb{N}$ e v_i, w_i são elementos de $\mathcal{L}(u)$ de comprimento limitado por $K = \max\{|\sigma(b)|, b \in A\}$ e v_n é uma palavra não vazia.

Temos que :

$$\frac{1}{N} \#\{0 \leq k \leq N-1, S^k(x) \in [j]\} = \frac{|V|_j}{|V|} = \frac{|\sigma^n(v_n)|_j + \sum_{k=0}^{N-1} (|\sigma^k(v_k)|_j + |\sigma^k(w_k)|_j)}{|\sigma^n(v_n)| + \sum_{k=0}^{N-1} (|\sigma^k(v_k)| + |\sigma^k(w_k)|)}.$$

Por outro lado, se $a \in A$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(a)|_i}{|\sigma^n(a)|} = 0$, portanto, se $v \in \mathcal{L}(u)$ então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(v)|_i}{|\sigma^n(v)|} = 0.$$

Usando o teorema de Stolz-Cesaro (ver anexo 1) temos que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(v_n)|_j + \sum_{k=0}^{N-1} (|\sigma^k(v_k)|_j + |\sigma^k(w_k)|_j)}{|\sigma^n(v_n)| + \sum_{k=0}^{N-1} (|\sigma^k(v_k)| + |\sigma^k(w_k)|)} = 0.$$

Concluimos que $\mu([j]) = 0$, sendo assim $\mu(\Omega) = 0$ o que é um absurdo. $\square$

Lema 3.7. *Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\sigma : A \mapsto A^*$ uma substituição tal que M_σ satisfaz (3.4). Suponha que M_σ possui um autovetor à direita $r = (r_i)_{i \in \mathbb{N}}$, associado ao valor de Perron $\lambda > 0$ tal que $\inf\{r_i : i \in \mathbb{N}\} > 0$ então M_σ é nulo recorrente ou transiente.*

Demonstração. Temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n}{\lambda^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{M_{ij}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{ik}^n} = 0.$$

Seja l e r os autovetores a esquerda e a direita associados a λ . Usando (2.5), temos que $l \cdot r = \infty$ e M não pode ser positivo recorrente. $\square$

Observação. O corolário anterior nos fornece várias classes de substituições para as quais os sistemas dinâmicos associados não possuem medida invariante finita. Por exemplo

Seja $A = \mathbb{N}$ e $\sigma : A \mapsto A^*$ a substituição onde $\sigma(1) = 112$, $\sigma(n) = (n-1)n(n+1)$, $\forall n \geq 2$

Temos que a matriz de σ é :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

M é irredutível e aperiódica, além disso $r = (1, 1, 1, \dots)$ é o autovalor a direita associado ao valor de Perron $\lambda = 3$. V^t é o autovalor a esquerda e, como $\langle v, w \rangle = \infty$ temos que M não é positivo recorrente. De fato, veremos adiante que M é nulo recorrente. σ possui um ponto fixo $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(1)$ e, com isso concluímos que o sistema dinâmico (Ω_u, S) não possui medida invariante finita.

Exemplo 16. Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$ e $\sigma_{abc} = \sigma$ definida por:

$$\sigma(1) = 1^{a+b}2^c, \quad \sigma(n) = (n-1)^a n^b (n+1)^c, \quad \forall n \geq 2$$

Onde $d^k = d \dots d$ é a palavra de comprimento k com todas as letras iguais a d .

(1) Se $c < a$ então M_σ é positivo recorrente.

(2) Se $c \geq a$ então M_σ é nulo recorrente.

Demonstração. Temos que a matriz associada a σ é a matriz

$$M = \begin{pmatrix} a+b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Usando a proposição (3.4), temos que $\lambda \leq L = a + b + c$. Seja $l = (l_i)_{i \in \mathbb{N}}$, o autovetor a esquerda de M . Através de computação simples, podemos concluir que

$$cl_n + al_{n+2} = (a+c)l_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

Além disso,

$$l_n = \left(\frac{c}{a}\right)^n l_0. \quad (3.10)$$

Suponha que $\lambda < a + b + c$ e seja $u = (u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ um vetor subinvariante de M . Sendo assim $uM < LM$ e,

$$u_{k+1} \leq \frac{c}{a} u_k, \quad \text{para todo } k \geq 0. \quad (3.11)$$

Logo, existe $s > 0$ tal que $u_k = \frac{c}{a} u_{k-1} - s$ e

$$u_{n+1} \leq \frac{c}{a} u_n - s.$$

Deduzimos que

$$u_n \leq \left(\frac{c}{a}\right)^{n-k} u_k - s.$$

Se $c < a$ então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $u_n < 0$ para todo $n \geq N$, o que é um absurdo. Portanto $\lambda = L$ e como o autovetor a direita associado a λ é $r = (1, 1, 1 \dots)$, temos que:

$$\langle u, w \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \left(\frac{c}{a}\right)^i. \quad (3.12)$$

M é positivo recorrente quando $c < a$.

Se $c = a$ então da equação (3.11), deduzimos que

$$u_n \leq u_k - (n - k)s \quad \text{para todo } n \geq k + 1.$$

Temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $u_n < 0$ para todo $n \geq N$, o que é um absurdo. Portanto $\lambda = L$ e como o autovetor a direita associado a λ é $r = (1, 1, 1 \dots)$, temos que:

$$\langle u, w \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} u_i = \infty.$$

Portanto, M é nulo recorrente.

Se $c > a$ consideramos P a matriz onde $P_{ij} = \frac{M_{ij}}{a+b+c}$. Usaremos uma abordagem probabilística para mostrar que $\lambda_P < 1$ e, $\bar{P}_{00}(1/\lambda_P) = \infty$ o que implica nulo recorrência. Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma cadeia de Markov cuja matriz de transição seja P e $\mathbb{P}^x$ a distribuição de $(X_n)_{n \geq 0}$ quando $X_0 = x$ para $x \in \mathbb{Z}_+$. Seja $p = c/(a + c)$ que é a probabilidade de um caminho aleatório se mover para a direita, deixando a sua posição quando esta é diferente de zero, ou seja:

$$p = \mathbb{P}^x(X_{n+1} = X_n + 1 \mid X_{n+1} \neq X_n) \quad \forall x \neq 0.$$

Queremos estimar P_{00}^n ou seja, a probabilidade de um passeio aleatório visitar a posição 0 em um estado de tempo n dado que esse passeio se iniciou no estado 0. Para que isso aconteça, devemos ter um número de pulos a direita igual a quantidade de pulos à esquerda. Vamos precisar das observações a seguir:

Observação 1

Note que $\#\{1 \leq j \leq n : X_{n+1} \neq X_n\}$ conta a quantidade de vezes que acontecem pulos para a direita ou para a esquerda. Existem constantes positivas $0 < c, \delta < 1$ tais que:

$$\mathbb{P}^0(\#\{1 \leq j \leq n : X_{n+1} \neq X_n\} \geq cn) > 1 - (\delta q)^n$$

Observação 2

Em $2k$ transições para a direita ou para a esquerda, o número de transições para a direita está distribuído como uma variável binomial de parâmetros $2k$ e p . Então a probabilidade de termos uma quantidade igual de saltos para a direita e para a esquerda é

$$\mathbb{P}(\text{Bin}(2k, p) = k) = \binom{2k}{k} p^k (1-p)^k \approx \frac{C}{\sqrt{k}} (4p(1-p))^k.$$

(Essa aproximação pode ser obtida usando a fórmula de Stirling). Note que $q = 4p(1-p) < 1$.

Usando as observações 1 e 2 podemos mostrar que P_{00}^n é da ordem de $O(q^n / \sqrt{n})$. Isso implica que $\lambda_P = q$ e $\bar{P}_{00}(1/\lambda_P) = \bar{P}_{00}(1/q) = \infty$. Portanto, P e M são matrizes nulo recorrentes. $\square$

Proposição 3.8. *Seja $(\Omega_{a,b,c}, S)$ o sistema dinâmico associado a $\sigma_{a,b,c}$. Então $(\Omega_{a,b,c}, S)$ não é minimal.*

Demonstração. Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$ e $\Omega_{a,b,c}$ o conjunto associado a substituição $\sigma = \sigma_{a,b,c}$ definida em $A = \mathbb{N}$. Se $a = 1$, considere a sequência $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de elementos de A^* onde $d_i = \sigma^i(i+1)$. Note que essa substituição possui um ponto fixo $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(1)$. Além disso:

$$d_{n+1} = (\sigma^n(n+1))^a (\sigma^n(n+2))^b (\sigma^n(n+3))^c.$$

Portanto d_{n+1} se inicia com d_n e, como o comprimento de d_n tende ao infinito, essa sequência é convergente para algum $d \in \Omega_{a,b,c}$.

Se $a = 1$, note que 1 aparece uma única vez na palavra d_n , para qualquer natural n , portanto d também possui apenas uma letra igual a 1. Sendo assim a órbita de $S(d)$ não pode ser densa pois não visita o cilindro $[1]$ e, portanto o sistema dinâmico não é minimal.

Suponha $a > 1$, como $\sigma^n(n+1)$ começa com $\sigma^{n-1}(n)^a$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\sigma^n(n+1)$ começa com $\sigma(2)^{a^{n-1}}$ note que a sequência d_n converge para o ponto periódico $d = \sigma(2)\sigma(2) \dots$ e, portanto a órbita de d não é densa. $\square$

3.1 EXISTÊNCIA DE MEDIDA INVARIANTE

Essa seção tem como objetivo mostrar os seguintes resultados

Teorema 3.9. *Seja σ uma substituição em $A = \mathbb{N}$ tal que M_σ seja irredutível, aperiódica e positivo recorrente com valor de Perron finito λ . Então o sistema dinâmico (Ω_σ, S) possui uma medida invariante μ . Além disso, μ é finita se, e somente se, o autovetor de Perron à esquerda l está em l^1 .*

Teorema 3.10. *Seja σ uma substituição de comprimento constante sobre $\mathbb{N}$. Suponha que σ possui um ponto fixo u e que a matriz M_σ é irredutível, aperiódica, positivo recorrente e possui valor de Perron finito $\lambda > 0$. Então o sistema dinâmico (Ω_u, S) possui uma medida de probabilidade invariante e ergódica. Além disso, se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que M_σ^n é scrambling então essa medida é única dentre as medidas de probabilidade invariante.*

Para a demonstração desse resultado necessitamos de vários resultados intermediários, que serão enunciados e provados ao decorrer dessa seção.

3.1.1 A Substituição σ_l

Considerando agora σ uma substituição sobre um alfabeto A (finito ou enumerável) tal que M_σ seja irredutível, aperiódica e σ possui um ponto fixo $u \in A^\mathbb{N}$.

Para $l \geq 2$ definimos A_l como sendo o conjunto de todas as palavras de comprimento l que são fatores de u e $\sigma_l : A_l \rightarrow A_l^*$ construída da seguinte forma:

Se

$$\sigma(w) = \sigma(w_0 w_1 \dots w_{l-1}) = y_0 y_1 \dots y_{|\sigma(w)|-1}.$$

Então

$$\sigma_l(w) = (y_0 y_1 \dots y_{l-1})(y_1 y_2 \dots y_l) \dots (y_{|\sigma(w_0)|-1} y_{|\sigma(w_0)|} \dots y_{|\sigma(w_0)|+l-1}).$$

Observe que :

$$|\sigma_l(w_0 w_1 \dots w_{l-1})| = |\sigma(w_0)|,$$

e

$$|\sigma(w_0)|_{i_0 i_1 \dots i_{l-1}} \leq |\sigma_l(w_0 w_1 \dots w_{l-1})|_{i_0 i_1 \dots i_{l-1}} \leq |\sigma(w_0)|_{i_0 i_1 \dots i_{l-1}} + l.$$

Observação. A substituição σ_l foi definida em [20] para substituições em alfabetos finitos. Nesa tese estendemos a definição para substituições em alfabetos infinitos enumeráveis.

Exemplo 4. 1. Considere $A = \{1, 2\}$ e $\sigma : A \mapsto A^*$, onde $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 1$. O ponto fixo é $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(1) = 12112121 \dots$ e, para $l = 2$ obtemos $A_2 = \{11, 12, 21\}$. Observe que 22 é uma palavra de comprimento 2 cujo as letras estão em A , mas não é uma palavra de A_2 porque não ocorre em u . Temos que $\sigma_2(11) = (12)(21)$, $\sigma_2(12) = (12)(21)$ e $\sigma_2(21) = (11)$ e, considerando a ordem lexicográfica

$11 < 12 < 21$ a matriz associada a σ_2 é :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $l = 3$ temos que $A_3 = \{112, 121, 211, 212\}$. Usando novamente a ordem lexicográfica temos $112 < 121 < 211 < 212$ e

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As demais matrizes M_l podem ser obtidas de modo semelhante.

2. Considerando a substituição de Thue-Morse $\sigma(1) = 12, \sigma(2) = 21$. Um ponto fixo de σ é $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(1)$ e $A_2 = \{11, 12, 21, 22\}$ com a ordem $11 < 12 < 21 < 22$ temos que $\sigma_2(11) = (12)(21)$, $\sigma_2(12) = (12)(22)$, $\sigma_2(21) = (21)(11)$, $\sigma_2(22) = (21)(12)$ e

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $l = 3$ temos que $A_3 = \{112, 121, 122, 211, 212, 221\}$. Nessa ordem específica temos $\sigma_3(112) = (121)(212)$, $\sigma_3(121) = (122)(221)$, $\sigma_3(122) = (122)(221)$, $\sigma(211) = (211)(112)$, $\sigma_3(212) = (211)(112)$, $\sigma_3(221) = (212)(121)$ e

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

As demais matrizes M_l , $l \geq 4$ podem ser obtidas de modo semelhante.

Observação. Essa substituição possui um segundo ponto fixo $w = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(2)$, no entanto, não é difícil verificar que σ é primitiva e, portanto vale que $\Omega_u = \Omega_w$.

3. Para substituições em alfabetos infinitos, a construção das matrizes M_l pode ser um pouco mais complicada. Consideremos, por exemplo a substituição 2-ádica

$\sigma(n) = 1(n+1)$ definida em $A = \mathbb{N}$. A matriz associada a σ é

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

M é uma matriz irredutível e aperiódica. O ponto fixo de σ é $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(1) = 12131214\dots$ e $A_2 = \{w = w_1w_2 \in A^* : w \text{ é um fator de } u\} = \{w = w_1w_2 : w \neq 11, w_1 = 1 \text{ ou } w_2 = 1\}$. Usando a ordem lexicográfica em A_2 temos $12 < 13 < 14 < \dots < 21 < 31 < 41 < \dots$ e aqui vamos separar os elementos de A_2 em dois grupos, os que são da forma $1n$ e os que são da forma $m1$ com $n, m > 1 \in \mathbb{N}$. Note que $\sigma_2(1n) = (12)(21)$ e $\sigma_2(m1) = (1(m+1))((m+1)1)$. Com isso e levando em consideração a ordem lexicográfica temos que

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Observação. M_2 é uma matriz cujo os coeficientes $(M_2)_{a,b}$ com $a, b \in A_2 \sim \mathbb{N}^2$.

Para $l = 3$ podemos verificar que A_3 se divide em 3 grupos, $w = 1n1, w = 21n, w = n12, n \geq 3$. Temos que $\sigma_3(12n) = (121)(21(n+1)), \sigma_3(21n) = (131)(312), \sigma_3(n12) = (1(n+1)1)((n+1)12)$ e a matriz associada a σ_3 considerando a ordem lexicográfica é

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

E, de maneira semelhante podemos encontrar as matrizes M_l para $l \geq 4$.

Lema 3.11. *Sejam $A = \mathbb{N}$, σ uma substituição sobre A e σ_l a substituição em A_l :*

1) *Se $u = u_0u_1u_2\dots$ é um ponto periódico por σ , então para qualquer ≥ 2 fixado:*

$$u_l = (u_1u_2\dots u_l)(u_{l+1}u_{l+2}\dots u_{l+1+l})\dots$$

É ponto periódico de σ_l com a mesma periodicidade de u .

2) *Se σ é irredutível e aperiódica então σ_l também é.*

Demonstração. (1) Suponha que se $u = u_1u_2\dots$ é um ponto periódico de período k então $\sigma^k(u) = u$. Temos que

$$\begin{aligned} \sigma_l^k(u_l) &= \sigma^k((u_1u_2\dots u_l)(u_{l+1}u_{l+2}\dots u_{l+1+l})\dots) = \sigma_l^k(u_1u_2\dots u_l)\sigma_l^k(u_{l+1}u_{l+2}\dots u_{l+1+l})\dots = \\ &= (u_1u_2\dots u_l)(u_{l+1}u_{l+2}\dots u_{l+1+l})\dots \end{aligned}$$

Uma vez que $\sigma^k(u_1u_2\dots) = u_1u_2\dots$, temos que $\sigma_l^k(u_1u_2\dots u_l)$ começa com $(u_1u_2\dots u_l)$ e, portanto $u_l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_l^{kn}(u_1u_2\dots u_l)$ é um ponto periódico de período k de σ_l .

(2) Sejam $w = w_1w_2\dots w_l, B \in A_l$ palavras de comprimento l que aparecem em $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(u_0)$. Sendo assim, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que B é um fator de $\sigma^p(u_1)$. Como σ é irredutível e aperiódica, então que existe n_0 tal que para $n \geq n_0$, $\sigma^n(w_1)$ contém u_1 . Assim para $n \geq n_0$, $\sigma^{n+p}(w_1)$ contém $\sigma^p(u_1)$, que contém B . Escrevendo

$$\sigma^n(w) = \sigma^n(w_1)\sigma^n(w_2w_3\dots w_l) = (y_1y_2\dots y_{|\sigma^n(w_1)|})a_1a_2\dots a_{k+1}.$$

Temos que

$$\sigma_l^n(w) = (y_1y_2\dots y_l)(y_{l+1}y_{l+2}\dots y_{l+1+l})\dots (y_{|\sigma^n(w_1)|}a_1a_2\dots a_{l-1}).$$

Todas as palavras de comprimento l que aparecem em $\sigma^n(w_0)$ são letras de A_l que aparecem em $\sigma_l^n(w)$. Tomando n suficientemente grande, temos que $\sigma_l^n(w)$ contém B e, portanto σ_l é irredutível e aperiódica. $\square$

Observação. A prova do lema 3.11 é uma adaptação do caso de alfabeto finito. (ver [20])

Lema 3.12. *Seja $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ uma substituição irredutível e aperiódica cuja matriz associada M possui um autovalor de Perron finito λ . Então para todo inteiro $l \geq 2$ a matriz M_l associada a σ_l possui o mesmo valor de Perron $\lambda_l = \lambda$.*

Demonstração. Note que M_l é irredutível e aperiódica, e sejam $i_1 \dots i_l ; j_1 \dots j_l \in A_l$. Temos :

$$|\sigma_l^n(i_1 \dots i_l)|_{j_1 \dots j_l} \leq |\sigma^n(i_1)|_{j_1} + l \leq |\sigma^n(i_1)|_{j_1} + l, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.13)$$

Portanto,

$$(M_l^n)_{i_1 \dots i_l, j_1 \dots j_l} \leq (M^n)_{i_1 j_1} + l, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.14)$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(M_l^n)_{i_1 \dots i_l, j_1 \dots j_l}]^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [(M^n)_{i_1 j_1}]^{1/n}.$$

Portanto $\lambda_l \leq \lambda$.

Por outro lado, sejam $m, k \in \mathbb{N}$ tais que $j_1 \dots j_l$ é um fator de $\sigma^m(k)$. Assim:

$$|\sigma_l^{n+m}(i_1 \dots i_l)|_{j_1 \dots j_l} \geq |\sigma^n(i_1)|_k \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.15)$$

Para todo n , portanto

$$(M_l^{n+m})_{i_1 \dots i_l, j_1 \dots j_l} \geq (M^n)_{i_1 k} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.16)$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(M_l^{n+m})_{i_1 \dots i_l, j_1 \dots j_l}]^{1/n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} [(M^n)_{i_1 k}]^{1/n}.$$

Deduzimos que $\lambda_l \geq \lambda$ e portanto $\lambda_l = \lambda$. $\square$

Proposição 3.13. *Sejam σ, σ_l, M, M_l com as mesmas condições do lema 3.12. Se M for positivo recorrente (respectivamente nulo recorrente ou transiente) então M_l também é positivo recorrente (nulo recorrente ou transiente).*

Demonstração. Suponha que M é positivo recorrente e sejam $i_1 \dots i_l, j_1 \dots j_l \in A_l$. Usando (3.16) temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(M_l^{n+m})_{i_1 \dots i_l, j_1 \dots j_l}}{\lambda^{n+m}} \geq \lambda^{-m} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(M^n)_{i_1 j_1}}{\lambda^n}. \quad (3.17)$$

Para algum $m \in \mathbb{N}$. Concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(M_l^n)_{i_1 \dots i_l, j_1 \dots j_l}}{\lambda^n} > 0$ e, portanto M_l é positivo recorrente.

Suponha que M é nulo recorrente. Nesse caso temos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(M^n)_{i_1 k}}{\lambda^n} = \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (M^n)_{i_1, j_1} / \lambda^n = 0$. Usando 3.17, obtemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (M_l^n)_{i_1 \dots i_l, j_1 \dots j_l} / \lambda_l^n = \infty.$$

Como $(M_l^n)_{i_1 \dots i_l, j_1 \dots j_l} \leq (M^n)_{i_1, j_1} + l$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(M_l^n)_{i_1 \dots i_l, j_1 \dots j_l}}{\lambda^n} = 0.$$

Portanto M_l é nulo recorrente.

Finalmente, se M for transiente então $\sum_{n=0}^{\infty} (M^n)_{i_1, j_1} / \lambda^n < \infty$. Usando (3.14) temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(M_l^n)_{i_1 \dots i_l, j_1 \dots j_l}}{\lambda^n} < \infty.$$

Logo M_l é transiente. □

Lema 3.14. *Seja σ uma substituição em $A = \mathbb{N}$ tal que $M = M_\sigma$ seja recorrente com valor de Perron finito λ e seja $r = (r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ o autovetor à direita de M . Se $x = x_0 x_1 \dots x_{l-1} \in A_l$ então:*

$$(r^{(l)})_x = r_{x_0}.$$

Onde $w^{(l)}$ é o autovetor à direita de M_l associado a λ .

Demonstração. Tomando $x \in A_l$ temos que $\sum_{j \in A_l} (M_l)_{j, x} = \sum_{j \in A_l} |\sigma_l(x)|_j$. Para cada letra $j_0 \in A$ temos que

$$\sum_{j \in A_l; j=j_0 j_1 \dots j_{l-1}} |\sigma_l(x)|_j \leq |\sigma(x_0)|_{j_0}.$$

Assim

$$\sum_{j \in A_l} |\sigma_l(x)|_j \leq \sum_{j_0 \in A} |\sigma(x_0)|_{j_0}. \quad (3.18)$$

Como r é autovetor de M temos que $Mr = \sum_{j_0} (r)_{j_0} M_{j_0, x_0} = \sum_{j_0} |\sigma(x_0)|_{j_0} = \lambda r$.

Como:

$$(M_l r^{(l)})_x = \sum_{j \in A_l} (r^{(l)})_j (M_l)_{j, x},$$

tomando $(r^{(l)})_j = r_{j_0}$ e usando a desigualdade 3.18, ficamos com

$$(M_l r^{(l)})_x = \sum_j r_{j_0} |\sigma_l(x)|_j \leq \sum_{j_0} r_{j_0} |\sigma(x_0)|_{j_0} = \lambda r_{j_0} = \lambda (r^{(l)})_j.$$

Portanto $r^{(l)}$ é um vetor subinvariante para a matriz M_l . Usando o lema 2.35, temos que w é um múltiplo do autovetor associado a λ . □

Agora vamos provar o teorema (3.9)

Prova do Teorema (3.9). Suponha, sem perda de generalidade que σ possui um ponto fixo $u = u_1 u_2 \cdots = \sigma(u)$.

Seja $j \in A$ e defina:

$$\mu([j]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(u_1)|_j}{\lambda^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{u_1 j}^n}{\lambda^n}.$$

Esse limite existe pois M_σ é positivo recorrente com valor de Perron λ .

Seja $l \geq 2$ e $I_l = i_1 i_2 \dots i_l \in A_l$. Defina

$$\mu([i_1 i_2 \dots i_l]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(u_1)|_{i_1 \dots i_l}}{\lambda^n}. \quad (3.19)$$

Usando (3.13) e o fato que $\lambda > 1$, temos que:

$$\mu([i_1 \dots i_l]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma_l^n(u_1 \dots u_l)|_{i_1 \dots i_l}}{\lambda^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(M_l^n)_{U_l, I_l}}{\lambda^n}.$$

Onde $U_l = u_1 \dots u_l$. Note que esse limite existe pois M_l é positivo recorrente com valor de Perron $\lambda_l = \lambda$.

Pelo teorema da consistência de Kolmogorov, existe uma única medida μ que é extensão da medida definida em 3.19, se para cada inteiro $l \geq 1$ e $I = i_1 \dots i_l \in A_l$:

$$\mu([I]) = \sum_{b \in A; Ib \in A_{l+1}} \mu([Ib]). \quad (3.20)$$

e

$$\mu([I]) = \sum_{a \in A; aI \in A_{l+1}} \mu([aI]). \quad (3.21)$$

Para mostrarmos 3.20, sejam $l = (l_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $r = (r_j)_{j \in \mathbb{N}}$, os autovetores de Perron à esquerda e a direita de M_σ tais que o produto escalar $l \cdot r = 1$. Para todo $l \geq 2$ sejam $l^{(l)} = (l_i)_{i \in A_l}$ e $r^{(l)} = (r_i)_{i \in A_l}$ os autovetores de Perron à esquerda e a direita de M_l tais que

$$r_{i_1 \dots i_l}^{(l)} = r_{i_1} \text{ para todo } i_1 \dots i_l \in A_l \text{ e } l^{(l)} \cdot r^{(l)} = 1.$$

Os vetores $r^{(l)}$ foram escolhidos dessa forma pelo lema 3.14.

Para todo $I = i_1 \dots i_l$, $l \geq 2$, temos por (2.5):

$$\mu([I]) = r_{U_l} l_I = r_{u_1} l_I.$$

Portanto, (3.20) é equivalente a

$$l_I = \sum_{b \in A, I_l b \in A_{l+1}} l_{Ib}. \quad (3.22)$$

Por outro lado, usando o lema de Fatou temos que, para todo $I = i_1 \dots i_l \in A_l$,

$$\sum_{b \in A, I_l b \in A_{l+1}} \mu([Ib]) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^n} \sum_{b \in A, I_l b \in A_{l+1}} |\sigma_{l+1}^n(u_1 \dots u_{l+1})|_{Ib} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^n} |\sigma_l^n(u_1 \dots u_l)|_I.$$

Logo,

$$\sum_{b \in A, I_l b \in A_{l+1}} \mu([Ib]) \leq \mu([I]).$$

Portanto,

$$\sum_{b \in A, I_l b \in A_{l+1}} l_{Ib} \leq l_I. \quad (3.23)$$

Como $\sum_{I \in A_l} l_I r_I = \sum_{J \in A_{l+1}} r_J l_J = 1$ e $r(Ib) = r(I)$ para todo $I \in A_l$ e $Ib \in A_{l+1}$, deduzimos que:

$$\sum_{I \in A_l} r_I l_I = \sum_{I \in A_l} r_I \sum_{b \in A, I_l b \in A_{l+1}} l_{Ib} = 1.$$

Usando essa última igualdade e (3.23), obtemos (3.22) e, consequentemente (3.20).

Analogamente, (3.21) é equivalente a

$$l_I = \sum_{a \in A, aI_l \in A_{l+1}} l_{aI}. \quad (3.24)$$

Usando o lema de Fatou, temos que para todo I em A_l ,

$$\sum_{a \in A, aI_l \in A_{l+1}} \mu([aI]) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^n} \sum_{a \in A, aI_l \in A_{l+1}} |\sigma_{l+1}^n(u_1 \dots u_{l+1})|_{aI}.$$

Além disso,

$$\sum_{a \in A, aI_l \in A_{l+1}} |\sigma_{l+1}^n(u_1 \dots u_{l+1})|_{aI} - |\sigma_l^n(u_1 \dots u_l)|_I = P_I \in \{-1, 0, 1\}.$$

Observe que $P_I = -1$ se a primeira letra de $\sigma_{l+1}^n(u_1 \dots u_{l+1})$ começa com I e a última letra de $\sigma_{l+1}^n(u_1 \dots u_{l+1})$ não termina com I . Temos que $P_I = 1$ se a primeira letra de $\sigma_{l+1}^n(u_1 \dots u_{l+1})$ não começa com I e a última letra de $\sigma_{l+1}^n(u_1 \dots u_{l+1})$ termina com I . Nos demais casos, temos $P_I = 0$.

Como $\lambda > 1$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^n} \sum_{a \in A, aI_l \in A_{l+1}} |\sigma_{l+1}^n(u_1 \dots u_{l+1})|_{aI} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^n} |\sigma_l^n(u_1 \dots u_l)|_I.$$

Logo,

$$\sum_{a \in A, aI_l \in A_{l+1}} \mu([aI]) \leq \mu([I]).$$

Portanto,

$$\sum_{a \in A, aI_l \in A_{l+1}} l_{aI} \leq l_I. \quad (3.25)$$

Por outro lado, de (3.22), temos que

$$\sum_{J \in A_{l+1}} l_J = \sum_{I \in A_l} \left(\sum_{b \in A, I_l b \in A_{l+1}} l_{Ib} \right) = \sum_{I \in A_l} l_I.$$

Portanto,

$$\sum_{I \in A_l} \left(\sum_{a \in A, aI_l \in A_{l+1}} l_{aI} \right) = \sum_{I \in A_l} l_I.$$

Usando (3.25), obtemos (3.21) e, portanto μ é uma medida invariante para o sistema (Ω_σ, S) . Além disso, se $l \in l^1$ então $\mu(\Omega) = \sum_{a \in A} \mu([a]) < \infty$. $\square$

3.1.2 Exemplo 1

Considere a substituição $\sigma_{2,1,1} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^*$, onde $\sigma(1) = 1112$ e $\sigma(n) = (n-1)(n-1)n(n+1)$, para todo $n \geq 2$. A matriz associada a $\sigma_{2,1,1}$ é

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Note que M não é scrambling, pois para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\sigma(2n+1)$ e $\sigma(1)$ não possuem letras em comum, além disso, M é positiva recorrente com valor de Perron $\lambda = 4$ e autovetor a esquerda $l = (l_i)_{i \in \mathbb{N}}$ onde $l_i = \frac{1}{2^i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Usando o teorema (3.9), temos que o sistema dinâmico $(\Omega_{2,1,1}, S)$ possui uma medida invariante μ , além disso μ é uma medida finita pois $l \in l^1$.

3.1.3 Exemplo 2

Considere a substituição $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^*$ onde

$$\sigma(1) = 11122 \text{ e } \sigma(n) = (n-1)n(n+1)(n+1), \text{ para todo } n \geq 2.$$

A matriz Associada a σ é

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Note que M não é scrambling pois para qualquer n , temos que $\sigma(2n+1)$ e $\sigma(1)$ não possuem letras em comum, além disso M é positiva recorrente com valor de Perron $\lambda = 4$ e autovetor a esquerda $l = (l_i)_{i \in \mathbb{N}}$ onde $l_i = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Usando o teorema (3.9), temos que o sistema dinâmico (Ω_σ, S) possui uma medida invariante μ além disso, μ não é finita pois $l \notin l^1$.

Proposição 3.15. *Seja σ uma substituição em $A = \mathbb{N}$ irredutível e aperiódica, de comprimento constante, com valor de Perron finito λ e que possui um ponto periódico u . Se M_σ for positiva recorrente então o sistema (Ω_u, S) possui uma medida de probabilidade invariante.*

Observação. Essa proposição também pode ser obtida como consequência do teorema (3.9), aqui fornecemos uma demonstração mais simples, válida apenas no caso constante.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que σ possui um ponto fixo $u = u_0 u_1 u_2 \dots = \sigma(u)$. Se σ tem comprimento constante L , então pela proposição (3.4) $\lambda = L$. Seja $j \in A$, definimos:

$$\mu([j]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(u_0)|_j}{|\sigma^n(u_0)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{u_0, j}^n}{\lambda^n}. \quad (3.26)$$

O limite existe, pois M é positivo recorrente com valor de Perron $\lambda = L$.

Seja $l \geq 2$ um inteiro e $J_l = j_1 j_2 \dots j_l \in A_l$ e defina:

$$\mu([j_1 j_2 \dots j_l]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(u_0)|_{j_1 \dots j_l}}{|\sigma^n(u_0)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma_l^n(u_0 u_1 \dots u_{l-1})|_{j_1 \dots j_l}}{\lambda^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(M_l^n)_{I_l, I_l}}{\lambda^n}. \quad (3.27)$$

Onde $I_l = u_0 u_1 \dots u_{l-1}$. Esse limite existe pois M_l é positivo recorrente com valor de Perron $\lambda_l = \lambda = L$.

Seja $V^{(1)} = (\mu([j]))_{j \geq 0}$ e para $l \geq 2$, consideremos todos os cilindros $[w]$ onde $w \in A_l$, enumeramos esses cilindros $[A_0^{(l)}], [A_1^{(l)}], \dots$ usando a ordem lexicográfica

e defina $V^{(l)}$ como sendo o autovetor a esquerda de M_l associado a L , além disso, escolhemos $V^{(l)}$ tais que a soma de seus elementos é igual a 1.

Afirmção: μ é uma medida invariante.

Devemos mostrar que para todo $I_l \in A_l$,

$$\mu([I_l]) = \sum_{b \in A, I_l b \in A_{l+1}} ([I_l b]). \quad (3.28)$$

$$\mu([I_l]) = \sum_{a \in A, a I_l \in A_{l+1}} \mu([a I_l]). \quad (3.29)$$

Para (3.28), usamos o Lema de Fatou para séries e temos que:

$$\sum_{b \in A, I_l b \in A_{l+1}} \mu([I_l b]) = \sum_{b \in A, I_l b \in A_{l+1}} \liminf \frac{|\sigma^n(u_0)|_{I_l b}}{|\sigma^n(u_0)|} \leq \quad (3.30)$$

$$\liminf \sum_{b \in A, I_l b \in A_{l+1}} \frac{|\sigma^n(u_0)|_{I_l b}}{|\sigma^n(u_0)|} \leq \liminf \frac{|\sigma^n(u_0)|_{I_l}}{|\sigma^n(u_0)|} = \mu(I_l). \quad (3.31)$$

Como os vetores $V^{(l)}$ e $V^{(l+1)}$ são de probabilidade, deduzimos (3.28). De modo análogo obtemos (3.29). Logo, a afirmação está provada. $\square$

3.1.4 Substituições de comprimento constante e unicidade ergódica

Definição 3.16. *Seja σ uma substituição de comprimento constante L . Dizemos que M_σ é fortemente ergódica se a matriz estocástica M_σ/L for uma matriz fortemente ergódica.*

Observação. Se σ é uma substituição de comprimento constante L tal que M_σ é fortemente ergódica então σ é positivo recorrente. Pelo teorema 3.15, se σ possui um ponto periódico u , o sistema dinâmico associado possui uma medida finita invariante.

Observação. Temos que M_σ é fortemente ergódica se, e somente se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \min(|\sigma^n(i)|_j, |\sigma^n(k)|_j) \geq 1.$$

Ou seja, M_σ é fortemente ergódica se, e somente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall i, k \in A, \exists j \in A : j \text{ ocorre em } \sigma^n(i) \text{ e } \sigma^n(k).$$

Exemplo 5. A matriz M_σ associada a substituição dada por $\sigma(n) = 11(n+1)$ definida nos naturais é fortemente ergódica, uma vez que 1 ocorre em $\sigma(k)$ para todo k , logo, M_σ é scrambling.

Uma outra forma de mostrar que M é fortemente ergódica vem do fato que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{|\sigma^n(i)|_j}{|\sigma^n(i)|} - \frac{1}{2^j} \right| = 0 \quad (3.32)$$

De fato, para qualquer $n, i, j \in \mathbb{N}$ temos:

$$|\sigma^n(i)|_j = |\sigma^{n-1}(i)|_{j-1} = \dots = |\sigma^{n-j}(i)|_1 = 2^{n-j-i}, \quad \text{para todo } 1 \leq j < n.$$

Além disso,

$$|\sigma^n(i)|_j = |\sigma^n(i)|_{j+1-n}, \quad \text{para todo } j \geq n.$$

Logo, para todo $j \geq n$

$$|\sigma^n(i)|_j = 1 \text{ se } j = i + n \text{ e } 0 \text{ caso contrário.}$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{|\sigma^n(i)|_j}{|\sigma^n(i)|} - \frac{1}{2^j} \right| = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{i+n}} \right).$$

Portanto, $\sup_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{|\sigma^n(i)|_j}{|\sigma^n(i)|} - \frac{1}{2^j} \right| = \frac{1}{2^{n-1}}$ e obtemos (3.32).

Em [21] o autor usa exemplo as substituições $\sigma_1 : A = \mathbb{Z} \rightarrow A^*$ com $\sigma(n) = (n-1)(n+1)$ (substituição do bêbado e $\sigma_2 : 2\mathbb{Z} \rightarrow (2\mathbb{Z})^*$ com $\sigma(n) = (n-2)nn(n+2)$ (substituição do bêbado quadrática).

As matrizes M_{σ_1} e M_{σ_2} associadas a essas substituições não são matrizes fortemente ergódicas.

A matriz associada a substituição $\sigma_{a,b,c}$ não é fortemente ergódica pois para todo $n \in \mathbb{N}$ as palavras $\sigma^n(n)$ e $\sigma^n(4n)$ não tem nenhuma letra em comum.

Definição 3.17. *Seja σ uma substituição sobre A que possui um ponto fixo u , dizemos que σ é left determined se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que qualquer palavra $w \in \mathcal{L}(u)$ com comprimento maior que N possui uma única decomposição $w = w_1 w_2 \dots w_s$, onde $w_i = \sigma(a_i)$ para algum $a_i \in A$ exceto por w_1 que pode ser um sufixo de $\sigma(a_1)$ e w_s que pode ser um prefixo de $\sigma(a_s)$. Além disso os a_i para $1 \leq i \leq s-1$ são únicos.*

Observação. Em [21], Ferenczi provou que se σ é "left determined" e M_σ é irredutível, aperiódica e positivo recorrente, então o sistema dinâmico associado a σ possui uma probabilidade invariante.

Seja σ uma substituição de comprimento constante L em $A = \mathbb{N}$ tal que M_σ seja fortemente ergódica, o objetivo dessa seção é mostrar que o teorema a seguir:

Teorema 3.18. *Seja σ uma substituição de comprimento constante L em $A = \mathbb{N}$ que possui um ponto fixo $u \in A^{\mathbb{N}}$. Suponha que M_σ é irreduzível, aperiódica e fortemente ergódica. Então o sistema dinâmico (Ω, S) possui uma única probabilidade invariante.*

Para a demonstração do teorema (3.18), vamos precisar das definições e resultados que seguem.

Lema 3.19. *Seja σ uma substituição de comprimento constante tal que M_σ é irreduzível e aperiódica. Se M_σ é fortemente ergódica então M_{σ_l} também é fortemente ergódica para todo inteiro $l \geq 2$.*

Demonstração. Sejam $l \geq 2$ um inteiro e $i_1 i_2 \dots i_l, k_1 k_2 \dots k_l \in A_l$. Como M_σ é fortemente ergódica, existe um inteiro $n \geq 0$ e $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que j_1 ocorre em $\sigma^n(i_1)$ e em $\sigma^n(k_1)$.

Seja $m > 0$ um inteiro tal que:

$$m = \left\lceil \frac{\ln(2l)}{\ln(L)} \right\rceil + 1.$$

Então

$$\sigma^m(j_1) = a_1 a_2 \dots a_s \text{ com } s \geq 2l.$$

Logo, $a_1 \dots a_s$ ocorre em $\sigma^m(\sigma^n(i_1))$ e em $\sigma^m(\sigma^n(k_1))$, logo

$$a_1 \dots a_l \text{ ocorre em } \sigma_l^{n+m}(i_1 \dots i_l) \text{ e em } \sigma_l^{n+m}(k_1 \dots k_l).$$

Portanto M é fortemente ergódica. □

Prova do teorema (3.18): Suponha, sem perda de generalidade que σ tem um ponto fixo $u = \sigma(u) = u_0 u_1 \dots$. Sejam $i, j \in \mathbb{N}$, então para todo inteiro n temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n}{L^n} = v_j > 0.$$

Como M_σ é fortemente ergódica, deduzimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \geq 0} \left| \frac{|\sigma^n(i)|_j}{|\sigma^n(i)|} - v_j \right| = 0.$$

Além disso, pelo teorema 2.43, existem $c > 0$ e $0 < \beta < 1$ tais que:

$$\left| \frac{|\sigma^n(i)|_j}{|\sigma^n(i)|} - v_j \right| \leq c\beta^n \text{ para todo } n \geq 1.$$

Seja $z = z_1 z_2 \dots z_l$ uma palavra de comprimento $l \geq 2$. Pelo lema 3.19, M_l é uma matriz fortemente ergódica. Usando o teorema 2.43, temos que existem $c_l > 0$ e $0 < \beta_l < 1$ tais

que para todo $w = w_1 \dots w_l \in A_l$:

$$\left| \frac{|\sigma_l^n(w_1 w_2 \dots w_l)|_z}{|\sigma_l^n(w_1 w_2 \dots w_l)|} - d_z \right| \leq c_l \beta_l^n \quad \forall n \geq 0.$$

Onde $d_z = l_z^{(l)}$ é a z -ésima entrada do autovetor de Perron à esquerda de M_l .

Usando (3.14) e (3.16), temos que $|\sigma^n(w_1)|_z \approx_{n \rightarrow \infty} |\sigma_l^n(w_1 w_2 \dots w_l)|_z$ e $|\sigma_l^n(w_1 w_2 \dots w_l)| = |\sigma^n(w_1)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\left| \frac{|\sigma^n(w_1)|_z}{|\sigma^n(w_1)|} - d_z \right| \leq c_l \beta_l^n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Seja $V = u_k \dots u_{k+N}$ com $N > |z|$. Usando 3.6, podemos escrever

$$V = v_0 \sigma(v_1) \dots \sigma^n(v_n) \sigma^{n-1}(w_{n-1}) \dots \sigma(w_1) w_0.$$

Com $|v_i|, |w_i| \leq K$. Assim,

$$|\sigma(V)|_z = \sum_{i=0}^n |\sigma^i(v_i)|_z + \sum_{j=0}^{n-1} |\sigma^j(w_j)|_z.$$

e

$$N = \sum_{i=0}^n |\sigma^i(v_i)| + \sum_{j=1}^{n-1} |\sigma^j(w_j)|.$$

Temos que, para todo $a \in \mathbb{N}$:

$$\| \sigma^j(a)_z - d_z |\sigma^j(a)| \| \leq c_l \beta_l^j L^j.$$

De 3.6 e usando a desigualdade triangular, temos que

$$\| \sigma^j(v_j)_z - d_z |\sigma^j(v_j)| \| \leq KC \beta_l^j L^j.$$

Onde K, C são constantes positivas. Para $0 \leq j \leq n$ (e de modo análogo para w_j). Então

$$\| V|_z - d_z(N+1) \| = \left\| V|_z - d_z \left(|v_n|_z + \sum_{i=1}^{n-1} |\sigma^i(v_i)|_z + |\sigma^i(w_i)|_z \right) \right\| \leq 2KC \sum_{j=0}^n \beta_l^j \leq D \beta_l^j.$$

Como $0 \leq \beta_l < 1$, temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|u_k u_{k+1} \dots u_{k+N}|_z}{N+1},$$

converge para d_z independentemente de k .

Relembramos que a medida de probabilidade μ nos cilindros é dada por $\mu([z]) = d_z$, para qualquer palavra $z = z_1 z_2 \dots z_l \in \Omega_u$.

Vejamos agora que essa medida é única, para isso vamos mostrar que:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{X}_W(S^{n+j}(u)) \rightarrow f_W = \mu([W]) = \int_{\Omega} \mathcal{X}_W d\mu.$$

Onde $\mathcal{X}_W(u) = 1$ se u começa com W e 0 caso contrário. De fato,

$$|u_j u_{j+1} \dots u_{j+n}|_W = \mathcal{X}_W(S^j(u)) + \dots + \mathcal{X}_W(S^{j+n-|W|}(u))$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_k \dots u_{k+n}|}{n+1}$ não depende de k , podemos substituir $N - |W|$ por $N - 1$ e obtemos o desejado.

Considerando $v \in \Omega$, temos que $v = \lim_{n \rightarrow \infty} S^{n_k}(u)$, logo

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{X}_W(S^n(v)) \rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{X}_W d\mu$$

Para todo $v \in \Omega$, logo, para qualquer função simples φ , temos que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(S^n(v)) \mapsto \int_{\Omega} \varphi d\mu.$$

Portanto, μ é a única medida invariante. □

Observação. Essa demonstração é parecida ao caso de substituição primitiva em alfabeto finito. No próximo capítulo apresentaremos uma nova prova.

3.2 CÁLCULO DA MEDIDA INVARIANTE

Pelo lema (3.15), vimos que se σ é uma substituição de comprimento constante que possui um ponto periódico u e tal que M_{σ} é positivo recorrente, então existe uma medida de probabilidade invariante μ dada por

$$\mu([v_1 \dots v_k]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_1 u_2 \dots u_n|_{v_1 \dots v_k}}{n} = f_{v_1 \dots v_k}, \quad \forall v_1 \dots v_k \in \mathcal{L}(u).$$

Chamamos $f_{v_1 \dots v_k}$ de frequência de $v_1 \dots v_k$.

3.2.1 Exemplo 1

Consideramos, em $A = \mathbb{N}$ a substituição σ , onde $\sigma(n) = (1)(n+1)$. Temos que σ é uma substituição de comprimento 2 e que possui um ponto fixo $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(1)$. A

matriz de σ é

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

A matriz M é scrambling portanto fortemente ergódica, logo (Ω_u, S) possui uma única medida de probabilidade invariante.

Proposição 3.20. *A medida μ é dada por:*

$$\begin{aligned} \mu([j]) &= \frac{1}{2^j}, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}; \\ \mu([v_1 \dots v_n]) &= \mu([v_i]), \text{ onde } v_i = \max\{v_1, \dots, v_n\}, \quad \forall v_1 \dots v_n \in A_n. \end{aligned}$$

Demonstração. Note que $l = (l_i)_{i \in \mathbb{N}}$, onde $l_i = \frac{1}{2^i}$ é o autovetor a esquerda de M_σ .

Seja $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$\frac{|\sigma^n(1)|_1}{2^n} = \frac{|\sigma^{n-1}(1)|}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Se $k \geq 2$ então

$$\frac{|\sigma^n(1)|_k}{2^n} = \frac{|\sigma^{n-1}(1)|_{k-1}}{2^n} = \dots = \frac{|\sigma^{n-k+1}(1)|_1}{2^n} = \frac{1}{2^k}.$$

Com isso temos que

$$\mu([j]) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|u_1 \dots u_N|_j}{N} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(1)|_j}{2^n} = \frac{1}{2^j}.$$

Se $v = v_1 v_2$ é uma palavra de comprimento 2 então $v_1 = 1$ ou $v_2 = 1$. Além disso $v \neq 11$. É fácil verificar que

$$|u_k \dots u_{k+N}|_{v_1} \geq |u_k \dots u_{k+N}|_v.$$

Logo,

$$\frac{|u_k \dots u_{k+N}|_{v_1}}{N} \geq \frac{|u_k \dots u_{k+N}|_v}{N}.$$

Por outro lado, se $u_k \neq 1$ então $u_{k+1} = 1$. Suponha, sem perda de generalidade que $v_1 \neq 1$ logo, se v_1 ocorre em $u_1 \dots u_N$ então v ocorre em $u_1 \dots u_{N+1}$ e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|u_k \dots u_{k+N}|_v}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|u_k \dots u_{k+N+1}|_v}{N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|u_k \dots u_{k+N}|_{v_1}}{N} = \mu([v_1]).$$

Podemos encontrar $\mu([v])$ de maneira semelhante quando $v_2 \neq 1$.

Se $v = v_1 v_2 v_3$ temos que $v = 121$ ou $v_i \geq 3$ para algum i . Se $v_1 \geq 3$ então $v_2 v_3 = 12$, se $v_2 \geq 3$ então $v_1 = v_3 = 1$ e se $v_3 \geq 3$ então $v_1 v_2 = 21$. Note quem em todos os casos temos uma letra que possui um valor maior ou igual a 3 e as outras duas letras possuem valores fixados 1 ou 2. Usando um raciocínio semelhante

ao feito nas palavras de comprimento 2 concluímos que $\mu([v_1v_2v_3]) = \mu([v_i])$ onde $v_i = \max\{v_1, v_2, v_3\}$. Procuramos agora, fazer algo semelhante para palavras de tamanho n .

Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\sigma^n(1) = \sigma^{n-1}(1)\sigma^{n-2}(1) \dots \sigma(1)(1)(n+1). \quad (3.33)$$

Semelhantemente,

$$\sigma^{n+1}(1) = \sigma^{n-1}(1) \dots \sigma(1)(1)(n+1)\sigma^{n-1}(1) \dots \sigma(1)(1)(n+2).$$

Se $v = v_1 \dots v_n$ é uma palavra de comprimento n , por (3.33) temos que existe i tal que $v_i \geq \log_2 n$. Note também que sempre que $u_k = n$, então as próximas $2^n - 1$ letras de u são valores fixos e menores que k (o mesmo vale para as $2^n - 1$ letras anteriores). Com isso temos que

$$\mu([v]) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|u_k \dots u_{k+N}|}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|u_k \dots u_{k+N+2^n}|_v}{k+N+2^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|u_k \dots u_{k+N}|_{v_i}}{N} = \mu([v_i]).$$

□

3.2.2 Exemplo 2

Considere a substituição $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^*$ onde $\sigma(n) = 11(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A matriz associada a σ é

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

Note que M é scrambling, pois $M_{i1} > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Além disso, temos que

$$|\sigma^n(1)|_1 = 2|\sigma^{n-1}(1)| = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(1)|_1}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|\sigma^{n-1}(1)|}{3^n} = \frac{2}{3}.$$

Para $j \geq 2$, temos que

$$|\sigma^n(1)|_j = |\sigma^{n-1}(1)|_{j-1} = \dots = |\sigma^{n-j+1}(1)|_1 = 2|\sigma^{n-j}(1)| \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq j.$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(1)|_j}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|\sigma^{n-j}(1)|}{3^n} = \frac{2}{3^j}.$$

As palavras de comprimento 2 que aparecem no ponto fixo podem ser divididas em 2 tipos, as palavras do tipo $1n$ ou as palavras do tipo $n1$ com $n \in \mathbb{N}$, vejamos o caso $n = 1$ separadamente.

$$|\sigma^n(1)|_{11} = |\sigma^{n-1}(1)| = 2 \cdot 3^{n-1},$$

Uma vez que 11 aparece em $\sigma(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $f_{11} = f_1 = \frac{2}{3}$.

Seja $k \geq 2$ um natural. Então

$$|\sigma^n(1)|_{1k} = |\sigma^{n-1}(1)|_{k-1}$$

Portanto $f_{1k} = f_k$. Podemos fazer algo semelhante para palavras de comprimento maior ou igual a 3.

3.3 SUBSTITUIÇÕES FORTEMENTE ERGÓDICAS DE COMPRIMENTO NÃO CONSTANTE

Definição 3.21. *Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz não negativa, irredutível, aperiódica e recorrente com valor de Perron $0 < \lambda < \infty$ e $\|M\| = \sup\{\sum_{j=1}^{\infty} M_{ij}, i, j \in \mathbb{N}\} < \infty$. Seja $r = (r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ o autovetor à esquerda de M associado a λ e $P = (P_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ a matriz tal que*

$$P_{ij} = \frac{M_{ij}r_j}{\lambda r_i}.$$

M é dita fortemente ergódica se a matriz P for fortemente ergódica.

Observação. A matriz P é uma matriz estocástica pois

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{ik} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{ik}r_k}{\lambda r_i} = \frac{1}{\lambda r_i} \sum_{k=1}^{\infty} M_{ik}r_k = 1.$$

Uma vez que $Mr = \lambda r$.

Observação. Note que

$$P_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}P_{kj} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{ik}r_k}{\lambda r_i} \frac{M_{kj}r_j}{\lambda r_k} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} M_{ik}M_{kj}r_j}{\lambda^2 r_i} = \frac{M_{ij}^2 r_j}{\lambda^2 r_i}.$$

Semelhantemente $P_{ij}^n = \frac{M_{ij}^n r_j}{\lambda^n r_i}$, para todo inteiro $n \geq 3$.

Observação. A partir dessa definição podemos concluir que M é fortemente ergódica se a matriz $P_{ij} = M_{ji}l_j/\lambda l_i$ for fortemente ergódica, onde $l = (l_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é o autovetor a esquerda de M associado a λ .

Essa definição também é uma extensão do caso da substituição de comprimento constante L , pois nesse caso temos que $\lambda = L$ e $r_i = 1$ para todo $i \geq 0$.

Essa definição aparece em [22] para matrizes finitas primitivas. Nessa tese estendemos a definição para matrizes infinitas enumeráveis.

Observação. Seja $M = (M_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz não negativa, irreduzível e aperiódica e recorrente com valor de Perron finito $\lambda > 0$. Então M é fortemente ergódica se existir um vetor de probabilidade π tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \geq 0} \left| \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{M_{ij}^n r_j}{\lambda^n r_i} - \pi_j \right| = 0. \quad (3.34)$$

Por outro lado, como P é fortemente ergódica então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que P^n é scrambling. Portanto M é fortemente ergódica se, e somente se existem $n \in \mathbb{N}$ e $a > 0$ tais que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min \left(\frac{M_{ij}^n r_j}{\lambda r_i}, \frac{M_{kj}^n r_j}{\lambda r_k} \right) \geq a > 0. \quad (3.35)$$

Observação. Seja M uma matriz não negativa, irreduzível, aperiódica e recorrente com valor de Perron finito $\lambda > 0$. Suponha que M possui um autovetor a direita $r = (r_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ que satisfaz $\inf\{r_i, i \in \mathbb{N}\} > 0$. Então, pela observação anterior M é fortemente ergódica se, e somente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que M^n é scrambling.

Observação. Se M é fortemente ergódica então M é positivo recorrente. De fato, como $0 < \lambda^n$ deduzimos que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{j,i_0}^n}{\lambda^n} = \frac{\pi_j r_{i_0}}{r_j} > 0.$$

Exemplo 17. A substituição de Fibonacci infinito, definida em $A = \mathbb{N}$ e dada por

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1(n+1), & \text{se } n \text{ é ímpar.} \\ n+1, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Temos que a matriz associada a σ é

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

M é uma matriz irreduzível, aperiódica e positivo recorrente com autovalor de Perron $\lambda = \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Além disso os autovetores a esquerda e a direita associados a λ são respectivamente

$$l = (1, 1/\beta, 1/\beta^2, \dots) \quad e \quad r^t = (1, 1/\beta, 1, 1/\beta, \dots).$$

Afirmção: M_σ é fortemente ergódica.

De fato M_σ^2 é scrambling. Uma outra prova é a seguinte:

$$\frac{M_{ij}^n r_j}{\lambda^n r_i} = \frac{|\sigma^n(i)|_j r_j}{\beta^n r_i}.$$

E

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n r_j}{\lambda^n r_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{ik}^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(i)|_j}{\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma^n(i)|_k}.$$

Note que $|\sigma^n(1)|_j = |\sigma^{n-1}(1)|_{j-1} = \dots = |\sigma^{n-j+1}(1)|_1 = F_{n-j+1}$, para todo $n \geq j-1$, onde F_k é o k -ésimo termo da sequência de Fibonacci $F_0 = F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, além disso $\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma^n(1)|_k = F_n$, logo:

$$\frac{M_{1j}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{1k}^n} = \frac{F_{n-j+1}}{F_n}.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{1j}^n r_j}{\lambda^n r_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{1j}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{1k}^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-j+1}}{F_n} = \frac{1}{\beta^{j+1}}.$$

Por outro lado, observe que se i for ímpar então $|\sigma^n(i)| = |\sigma^n(1)|$ e $|\sigma^n(i)|_j = |\sigma^n(1)|_j$ (exceto quando $n+i=j$). Se i for par então $|\sigma^n(i)| = |\sigma^{n-1}(1)|$ e $|\sigma^n(i)|_j = |\sigma^{n-1}(1)|_j$ (exceto quando $n+i=j$).

Como

$$r_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j \text{ é ímpar.} \\ 1/\beta, & \text{se } j \text{ é par.} \end{cases},$$

temos que se i, j são pares

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n r_j}{\lambda^n r_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{1j}^{n-1} r_j}{\lambda^n r_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^{n-1}}{\lambda^{n-1} \lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{1j}^{n-1} r_j}{\lambda^{n-1} r_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{1j}^n r_j}{\lambda^n r_1}.$$

Se i e j são ímpares

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n r_j}{\lambda^n r_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{1j}^n r_j}{\lambda^n r_1}.$$

Se i é par e j é ímpar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n r_j}{\lambda^n r_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{1j}^{n-1} \lambda}{\lambda^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{1j}^{n-1}}{\lambda^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{1j}^n r_j}{\lambda^n r_1}.$$

Se i é ímpar e j é par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n r_j}{\lambda^n r_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{1j}^n r_j}{\lambda^n r_1}.$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n r_j}{\lambda^n r_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{1j}^n r_j}{\lambda^n r_i} = \frac{1}{\beta^{j+1}}.$$

Note que $\pi = (\pi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ onde $\pi_i = \frac{1}{\beta^{i+1}}$ é um vetor de probabilidade. Além disso,

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \left| \frac{M_{ij}^n r_j}{\lambda^n r_i} - \frac{1}{\beta^{j+1}} \right| \leq \frac{C}{\beta^{i+n}}.$$

Para algum $C > 0$. Logo,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathbb{N}} \left| \frac{M_{ij}^n r_j}{\lambda^n r_i} - \frac{1}{\beta^{j+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C}{\beta^n} = 0.$$

Portanto M é fortemente ergódica.

Teorema 3.22. *Seja $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^*$ uma substituição de comprimento limitado que possui um ponto periódico u . Seja $M = M_\sigma$ a matriz associada e suponha que M é irredutível, aperiódica, com valor de Perron finito λ . Suponha também que M possui um autovetor a direita $r = (r_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ e para algum $n \in \mathbb{N}$, M^n é scrambling. Então o sistema dinâmico (Ω_u, S) possui uma única medida de probabilidade invariante.*

Para a prova do teorema, vamos precisar dos resultados que seguem.

Lema 3.23. *Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz irredutível, aperiódica positivo recorrente de comprimento limitado ($\sum_k M_{ik} < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$) tal que $\|M\| < \infty$ e $\inf_{i,j \in \mathbb{N}} \{M_{ij} : M_{ij} > 0\} > 0$. Suponha que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que M^n é scrambling então M possui um autovetor a direita $r = (r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\inf\{r_i, i \in \mathbb{N}\} > 0$.*

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade que M é scrambling e seja $r = (r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ um autovetor a direita de M . Como M tem comprimento limitado, existe $L > 0$ tal que $M_{1L} \neq 0$ e $M_{1k} = 0$ para todo $k > L$. Como M é scrambling, temos que para todo $i \in \mathbb{N}$ existe $k_i \in \{0, \dots, L\}$ tal que $M_{i,k_i} > 0$, observe que $\min_{1 \leq i \leq L} \{r_i\} \geq a > 0$, logo $r_{k_i} \geq a$. Como $\sum_{k=0}^\infty M_{ik} r_k = \lambda r_i$, temos que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \frac{a}{\lambda} \leq \frac{M_{i,k_i} r_{k_i}}{\lambda} \leq r_i.$$

Note que se $M_{ij} \neq 0$ então $M_{ij} \geq 1$, logo $\inf\{M_{ij} : M_{ij} > 0\} > 0$ e, portanto vale o lema. $\square$

Proposição 3.24. *Seja $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^*$ uma substituição cuja matriz associada M é irredutível e aperiódica com valor de Perron finito λ . Suponha que M é fortemente ergódica e que o autovetor a direita $r = (r_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ é tal que $\inf\{r_i : i \in \mathbb{N}\} > 0$ então para todo inteiro $l \geq 2$ temos que M_l é fortemente ergódica e tem um autovetor a direita $r^{(l)} = (r_I^{(l)})_{I \in A_l} \in l^\infty$ tal que $\inf\{r_I^{(l)} : I \in A_l\} > 0$.*

Prova da Proposição 3.24. Pelo lema anterior temos que existe $r^{(l)} \in l^\infty$ autovetor a direita de M_l tal que $\inf\{r_I^{(l)}, I \in A_l\} > 0$. A prova que M_l é fortemente ergódica é feita de modo análogo a (3.19). $\square$

Lema 3.25. Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz fortemente ergódica com valor de Perron finito $\lambda > 0$. Suponha que M possui um autovetor a direita $r = (r_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ tal que $\inf\{r_i : i \in \mathbb{N}\} > 0$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \geq 1} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{M_{ij}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{ik}^n} - z_j \right| = 0,$$

onde $z_j = \frac{l_j}{\sum_{k=1}^{\infty} l_k}$ e $l = (l_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é o autovetor a esquerda de M associado a λ .

Demonstração. Como M é fortemente ergódica, usando (3.34) temos que, para todo $i, j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n}{\lambda^n} = \pi_j \frac{r_j}{r_i},$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{ik}^n}{\lambda^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \frac{r_k}{r_i}.$$

Onde estes limites são finitos e uniformes em i .

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \geq 1} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{M_{ij}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{ik}^n} - z_j \right| = 0.$$

Onde

$$z_j = \frac{\pi_j / r_j}{\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k r_k} = \frac{l_j}{\sum_{k=1}^{\infty} l_k}, \quad \text{para todo } j \geq 0.$$

□

Prova do Teorema (3.22). Suponha, sem perda de generalidade que σ possui um ponto fixo $u = u_1 u_2 \dots$. Para todo $i, j, n \in \mathbb{N}$ temos

$$\frac{|\sigma^n(i)|_j}{|\sigma^n(i)|} = \frac{M_{ij}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{ik}^n}.$$

Pelo lema 3.25, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \geq 1} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{|\sigma^n(i)|_j}{|\sigma^n(i)|} - \frac{l_j}{\sum_{k=1}^{\infty} l_k} \right| = 0.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ e defina

$$\mu([j]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(u_1)|_j}{|\sigma^n(u_1)|} = \frac{l_j}{\sum_{k=1}^{\infty} l_k}.$$

Observe que o valor à direita existe pois $\sum_i l_i < \infty$.

Seja $l \geq 2$ e $I_l = i_1 i_2 \dots i_l \in A_l$ e defina:

$$\mu([i_1 \dots i_l]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(u_0)|_{i_1 \dots i_l}}{|\sigma^n(u_0)|}.$$

De (3.13) e do fato que $\lambda = L > 1$ temos:

$$\mu([i_1 \dots i_l]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma_l^n(u_0 u_1 \dots u_{l-1})|_{i_1 \dots i_l}}{|\sigma_l^n(u_0 u_1 \dots u_{l-1})|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(M_l)_{U_l, I_l}}{\sum_{k \in A_l} M_{I_l, k}^n}.$$

Onde $U_l = u_0 u_1 \dots u_{l-1}$. Note que:

$$\mu([i_1 \dots i_l]) = \frac{v_i^{(l)}}{\sum_{k \in A} v_k^{(l)}}.$$

Onde $v^{(l)} = (v_i^{(l)})_{i \geq 0}$ é um autovetor a esquerda de M_l associado ao valor de perron λ .

A demonstração que a medida μ é invariante é feita de modo semelhante ao caso em que σ possui comprimento constante.

Afirmção: Para μ quase todo x em $E \subset \Omega_u$ temos que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \# \{0 \leq k \leq N-1, S^k(x) \in E\} = \mu(E).$$

De fato, suponha que $E = [i_0]$ e $x = u = \sigma(u) = u_0 u_1 \dots$ e seja $N = |\sigma^n(u_0)|$, então

$$\frac{1}{N} \# \{0 \leq k \leq N-1, S^k(x) \in E\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(u_0)|_{i_0}}{|\sigma^n(u_0)|} = \mu(E).$$

Seja agora $x \in \Omega_u$ e $N \in \mathbb{N}$ e $V = u_m \dots u_{m+N-1}$ um prefixo de x . Usando 3.6, temos que

$$V = v_0 \sigma(v_1) \dots \sigma^n(v_n) \sigma^{n-1}(w_{n-1}) \dots \sigma(w_1) w_0.$$

Onde $|v_i|, |w_i| \leq L = \max\{|\sigma(a)|\}$ e $v_n \neq \emptyset$, logo

$$\frac{1}{N} \# \{0 \leq k \leq N-1; S^k(x) \in E\} = \frac{|V|_{i_0}}{|V|} = \frac{|\sigma^n(v_n)|_{i_0} + \sum_{i=0}^{n-1} |\sigma^i(v_i)|_{i_0} + |\sigma^i(w_i)|_{i_0}}{|\sigma^n(v_n)| + \sum_{i=0}^{n-1} |\sigma^i(v_i)| + |\sigma^i(w_i)|}.$$

Como M é fortemente ergódica, temos que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{|\sigma^k(a)|_{i_0}}{|\sigma^k(a)|}, a \in A \right\} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{M_{a, i_0}^k}{\sum_{j=1}^{\infty} M_{a, j}} \right\} = \mu([i_0]).$$

E deduzimos que:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{|\sigma^k(v)|_{i_0}}{|\sigma^k(v)|}, |v| \leq K \right\} = \mu([i_0]). \quad (3.36)$$

Onde $K = \max\{|\sigma(b)|, b \in A\}$. Com isso e usando o teorema de Stolz-Cesaro, temos que:

$$\frac{1}{N} \# \{0 \leq k \leq N-1, S^k(x) \in E\} = \mu(E).$$

Portanto a afirmação vale quando $E = [i_0]$. Se $E = [I] = [i_0 i_1 \dots i_{l-1}]$, fazendo uma construção semelhante ao caso $E = [i_0]$ temos que:

$$\frac{1}{N} \#\{0 \leq k \leq N-1, S^k(x) \in E\} = \frac{|\sigma^n(v_n)|_I + \sum_{i=0}^{n-1} (|\sigma^i(v_i)|_I + |\sigma^i(w_i)|_I) + C_n}{|\sigma^n(v_n)| + \sum_{i=0}^{n-1} (|\sigma^i(v_i)| + |\sigma^i(w_i)|)}.$$

Onde C_n conta a quantidade de vezes que I ocorre como concatenação de duas palavras consecutivas que formam V . Note que $0 \leq C_n \leq 2n$.

Por outro lado, para todo $a \in A$ temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^k(a)|_I}{|\sigma^k(a)|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\sigma_I(az_1 \dots z_{l-1})|_I}{|\sigma_I(az_1 \dots z_{l-1})|}$. Onde $az_1 \dots z_{l-1}$ é uma palavra de A_l . Como M_l é fortemente ergódica, temos que:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{|\sigma^k(az_1 \dots z_{l-1})|_I}{|\sigma^k(az_1 \dots z_{l-1})|}, a \in A \right\} = \mu([I]),$$

e

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{|\sigma^k(v)|_I}{|\sigma^k(v)|}, |v| \leq K \right\} = \mu([I]).$$

Usando essa última equação e o teorema de Stolz-Cesaro temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(v_n)|_I + \sum_{i=0}^{n-1} (|\sigma^i(v_i)|_I + |\sigma^i(w_i)|_I)}{|\sigma^n(v_n)| + \sum_{i=0}^{n-1} (|\sigma^i(v_i)| + |\sigma^i(w_i)|)} = \mu([I]).$$

Como $0 \leq C_n \leq 2n$ e $\lambda > 1$, temos que:

$$\frac{1}{N} \#\{0 \leq k \leq N-1, S^k(x) \in E\} = \mu([I]) = \mu(E).$$

Logo, obtemos a afirmação. Isto termina a prova do teorema. $\square$

Proposição 3.26. *Seja σ uma substituição sobre $A = \mathbb{N}$ tal que σ possui um ponto periódico u e M_σ é irreduzível e aperiódica. Suponha que existe um inteiro positivo n tal que M_σ^n é scrambling então (Ω_u, S) é minimal.*

Demonstração. Seja σ uma substituição fortemente ergódica. Sendo assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i, j \in \mathbb{N}$, existe k (dependente de i, j) tal que k aparece em $\sigma^{n_0}(i)$ e em $\sigma^{n_0}(j)$.

Seja $u_l u_{l+1} \dots u_{l+n}$ um fator do ponto fixo u .

Como u é ponto fixo temos que $u = \sigma^{n_0}(u) = \sigma^{n_0}(u_1) \sigma^{n_0}(u_2) \dots$. Escrevemos $\sigma^{n_0}(u_1) = t_1 \dots t_s$. Como $u_l \dots u_{l+n}$ é um fator de u , $u_l \dots u_{l+n}$ é um fator de $\sigma^{n_1}(a)$ para algum $a \in A$. Do fato que σ é irreduzível e aperiódica temos que para cada $1 \leq i \leq s$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $u_l \dots u_{l+n}$ é um fator de $\sigma^{k_i}(t_i)$; Seja $N = \max_i \{k_i\}$, logo $u_l \dots u_{l+n}$ é um fator de $\sigma^N(t_i)$ para todo $1 \leq i \leq s$.

Temos que $\sigma^{n_0}(a)$ contém algum dos t_i , para todo $a \in A$. Do fato que u é um ponto fixo temos que $u = \sigma^{n_0+N}(u) = \sigma^{n_0+N}(u_1) \sigma^{n_0+N}(u_2) \dots$.

Note que $u_l \dots u_{l+n}$ ocorre em $\sigma^{n_0+N}(a)$ para todo $a \in A$. Além disso, o comprimento de $\sigma^{n_0+N}(a) \leq L^{n_0+N}$, onde $L = \max\{|\sigma(a)|, a \in A\}$. Portanto $u_l \dots u_{l+n}$ aparece infinitas vezes em u , com intervalos limitados por $2L^{n_0+N}$. Como u_1 aparece infinitas vezes em u temos que $\sigma^n(u_1)$ aparece infinitas vezes em u e, conseqüentemente qualquer fator de u se repete infinitas vezes em u .

Seja $v \in O(u)$ então $v = u_k u_{k+1} \dots$ como qualquer fator de u aparece infinitas vezes em u temos que qualquer fator de u aparece em v logo, v tem órbita densa. $\square$

3.3.1 Exemplos

Exemplo 1 (Substituição de Fibonacci infinito).

Sejam $A = \mathbb{N}$ e σ a substituição dada por:

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1(n+1), & \text{se } n \text{ for ímpar;} \\ (n+1), & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases} \quad (3.37)$$

Observe que σ possui um ponto fixo $u \in A^{\mathbb{N}}$:

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(1) = 12314 \dots$$

Lema 3.27. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $|\sigma^n(1)| = F_n$, onde $F_0 = 1, F_1 = 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geq 2$.

Demonstração. Temos

$$|\sigma^n(1)| = L_p(\sigma^{n-1}(1)) + 2L_i(\sigma^{n-1}(1)). \text{ Para todo } n \geq 1.$$

Onde L_p é o número de elementos pares e L_i é o número de elementos ímpares. Por outro lado,

$$L_p(\sigma^n(1)) = L_i(\sigma^{n-1}(1)) \quad \text{e} \quad L_i(\sigma^n(1)) = |\sigma^{n-1}(1)|.$$

Assim,

$$|\sigma^n(1)| = L_p(\sigma^n(1)) + L_i(\sigma^n(1)) = L_i(\sigma^n(1)) + L_i(\sigma^{n-1}(1)) = |\sigma^{n-1}(1)| + |\sigma^{n-2}(1)|.$$

$\square$

Vamos agora ver que o sistema dinâmico associado a σ possui uma única medida ergódica.

De fato, a matriz de σ é dada por

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

O autovalor de Perron é o número de ouro $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_{11}^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

O autovetor a esquerda associado a β é $l = (1, 1/\beta, 1/\beta^2, \dots, 1/\beta^n, \dots)$ e o autovetor a direita é $r = (1, 1/\beta, 1, 1/\beta, 1, \dots)$. Além disso, a matriz M_σ^2 é scrambling. Usando o teorema (3.22) concluímos que o sistema dinâmico associado a σ possui uma única probabilidade invariante.

Cálculo da medida invariante

Temos que

$$\mu([j]) = f_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(1)|_j}{|\sigma^n(1)|}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Com $|\sigma^n(1)|_j = |\sigma^{n-1}(1)|_{j-1} = \dots = |\sigma^{n-j+1}(1)|_1 = F_{n-j+1}$, onde F_k é o k -ésimo termo da sequência de Fibonacci.

Como $|\sigma^n(1)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\sigma^n(1)|_k = F_n$, temos que

$$\frac{|\sigma^n(1)|_j}{|\sigma^n(1)|} = \frac{F_{n-j+1}}{F_n}.$$

Como $F_n \approx c\beta^n$; $c > 0$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(1)|_j}{|\sigma^n(1)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-j+1}}{F_n} = \frac{1}{\beta^{j+1}}.$$

Note que para n grande, vale que $|\sigma^n(i)|_j = |\sigma^n(1)|_j$. Portanto, a medida invariante nos cilindros de comprimento 1 é dada por $\mu([j]) = \frac{1}{\beta^{j+1}}$.

Para palavras de comprimento maior ou igual a 2, procuramos associar a frequência dessas palavras as palavras de comprimento 1. Por exemplo

$$f_{12} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(1)|_{12}}{|\sigma^n(1)|}.$$

Note que

$$|\sigma^n(1)|_{12} = |\sigma^{n-1}(1)|_1.$$

Uma vez que $\sigma(1) = 12$. Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(1)|_{12}}{|\sigma^n(1)|} = \frac{|\sigma^{n-1}(1)|_1}{|\sigma^n(1)|} = \frac{1}{\beta^3}.$$

Para 23 temos que

$$f_{23} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^n(1)|_{23}}{|\sigma^n(1)|}.$$

Note que

$$|\sigma^n(1)|_{23} = |\sigma^{n-1}(1)|_{12} = |\sigma^{n-2}(1)|_1.$$

Portanto $f_{23} = \frac{1}{\beta^4}$.

Encontramos as frequências para palavras de tamanho maior ou igual a 2 de modo análogo.

Exemplo 2

Sejam $A = \mathbb{N}$ e σ a substituição $\sigma : A \rightarrow A^*$ onde

$$\begin{aligned}\sigma(1) &= 112, \\ \sigma(n) &= 1(n+1), \text{ para } n > 1.\end{aligned}$$

Essa substituição possui um ponto fixo $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(1) = 11211213 \dots$

Afirmção: o comprimento de $\sigma^n(1)$ é dado pela relação

$$|\sigma^n(1)| = 3|\sigma^{n-1}(1)| - |\sigma^{n-2}(1)|. \text{ Para todo } n \geq 3.$$

De fato, $|\sigma^n(1)| = 2|\sigma^{n-1}(1)| + |\sigma^{n-1}(1)|_1 = 3|\sigma^{n-1}(1)| - (|\sigma^{n-1}(1)| - |\sigma^{n-1}(1)|_1)$. Note que $|\sigma^{n-1}(1)| - |\sigma^{n-1}(1)|_1 = |\sigma^{n-2}(1)|$ uma vez que, para cada n , $\sigma(n)$ contém uma e apenas uma letra que é diferente de 1. Assim temos que a afirmação é verdadeira.

A matriz associada a σ é

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

M é uma matriz irredutível e aperiódica. Além disso, é possível verificar que o valor de Perron de M é $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e M é recorrente.

Temos que σ é scrambling uma vez que 1 aparece em $\sigma(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando o teorema (3.22) concluímos que o sistema dinâmico associado a σ possui uma única medida ergódica.

Exemplo 3

Considere em $A = \mathbb{N}$ a substituição:

$$\sigma(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{se } n = 3k, k \in \mathbb{N}. \\ 1(n + 1), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.38)$$

Essa substituição é chamada de Tribonacci infinito pois $|\sigma^n(1)| = T_n$, onde $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência onde $T_0 = 1$, $T_1 = 2$, $T_2 = 4$, $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$, para todo $n \geq 4$. A matriz associada a σ é

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

E o valor de Perron de M é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M_{ij}^n)^{1/n} = \beta,$$

onde β é raiz real de $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

Isso vem do fato que $T_n = c\beta^n + d\alpha^n + e\bar{\alpha}^n$, para todo $n \geq 1$, onde $P(\beta) = P(\alpha) = P(\bar{\alpha}) = 0$ e $c, d, e \in \mathbb{R}$. Como $|\alpha| = |\bar{\alpha}| < 1$, então $T_n \approx c\beta^n$ e, portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n)^{1/n} = \beta$.

Note que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, 1 ocorre em $\sigma^2(n)$, de onde concluímos que a matriz M^2 é uma matriz scrambling. Com isso, temos que (Ω, S) possui uma única medida invariante.

3.4 SUBSTITUIÇÃO FORTEMENTE ERGÓDICA ESTRELA

Definição 3.28. Seja $M = (M_{ij})_{i,j \geq 0}$ uma matriz não negativa, irreduzível, aperiódica e $\|M\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \{\sum_{k=0}^{\infty} M_{ik}\} < \infty$. Dizemos que M é:

1-Ergódica se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n}{\sum_{k=0}^{\infty} M_{ik}^n} = z_j > 0 \quad (3.39)$$

Onde $z = (z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é um vetor não negativo com a soma das suas coordenadas igual a 1.

2-Fortemente ergódica estrela se existe um vetor $z = (z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de entradas reais positivas

tal que $\sum_{j=1}^{\infty} z_j = 1$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \geq 0} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{M_{ij}^n}{\sum_{k=0}^{\infty} M_{ik}^n} - z_j \right| = 0 \quad (3.40)$$

Observação. Se M é uma matriz fortemente ergódica que possui um autovetor à direita $r \in l^1$ pelo lema 3.25 M é fortemente ergódica estrela.

Observação. Seja P a matriz $P = (P_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ onde $P_{ij} = \frac{M_{ij}}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{ik}}$ note que podem existir inteiros $n \in \mathbb{N}$ para os quais P_{ij}^n seja diferente de $\frac{M_{ij}^n}{\sum_{k=0}^{\infty} M_{ik}^n}$.

Observação. Se M é fortemente ergódica estrela então M é ergódica.

Observação. Note que se σ é uma substituição de comprimento constante e M_{σ} é fortemente ergódica estrela então M_{σ} é fortemente ergódica uma vez que se L é o comprimento de σ então $\sum_{k=1}^{\infty} M_{ik}^n = L$, para todo inteiro $n > 0$.

Exemplo 18. Seja σ a substituição de Fibonacci infinito, definida em $A = \mathbb{N}$ e dada por

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1(n+1), & \text{se } n \text{ é ímpar.} \\ n+1, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

M_{σ} é fortemente ergódica. De fato: Para $i = 1$ temos:

$$\frac{|M_{1j}^n|}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{kj}^n} = \frac{|\sigma^n(1)|_j}{\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma^n(1)|_k}.$$

Como $|\sigma^n(1)|_j = |\sigma^{n-1}(1)|_{j-1} = \dots = |\sigma^{n-j+1}(1)|_1 = F_{n-j+1}$, onde F_k é o k -ésimo termo da sequência de Fibonacci.

Como $\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma^n(1)|_k = F_n$, ficamos com:

$$\frac{M_{1j}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{1k}^n} = \frac{F_{n-j+1}}{F_n}.$$

Deduzimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{1j}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{1k}^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-j+1}}{F_n} = \frac{1}{\beta^{j+1}}.$$

Por outro lado, como $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ então $F_n = c\beta^n + d\alpha^n$, onde $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ são as raízes do polinômio $p(x) = x^2 - x - 1$.

Como $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^{j+1}} = 1$, temos que M é ergódica.

Além disso,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{M_{1j}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{1k}^n} - \frac{1}{\beta^{j+1}} \right| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{F_{n-j+1}\beta^{j+1} - F_n}{F_n\beta^{j+1}} \right|$$

Temos que $F_{n-j-1} = c'\beta^{n-j-1} + d'\alpha^{n-j-1}$ e $F_n = c\beta^n + d\alpha^n$. Como $|\alpha| < 1$, temos que $\alpha^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{M_{1j}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{1k}^n} - \frac{1}{\beta^{j+1}} \right| \approx \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{c\beta^{n-j-1}\beta^{j+1} + d\alpha^{n-j-1}\beta^{j+1} - c\beta^n - d\alpha^n}{c\beta^n\beta^{j+1} + d\alpha^n\beta^{j+1}} \right| =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{d\alpha^{n-j-1}\beta^{j+1} - d\alpha^n}{c\beta^n\beta^{j+1} + d\alpha^n\beta^{j+1}} \right| \leq \frac{d'}{\beta^n}.$$

Que converge para zero. Além disso, se $n > j$ então $M_{ij}^n = M_{1j}^n$. Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \geq 1} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{M_{ij}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{kj}^n} - \frac{1}{\beta^{j+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d'}{\beta^n} = 0.$$

Lema 3.29. *Seja σ uma substituição de comprimento constante L . Se M_σ é positivo recorrente então M_σ é ergódica.*

Demonstração. Seja σ uma substituição de comprimento constante L , sendo assim, temos que $M = M_\sigma$ é uma matriz com soma de linhas constante igual a L , o autovalor de Perron de M é $\lambda = L$ e o autovetor de Perron a direita de M é $v = (1, 1, 1, \dots)$.

Seja $w = (w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ o autovetor de Perron a esquerda de M , então $w_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n}{L^n}$. Como M é positivo recorrente, temos que $v \cdot w = 1$ e, portanto M_σ é ergódica. $\square$

Lema 3.30. *Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz irredutível, aperiódica, positivo recorrente com valor de Perron finito λ e $r = (r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ o autovetor à direita de M associado a λ . Se r satisfaz $\inf_i \{r_i, i \in \mathbb{N}\} > 0$ então o autovetor à esquerda de M associado a λ está em l^1 .*

Demonstração. Seja $0 < a = \inf_i \{r_i, i \in \mathbb{N}\}$ e $l = (l_i)_{i \in \mathbb{N}}$ o autovetor a esquerda associado a λ . Como M é positivo recorrente, temos que:

$$a \sum_{i=1}^{\infty} l_i \leq \langle l, r \rangle < \infty.$$

Portanto $\sum_{i \in \mathbb{N}} l_i < \infty$. $\square$

Lema 3.31. *Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz ergódica com valor de Perron finito λ e autovetor a esquerda $l = (l_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^1$. Então:*

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{ik}^n} = \frac{l_j}{\sum_{k=1}^{\infty} l_k} > 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}. \quad (3.41)$$

Além disso:

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{ik}^n}{\lambda^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ik}^n}{\lambda^n} = cr_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (3.42)$$

Demonstração. Da ergodicidade de M temos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n}{\sum_{k=1}^{\infty} M_{ik}^n} = z_j.$$

Como M é positivo recorrente, temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{ij}^n}{\lambda^n} = l_j r_i. \quad (3.43)$$

Onde $l = (l_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é um autovetor a esquerda de M , associado a λ tal que $l \cdot r = 1$. Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_{ik}^n}{\lambda^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} M_{ik}^n}{M_{ij}^n} \frac{M_{ij}^n}{\lambda^n} = \frac{l_j}{z_j} r_i.$$

Note que a expressão à esquerda da igualdade não depende de j , portanto $l = (l_j)$ deve ser um múltiplo de $z = (z_j) \in l^1$, logo $l \in l^1$ e obtemos (3.41). A expressão (3.42) segue desta última igualdade e (3.43). $\square$

Teorema 3.32. *Seja σ uma substituição sobre $A = \mathbb{N}$ tal que σ possui um ponto periódico u e $M = M_\sigma$ é uma matriz irredutível, aperiódica, com valor de Perron finito $\lambda > 0$. Se M e M_l , $l \geq 2$ são matrizes fortemente ergódicas estrela. Então o sistema dinâmico (Ω_u, S) possui uma única probabilidade invariante.*

Demonstração. É semelhante ao que foi feito o Teorema 3.22. $\square$

3.5 A MEDIDA NATURAL

Seja σ uma substituição em $A = \mathbb{N}$ tal que σ possui um ponto periódico e cuja matriz associada M seja irredutível, aperiódica e recorrente com valor de Perron finito λ . Suponha que o autovetor a esquerda $l = (l_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^\infty$. Definimos a medida natural de forma indutiva nos cilindros. Primeiro para um cilindro $[i]$ defina $\mu([i]) = l_i$ se $l \notin l^1$ e $\mu([i]) = \frac{l_i}{\sum_{k=1}^{\infty} l_k}$. Suponha que μ está definida nos cilindros de comprimento $1 \leq k \leq n-1$, para $V \in L_u$ com $|V| = n$, seja C_V o conjunto de todas as palavras W de comprimento menor ou igual a n tais que V é um fator de $\sigma(W)$ mas se W' é um fator de W então V não é um fator de $\sigma(W')$.

Definimos

$$\mu([V]) = \frac{1}{\lambda} \sum_{W \in C_V} |\sigma(W)|_V \mu([W]).$$

Observação. A medida foi definida por Ferenczi em [[21]]. Em particular ele mostrou que a medida natural associada a substituição σ definida em $A = 2\mathbb{Z}$ onde $\sigma(2n) = (2n-2)2n2n(2n+2)$ possui uma medida natural que é infinita e ergódica com respeito a aplicação deslocamento.

Proposição 3.33. *Seja σ uma substituição em $A = \mathbb{N}$ tal que σ possui um ponto fixo $u = u_1 u_2 \dots$ e M_σ é irredutível, aperiódica, positiva recorrente com valor de perron finito $\lambda > 0$. Suponha que exista uma medida μ tal que μ seja invariante ao deslocamento e $\mu([V]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_k \dots u_{k+n}|_V}{n+1} = f_V$ então μ é uma medida natural.*

Demonstração. De fato,

$$\frac{|\sigma^n(u_1)|_V}{|\sigma^n(u_1)|} = \sum_{W \in C_V} |\sigma(W)|_V \frac{|\sigma^{n-1}(u_1)|_W}{|\sigma^n(u_1)|}.$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ e do fato que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma^{n-1}(u_1)|}{|\sigma^n(u_1)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma^n(u_1)|^{\frac{1}{n}} = \lambda,$$

Obtemos

$$\mu(V) = \sum_{W \in C_V} |\sigma(W)|_V \mu(W). \quad (3.44)$$

□

3.5.1 Exemplo

Sejam $A = \mathbb{N}$ e $\sigma_{1,1,1} : A \mapsto A^*$ a substituição onde

$$\sigma(1) = 112, \quad \sigma(n) = (n-1)(n)(n+1), \text{ para todo } n \geq 2. \quad (3.45)$$

A matriz associada a σ é

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Note que o autovalor de Perron de M é $\lambda = 3$ e que M é nulo recorrente. Usando o Teorema 3.5, concluimos que o sistema dinâmico associado a σ não possui medida invariante finita. Uma medida infinita é definida nos cilindros $[i]$, $i \in A$ através do autovetor associado a λ . Como $v = (1, 1, 1, \dots)$ é o autovetor associado a $\lambda = 3$ temos que $\mu([i]) = 3$.

Temos que o ponto fixo de σ é $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(1) = 112112123112 \dots$.

Construímos a medida natural de forma indutiva nos cilindros $[w]$ onde $w = w_1 \dots w_l \in A_l$. Para $l = 2$ temos que as palavras de comprimento 2 que ocorrem em u são

$$(n)(1), \forall n \in \mathbb{N}; \quad (n)(n+1), \forall n \in \mathbb{N}; \quad (n+2k+1)(n), \forall n, k \in \mathbb{N}. \quad (3.46)$$

Temos que $(n)(n+1)$ aparece em $\sigma(n)$ e em $\sigma(n+1)$. Com isso

$$\mu([(n)(n+1)]) = \frac{1}{3} \left(|\sigma(n)|_{(n)(n+1)} \mu(n) + |\sigma(n+1)|_{(n)(n+1)} \mu(n+1) \right) = \frac{2}{3}.$$

Para as palavras do tipo $(n+2k+1)(n)$, note que $(n+2k+1)(n)$ aparece apenas uma vez em $\sigma((n+2k)(n+1))$, que aparece apenas uma vez em $(\sigma(n+2k-1)(n+2))$. Repetimos esse passo j até que $(n+2k-j) = n+j+1$ e concluimos que $j = k$. Logo

$$\mu([(n+2k+1)(n)]) = \frac{1}{3} (\mu([(n+2k)(n+1)])) = \dots = \frac{1}{3^k} (\mu(t+1)(t)) = \frac{2}{3^{k+2}}. \quad (3.47)$$

Para as palavras do tipo $n1$ observe que $n1$ aparece uma vez em $\sigma((n-1)(1))$ e em $\sigma((n-1)(2))$, mas este último só ocorre se n for par.

Temos que 11 aparece apenas em $\mu(1)$, portanto

$$\mu([11]) = \frac{1}{3} (\mu([1])) = \frac{1}{3}.$$

Temos que 21 aparece em $\mu(11)$ e em $\mu(12)$, portanto

$$\mu([21]) = \frac{1}{3} (\mu([11]) + \mu([12])) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

Lema 3.34. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$\mu([n1]) = \frac{1}{3^k}, \text{ onde } k = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \quad (3.48)$$

Demonstração. Faremos a prova por indução.

Se n é ímpar então $n1$ aparece apenas em $\sigma((n-1)(1))$. Além disso $n-1 = 2j$ para algum $j \in \mathbb{N}$, logo

$$\mu([n1]) = \frac{1}{3} (\mu([(n-1)(1)])) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3^k} \right) = \frac{1}{3^{k+1}}.$$

Como $n = 2k+1$, temos que $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = k$ e $\mu([n1])$ segue a equação (3.48).

Se n é par então $n1$ aparece em $\sigma((n-1)(1))$ e em $\sigma((n-1)(2))$. Note que $n = 2k$, para $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ logo $n-1 = 2(k-1) + 1 = 1 + 2(k-2) + 1$ e $\mu((n-1)(2)) = \frac{2}{3^k}$.

Para $\mu([(n-1)(1)])$ temos que $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = k-1$ e, portanto $\mu([(n-1)(1)]) = \frac{1}{3^k}$. Assim,

$$\mu([(n)(1)]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3^k} + \frac{2}{3^k} \right) = \frac{1}{3^k}.$$

Portanto $\mu([n1])$ segue a equação (3.48). □

Note que

$$S^{-1}([1]) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n1].$$

E

$$S^{-1}([n]) = [(n-1)(n)] \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [(n+2k+1)(n)], \quad n \geq 2.$$

Além disso

$$\mu(S^{-1}([1])) \sum_{n=1}^{\infty} \mu([n1]) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = 1 = \mu([1]).$$

E

$$\mu(S^{-1}([n])) = \mu([(n-1)(n)]) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu([(n+2k+1)(n)]) = \frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{3^k} = 1 = \mu([n]).$$

E a medida é conservada.

3.6 SUBSTITUIÇÕES IRREDUTÍVEIS PERIÓDICAS

Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz enumerável irredutível e periódica de período $p > 1$. Fixado um índice i , contruímos os subconjuntos cíclicos $C_0, C_1, \dots, C_{p-1}$ da seguinte forma:

$$C_k = \{j : (M^{np+k})_{ij} > 0, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}.$$

Os subconjuntos cíclicos formam uma partição dos índices de M . Para cada $0 \leq k \leq p-1$ definimos $M_k = ((M_k)_{ij})_{i,j \in C_k}$ como sendo a matriz com índices em C_k onde $(M_k)_{ij} = (M^p)_{ij}$ para $i, j \in C_k$. Note que M_k é uma matriz irredutível e aperiódica com valor de Perron $\lambda_{M_k} = \lambda^p$, onde λ é o autovalor de Perron de M .

Exemplo 19. Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Os conjuntos cíclicos são $C_0 = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k+1, k \in \mathbb{N}\}$ e $C_1 = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$.

Proposição 3.35 ([14]). Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz irredutível, periódica de período p e M_k , $0 \leq k \leq p-1$ as matrizes descritas anteriormente. Então

1. M é transiente se, e somente se M_k for transiente para todo k .
2. M é nulo recorrente se, e somente se M_k for nulo recorrente para todo k .

3. M é positivo recorrente se, e somente se M_k for positivo recorrente para todo k .

Com esses sendo os únicos casos possíveis.

Proposição 3.36 ([14]). *Seja M uma matriz enumerável, irredutível, periódica de período $p > 1$ e valor de Perron $\lambda > 0$. Se M for recorrente então existem vetores estritamente positivos l e r tais que $lM = \lambda l$ e $Mr = \lambda r$.*

Lema 3.37 ([14]). *Seja $M = (M_{ij})_{i,j} \in \mathbb{N}$ uma matriz irredutível, periódica de período p e valor de Perron λ , C_k, M_k , $0 \leq k \leq p - 1$. M é positivo recorrente se, e somente se existem vetores $x \geq 0$ e $y \geq 0$ tais que $xM = \lambda x$, $My = \lambda y$ e $x \cdot y < \infty$.*

Lema 3.38. *Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ enumerável, não negativa periódica de período p e valor de Perron λ . Então:*

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (M^n)_{ij} / \lambda^n = 0$ para qualquer par de índices i, j se M for transiente.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (M^{np})_{ij} / \lambda^{np} = \begin{cases} \frac{L_{ij}(1/\lambda)}{p\mu(i)} = \frac{R_{ij}(1/\lambda)}{p\mu(j)} & \text{se } i, j \in C_k. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Lema 3.39. *Seja σ uma substituição irredutível e periódica de período $p > 1$. Fixado $a \in A$, para cada $0 \leq k \leq p - 1$ definimos os conjuntos:*

$$\Omega_k = \{V \in A^{\mathbb{N}} : \text{Se } w \text{ é um fator de } V \text{ então } w \text{ é um fator de } \sigma^{np+k}(a), \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$$

E temos que $\Omega = \bigcup_{k=0}^{p-1} \Omega_k$

Demonstração. Para qualquer k temos que $\Omega_k \subset \Omega$. Vamos mostrar a inclusão contrária.

Note que se u é um fator de $\sigma^{np+k}(a)$ e $0 \leq k' < p$, $k' \neq k$ então u não pode ser um fator de $\sigma^{mp+k'}(a)$, $m \in \mathbb{N}$.

Seja $V \in \Omega$ e suponha, por absurdo que $V \notin \Omega_k$ para todo k . Seja $u \in A$ um fator de V . Como σ é irredutível, deve existir n tal que u ocorre em $\sigma^n(a)$. Podemos decompor n na forma $n = pq + k$ e, portanto u é um fator de $\sigma^{pq+k}(a)$. Por outro lado, como V não é uma palavra de Ω_k deve existir w fator de V tal que $w \notin \Omega_k$ e escolhemos v um fator de V que contenha u e w .

Como $v \in \Omega$, temos que v deve ser um fator de $\sigma^n(b)$ para algum $b \in A$ e $n \in \mathbb{N}$. Usando novamente o fato que σ é irredutível, temos que b ocorre em $\sigma^j(a)$ para algum $j \in \mathbb{N}$, sendo assim, temos que v é um fator de $\sigma^n(\sigma^j(a)) = \sigma^J(a)$. Podemos escrever $J = pq' + k'$ para $q' \in \mathbb{N}$ e algum $0 \leq k' \leq p - 1$. Temos que u e w são fatores de $\sigma^{pq'+k'}(a)$. Como u é um fator de $\sigma^{pq+k}(a)$ devemos ter que $k' = k$ e, portanto u e w são fatores de $\sigma^{pq'+k}(a)$. O que é um absurdo pois $w \notin \Omega_k$. $\square$

Corolário 3.40. *Considerando $A^{(k)} = \{b \in A : b \in \mathcal{L}(\sigma^{np+k}(a))\}$, temos que $A = \bigcup A^{(k)}$ e se $k \neq k'$ então $A^{(k)} \cap A^{(k')} = \emptyset$.*

Lema 3.41. A substituição $\sigma^p : A^{(k)} \mapsto (A^{(k)})^*$ é uma substituição irredutível e aperiódica.

Demonstração. Observe que a matriz de σ^p em $A^{(k)}$ coincide com a matriz M_k do grupo cíclico C_k , que é uma matriz irredutível e aperiódica. $\square$

Proposição 3.42. Seja σ uma substituição de comprimento constante tal que $M = M_\sigma$ é irredutível e periódica de período $p > 1$. Se M satisfaz (3.4), o sistema dinâmico associado a σ não possui medida invariante finita.

Demonstração. Suponha que exista uma medida μ invariante em Ω , logo μ é uma medida invariante em $\Omega^{(k)} \subset \Omega$. Usando (3.35), concluímos que não existe medida invariante em $\Omega^{(k)}$ pois a matriz $M^{(k)}$ associada a σ e ao conjunto cíclico C_k é nulo recorrente. $\square$

Exemplo 20. Considere em $A = \mathbb{N}$ a seguinte substituição:

$$\begin{aligned}\sigma(0) &= 11, \\ \sigma(n) &= (n-1)(n+1), \quad \forall n \geq 1.\end{aligned}$$

Temos que σ é uma substituição irredutível e periódica de período 2, pois se $|\sigma^k(n)|_n > 0$ então k é par. A matriz de σ é

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

E, os conjuntos cíclicos são $C_0 = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k+1, k \in \mathbb{N}\}$ e $C_1 = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$. M é uma matriz irredutível e periódica de período 2. Além disso, σ é uma substituição de comprimento constante igual a 2. O valor de Perron de M é $\lambda = 2$. A matriz M é nulo recorrente, portanto usando a proposição temos que o sistema dinâmico associado a σ não possui medida invariante.

Definição 3.43. Seja σ uma substituição irredutível e periódica de período $p > 1$. Dizemos que σ é periodicamente ergódica (resp. fortemente ergódica), se cada uma das matrizes $M^{(k)}$ for ergódica (resp. fortemente ergódica).

Proposição 3.44. Seja σ uma substituição irredutível e periódica de período p . Se, para cada k a matriz $M^{(k)}$ associada ao conjunto C_k é fortemente ergódica, o sistema dinâmico associado a σ possui p medidas invariantes e ergódicas.

Demonstração. Seja μ uma medida invariante. Como cada um dos $A^{(k)}$ possui uma única medida invariante μ_k , temos que μ restrita a $A^{(k)}$ é igual a medida μ_k (a menos de multiplicação por constante) e, portanto μ pode ser escrita como combinação das

p medidas μ_k . Com isso, temos que existem, no máximo p medidas invariantes em Ω . Como $A^{(k)} \cap A^{(k_2)} = \emptyset$ quando $k \neq k_2$, temos que existem exatamente p medidas invariantes. $\square$

4 CONCLUSÃO

Esse trabalho nos fornece alguns resultados interessantes em sistemas dinâmicos associados a substituições em alfabetos infinitos. Entre os resultados importantes da tese temos os teoremas a seguir.

Seja A um alfabeto infinito enumerável e σ uma substituição sobre A que possui um ponto periódico $u \in A^{\mathbb{N}}$ e tal que M_σ seja irredutível e aperiódica com valor de Perron finito λ . Então os seguintes resultados valem:

Teorema 4.1. *Se M_σ for positivo recorrente então o sistema dinâmico (Ω_σ, S) possui uma medida invariante μ . Além disso, μ é finita se, e somente se, o autovetor de Perron à esquerda l está em l^1 .*

Para substituições de comprimento constante, temos:

Teorema 4.2. *Se σ for uma substituição de comprimento constante L tal que M_σ seja positivo recorrente e M_σ/L seja scrambling, então o sistema dinâmico (M_σ, S) possui uma única probabilidade μ , além disso (M_σ, S) é minimal.*

E uma generalização desse último resultado para substituições de comprimento não constante

Teorema 4.3. *Seja σ uma substituição sobre A tal que M_σ seja positivo recorrente. Seja r o autovetor à direita de M associado a λ e P a matriz estocástica onde $P_{ij} = M_{ij}r_j/\lambda r_i$. Se P for scrambling, então o sistema dinâmico (Ω_σ, S) possui uma única probabilidade invariante, além disso (Ω_σ, S) é minimal.*

Observação. Esses resultados também podem ser obtidos no caso em que σ não possui um ponto periódico mas é fracamente determinada à esquerda.

Observação. Resultados semelhantes podem ser obtidos para substituições σ tais que M_σ é irredutível e periódica.

Os resultados obtidos nessa tese estendem os resultados encontrados em [21] e [23], além disso, durante as demonstrações conseguimos explicitar a medida invariante encontrada para o sistema.

5 ANEXO 1

Teorema 5.1 (Stolz-Cesaro). *Seja $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos tais que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais, então as seguintes desigualdades são satisfeitas:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}. \quad (5.1)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}. \quad (5.2)$$

Em particular, se a sequência $(\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ possui um limite então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}. \quad (5.3)$$

Demonstração. Vamos mostrar a primeira desigualdade uma vez que a segunda desigualdade pode ser obtida substituindo a_i por $-a_i$. A desigualdade é trivial se o lado direito é ∞ ; suponhamos então que $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ é finito ou $-\infty$ e seja $l > L$. Da definição de $\limsup$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{a_n}{b_n} \leq l \quad \forall n > N. \quad (5.4)$$

Usando (5.4) temos a desigualdade:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_N + l(b_{N+1} + b_{N+2} + \cdots + b_n) \quad \forall n > N. \quad (5.5)$$

Denotamos as somas $a_1 + \cdots + a_n = A_n$ e $b_1 + \cdots + b_n = B_n$ então (5.5) pode ser escrita como

$$A_n \leq A_N + l(B_n - B_N).$$

Dividindo por B_n obtemos :

$$\frac{A_n}{B_n} \leq l + \frac{A_N - lB_N}{B_n}. \quad (5.6)$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n \mapsto \infty$, fixando N e tomando o $\limsup$ em (5.6), temos que $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n/B_n \leq l$, ou seja:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} \leq l \quad \forall l > L.$$

E, portanto:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} \leq L.$$

□

Lema 5.2 (Lema de Fatou). *Seja $(a_j(k))_{j,k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais não negativos, então:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \liminf_{k \rightarrow \infty} a_j(k) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_j(k). \quad (5.7)$$

Teorema 5.3 (Teorema de Birkhoff). *Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço medido, μ uma probabilidade e $T : X \mapsto X$ uma transformação que preserva a medida μ então, dado qualquer função mensurável $f : X \mapsto \mathbb{R}$, o limite:*

$$\overline{f(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) \quad (5.8)$$

existe para μ quase todo ponto x . Além disso, se para qualquer $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mu)$ então $\overline{f} \in L^p$, $\overline{f} \circ T = \overline{f}$ e $\int_X \overline{f} d\mu = \int_X f d\mu$.

Teorema 5.4 (Teorema ergódico de Birkhoff). *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade e T uma transformação que preserva a medida e A um conjunto mensurável, então*

1- μ é ergódica se, e somente se para μ quase todo ponto $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x)) = \mu(A).$$

2- μ é unicamente ergódica se, e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x)) = \mu(A).$$

Para todo $x \in X$.

5.1 MATRIZES ESTOCÁSTICAS

Definição 5.5. *Um vetor não negativo $v = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é um vetor estocástico se $\sum_{i=1}^{\infty} v_i = 1$.*

Uma matriz $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ é uma matriz estocástica se todas as suas linhas são vetores estocásticos.

Exemplo 6. O vetor $w = (1/2, 1/4, 1/8, \dots, 1/2^n, \dots)$ é um vetor enumerável estocástico.

A matriz $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/8 & \dots & 1/2^n & \dots \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & \dots & 1/2^n & \dots \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & \dots & 1/2^n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ é uma matriz enumerável es-

tocástica.

Definição 5.6. Seja $P = (P_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz estocástica, o coeficiente de ergodicidade de P , denotado por $\alpha(P)$ é dado por:

$$\alpha(P) = 1 - \sup_{i,k} \sum_{j=1}^{\infty} [P_{ij} - P_{kj}]^+, \quad (5.9)$$

onde $[P_{ij} - P_{kj}]^+ = \max(P_{ij} - P_{kj}, 0)$ para todo $i, j, k \in \mathbb{N}$.

As vezes é mais conveniente usar $1 - \alpha(P)$ ao invés de $\alpha(P)$. Definimos então o coeficiente $\delta(P)$ onde:

$$\delta(P) = 1 - \alpha(P). \quad (5.10)$$

É possível verificar que:

$$\sup_{i,k} \sum_{j=1}^{\infty} [P_{ij} - P_{kj}]^+ = \frac{1}{2} \sup_{i,k} \sum_{j=1}^{\infty} |P_{ij} - P_{kj}|.$$

E, portanto

$$\delta(P) = \frac{1}{2} \sup_{i,k} \sum_{j=1}^{\infty} |P_{ij} - P_{kj}|. \quad (5.11)$$

Proposição 5.7 ([22],[19] pg 70). Seja $P = (P_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz estocástica, então $0 \leq \delta(P) \leq 1$. Além do mais,

$$\delta(P) = 1 - \inf_{i_1, i_2} \sum_{j=1}^{\infty} \min(P_{i_1 j}, P_{i_2 j}). \quad (5.12)$$

Demonstração. Defina $\gamma(P) = \inf_{i_1, i_2} \sum_{j=1}^{\infty} \min(P_{i_1 j}, P_{i_2 j})$ e $\gamma_{i_1, i_2}(P) = \sum_{j=1}^{\infty} \min(P_{i_1 j}, P_{i_2 j})$. Seja $\delta_{i_1, i_2}(P) = \sum_j [P_{i_1 j} - P_{i_2 j}]^+$, então:

$$\delta_{i_1, i_2}(P) = \sum_{j=1}^{\infty} (P_{i_1 j} - \min(P_{i_1 j}, P_{i_2 j})) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \min(P_{i_1 j}, P_{i_2 j}) = 1 - \gamma_{i_1, i_2}(P).$$

E, com isso temos que $\delta(P) \geq \delta_{i_1, i_2}(P) = 1 - \gamma_{i_1, i_2}(P) \geq 1 - \gamma(P)$. Por outro lado, $\delta_{i_1, i_2}(P) = 1 - \gamma_{i_1, i_2}(P) \leq 1 - \gamma(P)$ para qualquer par i_1, i_2 , o que implica em $\delta(P) \leq 1 - \gamma(P)$. Juntando as duas desigualdades obtemos que $\delta(P) = 1 - \gamma(P)$. $\square$

Proposição 5.8 ([19]). Sejam $P = (P_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ e $Q = (Q_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ matrizes estocásticas então:

$$\delta(PQ) \leq \delta(P)\delta(Q). \quad (5.13)$$

Demonstração. Fixados i_1 e i_2 e considerando $[a] = \min(a, 0)$ temos que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} [P_{i_1 k} - P_{i_2 k}]^+ + \sum_{k=1}^{\infty} [P_{i_1 k} - P_{i_2 k}]^- = \sum_{k=1}^{\infty} P_{i_1 k} - P_{i_2 k} = 0,$$

onde $[P_{i_1k} - P_{i_2k}]^- = \min\{P_{i_1k} - P_{i_2k}, 0\}$, portanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} [P_{i_1k} - P_{i_2k}]^+ = - \sum_{k=1}^{\infty} [P_{i_1k} - P_{i_2k}]^-.$$

Denote $\sum_{a_k > 0} a_k$ por $\sum' a_k$ e temos que:

$$\begin{aligned} \sum_j \left(\sum_k (P_{i_1k} - P_{i_2k}) Q_{kj} \right)^+ &= \sum_j \sum_k (P_{i_1k} - P_{i_2k}) Q_{kj} = \sum_k (P_{i_1k} - P_{i_2k}) \sum_j' Q_{kj} \\ &\leq \sum_k (P_{i_1k} - P_{i_2k})^+ \sup_k \sum_j' Q_{kj} + \sum_k (P_{i_1k} - P_{i_2k})^- \inf_k \sum_j' Q_{kj} \\ &= \sum_k (P_{i_1k} - P_{i_2k})^+ (\sup_k \sum_j' Q_{kj} - \inf_k \sum_j' Q_{kj}). \end{aligned}$$

Onde os índices em $\sum'$ podem depender de i_1 e i_2 . Note que:

$$\sup_k \sum_j' Q_{kj} - \inf_k \sum_j' Q_{kj} = \sup_{k_1, k_2} \sum_j' (Q_{k_1j} - Q_{k_2j}) \leq \sup_{k_1, k_2} \sum_j (Q_{k_1j} - Q_{k_2j})^+ = \delta(Q).$$

E este não depende de i_1 e i_2 . Com isso, $\sum_j (\sum_k (P_{i_1k} - P_{i_2k}) Q_{kj})^+ \leq \sum_k (P_{i_1k} - P_{i_2k})^+ \delta(Q)$ e

$$\begin{aligned} \delta(PQ) &= \sup_{i_1, i_2} \left[\sum_j \left(\sum_k (P_{i_1k} - P_{i_2k}) Q_{kj} \right)^+ \right] \leq \sup_{i_1, i_2} \left[\sum_k (P_{i_1k} - P_{i_2k})^+ \delta(Q) \right] \\ &\leq \delta(Q) \sup_{i_1, i_2} \sum_k (P_{i_1k} - P_{i_2k})^+ = \delta(P) \delta(Q). \end{aligned}$$

□

Proposição 5.9 ([19]). *Seja $P = (P_{ij})$ uma matriz estocástica e $\xi = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ um vetor tal que $\|\xi\| < \infty$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i = 0$. Então $\|\xi P\| \leq \|\xi\| \delta(P)$.*

Demonstração. Defina os vetores $\zeta^1 = (\zeta_i^1)_{i \in \mathbb{N}}$ e $\zeta^2 = (\zeta_i^2)_{i \in \mathbb{N}}$ onde:

$$\zeta_i^1 = 2 \frac{\xi_i^+}{\|\xi\|}, \quad \zeta_i^2 = 2 \frac{|\xi_i^-|}{\|\xi\|}.$$

Temos que ζ^1 e ζ^2 são vetores estocásticos e $\zeta_i^1 - \zeta_i^2 = 2 \frac{\xi_i}{\|\xi\|}$.

Seja Q uma matriz onde a primeira linha de Q é igual a ζ^1 e as demais são iguais a ζ^2 . Então:

$$2\delta(QP) = 2 \sum_j \left(\sum_k (\zeta_k^1 - \zeta_k^2) P_{kj} \right)^+ = \sum_j \left| \sum_k (\zeta_k^1 - \zeta_k^2) P_{kj} \right|.$$

Da definição de ζ^1 e ζ^2 , temos que:

$$\sum_j \left| \sum_k (\zeta_k^1 - \zeta_k^2) P_{kj} \right| = 2 \sum_j \left| \sum_k \frac{\xi_k}{\|\xi\|} P_{kj} \right| = \frac{2}{\|\xi\|} \sum_j \left| \sum_k \xi_k P_{kj} \right| = 2 \frac{\|\xi P\|}{\|\xi\|}.$$

De onde concluímos que $\delta(QP) = \frac{1}{2} \sum_j \left| \sum_k (\zeta_k^1 - \zeta_k^2) P_{kj} \right| = \frac{\|\xi P\|}{\|\xi\|}$.

Como $\delta(QP) \leq \delta(P)\delta(Q) \leq \delta(P)$, temos que $\|\xi P\| \leq \|\xi\|\delta(P)$. $\square$

Corolário 5.10. *Seja $M = (M_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz em que todas as linhas possuem soma nula e norma finita e $Q = (Q_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz estocástica então:*

$$\|MQ\| \leq \|M\|\delta(Q).$$

Corolário 5.11. *Se P e Q são matrizes estocásticas então $\|PQ - Q\| \leq 2\delta(Q)$.*

Teorema 5.12. *[[13]] Uma matriz estocástica $P = (P_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ é fortemente ergódica se, e somente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que P^n é scrambling.*

Proposição 5.13 ([11]). *Seja M uma matriz estocástica, então M é fortemente ergódica se, e somente se M for uniformemente geometricamente ergódica, ou seja, existem $0 < \beta < 1$ e $c > 0$ tais que:*

$$|M_{ij}^n - \pi_j| \leq c\beta^n.$$

Para algum vetor estocástico e positivo $\pi = (\pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Demonstração. Como M é fortemente ergódica, temos que $QM^n = Q$ para $n \in \mathbb{N}$ e Q é a matriz estocástica em que as linhas são constantes e iguais ao vetor $\pi = (\pi_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Além disso, existe um inteiro positivo N tal que:

$$\delta(M^N) = d < 1.$$

Seja $n \geq N$, assim podemos escrever $n = Nq + r$ com $0 \leq r < N$ e q natural. Com isso, temos que:

$$\begin{aligned} \|M^n - Q\| &= \|M^{Nq+r} - Q\| = \|M^{Nq+r} - QM^{Nq}\| \leq \|M^r - Q\| \delta(M^{Nq}) \\ &\leq 2\delta(M^N)^q = 2d^q \leq \frac{2}{d}(d^{\frac{1}{N}})^n. \end{aligned}$$

Como $0 < d < 1$ e $N \geq 1$ tomamos $\beta = d^{\frac{1}{N}}$ e $c = \frac{2}{d}$. Então $\|M^n - Q\| \leq c\beta^n$ para $n \geq N$.

Se $n < N$ então

$$\|M^n - Q\| \leq 2 = \frac{2}{\beta^N} \beta^n = \frac{2}{d} \beta^n = c\beta^n.$$

Seja agora $\pi_j > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_i \{M_{ij}^n - \pi_j\} = 0$. Então para N suficientemente grande, devemos ter

$$M_{ij}^N > 1/2\pi_j \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Com isso temos que:

$$\delta(M^N) < 1 - 1/2\pi_j < 1.$$

Portanto M é fortemente ergódica.

□

REFERÊNCIAS

- [1] BARTLE, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, Inc., Jan. 1995.
- [2] CANTERINI, V. AND SIEGEL, A. *Geometric representation of substitutions of Pisot type*. *Transactions of the American Mathematical Society* 353 (01 2001).
- [3] CASSAIGNE, J. *Complexity and special factors. (complexité et facteurs spéciaux.)*. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin* 4, 1 (1997), 67–88.
- [4] DOBRUSHIN, R. L. *Central limit theorem for nonstationary markov chains. i. Theory of Probability & Its Applications* 1, 1 (1956), 65–80.
- [5] DOMBEK, D. *Substitutions over infinite alphabet generating $(-\beta)$ -integers*. *International Journal of Foundations of Computer Science* 23 (12 2012), 1627–1639.
- [6] DURAND, F. *Combinatorics on Bratteli diagrams and dynamical systems*. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, p.324-72. Cambridge University Press, 2010.
- [7] DURAND, F., ORMES, N. S., AND PETITE, S. *Self-induced systems*. *Journal d'Analyse Mathématique* 135 (2018), 725-756.
- [8] DURRETT, R. *Probability: Theory and Examples*. Duxbury, 2009.
- [9] DUTRA, A. G. *Sistemas dinâmicos e substituições*. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2007.
- [10] FOGG, N. P. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [11] HUANG, C. *The rate of convergence of certain nonhomogeneous markov chains*. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw.* 35 (1976).
- [12] ISAACSON, D. AND LUECKE, G.R. *Strongly ergodic markov chains and rates of convergence using spectral conditions*. *Stochastic Processes and their Applications* 7, 1 (1978), 113–121.
- [13] ISAACSON, D.L., AND MADSEN, R.W. *Markov chains: Theory and applications*. WILEY, 1976.
- [14] KITCHENS, B. P. *Symbolic dynamics. One-sided, two-sided and countable state Markov shifts*. SPRINGER, 1998.

- [15] LAWLER, G. F. *Intersections of random walks* SIAM Rev. 34, 4 (1992), 666.
- [16] LEVIN, D.A. AND PERES, Y. *Markov Chains and Mixing Times*. 2007.
- [17] MANIBO, N. RUST, D. AND WALTON, J. J. *Substitutions on compact alphabets*. *arXiv preprint arXiv:2204.07516*, 2022
- [18] MORSE, M. AND HEDLUND, G. A. *Symbolic dynamics*. *American Journal of Mathematics* 60, 4 (1938), 815–866.
- [19] PAZ, A. AND RHEINOLDT, W. *Introduction to Probabilistic Automata*. COMPUTER SCIENCE AND APPLIED MATHEMATICS. ELSEVIER INC, ACADEMIC PRESS INC, 1971.
- [20] QUEFFELEC, M. *Substitution Dynamical Systems - Spectral Analysis*. SPRINGER, 1987.
- [21] FERENCZI, S. *Substitution dynamical systems on infinite alphabets*. *Annales de L’Institut Fourier* 56, 7 (2006), 2315–2343.
- [22] SENETA, E. *Non-negative Matrices and Markov Chains*. 07 2006.
- [23] BEZUGLYI, S. JORGENSEN, P.E.T. AND SANADHYA S. *Measures and generalized bratteli diagrams for dynamics of infinite alphabet-substitutions*.
- [24] VERE-JONES, D. *Geometric ergodicity in denumerable markov chains*. *The Quarterly Journal of Mathematics* 13, 1 (01 1962), 7–28.
- [25] VERE-JONES, D. *Ergodic properties of nonnegative matrices. I*. *Pacific Journal of Mathematics* 22, 2 (1967), 361 – 386.
- [26] VIANA, M. AND OLIVEIRA, K. *Fundamentos da teoria ergodica*. SBM., 2015.