UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Fabrício Rissão Mattos

Um estudo sobre o polinômio de Hilbert-Samuel

São José do Rio Preto
2018

Fabrício Rissão Mattos

Um estudo sobre o polinômio de Hilbert-Samuel

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Nome do Programa, junto ao Programa de Pós-Graduação em Nome do Programa, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPq – Proc. 132997/2016-9

Orientador: Prof. Dr.Parham Salehyan

São José do Rio Preto
2018

Mattos, Fabrício Rissão.
Um estudo sobre o polinômio de Hilbert-Samuel / Fabrício Rissão Mattos. -- São José do Rio Preto, 2018
69 p.

Orientador: Parham Salehyan
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemtica. 2. Polinômios. 3. Hilbert. I. Título.

CDU – 51

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

Fabrício Rissão Mattos

Um estudo sobre o polinômio de Hilbert-Samuel

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Nome do Programa, junto ao Programa de Pós-Graduação em Nome do Programa, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPq – Proc. 132997/2016-9

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Parham Salehyan
Orientador

Profª. Dra. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
Departamento de Matemática Pura - UNESP

Prof. Dr. Behrooz Mirzaii
Departamento de Matemática Pura - USP

São José do Rio Preto
30 de Agosto de 2018

Dedico este trabalho aos meus pais, Marilza Rissão Mattos e Nelson Rodrigues de Mattos, que tanto me apoiaram aos longo desses anos de estudo.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais por sempre estarem ao meu lado me apoiando em todos os sentidos, pois sem eles não teria chegado até aqui.

Agradeço ao Prof. Dr. Parham Salehyan pelo suporte acadêmico essencial para a conclusão desse trabalho e também ao CNPq pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho definimos o polinômio de Hilbert-Samuel cuja descrição desse polinômio aparecem o foco principal do nosso estudo os coeficientes normalizados de Hilbert. A princípio vamos estudar, sobre determinadas condições iniciais, os sinais dos coeficientes que denotaremos por $e_0(q, M)$, $e_1(q, M)$ e $e_2(q, M)$.

Teremos ao final desse trabalho, em formato de comentário, uma condição necessária e suficiente para que todos os coeficientes normalizados de Hilbert sejam nulos.

Palavras-chave: Polinômio de Hilbert-Samuel. Módulo de Cohen-Macaulay. Coeficientes normalizados de Hilbert. Elementos superficiais.

ABSTRACT

In this work we define the Hilbert-Samuel polynomial whose description of this polynomial appear the main focus of our study the normalized Hilbert coefficients. At first, we will study, on certain initial conditions, the signals of the coefficients that we denote by $e_1(q, M)$ *e* $e_2(q, M)$. *We will have at the end of this work, in a comment format, a necessary and sufficient condition so that all normalized Hilbert coefficients are null.*

Keywords: Hilbert-Samuel Polynomial, Cohen-Macaulay Module, Normalized Hilbert-Samuel Coefficients, Superficial Elements.

Sumário

1 Introdução **13**

2 Preliminares **15**

2.1 Anéis Comutativos com Identidade e Ideais 15

2.2 Módulos 19

2.2.1 Sequências Exatas 23

2.2.2 Produto Tensorial de Módulos 25

2.2.3 Anéis e Módulos de Frações 27

2.3 Anéis e Módulos Noetherianos e Artinianos 30

2.4 Decomposição Primária e Módulo de comprimento Finito 35

3 O polinômio de Hilbert-Samuel **39**

3.1 Grupos topológicos, Anéis e Módulos Graduados Associados e o Polinômio de Hilbert-Samuel 39

3.2 Teoria da Dimensão para Módulos Finitamente Gerados 46

3.3 Módulos de Cohen-Macaulay e Elementos Superficiais 51

4 Coeficientes Normalizados do Polinômio de Hilbert-Samuel **57**

4.1 Os coeficientes $e_0(q, M)$ e $e_1(q, M)$ 57

4.2 O coeficiente $e_2(q, M)$ 61

Referências **67**

1 Introdução

Sejam A um anel noetheriano comutativo com identidade, M um $A-$módulo finitamente gerado, q um ideal de A tal que M/qM tenha comprimento finito. Para um inteiro n suficientemente grande o comprimento do $A-$módulo $M/q^{n+1}M$ é expresso por um polinômio com coeficientes racionais, denotado por $P(q, M, n+1)$, chamado de polinômio de Hilbert-Samuel. O polinômio $P(q, M, n+1)$ pode ser escrito como

$$e_0(q,M)\binom{n+d}{d}-e_1(q,M)\binom{n+d-1}{d-1}+\cdots+(-1)^{d-1}e_{d-1}(q,M)\binom{n+1}{1}+(-1)^d e_d(q,M),$$

onde d é o grau do polinômio e os $e_i(q, M)$ para todo $i = 1, \ldots, d$ são chamados de coeficientes de Hilbert normalizados.

Sobre a hipótese de (A, m) ser um anel local noetheriano de Cohen-Macaulay e q ser um ideal $m-$primário, Northcott mostrou em [11] a seguinte inequação

$$e_1(q, M) \geq e_0(q, M) \geq l(A/q) \geq 0$$

e também deu condições para que $e_1(q, M)$ seja nulo.

Sobre as mesmas condições Naritta mostrou em [10] que

$$e_2(q, M) \geq 0$$

e deu condições para que $e_2(q, M)$ seja nulo.

Neste trabalho vamos mostrar as mesmas inequações dadas por Northcott e Narita, mas assumindo que M seja um módulo de Cohen-Macaulay sobre um anel noetheriano comutativo e com identidade, mas não necessariamente local. Assumiremos, sem perda de generalidade, a condição de A ser um anel local e nessas condições teremos meios para relacionar, da maneira que queremos, os coeficientes de Hilbert normalizados.

Dividimos este trabalho em três capítulos, onde no primeiro apresentamos definições e resultados da teoria de álgebra comutativa que julgamos necessário para melhor entender os capítulos seguintes. Começamos com a definição de anel comutativo com identidade e prosseguimos com a definição de ideais. Através de exemplos apresentamos as classes de ideais que utilizamos ao longo do trabalho como: ideal quociente, ideais primos, ideais maximais, radical de um ideal e etc. Apresentamos também o conceito de módulo, sequências exatas de módulos, produto tensorial de módulos, anéis e módulos artinianos e noetherianos, a existência e unicidade da decomposição primária de módulos e os conjuntos suporte e associados a um módulo. Dentre os conceitos fornecidos no primeiro capítulo salientamos a importância do comprimento $l(M)$, que indica o menor comprimento de uma série de composição de um módulo M sobre um anel A, e do fato de $l(M)$ ser uma função aditiva sobre a classe de todos os $A-$módulos de comprimento finito.

No capítulo 2 apresentamos algumas noções de grupos topológicos, anéis e módulos graduados associados, introduzimos a definição de dimensão para um $A-$módulo M e apresentamos o polinômio de Hilbert-Samuel. Seguimos com a teoria da dimensão sobre módulos finitamente gerados e finalizamos o capítulo 2 com a definição e propriedades de elementos superficiais e módulos de Cohen-Macaulay. Dentre os teoremas deste capítulo destacamos os teoremas de Hilbert-Serre e Krull-Chavalley-Samuel.

Por fim o capítulo 3 apresentamos dois teoremas que fornece uma relação dos coeficientes $e_1(q, M)$ e $e_2(q, M)$. Os resultados que estabelece a relação desses coeficientes dependem e muito dos resultados vistos no capítulo 2 e por sua vez esses resultados dependem de que A seja um anel local noetheriano e que seu corpo residual seja infinito, porém no capítulo 3 veremos como contornar esse problema, ou seja, como estabelecer a relação dos coeficientes tendo como hipótese que o A não é necessariamente local e o corpo residual de A não sendo infinito.

2 Preliminares

Neste capítulo iremos expor definições e resultados sobre a teoria de álgebra comutativa que julgamos necessário para melhor entender os capítulos seguintes, por conta disso não será tratado na íntegra todo o conteúdo de álgebra comutativa.

2.1 Anéis Comutativos com Identidade e Ideais

Definição 2.1.1. Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto onde estejam definidas duas operações $+ : A \times A \to A$ e $\cdot : A \times A \to A$, chamadas de adição e multiplicação respectivamente, tais que:

i) A é um grupo abeliano com respeito à adição.

ii) A multiplicação é associativa ($(xy)z = x(yz)$) e distributiva sobre a adição a direita e a esquerda ($x(y+z) = xy + xz, (x+y)z = xz + yz$).

iii) $xy = yx, \forall\ x, y \in A$

iv) Existe um elemento pertencente ao conjunto A denotado por 1 tal que $x1 = 1x = x$ para todo $x \in A$.

v) Um elemento $x \in A$ é chamado de divisor de zero se existe $0 \neq y \in A$ tal que $xy = 0$, onde 0 é o elemento neutro da adição.

vi) Um elemento $x \in A$ é inversível se existe um elemento $y \in A$ tal que $xy = 1$.

Se no conjunto A se verifica $i)$ e $ii)$, então A é dito ser um anel. Se além disso em um anel A se verifica $iii)$ e $iv)$, então A é dito ser um anel comutativo com unidade. Um anel $A \neq 0$ cujo único divisor de zero é o elemento nulo é chamado domínio integral. Um anel comutativo com unidade é chamado de corpo quando todo elemento não nulo é inversível.

Proposição 2.1.1. Todo corpo K é um domínio integral.

Demonstração: Sejam $x, y \in K$ tais que $xy = 0$ e suponha que $x \neq 0$, então existe $w \in K$ tal que $xw = 1$. Logo $y = y1 = y(xw) = (yx)w = 0w = 0$. Portanto K não possui divisores de zero, ou seja, K é um domínio integral.

$\square$

A recíproca da proposição 2.1.1 é falsa, pois basta tomar como contra exemplo o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

Ao longo deste trabalho a palavra "anel" sempre denotará um anel comutativo com unidade.

Observação: Cada $x \in A$ tem um inverso aditivo denotado por $-x$. Note que se $0 = 1$, então $A = \{0\}$, pois

$$x = x1 = x0 = 0 \ \forall \ x \in A$$

Seja S um subconjunto não vazio de um anel A, se S for um anel com as operações de adição e multiplicação de A dizemos então que S é um subanel de A.

Observação: Seja $S \subseteq A$ um subanel, então a unidade de A pode ser diferente da unidade de S. Para constatar isso basta tomar como exemplo o conjunto das matrizes $M_2(\mathbb{Z}_2)$ que é um anel comutativo com unidade e $S = \left\{0, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \subseteq M_2(\mathbb{Z}_2)$.

Definição 2.1.2. Sejam A um anel e $I \subseteq A$. Dizemos que I é um ideal de A, denotamos por $I \trianglelefteq A$, quando I for um subgrupo aditivo de A e para todo $a \in A$ e $x \in I$, $ax \in I$.

Exemplo 2.1.1. Sejam A um anel e $a \in A$. O conjunto $(a) := \{xa \mid x \in A\}$ é o menor ideal de A que contém a e é chamado de ideal principal gerado por a.

Exemplo 2.1.2. Sejam A um anel e $I \trianglelefteq A$, então o conjunto $\sqrt{I} := \{x \in A \mid x^n \in I \text{ para algum } n > 0\}$ é um ideal de A chamado radical de I. Sejam $x, y \in \sqrt{I}$, então x^m e y^n pertencem a I para algum m e n inteiros positivos. Pelo teorema binomial $(x+y)^{m+n-1} = \sum_{k=0}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} x^{m+n-1-k}\, y^k$. Se considerarmos $r = m+n-1-k$ e $s = k$, então as desigualdades $r < m$ e $s < n$ não ocorrem simultaneamente. Se $r < m$, então $s = m+n-1-r > m+n-1-m = n-1$ e portanto $y^s = y^n y^{s-n} \in I$. Analogamente, quando $s < n$, $x^r = x^m x^{r-m} \in I$ e portanto podemos concluir que $(x+y)^{m+n-1} \in I$ e além disso $ax \in \sqrt{I}$ para todo $a \in A$ e $x \in \sqrt{I}$.

Exemplo 2.1.3. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Vamos denotar por $\mathbb{K}[x]$ o conjunto de todos os polinômios sobre $\mathbb{K}$ na variável x, ou seja, um elemento $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ é da forma $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, onde $a_i \in \mathbb{K}$. Chamaremos os $a_i' s$ de coeficientes, então quando todos os coeficientes forem nulos indicaremos $f(x)$ por 0 e o chamaremos de polinômio identicamente nulo ou simplesmente de polinômio nulo. O número natural n de $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ é chamado grau do polinômio $f(x)$ e denotaremos $\deg f = n$, além disso a_n é chamado coeficiente líder de $f(x)$. Usando a definição de soma e multiplicação usual para polinômios o conjunto $\mathbb{K}[x]$ é domínio integral. Seguindo esse raciocínio podemos construir um outro domínio integral o conjunto $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ dos polinômios sobre $\mathbb{K}$ em n variáveis.

Definição 2.1.3. Seja A um anel. Um elemento $x \in A$ é chamado de nilpotente se possui alguma potência nula, ou seja, se $x^n = 0$ para algum $n > 0$.

Exemplo 2.1.4. Seja A um anel. O conjunto $\sqrt{0} = \{x \in A \mid x^n = 0 \text{ para algum } n > 0\}$ é um ideal de A chamado nilradical de A. A verificação dessa afirmação é inteiramente análoga ao exemplo 2.1.2.

Sejam A um anel e $I \trianglelefteq A$. Definimos a seguinte relação

$$x \equiv y\,(mod\, I) \Leftrightarrow x - y \in I,$$

onde $x, y \in A$. A relação congruência módulo I define uma relação de equivalência. O conjunto $\dfrac{A}{I} = \{\overline{x} = x + I \mid x \in A\}$ é chamado de conjunto quociente de A pelo ideal I. Podemos dar uma estrutura de anel para o conjunto A/I definindo

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y} \text{ e } \overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy}.$$

Note que as operações em A/I dadas acima estão bem definidas, ou seja, não dependem da escolha dos representantes de classes x, y.

Exemplo 2.1.5. Sejam I, J ideais em um anel A. O conjunto definido por

$$I : J = \{x \in A \mid xJ \subseteq I\}$$

é um ideal em A chamado ideal quociente, onde $xJ = \{x.u \mid u \in J\}$.

Observação: Em particular $(0 : J)$ é chamado de anulador de J e também é denotado por $\mathrm{Ann}(J)$. Se $J = (x)$, então denotamos $Ann(x)$ para $x \in A$.

Definição 2.1.4. Sejam A um anel e $p \trianglelefteq A$. O ideal p é primo se

i) $p \neq A$

ii) $xy \in p \Rightarrow x \in p \,\text{ou}\, y \in p$

Definição 2.1.5. Seja A um anel. O conjunto $\mathrm{Spec}\, A = \{p \mid p \subset A$ é um ideal primo $\}$ é chamado espectro de A.

Definição 2.1.6. Sejam A um anel e $I \trianglelefteq A$, então $V(I) = \{p \in \mathrm{Spec}\, A \mid p \supset I\}$.

Definição 2.1.7. Sejam A um anel e $m \trianglelefteq A$. O ideal m é maximal se

i) $m \neq A$

ii) se $m \subset I \subset A$ para algum ideal I de $A \Rightarrow I = m$ ou $I = A$.

Proposição 2.1.2. Sejam A um anel, p e m ideais de A, então:

a) p é primo se, e somente se, $\dfrac{A}{p}$ é um domínio integral.

b) m é maximal se, e somente se, $\dfrac{A}{m}$ é corpo.

Demonstração: a) Sejam $\overline{x}, \overline{y} \in \dfrac{A}{p}$ tais que $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{0}$ e suponha, sem perda de generalidade, que $\overline{y} \neq \overline{0}$. Como $xy \in p$ e $y \notin p$, então $x \in p$, ou seja, $\overline{x} = \overline{0}$. Portanto $\dfrac{A}{p}$ é domínio integral. Reciprocamente, sejam $x, y \in A$ tais que $xy \in p$. Como $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy} = 0$ e $\dfrac{A}{p}$ é domínio, segue que $\overline{x} = 0$ ou $\overline{y} = 0$, i.e., $x \in p$ ou $y \in p$. Portanto p é primo.

b) Seja $\overline{0} \neq \overline{x} \in \dfrac{A}{m}$, ou seja, $x \notin m$. Logo pela maximalidade de m temos que o ideal $(x) + m$ coincide com o anel A e como $1 \in A$, segue que existem $a \in A$ e $n \in m$ tais que $1 = xa + n$. Assim $\overline{1} = 1 + m = xa + m = \overline{x}\,\overline{a}$. Portanto $\overline{x}$ é unidade em $\dfrac{A}{m}$. Reciprocamente seja J um ideal em A que contém m, então o quociente $\dfrac{J}{m}$ é um ideal em $\dfrac{A}{m}$. Como $\dfrac{A}{m}$ é corpo segue que $\dfrac{J}{m}$ ou é o ideal nulo em $\dfrac{A}{m}$ ou coincide com o próprio anel $\dfrac{A}{m}$, porém se $\dfrac{J}{m}$ for o ideal nulo, então $J = m$ que é uma contradição. Portanto $\dfrac{J}{m} = \dfrac{A}{m}$, ou seja, $J = A$.

□

Proposição 2.1.3. Sejam A um anel, $p, p_1, \dots, p_n$ ideais primos e $I, I_1, \dots, I_n$ ideais quaisquer em A. Então

i) Se $I \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} p_i$, então $I \subseteq p_i$ para algum i.

ii) Se $p \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} I_i$, então $p \supseteq I_i$ para algum i. Se $p = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$, então $p = I_i$ para algum i.

Demonstração: Ver [1] Prop. 1.11, pág. 8.

□

Teorema 2.1.1. Todo anel A não nulo possui pelo menos um ideal maximal.

Demonstração: Ver [1] Teo. 1.3, pág. 3.

□

Corolário 2.1.1. Seja A um anel e $I \neq A$ um ideal, então existe um ideal maximal em A contendo I.

Demonstração: Basta considerar o anel quociente $\dfrac{A}{I}$ e aplicar o teorema 2.1.1.

□

Como consequência direta do corolário 2.1.1 temos que todo elemento $x \in A$ que não é unidade em A está contido em um ideal maximal de A.

Proposição 2.1.4. O conjunto $\sqrt{0}$ de um anel A é a interseção de todos ideais primos de A.

Demonstração: Começaremos provando que se $x \in \sqrt{0}$, então $x \in p$ para todo ideal primo p de A. Seja $x \in \sqrt{0}$, então $x^n = 0$ para algum $n > 0$. Assim $x^n = 0 \in p$ para todo ideal primo p em A. Como $x^n = x\,x^{n-1} \in p$, então $x \in p$ ou $x^{n-1} \in p$. Se $x \in p$ mostramos o que queríamos, se $x^{n-1} \in p$, então $x^{n-1} = x\,x^{n-2} \in p$ e repetimos o argumento anterior e como esse processo é finito concluímos que $x \in p$. Mostraremos agora que se x pertence a todo ideal primo em A, então x é nilpotente. Vamos mostrar por contraposição. Suponha que x não seja nilpotente, i.e., $x^n \neq 0$ para todo $n > 0$. Considere $\sum$ conjunto de todos ideais p em A tais que $\forall\, n > 0 \Rightarrow x^n \notin p$. Temos que $\sum \neq \emptyset$, pois $0 \in \sum$, então aplicando o Lema de Zorn, $\sum$ tem um elemento maximal. Seja m esse ideal maximal. Mostremos que m é primo. Sejam $a, b \in A$ tais que

$a, b \notin m$, então os ideais $m + (a)$, $m + (b)$ contém propriamente m logo não pertencem a $\sum$. consequentemente $x^k \in m + (a)$ e $x^n \in m + (b)$ para algum k, n. Segue que $x^{k+n} \in m + (ab)$, então o ideal $m + (ab)$ não está em $\sum$ e portanto $ab \notin m$. Assim tem um ideal primo m tal que $x \notin m$, ou seja, x não pertence a nenhum ideal primo de A.

□

Definição 2.1.8. Um anel, não necessariamente comutativo e com unidade, que possui apenas um ideal maximal é chamado local e se o anel possuir apenas uma quantidade finita de ideais maximais, dizemos que o anel é semilocal.

Definição 2.1.9. O radical de Jacobson (denotado por $\mathrm{rad}(A)$) de A é a interseção de todos os ideais maximais de A.

A proposição a seguir nos dá uma outra caracterização do radical de Jacobson.

Proposição 2.1.5. Seja A um anel, então $x \in \mathrm{rad}(A)$ se, e somente se, $1 - xy$ é uma unidade em A para todo $y \in A$, ou seja, é invertível em A.

Demonstração: Suponha que $1 - xy$ não é unidade em A, logo pelo corolário 2.1.1 $(1 - xy)$ pertence a algum ideal maximal digamos m. No entanto por hipótese $x \in m$ consequentemente $xy \in m$, assim $1 \in m$ que é uma contradição, pois m é maximal. Reciprocamente suponhamos que $x \notin \mathrm{rad}(A)$, ou seja, $x \notin m$, para algum ideal maximal m. Pela maximalidade de m temos que $(x) + m = A$, então $1 - xy \in m$, onde $y \in A$. Portanto $1 - xy$ não é unidade em A.

□

Definição 2.1.10. Sejam A e B dois aneis, um homomorfismo de anéis é uma aplicação f do anel A sobre o anel B tal que f respeita a adição, a multiplicação e elemento identidade. Se $f : A \to B$ é um homomorfismo bijetivo dizemos que f é um isomorfismo de A sobre B e neste caso os anéis são isomorfos e denotamos $A \simeq B$.

Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis, então se $I \trianglelefteq A$ não necessariamente $f(I) \trianglelefteq B$, por exemplo tome $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1}$ e pegue qualquer ideal, não nulo, em $\mathbb{Z}$ e como $\mathbb{Q}$ é corpo seus únicos ideais são os triviais. Porém o ideal gerado por $f(I)$ em B chamado extensão de I e denotado por I^e é um ideal em B. Em contra partida para todo ideal J em B o conjunto $f^{-1}(J)$ chamado contração de J e denotado por J^c é um ideal em A.

2.2 Módulos

Definição 2.2.1. Seja A um anel. Um A-módulo é um par (M, μ), onde M é um grupo abeliano e $\mu : A \times M \to M$ uma aplicação onde a notação $\mu(a, x)$ será simplificada por ax tal que para todo $a, b \in A$ e $x, y \in M$ tem-se que

i) $a(x + y) = ax + ay$;

ii) $(a + b)x = ax + bx$;

iii) $(ab)x = a(bx)$;

iv) $1x = x$;

Exemplo 2.2.1. Por definição todo anel A e todo ideal I em A pode ser visto como A-módulo.

Definição 2.2.2. Sejam M e N dois A-módulos. Uma aplicação $f : M \to N$ é um homomorfismo de A-módulo (ou A-linear) se

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(ax) = af(x)$$

Definição 2.2.3. Seja $f : M \to N$ um homomorfismo de A-módulo. Os conjuntos $\ker(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ e $\operatorname{Im}(f) = \{y \in N \mid f(x) = y \text{ para algum } x \in M\}$ são chamados, respectivamente, de kernel (ou núcleo) e Imagem da aplicação f.

Definição 2.2.4. Seja M um A-módulo. Um submódulo M' de M é um subgrupo de M que é fechado sobre a multiplicação por elementos de A.

Sejam M um A-módulo e M' um submódulo de M. O conjunto $\dfrac{M}{M'}$ é chamado conjunto quociente de M por M', onde $\overline{x} \in \dfrac{M}{M'}$ é tal que $\overline{x} = \{x + M' \mid x \in M\}$. Podemos definir a soma em M/M' da seguinte maneira $\overline{x}+\overline{y} = \overline{x+y}$ tal que o conjunto $\dfrac{M}{M'}$ tenha estrutura de grupo abeliano. Considere a aplicação $\overline{\mu} : A \times \dfrac{M}{M'} \to \dfrac{M}{M'}$ definida por $\overline{\mu}(a, \overline{x}) \mapsto ax + M'$, então $\dfrac{M}{M'}$ tem estrutura de A-módulo. Vamos mostrar que a aplicação $\overline{\mu}$ está bem definida. Considere $(a, \overline{x})$ e $(b, \overline{y})$ elementos em $A \times \dfrac{M}{M'}$ tais que $(a, \overline{x}) = (b, \overline{y})$, ou seja, $a = b$ e $\overline{x} = \overline{y}$, logo $x - y \in M'$ e com isso existe $m' \in M'$ tal que $x = y + m'$, assim $ax = ay + am'$, isto é, $ax - by \in M'$. Portanto $ax + M' = by + M'$.

Exemplo 2.2.2. Seja A um anel, definimos IM, onde I é um ideal em A e M um A-módulo, como o conjunto de todas as somas finitas $\sum a_i x_i$ com $a_i \in I$ e $x_i \in M$. Esse conjunto forma um submódulo de M.

Exemplo 2.2.3. Em um homomorfismo de A-módulos $f : M \to N$ o $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ são submódulos de M e N, respectivamente.

Seja $f : M \to N$ um homomorfismo de A-módulo, então a aplicação $\overline{f} : \dfrac{M}{\ker f} \to \operatorname{Im}(f)$ definida por $x + \ker f \mapsto f(x)$ é um homomorfismo bijetivo induzido por f, ou seja, $\dfrac{M}{\ker f} \simeq \operatorname{Im} f$. Esse resultado é chamado primeiro teorema do isomorfismo.

Proposição 2.2.1. i) Se $L \supseteq M \supseteq N$ são A-módulos, então $(L/N)/(M/N) \simeq L/N$.

ii) Se M_1, M_2 são submódulos de M, então $(M_1 + M_2)/M_1 \simeq M_2/(M_1 \cap M_2)$.

Demonstração: Ver [1]. Prop. 2.1, pág. 19.

□

Observação: Os resultados dos itens $i)$ e $ii)$ da proposição 2.2.1 são chamados segundo e terceiro teorema do isomorfismo, respectivamente.

Definição 2.2.5. Analogamente ao exemplo 2.1.5 podemos definir o ideal quociente para submódulos de M. O conjunto $\operatorname{Ann}(M) = \{x \in A \mid xM = 0\}$ é chamado anulador do $A-$módulo M.

Definição 2.2.6. Seja M um módulo sobre um anel A. Um ideal primo p é dito ser associado a M se existe $x \in M$ tal que $p = \operatorname{Ann}(x)$. O conjuntos dos ideais primos associados a M é denotado por $\operatorname{Ann}(M)$.

Observação: Como $\operatorname{Ann}(0) = A$, então na definição 2.2.6 se exclui a possibilidade $x = 0$. Note que se $\operatorname{Ass}(M) \neq \emptyset$, então existe um submódulo N de M tal que $N \simeq \dfrac{A}{p}$, onde $p \in \operatorname{Ann}(M)$. Para constatar isso basta tomar a aplicação $\varphi : A \to M$ definida por $a \mapsto ax$ ($\operatorname{Im}\varphi = Ax = N$), onde $\operatorname{Ann}(x) = p$ e aplicar o primeiro teorema do isomorfismo.

Proposição 2.2.2. Sejam M um módulo sobre um anel A e $F = \{\operatorname{Ann}(x) \mid x \in M\}$. Então todo elemento maximal de F é um ideal primo associado a M.

Demonstração: Sejam $\operatorname{Ann}(x)$ um elemento maximal de F e $z, y \in A$ tais que $zy \in \operatorname{Ann}(x)$. Suponha que $y \notin \operatorname{Ann}(x)$, ou seja, $xy \neq 0$. Temos que $\operatorname{Ann}(x) \subseteq \operatorname{Ann}(xy) \neq A$, pela maximalidade de $\operatorname{Ann}(x)$ segue que $\operatorname{Ann}(x) = \operatorname{Ann}(xy)$ e portanto $z \in \operatorname{Ann}(x)$.

□

Proposição 2.2.3. Seja M um A-módulo, então para todo $0 \neq x \in M$, tal que $\operatorname{Ann}(x) = p$ tem-se

$$0 \neq y \in Ax \Rightarrow \operatorname{Ann}(y) = p$$

Em particular $Ass\left(\dfrac{A}{p}\right) = \{p\}$ onde $p \in \operatorname{Spec}A$

Demonstração: Seja $b \in \operatorname{Ann}(y)$ e já que $y \in Ax$, então $by = bax = 0$. Como $ax \neq 0$ e $ba \neq 0$ segue que $bx = 0$, ou seja, $b \in \operatorname{Ann}(x) = p$. Agora se $b \in p$, então $by = bax = 0$ e assim $b \in \operatorname{Ann}(y)$. Pela última observação que fizemos concluímos que $Ax \simeq \dfrac{A}{p}$.

□

Definição 2.2.7. Sejam M um A-módulo, $x \in M$ e Λ um conjunto de índices. O conjunto $(x) = Ax = \{ax \mid a \in A\}$ é um submódulo de M. Se M for escrito como uma combinação linear de $\{x_i\}_{i\in\Lambda}$ com uma quantidade finita de elementos não nulos, então o conjunto formado pelos $x_i's$ é chamado conjunto gerador de M, i.e., cada elemento de M pode ser escrito (não necessariamente de maneira única) como uma combinação linear dos $x_i's$ com coeficientes em A. Um A-módulo M é finitamente gerado se existe um conjunto finito de geradores.

Sejam M, N A-módulos, então o conjunto $M \oplus N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$ tem estrutura de A-módulo se definirmos adição e multiplicação por escalar da seguinte maneira

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$a(x, y) = (ax, ay)$$

Podemos definir $\displaystyle\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in M_i\}$ onde uma quantidade finita de $x_i's$ são não nulos.

Definição 2.2.8. Um A-módulo M é livre quando quando M é isomorfo a uma A-módulo da forma $\bigoplus_{i\in I} M_i$, onde cada $M_i \simeq A$ (como uma A-módulo). Um A-módulo livre é finitamente gerado quando é isomorfo a $A\oplus\cdots\oplus A$ (n parcelas) que denotamos por A^n.

Sejam M um A-módulo finitamente gerado e $\{x_1,\ldots,x_n\}$ o conjunto gerador de M. Defina $\phi : A^n \to M$ por $\phi(a_1,\ldots,a_n) = a_1x_1+\cdots+a_nx_n$. Então ϕ é um homomorfismo sobrejetor de A-módulo e pelo primeiro teorema do isomorfismo $M \simeq \dfrac{A^n}{\ker(\phi)}$. Com isso um A-módulo M finitamente gerado cujo conjunto gerador $\{x_1,\ldots,x_n\}$ é linearmente independente sobre A é uma outra caracterização para um A-módulo livre finitamente gerado.

Proposição 2.2.4. Sejam M um A-módulo finitamente gerado, I um ideal em A e ϕ um endomorfismo de M tal que $\phi(M)\subseteq IM$. Então ϕ satisfaz uma equação da forma

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \cdots + a^n = 0,$$

$a_i \in I$.

Demonstração: Ver [4] Teo. 2.7, pág. 43.

$\square$

Corolário 2.2.1. Sejam M um A-módulo finitamente gerado e I um ideal em A tal que $IM = M$. Então existe $x \equiv 1(\mod I)$ tal que $xM = 0$.

Demonstração: Ver [1] Coro. 2.5, pág. 21.

$\square$

Teorema 2.2.1 (Lema de Nakayama)**.** Sejam M um A-módulo finitamente gerado e I um ideal contido no radical de Jacobson de A. Então $IM = M$ implica que $M = 0$.

Demonstração: Pelo corolário 2.2.1 existe $x \equiv 1(\mod \mathrm{rad}(A))$ tal que $xM = 0$. Então pela proposição 2.1.5 $1+(x-1)$ é uma identidade em A, ou seja, existe $x^{-1}\in A$ tal que $xx^{-1} = 1$. Portanto $M = x^{-1}xM = 0$.

$\square$

Exemplo 2.2.4. Sejam $I \trianglelefteq A$, M um A-módulo e N um submódulo de M, então $I\left(\dfrac{M}{N}\right) = \dfrac{IM+N}{N}$. De fato, seja $x \in I\left(\dfrac{M}{N}\right)$, então $x = \sum a_i\overline{m}_i$, onde $a_i \in I$ e $\overline{m}_i \in \dfrac{M}{N}$. Logo $x = a_1(m_1+N)+\cdots+a_n(m_n+N) = (\sum a_im_i)+N \in \dfrac{IM+N}{N}$. Agora considere $x \in \dfrac{IM+N}{N}$, então $x = a+N$, tal que $a \in IM+N$ e assim $a = \sum b_im_i + n$. Portanto $x = (\sum b_im_i+n)+N = \sum b_im_i + N = \sum b_i(m_i+N) \in I\left(\dfrac{M}{N}\right)$, onde $b_i \in I$ e $m_i \in M$.

2.2.1 Sequências Exatas

Definição 2.2.9. Uma sequência de A-módulos e A-homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

é dita exata em M_i quando $\mathrm{Im} f_i = \ker f_{i+1}$. Esta sequência será exata se ela for exata em cada M_i.

Proposição 2.2.5. Sejam M, M' e M'' A-módulos, então

i) $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ é exata se, e somente se, f é injetiva.

ii) $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ é exata se, e somente se, g é sobrejetiva.

iii) $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ é exata se, e somente se, f injetiva, g sobrejetiva e g induz um isomorfismo entre $\mathrm{Coker} f = \dfrac{M}{\mathrm{Im}(f)}$ e M''.

Demonstração: $i)$ Se a sequência $0 \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{f} M$ é exata, então $\mathrm{Im} f' = \{0\} = \ker f$, ou seja, f é injetiva. Reciprocamente se f é injetiva, então $\ker f = \{0\} = \mathrm{Im}(f')$ e portanto a sequência é exata.
$ii)$ Se a sequência $M \xrightarrow{g} M" \xrightarrow{g'} 0$ é exata, então $\mathrm{Im}(g) = Ker(g') = M'$, ou seja, g é sobrejetiva. Reciprocamente se g é sobrejetiva, então $\mathrm{Im}(g) = M' = \ker(g')$ e portanto a sequência é exata.
$iii)$ Se a sequência $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ é exata, então pelos itens $i)$ e $ii)$ acima as aplicações f e g são injetiva e sobrejetiva, respectivamente. Além disso, usando os fatos da sobrejetividade de g e da sequência ser exata temos que pelo primeiro teorema do isomorfismo $\dfrac{M}{\mathrm{Im}(f)} \simeq M''$. A recíproca segue imediatamente dos itens $i)$ e $ii)$ acima e do primeiro teorema do isomorfismo.

□

Uma sequência exata do tipo $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ é chamada sequência exata curta e enquanto a sequência exata do tipo $\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$ é chamada sequência exata longa. Note que se $N_i = \mathrm{Im}\ f_i = \ker f_{i+1}$, então temos uma sequência exata curta $0 \to N_i \to M_i \to N_{i+1} \to 0$ para cada i.

Teorema 2.2.2. Sejam A um anel e $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ uma sequência exata de A-módulos. Então

$$Ass(M) \subset Ass(M') \cup Ass(M'')$$

Demonstração: Se $p \in Ass(M)$, então existe um submódulo N de M isomorfo a $\dfrac{A}{p}$. Pela proposição 2.2.3 tem-se $\mathrm{Ann}\,(x) = p$ para todo $x \in N$. Logo se $N \cap M' \neq \{0\}$, então $p \in Ass(M')$. Se $N \cap M' = \{0\}$, então a imagem de N em $M'' \simeq \dfrac{M}{M'}$ (esse isomorfismo é consequência da proposição 2.2.5 item $iii)$) é também isomorfo a $\dfrac{A}{p}$, pois a aplicação $\varphi : N \to \dfrac{M}{M'}$ definida por $\varphi(n) = n + M'$ é injetiva.

□

Sejam C um conjunto de A-módulos e λ um função em C com valores em $\mathbb{Z}$ (ou, mais geralmente sobre um grupo abeliano G). A função λ é aditiva se para toda sequência exata curta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ na qual M', M e M" pertencem a C, tem-se

$$\lambda(M') - \lambda(M) + \lambda(M'') = 0$$

Proposição 2.2.6. Seja $0 \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_n \to 0$ uma sequência exata de A-módulos onde todos os módulos M_i e os núcleos de todos os homomorfismo pertencem a C. Então todas função aditiva λ sobre C satisfaz

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\lambda(M_i) = 0$$

Demonstração: Como observado anteriormente podemos transformar uma sequência exata longa do tipo $0 \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_n \to 0$ em uma sequência exata curta $0 \to N_i \to M_i \to N_{i+1} \to 0$ para cada i, onde $N_0 = N_{n+1} = 0$. Então temos $\lambda(M_i) = \lambda(N_i) + \lambda(N_{i+i})$. Agora tomando a soma alternada dos $\lambda(M_i)$ teremos a soma que procuramos.

□

Definição 2.2.10. Uma cadeia de submódulos de um A-módulo M é uma sequência (M_i) $(1 \leq i \leq n)$ tal que

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0$$

Uma série de composição para M é uma cadeia na qual cada quociente $\dfrac{M_{i+1}}{M_i}$ é simples (os únicos submódulos são os triviais). O índice n é chamado comprimento da cadeia.

Denotamos por $l(M)$ ou $l_A(M)$ o comprimento de uma série de composição de um A-módulo M. Quando $l(M) = +\infty$ quer dizer que M não possui série de composição.

Observação: Sejam M, N e L A-módulos tais que $N \subseteq M \subseteq L$, então $l\left(\dfrac{L}{M}\right) \leq l\left(\dfrac{L}{N}\right)$.

Proposição 2.2.7. Sejam M e N A-módulos

a) Se $N \subset M$, então $l(N) < l(M)$

b) Qualquer cadeia de M tem comprimento menor do que ou igual a $l(M)$.

Demonstração: Seja (M_i) uma série de composição para M com comprimento mínimo e considere os submódulos $N_i = N \cap M_i$ de N. Como $\dfrac{N_{i-1}}{N_i} \subseteq \dfrac{M_{i-1}}{M_i}$ e este último é um módulo simples, então $\dfrac{N_{i-1}}{N_i} = \dfrac{M_{i-1}}{M_i}$ ou $N_{i-1} = N_i$ e consequentemente removendo os termos repetidos temos uma série de com posição para N tal que $l(N) \leq l(M)$. Se $l(N) = l(M)$, então $\dfrac{N_{i-1}}{N_i} = \dfrac{M_{i-1}}{M_i}$ para cada $i = 1, \cdots, n$, logo $M_{i-1} = N_{i-1}$ e portanto $M = N$. Se considerarmos uma cadeia para M com comprimento k, então pelo item a) temos $l(M) > l(M_1) > \cdots > l(M_k) = 0$ e portanto $l(M) \geq k$.

□

Corolário 2.2.2. Suponha que o A-módulo M admite uma série de composição, então seu comprimento independe da escolha da série de composição para M e além disso toda cadeia pode ser estendida para uma série de composição.

Proposição 2.2.8. O comprimento $l(M)$ é uma função aditiva sobre a classe de todos os A-módulos que admitem série de composição.

Demonstração: Mostremos que se a sequência

$$0 \to M' \overset{\alpha}{\to} M \overset{\beta}{\to} M'' \to 0 \tag{2.1}$$

é exata, então $l(M) = l(M') + l(M'')$, onde M, M' e M" admitem série de composição. Sejam $M' = M'_0 \supset M'_1 \supset \cdots \supset M'_n = 0$ e $M'' = M'_0 \supset M''_1 \supset \cdots \supset M''_k = 0$ séries de composição para M' e M'', respectivamente. Como a sequência (2.1) é exata segue que β é sobrejetiva e $\operatorname{Im}\alpha = \ker\beta$, logo $M = \beta^{-1}(M''_0) \supset \beta^{-1}(M''_1) \supset \cdots \supset \beta^{-1}(M''_k) = \ker\beta = \operatorname{Im}\alpha = \alpha(M'_0) \supset \alpha(M'_1) \supset \cdots \supset \alpha(M'_n) = 0$. Assim obtemos uma cadeia para M de tamanho $n+k$ e agora vamos verificar que essa cadeia é uma série de composição para M, ou seja, mostrar que as inclusões são de fato estritas e que a cadeia é maximal. Temos que $M'_{i-1} \supset M'_i$, isto é, existe $m'_{i-1} \in M'_{i-1}$ tal que $m'_{i-1} \notin M'_i$. Logo $\alpha(m'_{i-1}) \in \alpha(M'_{i-1})$ e suponha que $\alpha(m'_{i-1}) \in \alpha(M'_i)$, assim exite $m'_i \in M'_i$ tal que $\alpha(m'_{i-1}) = \alpha(m'_i)$ e como α é injetiva segue que $m'_{i-1} \in M'_i$ que é um absurdo e portanto a inclusão $\alpha(M'_{i-1}) \supset \alpha(M'_i)$ é de fato estrita para $i = 1, \ldots, n$. Analogamente mostra-se que a inclusão $\beta^{-1}(M''_{j-1}) \supset \beta^{-1}(M''_j)$ é de fato estrita para $j = 1, \ldots, k$. Para mostrar que a cadeia é maximal considere a aplicação $\beta_{i-1} : \beta^{-1}(M''_{i-1}) \overset{\beta}{\to} M''_{i-1} \xrightarrow{\pi_{i-1}} \dfrac{M''_{i-1}}{M''_i}$ e note que $m \in \ker\beta_{i-1} \Leftrightarrow \beta(m) \in M''_i \Leftrightarrow m \in \beta^{-i}(M''_i)$ e pelo teorema do isomorfismo $\dfrac{\beta^{-i}(M''_{i-1})}{\beta^{-i}(M''_i)} \simeq \dfrac{M''_{i-1}}{M''_i}$ e portanto o quociente $\dfrac{\beta^{-i}(M''_{i-1})}{\beta^{-i}(M''_i)}$ é simples e de maneira análoga mostra-se que o quociente $\dfrac{\alpha(M'_{i-1})}{\alpha(M'_i)}$ é simples.

$\square$

Seja $0 \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_n \to 0$ uma sequência exata de A-módulos tal que cada M_i admita série de composição, então pelas proposições 2.2.6 e 2.2.8

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i l(M_i) = 0$$

2.2.2 Produto Tensorial de Módulos

Definição 2.2.11. Sejam M, N e P A-módulos. A aplicação $f : M \times N \to P$ é dita A-bilinear se para todo $x \in M$ a aplicação $f_x : N \to P$, definida por $f_x(y) = f(x, y)$ é A-linear e para todo $y \in N$ a aplicação $f_y : M \to P$ definida de maneira análoga a f_x é A-linear.

Teorema 2.2.3. Sejam M, N módulos sobre um anel A. Então existem um A-módulo T e uma aplicação A-bilinear $g : M \times N \to T$ com as seguinte propriedades

- Dado qualquer A-módulo P e qualquer aplicação A-bilinear $f : M \times N \to P$, existe uma única aplicação A-linear $f' : T \to P$ tal que $f = f' \circ g$.

- Se existir um outro A-módulo T' e uma outra aplicação g' com a mesma propriedade, então existe um isomorfismo $h : T \to T'$ tal que $h \circ g = g'$.

Demonstração: (Unicidade) Substituindo f e P por g' e T' respectivamente obtemos uma única aplicação A-bilinear $j : T \to T'$ tal que $g' = j \circ g$. Intercambiando os papéis de T e T' temos que existe um único $j' : T' \to T$ tal que $g = j' \circ g'$. Logo $g' = j \circ j' \circ g'$ e $g = j' \circ j \circ g$, assim as composições $j \circ j' : T' \to T'$ e $j' \circ j : T \to T$ devem ser a identidade, e portanto j é um isomorfismo.
(Existência) Denotemos por C o A-módulo livre $A^{(M\times N)}$. Os elementos de C são combinações lineares dos elementos de $M \times N$ com coeficientes em A, ou seja, eles são expressões da forma $\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i, y_i)$, onde $a_i \in A$, $x_i \in M$ e $y_i \in N$. Seja D o A-submódulo de C gerado por todos elementos de C do seguinte tipo:

$$\begin{gathered}(x + x', y) - (x, y) - (x', y)\\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y')\\ (ax, y) - a(x, y)\\ (x, ay) - a(x, y)\end{gathered}$$

Seja $T = \dfrac{C}{D}$. Para cada elemento base (x, y) de C, denote por $x \otimes y$ sua imagem em T (i.e. $\overline{(x, y)} = x \otimes y$). Então T é gerado pelos elementos da forma $x \otimes y$ e por definição segue que

$$(x+x')\otimes y = x\otimes y+x'\otimes y,\ x\otimes(y+y') = x\otimes y+x\otimes y',\ (ax)\otimes y = x\otimes(ay) = a(x\otimes y)$$

Portanto a aplicação $g : M \times N \to T$ definida por $g(x, y) = x \otimes y$ é A-bilinear. Agora vamos verificar que a aplicação g e o A-módulo T satisfazem as condições do teorema 2.2.3. Qualquer aplicação f de $M \times N$ em um A-módulo P estende-se por linearidade a um homomorfismo $\overline{f} : C \to P$. Suponha em particular que f é A-bilinear. Então, segue das definições, que $\overline{f}$ anula-se em todos os geradores de D e portanto em todo o conjunto D. e portanto $\bar{f}$ induz um A-homomorfismo f' bem definido de T em P tal que $f'(x \otimes y) = \bar{f}(x, y) = f(x, y)$. A plicação f' é definida de maneira única por estas condições, e portanto mostramos o que queríamos.

□

Definição 2.2.12. O módulo T construído acima é chamado de produto tensorial de M por N e é denotado por $M \otimes N$.

Observação: Se $(x_i)_{i\in I}$, $(y_j)_{j\in J}$ são famílias de geradores de M, N respectivamente, então os elementos $x_i \otimes y_j$ geram $M \otimes N$. Em particular, se M e N são finitamente gerados, então $M \otimes N$ também é.

Proposição 2.2.9 (Propriedades do produto tensorial)**.** Sejam M, N, P A-módulos, então existe um único isomorfismo

i) $M \otimes N \to N \otimes M$

ii) $(M \otimes N) \otimes P \to M \otimes (N \otimes P) \to M \otimes N \otimes P$

iii) $(M \oplus N) \otimes P \to (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$

iv) $A \otimes M \to M$

Demonstração: Faremos a demonstração dos itens $i), iii), iv)$ e o caso $ii)$ pode ser encontrado em [1] p.26

$i)$ Segue do teorema 2.2.3 que existe uma aplicação A-bilinear $g : N \times M \to N \otimes M$. Com isso a aplicação $x \times y \mapsto y \otimes x$ $(x \in M, y \in N)$ está bem definida e é A-bilinear e portanto induz um único homomorfismo $f : M \otimes N \to N \otimes M$ tal que $f(x \otimes y) = y \otimes x$. Novamente pelo teorema 2.2.3 existe uma aplicação A-bilinear $g' : M \times N \to M \otimes N$, então a aplicação definida por $y \times x \mapsto x \otimes y$ $(x \in M, y \in N)$ está bem definida e é A-bilinear sendo assim induz um único homomorfismo $f' : N \otimes M \to M \otimes N$ tal que $f'(y \otimes x) = x \otimes y$. Logo $f \circ f'$ e $f' \circ f$ são aplicações identidades, consequentemente f e f' são isomorfismos.

$iii)$ Pelo teorema 2.2.3 existem aplicações A-bilineares $M \times P \to M \otimes P$ e $N \times P \to N \otimes P$ tais que $(m, p) \mapsto m \otimes p$ e $(n, p) \mapsto n \otimes p$ respectivamente. Assim considere a aplicação $((m, n), p) \mapsto (m \otimes p, n \otimes p)$ que está bem definida e é A-bilinear, logo induz um único homomorfismo $f : (M \oplus N) \otimes P \to (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$ tal que $f((x, y) \otimes z) = (x \otimes z, y \otimes z)$. Considere a aplicação $(x \otimes z, y \otimes z) \mapsto (x, y) \otimes z$ de $(M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$ em $(M \oplus N) \otimes P$. Esta aplicação está bem definida e é um homomorfismo, assim $f \circ g$ e $g \circ f$ são aplicações identidades e portanto f e g são isomorfismos.

$iv)$ Temo que a aplicação $a \times x \mapsto ax$ está bem definida e é A-bilinear e portanto pelo teorema 2.2.3 existe um único homomorfismo $f : A \otimes M \to M$ definido por $f(a \otimes x) = ax$. Considere a aplicação $g : M \to A \otimes M$ definida por $g(m) = 1 \otimes m$. Seja $m_1, m_2 \in M$ tais que $m_1 = m_2$, logo $1 \otimes m_1 - 1 \otimes m_2 = \overline{(1, m_1)} - \overline{(1, m_2)} = \overline{(0, 0)} = 0 \otimes 0$, ou seja, $1 \otimes m_1 = 1 \otimes m_2$, assim g está bem definida. Portanto $f \circ g$ e $g \circ f$ são aplicações identidades e portanto f e g são isomorfismos.

$\square$

2.2.3 Anéis e Módulos de Frações

Definição 2.2.13. Seja A um anel. Um subconjunto $S \subset A$ que satisfaz

- Para todo $x, y \in S$, $xy \in S$
- $1 \in S$

é chamado de subconjunto multiplicativamente fechado.

Sejam A um anel e S um subconjunto multiplicativamente fechado. Introduzimos a seguinte relação $\equiv$ em $A \times S$

$$(a, s) \equiv (b, t) \Leftrightarrow (at - bs)t = 0 \text{ para algum } u \in S.$$

Afirmamos que a relação $\equiv$ definida acima é uma relação de equivalência. De fato

a) $(a, s) \equiv (a, s)$, pois para $u = 1 \in S$, temos $(as - as)1 = 0$. Portanto vale a propriedade reflexiva.

b) Se $(a, s) \equiv (b, t)$, então $(at - bs)u = 0$ para algum $u \in S$. Por outro lado $(bs - at)u = 0$, logo $(b, t) \equiv (a, s)$. Portanto vale a propriedade simétrica.

c) Se $(a,s) \equiv (b,t)$ e $(b,t) \equiv (c,u)$, então existem $v, w \in S$ tais que $(at - bs)v = 0$ e $(bu - ct)w = 0$. Assim $atv = bsv$ e $buw = ctw$, então multiplicando a primeira e a segunda equação por wu e vs respectivamente obtemos $atvwu = bsvwu$ e $buwvs = ctwvs$. Logo $(au - cs)tvw = 0$ e como S é multiplicativamente fechado concluímos que $(a,s) \equiv (c,u)$ e portanto vale a propriedade transitiva.

Vamos denotar por $\dfrac{a}{s}$ a classe de equivalência de (a,s), ou seja, $\dfrac{a}{s} = \{(b,t) \in A \times S :$ $(at - bs)u = 0$ para algum $u \in S\}$ e $S^{-1}A = \left\{\dfrac{a}{s} : a \in A, s \in S\right\}$. A soma e o produto são definidos da seguinte maneira

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$

e

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

As operações acima estão bem definidas em $S^{-1}A$, além disso $S^{-1}A$ satisfaz os axiomas de um anel comutativo com identidade chamado anel das frações de A com respeito a S. Definindo o homomorfismo $f : A \to S^{-1}A$ por $f(x) = \dfrac{x}{1}$, concluímos que se $s \in S$, então $f(s) = \dfrac{s}{1}$ tem inverso $\dfrac{1}{s}$ em $S^{-1}A$. Então se tomarmos como verdade que $g = h \circ f$, então $h(a/s) = h(a/1)h(1/s) = g(a)g(s)^{-1}$ e portanto h é unicamente determinado por g. Verifica-se a existência de h tomando $h(a/s) = g(a)g(s)^{-1}$ que é um homomorfismo, pois provém de um homomorfismo bem definido. Suponha que $\dfrac{a}{s} = \dfrac{a'}{s'}$, então existe $t \in S$ tal que $(as' - a's)t = 0$, como g é homomorfismo e $g(t)$ é uma unidade em $S^{-1}A$ segue que $g(a)g(s)^{-1} = g(a')g(s')^{-1}$ mostrando que h está bem definida.

Observação: A aplicação canônica $f : A \to S^{-1}A$, devido a sua construção, em geral não é injetiva, pois A pode não ser um domínio integral. Outro ponto importante é que $S^{-1}A$ é o anel nulo se, e somente se, $0 \in S$, para ver isso basta lembrar que $S^{-1}A$ é um anel nulo se, e somente se, $\dfrac{1}{1} = \dfrac{0}{1}$. Se A for um domínio integral e $S = A - \{0\}$, então o anel das frações de A com respeito a S é chamado corpo das frações de A denotado por $Frac\,(A)$.

Exemplo 2.2.5. Seja A um anel e p um ideal primo em A. Então $S = A - p$ é um subconjunto multiplicativamente fechado em A e neste caso escrevemos A_p no lugar de $S^{-1}A$. Dessa maneira o anel A_p é um anel local e $m = \{(a,s) \in A_p \mid a \in p\}$ é o único ideal maximal em A_p.

Exemplo 2.2.6. Sejam A um anel, $p \in \operatorname{Spec} A$ e $\pi : A \to A/p$ definida por $\pi(a) = a + p$. Se considerarmos $\pi(S) = \overline{S}$ onde $S = A - p$, então a localização por $\overline{S}$ coincide com o corpo de frações de $\dfrac{A}{p}$, isto é, $\left(\dfrac{A}{p}\right)_{\overline{S}} = Frac\left(\dfrac{A}{p}\right)$.

Observação: A construção de $S^{-1}A$ pode ser carregada através de um A-módulo M no lugar de um anel A e assim definindo uma relação de equivalência $\equiv$ em $M \times S$ de maneira totalmente análoga ao caso do anel A. Como no exemplo 2.2.5 acima, escrevemos M_p no lugar de $S^{-1}M$, onde $S = A - p$ (p primo).

Proposição 2.2.10. A operação S^{-1} é exata, ou seja, se $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ é uma sequência exata em M, então a sequência $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$ é exata em $S^{-1}M$.

Demonstração: Ver [4] Prop. 4.6, pág. 90.

□

Definição 2.2.14. Seja M um módulo sobre um anel A. O conjunto $\{p \in \operatorname{Spec} A \mid M_p \neq 0\}$ é chamado suporte de M e denotamos por $\operatorname{Supp}(M)$.

Proposição 2.2.11. Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel A, então $\operatorname{Supp}(M) = V(\operatorname{Ann}(M))$.

Demonstração: Se $M = Ax_1 + \cdots + Ax_n$, então

$$\begin{aligned} p \in \operatorname{Supp}(M) &\Leftrightarrow M_p \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists\, i \text{ tal que } x_i \neq 0\, em\, M_p \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Ann}(x_i) \subset p \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Ann}(M) = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ann}(x_i) \subset p \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.4. Sejam A um anel e $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ uma sequência exata de A-módulos. Então

$$\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Supp}(M') \cup \operatorname{Supp}(M'')$$

Demonstração: Ver [4] Prop. 7.1, pág. 96.

□

Vamos agora olhar para a contração e extensão de ideais em anéis de frações. Sejam A um anel, S um subconjunto multiplicativamente fechado de A e $f : A \to S^{-1}A$ a aplicação canônica. Se I é um ideal em A, então $f(I)B$ (gerado por $f(I)$) é um ideal de $S^{-1}A$ chamado de extensão do ideal I em $S^{-1}A$ e denotamos por $I^e = S^{-1}I = \{\sum a_i/s_i \mid a_i \in I\, s_i \in S\}$.

Proposição 2.2.12. Seja A um anel e S um subconjunto multiplicativamente fechado, temos que

i) Cada ideal em $S^{-1}A$ é um ideal estendido.

ii) Os ideais primos de $S^{-1}A$ estão em uma correspondência biunívoca com os ideais primos em A que não intercepta S.

iii) A operação S^{-1} comuta com os radicais.

Demonstração: Ver [1] Prop. 3.11, pág.41.

□

Corolário 2.2.3. Sejam N, P submódulos de uma A-módulo M, então

a) $S^{-1}(N + P) = S^{-1}(N) + S^{-1}(P)$

b) $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}(N) \cap S^{-1}(P)$

c) $S^{-1}(M/N) \simeq (S^{-1}M)/(S^{-1}N)$

Demonstração: Ver [1] Coro. 3.4, pág. 39.

□

Corolário 2.2.4. Se $\sqrt{0}$ é o nilradical de A, então $S^{-1}\sqrt{0}$ é o nilradical de $S^{-1}A$.

Corolário 2.2.5. Se p é um ideal primo em A, o ideal primo de A_p está em uma correspondência biunívoca com os ideais primos de A contido em p.

Demonstração: Basta tomar $S = A - p$ e aplicar a proposição 2.2.12 item ii).

□

2.3 Anéis e Módulos Noetherianos e Artinianos

Definição 2.3.1. Sejam Ω um conjunto parcialmente ordenado, cuja relação de ordem é dada por $\subseteq$, ou seja, $\subseteq$ é reflexiva, transitiva e antissimétrica. Uma cadeia ascendente em Ω é uma sequência da seguinte forma

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdots$$

Dizemos que a cadeia é estacionária quando existe um n tal que $N_n = N_{n+1} = \cdots$

Observação: Se considerarmos um anel A, então Ω pode ser tomado como o conjunto formado pelos ideais de A.

Proposição 2.3.1. Seja A um anel, então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) Toda cadeia ascendente de ideais em A é estacionária.

b) Todo conjunto não vazio de ideais em A possui um elemente maximal.

c) Todo ideal de A é finitamente gerado

Demonstração: Suponha que toda cadeia ascendente de ideais de A seja estacionária, se b) for falso, então existe pelo menos um conjunto não vazio de ideais em A que não possui elemento maximal e portanto podemos construir uma cadeia ascendente de ideais em A que não é estacionária que é uma contradição. Sejam I um ideal em A e Σ o conjunto formado por todos ideais finitamente gerados em A contidos em I. Então Σ é não vazio, pois $(0 \in \Sigma)$ e portanto possui um elemento maximal, digamos I_0. Se $I_0 \neq I$, ou seja, existe $x \in I$ tal que $x \notin I_0$ assim o ideal $I_0 + Ax$ é finitamente gerado e contém estritamente I_0, mais isso contradiz a maximalidade de I_0. Portanto $I = I_0$ e dessa forma I é finitamente gerado. Agora considere $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ uma cadeia ascendente de ideais em A. Dessa maneira $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ é um ideal de A e portanto é finitamente gerado digamos por $x_1, \ldots, x_r$ tal que cada $x_i \in I_{n_i}$. Agora considere $n = \max_{i=1}^{r} n_i$, então cada $x_i \in I_n$. Portanto $I_n = I$ mostrando que a cadeia é estacionária.

□

Observação: As condições a) e b) da proposição 2.3.1 são chamadas, respectivamente, de condição de cadeia ascendente e condição maximal. Note que as cadeias podem ser ordenadas por $\supseteq$, então o item a é chamado de condição de cadeia descendente e b) condição minimal.

Definição 2.3.2. Dizemos que um anel A é **Noetheriano** se satisfaz um das condições da proposição 2.3.1. Um anel A que satisfaz a condição de cadeia descendente ou condição minimal é chamado de anel **Artiniano**.

Observação: Note que a condição c) da proposição 2.3.1 não é válida para dizer se um anel é Artiniano, pois veremos que a condição de ser Noetheriano não é suficiente para ser Artiniano, porém a recíproca é verdadeira. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é um exemplo de um anel noetheriano que não é artiniano. De fato, sabemos que todos os ideais de $\mathbb{Z}$ são principais, logo para toda cadeia ascendente de ideais $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ em $\mathbb{Z}$ os geradores de $I_2, I_3, \cdots$ tem que dividir o gerador de I_1 e portanto a cadeia é estacionária. Por outro lado a cadeia descendente de ideais $(a) \supseteq (a^2) \supseteq \cdots \supseteq (a^n) \supseteq \cdots$, onde $a \in \mathbb{Z}$ não é estacionária.

Observação Um A-módulo noetheriano e artiniano é construído de maneira análoga ao caso dos anéis, noetheriano e artiniano, trocando ideais por submódulos.

Teorema 2.3.1. Uma condição necessária e suficiente para que um A-módulo M admita série de composição é M satisfazer ambas as condições de cadeia.

Demonstração:Ver [1] Prop. 6.8, pág. 77.

□

Observação: Um A-módulo que satisfaz ambas as condições de cadeia é dito ter comprimento finito. Pelo corolário 2.2.2 $l(M)$ é o comprimento de M.

Proposição 2.3.2. Seja $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ uma sequência exata de A-módulos. Então

i) M é noetheriano se, e somente se, M' e M'' são noetherianos.

ii) M é artiniano se, e somente se, M' e M'' são artiniano.

Demonstração: Ver [1] Prop. 6.3, pág. 75

□

Corolário 2.3.1. Se M_i $(1 \leq i \leq n)$ são A-módulos noetheriano (resp. Artiniano), então $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ é noetheriano (resp. artiniano).

Demonstração: Vamos provar por indução sobre n, para $n = 1$ o resultado é válido. Suponha que $n \geq 2$ e que para $n-1$ o resultado seja verdadeiro. Considere

$$0 \to M_n \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{g} \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \to 0 \tag{2.2}$$

onde $f(m_n) = (0, 0, \ldots, m_n)$ e $g(m_1, m_2, \ldots, m_n) = (m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})$, então as aplicações f e g estão bem definidas e são injetiva, sobrejetiva respectivamente. Além disso $\mathrm{Im} f = \ker g$ implicando que a sequência (2.2) é exata e portanto pela hipótese de indução e pela proposição 2.3.2 $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ é noetheriano (resp. artiniano).

□

Proposição 2.3.3. Seja M um A-módulo finitamente gerado. Se A é um anel noetheriano (resp. artiniano), então M é noetheriano (resp. artiniano)

Demonstração: Como A é noetheriano segue do corolário 2.3.1 que A^n é noetheriano. Considere a aplicação $f : A^n \to M$ definida por $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = x_1a_1 + \cdots + x_na_n$, onde $x_1, \ldots, x_n$ são os geradores de M sobre A. Dessa maneira f é sobrejetiva, então a sequência $A^n \xrightarrow{f} M \to 0$ é exata e portanto pela proposição 2.3.2 M é noetheriano (resp. artiniano).

$\square$

Proposição 2.3.4. Sejam A um anel noetheriano (resp. artiniano) e I um ideal em A, então $\dfrac{A}{I}$ é noetheriano (resp. artiniano).

Demonstração: Basta aplicar a proposição 2.3.2 sobre a sequência exata $0 \to I \to A \to \dfrac{A}{I} \to 0$.

$\square$

Teorema 2.3.2. Seja A um anel tal que o ideal nulo é escrito como produto $m_1 \cdots m_n$ de ideais maximais não necessariamente distintos. Então A noetheriano se, e somente se, A é artiniano.

Demonstração: Ver [1] coro. 6.11, pág. 78

$\square$

Lema 2.3.1. Seja A um anel e $A[x]$ o anel dos polinômios na variável x com coeficientes de A. Seja I um ideal em $A[x]$, então o conjunto formado pelos coeficientes líderes dos polinômios em I forma um ideal em A.

Demonstração: Seja J o conjunto formado pelos coeficientes líderes dos polinômios em I. Considere $a, b \in J$, então existem polinômios $f(x), g(x) \in I$ digamos $f(x) = ax^m+$ (termos menores) e $g(x) = bx^n+$ (termos menores). Se $m = n$, então $f(x) + g(x) = (a + b)x^m+$ (termos menores) $\in I$, logo $a + b \in J$. Agora se $m < n$, basta multiplicar $f(x)$ por x^{n-m} e como I é ideal $f(x)x^{n-m} \in I$ e portanto $g(x)+f(x)x^{n-m} = (a + b)x^n+$ (termos menores) $\in I$, ou seja, $a + b \in J$. Agora se $a \in J$ e $r \in A \subseteq A[x]$, então existe $f(x) = a^n+$ (termos menores) e além disso $rf(x) = rax^n+$(termos menores)$\in I$, logo $ar \in J$. Portanto J é um ideal em A.

$\square$

Teorema 2.3.3 (Teorema da Base de Hilbert)**.** Se A é um anel noetheriano, então $A[x_1, \ldots, x_n]$ é noetheriano.

Demonstração: A demonstração será feita por indução sobre n. Para verificar que o resultado é verdadeiro para $n = 1$, vamos mostrar que todo ideal I em $A[x_1]$ é finitamente gerado. Pelo lema 2.3.1 os coeficientes líderes dos polinômios em I forma um ideal J em A. Como A é noetheriano, então J é finitamente gerado, digamos por $a_1, \cdots, a_k$. Para cada $i = 1, \ldots, k$ existe um polinômio $f_i \in A[x_1]$ da forma $f_i = a_ix_1^{r_i} +$ (termos menores). Seja $r = \max_{i=1}^{k} r_i$. Temos que $\langle f_1, \ldots, f_k\rangle = I' \subseteq I$ em $A[x_1]$. Seja $f = ax_1^m+$ (termos menores) um polinômio qualquer em I, onde $a \in J$. Se $m \geq r$, escrevemos $a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_ia_i$, onde $\alpha_i \in A$, então $ax_1^m +$ (termos menores) $-$ $(\alpha_1f_1x_1^{m-r_1} + \cdots + \alpha_kf_kx_1^{m-r_k}) = ax_1^m - (\alpha_1a_1 + \cdots + \alpha_ka_k)x_1^m +$ (termos menores) é um elemento em I e possui grau menor que m. Dessa maneira podemos subtrair f de elementos em I' até obter um polinômio g de grau menor que r, logo podemos escrever

$f = g + h$, onde $g(x) = a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1 + a_0 \in I$ e $h \in I'$.

Seja M um A-módulo gerado por $1, x_1, \ldots, x_1^{r-1}$, então acabamos de provar que $I = (I \cap M) + I'$. Agora M é finitamente gerado como A-módulo, então pela proposição 2.3.3 M é noetheriano e portanto $I \cap M$ é um A-submódulo de M finitamente gerado e portanto para o caso $n = 1$ o teorema esta provado. Suponha que $n > 2$ e que o resultado verdadeiro para $n-1$, então $A[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ é noetheriano e usando o caso $n = 1$ temos que $A[x_1, \ldots, x_n] = A[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n]$ é noetheriano.

□

Proposição 2.3.5. Em um anel noetheriano o nilradical é nilpotente.

Demonstração: Ver [1] Coro. 7.15, pág. 83.

Proposição 2.3.6. Em um anel artiniano A todo ideal primo é maximal.

Demonstração: Seja I um ideal primo em A, então o quociente $B = \dfrac{A}{I}$ é um domínio integral. Seja $x \in B$, $x \neq 0$. Pela condição de cadeia descendente temos que $(x^n) = (x^{n+1})$ para algum n, e consequentemente $x^n = x^{n+1}y$ para algum $y \in B$. Como B é um domínio integral segue que podemos cancelar x^n, logo $1 = xy$ e portanto x tem inverso em B mostrando assim que B é um corpo e portanto I é um ideal maximal.

□

Como consequência imediata da proposição 2.3.6 temos que em um anel artiniano o nilradical é igual ao radical de Jacobson.

Proposição 2.3.7. Um anel artiniano A possui um número finito de ideais maximais.

Demonstração: Considere o conjunto de todas as intersecções finitas $m_1 \cap \cdots \cap m_n$, onde cada m_i é um ideal maximal em A. Este conjunto possui um elemento minimal, digamos $m_1 \cap \cdots \cap m_k$, então para qualquer ideal maximal m em A segue da minimalidade de $m_1 \cap \cdots \cap m_k$ que $m \cap m_1 \cap \cdots \cap m_k = m_1 \cap \cdots \cap m_k$, assim $m \supseteq m_1 \cap \cdots \cap m_k$. Pela proposição 2.1.3 $m \supseteq m_i$ para algum i, portanto pela maximalidade de m_i temos que $m = m_i$.

□

Proposição 2.3.8. Em um anel artiniano A o nilradical é nilpotente.

Demonstração: Ver [1] Prop. 8.4, pág. 89

□

Proposição 2.3.9. Seja M um módulo sobre um anel noetheriano A. Então a condição $M \neq \{0\}$ é equivalente a $Ass\,(M) \neq \emptyset$.

Demonstração: Se $M = \{0\}$, então $Ass\,(M) = \emptyset$ (independente da hipótese sobre A ser noetheriano). Se $M \neq \{0\}$, o conjunto formado pelos ideais $\mathrm{Ann}\,(x)$, onde $0 \neq x \in M$, é não vazio. Como A é noetheriano este conjunto possui um elemento maximal e pela proposição 2.2.2 o resultado segue.

□

Corolário 2.3.2. Sejam M um módulo sobre um anel noetheriano A e a um elemento de A. Para que a homotetia em M definida por $m \mapsto am$ ser injetiva é necessário e suficiente que a não pertença a nenhum ideal primo associado com M.

Demonstração: Ver [5] Coro. 2, pág. 262.

□

Teorema 2.3.4. Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A. Então existe um acadeia $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ de submódulos de M, tal que $\dfrac{M_i}{M_{i-1}} \simeq \dfrac{A}{p_i}$ com $p_i \in \operatorname{Spec} A$. Nessas condições $Ass\,(M) \subset \{p_1, \ldots, p_n\}$, isto é, o conjunto Ass (M) é finito.

Demonstração: Temos que $Ass\,(M) \neq \emptyset$, logo considere $p_1 \in Ass\,(M)$ e portanto existe $x_1 \in M$ tal que $\operatorname{Ann}(x_1) = p_1$, logo existe um submódulo M_1 de M isomorfo a $\dfrac{A}{p_1}$. Se $M_1 = M$ nada temos a fazer e o resultado está demonstrado, caso contrário $\dfrac{M}{M_1} \neq 0$ e $Ass\,(M/M_1) \neq \emptyset$. Dessa forma sejam $p_2 \in Ass\,(M/M_1)$ e $x_2 \in M/M_1$ tal que $\operatorname{Ann}(x_2) = p_2$, logo existe um submódulo $M' \subset M/M_1$ isomorfo a $\dfrac{A}{p_2}$, isto é, existe um A-submódulo M_2 de M que contém M_1 tal que $\dfrac{M_2}{M_1} \simeq \dfrac{A}{p_2}$. Como M é noetheriano segue que esta cadeira eventualmente deve estacionar com $M_n = M$. Para verificar que o conjunto $Ass\,(M)$ é finito basta aplicar o teorema 2.2.2 junto com a proposição 2.2.3.

□

Teorema 2.3.5. Seja A um anel noetheriano, $p \in \operatorname{Spec} A$ e M um A-módulo finitamente gerado.

i) $\operatorname{Supp} M = \displaystyle\bigcup_{p \in Ass\, M} V(p)$

ii) $Ass\,(M) \subset \operatorname{Supp}(M)$

iii) O conjunto dos elementos minimais de $Ass\,(M)$ e $\operatorname{Supp}(M)$ coincidem.

Demonstração: Ver [9] Teo. 12.2.6, pág. 295.

□

Definição 2.3.3. Para um um ideal primo p de A, o supremos do comprimento de todas as cadeias estritamente decrescente de ideais primos $p = p_0 \supset p_1 \supset \cdots \supset p_n$ começando por p é chamado altura de p e denotamos por ht p. O supremo do camprimento tomado sobre todas as cadeias estritamente crescente de ideais primos $p = p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_n$ começando por p é chamado de coaltura de p e denotamos por coht p.

Definição 2.3.4. Uma cadeia de ideais primos em A é uma sequência finita estritamente crescente $p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_n$, onde n é dito ser o comprimento da cadeia. A dimensão de Krull ou simplesmente dimensão de um anel A tal que $A \neq \{0\}$, é o supremo dos comprimentos de todas as cadeias de ideais primos em A que pode ser um inteiro maior do que ou igual a zero. Vamos denotar a dimensão de um anel A por $\dim A$.

Observação: Se para todo número inteiro $n \geq 0$ for possível $ht\, p_n > n$, então dizemos que $\dim A = +\infty$. Segue da definição que

$$\text{ht} p = \dim\, A_p,\ \text{coht}\, p = \dim\, \frac{A}{p}$$

Teorema 2.3.6. Um anel A é artiniano se, e somente se, A é noetheriano e $\dim A = 0$.

Demonstração: Ver [1] Teo. 8.5, pág. 90

□

2.4 Decomposição Primária e Módulo de comprimento Finito

Definição 2.4.1. Um ideal I em um anel A é primário se $I \neq A$ e

- $xy \in I$, então $x \in I$ ou $y^n \in I$, para algum $n > 0$

Note que todo ideal primo é primário.

Proposição 2.4.1. Sejam A um anel noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado e $N \subset M$ um submódulo de M. As seguintes condições são equivalentes:

i) $Ass\,(M/N)$ tem um único elemento.

ii) Para todo $a \in A$ e $x \in M$ tem-se: $x \notin N$ e $ax \in N$, então $a^n M \subset N$ para algum n.

Neste caso se $Ass\,(M/N) = \{p\}$ e $\operatorname{Ann}(M/N) = I$, então I é primário e $\sqrt{I} = p$.

Demonstração: Ver [2] Teo. 6.6, pág. 40

□

Definição 2.4.2. Sejam A um anel noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado e $N \subset M$ um submódulo de M. Dizemos que N é um submódulo primário com respeito a M se N satisfaz uma das condições da proposição 2.4.1. Se $Ass\,(M/N) = \{p\}$ dizemos que N é um submódulo p-primário ou submódulo primário associado a p.

Definição 2.4.3. Sejam M um módulo sobre um anel noetheriano A e N um submódulo de M. Uma decomposição primária de N em M é tal que N pode ser escrito da seguinte forma

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$$

onde cada Q_i são submódulos primário com respeito a M.

Observação: Sejam M um módulo sobre um anel noetheriano A, Q_i $(1 \leq i \leq n)$ uma família de submódulos p-primários com respeito a M e p um ideal primo em A. Um fato importante que pode ser constatado pela proposição 2 pág. 269 da referência [5] é que $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ continua sendo p-primário, ou seja, $Ass\,(M/\bigcap_{i=1}^{n} Q_i) = \{p\}$.

Definição 2.4.4. Sejam M um A-módulo sobre um anel noetheriano A e N um submódulo de M. Uma decomposição primária $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ é dita ser reduzida (ou minimal) se as seguintes condições são satisfeitas

(a) para todo $i = 1, \ldots, n$ temos que $Q_i \not\supseteq \bigcap_{i \neq j} Q_j$

(b) se $Ass\,(M/Q_i) = \{p_i\}$, então cada p_i $(1 \leq i \leq n)$ são distintos.

Observação: A condição (a) da definição 2.4.4 é chamada de irredundante. Note que se $Q_i \supseteq \bigcap_{i \neq j} Q_j$, então $\bigcap_{i \neq j} Q_j = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i = N$, então podemos tirar Q_i e afirmar que toda decomposição primária é irredundante. Além disso pela última observação que fizemos concluímos que toda decomposição primária pode ser tomada como reduzida.

Teorema 2.4.1. Sejam M um A-módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A . Se $N = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ é uma decomposição primária irredundante de um submódulo próprio $N \subset M$ tal que $Ass\,(M/Q_i) = \{p_i\}$, então $Ass\,(M/N) = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Demonstração: Ver [2] Teo. 6.8, pág. 41.

$\square$

Observação: Seja $N = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ uma decomposição primária. Dizemos que cada Q_i é uma componente primária de N e se $Ass\,(M/Q_i) = \{p_i\}$ dizemos que p_i esta associado com N em M.

Teorema 2.4.2. Sejam M um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano e N um submódulo de M.

- Então N admite uma decomposição primária da forma

$$N = \bigcap_{p \in Ass\,(M/N)} Q(p)$$

  onde para todo $p \in Ass\,(M/N)$, $Q(p)$ é p-primário com respeito a M.

- Para qualquer expressão da forma $N = \bigcap_{p \in Ass\,(M/N)} Q(p)$, se $p \in Ass\,(M/N)$ é um primo minimal em $\operatorname{Supp}(M/N)$, a componente p-primária $Q(p)$ é dada pela pré-imagem de N_p pelo mapa de localização $\rho : M \to M_p$, logo $Q(p)$ é unicamente determinado por M e N.

Demonstração: Ver [8] Teo. 12.4.4, pág. 301

$\square$

Lema 2.4.1. Um A-módulo M é simples se, e somente se, $M \simeq \dfrac{A}{m}$ para algum ideal maximal $m \subset A$.

Demonstração: Sabemos que os ideais de $\dfrac{A}{m}$ são os ideais de A que contém m e como m é maximal estes ideais devem ser A ou o próprio m que por sua vez correspondem aos A-submódulos $\dfrac{A}{m}$ e $\{0\}$ (A-módulo nulo) de $\dfrac{A}{m}$ o que implica que $\dfrac{A}{m}$ é simples. Reciprocamente, se M é simples e $0 \neq x \in M$, então $M = Ax = (x)$. Logo a aplicação $f : A \to M$ definida por $a \mapsto ax$ é sobrejetiva e pelo primeiro teorema do isomorfismo temos $M \simeq \dfrac{A}{\ker f}$ como A-módulo. Assim o anel $\dfrac{A}{\ker f}$ possui apenas ideais triviais, ou seja, $\dfrac{A}{\ker f}$ é um corpo e portanto $\ker f$ é maximal.

$\square$

Teorema 2.4.3. Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) M tem comprimento finito

ii) todo ideal $p \in \mathrm{Ass}\,(M)$ é um ideal maximal em A.

iii) todo ideal $p \in \mathrm{Supp}\,(M)$ é um ideal maximal em A.

Demonstração: Como M é um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A sabemos pelo teorema 2.3.4 que existe uma cadeia

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M \tag{2.3}$$

de submódulos de M, tais que $\dfrac{M_i}{M_{i-1}} \simeq \dfrac{A}{p_i}$ com $p_i \in \mathrm{Spec}\, A$. Se M tem comprimento finito, então M admite uma série de composição. Se a cadeia (2.3) não for uma série de composição, então pelo corolário 2.2.2 podemos estendê-la até obter uma série de composição. Usando o fato que duas séries de composição são isomorfas e através do lema 2.4.1 e do teorema 2.3.4 podemos concluir que todo ideal $p \in Ass\,(M)$ é um ideal maximal em A. A implicação $ii) \Rightarrow iii)$ é consequência direta do teorema 2.3.5. Pelo teorema 2.3.4 temos que $Ass\,(M) \subset \{p_1, \cdots, p_n\}$. Para cada p_i a localização $(A/p_i)_{p_i}$ coincide com o corpo de frações de $\dfrac{A}{p_i}$, assim $p_i \in \mathrm{Supp}\,(A/p_i) = \mathrm{Supp}\,(M_i/M_{i-1})$ e pelo teorema 2.2.4 $p_i \in \mathrm{Supp}\,(M_i) \subset \mathrm{Supp}\,(M)$, logo $\{p_1, \cdots, p_n\} \subset \mathrm{Supp}\,(M)$. Como todo ideal $p \in \mathrm{Supp}\,(M)$ é um ideal maximal em A e usando o fato do lema 2.4.1 a cadeia (1.3) é maximal, ou seja, é uma série de composição para M, portanto M tem comprimento finito.

Proposição 2.4.2. Se M é módulo de comprimento finito sobre um anel noetheriano A, então

$$l_A(M) = \sum_{p \in Ass\,(M)} l_{A_p}(M_p).$$

Demonstração: Ver [5] Coro. pág. 276.

$\square$

3 O polinômio de Hilbert-Samuel

3.1 Grupos topológicos, Anéis e Módulos Graduados Associados e o Polinômio de Hilbert-Samuel

Neste Capítulo apresentaremos o teorema de Hilbert-Serre que servirá para definir o polinômio de Hilbert-Samuel, o principal objeto de estudo desse trabalho, e um importante resultado válido para um anel noetheriano semilocal A e um A-módulo M finitamente gerado, o teorema de Krull-Chavalley-Samuel, que garante que $\dim(M)$ coincide com o grau do polinômio de Hilbert-Samuel e coincide com $\delta(M)$. Definiremos módulo de Cohen-Macaulay e elementos superficiais, além disso mostraremos algumas propriedades dessas definições.

Definição 3.1.1. Definimos um conjunto G como grupo abeliano topológico, quando G é ao mesmo tempo um espaço topológico e grupo abeliano e além disso são satisfeita as seguintes condições:

a) A aplicação $G \times G \to G$ definida por $(x, y) \mapsto x + y$ é contínua.

b) A aplicação $G \to G$ definida por $x \mapsto -x$ é contínua.

Quando os itens a) e b) acima são satisfeitos dizemos que as estruturas de espaço topológico e grupo abeliano são compatíveis.

Se a é um elemento fixado em G, onde G é um grupo abeliano topológico, então a translação T_a definida por $T_a(x) = x + a$ é um homeomorfismo e portanto se U é uma vizinhança de 0 em G, então $U+a$ é uma vizinhança de a em G e toda vizinhança de a é dada dessa forma, pois se V é uma vizinhança de a em G, então $V-a = \{x-a \mid x \in V\}$ contém 0 e assim a afirmação segue. Assim a topologia em G é unicamente determinada pelas vizinhanças de 0 em G.

Seja G um grupo abeliano e tome $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots$ uma sequência de subgrupos de G. Então tomando esses subgrupos como vizinhanças de 0 temos que G é um grupo abeliano topológico tal que nesta topologia para todo $g \in G$ uma vizinhança de g é dado por $g + G_n$, onde $n \geq 0$.

Definição 3.1.2. Sejam $G = A$ e $G_n = I^n$, onde I é um ideal do anel A. A topologia definida dessa maneira em A é chamada topologia ***I-ádica***. Se tomarmos $G = M$ e $G_n = I^nM$ esta topologia sobre M é chamada de ***I-topologia***, onde M é um $A-$módulo e I^nM são $A-$submódulos para todo $n \geq 0$.

Observação: Seja M um A-módulo. Dizer que IM não é aberto na $m-topologia$ é o mesmo que afirmar: $IM \not\supseteq m^nM$ para todo $n \geq 0$, onde I, m são ideais em A.

Definição 3.1.3. seja M um módulo sobre um anel A. Uma cadeia infinita $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots$ de submódulos de M é chamada de filtração de M e denotamos por (M_n). Seja $I \trianglelefteq A$, se para todo n

$$IM_n \subseteq M_{n+1}$$

então (M_n) é dita ser uma I-filtração. Uma I-filtração é estável quando para todo n suficientemente grande tem-se $IM_n = M_{n+1}$.

Definição 3.1.4. Um anel graduado é um anel A junto com uma família $\{A_n\}_{n\geq 0}$ de subgrupos do grupo aditivo de A tais que $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ e $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$ para todo m, $n \geq 0$. De maneira análoga podemos definir um A-módulo graduado como sendo um A-módulo M junto com uma família $\{M_n\}_{n\geq 0}$ de submódulos de M tais que $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ e $A_m M_n \subseteq M_{m+n}$ para todo m, $n \geq 0$.

Observação: Note que se A_0 é um subgrupo aditivo de A, então $0 \in A_0$ e para todo x, $y \in A_0$ temos $x - y \in A_0$ e além disso A_0 é fechado para o produto, pois $A_0 A_0 \subseteq A_0$. Portanto A_0 é um subanel de A e cada A_n é um A_0-módulo. Dizemos que um elemento $m \in M$ é homogêneo se $m \in M_n$ e neste caso diremos que m é de grau n e denotamos por deg $m = n$. Qualquer $m \in M$ pode ser escrito como soma de elementos homogêneos e todo exceto um número finito das parcelas dessa soma são não nulos e essas componentes não nulas são chamadas de componentes homogênea de m.

Exemplo 3.1.1. Considere $A = [x_1, \ldots, x_k]$ e A_n o conjunto de todos os polinômios homogêneo de grau n.

Seja A um anel não graduado, porém se considerarmos $I \trianglelefteq A$, então podemos formar o anel graduado $A^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n$. Similarmente, se M é um A-módulo e M_n uma I-filtração de M, então $M^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ é um A^*-módulo graduado tal que $I^m M_n \subseteq M_{m+n}$. Note que se A for neotheriano, então I é finitamente gerado, digamos por $x_1, \ldots, x_k$ e além disso constatamos que $A^* = A[x_1, \ldots, x_k]$ e pelo teorema da base de Hilbert A^* é noetheriano.

Lema 3.1.1. Sejam M um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A e (M_n) uma I-filtração de M. Então são equivalentes:

i) M^* é finitamente gerado como A^*-módulo

ii) A filtração (M_n) é estável

Demonstração: Ver [1] Lema 10.8, pág. 107.

□

Proposição 3.1.1 (Lema de Artin-Rees)**.** Sejam M um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A, $I \trianglelefteq A$ e (M_n) uma I-filtração estável de M. Se M' é um submódulo de M, então $(M' \cap M)$ é uma I-filtração estável de M'.

Demonstração: Com A é noetheriano e M é finitamente gerado como A-módulo, temos pela proposição 2.3.3 que M é noetheriano e portanto M' é finitamente gerado como A-módulo. Para todo $n \geq 0$ $(M' \cap M_n) \subseteq M'$, então $(M' \cap M_n)$ é um submódulo de M'. Assim

$$M' = M' \cap M_0 \supseteq M' \cap M_1 \supseteq \cdots$$

é uma filtração de M'. Além disso $I(M' \cap M_n) \subseteq IM' \cap IM_n \subseteq M' \cap M_{n+1}$, consequentemente $(M' \cap M_n)$ é uma I-filtração de M'. Logo $M'^{*} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(M' \cap M_n)$ é um A^*-submódulo graduado de M^* e consequentemente finitamente gerado. Portanto pelo lema 3.1.1 a I-filtração $(M' \cap M_n)$ de M' é estável.

□

Definição 3.1.5. Sejam A um anel e $I \trianglelefteq A$. Definimos

$$G_I(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{I^n}{I^{n+1}}$$

onde $(I^0 = A)$. Similarmente, se M é um A-módulo e (M_n) é uma I-filtração para M, definimos o $G(A)-$módulo

$$G(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}}$$

Usamos $G_n(M)$ para denotar $\dfrac{M_n}{M_{n+1}}$ e $G_n(A)$ para denotar $\dfrac{I^n}{I^{n+1}}$.
Os conjuntos definidos acima são chamados, respectivamente, anéis e módulos graduados associados.

Proposição 3.1.2. Sejam A um anel noetheriano e $I \trianglelefteq A$. Então

i) $G_I(A)$ é noetheriano

ii) Se M é finitamente gerado como um A-módulo e (M_n) é uma I-filtração estável de M, então $G(M)$ é um $G_I(A)$-módulo finitamente gerado.

Demonstração: Ver [1], Prop. 10.22, pág. 111.

□

Proposição 3.1.3. Seja A um anel graduado. Então A é noetheriano se, e somente se, A_0 é noetheriano e A é finitamente gerado com uma A_0-Álgebra.

Demonstração: Se A é finitamente gerado com A_0-álgebra, então existem $x_i \in A$ $(1 \leq i \leq n)$ e um homomorfismo $\varphi : A_0[t_1, \ldots, t_n] \to A$ definida por $f(t_1, \ldots, t_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$, portanto pelo teorema da base de Hilbert segue que $A_0[t_1, \cdots, t_n]$ é noetheriano e consequentemente A também é noetheriano.

Reciprocamente, considere o homomorfismo $f : \bigoplus_{n \geq 0} A_n \to A_0$, definido por $(a_0, \ldots, a_n, \ldots) \mapsto a_0$, então f é sobrejetiva, $\ker f = (0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) = \bigoplus_{n \geq 1} A_n = A_+$ e $A_0 \simeq \dfrac{A}{A_+}$. Como A é noetheriano, segue que A_0 também é noetheriano e além disso A_+ é finitamente gerado digamos por $x_1, \cdots, x_s$ que podem ser tomados como elementos homogêneo de A tais que $\deg x_i = k_i$ $(1 \leq i \leq s)$. Seja $A' = A_0[x_1, \cdots, x_s]$ um subanel de A, mostremos que $A_n \subseteq A'$ para todo n maior do que ou igual a zero. No caso em que $n = 0$ a inclusão é verdadeira, suponha que $A_k \subseteq A'$ para todo $k < n$ e $n > 0$. Se $y \in A_n \subset A+$, então $y = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i$ e $\deg(a_i x_i) = n$. Como $\deg(x_i) = k_i$ temos que $a_i \in A_{n-k_i}$ e pela hipótese de indução $A_{n-k_i} \subseteq A'$, ou seja, $a_i \in A'$. Portanto $y \in A'$ e assim $A = A'$.

□

Proposição 3.1.4. Sejam A um anel graduado, M um A-módulo graduado finitamente gerado e (M_n) uma I-filtração estável de M, então cada M_n é finitamente gerado como A_0-módulo.

Demonstração: Podemos assumir sem perda de generalidade que M é gerado por um número finito de elementos homogêneo, digamos $m_1, \ldots, m_t$. Sejam $r_j = \deg\, m_j$. Se $y \in M_n$ é um elemento homogêneo de M cujo grau é n, então $y = \sum_{j=1}^{t} f_j m_j$. Note que $\deg\, y = n = \deg\, f_j m_j$, pois caso contrário y não seria um elemento homogêneo de grau n. Como M é um A-módulo graduado, temos que $m_j \in A_{r_j}$ e $f_j m_j \in A_n$, então necessariamente $f_j \in A_{n-r_j}$, ou seja, f_j é um elemento homogêneo em A de grau $n - r_j$. Com A é um anel noetheriano graduado, segue da proposição 3.1.3 que A é finitamente gerado como A_0-álgebra, isto é, $A = A_0[a_1, \ldots, a_s]$. Portanto $A_{n-r_j} \subseteq A_0[a_1 \ldots, a_s]$ e f_j é um polinômio nos $a_i's$ com coeficientes em A_0 mostrando que M_n é um A_0-módulo finitamente gerado.

□

Definição 3.1.6. Sejam A um anel graduado e $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ um A-módulo graduado finitamente gerado. Considere $\lambda : M_n \to \mathbb{Z}$ uma função aditiva. A série de Poincaré (ou série de Hilbert) com respeito a λ é a série de potência

$$P(M,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n$$

Teorema 3.1.1 (Hilbert-Serre)**.** Sejam $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ um anel noetheriano graduado e M um A-módulo graduado finitamente gerado. Suponha que $A = A_0[x_1, \ldots, x_s]$ tais que $\deg\,(x_i) = k_i$. Então $P(M,t)$ é uma função racional em t da forma

$$\frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{s}(1 - t^{k^i})},$$

onde $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Demonstração: A prova deste teorema será feito por indução sobre s. Se $s = 0$, então $A = A_0$, ou seja, $A_n = 0$, para todo $n > 0$. Temos que M é finitamente gerado como A_0-módulo e portanto existem $m_i \in M$ $(1 \leq i \leq k)$, homogêneos, tais que $M = \sum_{i=1}^{k} A_0 m_i$. Consequentemente $M_n = 0$ para todo $n > m = \max\{r_1, \cdots, r_k\}$, onde $r_i = \deg\,(m_i)$ $(1 \leq i \leq k)$. Logo $P(M,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n = \sum_{n=0}^{m} \lambda(M_n) t^n$. Agora suponha que $s > 0$ e que o teorema seja verdadeiro para $s - 1$ geradores. Para todo $n \geq 0$ considere a aplicação $\varphi_n : M_n \to M_{n+k_s}$, definida por $\varphi_n(m_n) \mapsto x_s m_n$, dessa forma a multiplicação por x_s é um homomorfismo de A-módulo cujo $\ker \varphi_n$ e $\operatorname{Coker} \varphi_n$ são denotados, respectivamente, por K_n e L_{n+k_s}. Portanto obtemos a seguente sequência exata

$$0 \to K_n \hookrightarrow M_n \xrightarrow{\varphi_n} M_{n+k_s} \twoheadrightarrow L_{n+k_s} \to 0 \tag{3.1}$$

Sejam $K = \bigoplus_{n \geq 0} K_n$ e $L = \bigoplus_{n \geq 0} L_n$. Afirmamos que K e L são A-módulos finitamente gerados. De fato, como K é soma direta de submódulos de M segue que K é submódulo de M. Temos que L é um módulo quociente de M, pois

$$\begin{aligned} L = \bigoplus_{n \geq 0} L_n &= \bigoplus_{n \geq 0} \frac{M_n}{\varphi_{n-k_s}(M_{n-k_s})} \\ &= \bigoplus_{n \geq 0} \frac{M_n}{x_s M_{n-k_s}} \\ &= \bigoplus_{n \geq 0} \frac{M_n}{M_n \cap x_s M} \quad (3.2) \\ &= \bigoplus_{n \geq 0} \frac{M_n + x_s M}{x_s M} \quad (3.3) \\ &= \frac{M}{x_s M} \quad (3.4) \end{aligned}$$

Portanto K e L são A-módulos finitamente gerados. Agora vamos justificar as igualdades (3.2), (3.3) e (3.4) acima. A igualdade (3.2) é válida pois $x_s M_{n-k_s} \subseteq M_n$ e como $M_{n-k_s} \subseteq M$ segue que $x_s M_{n-k_s} \subseteq x_s M$, portanto $x_s M_{n-k_s} \subseteq M_n \cap x_s M$. Por outro lado tome $y \in M_n \cap x_s M$, então $y = x_s m \in M_n$ e como $x_s \in A_{k_s}$ temos que $m \in M_{n-k_s}$ e portanto $y \in x_s M_{n-k_s}$. A igualdade (3.3) é consequência direta do terceiro teorema do isomorfismo e a igualdade (3.4) basta observar que

$$\bigoplus_{n \geq 0} \frac{M_n + x_s M}{x_s M} = \frac{M + x_s M}{x_s M} = \frac{M}{M \cap x_s M} = \frac{M}{x_s M},$$

pois $x_s M \subseteq M$. Através da proposição 2.2.6 segue que aplicando λ na sequência exata (3.1)

$$\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+k_s}) - \lambda(L_{n+k_s}) = 0, \quad (3.5)$$

e multiplicando (3.5) por t^{n+k_s}

$$\lambda(K_n)t^{n+k_s} - \lambda(M_n)t^{n+k_s} + \lambda(M_{n+k_s})t^{n+k_s} - \lambda(L_{n+k_s})t^{n+k_s} = 0, \quad (3.6)$$

somando (3.6) sobre n

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(K_n)t^{n+k_s} - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n)t^{n+k_s} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_{n+k_s})t^{n+k_s} - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(L_{n+k_s})t^{n+k_s} = 0,$$

ou seja,

$$P(K,t)t^{k_s} - P(M,t)t^{k_s} + \sum_{n=k_s}^{\infty} \lambda(M_n)t^n - \sum_{n=k_s}^{\infty} \lambda(L_n)t^n$$

e podemos reescrever

$$P(K,t)t^{k_s} - P(M,t)t^{k_s} + P(M,t) - \sum_{n=0}^{k_s-1} \lambda(M_n)t^n + \sum_{n=0}^{k_s-1} \lambda(L_n)t^n - P(L,t) = 0.$$

Logo $P(M,t)(1 - t^{k_s}) = P(L,t) - P(K,t)t^{k_s} + g(t)$, onde $g(t) = \sum_{n=0}^{k_s-1} \lambda(L_n)t^n - \sum_{n=0}^{k_s-1} \lambda(M_n)t^n$. Note que se mostrarmos que K e L são $A_0[x_1, \ldots, x_{s-1}]$-módulos finitamente gerados, então podemos usar a hipótese de indução e assim finalizar a demonstração do teorema. Para isso é suficiente mostrar que ambos K, L são anulados por x_s, pois daí (x_s) estará contido nos anuladores de K e L, portanto eles podem ser vistos como $\dfrac{A_0[x_1,\ldots,x_s]}{(x_s)} \simeq A_0[x_1,\ldots,x_{s-1}]-$módulos. Afirmamos que $x_sK = x_sL = 0$. De fato, seja $x \in K$, então $x = (x_n)_{n\geq 0}$ tal que uma quantidade finita de x_n são não nulos, logo $\varphi_n(x_n) = x_sx_n = 0$ para todo $n \geq 0$ e portanto $x_sx = x_s(x_n)_{n\geq 0} = 0$. Agora seja $y \in L$, então $y = (\overline{y_n})_{n\geq 0}$ tal que uma quantidade finita de $\overline{y_n}$ são não nulos. Como $\overline{y_n} \in L_n$, então $\overline{y_n} = y_n + \varphi_{n-k_s}(M_{n-k_s})$, onde $y_n \in M_n$. Temos que $x_s\overline{y_n} = x_sy_n + x_s\varphi_{n-k_s}(M_{n-k_s}) \in \dfrac{M_{n+k_s}}{\varphi_n(M_n)} = L_{n+k_s}$, mas $x_sy_n = \varphi_n(y_n) \in \varphi_n(M_n)$ e portanto $x_s\overline{y_n} = \overline{0}$ para todo $n \geq 0$. Assim $x_sy = 0$. Por fim aplicando a hipótese de indução

$$P(M,t)(1-t^{k_s}) = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{s-1}(1-t^{k_i})} - \frac{h(t)t^{k_s}}{\prod_{i=1}^{s-1}(1-t^{k_i})} + g(t)$$

$$P(M,t)(1-t^{k_s}) = \frac{f(t) - h(t)t^{k_s} + g(t)\left[\prod_{i=1}^{s-1}(1-t^{k_i})\right]}{\prod_{i=1}^{s-1}(1-t^{k_i})} = \frac{F(t)}{\prod_{i=1}^{s-1}(1-t^{k_i})}.$$

Logo

$$P(M,t) = \frac{F(t)}{\prod_{i=1}^{s}(1-t^{k_i})}$$

□

Observação: Sobre as hipótese do teorema 3.1.1 temos um caso particular muito importante, tal que $k_1 = \cdots = k_s = 1$, ou seja, A é uma A_0-álgebra finitamente gerada por elementos de grau 1. Neste caso $P(M,t) = f(t)(1-t)^{-s}$ e se $f(t)$ possui fatores $(1-t)$, então podemos cancelar e obter

$$P(M,t) = f(t)(1-t)^{-d}$$

tal que $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ e $(1-t)^{-d} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{d+n-1}{d-1}t^n$. Note que se $d > 0$, então $f(1) \neq 0$.

Corolário 3.1.1. Sejam $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ um anel noetheriano graduado e M um A-módulo graduado finitamente gerado. Suponha que $A = A_0[x_1,\ldots,x_s]$ tais que $\deg(x_i) = 1$. Então para todo n suficientemente grande, $\lambda(M_n)$ é um polinômio em n com coeficientes racionais de grau $d-1$.

Demonstração: Pelo teorema 3.1.1 $P(M,t) = f(t)(1-t)^{-s}$, ou seja, $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(M_n)t^n = f(t)(1-t)^{-s}$. Se $f(t)$ tem $(1-t)$ como fator, então podemos escrever $P(M,t) = f(t)(1-t)^{-d}$, onde $f(1) \neq 0$ e $d = d(M)$. Suponha que $f(t) = \sum_{k=0}^{N} a_kt^k$, logo

$$P(M,t) = \sum_{i=0}^{N} a_it^i\left[\binom{d-1}{d-1} + \binom{d}{d-1}t + \binom{d+1}{d-1}t^2 + \cdots + \binom{d+k-1}{d-1}t^k + \cdots\right]$$

Como $\lambda(M_n)$ é o coeficiente de t^n, então

$$\lambda(M_n) = \sum_{i=0}^{N} a_i\binom{d+n-i-1}{d-1} \tag{3.7}$$

Lembre que $\binom{x}{d} \overset{def}{=} \dfrac{x!}{d!(x-d)!} = \dfrac{\overbrace{x(x-1)(x-2)\cdots(x-d+1)}^{\text{d fatores}}}{d!}$ é um polinômio em $\mathbb{Q}[x]$ chamado **polinômio binomial** e portanto $\binom{x}{d}$ é um polinômio de grau d. Assim o lado direito da equação (3.7) é um polinômio, denotado por $\chi_M(n)$, em $\mathbb{Q}[n]$ de grau $d-1$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}\chi_M(n) &= \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_N)}{(d-1)!} n^{d-1} + (\text{ termos de menor grau }) \\ &= \frac{f(1)}{(d-1)!} n^{d-1} + (\text{ termos de menor grau })\end{aligned}$$

□

Definição 3.1.7. O polinômio $\chi_M(n)$ do corolário 3.1.1 é chamado de **polinômio de Hilbert**.

Observação: Sejam A um anel noetheriano graduado e M um $A-$módulo graduado, então pela proposição 3.1.3 A_0 é noetheriano, se adicionarmos a hipótese que A_0 é artiniano podemos concluir, pela proposição 3.1.4, que $l(M_n) < \infty$. Portanto o teorema de Hilbert-Serre pode ser usado no caso em que A_0 é um anel artiniano (em particular um corpo) e $\lambda(M_n)$ é o comprimento $l(M_n)$.

Exemplo 3.1.2. Seja $A = A_0[x_1, \ldots, x_s]$, onde A_0 é um corpo e os x_i são variáveis independentes. Então A_n é um A_0-módulo livre gerado por monômios $x^{m_1} \cdots x^{m_s}$, tal que $\sum_{i=1}^{s} m_i = n$. Lembre que o número de monômios com essa propriedade é dado pelo expressão $\binom{s+n-1}{s-1}$. Em outras palavras os A_n são A_0-espaços vetoriais, onde $\dim_{A_0} A_n = \binom{s+n-1}{s-1}$. Observe que a aplicação $\lambda : A_n \to \mathbb{Z}$, definida por $\lambda(A_n) = \dim_k A_n$ é aditiva. Então

$$P(M,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(A_n) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n-1}{s-1} t^n = (1-t)^{-s}$$

Agora vamos discutir uma versão particular do teorema de Hilbert-Serre, ou seja, vamos escolher um anel graduado e um módulo graduado finitamente gerado sobre esse anel. Essa particularização vai nos fornecer o objeto principal de estudo desse trabalho, o **polinômio de Hilbert-Samuel**.

Sejam A um anel semilocal noetheriano e $m = \mathrm{rad}(A)$. Se $q \trianglelefteq A$ tal que para algum $k > 0$ tem-se $m^k \subset q \subset m$, então q é dito ser um ideal de definição (ou q é um ideal $m-$primário). Sejam M um $A-$módulo finitamente gerado e $(q^n M)$ uma $q-$filtração estável de M. Considere

$$G(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} G_n(A) \text{ e } G(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} G_n(M)$$

o anel e módulo graduado associado, respectivamente. Então $G_0(A) = A/q$ é artiniano e pela proposição 3.1.2 $G(A)$ é um anel graduado noetheriano e $G(M)$ é um

$G(A)-$módulo finitamente gerado. Portanto pela nossa última observação $l(G_n(M)) = l(q^nM/q^{n+1}M) < \infty$ e além disso se $q = \sum_{i=1}^{s} Ax_i$, então $G(A) = G_0(A)[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}]$, onde $\overline{x_i}$ é a imagem de x_i em q/q^2. Assim

$$P(q, M, n+1) = l\left(\frac{M}{q^{n+1}M}\right) = \sum_{i=1}^{n} l(G_n(M)) \tag{3.8}$$

para todo $n \gg 0$.

Definição 3.1.8. O polinômio $P(q, M, n+1)$ da equação (3.8) é chamado **polinômio de Hilbert-Samuel**.

3.2 Teoria da Dimensão para Módulos Finitamente Gerados

Definição 3.2.1. Sejam A um anel noetheriano semilocal, M um A-módulo finitamente gerado e $m = \mathrm{rad}(A)$. Denotamos por $\delta(M)$ o menos valor para n tal que existem n elementos $x_1, \cdots, x_n \in m$ para o qual $l(M/(x_1M + \ldots + x_nM)) < \infty$. Denotamos por $d(M)$ o grau do polinômio de Hilbert-Samuel. A dimensão do módulo M, denotada por $\dim(M)$, é a dimensão do anel $A/\mathrm{Ann}(M)$, onde $\mathrm{Ann}(M)$ é o anulador de M.

Lema 3.2.1. Sejam A um anel noetheriano local e $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ uma sequência exata de A-módulos finitamente gerados. Então $d(M) = \max\{d(M'), d(M'')\}$.

Demonstração: Pela proposição 2.2.5 item $iii)$ podemos assumir que $M'' = \dfrac{M}{M'}$ e seja q um ideal $m-$primário. Então

$$\frac{M''}{q^nM''} = \frac{\dfrac{M}{M'}}{q^n\left(\dfrac{M}{M'}\right)} = \frac{\dfrac{M}{M'}}{\dfrac{q^nM + M'}{M'}} = \frac{M}{q^nM + M'}. \tag{3.9}$$

Onde a segunda e terceira igualdade em (3.9) segue, respectivamente, do exemplo 2.2.4 e do segundo teorema do isomorfismo. Note que

$$l\left(\frac{M}{q^nM}\right) - l\left(\frac{q^nM + M'}{q^nM}\right) = l\left(\frac{\dfrac{M}{q^nM}}{\dfrac{q^nM + M'}{q^nM}}\right) = l\left(\frac{M}{q^nM + M'}\right) \tag{3.10}$$

A primeira igualdade em (3.10) segue do fato da função comprimento ser aditiva. Logo

$$l\left(\frac{M}{q^nM}\right) = l\left(\frac{M}{q^nM + M'}\right) + l\left(\frac{q^nM + M'}{q^nM}\right).$$

Portanto usando (3.9) e o terceiro teorema do isomorfismo temos que

$$l\left(\frac{M}{q^nM}\right) = l\left(\frac{M''}{q^nM}\right) + l\left(\frac{M'}{q^nM \cap M'}\right).$$

Colocando $\varphi_n = l\left(\dfrac{M'}{q^n M \cap M'}\right)$, temos que $P(q, M, n) = P(q, M", n) + \varphi_n$. Além disso como $P(q, M", n)$ e φ_n assumem apenas valores positivos segue que $d(M)$ coincide com qualquer que seja $d(M')$ ou $\deg(\varphi)$. Pelo lema de Artin-Rees, existe um $c > 0$ tal que $n > c \Rightarrow q^{n+1}M' \subset M' \cap q^{n+1}M \subset q^{n-c+1}M'$ e consequentemente $P(q, M', n+1) \geq \varphi_n \geq P(q, M', n+1-c)$. Fazendo $n \to \infty$ segue que φ_n e $P(q, M', n)$ tem o mesmo coeficiente líder. □

Lema 3.2.2. Seja A um anel noetheriano semilocal. Então $d(A) \geq \dim(A)$.

Demonstração: Ver [8] Teo. 14.3.2, pág. 338.

□

Teorema 3.2.1 (Krull-Chavalley-Samuel)**.** Sejam A um anel noetheriano semilocal e M um A-módulo finitamente gerado. Então os seguintes inteiros coincidem

i) $\dim(M)$

ii) o grau do polinômio de Hilbert-Samuel $P(q, M, n+1)$, onde q é um ideal de definição qualquer de A.

iii) o menos inteiro n tal que existem n elementos $x_1, \ldots, x_n$ para os quais $l(M/(x_1M + \cdots + x_nM)) < \infty$, onde $x_1, \ldots, x_n$ são elementos de $m = \mathrm{rad}(A)$.

Demonstração: A demonstração será feita mostrando que $\delta(M) \geq d(M) \geq \dim(M) \geq \delta(M)$. Primeiro note que M é noetheriano, pois M é finitamente gerado sobre um anel noetheriano, logo todo submódulo de M é finitamente gerado. Pelo teorema 2.3.4 existe uma cadeia de submódulos de M

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

tal que $\dfrac{M_i}{M_{i-1}} \simeq \dfrac{A}{p_i}$ $(1 \leq i \leq n)$, onde $p_i \in Ass\,(M) \subseteq \mathrm{Spec}\, A$. Para qualquer sequência exata

$$0 \to M' \to M \to M" \to 0 \tag{3.11}$$

de A-módulos finitamente gerados e o lema 3.2.1 nos garante que $d(M) = \max\{d(M'), d(M")\}$. Então por meio das sequências exatas

$$0 \to M_{i-1} \to M_i \to \frac{M_i}{M_{i-1}} \to 0 \tag{3.12}$$

temos $d(M_i) = \max\{d(M_{i-1}), d(M_i/M_{i-1})\} = \max\{d(M_{i-1}), d(A/p_i)\}$ e portanto $d(M) = \max\{d(A/p_i)\}$. Considerando uma sequência do tipo (3.11) o teorema 2.2.4 nos garante que $\mathrm{Supp}\,(M) = \mathrm{Supp}\,(M') \cup \mathrm{Supp}\,(M")$. Sabemos que $\dim(M) = \dim(A/\mathrm{Ann}\,(M))$, ou seja, a dimensão de M é o máximo das coalturas dos ideais primos pertencente ao conjunto $V(\mathrm{Ann}(M))$. Por outro lado pela proposição 2.2.11 temos que $V(\mathrm{Ann}\,(M)) = \mathrm{Supp}\,(M)$ e pelas sequências exatas (3.12) concluímos que

$$\mathrm{Supp}\,(M) = \mathrm{Supp}\,(M_1) \cup \mathrm{Supp}\,(M_2/M_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Supp}\,(M_n/M_{n-1})$$

que é igual a

$$\mathrm{Supp}\,(A/p_1) \cup \mathrm{Supp}\,(A/p_2) \cup \cdots \cup \mathrm{Supp}\,(A/p_n).$$

Usando o teorema 2.3.5 segue que $\text{Supp}\,(A/p_i) = V(p_i)$ e portanto $\dim(M) = \max\{\dim(A/p_i)\}$. Então pelo lema 3.2.2 tem-se

$$d(M) = \max\{d(A/p_i)\} \geq \max\{\dim(A/p_i)\} = \dim(M)$$

Mostremos que $\delta(M) \geq d(M)$. Seja $m = \text{rad}(A)$. Se $\delta(M) = 0$, então $l(M) < \infty$ e portanto o polinômio $P(m, M, n)$ é constante, logo $d(M) = 0$. Agora suponha que $\delta(M) = s > 0$, logo existem $x_1, \cdots, x_s \in m$ tais que $l(M/(x_1 + \cdots + x_s M)) < \infty$ e ponhamos $M_i = M/(x_1 M + \cdots + x_i M)$, então $\delta(M_i) = \delta(M) - i$. Note que

$$\begin{aligned}
l(M_1/(m^n M_1)) &= l(M/(x_1 M + m^n M)) \\
&= l(M/(m^n M)) - l(x_1 M/(x_1 M \cap m^n M)) && (3.13) \\
&= l(M/(m^n M)) - l(M/(m^n M : x_1)) && (3.14) \\
&\geq l(M/(m^n M)) - l(M/(m^{n-1} M)) && (3.15)
\end{aligned}$$

assim para $n \gg 0$, temos $P(m, M_1, n) \geq P(m, M, n) - P(m, M, n-1)$ implicando que $d(M_1) \geq d(M) - 1$. Por recorrência sobre s, obtemos $d(M_s) \geq d(M) - s$, mas $\delta(M_s) = 0$ e daí $d(M_s) = 0$. Portanto $s \geq d(M)$. A passagem da equação (3.13) para (3.14) é consequência da aplicação induzida pela multiplicação por x_1:

$$M \xrightarrow{x_1} \frac{M}{x_1 M \cap m^n M}$$

A passagem da equação (3.14) para (3.15) é consequência de $m^{n-1}M \subset m^n M : x_1$. O último passo é mostrar que $\dim(M) \geq \delta(M)$ que será feito por indução sobre $\dim(M)$. Se $\dim(M) = 0$, então $\text{Supp}\,(M) = V(\text{Ann}\,(M))$ é formado apenas por ideais maximais de A e $l(M) < \infty$ (Ver [6], 16.1.10, pág. 25), logo $\delta(M) = 0$. Agora suponha que $\dim(M) > 0$ e sejam $p_i \in \text{Supp}\,(M)$ elementos minimais, onde $1 \leq i \leq t$ e coht $p_i = \dim(M)$, então cada p_i não é um ideal maximal, pois se fosse $\dim(M) = 0$ e consequentemente não contém m. Logo podemos escolher $x \in m$ tal que $x \notin p_i$ para todo $i = 1, \ldots, t$. Assim se $M_1 = M/xM$, então $\dim(M_1) \leq \dim(M) - 1$. De fato, perceba que os ideais primos de A que contém $\text{Ann}\,(M_1)$ também contém $\text{Ann}\,(M) + (x)$. Além disso para toda cadeia de ideais primos $p = p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_k$, tal que $\text{Ann}\,(M) + (x) \subset p$ deve acontecer $p_i \subset p$, portanto $\dim(M_1) < \dim(M)$. Usando a hipótese de indução temos $\delta(M_1) \leq \dim(M_1)$. Por outro lado seja $n = \delta(M_1)$, então existem n elementos $x_1, \cdots, x_n \in m$ tal que $l(M_1/(x_1 M_1 + \cdots + x_n M_1)) < \infty$, mas $M_1/(x_1 M_1 + \cdots + x_n M_1) \simeq M/(xM + x_1 M \cdots + x_n M)$. Logo $\delta(M) \leq \delta(M/xM) + 1$. Portanto $\delta(M) \leq \dim(M_1) + 1 \leq \dim(M)$.

□

Definição 3.2.2. Sejam (A, m) um anel local e M um A-módulo não nulo finitamente gerado de dimensão d. Um conjunto de d elementos $(x_i)_{1 \leq i \leq d}$ do ideal maximal m é dito ser um sistema de parâmetro para M se $l(M/(x_1 M + \cdots + x_d M)) < \infty$.

Observação: No final do último passo da demonstração do teorema 3.2.1 acima acabamos demonstrando o seguinte resultado.

Proposição 3.2.1. Sejam A um anel noetheriano semilocal com $rad(A) = m$, M um A-módulo finitamente gerado e $x \in m$. Então

i) Sejam p_i ideais primos minimais pertencentes a Supp (M), ou seja, $\dim(A/p_i) = \dim(M)$. Se $x \notin p_i$, para todo índice i, então $\dim(M/xM) \leq \dim(M) - 1$.

ii) $\dim(M/xM) \geq \dim(M) - 1$.

Demonstração: O item *ii)* vem do fato que mostramos no final da demonstração do teorema 3.2.1 que $\delta(M/xM) \geq \delta(M) - 1$ e assim basta aplicar o o teorema 3.2.1 .

□

Corolário 3.2.1. Sejam A um anel noetheriano semilocal com rad(A) $= m$, M um A-módulo finitamente gerado, $x \in m$ e p_i os elementos minimais do $\mathrm{Supp}(M)$. Então, para que $\dim(M/xM) = \dim(M) - 1$ é necessário e suficiente que x não pertença a nenhum dos p_i.

Demonstração: Se x não pertence a nenhum p_i resulta da proposição 3.2.1 que $\dim(M/xM) = \dim(M) - 1$. Reciprocamente, se $\dim(M/xM) = \dim(M) - 1$, então nenhum p_i deve pertencer ao $\mathrm{Supp}(M/xM)$, além disso esse conjunto é caracterizado pelos ideais primos de A que contém $\mathrm{Ann}(M) + (x)$ e p_i contém $\mathrm{Ann}(M)$, portanto todo p_i não deve conter x.

□

Sobre as hipóteses da proposição 3.2.1 acima, sejam $x_1, \cdots, x_k \in m$ e $N = M/(x_1M + \cdots + x_kM)$, se $y_1, \cdots, y_n$ são elementos em m tais que $l(N/(y_1N + \cdots + y_nN)) < \infty$, então $l(M/(x_1M + \cdots + x_kM + y_1M + \cdots + y_nM)) < \infty$, pois

$$\frac{N}{y_1N + \cdots + y_nN} \simeq \frac{M}{x_1M + \cdots + x_kM + y_1M + \cdots + y_nM}.$$

Portando $\delta(M) \leq \delta(N) + k$, logo pelo teorema 3.2.1 temos

$$\dim(M/(x_1M + \cdots + x_kM)) \geq \dim(M) - k$$

Proposição 3.2.2. Sejam A um anel noetheriano semilocal, $m = rad(A)$, $x_1, \ldots, x_k$ elementos de m e M um A-módulo finitamente gerado de dimensão d. Então para que

$$\dim(M/(x_1M + \cdots + x_kM)) = \dim(M) - k$$

é necessário e suficiente que $x_1, \ldots, x_k$ faça parte de um sistema de parâmetro para M.

Demonstração: Seja $N = \dfrac{M}{x_1M + \cdots + x_kM}$ de comprimento finito, então existe $y_1, \cdots, y_n \in m$, tal que $l\left(\dfrac{N}{y_1N + \cdots + y_nN}\right) < \infty$. Como

$$\frac{N}{y_1N + \cdots + y_nN} \simeq \frac{M}{x_1M + \cdots + x_kM + y_1M + \cdots + y_nM},$$

então

$$l\left(\frac{M}{x_1M + \cdots + x_kM + y_1M + \cdots + y_nM}\right) < \infty.$$

Se $\dim(M) = \dim(M/(x_1M + \cdots + x_kM)) + k$, então pelo teorema 3.2.1 o índice n é igual a d, ou seja, existem $d - k$ elementos $y_{k+1}, \ldots, y_d$ de m, tais que $x_1, \cdots, x_k, y_{k+1}, \cdots, y_d$ é um sistema de parâmetro para M. Reciprocamente, se existe $(x_i)_{k+1 \leq i \leq d}$ tal que $x_1, \cdots, x_d$ é um sistema de parâmetro para M, então $\dfrac{M}{x_1M + \cdots + x_dM}$

tem comprimento finito, mas $\dfrac{N}{x_{k+1}N + \cdots + x_dN} \simeq \dfrac{M}{x_1M + \cdots + x_dM}$. Portanto pelo teorema 3.2.1,

$$d - k \leq \dim(N) \leq d - k$$

$\square$

Definição 3.2.3. Sejam A um anel noetheriano e M um A-módulo. Um elemento $a \in A$ é chamado de M-regular se A não é divisor de zero para M. Uma sequência $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ de elementos de A é chamada M-regular se x_1 é M-regular e para $i = 2, 3, \cdots, n$, x_i é $(M/(x_1M+\cdots+x_{i-1}M))-$regular. O número n é chamado comprimento da sequência $M-$regular.

Observação: Lembre que, se $xm = 0$, para algum $m \in M$ e $x \in A$ implicar $m = 0$, então x é um não divisor de zero em M. Assim quando a homotetia sobre M, definida por $m \mapsto xm$ for injetiva, então x é um não divisor de zero em M. Com isso a próxima proposição nos dá uma outra caracterização para elementos de A que não são divisores de zero em M.

Proposição 3.2.3. Sejam A um anel noetheriano, M um A-módulo e $a \in A$. Para a homotetia sobre M definida por $m \mapsto am$ ser injetiva é necessário e suficiente que a não pertença a nenhum ideal primo associado com M.

Demonstração: Se $a \in p \in Ass\,(M)$, então $p = \mathrm{Ann}(x)$, para algum $x \in M$ não nulo, logo $ax = 0$ e consequentemente a homotetia não é injetiva. Reciprocamente, suponha que a homotetia não é injetiva, ou seja, $am = 0$ para algum $m \in M$ não nulo. Então o A-módulo $Am \neq \{0\}$ e $Ass\,(M) \neq \emptyset$, logo existe $p \in Ass\,(Am)$, tal que $p = \mathrm{Ann}\,(bm)$ para algum $b \in A$. Além disso $abm = 0$ e portanto $a \in \mathrm{Ann}\,(bm) = p$.

$\square$

Proposição 3.2.4. Sejam (A, m) um anel noetheriano local, M um A-módulo finitamente gerado e $(x_i)_{1\leq i\leq k}$ uma sequência M-regular. Então

$$\dim(M/(x_1M + \cdots + x_kM)) = \dim(M) - k$$

e $(x_i)_{1\leq i\leq k}$ é parte de um sistema de parâmetro para M.

Demonstração: Vamos fazer essa demonstração por recorrência sobre k. Como $(x_i)_{1\leq i\leq k}$ é uma sequência $M-$regular, então por definição x_1 não é um divisor de zero para M, logo pela proposição 3.2.3 x_1 não pertence a nenhum ideal associado a M e pela proposição 3.2.1 $\dim(M/x_1M) = \dim(M) - 1$. Agora considere $N = \dfrac{M}{x_1M + \cdots + x_{k-1}}M$ tal que $\dim(N) = \dim(M) - (k-1)$. Pelo fato da sequência $(x_i)_{1\leq i\leq k}$ ser $M-$regular, segue que x_k é $N-$regular, então pela proposição 3.2.3 x_k não pertence a nenhum ideal associado a N. Portanto pela proposição 3.2.1 $\dim(N/x_kN) = \dim(N) - 1 = \dim(M) - k$ e além disso $\dfrac{N}{x_kN} \simeq \dfrac{M}{x_1M + \cdots + x_kM}$ com isso usando a proposição 3.2.2 a sequência $(x_i)_{1\leq i\leq k}$ faz parte de um sistema de parâmetro.

$\square$

Observação: Note que a quantidade de elementos de uma sequência $(x_i)_{1\leq i\leq k}$ $M-$regular não deve superar a dimensão do $A-$módulo M.

Definição 3.2.4. Sejam (A, m) um anel local noetheriano e M um A-módulo não nulo finitamente gerado. A profundidade de um A-módulo M é o maior inteiro n para o qual existe uma sequência M-regular de comprimento n contida em m. Denotaremos a profundidade de M por prof (M).

Observação: Pelo nossa últimas observação concluímos que $\text{prof}\,(M) \leq \dim\,(M)$.

Proposição 3.2.5. Sejam (A, m) um anel local noetheriano e M um A-módulo finitamente gerado. Então

i) Para todo elemento $x \in m$ M-regular, temos que $\text{prof}\,(M/xM) = \text{prof}\,(M) - 1$.

ii) Se $M \neq \{0\}$, então $\text{prof}\,(M) \leq \inf\limits_{p \in Ass\,(M)} \dim\,(A/p) \leq \dim\,(M)$.

iii) Para que $\text{prof}\,(M) = 0$ é necessário e suficiente que $m \in Ass\,(M)$.

Demonstração: Ver [6], Prop. 16.4.6, pág. 33.

□

3.3 Módulos de Cohen-Macaulay e Elementos Superficiais

Definição 3.3.1. Seja A um anel local noetheriano. Um A-módulo M é chamado de Cohen-Macaulay se $M = \{0\}$ ou se $M \neq \{0\}$ e $\text{prof}(M) = \dim(M)$.

Corolário 3.3.1. Sejam A um anel local noetheriano e M um A-módulo não nulo finitamente gerado. Se M é um A-módulo de Cohen-Macaulay, então $\dim\,(A/p) = \dim\,(M)$ para todo $p \in Ass\,(M)$.

Demonstração: Segue da proposição 3.2.5 item *ii*).

□

Proposição 3.3.1. Sejam (A, m) um anel local noetheriano, M um A-módulo não nulo finitamente gerado e $x \in m$. Se M é um A-módulo de Cohen-Macaulay, então as seguintes condições são equivalentes

i) x é M-regular.

ii) $\dim(M/xM) = \dim(M) - 1$

iii) x não pertence a nenhum elemento minimal de Supp (M).

Demonstração: A equivalência *i*) e *iii*) resulta da proposição 3.2.3. A equivalência *ii*) e *iii*) resulta do corolário 3.2.1.

□

Observação: Se M é um módulo de Cohen-Macaulay sobre um anel local noetheriano A e x um elemento qualquer $M-$Regular de rad(A), então $\dfrac{M}{xM}$ também é um $A-$módulo de Cohen-Macaulay, pois pelas proposições 3.2.5 e 3.2.1, temos que

$$\text{prof}\,(M/xM) = \text{prof}\,(M) - 1 = \dim(M) - 1 = (\dim\,(M/xM) + 1) - 1 = \dim\,(M/xM)$$

Corolário 3.3.2. Sejam (A,m) um anel local noetheriano, M um A-módulo não nulo finitamente gerado e $(x_i)_{1\leq i\leq r}$ um sequência de elementos de m. Se M é um A-módulo de Cohen-Macaulau, então as seguintes condições são equivalentes

i) A sequência $(x_i)_{1\leq i\leq r}$ é M-regular.

ii) $\dim(M/(x_1M+\cdots+x_rM)) = \dim(M) - r$.

iii) (x_i) faz parte de um sistema de parâmetro para M.

Demonstração: A equivalência *ii)* e *iii)* segue da proposição 3.2.2. Da proposição 3.2.4 segue que *i)* implica *iii)*. Para mostra que *iii)* implica *i)* vamos proceder por recorrência sobre r. Se x_1 faz parte de um sistema de parâmetro para M, então pela proposição 3.2.2 temos que $\dim(M/x_1M) = \dim(M) - 1$, logo pela proposição 3.3.1 segue que x_1 é $M-$regular e pela nossa última observação $T = \dfrac{M}{x_1M}$ é um $A-$módulo de Cohen-Macaulay. Agora suponha o resultado verdadeiro para uma sequência $(x_i)_{1\leq i\leq r-1}$. Por outro lado temos que $(x_i)_{2\leq i\leq r}$ faz parte de um sistema de parâmetro para T, logo pela hipótese de recorrência temos que $(x_i)_{2\leq i\leq r}$ é $T-$regular e portanto a sequência $(x_i)_{1\leq i\leq r}$ é $M-$regular .

□

Observação: Se as condições do corolário 3.3.2 são satisfeitas, então $M/(x_1M+\cdots+x_rM)$ também é um $A-$módulo de Cohen-Macaulay. Pela proposição 3.2.5 item *iii)* temos que para $\dim(M) = 0$ é necessário e suficiente que o ideal maximal m seja associado a M.

Os teoremas seguintes, dessa seção, serão de extrema importância para concretizar o último capítulo deste trabalho. Tais teoremas resultará de lemas cujas demonstrações serão devidamente referenciadas.

Lema 3.3.1 (Coeficientes binomiais). i) Para $n \geq d$ naturais,

$$\begin{aligned}\binom{n}{d} &= \frac{n!}{d!(n-d)!}\\ &= \text{número de subconjuntos}\, S \subseteq \{1,\cdots,n\},\ \text{com}\, |S| = d.\end{aligned}$$

ii) Para todo $d \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{x+1}{d} = \binom{x}{d} + \binom{x}{d-1}$$

iii) Para inteiros n e d tais que $0 \leq d \leq n$,

$$\sum_{v=0}^{n}\binom{d+v-1}{d-1} = \binom{d+n}{d}$$

Demonstração: Os itens *i)* e *ii)* podem ser encontrados em [8], lema 14.1.3, pág. 329. Já o item *iii)* basta proceder por indução sobre n e por fim aplicar o item *ii)*.

□

Lema 3.3.2. Sejam A um anel local noetheriano, M um A-módulo de Cohen-Macaulay d dimensional, q um ideal de A tal que M/qM seja de comprimento finito, x um elemento de q e $(x_i)_{1\leq i\leq d}$ uma sequência M-regular. Então são válidas as seguintes afirmações:

i) $q^{n+1}M\cap xM = Ax\cdot(q^{n+1}M : Ax)$ e $xM/(Ax.(q^{n+1}M : Ax)) = M/(q^{n+1}M : Ax)$.

ii) $q^{n+1}M : Ax_d = q^nM$

Demonstração: A afirmação do item $i)$ é encontrada em [9] pág. 214 e o item $ii)$ é encontrado em [7], lema 2.13, pág. 16.

□

Lema 3.3.3. Sejam A um anel noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado de Cohen-Macaulay d dimensional, q um ideal de A tal que M/qM seja de comprimento finito e x um elemento de q. Então para todo $n\geq 0$, temos

$$l\left(\frac{(M/xM)}{q^{n+1}(M/xM)}\right) = l\left(\frac{M}{q^{n+1}M}\right) - l\left(\frac{M}{q^{n+1}M : Ax}\right)$$

Demonstração: A demonstração desse lema segue da expansão da seguinte diferença

$$\begin{aligned}
l\left(\frac{M}{q^{n+1}M}\right) - l\left(\frac{(M/xM)}{q^{n+1}(M/xM)}\right) &= l\left(\frac{M}{q^{n+1}M}\right) - l\left(\frac{\dfrac{M}{xM}}{\dfrac{q^{n+1}M+xM}{xM}}\right) && (3.16)\\
&= l\left(\frac{M}{q^{n+1}M}\right) - l\left(\frac{M}{q^{n+1}M+xM}\right) && (3.17)\\
&= l\left(\frac{\dfrac{M}{q^{n+1}M}}{\dfrac{M}{q^{n+1}M+xM}}\right) && (3.18)\\
&= l\left(\frac{q^{n+1}M+xM}{q^{n+1}M}\right) && (3.19)\\
&= l\left(\frac{xM}{q^{n+1}M\cap xM}\right) && (3.20)\\
&= l\left(\frac{xM}{Ax.(q^{n+1}M : Ax)}\right) && (3.21)\\
&= l\left(\frac{M}{q^{n+1}M : Ax}\right) && (3.22)
\end{aligned}$$

A equação (3.16) é obtida pelo exemplo 2.2.4. As equações (3.17) e (3.19) segue do segundo teorema do isomorfismo. A equação (3.18) vem do fato que a função comprimento ser aditiva, proposição 2.2.8. A equação (3.20) é consequência do terceiro teorema do isomorfismo e as equações (3.21) e (3.22) são obtidas através do lema 3.3.2.

□

Teorema 3.3.1. Sejam A um anel local noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado de Cohen-Macaulay d dimensional não nulo e $(x_i)_{1\leq i\leq d}$ um sistema de parâmetro para M. Se q é um ideal de A tal que $q = Ax_1 + \cdots + Ax_d$, então

$$l\left(\frac{M}{q^{n+1}M}\right) = l\left(\frac{M}{qM}\right)\binom{n+d}{d}$$

para todo $n \geq 0$.

Demonstração: O teorema será demonstrado por indução sobre a dimensão de M. O caso em que $\dim(M) = 0$ é trivial. Se $\dim(M) = 1$ a $M-$regularidade de x_1 implica que temos um isomorfismo $q^nM/(q^{n+1}M) = M/q^nM$ dada pela aplicação definida por $m \mapsto x_1^n m + q^{n+1}M$. Logo

$$l\left(\frac{M}{q^{n+1}M}\right) = \sum_{i=1}^{n} l\left(\frac{q^iM}{q^{i+1}M}\right) = l\left(\frac{M}{qM}\right)\binom{n+1}{n}$$

para todo $n \geq 0$. Assuma $d > 1$ e considere o teorema verdadeiro sempre quem um módulo de Cohen-Macaulay tenha dimensão $d-1$. Sejam $q' = Ax_1 + \cdots + Ax_{d-1}$ e $M' = \dfrac{M}{x_dM}$. Como $(x_i)_{1\leq i\leq d}$ um sistema de parâmetro para M e $\dfrac{M'}{x_1M' + \cdots + x_{d-1}M'} \simeq \dfrac{M}{x_1M + \cdots + x_dM}$, então $(x_i)_{1\leq i\leq d-1}$ é um sistema de parâmetro para M'. Além disso (x_d) faz parte de um sistema de parâmetro para M, então pela proposição 3.2.2 $\dim(M/x_dM) = d-1$ e pela proposição 3.3.1 M/x_dM é uma $A-$módulo de Cohen-Macaulay. Portanto pela hipótese de indução temos que

$$l\left(\frac{M'}{q'^{n+1}M'}\right) = l\left(\frac{M'}{q'M'}\right)\binom{n+d-1}{d-1}$$

para todo $n \geq 0$. Dos lemas 3.3.2 e 3.3.3 segue que

$$l\left(\frac{M}{q^{n+1}M}\right) - l\left(\frac{M}{q^nM}\right) = l\left(\frac{M'}{q'M'}\right)\binom{n+d-1}{d-1}.$$

Como M/qM e $M'/q'M'$ são isomorfos e se denotarmos $l_n = l\left(\dfrac{M}{q^nM}\right)$, então $l_{n+1} - l_n = l_1\dbinom{n+d-1}{d-1}$. Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k}(l_{n+1} - l_n) &= l_1\sum_{n=1}^{k}\binom{n+d-1}{d-1}\\
l_{k+1} - l_1 &= l_1\sum_{n=1}^{k}\binom{n+d-1}{d-1}\\
l_{k+1} &= l_1 + l_1\sum_{n=1}^{k}\binom{n+d-1}{d-1}\\
&= l_1\sum_{n=0}^{k}\binom{n+d-1}{d-1}\\
&= l_1\binom{k+d}{d}
\end{aligned}$$

A última equação segue do lema 3.3.1 item *iii*).

□

Definição 3.3.2. Sejam A um anel noetheriano, não necessariamente local, M um A-módulo finitamente gerado e b um ideal de A tal que M/bM tenha comprimento finito. Podemos reescrever o polinômio de Hilbert-Samuel como

$$P(b,M,n+1) = \sum_{i=0}^{d}(-1)^i e_i(b,M)\binom{n+d-i}{d-i},$$

onde $e_i(b,M)$ são inteiros racionais ([9], pág. 216) chamados coeficientes normalizados de Hilbert.

Sejam $M \neq \{0\}$ um módulo finitamente gerado sobre um anel noethereiano A, não necessariamente local, e b um ideal próprio de A. Sabemos que o submódulo bM admite uma decomposição primária reduzida (ou minimal), então pelos teoremas 2.4.1 e 2.4.3 segue que uma condição necessária e suficiente para que M/bM tenha comprimento finito é que os ideais primos associados com bM sejam maximais. Temos pela proposição 2.3.5 que $Ass\left(\dfrac{M}{bM}\right) \subset \text{Supp}\left(\dfrac{M}{bM}\right)$ e através da proposição 2.2.11 segue que os ideais maximais associados com bM contém $\text{Ann}\,(M/bM)$, então esses ideais são caracterizados por conter $b + \text{Ann}\,(M)$. Se m é um desses ideais, então $S^{-1}A = A_m$, onde $S = A\ m$ é um conjunto multiplicativo fechado. Portanto a extensão de b em A_m é $A_m b$ que por sua vez é um ideal em A_m, proposição 2.2.12. Pelo corolário 2.2.3 item c) temos que M_m/bM_m é de comprimento finito sobre A_m tal que $bM_m = (A_m b)M_m$, logo os ideais maximais de A_m associados com bM_m são caracterizados por conter $S^{-1}(b + \text{Ann}\,(M))$. O conjunto dos primos associados com $b^n M$ coincide com os primos associados com bM (ver [9], pág. 216). Portanto $M/b^n M$ é um $A-$módulo de comprimento finito tal que

$$l\left(\frac{M}{b^n M}\right) = \sum_m l\left(\frac{M_m}{b^n M_m}\right)$$

A nossa primeira definição de um $A-$módulo de Cohen-Macaulay usava a hipótese de A ser um anel **local** noetheriano. No entanto a próxima definição irá nos dizer quando um módulo M sobre um anel noetheriano A, não necessariamente local, é de Cohen-Macaulay.

Definição 3.3.3. Seja A um anel noetheriano. Um A-módulo M é chamado módulo de Cohen-Macaulay se $M = \{0\}$ ou se $M \neq \{0\}$ e M_m é um A_m- módulo de Cohen-Macaulay cuja dimensão coincide com $\dim(M)$ para todo ideal maximal m contendo $\text{Ann}\,(M)$.

Sejam A um anel noetheriano, $M \neq \{0\}$ um A- módulo de Cohen-Macaulay e q um ideal próprio de A tal que M/qM seja de comprimento finito, então pelos argumentos previamente discutidos tem-se

i) $P(q,M,n) = \sum_m P(A_m\, q, M_m, n)$.

ii) $d = \dim(M)$, onde d é o grau do polinômio $P(q,M,n)$.

iii) $e_i(q,M) = \sum_m e_i(A_m\, q, M_m)$.

Observação: Note que se A não for um anel local nós podemos trabalhar com a localização de A em m, como foi feito anteriormente, ou seja, podemos passar a trabalhar com o anel A_m e com os A_m-módulos M_m.

Definição 3.3.4. Sejam A um anel local noetheriano, M um A-módulo finitamente gerado e q um ideal de A. Um elemento M-regular x de A é M-superficial de ordem s para q se, e somente se, $x \in q^s$ e

$$q^n M : Mx = q^{n-s} M$$

para todo n suficientemente grande.

Proposição 3.3.2. Sejam A um anel local noetheriano, m seu ideal maximal, $M \neq \{0\}$ um A-módulo finitamente gerado, q um ideal próprio de A tal que M/qM possui comprimento finito e $(b_i)_{1 \leq i \leq r}$ uma família finita de ideais de A tais que nenhum $b_i M$ é aberto na m-topologia de M, ou seja, nenhum $b_i M$ contém um submódulo da forma $m^n M$. Então existe um inteiro $s > 0$ e um elemento x de A tal que x é M-superficial de ordem s para q e $x \notin b_i$ para todo i. Se ainda o corpo residual A/m é infinito, então o inteiro s pode ser especificado.

Demonstração: Ver [7], Prop. 3.2, pág. 26.

4 Coeficientes Normalizados do Polinômio de Hilbert-Samuel

Este capítulo será inteiramente dedicado ao estudo sobre os coeficientes do polinômio de Hilbert-Samuel. Para isso apresentaremos dois teoremas que nos dirá, sobre determinadas hipóteses, o sinal ou o valor de certos coeficientes do polinômio de Hilbert-Samuel. Também serão abordados alguns resultados extremamente importante envolvendo os coeficientes que serão de suma importância para demonstrar os dois teoremas principais desse capítulo.

4.1 Os coeficientes $e_0(q, M)$ e $e_1(q, M)$

Lema 4.1.1. Sejam (A, m) um anel local noetheriano com corpo residual A/m infinito e $M \neq \{0\}$ um A-módulo de Cohen-Macaulay finitamente gerado de dimensão $d \geq 1$. Se q é um ideal próprio de A tal que M/qM é de comprimento finito, então exite um elemento x de A que é M-superficial de ordem 1 para q. Se $d = 1$, então M/xM é de comprimento finito e

$$e_0(q, M) = e_0(Ax, M) = l\left(\frac{M}{xM}\right)$$

Demonstração: Como A é noetheriano e M é finitamente gerado, então pelo teorema 2.4.2 todo submódulo de M, em particular o submódulo nulo $\{0\}$, admite uma decomposição primária da forma

$$\{0\} = \bigcup_{p \in Ass\,(M)} Q(p),$$

onde $Q(p)$ é $p-$primário com respeito a M. Seja p um ideal primo associado ao submódulo nulo de M, então pM não é aberto na $m-$topologia de M. De fato, suponha que $m^n M \subseteq pM$ para algum $n \geq 0$. Então $m^n \subseteq pM : M = \mathrm{Ann}\,(M/pM)$ e como o radical preserva inclusão e $\sqrt{m^n} = m$, para todo n, segue que m esta contido no radical de $\mathrm{Ann}\,(M/pM)$. Perceba que se $p \in Ass\,(M)$, então $p \supset \mathrm{Ann}\,(M) = \bigcap_{m \in M} \mathrm{Ann}\,(m)$, logo $p + \mathrm{Ann}\,(M) = p$ com isso é imediata a verificação que o radical do $\mathrm{Ann}\,(M/pM)$ coincide com o radical de $p + \mathrm{Ann}\,(M) = p$, portanto pela maximalidade de m temos que $p = m$. Como m é associado com $\{0\}$ e M é Cohen-Macaulay, então pelo corolário 3.3.1 segue que $\dim\,(M) = \dim\,(A/m) = 0$ que é uma contradição, pois estamos considerando $\dim\,(M) \geq 1$. Nessas condições a proposição 3.3.2 nos garante que existe um elemento $x \in A$ é $M-$superficial de ordem 1 para q e que pertende a p, portanto

x é M-regular, pois os elementos de p são não divisores de zero para M (Ver [4], Coro. 7.4, pág. 100). Portanto pelos lemas 3.3.2 e 3.3.3,

$$P(q, M/xM, n) = P(q, M, n) - P(q, M, n-1). \tag{4.1}$$

Se $d = 1$

$$P(q, M, n) = e_0(q, M)\binom{n}{1} - e_1(q, M)\binom{n+1}{0} = e_0(q, M)n - e_1(q, M)$$

e

$$P(q, M, n-1) = e_0(q, M)(n-1) - e_1(q, M).$$

Portanto a equação (4.1) pode ser reescrita da forma

$$P(q, M/xM, n) = e_0(q, M)$$

Como x é M-regular, segue do lema 3.3.2 que x é $M-$superficial de ordem 1 para Ax. Consequentemente as expressões acima podem ser repassadas de q para Ax, logo

$$P(Ax, M/xM, n) = e_0(Ax, M).$$

Seja $q' = Ax$, então pelo teorema 3.3.1

$$l\left(\frac{M}{q'^{n+1}M}\right) = l\left(\frac{M}{q'M}\right)\binom{n+1}{1}$$

portanto $e_0(q', M) = l\left(\frac{M}{xM}\right)$. Analogamente mostra-se que $e_0(q, M) = l\left(\frac{M}{xM}\right)$.

□

Lema 4.1.2. Sejam (A, m) um anel local noetheriano com corpo residual A/m infinito, $M \neq \{0\}$ um A-módulo de Cohen-Macaulay finitamente gerado unidimensional e q um ideal próprio de A tal que M/qM é de comprimento finito. Então temos a seguinte relação entre os coeficientes $e_0(q, M)$ e $e_1(q, M)$

$$e_1(q, M) \geq e_0(q, M) - l(M/qM) \geq 0$$

Demonstração: O lema 4.1.1 nos fornece um $x \in A$ que é $M-$superficial de ordem 1 para q e $M-$regular. Ainda pelo lema 4.1.1 temos para o caso $d = 1$ que

$$e_0(q, M) = l\left(\frac{M}{xM}\right)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
(n+1)e_0(q,M) - l\left(\frac{M}{q^{n+1}M}\right) &= (n+1)l\left(\frac{M}{xM}\right) - l\left(\frac{M}{q^{n+1}M}\right) \\
&= l\left(\frac{M}{x^{n+1}M}\right) - l\left(\frac{M}{q^{n+1}M}\right) \\
&= l\left(\frac{q^{n+1}M}{x^{n+1}M}\right) \\
&\geq l\left(\frac{xq^{n}M}{x^{n+1}M}\right) \\
&= l\left(\frac{q^{n}M}{x^{n}M}\right) \\
&= l\left(\frac{M}{x^{n}M}\right) - l\left(\frac{M}{q^{n}M}\right) \\
&= nl\left(\frac{M}{xM}\right) - l\left(\frac{M}{q^{n}M}\right) \\
&= ne_0(q,M) - l\left(\frac{M}{q^{n}M}\right)
\end{aligned}$$

isso mostra que $(n+1)e_0(q,M) - l\left(\frac{M}{q^{n+1}M}\right)$ não decresce conforme n aumenta. Agora quando n é suficientemente grande temos

$$(n+1)e_0(q,M) - l\left(\frac{M}{q^{n+1}M}\right) = (n+1)e_0(q,M) - e_0(q,M)\binom{n+1}{1} + e_1(q,M),$$

enquanto para $n = 0$ temos $(n+1)e_0(q,M) - l\left(\frac{M}{q^{n+1}M}\right) = e_0(q,M) - l\left(\frac{M}{qM}\right)$. Portanto

$$e_1(q,M) \geq e_0(q,M) - l\left(\frac{M}{qM}\right).$$

Como

$$e_0(q,M) - l\left(\frac{M}{qM}\right) = l\left(\frac{M}{xM}\right) - l\left(\frac{M}{qM}\right) = l\left(\frac{qM}{xM}\right) \geq 0,$$

então

$$e_1(q,M) \geq e_0(q,M) - l\left(\frac{M}{qM}\right) \geq 0$$

□

Teorema 4.1.1. Sejam A um anel noetheriano, $M \neq \{0\}$ um A-módulo de Cohen-Macaulay finitamente gerado de dimensão d e q um ideal próprio de A tal que M/qM tenha comprimento finito. Então são equivalentes:

a) $P(q, M, n+1) = l(M/qM)\binom{n+d}{d}$.

b) $e_1(q, M) = 0$.

c) $e_0(q, M) - l(M/qM) = 0$.

d) existem elementos $x_1, \ldots, x_d$ de A tais que $qM = x_1M + \cdots + x_dM$.

Se A for um anel local, então a), b) ou c) implica d).

Demonstração: Na discussão feita no final da última seção do capítulo anterior, podemos assumir que A é um anel local, logo pelo teorema 3.3.1 temos que $d)$ implica $a)$. Como $P(b, M, n+1) = \sum_{i=0}^{d}(-1)^i e_i(b, M)\binom{n+d-i}{d-i}$, então temos imediatamente que $a)$ implica $b)$. Para mostrar que $b)$ implica $c)$ vamos proceder por indução sobre d. Quando $d = 0$ temos que $P(q, M, n+1) = e_0(q, M)$ e pelo teorema 3.3.1 $l(M/q^{n+1}M) = l(M/qM)$, portanto $e_0(q.M) = l(M/qM)$. Note que na hipótese do lema 4.1.2 temos que o corpo residual é infinito e na hipótese do nosso teorema não temos isso, porém posteriormente vamos resolver esse problema, então adicionando que o corpo residual é infinito e $d = 1$ temos através do lema 4.1.2 que $b)$ implica $c)$. Seja $d > 1$ e assim que a inequação $e_1(q, M) \geq e_0(q, M) - l(M/qM) \geq 0$ e o teorema sejam verdadeiros para módulos M de dimensão $d-1$ tal que M/qM tenha comprimento finito. Agora seja dado um módulo M de dimensão d e q um ideal tal que $M' = M/qM$ tenha comprimento finito, então pelo lema 4.1.1 encontramos $x \in A$ que é $M-$superficial de ordem 1 para q e $M-$regular. Pela proposição 3.3.1 $\dim(M') = d-1$ e pelo lema 3.3.3 temos

$$P(q, M', n) = P(q, M, n) - P(q, M, n-1)$$

e consequentemente

$$e_i(q, M') = e_i(q, M)$$

para $i = 1, \ldots, d-1$. Como $M'/qM' = M/qM$ tem comprimento finito, temos pela hipótese de indução

$$e_1(q, M') \geq e_0(q, M') - l(M'/qM') \geq 0.$$

Como $e_1(q, M') = e_1(q, M) = 0$ e $e_0(q, M') = e_0(q, M)$ segue que

$$e_0(q, M) - l(M/qM) = 0.$$

Assim $b)$ implica $c)$. Agora mostremos que $c)$ implica $d)$ usando a indução construída até o momento. Se $e_1(q, M) = 0$, então para o mesmo $x \in A$ temos $e_1(q, M') = 0$ e pela hipótese de indução existem elementos $x_2, \ldots, x_d$ em q tal que

$$qM' = x_2M' + \cdots + x_dM',$$

que é isomorfo a

$$qM = xM + x_2M + \cdots + x_dM,$$

consequentemente $c)$ implica $d)$ onde M é d dimensional.

□

Observação: Ao longo da demonstração do teorema 4.1.1 adicionamos uma hipótese extra de que o corpo residual A/m é infinito e com isso conseguimos finalizar a demonstração. A seguir mostraremos que mesmo sem a hipótese extra sobre o corpo residual o teorema 4.1.1 é válido.

Sejam A um anel local e m seu ideal maximal. Considere o anel $A[x]$ dos polinômios na indeterminada x com coeficientes em A. Seja $B = A[x]m = \{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)m_i \mid$

$f_i(x) \in A[x]\, e\, m_i \in m\}$ um ideal primo de $A[x]$, então $S = A[s] - B$ é um conjunto multiplicativamente fechado e portanto $A' = S^{-1}A[x]$ é um anel local cujo ideal maximal é $m' = \{b/s \mid b \in B\, e\, s \in S\}$. Além disso o corpo residual de $A[x]$ é $(A/m)[x]$ que é infinito e pelo corolário 2.2.3 item $c)$ A'/m' é isomorfo ao corpo residual de $A[x]$.

Se M é um $A-$módulo, denote por M' o $A'-$módulo $S^{-1}M = M_S$ e se M é finitamente gerado, então M' também é finitamente gerado.

Seja $M \neq \{0\}$ um $A-$módulo, então são válidas as seguintes afirmações:

i) Se N é um submódulo de M tal que M/N tem comprimento finito, então N' é um submódulo de M' tal que M'/N' tem comprimento finito, além disso $l(M/N) = L(M'/N')$. Com isso, se q é um ideal de A tal que M/qM tem comprimento finito, então $q' = A'q$ é um ideal de A' tal que $M'/q'M'$ tem comprimento finito e $P(q', M', n) = P(q, M, n)$. Portanto $\dim(M') = \dim(M)$ e $e_i(q', M') = e_i(q, M)$ para todo i. (Ver [7], Prop. 4.8, Coro. 4.9, pág. 39).

ii) M é um módulo de Cohen-Macaulay se, e somente se, M' é um módulo de Cohen-Macaulay. (Ver [7], Prop. 4.10, pág. 40).

iii) Seja q um ideal de A tal que M/qM tenha comprimento finito. Existem elementos $x_1, \ldots, x_d$ de A tal que $qM = x_1M + \cdots + x_dM$ se, e somente se, existem elementos $y_1, \ldots, y_d$ de A' tal que $q'M' = y_1M' + \cdots + y_dM'$. (Ver [7], Prop. 4.12, pág. 41).

Assim a hipótese de que A/m é infinito pode ser removida, logo temos o seguinte corolário.

Corolário 4.1.1. Sejam A um anel noetheriano, M um A-módulo de Cohen-Macaulay e q um ideal de A tal que M/qM tem comprimento finito. Então

$$e_1(q, M) \geq e_0(q, M) - l(M/qM) \geq 0.$$

4.2 O coeficiente $e_2(q, M)$

Das discussões da seção anterior podemos assumir, sem perda de generalidade, que o anel noetheriano A é local e que o corpo residual A/m, onde m é o ideal maximal de A, é infinito. Assumindo que M é um $A-$módulo de Cohen-Macaulay finitamente gerado d dimensional podemos, a partir da demonstração do lema 4.1.1, ou seja, como consequência da proposição 3.3.2, garantir que existe um elemento x_1 $M-$superficial de ordem 1 para q e $M-$regular. Através da proposição 3.3.1 temos que $M' = M/x_1M$ é um $A-$módulo de Cohen-Macaulay finitamente gerado e de maneira análoga a existência de x_1, podemos encontrar um elemento x_2 de A $M'-$superficial de ordem 1 para q e $M'-$regular. Portanto, repetindo esse processo, existe uma sequência $M-$regular $(x_i)_{1 \leq i \leq d}$ de elemento de A tal que para $i = 1, \cdots, d$, x_i é $(M/(x_1M + \cdots + x_{i-1}M))-$superficial de ordem 1 para q.

Definição 4.2.1. Sejam A um anel noetheriano, $M \neq \{0\}$ um A-módulo de Cohen-Macaular finitamente gerado d dimensional e q um ideal próprio de A. Definimos os inteiros não negativos A_n e B_{jn} para todo $j = 1 \cdots, d$ e $n = 1, 2, \cdots$ da seguinte maneira

$$A_n = l(M/(x_1M + \cdots + x_dM)) - l(M/(q^{n+1}M + x_1M + \cdots + x_dM))$$

e

$$B_{jn} = l(q^{n+1}(M/(x_1M + \cdots + x_{j-1}M)) : Mx_j/q^n(M/(x_1M + \cdots + x_{j-1}M)))$$

Observação: Como $(x_i)_{1\leq i\leq d}$ é um sistema de parâmetro para M, então apenas uma quantidade finita de A_n são não nulos. A mesma observação vale para B_{jn}, pois cada x_j é superficial.

Para $r \geq 1$, seja

$$A_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+r-1}{r-1} A_k \tag{4.2}$$

chamada $r-$ésima interada de A_n. Para $j = 1, \cdots, d$ definimos

$$B_{jn}^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+r-1}{r-1} B_{jk} \tag{4.3}$$

chamada $r-$ésima interada de B_{jn}.

A partir da equação (4.2) vamos verificar que

$$A_n^{(r+1)} = A_0^{(r)} + A_1^{(r)} + \cdots + A_n^{(r)}.$$

A verificação será feita por indução sobre n. Para $n = 1$

$$A_n^{(r)} = \binom{r+1}{r} A_0 + A_1,$$

por outro lado

$$A_0^{(r)} = A_0 = \binom{r}{r} A_0 \ \ e \ \ A_1^{(r)} = \binom{r}{r-1} A_0 + A_1.$$

Logo pelo lema 3.3.1

$$A_0^{(r)} + A_1^{(r)} = \binom{r}{r} A_0 + \binom{r}{r-1} A_0 + A_1 = \binom{r+1}{r} A_0 + A_1 = A_1^{r+1}.$$

Agora seja $n > 1$ e suponha o resultado verdadeiro para $n-1$, ou seja,

$$A_{n-1}^{r+1} = A_0^{(r)} + \cdots + A_{n-1}^{(r)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k+r}{r} A_k.$$

Portanto

$$\begin{aligned} A_n^{r+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+r}{r} A_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k+r}{r} A_k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1-k+r}{r-1} A_k \\ &= A_0^{(r)} + A_1^{(r)} + \cdots + A_n^{(r)}. \end{aligned}$$

De maneira análoga mostra-se também que

$$B_{jn}^{(r+1)} = B_{j0}^{(r)} + B_{j1}^{(r)} + \cdots + B_{jn}^{(r)}.$$

Proposição 4.2.1. Sejam A um anel local noetheriano, M um A-módulo de Cohen-Macaulay finitamente gerado d dimensional, q um ideal próprio de A tal que $l(M/qM)$ seja finito e $(x_i)_{1\leq i\leq d}$ um sequência M-regular tal que para todo $i=1,\cdots,d$, x_i é $M/(x_1M+\cdot+x_{i-1}M)$- superficial de ordem 1 para q. Então para todo $n\geq 0$ temos

$$l(M/q^{n+1}M)=l(M/x_1M+\cdots+x_dM)\binom{n+d}{d}-A_n^{(d)}-\sum_{j=1}^{d}B_{jn}^{(j)}.$$

Demonstração: A demonstração será feito por indução sobre d. Primeiro considere o caso $d=1$. Note que $B_{1k}=l(q^{n+1}M:Ax_1/q^nM)$, então

$$l(M/q^kM)-l(q^{k+1}M:Ax_1/q^kM)=l(M/(q^{k+1}M:Ax_1)). \tag{4.4}$$

Portanto pelo lema 3.3.3 e pela equação (4.4) acima temos

$$l(M/q^{k+1}M)-l(M/q^kM)=l((M/x_1M)/q^{k+1}(M/x_1M))-B_{1k} \tag{4.5}$$

para todo $k\geq 0$. Somando a equações (4.5)

$$\begin{aligned}
l(M/q^{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n} l((M/x_1M)/q^{k+1}(M/x_1M))-\sum_{k=0}^{n}B_{1k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(l(M/x_1M)-A_k)-\sum_{k=0}^{n}B_{1k}\\
&= l(M/x_1M)\binom{n+1}{1}-A_n^{(1)}-B_{1n}^{(1)}.
\end{aligned}$$

Agora suponha que $d>1$ e que o lema é satisfeito quando a dimensão de um módulo é menor do que d. Seja $M'=M/x_1M$. Pela proposição 3.3.1 temos que M/x_1M é um módulo de Cohen-Macaulay finitamente gerado e de dimensão $d-1$. Além disso a sequência $(x_i)_{2\leq i\leq d}$ é $M'-$regular tal que para todo $i=2,\cdots,d$, x_i é $(M'/(x_2M'+\cdots+x_{i-1}M'))-$ superficial de ordem 1 para q. Definindo A'_n e B'_{jn} através da substituição de M por M' e da sequência $x_1,\cdots,x_d$ pela sequência $x_2,\cdots,x_d$ em A_n e B_{jn} respectivamente. Pela hipótese de indução temos que,

$$l(M'/q^{n+1}M')=l(M'/x_2M'+\cdots+x_dM')\binom{k+d-1}{d-1}-A_k^{'(d-1)}-\sum_{j=2}^{d}B_{jk}^{'(j-1)}$$

Pela equação (4.5) obtemos

$$l(M/q^{k+1}M)-l(M/q^kM)=l(M'/x_2M'+\cdots+x_dM')\binom{k+d-1}{d-1}-A_k^{'(d-1)}-\sum_{j=2}^{d}B_{jk}^{'(j-1)}-B_{1k}.$$

Somando a última equação acima

$$l(M/q^{n+1})=l(M'/x_2M'+\cdots+x_dM')\sum_{k=0}^{n}\binom{k+d-1}{d-1}-\sum_{k=0}^{n}A_k^{'(d-1)}-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=2}^{d}B_{jk}^{'(j-1)}-\sum_{k=0}^{n}B_{1k}.$$

Como $M'/x_2M'+\cdots+x_dM' = M/x_1M+\cdots+x_dM$, então $A'_k = A_k$ e $B'_{jk} = B_{jk}$ para todo $j = 2,\ldots,d$ e $k = 0,1,2,\ldots$. Além disso note que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=2}^{d} B_{jk}^{(j-1)} &= -\left(\sum_{k=0}^{n} B_{2k}^{(1)} + \sum_{k=0}^{n} B_{3k}^{(2)} + \cdots + \sum_{k=0}^{n} B_{dk}^{(d-1)}\right)\\ &= -\left(B_{2n}^{(2)} + B_{3n}^{(3)} + \cdots + B_{dn}^{(d)}\right).\end{aligned}$$

Usando o lema 3.3.1 item $iii)$ obtemos a formula desejada e assim provamos o lema.

□

Corolário 4.2.1. Sejam A um anel local noetheriano, M um A-módulo de Cohen-Macaulay finitamente gerado de dimensão dois, q um ideal próprio de A tal que M/qM tenha comprimento finito e x_1, x_2 um sequência M-regular tal que x_1 é M-superficial de ordem 1 para q e x_2 é $(M/x_1M)-$superficial de ordem 1 para q. Então

$$\begin{aligned} e_0(q,M) &= l(M/(x_1M+x_2M))\\ e_1(q,M) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k}\\ e_2(q,M) &= \sum_{k=0}^{\infty} kA_k + \sum_{k=0}^{\infty} kB_{2k} - \sum_{k=0}^{\infty} B_{1k}.\end{aligned}$$

Demonstração: Temos que para um n suficientemente grande

$$P(q,M,n+1) = l(M/q^{n+1}M)$$

e pela proposição 4.2.1

$$P(q,M,n+1) = l(M/(x_1M+x_2M))\binom{n+2}{2} - A_n^{(2)} - \sum_{j=1}^{2} B_{jn}^{(j)}. \tag{4.6}$$

Logo temos a primeira igualdade

$$e_0(q,M) = l(M/(x_1M+x_2M))..$$

Note que o lado esquerdo da equação (4.6) é

$$-e_1(q,M)\binom{n+1}{1},$$

então para descrever o coeficiente $e_1(q,M)$ temos que agrupar todos os termos, do lado direito da equação (4.6), que se assemelham ao lado direito. De maneira análoga descrevemos $e_2(q,M)$ agrupando, no lado direito da equação (4.2), todos os termos positivos e independentes.

Temos que

$$\begin{aligned}-A_n^{(2)} - (B_{1n}^{(1)} + B_{2n}^{(2)}) &= -\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k+1}{1}A_k - \left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-k}{0}B_{1k} + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-k+1}{1}B_{2k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k-n-1)A_k + \sum_{k=0}^{\infty}(k-n-1)B_{2k} - \sum_{k=0}^{\infty} B_{1k}.\end{aligned}$$

Portanto o corolário está provado.

□

Proposição 4.2.2. Seja A um anel noetheriano, M um A-módulo de Cohen-Macaulay não nulo finitamente gerado d dimensional e q um ideal próprio de A tal que M/qM tenha comprimento finito. Então são válidas as seguintes afirmações

i) $e_d(q^r, M) = e_d(q, M)$ para todo $r \geq 1$.

ii) Para algum $r \geq 1$ e para todo $k \geq 1$ temos, $(q^r)^{k+1}M : Ax_1^r = (q^r)^k M$.

Demonstração: Como

$$l(M/(q^r)^{n+1}M) = l(M/q^{((r(n+1)-1)+1)}M),$$

então

$$P(q^r, M, n+1) = P(q, M, (r(n+1)-1)+1),$$

portanto

$$P(q^r, M, 0) = P(q, M, 0).$$

Substituindo n por -1 e sabendo que

$$\binom{n+d-i}{d-i} = \frac{(n+d-i)(n+d-i-1)\cdots(n+1)}{(d-i)!}$$

podemos concluir que todo os coeficientes normalizados de Hilbert são nulos, exceto o último. Assim $e_d(q, M) = P(q, M, 0)$ e portanto

$$e_d(q, M) = P(q, M, 0) = P(q^r, M, 0) = e_d(q^r.M).$$

A igualdade do item $ii)$ é obtida da seguinte maneira. Como x_1 é $M-$superficial de ordem 1 para q, então existe um inteiro l tal que $q^{k+1}M : Ax_1 = q^k M$ para todo $k \geq l$. Então

$$q^{r(k+1)}M : Mx_1^r = q^{r(k+1)}M : Mx_1^{r-1}Mx_1 = (q^{r(k+1)}M : Mx_1) : Mx_1^{r-1} = q^{r(k+1)-1}M : Mx_1^{r-1}$$

para todo $r(k+1) - 1 \geq l$. Da mesma forma

$$\begin{aligned} q^{r(k+1)-1}M : Mx_1^{r-1} &= q^{r(k+1)-1}M : Mx_1 Mx_1^{r-2} \\ &= (q^{r(k+1)-1}M : Mx_1) : Mx_1^{r-2} \\ &= q^{r(k+1)-2}M : Mx_1^{r-2} \end{aligned}$$

para todo $r(k+1) - 2 \geq l$. Eventualmente encontramos

$$q^{rk+2}M : Mx_1^2 = q^{rk+2}M : Mx_1 Ax_1 = (q^{rk+2}M : Mx_1) : Mx_1 = q^{rk+1}M : Mx_1 = q^{rk}M$$

para todo $rk \geq l$. Portanto tome r como qualquer inteiro maior do que ou igual a l.

□

Teorema 4.2.1. Sejam A um anel noetheriano, M um A-módulo de Cohen-Macaulay não nulo finitamente gerado de dimensão dois e q um ideal próprio de A tal que M/qM tenha comprimento finito. Então

$$e_2(q, M) \geq 0.$$

Demonstração: Como já discutimos anteriormente podemos supor sem perda de generalidade que A é um anel local noetheriano e que o corpo residual A/m, onde m é o ideal maximal de A, é infinito. Pelo corolário 4.2.1 temos a seguinte descrição para $e_2(q,M)$

$$e_2(q,M) = \sum_{k=0}^{\infty} kA_k + \sum_{k=0}^{\infty} kB_{2k} - \sum_{k=0}^{\infty} B_{1k}.$$

Como todo os A_k e B_{jk} são não negativos, o teorema estaria provado se

$$B_{1k} = l(q^{k+1}M : Mx_1/q^kM)$$

para todo $k \geq 1$. Na expressão acima para $e_2(q,M)$ vamos substituir q por q^r e trocar os pares x_1, x_2 de elementos superficiais por x_1^r, y_2, onde r é um interio maior ou igual a 1 escolhido de acordo com a proposição 4.2.2 item ii) e y_2 é $(M/x_1^rM)-$regular e $(M/x_1^rM)-$superficial de ordem 1 para q^r. Como x_1^r é $M-$regula e $M-$superficial de ordem 1 para q^r temos $e_2(q,M) \geq 0$.

□

Proposição 4.2.3. Sejam A um anel noetheriano, M um A-módulo de Cohen-Macaulay não nulo finitamente gerado de dimensão dois, q um ideal próprio de A tal que M/qM tenha comprimento finito e $x_1\, x_2$ uma sequência M-regular tais que x_1 é M-superficial de ordem 1 para q e x_2 é (M/x_1M)-superficial de ordem 1 para q. Se $q^2M = q(Ax_1 + Ax_2)M$, então

$$e_2(q,M) = 0.$$

Demonstração: Se

$$q^{k+1}M = q^{k-1}q^2M = q^{k-1}q(Ax_1 + Ax_2)M = q^k(Ax_1 + Ax_2), M$$

então

$$q^{k+1}M : Mx_1 = q^kM$$

para todo $k \geq 1$. Logo para todo $k \geq 1$

$$B_{1k} = l(q^{k+1}M : Ax_1/q^kM) = 0.$$

Se $M' = M/x_1M$, então $q^{k+1}M' : M'x_2 = q^kM'$ e com isso para todo $k \geq 0$ $B_{2k} = 0$. Da hipótese que $q^2M = q(Ax_1 + Ax_2)M$ segue imediatamente que $A_k = 0$ para todo $k \geq 0$. Portanto pelo corolário 4.2.1 temos que $e_2(q,M) = 0$.

□

Sejam A um anel noetheriano, M um $A-$módulo de Cohen-Macaulay finitamente gerado de dimensão d e q um ideal de A tal que M/qM tenha comprimento finito. Sabemos que existe uma sequência $M-$regular $(x_i)_{1\leq i\leq d}$ de elemento de A tal que para $i = 1, \cdots, d$, x_i é $(M/(x_1M + \cdots + x_{i-1}M))-$superficial de ordem 1 para q. Então a condição $q^2M = q(Ax_1 + \cdots + Ax_d)M$ implica que $e_d(q,M) = 0$ (Ver [9], Teo. 6.10, pág. 64). Um último resultado interessante é uma condição necessária e suficiente para que $e_2(q,M) = 0$ que é $q^{2r}M = (Ax_1^r + Ax_2^r)M$, onde x_1, x_2 é um sistema de parâmetro para M tal que x_1 é $M-$ superficial de ordem 1 para q e x_2 é $(M/x_1M)-$superficial de ordem 1 para q.(Ver [7], Teo. 5.9, pág. 52).

Referências

[1] Atiyah, M. F.; Mcdonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1996.

[2] Matsumura, H. *Commutative ring theory.* Translated by M. Reid, Cambridge University, 1986.

[3] Gonçalves, A. *Introdução à álgebra*, 5.ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[4] Reid, M. *Undergraduate Commutative Algebra*, University of Warwick, 1995.

[5] Bourbaki, N. *Elements of Mathematics, Commutative Algebra*, Hermann, 1972.

[6] Grothendieck, A. *Elements de geometrie algebrique.* Institut des Hausts Etudes Scientifiques, Publication Mathematiques, No. 20. Paris 1964.

[7] Fillmore, J. *On Macaulay modules and abstract Hilbert polynomials.* Theses, University of Minnesota 1964.

[8] Tengan, E.; Borges, H. *Álgebra comutativa em quatro movimentos.* Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[9] Fillmore, J. *On the Coefficients of the Hilbert-Samuel Polynomial.* Math Zeitschr. 97, 212 - 228 (1967).

[10] Naritta, M.: *A note on the coefficients of Hilbert characteristic function in semi-regular local rings.* Proc. Camb. Phil. Soc. 59, 269 - 275 (1963).

[11] Nothcott, D. G.: *Hilbert's function in a local ring.* Quart. J. Math (Oxford) (2), 4, 67 - 80 (1953).