

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA

CÉSAR AUGUSTO ROMERO REYNOSO

ESTRATÉGIA DE VERIFICAÇÃO DA RADIALIDADE EM SUBGRAFOS
PARA A OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA
ELÉTRICA

Ilha Solteira
2024



CÉSAR AUGUSTO ROMERO REYNOSO

ESTRATÉGIA DE VERIFICAÇÃO DA RADIALIDADE EM SUBGRAFOS
PARA A OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA
ELÉTRICA

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Automação.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Henrique Faria Macedo Possagnolo

Ilha Solteira
2024

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

R763e Romero Reynoso, César Augusto.
Estratégia de verificação de radialidade de um subgrafo usado na otimização de sistemas de distribuição de energia elétrica / César Augusto Romero Reynoso. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2024
78 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2024

Orientador: Leonardo Henrique Faria Macedo Possagnolo

Inclui bibliografia

1. Algoritmo de Prim. 2. Árvore geradora mínima. 3. Otimização de sistemas de distribuição. 4. Topologia radial.



Amanda Sertori dos Santos

Bibliotecária - CRB/8-9061
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao
Usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: ESTRATÉGIA DE VERIFICAÇÃO DA RADIALIDADE EM SUBGRAFOS PARA A OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA

AUTOR: CESAR AUGUSTO ROMERO REYNOSO

ORIENTADOR: LEONARDO HENRIQUE FARIA MACEDO POSSAGNOLO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, área: Automação pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. LEONARDO HENRIQUE FARIA MACEDO POSSAGNOLO (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia de Energia / Faculdade de Engenharia e Ciências - UNESP

Dr. RENZO AMILCAR VARGAS PERALTA (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP



Prof. Dr. LUCAS TELES DE FARIA (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia de Energia / Faculdade de Engenharia e Ciências - UNESP



Ilha Solteira, 07 de fevereiro de 2024

IMPACTO POTENCIAL DESTA PESQUISA

O tema central da dissertação está relacionado com a otimização da operação e do planejamento de sistemas de distribuição de energia elétrica. Particularmente, no caso da reconfiguração de sistemas de distribuição, a ideia central é encontrar uma topologia de operação que permita o sistema elétrico operar com perdas mínimas. Dessa forma, uma diminuição das perdas significa maior energia transferida ao consumidor, menor impacto ao meio ambiente e a possibilidade de diminuição das tarifas.

POTENCIAL IMPACT OF THIS RESEARCH

The central theme of this dissertation is related to the optimization of the operation and of the planning of power distribution systems. Particularly, in the theme of the reconfiguration of distribution systems, the main idea is to find an operation topology that allows the power system to operate with minimal losses. Therefore, a decrease in the losses means that more power is transferred to the consumer, there is a lesser impact on the environment, and the possibility of tax reductions.

AGRADECIMENTOS

À banca examinadora, pela leitura, correção e arguição do meu trabalho.

A todos os funcionários e professores da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira.

A todos os meus colegas do LaPSEE, que proporcionaram um ambiente confortável e agradável para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos Lucas Yamaguti e Victor Molieri pela constante ajuda nos últimos anos, tanto acadêmica quanto pessoal.

Ao meu orientador Professor Doutor Leonardo Henrique Faria Macedo Possagnolo pela orientação, paciência e o tempo dedicado ao meu mestrado.

Aos meus pais Rubén e Lucila, que tanto me ajudaram e apoiaram ao longo da minha vida. Simplesmente não seria possível chegar até aqui sem eles.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo 409062/2023-5.

RESUMO

Em problemas relacionados com a otimização do planejamento da expansão e da operação de sistemas de distribuição radiais, existe a necessidade de verificar se uma proposta de solução é radial ou não. Essa necessidade de verificação é imprescindível quando são usadas algumas meta-heurísticas no processo de otimização do problema de distribuição, onde pode haver casos em que é necessário realizar milhares ou dezenas de milhares de verificações desse tipo. A proposta mais usada na literatura especializada consiste em calcular o determinante da matriz de incidência nó-arco da candidata à topologia radial. Nesse tipo de proposta, o tempo de processamento pode ser elevado. Adicionalmente, a topologia gerada é descartada se for verificada que não é radial. Neste trabalho, apresentam-se duas propostas para verificar se um subgrafo de um grafo conexo é árvore geradora (topologia radial). Essas propostas foram idealizadas usando as propriedades de grafos relacionadas com a caracterização de uma árvore geradora (topologia radial) e os conceitos existentes no algoritmo de Prim usado para resolver o problema de árvore geradora mínima de um grafo conexo. Além disso, apresenta-se também uma estratégia que pode ser mais interessante que as anteriores. Nessa estratégia, em um processo único, verifica-se se um subgrafo é uma topologia radial e, caso não seja, encontra-se a topologia radial mais próxima. Os testes mostram que as propostas apresentadas são rápidas e eficientes.

Palavras-chave: algoritmo de Prim; árvore geradora mínima; otimização de sistemas de distribuição; topologia radial.

ABSTRACT

In problems related to the optimization of the expansion planning and of the operation of radial distribution systems, there is a need to verify if a solution proposal is radial or not. This verification is indispensable when some metaheuristics are used in the optimization process of the distribution problem, where there may be cases which are necessary to perform this verification thousands or tens of thousand times. In the specialized literature, the most used proposal consists of calculating the determinant of the node-edge incidence matrix of the candidate to radial topology. In that proposal, the processing time can be high. Besides, the generated topology is discarded if it is verified as not being radial. In this work, two proposals are presented to verify if a subgraph from a connected graph is a spanning tree (radial topology). These proposals were idealized using the properties of graphs related with the characterization of a spanning tree (radial topology) and the existing concepts in the Prim's Algorithm used to solve the minimal spanning tree problem of a connected graph. Furthermore, it is also presented a proposal which may be more interesting than the previous ones. In this proposal, in a single process, is verified if a subgraph is a radial topology and, if not, is generated the closer radial topology from the previous subgraph. The tests demonstrate that the presented proposals are fast and efficient.

Keywords: minimal spanning tree; optimization of distribution systems; Prim's algorithm; radial topology.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Grafo orientado	29
Figura 2 - Grafo não orientado	29
Figura 3 - Subgrafo próprio de G	31
Figura 4 - Subgrafo gerador	31
Figura 5 - Subgrafo induzido	32
Figura 6 - Dois componentes (subgrafos)	32
Figura 7 - Árvore de um grafo	32
Figura 8 - Árvore geradora do grafo G	32
Figura 9 - Árvore de um grafo	33
Figura 10 - Árvores após retirar (1,2)	34
Figura 11 - Árvores após retirar (3,5)	34
Figura 12 - Grafo conexo	36
Figura 13 - Árvore geradora do grafo	36
Figura 14 - Matriz de incidência do grafo	36
Figura 15 - Grafo conexo com arco artificial	37
Figura 16 - Matriz A modificada	37
Figura 17 - Grafo conexo	39
Figura 18 - Árvore geradora mínima do grafo	39
Figura 19 - Subgrafo que é radial	42
Figura 20 - Subgrafo que não é radial	42
Figura 21 - Matriz de incidência da Figura 19	42
Figura 22 - Matriz de incidência da Figura 20	43
Figura 23 - Fluxograma da primeira proposta (continua)	48
Figura 23.a - Fluxograma da primeira proposta (conclusão)	49

Figura 24 - Subgrafo inicial	51
Figura 25 - Subgrafo intermediário	51
Figura 26 - Subgrafo inicial	51
Figura 27 - Subgrafo intermediário	51
Figura 28 - Fluxograma da segunda proposta	53
Figura 29 - Matriz de incidência da Figura 24	54
Figura 30 - Matriz de incidência restante	55
Figura 31 - Matriz de incidência da Figura 26	55
Figura 32 - Matriz de incidência restante	56
Figura 33 - Fluxograma da forma alternativa da segunda proposta	57
Figura 34 - Fluxograma da terceira proposta	60
Figura 35 - Topologia base do sistema de 14 barras	63
Figura 36 - Topologia base do sistema de 84 barras	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Tamanho do espaço de busca dos sistemas usados nos testes	61
Tabela 2 - Tempo de processamento das propostas analisadas	66
Tabela 3 - Dados dos ramos do sistema de 14 barras	72
Tabela 4 - Dados dos ramos do sistema de 33 barras	72
Tabela 5 - Dados dos ramos do sistema de 84 barras	73
Tabela 6 - Dados dos ramos do sistema de 136 barras	74
Tabela 7 - Dados dos ramos do sistema de 415 barras (continua)	75
Tabela 7 - Dados dos ramos do sistema de 415 barras (continuação)	76
Tabela 7 - Dados dos ramos do sistema de 415 barras (continuação)	77
Tabela 7 - Dados dos ramos do sistema de 415 barras (conclusão)	78

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADC	Available Delivery Capability
BPSO	Binary Particle Swarm Optimization
DE	Differential Evolution
LOL	Local Optimal List
PSO	Particle Swarm Optimization
SFLA	Shuffled Frog Leaping Algorithm
VNS	Variable Neighborhood Search
VSHDE	Variable Scaling Hybrid Differential Evolution
WOA	Whale Optimization Algorithm

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
2.1	A META-HEURÍSTICA PSO APLICADA AO PROBLEMA DA RECONFIGURAÇÃO	17
2.2	A META-HEURÍSTICA <i>DE</i> APLICADA AO PROBLEMA DA RECONFIGURAÇÃO	24
2.3	A META-HEURÍSTICA WOA APLICADA AO PROBLEMA DA RECONFIGURAÇÃO	25
2.4	OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO	26
3	REVISÃO SOBRE TEORIA DE GRAFOS E O ALGORITMO DE PRIM	28
3.1	INTRODUÇÃO	28
3.2	TEORIA DE GRAFOS RELACIONADA COM UMA TOPOLOGIA RADIAL	28
3.2.1	Conceitos básicos sobre grafos	28
3.2.1.1	Grafo orientado e não orientado	29
3.2.1.2	Grafo próprio	29
3.2.1.3	Caminho de um grafo - <i>path</i>	29
3.2.1.4	Cadeia de um grafo - <i>chain</i>	30
3.2.1.5	Circuito de um grafo - <i>circuit</i>	30
3.2.1.6	Ciclo de um grafo - <i>cycle</i>	30
3.2.1.7	Subgrafo de um grafo	30
3.2.1.8	Grau de um nó de um grafo	32
3.2.2	Propriedades fundamentais relacionadas com uma árvore geradora	32
3.2.2.1	Propriedade 1 sobre árvores	32
3.2.2.2	Propriedade 2 sobre árvores	33
3.2.2.3	Propriedade 3 sobre árvores	34
3.2.3	Formas equivalentes de caracterização de uma árvore geradora de um grafo	34

3.2.4	Forma alternativa de se verificar uma topologia radial	35
3.3	O ALGORITMO DE PRIM	38
4	PROPOSTA DE VERIFICAÇÃO DE TOPOLOGIA RADIAL	41
4.1	INTRODUÇÃO	41
4.2	PROPOSTA TRADICIONAL DE VERIFICAÇÃO DE UMA TOPOLOGIA RADIAL	41
4.3	CONCEITOS FUNDAMENTAIS PARA A IDEALIZAÇÃO DAS PROPOSTAS APRESENTADAS	44
4.4	PRIMEIRA PROPOSTA DE VERIFICAÇÃO DE UMA TOPOLOGIA RADIAL	45
4.5	SEGUNDA PROPOSTA DE VERIFICAÇÃO DE UMA TOPOLOGIA RADIAL	49
4.6	FORMA ALTERNATIVA DE IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DA SEGUNDA PROPOSTA	54
4.7	TRANSFORMANDO UM SUBGRAFO EM UMA TOPOLOGIA RADIAL	58
5	TESTES E RESULTADOS	61
5.1	INTRODUÇÃO	61
5.2	TESTE USANDO O SISTEMA DE 14 BARRAS	62
5.3	TESTE USANDO O SISTEMA DE 33 BARRAS	62
5.4	TESTE USANDO O SISTEMA DE 84 BARRAS	63
5.5	TESTE USANDO O SISTEMA DE 136 BARRAS	65
5.6	TESTE USANDO O SISTEMA DE 415 BARRAS	65
6	CONCLUSÃO	67
	REFERÊNCIAS	69
	APÊNDICE - DADOS DOS SISTEMAS USADOS EM TESTES	72

1 INTRODUÇÃO

Um sistema de distribuição de energia elétrica é construído de forma a ter uma topologia malhada e é formado por barras de demanda e circuitos de conexão entre as barras. Apesar do sistema de distribuição possuir topologia malhada, a operação do sistema deve ser em topologia radial. Assim, a estratégia de operação em topologia radial é um paradigma adotado desde que os sistemas de distribuição de energia elétrica foram idealizados. Existem vários motivos para que a operação seja em topologia radial, tais como: a coordenação da proteção se torna mais simples e segura, as correntes de curto-circuito são menores, entre outros. Nesse contexto, na otimização do planejamento da expansão e da operação de um sistema de distribuição, existe a necessidade de se verificar se uma proposta de solução é radial ou não, tornando-se imprescindível quando usadas algumas meta-heurísticas no processo de otimização. Essa necessidade aparece em diferentes problemas de otimização, mas nesta dissertação ela é discutida apenas para o problema de reconfiguração de sistemas de distribuição. De forma geral, a exigência de topologia radial para a operação de sistemas de distribuição aparece na otimização da programação da operação de sistemas de distribuição e no planejamento da expansão dos sistemas de distribuição.

O problema da reconfiguração ótima de sistemas de distribuição consiste em encontrar uma topologia radial do sistema, com alguns ramos operando e outros fora de operação, de forma que seja otimizado um objetivo, tipicamente a redução das perdas do sistema para um dado perfil de carga. O estado normal de operação de um sistema de distribuição é em configuração radial. Assim, em uma determinada configuração, o sistema tem um conjunto de circuitos que estão energizados e estes circuitos formam a configuração radial, chamada de árvore geradora do ponto de vista da teoria de grafos. Por outro lado, os circuitos que não estão energizados são chamados de ramos de ligação e uma troca adequada de um ramo de ligação com um ramo da árvore leva à outra configuração radial. Portanto, o problema de reconfiguração ótima de sistemas de distribuição consiste em encontrar aquela configuração radial, do espaço de configurações possíveis, que produz as menores perdas de potência ativa no sistema de distribuição. Dessa forma, o processo de busca ótima implica analisar, implícita ou explicitamente, todas as configurações radiais possíveis. Uma outra forma equivalente de formular o problema de reconfiguração de sistemas de distribuição é apresentada a seguir. Dado um grafo, encontrar uma árvore geradora que minimize as perdas e satisfaça as seguintes restrições: (1) os limites de tensão nas barras do sistema devem ser respeitados; (2) as capacidades de corrente nos alimentadores devem ser respeitadas; (3) as duas leis de Kirchhoff, representadas pelo problema de fluxo de potência, devem ser cumpridas e (4) a configuração deve ser radial. Os dados do sistema são os seguintes: (1) a topologia malhada da rede com os dados elétricos das barras de demanda, com a respectiva demanda em cada barra, e as barras de passo; (2) a identificação da subestação ou das subestações e (3) os dados elétricos dos circuitos que conectam as barras. O sistema é conexo e malhado e, portanto, pretende-se encontrar a topologia radial de operação

ótima e as perdas relacionadas com essa topologia.

Do ponto de vista da teoria de grafos, um sistema de distribuição pode ser considerado como um grafo conexo onde as barras são denominadas de vértices ou nós e os circuitos são chamados de arcos. Um sistema de distribuição pode ser considerado como um grafo conexo e pouco denso onde o número de arcos é ligeiramente maior que o número de nós (tipicamente o número de arcos é em torno de 20% maior que o número de nós) e a subestação pode ser considerada como o nó raiz do grafo. Nesse contexto, o problema de reconfiguração consiste em encontrar uma árvore geradora do grafo que minimize as perdas do sistema de distribuição. Na resolução do problema da reconfiguração, algumas meta-heurísticas geram subgrafos usando a sua respectiva lógica, criando assim a necessidade de verificar se esse subgrafo é uma árvore geradora do grafo (pretende-se saber se a proposta de solução é uma topologia radial). Dessa forma, do ponto de vista da teoria de grafos, pretende-se saber se um subgrafo gerado usando a lógica de uma meta-heurística é uma árvore geradora. Trata-se um problema muito simples, mas como essa tarefa deve ser realizada milhares ou dezenas de milhares de vezes, é necessário que ela seja realizada de forma rápida e confiável, que é justamente o objetivo desta dissertação.

Deve-se observar que o problema da reconfiguração deve ser usado apenas para contextualizar o tema. Assim, do problema da reconfiguração apenas é necessário conhecer o grafo do sistema, isto é, os nb nós (barras) e os nr arcos (circuitos) e a informação de que o sistema é conexo. Portanto, o problema a ser analisado consiste em verificar se um subgrafo de um grafo conexo é uma árvore geradora (uma topologia radial).

O problema da reconfiguração é um dos problemas mais importantes relacionados com a programação da operação de sistemas de distribuição. O modelo matemático desse problema é um problema de programação não linear inteira mista de difícil solução para sistemas elétricos de tamanho razoável. Assim, para resolver esse tipo de problema foram usadas todas as técnicas de otimização conhecidas. As referências relacionadas com esse importante problema podem ser encontradas em Mendoza et al. (2006), Gomes et al. (2006) e Delbem, Carvalho e Bretas (2005), enquanto o tópico sobre meta-heurísticas pode ser encontrado de forma bem detalhada em Glover e Kochenberger (2010).

Deve-se observar que, na implementação de algumas meta-heurísticas para o problema de reconfiguração, são geradas propostas de solução que são subgrafos. Esses subgrafos gerados usando a lógica de cada meta-heurística podem ter $(nb - 1)$ arcos e, portanto, serem candidatos a uma topologia radial ou terem um número diferente de $(nb - 1)$ arcos e, nesse caso, não representarem uma topologia radial. Assim, dado um subgrafo de um grafo, pretende-se verificar se esse subgrafo representa uma topologia radial ou não. Esse tipo de problema ocorre principalmente quando se resolve o problema da reconfiguração usando meta-heurísticas que geram propostas de solução que não necessariamente são radiais, como acontece, por exemplo, nas meta-heurísticas tipo enxame de partícula (PSO), evolução diferencial (DE), algoritmo das baleias (WOA), entre outros. Deve-se observar que esse problema aparece em toda meta-heurística que gera uma nova proposta de solução através de combinação linear de outras propostas de solução já conhecidas.

A meta-heurística PSO, que é a mais utilizada para resolver o problema da reconfiguração,

apresenta a característica de gerar propostas de solução que não necessariamente são radiais. O PSO gera uma proposta de solução (um subgrafo) através da combinação linear de três topologias radiais: (1) a topologia incumbente que é a melhor topologia encontrada pelo processo de otimização na iteração corrente; (2) a melhor topologia radial gerada por um elemento da população e (3) a topologia radial corrente. Entretanto, essa proposta de solução com muita frequência não representa uma topologia radial, portanto é necessário verificar se esse subgrafo gerado por combinação linear representa uma topologia radial ou não. Um comportamento parecido acontece com as meta-heurísticas DE e WOA.

A proposta mais utilizada na literatura para verificar a radialidade de um subgrafo de um grafo conexo consiste em montar a matriz de incidência nó-arco do subgrafo de nb nós, junto com a adição de uma coluna \mathbf{e}_{nb} (um vetor com elementos iguais a zero e com um valor igual a 1 na posição nb) e desde que o número de arcos do subgrafo seja igual a $(nb - 1)$. Dessa forma, se essa matriz chamada de \mathbf{B}_a tem inversa, então o subgrafo representa uma topologia radial e, em caso contrário, não representa uma topologia radial. Contudo, essa tarefa de inversão de uma matriz de grande porte precisa de um tempo de processamento proibitivo para sistemas de distribuição de tamanho razoável.

Além disso, a maioria dos subgrafos gerados por combinação linear não representam topologias radiais. Nesse caso, a proposta de solução gerada deve ser descartada e deve-se gerar uma outra proposta de solução. Portanto, uma estratégia mais interessante seria transformar essa proposta de solução não radial em uma proposta de solução radial que seja a mais próxima possível da proposta analisada.

As propostas de verificação de um subgrafo de um grafo conexo como sendo radial ou não são idealizadas neste trabalho usando conceitos de grafos relacionados com a caracterização de uma árvore geradora (topologia radial) e os conceitos fundamentais existentes no algoritmo de Prim (Prim, 1957). Também são usados os conceitos apresentados em Macedo et al. (2018), Souza (2011) e Shirmohammadi et al. (1988) relacionados com a caracterização e quantificação de topologias radiais existentes em sistemas de distribuição radiais. O conceito de árvore geradora e de topologia radial são conceitos equivalentes, onde uma topologia radial de um sistema de distribuição é uma rede de distribuição que não apresenta laços e é conexa, enquanto uma árvore geradora de um grafo conexo é um subgrafo conexo com todos os nós do grafo presentes e sem existência de laços.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção é realizada uma revisão bibliográfica do tema central da proposta da dissertação. Dessa forma, foram revisados artigos relacionados com a aplicação das meta-heurísticas PSO, DE e WOA ao problema da reconfiguração de sistemas de distribuição de energia elétrica. Na revisão bibliográfica, foram priorizados os seguintes tópicos;

1. A forma em que é idealizada a representação de uma proposta de solução e a composição interna do vetor que representa uma proposta de solução. Esse tópico é fundamental na implementação de qualquer tipo de meta-heurística. Para o problema da reconfiguração esse tópico se torna totalmente fundamental pelos seguintes motivos:
 - A composição interna que representa uma proposta de solução pode estar formado pelos números 0 ou 1. Entretanto, essa informação é insuficiente. Esse tipo de informação pode estar representando apenas dois estados de operação (aberto ou fechado), indicando que um elemento desse vetor é do tipo alfanumérico (não é um número). Uma alternativa é que esse valor indique os números 0 e 1 do sistema decimal. Nesse caso, pode-se realizar operações matemáticas, tipo combinação linear, com diferentes vetores que representam diferentes propostas de solução. Dessa forma, um elemento interno de uma proposta de solução indica, claramente, o número de circuitos em um caminho (ramo) do sistema de distribuição e, portanto, pode assumir apenas dois valores (0 ou 1).
 - O tamanho do vetor que representa uma proposta de solução pode ter tamanho nr (número de ramos do sistema de distribuição) ou $m = nr - nb + 1$ (número de ramos abertos em uma proposta de solução).
2. A forma em que são geradas novas propostas de solução.
3. A forma em que as novas propostas de solução são verificadas em termos de radialidade (radial ou não radial).

2.1 A META-HEURÍSTICA PSO APLICADA AO PROBLEMA DA RECONFIGURAÇÃO

A meta-heurística *Particle Swarm Optimization* (PSO) está inspirada em fenômenos biológicos e, particularmente, no comportamento de determinadas espécies de animais, tais como bando de pássaros ou cardume de peixes. Assim, o comportamento de um enxame depende do conhecimento individual de cada componente do enxame, do conhecimento coletivo na forma de experiência acumulada e da posição atual do enxame. Para idealizar o PSO, essa informação qualitativa é transformada em informação quantitativa através das seguintes relações:

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = w \mathbf{v}_i^k + c_1 r_1 (\mathbf{p}_i^{best} - \mathbf{s}_i^k) + c_2 r_2 (\mathbf{p}^{best} - \mathbf{s}_i^k) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{s}_i^{k+1} = \mathbf{s}_i^k + \mathbf{v}_i^{k+1} \quad (2.2)$$

PSO é uma meta-heurística de tipo populacional em que o processo de otimização é iniciado por um conjunto de n_{pop} propostas de solução. Cada proposta de solução $i = 1, \dots, n_{pop}$, realiza um processo de transições até atender a um critério de parada. Dessa forma, (2.1) e (2.2) mostram a forma de realizar uma transição da proposta de solução i na iteração $k + 1$. Nas relações anteriores, \mathbf{s}_i^k representa a proposta de solução i do problema que está sendo resolvido na iteração k e, sem perda de generalidade, suponha que é um vetor de tamanho n como acontece na maioria das aplicações. O vetor \mathbf{s}_i^{k+1} representa a nova proposta de solução encontrada a partir de \mathbf{s}_i^k , \mathbf{v}_i^k é a perturbação realizada para encontrar a proposta de solução \mathbf{s}_i^k e \mathbf{v}_i^{k+1} é a perturbação realizada para encontrar a proposta de solução \mathbf{s}_i^{k+1} a partir de \mathbf{s}_i^k . O vetor \mathbf{p}_i^{best} é a melhor proposta de solução encontrada no processo de busca pela proposta de solução i e \mathbf{p}^{best} é a melhor proposta de solução encontrada no processo de otimização e chamada de incumbente. Deve-se observar que todos esses vetores têm a mesma dimensão n e a mesma composição interna, isto é, os elementos internos desses vetores são do mesmo tipo para cada posição do vetor. w , c_1 e c_2 são parâmetros escalares que devem ser calculados ou calibrados usando alguma estratégia. Por fim, r_1 e r_2 são números aleatórios do intervalo $[0, 1]$.

O PSO tem sido amplamente utilizado na otimização de problemas de complexidade variada. Em razão disso, é importante mencionar as limitações do PSO para os principais tipos de problemas de otimização. Deve-se observar que, usando (2.1) e (2.2), uma nova proposta de solução \mathbf{s}_i^{k+1} é gerada realizando uma combinação linear de quatro vetores. Portanto, cada vetor deve estar formado por n elementos que devem obedecer às propriedades dos números e o resultado (a nova proposta de solução) está formado por n números reais. Essa observação é crucial para analisar o desempenho do PSO.

Na implementação do PSO para o problema da reconfiguração, é importante observar que, nas relações (2.1) e (2.2) citadas anteriormente, \mathbf{s}_i^k , \mathbf{v}_i^k representam topologias radiais apresentadas de alguma forma consistente. Nesse contexto, um novo valor de \mathbf{s}_i^{k+1} deve representar uma topologia radial. Entretanto, deve-se observar que \mathbf{s}_i^{k+1} é encontrada através de uma combinação linear de quatro topologias radiais. É fácil verificar que um novo valor encontrado para \mathbf{s}_i^{k+1} usando (2.2) raramente deve representar uma topologia radial. Portanto, após encontrar um novo \mathbf{s}_i^{k+1} , deve-se verificar se essa topologia é radial ou não.

Em Wu, Dong e Liu (2020), é apresentada uma proposta de otimização de sistemas de distribuição através da reconfiguração para reduzir as perdas e melhorar a estabilidade de tensão do sistema considerando incertezas na geração e na demanda. A proposta de otimização é uma meta-heurística PSO modificada e é mencionado no artigo que a restrição de radialidade precisa ser verificada. Assim, o PSO melhorado sugere o uso do algoritmo de Kruskal para gerar uma topologia radial, contudo o artigo não menciona de forma explícita a composição interna de \mathbf{s}_i^k e \mathbf{v}_i^k , que são inicialmente gerados de forma aleatória. Em sequência, é utilizado o algoritmo de Kruskal e duas estratégias de refinamento para calcular a função objetivo da proposta de

solução. Portanto, não se especifica claramente a forma de representar uma proposta de solução. Além disso, não está claro a forma em que o algoritmo de Kruskal é usado para analisar uma proposta de solução encontrada pela relação (2.2), que pode ser uma topologia radial ou não.

Em Wang et al. (2022), é apresentada uma proposta de otimização da operação de sistemas de distribuição considerando fontes renováveis de geração, reconfiguração dinâmica e a correlação não linear das incertezas no sistema de distribuição. A parcela relacionada com a reconfiguração dinâmica é implementada usando uma meta-heurística PSO. No algoritmo PSO apresentado, aparece a menção explícita do uso das relações (2.1) e (2.2), porém não existe menção explícita sobre a forma de representar uma proposta de solução, a forma da composição interna da proposta de solução e a forma de contornar a geração de propostas de solução não radiais. Dessa forma, não existe informação sobre a verificação de radialidade de uma nova proposta de solução gerada usando as relações (2.1) e (2.2).

Em Hizarci, Demirel e Turkay (2022), é apresentada uma proposta de otimização da operação de sistemas de distribuição através da reconfiguração usando a meta-heurística especializada do tipo PSO, chamada de BPSO (*Binary Particle Swarm Optimization*). A principal contribuição da proposta consiste em melhorar o desempenho do PSO mudando os coeficientes da combinação linear na relação (2.1) (w, r_1 e r_2). Esses parâmetros podem ser aumentados ou diminuídos dinamicamente para melhorar o desempenho do PSO. Na proposta se menciona, de forma explícita, que cada proposta de solução deve ser verificada em termos de radialidade calculando o determinante da matriz de incidência nó-arco \mathbf{A} do subgrafo em análise. Nesse contexto, imagina-se que propostas não radiais são descartadas. Na proposta não aparece, de forma explícita, a estrutura interna de uma proposta de solução. Entretanto, pode-se imaginar que seja um vetor com elementos binários porque, uma vez gerada uma nova proposta de solução, os elementos internos dessa proposta de solução devem ser transformados em binários usando a função sigmoide (que transforma valores não binários em binários). Assim, pode-se imaginar que o processo de otimização trabalha no espaço 2^{nr} , onde nr é o número de ramos do sistema de distribuição. Deve-se mencionar que os autores mencionam esse espaço de busca de forma explícita. Por fim, a proposta gera a população inicial de forma aleatória.

Em Abdelaziz et al. (2009), é apresentada uma proposta de otimização da operação de sistemas de distribuição através da reconfiguração usando uma meta-heurística PSO modificada. Trata-se de uma das primeiras propostas de aplicação da meta-heurística PSO para o problema de reconfiguração. Na proposta se menciona, explicitamente, que uma implementação padrão de PSO deve gerar um número muito elevado de propostas de solução não radiais usando as relações (2.1) e (2.2). Além disso, na formulação matemática aparece a restrição de radialidade que deve ser verificada calculando o determinante da matriz de incidência nó-arco \mathbf{A} . Os autores apresentam uma proposta para verificar a radialidade de uma nova proposta de solução, que consiste em calcular o determinante de uma matriz \mathbf{A} reduzida e também aparece uma proposta de reparo para o caso em que a topologia não seja radial. Nesse trabalho, menciona-se um aspecto muito importante relacionado com a implementação de meta-heurísticas para o problema de reconfiguração, que é a forma de representar uma proposta de solução. Entretanto, o trabalho não apresenta, de forma explícita, uma proposta eficiente para representar uma

proposta de solução. Na verdade, a proposta usada é um tanto confusa. Por exemplo, o vetor velocidade pode ter valores inteiros no intervalo $[-nr, nr]$ e, portanto, a composição interna do vetor velocidade seria de valores inteiros. Dessa forma, não é simples entender como seria possível gerar uma topologia radial usando as relações (2.1) e (2.2). Os valores de posição e de velocidade da população são gerados aleatoriamente.

Em Sivanagaraju, Rao e Raju (2008), é apresentada, aparentemente, a primeira proposta de otimização da operação de sistemas de distribuição através da reconfiguração usando uma meta-heurística PSO discreta. Esse trabalho carece de informações relevantes, tais como a forma de representar uma proposta de solução e a forma de verificar a radialidade de uma proposta de solução nova gerada usando as relações (2.1) e (2.2). Existe apenas uma proposta de ajustar para os limites inferior e superior dos valores das variáveis. De acordo com a análise crítica realizada em Abdelaziz et al. (2009), essa proposta inicial de implementação do PSO ao problema da reconfiguração gera um número muito elevado de propostas de solução infactíveis (não radiais).

Em Chen, Hu e Chen (2016), é apresentada uma meta-heurística PSO para otimizar a operação de sistemas de distribuição através da reconfiguração e do controle da geração de potência reativa nos geradores distribuídos. A proposta de otimização considera o chamado controle segmentado da operação. Nesse tipo de operação, pode-se mudar a topologia da rede e o nível de geração reativa dos geradores distribuídos a cada intervalo de tempo (tipicamente um horizonte de operação de 24 horas), sendo que a cada hora é possível acionar os dispositivos de controle (manipulação de chaves da topologia da rede e de operação dos geradores). Nesse trabalho, não aparece informação específica sobre a verificação da radialidade das propostas de solução geradas, assim como a composição interna de uma proposta de solução relacionada com o armazenamento de uma topologia radial.

Em Amanulla, Chakrabarti e Singh (2012), é apresentada uma meta-heurística PSO para otimizar a operação de sistemas de distribuição através da reconfiguração com a finalidade de diminuir as perdas do sistema de distribuição e melhorar a confiabilidade da operação. Esse artigo apresenta informação detalhada sobre os diferentes aspectos relacionados com a implementação da meta-heurística PSO aplicada ao problema da reconfiguração. Um aspecto importante da proposta é que aparece, de forma clara e explícita, a idealização de como representar uma proposta de solução. Assim, uma proposta de solução é representada através de um vetor de tamanho nr , sendo que cada elemento desse vetor é um número binário que representa o estado aberto (0) ou fechado (1) de uma chave. Portanto, o vetor \mathbf{s}_i^k é de tamanho nr , com seus elementos sendo compostos de números binários. A aplicação das relações (2.1) e (2.2) gera uma nova proposta de solução \mathbf{s}_i^{k+1} cujos elementos devem ser números reais, pois foi encontrada realizando uma combinação linear de vetores binários que são multiplicados por números reais (w, r_1 e r_2). Dessa forma, o vetor \mathbf{s}_i^{k+1} , que deveria representar uma topologia radial, têm como elementos números reais. A proposta dos autores consiste em transformar esse vetor \mathbf{s}_i^{k+1} de forma que seus elementos sejam números binários. Esse processo é realizado usando a função sigmoide. Suponha que o vetor \mathbf{s}_i^{k+1} tem um elemento interno com valor s_{ij}^{k+1} na posição j . A posição j desse vetor que tem um valor real s_{ij}^{k+1} é transformada em um número

binário usando a função sigmoide:

$$s_{ij} = \frac{1}{1 + e^{-s_{ij}^{k+1}}} \quad (2.3)$$

Usando a relação anterior, o novo valor binário de \mathbf{s}_i^{k+1} é encontrado usando a relação a seguir, onde ρ_{ij} é um número aleatório do intervalo $[0, 1]$:

$$\mathbf{s}_i^{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_{ij} < s_{ij} \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Deve-se observar que esse processo de transformação gera uma estratégia com um grau de aleatoriedade muito elevada. Adicionalmente, o novo vetor \mathbf{s}_i^{k+1} com elementos binários é um elemento do espaço 2^{nr} e raramente deve representar uma topologia radial. Os autores em Amanulla, Chakrabarti e Singh (2012) não explicam a forma de verificar se uma nova proposta de solução é radial ou não. Existe a menção explícita de que se a nova proposta \mathbf{s}_i^{k+1} não é radial, então a função objetivo é penalizada.

Em Fu e Chiang (2018), é apresentada uma meta-heurística PSO como parte de um processo de otimização, separado em quatro partes, para melhorar a capacidade de acomodação (*hosting capacity*) de geração distribuída através da reconfiguração e considerando um período de operação diário separado em 24 níveis de operação horária. Dessa forma, o sistema pode ser reconfigurado a cada hora de operação. Na terceira parte do processo é usada a meta-heurística PSO para encontrar a reconfiguração ótima do sistema de distribuição em cada uma das 24 horas de operação. Nesse artigo, é mencionado que representar uma proposta de solução através de um vetor \mathbf{s}_i^k de tamanho nr gera muitas propostas de solução que não são radiais. Portanto, aparece uma nova proposta de representar uma proposta de solução \mathbf{s}_i^k onde são armazenadas apenas as chaves que estão abertas na topologia radial. Esse tipo de vetor \mathbf{s}_i^k deve ter um número de elementos igual a $m = nr - nb + 1$. Com a aplicação das relações (2.1) e (2.2) e a correção realizada pela função sigmoide, usa-se uma estratégia parecida com a proposta de Amanulla, Chakrabarti e Singh (2012) para gerar uma nova proposta de solução \mathbf{s}_i^{k+1} . Se um elemento s_{ij}^{k+1} desse vetor é igual a 0, então essa chave permanece aberta. Em caso contrário, essa chave deve ser fechada e deve-se abrir uma chave que faz laço com a chave que está sendo fechada, o que implica em identificar o laço em análise. Esse processo de identificação de laço e da chave que deve ser aberta exige uma análise mais criteriosa. Essa forma de gerar novas topologias radiais é muito parecida com uma proposta apresentada em Macedo et al. (2018) em um contexto totalmente diferente da meta-heurística PSO. A proposta apresentada em Macedo et al. (2018) é usada para controle da radialidade em meta-heurísticas, tais como VNS e busca tabu. Em resumo, a estratégia PSO participa de uma forma totalmente residual e, com a estratégia sugerida, a verificação de radialidade é realizada de uma forma muito diferente.

Em Liu e Chiang (2017), é apresentada uma meta-heurística PSO como parte de um processo de otimização que realiza a reconfiguração de sistemas de distribuição para maximizar a capacidade de fornecimento disponível (*Available Delivery Capability* – ADC) de sistemas de distribuição com o aumento da penetração da geração distribuída. O ADC quantifica a

capacidade de enviar potência dos pontos de geração para os pontos de carga no sistema de distribuição. Dessa forma, na proposta de otimização, pretende-se maximizar o ADC do sistema de distribuição através da reconfiguração para um incremento da geração distribuída. Esse problema é resolvido usando uma meta-heurística PSO de tipo binária. Em relação com a forma de aplicação do PSO para o problema da reconfiguração, a estratégia usada é a mesma usada em Fu e Chiang (2018), já que se trata do mesmo grupo de pesquisa. Portanto, não existe diferença de aplicação do PSO com a proposta apresentada em Fu e Chiang (2018).

Em Malekpour, Niknam e Pahwa (2023), é apresentada uma meta-heurística PSO para otimizar a operação de sistemas de distribuição através da reconfiguração usando um problema multiobjetivo que considera as incertezas na geração eólica e na demanda. Os autores chamam esse problema de reconfiguração estocástica de sistemas de distribuição. Na modelagem do problema aparece a restrição de radialidade, porém na elaboração da estratégia PSO não aparece a forma de representar uma proposta de solução, assim como a forma de verificar a radialidade de uma nova proposta de solução. Em relação com a forma de implementar o PSO, existe o reconhecimento explícito das limitações do PSO quando são usadas as relações (2.1) e (2.2), especialmente em relação com convergência inapropriada e convergência em ótimos locais. Para contornar essa deficiência, os autores sugerem três estratégias genéricas que não estão direcionadas para as características específicas do problema da reconfiguração. Essas três estratégias consistem em: (1) mudar a forma de atualizar o parâmetro w ; (2) propor uma alternativa para a relação (2.2) que prioriza a participação da melhor proposta de solução (a incumbente) e (3) gerar propostas de solução mutantes que, eventualmente, podem substituir a proposta de solução corrente.

Em Niknam e Farsani (2010), é apresentada uma meta-heurística híbrida que considera a meta-heurística PSO e a meta-heurística do salto do sapo (*Shuffled Frog Leaping Algorithm – SFLA*) modificada para resolver o problema da reconfiguração para minimizar as perdas. Nessa proposta, que tem um autor na referência Malekpour, Niknam e Pahwa (2023), a estratégia PSO é a mesma que a proposta apresentada em Malekpour, Niknam e Pahwa (2023). Em outras palavras, não aparece a forma de representar uma proposta de solução, assim como a forma de verificar a radialidade de uma nova proposta de solução; existe apenas a preocupação de ajustar de forma dinâmica os parâmetros usados na relação (2.1).

Em Su et al. (2011), é apresentada uma meta-heurística PSO para otimizar a coordenação da reconfiguração e o controle volt/var com a finalidade de maximizar a capacidade disponível de geração distribuída em cada barra do sistema de distribuição. Na formulação do problema, aparece a exigência de topologia radial para a operação do sistema. Assim como em Amanulla, Chakrabarti e Singh (2012), nesse trabalho aparece, de forma clara e explícita, a idealização de como representar uma proposta de solução. Dessa forma, uma proposta de solução é representada através de um vetor de tamanho nr , sendo que cada elemento desse vetor é um número binário que representa o estado aberto (0) ou fechado (1) de uma chave. Portanto, o vetor \mathbf{s}_i^k é de tamanho nr com seus elementos sendo números binários, da mesma forma que em Amanulla, Chakrabarti e Singh (2012). Usando uma estratégia parecida a Amanulla, Chakrabarti e Singh (2012), uma nova proposta de solução \mathbf{s}_i^{k+1} é transformada em um vetor com elementos binários

usando a função sigmoide. Obviamente, não existe nenhuma garantia de que esse vetor \mathbf{s}_i^{k+1} , formado por elementos binários, seja uma topologia radial. Na verdade, não existe a garantia de que esse vetor tenha $(nb - 1)$ elementos com valores iguais a 1. No artigo, não aparece informação sobre a forma de verificar se uma nova proposta de solução \mathbf{s}_i^{k+1} é radial.

Em Salau, Gebru e Bitew (2020), é apresentada uma meta-heurística PSO para otimizar a operação de sistemas de distribuição através da reconfiguração para minimizar as perdas e melhorar o perfil de tensão nas barras. A proposta é muito parecida com a proposta apresentada em Fu e Chiang (2018). Assim, para uma topologia radial dada e com as chaves abertas identificadas, pode-se identificar e armazenar os ramos que formam laços com cada chave aberta. Assim, por exemplo, para o sistema de 33 barras existem cinco chaves abertas identificando cada laço. Dessa forma, fechando uma chave aberta, aparece um laço e, portanto, a abertura de cada ramo desse laço fechado gera uma topologia radial. Para os autores, essa informação armazenada representa o espaço de busca. Deve-se observar que essa informação armazenada de forma estática gera um espaço de busca menor que o espaço de busca completo (existem topologias radiais que nunca são identificadas usando esse espaço de busca reduzido). No artigo, não aparece de forma clara a forma de relação entre o espaço de busca armazenado e a decisão do PSO encontrada após a aplicação das relações (2.1) e (2.2) e a transformação da nova proposta de solução \mathbf{s}_i^{k+1} após a correção com a aplicação da função sigmoide. Na proposta apresentada, imagina-se que a informação contida em \mathbf{s}_i^{k+1} permite identificar a chave que deve ser aberta na informação armazenada do espaço de busca reduzido. Assim como acontece com a proposta apresentada em Fu e Chiang (2018), essa forma de gerar novas topologias radiais é muito parecida com uma proposta apresentada em Macedo et al. (2018) em um contexto totalmente diferente da meta-heurística PSO.

Em Wu e Tsai (2011), é apresentada uma meta-heurística PSO para otimizar a reconfiguração de sistemas de distribuição para minimizar perdas. Nessa proposta, é analisada com certo detalhe a forma de representar uma proposta de solução. Dessa forma, uma proposta de solução \mathbf{s}_i^k é representada por um vetor de tamanho $m = nr - nb + 1$, onde cada elemento de \mathbf{s}_i^k é um número que identifica uma chave, isto é, as chaves são enumeradas usando números inteiros na sequência $1, 2, 3, \dots, nr$. Portanto, os elementos de \mathbf{s}_i^k estão representados por um subconjunto desses nr números. Considera-se que essa forma de representação é incompatível com a aplicação das relações (2.1) e (2.2), já que os números da sequência $1, 2, 3, \dots, nr$ na verdade não são números (são apenas identificadores) e, portanto, não pode ser realizada uma combinação linear de vetores desse tipo. Entretanto, no artigo sugere-se que são usadas as relações (2.1) e (2.2). Na proposta aparece a sugestão de usar o conceito de lista de ótimos locais (*Local Optimal List* – LOL), que consiste em usar uma solução ótima local em lugar do vetor \mathbf{p}_i^{best} na relação (2.2). Na proposta não aparece a informação sobre a forma em que uma nova proposta de solução é verificada em termos de radialidade.

2.2 A META-HEURÍSTICA *DE* APLICADA AO PROBLEMA DA RECONFIGURAÇÃO

Outra meta-heurística que gera uma nova proposta de solução através de uma combinação linear de outras propostas de solução é a meta-heurística evolução diferencial (*Differential Evolution* – *DE*). A meta-heurística *DE* é diferente de um algoritmo genético em vários aspectos, sendo os dois mais importantes os seguintes: (1) a proposta de solução é representada por meio de um vetor cujos elementos são números reais para um problema de otimização, cuja modelagem matemática está representada por variáveis de decisão reais (o algoritmo genético tradicional armazena uma proposta de solução em um vetor com números binários para o mesmo tipo de problema); (2) os operadores de mutação e de recombinação são realizados de uma forma significativamente diferente. Na meta-heurística *DE* existem os seguintes operadores evolutivos:

- Mutação:

$$\mathbf{s}_i^{k+1} = \mathbf{s}_i^k + c_1 (\mathbf{s}_{r_1}^k - \mathbf{s}_{r_2}^k) \quad (2.5)$$

- Recombinação:

$$\mathbf{s}_i^{k+1} = \mathbf{s}_i^k + c_2 (\mathbf{s}_{r_1}^k - \mathbf{s}_i^k) \quad (2.6)$$

- Mutação - recombinação:

$$\mathbf{s}_i^{k+1} = \mathbf{s}_i^k + c_1 (\mathbf{s}_{r_1}^k - \mathbf{s}_{r_2}^k) + c_2 (\mathbf{s}_{r_3}^k - \mathbf{s}_i^k) \quad (2.7)$$

Na meta-heurística *DE*, tem-se que a população está formada por n propostas de solução $(1, 2, \dots, r_1, \dots, r_2, \dots, r_3, \dots, n)$; c_1 e c_2 são constantes escolhidas no intervalo $c_1, c_2 \in [0, 1]$; r_1 , r_2 e r_3 identificam três propostas de solução do conjunto de n propostas de solução da população corrente.

Pode-se verificar que a meta-heurística *DE* gera novas propostas de solução através da combinação linear de outras propostas de solução já conhecidas e que fazem parte da população corrente. Portanto, os mesmos problemas mencionados para a meta-heurística *PSO* também acontecem com a implementação da meta-heurística *DE* na solução do problema da reconfiguração. O operador de seleção na meta-heurística *DE* é realizado usando as mesmas estratégias usadas no algoritmo genético.

Em Su e Lee (2003), é apresentada a meta-heurística *DE* para resolver o problema da reconfiguração para minimizar as perdas no sistema de distribuição. Uma proposta de solução é representada através de um vetor de tamanho nr , com seus elementos internos sendo números binários que representam o estado aberto (0) ou fechado (1) de uma chave. A proposta incorpora operadores adicionais chamados de fase de aceleração e fase de migração para melhorar

o desempenho da meta-heurística DE tradicional. Entretanto, não existe menção sobre a estratégia usada para verificar se uma nova proposta de solução é radial ou não. Esse artigo representa um dos vários exemplos em que a meta-heurística DE analisa um número de propostas de solução maior que a proposta de força bruta. Assim, no caso de sistema de 14 barras que tem 190 topologias radiais, o teste mostra a avaliação de 250 propostas de solução.

Em Chiou, Chang e Su (2005), é apresentada a meta-heurística DE para resolver o problema da reconfiguração para minimizar as perdas no sistema de distribuição. Essa proposta é elaborada pelo mesmo grupo de pesquisa da proposta apresentada em Su e Lee (2003). A novidade neste artigo é a proposta de uma meta-heurística evolução diferencial híbrida com escala variável (*Variable Scaling Hybrid Differential Evolution – VSHDE*). O fato novo na proposta é que a mutação, que tem um parâmetro c_1 constante no algoritmo original, é realizada com um parâmetro c_1 variável que depende da taxa de sucesso da implementação do operador de mutação. Não existe menção sobre a estratégia usada para verificar se uma nova proposta de solução é radial ou não.

2.3 A META-HEURÍSTICA WOA APLICADA AO PROBLEMA DA RECONFIGURAÇÃO

Outra meta-heurística que gera uma nova proposta de solução através de uma combinação linear de outras propostas de solução é a meta-heurística de otimização do comportamento das baleias (*Whale Optimization Algorithm – WOA*). Essa meta-heurística foi idealizada imitando o comportamento de um tipo de baleias e tentando imitar a forma em que uma baleia realiza a caça. Esse processo de caça tem três componentes: (1) estratégia de busca da presa (peixe), (2) estratégia para cercar a presa e (3) técnica de ataque seguindo uma espiral. Dessa forma, a meta-heurística WOA encontra uma nova proposta de solução a partir de propostas de solução já conhecidas usando as seguintes estratégias:

- Primeira estratégia:

$$\mathbf{s}_i^{k+1} = \mathbf{p}^b - |2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{a}| [2\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}^b + \mathbf{s}_i^k] \quad (2.8)$$

Na relação anterior, têm-se que: \mathbf{p}^b é a incumbente (melhor proposta de solução encontrada) do processo de otimização, \mathbf{a} é um vetor com parâmetros que diminuem de 2 para 0 e \mathbf{r} é um vetor com elementos gerados aleatoriamente no intervalo $[0, 1]$.

- Segunda estratégia:

$$\mathbf{s}_i^{k+1} = \begin{cases} \mathbf{p}^b - |2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{a}| [2\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}^b + \mathbf{s}_i^k] & \text{se } \gamma < 0,5 \\ |\mathbf{p}^b - \mathbf{s}_i^k| e^{c \cdot l} \cos(2\pi l) + \mathbf{p}^b & \text{se } \gamma \geq 0,5 \end{cases} \quad (2.9)$$

Na relação anterior, têm-se que: c é um parâmetro que define a forma da espiral, l é um número aleatório gerado no intervalo $[0, 1]$ e γ também é um número aleatório gerado no intervalo $[0, 1]$.

- Terceira estratégia:

$$\mathbf{s}_i^{k+1} = \mathbf{p}^{rand} - |2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{a}| [2r \cdot \mathbf{p}^b + \mathbf{s}_i^k] \quad (2.10)$$

Na relação anterior, têm-se que \mathbf{p}^{rand} é uma proposta de solução obtida de forma aleatória do conjunto de propostas de solução da população corrente.

Do ponto de vista de interesse desta dissertação, as três estratégias utilizadas para gerar uma nova proposta de solução na meta-heurística WOA apresentam os mesmos problemas que aparecem na implementação das meta-heurísticas PSO e DE, mencionadas anteriormente. Todas elas geram novas propostas de solução através da combinação linear de propostas de solução existentes ou geradas aleatoriamente.

Em Abd Elazim e Ali (2020), é apresentada uma meta-heurística WOA aplicada ao problema da reconfiguração de sistemas de distribuição. A proposta é chamada de WOA melhorado porque incorpora algumas estratégias da meta-heurística evolução diferencial. No artigo não existe nenhuma menção sobre a forma em que é representada uma proposta de solução do problema da reconfiguração, assim como a forma em que é verificada se uma nova proposta de solução é radial ou não.

Em Mahdavi (2023), é apresentada uma meta-heurística WOA aplicada ao problema da otimização da operação de sistemas de distribuição através de uma estratégia simultânea de reconfiguração de sistemas de distribuição e alocação de geradores distribuídos. Nessa tese, a radialidade de uma nova proposta de solução é verificada calculando o determinante da matriz de incidência nó-arco \mathbf{A} . A possibilidade de gerar novas propostas de solução é aumentada utilizando um espaço de busca reduzido, armazenando os laços relacionados com os ramos abertos na topologia de operação do sistema de distribuição, uma estratégia parecida com a proposta apresentada em Fu e Chiang (2018).

Finalmente, deve-se mencionar que no levantamento bibliográfico realizado não foram encontradas outras propostas alternativas de verificação de radialidade de subgrafos de um grafo conexo. A única alternativa usada pelos pesquisadores que usam meta-heurísticas para resolver o problema da reconfiguração é calcular o determinante da matriz de incidência nó-arco \mathbf{A} do subgrafo em análise.

2.4 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

Os objetivos da dissertação são os seguintes:

1. Realizar um levantamento bibliográfico da forma em que se verifica a radialidade de uma proposta de solução em problemas relacionados com otimização da operação e do planejamento de sistemas de distribuição de energia elétrica, especialmente do problema da reconfiguração, quando o problema é otimizado por meta-heurísticas que geram novas propostas de solução através da combinação linear de propostas de solução já encontradas anteriormente.

2. Idealizar formas eficientes de verificação da radialidade de subgrafos de um grafo conexo que sejam mais rápidas que a alternativa de calcular o determinante da matriz de incidência nó-arco \mathbf{A} do subgrafo.
3. Idealizar uma forma de encontrar uma árvore geradora (topologia radial) que seja o mais próxima possível de um subgrafo de um grafo conexo que não é árvore geradora (topologia radial).
4. Incorporar conceitos relacionados com grafos nos algoritmos idealizados para tornar o esforço computacional o mais rápido possível.

A dissertação está estruturada em seis capítulos. O Capítulo 1 realiza uma breve introdução sobre o assunto abordado neste trabalho. O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre os diversos trabalhos existentes na literatura que utilizam a proposta tradicional de verificar a radialidade de um subgrafo. O Capítulo 3 realiza uma revisão sobre os conceitos básicos sobre teoria de grafos usados na idealização dos algoritmos propostos e, com especial destaque, faz uma revisão do algoritmo de Prim. O Capítulo 4 representa a estrutura principal da dissertação, onde são idealizados e sistematizados os algoritmos de verificação de radialidade. O Capítulo 5 apresenta os testes computacionais e o Capítulo 6 resume as principais conclusões. No Apêndice, são mostrados os dados dos sistemas usados.

3 REVISÃO SOBRE TEORIA DE GRAFOS E O ALGORITMO DE PRIM

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentam-se os principais conceitos relacionados à teoria de grafos utilizados neste trabalho. Assim, apresentam-se com destaque os conceitos relacionados com a caracterização de um subgrafo de um grafo conexo como sendo árvore geradora (topologia radial). Também é apresentado e analisado o algoritmo de Prim.

3.2 TEORIA DE GRAFOS RELACIONADA COM UMA TOPOLOGIA RADIAL

Na literatura especializada existem trabalhos que relacionam a teoria sobre grafos com a topologia radial de um sistema de distribuição, dentre os quais existem dois tipos de informações que são importantes destacar: (1) a caracterização de um subgrafo, que representa uma árvore geradora, para resolver o problema de fluxo em redes usando o método primal simplex especializado para solucionar de forma mais eficiente o problema de transportes; (2) o problema de encontrar uma árvore geradora mínima de um grafo conexo, onde cada arco tem um peso. Por outro lado, a verificação de que um subgrafo de um grafo conexo seja uma árvore geradora (uma topologia radial) aparentemente não é um problema de interesse na teoria de grafos. Dessa forma, deve-se elaborar uma teoria e uma estratégia para verificar se um subgrafo de um grafo conexo é uma árvore geradora ou não. Uma árvore geradora de um grafo conexo G é um subgrafo G_r formado por todos os nós do grafo G e alguns arcos do grafo G , de forma que G_r seja conexo e sem laços.

O conceito de árvore geradora de um grafo é equivalente a uma topologia radial de um sistema de distribuição. Um sistema de distribuição de energia elétrica pode ser representado na forma de um grafo conexo, onde as barras representam os nós do grafo e os ramos elétricos do sistema de distribuição representam os arcos do grafo. Nesse contexto, uma topologia radial é uma parcela da topologia do sistema de distribuição, formada por todas as barras do sistema de distribuição e sem laços. Como a teoria sobre grafos é muito extensa, a teoria básica sobre grafos apresentada neste capítulo considera apenas a parcela fundamental para entender os conceitos usados na dissertação. Portanto, os conceitos apresentados neste capítulo foram elaborados usando como base a referência Bazaraa, Jarvis e Sherali (2010).

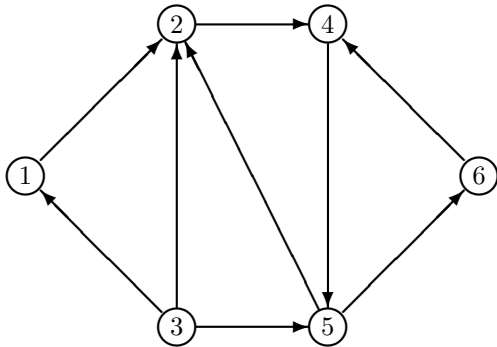
3.2.1 Conceitos básicos sobre grafos

Nesta seção, apresentam-se apenas os conceitos e definições sobre grafos que foram usados no desenvolvimento desta dissertação.

3.2.1.1 Grafo orientado e não orientado

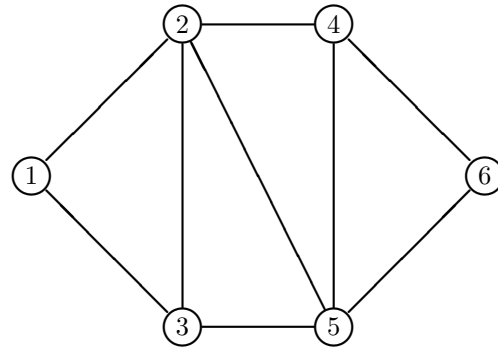
Um grafo G direcionado está formado por um conjunto de nós $N = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ com m nós e um conjunto de arcos direcionados $A = \{(i, j), (k, l), \dots, (s, t)\}$ com n arcos, onde cada arco une dois nós de N . Dessa forma, o arco (i, j) está direcionado do nó i para o nó j . A Figura 1 mostra um exemplo de *grafo orientado* de 6 nós e 9 arcos, enquanto a Figura 2 apresenta um exemplo de *grafo não orientado* com a mesma quantidade de nós e arcos. O grafo pode ser denotado na forma G ou $G(N, A)$.

Figura 1 - Grafo orientado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 2 - Grafo não orientado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2.1.2 Grafo próprio

Um grafo $G(N, A)$ é chamado de *grafo próprio* se a cardinalidade de N e de A cumprem com o requisito de que $|N| \geq 2$ e $|A| \geq 1$. Em outras palavras, um grafo próprio deve ter pelo menos dois nós e um arco. Dois nós de um grafo são chamados de adjacentes se estão diretamente ligados por um arco.

3.2.1.3 Caminho de um grafo – *path*

Um *caminho* de um grafo orientado do nó i_o para o nó i_p está formado por uma sequência de arcos:

$$P = \{(i_o, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{p-1}, i_p)\}$$

onde o nó inicial de cada arco é o mesmo nó terminal do arco precedente e $i_o, i_1, i_2, \dots, i_p$ são nós distintos. Dessa forma, cada arco do caminho está direcionado na direção de i_p a partir de i_o . Um exemplo de caminho no grafo da Figura 1 é seguinte:

$$P = \{(3, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 5)\}$$

3.2.1.4 Cadeia de um grafo – *chain*

Uma *cadeia* de um grafo orientado do nó i_o para o nó i_p está formada por uma sequência de arcos da mesma forma como acontece no caminho de um grafo, mas a orientação dos arcos não precisa estar orientada na direção do nó i_o para o nó i_p como acontece no caminho. Em outras palavras, os arcos na cadeia podem ter qualquer orientação.

Um exemplo de cadeia no grafo da Figura 1 é seguinte:

$$C = \{(1, 2), (2, 5), (5, 4)\}$$

3.2.1.5 Circuito de um grafo – *circuit*

Um *circuito* de um grafo orientado é um caminho do nó i_o para o nó i_p , com a adição do arco (i_p, i_o) . Dessa forma, um circuito de um grafo é um caminho fechado no grafo.

Um exemplo de circuito no grafo da Figura 1 é seguinte:

$$Cir = \{(2, 4), (4, 5), (5, 2)\}$$

3.2.1.6 Ciclo de um grafo – *cycle*

Um *ciclo*, ou *laço* como mais comumente utilizado na área de Engenharia Elétrica, de um grafo orientado é uma cadeia do nó i_o para o nó i_p , com a adição do arco (i_p, i_o) . Dessa forma, um ciclo de um grafo é uma cadeia fechada no grafo.

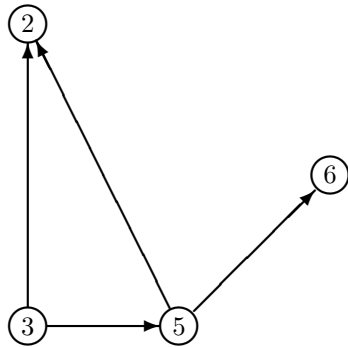
Um exemplo de ciclo no grafo da Figura 1 é seguinte:

$$Ciclo = \{(1, 2), (2, 5), (5, 3), (3, 1)\}$$

3.2.1.7 Subgrafo de um grafo

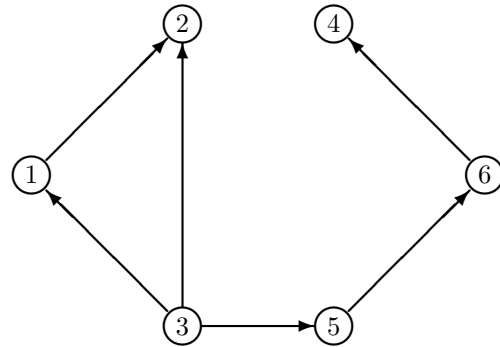
Um *subgrafo* $G'(N', A')$ de um grafo orientado $G(N, A)$ é uma parcela do grafo com o requisito de que $N' \subseteq N$ e $A' \subseteq A$, além da condição adicional de que, se o arco $(i, j) \in A'$, então os nós i e j devem fazer parte de N' . Existem vários subgrafos importantes que têm nomes específicos:

- Se $G' \neq G$, então G' é chamado de *subgrafo próprio* de G . A Figura 3 mostra um subgrafo próprio do grafo da Figura 1.
- Se $N' = N$ (todos os nós de G estão em G'), então o subgrafo G' é chamado de *subgrafo gerador* de G , o que significa que esse subgrafo incorpora ou tem capacidade de gerar todos os nós do grafo G . A Figura 4 mostra um subgrafo gerador do grafo da Figura 1.
- Um subgrafo $G'(N', A')$ de um grafo orientado $G(N, A)$ é chamado de *subgrafo induzido* pelo conjunto de nós de N' se os arcos de A' incluem todos os arcos que estavam em A , desde que cada um desses arcos tenham os seus nós incorporados em N' . Em outras palavras, se o arco $(i, j) \in G'$, isso implica que $(i, j) \in G$ e $(i, j) \in A'$ para todo i e $j \in N'$. A Figura 5 mostra um subgrafo induzido do grafo da Figura 1 para $N' = \{1, 2, 4, 5\}$.

Figura 3 - Subgrafo próprio de G .

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 4 - Subgrafo gerador.



Fonte: Elaborado pelo autor.

- Um *componente* de um grafo G é um subgrafo que é conexo e não é um subgrafo próprio de outro subgrafo conexo. Dessa forma, os componentes de um grafo são subgrafos maximais conexos (*maximal connected subgraphs*), o que significa que são peças (parcelas) separáveis do grafo. Em outras palavras, se são mostrados k componentes de um grafo, então existem k subgrafos separados e cada subgrafo componente é conexo. A Figura 6 mostra dois componentes do grafo da Figura 1, obtidos após retirar os arcos $(2, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$. Assim, a Figura 6 mostra que o grafo da Figura 1 foi separado em dois subgrafos componentes:

$$\begin{aligned} \text{Comp}_1 : N' &= \{1, 2, 3, 5\} & A' &= \{(1, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 5), (5, 2)\} \\ \text{Comp}_2 : N' &= \{4, 6\} & A' &= \{(6, 4)\} \end{aligned}$$

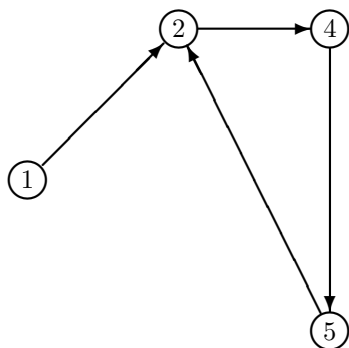
Na definição, existe a afirmação de que um subgrafo chamado de componente não pode ser um subgrafo próprio de outro subgrafo. Por esse motivo, na Figura 6 existem apenas dois componentes. Em outras palavras, o subgrafo:

$$N' = \{2, 3, 5\} \quad A' = \{(3, 2), (3, 5), (5, 2)\}$$

não pode ser componente do grafo G da Figura 1.

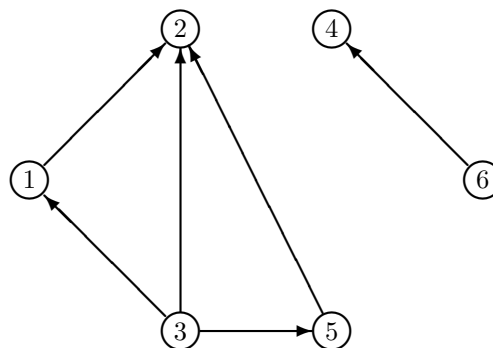
- Uma *árvore* é um grafo conexo que não tem laços. Um subgrafo de um grafo G conexo é uma árvore do grafo se representa um subgrafo conexo que não tem laços. Uma *árvore geradora* de um grafo G conexo é um subgrafo conexo que não tem laços e incorpora todos os nós do grafo G . Considerando o grafo da Figura 1 como base, o subgrafo da Figura 7 representa uma árvore do grafo e o subgrafo da Figura 8 representa uma árvore geradora. Deve-se observar que um grafo (conexo) que não tem laços tem uma árvore como sendo cada um de seus componentes. Por exemplo, o grafo da Figura 8 não tem laços e se for retirado o arco $(3, 5)$ aparecem dois componentes (dois subgrafos conexos). Nesse contexto, cada componente é um tipo especial de grafo chamado de *floresta*.

Figura 5 - Subgrafo induzido.



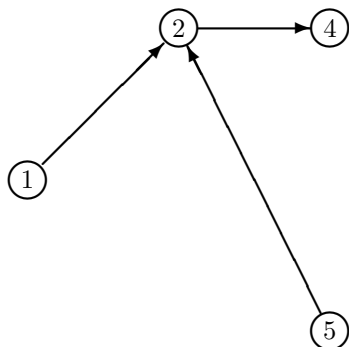
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6 - Dois componentes (subgrafos).

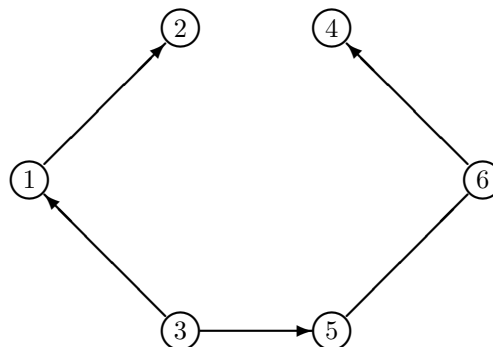


Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 7 - Árvore de um grafo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8 - Árvore geradora do grafo G .

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2.1.8 Grau de um nó de um grafo

O grau de um nó de um subgrafo é igual ao número de arcos conectados ao nó. Por exemplo, o grau do nó 2 na Figura 7 é $\text{grau}(2) = 3$. Um nó que tem grau igual a 0 ou 1 é chamado de nó terminal.

3.2.2 Propriedades fundamentais relacionadas com uma árvore geradora

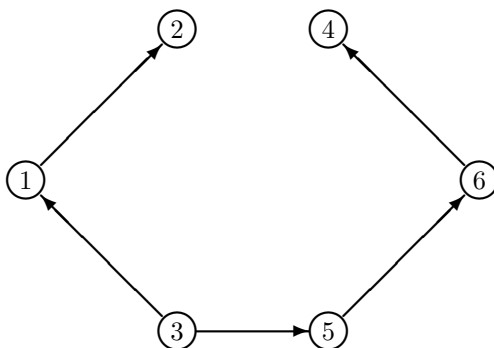
Na teoria sobre grafos existem algumas propriedades importantes relacionadas com o conceito de árvore de um grafo conexo G que na verdade são teoremas. A seguir, apresentam-se essas propriedades e os motivos para uma análise detalhada desses tópicos.

3.2.2.1 Propriedade 1 sobre árvores

Seja T o grafo de uma árvore própria (grafo com pelo menos dois nós e com pelo menos um arco) com o arco $(i, j) \in T$. Nesse contexto, desconectando (i, j) de T , isto é, removendo o arco (i, j) de T , mas preservando os nós i e j em T , acontece a separação de T em duas árvores T_1 e T_2 . Essa propriedade é uma consequência do fato de que desconectando o arco (i, j) devem

aparecer $r \geq 2$ componentes, onde cada componente é uma árvore. Se essa afirmação não for verdadeira, então reconectando o arco (i, j) em T aparece um ciclo em T , o que representa uma contradição. Adicionalmente, reconectar o arco (i, j) pode produzir a reconexão de apenas dois componentes por definição e, como T é um grafo conexo, deve-se ter $r = 2$.

Figura 9 - Árvore de um grafo.



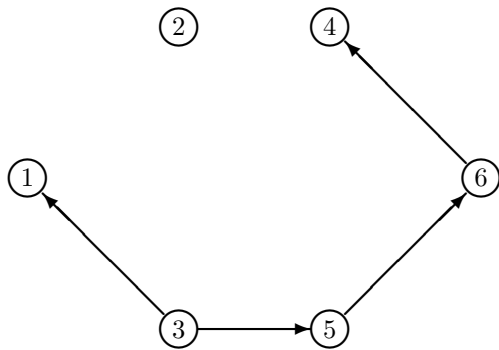
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2.2.2 Propriedade 2 sobre árvores

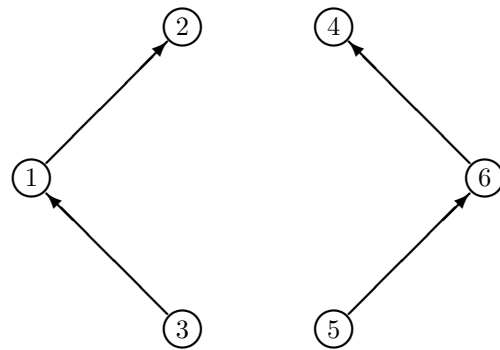
O grafo de uma árvore própria tem pelo menos dois nós terminais. Essa propriedade é óbvia para uma árvore com dois nós e um arco. Por indução, supor que a propriedade é válida para árvores que tem $2, 3, \dots, (m - 1)$ nós e, portanto, pretende-se provar que a propriedade vale para uma árvore com m nós, com $m \geq 3$. Escolhe-se um arco $(i, j) \in T$ e, desconecta-se esse arco de T produzindo duas árvores T_1 e T_2 , sendo que cada uma dessas árvores não pode ter mais do que $(m - 1)$ nós. Se T_1 ou T_2 tem apenas um nó, então pela hipóteses de indução, o número total de nós terminais em T_1 e T_2 é pelo menos igual a 3. Essa conclusão é óbvia se T_1 tem apenas um nó e, portanto, existe um nó terminal em T_1 e pelo menos dois nós terminais em T_2 , que têm $(m - 1)$ nós pela hipótese de indução. Dessa forma, T_2 com $(m - 1)$ arcos têm pelo menos dois nós terminais pela hipótese de indução. Além disso, se for recolocado o arco (i, j) em T , pode-se perder não mais do que um desses nós terminais (o nó terminal de T_1 continua sendo nó terminal e T_2 perde um nó terminal). Portanto, T têm pelo menos dois nós terminais. Por outro lado, se T_1 e T_2 têm pelo menos dois nós terminais, então o número total de nós terminais em T_1 e T_2 é, no total, pelo menos igual a quatro e recolocando o arco (i, j) não pode gerar uma diminuição de mais do que dois nós terminais. Portanto, T deve ter pelo menos dois nós terminais.

Para ilustrar melhor essa propriedade, se for retirado o arco $(1, 2)$ da árvore da Figura 9, aparecerão duas árvores: T_1 com apenas um nó e T_2 com 5 nós. Em outro caso, se for retirado o arco $(3, 5)$ da árvore da Figura 9, aparecerão duas árvores: T_1 com 3 nós e T_2 com também 3 nós. As Figuras 10 e 11 ilustram esses dois casos.

Figura 10 - Árvores após retirar (1, 2). Figura 11 - Árvores após retirar (3, 5).



Fonte: Elaborado pelo autor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2.2.3 Propriedade 3 sobre árvores

Uma árvore com m nós têm $(m - 1)$ arcos. Essa propriedade é trivialmente verdadeira para $m = 1$ ou $m = 2$ nós. Por indução, supor que essa propriedade é verdadeira para uma árvore com $(m - 1)$ nós, com $m \geq 3$ nós. Pela Propriedade 2, sempre existe um nó terminal genérico i . Desconectando o único arco que liga esse nó terminal, são geradas duas árvores T_1 e T_2 de acordo com a Propriedade 1, onde $T_1 = \{i\}$. Portanto, T_1 não tem arcos e T_2 tem $(m - 1)$ nós. Pela hipóteses de indução, T_2 têm $(m - 2)$ arcos. Portanto, T tem $(m - 2) + 1 = (m - 1)$ arcos.

3.2.3 Formas equivalentes de caracterização de uma árvore geradora de um grafo

Um subgrafo T de um grafo conexo com nb nós é árvore geradora (topologia radial) se cumpre um dos seguintes requisitos (Bazaraa; Jarvis; Sherali, 2010):

1. T é um grafo conexo e não tem laços.
2. T é um grafo conexo e tem $(nb - 1)$ arcos.
3. T é um grafo com $(nb - 1)$ arcos e não tem laços.
4. T é um grafo conexo, mas se for retirado qualquer arco de T , geram-se dois componentes (dois subgrafos que são árvores).
5. T não tem laços, mas se for adicionado qualquer arco em T , então aparece um grafo que tem exatamente um laço. Esse tipo de grafo é chamado de árvore de um laço (*one-tree*).
6. T tem uma sequência única conectando cada par de nós de T .

Em relação às diferentes formas de se caracterizar uma árvore de um grafo, apresentadas anteriormente, deve-se realizar as seguintes considerações:

- A Caracterização 1 é exatamente a forma de definir o conceito de árvore geradora de um grafo conexo. Portanto, não precisa de prova.

- As três primeiras formas de caracterização de árvore geradora de um grafo conexo apresentam três afirmações: grafo conexo, não tem laços e $(nb - 1)$ arcos. Se for considerado que duas dessas afirmações são verdadeiras, então pode-se provar que a terceira afirmação é verdadeira.

A Caracterização 1 é uma definição e, portanto, é verdadeira. Assim, pode-se provar que se a Caracterização 1 é verdadeira, então a Caracterização 2 é verdadeira. A prova é trivial usando a Propriedade 3. Se T é um grafo conexo e não tem laços, então suponha que T tem m nós. Pela Propriedade 3, T tem $(m - 1)$ arcos e, portanto, a Caracterização 2 é verdadeira já que T é conexo (hipótese) e tem $(m - 1)$ arcos.

Se a Caracterização 1 é verdadeira, então também pode-se provar que a Caracterização 3 é verdadeira pela aplicação direta da Propriedade 3. Suponha que T é uma árvore (sem laços e conexo) com m nós. Pela Propriedade 3, T tem $(m - 1)$ arcos e, portanto, a Caracterização 3 é verdadeira já que T não tem laços (hipótese) e tem $(m - 1)$ arcos.

- A partir da Caracterização 1, pode-se provar que a Caracterização 4 é verdadeira.

A prova é uma aplicação direta da Propriedade 1.

- A partir da Caracterização 1, pode-se provar que a Caracterização 5 é verdadeira.

Se um grafo T não tem laços, então adicionando qualquer novo arco no grafo T pode ser gerado pelo menos um laço em T . Se nenhum laço é formado, então o grafo T não é conexo (contrariando a Propriedade 1) e, portanto, o grafo não pode ser uma árvore. Dessa forma, a adição de um novo arco gera um laço em T .

- A partir da Caracterização 1, pode-se provar que a Caracterização 6 é verdadeira.

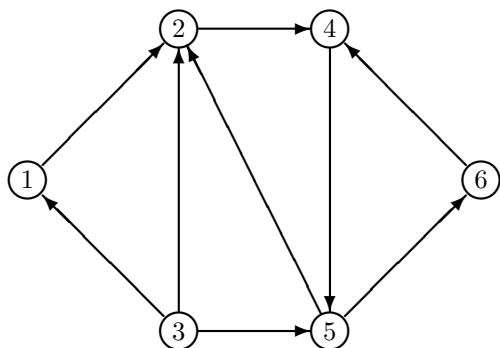
Pela conectividade de uma árvore, para cada par de nós que existem na árvore existe pelo menos uma cadeia conectando esse par de nós (a árvore é conexa de acordo com a Caracterização 1). Como a árvore não tem laços (a árvore não tem laços de acordo com a Caracterização 1), então existe apenas uma cadeia ligando cada par de nós da árvore.

3.2.4 Forma alternativa de se verificar uma topologia radial

Outra alternativa para verificar se um subgrafo de um grafo conexo é árvore geradora consiste em usar as propriedades da matriz de incidência nó-arco do grafo (*node-arc incidence matrix*). A matriz de incidência \mathbf{A} de um grafo de nb nós e nr arcos tem dimensão $nb \times nr$. Cada coluna da matriz \mathbf{A} está associada a um arco. Dessa forma, os elementos da coluna relacionada com o arco (i, j) têm apenas dois valores diferentes de zero, isto é, vale 1 na linha i e vale -1 na linha j . Para ilustrar esse conceito, usou-se o grafo conexo da Figura 12 e uma árvore desse grafo mostrada na Figura 13. A matriz \mathbf{A} do grafo da Figura 12 é mostrada na Figura 14.

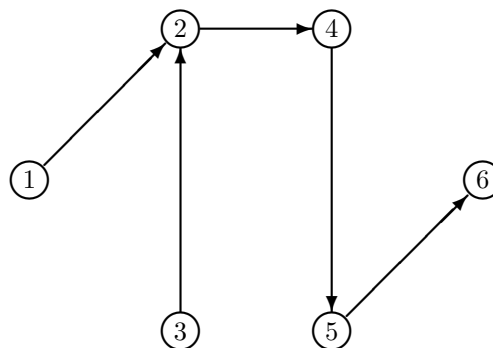
A proposta mais usada na literatura especializada para verificar se um subgrafo de um grafo conexo é uma árvore geradora consiste em calcular o determinante da matriz \mathbf{A} do subgrafo candidato ou, alternativamente, calcular a inversa da matriz \mathbf{A} .

Figura 12 - Grafo conexo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 13 - Árvore geradora do grafo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 14 - Matriz de incidência do grafo.

	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(4,6)	(5,6)	
$\mathbf{A} =$	1	1								1
	-1		1	1	1					2
		-1	-1			1				3
				-1			1	1		4
					-1	-1	-1		1	5
								-1	-1	6

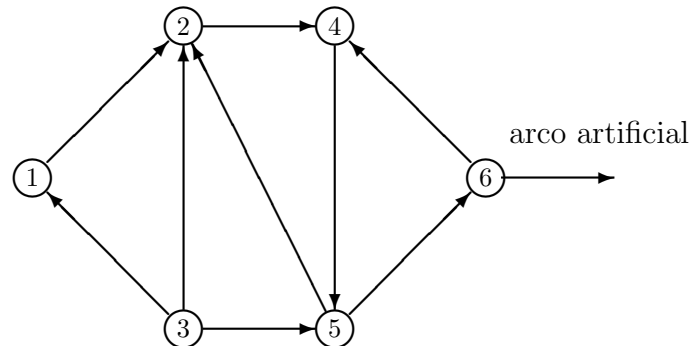
Fonte: Elaborado pelo autor.

A matriz \mathbf{A} mostrada é usada nos problemas de fluxo em redes de custo mínimo no chamado algoritmo de fluxo em redes para o problema de transportes. No problema de fluxo em redes de custo mínimo existem nós de geração e nós de demanda. Existe um custo para transportar uma unidade de produto de um nó de geração para cada nó de demanda e existem arcos direcionados que ligam os nós através dos quais podem ser transportados os produtos. Dessa forma, pretende-se encontrar um plano de custo mínimo. No problema de transporte, o conjunto de restrições está formado pelo sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onde \mathbf{A} é a matriz de incidência como foi mostrada anteriormente para o grafo da Figura 12. Para o problema de transportes de custo mínimo existem as seguintes observações importantes:

- A matriz de incidência nó-arco \mathbf{A} não tem posto completo e o seu posto é igual a $(nb - 1)$. Portanto, uma submatriz \mathbf{B} de \mathbf{A} não pode representar uma base para usar o método primal simplex para resolver o problema de transportes de custo mínimo.

- A estratégia usada no problema de transportes de custo mínimo consiste em adicionar uma variável artificial relacionada com um arco artificial. Esse arco artificial pode ser alocado em qualquer nó, mas por facilidade de notação é alocado no último nó do grafo. Assim, em fluxo em redes se trabalha com a matriz \mathbf{A} aumentada, $\mathbf{A}_a = [\mathbf{A}, \mathbf{e}_{nb}]$. A Figura 15 mostra um grafo com o arco artificial alocado no seu último nó, o nó 6.

Figura 15 - Grafo conexo com arco artificial.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, o problema modificado tem uma matriz de incidência nó-arco modificada que tem posto igual a nb . Essa matriz modificada é apresentada na Figura 16.

Figura 16 - Matriz \mathbf{A} modificada.

	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(4,6)	(5,6)	raiz
$\mathbf{A}_a =$	1	1								1
	-1		1	1	1					2
		-1	-1			1				3
				-1			1	1		4
					-1	-1	-1		1	5
								-1	-1	1
										6

Fonte: Elaborado pelo autor.

- A matriz \mathbf{A} modificada, \mathbf{A}_a , tem posto completo igual a nb . Assim, uma submatriz \mathbf{B} de \mathbf{A}_a pode representar uma base para resolver o problema de transportes de custo mínimo. Uma base \mathbf{B} de \mathbf{A}_a deve ter sempre a última coluna de \mathbf{A}_a para que seja candidata a base.

- Pode-se provar que, quando uma submatriz \mathbf{B} de \mathbf{A}_a aumentada tem $\det(\mathbf{B}) = \pm 1$, então os arcos associados às colunas de \mathbf{B} representam uma árvore geradora. Por outro lado, se $\det(\mathbf{B}) = 0$, então os arcos associados às colunas de \mathbf{B} não representam uma árvore geradora. Também pode ser oportuno mencionar que $\det(\mathbf{B}) = \pm 1$ significa que a matriz \mathbf{B} tem inversa.
- A observação anterior representa a estratégia mais usada entre os pesquisadores da área de engenharia elétrica para verificar se um subgrafo de um grafo conexo representa uma árvore geradora (topologia radial). Entretanto, calcular a inversa da matriz de incidência nó-arco de um sistema de distribuição de grande porte implica em um custo computacional elevado.

Neste trabalho, são usados os conceitos relacionados com a caracterização de uma árvore geradora, apresentados na parte inicial para verificar se um subgrafo de um grafo conexo é uma árvore geradora (topologia radial) ou não. Dessa forma, evita-se calcular a inversa de uma matriz para realizar esse trabalho de verificação. O outro tópico relacionado com a teoria de grafos abordado neste trabalho é o *algoritmo de Prim*, que é apresentado na próxima subseção.

3.3 O ALGORITMO DE PRIM

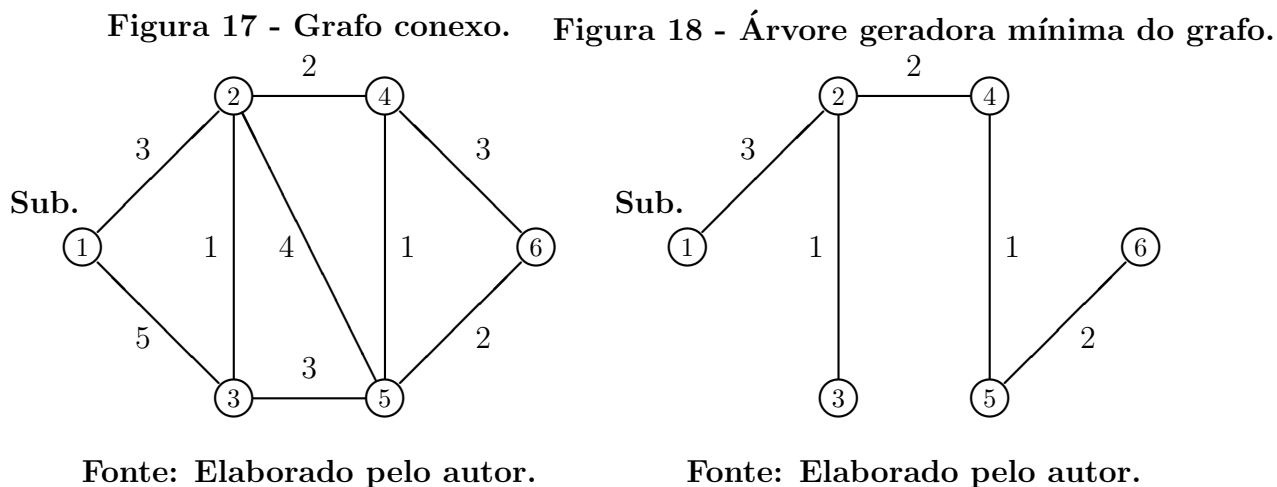
O algoritmo de Prim na teoria de grafos não tem relação direta com a estratégia de verificar se um subgrafo de um grafo conexo é árvore geradora (topologia radial). O algoritmo de Prim está relacionado com o problema de encontrar uma árvore geradora de custo mínimo de um grafo conexo. Entretanto, as ideias existentes no algoritmo de Prim são fundamentais para desenvolver as estratégias idealizadas neste trabalho para verificar se um subgrafo é árvore geradora de um grafo conexo (topologia radial).

No problema de árvore geradora mínima, existe um grafo conexo e associado a cada arco existe um peso. Dessa forma, pretende-se encontrar uma árvore geradora do grafo conexo de forma que a soma dos pesos dos arcos que fazem parte da árvore gerada seja mínima. Deve-se observar que o problema consiste em encontrar uma árvore de um grafo conexo dentre todas as árvores que existem no grafo, de forma que a soma de pesos dos arcos seja mínima. Em outras palavras, dado um grafo conexo, encontrar a árvore ótima que minimiza os pesos dos arcos da árvore. O problema de interesse neste trabalho é significativamente diferente, isto é, dado um subgrafo de um grafo conexo, pretende-se saber se esse subgrafo é uma árvore geradora (uma topologia radial).

Para resolver o problema de árvore geradora mínima existem duas técnicas de otimização na teoria de grafos, que são o algoritmo de Prim e o algoritmo de Kruskal. Ambos os algoritmos são exatos, isto é, esses algoritmos encontram a solução ótima do problema de árvore geradora mínima e são extremamente rápidos. Neste trabalho, apresenta-se apenas o algoritmo de Prim porque está diretamente relacionado com as estratégias desenvolvidas na dissertação.

Para apresentar o algoritmo de Prim, pretende-se usar o grafo conexo da Figura 17 que representa, de forma didática, um sistema de distribuição com o nó 1 sendo a subestação. A

Figura 18 mostra a árvore geradora mínima (uma topologia radial) encontrada pelo algoritmo de Prim com uma função objetivo $v = 9$.



Para usar o algoritmo de Prim, que encontra a árvore geradora mínima, deve-se ter como dados os nós e os arcos do grafo conexo, assim como os pesos dos arcos. Seja nb o número de nós, nr o número de arcos, V_a os vértices que são incorporados ao grafo em formação, V_c os vértices que ainda não foram incorporados ao grafo em formação, N_a os arcos que foram incorporados ao grafo em formação e N o conjunto de arcos. A função objetivo inicia com $v = 0$. Assim, o algoritmo de Prim assume a seguinte forma:

1. Iniciar o processo de otimização com $V_a = \emptyset$, $V_c = \{1, 2, 3, \dots, nb\}$, $N_a = \emptyset$, $N = \{1, 2, 3, \dots, nr\}$.
2. Adicionar o nó raiz (subestação) ao conjunto V_a e retirar esse nó do conjunto V_c .
3. Identificar todos os arcos da fronteira corrente. Esses arcos são aqueles que tem um nó no conjunto V_a e o outro nó no conjunto V_c . Identificar o arco de fronteira com menor peso e o nó ligado a esse arco que pertence a V_c . Adicionar o arco identificado ao conjunto N_a (e retirar esse arco do conjunto N) e o nó identificado deve ser incorporado ao conjunto V_a e retirado do conjunto V_c . Atualizar a função objetivo com o peso do arco escolhido.
4. Se a cardinalidade do conjunto V_a é igual a $|V_a| = nb$, então parar o processo. Os arcos em N_a representam os arcos da árvore geradora mínima. Caso contrário, retorne ao Passo 3.

No algoritmo de Prim, geralmente não aparece a informação de processamento adicional na identificação dos arcos de fronteira. Em cada passo do processo iterativo, existem três tipos de arcos entre os arcos candidatos que se encontram no conjunto N atualizado: (i) os arcos de fronteira que ligam um nó em V_a com um nó em V_c ; (ii) os arcos que ligam dois nós do conjunto V_c e (iii) os arcos que ligam dois nós do conjunto V_a . Deve-se observar que os arcos desse último grupo devem ser descartados do conjunto N atualizado para diminuir o trabalho de avaliação

dos arcos candidatos, pois esses arcos geram um laço no subgrafo em construção e, portanto, não podem ser escolhidos pelo algoritmo de Prim. Dessa forma, diminui-se o número de arcos livres no processo iterativo.

4 PROPOSTA DE VERIFICAÇÃO DE TOPOLOGIA RADIAL

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas as contribuições mais importantes da dissertação, onde primeiramente é comentada de forma breve a proposta tradicional de verificar se um subgrafo de um grafo conexo representa uma topologia radial através da inversão de uma matriz. É apresentada depois a proposta inovadora deste trabalho, que está inspirada na estratégia fundamental do algoritmo de Prim e nas informações que permitem verificar a radialidade de uma topologia usando algumas das definições de árvore geradora. É apresentada na sequência a segunda proposta, que é inspirada em propostas preliminares relacionadas com grafos e originalmente apresentada em Souza (2011) no contexto de planejamento da expansão de sistemas de distribuição de energia elétrica, além de também estar inspirada na definição e caracterização de uma árvore geradora. Finalmente, é apresentada uma proposta que pode ser considerada mais importante e inovadora que as anteriores. Essa proposta não se limita apenas a verificar se um subgrafo de um grafo conexo representa uma topologia radial, ela também encontra a topologia radial mais próxima de um subgrafo, caso o subgrafo não represente uma topologia radial. Dessa forma, essa proposta é a mais interessante em termos de otimização da operação e do planejamento de sistemas de distribuição de energia elétrica radiais.

Deve-se observar que esse problema de verificar se um subgrafo é uma topologia radial ou não aparece quando são usadas algumas meta-heurísticas, especialmente na aplicação de PSO. Nesse tipo de aplicação, gera-se um subgrafo e se pretende saber se esse subgrafo é uma topologia radial ou não. Se após a verificação for constatado que o subgrafo não é uma topologia radial, então essa proposta deve ser descartada e deve-se gerar outro subgrafo. Para sistemas de grande porte, esse processo de geração de subgrafos pode gerar um número elevado de subgrafos que não representam topologias radiais. Em outras palavras, um conjunto muito pequeno de subgrafos gerados podem, de fato, ser radiais. Nesse contexto, pode ser mais interessante gerar a topologia radial mais próxima do subgrafo em análise. Assim, o conceito de topologia radial mais próxima de um subgrafo que não é radial precisa ser analisado em detalhes, o que será feito quando for apresentada essa proposta de verificação mais adiante. Nessa análise, também é discutida a taxa de geração de topologias radiais em sistemas de tamanho médio e de grande porte, além de considerar o espaço de busca na geração dos subgrafos. Uma referência muito importante sobre esse tema é Macedo et al. (2018).

4.2 PROPOSTA TRADICIONAL DE VERIFICAÇÃO DE UMA TOPOLOGIA RADIAL

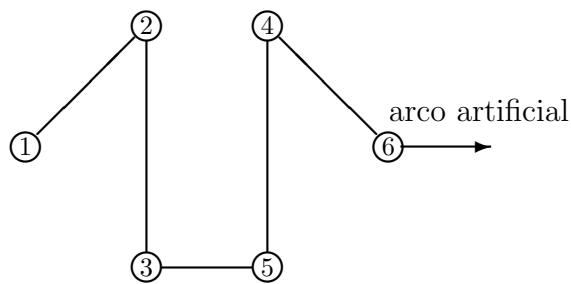
A proposta tradicional que aparece nas publicações relacionadas com a necessidade de verificar se uma topologia de um sistema de distribuição é radial ou não está associada com a montagem da matriz de incidência nó-arco da topologia proposta. Deve-se observar que a to-

pologia a ser analisada pode ser radial ou não e, caso não seja radial, a topologia em avaliação pode ter laços e pode ser desconexa.

A estratégia é conceitualmente simples, mas exige um tempo de processamento elevado pela necessidade de ter que encontrar o determinante de uma matriz ou a inversa da matriz. Dessa forma, após encontrar a matriz de incidência nó-arco do subgrafo, deve-se calcular a inversa dessa matriz. Seja \mathbf{B}_a a matriz de incidência nó-arco de um subgrafo. Nesse contexto, se $\det(\mathbf{B}_a) = \pm 1$ ou a matriz tem inversa, então o subgrafo é uma topologia radial (uma árvore geradora). Em caso contrário, se $\det(\mathbf{B}_a) = 0$, então o subgrafo não é uma topologia radial (não é uma árvore geradora).

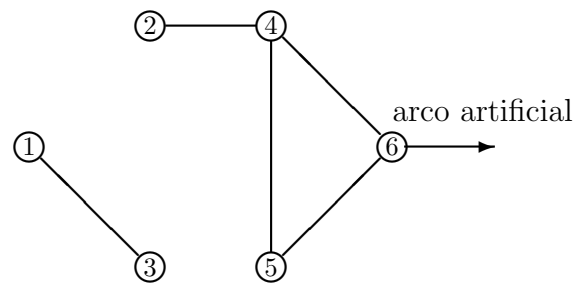
As Figuras 19 e 20 mostram dois subgrafos do grafo conexo mostrado na Figura 17 após adicionar o arco artificial.

Figura 19 - Subgrafo que é radial.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 20 - Subgrafo que não é radial.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A matriz de incidência nó-arco do subgrafo da Figura 19 é apresentada na Figura 21.

Figura 21 - Matriz de incidência da Figura 19.

	(1,2)	(2,3)	(3,5)	(4,5)	(4,6)	raiz
1	1					1
2	-1	1				2
3		-1	1			3
4				1	1	4
5			-1	-1		5
6					-1	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

De onde facilmente se pode verificar que $\det(\mathbf{B}_a) = 1$.

A matriz de incidência nó-arco do subgrafo da Figura 20 é apresentada na Figura 22.

Figura 22 - Matriz de incidência da Figura 20.

$$\mathbf{B}_a =$$

	(1,3)	(2,4)	(4,5)	(4,6)	(5,6)	raiz
1	1					1
		1				2
-1						3
		-1	1	1		4
			-1		1	5
				-1	-1	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

De onde facilmente se pode verificar que $\det(\mathbf{B}_a) = 0$.

Como mencionado anteriormente, a maior dificuldade de usar a proposta de inverter uma matriz é o esforço de processamento computacional. Por exemplo, para o sistema de 84 barras que é muito usado na literatura especializada sobre reconfiguração de sistemas de distribuição, deve-se encontrar a inversa de uma matriz de tamanho 84×84 . Um problema adicional acontece se for verificado que o subgrafo em análise não é uma topologia radial, o que implica em um tempo de processamento que não é efetivamente aproveitado. Uma observação óbvia a ser feita nessa estratégia é que, se o número de arcos do subgrafo for diferente de $(nb - 1)$, então pode-se concluir de forma óbvia que esse subgrafo não pode ser radial e então não é necessário realizar a montagem da matriz \mathbf{B}_a , pois ela não é quadrada. Essa observação trivial é decorrente da *forma equivalente de caracterização de árvore* $n^o 2$ apresentada no capítulo anterior.

Usando as observações anteriores, dado um subgrafo relacionado com um problema de distribuição de energia elétrica conexo, então a proposta tradicional deve realizar as seguintes tarefas para verificar se esse subgrafo representa uma topologia radial:

- Deve-se verificar se o subgrafo tem $(nb - 1)$ arcos. Se o número de arcos for diferente de $(nb - 1)$, então esse subgrafo é descartado como candidato a topologia radial.
- Se o subgrafo tem $(nb - 1)$ arcos, então deve-se montar a matriz de incidência desse subgrafo. Essa matriz tem dimensão $nb \times nb$ após adicionar o arco artificial e , portanto, deve-se adicionar o vetor coluna \mathbf{e}_m para gerar uma matriz quadrada chamada \mathbf{B}_a . Se a matriz \mathbf{B}_a tem inversa, então o subgrafo representa uma topologia radial. Em caso contrário, o subgrafo não é uma topologia radial.

4.3 CONCEITOS FUNDAMENTAIS PARA A IDEALIZAÇÃO DAS PROPOSTAS APRESENTADAS

As propostas idealizadas e apresentadas na dissertação estão sustentadas em conceitos de teoria de grafos. Essas propostas de sustentação teórica não foram encontradas na literatura especializada sobre grafos porque, provavelmente, representam um tópico de pouco interesse nessa área de pesquisa. Essas propostas são apresentadas através de lemas porque são provadas diretamente dos teoremas apresentados no capítulo anterior.

As propostas idealizadas estão baseadas nas seguintes observações:

- Se o subgrafo tem um número de arcos diferente de $(nb - 1)$, então o subgrafo não pode ser topologia radial e, portanto, o subgrafo é descartado como candidato a topologia radial.
- Se o subgrafo tem $(nb - 1)$ arcos, então esse subgrafo não representa uma topologia radial (árvore geradora) se tem pelo menos um laço ou se for desconexo.
- Devem-se idealizar técnicas de avaliação para descartar rapidamente um subgrafo que não é topologia radial (árvore geradora).

Os lemas provados e usados na dissertação são os seguintes:

Lema 1: Se um subgrafo, de um grafo conexo, tem um número diferente de $(nb - 1)$ arcos, então esse subgrafo não pode ser uma árvore geradora (topologia radial).

Essa prova é trivial e diretamente aplicável da *forma equivalente de caracterização de árvore $n^o 2$* , que afirma que uma árvore deve ter exatamente $(nb - 1)$ arcos. Dessa forma, um subgrafo com um número diferente de $(nb - 1)$ arcos não pode ser uma árvore (topologia radial).

Lema 2: Se um subgrafo, de um grafo conexo, com $(nb - 1)$ arcos tem um nó de grau zero, então esse subgrafo não pode ser uma árvore geradora (topologia radial).

Essa prova é trivial e diretamente aplicável da *forma equivalente de caracterização de árvore $n^o 1$* , que é a definição de uma árvore como sendo um subgrafo conexo e sem laços. Portanto, um subgrafo que tem um nó isolado (grau zero) representa um subgrafo desconexo.

Lema 3: Se um subgrafo, de um grafo conexo, com $(nb - 1)$ arcos tem um laço, então esse subgrafo não pode ser uma árvore geradora (topologia radial).

Essa prova também é trivial e diretamente aplicável da *forma equivalente de caracterização de árvore $n^o 2$* e da própria definição de árvore (topologia radial).

Lema 4: Se um subgrafo, de um grafo conexo, com $(nb - 1)$ arcos é desconexo, então esse subgrafo não pode ser uma árvore geradora (topologia radial).

Essa prova também é trivial e diretamente aplicável da *forma equivalente de caracterização de árvore $n^o 2$* e da própria definição de árvore (topologia radial).

A primeira proposta está baseada nos quatro lemas, enquanto a segunda proposta está baseada nos três primeiros lemas e, por fim, a terceira proposta usa a estratégia fundamental do algoritmo de Prim. Entretanto, como mencionado anteriormente, o problema de verificar se um subgrafo é uma árvore geradora é diferente do problema de encontrar uma árvore geradora de custo mínimo através do algoritmo de Prim. No algoritmo de Prim, existe disponível um

grafo conexo com pesos atribuídos aos arcos e se pretende encontrar a árvore geradora mínima do grafo e, portanto, existem muitos candidatos à árvore geradora mínima e sempre existe uma solução ótima. No problema abordado neste trabalho, existe um grafo conexo e, usando alguma estratégia, gera-se um subgrafo do grafo conexo e se pretende saber se esse subgrafo é uma árvore geradora (topologia radial). Várias meta-heurísticas usadas no problema da reconfiguração de sistemas de distribuição e problemas correlatos geram subgrafos usando algum tipo de estratégia e existe a necessidade de verificar se esse subgrafo é uma árvore geradora (uma topologia radial). Deve-se observar que esses subgrafos podem ter um número de arcos menor, igual ou maior que $(nb - 1)$.

4.4 PRIMEIRA PROPOSTA DE VERIFICAÇÃO DE UMA TOPOLOGIA RADIAL

A primeira proposta desenvolvida na dissertação, que se imagina ser original, está inspirada na caracterização de uma árvore geradora (topologia radial).

Assim, a proposta está baseada nos seguintes fatos:

1. Um requisito para que um subgrafo seja árvore geradora é que o número de arcos seja igual a $(nb - 1)$, isto é, o número de arcos deve ser igual ao número de nós menos um. Portanto, qualquer subgrafo com um número de arcos diferente de $(nb - 1)$ deve ser descartado como candidato à árvore geradora, sem processamento adicional.
2. Se o número de arcos é igual a $(nb - 1)$, então o subgrafo é candidato à árvore geradora. Supor que seja usada a estratégia de Prim e em determinada iteração são avaliados os arcos livres que se encontram no conjunto N atualizado. No processo de identificação dos arcos de fronteira e considerando os nós livres desses arcos, existem quatro tipos de arcos livres: (i) arcos que tem os dois nós em V_a ; (ii) arcos que tem um nó em V_a e o outro nó em V_c , além de compartilhar o nó em V_c com outro arco de fronteira; (iii) arcos que tem um nó em V_a e o outro nó em V_c , mas não compartilha o nó em V_c com outro arco de fronteira e (iv) arcos que tem os dois nós em V_c e, portanto, não interessam na análise da iteração corrente. Em relação a esses arcos existem os seguintes fatos:
 - Se existe um arco livre que tem os dois nós em V_a , então o subgrafo tem laço e não pode ser árvore geradora e, portanto, o processo de avaliação deve terminar. Essa estratégia está sustentada pelo Lema 3.
 - Se existem dois arcos livres que têm o mesmo nó em V_c , então o subgrafo tem laço e não pode ser árvore geradora e, portanto, o processo de avaliação deve terminar. Essa estratégia está sustentada pelo Lema 3.
 - Caso não exista nenhum arco livre dos dois tipos antes mencionados, então todos os arcos livres que têm um nó em V_a e outro nó em V_c devem ser incorporados ao conjunto N_a e retirados do conjunto N , assim como os nós desses arcos que se encontravam em V_c devem ser incorporados em V_a e retirados de V_c .

- Caso não existam arcos livres do tipo anterior e se o conjunto $V_c \neq \emptyset$, então o subgrafo é desconexo e, portanto, o processo de avaliação deve terminar. Essa estratégia está sustentada pelo Lema 4.

Se o processo não termina por um dos motivos mencionados anteriormente e com a informação de que o subgrafo não é árvore geradora, então o processo deve terminar quando o último nó de V_c é incorporado em V_a , isto é, quando a cardinalidade de V_a é igual $|V_a| = (nb - 1)$, confirmando que o subgrafo é uma árvore (topologia radial).

Adicionalmente, pode-se implementar uma fase de pré-processamento com a finalidade de identificar o grau de cada nó. Essa informação pode ser usada da seguinte forma:

- Se existe um nó de grau mínimo igual a zero, então o subgrafo é desconexo e o processo termina na fase de pré-processamento. Essa estratégia está sustentada pelo Lema 2.
- Se o nó de grau mínimo é diferente de zero, então o nó de grau máximo é usado como ponto de partida na implementação do algoritmo. Em outras palavras, ao conjunto V_a é adicionado o nó de maior grau e os arcos ligados a esse nó são incorporados em N_a e retirados de N . Essa estratégia acelera o processo de solução.

Levando em conta as observações anteriores, o algoritmo para implementar a primeira proposta de verificação de radialidade de um subgrafo de um grafo conexo assume a seguinte forma:

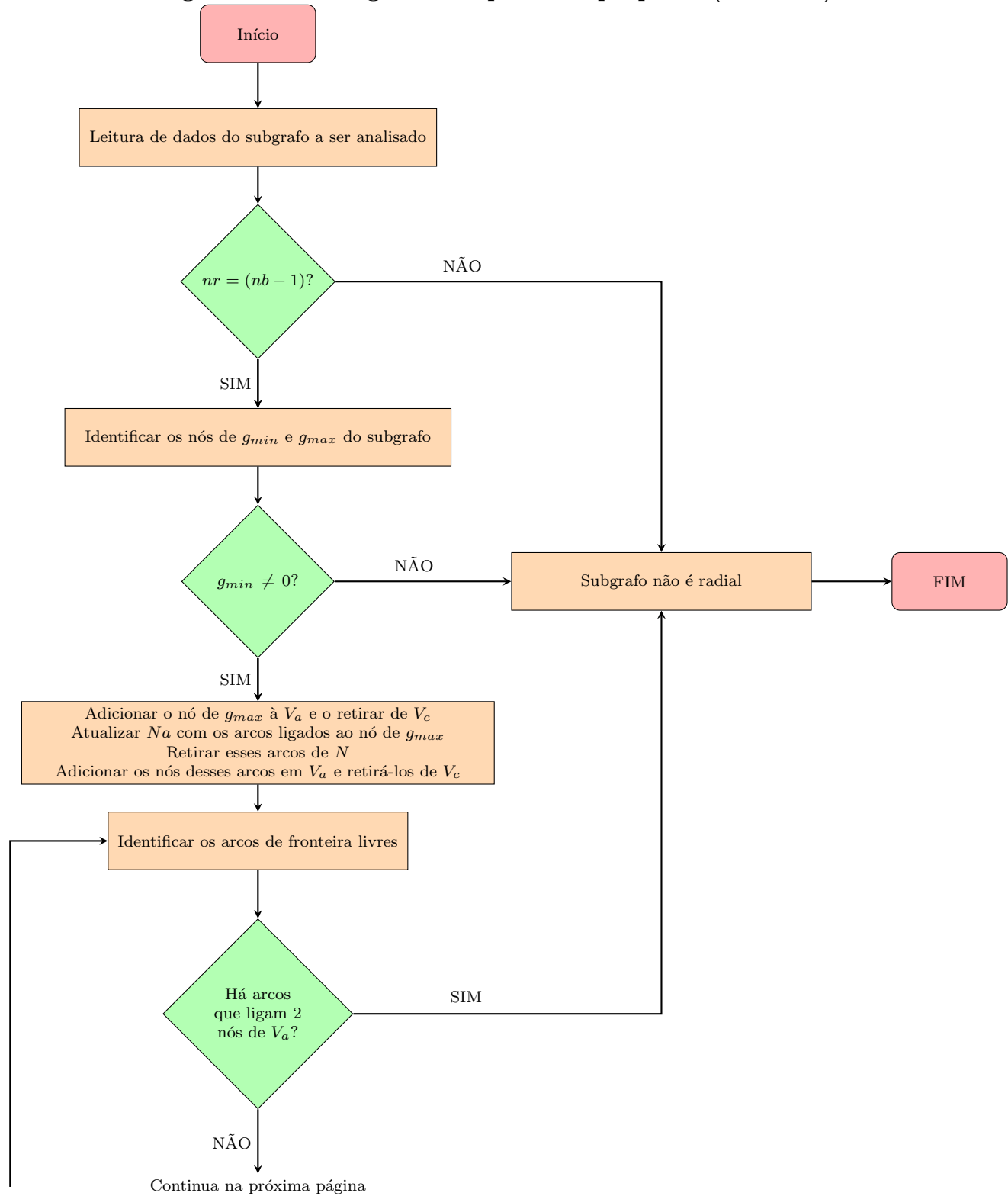
1. **Montagem dos dados:** número de arcos do subgrafo nr ; número de nós do grafo nb ; conjunto de nós incorporados no grafo em construção $V_a = \emptyset$; conjunto de nós livres do subgrafo em construção $V_c = 1, 2, \dots, nb$; conjunto de arcos incorporados no subgrafo em construção $N_a = \emptyset$ e conjunto de arcos livres do subgrafo em construção $N = 1, 2, \dots, nr$.
2. **Pré-processamento:** Se $nr \neq (nb - 1)$, parar o processo com a informação de que o subgrafo não é árvore geradora.
3. **Pré-processamento:** Calcular o grau de cada nó do subgrafo e identificar o nó com grau mínimo, g_{min} , e o nó com grau máximo, g_{max} . Se $g_{min} = 0$, parar o processo com a informação de que o subgrafo não é árvore geradora. Em caso contrário, escolher o nó de maior grau como o nó inicial a ser incorporado no conjunto V_a e retirar esse nó do conjunto V_c . Atualizar o conjunto N_a com a adição dos arcos ligados ao nó inicial escolhido e retirar esses arcos do conjunto N . Atualizar o conjunto V_a com a adição dos nós desses arcos e retirar esses nós do conjunto V_c .
4. Percorrer os arcos livres e identificar os arcos que ligam dois nós de V_a e os arcos que ligam um nó de V_a com um nó de V_c . Se nesse processo for identificado um arco que liga dois nós de V_a , então parar o processo com a informação de que o subgrafo não é árvore geradora (o subgrafo tem laço). Se nesse processo de identificação de arcos não existir um arco que ligue um nó de V_a com um nó de V_c , então parar o processo com a informação de que o subgrafo não é árvore geradora (o subgrafo é desconexo).

5. Dentre os arcos que ligam um nó de V_a com um nó de V_c , verificar se existe um par de arcos que têm o mesmo nó do conjunto V_c . Se existe um par de arcos desse tipo, então parar o processo com a informação de que o subgrafo não é árvore geradora (o subgrafo tem laço).
6. Adicionar todos os arcos de fronteira (arcos que têm um nó em V_a e outro nó em V_c) no conjunto N_a e retirar esses arcos do conjunto N , atualizando o valor de nr . Adicionar todos os nós desses arcos que se encontram em V_c no conjunto V_a e retirar esses nós do conjunto V_c .
7. Se o número de elementos de $V_a = (nb - 1)$, então parar o processo com a informação de que o subgrafo é uma árvore geradora. Em caso contrário, voltar para o Passo 4.

Deve-se observar que o algoritmo mostrado é muito mais rápido que o algoritmo de Prim de árvore geradora mínima. No algoritmo de Prim, em cada iteração é adicionado apenas um nó na árvore em formação e o processo termina após incorporar todos os nós. Por outro lado, o algoritmo idealizado que verifica se um subgrafo é radial ou não (primeira proposta desta dissertação) adiciona um conjunto de nós em cada iteração, além de que o número de arcos livres diminui muito em cada iteração e pode terminar prematuramente se verificar que o subgrafo tem laço ou é desconexo. É importante observar que, em alguns casos, o algoritmo pode terminar apenas na fase de pré-processamento.

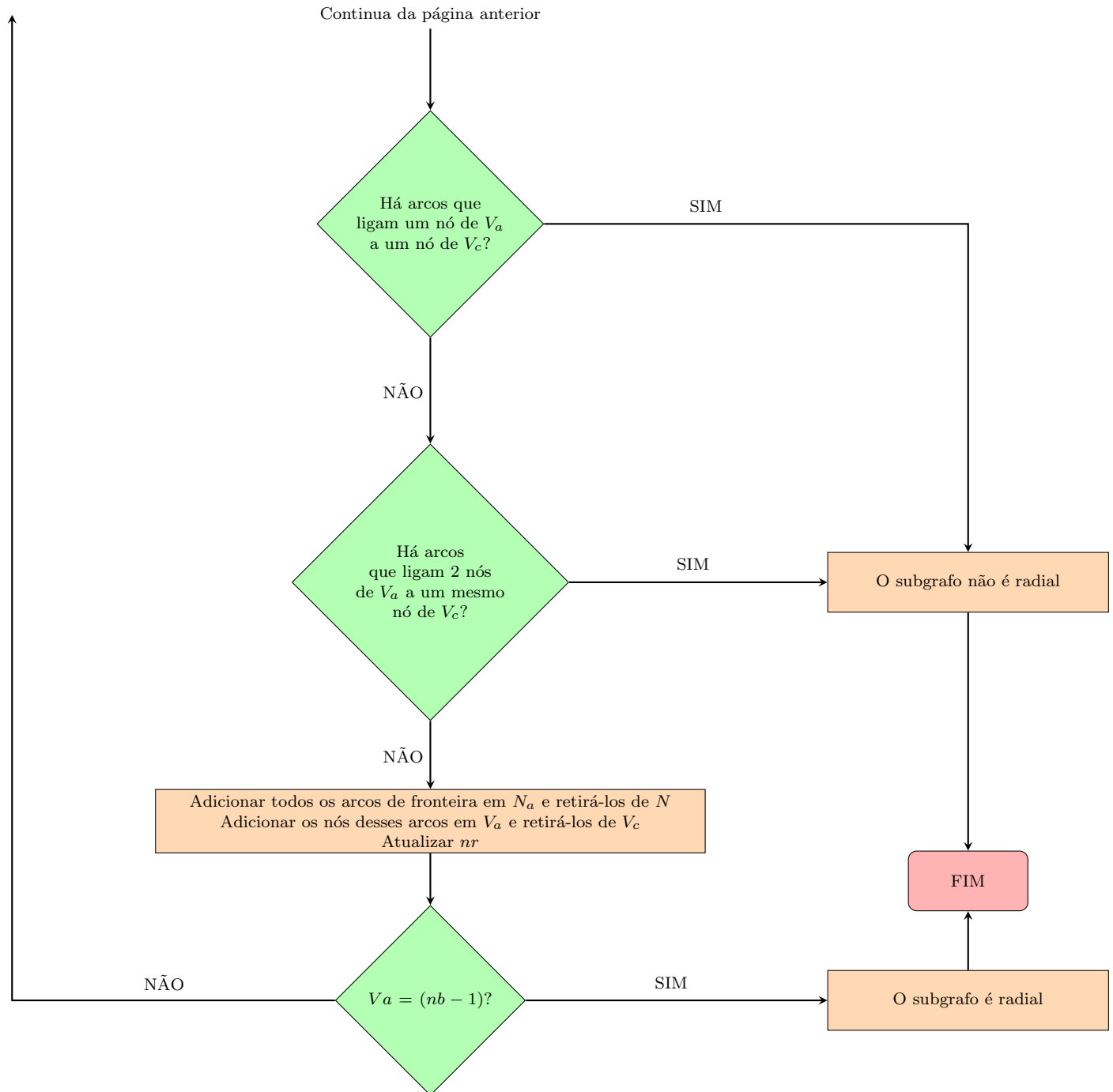
No fluxograma das Figuras 23 e 23.a estão ilustrados todos os passos utilizados pela primeira proposta.

Figura 23 - Fluxograma da primeira proposta (continua).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 23.a - Fluxograma da primeira proposta (conclusão).



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.5 SEGUNDA PROPOSTA DE VERIFICAÇÃO DE UMA TOPOLOGIA RADIAL

A segunda proposta idealizada para identificar se um subgrafo é radial ou não usa os conceitos de caracterização de uma árvore geradora, assim como na primeira proposta apresentada anteriormente. Entretanto, o processo de identificação segue uma lógica diferente.

Em Souza (2011), existe uma proposta para identificar um laço em um subgrafo relacionada com o problema de planejamento da expansão de sistemas de distribuição radiais quando é usada a meta-heurística de busca em vizinhança variável (*Variable Neighborhood Search* – VNS). Nesse mesmo trabalho, existe uma proposta para verificar se um subgrafo é desconexo. Dessa forma, nesta dissertação são usadas as ideias fundamentais dessa proposta de verificar se um subgrafo de um grafo é desconexo. Entretanto, a proposta é formulada usando apenas os conceitos sobre grafos apresentados no capítulo anterior.

A segunda proposta está baseada nos seguintes fatos:

1. Um requisito para que um subgrafo seja árvore geradora é que o número de arcos seja igual a $(nb - 1)$, isto é, o número de arcos deve ser igual ao número de nós menos um. Portanto, qualquer subgrafo com um número de arcos diferente de $(nb - 1)$ deve ser descartado como candidato à árvore geradora e sem processamento.
2. Se o subgrafo tem um nó de grau zero então o subgrafo não pode ser topologia radial.
3. Pode ser implementado um processo iterativo, para o subgrafo em análise, retirando em cada passo todos os arcos ligados aos nós terminais (conectados a nós de grau igual a 1) e retirando também os respectivos nós. A repetição desse processo termina com dois tipos de diagnóstico:
 - Todos os arcos foram retirados o que significa que o subgrafo é uma árvore geradora (topologia radial).
 - Ainda existem arcos não retirados do subgrafo, mas não existe nó terminal. Significa que o subgrafo corrente não tem nó terminal e, portanto, os arcos restantes estão formando laços.

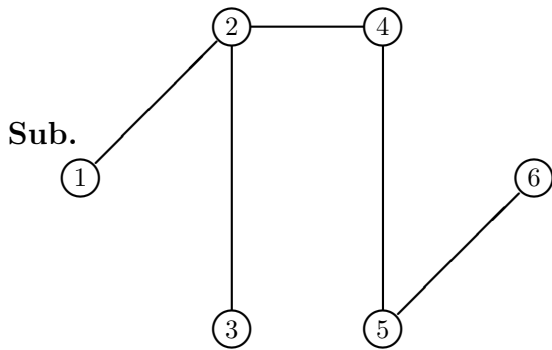
A Figura 24 mostra um subgrafo inicial que é topologia radial. Após a primeira iteração são retirados os arcos 1-2, 2-3 e 5-6, assim como os nós 1, 3 e 6. Dessa forma sobra o subgrafo da Figura 25. Na segunda iteração são retirados os arcos 2-4 e 4-5, chegando a um conjunto vazio, o que significa que o subgrafo analisado é uma árvore geradora (topologia radial).

A Figura 26 mostra um subgrafo inicial que não é topologia radial. Após a primeira iteração são retirados os arcos 1-3 e 4-6, assim como os nós 1, 4 e 6. Dessa forma, sobra o subgrafo da Figura 27. Na segunda iteração, analisando a Figura 27, verifica-se que o subgrafo restante não tem nós terminais e o subgrafo tem nós com grau igual a 2. Dessa forma, o subgrafo analisado não é uma árvore geradora (topologia radial).

Pode-se constatar que a estratégia anterior tem a capacidade de verificar se um subgrafo é radial ou não se for adicionada a exigência de que o número de arcos do subgrafo deve ser igual a $(nb - 1)$ e a validade do Lema 3.

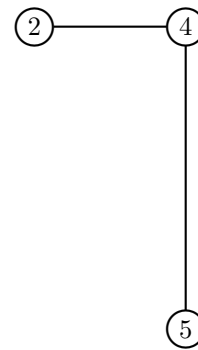
A proposta de verificar se um subgrafo é desconexo usa a mesma estratégia utilizada em Shirmohammadi et al. (1988) como parte de implementação do problema de fluxo de carga

Figura 24 - Subgrafo inicial.



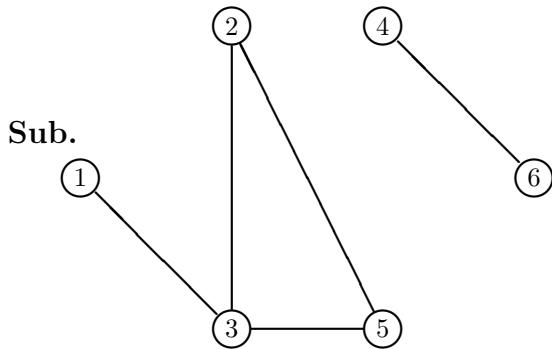
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 25 - Subgrafo intermediário.



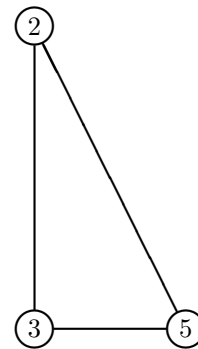
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 26 - Subgrafo inicial.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 27 - Subgrafo intermediário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

usando o método de varredura. Esse método de varredura exige renumerar as barras por camadas a partir da subestação. Nesse tipo de implementação computacional, parte-se da premissa de que o grafo em análise é radial e, portanto, pretende-se apenas renumerar as barras por camadas a partir da subestação. No trabalho desta dissertação, pretende-se saber se um subgrafo de um grafo conexo é árvore geradora (topologia radial).

Levando-se em conta as observações anteriores, o algoritmo para implementar a segunda proposta de verificação de radialidade de um subgrafo de um grafo conexo assume a seguinte forma:

1. **Montagem dos dados:** Armazenar a informação dos nós e arcos do subgrafo em análise. Seja nr o número de arcos e nb o número de nós. Todos os arcos são chamados de arcos livres.
2. **Pré-processamento:** Se $nr \neq (nb - 1)$, parar o processo com a informação de que o subgrafo não é árvore geradora.
3. **Pré-processamento:** Calcular o grau de cada nó do subgrafo considerando os arcos

livres disponíveis e armazenar a informação do nó de grau mínimo e o valor do seu grau, g_{min} . Se $g_{min} = 0$, parar o processo com a informação de que o subgrafo não é árvore geradora. Em caso contrário, ir ao Passo 4.

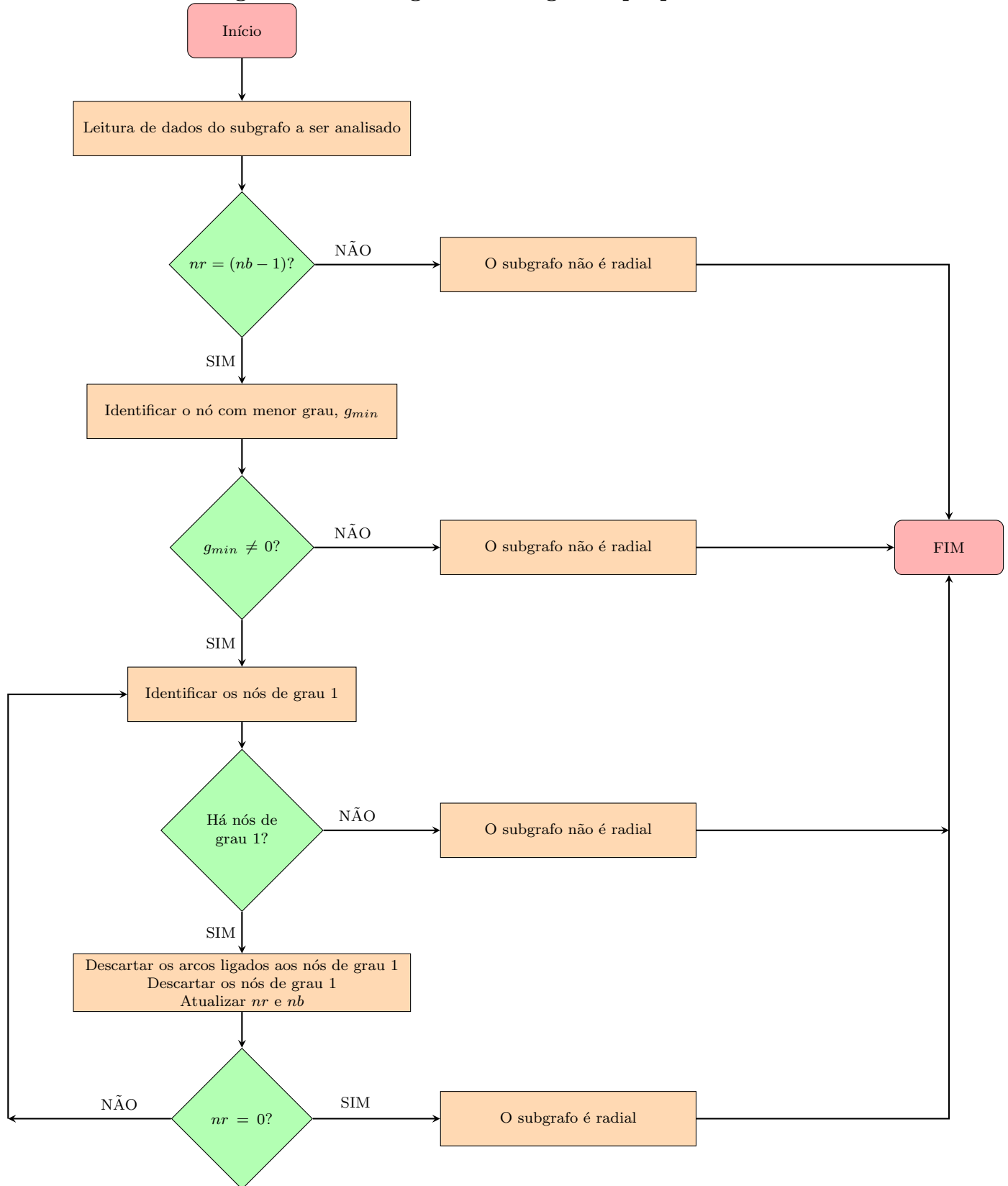
4. Identificar todos os nós que têm grau igual a 1 e os arcos livres ligados a esses respectivos nós. Caso existam nós de grau igual a 1, então descartar todos os arcos livres que se ligam a esses nós, assim como os nós correspondentes de grau igual a 1. Atualizar o número de arcos livres e nós do subgrafo e ir ao Passo 5. Caso contrário, terminar o processo com a informação de que o subgrafo não é radial, pois tem laço.
5. Se o número de arcos livres for igual a zero, então parar o processo com a informação de que o subgrafo é radial. Em caso contrário, ir ao Passo 4.

No algoritmo apresentado, deve-se fazer as seguintes observações:

- O Passo 2 está sustentado pelo Lema 1.
- O Passo 3 está sustentado pelo Lema 2.
- O Passo 4 está sustentado pelo Lema 3.

No fluxograma da Figura 28 estão ilustrados todos os passos utilizados pela segunda proposta.

Figura 28 - Fluxograma da segunda proposta.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.6 FORMA ALTERNATIVA DE IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DA SEGUNDA PROPOSTA

As duas propostas apresentadas são implementadas usando os algoritmos apresentados anteriormente que analisam e manipulam a estrutura de um grafo. Entretanto, existe uma proposta alternativa de implementar computacionalmente a segunda proposta. Nesse caso, a proposta é montar a matriz de incidência nó-arco \mathbf{A} e trabalhar com essa matriz. A estratégia é apresentada usando os subgrafos das Figuras 24 e 26.

A matriz de incidência nó-arco da Figura 24 é mostrada na Figura 29. Pode-se verificar que os nós 1, 3 e 6 são nós terminais e, portanto, com grau igual a 1. Após retirar os arcos ligados a esses nós e os respectivos nós, aparece a matriz \mathbf{A} modificada na Figura 30.

Figura 29 - Matriz de incidência da Figura 24.

						Grau
						(1,2) (2,3) (2,4) (4,5) (5,6)
$\mathbf{A} =$	1					1
	-1	1	1			2
		-1				3
			-1	1		4
				-1	1	5
					-1	6

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 30, os nós 2 e 5 têm grau igual a 1 e, portanto, os arcos ligados a esses nós podem ser retirados, assim como os nós correspondentes. O resultado é uma matriz vazia, o que significa que foram retirados todos os arcos. Dessa forma, o subgrafo analisado é uma árvore geradora (topologia radial).

A matriz de incidência nó-arco da Figura 26 é mostrada na Figura 31. Pode-se verificar que os nós 1, 4 e 6 são nós terminais e, portanto, com grau igual a 1. Após retirar os arcos ligados a esses nós e os respectivos nós, aparece a matriz \mathbf{A} modificada na Figura 32.

Na Figura 32, não existem nós de grau igual a 1, portanto, não existem nós terminais. Como os nós restantes têm grau maior ou igual a 2, então o subgrafo tem laço e não pode ser árvore geradora (topologia radial).

Levando-se em conta as observações anteriores, a segunda proposta de verificação de radialidade de um subgrafo de um grafo conexo pode ser implementada de forma alternativa trabalhando com a matriz \mathbf{A} . Essa forma alternativa é apresentada a seguir:

1. **Montagem dos dados:** Armazenar a informação dos nós e arcos do subgrafo em análise. Seja nr o número de arcos e nb o número de nós.

Figura 30 - Matriz de incidência restante.

		(1,2)	(2,3)	(2,4)	(4,5)	(5,6)		Grau
A =							1	0
			1				2	1
							3	0
			-1	1			4	2
				-1			5	1
							6	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 31 - Matriz de incidência da Figura 26.

		(1,3)	(2,3)	(2,5)	(3,5)	(4,6)		Grau
A =	1						1	1
		1	1				2	2
	-1	-1		1			3	3
					1		4	1
			-1	-1			5	2
					-1		6	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

2. **Pré-processamento:** Se $nr \neq (nb - 1)$, parar o processo com a informação de que o subgrafo não é árvore geradora.
3. **Pré-processamento:** Montar a matriz de incidência nó-arco **A** do subgrafo, assim como o vetor **Grau**, que contêm os valores do grau correspondente de cada nó da matriz **A**. Se existe um nó com grau igual a zero, então parar o processo com a informação de que o subgrafo não é árvore geradora. Em caso contrário, a matriz **A** é chamada de matriz **A** corrente e ir ao Passo 4.
4. Se a matriz **A** corrente está vazia, então parar o processo com a informação de que o subgrafo é árvore geradora (topologia radial). Em caso contrário, na matriz **A** corrente identificar todos os nós com grau igual a 1 e ir ao Passo 5.
5. Se no passo anterior existe pelo menos um nó de grau igual a 1, então retirar todos os

Figura 32 - Matriz de incidência restante.

	(1,3)	(2,3)	(2,5)	(3,5)	(4,6)		Grau
A =						1	0
		1	1			2	2
		-1		1		3	2
						4	0
			-1	-1		5	2
						6	0

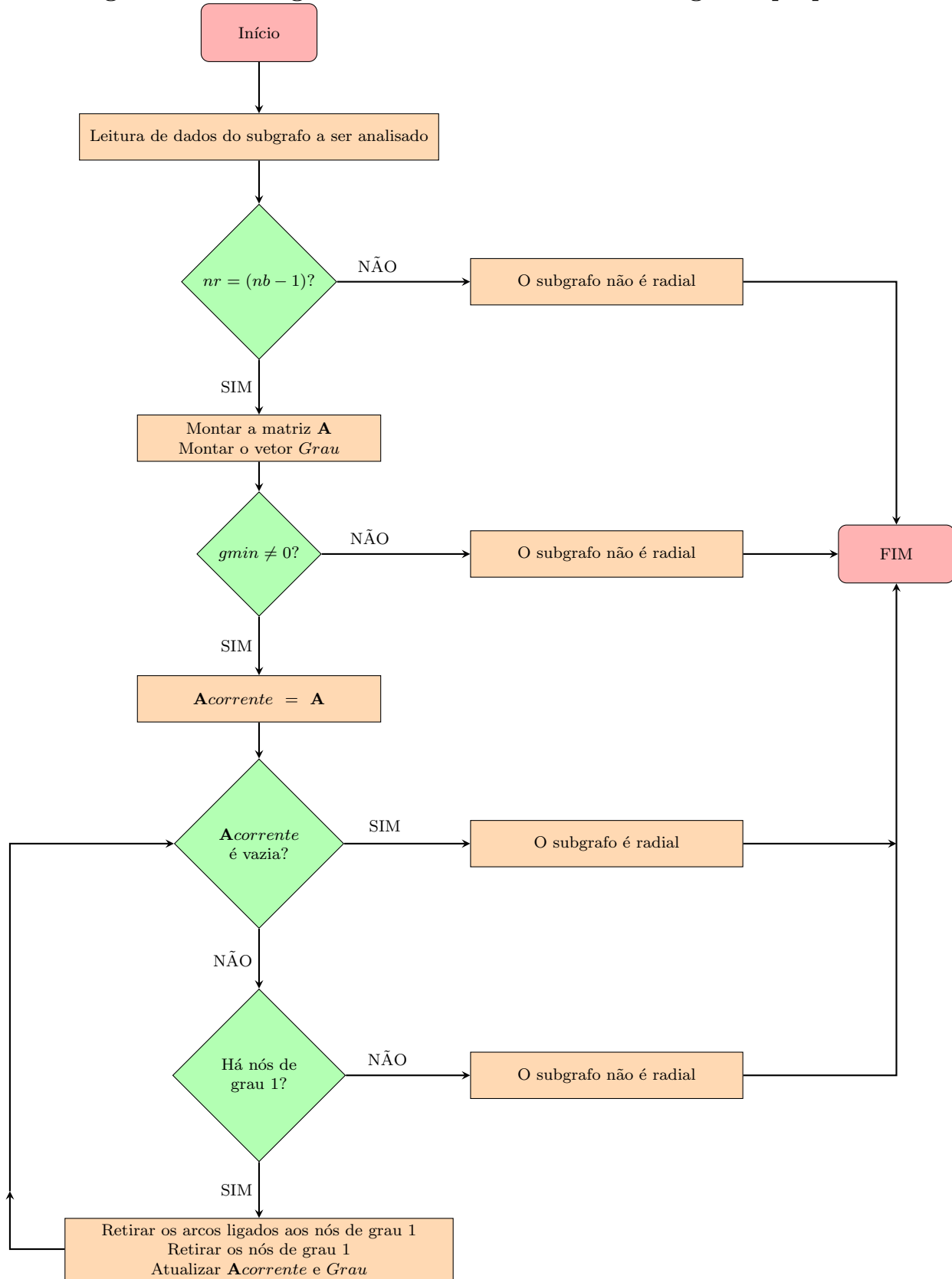
Fonte: Elaborado pelo autor.

arcos ligados aos nós de grau igual a 1, assim como os nós correspondentes. Atualizar o grau dos nós que permanecem na matriz **A** e voltar ao Passo 4. Em caso contrário, ir ao Passo 6.

6. Todos os nós da matriz **A** corrente têm grau maior ou igual a 2, o que implica que o subgrafo tem laço, e, portanto, parar com a informação de que o subgrafo não é árvore geradora (topologia radial).

No fluxograma da Figura 33 estão ilustrados todos os passos utilizados pela forma alternativa da segunda proposta.

Figura 33 - Fluxograma da forma alternativa da segunda proposta.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.7 TRANSFORMANDO UM SUBGRAFO EM UMA TOPOLOGIA RADIAL

Uma proposta relativamente diferente e de interesse em problemas de otimização de sistemas de distribuição radiais consiste em transformar um subgrafo que não é radial em um subgrafo radial e o mais próximo possível do subgrafo analisado. Dessa forma, se uma meta-heurística gera um subgrafo de um grafo conexo e esse subgrafo não é árvore geradora (topologia radial), então descartar esse subgrafo pode não ser uma estratégia adequada e pode ser mais interessante gerar um subgrafo que seja árvore geradora (topologia radial) e que seja muito próximo do subgrafo analisado.

Para mostrar a importância desse tópico, são usados como exemplo os dados do sistema de distribuição de 84 barras mostrado adiante no capítulo de Teste e Resultados. Para entender a importância do tópico, deve-se considerar que uma meta-heurística como a PSO gera um subgrafo de um grafo conexo a partir de topologias radiais conhecidas. Entretanto, como a nova topologia candidata a topologia radial é gerada através de combinação linear de topologias radiais, não existe garantia de que a nova topologia gerada seja radial e também não existe garantia de que o número de arcos dessa topologia seja igual a $(nb - 1)$. Deve-se observar que, no caso mais geral, a cardinalidade (número de topologias) do espaço de busca para o sistema de 84 barras é igual a $2^{84} = 7,92 \times 10^{28}$. Caso seja possível gerar subgrafos com exatamente $(nb - 1)$ arcos, a cardinalidade do espaço de busca é igual a $C_{83}^{96} = 4,04 \times 10^{15}$, sendo que o número de topologias radiais existentes para o sistema de 84 barras é exatamente igual a $3,52 \times 10^{11}$. Todos os valores citados anteriormente são demonstrados em Macedo et al. (2018). Dessa forma, se sempre forem gerados subgrafos com exatamente $(nb - 1)$ arcos, então, do ponto de vista probabilístico, aproximadamente de cada 11.500 subgrafos gerados apenas um subgrafo deve ser radial. Essa observação é muito importante e deveria levar a uma análise mais aprimorada desses tipos de estratégias de otimização. Por esse motivo, uma estratégia mais adequada é que cada subgrafo que não é radial deve ser transformado em radial e de preferência o mais próximo possível do subgrafo analisado.

Na estratégia implementada, devem ser considerados os seguintes fatos:

- Se o subgrafo for topologia radial (árvore geradora), então a estratégia deve identificar esse subgrafo como sendo radial.
- Se o subgrafo tem um número diferente de $(nb - 1)$ arcos, então o subgrafo não é topologia radial. Nesse caso, deve-se gerar uma topologia radial. Os arcos do subgrafo devem ser preferenciais para gerar a topologia radial e, caso necessário, podem ser usados arcos do grafo que não se encontram no subgrafo.

Considerando os fatos mencionados, apenas é necessário processar o algoritmo de Prim com todos os arcos do grafo e com pesos adequadamente escolhidos. Assim, os arcos que se encontram no subgrafo devem ter pesos pequenos e os arcos do grafo que não se encontram no subgrafo devem ter pesos elevados. Esses pesos podem ser gerados aleatoriamente no teste de cada subgrafo gerado. Entretanto, gerar pesos aleatórios de arcos para cada subgrafo gerado

e, considerando que podem ser gerados milhares ou dezenas de milhares de subgrafos, pode acarretar tempos de processamento elevado. Assim, a estratégia sugerida nesta dissertação consiste em montar na fase de pré-processamento dois vetores de pesos, um vetor com pesos pequenos quando o arco está no subgrafo e outro vetor com pesos elevados quando o arco não está no subgrafo. Nessa estratégia, podem ser atribuídos pesos pequenos para os arcos mais importantes e pesos maiores para os arcos menos importantes. Dessa forma, usando a informação da topologia do grafo e os dados de demanda, entre outros, os arcos podem ser ordenados do mais importante para o menos importante. Por exemplo, para o sistema de distribuição de 84 barras e 96 arcos, os vetores de pesos podem ser montados da seguinte forma:

- Ordenar os arcos em ordem de importância com o mais importante em primeiro lugar.
- Armazenar o vetor de pesos menores com os valores inteiros $1, 2, 3, \dots, 96$.
- Armazenar o vetor de pesos maiores com os valores inteiros $1001, 1002, 1003, \dots, 1096$.

Assim, se um arco está no subgrafo, então o peso correspondente é o armazenado no vetor de pesos menores e se o arco não está no subgrafo, então o peso correspondente é o armazenado no vetor de pesos maiores. Finalmente, a estratégia permite identificar se o subgrafo é radial ou não e o número de arcos do grafo usados para transformar um subgrafo em radial.

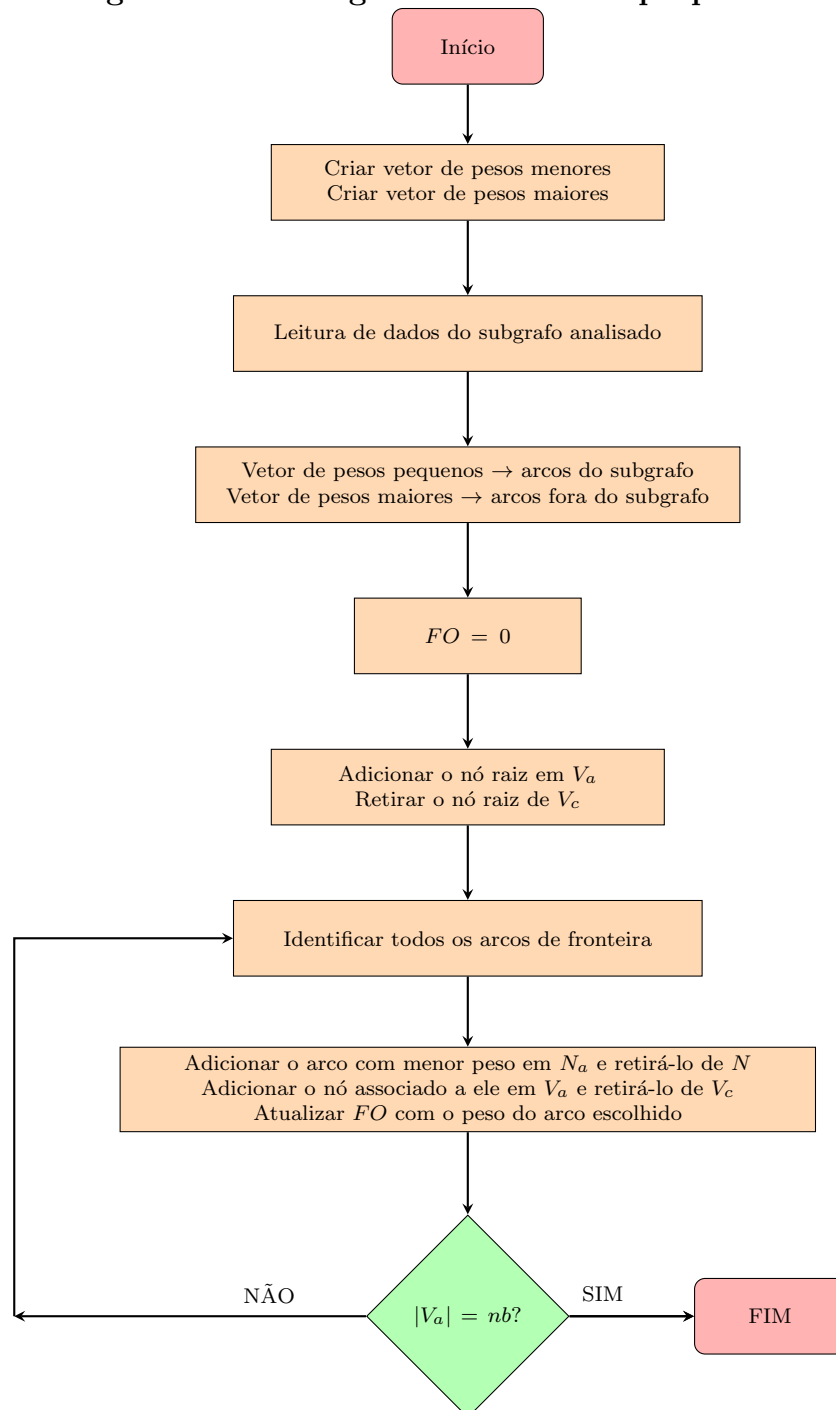
A estratégia proposta, que é apenas uma modificação do algoritmo de Prim de árvore geradora mínima, apresenta a seguinte forma:

1. **Pré-processamento geral:** Criar o vetor de pesos menores e o vetor de pesos maiores para atribuir os pesos aos arcos do grafo. Os vetores podem ser gerados de forma aleatória ou considerando as características do problema.
2. Iniciar o processo de otimização com $V_a = \emptyset$, $V_c = \{1, 2, 3, \dots, nb\}$, $N_a = \emptyset$, $N = \{1, 2, 3, \dots, nr\}$. Para os arcos que se encontram no subgrafo, atribuir o peso armazenado no vetor de pesos menores. Para os arcos do grafo que não se encontram no subgrafo, atribuir o peso armazenado no vetor de pesos maiores.
3. Adicionar o nó raiz (subestação) no conjunto V_a e retirar esse nó do conjunto V_c .
4. Identificar todos os arcos de fronteira correntes. Esses arcos são aqueles que tem um nó no conjunto V_a e o outro nó no conjunto V_c . Identificar o arco de fronteira com o menor peso e o nó ligado a esse arco que pertence a V_c . Adicionar o arco identificado ao conjunto N_a (e retirar esse arco do conjunto N) e o nó identificado deve ser incorporado ao conjunto V_a e retirado do conjunto V_c . Atualizar a função objetivo (f.o.) com o peso do arco escolhido.
5. Se a cardinalidade do conjunto V_a é igual a $|V_a| = nb$, então parar o processo. Caso contrário, voltar ao Passo 4. Os arcos em N_a representam os arcos da topologia radial gerada.

Como mencionado anteriormente, a partir dos arcos usados para gerar a topologia radial é possível conhecer se o subgrafo analisado é radial ou não. Além disso, é possível conhecer o número de arcos do grafo que não estavam presentes no subgrafo não radial e que se encontram presente no subgrafo radial gerado.

No fluxograma da Figura 34 estão ilustrados todos os passos utilizados pela terceira proposta.

Figura 34 - Fluxograma da terceira proposta.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5 TESTES E RESULTADOS

5.1 INTRODUÇÃO

Foram realizados testes usando os dados de cinco sistemas de distribuição muito usados na literatura especializada sobre reconfiguração de sistemas de distribuição:

- Sistema de 14 barras e 16 arcos proposto em Cinvalar et al. (1988).
- Sistema de 33 barras e 37 arcos proposto em Baran e Wu (1989).
- Sistema de 84 barras e 96 arcos proposto em em Chiou et al. (2005).
- Sistema de 136 barras e 156 arcos proposto em Mantovani et al. (2000).
- Sistema de 415 barras e 473 arcos proposto em Franco (2012).

A implementação computacional foi realizada em MATLAB usando um computador com Intel® Core™ i3-3240 de 3,40 GHz e 16,00 GB de RAM.

Para analisar os testes, apresenta-se o tamanho do espaço de busca que pode ser percorrido por cada estratégia de otimização, assim como o número de topologias radiais existente em cada sistema teste. A Tabela 1 mostra essas informações.

Tabela 1 - Tamanho do espaço de busca dos sistemas usados nos testes.

Sistema	nr	2^{nr}	$C(nr, nb - 1)$	ntr	Propor. 1	Propor. 2
14 barras	16	65.536	560	190	345	2,95
33 barras	37	$1,37 \times 10^{11}$	435.897	50.751	$2,7 \times 10^6$	8,59
84 barras	96	$7,92 \times 10^{28}$	$4,04 \times 10^{15}$	$3,52 \times 10^{11}$	$2,25 \times 10^{17}$	11477
136 barras	156	$9,13 \times 10^{46}$	$5,44 \times 10^{25}$	$2,27 \times 10^{18}$	$4,02 \times 10^{28}$	$2,40 \times 10^7$
415 barras	473	$2,44 \times 10^{142}$	$1,08 \times 10^{76}$	$9,30 \times 10^{51}$	$2,62 \times 10^{90}$	$1,16 \times 10^{24}$

Fonte: Adaptado de Macedo et al.(2018).

Na Tabela 1, têm-se que: (1) a coluna 2 mostra o número de linhas (arcos) existentes no sistema teste; (2) a coluna 3 mostra o número de elementos do espaço de busca no espaço 2^{nr} ; (3) a coluna 4 mostra o número de subgrafos que tem $(nb - 1)$ ramos fechados e (4) a coluna 5 mostra o número exato de topologias radiais que existem em cada sistema de distribuição. A coluna 6 mostra a relação (divisão) entre as colunas 3 e 5, assim como a coluna 7 mostra a relação (divisão) entre as colunas 4 e 5. Essas informações são muito importantes. Por exemplo, para os sistema de 14 barras, de cada 3 subgrafos com $(nb - 1)$ ramos fechados que são gerados de forma aleatória apenas um pode ser radial. Para o sistema de 84 barras, caso sejam gerados aleatoriamente subgrafos com $(nb - 1)$ ramos, então de cada conjunto de 11477

subgrafos gerados aleatoriamente apenas um subgrafo deve ser radial. Por outro lado, para o sistema de 415 barras essa relação permite concluir que é muito difícil gerar de forma aleatória uma topologia radial a partir de um subgrafo com $(nb - 1)$ ramos. Adicionalmente, pode-se verificar que é totalmente inviável gerar topologias radiais usando uma estratégia aleatória no espaço 2^{nr} .

5.2 TESTE USANDO O SISTEMA DE 14 BARRAS

A Figura 35 mostra o diagrama unifilar desse sistema elétrico com 14 barras e 16 ramos. Esse sistema foi usado para verificar a capacidade de identificação das estratégias propostas. Dessa forma, foram gerados todos os subgrafos que tem $(nb - 1)$ ramos (ou $nr - nb + 1$ ramos abertos). Portanto, foram gerados os 560 subgrafos e as estratégias apresentadas identificaram, exatamente, 190 topologias radiais. Esse teste significa que as propostas identificam de forma adequada o tipo de subgrafo analisado. Os tempos de processamento para avaliar os 560 subgrafos é muito pequeno e têm os seguintes valores:

- Calculando o determinante das matrizes tipo **A**: 0,014 segundos.
- Usando a primeira proposta: 0,021 segundos.
- Usando a segunda proposta analisando o grafo: 0,031 segundos.
- Usando a segunda proposta analisando a matriz **A**: 0,034 segundos.
- Usando a terceira proposta: 0,025 segundos.

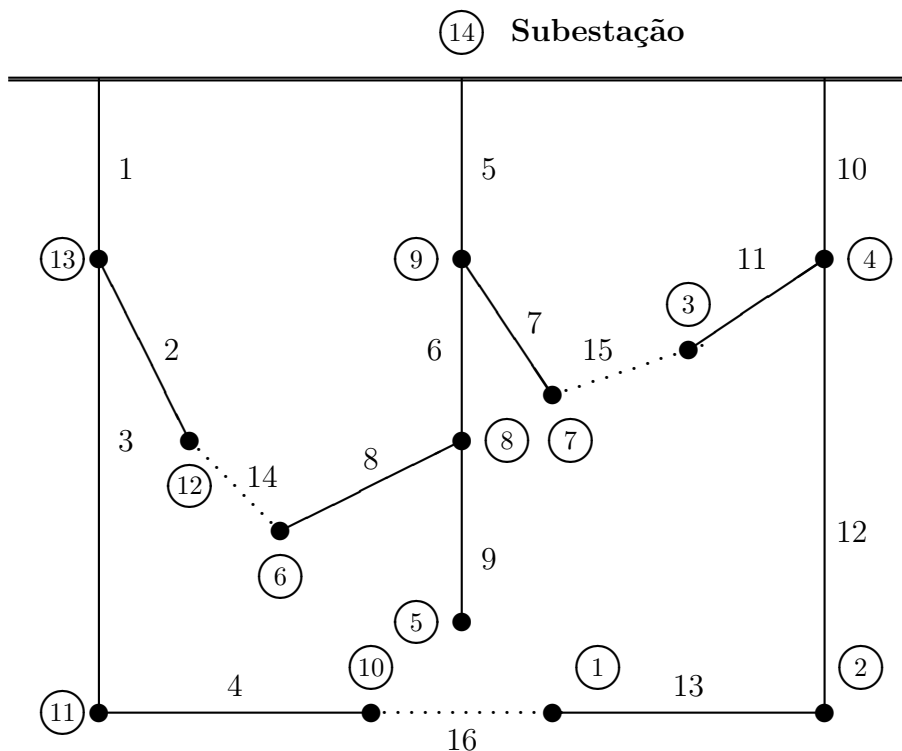
5.3 TESTE USANDO O SISTEMA DE 33 BARRAS

O sistema tem 33 barras e 37 ramos. Para este sistema e os outros sistemas de maior porte, não é mais possível analisar todos os subgrafos que têm $(nb - 1)$ ramos, devido ao elevado número de topologias existentes com $(nb - 1)$ ramos. Portanto, para este e os demais sistemas, foram analisados 10000 subgrafos gerados aleatoriamente, mas com $(nb - 1)$ ramos. A ideia do teste é mostrar que os algoritmos implementados identificam de forma adequada as topologias radiais do conjunto de 10000 topologias com $(nb - 1)$ ramos geradas de forma aleatória. O teste mostrou que 1173 das 10000 topologias são radiais.

Os tempos de processamento para avaliar os 10000 subgrafos são ainda pequenos e têm os seguintes valores:

- Calculando o determinante das matrizes tipo **A**: 0,26 segundos.
- Usando a primeira proposta: 0,15 segundos.
- Usando a segunda proposta analisando o grafo: 0,59 segundos.
- Usando a segunda proposta analisando a matriz **A**: 0,63 segundos.
- Usando a terceira proposta: 0,23 segundos.

Figura 35 - Topologia base do sistema de 14 barras.



Fonte: Adaptado de Civanlar et al. (1988).

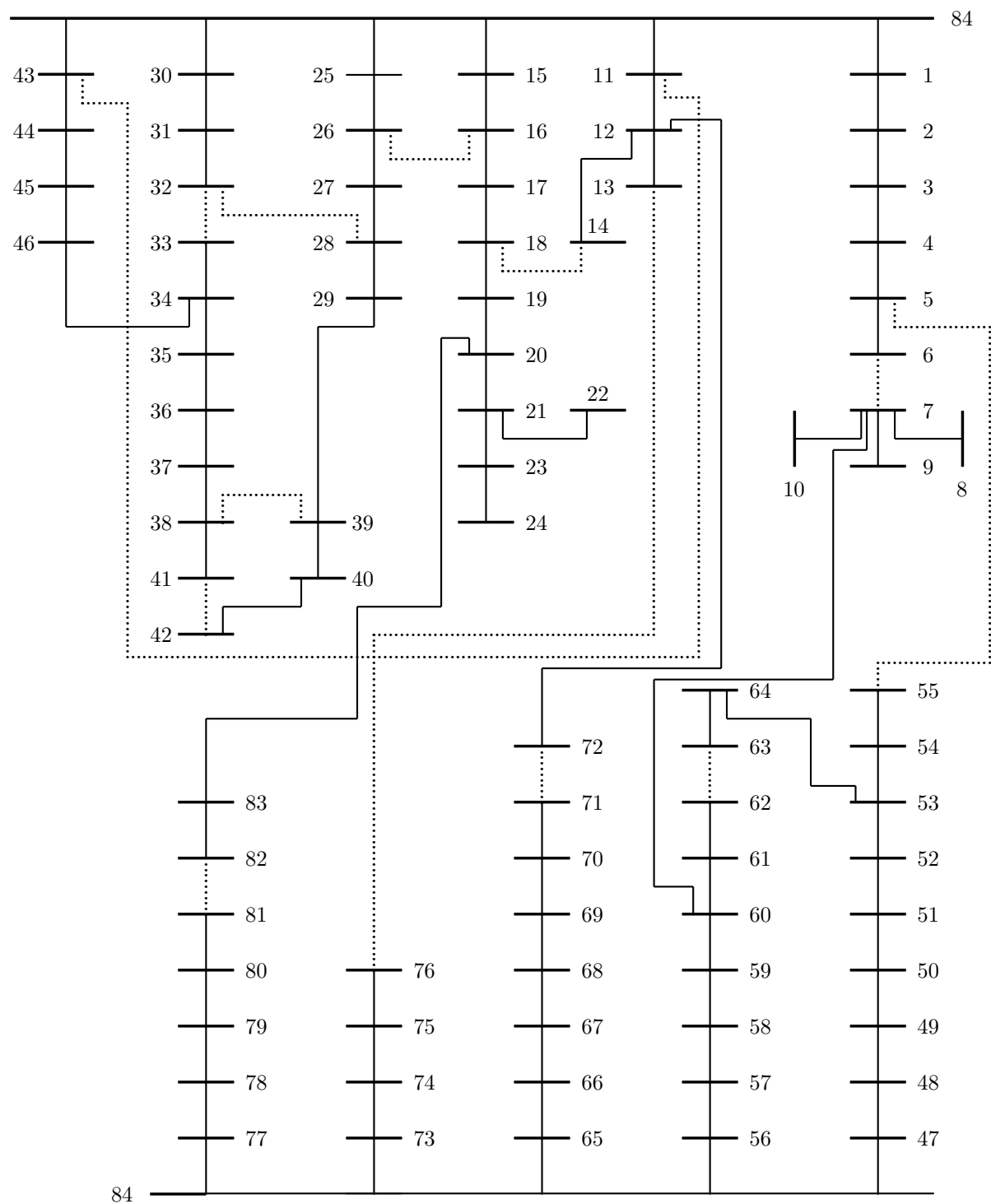
5.4 TESTE USANDO O SISTEMA DE 84 BARRAS

O sistema tem 84 barras e 96 ramos e o diagrama unifilar é mostrado na Figura 36. Para este sistema foram analisados 10000 subgrafos, sendo 5000 subgrafos que representam topologias radiais e 5000 subgrafos gerados aleatoriamente, mas com $(nb - 1)$ ramos. A ideia do teste é mostrar que os algoritmos implementados identificam de forma adequada as topologias radiais geradas deliberadamente de forma radial, além de identificar a quantidade de topologias radiais do conjunto de 5000 topologias com $(nb - 1)$ ramos geradas de forma aleatória. O teste mostrou que 5001 das 10000 topologias são radiais. Em outras palavras, das 5000 topologias com $(nb - 1)$ ramos geradas de forma aleatória, apenas 1 é radial.

Os tempos de processamento para avaliar os 10000 subgrafos são ainda pequenos e têm os seguintes valores:

- Calculando o determinante das matrizes tipo **A**: 1,29 segundos.
- Usando a primeira proposta: 0,31 segundos.
- Usando a segunda proposta analisando o grafo: 2,59 segundos.

Figura 36 - Topologia base do sistema de 84 barras.



Fonte: Adaptado de Chiou et al. (2005).

- Usando a segunda proposta analisando a matriz **A**: 2,71 segundos.
- Usando a terceira proposta: 0,71 segundos.

5.5 TESTE USANDO O SISTEMA DE 136 BARRAS

O sistema tem 136 barras e 156 ramos. Para este sistema foram analisados 10000 subgrafos, sendo 5000 subgrafos que representam topologias radiais e 5000 subgrafos gerados aleatoriamente, mas com $(nb - 1)$ ramos. A ideia do teste é mostrar que os algoritmos implementados identificam de forma adequada as topologias radiais geradas deliberadamente de forma radial, além de identificar a quantidade de topologias radiais do conjunto de 5000 topologias com $(nb - 1)$ ramos geradas de forma aleatória. O teste mostrou que 5000 das 10000 topologias são radiais. Em outras palavras, das 5000 topologias com $(nb - 1)$ ramos geradas de forma aleatória, nenhuma é radial.

Os tempos de processamento para avaliar os 10000 subgrafos são ainda pequenos e têm os seguintes valores:

- Calculando o determinante das matrizes tipo **A**: 2,31 segundos.
- Usando a primeira proposta: 0,66 segundos.
- Usando a segunda proposta analisando o grafo: 5,71 segundos.
- Usando a segunda proposta analisando a matriz **A**: 5,89 segundos.
- Usando a terceira proposta: 1,73 segundos.

5.6 TESTE USANDO O SISTEMA DE 415 BARRAS

O sistema tem 415 barras e 473 ramos. Para este sistema foram analisados 10000 subgrafos, sendo 5000 subgrafos que representam topologias radiais e 5000 subgrafos gerados aleatoriamente, mas com $(nb - 1)$ ramos. A ideia do teste é mostrar que os algoritmos implementados identificam de forma adequada as topologias radiais geradas deliberadamente de forma radial, além de identificar a quantidade de topologias radiais do conjunto de 5000 topologias com $(nb - 1)$ ramos geradas de forma aleatória. O teste mostrou que 5000 das 10000 topologias são radiais. Em outras palavras, das 5000 topologias com $(nb - 1)$ ramos geradas de forma aleatória, nenhuma é radial.

Os tempos de processamento para avaliar os 10000 subgrafos são ainda pequenos e têm os seguintes valores:

- Calculando o determinante das matrizes tipo **A**: 31,15 segundos.
- Usando a primeira proposta: 4,68 segundos.
- Usando a segunda proposta analisando o grafo: 33,02 segundos.

- Usando a segunda proposta analisando a matriz **A**: 34,58 segundos.
- Usando a terceira proposta: 15,49 segundos.

A performance obtida para as 5 propostas usando os sistemas teste apresentados anteriormente é apresentada na Tabela 2 para melhor efeito de visualização dos resultados obtidos. É importante destacar que, apesar da terceira proposta aparentemente realizar uma tarefa diferente das outras propostas (ela devolve uma topologia radial caso a topologia analisada não seja radial), ela foi colocada junta na comparação do tempo de processamento com as outras propostas para mostrar a sua eficiência. Afinal, ela realiza duas tarefas: ela verifica se a topologia é radial (mesma tarefa das demais propostas) e, caso não seja, devolve a topologia radial mais próxima da topologia analisada. E mesmo realizando duas tarefas, a terceira proposta conseguiu tempos de processamento menores que algumas propostas para determinados sistemas teste.

Tabela 2 - Tempo de processamento das propostas analisadas.

Sistema	Prop. Tradicional	Primeira Prop.	Segunda Prop.	Segunda Prop. Alter.	Terceira Prop.
14 barras	0,014s	0,021s	0,031s	0,034s	0,025s
33 barras	0,26s	0,15s	0,59s	0,63s	0,23s
84 barras	1,29s	0,31s	2,59s	2,71s	0,71s
136 barras	2,31s	0,66s	5,71s	5,89s	1,73s
415 barras	31,15s	4,68s	33,02s	34,58s	15,49s

Fonte: Elaborado pelo autor.

6 CONCLUSÃO

Nesta dissertação, foram idealizadas três formas diferentes de analisar se um subgrafo de um grafo conexo é radial ou não. As duas primeiras propostas apenas se limitam a verificar se um subgrafo de um grafo conexo é radial ou não, enquanto a terceira proposta analisa um subgrafo de um grafo conexo e confirma a radialidade desse subgrafo caso ele seja radial ou devolve como resultado a topologia radial mais próxima do subgrafo analisado. Do ponto de vista de otimização de sistemas de distribuição radiais, a terceira proposta é a mais interessante, especialmente para o caso de sistemas de grande porte como os sistemas de 136 barras e 415 barras. Dessa forma, foram idealizadas e implementadas computacionalmente as seguintes propostas:

- Primeira proposta: Usa a lógica do algoritmo de Prim e, portanto, analisando um subgrafo é possível verificar se esse subgrafo é radial ou não. O tempo de processamento é menor que o tempo usado pelo algoritmo de Prim.
- Segunda proposta: Usa a lógica da teoria de grafos. Dessa forma, em cada iteração são retirados os nós terminais e os arcos ligados a esses nós. Esse processo termina retirando todos os nós e todos os arcos e, portanto, identificando o subgrafo como sendo radial ou quando todos os nós restantes têm grau maior ou igual a 2, identificando o subgrafo como sendo não radial. Essa segunda proposta foi implementada de forma alternativa trabalhando diretamente com a matriz \mathbf{A} . Entretanto, essa forma de implementação computacional foi ligeiramente mais lenta.
- Terceira proposta: Neste caso, a proposta é significativamente diferente. Dado um subgrafo, a estratégia responde com a informação de que o subgrafo é radial e, em caso contrário, encontra a topologia radial mais próxima do subgrafo analisado.

As conclusões mais importantes são as seguintes:

- Para sistemas didáticos como o sistema de 14 barras, os tempos de processamento são muito pequenos. Nesse caso, a estratégia tradicional de calcular o determinante da matriz é até ligeiramente menor. Para o sistema de 33 barras, a primeira proposta é mais rápida que as outras propostas, incluindo a proposta tradicional. Além disso, a terceira proposta se torna muito competitiva em relação ao tempo de processamento. Para o sistema de 84 barras, a primeira proposta também é mais rápida que as outras alternativas. Neste caso, a diferença de tempo de processamento para analisar os 10000 subgrafos entre a primeira proposta e a proposta tradicional já é significativa, com tempos de processamento de 0,29 e 1,29 segundos, respectivamente. Os testes para o sistema de 136 barras também mostram uma diferença significativa de tempo de processamento para analisar os 10000 subgrafos entre a primeira proposta e a proposta tradicional, com tempos de processamento de 0,66

e 2,31 segundos, respectivamente. Finalmente, para o sistema de 415 barras, os tempos de processamento para avaliar os 10000 subgrafos entre a primeira proposta e a proposta tradicional levam um tempo de processamento de 4,68 e 31,15 segundos, respectivamente. Deve-se observar que, nesse caso, o tempo de processamento da terceira proposta é menor que o tempo de processamento da estratégia tradicional.

- Para o sistema de 84 barras e os sistemas de maior porte, a estratégia de gerar subgrafos com $(nb - 1)$ ramos de forma aleatória produz a geração de muitas topologias não radiais e, portanto, confirma os indicadores de proporcionalidade mostrados na Tabela 1. Assim, para o sistema de 84 barras foram gerados 5000 subgrafos com $(nb - 1)$ ramos de forma aleatória e apenas uma topologia é radial. Para os sistemas de 136 barras e 415 barras, nenhuma das 5000 topologias com $(nb - 1)$ ramos geradas de forma aleatória é radial. Essas observações teóricas, mostradas na Tabela 1, e experimentais indicam claramente que para sistemas de porte razoável é melhor usar a terceira proposta apresentada neste trabalho.
- A observação anterior pode explicar o motivo pelo qual praticamente todas as propostas existentes na literatura que geram subgrafos através de combinação linear de propostas de solução já conhecidas, como acontece em PSO, DE e WOA, usam sistemas de pequeno porte como sistemas teste.
- Para sistemas de grande porte, a única alternativa viável para essas meta-heurísticas é usar a terceira proposta apresentada nesta dissertação.
- As propostas idealizadas neste trabalho foram implementadas em MATLAB, onde a proposta tradicional de calcular o determinante da matriz \mathbf{A} foi realizada usando um comando do MATLAB. É interessante observar que o MATLAB calcula o determinante de 10000 matrizes de tamanho 416×416 em um tempo de processamento de 31,5 segundos para o sistema de 415 barras. Esse tempo de processamento não é elevado considerando que na sequência devem ser resolvidos 10000 problemas de fluxo de carga. Entretanto, a terceira proposta realiza essa tarefa em 15,49 segundos com a vantagem adicional que devolve topologias radiais.

Como trabalhos futuros podem ser mencionados os seguintes:

1. Procurar por métodos alternativos através de uma pesquisa na teoria de grafos ou idealizar estratégias alternativas.
2. Avaliar e reavaliar a segunda proposta, que apresentou tempos de processamento maiores que o esperado em relação com a primeira proposta.
3. Idealizar formas mais eficientes de geração de novas topologias radiais através de combinação linear de topologias radiais já conhecidas. Essa ideia consiste em mudar radicalmente a forma idealizada pelas meta-heurísticas do tipo PSO, DE e WOA.

REFERÊNCIAS

- ABD ELAZIM, S.M.; ALI, E.S. **Optimal network restructure via improved whale optimization approach**. International Journal Communication Systems, 2020. Vol. 34, pp. 1-15.
- ABDELAZIZ, A.Y.; MOHAMMED, F.M.; MEKHAMER, S.F.; BADR, M.A.L. **Distribution systems reconfiguration using a modified particle swarm algorithm**. Electric Power Systems Research, 2009. Vol. 79, pp. 1521-1530.
- AMANULLA, B.; CHAKRABARTI, S.; SINGH, S.N. **Reconfiguration of power distribution systems considering reliability and power loss**. IEEE Transactions on Power Delivery, 2012. Vol. 27, No. 2, pp. 928-926.
- BARAN, M.E.; WU, F.F. **Network reconfiguration in distribution systems for loss reduction and load balancing**. IEEE Transactions on Power Delivery, Piscataway, 1989. Vol. 4, n. 2, p. 1401-1407.
- BAZARAA, M.; JARVIS, J.; SHERALI, H. **Linear programming and network flows**. Wiley, 2010.
- CIVANLAR, S.; GRAINGER, J.J.; YIN, H.; LEE, S.S.H. **Distribution feeder reconfiguration for loss reduction**. IEEE Transactions on Power Delivery, 1988. Vol.3, pp. 1217-1223.
- CHEN, S.; HU, W.; CHEN, Z. **Comprehensive cost minimization in distribution network using segmented-time feeder reconfiguration and reactive power control of distributed generators**. IEEE Transactions on Power Systems, 2016. Vol. 31, No. 2, pp. 983-993.
- CHIOU, J.P.; CHANG, C.F.; SU, C.T. **Variable scaling differential evolution for solving network reconfiguration of distribution systems**. IEEE Transactions on Power Systems, 2005. Vol. 20, No. 2, pp. 668-674.
- DELBEM, A.C.B.; DE CARVALHO, A.C.; BRETAS, N.G. **Main chain representation for evolutionary algorithms applied to distribution systems reconfiguration**. IEEE Transactions on Power Systems, 2005. Vol. 20, No. 1, pp. 425-436.
- FU, Y.Y.; CHIANG, H.D. **Toward optimal multiperiod network reconfiguration for increasing the hosting capacity of distribution networks**. IEEE Transactions on Power Delivery, 2018. Vol. 33, No. 5, pp. 2294-2304.
- GLOVER, F.; KOCHENBERGER, G. **Handbook of metaheuristics**. Kluwer Academic Publishers, 2003.

GOMES, F.V.; CARNEIRO, S.; PEREIRA, J.L.R.; VINAGRE, M.P.; GARCIA, P.A.N.; ARAUJO, L.R. **A new distribution system reconfiguration approach using optimum power flow and sensitivity analysis for loss reduction.** IEEE Transactions on Power Systems, 2006. Vol. 21, No. 4, pp. 1616-1623.

HIZARCI, H.; DEMIREL, O.; TURKAY, B.E. **Distribution network reconfiguration using for increasing the hosting capacity of distribution time-varying acceleration coefficient assisted binary particle swarm optimization.** Engineering Science and Technology, an International Journal, 2022. Vol. 33, No. 101230, p 10.

LIU, J.; CHIANG, H.D. **Maximizing available delivery capability of unbalanced distribution networks for high penetration of distributed generators.** IEEE Transactions on Power Delivery, 2017. Vol. 32, No. 3, pp. 1196-1202.

MACEDO, L.H. **Reconfiguração de sistemas de distribuição operando em vários níveis de demanda através de uma meta-heurística de busca em vizinhança variável.** Dissertação de Mestrado, UNESP-Ilha Solteira, 2015.

MACEDO, L.H.; FRANCO, J.F.; MAHDAVI, M.; ROMERO, R. **A contribution to the optimization of the reconfiguration problem in radial distribution systems.** Journal of Control Automation and Electrical Systems, 2018. Vol. 29, No. 6, pp 756-768.

MAHDAVI, E. **Reconfiguration of distribution network with simultaneous allocation of distributed generation using the whale optimization algorithm.** Tese de doutorado, UNESP-Ilha Solteira, 2023.

MALEKPOUR, A.R.; NIKNAM, T.; PAHWA, A.; FARD, A.K. **Multiobjective stochastic distribution feeder reconfiguration in systems with wind power generators and fuel cells using the point estimation method.** IEEE Transactions on Power Systems, 2023. Vol. 28, No. 2, pp 1483-1492.

MENDOZA, J.; LOPEZ, R.; MORALES, D.; LOPEZ, E.; DESSANTE, P.; MORAGA, R. **Minimal loss reconfiguration using genetic algorithms with restricted population and addressed operators: Real applications.** IEEE Transactions on Power Systems, 2006. Vol. 21, No. 2, pp. 948-954.

NIKNAM, T.; FARSANI, E.A. **A hybrid self-adaptive particle swarm optimization and modified shuffled frog leaping algorithm for distribution feeder reconfiguration.** Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2010. Vol. 23, pp. 1340-1349.

PRIM, R.C. **Shortest connection networks and some generalizations.** The Bell System Technical Journal, 1957. Vol. 6, pp. 1389-1401.

SALAU, A.O.; GEBRU, Y.W.; BITEW, D. **Optimal network reconfiguration for power loss minimization and voltage profile enhancement in distribution systems.** Heliyon, 2020. Vol. 6, No. e04233, p. 8.

SHIRMOHAMMADI, D.; HONG, H.W.; SEMLYEN, A.; LUO, G.X. **A compensation-based power flow method for weakly meshed distribution and transmission networks.** IEEE Transactions on Power Systems, 1988. Vol. 3, No. 2, pp. 753-762.

SIVANAGARAJU, S.; RAO, J.V.; RAJU, P.S. **Discrete particle swarm optimization to network reconfiguration for loss reduction and load balancing.** Electric Power Components and Systems, 2008. Vol. 36, No. 5, pp. 513-524.

SOUZA, R. **Planejamento da expansão de sistemas de distribuição usando a meta-heurística de busca em vizinhança variável.** Dissertação de mestrado, UNESP-Ilha Solteira, 2011.

SU, C.T.; LEE, C.S. **Network reconfiguration of distribution systems using improved mixed-integer hybrid differential evolution.** IEEE Transactions on Power Delivery, 2003. Vol. 18, No. 3, pp. 1022-1027.

SU, S.Y.; LU, C.N.; CHANG, R.F.; GUTIERREZ-ALCARAZ, G. **Distributed generation interconnection planning: A wind power case study.** IEEE Transactions on Smart Grid, 2011. Vol. 2, No. 1, pp. 181-189.

WANG, W.; HUANG, Y.; YANG, M.; CHEN, G.; ZHANG, Y.; XU, X. **Renewable energy sources planning considering approximate dynamic network reconfiguration and nonlinear correlations of uncertainties in the distribution network.** International Journal of Electrical Power and Energy Systems, 2022. Vol. 139, No. 107791.

WU, H.; DONG, P.; LIU, M. **Distribution network reconfiguration for loss reduction and voltage stability with random fuzzy uncertainties of renewable energy generation and load.** IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2020. Vol. 16, No. 9, pp. 5655-5666.

WU, W.C.; TSAI, M.S. **Application on enhanced integer coded particle swarm optimization for distribution system feeder reconfiguration.** IEEE Transactions on Power Systems, 2011. Vol. 26, No. 3, pp. 1591-1599.

APÊNDICE - DADOS DOS SISTEMAS USADOS EM TESTES

Tabela 3 - Dados dos ramos do sistema de 14 barras.

Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final
1	14	13	5	14	9	9	8	5	13	2	1
2	13	12	6	9	8	10	14	4	14	12	6
3	13	11	7	9	7	11	4	3	15	7	3
4	11	10	8	8	6	12	4	2	16	10	1

Fonte: Adaptado de Civanlar et al. (1988).

Tabela 4 - Dados dos ramos do sistema de 33 barras.

Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final
1	1	2	11	11	12	21	21	22	31	31	32
2	2	3	12	12	13	22	3	23	32	32	33
3	3	4	13	13	14	23	23	24	33	8	21
4	4	5	14	14	15	24	24	25	34	9	15
5	5	6	15	15	16	25	6	26	35	12	22
6	6	7	16	16	17	26	26	27	36	18	33
7	7	8	17	17	18	27	27	28	37	25	29
8	8	9	18	2	19	28	28	29			
9	9	10	19	19	20	29	29	30			
10	10	11	20	20	21	30	30	31			

Fonte: Adaptado de Macedo (2015).

Tabela 5 - Dados dos ramos do sistema de 84 barras.

Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final
1	1	84	25	25	84	49	48	49	73	73	84
2	1	2	26	25	26	50	49	50	74	73	74
3	2	3	27	26	27	51	50	51	75	74	75
4	3	4	28	27	28	52	51	52	76	75	76
5	4	5	29	28	29	53	52	53	77	77	84
6	5	6	30	30	84	54	53	54	78	77	78
7	6	7	31	30	31	55	54	55	79	78	79
8	7	8	32	31	32	56	56	84	80	79	80
9	7	9	33	32	33	57	56	57	81	80	81
10	7	10	34	33	34	58	57	58	82	81	82
11	11	84	35	34	35	59	58	59	83	82	83
12	11	12	36	35	36	60	59	60	84	5	55
13	12	13	37	36	37	61	60	61	85	7	60
14	12	14	38	37	38	62	61	62	86	11	43
15	15	84	39	38	39	63	62	63	87	12	72
16	15	16	40	39	40	64	63	64	88	13	76
17	16	17	41	38	41	65	65	84	89	14	18
18	17	18	42	41	42	66	65	66	90	16	26
19	18	19	43	43	84	67	66	67	91	20	83
20	19	20	44	43	44	68	67	68	92	28	32
21	20	21	45	44	45	69	68	69	93	29	39
22	21	22	46	45	46	70	69	70	94	34	46
23	21	23	47	47	84	71	70	71	95	40	42
24	23	24	48	47	48	72	71	72	96	53	64

Fonte: Adaptado de Macedo (2015).

Tabela 6 - Dados dos ramos do sistema de 136 barras.

Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final
1	136	1	40	39	40	79	78	79	118	104	118
2	1	2	41	40	41	80	79	80	119	118	119
3	2	3	42	40	42	81	80	81	120	119	120
4	3	4	43	42	43	82	81	82	121	136	121
5	4	5	44	43	44	83	81	83	122	121	122
6	5	6	45	43	45	84	83	84	123	122	123
7	6	7	46	45	46	85	136	85	124	123	124
8	6	8	47	46	47	86	85	86	125	123	125
9	8	9	48	47	48	87	86	87	126	125	126
10	8	10	49	48	49	88	86	88	127	125	127
11	10	11	50	49	50	89	88	89	128	127	128
12	10	12	51	48	51	90	89	90	129	127	129
13	10	13	52	51	52	91	90	91	130	129	130
14	13	14	53	52	53	92	91	92	131	130	131
15	13	15	54	53	54	93	92	93	132	131	132
16	15	16	55	54	55	94	93	94	133	132	133
17	136	17	56	52	56	95	94	95	134	133	134
18	17	18	57	56	57	96	95	96	135	134	135
19	18	19	58	57	58	97	93	97	136	7	73
20	19	20	59	58	59	98	97	98	137	9	24
21	20	21	60	59	60	99	136	99	138	15	83
22	20	22	61	60	61	100	99	100	139	38	135
23	22	23	62	47	62	101	100	101	140	25	51
24	22	24	63	136	63	102	101	102	141	50	96
25	24	25	64	63	64	103	101	103	142	55	98
26	25	26	65	64	65	104	103	104	143	62	120
27	26	27	66	65	66	105	104	105	144	66	79
28	27	28	67	66	67	106	105	106	145	79	131
29	28	29	68	67	68	107	106	107	146	84	135
30	29	30	69	68	69	108	107	108	147	91	104
31	28	31	70	68	70	109	108	109	148	90	129
32	31	32	71	70	71	110	107	110	149	90	103
33	32	33	72	71	72	111	110	111	150	92	104
34	33	34	73	70	73	112	111	112	151	92	132
35	31	35	74	73	74	113	112	113	152	96	120
36	35	36	75	136	75	114	108	114	153	110	47
37	36	37	76	75	76	115	114	115	154	126	76
38	35	38	77	76	77	116	109	116	155	128	77
39	136	39	78	77	78	117	116	117	156	135	98

Fonte: Adaptado de Macedo (2015).

Tabela 7 - Dados dos ramos do sistema de 415 barras (continua).

Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final
1	384	68	37	69	65	73	58	20	109	17	18
2	89	67	38	51	54	74	35	38	110	49	45
3	225	224	39	276	264	75	369	370	111	281	235
4	21	72	40	77	78	76	114	115	112	94	119
5	66	384	41	59	69	77	1	92	113	2	14
6	3	20	42	54	24	78	38	41	114	55	23
7	224	222	43	263	264	79	370	348	115	281	282
8	72	74	44	79	83	80	115	112	116	118	84
9	70	382	45	63	61	81	92	2	117	8	9
10	20	51	46	24	29	82	41	43	118	23	28
11	222	221	47	262	263	83	383	251	119	235	234
12	76	72	48	82	80	84	94	113	120	119	122
13	382	66	49	71	63	85	92	87	121	9	3
14	51	52	50	29	34	86	43	48	122	33	55
15	221	220	51	261	262	87	383	370	123	235	236
16	75	81	52	78	79	88	113	114	124	122	118
17	59	70	53	61	60	89	2	17	125	16	19
18	52	56	54	34	47	90	48	50	126	21	50
19	1	273	55	259	261	91	208	277	127	208	236
20	81	76	56	83	90	92	106	95	128	104	105
21	68	85	57	58	62	93	6	7	129	19	8
22	56	27	58	47	21	94	20	33	130	32	44
23	1	274	59	257	259	95	277	278	131	232	349
24	74	75	60	77	59	96	95	112	132	84	104
25	68	93	61	64	67	97	7	3	133	14	16
26	27	31	62	20	44	98	84	33	134	37	32
27	274	275	63	372	239	99	277	279	135	349	207
28	72	73	64	123	1	100	94	111	136	105	108
29	60	58	65	67	68	101	18	5	137	2	13
30	31	40	66	44	25	102	28	36	138	42	37
31	275	209	67	264	265	103	279	280	139	380	229
32	73	80	68	120	94	104	111	106	140	109	108
33	65	71	69	62	64	105	5	6	141	4	12
34	40	47	70	25	35	106	36	45	142	46	42
35	275	276	71	369	347	107	280	281	143	229	228
36	73	77	72	120	123	108	119	121	144	84	109

Fonte: Adaptado de Macedo (2015).

Tabela 7 - Dados dos ramos do sistema de 415 barras (continuação).

Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final
145	12	15	181	99	102	217	132	153	253	158	200
146	46	50	182	187	167	218	181	178	254	133	140
147	232	231	183	314	318	219	85	244	255	403	404
148	110	84	184	138	194	220	203	206	256	202	1
149	15	11	185	96	117	221	136	132	257	124	158
150	21	49	186	167	175	222	171	163	258	140	147
151	232	293	187	301	305	223	352	414	259	368	345
152	103	110	188	155	151	224	379	380	260	373	352
153	13	4	189	117	97	225	57	149	261	199	192
154	39	30	190	175	181	226	163	184	262	129	154
155	293	236	191	310	315	227	414	385	263	345	346
156	107	103	192	126	124	228	206	207	264	352	212
157	11	86	193	98	94	229	57	125	265	199	197
158	49	39	194	160	180	230	160	129	266	137	144
159	221	344	195	310	305	231	414	401	267	345	369
160	84	107	196	1	351	232	1	375	268	352	353
161	86	91	197	116	98	233	127	124	269	159	199
162	53	22	198	180	117	234	129	141	270	144	148
163	304	306	199	129	346	235	401	386	271	400	404
164	97	116	200	1	350	236	208	209	272	353	213
165	10	11	201	57	147	237	128	127	273	197	191
166	30	26	202	169	162	238	131	157	274	154	156
167	378	377	203	90	370	239	401	402	275	404	405
168	84	99	204	350	203	240	209	210	276	353	214
169	3	10	205	153	141	241	125	128	277	159	190
170	26	53	206	162	183	242	130	131	278	156	137
171	304	378	207	382	383	243	402	387	279	405	389
172	101	96	208	351	379	244	209	211	280	1	215
173	10	88	209	147	142	245	200	119	281	159	161
174	22	33	210	183	182	246	141	130	282	143	150
175	309	307	211	66	252	247	402	403	283	405	406
176	100	101	212	203	204	248	211	1	284	215	216
177	88	89	213	142	136	249	200	201	285	161	172
178	21	57	214	160	181	250	157	133	286	150	148
179	314	317	215	384	243	251	403	388	287	406	390
180	102	100	216	204	205	252	375	202	288	216	217

Fonte: Adaptado de Macedo (2015).

Tabela 7 - Dados dos ramos do sistema de 415 barras (continuação).

Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final
289	172	188	325	179	160	361	246	247	397	360	253
290	134	139	326	135	195	362	265	266	398	363	362
291	406	391	327	410	411	363	289	288	399	304	305
292	216	218	328	243	355	364	306	310	400	315	311
293	188	168	329	159	182	365	247	248	401	253	254
294	139	143	330	151	152	366	266	267	402	363	381
295	404	407	331	411	395	367	288	300	403	305	308
296	218	219	332	355	354	368	310	320	404	311	304
297	176	179	333	182	186	369	243	249	405	254	361
298	154	134	334	1	190	370	267	268	406	362	272
299	407	392	335	411	412	371	300	286	407	308	316
300	219	220	336	354	242	372	310	314	408	296	260
301	168	176	337	186	166	373	249	358	409	361	256
302	148	57	338	190	189	374	268	269	410	362	1
303	407	408	339	412	399	375	1	373	411	316	312
304	220	223	340	354	241	376	314	309	412	260	287
305	161	185	341	166	170	377	358	359	413	254	255
306	129	151	342	189	198	378	269	365	414	1	364
307	408	409	343	412	398	379	300	285	415	312	307
308	223	237	344	243	356	380	309	313	416	260	324
309	185	164	345	170	174	381	359	250	417	254	257
310	145	146	346	198	196	382	365	366	418	364	284
311	409	393	347	412	413	383	300	301	419	307	300
312	237	238	348	356	357	384	313	317	420	324	326
313	164	165	349	174	180	385	359	251	421	257	258
314	146	149	350	189	193	386	366	270	422	364	285
315	409	394	351	413	397	387	301	302	423	334	336
316	237	372	352	357	244	388	317	319	424	324	266
317	165	173	353	159	184	389	251	252	425	257	283
318	152	135	354	149	138	390	366	271	426	381	268
319	408	410	355	413	396	391	302	303	427	336	323
320	239	240	356	357	245	392	319	318	428	324	325
321	173	179	357	184	187	393	251	360	429	283	282
322	135	145	358	138	155	394	365	363	430	268	327
323	410	415	359	290	289	395	303	304	431	336	337
324	239	243	360	243	246	396	318	315	432	324	323

Fonte: Adaptado de Macedo (2015).

Tabela 7 - Dados dos ramos do sistema de 415 barras (conclusão).

Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final	Ramo	Barra inicial	Barra final
433	282	234	444	321	299	455	340	341	466	292	290
434	327	328	445	230	231	456	329	330	467	341	368
435	337	338	446	296	295	457	371	374	468	329	333
436	323	322	447	265	367	458	294	292	469	226	225
437	234	233	448	299	296	459	341	342	470	290	291
438	268	297	449	230	228	460	330	331	471	376	230
439	338	339	450	296	298	461	374	227	472	333	334
440	322	321	451	367	340	462	268	292	473	368	343
441	233	376	452	322	329	463	334	335			
442	297	296	453	228	371	464	331	332			
443	339	265	454	295	294	465	374	226			

Fonte: Adaptado de Macedo (2015).