

UNESP – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Campus universitário de Bauru

Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência

Faculdade de Ciências

RICHAEL SILVA CAETANO

**GRUPO DE ESTUDO: UMA PROPOSTA À (RE)SIGNIFICAÇÃO DE ALGUNS
SABERES DA EXPERIÊNCIA PRÉ-PROFISSIONAL, EM RELAÇÃO À
MATEMÁTICA, NA FORMAÇÃO INICIAL DO PEDAGOGO**

Bauru

2019

RICHAEEL SILVA CAETANO

**GRUPO DE ESTUDO: UMA PROPOSTA À (RE)SIGNIFICAÇÃO DE ALGUNS
SABERES DA EXPERIÊNCIA PRÉ-PROFISSIONAL, EM RELAÇÃO À
MATEMÁTICA, NA FORMAÇÃO INICIAL DO PEDAGOGO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em *Educação para a Ciência* da UNESP – “Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho”, campus de Bauru, como um dos requisitos para a obtenção do título de *DOUTOR em Educação para a Ciência* (Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática).

Orientador: Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola

Bauru

2019

Caetano, Richael Silva.

Grupo de Estudo: uma proposta à (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional, em relação à Matemática, na Formação Inicial do pedagogo / Richael Silva Caetano, 2019
1130 f. : il.

Orientador: Nelson Antonio Pirola

Tese (Doutorado)—Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2019

1. Grupo de Estudo. 2. Saber da experiência pré-profissional. 3. Formação Inicial do pedagogo em relação à Matemática. 4. Epistemologia Genética. 5. Ensino de Matemática. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE RICHAEEL SILVA CAETANO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA, DA FACULDADE DE CIÊNCIAS.

Aos 04 dias do mês de fevereiro do ano de 2019, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro da Pós-Graduação da Faculdade de Ciências - Unesp/Bauru-SP, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA - Orientador(a) do(a) Depto. de Educação / UNESP/Bauru, Prof. Dr. PAULO CESAR OLIVEIRA do(a) DFQM / Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, Profa. Dra. NADJA MARIA ACIOLY-RÉGNIER do(a) Université Claude Bernard Lyon1 - França, Profa. Dra. LIZETE MARIA ORQUIZA CARVALHO do(a) Departamento de Física e Química / Faculdade de Engenharia - UNESP/Iha Solteira, Profa. Dra. RITA MELISSA LEPRE do(a) PPG/Psicologia / UNESP/Assis, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da TESE DE DOUTORADO de RICHAEEL SILVA CAETANO, intitulada **GRUPO DE ESTUDO: UMA PROPOSTA À (RE)SIGNIFICAÇÃO DE ALGUNS SABERES DA EXPERIÊNCIA PRÉ-PROFISSIONAL, EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA, NA FORMAÇÃO INICIAL DO PEDAGOGO**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA

Prof. Dr. PAULO CESAR OLIVEIRA

Profa. Dra. NADJA MARIA ACIOLY-RÉGNIER

Profa. Dra. LIZETE MARIA ORQUIZA CARVALHO

Profa. Dra. RITA MELISSA LEPRE

DEDICATÓRIA

É com imensa alegria que dedico este trabalho...

... A Deus;

... Aos meus queridos pais, Doralice e Aparecido;

... Ao meu querido irmão, Rodolfo, e meus estimados sobrinhos, Miguel e Raphael;

... Ao meu querido orientador e amigo, Nelson Antonio Pirola;

... A minha querida “tia” Vilma (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

Expressar em palavras o quanto sou grato por àqueles que ‘estiveram’ comigo nos mais diversos momentos do doutoramento é quase impossível. Mesmo nesta quase impossibilidade, o meu muito OBRIGADO...

... Aos meus pais, pelo apoio incondicional e amor imensurável;

... Ao meu irmão, pela torcida sincera e amparo afetuosos;

... A minha avó Izabel, tia Dalva e prima Michelle, pelo amor e compreensão;

... A duas queridas amigas da graduação, Fabiana e Gláucia, pelo apoio sempre presente;

... Aos queridos amigos, Alessana, Mabi, Rafael e Renata, pelos inúmeros momentos de entretenimento e carinho demonstrados;

... A querida amiga, Ana Paula, pela torcida constante;

... Aos queridos amigos Evandro, Gilmara, Giovana e Luciana Vanessa, pelos diversos conhecimentos compartilhados em toda a trajetória na pós-graduação;

... Ao meu orientador e amigo, o professor Dr. Nelson Antonio Pirola, por toda a competência e compreensão durante a realização deste trabalho;

... Às professoras doutoras da banca de qualificação, Maria Lúcia Faria Moro e Lizete Maria Orquiza de Carvalho, pelas valiosas sugestões ao redirecionamento da pesquisa;

... Aos professores doutores da banca de defesa, Nadja Maria Acioly-Régnier, Lizete Maria Orquiza de Carvalho, Paulo César Oliveira e Rita Melissa Lepre, pelos importantes apontamentos para a ‘finalização’ do texto;

... Às professoras (e amigas) do CAIC – Bauru, em especial: Adriana, Ana Maria, Darley, Maria José, Marina, Rosiley, Rosimeire, Sandra, Teresa e Vanessa;

... Aos professores do programa de pós-graduação em Educação para a Ciência da Faculdade de Ciências – UNESP/Bauru, pelos inúmeros saberes compartilhados;

... À secretaria da pós-graduação da Faculdade de Ciências – UNESP/Bauru, em especial às secretárias Ana Lúcia, Andressa, Caroline, Denise e Lúcia, por todo apoio;

... Às participantes do Grupo de Estudo. Mesmo na impossibilidade de nominá-las, saibam que os nossos momentos de estudo foram enriquecedores, principalmente para mim;

... À CAPES, pelo apoio financeiro parcial.

RESUMO

A presente pesquisa investigou os limites e as possibilidades de um Grupo de Estudo – alicerçado em elementos teóricos advindos da Epistemologia Genética e dos resultados de estudos acerca da Formação (Inicial) de professores – à (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional, em relação à Matemática e ao seu processo de ensino aprendizagem, de duas licenciandas em Pedagogia. O referido Grupo de Estudo – pensado enquanto um espaço formativo – visou propiciar: a) a construção de alguns conteúdos matemáticos ainda não aprendidos pelas licenciandas durante a Educação Básica; b) o estudo de alguns tópicos da Epistemologia Genética – desenvolvida por Jean Piaget e colaboradores – visando à compreensão, pelas licenciandas, da gênese e do processo de construção do conhecimento; c) a discussão de conhecimentos e saberes didático-metodológicos e curriculares acerca dos referidos conteúdos matemáticos quando estes se tornam objeto de ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental; d) a reflexão/reeducação em torno de alguns saberes da experiência em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem) construídos pelas licenciandas enquanto alunas da Educação Básica. Para a identificação dos referidos limites e possibilidades, foram elaborados dois estudos de caso considerando-se duas, dentre as sete licenciandas que participaram do Grupo de Estudo. Para a obtenção dos dados, e considerando o fenômeno investigado, fez-se necessária a utilização de diversos instrumentos, a saber: a) questionários; b) escala de atitude; c) discussão de grupo (entrevista informal); d) tarefas matemáticas (do tipo lápis e papel); e) observação participante. Após a análise dos referidos dados, concluiu-se o seguinte a respeito das possibilidades do Grupo de Estudo às (re)significações: a) a Matemática passou a ser concebida/(re)significada enquanto uma ciência possível de ser construída, além de possuir sentido; b) a construção das licenciandas acerca de alguns conhecimentos (do tipo esquemas matemáticos) – referentes ao conteúdos de média aritmética, permutação, arranjo e combinação – colaborou na/para a (re)significação anterior, inclusive para a própria (re)significação acerca do bloco ‘Tratamento da Informação’; c) não há mais, para as licenciandas, um único caminho à resolução dos problemas matemáticos; as ‘fórmulas’ deixaram de representar o ‘tudo ou nada’ para tal resolução, ou seja, sem as mesmas faz-se possível ‘fazer Matemática’; d) o aprender Matemática – antes pautado na aplicação obrigatória das ‘fórmulas’ – agora decorre da ação das licenciandas sobre as situações problema, ação essa significada mediante a elaboração de diversos esquemas. Em relação aos limites do Grupo de Estudo à referida (re)significação, identificaram-se: a) a ainda presença da concepção epistemológica empirista no que se refere à explicação, pelas licenciandas, de como se dá o processo de ensino e aprendizagem da Matemática; b) a não conceituação dos conteúdos matemáticos (média aritmética, permutação, arranjo e combinação) em sua forma final (abstração refletida) representada em linguagem formal.

Palavras-chave: Grupo de Estudo. Saber da experiência pré-profissional. Formação Inicial do pedagogo em relação à Matemática. Epistemologia Genética. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

The present study investigated the limitations and possibilities of the learning characteristics of a Study Group based on both, the theoretical elements coming from Genetic Epistemology and the results of studies regarding the Teachers' Formation in their very initial stages of their education. The research addressed the meaning of mathematics' knowledge acquired previous to the professionalization in relation to the teaching/learning process of two Teachers of Pedagogy. The Study Group was created to work as a formative space to allow the promotion of the following: a) the construction of a few mathematical contents still not learned by the teachers during their Basic Education Formation; b) the study of a few topics based on the Genetic Epistemology developed by Jean Piaget and his collaborators seeking the measurement of the comprehension absorbed by the licensed Teachers of the genesis and the process of knowledge building; c) the discussion of the didactics, methodologies and academic histories' understanding and knowledge about the mathematic contents at the moment that they started to teach at the initial years of Fundamental School; d) the reflection and reeducation linked to the knowledge about the experience in relation to Mathematics' Contents (and its teaching/learning process) built by the licensed teachers while they still were students of the Basic Education. In order to identify the limitations and possibilities of the learning process, it was elaborated two case studies utilizing two out of seven licensed teachers who participated of the Study Group. The data gathering considered the investigated phenomenon and utilized a diversity of instruments, such as: a) questionnaires; b) attitude scale; c) group discussion (informal interview); d) mathematic tasks (such as paper and pencil); e) participants' observation. Following the analysis of the data, it was possible to conclude a few results about the possibilities of the Study Group and their (re)significations: a) the Mathematics became to be understood/(re)understood as a science that is possible to be constructed and to make sense to the student; b) the licensed teachers building processes about some knowledge (like mathematics' schemes) linked to the arithmetic mean contents, permutation, arrangement and combination – collaborated to the previous (re)signification, as well as to the (re)signification about the subject "Information Processing" itself; c) it become clear to the licensed teachers that there is not a single way to solve the mathematics' problems; the formulae stopped representing the 'everything or nothing' to the problem solving task, meaning that, without them is still possible to 'do math'; d) the learning of Mathematics – previously pointed at the necessary application of the formulae – now is understood as the result of the action taken by the licensed teachers on the problem solving situation, meaning which is based on the elaboration of diverse schemes. Lastly, in relation to the limitations of the Study Group about the referred (re)signification, were identified the following: a) the presence of the empirical epistemological conception concerning the meaning of how the process of learning and teaching mathematical skills is built; b) the no-conceptualization of the mathematical contents (arithmetic average, permutation, arrangements and combinations) in its final form (reflected abstraction) represented in the formal language.

Key words: Study Group. Knowledge of the pre-professional experience. Initial Formation of the pedagogue in relation to Mathematics. Genetic Epistemology. Mathematics' Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Empirismo e inatismo: linguagem lógica.	32
Figura 2 – Espiral: relação entre o possível e o necessário.	43
Figura 3 – Reflexionamento e reflexão: evolução dos conjuntos numéricos.	48
Figura 4 – Patamares (graus do reflexionamento): síntese.	50
Figura 5 – Tomada de consciência: da periferia (P) às regiões centrais (C e C').	56
Figura 6 – Inversão de sentido entre o real e possível.	65
Figura 7 – Passos à construção da identidade do professor.	113

LISTA DE ORGANOGRAMAS

Organograma 1 – Fatores do desenvolvimento.....	34
Organograma 2 – Ação do sujeito: afetividade e inteligência.	39
Organograma 3 – Abstração empírica e reflexionante.....	52
Organograma 4 – Os quatros ‘momentos’ à obtenção dos dados.	145
Organograma 5 – Tratamento da Informação: Combinatória, Estatística e Probabilidade..	185

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Situações dialéticas: características comuns.	41
Quadro 2 – Patamares (graus do reflexionamento).....	49
Quadro 3 – Movimentos de interiorização e exteriorização nos três níveis do conhecimento.	59
Quadro 4 – Prova da Noção de Conservação (Quantidade Discreta).	62
Quadro 5 – Oito tipos de agrupamentos: as classes e as relações.	63
Quadro 6 – ‘Categorias’ do Fazer e Compreender: coerência teórico-prática.	84
Quadro 7 – ‘Partes’ do roteiro pedagógico.	86
Quadro 8 – Níveis da construção da profissionalidade docente na Formação Inicial.....	87
Quadro 9 – Princípios subjacentes ao conceito de Formação de Professores.	93
Quadro 10 – Diretrizes gerais para a Formação Inicial de professores.....	99
Quadro 11 – Tipologia elaborada por Gauthier et al.....	112
Quadro 12 – Tipologia elaborada por Pimenta.	113
Quadro 13 – Tipologia elaborada por Shulman.	114
Quadro 14 – Tipologia elaborada por Tardif.	116
Quadro 15 – Concepções acerca da Matemática.....	123
Quadro 16 – Percurso escolar anterior à Formação Inicial (curso de Pedagogia) da P-2.	144
Quadro 17 – Percurso escolar anterior à Formação Inicial (curso de Pedagogia) da P-4.	144
Quadro 18 – Escala de atitudes em relação à Matemática: agrupamento das afirmações nas categorias positiva e negativa.	149
Quadro 19 – Estratégias utilizadas à transcrição dos encontros.....	151
Quadro 20 – Concepções acerca da Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem.....	159
Quadro 21 – Dia de ocorrência e tempo de duração de cada encontro do GE.....	162
Quadro 22 – ‘Momentos’ de negociação no Grupo de Estudo.	168
Quadro 23 – Síntese do 1.º encontro.	183
Quadro 24 – Síntese do 2.º encontro.	184
Quadro 25 – Texto: Alguns pontos iniciais do ‘Tratamento da Informação’.	184
Quadro 26 – História de ensino simulada: ensino de gráficos e tabelas.	186
Quadro 27 – Síntese do 3.º encontro.	186
Quadro 28 – Texto: Retomando gráficos e tabelas.	187
Quadro 29 – Síntese do 4.º encontro.	189
Quadro 30 – Texto: O ‘pensar sobre’ a tabela.	189

Quadro 31 – Síntese do 5.º encontro.	191
Quadro 32 – Exemplo de ensino: uma proposta-atividade para a construção da classificação.	191
Quadro 33 – Situação Problema: classificação e inclusões hierárquicas de diversos elementos.	192
Quadro 34 – Síntese do 6.º encontro.	193
Quadro 35 – História de ensino simulada: ensino de gráfico de linha.	193
Quadro 36 – Síntese do 7.º encontro.	195
Quadro 37 – História de ensino simulada: ensino de tabelas, gráfico de linha e classes de intervalos.	196
Quadro 38 – Desafio para casa: questões de vestibular – interpretação gráfica e média aritmética.	197
Quadro 39 – Síntese do 8.º encontro.	198
Quadro 40 – História de ensino simulada: ensino de média aritmética.	199
Quadro 41 – Síntese do 9.º encontro.	199
Quadro 42 – Movimento de retomada: retomando as questões de vestibular (desafio para casa).	200
Quadro 43 – Desafio para casa: média aritmética e medidas de dispersão.	202
Quadro 44 – Texto: Ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental.	202
Quadro 45 – Síntese do 10.º encontro.	204
Quadro 46 – Exemplo de ensino: Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental.	205
Quadro 47 – Síntese do 11.º encontro.	205
Quadro 48 – Síntese do 12.º encontro.	206
Quadro 49 – Síntese do 13.º encontro.	207
Quadro 50 – Movimento de Retomada: Síntese dos assuntos advindos da Epistemologia Genética.	208
Quadro 51 – Movimento de retomada: desafios para casa sobre a Estatística Descritiva. ...	209
Quadro 52 – Síntese do 14.º encontro.	211
Quadro 53 – Texto: Uma breve reflexão sobre a Combinatória e a Probabilidade e seu ensino.	212
Quadro 54 – História de ensino simulada: problematizando a Combinatória.	214
Quadro 55 – Síntese do 15.º encontro.	214
Quadro 56 – Texto teórico (Princípio multiplicativo) e situação problema.	215
Quadro 57 – Desafio para casa: Conversando sobre o ensino de Combinatória.	215

Quadro 58 – Material de ‘apoio’ à resolução das situações problema combinatórias.	218
Quadro 59 – Síntese do 16.º encontro.	219
Quadro 60 – Exemplo de problema combinatório envolvendo arranjo simples e solução comentada.	219
Quadro 61 – Exemplo de ensino envolvendo Combinatória.	220
Quadro 62 – Síntese do 17.º encontro.	220
Quadro 63 – Texto: Retomando o desafio para casa/exemplo de ensino.	221
Quadro 64 – Texto: Análise Combinatória: alguns tipos de agrupamentos.	222
Quadro 65 – Síntese do 18.º encontro.	225
Quadro 66 – Relação entre Estatística, Combinatória e Probabilidade: um exemplo.	225
Quadro 67 – Texto: Algumas considerações sobre a Probabilidade.	226
Quadro 68 – Texto: Retomando os ‘desafios para casa’ envolvendo Análise Combinatória.	227
Quadro 69 – Síntese do 19.º encontro.	229
Quadro 70 – Texto: Ensino de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental.	229
Quadro 71 – Exemplo de ensino: ensino de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental.	230
Quadro 72 – Síntese do 20.º encontro.	231
Quadro 73 – Estratégias didático-metodológicas adotadas pela maioria dos professores de Matemática da P-2.	237
Quadro 74 – Estratégias didático-metodológicas adotadas por uma professora de Matemática da P-2.	238
Quadro 75 – Possíveis (re)significações respondidas pela P-2 acerca do ‘Tratamento da Informação’.	246
Quadro 76 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 1.	247
Quadro 77 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 2.	247
Quadro 78 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 3.	248
Quadro 79 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 4.	248
Quadro 80 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 5.	248
Quadro 81 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 6.	249
Quadro 82 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 7.	249
Quadro 83 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 8.	250
Quadro 84 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 9.	250
Quadro 85 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 10.	251

Quadro 86 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 11.	251
Quadro 87 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 12.	251
Quadro 88 – Algumas concepções da P-2 acerca da Matemática.	253
Quadro 89 – Algumas concepções da P-2 acerca da aprendizagem da Matemática.	254
Quadro 90 – Algumas concepções da P-2 acerca do ensino da Matemática.	256
Quadro 91 – Escala de Atitudes em relação à Matemática: alternativas assinaladas pela P-2.	259
Quadro 92 – Estratégias didático-metodológicas adotadas pela maioria dos professores de Matemática da P-4.	262
Quadro 93 – Possíveis (re)significações respondidas pela P-4 acerca do ‘Tratamento da Informação’.	270
Quadro 94 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 1.	272
Quadro 95 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 2.	272
Quadro 96 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 3.	272
Quadro 97 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 4.	273
Quadro 98 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 5.	273
Quadro 99 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 6.	274
Quadro 100 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 7.	274
Quadro 101 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 8.	275
Quadro 102 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 9.	275
Quadro 103 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 10.	276
Quadro 104 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 11.	276
Quadro 105 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 12.	276
Quadro 106 – Algumas concepções da P-4 acerca da Matemática.	278
Quadro 107 – Algumas concepções da P-4 acerca da aprendizagem da Matemática.	280
Quadro 108 – Algumas concepções da P-4 acerca do ensino da Matemática.	282
Quadro 109 – Escala de Atitudes em relação à Matemática: alternativas assinaladas pela P-4.	284

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Distribuição de artigos publicados em eventos e periódicos, no período de 2007 a 2017, que investigaram a temática Formação Inicial do pedagogo em relação à Matemática..	29
Tabela 2 – Frequência geral das licenciandas nos vinte encontros do GE.	161

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	19
2 EPISTEMOLOGIA GENÉTICA: ALGUMAS DISCUSSÕES.....	32
2.1 O processo de abstração reflexionante.....	46
2.2 A tomada de consciência: da ação à conceituação.....	53
2.3 Da inteligência prática ao pensamento operatório (concreto e formal)	60
2.4 Algumas considerações sobre a teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud....	67
2.5 Algumas ‘aproximações’ da Epistemologia Genética à Educação.....	73
2.5.1 Contribuições da Epistemologia Genética à Formação Inicial de professores: alguns estudos desenvolvidos	81
3 A FORMAÇÃO DE PROFESSORES: SABERES DOCENTES E FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR QUE ENSINA(RÁ) MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	90
3.1 A Formação Inicial de professores: algumas discussões	94
3.1.1 Uma breve contextualização da Formação Inicial de professores da Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental no Brasil	99
3.1.2 O modelo da racionalidade técnica na Formação Inicial de professores	102
3.2 Os conhecimentos e saberes docentes: algumas perspectivas tipológicas.....	108
3.2.1 Os saberes da experiência pré-profissional	117
3.3 Uma breve discussão sobre a influência das crenças e das concepções na Formação de Professores	120
3.4 A Formação Inicial de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais e saberes da experiência pré-profissional: alguns estudos desenvolvidos	126
4 METODOLOGIA DA PESQUISA.....	137
4.1 O problema de pesquisa	137
4.1.1 Objetivo geral e objetivos específicos.....	138
4.2 A caracterização da pesquisa: uma abordagem qualitativa do tipo estudo de caso	140
4.3 As participantes da pesquisa	143
4.4 Instrumentos e procedimentos utilizados para a obtenção dos dados: uma visão geral	144

4.4.1 O 1.º ‘momento’: aplicação do Questionário Inicial e da Escala de Atitudes	146
4.4.1.1 O Questionário Inicial (APÊNDICE A)	147
4.4.1.2 A Escala de Atitudes em relação à Matemática (ANEXO A).....	149
4.4.2 O 2.º ‘momento’: os instrumentos e os procedimentos à obtenção dos dados realizados no/durante o Grupo de Estudo	150
4.4.3 O 3.º ‘momento’: a aplicação do Questionário Final e da Escala de Atitudes.....	155
4.4.3.1 O Questionário Final (APÊNDICE D)	155
4.4.4 O 4.º ‘momento’: a aplicação do Questionário Final Postergado (APÊNDICE Y)	156
4.5 Procedimentos utilizados para a análise dos dados.....	157
4.5.1 Alguns conhecimentos matemáticos pertencentes ao Tratamento da Informação.	158
4.5.2 Algumas concepções sobre a Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem	158
4.5.3 Algumas atitudes em relação à Matemática.....	160
5 GRUPO DE ESTUDO: UMA PROPOSTA À (RE)SIGNIFICAÇÃO DE ALGUNS SABERES DA EXPERIÊNCIA PRÉ-PROFISSIONAL EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA	161
5.1 As atividades desenvolvidas no Grupo de Estudo	169
5.1.1 Embasamento na Epistemologia Genética e na teoria de Gérard Vergnaud.....	171
5.1.2 Embasamento nos estudos sobre a Formação de Professores	173
5.2 Os diferentes papéis desempenhados no Grupo de Estudo.....	175
5.2.1 O papel do pesquisador-autor.....	176
5.2.2 O papel das licenciandas	178
5.3 Uma síntese de cada encontro realizado no Grupo de Estudo	183
17.2.2 Arranjo simples e com repetição	223
17.2.3 Combinação simples	224
5.4 As dificuldades provenientes da realização do Grupo de Estudo	232
6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS.....	235

6.1 O caso da P-2: ‘reconstituindo’ algumas lembranças do ensino, em particular algumas ‘características’ das aulas de Matemática vivenciadas na Educação Básica	235
6.1.1 Alguns conhecimentos matemáticos pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’: o ‘antes’ e o ‘após’ a participação/ação no GE	245
6.1.2 Algumas crenças e concepções em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem): o ‘antes’ e o ‘após’ a participação/ação no GE	252
6.1.3 Algumas atitudes em relação à Matemática: o ‘antes’ e o ‘após’ a participação/ação no GE	259
6.2 O caso da P-4: ‘reconstituindo’ algumas lembranças do ensino, em particular algumas ‘características’ das aulas de Matemática vivenciadas na Educação Básica	260
6.2.1 Alguns conhecimentos matemáticos pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’: o ‘antes’ e o ‘após’ a participação/ação no GE	268
6.2.2 Algumas crenças e concepções em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem): o ‘antes’ e o ‘após’ a participação/ação no GE	278
6.2.3 Algumas atitudes em relação à Matemática: o ‘antes’ e o ‘após’ a participação/ação no GE	284
6.3 Alguns limites e possibilidades do Grupo de Estudo à (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem)	286
7 CONCLUSÕES E ALGUMAS IMPLICAÇÕES DA PESQUISA	289
REFERÊNCIAS	296
ANEXO (CD-ROM)	311
ANEXO A – ESCALA DE ATITUDES EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA (BRITO, 1996)	311
APÊNDICES (CD-ROM)	313
APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO INICIAL	313
APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO E TERMO DE AUTORIZAÇÃO	318
APÊNDICE C – MATERIAL DE APOIO: GRUPO DE ESTUDO PARA A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL.....	319

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO FINAL	473
APÊNDICE E – TRANSCRIÇÃO DO 1.º ENCONTRO	476
APÊNDICE F – TRANSCRIÇÃO DO 2.º ENCONTRO	505
APÊNDICE G – TRANSCRIÇÃO DO 3.º ENCONTRO	535
APÊNDICE H – TRANSCRIÇÃO DO 4.º ENCONTRO	565
APÊNDICE I – TRANSCRIÇÃO DO 5.º ENCONTRO	588
APÊNDICE J – TRANSCRIÇÃO DO 6.º ENCONTRO.....	618
APÊNDICE K – TRANSCRIÇÃO DO 7.º ENCONTRO	648
APÊNDICE L – TRANSCRIÇÃO DO 8.º ENCONTRO	679
APÊNDICE M – TRANSCRIÇÃO DO 9.º ENCONTRO.....	714
APÊNDICE N – TRANSCRIÇÃO DO 10.º ENCONTRO.....	745
APÊNDICE O – TRANSCRIÇÃO DO 11.º ENCONTRO	781
APÊNDICE P – TRANSCRIÇÃO DO 12.º ENCONTRO	826
APÊNDICE Q – TRANSCRIÇÃO DO 13.º ENCONTRO	860
APÊNDICE R – TRANSCRIÇÃO DO 14.º ENCONTRO.....	897
APÊNDICE S – TRANSCRIÇÃO DO 15.º ENCONTRO	939
APÊNDICE T – TRANSCRIÇÃO DO 16.º ENCONTRO	980
APÊNDICE U – TRANSCRIÇÃO DO 17.º ENCONTRO.....	1017
APÊNDICE V – TRANSCRIÇÃO DO 18.º ENCONTRO.....	1047
APÊNDICE W – TRANSCRIÇÃO DO 19.º ENCONTRO.....	1078
APÊNDICE X – TRANSCRIÇÃO DO 20.º ENCONTRO.....	1111
APÊNDICE Y – QUESTIONÁRIO FINAL POSTERGADO.....	1129

INTRODUÇÃO

Sei que mudança é coisa difícil e que toda espécie de argumentos pode ser apresentada contra qualquer mudança; desses argumentos o não menos importante é aquele que afirma que qualquer coisa proposta como mudança ainda não foi tentada. E como não foi tentada, não sabemos se dará certo. Logo... nenhuma mudança. (FURTH, 1997, p. 220)

Conforme a epígrafe, a mudança exige uma tentativa, ou seja, uma ação para uma transformação. Nesse sentido, a presente pesquisa investiga os limites e as possibilidades de uma proposta (alternativa) à Formação Inicial do professor que ensina(rá) Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal proposta concretiza-se mediante a realização de um Grupo de Estudo (GE) envolvendo o pesquisador-autor e sete licenciandas em Pedagogia de uma universidade pública do interior do estado de São Paulo. Visando situar o “caminho” percorrido até a elaboração inicial dessa proposta, inicialmente serão explicitados alguns “recortes” de minha trajetória experiencial (acadêmica e profissional), já que os mesmos explicitam alguns dos porquês e dos direcionamentos adotados.

Iniciei o Ensino Fundamental em uma escola pública do interior do estado de São Paulo, na cidade de Bauru. Nessa escola, as estratégias adotadas pela maioria dos meus professores nas aulas consistiam na utilização, nesta ordem, da seguinte tríade: explanação/transmissão do assunto/conteúdo¹ pelo professor x apresentação/resolução de um exercício²/exemplo “modelo” pelo professor x solicitação da resolução de listas de exercícios (em conformidade ao referido exemplo “modelo”) aos alunos individualmente. A prática de/em “decorar/memorizar” os diversos textos abordados em sala de aula também se fazia presente; inclusive, nas avaliações bimestrais o conteúdo de tais memorizações era ‘exigido’. Os alunos mais habilidosos na capacidade de memorizar e ‘devolver’, na prova, cópias (idênticas) dos textos memorizados eram recompensados com as notas mais elevadas. Mediante esta experiência, para mim ficou a ideia de que para aprender era necessário ouvir atentamente a explanação feita pelo professor, memorizar os textos abordados e resolver (exaustivamente) as listas de exercícios seguindo o exemplo resolvido. Assim, durante o meu Ensino Fundamental, o modelo de aluno construído por mim como sendo ‘ideal’ em muito se aproximou do defendido pela concepção epistemológica empirista, ou seja, o de um sujeito

¹ O conteúdo pode ser do tipo conceitual, procedimental e/ou atitudinal.

² O termo exercício, nesse presente trabalho, é concebido como um tipo de atividade na qual o estudante treina/reproduz um algoritmo, previamente abordado pelo professor, visando à fixação do mesmo. Atividades do tipo “Siga o modelo:” expressam esta lógica do exercício.

receptivo/passivo. Conforme Becker (2008, 2012), numa concepção epistemológica empirista, o aluno é considerado como uma “folha em branco” no qual – por meio da influência externa (exclusivamente exercida pelo professor) – o conhecimento é “impresso” na mente do estudante.

Em prosseguimento aos estudos ingressei no Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério (**CEFAM**³) em 2000, concluindo-o ao final de 2003. Ali vivenciei situações de ensino diferentes das experienciadas no Ensino Fundamental, pois uma considerável parcela dos docentes me desafiou a questionar os assuntos abordados. A ideia de um aluno receptivo/passivo não era a defendida por esses professores; pelo contrário, era exigido de mim (e de meus demais colegas) um posicionamento mais ativo e participativo nas aulas. Nesse momento, passei a questionar o modelo de aluno construído no Ensino Fundamental já que ‘ser’ um sujeito receptivo/passivo não era mais suficiente à aprendizagem. A concepção epistemológica que mais se aproximava deste ‘novo’ ideal de aluno – ou seja, de um sujeito ativo – era a construtivista (BECKER, 2008, 2012). Durante o período em que cursei o CEFAM estudei as diferentes teorias educacionais, inclusive a “derivada” da Epistemologia Genética de Jean Piaget⁴ – o construtivismo. Por ter naquela época uma visão superficial dessa teoria (e das outras também) não dei muita atenção às possibilidades advindas do construtivismo piagetiano à constituição de minha prática pedagógica enquanto futuro professor. Lembro-me, também, que grande parte dos meus colegas do CEFAM possuía aversão em relação à Matemática, além de lacunas em diversos conteúdos dessa ciência.

O crescente interesse na Matemática me direcionou a prestar o vestibular para o curso de Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (**UNESP**) no ano de 2002. Aprovado, iniciei os estudos no Ensino Superior em 2003, concluindo-o ao final de 2006. No decorrer da Licenciatura novamente experienciei situações de ensino que ‘exigiram’ de mim um papel de aluno receptivo/passivo que se aproximava, novamente, da concepção epistemológica empirista. A maioria dos docentes adotou o método

³ O CEFAM foi um projeto (de iniciativa do governo estadual em parceria com a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo) cujo objetivo visava à Formação de Professores – em nível Médio – para atuarem na Educação Infantil e nas quatro primeiras séries do Ensino Fundamental. Tal projeto teve seu início no final da década de 1980 em resposta à falta de professores para atuarem nestas duas etapas da Educação Básica. Devido à ‘nova’ política educacional (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (**LDBEN**), n.º 9394/96), os CEFAMs foram ‘desativados’ em 2005, já que a Formação de Professores para o exercício do magistério em qualquer nível de ensino tem de ser realizada em instituições de Ensino Superior.

⁴ Especialista em psicologia evolutiva e Epistemologia Genética, filósofo, lógico, biólogo e educador, Jean William Fritz PIAGET nasceu em Neuchâtel, Suíça, em 09 de agosto de 1896, e morreu em Genebra a 16 de setembro de 1980.

expositivo-transmissivo priorizando a memorização/treino em detrimento do questionamento e da resolução de problemas desafiadores. O modo como os conteúdos matemáticos foram abordados nas diversas disciplinas não me possibilitou, naquele momento, construir a ideia de Matemática enquanto uma ciência histórica, dinâmica e proveniente dos desafios/problemas decorrentes do próprio desenvolvimento da sociedade.

Ainda na Licenciatura – durante o estágio supervisionado realizado nos anos de 2004 e 2005 – desenvolvi com as turmas concluintes do CEFAM um projeto intitulado “***Ensino de Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental***”. Nesse projeto, abordei algumas situações didático-metodológicas que tratavam do ensino dos seguintes conteúdos matemáticos: o sistema de numeração decimal indo-arábico; as operações aritméticas envolvendo os números naturais; as operações aritméticas envolvendo os números fracionários. Das discussões realizadas juntamente aos alunos do CEFAM constatei os seguintes fatos: a) quase três quartos desses estudantes (futuros professores) afirmaram não saber como abordar vários conteúdos matemáticos pelo fato de não saberem diversos conceitos e procedimentos da Matemática (por exemplo, operações aritméticas envolvendo números racionais na forma decimal e fracionária, figuras geométricas bi e tridimensionais, interpretação de dados numéricos expressos em gráficos e tabelas, regra de três simples, etc.); b) a maioria dos estudantes apresentou aversão com relação à Matemática indicando, inclusive, optar por cursos de graduação compostos por uma carga horária curricular mínima (ou quase nula) relacionada à Matemática; c) nenhum aluno soube discursar adequadamente a respeito das teorias educacionais mais abordadas no CEFAM (o construtivismo piagetiano e a teoria sócio-histórica vygotskyana).

A respeito do caminhar profissional, em 2005 fui aprovado no concurso público para atuar como professor de Educação Básica I (**PEB I**) na Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (**SEE-SP**). Logo nos primeiros meses do ano letivo de 2006 – e sendo responsável por uma turma de 3.^a série do Ensino Fundamental – vivenciei algumas dificuldades ao ‘encarar’ a realidade escolar constituída por alguns problemas, tais como: a) alunos ainda não alfabetizados na língua materna; b) indisciplina; c) alunos que ainda não compreendiam as características do sistema de numeração indo-arábico (base decimal e valor posicional) e, tampouco, os significados das operações aritméticas em situações problema. Os inúmeros saberes⁵ construídos – desde o Ensino Fundamental até a Universidade – que me ‘informavam’ sobre o significado de ‘ser’ aluno, de ‘ser’ professor e da Educação (de um

⁵ Considera-se o ‘saber’ como um modo de conhecer/saber advindo da experiência prática (cotidiana e ou profissional). Outra discussão a respeito do significado (definição) de saber far-se-á na subseção 3.2.

modo geral) foram sendo “retraduzidos, (re)significados” (TARDIF, 2002) a partir da minha prática pedagógica. Dúvidas/inseguranças sobre como agir em sala de aula, qual metodologia utilizar, qual(is) conteúdo(s) abordar (e em qual nível de dificuldade) caracterizaram esse período. Inúmeras vezes, por não saber como agir mediante determinado problema, utilizei as estratégias adotadas pelos meus professores do Ensino Fundamental. Lembro-me de atribuir ponto ‘negativo’ aos alunos indisciplinados sem refletir, naquele momento, sobre a ineficiência dessa estratégia para resolver o problema da indisciplina. Assim, um saber que construí durante o Ensino Fundamental foi por mim utilizado (acriticamente) em minha prática pedagógica. A prática pedagógica não diz respeito somente ao como ensinar, como muitos pensam, mas ‘envolve’ “o que”, “por que” e “quando” avaliar, o que entendemos por ensino e aprendizagem da Matemática escolar, etc.

No decorrer dos meses do referido ano letivo (2006) fui compreendendo, gradativamente, a importância de/em refletir sobre a minha prática, “alicerçando” consequentemente o meu pensar/fazer nas pesquisas desenvolvidas pelos pares. Como mais da metade dos meus alunos da 3.^a série apresentavam dificuldades referentes à resolução de problemas envolvendo as operações aritméticas básicas, busquei na literatura pesquisas que investigassem a construção de tais operações. Encontrei na teoria de Piaget – mais especificamente no trabalho que aborda a construção das estruturas lógico-matemáticas (PIAGET; INHELDER, 1971) – e nos estudos de Vergnaud (1991), sobre as estruturas aditivas e multiplicativas, um possível caminho para enfrentar a referida dificuldade.

Graças à colaboração e orientação do Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola, tal dificuldade configurou-se em uma pesquisa em nível de iniciação científica (CAETANO, 2006, 2007) desenvolvida durante o segundo semestre do ano de 2006. Alicerçado na Epistemologia Genética, encontrei nos trabalhos de Gérard Vergnaud (1991) como o sujeito constrói as estruturas aditivas (os significados e os procedimentos referentes à adição e à subtração) e as estruturas multiplicativas (os significados e os procedimentos referentes à multiplicação e à divisão). A partir desses referenciais, elaborei uma sequência⁶ de problemas, envolvendo o tema “**Alimentação Saudável**”. Após desenvolver tal sequência com vinte estudantes – de 3.^a

⁶ Utilizando a metodologia de solução de problemas (POZZO, 1998), desenvolvi uma sequência de problemas (no total cinco) que configuraram situações de desequilíbrio cognitivo visando o estabelecimento do reequilíbrio. Ao (tentarem) solucionar os problemas, os estudantes tiveram a oportunidade de operar ações e relações matemáticas com o apoio na manipulação de objetos concretos, propiciando a ocorrência das experiências do tipo física e lógico-matemática (CUNHA, 1973; KAMII, 2005; PIAGET; SZEMINSKA, [1941] 1975). Por meio dessa ação dos alunos, fez-se possível a construção (por eles) de alguns significados das operações aritméticas básicas (aqui denominadas como estruturas aditivas e multiplicativas). Na seção seguinte discutir-se-ão, mais detalhadamente, esses conceitos oriundos da Epistemologia Genética, a saber: desequilíbrio e reequilíbrio, operações, experiência física e lógico-matemática.

e 4.^a séries do Ensino Fundamental que apresentaram os menores desempenhos em um teste aplicado – constatei uma melhora em relação à construção das estruturas aditivas e multiplicativas. Além disso, coletei algumas ideias dos professores (da escola participante) acerca do ensino de Matemática utilizando um questionário e entrevistas gravadas em áudio. Como resultado, verifiquei a ainda predominância da concepção epistemológica empirista e, em menor incidência, da concepção epistemológica apriorista no discurso desses docentes. Conforme Becker (2008, 2012), numa concepção epistemológica apriorista, o aluno é considerado como já dotado de conhecimentos; conhecimentos esses predeterminados ou ‘dados’ a priori em sua bagagem hereditária. Essa concepção sobre o conhecimento a priori ficou evidente na seguinte fala de uma das professoras entrevistadas: “– *A gente percebe que tem aluno que nasceu para a Matemática, o conhecimento já está ali, nele! Agora, já para outros alunos, não tem o que fazer. Eles não aprendem!*”.

Ao analisar/comparar os resultados provenientes dos trabalhos desenvolvidos na iniciação científica e no estágio supervisionado, além de considerar as dificuldades na aprendizagem da Matemática evidenciadas pelos órgãos avaliadores do Sistema de Ensino (BRASIL, 2004; SÃO PAULO, 2004, 2005), decidi elaborar uma pesquisa que, a partir de 2007, foi vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência – Faculdade de Ciências da UNESP/Bauru. Essa pesquisa – em nível de Mestrado desenvolvida no período de 2007 a 2009 sob a orientação do Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola – buscou responder a seguinte questão: “***De que modo os professores que ensinam Matemática aos alunos das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental vêm utilizando, em suas práticas pedagógicas, a Epistemologia Genética de Jean Piaget?***”. A escolha de/em investigar a utilização da teoria piagetiana deveu-se a dois motivos: 1.^o a verificação, proveniente da análise de minha prática docente, de que atividades didático-metodológicas embasadas na Epistemologia Genética podem propiciar a construção (pelo estudante) de conceitos e procedimentos matemáticos; 2.^o a literatura (CAETANO, 2007; CARUSO, 2002; CHAKUR, 2002; COLETO, 2007; COLLARES, 2001; CUNHA, 1973; FURTH, 1997; FURTH; WACHS, 1995) evidenciando os benefícios da teoria de Piaget à constituição de práticas docentes que (podem) colaborar na construção de conteúdos matemáticos pelo estudante.

Para a execução dessa pesquisa (CAETANO, 2009) analisei as práticas pedagógicas desenvolvidas por professores da 1.^a a 4.^a séries do Ensino Fundamental (sendo um de cada) em relação ao ensino de Matemática. Decorridos dois meses de observação de cada uma dessas quatro práticas em duas escolas pertencentes à Diretoria de Ensino da Região de Bauru – por meio de questionários, entrevistas, observações e registros (por escrito e em áudio) – e

mediante a análise dos dados pude inferir os seguintes resultados: a) os docentes possuíam uma visão superficial e difusa da teoria de Piaget; fato esse que corroborou com as pesquisas de Gebara e Marin (2005) e Rapoport e Silva (2006); b) as professoras da 1.^a e 2.^a séries utilizaram (predominantemente) em suas aulas o método expositivo-transmissivo (aproximando-se da concepção epistemológica empirista), não permitindo aos estudantes operarem ações e relações matemáticas apoiadas em manipulações sobre objetos concretos⁷; c) a docente da 3.^a série “mesclou”, em sua prática, estratégias de ensino ‘próximas’ da concepção epistemológica empirista e construtivista (BECKER, 2008, 2012), ‘apoando’ a pesquisa desenvolvida por Massabni (2005) que identificou essa mescla na prática pedagógica dos professores; d) o professor da 4.^a série apresentou em sua prática pedagógica estratégias de ensino mais “próximas” da concepção epistemológica construtivista ao desenvolver atividades em sala de aula que priorizaram a ação do estudante sobre as situações problema matemáticas propostas. Contudo, esse professor não soube justificar o porquê de tais estratégias, evidenciando uma prática descontextualizada da teoria (RAPOPORT; SILVA, 2006); e) todos os professores afirmaram possuir dificuldades para ensinar Matemática em razão da não construção de diversos conceitos matemáticos; f) os saberes da experiência, ou saberes experienciais (TARDIF, 2002), isto é, os conhecimentos anteriores, crenças, concepções, certezas e dúvidas construídas pelos professores acerca do significado de Educação, de ‘ser’ aluno, de ‘ser’ professor, etc. – em especial os construídos durante a Educação Básica – influenciaram a prática pedagógica desses professores a ponto de ‘desprezarem-desacreditarem’ os demais (principalmente os saberes, abordados na/durante a Formação Inicial, referentes às Ciências da Educação, metodologias e didáticas específicas, etc.). A professora da 2.^a série, por exemplo, disse em uma entrevista que as metodologias abordadas no seu curso de Licenciatura em Pedagogia não foram suficientes para “dar conta” do ensino do algoritmo da subtração aos seus alunos. Assim, essa docente recorreu ao modo como a sua antiga professora do Ensino Fundamental a ensinou.

A partir dessa investigação (CAETANO, 2009) ressurgiram duas ideias que vinha elaborando desde a época do CEFAM com relação à Formação Inicial e à prática pedagógica

⁷ Operar ações e relações matemáticas – apoiando-se em manipulações sobre objetos concretos – representa uma ação mental na qual o aluno, por meio da experiência física e lógico-matemática, abstrai: a) os aspectos físicos do objeto manipulado, tais como a cor, o tamanho, a textura, etc.; b) as relações lógicas realizadas sobre os objetos, tais como reunir, dividir, classificar, seriar, ordenar etc. Na seção seguinte (2) realizar-se-ão discussões mais detalhadas acerca desse assunto.

do professor que ensina Matemática nos anos⁸ iniciais do Ensino Fundamental. Apresento-as a seguir:

1.^a Uma das dificuldades dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental para/em abordar os conteúdos matemáticos aos seus alunos deve-se a não construção desses conceitos (por esses docentes) durante os seus anos de Educação Básica.

2.^a O professor utiliza-reproduz em sua prática pedagógica os saberes experienciais advindos da trajetória escolar, principalmente os construídos na Educação Básica (durante o Ensino Fundamental e Médio). Essa reprodução – na maioria das vezes – ocorre acriticamente, ou seja, o docente não reflete **sobre porque** utiliza determinadas estratégias didático-metodológicas em suas aulas. Tais saberes, na maioria das vezes, advêm de situações vivenciadas em sala de aula que se ‘aproximam’ de concepções epistemológicas empiristas e aprioristas.

Visando embasar e contextualizar essas ideias provenientes da minha trajetória acadêmica e profissional, encontrei na literatura pesquisas que estabelecessem possíveis ‘diálogos’ com as mesmas. Em relação à primeira ideia, algumas pesquisas (CAPORALE; NACARATO, 2003; GOMES; MORETTI, 2003; COSTA; POLONI, 2009; CURI, 2004; DELGADO, 2003; RIVAS; GODINO; CASTRO, 2012; ROCHA, M., 2005; SANTOS, 2004) evidenciaram que a não aprendizagem da Matemática pelo aluno durante a Educação Básica traz implicações a sua (futura) atuação como professor, levando-o a reproduzir as defasagens de sua formação. Nessa reprodução esse docente – em muitos casos de modo não intencional – pode transmitir aos seus estudantes que a Matemática é uma disciplina estática, constituída somente por regras/‘fórmulas’ e acessível a poucos. Outras investigações (ABRAHÃO; SILVA, 2017; ARAMAN; SAMPAIO, 2013; ARAÚJO; PEREIRA, 2016; BARRETO; SOUSA, 2009; CARVALHO, 2007; DICETTI; CERETA, 2016; FERNANDES, 2013; FERNANDES; LEITE, 2015; NACARATO, 2010; OLIVEIRA, 2010; PROENÇA, 2015; RIBEIRO; ALBRECHT, 2016; ROSA, 2015; SANTOS; GHEDIN, 2016; SOARES, 2013; SOUZA; BORGES, 2016) identificaram a existência de diversas lacunas conceituais dos licenciandos em Pedagogia em relação à Matemática.

Sobre a influência dos saberes experienciais à constituição da prática pedagógica (2.^a ideia), algumas investigações (CARNEIRO, 2014, 2015; COSTA; CURI, 2010; LÓPEZ;

⁸ A substituição do termo **série** por **ano** deve-se às leis **nº. 11.114**, de 16/05/2005 e **nº. 11.274**, de 6/2/2006, na qual o Ensino Fundamental passa a ser constituído por 9 anos de estudo, recebendo alunos com 6 anos de idade (ou a completar). Estabelecendo uma comparação com as séries, o 1.^o ano equivale à pré-escola da Educação Infantil, o 2.^o ano à 1.^a série do Ensino Fundamental, o 3.^o ano à 2.^a série do Ensino Fundamental, e assim por diante.

ALSINA, 2016; MARQUESIN, 2016; NACARATO, 2010; QUEIROZ, 2007; SANTOS; GHEDIN, 2016; TARDIF, 2002; TARDIF; RAYMOND, 2000; TOWNSEND; TOMAZETTI, 2007; ZIBETTI; SOUZA, 2007) sinalizaram que esses saberes – construídos principalmente no período em que o aluno cursou a Educação Básica – podem ser utilizados pelos professores em suas práticas pedagógicas de modo acrítico. Essa utilização acaba, na maioria das vezes, supervalorizando os saberes da experiência, chegando a ponto de negar os abordados nos cursos de Licenciatura (em particular os referentes às Ciências da Educação). Os referidos autores salientaram que isso ocorre pois, em grande parte, a Formação Inicial não propicia ao licenciando a reflexão sobre esses saberes (experenciais), ou seja, o aluno (futuro-professor) “passou” pela Licenciatura sem modificar/refletir/reeducar tais saberes.

Na tentativa de/em contribuir com a Formação Inicial do professor que ensina(rá) Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental – de modo a ‘minimizar’ alguns problemas dessa formação, em particular os denotados nas duas ideias apresentadas há pouco – resolvi, então, propor um Grupo de Estudo⁹. Esse grupo foi desenvolvido por mim, sob a supervisão do orientador da presente tese, e contou com a colaboração (participação/ação) de sete licenciandas em Pedagogia de uma universidade pública do estado de São Paulo. Algumas pesquisas (ALVES, 2007; GIMENES; PENTEADO, 2004; KISS, 2006; PICETTI, 2008; ROCHA, L., 2005) identificaram que em um GE pesquisador-universitário e alunos da Licenciatura (ou professores da Educação Básica) passam gradativamente a realizar um trabalho (que pode vir a se tornar) colaborativo, ‘facilitando’ a ocorrência da (re)significação¹⁰ de diversos saberes (inclusive os experenciais) por ambos. Assim, por meio do GE proposto intentou-se oportunizar as sete licenciandas um espaço de/para: a) a discussão acerca da Matemática e seus processos de ensino e aprendizagem; b) a aprendizagem de alguns conceitos (esquemas¹¹) matemáticos ainda não construídos durante a Educação Básica; c) a discussão acerca da construção do conhecimento a partir da Epistemologia Genética; d) a reflexão em torno dos saberes da experiência – em particular os construídos durante a Educação Básica (ora denominados pré-profissionais).

⁹ Para evitar a repetição desse termo, a partir deste ponto utilizar-se-á a sigla GE para indicar Grupo de Estudo.

¹⁰ A (re)significação, no presente estudo, é considerada como sendo uma ‘nova’ compreensão/entendimento de determinado conhecimento mediante a construção de um ‘novo’ quadro interpretativo (de assimilação). Essa ‘nova’ compreensão pode ser inédita ou substituir uma compreensão anteriormente construída; daí a utilização do termo ‘(re)’. Na seção 2 denotar-se-ão discussões mais detalhadas sobre a significação (assimilação).

¹¹ Considera-se esquema como aquilo que é generalizável numa determinada situação. Por exemplo, ao ordenar um conjunto de objetos, considerando-se um determinado atributo, o aluno utiliza um esquema de/para ordenar constituído por uma determinada sequência de ações (físicas) e operações (mentais) que possibilita a ordenação. Na seção seguinte outras discussões a respeito do conceito de esquema far-se-ão presentes.

Assim, no intuito de verificar a pertinência/validade do GE à referida formação, a presente pesquisa visa responder o seguinte problema:

Quais os limites e as possibilidades de um Grupo de Estudo alicerçado em elementos teóricos advindos da Epistemologia Genética e da Formação de Professores à (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional de licenciandas em Pedagogia em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem)?

Conforme já denotado nos parágrafos anteriores, escolhi a Epistemologia Genética para embasar o referido GE devido aos possíveis benefícios dessa teoria à prática pedagógica de Matemática (BECKER, 2008, 2012; CUNHA, 1973; FURTH, 1997; KAMII, 2005; LIMA, 2000; PIAGET, 2002). Prática essa que pode possibilitar ao aluno – por meio de sua ação ao interagir com o objeto do conhecimento – a construção dos conteúdos matemáticos.

Das pesquisas que versam sobre a Formação de Professores, utilizei – enquanto embasamento para a constituição do GE – àquelas que: a) discutem/apresentam os saberes docentes, isto é, os saberes necessários à prática pedagógica; b) discutem/problematizam a Formação Inicial do professor que ensina(rá) Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Como o GE pretende contribuir com a Formação Inicial desses professores, então, compreender os problemas/particularidades/necessidades dessa formação torna-se importante à proposição do GE.

Nesse ponto cabe o seguinte questionamento: ***Por que é necessário (re)significar alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática durante/na Formação Inicial do pedagogo?*** Porque, na maioria das vezes, esses saberes – que poderão influenciar a prática pedagógica do (futuro) professor – ‘informam’ o licenciando levando-o a considerar a Matemática como uma ciência a-histórica (desvinculada dos problemas advindos do próprio desenvolvimento da sociedade) e exclusivamente algorítmica (vazia de significado), como apontou o estudo desenvolvido por Costa et al. (2017), além de considerarem-na de difícil aprendizagem. Tais características acabam contribuindo com a não-aprendizagem dos conteúdos matemáticos e, também, com o desenvolvimento de aversão para com a Matemática. É por isso que diversos estudos (ARAMAN; SAMPAIO, 2013; CARNEIRO, 2014, 2015; CAVALCANTE; SOARES, 2012; COSTA, 2013; COSTA; CURI, 2010; COSTA et al., 2017; LÓPEZ; ALSINA, 2016; NACARATO, 2010; NAGY-SILVA; PASSOS; CYRINO, 2010; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2013; SANTOS; GHEDIN, 2016; SILVA; PASSOS, 2016; SOARES, 2013) sinalizaram a necessidade de (re)significação/(re)educação/reflexão em torno de tais saberes durante a Formação Inicial de

modo que os licenciandos compreendam a Matemática como uma ciência possível de ser construída.

Antes de apresentar (sucintamente) as seções que comporão a tese, considero oportuno o seguinte questionamento que, de certo modo, justifica a relevância/importância da investigação desenvolvida: ***“Por que investigar a Formação Inicial do professor que ensina(rá) Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental torna-se necessária?”***. Inúmeros são os motivos que podem responder tal questionamento; a saber:

a) Porque há inúmeros problemas, ainda presentes nessa formação, que devem ser investigados/discutidos a fim de uma possível minimização/solução. Entre alguns, cito:

a.1) A presença de uma considerável parcela de licenciandos em Pedagogia com lacunas conceituais em Matemática. Se na Formação Inicial tais dificuldades não forem superadas, provavelmente, o (futuro) professor terá dificuldades ao ensinar Matemática, como mostram os estudos de Silva (2016) e Silva (2018) que evidenciaram baixo conhecimento declarativo (conceitual) por parte de professores alfabetizadores (atuantes nos três primeiros anos do Ensino Fundamental) em Geometria.

a.2) A (ainda) presença do modelo da racionalidade técnica nos cursos de Licenciatura. Tal modelo – ao desconsiderar a complexidade do ato educativo considerando-o como uma ‘simples’ aplicação da ciência básica (GAUTHIER et al., 1998; MIZUKAMI et al., 2006) – acaba contribuindo com a desprofissionalização da profissão docente (GAUTHIER et al., 1998).

a.3) A presença de uma considerável parcela de estudantes com um sentimento de aversão em relação à Matemática (CAVALCANTE; SOARES, 2012; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2013); sentimento esse proveniente da não boa relação estabelecida para com essa ciência durante a Educação Básica.

b) Porque ainda há um número inexpressivo de trabalhos acadêmicos (ABRAHÃO; SILVA; 2017) que investigaram a Formação Inicial do professor que ensina(rá) Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim, a presente investigação pretende contribuir ao desenvolvimento das pesquisas relacionadas a essa temática e, por conseguinte, com o campo da Educação e da Educação Matemática. Apresento, a título de constatação sobre o baixo número de trabalhos que investigaram tal temática, a tabela a seguir:

Tabela 1 – Distribuição de artigos publicados em eventos e periódicos, no período de 2007 a 2017, que investigaram a temática Formação Inicial do pedagogo em relação à Matemática.

Evento ou Periódico (Título)	Artigos publicados (Frequência)	Artigos publicados (Temática: Formação Inicial do pedagogo em relação à Matemática)	
		(Frequência)	(%)
Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)	2566	49	1,91 ¹²
Reunião Nacional da Associação Nacional de Pós- Graduação e Pesquisa em Educação (ANPED)	3035	6	0,20
Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM)	516	9	1,74
Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)	526	23	4,37
Revista Brasileira de Educação (RBE)	429	0	0
Zetetiké : Revista de Educação Matemática	201	7	3,48
Total	7273	94	1,29

Fonte: Arquivo pessoal, 2018.

Conforme a referida tabela, do total de artigos publicados em alguns periódicos e eventos da área de Educação e Educação Matemática ($n = 7273$), apenas 94 artigos (ou 1,29% do total) apresentaram pesquisas relacionadas à Formação Inicial do pedagogo em relação à Matemática. Esse baixo número corrobora com o apontado por Abrahão e Silva (2017), além de ser um indício da necessidade de realização de estudos que investigam essa temática.

Por fim, apresento as seções que comporão a presente tese:

Na seção 2 – “Epistemologia Genética: algumas discussões” – abordam-se alguns ‘elementos’ da teoria piagetiana que possibilitam explicar a gênese e o desenvolvimento do conhecimento pelo sujeito, a saber: o mecanismo de equilibração e seu aspecto inferencial (a dialética), a abstração reflexionante considerada um dos aspectos gerais deste mecanismo (equilibração) e o processo de tomada de consciência. Após, explicita-se a evolução do conhecimento – da inteligência prática ao pensamento operatório formal – e, em seguida, abordam-se alguns ‘elementos’ da teoria de Gérard Vergnaud. Dando continuidade, apresentam-se algumas “aproximações” da teoria de Piaget à Educação, destacando-se, por fim, algumas pesquisas que discutiram a Formação Inicial de professores a partir da Epistemologia Genética.

Na seção 3 – “A Formação de Professores: saberes docentes e Formação Inicial do professor que ensina(rá) Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental” – define-se a Formação de Professores, em particular a Formação Inicial e denota-se o problema da

¹² Esse valor (1,91) e os outros cinco valores subsequentes (0,20; 1,74; 4,37; 0; 3,48) referem-se ao percentual dos artigos publicados – considerando o subtotal de artigos publicados em cada um dos eventos ou periódicos – que investigaram a referida temática.

racionalidade técnica nesta primeira etapa da formação. Além disso, realiza-se uma ‘breve’ contextualização acerca da Formação Inicial de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Em seguida, ressaltam-se algumas tipologias de conhecimentos e saberes docentes, dando-se mais ‘atenção’ ao saber da experiência pré-profissional (e às crenças e concepções consideradas como sendo uma das constituintes desse saber). Por último, apresentam-se alguns estudos – já desenvolvidos pelos pares – que investigaram: 1) a Formação Inicial de professores dos anos iniciais em relação ao ensino de Matemática; 2) os saberes da experiência pré-profissional.

Na seção 4 – “Metodologia da Pesquisa” – reapresenta-se o problema de pesquisa e explicitam-se os objetivos (geral e específicos). Delimita-se a pesquisa como sendo de natureza qualitativa do tipo estudo de caso, denotando-se as suas características e o motivo de sua utilização à investigação do fenômeno em questão (isto é, os limites e as possibilidades do GE à (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional de licenciandas em Pedagogia em relação à Matemática). Justifica-se a escolha das participantes e faz-se uma breve caracterização das mesmas referente aos aspectos contextuais. São apresentados, detalhadamente, os instrumentos e os procedimentos utilizados para a obtenção dos dados. Por fim, são explicitadas as categorias utilizadas para a análise dos referidos dados.

Na seção 5 – “Grupo de Estudo: uma proposta à (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática” – apresenta-se o GE desenvolvido pelo pesquisador-autor e com a colaboração de sete licenciandas em Pedagogia. São apresentadas as atividades desenvolvidas no GE; atividades essas embasadas em ‘elementos’ teóricos advindos da Epistemologia Genética e da Formação de Professores. Denota-se, também, a dinâmica utilizada na/para a execução de tais atividades, além de apresentar/caracterizar o papel do pesquisador-autor e o papel das licenciandas no GE. Por fim, apresenta-se uma síntese destacando como ‘se deu’ cada um dos 20 encontros que compuseram o GE.

Na seção 6 – “Análise e Discussão dos dados” – apresentam-se os dois estudos de caso. Cada um desses estudos de caso refere-se à (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem) de duas (dentre as sete) licenciandas que participaram do GE. Para a elaboração de cada caso constitui-se, num primeiro momento, um relatório descritivo (e denso/profundo) que explicita alguns saberes da experiência pré-profissional (das duas licenciandas) em relação à Matemática. Em seguida, e mediante uma análise comparativa, identificam-se as possíveis (re)significações desses saberes provenientes da participação/atuação das duas licenciandas no GE. Por fim, através da análise conjunta

(síntese) dos dois estudos de caso apresentam-se os limites e as possibilidades do GE à (re)significação de tais saberes.

Na seção 7 – “Conclusões e algumas implicações da pesquisa” – retoma-se, inicialmente, o problema de pesquisa. Em seguida, realiza-se uma breve caracterização do GE e apresenta-se, sucintamente, o ‘percurso’ metodológico utilizado na/para a realização da investigação. Após, e a partir dos dados já analisados na seção anterior (6), conclui-se a respeito dos limites e das possibilidades do GE à (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional das licenciandas participantes em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem). Dando continuidade, apresentam-se as limitações e as dificuldades observadas durante o processo de investigação devido às peculiaridades do fenômeno estudado. Destaca-se, também, a dificuldade encontrada pelo pesquisador-autor ao desempenhar duas funções (formador e investigador). Por fim, e por meio dos resultados da pesquisa – em confronto com os referenciais teóricos – denotam-se algumas implicações do estudo relativas: a) às contribuições para a (re)significação dos referenciais teóricos utilizados; b) às contribuições para o desenvolvimento da área de Educação e Educação Matemática; c) ao desenvolvimento da prática profissional; d) à necessidade de desenvolvimento de outros estudos sobre a problemática investigada.

2 EPISTEMOLOGIA GENÉTICA: ALGUMAS DISCUSSÕES

As conclusões principais que os trabalhos variados da psicologia da criança oferecem à pedagogia são, de há muitos anos, relativos à própria natureza do desenvolvimento intelectual. Por um lado, esse desenvolvimento refere-se essencialmente às atividades do sujeito, e da ação sensoriomotora às operações mais interiorizadas, o motor é constantemente uma operatividade irreduzível e espontânea. Por outro, esta operatividade não é nem pré-formada de uma vez por todas nem explicável por suas contribuições exteriores da experiência ou da transmissão social: ela é o produto de sucessivas construções, e o fator principal desse construtivismo é um equilíbrio por auto-regulações que permitem remediar as incoerências momentâneas, resolver os problemas e superar as crises ou os desequilíbrios por uma elaboração constante de novas estruturas que a escola pode ignorar ou favorecer, segundo os métodos empregados. (PIAGET, [1969]¹ 1998b, p. 49)

A Epistemologia Genética consiste numa teoria do conhecimento elaborada por Jean Piaget e colaboradores ao longo de, aproximadamente, seis décadas de “intensas e extensas” pesquisas científicas. Tal teoria visa explicar a gênese (origem) e o desenvolvimento do conhecimento desde as ações sensório-motoras até às estruturas formais do pensamento (PIAGET, [1970] 2007). Ao defender que o conhecimento é produto de uma construção (histórica) realizada ativamente pelo sujeito ao interagir (relacionar-se) com o objeto (PIAGET, [1936] 1987), a Epistemologia Genética opõe-se ao empirismo e ao inatismo (apriorismo). Para o empirismo, a pressão exercida pelo objeto sobre o sujeito garante a ‘impressão-cópia’ do conhecimento em sua mente, no qual o papel desse sujeito é o de um receptor (passivo). Já o inatismo concebe que o sujeito nasce com o conhecimento pré-formado, sendo apenas necessário o ‘desabrochar’ desse conhecimento. Simbolicamente, estas duas epistemologias equivalem a:

Figura 1 – Empirismo e inatismo: linguagem lógica.

EMPIRISMO	INATISMO
$(O \rightarrow S)^2$	$(S \rightarrow O)^3$

Fonte: Elaborada pelo autor, adaptada de Becker (2008, 2012).

¹ A data entre colchetes refere-se à edição original da referida obra. Opta-se por tal registro de modo a melhor situar-localizar temporalmente a data de publicação (da primeira edição) das obras elaboradas por Jean Piaget e colaboradores. Nos demais trechos do texto – nos quais tal obra for citada – registrar-se-á, somente, a data da obra utilizada pelo autor (e indicada nas Referências).

² O objeto incide (implica) sobre o sujeito unilateralmente.

³ O sujeito incide (implica) sobre o objeto unilateralmente.

Conforme já exposto, ao não dicotomizar a relação entre sujeito e objeto, Piaget (1987) propõe uma interação radical entre estes dois polos, em que sujeito e objeto relacionam-se mutuamente (reciprocamente). Nos dizeres de Piaget (1987):

[...] as relações entre o sujeito e seu meio consistem numa interação radical, de modo tal que a consciência não começa pelo conhecimento dos objetos nem pelo da atividade do sujeito, mas por um estado indiferenciado; e é deste estado que derivam dois movimentos complementares, um de incorporação das coisas ao sujeito [assimilação], o outro de acomodação às próprias coisas. (PIAGET, 1987, p. 386)

A assimilação é compreendida como sendo uma incorporação (‘interpretação’) do objeto às estruturas (esquemas⁴ de ação e ou conceitos) já construídas pelo sujeito. A acomodação, por sua vez, representa a modificação (transformação) de tais estruturas pelo fato das mesmas não terem sido suficientes à assimilação do objeto. O caráter indissociável entre a assimilação e a acomodação se deve à ideia de que:

A assimilação nunca pode ser pura, visto que, ao incorporar os novos elementos nos esquemas anteriores, a inteligência modifica incessantemente os últimos para ajustá-los aos novos dados. Mas, inversamente, as coisas nunca são conhecidas em si mesmas, porquanto esse trabalho de acomodação só é possível em função do processo inverso de assimilação. (PIAGET, 1987, p. 18)

O equilíbrio⁵ entre esses dois movimentos indissociáveis e invariantes (assimilação e acomodação) permite a adaptação do sujeito ao meio; sendo essa adaptação indissociável à organização, pois “é adaptando-se às coisas que o pensamento se organiza e é organizando-se que estrutura as coisas.” (PIAGET, 1987, p. 19). Acerca da adaptação, Piaget (1998b) pontua:

Ora, a adaptação é um equilíbrio – equilíbrio cuja conquista dura toda a infância e adolescência e define a estruturação própria destes períodos da existência – entre dois mecanismos indissociáveis: a assimilação e a acomodação. Diz-se, por exemplo, que um organismo é adaptado quando ele pode ao mesmo tempo conservar sua estrutura assimilando a ela os alimentos tirados do exterior e acomodar essas estruturas às diversas particularidades desse meio: a adaptação biológica é, portanto, um equilíbrio entre a assimilação do meio ao organismo e a acomodação deste àquele. Da mesma forma, pode-se dizer que o pensamento é adaptado a uma realidade particular quando ele conseguiu assimilar aos seus próprios quadros essa

⁴ Conforme Piaget (1987, p. 359), o esquema “constitui um espécie de conceito sensório-motor ou, mais amplamente, o equivalente motor de um sistema de relações e de classes.”

⁵ Como uma primeira aproximação à compreensão do significado de equilíbrio, faz-se válido o seguinte esclarecimento dado por Piaget e Inhelder ([1955] 1976, p. 183): “Evidentemente, o equilíbrio não é estável no sentido de um estado de repouso num sistema fechado (por exemplo, um equilíbrio de forças em mecânica). De um ponto de vista psicológico, um sistema está em equilíbrio quando uma perturbação que modifica o estado do sistema tem o seu oposto numa ação espontânea que o compensa. Consequentemente, o equilíbrio é uma função do comportamento do ator. As leis de equilíbrio exprimem a probabilidade de ocorrência de várias formas possíveis de compensação, em função de condições neurofisiológicas, ambiente físico e ambiente social.”

realidade, ao mesmo tempo que acomodava aqueles às novas circunstâncias apresentadas por esta: a adaptação intelectual é, então, a assimilação da experiência às estruturas dedutivas e a acomodação dessas estruturas aos dados da experiência. (PIAGET, 1998b, p 157)

Ao contrário do significado atribuído pelo senso comum à adaptação compreendendo-a como uma submissão e ou aceitação passiva do indivíduo às imposições do meio, a adaptação na teoria piagetiana refere-se à ação (material e ou imaterial⁶) realizada pelo sujeito ao interagir com o objeto. A organização, enquanto complemento da adaptação – e vice-versa – garante à adaptação uma coerência formal, organizando as relações entre as partes e o todo. A esse respeito, Piaget (1987) observa:

No que diz respeito às relações entre as partes e o todo, que definem a organização, é sabido que cada operação intelectual é sempre relativa a todas as outras e que os seus elementos próprios são regidos por essa mesma lei. Cada esquema está, assim, coordenado com todos os demais e constitui ele próprio uma totalidade formada de partes diferenciadas. Todo e qualquer ato de inteligência supõe um sistema de implicações mútuas e de significações solidárias. As relações entre essa organização e a adaptação são, portanto, as mesmas existentes no plano orgânico [...]. (PIAGET, 1987, p. 18-19, grifo nosso)

Em suma, a organização e a adaptação intelectuais – consideradas como duas funções invariantes da construção cognitiva e como “dois processos complementares de um mecanismo único” (PIAGET, 1987, p. 18) – possibilitam ao sujeito desenvolver-se construindo estruturas cada vez mais complexas. Além de discriminar tais funções invariantes do desenvolvimento – organização e adaptação; adaptação essa decorrente do equilíbrio entre a assimilação e a acomodação – Piaget (1998b) apresenta os fatores de tal desenvolvimento. Observe, no organograma abaixo, os referidos fatores:



Fonte – Elaborado pelo autor, 2012.

Conforme o organograma, os três primeiros fatores – maturação orgânica, experiência (física e lógico-matemática) e transmissão (interação) educativa ou social – são coordenados

⁶ Ação material refere-se às ações práticas realizadas pelo sujeito, seja com o próprio corpo ou com objetos físicos. Já a ação imaterial representa as ações mentais (em forma de pensamento) originadas da ação material.

pela equilibração. A maturação orgânica representa uma condição necessária ao desenvolvimento, porém não suficiente já que “a maturação do sistema nervoso limita-se a abrir possibilidades, excluídas até certos níveis de idade, mas é preciso atualizá-las, o que supõe outras condições, das quais a mais imediata é o exercício funcional ligado às ações.” (PIAGET, 1998b, p. 45). Ainda sobre a não suficiência da maturação, Piaget e Inhelder ([1959] 1971) pontuam:

Mas, de fato, não sabemos e não conhecemos, sobretudo, qualquer estrutura cognitiva que se possa demonstrar ser resultante, exclusivamente, de fatores endógenos ligados à maturação. A noção de maturação parece um pouco mais clara do ponto de vista negativo, no sentido em que atribuir à falta de aparelhos nervosos suficientes a ausência de um comportamento (por exemplo, a ausência entre os 2 e 4 anos de todo e qualquer raciocínio hipotético-dedutivo) parece comportar um significado. Sob o seu aspecto positivo, a maturação do sistema nervoso limita-se, pelo contrário, a ampliar incessantemente o campo das possibilidades acessíveis ao sujeito; mas, entre a possibilidade de um comportamento e sua atualização, é preciso contar ainda com a intervenção ativa do meio físico (exercício e experiência adquirida) e, além dessa aprendizagem, com todas as influências educativas do meio social. (PIAGET; INHELDER, 1971, p. 16-17)

Da citação observa-se que os autores referem-se à necessidade de ‘atualização’ do campo de possibilidades abertas ao sujeito graças à maturação. Assim, são citados os outros fatores necessários a essa atualização: a experiência e a influência educativa do meio social. Em relação à experiência, Piaget (1987) a entende não como uma recepção (contato, ou seja, pressão exercida pelo objeto sobre o sujeito como defende o empirismo), mas sim como ação e construção progressivas. É ‘experimentando’ a realidade que o sujeito a constrói – inicialmente no plano prático e depois no mental. Ainda sobre o significado da experiência, Piaget (1987) esboça:

Em conclusão, não só a experiência é tanto mais ativa e mais compreensiva quanto mais a inteligência amadurece, mas também as “coisas” sobre as quais ela se desenvolve nunca poderão ser concebidas independentemente da atividade do sujeito. Essa segunda constatação vem reforçar, pois, a primeira e indicar que, se a experiência é necessária ao desenvolvimento intelectual, não poderá ser interpretada, implicitamente, como as teorias empiristas querem, isto é, como auto-suficientes. É verdade que quanto mais ativa for a experiência, tanto mais a realidade sobre que ela incide se torna independente do eu e, por conseguinte, mais “objetiva”. [...] Com efeito, é na medida em que o sujeito é ativo que a experiência se objetiva; portanto, a objetividade não significa independência em relação à atividade assimiladora da inteligência, mas, simplesmente, dissociação em relação ao eu e à sua subjetividade egocêntrica. A objetividade da experiência é uma conquista da acomodação e da assimilação combinadas, isto é, da atividade intelectual do sujeito e não um dado primordial que se lhe impõe de fora. [...] O caráter cada vez mais complementar dessas duas funções [assimilação e acomodação] permite-nos, assim, concluir que a experiência, longe de emancipar-se da atividade intelectual, só progride na medida em que é organizada e animada pela própria inteligência. (PIAGET, 1987, p. 344)

Logo, a experiência só existe graças à ação do sujeito ao assimilar-acomodar ‘inteligentemente’ a realidade. Em seus estudos, Piaget (1998b) classifica a experiência como sendo do tipo física e lógico-matemática. A experiência física “consiste em agir sobre os objetos e descobrir as propriedades por abstração, partindo dos próprios objetos.” (PIAGET, 1998b, p. 46). A partir dessa abstração (empírica), o sujeito retira as propriedades observáveis do objeto, como, por exemplo, a sua cor, tamanho, peso, etc. Já a experiência lógico-matemática “consiste, por sua vez, em agir sobre os objetos, mas no caso, em descobrir as propriedades por abstração a partir, não dos objetos como tais, mas das próprias ações que se exercem sobre esses objetos.” (PIAGET, 1998b, p. 46). Este outro tipo de abstração (reflexionante) permite ao sujeito retirar as propriedades não observáveis, ou seja, advindas das coordenações das ações realizadas sobre os objetos, como, por exemplo, classificá-los mediante um atributo comum.

Do mesmo modo que a organização e a adaptação – assim como a assimilação e a acomodação – são indissociáveis, verifica-se o mesmo em relação a esses dois tipos de experiência (física e lógico-matemática). Sobre essa ‘última’ indissociabilidade, Becker (2010) destaca:

Esses dois componentes do processo de desenvolvimento não devem ser concebidos como estanques, mas como aspectos indissociáveis, e sempre presentes, de toda a experiência. “Está claro, efetivamente, que não existe experiência física, por mais elementar que seja, sem relacionamentos ou correspondências, sem classificação, seriação ou medida etc., portanto sem um quadro concernente à experiência lógico-matemática. Reciprocamente, uma experiência de segundo tipo [lógico-matemática] apoia-se sobre os objetos extraíndo da ação o essencial de suas abstrações: ora, na medida em que os objetos se prestam a essas ações ou operações (em que são coordenáveis, classificáveis, enumeráveis etc.), junta-se ao componente lógico-matemático, que permanece essencial, um segundo plano de experiência física, uma vez que o sujeito aprende ao menos que os objetos submetem-se a suas manipulações e são, portanto, logicizáveis e matematizáveis” (LCS, p. 387). (BECKER, 2010, p. 217)

Ou seja, ao ‘retirar’ (experiência física via abstração empírica) a propriedade ‘cor-azul’ de um objeto, o sujeito vale-se da classificação (experiência lógico-matemática via abstração reflexionante) já construída a respeito dos tipos de cores. Reciprocamente, com o progresso da experiência lógico-matemática faz-se possível o ‘avanço’ da experiência física, permitindo ao sujeito retirar ‘novas’ propriedades dos objetos até então não abstraídas. Por exemplo, no caso do referido objeto de ‘cor-azul’, outras propriedades podem ser abstraídas, tais como o tipo de material do qual é constituído, a origem desse material (orgânica ou mineral), etc.

Em relação ao outro fator – transmissão (interação) educativa ou social – ou também denominado influência do meio social, Piaget (1998b, p. 47) destaca que “a aquisição dos conhecimentos depende naturalmente das transmissões educativas ou sociais (lingüísticas etc.) [...]”. No entanto, a referida aquisição do conhecimento só se faz possível mediante a existência de ‘instrumentos’ de assimilação que tornam o conteúdo da transmissão assimilável ao sujeito. Além de não minimizar ou excluir a importância do meio social ao desenvolvimento mental do sujeito, como muitos “acadêmicos” ainda insistem em afirmar (BECKER, 2008, p. 17), Piaget (1998b, p. 44) defende que a educação familiar ou social, portanto, oriundas do meio social, podem acelerar ou retardar tal desenvolvimento.

Acerca da equilibração (ou equilíbrio psicológico) – o ‘último’ fator responsável pela coordenação dos demais – Piaget ([1964] 2001, p. 88) a concebe como uma “compensação proveniente das atividades do sujeito em resposta às perturbações exteriores.”, e não “como um balanceamento de forças em estado de repouso”. Mais uma vez, o autor destaca a imprescindibilidade da ação do sujeito, pois “ao *maximum* de equilíbrio corresponderá, então, não um estado de repouso, mas um *maximum* de atividades do sujeito que compensarão, de um lado, as perturbações atuais, e, por outro lado, as perturbações virtuais.” (PIAGET, 2001, p. 88, grifo do autor).

Mas, o que constitui uma perturbação? Na teoria piagetiana, uma perturbação é todo obstáculo que não permite ao sujeito assimilar o objeto, ou seja, decorre da não possibilidade de incorporar (‘interpretar’) o objeto às estruturas (esquemas de ação e ou conceitos) já construídas. Dependendo do nível dessa perturbação, o sujeito pode ignorá-la ou agir sobre a mesma, compensando-a. Piaget et al. ([1977] 1995) denotam duas situações observadas nos níveis elementares em relação a tal compensação:

Nos níveis elementares, as compensações podem consistir, apenas, em eliminar o obstáculo, negligenciando-o ou deformando a representação, e isto já constitui um início de construção, visto que uma reação negativa é um esboço de negação. Ou então, ao contrário, a compensação consiste em modificar o esquema de assimilação e é, então, construtiva, no sentido de uma diferenciação, exigindo esta, em seguida, novas integrações. (PIAGET et al., 1995, p. 284-285)

Observa-se, novamente, o papel da assimilação e da acomodação ao desenvolvimento do sujeito, pois uma compensação construtiva implica em modificação do esquema de assimilação (diferenciação) exigindo, ‘em resposta’, uma acomodação (integração). Conforme Piaget (2001):

Levando-se em conta, então, a interação fundamental entre fatores internos e externos, toda conduta é uma *assimilação* do dado a esquemas anteriores (assimilações a esquemas hereditários em graus diversos de profundidade) e toda conduta é, ao mesmo tempo, *acomodação* destes esquemas à situação atual. Daí resulta que a teoria do desenvolvimento apela, necessariamente, para a noção de equilíbrio, pois toda conduta tende a assegurar equilíbrio entre fatores internos e externos ou, mais em geral, entre assimilação e a acomodação. (PIAGET, 2001, p. 89, grifo do autor)

Um ponto relevante acerca deste processo (mecanismo) de equilibração é que a sua ocorrência (e efetivação) não conduz ao ‘equilíbrio anterior’, mas a um estado melhor daquele ao qual se origina, construindo ‘formas’ melhores de equilíbrio, denominado por Piaget ([1975] 1976a) como equilibração majorante. Sobre tal ideia, o autor destaca:

O conceito central que nos parece impor-se na explicação do desenvolvimento cognitivo [...] é, pois, o de um melhoramento das formas de equilíbrio, ou seja, de uma “equilibração majorante”. Nosso esforço consistiu em procurar-lhes os mecanismos constituindo o problema em explicar suas duas dimensões inseparáveis: a compensação das perturbações responsáveis pelo desequilíbrio motivador da pesquisa e a construção das novidades que caracterizam a majoração. (PIAGET, 1976a, p. 156)

Assim, todo desequilíbrio representa uma possibilidade⁷ ao desenvolvimento do sujeito por ‘impulsioná-lo’ a ultrapassar o estágio atual por meio de uma reequilibração. Segundo Piaget (1976a), a fecundidade do desequilíbrio,

[...] se mede pela possibilidade de superá-los – quer dizer, sair deles. É, pois, evidente que a fonte do progresso deve ser procurada na reequilibração, naturalmente, no sentido, não de um retorno à forma anterior de equilíbrio, cuja insuficiência é responsável pelo conflito ao qual esta equilibração provisória chegou, mas de um melhoramento dessa forma precedente. (PIAGET, 1976a, p. 19)

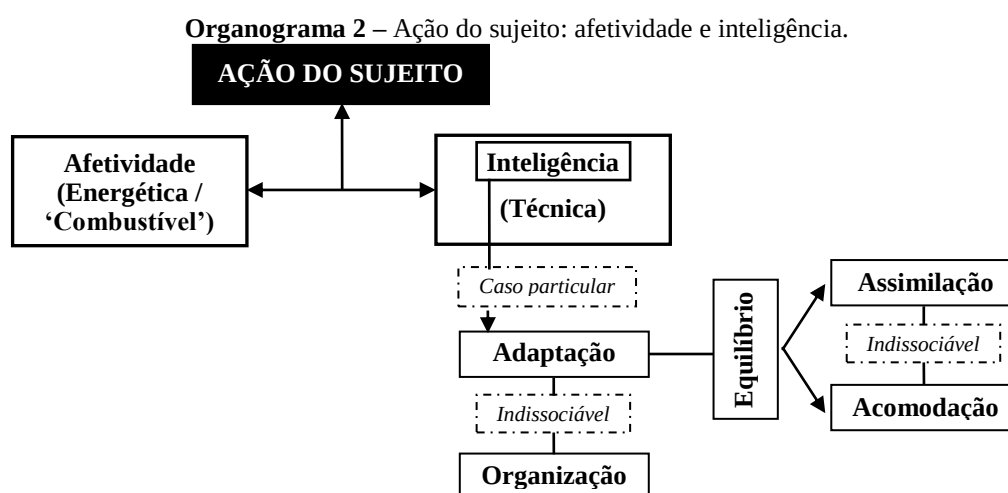
Considerar-se-á, nesta perspectiva teórica, a situação problema como uma situação de desequilíbrio a ser reequilibrada pelo sujeito. Logo, o problema – originado da interação entre o sujeito e o objeto – torna-se importante enquanto um desencadeador da ação do sujeito sobre o objeto. Em relação à ação (material e imaterial) do sujeito, a afetividade atua como reguladora de sua energética. A esse respeito, Piaget ([1945] 1990) destaca:

[...] interesses, prazeres e tristezas, alegria do êxito e tristeza do fracasso, todos os “sentimentos fundamentais” de Janet intervêm aqui, a título de regulações da ação,

⁷ O desequilíbrio representa uma possibilidade ao desenvolvimento, pois nem sempre o sujeito possui condições de superá-lo, ou seja, de compensar as perturbações construindo ‘novas’ formas (esquemas de ação e ou conceitos) que as integram de modo a estabelecer o reequilíbrio. Assim, dependendo do nível (intensidade) do desequilíbrio o sujeito pode ignorá-lo, seja pelo fato de não compreendê-lo ou por ficar impossibilitado (por falta de esquemas de ação e ou conceitos) de agir sobre o mesmo.

da qual a inteligência determina a estrutura. Como o bem demonstraram Claparède (a propósito do interesse) e Janet, a afetividade regula assim a energética da ação, da qual a inteligência assegura a técnica. (PIAGET, 1990, p. 266)

Portanto, a falta de afetividade pode implicar no desinteresse, isto é, na não ação do sujeito sobre o objeto por ausência dessa energética ('combustível'). A inteligência, por sua vez, assegura a 'técnica' da ação pelo fato da mesma constituir um caso particular da adaptação, ou seja, "o equilíbrio entre a assimilação contínua das coisas à atividade própria e a acomodação desses esquemas assimiladores aos objetos em si mesmos." (PIAGET, 1998b, p. 161). Num 'movimento de síntese', o organograma abaixo esboça o já discutido em relação à ação (material e imaterial) do sujeito:



Fonte – Elaborado pelo autor, 2012.

‘Ampliando’ a discussão a respeito do mecanismo de equilibração – responsável pela coordenação da ação dos fatores do desenvolvimento possibilitando a construção de formas de assimilação (esquemas de ação e ou conceitos) cada vez mais complexas – Piaget et al. (1995) esboçam as três condições para a equilibração:

1) Uma capacidade durável de acomodação dos esquemas aos objetos (exteriores ou de pensamento) que conduz a uma diferenciação progressiva desses esquemas, diferenciação que enriquece, e, simultaneamente, conserva seu estado anterior, sem perdas, nem produção de esquemas radicalmente novos. 2) Uma assimilação recíproca dos esquemas em subsistemas, e destes entre si, que atinge coordenações tais, que se conservam, enriquecendo-se mutuamente. 3) Uma integração de subsistemas em totalidades caracterizadas por suas leis de composição, com conservação destes subsistemas, à medida que suas propriedades diferenciadas podem ser reconstruídas, a partir do sistema total. Acrescentamos que, do ponto de vista formal, tais estruturas equilibradas comportam, em todos os patamares, uma compensação exata entre afirmações e negações. (PIAGET et al., 1995, p. 283)

Após discorrer que o equilíbrio jamais é atingido, “salvo (e nem sempre) em matemática pura⁸.” (PIAGET et al., 1995, p. 283), o autores complementam:

No terreno do pensamento natural, e à medida que se remonta aos estágios elementares, encontramos constantemente em presença de desequilíbrios cujas três principais características são as seguintes: 1) conflitos entre o sujeito e os objetos, por insuficiência de acomodação, pela não confirmação das previsões por ocasião das experiências, ou por defasagens temporais entre as acomodações a diferentes domínios; 2) conflitos entre subsistemas, por falta momentânea de coordenação (assimilação e acomodação recíprocas) em particular, em caso de defasagem temporal entre suas respectivas elaborações; 3) desequilíbrio entre a diferenciação e a integração, permanecendo esta, de início, insuficiente. Uma fonte sistemática de desequilíbrio é, por outro lado, constituída (e se manifesta pelas três formas precedentes) pelo atraso das negações em relação às afirmações, donde se origina uma falta inicial e muito geral das compensações. (PIAGET et al., 1995, p. 283)

Ao discriminar as condições da equilibração e caracterizar o desequilíbrio Piaget et al. (1995) aludem às afirmações e às negações. A afirmação refere-se à ação (e ou operação⁹) direta; já a negação diz respeito à ação (e ou operação) inversa. Vários estudos (PIAGET et al., [1974] 1978, 1995, [1980] 1996) comprovam a primazia das afirmações em relação às negações pelo fato das primeiras situarem-se na periferia (P)¹⁰ da atividade do sujeito. Assim, antes de qualificar um objeto pela sua negação (por exemplo, não quadrado) o sujeito o faz pela afirmação, ou seja, como sendo um círculo. A negação representa uma operação mental mais complexa, pois depende de uma relação “a outros objetos aos quais ele [o ‘primeiro’ objeto] é comparado [...]” (PIAGET et al., 1978, p. 186).

Além de situar as afirmações e negações no contexto da equilibração e do desequilíbrio, Piaget et al. (1995) destacam o ‘papel’ das diferenciações e das integrações que se relacionam, respectivamente, com a assimilação e a acomodação. No entanto, ao abordar (na próxima subseção) a abstração reflexionante – considerada um dos aspectos mais gerais da equilibração – far-se-ão discussões ‘mais detalhadas’ acerca da diferenciação e da integração que representam, respectivamente, o reflexionamento e a reflexão e que, por sua vez, constituem o processo da ‘própria’ abstração reflexionante.

⁸ Ao citar a Matemática Pura, Jean Piaget faz referência às estruturas matemáticas – denominadas Grupo – caracterizadas por um fechamento ‘completo’ e estável do sistema de transformações (operações), ou seja, que comportam um equilíbrio estável e duradouro.

⁹ A operação é concebida como uma ação interiorizada e reversível. Na subseção 2.3 – Da inteligência prática ao pensamento operatório (concreto e formal) – discutir-se-á a constituição do pensamento operatório e a sua gradativa evolução do ‘concreto’ ao formal.

¹⁰ Na subseção 2.2 – A tomada de consciência: da ação à conceituação – abordar-se-á mais detalhadamente o significado e o ‘papel’ da periferia (P) durante o processo de tomada de consciência (PIAGET et al., [1974] 1977). De início, faz-se possível conceber a periferia como representando os dados ‘mais’ exteriores em relação ao sujeito e ao objeto, ou seja, os objetivos e os resultados da ação.

Contudo, antes da abordagem do processo de abstração reflexionante torna-se oportuna uma ‘última’ contribuição ao entendimento do mecanismo (processo) de equilibração. Para tanto, utilizar-se-á o estudo¹¹ realizado por Piaget et al. (1996) em que apresentam a dialética¹² como o mecanismo (aspecto) inferencial da equilibração, cujo caráter geral (da dialética) “é a construção de novas interdependências¹³.” (PIAGET et al., 1996, p. 159).

Visando ao entendimento da dialética em sua significação geral, ou seja, enquanto a constituinte do aspecto inferencial da equilibração, Piaget et al. (1996) evidenciam algumas “características comuns que se encontram em todas as situações dialéticas”, sendo que “cada uma delas [características] carrega ou supõe todas as outras.” (PIAGET et al., 1996, p. 198). Por questão de sistematização, tais características apresentam-se no quadro seguinte:

Quadro 1 – Situações dialéticas: características comuns.

CARACTERÍSTICAS COMUNS – SITUAÇÕES DIALÉTICAS	
1. ^a) “O mais geral é a construção de interdependências não estabelecidas até então entre dois sistemas A e B, concebidos, primeiro, seja como opostos, seja simplesmente como estranhos um ao outro, e cuja reunião termina por considerá-los como os subsistemas de uma nova totalidade T, cujas características de conjunto não pertencem nem a A, nem a B antes de sua reunião.” (p. 198)	RESUMO 6.^a) “[...] a dialética constitui o aspecto inferencial de toda equilibração.” (p. 200)
2. ^a) “[...] já há dialética no caso das interdependências a serem estabelecidas entre as partes de um mesmo objeto.” (p. 198)	
3. ^a) “[...] toda nova interdependência gera “superações” quando, acrescida às precedentes, leva a uma nova totalidade T2 da qual T1 se torna um subsistema.” (p. 199) <i>Superação dos próprios instrumentos de superação.</i>	
4. ^a) “[...] intervenção de circularidades ou espirais na construção das interdependências. Suas diferenças com os círculos viciosos se devem essencialmente ao fato de que a dinâmica dessas interações comporta necessariamente um aspecto de sucessão tal que todo progresso no sentido da construção proativa provoca remanejamentos retroativos que enriquecem as formas anteriores do sistema em questão.” (p. 199-200)	
5. ^a) “[...] toda dialetização leva a relativizações pelo próprio fato de um caráter até	

¹¹ Na obra intitulada “As formas elementares da dialética” Piaget et al. (1996) apresentam (e investigam) onze experimentos que lhes possibilitam sintetizar sua dupla visão de dialética enquanto formas de interdependências e como mecanismo inferencial dos processos de equilibração e ou do desenvolvimento.

¹² A dialética – segundo Piaget et al. (1996, p. 197) – não se reduz à forma restrita e ‘clássica’ (tese-antítese-síntese), pois “já há dialética quando dois sistemas, até então distintos e separados, mas não opostos um ao outro, fundem-se em uma totalidade nova, cujas propriedades os ultrapassam e até mesmo, às vezes, em muito.” Como exemplo, o autor cita a formação dos números naturais proveniente da dialética (interdependência) estabelecida entre dois sistemas (a classificação e a seriação) que se fundem numa totalidade nova.

¹³ Interdependência assume o significado de ‘dependência entre’, ou seja, um modo particular de ligação entre dois sistemas (ou partes de um mesmo objeto) até então isolados. Por exemplo, os sistemas de classificação e de seriação – antes do estabelecimento de interdependência (dialética) entre os mesmos culminando na formação dos números naturais – encontram-se isolados na estrutura cognitiva do sujeito. Logo, construir interdependências é o mesmo que se desenvolver, ou seja, elaborar ‘melhores’ formas que permitam ao sujeito interagir com o objeto.

então isolado, que, portanto, se parece como uma espécie de absoluto, ser posto em relação com outros pelo jogo das interdependências.” (p. 200)	
--	--

Fonte – (PIAGET et al., 1996, p. 198-200).

Pelo fato da sexta característica consistir num resumo das precedentes, então, a dialética como o aspecto inferencial de toda equilíbrio caracteriza-se: i) pelo estabelecimento de interdependências entre dois sistemas (A e B) ou entre partes de um mesmo objeto; ii) pela constituição de uma nova totalidade (T2) advinda de uma ‘nova’ interdependência que gera uma superação da totalidade anterior (T1) englobando-a; iii) pela circularidade ou espiral construtiva cujo progresso proativo provoca remanejamentos retroativos enriquecendo as formas do sistema anterior; iv) pela relativização de um caráter até então isolado devido à constituição de ‘novas’ interdependências.

Em relação ao aspecto inferencial, Piaget et al. (1996) destacam que o mesmo é constituído pela implicação entre ações ou operações, sendo a implicação um modo particular de ligação presente em todos os estádios do desenvolvimento. Segundo os autores:

Em todas as etapas, certamente, encontramos constantemente na base uma implicação geral, segundo a qual o objetivo a ser atingido implica certos meios de reunião e de orientação que coloca, em prática ao menos três elementos. Mas é na natureza dos meios que as implicações diferem, pois, é importante lembrar, elas não se confundem absolutamente com a causalidade (ou condições de produção) das ações, embora seja inseparável delas: o que elas ligam são as significações desses atos, por mais materiais que elas sejam; ora, toda significação, desde os níveis sensório-motores, consiste na assimilação dos dados a esquemas ou conceitos, de tal modo que para um sistema físico qualquer, por mais simples que seja, as significações e suas implicações são relativas ao seu “modelo”, construído pelo sujeito enquanto interpretação das observáveis em termos de relações consideradas como necessárias. (PIAGET et al., 1996, p. 140)

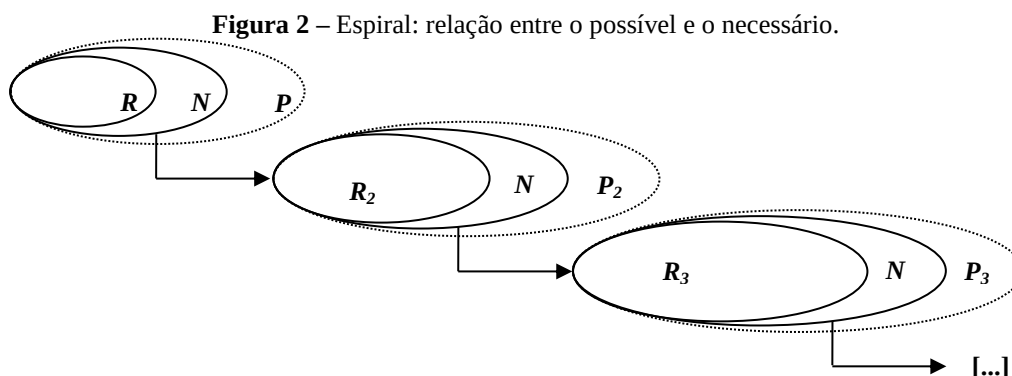
Da citação observa-se que a implicação entre ações ou operações ‘liga’ as significações, sendo toda significação uma assimilação dos dados (objeto) a esquemas ou conceitos já construídos pelo sujeito. Assim, toda ‘nova’ interdependência só é possível graças às significações ligadas pelas implicações, constituindo, portanto, o aspecto inferencial da equilíbrio. Contudo, essa implicação não pode ser confundida com a implicação entre enunciados¹⁴, já que esta (última) diz respeito apenas ao processo discursivo. Em contrapartida, “[...] se uma estrutura estável dá lugar a novas interdependências com outra, há dialética novamente, já que há formação de uma totalidade nova, que exige novos processos de equilíbrio.” (PIAGET et al., 1996, p. 200).

¹⁴ Conforme Piaget et al. (1996, p. 201): “A implicação entre enunciados $p \rightarrow q$ mesmo sob sua forma “significante” ($p \rightarrow q$, se a significação de q está englobada na de p) consiste, de fato, apenas em um processo discursivo, limitando-se a separar o que já está contido nos termos ligados [...]”.

Após investigar e sistematizar oito formas de interdependências¹⁵, Piaget et al. (1996) salientam que o ‘motor gerador’ das mesmas deve ser procurado na relação estabelecida entre o necessário e o possível. A esse respeito, os autores salientam:

Quanto ao motor comum dessas diversas interdependências, deve, sem dúvida, ser procurado nas relações cada vez mais estreitas entre o “possível” e o “necessário”, isto é, nas duas espécies de formas construídas pelo sujeito e que se aplicam aos conteúdos “reais” constituídos pelos objetos dados pela experiência ou gerados por essas próprias formas (como o são os “seres” lógico-matemáticos). Lembremos, para começar, o paralelismo surpreendente que encontramos nas pesquisas precedentes entre os níveis de formação do possível (sucessão analógicas, co-possíveis limitados, depois ilimitados) e do necessário (pseudo- ou pré-necessidades, necessidades locais, depois quaisquer). Ora, esse paralelismo parece ser devido à seguinte espiral, que é talvez a expressão mais geral de toda dialética: partindo de um conhecimento *R* que pode ser dito real (seja enquanto objeto exterior, seja de fonte endógena), sua própria formação acarreta a de vários novos possíveis *P*. Entre alguns destes, constituem-se certas relações necessárias *N* que englobam, então, o objeto de partida *R*, mas sob uma forma mais rica *R2* que contém *R* ao mesmo tempo em que o ultrapassa. Desses *R2* resultam, a seguir, novos possíveis *P2*, donde certas novas necessidades que levarão a *R3*, ultrapassando por sua vez *R2*. E esse processo pode continuar indefinidamente. (PIAGET et al., 1996, p. 203-204)

Em termos simbólicos, a referida espiral – considerada (talvez) a expressão mais geral de toda dialética – apresenta-se na seguinte figura:



Fonte – Elaborada pelo autor, 2012.

¹⁵ As oito formas de interdependências investigadas por Piaget et al. (1996) são: 1.^a) “[...] enriquecimento mútuo e mais ou menos simultâneo dos subsistemas constitutivos de um sistema de conjunto ou de partes de um mesmo objeto conceitual [...]” (p. 202); 2.^a) “[...] conservação do sistema total graças às compensações entre as variações dos subsistemas [...]” (p. 202); 3.^a) “[...] coordenação entre subsistemas invariantes que engendram inferencialmente uns a partir dos outros e que conservam o todo no interior de seus deslocamentos ou daqueles do observador [...]” (p. 202); 4.^a) “[...] interdependências multitransformacionais quando as ações do sujeito modificam sistematicamente as relações entre elementos de um sistema com vistas a usar aquelas que se seguirão [...]” (p. 202); 5.^a) “[...] interdependências entre as ações exploradoras do sujeito, procurando coordenar relações não-visíveis [...]” (p. 203); 6.^a) “[...] alternância na construção de dois subsistemas que se geram um ao outro a cada vez, como é o caso nas inversões de ordem [...]” (p. 203); 7.^a) “[...] os fatores de um dos subsistemas entram em ação quando os do outro param de dominar: exemplo das subidas e das descidas do líquido no caso do pássaro bebedor [...]” (p. 203); 8.^a) “[...] distinguir as pseudodependências das dependências reais, o que remete a construir um conjunto de interdependências possíveis das quais umas são atualizadas enquanto outras não o são [...]” (p. 203).

Na figura anterior, as elipses com os contornos tracejados indicam os possíveis (**P**), ou seja, o conjunto de possibilidades ainda não construídas pelo sujeito. A interação radical entre o sujeito e o objeto ‘torna’ algumas das referidas possibilidades necessárias (**N**), exigindo a construção de um novo conhecimento (**R**). A complexidade de tal espiral – $R \xrightarrow{\text{acarreta}} P$
 $\xrightarrow{\text{rescolhe}} N \xrightarrow[\text{constrói}]{\text{acarreta}} R_2 \xrightarrow{\text{acarreta}} P_2 \xrightarrow[\text{rescolhe}]{\text{constrói}} N \xrightarrow{\text{constrói}} R_3 \rightarrow (\dots)$ – deve-se, pois cada progresso (novo conhecimento), ao mesmo tempo em que permite uma aproximação do sujeito ao objeto, também o afasta. Complemente a presente discussão, Piaget et al. (1996) observam:

Assim, a relação sujeito x objeto, longe de impor-se sob forma direta e simples, comporta duas construções de direções normalmente contrárias, mas que se trata de coordenar, donde, na realidade, três tipos de dialéticas. A primeira é uma reconstituição mais ou menos bem-sucedida em seus esforços de coerência interna das propriedades sucessivamente descobertas no objeto, que se trata de reunir em um todo, tornando-as solidárias. Mas esse procedimento em direção à exteriorização¹⁵ é indissociável de um processo de interiorização¹⁶, que consiste em elaborar as formas lógico-matemáticas de ações ou operações indispensáveis às assimilações em jogo nas reconstituições exteriores das quais acaba de se tratar. A relação sujeito x objeto se deve, portanto, a uma síntese dialética de auto-organização das formas das quais o sujeito precisa e da reconstituição dos conteúdos descobertos no objeto. Há, assim, no total, três movimentos dialéticos a serem considerados: (1) a colocação em interdependência das formas necessárias às assimilações, (2) a colocação em interdependência das propriedades atribuídas ao objeto, e (3) a síntese dessas formas e desses conteúdos, adquirindo, então, a função de “modelos”: ora, são estes últimos que determinam, ao mesmo tempo, o progresso no conhecimento aproximativo do objeto e os afastamentos deste, devido aos novos problemas levantados por eles. (PIAGET et al., 1996, p. 205)

Desse modo, a ‘aproximação’ às propriedades (conteúdos) reconstituídas do objeto exige, do sujeito, a construção de ‘melhores’ formas (esquemas de ação e ou conceitos) capazes de assimilá-lo. O ‘modelo’ – enquanto síntese destas formas e conteúdos – determina a aproximação e o afastamento do objeto pelo fato do mesmo suscitar novos problemas. Esses ‘novos’ problemas exigem ‘novas’ aproximações e que, por sua vez, dependem de ‘novas’ formas ‘melhoradas’ a serem construídas ativamente pelo sujeito. Novamente, a ação (material e imaterial) do sujeito mostra-se essencial aos contínuos processos de equilibrações cuja dialética – concebida como o mecanismo (aspecto) inferencial desta equilibração – equivale à construção de novas interdependências.

Além de esboçar a tripla dialética que caracteriza a complexa interação entre sujeito e objeto, Piaget et al. (1996) discutem os três elementos presentes (e atuantes) na dialética clássica: a negação, a “identidade dos contrários” e a contradição. A respeito da negação, os

¹⁶ Na subseção 2.2 – A tomada de consciência: da ação à conceituação – denotar-se-ão mais detalhadamente os ‘movimentos’ de interiorização e exteriorização durante o processo de tomada de consciência (PIAGET et al., 1977).

autores a concebem como resultado de uma construção, “[...] sendo ao mesmo tempo um produto e, em retorno, um instrumento de uma dialética formadora de seus próprios instrumentos formadores, o que se aplica especialmente às próprias negações.” (PIAGET et al., 1996, p. 206). Pelo fato da dialética constituir o mecanismo inferencial da equilibração – e como toda equilibração exige uma colocação em correspondência entre as afirmações e as negações – então, as negações possuem “[...] um papel pelo menos igual àquele das afirmações.” (PIAGET et al., 1996, p. 206) no processo dialético. Assim, de modo algum a negação é desconsiderada e ou minimizada na dialética proposta por Piaget et al. (1996).

Em relação à “identidade dos contrários”, os autores a concebem de modo contrário ao proposto por Hegel¹⁷. Para Piaget et al. (1996):

[...] a idéia de que todo conceito “contém” seu contrário significa, dialeticamente, que a construção de cada conceito implica a de seu contrário, ou pelo menos sua possibilidade (compreendida nos novos possíveis *P*, [...] antes de entrar nas necessidades *N*). Da mesma maneira, a “identidade dos contrários” não é uma identidade estática, mas uma implicação recíproca: cada operação implica seu inverso, mas não é “seu” inverso! (PIAGET et al., 1996, p. 207)

Assim, diferentemente do proposto por Hegel, Piaget et al. (1996) defendem que a negação não está contida no conceito, mas que a construção de cada conceito implica a de seu contrário ao ‘abrir’ possibilidades (*P*) nas quais a negação pode vir a se tornar uma necessidade (*N*) a ser construída pelo sujeito. Tal diferença – entre a perspectiva hegeliana e a piagetiana – reside no fato desta última conceber o conhecimento como construído pelo sujeito ao interagir com o objeto, não estando pré-formado em seu espírito.

Acerca da contradição, Piaget et al. (1996) observam que a mesma é mais numerosa ou possível entre os enunciados do que entre ações ou operações, pois “[...] o que se pode ‘dizer’ é ou passa a ser muito mais amplo do que aquilo que se pode ‘fazer’, e, portanto, comporta uma regulamentação interna muito menos estrita.” (PIAGET et al., 1996, p. 208). Como a dialética proposta pelo autor está alicerçada sobre as implicações entre as ações ou operações, então, “[...] o contraditório no plano das ações é ‘o que não se pode fazer’ e, se duas ações contrárias são realizadas sucessivamente, trata-se de ações diferentes em suas formas ou em seus conteúdos e referenciais, sua síntese remetendo-se a integrá-las em um

¹⁷ Para Hegel todo conceito contém seu contrário, ou seja, a “identidade dos contrários” comporta “[...] uma predeterminação da negação em todo conceito, mesmo (ou principalmente) se este for definido como um “espírito” com atividade autônoma, sem levar em conta o sujeito enquanto fonte de toda atividade inovadora.” (PIAGET et al., 1996, p. 207).

novo sistema total.” (PIAGET et al., 1996, p. 208-209). Desse modo, Piaget et al. (1996) atribuem às contradições um outro sentido:

Aliás, o que os dialeticistas chamam de “contradições” consiste apenas, em geral, em situações opostas, contrárias, conflituosas, etc., bem diferentes das contradições formais $a \times \text{não } a = 0$, e o próprio Hegel esclarece que “a negação não é a negação do todo (um conceito), mas apenas a de uma coisa determinada” (portanto, de um de seus aspectos). (PIAGET et al., 1996, p. 209)

Após essa ‘breve’ discussão a respeito da dialética visando uma ‘melhor’ compreensão sobre o processo (mecanismo) de equilibração, torna-se oportuna a abordagem do processo de abstração reflexionante de modo a corroborar com o entendimento desse mecanismo (equilibração).

2.1 O processo de abstração reflexionante

Conforme já denotado, a abstração reflexionante constitui-se “[...] como um dos aspectos dos processos mais gerais do equilíbrio.”, sendo considerada “[...] um dos motores do desenvolvimento cognitivo [...]” (PIAGET et al., 1995, p. 274) por possibilitar ao sujeito a construção (e ou enriquecimento) de estruturas (esquemas de ação e ou conceitos) que permitam uma ‘melhor’ interação com o objeto. Segundo Piaget et al. (1995, p. 274), esse tipo de abstração “[...] apóia-se sobre as coordenações das ações do sujeito, podendo estas coordenações, e o próprio processo reflexionante, permanecer inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações variadas.”. Enquanto um processo – presente em todos os estádios do desenvolvimento – a abstração reflexionante

[...] comporta, sempre, dois aspectos inseparáveis: de um lado, “reflexionamento” (*réfléchissement*), ou seja, a projeção (como através de um refletor) sobre um patamar superior daquilo que foi tirado do patamar inferior (por ex., da ação à representação) e, de outro lado, uma “reflexão” (*réflexion*), entendida esta como ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior. (PIAGET et al., 1995, p. 274-275)

Para os referidos autores, as diferenciações resultam do reflexionamento já que este “[...] retira de um nível inferior certas ligações, empregadas implicitamente, ou simplesmente implicadas mas não notadas, para as transformar em objetos de pensamento no nível ulterior.”. (PIAGET et al., 1995, p. 28). As integrações, por sua vez, “[...] resultam, então, “reflexão” ou reorganizações necessárias, sobre o novo plano, do sistema assim enriquecido pela introdução destes objetos de pensamento não considerados até então.” (PIAGET et al.,

1995, p. 28). Nesse contexto, a construção das novidades devido à abstração reflexionante explica-se

[...] no equilíbrio das diferenciações e das integrações. A abstração consiste, por si mesma, com efeito, numa diferenciação, porquanto separa uma característica para transferi-la, e uma nova diferenciação acarreta a necessidade de integração em novas totalidades, sem as quais a assimilação deixa de funcionar, daí o princípio comum da formação das novidades: a abstração reflexionante conduz a generalizações, por isso mesmo construtivas, e não simplesmente indutivas ou extensivas como a abstração empírica. (PIAGET et al., 1995, p. 284)

Do exposto observa-se a existência de uma relação circular entre a abstração e a generalização, pois o “resultado de uma abstração reflexionante é sempre uma generalização, bem como o resultado de uma abstração empírica conduz a precisar o grau de generalidade dos caracteres extraídos do objeto.” (PIAGET et al., 1995, p. 59). Reciprocamente, “[...] toda generalização supõe uma abstração prévia, ou, pelo menos, a delimitação das propriedades generalizadas.” (PIAGET et al., 1995, p. 59). Antes de precisar os tipos de generalizações decorrentes dos dois tipos de abstrações (reflexionante e empírica), torna-se oportuna uma discussão desta última.

A abstração empírica, também presente em todos os estádios do desenvolvimento, “[...] tira suas informações dos objetos como tais, ou das ações do sujeito sobre suas características materiais; de modo geral, pois, dos observáveis [...]” (PIAGET et al., 1995, p. 274). Assim, esse tipo de abstração visa a um conteúdo¹⁸, embora não consista em “puras leituras” do objeto por haver a necessidade de estruturas de assimilação a sua ocorrência.

Retomando a relação entre os tipos de abstrações e suas generalizações respectivas, Piaget et al. (1995) pontuam:

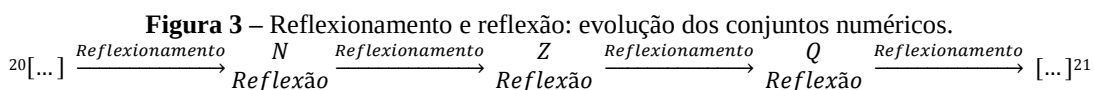
Considerando somente suas duas principais formas [abstração empírica e reflexionante], primeiramente fica claro que em uma abstração empírica, procedendo apenas por dissociação de caracteres já dados no objeto, a generalização que dela resulta somente poderia ser indutiva e desprovida de necessidade¹⁹, enquanto que a

¹⁸ Segundo Piaget ([1949] b1976b, p. 37): “O ‘conteúdo’ de uma ligação operatória é constituído pelos dados, ou os termos que os podem substituir, enquanto a ‘forma’ é o que permanece imutável no decurso de tais substituições.”. No entanto, entre o conteúdo e a forma há uma certa relativização, pois “[...] as estruturas sensoriomotoras são formas em relação aos movimentos simples que elas coordenam, mas são conteúdos em relação às ações interiorizadas e conceitualizadas no nível seguinte; as operações ‘concretas’ são formas em relação a essas últimas ações, mas conteúdos a respeito das operações já formais do nível dos 11-15 anos; e estas serão os conteúdos em relação às operações que, nos níveis ulteriores, nelas se baseiam.”.

¹⁹ A necessidade, enquanto “[...] um (ou mesmo o) produto específico da abstração reflexionante [...] consiste em coordenações e estas resultam de modos de composição das ações do sujeito.” (PIAGET et al., 1995, p. 73). Decorre disso que a necessidade é de natureza lógico-matemática e não física, “[...] visto que as ‘leis’ da lógica não são simplesmente leis no sentido da generalidade dos observáveis, mas sim as normas de coerência

abstração reflexionante, consistindo em um reflexionamento de coordenações que já implicam uma construção, a reflexão organizadora que disto resulta conduz a generalizações construtivas. (PIAGET et al., 1995, p. 59)

A união e alternância ininterrupta (em espiral) entre o reflexionamento e a reflexão – resultando em generalizações construtivas – permitem a formação de patamares sucessivos, no qual “[...] cada patamar novo comporta uma diferença qualitativa, além de uma diferença de grau.” (PIAGET et al., 1995, p. 276). Nesse ponto cabe aproximar o “melhoramento” (qualitativo e de grau entre o patamar ‘superior’ e seu ‘inferior’) à equilibração majorante pelo fato desta implicar na construção de formas “melhores” de equilíbrio. Exemplificando, em Matemática é possível observar tais melhoramentos em relação à evolução entre os conjuntos numéricos, conforme denotada na figura seguinte:



Fonte – Elaborada pelo autor, 2012.

O reflexionamento do conjunto dos números Naturais (N^{22}), ou seja, a sua projeção em um patamar superior exige a reorganização e reconstrução em um ‘novo’ patamar no qual – através da reflexão – forma-se o conjunto dos Números Inteiros (Z^{23}). Uma exigência, ou melhor, a necessidade de reconstrução dos números Naturais decorre da impossibilidade de realizar a subtração para quaisquer números desse conjunto, já que o resultado de $(1 - 2)$, por exemplo, não pertence a N . Assim, os números naturais (N) – enquanto um instrumento a serviço do pensamento em seu patamar – por meio da abstração reflexionante (reflexionamento e reflexão) transforma-se em objeto de pensamento no patamar superior (isto é, em Z). De modo análogo, a projeção (reflexionamento) de Z exige a sua reconstrução e reorganização (reflexão) culminando na construção dos números Racionais (Q^{24}).

implicante que regem as composições operatórias e são originadas das coordenações das ações.” (PIAGET, 1995, p. 73).

²⁰ Indica a existência de patamares anteriores a N .

²¹ Indica a existência de patamares ulteriores a Q .

²² “Chama-se conjunto dos números naturais – símbolo N – o conjunto formado pelos números 0, 1, 2, 3, ... $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ”. (IEZZI e MURAKAMI, 1977, p. 39)

²³ “Chama-se conjunto dos números inteiros – símbolo Z – o seguinte conjunto: $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ”. (IEZZI e MURAKAMI, 1977, p. 40)

²⁴ “Chama-se conjunto dos números racionais – símbolo Q – o conjunto dos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$ onde $a \in Z$ e $b \in Z^*$, para os quais adotam-se as seguintes definições:

(i) igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

(ii) adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

A referida espiral (reflexionamento → reflexão → reflexionamento → reflexão) – exemplificada na evolução dos conjuntos numéricos – possui para Piaget et al. (1995) a característica de

[...] alcançar formas cada vez mais ricas e, conseqüentemente, mais importantes em relação ao conteúdo. Quanto a este, a riqueza crescente das formas [...] acarreta um duplo resultado: um aperfeiçoamento progressivo das abstrações empíricas, munidas de novos instrumentos de assimilação, e uma formação cada vez mais extensa de abstrações pseudo-empíricas, já que os objetos são revestidos de propriedades sempre mais numerosas, introduzidas pelas “reflexões” do sujeito. Disto resulta que, nos níveis superiores, é a reflexão que conduz cada vez mais o jogo em relação aos reflexionamentos, reduzindo-se, então, a tematizações (operações que se tornam objeto de pensamento), ao passo que, nos níveis inferiores, eram os reflexionamentos que constituíam o motor essencial. Dito de outro modo, o desenvolvimento da abstração reflexionante acarreta, sempre mais, a construção de formas em relação aos conteúdos, formas estas que podem dar lugar, seja à elaboração das estruturas lógico-matemáticas, seja a essas “atribuições”, aos objetos e suas conexões, nas quais consiste a explicação causal em física. (PIAGET et al., 1995, p. 277, grifo nosso)

Do trecho sublinhado pode-se inferir que a evolução da abstração empírica depende da abstração reflexionante pelo fato desta última fornecer à primeira melhores formas (estruturas) capazes de assimilar o objeto ‘retirando-lhe’ cada vez mais propriedades. Em contrapartida – e nisso reside a assimetria entre as evoluções desses dois tipos de abstrações – a abstração reflexionante, para evoluir, apoia-se “[...] em seu próprio mecanismo de reflexão sobre reflexões [...]” (PIAGET et al., 1995, p. 287), possibilitando, assim, a constituição de sistemas lógico-matemáticos de cunho científico. No entanto, até ‘atingir’ a reflexão sobre reflexões (metarreflexão ou pensamento reflexivo) alguns patamares (graus de reflexionamento) anteriores fazem-se necessários. O quadro abaixo, nesse sentido, esboça tais patamares:

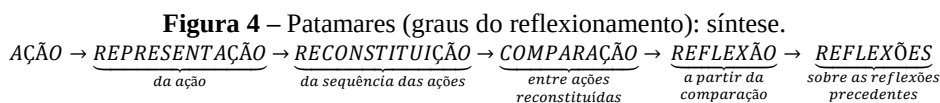
Quadro 2 – Patamares (graus do reflexionamento).

PATAMARES – GRAUS DO REFLEXIONAMENTO
1.º: Ações sucessivas a sua representação atual (movimento sensorio-motor a um início de conceituação), sendo o mais elementar.
2.º: Reconstituição (com ou sem narrativa) da sequência das ações, reunindo tais ações num todo coordenado.
3.º: Comparações, na qual a ação total reconstituída é comparada a outras análogas ou diferentes.
4.º: Reflexões sobre as reflexões precedentes graças às comparações possibilitando destacar as estruturas comuns e não comuns.
5.º: Vários graus de metarreflexão (ou pensamento reflexivo) possibilitando ao sujeito encontrar as razões das conexões (tanto lógico-matemáticas quanto causais).

Fonte – (PIAGET et al., 1995, p. 275).

(iii) multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. (IEZZI e MURAKAMI, 1977, p. 43). O símbolo **Z*** – utilizado na definição – representa o conjunto dos números Inteiros exceto o 0 (zero).

Esquemáticamente, o exposto no quadro anterior pode ser sintetizado por:



Fonte – Elaborada pelo autor, 2012.

Logo, da ação sensório-motora até às metarreflexões características do pensamento operatório formal observa-se uma laboriosa (e longa) trajetória cuja abstração reflexionante – considerada um dos motores do desenvolvimento cognitivo e um dos aspectos dos processos mais gerais da equilibração – torna-se fundamental.

Consistindo as ações sensório-motoras o ‘início’ – a partir das quais a abstração reflexionante produz patamares cada vez mais complexos – faz-se relevante, então, o seguinte questionamento: Como se caracteriza a abstração reflexionante no estágio sensório-motor já que nesse o sujeito vale-se apenas das ações sensório-motoras? A esse respeito, Piaget et al. (1995) pontuam:

Começando por esta última [abstração reflexionante], é claro que seus inícios orgânicos e sensório-motores são ainda muito modestos, tanto pela inconsciência que os caracteriza quanto pela pequena diferenciação de que ela é capaz de dissociar as formas de seus conteúdos. Mais precisamente, o primeiro nível da abstração reflexionante é aquele no qual sua função essencial é a de elaborar quadros assimiladores, tendo em vista a abstração empírica, portanto, formas ajustáveis a seus conteúdos extralógicos. (PIAGET et al., 1995, p. 287)

Além da inconsciência que caracteriza o referido estágio, observa-se entre a abstração empírica e a reflexionante uma fronteira “[...] muito menos nítida e menos estável [...]” (PIAGET et al., 1995, p. 287) decorrente do fato de existir “[...] muito menos diferenças entre as ações e suas coordenações (portanto, entre os conteúdos e as formas) [...]” (PIAGET et al., 1995, p. 286). Nesse primeiro estágio verifica-se a predominância das abstrações empíricas em relação às reflexionantes, cabendo a estas últimas elaborar quadros assimiladores que permitam ao sujeito ‘ajustar’ os conteúdos retirados dos objetos. Contudo, e em continuidade à exposição, Piaget et al. (1995) salientam:

A partir dos patamares próprios da representação, seus progressos tornam-se constantes e, a partir de um segundo nível, ela consegue engendrar funções e operações, mas sob a condição de se apoiar, durante muito tempo, sobre abstrações pseudo-empíricas, tais que os resultados dos reflexionamentos e das reflexões permanecem materializados nos objetos transformados e enriquecidos pelas atividades do sujeito. Quanto à abstração refletida, ela permanece sistematicamente em retardo em relação ao processo reflexionante até o momento (terceiro nível) em que se torna o instrumento necessário das reflexões sobre a reflexão anterior e, em

que permite, finalmente, a formação de uma meta-reflexão ou pensamento reflexivo, que torna, então, possível a constituição de sistemas lógico-matemáticos de cunho científico. A este respeito, uma das formas finais, atualmente atingidas pela abstração reflexionante, é a da formalização, caso limite no qual a forma consegue, embora com as restrições conhecidas (mas também com um deslocamento contínuo das fronteiras), libertar-se dos conteúdos. (PIAGET et al., 1995, p. 287-288, grifo nosso)

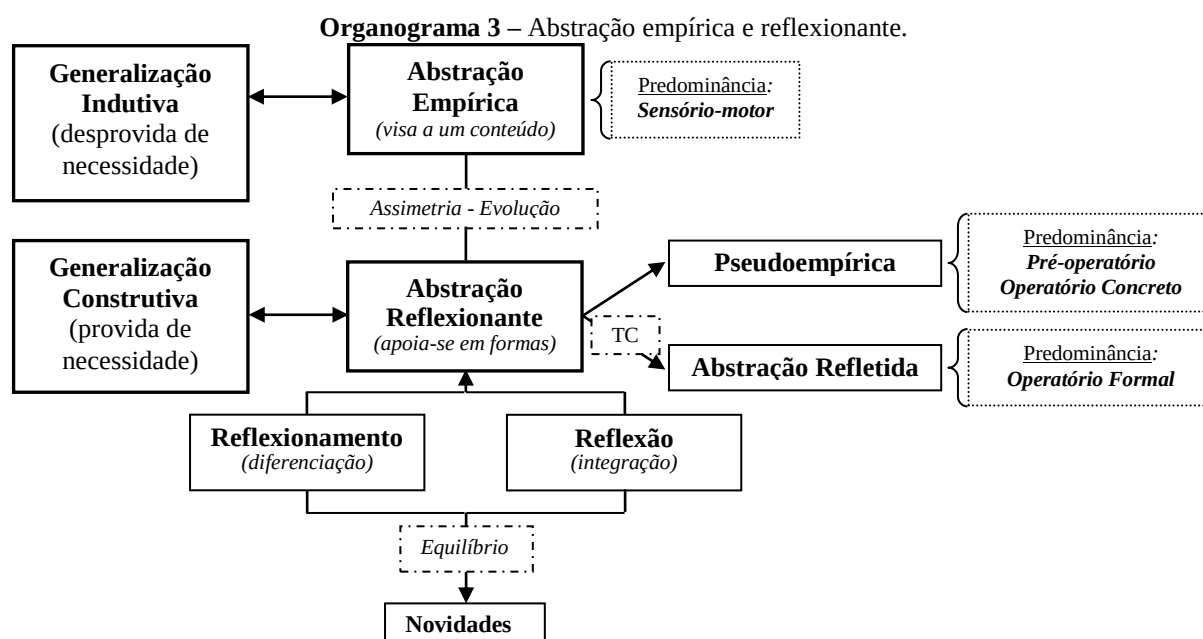
As abstrações pseudoempírica e refletida – citadas acima – dizem respeito a duas variedades da abstração reflexionante. A pseudoempírica – predominante nos estádios pré-operatório e operatório concreto – ocorre quando o objeto “[...] é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações (p. ex., ao ordenar elementos de um conjunto) [...].” (PIAGET et al., 1995, p. 274). Logo, a ordenação – enquanto um produto da coordenação das ações – é uma propriedade introduzida no objeto mediante a atividade do sujeito. O objeto concreto/manipulável representa um apoio imprescindível ao reflexionamento (projeção) e à reflexão (reorganização e reconstrução), possibilitando ao sujeito verificar (constatar) os resultados de suas coordenações.

Acerca da outra variedade da abstração reflexionante, Piaget et al. (1995, p. 274) denotam: “Finalmente, chamamos de abstração “refletida” (*réfléchie*) o resultado de uma abstração reflexionante, assim que se torna consciente²⁵, e, isto, independentemente do seu nível.”. Com exceção do estágio sensório-motor, a abstração refletida encontra-se nos demais estádios do desenvolvimento. No entanto, apenas no estágio operatório formal (terceiro nível) é que a abstração refletida torna-se “o instrumento necessário das reflexões sobre a reflexão anterior”, cuja reflexão é “que conduz cada vez mais o jogo em relação aos reflexionamentos”.

Como denotado no seguinte organograma que sintetiza a discussão realizada na presente subseção, embora haja a predominância da abstração empírica e das variedades da reflexionante (pseudoempírica e refletida) em determinados estádios do desenvolvimento cognitivo, as mesmas ocorrem em todos os níveis. A única exceção diz respeito à ocorrência da abstração refletida no sensório-motor já que, na perspectiva piagetiana, nada se sabe sobre a tomada de consciência do sujeito nesse período. Enquanto a abstração empírica (que visa a um conteúdo/qualidade/característica retirada de um objeto) só evolui apoiando-se nas formas elaboradas pela abstração reflexionante, esta última consegue evoluir pelo seu próprio mecanismo de reflexão sobre reflexões precedentes. É fato que nos níveis iniciais há uma fronteira “menos nítida e menos estável” entre as duas abstrações decorrente da pouca

²⁵ Na subseção seguinte (2.2) discutir-se-á o mecanismo da tomada de consciência que ‘possibilita’ a abstração reflexionante tornar-se refletida.

diferenciação entre a forma e o conteúdo (e entre as ações e o meio). No entanto, com o progressivo desenvolvimento – graças à abstração reflexionante considerada um dos aspectos dos processos mais gerais da equilibração – tal fronteira vai se tornando mais ‘nítida e estável’.



Fonte – Elaborado pelo autor, 2012.

Em relação ao equilíbrio – denotado no organograma – o ‘jogo’ contínuo e ininterrupto (em espiral) entre o reflexionamento (diferenciação) e a reflexão (integração) possibilita a construção das novidades, ou seja, ‘novas’ estruturas (esquemas de ação e ou conceitos) que permitem ao sujeito cada vez mais se aproximar (interagir) com o objeto num duplo movimento de interiorização e exteriorização (a serem detalhados na subseção seguinte).

A respeito da construção das novidades, Piaget et al. (1995) apresentam um interessante ‘detalhamento’ valendo-se do mecanismo invariante composto pela assimilação e pela acomodação:

[...] as novidades devido à abstração reflexionante encontram sua razão de ser no processo geral de equilíbrio, acima referido, o qual permanece válido, a título de tendências, bem como, e sobretudo, nos continuados reequilíbrios, ajeitando os desequilíbrios e procedendo por regulações ordinárias, antes de atingir essas regulações “perfeitas” que constituem as operações. De modo geral, pode-se dizer, pois, que cada novidade endógena consiste na realização de possibilidades abertas pelas construções do nível precedente. Com efeito, enquanto a acomodação de um esquema a objetos exteriores provoca sua diferenciação, de maneira imprevisível, porque exógena, em função de propriedades destes até então desconhecidas, a

assimilação recíproca dos esquemas é um processo contínuo e coerente, mas não imediato. Cada coordenação, uma vez realizada, abre, portanto, caminho a novas assimilações recíprocas, com acomodações mútuas que diferenciarão os esquemas a coordenar; e essas diferenciações, assim como as integrações exigidas em troca, constituem, pois, possibilidades abertas pelas coordenações precedentes, antes de poder, por sua vez, atualizar-se. (PIAGET et al., 1995, p. 283-284)

Novamente, o papel e a importância da assimilação e da acomodação ao progressivo desenvolvimento do sujeito – nesse caso ao explicar a gênese/construção das novidades – são retomadas por Piaget et al. (1995). Tal retomada, por sua vez, evidencia e confirma a abrangência da Epistemologia Genética à explicação sobre a gênese e o desenvolvimento do conhecimento. Além disso, o exposto na citação anterior – “[...] cada novidade endógena consiste na realização de possibilidades abertas pelas construções do nível precedente.” – possibilita uma ‘aproximação’ com o já discutido em dialética acerca da relação entre o possível e o necessário; relação essa considerada o ‘motor gerador’ das interdependências.

Em continuidade – e para melhor compreender o mecanismo da tomada de consciência que possibilita a transformação da abstração reflexionante em refletida – apresenta-se a próxima subseção.

2.2 A tomada de consciência: da ação à conceituação

A tomada de consciência não representa uma “[...] espécie de esclarecimento [iluminação] que não modifica nem acrescenta nada [...]”, mas, sim, uma reconstrução na qual “[...] a tomada de consciência de um esquema de ação o transforma num conceito²⁶, essa tomada de consciência consistindo, portanto, essencialmente, numa conceituação.” (PIAGET et al., 1977, p. 197). O estudo do processo de tomada de consciência permite compreender a passagem do inconsciente ao consciente, sendo ambos (inconsciente e consciente) concebidos enquanto sistemas dinâmicos em permanente atividade. No entanto, antes de explicar tal mecanismo – “o como” – faz-se pertinente salientar as razões funcionais que desencadeiam a constituição da tomada de consciência.

Conforme Piaget et al. (1977, p. 198), as razões funcionais da tomada de consciência devem ser situadas “[...] num contexto mais amplo do que o das inaptações²⁷, mas que

²⁶ Sobre a definição do termo conceito, Becker (2010, p. 166-167) aponta: “O esquema, [ou seja, a] generalização no plano da ação concreta, poderá, mediante progressivas tomadas de consciência e de abstrações reflexionantes tornar-se conceito, [isto é, uma] generalização no plano mental ou intelectual.”

²⁷ A respeito das inaptações, ou seja, de uma dificuldade à adaptação, Claparède aponta “[...] que as crianças mais novas, na idade em que generalizam exageradamente, tomam mais consciência das características diferenciais do que das semelhanças: [...] os fatores da inaptação é que, portanto, ocasionariam a tomada de

compreenda essas últimas a título de caso particular que não deve ser desprezado.”. Para os referidos autores, as inaptações necessitam ser completadas mediante a intervenção do mecanismo das regulações, pois

[...] o que desencadeia a tomada de consciência é o fato de que as regulações automáticas (por correções parciais, negativas ou positivas, dos meios já em atuação) não são mais suficientes e de que é preciso, então, procurar novos meios mediante uma regulação mais ativa e, em consequência, fonte de escolhas deliberadas, o que supõe a consciência. Há certamente aí, portanto, inaptação, mas o próprio processo (ativo ou automático) das readaptações é tão importante quanto ela. (PIAGET et al., 1977, p. 198)

As regulações mais ativas (escolhas deliberadas) e a antecipação – considerada uma inferência²⁸ realizada pelo sujeito a partir de informações anteriores (PIAGET et al., 1978, p. 182) – favorecem a tomada de consciência já que as mesmas “[...] passam facilmente do nível do comportamento material para o da representação.” (PIAGET et al., 1978, p. 173); na qual a representação mostra-se uma condição necessária aos estados conscientes²⁹.

Além das inaptações – que decorrem da busca de um objetivo (pelo sujeito) que resulta em fracasso – a tomada de consciência também pode ser desencadeada quando tal objetivo resulta em êxito (sucesso). Acerca do fracasso, Piaget et al. (1977) pontuam:

Em caso de fracasso, trata-se de estabelecer por que ele ocorreu e isso leva à tomada de consciência de regiões mais centrais da ação: a partir do dado de observação relativo ao objeto (resultado falho), o sujeito vai, portanto, procurar os pontos em que houve falha da adaptação do esquema ao objeto; e, a partir do dado de observação relativo à ação (sua finalidade ou direção global), ele vai concentrar a atenção nos meios empregados e em suas correções ou eventuais substituições. Assim, por meio de um vaivém entre o objeto e a ação, a tomada de consciência aproxima-se por etapas do mecanismo interno do ato e estende-se, portanto, da periferia P ao centro C. (PIAGET et al., 1977, p. 199)

Por outro lado, quando um objetivo inicial é atingido com êxito (sucesso), a progressiva tomada de consciência, nesse caso, decorre do próprio processo assimilador. A esse respeito, Piaget et al. (1977, p. 199) destacam o seguinte:

consciência, ao passo que esta nenhuma utilidade teria enquanto o funcionamento (aqui as generalizações baseadas nas semelhanças) se adapta normalmente.” (PIAGET et al., 1977, p. 197).

²⁸ O termo inferência possui o mesmo sentido do exposto em dialética, ou seja, indica uma implicação entre ações ou operações que diz respeito a um tipo de ligação entre significações, sendo toda significação uma assimilação do objeto às estruturas (esquemas de ação e ou conceitos) já construídas pelo sujeito.

²⁹ Mais adiante justificar-se-á o papel da representação na constituição dos estados conscientes observados – segundo Piaget et al. (1978, p. 178) – “[...] desde as tomadas de consciência elementares, unidas aos objetivos e resultados das ações, até as conceituações de níveis superiores [...]”.

Determinar para si mesmo um objetivo em face do objeto já é assimilar este objeto a um esquema prático e, na medida em que o objetivo e o resultado do ato permitem que se desencadeie a consciência, embora permanecendo generalizáveis em ações, o esquema se torna conceito e a assimilação se faz representativa, isto é, suscetível de evocações em extensão. Desde então, logo que situações distintas são comparadas³⁰ entre si, surgem inevitavelmente os problemas: por que tal objeto é mais facilmente utilizável do que outro, por que tal variação quanto aos meios é mais eficaz ou, ao contrário, o é menos etc.? Nesses casos, o processo assimilador, promovido à condição de instrumento de compreensão [...], terá simultaneamente por conteúdo os objetos e as ações, num ritmo de contínuas idas e vindas entre as duas classes de dados de observação, e não há, então, nenhuma razão para que o mecanismo das tomadas de consciência do objeto não se estenda às tomadas de consciência da ação, visto que esta depende do objeto tanto quanto este da ação. Isso não quer dizer que as inaptações (por que tal meio experimentado não alcança êxito?) não desempenhem mais nenhuma função, mas só o fazem agora a título momentâneo ou local, e os problemas positivos (o porquê dos êxitos) tornam-se o essencial com a regulação ativa no centro das tentativas: a característica inevitável da necessidade da explicação causal não poderia, de fato, ser reservada unicamente ao domínio dos objetos, visto que estes só são conhecidos através das ações. (PIAGET et al., 1977, p. 199-200, grifo nosso)

Logo, ao pensar sobre – e verificar – a facilidade (ou não) em alcançar um determinado objetivo mediante a modificação de objetos e ou ações, o sujeito vai, gradativamente, tomando consciência das propriedades intrínsecas de tais objetos (num movimento de exteriorização) e, correlativamente, de suas próprias ações (num movimento de interiorização). Para melhor compreender como se dá tal mecanismo – o “como” – Piaget et al. (1977, p. 198) postulam que a “[...] tomada de consciência procede da periferia [P] para o centro [C e C’], sendo esses termos definidos em função do percurso de um determinado comportamento.”.

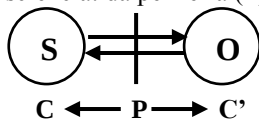
A periferia (P), a qual os autores aludem, diz respeito aos dados de observação iniciais que estão “[...] ligados ao desencadeamento e ao ponto de aplicação da ação: a consciência do objetivo a alcançar, em outros termos da intenção como direção global do ato, e o conhecimento de seu desfecho [resultado] como fracasso ou êxito.” (PIAGET et al., 1977, p. 198). Tanto os objetivos quanto os resultados são conscientes em toda a ação intencional; já o esquema “[...] que determina um objetivo para a ação desencadear imediatamente a utilização de meios mais ou menos apropriados pode permanecer inconsciente [...].” (PIAGET et al., 1977, p. 198). Um exemplo de tal inconsciência é observado quando o sujeito executa uma ação, mas não sabe explicar o porquê dessa ação.

Após a explicitação do significado da periferia (P), Piaget et al. (1977, p. 198) defendem que a tomada de consciência “[...] parte da periferia (objetivos e resultados),

³⁰ A título de recordação, a comparação – caracterizada na subseção anterior como um dos patamares do reflexionamento – advém de contínuas abstrações reflexionantes. Assim, a abstração reflexionante torna-se uma condição necessária ao mecanismo da tomada de consciência, ao passo que esta última permite à primeira ‘tornar-se consciente’, ou seja, refletida.

orienta-se para as regiões centrais da ação quando procura alcançar o mecanismo interno desta: reconhecimento dos meios empregados, motivos de sua escolha ou de sua modificação durante a experiência etc.”. Como auxílio a sua exposição, os referidos autores utilizam o diagrama apresentado a seguir:

Figura 5 – Tomada de consciência: da periferia (P) às regiões centrais (C e C’).



A periferia (P) representa o ponto (externo) de interação entre o sujeito (S) e o objeto (O), interação essa – como já discutido – indispensável à construção do conhecimento. As regiões centrais (C e C’) a serem ‘atingidas’ por meio da tomada de consciência referem-se aos mecanismos centrais da ação do sujeito (C) e às propriedades intrínsecas do objeto (C’). Todo movimento em direção a C ($P \rightarrow C$) implica um movimento em direção a C’ ($P \rightarrow C'$), e vice-versa, na qual se observa uma solidariedade epistêmica “[...] constituindo a lei essencial da compreensão dos objetos como da conceituação das ações.” (PIAGET et al., 1977, p. 199).

Visando ‘aprofundar’ ainda mais o “como” da tomada de consciência, Piaget et al. (1977) argumentam que a mesma supõe, desde o início, uma conceituação, pois implica em coordenações³¹. Assim, tomar consciência não se refere a uma ‘espécie’ de iluminação, mas de reconstruções que podem ser ‘simples’ quando não há conflito com os esquemas anteriores. No entanto, havendo conflito, uma solução ‘mais econômica’ antes de corrigir o esquema consiste em deformar ou omitir os dados de observação advindos da experiência e “[...] ‘recalcar’³², se se pode expressar assim, a fonte do conflito.” (PIAGET et al., 1977, p. 202). Sobre o recalque, Piaget et al. (1977) salientam:

[...] a contradição que provoca o “recalque” não deve ser localizada na ação não consciente, já que essa alcança êxito na coordenação motora sem problema [...]. Ela [contradição] não tem também por sede a consciência do sujeito [...], [já que] percebe-se claramente que o sujeito não sente a contradição. Não há, portanto, outra solução senão situá-la no próprio processo da conceituação que caracteriza a tomada de consciência, mas coloca-se, então, o problema de se estabelecer qual é o grau de consciência que revela esse processo como tal, por oposição à ação não consciente

³¹ Segundo Piaget et al. (1978, p. 71): “[...] uma coordenação chega a reunir em um todo um conjunto, não somente de atos, mas, ainda, de correções e de regras, já precedentemente atuantes mas sucessivas até então, compreende-se como essa coordenação termina por resultar em condutas de níveis anteriores.”

³² Um exemplo de recalque ocorre quando o sujeito age de uma maneira, mas, quando questionado, acredita (e afirma) ter feito de outro modo.

de partida e à consciência final que o sujeito tomou de sua ação. (PIAGET et al., 1977, p. 203, grifo nosso)

Enquanto um processo, a conceituação comporta graus de consciência já que não há ‘passagens’ bruscas do inconsciente ao consciente. Três fatos levam Piaget et al. (1977, p. 203) a admitirem a existência de tais graus de consciência, a saber: i) entre as ações de êxito precoce³³ e os inícios errôneos da tomada de consciência há intermediários (deformações, omissões e recalques), o que evidencia uma consciência incompleta da ação; ii) uma ação bem sucedida que resulta em êxito precoce não é totalmente inconsciente; iii) a própria conceituação não é imediata. Assim, os referidos graus de consciência dependem de diferentes graus de integração. Acerca da ‘relação’ entre os graus de integração e de consciência, Piaget et al. (1977) exemplificam:

No caso das ações precocemente bem sucedidas, mas com tomada de consciência muito mais tardia, seria mesmo difícil de se conceber que o sujeito se limitasse a um conhecimento exclusivo dos objetivos e resultados, sem nenhuma consciência dos meios empregados e nem de sua regulação; mas como essa conquista e essas correções sucessivas dos meios se realizaram progressivamente, os estados momentâneos de consciência fugaz que puderam caracterizá-las não teriam dado origem a nenhuma integração conceitual ou representativa, o sistema obtido permanecendo sensorimotor. (PIAGET et al., 1977, p. 203-204)

Logo, a não integração dos meios empregados e das regulações ativas em estruturas conceituais ou representativas implica em estados momentâneos de consciência, ou seja, no não estabelecimento de estados conscientes. Para Piaget et al. (1978, p. 178): “[...] a característica mais geral dos estados conscientes [...] é a de exprimir significações e reuni-las através de uma forma de conexão que chamaremos, na falta de um termo melhor, de ‘implicação significativa’³⁴.”. A representação, conforme explicitado no início desta subseção, torna-se uma condição necessária ao estabelecimento dos estados conscientes ao permitir a tradução da ação e seu contexto – por meio dos instrumentos semióticos correntes (língua materna, símbolos, imagens, etc.) – em representações significativas a serem reunidas na forma de implicação.

Em síntese ao já discutido acerca do “como” da tomada de consciência, Piaget et al. (1977) destacam:

³³ As ações de êxito precoce dizem respeito às regulações automáticas (coordenações sensório-motoras) que possibilitam ao sujeito alcançar algum objetivo pretendido. Nesse contexto, a ação precede a conceituação, sendo a primeira um saber autônomo e que constitui a fonte da segunda. (PIAGET et al., 1977, p. 207).

³⁴ Conforme Piaget et al. (1978, p. 178), o termo “significante” não possui um sentido linguístico, mas deve-se ao fato da implicação reunir dois significados, enriquecendo-os. Assim, o significado de implicação coincide com o já utilizado na discussão sobre a dialética.

Em suma, o mecanismo da tomada de consciência aparece em todos esses aspectos como um processo de conceituação que reconstrói e depois ultrapassa, no plano da semiotização e da representação, o que era adquirido no plano dos esquemas de ação. Não há, portanto, diferença de natureza, numa tal perspectiva, entre a tomada de consciência da ação própria e o conhecimento das seqüências exteriores ao sujeito, comportando ambos uma elaboração gradativa de noções a partir de um dado, quer este consista em aspectos materiais da ação executada pelo sujeito, quer em aspectos materiais das ações que são realizadas entre os objetos. (PIAGET et al., 1977, p. 204)

‘Findada’ a explicitação das razões funcionais e do “como”, torna-se oportuno o questionamento em relação à ‘fonte’ da tomada de consciência. Segundo Piaget et al. (1977, p. 207) a ação (material) – considerada um saber “[...] autônomo e de uma eficácia já considerável, [...] [refere-se a] um *savoir faire* e não de um conhecimento consciente no sentido de uma compreensão conceituada [...]” – constitui a fonte da tomada de consciência uma vez que esta última “[...] se encontra em quase todos os pontos em atraso, e com frequência de forma muito sensível, em relação a esse saber inicial [a ação].”.

Em relação à ação (material), Piaget et al. (1977) observam que

[...] as coordenações³⁵ por ela construídas estão longe de ser radicalmente novas, mas são extraídas por abstração refletidora [reflexionante] de mecanismos anteriores [retroação], como os processos em jogo em toda a regulação, de tal forma que a própria ação, em relação a seu substrato neurológico, constitui, não se poderia dizer uma tomada de consciência, pois ela não é consciente, mas uma espécie de tomada de posse progressiva, com reconstrução e enriquecimento, análoga ao que é a conceituação em relação a esta ação. (PIAGET et al., 1977, p. 208)

A partir do exposto na citação anterior faz-se possível evidenciar o ‘*continuum*’ do desenvolvimento, ou seja, a construção precedente – além de abrir possibilidades à construção ‘futura’ – serve de alicerce (base) a esta última. Corroborando com tal discussão, Piaget et al. (1977, p. 208) salientam que o mecanismo formador da ação (como de sua conceituação) “[...] é ao mesmo tempo retrospectivo, como tirando seus elementos de fontes anteriores, e construtivo, como criador de novas ligações.”.

³⁵ As referidas coordenações, isto é, entre ações, são de natureza material e causal, “[...] visto que se trata de coordenar movimentos, mesmo se eles são guiados por índices perceptivos [...], a anterioridade e a autonomia das coordenações da ação, mas ao mesmo tempo suas limitações (visto que; a partir de um certo nível, é necessário que elas sejam completadas, depois dirigidas e, finalmente, substituídas pelas do pensamento) resultam do fato de que, como materiais, elas procedem sistematicamente de um a um, o que garante uma acomodação contínua no presente, evitando as divagações, ao mesmo tempo que uma fácil conservação do passado, posto que ele também é material, mas que impede as inferências relativas ao futuro, ao espaço longínquo e ao possível.” Em contrapartida, “[...] as coordenações do pensamento [ou conceituais] chegam a reunir os múltiplos e sucessivos dados em quadros simultâneos de conjunto, o que decuplica seus poderes em extensão espaço-temporal, em velocidade e em deduções sobre o possível, mas, contrabalanceando essas vantagens, se o pensamento não se submeter a regras estritas de composições, por inúmeros riscos de deformações ou de erros concernentes à reconstituição necessária do passado, à leitura ou à interpretação do presente e às especulações sobre o possível ou o futuro.” (PIAGET et al., 1978, p. 176).

Sobre o referido ‘*continuum*’, elemento esse característico da Epistemologia Genética, Piaget et al. (1977) destacam três níveis sucessivos e rigorosamente hierarquizados do conhecimento. O primeiro deles é o da ação material sem conceituação, cujo sistema de esquemas de ação já constitui um saber elaborado. O segundo nível é o da conceituação, “[...] que tira seus elementos da ação em virtude de suas tomadas de consciência, mas a eles acrescenta tudo o que comporta de novo o conceito em relação ao esquema.” (PIAGET et al., 1977, p. 208). Neste nível, o da conceituação, as coordenações em pensamento realizadas pelo sujeito são de natureza implicativa (implicação significativa), já percorrida anteriormente. Por fim, o terceiro nível do conhecimento – contemporâneo do pensamento formal – é o das abstrações refletidas, isto é, das abstrações reflexionantes tornadas conscientes. O mecanismo formador de tais abstrações “[...] consiste em operações na segunda potência, portanto em operações novas mas realizadas sobre as operações anteriores [...]” (PIAGET et al., 1977, p. 208).

Neste ponto cabe retomar os movimentos – aliás, solidários – de interiorização (P → C) e de exteriorização (P → C’) observados nos três níveis³⁶. Tais movimentos ‘levam’ (permitem) a construção de alguns ‘elementos’ e ‘possibilidades’ ao sujeito. Os mesmos apresentam-se sintetizados no quadro abaixo:

Quadro 3 – Movimentos de interiorização e exteriorização nos três níveis do conhecimento.

‘ELEMENTOS’ E ‘POSSIBILIDADES’		
	SUJEITO SOLIDARIEDADE – INTERAÇÃO OBJETO	
	INTERIORIZAÇÃO (P → C)	EXTERIORIZAÇÃO (P → C’)
AÇÃO SEM CONCEITU-AÇÃO	Leva à construção “[...] de uma espécie de lógica dos esquemas, anterior à linguagem e ao pensamento, em cujo seio já se encontram em atuação os grandes tipos de conexões que são as relações de ordem, os encaixes de esquemas, as correspondências, as intersecções, [...] enfim, os principais ingredientes das futuras estruturas operatórias.” (p. 209).	Conduz à construção “[...] das condutas instrumentais [...], de estruturas físicas espaço-temporais [...] e de uma causalidade objetivada e espacializada.” (p. 209).
CONCEITU-AÇÃO	Possibilita a construção de estruturas operatórias, cujo pensamento “[...] se torna capaz de engendrar raciocínios e estruturações (seriações, classificações, número, etc., de forma operatória).” (p. 210). No entanto, tais estruturas permanecem inconscientes, bem como o próprio mecanismo da abstração reflexionante.	Permite “[...] uma interpretação dedutiva dos acontecimentos na direção dos objetos (C’): donde a formação das explicações causais por atribuição das operações aos próprios objetos, promovidos assim à condição de operadores eficazes.” (p. 201). Entretanto, e de modo análogo à interiorização, as atribuições permanecem inconscientes.

³⁶ Mesmo que no primeiro nível – o da ação material sem conceituação – não ocorram tomadas de consciência, mas, sim, tomadas de posse progressivas da própria ação, Piaget et al. (1977) observam a existência do mesmo mecanismo que ‘leva’ da periferia (P) às regiões centrais (C e C’).

ABSTRAÇÃO REFLETIDA	Torna possível a construção da teoria (pelo sujeito) “[...] e não mais unicamente de raciocínios ‘concretos’ embora estruturados logicamente, e a razão dessa modificação é seu novo poder de elaborar operações sobre as operações [...]” (p. 210-211).	Propicia ao sujeito “[...] fazer variar os fatores em suas experimentações e a considerar os diversos modelos possíveis para a explicação de um fenômeno com o risco de submetê-los ao controle dos fatos.” (p. 211).
----------------------------	--	---

Fonte – (PIAGET et al., 1977, p. 209-211).

Em suma, a passagem da ação à conceituação, e desta à abstração refletida – longe de ser imediata e simples – deve-se às contínuas tomadas de consciência (e abstrações reflexionantes) cujo processo é caracterizado por um movimento que se orienta da periferia (P) às regiões centrais (C e C’). A solidariedade epistêmica entre tais movimentos – marcados por ‘momentos’ de desequilíbrio (deformações, omissões e recalques advindos de contradições) e reequilibrações – confirma a hipótese inicial da presente seção a respeito da necessária interação radical entre o sujeito e objeto (meio) à construção do conhecimento.

Para ‘concluir’ a discussão acerca do referido ‘*continuum*’, na próxima subseção discutir-se-ão, brevemente, os estádios do desenvolvimento cognitivo, do sensório-motor ao operatório formal.

2.3 Da inteligência prática ao pensamento operatório (concreto e formal)

Inicialmente, faz-se oportuno ressaltar – por questão de não repetição do já exposto nas subseções precedentes – que a evolução ‘interna’ em cada estágio³⁷ e a ‘passagem’ de um estágio a outro explicam-se pelo mecanismo de equilibração (em seus desequilíbrios e reequilibrações). Tal mecanismo, por sua vez, caracteriza-se/constitui-se pela dialética (em seu aspecto inferencial) enquanto construção de ‘novas’ interdependências e, também, pela abstração reflexionante cujos processos de reflexionamento e reflexão permitem a construção de estruturas cada vez mais estáveis e móveis.

Partindo do pressuposto de que “[...] jamais se observam começos absolutos no decorrer do desenvolvimento, e o que é novo decorre ou de diferenciações progressivas, ou de coordenações graduais, ou das duas coisas ao mesmo tempo [...]” (PIAGET, 2007, p. 30), então, da inteligência prática ao pensamento operatório formal observam-se contínuas construções alicerçadas nas precedentes. No entanto, como explicar o ‘início’ de tal construção, ou seja, no recém-nascido? Como resposta a tal questionamento, Piaget (1987,

³⁷ Cada estágio – (PIAGET, 1998b, 2001, 2007) – caracteriza-se por determinada forma de comportamento (conduta) utilizada pelo sujeito para agir (material e ou imaterialmente) sobre o objeto, sendo que o estágio anterior torna-se condição necessária para a construção do estágio ‘atual’.

2001, [1968] 2003) argumenta que o recém-nascido, no ‘início’, vale-se dos reflexos herdados (hereditariamente), em específico o da sucção. A partir desse reflexo todas as outras estruturas são construídas pelo sujeito ao interagir com o objeto.

Em relação ao primeiro estágio (sensório-motor³⁸) – em cujo ‘início’ observa-se uma completa indiferenciação entre o sujeito e o meio – Piaget (1987, 2001) defende a existência da inteligência prática na qual as percepções e os movimentos são os únicos ‘instrumentos’ utilizados pelo sujeito para atuar sobre o objeto. Tais percepções e movimentos (ações) – apenas existindo no momento presente – são organizados em esquemas de ação (agarrar, esfregar, jogar, etc.) que, ao serem coordenados, possibilitam a construção de algumas ‘noções’ fundamentais ao desenvolvimento do estágio seguinte, a saber: o objeto permanente³⁹ e a causalidade⁴⁰. Ao final desse primeiro estágio, e em decorrência da construção das referidas ‘noções’, o sujeito torna-se capaz de diferenciar o seu eu dos demais objetos, considerando-se um objeto dentre os demais contidos no espaço.

Com a ‘passagem’ da ação à representação, dá-se ‘início’ ao segundo estágio do desenvolvimento denominado pré-operatório (compreendendo o período dos 2 aos 7-8 anos, aproximadamente). Nesse estágio, a partir da função simbólica ou semiótica, o sujeito torna-se capaz de “[...] representar os objetos ou acontecimentos atualmente não perceptíveis invocando-os por meio de símbolos ou de sinais diferenciados, tais como o jogo simbólico⁴¹, a imitação diferida, a imagem mental, o desenho, etc. e, principalmente, a própria linguagem.” (PIAGET, 1998b, p. 39). Graças à função simbólica faz-se possível o prolongamento das ações em pensamento (isto é, a representação da ação), contudo, a formação das operações não ocorre imediatamente. Tal fato advém, pois o pensamento da criança ainda é intuitivo⁴²; além disso, a interiorização das ações demanda tempo porque “[...] é muito mais difícil

³⁸ O estágio sensório-motor abrange o período do nascimento até, aproximadamente, os vinte e quatro (24) meses de vida. Torna-se oportuno ressaltar que os intervalos cronológicos, referentes a cada estágio, representam apenas uma média, podendo variar mediante a influência do meio social ao qual o sujeito está inserido. (PIAGET, 1998b).

³⁹ A noção de objeto permanente – ou permanência dos objetos sólidos (PIAGET, 1998b, p. 38) – refere-se à capacidade da criança encontrar um objeto que foi escondido. Para tanto, há a necessidade de o sujeito conservar tal objeto em sua mente, sendo um indício das primeiras imagens mentais (representações) na criança.

⁴⁰ Pode-se definir causalidade como o estabelecimento de relações que a criança constrói ao interagir com o objeto. Por exemplo, ao descobrir que os objetos de vidro ao caírem no chão podem quebrar a criança estabelece (constrói) a relação causal: queda do copo de vidro x possível quebra deste objeto. Tal construção vincula-se à construção do objeto, do espaço e do tempo – (PIAGET, 1998b, p. 38).

⁴¹ No jogo simbólico (PIAGET, 1990), um objeto (qualquer) ‘perde’ o seu significado usual, passando a simbolizar/significar aquilo que o sujeito deseja naquele momento. Daí, por exemplo, torna-se comum um cabo de vassoura ‘virar’, simbolicamente, um cavalo a ser utilizado para ‘cavalgar’.

⁴² O pensamento intuitivo caracteriza-se pela não reversibilidade (‘ir e vir’ mental), sendo dominado por concentrações, ou seja, há a fixação da atenção (percepção ou representação) num só ponto da totalidade, não acompanhando as transformações realizadas.

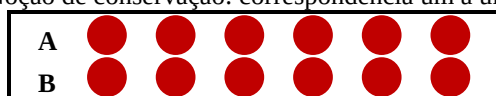
representar o desenrolar da ação e dos seus resultados em termos de pensamento do que limitar-se à execução material.” (PIAGET, 1998b, p. 39).

Para melhor compreender a conduta da criança no estágio pré-operatório – cujo pensamento ainda é intuitivo – faz-se oportuna a situação apresentada no quadro seguinte referente à prova da noção de conservação de quantidades discretas.

Quadro 4 – Prova da Noção de Conservação (Quantidade Discreta).

Dispõe-se na mesa, sob o olhar da criança, duas fileiras (A e B) contendo o mesmo número de elementos (fichas vermelhas), conforme apresentado na figura abaixo:

Figura A – Noção de conservação: correspondência um a um (perceptiva).



Fonte – Arquivo pessoal, 2012.

Após essa primeira visualização, pergunta-se à criança se o número de elementos de ambas as fileiras são iguais. Tendo-se como resposta a afirmação da criança (ou seja, $A = B$), em sua frente, uma das fileiras é alterada, como mostrado a seguir:

Figura B – Noção de conservação: correspondência um a um (não perceptiva).



Fonte – Arquivo pessoal, 2012.

Em seguida, pergunta-se à criança se o número de fichas do conjunto A é igual ao do conjunto B.

Fonte – (CARRAHER, 1998).

Devido ao pensamento intuitivo, isto é, pré-operatório, a criança não conserva a quantidade discreta afirmando, assim, haver mais fichas na fila A. A atenção do sujeito centra-se (fixa-se) na configuração final da fila B (Figura B), não realizando, portanto, o ‘ir e vir’ mental (reversibilidade) de modo a possibilitar a conservação das fichas. Logo, a criança ainda não é capaz de um duplo movimento – fundido num só ‘ato’ de antecipações e retroações – que lhe permita acompanhar a transformação da fila B (Figura B) e o seu ‘retorno’ na configuração inicial (Figura A).

A partir da descentração (coordenação de diferentes perspectivas/pontos de vista) do pensamento, do ‘aperfeiçoamento’ da interiorização das ações e de coordenações entre as mesmas, torna-se possível a reversibilidade operatória (‘ir e vir’ mental). ‘Inicia-se’, assim, o terceiro estágio do desenvolvimento designado operatório concreto (compreendendo o intervalo dos 7-8 até os 11-12 anos, aproximadamente). O qualificador ‘concreto’ deve-se ao fato do pensamento operatório só incidir “[...] sobre os objetos [concretos] e não sobre as hipóteses anunciadas verbalmente sob a forma de proposições [...]” (PIAGET, 1998b, p. 41).

Logo, as operações realizadas pelo sujeito ainda estão próximas das ações de classificar, seriar, corresponder, comparar, reunir, etc., diferentes objetos (de diferentes conteúdos) em diferentes situações.

Por incidir diretamente no/sobre os objetos, as referidas operações concretas (ou intraproposicionais⁴³) denominam-se operações à primeira potência, sendo reunidas numa estrutura intitulada “agrupamento⁴⁴” – (PIAGET, 1976b; PIAGET; INHELDER, 1976). Após investigar a lógica da criança, Piaget (1976b) categoriza oito tipos de agrupamentos referentes às classes e às relações (séries). Nos agrupamentos das classes observam-se a reversibilidade por inversão/negação; já nos das relações (séries) a reversibilidade por reciprocidade. Os referidos agrupamentos apresentam-se sintetizados no seguinte quadro:

Quadro 5 – Oito tipos de agrupamentos: as classes e as relações.

AGRUPAMENTOS	CLASSES	I) Adição primária de classes: consiste em classificações simples reconhecendo inclusões hierárquicas e relações de contiguidade (vizinhança). Ex.: a classe A das rosas está incluída na classe B das flores que, por sua vez, está incluída na classe C dos vegetais. II) Adição secundária de classes: constitui-se numa classificação de uma certa coleção de objetos de várias maneiras diferentes, permitindo a decomposição não observada em I). Ex.: a classe B das figuras geométricas compostas por quadrados, retângulos e triângulos pode ser decomposta em A_1 (quadrados) + A'_1 (não quadrados, ou seja, retângulos e triângulos) OU A_2 (retângulos) + A'_2 (não retângulos, ou seja, quadrados e triângulos) OU A_3 (triângulos) + A'_3 (não triângulos, ou seja, quadrados e retângulos). III) Multiplicação counívoca de classes: consiste em estabelecer correspondências do todo com suas partes do tipo <i>um a muitos</i>. Ex.: a compreensão de um mapa em que cidades de um mesmo estado a ele estão ligadas; diferentes estados estão ligados a uma nação; diferentes nações ligadas a um continente. IV) Multiplicação biunívoca de classes: constitui-se numa classificação de objetos segundo 2 ou mais critérios simultâneos, sendo observada em tabelas de dupla entrada, tripla entrada, n entrada. Ex.: A classe A dos cachorros pode ser classificada como pertencente à classe B dos mamíferos e à classe C dos vertebrados e à classe D dos animais terrestres.
	RELAÇÕES	V) Adição de relações assimétricas transitivas: consiste no encadeamento de relações assimétricas transitivas de modo a permitir a estruturação da série organizada sobre as diferenças. Ex.: a seriação de objetos de tamanhos diferentes, de modo que o elemento intermediário (B) seja, ao mesmo tempo, maior que o anterior (A) e menor que o posterior (C), ou seja, $A < B < C$.

⁴³ Segundo Piaget (1976b, p. 346): “As operações intraproposicionais consistem em ações reversíveis de classificação e de seriação, exercidas pelo sujeito sobre os objetos e expressas por meio de proposições de conteúdo determinado: é este ‘conteúdo’ [...], ou estrutura interna das proposições, que é então simbolizado sob a forma de operações de classes e de relações.”. Por exemplo, na proposição “esta blusa é azul”, pode-se substituir “esta blusa” por outros termos (“esta saia”, “esta meia”, etc.), ou substituir o “azul” por outros predicados (“verde”, “amarelo”, etc.), ou ainda, modificar a relação “é” (“aquela blusa azul ultrapassa em tonalidade esta”, etc.).

⁴⁴ Para Piaget (1976b, p. 90): “Pode-se, com efeito, conceber o ‘agrupamento’ ou como uma rede tornada reversível, graças a um jogo de dicotomias e complementaridades hierárquicas (A e A' , B e B' , etc.), ou como um grupo cuja mobilidade é restrita pela intervenção de encaixes, que implicam as idênticas especiais e, assim como um princípio de contiguidade. O ‘agrupamento’ é, pois, uma estrutura intermediária entre o grupo e a rede e, como tal, exprime a natureza própria às totalidades lógicas [...] e, especialmente, ao conjunto das operações que intervêm numa classificação. [...] [Cujo interesse do agrupamento reside] em exprimir os mecanismos das operações mais elementares [concretas] do espírito.”.

	VI) Adição de relações simétricas: constitui-se no encadeamento de relações simétricas de modo a permitir a estruturação da série organizada sobre as correspondências, em que observa-se a relação de simetria $A \leftrightarrow B$. Ex.: a compreensão de que, se A é irmão de B, então, eles têm o mesmo pai (P) e/ou a mesma mãe (M). VII) Multiplicação counívoca de relações: consiste na correspondência do tipo <i>um a muitos</i> (isomorfa à III), na qual as relações assimétricas transitivas são multiplicadas. Ex.: a seriação de um conjunto de folhas considerando, simultaneamente, o tamanho e a tonalidade, sendo que a ‘primeira’ da série representa a folha de menor tamanho e tonalidade e a ‘última’ representa a folha de maior tamanho e tonalidade. VIII) Multiplicação biunívoca das relações: constitui-se em “[...] tabelas de dupla (ou tríplice, etc.) entrada, uma das entradas sendo ocupada por uma seriação (agrupamento V), enquanto a outra o é por uma segunda seriação, ou por um sistema de relações simétricas (correspondências), ou pelas duas simultaneamente.” (p. 162)
--	---

Fonte – (PIAGET, 1976b, p. 101-179).

Conforme Piaget e Inhelder (1976), os agrupamentos pertencentes às classes repousam, exclusivamente, na reversibilidade por inversão, já que

[...] o sujeito pode assim reunir duas classes contíguas numa única classe ($A + A' = B$; etc.) ou subtrair uma do todo assim formado ($A = B - A'$); pode também multiplicar uma classe pela outra ($A_1 \times A_2 = A_1A_2$) ou abstrair uma do todo assim formado ($A_1A_2 : A_2 = A_1$); mas tais sistemas ignoram a forma geral da reciprocidade.” (PIAGET; INHELDER, 1976, p. 206)

Em contrapartida, os agrupamentos referentes às relações (séries) valem-se, exclusivamente, da reversibilidade por reciprocidade. A esse respeito, Piaget e Inhelder (1976) esboçam:

Por exemplo, uma relação simétrica de tal ordem que $A = B$ é idêntica à sua recíproca $B = A$. Se uma relação assimétrica $A < B$ é verdadeira, sua recíproca $B < A$ é falsa, e se as duas são verdadeiras ($A \lesseqgtr B$) se reduzem a $A = B$, isto é, uma equivalência. Uma relação assimétrica de tal forma que $A < B$ exprime, na verdade, uma certa diferença entre os termos A e B; se anulamos essa diferença e se exprime no sentido inverso $B > A$, recaímos numa equivalência $A = B$ ou $B = A$, sem anular os termos. Assim, esses sistemas ignoram a reversibilidade por inversão (negação), que se refere aos termos das relações (classes) e não às relações [séries] em si mesmas. (PIAGET; INHELDER, 1976, p. 206-207)

A ‘passagem’ (gradual) do estágio operatório concreto ao operatório formal dar-se-á mediante a coordenação⁴⁵ dos referidos agrupamentos concretos (das classes e das relações/séries) num sistema único. O pensamento, assim, “[...] se torna formal porque se

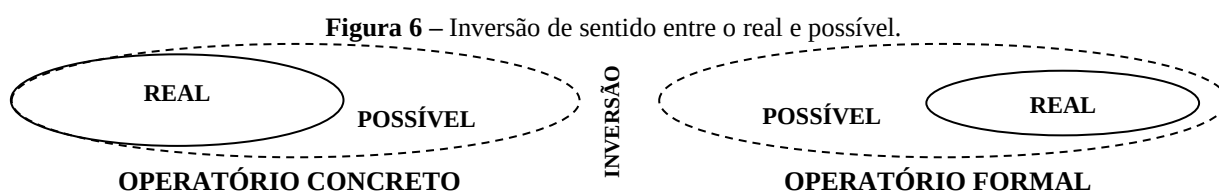
⁴⁵ Por meio de tal coordenação torna-se possível a construção de duas estruturas que caracterizam (e possibilitam) o pensamento operatório formal: 1) o grupo de 4 transformações (INRC) – advindo da fusão das duas formas de reversibilidade (inversão/negação e reciprocidade) – no qual uma operação pode permanecer idêntica (**I**), invertida/negada (**N**), transformada na sua recíproca (**R**) ou na sua correlata (**C**); 2) o “Conjunto de Partes”, ou combinatória n por n , proveniente da ‘aplicação’ do agrupamento I (classificação simples) ao mais geral (agrupamento VIII – a tabela das multiplicações lógicas).

refere às combinações possíveis e não mais aos objetos em si mesmos.” (PIAGET; INHELDER, 1976, p. 219). O sujeito, neste último estágio, realiza operações à segunda potência, ou seja, operação de operações (ou interproposicionais⁴⁶). Tais operações ultrapassam o quadro das transformações relacionadas diretamente ao real (operações à primeira potência), subordinando-se a um sistema de combinações hipotético-dedutivas ‘simplesmente’ possíveis.

Acerca desta ‘nova’ característica do pensamento formal, ou seja, hipotético-dedutiva, Piaget e Inhelder (1976) observam:

[...] a dedução não mais se refere diretamente a realidades percebidas, mas a enunciados hipotéticos, isto é, a proposições que se referem a hipóteses ou apresentam dados apenas como simples dados, independentemente de seu caráter real: a dedução consiste, então, em ligar essas suposições, e delas deduzir suas consequências necessárias, mesmo quando sua verdade experimental não ultrapassa o possível. É essa inversão de sentido entre o real e o possível que, mais que qualquer outra propriedade subsequente, caracteriza o pensamento formal: em vez de apenas introduzir um início de necessidade no real, como ocorre nas inferências concretas, realiza desde o início a síntese entre o possível e o necessário, deduzindo com rigor as conclusões de premissas, cuja verdade inicialmente é admitida apenas por hipótese, e, assim, vai do possível ao real. (PIAGET; INHELDER, 1976, p. 189)

Ao contrário do que ocorre no pensamento operatório concreto em que o possível é ‘apenas’ uma extensão do real, no pensamento operatório formal o real se subordina ao possível, sendo apenas umas das possibilidades dentre todas as outras. Devido às operações de operações (ou reflexões de reflexões) em que o pensamento ‘desprende-se’ do real, o sujeito torna-se capaz de elaborar teorias (sistemas teóricos) cuja linguagem representa uma importante ferramenta. Visualmente, a inversão de sentido entre o real e o possível nos dois estágios (concreto e formal) pode ser representada como:



Fonte – Elaborada pelo autor, 2012.

⁴⁶ Conforme Piaget (1976b, p. 346-347): “[...] as operações interproposicionais consistem em abstrair de tais operações alguns de seus aspectos, a saber, suas conexões de verdade ou de falsidade, sem se preocupar com sua estrutura particular, isto é, com o conteúdo das proposições em jogo. Disto resultam novas operações, que têm por objetivo geral as proposições como tais e não mais os objetos particulares aos quais elas se referem: mas, como as proposições já constituem (em seu conteúdo) operações, as operações interproposicionais são portanto operações efetuadas sobre operações, isto é, operações à segunda potência.”

No entanto, com a ‘nova’ ampliação do universo – comportando agora o possível – o sujeito do estágio operatório formal vivencia um “forma superior de egocentrismo⁴⁷” ao tentar adaptar (e transformar) o seu meio às teorias desenvolvidas por ele. Neste momento, as discussões em grupo e a inserção no ‘mundo’ do trabalho mostram-se importantes à descentração (ou seja, diferenciação e coordenação de diferentes pontos de vista) do pensamento que possibilita a superação do egocentrismo.

Cabe destacar, aqui, que o desenvolvimento do sujeito não cessa com a construção/estruturação do pensamento operatório formal (hipotético dedutivo) caracterizado – do ponto de vista estrutural – pela utilização do grupo de 4 transformações (INRC) e da Combinatória n por n . Aliás, uma considerável parcela de sujeitos não atinge tal nível ao término da adolescência como apontaram os estudos inicialmente desenvolvidos por Piaget e Inhelder (1976). A esse respeito, Piaget (1971) destaca:

- “as estruturas formais [...] não se encontram em todos os adolescentes de 14-15 anos [...]”;
- “[...] todos os indivíduos normais conseguem chegar, senão entre 11-12 e 14-15 anos, em todos os casos entre 15 e 20 anos, às operações e às estruturas formais, mas que o fazem em domínios diferentes e estes dependem então das suas aptidões e das suas especializações profissionais [...]. (PIAGET, 1971, p. 92-93, grifo nosso)

Assim, segundo o autor, nem todo adolescente na faixa dos 11-12 a 14-15 atinge o pensamento operatório formal; mas o faz entre os 15 a 20 anos. Além disso, o sujeito adulto constrói estruturas de pensamento operatórias formais (esquemas de ação e ou conceitos) para a sua respectiva área (e ou ciência) de atuação; para outra área esse adulto pode (ainda) necessitar construir as estruturas (esquemas de ação e ou conceitos) relacionadas a essa ‘nova’ área (e ou ciência). Por exemplo, um matemático que já construiu estruturas de pensamento operatórias formais referentes aos conteúdos matemáticos pode, para a área de História, ter que (ainda) construir as tais estruturas relacionadas aos conteúdos de História. No entanto, o adolescente/adulto que já estruturou o pensamento operatório formal (hipotético-dedutivo) construirá mais rapidamente – quando comparado à criança que ainda não se encontra nesse estágio – as estruturas de pensamento operatórias formais relacionadas à outra área não contemplada em sua atuação/especialização profissional.

Em suma, da inteligência prática ao pensamento operatório formal observam-se contínuas construções alicerçadas nas precedentes. Da ação exclusivamente prática ‘evolui-

⁴⁷ O egocentrismo se deve a um “[...] estado de indiferenciação que ignora a multiplicidade das perspectivas, enquanto que a objetividade supõe, ao mesmo tempo, uma diferenciação e uma coordenação dos pontos de vista.” (PIAGET; INHELDER, 1976, p. 256).

se’ para a sua interiorização (representação em pensamento). A partir de tais ações interiorizadas ‘evolui-se’ às operações, enquanto ações interiorizadas tornadas reversíveis. Embora inicialmente ‘vinculadas’ ao concreto, as operações atingem uma ‘estabilidade e mobilidade’ tal que as possibilitam desprenderem-se do real em direção ao possível. Logo, da ação (material) à operação da operação (imaterial), o que define o sujeito (na perspectiva piagetiana) é a sua capacidade ativa de – em constante interação com o objeto em movimentos solidários de interiorização e exteriorização – construir estruturas (esquemas de ação e ou conceitos) que melhor lhe propicie o conhecimento de si e do mundo circundante.

Após esta breve discussão acerca dos estádios do desenvolvimento, apresentam-se, a seguir, algumas considerações a respeito da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud. Embora seja embasada (não exclusivamente) na Epistemologia Genética, essa teoria cognitivista possui ‘autonomia’ própria que possibilita – ao pesquisador – o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas (escolares e ou profissionais). A inclusão da teoria dos campos conceituais na presente seção denota o quão profícuo é a teoria piagetiana ao servir de base à proposição da teoria cognitivista de Vergnaud. Além disso, alguns ‘elementos’ teóricos elaborados por esse autor serão úteis ao desenvolvimento do GE e à análise de alguns dados da presente pesquisa.

2.4 Algumas considerações sobre a teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud

A teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista neopiagetiana que permite “o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências⁴⁸ complexas, nomeadamente daquelas que revelam das ciências e das técnicas.” (VERGNAUD, 1996a, p. 155). Devido a isso, tal teoria pode servir à didática, embora não se reduza a essa. De início, faz-se importante compreender o significado de **campo conceitual**. Vergnaud concebe campo conceitual como sendo um conjunto de situações; situações essas que ‘exigem’ um determinado conceito (ou um conjunto de conceitos) ao/para o seu tratamento. Por exemplo,

[...] para o campo conceptual das estruturas aditivas, o conjunto das situações que exigem uma adição, uma subtracção ou uma combinação destas duas operações e,

⁴⁸ Para Vergnaud, a competência de um indivíduo define-se: “– seja pelo fato de que ele é capaz de lidar com uma certa classe de situações (ou para um conjunto de classes de situações); – seja pelo fato de que ele dispõe de um procedimento ou de um método que lhe permite fazer melhor que outro (procedimento mais rápido, mais geral, mais econômico, menos aleatório...); – seja pelo fato de que ele dispõe de um repertório de procedimentos ou de métodos alternativos que lhe permite adaptar-se da melhor maneira aos diferentes casos que podem se apresentar, em função do valor tomado pelas diferentes variáveis das situações.” (VERGNAUD, 1996b, p. 282, tradução nossa)

para as estruturas multiplicativas, o conjunto das situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações. A primeira vantagem desta abordagem pelas situações é permitir gerar uma classificação que assenta na análise das tarefas cognitivas e dos procedimentos que podem ser postos em jogo em cada uma delas. (VERGNAUD, 1996a, p. 167)

Assim, ao analisar as tarefas cognitivas e os procedimentos utilizados pelo indivíduo ao resolver os problemas provenientes das situações, Vergnaud ‘desloca’ o estudo das estruturas gerais do pensamento (como realizado por Jean Piaget e colaboradores ao tipificarem as operações lógicas gerais) “para o estudo do funcionamento cognitivo do “sujeito-em-situação”” (FRANCHI, 2010, p. 195). Entretanto, Vergnaud considera a pertinência dos ‘elementos’ teóricos piagetianos – tais como, adaptação (assimilação-acomodação), interação, reequilíbrio-equilíbrio (mecanismo de equilibração) e esquema – para explicar a gênese e o desenvolvimento cognitivo do sujeito; inclusive, o próprio conceito de esquema é por ele utilizado e ‘ampliado’ (conforme denotado adiante).

Mas, o que o termo ‘*situação*’ representa para esse referencial teórico? Segundo Vergnaud (1996a), a ideia de situação é a de tarefa (cognitiva). Esse autor considera, também, que “os processos cognitivos e as respostas do sujeito são função das situações com as quais eles se confrontam.” (VERGNAUD, 1996a, p. 171). Isto é, a ação do sujeito (procedimental-material e cognitiva-imaterial) está ‘em função’ das situações com as quais estabelece uma interação. Complementando a discussão acerca da situação, o referido autor se remete a duas ideias:

1 – a ideia de variedade: existe uma grande variedade de situações num dado campo conceptual, e as variáveis de situação são um meio de gerar de forma sistemática o conjunto das classes possíveis;

2 – a ideia de história: os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que eles depararam e que progressivamente dominaram, nomeadamente pelas primeiras situações susceptíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que se pretende ensinar-lhes. (VERGNAUD, 1996a, p. 171, grifo nosso)

Em relação ao ‘*conceito*’ (de qualquer área científica e ou técnica-profissional), Vergnaud (1996) afirma que o mesmo não se reduz à sua definição (formalizada), “pelo menos quando nos interessamos pela sua aprendizagem e pelo seu ensino. É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança [e para o adolescente/adulto].” (VERGNAUD, 1996a, p. 156). Para Vergnaud (1996a), um conceito –

em uma abordagem psicológica e didática – deve ser compreendido enquanto um trigêmeo de três conjuntos⁴⁹ (considerados ao mesmo tempo), a saber:

$$C = (S, I, s)$$

S: conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência);

I: conjunto das invariantes nas quais assenta a operacionalidade dos esquemas (o significado);

s: conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante). (p. 166)

O conjunto das situações (S) indica a **referência** do conceito. Por exemplo, as situações matemáticas envolvendo as ideias de diferença e/ou comparação entre dois números, de ‘completar’, de transformação ‘negativa’ a partir de um estado inicial, etc., tornam-se uma referência ao sujeito acerca do conceito matemático de subtração subjacente a tais situações. Já o segundo, o das invariantes (I), representa o **significado** do conceito; significado esse possibilitado graças ao esquema. Vergnaud (1996a) ‘amplia’ o conceito de esquema – conceito esse retirado da Epistemologia Genética – definindo-o/caracterizando-o do seguinte modo:

Chamemos <<esquema>> à *organização invariante da conducta para uma dada classe de situações*. É nos esquemas que se tem de procurar os conhecimentos-em-acto do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem à acção do sujeito ser operatória. (p. 157, grifos do autor)

O que é invariante no esquema é a organização da conduta, e não a conduta em si. Observe, por exemplo, a organização invariante do sujeito ao enumerar, independentemente do objeto/contexto considerado:

– o esquema da enumeração de uma pequena colecção por uma criança de 5 anos pode variar nas suas formas quando se trata de contar bombons, pratos sobre uma mesa, ou as pessoas sentadas de maneira esparsa num jardim, mas nem por isso deixa de comportar uma organização invariante, essencial ao funcionamento do esquema: coordenação dos movimentos dos olhos e dos gestos do dedo e da mão relativamente à posição dos objectos, enunciado coordenado da sequência numérica, cardinalização do conjunto numerado por sublinhado tónico ou pela repetição da última palavra-número pronunciada: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete... sete! (VERGNAUD, 1996a, p. 157, grifo nosso)

⁴⁹ A respeito dos três conjuntos (S, I, s), Vergnaud (1996a, p. 166) adverte o seguinte: “Não existe, em geral, bijeção entre significantes e significados, nem entre invariantes e situações. Não se pode, pois, reduzir o significado, nem aos significantes, nem às situações.”

Ainda sobre o esquema, Vergnaud (1996a) denota que o mesmo constitui-se/comporta os seguintes elementos:

- invariantes operatórias (conceitos-em-acto e teoremas-em-acto) que pilotam o reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes da situação, e a recolha de informação sobre a situação a tratar;
- antecipações do objectivo a atingir, dos efeitos que são de esperar e das eventuais etapas intermédias;
- regras de acção do tipo se... então..., que permitem gerar a sequência das acções do sujeito;
- inferências (ou raciocínios) que permitem <<calcular>> as regras e as antecipações a partir das informações e do sistema de invariantes operatórias de que o sujeito dispõe. (p. 180)

As invariantes operatórias (conceitos-em-ato e teoremas-em-ato) – ou seja, os conhecimentos-em-ato(ação) do sujeito ao realizar determinada tarefa – são os elementos que diferenciam um esquema de outro. Por exemplo, no esquema de enumeração apresentado anteriormente estão presentes, mesmo que implicitamente, os conceitos-em-ato número cardinal e correspondência biunívoca. Tais invariantes encontram-se, em grande parte, implícitos para o sujeito que realiza a ação. Aliás, há “sempre muito de implícito nos esquemas” (VERGNAUD, 1996a, p. 159). Para que se ‘transformem’ em conceitos e teoremas ‘verdadeiros’ – isto é, em conceitos e teoremas explícitos/formais – os conceitos-em-ato e os teoremas-em-ato devem ‘passar’ pelo processo de tomada de consciência. Para Vergnaud (1996a), as invariantes operatórias possuem grande importância pelo fato de possibilitarem a análise/compreensão da operacionalidade da ação do sujeito; operacionalidade essa que permite a conceptualização do real pelo sujeito. Em relação à conceptualização do real, Acioly-Régner (2014) destaca que:

O problema levantado por Gérard Vergnaud é o de estabelecer a relação entre a conceptualização presente na atividade e a conceptualização presente nos textos matemáticos e escolares. Ora, as atividades práticas mobilizam conhecimentos nem sempre visíveis, nem dizíveis nas análises teóricas. Existe sempre uma decalagem entre a forma operatória do conhecimento, utilizado na prática, e a forma predicativa do conhecimento oral ou escrito que traduz apenas uma parte da forma operatória. (p. 4-5)

A forma operatória do conhecimento, isto é, a ação prática (o esquema) encontra-se em decalagem (descompasso, defasagem) em relação à forma predicativa, isto é, às propriedades dos objetos e da própria ação. Retomando o já discutido na subseção 2.2, a referida decalagem pode ser explicada, embora não exclusivamente, pela ‘vantagem’ (êxito precoce) da ação quando comparada com a sua conceituação. Assim como a tomada de

consciência da ação exige um laborioso (e demorado) agir do sujeito ao interagir com/e sobre o objeto, a ‘passagem’ da forma operatória à predicativa não é automática, sendo necessários esquemas de enunciação para a sua explicitação e/ou simbolização (ACIOLY-RÉGNIER, 2014, p. 4).

Retomando a discussão sobre o esquema, e devido ao interesse da presente investigação pela Matemática, cabe destacar que todo algoritmo (inclusive o algoritmo matemático utilizado nas aulas) é um esquema; mas nem todo esquema é um algoritmo, pois lhe falta a efetividade,

isto é, a propriedade de chegar ao fim com segurança num número finito de passos. Os esquemas são frequentemente eficazes, mas nem sempre efectivos. Quando uma criança utiliza um esquema ineficaz para determinada situação, a experiência condu-la, quer a mudar de esquema, quer a alterar o esquema. Com Piaget, podemos dizer que os esquemas se encontram no centro do processo de adaptação das estruturas cognitivas: assimilação e acomodação. (VERGNAUD, 1996a, p. 159)

Assim, a construção de esquemas permite a própria adaptação do indivíduo ao meio; adaptação essa composta pelos mecanismos (invariantes e indissociáveis) da assimilação e da acomodação. Como toda significação consiste na assimilação de dados a esquemas (PIAGET et al., 1996, p. 140), então, novos esquemas construídos possibilitam novas significações. Por exemplo, um fenômeno físico possui certa significação para a criança que interpreta/compreende-o a partir de seus esquemas já construídos. Em contrapartida, esse mesmo fenômeno possuirá outras significações para um físico tendo em vista os esquemas já construídos por ele que, em tese, são mais ‘abrangentes’.

Já o conjunto (s) das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem representa o **significante** do conceito. Tais significantes (que podem ser palavras, símbolos, expressões matemáticas, tabelas, gráficos, diagramas, etc.) possibilitam a representação do conceito, de suas propriedades, das situações e dos procedimentos de tratamento para a resolução de determinada tarefa. A linguagem, em particular, torna-se importante ao sujeito ao desempenhar a função – além da representação e da comunicação – de “auxílio ao pensamento e à organização da acção.” (VERGNAUD, 1996a, p. 191). Em complementação, o referido autor denota:

Esta função [auxílio ao pensamento e organização da acção] apoia-se, por sua vez, na função de representação, mas aquilo que é então representado são, simultaneamente, os elementos da situação considerada, a acção, e as suas relações. A linguagem e os símbolos matemáticos desempenham, pois, um papel relevante na conceptualização e na acção. Sem os esquemas e as situações, permaneceriam vazios de sentido. (VERGNAUD, 1996a, p. 191, grifo nosso)

Sem os esquemas e as situações, a linguagem e o simbolismo matemático (as expressões matemáticas, por exemplo) perdem o sentido para o aluno. Eis o motivo dos alunos não compreenderem as expressões matemáticas ('fórmulas') quando essas se apresentam desvinculadas das situações que 'exigem' do aluno o 'fazer'/agir matemático realizado graças aos esquemas.

Ainda sobre a linguagem e o simbolismo, Vergnaud (1996b, p. 289) destaca a importância desses à teoria. Sem a utilização da linguagem e do simbolismo torna-se impossível a mudança de *status* dos conceitos-em-ato e dos teoremas-em-ato para conceitos e teoremas explícitos (e formais).

Em suma, Vergnaud (2011) sinaliza a importância do par situação/esquema enquanto substituto do par estímulo/resposta e, também, o papel do professor a partir da teoria dos campos conceituais:

O conceito de esquema é essencial porque ele designa formas de organização da atividade para classes de situações bem identificadas e circunscritas. O par teórico *situação/esquema* deve então substituir o par *estímulo/resposta*, de um behaviorismo estreito ao extremo; o par *sujeito/objeto*, embora inevitável, é ele próprio muito geral para permitir estudos empíricos precisos. No entanto, esse privilégio teórico do par *situação/esquema* não deve fazer com que se subestime o papel da linguagem e de outras formas simbólicas na conceitualização e na comunicação, incluindo-se, nesse caso, também, a comunicação didática. O professor é um mediador essencial, evidentemente, mas seu papel não se limita a acompanhar a atividade dos alunos, tutelando-os: a presente contribuição tenta mostrar que, na profissionalização do professor, são essenciais as duas funções, a da escolha das situações a serem propostas aos alunos, e a da representação de sua estrutura conceitual por meio de formas simbólicas acessíveis. (p. 26, grifos do autor)

A teoria elaborada por Vergnaud possibilita, assim, analisar o desenvolvimento e a aprendizagem das mais variadas competências (inclusive as competências matemáticas abordadas na escola). Cabe ao professor (de Matemática), portanto, escolher as 'melhores' e as mais adequadas situações a serem realizadas pelos alunos, considerando, também, o atual estágio de desenvolvimento cognitivo desses alunos. Além disso, o docente deve orientar os estudantes no/durante o processo de aprendizagem; aprendizagem essa proveniente de contínuos desequilíbrios-reequilíbrios (e abstrações reflexionantes). Nessa orientação, a comunicação didática torna-se importante, além da representação – por meio da linguagem e de outras formas simbólicas (matemáticas) – da estrutura conceitual da situação problema em discussão.

Após esta breve discussão acerca da teoria dos campos conceituais, apresentam-se algumas ‘aproximações’ da Epistemologia Genética à Educação. Tais aproximações tornam-se importantes tendo em vista a investigação a qual a presente pesquisa se propõe.

2.5 Algumas ‘aproximações’ da Epistemologia Genética à Educação

Ao pensar sobre a Educação⁵⁰, em particular a educação formal realizada no contexto escolar, Piaget ([1988] 1998a, 1998b, [1972] 2002) – apoiado nos resultados da Epistemologia Genética – expõe várias temáticas que permitem uma ‘aproximação’ de sua teoria à Educação. Dentre os variados temas, nesta subseção abordar-se-ão: 1) a ação (atividade) do aluno; 2) a escola ativa e os ‘seus’ métodos; 3) o ensino tradicional e suas consequências ao aluno; 4) o papel do professor e a sua formação.

Em relação à ação (atividade) do aluno, Piaget (1998b, 2002) afirma ser a mesma imprescindível ao pleno desenvolvimento (afetivo, intelectual e moral) do estudante. Para tanto, conforme Piaget (1998a, p. 18) a atividade “[...] é associada ao facto de que a educação deve responder a uma necessidade.”. A necessidade refere-se ao conhecimento que o aluno tem condições de construir no seu atual ‘momento’ psicológico (estádio). Por exemplo, no plano intelectual, a necessidade do estudante dos anos iniciais do Ensino Fundamental é a construção das estruturas operatórias concretas (os agrupamentos) que lhe possibilite o progressivo desenvolvimento ‘rumo’ ao pensamento formal. Nessa etapa da escolaridade, o aluno necessita “manipular” ações/relações mentais (matemáticas, em nosso caso) apoiando-se no material concreto. Tais ações/relações mentais possibilitarão ao estudante – mediante contínuas equilibrações/abstrações reflexionantes – a transição de um pensamento pré-operatório para uma compreensão operatório concreta e, futuramente, formal de um determinado conteúdo.

Ainda sobre a necessidade, Piaget (1998b) observa:

⁵⁰ Segundo Silvia Parrat-Dayana e Anastasia Tryphon (PIAGET, 1998a, p. 9): “A reflexão de Piaget sobre a educação constrói-se no quadro de duas instituições [nas quais Piaget atuou como coordenador e diretor]: o Instituto Jean-Jacques Rousseau (IJJR) e o Bureau international d’éducation. [BIE]”. O IJJR foi fundado em Genebra em 1912 por Édouard Claparède, passando, a partir de 1975, a constituir a Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Genebra. Já o BIE é um centro – da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO) – onde se “[...] reúnem documentos pedagógicos, empreendem-se pesquisas de campo, cujos resultados são difundidos em publicações, e organizam-se conferências internacionais sobre educação.” (PIAGET, 1998a, p. 11).

A escola moderna [ativa] [...] apela para a atividade real⁵¹, para o trabalho espontâneo baseado na necessidade e no interesse pessoal. Isso não significa, como diz muito bem CLAPARÈDE que a educação ativa exige que as crianças façam tudo o que queiram; “ela exige que eles queiram tudo o que façam; que ajam, não que sejam manipulados” (*L’education fonctionnelle*, p. 252). A necessidade, o interesse resultante da necessidade, “eis o fator que fará de uma reação um ato verdadeiro” (p. 195). A lei do interesse é, pois, “o único eixo em torno do qual se deve mover todo o sistema” (p. 197). (PIAGET, 1998b, 154-155, grifo do autor)

Para o referido autor, a ‘atividade real’ baseada na necessidade e no interesse pessoal não implica em ‘*laisser faire*’ (deixar fazer), ou seja, em deixar o estudante fazer o que quiser. Se assim o fosse, a escola (bem como o professor) não teria motivo de existir. O interesse – considerado o aspecto dinâmico da assimilação – surge quando “[...] o eu se identifica com uma idéia ou um objeto, quando encontra neles o meio de expressão e eles se tornam um alimento necessário à sua atividade.” (PIAGET, 1998b, p. 162). Retomando o exemplo anterior, as ações/relações mentais matemáticas realizadas pelo estudante, com o ‘apoio’ sobre a manipulação no material concreto, tornam-se interessantes por representar o ‘alimento necessário’ à atividade do aluno dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Nesse ponto torna-se oportuno ressaltar que as discussões sobre o interesse (necessidade) e a manipulação no material concreto representam duas questões incompreendidas por grande parte dos professores (e demais profissionais da Educação). Devido à compreensão superficial e difusa da Epistemologia Genética, como apontado por algumas pesquisas (CAETANO, 2009; GEBARA; MARIN, 2005; RAPOPORT; SILVA, 2006), muitos professores acreditam, equivocadamente, que a teoria de Piaget defende o “*laisser faire*” (deixar fazer) e que manipular objetos concretos basta à construção do conhecimento pelo estudante. Bellini et al. (2011, p. 1-2) também apontam que “As tentativas de aplicações da teoria piagetiana na escola têm se mostrado muito limitadas possivelmente porque, em sua maioria, levam em conta apenas os estádios de desenvolvimento [...]”. Nessa ‘aplicação’, segundo os referidos autores, embora os professores sinalizem a importância da ação (atividade) do aluno à construção do conhecimento, os mesmos não sabem – na maioria das vezes – explicar (do ponto de vista teórico) o significado dessa ação para a Epistemologia Genética; recaindo, por conseguinte, no espontaneísmo. Conhecer os estádios do desenvolvimento é válido; contudo, compreender o mecanismo que possibilita ao sujeito agir sobre o objeto, num ‘movimento’ de interação, é ainda mais importante. Tais ideias errôneas,

⁵¹ A ‘atividade real’ não representa a exclusiva ação material (física), mas, também, a ação imaterial (operatória) realizada nos ‘níveis’ concreto e formal.

reducionistas e descontextualizadas desqualificam e dificultam, assim, a ‘utilização’ da teoria de Piaget na Educação.

Além de evidenciar a importância da atividade do aluno, a escola moderna (ou escola ativa) defende o respeito às “[...] leis de toda inteligência.” (PIAGET, 1998b, p. 162). Tal respeito refere-se à adequação das situações de ensino, bem como dos métodos, a cada nível de escolaridade. Assim, o ‘respeito’ ao adolescente implica na promoção de situações que o ‘desequilibrem’ ao nível hipotético-dedutivo (caso a construção do pensamento operatório concreto já tenha se efetivada). Em contrapartida, um ‘desrespeito’ à criança (do estágio operatório concreto) reside no ensino alicerçado exclusivamente no verbalismo, sem o ‘apoio’ do meio concreto às ações/relações mentais a serem realizadas (ativamente) pelo estudante.

Complementando a discussão em torno da escola ativa, Piaget argumenta:

A escola ativa pressupõe ao contrário [da escola tradicional] uma comunidade de trabalho, com alternâncias entre o trabalho individual e o trabalho de grupo, porque a vida coletiva se revelou indispensável ao desenvolvimento da personalidade, mesmo sob seus aspectos mais intelectuais. Toda uma técnica de “trabalho de equipe” foi assim elaborada [...]. (PIAGET, 2002, p. 61-62)

A importância do trabalho em grupo (ou trabalho de equipe) – referenciado na citação – se deve, pois a atividade intelectual verdadeira necessita da livre⁵² colaboração dos indivíduos, “[...] isto é, dos próprios alunos entre si, e não apenas entre professor e aluno.” (PIAGET, 2002, p. 62). Esta ‘livre colaboração’ pressupõe, por conseguinte, a cooperação (PIAGET, 1998a, pg. 12), sendo a cooperação “[...] o conjunto de interações entre indivíduos iguais (por oposição às interações entre superiores e inferiores) e diferenciados (em oposição ao conformismo obrigatório).” (PIAGET, 1998a, p. 145). Por meio da cooperação, o estudante supera o seu egocentrismo ‘atingindo’ “[...] a objetividade e a reflexão discursiva.” (PIAGET, 1998b, p. 184). A partir da interação entre os iguais (cooperação), o indivíduo se ‘vê’ obrigado a diferenciar e coordenar o seu ponto de vista com os demais, ou seja, descentrar-se; disso resulta a objetividade característica do pensamento operatório.

Em favor da colaboração e o do intercâmbio (de ideias) entre os sujeitos (alunos), Piaget (2002) salienta:

⁵² Piaget (1998a, p. 146) alerta que a “[...] a liberdade, nascida na cooperação, não é anomia ou anarquia: ela é autonomia; isto é, a submissão do indivíduo a uma disciplina que ele próprio escolhe e na constituição da qual ele colabora com toda a sua personalidade.”. A autonomia – enquanto autogoverno pautado na reciprocidade de relações entre iguais (PIAGET, 1998a) – propicia a construção de ‘leis’ em comum acordo. Tais leis disciplinam a ‘convivência’ dos sujeitos visando à justiça baseada na igualdade e no bem comum. Quando as leis advêm de uma fonte externa, cabendo ao sujeito apenas cumpri-las, diz-se, então, que o indivíduo encontra-se num ‘estado’ de heteronomia.

[...] [as] operações não são absolutamente apanágio [privilégio] do indivíduo isolado e presumem, necessariamente, a colaboração e o intercâmbio entre os indivíduos. Será então o bastante, para criar uma lógica na criança e no adolescente, que o aluno ouça durante anos as mais esplêndidas preleções, da mesma forma que um adulto assiste a uma conferência? Ou, pelo contrário, uma formação real dos instrumentos da razão estará a exigir uma ambiência coletiva de pesquisa ativa e experimental, bem como de discussão em comum? (PIAGET, 2002, p. 55)

Embora a operação represente uma construção endógena (PIAGET, 1998b) proveniente de sucessivas abstrações reflexionantes – e ‘seus’ patamares de reflexionamentos (PIAGET et al., 1995) – a sua constituição prevê a colaboração e a discussão em comum num contexto coletivo ‘de pesquisa ativa e experimental’. A respeito das operações da lógica, Piaget (2002, p. 62) destaca que as mesmas “[...] são, com efeito, sempre cooperações⁵³, e implicam um conjunto de relações de reciprocidade intelectual e de cooperação ao mesmo tempo moral e racional.”. A escola, desse modo, deve (deveria) propiciar – por excelência – efetivas interações entre aluno-aluno e aluno-professor.

Outro método referenciado por Piaget (1998a) como ‘constituente’ (e pertencente) da escola ativa – além do trabalho em grupo – diz respeito ao ‘*self-government*’ (autogoverno). Segundo o autor:

Trata-se de um método de educação que confia às crianças a organização da disciplina escolar. Pelo self-government, o aluno desenvolve em classe uma nova solidariedade, um sentimento de igualdade e de justiça e a noção de sanção fundada na reciprocidade. Assim, este método visa <<ensinar os indivíduos a sair do seu egocentrismo para colaborarem entre si e a submeterem-se a regras comuns.>> (PIAGET, 1998a, p. 13, grifo do autor)

Pode-se inferir – a partir da citação anterior – certa proximidade entre o trabalho em grupo e o ‘*self-government*’, pois ambos ‘conduzem’ à colaboração entre os indivíduos, bem como à constituição da autonomia. Neste ponto, cabe o seguinte questionamento: “Se os métodos ativos colaboram ao ‘pleno’ desenvolvimento do estudante, então, por que não são ‘amplamente’ utilizados pelos professores?”. Como resposta, Piaget (1998b, p. 75) argumenta que a prática de tais métodos (ativos) exige do professor “[...] um trabalho bem mais diferenciado e bem mais ativo [...]”; no qual se faz imprescindível, embora não única e exclusivamente, um conhecimento suficiente (e adequado) da psicologia da criança e do adolescente. Assim, a prática de tais métodos torna-se mais difícil quando comparado ao método receptivo (característico do ensino tradicional), já que “[...] dar lições é menos

⁵³ Nesta citação, as ‘cooperações’ referem-se ao estabelecimento de relações entre as operações lógicas. Esse sentido, portanto, difere do apontado anteriormente sobre a cooperação enquanto uma interação entre os indivíduos.

fatigante e corresponde a uma tendência muito natural no adulto em geral e no adulto pedagogo em particular.” (PIAGET, 1998b, p. 75).

Esse método receptivo (verbalista) alicerça-se na ideia de que a criança não necessita construir as estruturas do pensamento já que as mesmas estão preformadas em seu espírito (PIAGET, 2002, p. 31). Logo, ‘dar lições’ prontas e acabadas (via transmissão) torna-se a condição necessária e suficiente à aprendizagem (acúmulo) dos conhecimentos na mente da criança. Como o aluno não precisa desenvolver o seu pensamento através de sua ação (atividade), então, a exclusiva transmissão dos conteúdos pelo professor basta⁵⁴. A esse respeito, Piaget (2002) discorre acerca do ensino de Matemática principiar-se exclusivamente pela linguagem:

A verdadeira causa dos fracassos da educação formal decorre pois essencialmente do fato de se principiar pela linguagem (acompanhada de desenhos, de ações fictícias ou narradas, etc.) ao invés de o fazer pela ação real e material. É a partir da escola maternal que deve ser preparado o ensino da Matemática por uma série de manipulações voltadas para os conjuntos lógicos e numéricos, os comprimentos e as superfícies, etc., e esse gênero de atividades concretas deveria ser desenvolvido e enriquecido ininterruptamente, de forma muito sistemática, no decorrer de todo o ensino de primeiro grau, a fim de se transformar pouco a pouco, no início do segundo grau, em experiências de Física e de Mecânica elementares. (PIAGET, 2002, p. 59-60)

Ao denotar que o fracasso do ensino de Matemática advém, essencialmente, da exclusiva utilização da linguagem – cuja transmissão é um de seus vetores – Piaget não nega a importância da transmissão. Segundo Becker (2012, p. 68), a teoria piagetiana não “[...] veta, e nunca vetou a transmissão de conteúdos.”. No entanto, tal transmissão só será ‘válida’ se for possível a sua assimilação “[...] por uma estrutura que lhes dará sentido [significado].” (BECKER, 2012, p. 69). Conforme Becker (2012), o ensino que busca garantir a construção das estruturas pode incluir ‘no rol de seus recursos’ a transmissão; contudo “[...] Um ensino que se esgota na transmissão é um ensino fadado ao fracasso [...]” por não possibilitar a ação do sujeito sobre o objeto do conhecimento.

Como consequência de tal fracasso, o aluno acaba bloqueando o seu interesse em aprender Matemática, ‘dizendo-se’ incompetente nesta disciplina escolar (PIAGET, 1998a, p. 223). Esse sentimento de inferioridade pode ser reforçado pelas pessoas que o cercam (PIAGET, 1998b, p. 52). Além disso, a não construção de um conceito ‘inicial’ da Matemática “[...] acarreta uma dificuldade crescente na sequência dos encadeamentos, de tal

⁵⁴ Os professores que acreditam em tal ideia propagam, por exemplo, falas como: “*Por que será que meu aluno não aprendeu se eu falei/transmiti tão ‘claramente’ o conteúdo?*”; “*Eu falo, falo, falo, mas o aluno não entende! É como se eu estivesse falando para as paredes...*”.

modo que o aluno desadaptado no que se refere a um ponto não compreende o ponto seguinte e cada vez duvida mais dele [...].” (PIAGET, 1998b, p. 52). Por exemplo, a não construção dos conteúdos que constituem/compõem a Aritmética dificulta a construção dos conteúdos que constituem/compõem a Álgebra.

Em relação ao papel do professor – consoante às discussões precedentes – Piaget (2002) destaca:

[...] o educador continua indispensável, a título de animador, para criar as situações e armar os dispositivos iniciais capazes de suscitar problemas úteis [interessantes] à criança, e para organizar, em seguida, contra-exemplos que levam à reflexão e obriguem ao controle das soluções demasiadas apressadas: o que se deseja é que o professor deixe de ser apenas um conferencista e que estimule a pesquisa e o esforço, ao invés de se contentar com soluções já prontas. [...] é preciso que o mestre-animador não se limite ao conhecimento de sua ciência, mas esteja muito bem informado a respeito das peculiaridades do desenvolvimento psicológico da inteligência da criança e do adolescente [...]. (PIAGET, 2002, p. 15)

Mediante as referidas funções (e de responsabilidade) do docente – acrescido o encorajamento à cooperação (aluno-aluno e aluno-professor) por meio do trabalho em grupo e do *self-government* – Piaget (1998a, p.20) defende, nos anos da década de 1970, que o professor deve torna-se “[...] ele próprio investigador.”. Como justificativa, o autor aponta que “[...] Tornar-se investigador ajudará o professor a conhecer as etapas do desenvolvimento e a suscitar na criança a necessidade de observação.” (PIAGET, 1998a, p. 20, grifo do autor). Em decorrência dessas múltiplas responsabilidades, a “tarefa do professor fica pesada; e quanto melhores os métodos, mais difíceis são de aplicar.” (PIAGET, 1998b, p. 129).

Tal ‘peso’/responsabilidade atribuído ao docente ‘leva’ ao ‘problema’ da Formação de Professores, pois, “[...] enquanto não for a mesma resolvida de forma satisfatória, será totalmente inútil organizar belos programas ou construir belas teorias a respeito do que deveria ser realizado.” (PIAGET, 2002, p. 25). Ao discutir a questão da Formação de Professores, o autor apresenta os seguintes dois aspectos:

Em primeiro lugar existe o problema social da valorização ou da revalorização do corpo docente primário e secundário, a cujos serviços não é atribuído o devido valor pela opinião pública, donde o desinteresse e a penúria que se apoderaram dessas profissões e que constituem um dos maiores perigos para o progresso, e mesmo para a sobrevivência de nossas civilizações doentes. A seguir existe a formação intelectual e moral do corpo docente, problema muito difícil, pois quanto melhores são os métodos preconizados para o ensino mais penoso se torna o ofício do professor, que pressupõe não só um nível de uma elite do ponto de vista dos conhecimentos do aluno e das matérias, como também uma verdadeira vocação para o exercício da profissão. (PIAGET, 2002, p. 25-26)

Como uma possível solução ao problema da formação, o autor propõe “[...] uma formação universitária [Formação Inicial] completa para os mestres de todos os níveis.” (PIAGET, 2002, p. 26). Piaget (2002, p. 26) advoga a favor da formação do futuro professor do ensino primário ocorrer em meio universitário, já que “[...] quanto mais jovens são os alunos, maiores as dificuldades assume o ensino, se levado a sério [...]”. Para tanto, as universidades devem promover uma formação que ‘leve’ em conta

[...] dois princípios fundamentais: 1. estreita união do ensino e da pesquisa, sendo os estudantes associados a esta última, especialmente para a solução de problemas novos e ainda não resolvidos, desde os anos de iniciação, sob pena de nada compreenderem da Ciência já estabelecida; 2. pesquisas de grupo dirigidas não apenas por um único professor, mas por representantes de especialidades complementares, trabalhando em constante cooperação (por exemplo, Psicologia e Lógica, etc., apenas da dificuldade real, mas de forma nenhuma intransponível, de tais aproximações, cuja possibilidade ficou evidenciada em nossas experiências genebrinas). (PIAGET, 2002, p. 26)

Ao inserir o licenciando no ‘universo’ da pesquisa colabora-se a sua constituição enquanto um sujeito ativo já que investigação implica em ação. A interdisciplinaridade – o segundo aspecto ressaltado acima – contribui, por sua vez, à formação ‘integrada’ do futuro professor; integração essa necessária à compreensão dos ‘problemas’ educacionais que exigem do docente a construção (e a inter-relação) de diversos saberes⁵⁵.

Embora aluno e professor (nesta perspectiva teórica) possuam papéis diferenciados – já que ao aluno compete a equilibração dos problemas ‘necessários’ ao seu desenvolvimento e ao professor cabe elaborar tais problemas e garantir um ambiente (sala de aula) propício à efetiva cooperação entre aluno-aluno e aluno-professor – ambos estão (ou deveriam estar), enquanto sujeitos epistemológicos, em uma constante interação radical para com o objeto do conhecimento. Interação essa possível graças às funções invariantes da organização e da adaptação, sendo esta última composta pelos mecanismos invariantes da assimilação-acomodação que possibilitam as contínuas equilibrações (e abstrações reflexionantes).

Em suma, para o referido autor a Educação representa

[...] não apenas uma formação, mas uma condição formadora necessária ao próprio desenvolvimento natural. Proclamar que toda pessoa humana tem o direito à educação não é pois unicamente sugerir, tal como o supõe a psicologia individualista tributária do senso comum, que todo indivíduo, garantido por sua natureza psicobiológica ao atingir um nível de desenvolvimento já elevado, possui além disso o direito de receber da sociedade a iniciação às tradições culturais e morais; é, pelo

⁵⁵ Na próxima seção – A Formação de Professores: saberes docentes e Formação Inicial do professor que ensina(rá) Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental – abordar-se-ão, em mais detalhes, os inúmeros conhecimentos e saberes utilizados pelo professor em sua prática pedagógica.

contrário e muito mais aprofundadamente, afirmar que o indivíduo não poderia adquirir suas estruturas mentais mais essenciais sem uma contribuição exterior, a exigir um certo meio social de formação, e que em todos os níveis (desde os mais elementares até os mais altos) o fator social ou educativo constitui uma condição do desenvolvimento. (PIAGET, 2002, p. 33, grifo nosso)

Ou seja, a Educação constitui um importante fator/condição ao desenvolvimento quando oportuniza/propicia a construção, pelo aluno, de estruturas (esquemas de ação e ou conceitos) que melhor lhe possibilite assimilar (compreender/significar) o meio (social e físico). Assim, ao contrário do que defendem alguns críticos, o construtivismo piagetiano não despreza/desvaloriza a importância do fator social ou educativo ao desenvolvimento do sujeito.

Na apresentação do livro “As formas elementares da dialética” (PIAGET et al., 1996), Lino de Macedo relaciona os aspectos *indissociável*, *complementar* e *irredutível* – inerentes ao processo de desenvolvimento do conhecimento – a algumas situações escolares no que tange ao processo de ensino e aprendizagem. Devido a esta ‘aproximação’, faz-se oportuna a seguinte citação evidenciando tal relação:

Dialético, relacional e construtivo são termos equivalentes na teoria de Piaget. Dialético, relacional e construtivo lembram-nos, respectivamente, os aspectos – *indissociável*, *complementar* e *irredutível* – dos processos de desenvolvimento do conhecimento. Na escola, para não dizer na vida em geral, essa tríade é, hoje, fundamental. Os conteúdos escolares – com seus conceitos, princípios e procedimentos próprios – necessitam ser ensinados levando-se em conta – *indissociavelmente* – as noções e operações da criança, no nível em que ela pode formulá-las. Se nos faltam técnicas e materiais didáticos para isso, faltam-nos também fundamentos que expliquem a razão dessa indissociação, principalmente na perspectiva da aprendizagem ou desenvolvimento da criança. Hoje, igualmente, aceita-se, como regra geral, a *complementaridade* da relação aluno-professor, ou da interação sujeito-objeto. Se a criança não aprendeu é porque o professor não ensinou; ao menos, não ensinou para ela, em que pese a eventual correção formal ou conceitual dos conteúdos por ele expostos. Em outras palavras, a objetivação dos conhecimentos escolares pela criança supõe simultaneamente a subjetivação desses conhecimentos na perspectiva daquele a quem estão sendo propostos. Nesses termos, se a criança necessita aprender as noções e operações escolares, superando e compartilhando suas hipóteses e formas pessoais de realizá-las, então, *complementarmente* o professor necessita saber sobre esse sujeito a quem transmite conhecimentos, saber sobre suas possibilidades, necessidades e sentido. Temos aprendido também o caráter *irredutível* dessas relações. Matemática e matemático, física e físico correspondem a coisas diferentes: um se refere ao objeto de conhecimento; outro, àquele que conhece, cada qual com suas próprias coordenações. A proposta de Piaget é defender uma dialética, ou seja, uma forma de interdependência entre ambos, cuja resultante, ou síntese, é um contínuo aprofundamento e amplificação do conhecimento, o qual, para ser construído, supõe um duplo jogo de correspondências e transformações. Para “descobrir” o real, o sujeito há de inventar teorias, modelos e operações que lhe correspondem; para inventá-las, há de transformar sua “visão de mundo” em favor da objetivação daquilo que o objeto é, ao menos nos limites do social ou individualmente cognoscível. Eis a dialética do conhecimento em sua tríplice dimensão:

interiorizável (perspectiva do sujeito), exteriorizável (perspectiva do objeto) e sintetizante (modelo). (PIAGET, 1996, p. 8-9, grifo do autor)

Nota-se, assim, a complexidade inerente ao processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos escolares. Complexidade essa que pode ser explicada – pelo menos no que se refere ao processo de construção do conhecimento (de tais conteúdos) – a partir da teoria piagetiana.

A seguir, apresentar-se-ão algumas pesquisas que investigaram a Formação Inicial de professores ‘sob a ótica’ da teoria de Jean Piaget. Evidenciar outras ‘aproximações’ da Epistemologia Genética à Educação, em particular com a Formação Inicial de professores faz-se oportuno pelo fato da presente pesquisa incidir sobre essa etapa de formação.

2.5.1 Contribuições da Epistemologia Genética à Formação Inicial de professores: alguns estudos desenvolvidos

Os trabalhos expostos nesta subseção evidenciam ‘possíveis’ aproximações da teoria piagetiana à Formação Inicial de professores. Com exceção da primeira, as demais pesquisas utilizaram tal teoria numa dupla função, ou seja, enquanto fundamento à elaboração de propostas didático-metodológicas e como ‘suporte’ à análise dos dados coletados.

Bernardi, Grando e Taglieber (2005) denotaram, inicialmente, uma ‘distância’ entre a teoria (discurso construtivista) e a prática (conservadora e tradicional) do acadêmico/educador responsável pela Formação Inicial de professores (de Matemática). Como possível solução a tal dicotomia entre teoria e prática, elaborou-se uma crítica epistemológica fundada na Epistemologia Genética. Após discorrerem sobre alguns temas da teoria de Piaget – interação entre sujeito e objeto, processo de equilíbrio/abstração reflexionante, assimilação e acomodação, os fatores do desenvolvimento cognitivo, a importância da ação do sujeito – os autores expuseram que o trabalho de formação na Licenciatura (de responsabilidade do acadêmico/educador) deve ser voltado para a ação e reflexão numa relação dialética entre teoria e prática. Nesse contexto, o aluno passa a ser concebido um sujeito ativo que, em constante interação com objeto, desequilibra-se e reequilibra-se de modo a possibilitar a construção de um conhecimento da realidade educacional adequado ao enfrentamento dos problemas advindos da sua futura prática docente. Em conclusão, os referidos autores alertaram que “O licenciando não pode sair do seu curso com a mesma postura pedagógica com que entrou [ou seja, tradicional]. Se isto acontecer certamente não se formou um educador matemático.” (BERNARDI, GRANDO e TAGLIEBER, 2005, p. 62).

Após esse ‘primeiro’ trabalho em âmbito (exclusivamente) teórico, foram encontradas duas investigações – (CAIMI, 2006; ZASLAVSKY, 2010) – que incidiram sobre a Formação Inicial de professores de História.

Caimi (2006) analisou uma pesquisa-intervenção – realizada durante/na disciplina Prática de Ensino II/Estágio Supervisionado (ministrada pela autora) – que teve a participação de vinte e seis licenciandos do último ano/semestre do curso de Licenciatura Plena em História de uma universidade comunitária do interior do estado do Rio Grande do Sul. Fundamentada na Epistemologia Genética e na filosofia da linguagem de Mikhail Bakhtin, a pesquisa-intervenção investigou os seguintes objetivos: a) os sentidos produzidos pelos estagiários (participantes) sobre a aula de História; b) os processos de conceituação da ação docente desenvolvidos durante o estágio. Para tanto – no decurso da referida disciplina – foram utilizadas duas estratégias metodológicas que possibilitaram a intervenção no processo de formação dos licenciandos e a obtenção dos dados. Tais estratégias foram:

a) a inserção do grupo-sujeito num *ambiente virtual de aprendizagem* especialmente proposto para a disciplina, com vistas a potencializar as trocas interindividuais e fomentar processos de conceituação da ação docente numa perspectiva coletiva e cooperativa e b) a instauração de um processo de escrita de *memórias de aula*, como condição possibilitante para ampliar a capacidade de ver e de pensar a própria ação docente. (CAIMI, 2006, p. 6, grifos da autora)

Segundo a autora, o percurso investigativo-reflexivo (formativo) propiciado aos licenciandos – pelas referidas estratégias – permitiu-lhes um avanço progressivo na produção de sentidos e de conceituação sobre a ação docente. Essa progressão iniciou-se num primeiro patamar de consciência elementar (ou periférico), ‘passando’ por um segundo patamar no qual ação e conceituação atuaram paralelamente até atingir um terceiro patamar – no plano da abstração refletida – em que a conceituação predominou sobre a ação docente. Conforme Caimi (2006) a tematização/problematização dos processos cognitivos e das práticas pedagógicas dos licenciandos – aliada à reflexão compartilhada com o outro (colegas, professores, autores-teorias) – contribuiu para a qualificação e para a (re)significação do (futuro) campo de atuação profissional dos participantes. Como implicações do estudo, a pesquisadora apontou a necessidade de repensar a estruturação e a dinâmica dos cursos de Formação de Professores de História de modo a superar a dicotomia entre “formação específica” e “formação pedagógica”, visando, assim, a uma ‘(re)conciliação’ entre a prática e a teoria, a ação e a reflexão, o fazer e o compreender.

Em outro trabalho, Zaslavsky (2010) investigou o processo de tomada de consciência das relações espaço-temporais e das ações próprias de cinco licenciandos/estagiários ao cursarem as disciplinas Prática de Ensino de História I e II durante o último ano de graduação – Licenciatura em História – de uma instituição privada de Ensino Superior de Porto Alegre. No momento da investigação a pesquisadora atuou como professora de tais disciplinas, o que permitiu caracterizar o estudo (qualitativo) como sendo do tipo participante. Valendo-se da Epistemologia Genética (em específico, as ideias sobre a tomada de consciência e a construção de conceitos) e do Método Comparativo em História (ou História Comparada), a pesquisadora-professora elaborou uma estratégia ‘provocadora’ utilizada no decorrer das disciplinas. Em tal estratégia, os licenciandos foram solicitados a prepararem aulas – aplicadas no estágio – que contivessem uma problematização do conteúdo de História de modo a possibilitar aos alunos (dos estagiários) uma comparação espaço-temporal. Como hipótese do estudo a autora denotou:

Tem-se como **hipótese** que as preparações das aulas (planejamento), sua efetivação durante o estágio, os diálogos e relatos reflexivos que ocorrem nas orientações individuais, nas aulas de Prática de Ensino, e no documento final do estágio (relatório de estágio), se conduzidos em uma perspectiva de problematização e comparação espaço-temporal, são fatores que contribuem para:

- tematização das relações entre passado e presente, tornando essas relações objeto de reflexão, o que é uma possibilidade de tomada de consciência das relações espaço-temporais e de sua própria ação;
- oportunidade de revisão dos conteúdos e de suas relações, e de reconstrução de conceitos de história, em especial o conceito de tempo histórico. (ZASLAVSKY, 2010, p. 35, grifo da autora)

A partir da análise dos cinco estudos de caso (ou estudo de casos múltiplos) – cujos dados advieram de documentos elaborados pelos licenciandos/estagiários (planejamento de aula e relatório final) e das orientações individuais com a pesquisadora-professora – foi possível constatar a pertinência da referida estratégia ao processo de tomada de consciência das ações próprias e das relações espaço-temporais. No entanto, observaram-se nos participantes movimentos diferenciados de tomadas de consciência devido às próprias diferenças entre os mesmos. Mediante a pesquisa realizada, a autora destacou a necessidade de revisão dos currículos de Formação de Professores de História visando a uma maior integração entre conteúdo e ação pedagógica.

Outra temática evidenciada na busca realizada para a elaboração da presente subseção referiu-se à Formação Inicial de pedagogos na modalidade à distância. Nessa temática, Serres (2010) investigou como doze alunas-professoras conceberam e praticaram o ensino de

Matemática no decorrer das interdisciplinas de Matemática oferecidas pelo/no curso⁵⁶ de Pedagogia à Distância da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PEAD-UFRGS). As referidas interdisciplinas, totalizando três⁵⁷, abordaram os seguintes temas: a) o desenvolvimento psicogenético das noções espaciais, numéricas e lógicas elementares dos alfabetizandos; b) o currículo, a organização do ensino nas séries iniciais do Ensino Fundamental e a construção das primeiras aprendizagens matemáticas. Nas interdisciplinas utilizou-se a metodologia interativa e problematizadora. Tal metodologia pressupõe a permanente troca de ideias e experiências entre docentes, tutoras e alunos-professores de modo a propiciar um processo de reflexão e de tomada de consciência do processo de aprendizagem (pelos licenciandos), favorecendo, assim, a construção de temas e conceitos relacionados à Matemática e seu ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para a análise dos dados⁵⁸, Serres (2010) valeu-se da Epistemologia Genética buscando compreender o processo de construção do conhecimento pelas doze alunas-professoras. A partir dessa teoria, em específico as ideias sobre o fazer (ação) e o compreender (conceituação), a autora agrupou as participantes em três categorias – apresentadas no quadro abaixo – conforme a coerência teórico-prática identificada em cada sujeito da pesquisa:

Quadro 6 – ‘Categorias’ do Fazer e Compreender: coerência teórico-prática.

GRUPO	DESCRIÇÃO
1. Fazer com compreensão.	Prática coerente e concepção próxima aos pressupostos das interdisciplinas de Matemática.
2. Fazer reprodutivo com compreensão parcial.	Prática incoerente e concepção próxima aos pressupostos das interdisciplinas de Matemática.
3. Fazer sem compreensão.	Concepção distante e prática incoerente com a compreensão, mas próxima dos pressupostos das interdisciplinas de Matemática.

Fonte – (SERRES, 2010, p. 97).

Como dez participantes foram ‘enquadradas’ no Grupo 1 – sendo que nos demais (Grupos 2 e 3) observou-se uma participante em cada – Serres (2010, p. 6) concluiu que as alunas-professoras reconstruíram suas concepções do ensinar Matemática, “[...] demonstrando

⁵⁶ O curso mencionado visa à Formação Inicial de professores já em exercício do ensino público e que ainda não possuem graduação.

⁵⁷ As três interdisciplinas citadas intitulavam-se: “Representação do mundo pela Matemática”, “Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental I” e “Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental II”. Cada interdisciplina foi estruturada de modo a possibilitar a articulação entre os estudos teórico-metodológicos e a apropriação tecnológica, cujo modelo centrou-se em atividades teórico-práticas realizadas pelos alunos-professores a partir de atividades iniciais relacionadas às vivências/experiências docentes dos mesmos.

⁵⁸ Os dados obtidos advirem de registros feitos pelas participantes em *pbworks* individuais que constituem “[...] espaços virtuais onde os alunos-professores registravam suas reflexões sobre as atividades propostas nas interdisciplinas.” (SERRES, 2010, p. 74).

terem se apropriado da proposta interativa e problematizadora das interdisciplinas de Matemática, ainda que parcialmente, e incorporado esta metodologia em suas práticas pedagógicas priorizando a construção do conhecimento pelos seus alunos.”. Assim, a efetiva interação (aluno-professor/tutor/docente) e a problematização mostraram-se elementos importantes à constituição de espaços de formação propícios à reconstrução das concepções acerca da Matemática e de seu ensino.

Ainda sobre a Formação Inicial de pedagogos na modalidade à distância, e tendo como ‘ambiente’ o mesmo curso analisado anteriormente por Serres (2010), Turchielo (2017) investigou como ocorreu a formação reflexiva de alunas-professoras, durante o curso, considerando as articulações entre teoria e prática pedagógica. Para a realização da pesquisa predominantemente qualitativa, do tipo estudo de caso, Turchielo (2017) analisou as produções escritas elaboradas pelas acadêmicas no decorrer dos nove semestres do referido curso. Valendo-se da Epistemologia Genética, em particular do conceito de possível cognitivo, a autora elaborou as seguintes categorias de análise: a) as impossibilidades em ser reflexivo; b) ensaios no processo de ser reflexivo; c) possibilidades nas concepções e nas práticas reflexivas. Mediante tal análise, a autoria identificou o seguinte a respeito do processo de formação reflexiva das alunas-professoras:

A análise explicitou que as alunas-professoras iniciaram o curso com predominância de postagens descritivas e na impossibilidade de problematizar sobre a sua aprendizagem no curso e sua prática pedagógica na escola. Isso se deu porque elas ainda não estavam em um estado de dúvida ou conflito cognitivo, que desencadeia o pensamento reflexivo que problematiza a ação e sobre a ação. A partir das interações com os sujeitos do curso (professores formadores, tutores e colegas) que provocaram o confronto de ideias e crenças, as alunas-professoras apresentam questionamentos, o que origina a possibilidade de buscar novos argumentos e ações pedagógicas. Somente a partir dessa possibilidade ou desses atos de pesquisa, as professoras-alunas alcançaram postagens reconstrutivas e a capacidade de refletir sobre suas concepções e práticas de ensino e de aprendizagem. Isso não significa que as postagens descritivas e interpretativas e as impossibilidades no questionamento de alguns conteúdos e métodos de ensino devam desaparecer, mas sim que as condutas cognitivas estarão mais enriquecidas e ao mesmo tempo integradas às novas possibilidades reflexivas já construídas pelas alunas-professoras durante o período da formação. (TURCHIELO, 2017, p. 194)

A respeito do ensino de Física, Manzini (2007) analisou uma experiência de ensino-aprendizagem de conteúdos dessa disciplina, por ela elaborada, que foi realizada com alunos do curso de Licenciatura em Física da Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS). A experiência de ensino-aprendizagem – fundamentada na Epistemologia Genética, em específico no/sobre os conceitos de interação entre sujeito e objeto (material concreto), equilíbrio, abstração reflexionante, operações formais (Grupo INRC e Combinatória),

tomada de consciência – ocorreu em dois momentos. No primeiro ano (1.º momento) seis licenciandos – reunidos em um grupo cooperativo num período de duas horas semanais – desenvolveram experimentos de Física envolvendo materiais concretos. A partir de observações, entrevistas e de materiais escritos provenientes do trabalho desenvolvido no referido grupo, a autora construiu uma metodologia denominada roteiro pedagógico. Já no segundo ano (2.º momento) – em que dois alunos do grupo ‘inicial’ desistiram e outros quatro ingressaram –, além da realização dos experimentos (interação com o material concreto), houve a aplicação do roteiro pedagógico. Tal roteiro foi composto por 4 partes esboçadas no quadro a seguir:

Quadro 7 – ‘Partes’ do roteiro pedagógico.

ROTEIRO	DETALHAMENTO PELA AUTORA
1.ª Parte – Interação com o material concreto.	“As questões escritas na primeira parte do <i>roteiro pedagógico</i> tiveram por objetivo conduzir os procedimentos dos alunos, para que ocorressem construções e reflexões no processo de observação do fenômeno físico, por meio da manipulação do material concreto.” (p. 132).
2.ª Parte – Tabelas-verdade e o grupo INRC.	“As tabelas-verdade consistem no conjunto de proposições logicamente conectadas que afirmam ou negam uma relação entre grandezas físicas presentes em um fenômeno físico e em uma conclusão [...]. [...] que têm o objetivo de instigar o aluno a trabalhar com operações lógicas e com o grupo INRC.” (p. 133).
3.ª Parte – Prova clínica.	“A prova clínica consiste de uma prova oral e tem por objetivo promover as reflexões necessárias, conduzindo à tomada de consciência do fenômeno físico observado e ao estabelecimento de possíveis relações lógico-matemáticas entre as grandes físicas envolvidas, o que auxilia os alunos a estabelecer a equação matemática. Durante essa prova o professor interage com os alunos, esclarecendo os conteúdos que têm dificuldades.” (p. 135).
4.ª Parte – Tarefa escrita individual.	“[...] tem como objetivo avaliar se houve aprendizagem efetiva, mediante questões que envolvem aplicações dos conteúdos desenvolvidos [no grupo] em situações similares do cotidiano do aluno.” (p. 135).

Fonte – (MAZINI, 2007, p. 132-135).

Após a análise dos dados, cujos encontros foram filmados e posteriormente transcritos, a pesquisadora constatou que o roteiro pedagógico auxiliou os alunos na construção do conhecimento e na formação da equação matemática que expressa o fenômeno físico estudado. Por fim, a autora observou:

A utilização do *roteiro pedagógico* pode promover uma ação pedagógica voltada à necessidade que o aluno tem de obter explicações para as coisas de seu mundo e oferecer aos professores dos ensinos Fundamental e Médio um instrumento que permita acompanhar, de forma mais próxima, o pensamento de seus alunos, fornecendo subsídios para uma prática pedagógica comprometida com suas necessidades. (MANZINI, 2007, p. 137-138)

‘Por fim’, num último trabalho, Massabni (2011) investigou o modo como seis estudantes – do curso de Licenciatura em Ciências Biológicas de uma Universidade pública do interior do estado de São Paulo – conceberam (resolvendo ou não) alguns conflitos emergidos de histórias hipotéticas⁵⁹ apresentadas em entrevistas realizadas. As histórias hipotéticas denotaram situações possíveis de ocorrerem no estágio e abordaram questões como a autoridade docente, autonomia profissional e escolhas pedagógicas, entre outras. Segundo a autora “O objetivo do estudo foi relacionar as formas de conceber os conflitos a indícios de desenvolvimento da profissionalidade em alguns licenciandos durante o curso em questão.” (MASSABNI, 2011, p. 800).

Para a análise dos dados obtidos – advindos da transcrição das respostas (das entrevistas) gravadas – a pesquisadora valeu-se das ideias de centração/descentração, conflito cognitivo e possíveis reações (condutas⁶⁰), fazer e compreender e tomada de consciência ‘retiradas’ da teoria de Piaget. Conforme o modo pelo qual os seis participantes enfrentaram (ou não) os conflitos advindos das histórias hipotéticas, Massabni (2011) elaborou três níveis da construção da profissionalidade docente durante a Formação Inicial. Os mesmos encontram-se no quadro a seguir:

Quadro 8 – Níveis da construção da profissionalidade docente na Formação Inicial.

GRUPO	DESCRIÇÃO
1. Nível Inicial – imitação acrítica de modelos de docência.	O licenciando busca imitar o comportamento do professor observado no estágio, cujo papel docente é o de transmissor de conhecimentos fragmentados. Há uma centração em características externas/aparentes à escola para explicar o (mau) comportamento do aluno e às más condições materiais/estruturais, etc. “Tende-se à pouca reflexão sobre a ação e à ausência de integração e de coordenação de diferentes aspectos para abordar situações das histórias hipotéticas.” (p. 803); donde os conflitos nem sempre são percebidos como conflitos profissionais.
2. Nível Intermediário – reflexão e rejeição do modelo de docência observado e tateamento metodológico.	O licenciando acredita que todos os problemas vividos em sala de aula podem ser resolvidos com mudanças metodológicas; donde inicia-se a compreensão de que as relações entre professores e alunos têm de ser construídas. Há uma negação do comportamento do professor observado no estágio, sem uma reflexão sobre como a experiência vivida pode contribuir para a sua própria formação. “Inicia-se a descentração, quando o estagiário busca aspectos do mundo não imediato e não aparente para explicar situações.” (p. 804); no entanto o conflito percebido é ajustado aos esquemas do sujeito e não, ainda, superado.

⁵⁹ Torna-se necessário salientar que, antes das entrevistas acerca das histórias hipotéticas, os participantes foram questionados sobre possíveis conflitos/dilemas vivenciados no/durante o estágio (por eles realizado). Tais respostas foram utilizadas para a constituição dos níveis da construção da profissionalidade docente na Formação Inicial.

⁶⁰ Mediante uma situação de conflito observam-se três tipos de condutas (reações), a saber: “[...] – conduta Alfa: pode-se negar o problema, evitando perceber o potencial perturbador da situação (o desequilíbrio mantém-se), e podendo ocorrer a deformação da situação na tentativa de assimilar o fator perturbador às estruturas já existentes, àquilo que é familiar, de modo a continuar pensando como antes; – conduta Beta: diante do problema ou obstáculo, o sujeito não busca anulá-lo, negando-o, mas modifica o esquema disponível a fim de conseguir ajustá-lo à situação; – conduta Gama: pode-se tentar a antecipação, o que permite superar o desequilíbrio causado.” (MASSABNI, 2011, p. 798-799, grifo nosso).

3. Nível Avançado – compreensão da profissão docente e consciência da necessidade de construção de um modelo pessoal para a docência.	O licenciando busca aprofundar as razões para as situações e as várias dimensões implicadas na prática pedagógica. A reflexão sobre a própria prática é assumida pelo sujeito. “Há busca por esquemas de ação, com reflexão para a incorporação/rejeição de características do modelo de docência observado no professor acompanhado [...]” (p. 805). Os dilemas/conflitos apresentados nas histórias são considerados como inerentes à profissão e concebidos de forma positiva, de modo a serem superados à constituição da profissionalidade docente.
---	--

Fonte – (MASSABNI, 2011, p. 803-805).

Como conclusão, a autora destacou a importância da Formação Inicial evidenciar e problematizar as situações vivenciadas pelo licenciando nos estágios, tornando os conflitos identificados (em tais situações) alvos de reflexão a serem tematizados. Para tanto, um trabalho em conjunto com as escolas-campo de estágio mostra-se fundamental, cabendo

[...] aos professores orientadores dos licenciandos a vivência do cotidiano escolar junto aos estagiários, tendo os dirigentes e, em especial, os professores experientes o papel de co-formadores; cabe a eles, ainda, incluir, nas discussões dos estágios, a luta por melhores condições profissionais entre as formas de enfrentamento dos conflitos. Apesar de tudo, esse parece um caminho promissor a ser trilhado para aprimorar a formação docente nas licenciaturas. (MASSABNI, 2011, p. 806)

Mediante os trabalhos expostos que versaram diferentes temáticas, faz-se possível inferir a ‘fertilidade’ da teoria piagetiana ao ‘pensar sobre’ a Formação Inicial de professores de diversas áreas. É nesse ‘rumo’ que a presente pesquisa direciona-se ao investigar os limites e as possibilidades do GE à (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional de licenciandas em Pedagogia em relação à Matemática. Grupo esse desenvolvido (ver em seção 5) a partir de alguns ‘elementos teóricos’ advindos da Epistemologia Genética.

EM SÍNTESE, nesta segunda seção abordaram-se alguns ‘elementos’ da teoria piagetiana que possibilitaram explicar a gênese e o desenvolvimento do conhecimento pelo sujeito. Através de contínuos desequilíbrios e reequilibrações – para os quais a abstração reflexionante (reflexionamentos e reflexões) mostrou-se um importante ‘motor’ à equibração e a dialética o aspecto inferencial desta última – foi possível à Piaget (e colaboradores) observar e conceber o progressivo desenvolvimento das estruturas do indivíduo desde as estruturas sensório-motoras até as estruturas formais em relação à construção dos mais diversos gêneros de conceitos e relações. Estruturas essas que capacitam o sujeito à metarreflexão e que, por sua vez, propiciam uma análise objetiva (descentrada) dos fenômenos (inclusive os sociais) a sua volta. Após a explicitação de tais ‘elementos’, apresentou-se, também, a teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud – considerada

uma teoria cognitivista neopiagetiana – a ser utilizada à proposição do GE e à análise de alguns dados provenientes da presente investigação. Em seguida, pontuaram-se algumas ‘aproximações’ da Epistemologia Genética à Educação. Nestas ‘aproximações’ observou-se a imprescindibilidade da ação (atividade) do aluno ao processo de construção (aprendizagem) dos conteúdos escolares, sendo o professor o responsável pela proposição de situações de ensino ‘necessárias e interessantes’ ao aprendiz. É nesse sentido que a Formação de Professores (Inicial e Continuada) torna-se importante ao subsidiar a formação de docentes aptos a assumirem tal responsabilidade. Por fim, foram apresentadas sete pesquisas – desenvolvidas pelos pares – que investigaram a Formação Inicial de professores (de algumas áreas) utilizando, como fundamento teórico, a Epistemologia Genética.

Na próxima seção apresentar-se-ão discussões acerca da Formação Inicial de professores, em particular dos licenciandos em Pedagogia em relação à Matemática. Além disso, denotar-se-ão alguns referenciais teóricos acerca dos saberes docentes, em especial os saberes da experiência pré-profissional. Tais discussões e referenciais teóricos far-se-ão úteis à proposição do GE e à análise de alguns dados da presente pesquisa.

3 A FORMAÇÃO DE PROFESSORES: SABERES DOCENTES E FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR QUE ENSINA(RÁ) MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Para que professores numa sociedade que, de há muito, superou não apenas a importância destes na formação das crianças e dos jovens, mas também é muito mais ágil e eficaz em trabalhar as informações? E, então, para que formar professores? (PIMENTA, 2008, p. 15, grifo nosso)

Será realmente que a sociedade contemporânea – caracterizada pelo avanço exponencial da ciência e tecnologia cuja internet ‘encurtou’ as distâncias geográficas entre os diferentes países possibilitando a circulação vertiginosa de informações – necessita ‘ainda’ do professor para o seu contínuo desenvolvimento/‘manutenção’? Pimenta (2008), de modo enfático, defende a importância/imprescindibilidade do trabalho realizado pelo professor à sociedade. Segundo a autora:

Contrapondo-me a essa corrente de desvalorização profissional do professor e às concepções que o consideram como simples técnico reproduzidor de conhecimentos e/ou monitor de programas pré-elaborados, tenho investido na formação de professores, entendendo que na sociedade contemporânea cada vez mais se torna necessário o seu trabalho enquanto mediação nos processos constitutivos da cidadania dos alunos, para o que concorre a superação do fracasso e das desigualdades escolares. O que, me parece, impõe a necessidade de repensar a formação de professores. (PIMENTA, 2008, p. 15)

A mediação nos processos constitutivos da cidadania dos alunos remete à questão do professor auxiliar o estudante a trabalhar com as informações – classificando-as, analisando-as e contextualizando-as – de modo a propiciar a construção do conhecimento. Pimenta (2008), apoiada em Edgar Morin (1993), ressalta que não é suficiente o estudante ter acesso a atual ‘avalanche’ de informações para a construção de seu conhecimento. A informação constitui, apenas, o primeiro ‘estágio’ do conhecimento, já que o conhecimento não se ‘reduz’ à informação. O segundo ‘estágio’ do conhecer refere-se ao trabalho de classificar, analisar e contextualizar as informações. A inteligência, a consciência ou a sabedoria implicam o terceiro estágio do conhecimento. Segundo Pimenta (2008),

Inteligência tem a ver com a arte de vincular conhecimento de maneira útil e pertinente, isto é, de produzir novas formas de progresso e desenvolvimento; consciência e sabedoria envolvem reflexão, isto é, capacidade de produzir novas formas de existência, de humanização. (PIMENTA, 2008, p. 22)

A partir do exposto pela autora identifica-se a ‘grande’ importância do trabalho a ser desenvolvido pelo docente enquanto o mediador entre a ‘sociedade da informação’ e os estudantes, oportunizando-lhes “pelo desenvolvimento da reflexão adquirirem a *sabedoria* necessária à permanente construção do humano.” (PIMENTA, 2008, p. 22, grifo da autora).

Sendo o professor – e seu trabalho – importante à atual sociedade, então, faz-se necessário continuamente (re)pensar a sua formação, pois quanto mais ‘avançada’ se torna a sociedade, mais complexas são as tarefas/funções dos docentes.

A discussão em torno da Formação de Professores não é recente e exclusiva à realidade brasileira. Desde a década de 1980 inúmeros esforços para (re)pensar a Formação de Professores vêm sendo realizados por vários pesquisadores (GARCÍA, 1999; GAUTHIER et al., 1998; MONTERO, 2001; PACHECO, 1995; PACHECO e FLORES, 1999; PORLÁN e RIVERO, 1998; SHULMAN, 1986, 1987; TARDIF, 2002; ZEICHNER, 1993). Dentre as inúmeras questões pontuadas por esses autores, a ‘profissionalização do ensino’ torna-se uma constante nestes trabalhos. Como denota Tardif (2000):

Todos os esforços realizados nos últimos vinte anos para construir um repertório de conhecimentos (*knowledge base*) específico ao ensino vão nessa direção (Gauthier et al., 1998) [da profissionalização do ensino], bem como as numerosas reformas visando a definir e a fixar padrões de competência para a formação dos professores e para a prática do magistério. Se esses esforços e reformas forem bem-sucedidos, o ensino deixará, então, de ser um ofício para tornar-se uma verdadeira profissão, semelhantemente à profissão de médico ou às profissões de engenheiro e de advogado. (TARDIF, 2000, p. 8)

Assim, o movimento de ‘profissionalização do ensino’ – ou seja, o esforço em/para ‘elevar’ o ensino a um *status* profissional semelhante às profissões (medicina, direito, engenharia, etc.) que possuem um “repertório de conhecimentos” sistematizado e compartilhado exclusivamente entre os seus pares – incentiva pesquisas que visam à construção/sistematização do ‘rol’ de conhecimentos e saberes¹ específicos ao ensino, conhecimentos e saberes esses utilizados pelo docente em sua prática pedagógica.

Em relação ao termo “Formação de Professores”, García (1999) apresenta uma possível definição:

A Formação de Professores é a área de conhecimentos, investigações e de propostas teóricas e práticas que, no âmbito da Didática e da Organização Escolar, estuda os processos através dos quais os professores – em formação ou em exercício – se

¹ Adiante, na subseção 3.2, realizar-se-á uma discussão em torno de algumas pesquisas (GAUTHIER et al., 1998; PIMENTA, 2008; SHULMAN, 1986, 1987; TARDIF, 2002) que abordam algumas tipologias de conhecimentos e saberes docentes.

implicam individualmente ou em equipa, em experiências de aprendizagem através dos quais adquirem ou melhoram os seus conhecimentos, competências e disposições, e que lhes permite intervir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, do currículo e da escola, com o objetivo de melhorar a qualidade da educação que os alunos recebem. (GARCÍA, 1999, p. 26, grifo nosso)

A expressão sublinhada “em formação ou em exercício” refere-se às fases nas quais o professor (ou futuro professor) aprende “conhecimentos, competências e disposições” necessárias ao desenvolvimento do ensino (em sala de aula), do currículo e da própria escola. García (1999) divide tais fases em três, a saber: a) ‘Formação Inicial’; b) ‘Iniciação’ e c) – ‘Desenvolvimento Profissional dos Professores’.

A ‘Formação Inicial’ representa a primeira aprendizagem formal (e intencional) numa instituição específica visando à formação para o magistério. No caso do Brasil, tal formação² ocorre nos cursos de Licenciatura.

A outra fase – ‘Iniciação’ – corresponde aos primeiros anos da docência. Segundo García (1999, p. 113), este período compreende os primeiros anos do magistério no qual o professor realiza a transição de estudante para professor. Tal período é caracterizado por “[...] tensões e aprendizagens intensivas em contextos geralmente desconhecidos, e durante o qual os professores principiantes devem adquirir conhecimento profissional além de conseguir manter um certo equilíbrio pessoal.” (GARCÍA, 1999, p. 113, grifo nosso). Por conta dessas ‘tensões e aprendizagens intensivas’, o referido autor salienta a importância (necessidade) de um professor mais experiente (do tipo mentor) auxiliar/ajudar o docente principiante em seu início de carreira.

‘Por fim’, o ‘Desenvolvimento Profissional dos Professores’³ (ou fase da Formação Permanente) refere-se ao desenvolvimento pessoal e profissional do professor no decorrer da sua carreira atrelada ao desenvolvimento da escola, da inovação curricular, do ensino e da profissionalidade. García (1999) prefere utilizar o conceito ‘desenvolvimento’, pois tal termo possui

[...] uma conotação de evolução e continuidade que nos parece superar a tradicional justaposição entre formação inicial e aperfeiçoamento dos professores. Por outro lado, o conceito “**desenvolvimento profissional dos professores**” pressupõe, [...] uma abordagem na formação de professores que valorize o seu carácter contextual, organizacional e orientado para a mudança. Esta abordagem apresenta uma forma de implicação e de resolução de problemas escolares a partir de uma perspectiva que

² Mais discussões acerca da Formação Inicial far-se-ão na subseção 3.1 – A Formação Inicial de professores: algumas discussões.

³ Segundo García (1999), tal fase é citada na literatura com a denominação Formação de Professores Contínua ou em Serviço.

supera o carácter tradicionalmente individualista das actividades de aperfeiçoamento dos professores. (GARCÍA, 1999, p. 137, grifo do autor)

Conforme exposto pelo referido autor, faz-se necessária a realização do ‘Desenvolvimento Profissional dos Professores’ considerando-se a realidade escolar. Essa abordagem deve-se à tentativa de/em superar o carácter individualista dos cursos pontuais (aperfeiçoamento, atualização) realizados pelos docentes; cursos esses que – na maioria das vezes – não contribuem para a melhoria/modificação da prática pedagógica pelo fato de não levarem em consideração as singularidades, complexidades e incertezas inerentes ao contexto escolar (e à prática pedagógica).

Para subsidiar a definição do termo “Formação de Professores”, García (1999) vale-se de oito princípios denotados no quadro seguinte:

Quadro 9 – Princípios subjacentes ao conceito de Formação de Professores.

P R I N C Í P I O S	1.º – Conceber a Formação de Professores como um contínuo. Segundo García (1999, p. 27), este princípio implica “[...] a necessária existência de uma forte interligação entre a formação inicial dos professores e a formação permanente [...]. De acordo com esta perspectiva, não se pode pretender que a formação inicial ofereça “produtos acabados”, mas sim compreender que é a primeira fase de um longo e diferenciado processo de desenvolvimento profissional”.
	2.º – Necessidade de integrar a Formação de Professores em processos de mudança, inovação e desenvolvimento curricular.
	3.º – Paralelamente ao princípio anterior (2.º), refere-se à necessidade de ‘ligar’ os processos de Formação de Professores com o desenvolvimento organizacional da escola.
	4.º – Diz respeito à integração entre a formação de professores em relação aos conteúdos propriamente académicos e disciplinares, e a formação pedagógica de professores. Neste princípio, o autor cita o “Conhecimento Didáctico do Conteúdo” (a ser discutido na subsecção 3.2).
	5.º – Necessidade de integração teoria-prática na Formação de Professores.
	6.º – Necessidade de procurar o isomorfismo entre a formação recebida pelo professor e o tipo de educação que futuramente terá que desenvolver. Torna-se importante esclarecer que isomorfismo ⁴ não significa identidade.
	7.º – A importância da individualização como elemento integrante de qualquer programa de Formação de Professores. Tal princípio, conforme García (1999, p. 29): “[...] está ligado à idéia de formação clínica dos professores, significando isto que a formação de professores se deve basear nas necessidades e interesses dos participantes, deve estar adaptada ao contexto em que estes trabalham, e fomentar a participação e reflexão (Hoffman e Edwards, 1986)”.
	8.º – Possibilitar aos professores questionarem as suas próprias concepções e práticas institucionais.

Fonte – (GARCÍA, 1999, p. 27-29).

Ao remeter tais princípios ao contexto educacional brasileiro é possível propor o seguinte questionamento: “Será que a ‘nossa’ Formação de Professores ocorre de modo contínuo, isomorfo, ‘ligado’ ao desenvolvimento organizacional das escolas da Educação Básica? Em tal formação, há a integração teoria-prática – inserida em processos de mudança, inovação e desenvolvimento curricular – levando-se em consideração a individualização dos

⁴ Na subsecção 3.1 abordar-se-ão algumas considerações acerca do isomorfismo.

participantes de modo a lhes permitir o questionamento acerca de suas concepções e práticas pedagógicas?”.

Uma resposta parcial ao questionamento anterior faz-se possível a partir do trabalho de Aranha (2009) que evidenciou alguns problemas da ‘nossa’ atual Formação Inicial. A referida autora apresentou alguns problemas presentes nessa formação que indicam a não ocorrência dos princípios apresentados por García (1999, p. 27-29). Tais problemas são: a) a presença da concepção “3+1” (alicerçada no modelo da racionalidade técnica) em grande parte dos cursos de Licenciatura. Essa concepção acaba priorizando as disciplinas específicas (Matemática, História, Química, Sociologia da Educação, etc.) em detrimento das disciplinas pedagógicas relacionadas ao ‘como’ ensinar (Prática de Ensino, Estágio Supervisionado, etc.); b) a dificuldade do estabelecimento dialético entre teoria e prática durante tal formação; c) a insuficiente relação entre ensino e pesquisa na formação e no trabalho docente.

Pelo fato da presente pesquisa incidir sobre a Formação Inicial do professor, então, na próxima subseção abordar-se-ão alguns aspectos referentes à mesma.

3.1 A Formação Inicial de professores: algumas discussões

Conforme já esboçado, a Formação Inicial representa a primeira etapa/fase formal (e intencional) destinada à formação de professores. Acerca da importância dessa primeira fase e da impossibilidade da mesma ‘dar conta’ exclusivamente da formação do professor, Mizukami et al. (2006) apontam o seguinte:

Segundo Veenman (1988), embora essa formação **[Inicial]** seja condição necessária, mas não suficiente, em si mesma, para conseguir melhores professores, ela é capaz de proporcionar um bom suporte, a fim de prepará-los para atuarem na profissão. [...] Imbernón (2000) corrobora essa ideia, entendendo que o papel da formação inicial é fornecer as bases para construir um conhecimento pedagógico especializado, pois constitui-se, segundo ele, no começo da socialização profissional e da assunção de princípios e regras práticas. (MIZUKAMI et al., 2006, p. 22, grifo nosso, **[comentário nosso]**)

A ‘não suficiência’ se deve, pois para ‘conseguir melhores professores’ – além da Formação Inicial – é necessário um trabalho (de formação) contínuo de modo a auxiliar o professor no início e ao longo de sua carreira. Nesse sentido, García (1999) e Ponte et al. (2000) ressaltam a necessidade de articular tal fase às demais. Segundo Ponte et al. (2000),

conceber a Formação Inicial como a única etapa da formação implica um pensamento positivista/absolutista calcado no modelo da racionalidade técnica⁵.

Sobre a impossibilidade de a Formação Inicial ser a única etapa de formação, Fiorentini et al. (1998) alertam:

Queremos reafirmar que reconhecemos não haver forma de abranger o conjunto de necessidades que a profissão de professor exige, na formação inicial, pois temos consciência da complexidade que é ser um profissional da educação, principalmente aqueles que atuam diretamente na sala de aula. Não poderemos perder de vista que parte significativa do professorado dificilmente terá oportunidades freqüentes de se atualizar, principalmente em algumas regiões brasileiras. (FIORENTINI et al., 1998, p. 129-130, grifo nosso)

Como uma parcela de professores enfrenta dificuldade em cursar outras formações ao longo da carreira (conforme exposto acima), Fiorentini et al. (1998) indicam a necessidade de se ‘prestar mais atenção’ à Formação Inicial. Tal necessidade advém do fato de que, talvez, para muitos docentes a Formação Inicial constitua a única fase de formação a ser realizada no decorrer da profissão. A respeito de alguns aspectos a serem contemplados na/durante a Formação Inicial, Santos (2008) argumenta o seguinte:

Para tanto, a formação inicial de professores precisa oferecer subsídios que ajudem o futuro docente e ou o docente em ação a elaborar os saberes que formam a base da profissão, num processo crítico e reflexivo constante que lhes permita realizar a articulação entre experiências pessoais, conhecimentos acadêmicos e vivências no estágio, em outras palavras, articular prática e teoria. (SANTOS, 2008, p. 141, grifo nosso)

Ao utilizar o termo ‘docente em ação’, a autora se refere aos estudantes que já atuam como professores (na Educação Básica) durante a Licenciatura. Entretanto, segundo o documento Brasil (2000b, p. 523), grande parte dos cursos de Formação Inicial não leva em consideração os conhecimentos trazidos pelos alunos já em exercício no magistério. Esse documento colabora à discussão sobre a Formação Inicial ao ressaltar que a mesma deve

[...] possibilitar que os professores se apropriem de determinados conhecimentos e possam experimentar em seu próprio processo de aprendizagem, o desenvolvimento de competências necessárias para atuar nesse novo cenário. A formação de um profissional de educação tem que estimulá-lo a aprender o tempo todo, a pesquisar, a investir na própria formação e a usar sua inteligência, criatividade, sensibilidade e capacidade de interagir com outras pessoas. (BRASIL, 2000b, p. 512-513, grifo nosso)

⁵ A discussão acerca do modelo da racionalidade técnica far-se-á na subseção 3.1.2 – “O modelo da racionalidade técnica na Formação Inicial de professores”.

O trecho destacado evidencia que não são poucas as ações atribuídas à Formação Inicial. Segundo o referido documento, para que os licenciandos vivenciem – em seu próprio processo de aprendizagem – situações significativas que contribuam ao desenvolvimento de competências para a atuação (futura) no magistério, faz-se necessária a ocorrência de processos isomorfos na/durante a Licenciatura. Sobre tais processos isomorfos (ou simetria invertida), em Brasil (2000b) observa-se o seguinte:

O conceito de simetria invertida ajuda a descrever um aspecto da profissão e da prática de professor que inclui o conceito de homologia de processos, mas vai além deste. A primeira dimensão dessa simetria invertida refere-se ao fato de que a experiência como aluno, não apenas nos cursos de formação docente, mas ao longo de toda a sua trajetória escolar, é constitutiva do papel que exercerá futuramente como docente.

A compreensão desse fato, que caracteriza a situação específica da profissão docente, descrita por alguns autores como homologia de processos evidencia a necessidade de que o futuro professor experencie, como aluno, durante todo o processo de formação, as atitudes, modelos didáticos, capacidades e modos de organização que se pretende que venha a ser desempenhado nas suas práticas pedagógicas. (BRASIL, 2000b, p. 536-537, grifo nosso)

Assim, o vivenciando pelo licenciando (enquanto aluno da Educação Básica e da graduação) exerce influência na constituição do papel a ser desempenhado pelo futuro professor. Logo, torna-se necessária a homologia/correspondência entre a formação oferecida na Formação Inicial e a prática pedagógica que se espera do futuro professor. A necessária ocorrência da referida simetria invertida também é apontada por Mello (2000) e Mizukami et al. (2006), pois torna-se incoerente exigir do aluno (futuro professor) uma prática pedagógica contextualizada/dinâmica/indagadora se o mesmo – durante sua Formação Inicial – não teve ‘vez e voz’ para questionar e participar das aulas desenvolvidas.

Em retomada ao quadro 9, García (1999) evidencia o isomorfismo como um dos princípios subjacentes ao conceito de Formação de Professores (Inicial ou Permanente). No entanto, segundo o referido autor, tal isomorfismo não implica em identidade, ou seja, não se pretende ‘infantilizar’ o tratamento dado à Formação Inicial (ou Permanente). Sobre esse aspecto, observa-se o seguinte em Brasil (2000b):

A consideração radical da simetria invertida entre situação de formação e de exercício não implica em tornar as situações de aprendizagem dos cursos de formação docente mecanicamente análogas às situações de aprendizagem típicas da criança e do jovem na educação média. Não se trata de infantilizar a educação inicial do professor, mas de torná-la uma experiência isomorfa à experiência de aprendizagem que ele deve facilitar a seus futuros alunos, ou seja, um aprender que permita apropriar-se de estruturas comuns, abstraindo as diferenças de conjuntura, para poder compreender outras situações e atuar em diferentes contextos.

As concepções de aprendizagem, de conteúdos, de contextualização dos saberes, de avaliação, entre outras, que o futuro professor precisa construir em seu processo de formação, marcarão sua atuação profissional. Fatores que reforçam a importância de que elas sejam discutidas pela equipe de formadores e que estejam claramente explicitadas no projeto pedagógico de cada curso de formação. (BRASIL, 2000b, p. 537-538, grifo nosso)

Assim, os docentes universitários (formadores de professores) devem realizar práticas pedagógicas que se constituam em ‘formações clínicas’ (em conformidade ao 7.º princípio – quadro 9) que possibilitem, aos licenciandos, a construção de conhecimentos e saberes necessários à atuação profissional. Entre diversos conhecimentos e saberes a serem construídos, deve-se garantir a reflexão/questionamento acerca dos diferentes conteúdos de ensino de cada área (Matemática, Física, Química, Biologia, Geografia, etc.) considerando-se perspectivas diversas (epistemológica, filosófica, histórica, didática, psicológica, etc.). Porém, conforme indicado na referida citação, isso exige um trabalho conjunto envolvendo todos os professores responsáveis pelos cursos de Formação Inicial; trabalho esse que remete a discussão ao âmbito institucional.

A respeito do âmbito institucional – conforme Mello (2000) e Brasil (2000b) – ainda constata-se, em grande parte dos cursos, uma ‘separação’ entre os responsáveis por tal formação. ‘De um lado’ – nos departamentos ‘específicos’ (Matemática, Física, História, etc.) – ‘encontram-se’ os professores responsáveis pela abordagem dos conteúdos de Matemática, Física, História, etc. ‘Do outro lado’ – nas faculdades ou departamentos de Educação – encontram-se os professores cujas disciplinas abordam questões inerentes ao ensino e à aprendizagem (Metodologia, Didática, Psicologia da Aprendizagem e do Desenvolvimento, Filosofia da Educação, Prática de Ensino, Estágio, Estrutura e Funcionamento do Ensino, etc.). Mediante tal separação, o trabalho de síntese-integração entre as duas áreas (específicas e pedagógicas) – integração essa necessária à futura atuação no magistério – acaba ficando ‘toda’ (ou quase toda) sob a responsabilidade do licenciando.

Além de não considerar os saberes práticos trazidos pelos licenciandos já professores (MELLO, 2000; BRASIL, 2000b), considerável parte dos cursos de Formação Inicial despreza os conhecimentos prévios construídos pelos estudantes em sua trajetória familiar e escolar (ANTUNES, ZAPPAROLI e ARRUDA, 2005). Tal ‘desprezo’ advém do fato

[...] de se idealizar que esses alunos **[os da Licenciatura]** “deveriam saber” determinados conteúdos, sem se buscar conhecer suas experiências como estudantes, para subsidiar o planejamento das ações de formação. Estudos mostram que os ingressantes nos cursos superiores, em geral, e nos cursos de formação inicial de professores, em particular, têm, muitas vezes, formação insuficiente, em decorrência da baixa qualidade dos cursos da educação básica que lhes foram oferecidos. Essas

condições reais, comumente, não são levadas em conta pelos formadores, ou seja, não são considerados os pontos de partida nem as necessidades de aprendizagem desses alunos. (BRASIL, 2000b, p. 524, **[comentário nosso]**)

A partir dessa problemática, faz-se pertinente a seguinte indagação: “Se as Licenciaturas não adotam medidas para minimizar a formação insuficiente dos seus alunos, então, quem o fará? Esse licenciando (futuro professor) – muito provavelmente – não ‘propagará’ tais insuficiências em suas práticas pedagógicas, ‘prejudicando’, mesmo que não intencionalmente, seus (futuros) alunos?” Uma alternativa para a minimização dessa problemática é proposta por Brasil (2000b):

Para reverter o quadro da educação brasileira, ditado pelo círculo vicioso (inadequação na formação do professor $\Rightarrow$ inadequação na formação do aluno $\Rightarrow$ inadequação na formação do professor $\Rightarrow$), é preciso que os cursos de formação tomem para si a responsabilidade de suprir as deficiências de escolarização básica que os futuros professores receberam tanto no ensino fundamental como no ensino médio. (BRASIL, 2000b, p. 524)

No entanto, os problemas advindos da esfera institucional e curricular – a ‘falta’ de integração entre os departamentos ‘específicos’ e o de Educação, o não isomorfismo de processos, a desconsideração do repertório de conhecimentos dos alunos em formação, a formação insuficiente proveniente da Educação Básica – não são os únicos. Outro problema refere-se às crenças e concepções⁶ trazidas pelos estudantes que acabam dificultando a sua ‘própria’ Formação Inicial.

Em suma, a partir do exposto até o momento nesta subseção, percebe-se a importância da Formação Inicial à constituição do futuro professor. Mesmo não sendo suficiente, essa primeira etapa/fase constitui uma condição necessária à formação de docentes aptos à elaboração de situações de ensino ‘necessárias e interessantes’ (PIAGET, 1998a, 1998b) ao estudante da Educação Básica. Situações essas que oportunizem a esse estudante a sua efetiva ação sobre o objeto de conhecimento de modo a lhe permitir a construção de inúmeros conteúdos escolares que ‘contribuirão’ ao seu ‘pleno’ desenvolvimento (cognitivo, afetivo e moral).

Como um auxílio ao ‘pensar sobre’ possibilidades de ‘superação’ de alguns problemas evidenciados em ‘nossa’ Formação Inicial, o quadro a seguir apresenta algumas diretrizes gerais:

⁶ Discutir-se-á, adiante, a influência das crenças e concepções na/durante a Formação Inicial de professores.

Quadro 10 – Diretrizes gerais para a Formação Inicial de professores.

FONTE	DIRETRIZ
Brasil (2000b)	1. ^a – A escola de formação de professores para a Educação Básica deve, sempre que necessário, responsabilizar-se por oferecer aos futuros professores condições de aprendizagem dos conhecimentos da escolaridade básica, de acordo com a LDBEN e as Diretrizes Curriculares Nacionais.
	2. ^a – A seleção dos conteúdos das áreas de ensino da Educação Básica deve orientar-se por, e ir além daquilo que os professores irão ensinar nas diferentes etapas da escolaridade.
	3. ^a – Na formação de professores para a Educação Básica devem ser contemplados os diferentes âmbitos do conhecimento profissional do professor.
	4. ^a – Os conteúdos a serem ensinados na escolaridade básica devem ser tratados de modo articulado com suas didáticas específicas.
Brasil (2015)	5. ^a – “A formação de profissionais do magistério deve assegurar a base comum nacional, pautada pela concepção de educação como processo emancipatório e permanente, bem como pelo reconhecimento da especificidade do trabalho docente, que conduz à práxis como expressão da articulação entre teoria e prática e à exigência de que se leve em conta a realidade dos ambientes das instituições educativas da educação básica.” (p. 5)
	6. ^a – Deve ser garantida, ao longo do processo de formação, a efetiva relação entre teoria e prática, “ambas fornecendo elementos básicos para o desenvolvimento dos conhecimentos e habilidades necessários à docência.” (p. 11)

Fonte – (BRASIL, 2000b, 2015).

Mediante tantas responsabilidades e complexidades – expressas em tais diretrizes – que a Formação Inicial possui para com a formação de professores, então, torna-se necessário/oportuno realizar pesquisas que investiguem essa primeira etapa/fase de formação. Devido ao interesse da presente pesquisa sobre a Formação Inicial do pedagogo, então, apresentar-se-á, na subseção seguinte, uma breve contextualização acerca dessa formação.

3.1.1 Uma breve contextualização da Formação Inicial de professores da Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental no Brasil

A Formação Inicial do professor da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental – ou, de modo equivalente, a Formação Inicial do pedagogo – ocorre nos cursos de Licenciatura em Pedagogia. A respeito da constituição/caracterização dessa formação, Mello (2000) apresenta algumas considerações a partir de uma análise histórica. Segundo essa autora, há uma ‘separação’ histórica entre a Formação de Professores ocorrida até pouco tempo no Brasil. Para a atuação na Educação Infantil e séries (anos) iniciais do Ensino Fundamental era aceita⁷ – como exigência mínima – o ‘magistério’ (denominado curso Normal) em nível Médio. Em contrapartida, para ministrar aulas nas séries (anos) finais do

⁷ A expressão ‘era aceita’ não significa que atualmente, no Brasil, todos os professores da Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental possuam curso em nível Superior. Inclusive, em vários municípios brasileiros, encontram-se professores atuando nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio sem formação em nível Superior. Outras informações a esse respeito são apresentadas na Resolução n.º 2, de 1.º de julho de 2015 (BRASIL, 2015).

Ensino Fundamental e no Ensino Médio o mínimo era (e ainda é) a formação em nível Superior (nas Licenciaturas específicas de cada área disciplinar). Esse episódio histórico – conforme a autora – ‘implicou’ na Formação Inicial de pedagogos nas Faculdades de Educação, separando-os do ‘lôcus’ das Licenciaturas que ocorriam (e ainda ocorrem, em grande parte) nos departamentos específicos (Matemática, Biologia, História, Letras, Filosofia, etc.). Tal separação ‘implicou’ numa “identidade pedagógica esvaziada de conteúdo” aos pedagogos. A esse respeito, Mello (2000) aponta:

Não é justificável que um jovem recém-saído do ensino médio possa preparar-se para ser professor de primeira a quarta série em um curso que não aprofunda nem amplia os conhecimentos previstos para serem transmitidos no início do ensino fundamental. Nem é aceitável a alegação de que os cursos de licenciatura “não sabem” ou “não têm vocação” para preparar professores de crianças pequenas. É também difícil de aceitar que, para lecionar até a quarta série do ensino fundamental, o professor domine os conteúdos curriculares dessas séries apenas no nível médio, enquanto para lecionar a partir da quinta em diante do ensino fundamental e médio seja necessário um curso superior de quatro anos. (MELLO, 2000, p. 99, grifo nosso)

O exposto por Mello (2000) na citação acima “choca” com a 2.^a diretriz (BRASIL, 2000b) apresentada no quadro 10. Enquanto tal diretriz propõe que a Formação Inicial possibilite ao professor aprender conteúdos que vão “além daquilo” que os docentes irão ensinar, a referida autora diz ser aceitável (pela sociedade e órgãos regulamentadores) que o pedagogo “domine os conteúdos curriculares dessas séries apenas no nível médio”. Essa aceitação indica, segundo Mello (2000), a existência de certo preconceito (e desprestígio) para com a Formação Inicial do pedagogo⁸. Ou seja, ‘parece’ que o trabalho a ser realizado com os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental é mais simples/fácil, exigindo uma formação ‘superficial’ (ideia essa não defendida na presente pesquisa). Pelo contrário, os inúmeros conhecimentos necessários à prática docente nos anos iniciais – inclusive os referentes à psicologia da criança (PIAGET, 1998b) que subsidie a compreensão das etapas de seu desenvolvimento (cognitivo, afetivo e moral) – de modo algum são simples.

Outra possibilidade de contextualizar a Formação Inicial do professor polivalente advém da análise da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) n.º 9.394 de

⁸ No presente texto, a expressão “Formação Inicial do pedagogo” é equivalente à expressão “Formação Inicial do professor polivalente”. A palavra polivalente deve-se ao fato de que tais professores são responsáveis pela abordagem da maior parte das disciplinas (Português, Matemática, História, Geografia e Ciências) que compõem o currículo dos anos iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997, 2017). As disciplinas de Artes e Educação Física, no caso do estado de São Paulo, são ministradas por docentes licenciados – em nível Superior – especificamente nessas áreas. Em relação à Educação Infantil, esse docente (também) é o responsável por todos os ‘campos de experiência’ (BRASIL, 2017) que contemplam diversas ‘noções’ (BRASIL, 1998) inerentes às diversas áreas do saber.

20/12/1996. No “TÍTULO VI – Dos Profissionais da Educação”, Artigo 62.º, encontra-se o seguinte:

Art. 62.º. A formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, em universidades e institutos superiores de educação, admitida, como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nas quatro primeiras séries do ensino fundamental, a oferecida em nível médio, na modalidade Normal. (BRASIL, 1996, grifo nosso)

O sublinhado apoia o fato apontado por Mello (2000) referente à formação mínima (em nível Médio). No entanto, a mesma lei se contradiz. Isso pode ser observado quando, no TÍTULO IX – Das Disposições Transitórias – Artigo 87.º § 4.º, afirma-se: “Até o fim da Década da Educação [2008] somente serão admitidos professores habilitados em nível superior ou formados por treinamento em serviço.” (BRASIL, 1996, grifo nosso).

‘Percebendo’ tal contradição, a ‘própria’ LDBEN inclui um ‘Regulamento’ em seu Artigo 62.º. através dos Decretos n.º 3.276 de 6/12/1999, e n.º 3.554 de 7/08/2000. O primeiro Decreto (n.º 3.276) denota, inicialmente, em seu Artigo 3.º.:

§ 2.º A formação em nível superior de professores para a atuação multidisciplinar, destinada ao magistério na educação infantil e nos anos iniciais do ensino fundamental, far-se-á exclusivamente em cursos normais superiores. (BRASIL, 1999, grifo nosso)

Contudo, tal inciso é posteriormente alterado por meio de um segundo Decreto (n.º 3.554):

§ 2.º A formação em nível superior de professores para a atuação multidisciplinar, destinada ao magistério na educação infantil e nos anos iniciais do ensino fundamental, far-se-á, preferencialmente, em cursos normais superiores. (BRASIL, 2000a, grifo nosso)

As palavras sublinhadas nas duas últimas citações evidenciam as discordâncias acerca da Formação Inicial do pedagogo. Em um momento aceita-se a formação mínima em nível Médio, incluindo-se, em seguida, um ‘Regulamento’ – Decreto n.º 3.276 – que exige *exclusivamente* a Formação Inicial no Curso Normal Superior. Depois, retira-se tal exclusividade deixando que tal formação ocorra *preferencialmente* no referido curso através do Decreto n.º 3.554. Mesmo em um contexto contraditório, parece que – pelo menos no âmbito legal – há esforços em/para promover a Formação Inicial do professor polivalente em nível Superior. No entanto, a exigência de tal formação em nível Superior (embora necessária)

pode não garantir a excelência da formação devido aos problemas apontados na subseção anterior.

Dentre vários problemas, na subseção seguinte discutir-se-á o problema do modelo da racionalidade técnica quando utilizado na estruturação dos cursos de Formação Inicial de professores. Faz-se oportuno destacar que esse modelo de formação ainda estrutura considerável parte dos cursos de Licenciatura das diversas áreas do saber (Matemática, Geografia, Biologia, etc.), inclusive a Licenciatura em Pedagogia.

3.1.2 O modelo da racionalidade técnica na Formação Inicial de professores

A Formação Inicial de professores – assim como as outras etapas/fases de formação – é pensada/organizada considerando-se determinada base epistemológica e/ou filosófica. Diferentes bases epistemológicas e/ou filosóficas dão ‘suporte’ a diferentes modelos de formação de professores (ou modelos de racionalidade). Dentre alguns, observa-se o modelo da racionalidade técnica enquanto um modelo ‘estruturador’/‘organizador’ dos cursos de graduação (inclusive os de Licenciatura). Antes da discussão sobre tal modelo – e os problemas que o mesmo traz à Formação (Inicial) de professores – faz-se pertinente destacar o que se entende por racionalidade.

A racionalidade – em seu caráter pragmático – pode ser considerada como uma atividade metódica e sistemática que possibilita atingir determinado objetivo (fim) através de determinadas estratégias (meios). Por exemplo, ao atuar em sala de aula o professor ‘vale-se’ de uma racionalidade que lhe possibilita atingir determinado objetivo (por exemplo, abordar o conceito de função) por meio da execução de determinada(s) estratégia(s) (por exemplo, por meio de situações problema). Nesse sentido, Silveira (2008, p. 1117) destaca que uma característica essencial da racionalidade é “a subordinação dos meios aos fins, expressa pelo cálculo utilitário empreendido pelos atores com vista da obtenção otimizada – eficiente e eficaz – do objetivo, meta, ou projeto futuro externo a eles próprios.”. Logo, toda ação humana metódica e sistemática, com vistas à execução de determinado objetivo (fim), subjaz uma racionalidade.

A racionalidade técnica – de base epistemológica pautada na filosofia positivista – acredita que os problemas práticos (do cotidiano e ou das atividades profissionais) podem ser resolvidos, exclusivamente, por meio da aplicação de técnicas provenientes da ciência básica. Para o positivismo,

só é possível conhecer através da observação e raciocínio, assim como, conhecendo [as teorias científicas] se torna possível controlar a realidade. A capacidade de explicação e previsão do positivismo possibilitaria a tomada de decisões educativas racionais e, por conseguinte, o aprendizado na teoria bastaria [ou seja, seria uma condição suficiente] para a atividade prática [ou seja, o ‘fazer’ docente em sala de aula]. (COSTA, 2015, p. 2)

Assim, conhecer a teoria científica (e as técnicas derivadas dessa) é suficiente para resolver – de modo eficiente e eficaz – todos os problemas advindos das atividades práticas (cotidianas e ou profissionais). Conforme o positivismo, a ciência – devido à sua capacidade de explicação e previsão – capacita o sujeito a tomar decisões racionais que lhe possibilita resolver todos os problemas práticos. Neste ponto, faz-se necessário destacar que a presente investigação considera a importância da teoria à explicação dos diversos fenômenos (inclusive o educacional); no entanto, não se aceita a ideia defendida pelo positivismo na qual a prática se subordina à teoria. O presente trabalho (tese) entende que teoria e prática devem estabelecer, entre si, uma relação dialética; dialética no sentido atribuído por Piaget et al. (1996), isto é, enquanto construção de novas interdependências entre dois ‘sistemas’.

Em relação à utilização do modelo da racionalidade técnica na ‘estruturação’ dos cursos universitários, Fiorentini et al. (1988) expõem o seguinte:

Os cursos de licenciatura, como os demais cursos das universidades brasileiras, seguem, de modo geral, o modelo da “racionalidade técnica” (Schön, 1987), pelo qual as disciplinas de conteúdos específicos são ministradas antes daquelas de cunho pedagógico, em momentos distintos do curso e, via de regra, ficando a parte prática ao final dele, quando a maioria dos conteúdos já foi estudado. Nesse modelo (da racionalidade técnica) está compreendida a compreensão de que, conhecendo a parte teórica, o indivíduo pode melhor apreender a técnica (neste caso, as estratégias/procedimentos de ensino e aprendizagem) para utilizá-la na solução de problemas, no desempenho de sua função profissional, pois os professores estariam “instrumentalizados” para resolvê-los. (FIORENTINI et al., 1998, p. 114, grifo nosso)

Tal citação refere-se à concepção ‘3+1’ que ‘estrutura’ grande parte dos cursos de graduação no Brasil, inclusive os de Licenciatura. Essa concepção prioriza nos três (ou quatro) primeiros anos do curso a exclusiva (ou quase exclusiva) abordagem dos conteúdos específicos provenientes da ciência básica e aplicada (Matemática, Português, Física, etc.); já as disciplinas pedagógicas referentes ao ‘como’ ensinar e ao estágio acabam ficando para o último ano⁹. Essas ordenações e distribuições (de carga horária) das disciplinas advêm da

⁹ No caso do curso de Pedagogia, o modelo da racionalidade técnica é observado quando se prioriza, nos três primeiros anos do curso, a abordagem das disciplinas específicas (Psicologia da Aprendizagem e do Desenvolvimento, Didática Geral e Específica, Sociologia/Filosofia/História da Educação, Legislação Educacional, etc.). Já as disciplinas Prática(s) de Ensino e Estágio Supervisionado ocorrem no último ano do

ideia de que os conteúdos específicos (a teoria) são os mais importantes à Formação Inicial de professores, ficando o estágio e as disciplinas pedagógicas relacionadas ao ‘como’ ensinar (ou seja, à atividade ‘prática’) para o final do curso, e em menor quantidade (de carga horária), por constituírem questões de mais simples abordagem e menor importância. Tal fato evidencia a superioridade da teoria em relação à prática e a existência de uma dicotomia entre ambas; superioridade e dicotomia essas que acabam por conceber o trabalho do professor como o de um simples ‘técnico’, cuja aplicação das técnicas provenientes da ciência é suficiente para resolver (todos) os problemas oriundos da prática profissional docente.

Colaborando com a discussão a respeito da superioridade da teoria e da dicotomia entre teoria e prática – observada no modelo da racionalidade técnica – Mizukami et al. (2006) argumentam:

O modelo da racionalidade técnica a vê [a Formação Inicial] como momento por excelência da formação profissional, no qual se dá a apropriação do conhecimento profissional a ser aplicado à futura atuação. [...] Essa visão estabelece que a ordem de importância vai da ciência básica à ciência aplicada e a ordem de aplicação é também uma ordem de dependência: a ciência aplicada é apoiada no fundamento da ciência básica. E quanto mais básico e mais geral o conhecimento, mais alto o status de seu produtor. Tudo isso repercute na organização curricular dos cursos de formação profissional, em que a regra é: primeiro, a ciência básica e aplicada e, só então, as habilidades de aplicação destas aos problemas do mundo real na prática. Esse autor **[a autora refere-se a Edgar Schein citado por Schön]** entende ainda que, do ponto de vista do modelo da racionalidade técnica, institucionalizada no currículo profissional, o verdadeiro conhecimento reside nas teorias e técnicas da ciência básica e aplicada. Por isso, essas disciplinas deverão vir primeiro. Habilidades no uso da teoria e da técnica deverão vir depois, ou seja, quando o estudante tiver aprendido a ciência relevante. Isso ocorre por duas razões: primeiro, porque ele só consegue aprender habilidades de aplicação depois de ter aprendido o conhecimento aplicável e, segundo, porque habilidades são consideradas modos de conhecimento ambíguos e secundários (se é que podem ser chamados conhecimentos). (MIZUKAMI et al., 2006, p. 19, grifo nosso, **[comentário nosso]**)

Ao defender que a aprendizagem dos conteúdos específicos (advindos das ciências básica e aplicada) basta à ‘plena’ atuação do professor em sala de aula, o modelo da racionalidade técnica acaba concebendo a Formação Inicial de professores como a mais importante, pois é durante essa primeira etapa/fase de formação na qual ocorre (em grande parte) a aprendizagem dos referidos conteúdos específicos. Uma possível justificativa a tal fato – ou seja, a ideia de suficiência das ciências básica e aplicada à ‘plena’ resolução dos problemas advindos da atividade profissional (docente) – deve-se ao modo como o modelo da racionalidade técnica compreende o conhecimento profissional do professor:

curso – após a aprendizagem da teoria (abordada nas disciplinas específicas) – dificultando, por conseguinte, o estabelecimento de relação/integração entre essas últimas e as disciplinas específicas.

O conhecimento profissional é concebido como um conjunto de fatos, princípios, regras e procedimentos que se aplicam diretamente a problemas instrumentais. Essa concepção **[da racionalidade técnica]** é compatível com a visão do saber escolar como um conhecimento que os professores possuem e que deve ser transmitido aos alunos. O saber escolar, privilegiado em detrimento do conhecimento do aluno, é entendido como verdadeiro, molecular – no qual peças isoladas podem ser agrupadas de maneira a compor um conhecimento mais avançado – e categorial. A estratégia de ensino baseada no saber escolar é análoga à estratégia e à concepção de conhecimento segundo o qual o professor é um técnico especialista que aplica com rigor as regras que derivam do conhecimento científico. (MIZUKAMI et al., 2006, p. 13-14, grifo nosso, **[comentário nosso]**)

Não se nega a importância da(s) técnica(s) à constituição do conhecimento profissional do professor. O problema é reduzir esse conhecimento a “um conjunto de fatos, princípios, regras e procedimentos que se aplicam diretamente a problemas instrumentais”. Isso, pois a prática pedagógica – enquanto prática social – apresenta situações que vão além das questões instrumentais, o que implica na insuficiência deste modelo (racionalidade técnica) à Educação. A respeito dessa insuficiência, Mizukami et al. (2006) apresentam dois motivos:

Em primeiro lugar, porque qualquer situação de ensino é incerta, única, variável, complexa e portadora de um conflito de valores na definição de metas e na seleção dos meios. Em segundo lugar, porque não existe uma teoria científica única e objetiva que permita identificação unívoca de meios, regras e técnicas a utilizar na prática, uma vez identificado o problema e esclarecidas as metas. (MIZUKAMI et al., 2006, p. 15, grifo nosso)

Por ser a Educação (e a Formação Inicial de professores) uma área caracterizada pela incerteza, instabilidade, singularidade, conflito de valores, etc., o modelo da racionalidade técnica – pautada na investigação positivista e que se mostra contrária a tais características – torna-se inadequada à Educação. Ainda sobre essa inadequação, Castro (2003) pontua:

Os componentes que norteiam o racionalismo buscam assegurar o conhecimento do conteúdo a ensinar e a forma de atuação eficaz em sala de aula (GÓMEZ Apud NÓVOA, 1992, p. 98). São componentes que fornecem maneiras de operacionalizar o ensino, mas não dão conta do processo de ensino-aprendizagem efetiva, levando os licenciados a desenvolverem maneiras próprias de ser professor de matemática. Nesse sentido, o racionalismo e o cientificismo deixam lacunas na formação profissional do professor de matemática. [...] É um dos limites da racionalidade técnica: não perceber a realidade social que não se encaixa em princípios, leis e teorias preestabelecidas. [...] O problema, nesse sentido, está em aplicar um conhecimento instrumental, técnico e pré-determinado em contextos humanos. (CASTRO, 2003, p. 30, grifo nosso)

O problema do modelo da racionalidade técnica é querer impor o seu método – pensado para as ciências naturais e exatas – para as ciências humanas e sociais. Ciências essas

(caracterizadas pela incerteza, unicidade, conflito de valores, etc.) que não se adequam, exclusivamente, ao modo de tratamento ‘previsível’ e ‘estatístico’ preconizado por tal modelo.

Outros dois ‘grandes’ problemas advindos da utilização do modelo da racionalidade técnica (aplicacionista) na Formação Inicial de professores são apresentados por Tardif (2000):

Primeiro problema: ele é idealizado segundo uma lógica disciplinar e não segundo uma lógica profissional centrada no estudo das tarefas e realidades do trabalho dos professores. [...] Os conhecimentos proposicionais sobre o ensino baseados na lógica disciplinar, conhecimentos esses veiculados durante a formação, constituem, portanto, uma falsa representação dos saberes dos profissionais a respeito de sua prática.

[...]

Segundo problema: esse modelo trata os alunos como espíritos virgens e não leva em consideração suas crenças e representações anteriores a respeito do ensino. Ele se limita, na maioria das vezes, a fornecer-lhes conhecimentos proposicionais, informações, mas sem executar um trabalho profundo sobre os filtros cognitivos, sociais e afetivos através dos quais os futuros professores recebem e processam essas informações. [...] Na verdade, eles [os alunos da Licenciatura] terminam sua formação sem terem sido abalados em suas crenças, e são essas crenças que vão se reatualizar no momento de aprenderem a profissão na prática, crenças essas que serão habitualmente reforçadas pela socialização na função de professor e pelo grupo de trabalho nas escolas, a começar pelos pares, os professores experientes. (TARDIF, 2000, p. 19-20, grifo nosso, **[comentário nosso]**)

Em decorrência de ambos os problemas citados por Tardif (2000) – ou seja, a) os conhecimentos proposicionais sobre o ensino não condizerem com os saberes profissionais necessários à atuação docente; b) a não consideração das crenças e representações já construídas pelos licenciandos em sua trajetória escolar –, comumente escutam-se falas do tipo (dentre os professores formados no modelo de racionalidade técnica): “— Ah, o que eu aprendi na faculdade não tinha muito a ver com o que eu tenho que fazer na sala de aula!”; “— Grande parte dos assuntos que meus professores da Licenciatura diziam não são possíveis de serem utilizados na minha prática, a realidade escolar é outra!”. Tais afirmações acabam implicando – na maioria das vezes – no descrédito acerca da Formação Inicial, levando o professor a acreditar que teoria e prática não ‘conversam’ entre si; o que colabora à ‘continuação’ da dicotomia entre as mesmas (teoria e prática).

Ainda sobre a citação anterior – e considerando o trecho sublinhado – faz-se oportuno destacar a importância da Formação Inicial se configurar em uma experiência ‘radical’ que possibilite ao estudante alterar as suas crenças (e representações, concepções, atitudes, etc.) já construídas sobre o ensino. Tais alterações/(re)significações/reflexões são necessárias, pois essas crenças serão ‘reatualizadas’ e utilizadas no/durante o exercício profissional. E é

justamente nesta direção – isto é, a da (re)significação dos saberes da experiência pré-profissional de licenciandas em Pedagogia – que intenta a presente investigação.

David e Moreira (2005) ressaltam que ‘outro’ problema do modelo da racionalidade técnica (quando utilizado na ‘estruturação’ da Formação Inicial de professores) é a não integração entre as disciplinas específicas e as pedagógicas, implicando numa ‘absolutização’ do conteúdo específico. Os autores afirmam que as disciplinas das ciências da Educação acabam sendo consideradas como ‘apenas’ um meio de auxiliar o licenciando na construção de técnicas para a transmissão dos conteúdos específicos, tendo, assim, menor importância.

A partir das discussões realizadas nesta subseção é possível concluir que o modelo da racionalidade técnica ‘caminha contra’ os princípios subjacentes à Formação de Professores (e Inicial) – denotados no quadro 9. Isso se deve, pois tal modelo: a) ‘favorece/produz’ a dicotomia entre teoria e prática; b) despreza os conhecimentos prévios trazidos pelos licenciandos; c) defende a supremacia dos saberes específicos em detrimento dos saberes pedagógicos relacionados ao ‘como’ ensinar. Tais problemas acabam por dificultar a ocorrência de uma formação adequada ao enfrentamento da futura prática profissional.

Por fim, pretendendo uma possível ‘superação’ deste modelo, Fiorentini et al. (1988) denotam:

As limitações impostas pela aplicação do conhecimento científico aos problemas da prática impõem-nos uma reformulação de sua base epistemológica. Para tanto, Schön propõe-nos uma epistemologia assentada na reflexão na ação, ou seja, a superação da racionalidade técnica requer uma outra base epistemológica e, esta só pode estar assentada na reflexão na ação, pois, ao refletir na ação, encontramos soluções para o problema que se apresenta no contexto do cotidiano, e não a aplicação de uma solução estabelecida anteriormente, criada fora do contexto. (FIORENTINI, et al., 1998, p. 198-199)

A necessidade da ‘reflexão sobre a reflexão na ação’ – como defendido por Schön (2000) – subjaz ao professor o papel de pesquisador (investigador) de sua própria prática. Papel esse já pontuado por Piaget (1998a) na seção anterior e cuja importância é defendida no presente estudo. No entanto, Pimenta (2006) aponta não ser suficiente, à Formação de Professores, a ocorrência dessa reflexão realizada individualmente pelo docente em sua prática profissional. Sem o auxílio da teoria e da discussão coletiva na/durante a reflexão, a epistemologia da prática (ou da reflexão na ação) pode desencadear um praticismo e uma desvalorização da formação acadêmica. Embora essa epistemologia proposta por Schön (2000) seja importante, a reflexão deve ocorrer sob a perspectiva teórico-prática

contemplando a coletividade e o contexto. Segundo Costa (2017), nessa perspectiva teórico-prática o professor

passa a ser visto enquanto emancipado, no qual sua reflexão crítica e coletiva possa proporcionar uma transformação política, uma mudança institucional e social. O exercício da reflexão na atividade docente indica o caminho para superação deste “tecnicismo” propondo que o professor em sua prática reflexiva produz conhecimento e não apenas executa ordens/tarefas. (p. 3-4)

Pimenta (2006) propõe, então, a passagem da ideia de professor reflexivo para a de um ‘intelectual’ crítico reflexivo, observando-se, também, a passagem da “*epistemologia da prática à práxis*; ou: da construção de conhecimentos por parte dos professores a partir da análise crítica (teórica) das práticas e da resignificação das teorias a partir dos conhecimentos da prática (práxis).” (p. 44, grifos da autora). Logo, teoria e prática passam a representar dois ‘planos’ de igual importância à Formação de Professores, cuja relação de interdependência entre as mesmas contribui: a) à melhoria da prática profissional, prática essa assentada na reflexão inserida num contexto coletivo (político, institucional e social); b) ao reconhecimento e valorização profissional do professor considerado, também, um intelectual que produz conhecimento; c) ao desenvolvimento da teoria agora situada às reais necessidades do contexto educativo.

Após a discussão a respeito do modelo racionalidade técnica (e seus problemas à Formação Inicial de professores) e uma possível superação do referido modelo, abordar-se-ão, a seguir, algumas tipologias que denotam ‘tipos’ de conhecimentos e saberes já construídos – e a serem construídos – pelo licenciando (em sua Formação Inicial) e pelo docente (ao longo de sua carreira).

3.2 Os conhecimentos e saberes docentes: algumas perspectivas tipológicas

Conforme explicitado no início da presente seção, o movimento de ‘profissionalização do ensino’ desencadeou – em vários países (Canadá, EUA, França, Inglaterra, Espanha, Portugal, Brasil, entre outros) – inúmeras pesquisas visando o estabelecimento/identificação de conhecimentos e saberes específicos/necessários ao ensino. Como ‘consequência’, foram elaboradas diversas tipologias (classificações) dos conhecimentos e saberes docentes. Dentre várias, nesta subseção serão apresentadas (sucintamente) as tipologias elaboradas por Gauthier et al. (1998), Pimenta (2008); Shulman (1986, 1987) e Tardif (2002). No entanto,

antes de denotar tais tipologias, faz-se necessário definir o que se entende por ‘conhecimento’ e ‘saber’.

Segundo Fiorentini, Souza e Melo (1998), os termos “conhecimento” e “saber” são utilizados, normalmente, sem distinção de significado nos textos educacionais. Inclusive, conforme os referidos autores, “nem os filósofos possuem uma posição clara sobre a diferenciação de significado destes termos [conhecimento e saber]” (p. 312). Mesmo neste contexto de dificuldade no que tange à diferenciação entre esses termos, tais autores denotam o seguinte:

[...] usaremos ambas as denominações [conhecimento e saber] sem uma diferenciação rígida, embora tendamos a diferenciá-las da seguinte forma: “conhecimento” aproximar-se-ia mais com a produção científica sistematizada e acumulada historicamente com regras mais rigorosas de validação tradicionalmente aceitas pela academia; o “saber”, por outro lado, representaria um modo de conhecer/saber mais dinâmico, menos sistematizado ou rigoroso e mais articulado a outras formas de saber e fazer relativos à prática não possuindo normas rígidas formais de validação. (FIORENTINI; SOUZA; MELO, 1998, p. 312)

Embora não haja uma diferenciação rígida entre “conhecimento” e “saber”, o primeiro está ‘mais próximo’ da produção científica, ou seja, da teoria; já o segundo (o saber) representa um conhecer/saber mais dinâmico e menos sistematizado construído na/para a prática (cotidiana e ou profissional). Por exemplo, o conteúdo curricular de circunferência – abordado na escola – representa um conhecimento (sistematizado) pertencente à Matemática. Já o traçado de uma circunferência¹⁰ por um pedreiro, isto é, um saber/fazer utilizado na sua prática profissional, representa um saber prático.

Nessa mesma direção/diferenciação entre conhecimento e saber, Mota, Prado e Pina (2007)¹¹ afirmam que os “conhecimentos” são constituídos pelas disciplinas científicas, “seus métodos de pesquisa, seus resultados e fracassos, seus caminhos não lineares, mas que vão contribuindo para a emergência de um *corpus* de conhecimento que vai sendo sistematizado e acumulado ao longo da história, compondo uma das dimensões da herança cultural.” (p. 127, grifo dos autores). Já os saberes – que representam outra dimensão da herança cultural – são definidos enquanto um conjunto de práticas sociais, “que não chegam à sistematização, mas orientam nossos juízos e muitas de nossas ações cotidianas.” (p. 127). Ou seja, o saber é

¹⁰ Talvez o pedreiro não tenha consciência (no sentido apresentado na subseção 2.2 a respeito da tomada de consciência) de que o desenho traçado denomina-se circunferência e que essa possui uma definição (formal/sistematizada) geométrica. No entanto, o não conhecimento da definição de circunferência (bem como dessa denominação) não o impede de traçar uma forma geométrica que representa uma circunferência.

¹¹ Mota, Prado e Pina (2007) valem-se das ideias a respeito de “conhecimento” e “saber” (e uma possível diferenciação) retiradas do texto intitulado “Aula como conhecimento”, de autoria de João Wanderley Geraldi.

definido como sendo um produto das práticas sociais e o conhecimento como sendo uma organização (sistemática e racional) desse produto das práticas sociais.

Visando a não dicotomia entre o conhecimento e o saber, inclusive quando considerados no contexto educativo, os referidos autores expõem o seguinte:

A verdade das ciências teóricas, dos conhecimentos (“verdade da realidade”) é colocada à prova, quando posta em movimento, em ação numa dada realidade/contexto multifacetado por vários condicionantes sociais, políticos, econômicos, culturais, afetivos, entre outros. A partir dessa situação e relação entre teorias e práticas, “verdades” e “realidades”, produzimos saberes a partir dos conhecimentos em contato com a realidade da prática educativa e pedagógica, ou seja, o contexto da prática docente, e produzimos conhecimentos outros a partir dos saberes produzidos nesta realidade, quando os sistematizamos conceitualmente e os divulgamos: Afinal, o *conhecimento* é a especialização do *saber*. (MOTA; PRADO; PINA, 2007, p. 125-126, grifos dos autores)

Conforme a referida citação, entre o conhecimento e o saber há uma relação de interdependência no que se refere à construção dos mesmos. Assim, não há a supremacia de um em relação ao outro – no sentido de mais prestígio/maior *status* – sendo o conhecimento e o saber duas “formas e resultados de se relacionar com a “realidade”. Formas de dizer, de pensar. De ser e de estar no mundo e com o mundo.” (MOTA; PRADO; PINA, 2007, p. 126).

Assim, na presente pesquisa são consideradas as definições expostas acima para os termos “conhecimento” e “saber”. Mesmo na impossibilidade de uma rígida diferenciação tendo em vista o movimento interdependente entre o conhecimento e o saber, considera-se o “conhecimento” como uma construção coletiva humana sistematizada e ‘mais próxima’ da teoria; já o saber enquanto um conhecer/saber/fazer construído na/para a prática social (cotidiana e ou profissional). No caso dos professores, os saberes docentes construídos na/durante a prática pedagógica ‘alimentam-se’ de diversos conhecimentos (científicos); inclusive, os conhecimentos historicamente acumulados e sistematizados nas mais diversas áreas tornam-se objeto de ensino a serem abordados pelo docente em sala de aula.

‘Findada’ esta diferenciação (não tão rígida) entre o “conhecimento” e o “saber”, inicia-se a apresentação de algumas tipologias de conhecimentos e saberes docentes. No entanto, faz-se oportuno destacar que tal diferenciação (adotada na presente tese) não é observada, de modo ‘exemplar’, nas tipologias apresentadas a seguir. Este fato vem de encontro com o já destacado sobre a dificuldade de diferenciação de significados entre os termos “conhecimento” e “saber”.

A primeira tipologia considerada é de elaboração de Gauthier et al. (1998). Esses autores destacam a importância de se constituir um “repertório de conhecimentos” específicos

(e necessários) ao ensino. Tal ‘repertório’ – segundo a sociologia das profissões – representa uma condição fundamental à profissionalização do ensino e, por conseguinte, ao reconhecimento e valorização do trabalho desenvolvido pelo docente. No entanto, segundo os pesquisadores, é preciso superar duas ideias tradicionais que não favorecem essa profissionalização, a saber: 1.^a “Um ofício¹² sem saberes”; 2.^a “Saberes sem ofício”. A primeira refere-se ao fato de não ter havido, ainda, uma formalização/sistematização – de modo a constituir um “*corpus*” – dos saberes necessários à execução do ofício (ensino) realizado pelo professor em sala de aula. Como implicações dessa ainda não formalização/sistematização, surgem algumas ‘cegueiras conceituais’/ideias equivocadas a respeito do ensino, tais como: “Basta conhecer o conteúdo [para ensinar]!”, “Basta ter talento [para ensinar]!”, “Basta ter bom senso [para ensinar]!”, “Basta seguir a sua intuição [para ensinar]!”, “Basta ter experiência [para ensinar]!” e “Basta ter cultura [para ensinar]!”.

A segunda ideia – “Saberes sem ofício” – diz respeito à formalização do ensino reduzindo-o “[...] de tal modo a sua complexidade que ele não mais encontra correspondente na realidade.” (GAUTHIER et al., 1998, p. 25). Ou seja, os pesquisadores (universitários) propõem conhecimentos e saberes específicos ao/para o ensino sem considerar as particularidades/características inerentes ao concreto exercício do ensino. Logo, os “saberes” propostos não se adequam ao ensino (ofício) a ser desenvolvido pelo docente em sala de aula.

Neste ponto – e considerando a discussão realizada na subseção anterior – pode-se inferir que tanto a ‘cegueira conceitual’ (“Basta conhecer o conteúdo!”) quanto a “formalização do ensino reducionista” (no sentido apresentado no parágrafo anterior) encontram subsídio no modelo da racionalidade técnica. Isso se deve, pois tal modelo acredita: a) na suficiência do conhecimento científico (específico) ao/para o ensino; b) na suficiência das técnicas (derivadas das ciências básica e aplicada) ao tratamento dos problemas advindos da prática docente.

Assim, visando superar tais problemas – “Um ofício sem saberes” e “Saberes sem ofício” – que dificultam a profissionalização do ensino, Gauthier et al. (1998, p. 28) propõem “Um ofício feito de saberes”. Para tanto, os autores denotam a necessidade de se constituir/sistematizar um tipo de ‘reservatório de saberes’ “[...] no qual o professor se

¹² Gauthier et al. (1998) não apresentam, explicitamente, o significado (a definição) do termo “ofício”. No entanto, a utilização desse termo em várias partes do texto/livro indica o ofício como uma atividade, do tipo profissional, realizada pelo homem; no caso do professor o ensino é seu ofício. Eis um trecho no qual tal indício ocorre: “O ensino é um ofício universal. E esse ofício [o ensino] não somente possui uma longa história, [...], mas tem um papel fundamental em nossas sociedades contemporâneas. Ora, embora ensinar seja um ofício exercido em quase todas as partes do mundo, [...] ainda se sabe muito pouco a respeito dos fenômenos que lhe são inerentes.” (p. 17).

abastece para responder a exigências específicas de sua atuação concreta de ensino.”. O quadro 11, a seguir, apresenta uma parte¹³ do referido ‘reservatório de saberes’ no qual o professor ‘se abastece’ para agir na sala de aula (e na escola).

Quadro 11 – Tipologia elaborada por Gauthier et al.

RESERVATÓRIO DE SABERES	DETALHAMENTO
saberes disciplinares (a matéria)	Referem-se aos saberes produzidos pelos pesquisadores e cientistas nas diversas disciplinas científicas (Matemática, Química, Física, Biologia, Geografia, etc.). “Conhecer a matéria”, no entanto, ‘assume’ alguns aspectos questionadores, a saber: a necessidade de conhecer a estrutura da disciplina; conhecer a história, o contexto e a ordem de surgimento dos conceitos. Segundo Gauthier et al. (1998), os professores não produzem esse tipo de saber, mas ao se apropriarem do mesmo impõe uma série de transformações para ‘transmitir a matéria’.
saberes curriculares (o programa)	Referem-se às inúmeras transformações pelas quais as disciplinas ‘sofrem’ visando torná-las um programa de ensino. A escola seleciona e organiza certos saberes produzidos pelas Ciências e os transforma em um ‘corpus’ que será ensinado nos programas escolares. “Conhecer o programa”, entretanto, implica alguns questionamentos, tais como: Quais transformações do programa o professor faz?; Qual(s) critério(s) o docente adota para tal transformação?; etc.
saberes das ciências da Educação	Referem-se aos conhecimentos profissionais que não ajudam diretamente o professor a ensinar, mas que informam vários aspectos de seu ofício ou da Educação de modo geral. Por exemplo: noções relativas ao sistema escolar; o significado de conselho escolar; o desenvolvimento da criança; a diversidade cultural; etc. Tais saberes permeiam a maneira de o professor ‘existir profissionalmente’.
saberes da tradição pedagógica (o uso)	São os saberes que alunos já têm construído – durante a Educação Básica – acerca do significado do ‘saber dar aula’. “Nessa perspectiva, cada um tem uma representação da escola que o determina antes mesmo de ter feito um curso de formação de professores, na universidade.” (GAUTHIER et al., 1998, p. 32).
saberes experienciais (a jurisprudência particular)	São os saberes construídos pelo professor durante/na atuação na sala de aula e na escola de modo geral. Possuem como característica a particularidade do docente, contudo, é um saber limitado pelo fato ser constituído por pressupostos e argumentos que não foram verificados através de métodos científicos. É um saber que permanece ‘confinado’ na sala de aula.
saberes da ação pedagógica (o repertório de conhecimento do ensino ou a jurisprudência pública validada)	“O saber da ação pedagógica é o saber experiencial dos professores a partir do momento em que se torna público e que é testado através das pesquisas realizadas em sala de aula. Os julgamentos dos professores e os motivos que lhes servem de apoio podem ser comparados, avaliados, pesados, a fim de estabelecer regras de ação que serão conhecidas e aprendidas por outros professores.” (GAUTHIER et al., 1998, p. 33) Segundo os autores, esse saber é o mais necessário à profissionalização do ensino.

Fonte – (GAUTHIER et al., 1998).

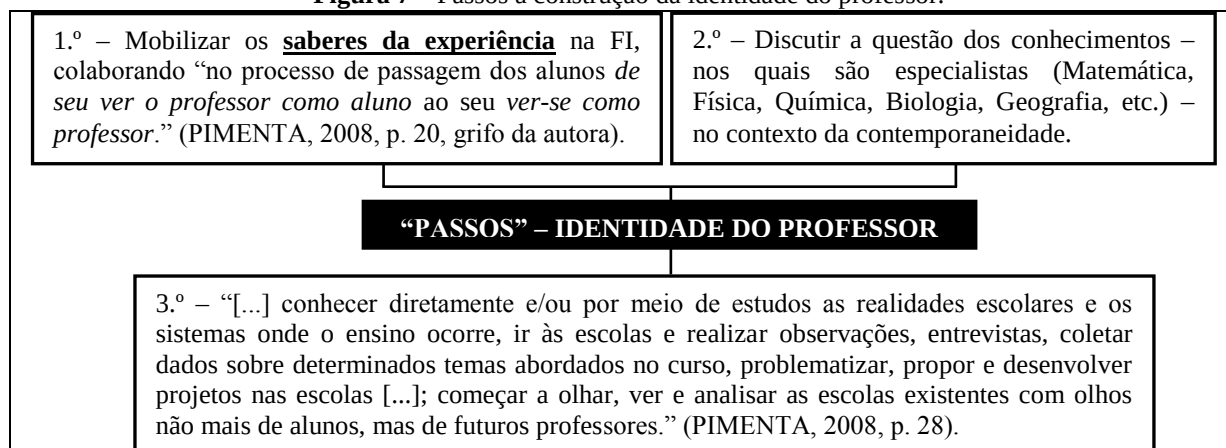
Segundo os autores, de todos os saberes expostos no quadro 11, os ‘saberes da ação pedagógica’ ainda são os menos desenvolvidos dentre os classificados no ‘reservatório de saberes’. A esse respeito, Gauthier et al. (1998) argumentam:

¹³ A expressão “uma parte” deve-se ao fato de que o quadro 11 apresenta uma parcela, já sistematizada/inventariada, dos saberes no qual o docente ‘se abastece’ para ensinar. O desenvolvimento de outras pesquisas, que investiguem (e sistematizem) os saberes docentes construídos na/para a prática docente (real), possibilitará a classificação de outros saberes que comporão o referido reservatório.

Ora, para profissionalizar o ensino é essencial identificar saberes da ação pedagógica válidos e levar os outros atores sociais a aceitar a pertinência desses saberes. A profissionalização do ensino tem, desse modo, não somente uma dimensão epistemológica, no que diz respeito à natureza dos saberes envolvidos, mas também uma dimensão política, no que se refere a êxito de um grupo social em fazer com que a população aceite a exclusividade dos saberes e das práticas que ele detém. (GAUTHIER et al., 1998, p. 34, grifo nosso)

Uma segunda tipologia é proposta por Pimenta (2008), cuja preocupação inicial era com a construção da identidade profissional dos licenciandos em formação. A experiência docente da referida autora – enquanto professora de Didática para alunos de diferentes Licenciaturas da Universidade de São Paulo (USP) – e os resultados advindos das pesquisas acerca da Formação de professores permitiram-lhe verificar a imprescindibilidade dos licenciandos (re)significarem os seus saberes (e conhecimentos) durante a Formação Inicial. Valendo-se dos saberes necessários à docência – na qual a ‘prática pedagógica’ e ‘docente escolar’ são consideradas o ‘ponto de partida’ e o ‘de chegada’ na/para a formação – Pimenta (2008) propõe três ‘passos’ importantes à construção da identidade do (futuro) professor na Formação Inicial. Tais passos apresentam-se na figura a seguir:

Figura 7 – Passos à construção da identidade do professor.



Fonte – (PIMENTA, 2008).

Os referidos saberes necessários à docência que compõem a tipologia elaborada por Pimenta (2008) apresentam-se sintetizados no seguinte quadro:

Quadro 12 – Tipologia elaborada por Pimenta.

SABERES DA DOCÊNCIA	DETALHAMENTO
a experiência	São os saberes advindos da experiência construídos em dois níveis: 1.º – Saberes que os licenciandos já adquiriram sobre ‘o que é ser professor’ durante a Educação Básica. 2.º – Saberes produzidos no cotidiano docente construídos num processo permanente de reflexão sobre sua prática mediatizada pela de outrem (colegas, textos de outros educadores).

o conhecimento	São os conhecimentos específicos da área de atuação do professor e para o ensino (Matemática, Química, Física, Biologia, Ciências da Educação, Psicologia, etc.)
saberes pedagógicos	São os saberes advindos do enfrentamento das necessidades pedagógicas postas pelo cotidiano escolar. É o saber construído pelo professor no cotidiano do seu trabalho e que fundamenta a sua ação. Tal saber possibilita o docente interagir com seus alunos na sala de aula e no contexto da escola onde atua. “A prática docente é, simultaneamente, expressão desse saber pedagógico construído e fonte de seu desenvolvimento.” (p. 43).

Fonte – (PIMENTA, 2008).

Uma terceira tipologia é apresentada por Shulman (1986, 1987). Esse autor – visando contribuir na construção de um ‘corpo’ de conhecimento ‘sólido’ para o ensino – desenvolve um ‘programa de pesquisa’ denominado ‘*knowledge base*’ (base de conhecimento para o ensino). Tal ‘base’, segundo o referido pesquisador, constrói-se gradualmente a partir de quatro ‘fontes’: a) ‘conhecimento acadêmico dos conteúdos das disciplinas’ (a ensinar); b) ‘estruturas e materiais educativos’; c) ‘conhecimento acadêmico da Educação formal’ (o conhecimento pedagógico sistematizado nas diversas dimensões: psicológica, filosófica, curricular, sociológica, histórica, metodológica, etc.); d) ‘sabedoria da prática’ (a fonte menos codificada de todas).

O quadro abaixo, deste modo, apresenta os conhecimentos advindos das referidas fontes e que compõem a ‘base de conhecimento para o ensino’:

Quadro 13 – Tipologia elaborada por Shulman.

BASE DE CONHECIMENTO PARA O ENSINO	DETALHAMENTO
conhecimento do conteúdo de ensino (específico)	São as compreensões do professor acerca da estrutura da disciplina, como o mesmo organiza cognitivamente o conhecimento da matéria a ser objeto de ensino. Para compreender a estrutura de uma disciplina, o professor precisa conhecer – além de fatos e conceitos intrínsecos a mesma (conhecimento substantivo) – as formas pelas quais os princípios fundamentais de uma área estão organizados, os processos de sua produção, representação e validação epistemológica (conhecimento sintático).
conhecimento pedagógico geral	São os conhecimentos que transcendem o domínio de uma área específica, incluindo os conhecimentos de objetivos, metas e propósitos educacionais. Também se referem aos conhecimentos referentes ao ‘manejo’ da classe e interação com os alunos, ao modo como os alunos aprendem, às estratégias instrucionais, ao processo de ensino e aprendizagem.
conhecimento pedagógico do conteúdo	São os modos de formular e apresentar os conteúdos de forma a torná-los compreensíveis aos alunos, incluindo exemplos, ilustrações, analogias, demonstrações, explanações, etc. Está incluído o entendimento (do professor) do que facilita ou dificulta a aprendizagem de determinado conteúdo, bem como as concepções errôneas dos alunos e suas implicações na aprendizagem. É o único conhecimento no qual o professor é o protagonista, pois advém da sua atuação profissional.
conhecimento do currículo	Representa o currículo, ou seja, o conjunto de programas elaborados para o ensino de assuntos específicos em um dado nível (Educação Infantil, Ensino Fundamental/Médio, Ensino Técnico, Ensino Superior). Incluem-se, também, os materiais instrucionais disponíveis referentes aos programas.
conhecimento dos alunos e de suas características	Refere-se a um conhecimento específico a um dado contexto (sala de aula), sendo diferente (mutável) a cada contexto.

conhecimento dos contextos educacionais	São os conhecimentos advindos dos trabalhos em grupo ou em sala de aula. Tais conhecimentos variam conforme o governo, aspectos culturais e características da comunidade na qual a escola está situada.
conhecimento dos fins, propósitos e valores educacionais	Refere-se à compreensão de como os aspectos histórico-filosóficos – desenvolvidos ao longo da história – articulam-se com as finalidades, objetivos e valores que foram, e estão sendo, definidos e adotados pelas instituições de ensino conforme o momento social e cultural.

Fonte – (SHULMAN, 1986, 1987).

Uma quarta tipologia é proposta por Tardif (2002). A mesma advém de um trabalho de síntese envolvendo pesquisas empíricas¹⁴ – realizadas com professores de escolas primárias e secundárias – e questões teóricas acerca da natureza dos saberes mobilizados pelos docentes na prática pedagógica. A respeito de tais saberes, o autor argumenta:

Na realidade, no âmbito dos ofícios e profissões, não creio que se possa falar do saber sem relacioná-lo com os condicionantes e com o contexto do trabalho: o saber é sempre o saber de alguém que trabalha alguma coisa no intuito de realizar um objetivo qualquer. Além disso, o saber não é uma coisa que flutua no espaço: o saber dos professores é o saber *deles* e está relacionado com a pessoa e a identidade deles, com a sua experiência de vida e com a sua história profissional, com as suas relações com os alunos em sala de aula e com os outros atores escolares na escola, etc. Por isso, é necessário estudá-lo relacionando-o com esses elementos constitutivos do trabalho docente. (TARDIF, 2002, p. 11, grifo do autor)

Nessa perspectiva, o saber do professor ‘situa-se’ na interface entre o individual e o social, estando (o saber) ‘a serviço’ do trabalho docente. Como fundamento às suas proposições sobre o saber docente, Tardif (2002) vale-se dos seguintes ‘fios condutores’ utilizados para ‘situar’ o saber do professor: a) **saber e trabalho**: o saber do professor deve ser compreendido em íntima relação com o seu trabalho na sala de aula (e na escola); b) **diversidade do saber**: o saber dos professores é plural, compósito, heterogêneo, envolvendo – no próprio exercício do trabalho – conhecimentos e um saber-fazer bastante diversos; c) **temporalidade do saber**: o saber do professor é plural e também temporal, sendo adquirido no contexto de uma história de vida e de carreira profissional; d) **a experiência de trabalho enquanto fundamento do saber**: é na experiência de trabalho, ou seja, no exercício da profissão docente que os diversos saberes construídos ao longo do tempo são unificados no/para o trabalho; e) **saberes humanos a respeito de seres humanos**: o trabalho docente é interativo, isto é, professor e aluno estabelecem interação; f) **saberes e formação de professores**: a necessidade de repensar a formação para o magistério considerando os saberes dos professores e as realidades específicas de seu trabalho cotidiano.

¹⁴ As referidas pesquisas situam-se no contexto canadense.

O quadro seguinte, assim, apresenta os diversos saberes que estão ‘a serviço’ do trabalho do professor:

Quadro 14 – Tipologia elaborada por Tardif.

SABER DOCENTE	DEFINIÇÃO
saberes disciplinares	São os conhecimentos sistematizados definidos e selecionados pela instituição universitária (Matemática, Biologia, Física, Química, Geografia, etc.) que não pertencem aos das Ciências da Educação.
saberes da formação profissional (das ciências da Educação e da ideologia pedagógica)	Estão divididos em: a) Ciências da Educação: são saberes oriundos da análise sobre o professor e o processo de ensino e aprendizagem. Entre vários, podem-se citar: Psicologia da Aprendizagem e do Desenvolvimento; Sociologia/Filosofia/História (-da Educação), Didática, Metodologia de Ensino. b) Ideologia Pedagógica: também denominado saberes pedagógicos, representam as doutrinas ou concepções pedagógicas. As doutrinas pedagógicas centradas na ideologia da ‘Escola Nova’ (ou Escola Ativa) são um exemplo desse saber.
saberes experienciais ou práticos	São os saberes advindos das experiências vividas pelo docente, antes, durante e depois da sua formação profissional. Nesse saber estão incluídas as experiências do professor: a) enquanto aluno, denominado saber pré-profissional (da Educação Básica à Universidade); b) de sua vida cotidiana; c) da própria vivência diária na escola.
saberes curriculares	“[...] correspondem aos discursos, objetivos, conteúdos e métodos a partir dos quais a instituição escolar categoriza e apresenta os saberes sociais por ela definidos e selecionados como modelos da cultura erudita e de formação para a cultura erudita. Apresentam-se concretamente sob a forma de programas escolares (objetivos, conteúdos, métodos) que os professores devem aprender a aplicar”. (TARDIF, 2002, p. 38)

Fonte – (TARDIF, 2002).

Em síntese, Tardif (2002, p. 36) define o saber docente como “[...] um saber plural, formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experienciais.”.

Por fim, as quatro tipologias apresentadas – cujas classificações contemplam alguns conhecimentos e saberes necessários ao ensino – colaboram ao processo de profissionalização (valorização) do ensino, pois a constituição de um “repertório de conhecimento” especializado e compartilhado exclusivamente entre os pares de uma classe profissional é uma das condições para o reconhecimento/valorização dessa atividade perante a sociedade. Além disso, a sistematização de tais conhecimentos e saberes colabora à melhoria da Formação de Professores, já que é importante abordar/analisar os conhecimentos e saberes necessários à prática docente durante essa formação.

Como a presente pesquisa incide sobre a (re)significação de alguns saberes experienciais construídos durante a Educação Básica (ou saber da experiência pré-profissional), então, na próxima subseção discutir-se-á esse saber valendo-se das tipologias apresentadas.

3.2.1 Os saberes da experiência pré-profissional

Comparando as tipologias apresentadas anteriormente, observa-se que o saber da experiência pré-profissional aparece em Gauthier et al. (1998), Pimenta (2008) e Tardif (2002). Em Gauthier et al. (1998) esse saber é ‘enquadrado’ no ‘saberes da tradição pedagógica (o uso)’; já Pimenta (2008) o denomina ‘saberes da docência: a experiência’; por fim, Tardif (2002) o insere em ‘saberes experienciais’. Tanto Pimenta (2008) quanto Tardif (2002) não separam esse saber, incluindo-o no conjunto geral dos saberes provenientes da experiência ‘vivenciada’ pelo sujeito durante a trajetória escolar e no exercício da profissão. Gauthier et al. (1998) – no entanto – realiza essa separação, denotando o seguinte sobre o saber da experiência pedagógica (o uso):

Essa tradição pedagógica é o saber dar aulas que transparece numa espécie de intervalo da consciência. Nessa perspectiva, cada um tem uma representação da escola que o determina antes mesmo de ter feito um curso de formação de professores, na universidade. As pesquisas estão apenas começando a examinar essa concepção prévia do magistério existentes entre os alunos no início da formação docente. (GAUTHIER et al., 1998, p. 32, grifo nosso)

Logo, o referido saber é constituído pelas concepções já construídas pelo licenciando sobre o magistério e que ‘informam-lhe’ sobre o ‘saber dar aula’ (ou seja, um saber/fazer). Tal saber constrói-se a partir da experiência vivenciada na/durante a trajetória escolar.

Pimenta (2008) – visando contribuir com a construção da identidade do professor durante a Formação Inicial – ressalta ser necessário o licenciando ‘mobilizar’ o saber da docência denominado ‘a experiência’ para que o mesmo ‘passe’ a se ver/pensar como professor e não mais como aluno. Como a autora investiga a Formação Inicial, então, pode-se supor que o esse saber – ‘a experiência’ – está mais relacionado aos saberes construídos pelo estudante em sua trajetória escolar, embora estejam também contemplados os saberes advindos do exercício do magistério. Sobre esse saber, Pimenta (2008) destaca o seguinte:

Quando os alunos chegam ao curso de formação inicial, já têm saberes sobre o que é ser professor. Os saberes de sua experiência de alunos que foram de diferentes professores em toda a sua vida escolar. Experiência que lhes possibilita dizer quais foram os bons professores, quais eram bons em conteúdo mas não em *didática*, isto é, não sabiam ensinar. Quais professores foram significativos em suas vidas, isto é, contribuíram para sua formação humana. (PIMENTA, 2008, p. 20, grifo da autora)

Assim, o saber da docência ‘a experiência’ contempla os saberes já construídos pelos licenciandos que lhe ‘informam’ sobre o que é ser um bom (ou mau) professor, qual a melhor

forma para se ensinar, etc. Tais saberes, construídos durante a Educação Básica, (ainda) não foram objeto de análise/reflexão, logo, uma ‘mobilização’/reflexão/reeducação¹⁵ em torno dos mesmos faz-se necessária (conforme proposto pela referida autora).

Já Tardif (2002) – dentre os autores considerados na presente subseção – é o que mais ‘dá’ atenção ao saber adquirido durante a trajetória pré-profissional. Em vários de seus trabalhos (TARDIF, 2000, 2002), e em alguns realizados com colaboradores (TARDIF e RAYMOND, 2000; TARDIF e LESSARD, 2007), o pesquisador traz considerações semelhantes. Uma delas apresenta-se abaixo:

De acordo com uma abundante literatura [...], uma boa parte do que os professores sabem sobre o ensino, sobre os papéis do professor e sobre como ensinar provém de sua própria história de vida, principalmente de sua socialização enquanto alunos. Os professores são trabalhadores que ficaram imersos em seu lugar de trabalho durante aproximadamente 16 anos (em torno de 15.000 horas), antes mesmo de começarem a trabalhar. Essa imersão se expressa em toda uma bagagem de conhecimentos anteriores, de crenças, de representações e de certezas sobre a prática docente. (TARDIF, 2002, p. 68, grifo nosso)

Ao contrário de outras profissões cuja prática profissional inicia-se após a formação acadêmica (ou técnica), o professor já esteve imerso em seu “futuro” local de trabalho – na condição de aluno – por, aproximadamente, 15 anos. Tal experiência oportunizou a esse professor a construção de diversos saberes sobre o que é o ensino, o que é ser um bom professor, etc. Sobre a noção de experiência, Tardif e Lessard (2007) expõem o seguinte:

A noção de experiência tem diversos sentidos para os professores, mas, de modo geral, ela designa a noção de verdade de sua vivência prática. [...] A experiência denomina as fontes pessoais – história de vida, experiências escolares anteriores, etc. – a partir das quais se edificaram as representações e as práticas pessoais do professor para com seu ofício. O professor jovem nunca chega totalmente virgem ao seu novo ofício; ele começa a trabalhar possuindo já experiências – muitas vezes fundamentais – do ensino, da classe, dos alunos, etc. (TARDIF e LESSARD, 2007, p. 285-286)

Apoiando-se nas definições até o momento esboçadas pelos autores considerados na presente subseção – e considerando as convergências observadas sobre a constituição do saber docente construído antes da Formação Inicial – torna-se possível sintetizar/definir o saber da

¹⁵ Outros estudos (ARAMAN; SAMPAIO, 2013; CARNEIRO, 2014, 2015; CAVALCANTE; SOARES, 2012; COSTA, 2013; COSTA; CURI, 2010; COSTA et al., 2017; DELGADO, 2003; LÓPEZ; ALSINA, 2016; NACARATO, 2010; NAGY-SILVA; PASSOS; CYRINO, 2010; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2013; SANTOS; GHEDIN, 2016; SILVA; PASSOS, 2016; SOARES, 2013) corroboram com o defendido por Pimenta (2008), ou seja, acerca da necessária reeducação/(re)significação dos saberes da experiência já construídos pelos licenciandos durante/na Formação Inicial. Os referidos estudos, inclusive, referem-se à Formação Inicial do pedagogo para o ensino de Matemática, em particular aos saberes acerca da Matemática (e seu processo de ensino e aprendizagem).

experiência pré-profissional como: *“Um saber construído pelo aluno, durante a Educação Básica, influenciado pelas suas experiências pessoal-familiar e social-escolar. Esse saber é constituído de/por uma bagagem de saber/fazer¹⁶, conhecimentos anteriores, crenças, concepções, certezas e dúvidas sobre: a prática pedagógica (o ensino – papel do professor), a Educação (em seu aspecto geral), e o papel do aluno.”¹⁷*

Definido tal saber, cabe o seguinte questionamento: “Por que dedicar atenção ao saber da experiência pré-profissional?” Uma possível resposta é apresentada por Tardif (2002):

Em suma, tudo leva a crer que os saberes adquiridos durante a trajetória pré-profissional, isto é, quando da socialização primária e sobretudo quando da socialização escolar, têm um peso importante na compreensão da natureza dos saberes, do saber-fazer e do saber-ser que serão mobilizados e utilizados em seguida quando da socialização profissional e no próprio exercício do magistério. [...] Assim, o que foi retido das experiências familiares ou escolares dimensiona, ou pelo menos orienta, os investimentos e as ações durante a formação inicial universitária. (TARDIF, 2002, p. 69)

Logo, por possuírem um ‘peso importante’, os saberes da experiência pré-profissional acabam influenciando a (futura) prática pedagógica do licenciando, bem como o próprio processo de construção dos demais saberes (e conhecimentos) docentes durante a graduação. Se durante a Formação Inicial tais saberes não forem questionados / analisados / refletidos / reeducados, o futuro professor (provavelmente) os utilizará acriticamente em sua prática docente. Sobre a necessidade dessa reeducação, Fiorentini et al. (1998) denotam o seguinte:

Mesmo o estudante que nunca foi docente traz, pela sua vivência como tal, conhecimentos construídos durante a sua trajetória de vida. A licenciatura deveria, pois, ser um espaço de “reeducação” (Gonçalves, 1981) para os estudantes, pois, tendo ou não experiências profissionais, todos eles têm vivência de magistério como alunos que, certamente, merecem ser revistas, questionadas, reelaboradas. Como nos dizem Feinman-Nemser e Buchmann (1987, *apud* Zeichner, 1995, p. 130), “o processo de aprender a ensinar começa muito antes dos alunos frequentarem os cursos de formação de professores; por isso, temos de ter em conta as idéias anteriores e as regras que os alunos aliam à experiência e devemos ajudá-los a exteriorizá-las e a elaborá-las segundo concepções mais elaboradas”. (FIORENTINI et al., 1998, p. 108, grifo nosso)

Esse mesmo sentido de ‘reeducação’ pode ser observado em Pimenta (2008) ao se referir à necessidade da Formação Inicial ‘mobilizar’ os saberes da docência ‘a experiência’ – conforme já ressaltado. García (1999, p. 99-100) também colabora nesse sentido ao salientar que “A formação de professores deve facilitar a tomada de consciência das concepções e

¹⁶ Esse saber/fazer refere-se ao ‘saber dar aula’ denotado por Gauthier et al. (1998).

¹⁷ Outros estudos (FIORENTINI et al., 1998; GARCÍA, 1999; PACHECO e FLORES, 1999) corroboram com a possível definição acerca do saber da experiência pré-profissional.

modelos pessoais e em alguns casos provocar a dissonância cognitiva nos professores em formação.”.

No entanto – e mediante o já exposto na presente seção – parece que a ‘nossa’ Formação Inicial de professores – na maioria das vezes – ao desprezar as crenças, concepções e conhecimentos prévios dos alunos (construídos durante a Educação Básica) acaba não contribuindo neste trabalho de ‘reeducação’.

Assim – e por acreditar na necessária reeducação dos referidos saberes – a presente pesquisa pretende colaborar nessa direção ao visar a (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional de licenciandas em Pedagogia em relação à Matemática. Tais saberes são constituídos por um saber/fazer, conhecimentos anteriores, certezas, dúvidas, crenças e concepções relacionadas à Matemática (e seu ensino e aprendizagem), cuja construção – destes saberes – advém da trajetória escolar experienciada/vivenciada pelo licenciando durante a sua trajetória escolar, em particular nas aulas de Matemática ministradas pelos seus ‘antigos’ professores da Educação Básica.

Como as crenças e concepções constituem uma ‘parte’ dos saberes da experiência pré-profissional, saberes esses que serão objeto de investigação da presente pesquisa, então, na subseção seguinte far-se-á uma breve discussão a respeito das mesmas. Cabe destacar que o estudo sobre as crenças e as concepções não se limita/restringe às investigações acerca da Formação de Professores e dos saberes docentes. Contudo, tais ‘elementos’ (crenças e concepções) já vêm sendo utilizados em algumas discussões apresentadas na presente seção, fato esse que já justifica a elaboração de uma subseção específica para abordá-los. Além disso, as discussões realizadas a seguir colaborarão na constituição de algumas categorias referentes às crenças e concepções relacionadas à Matemática, categorias essas que serão utilizadas na análise dos dados.

3.3 Uma breve discussão sobre a influência das crenças e das concepções na Formação de Professores

O estudo sobre crenças e concepções vem sendo desenvolvido há certo tempo, em especial na área da Educação, Psicologia e Psicologia da Educação Matemática (SOUZA, 1996). Mas, o que constitui uma concepção? E o que constitui uma crença? Crença é sinônimo de concepção ou representam ‘coisas’ diferentes? Qual a importância do estudo das concepções para a Formação de Professores? Começando pela última questão, Ponte (1992) destaca:

O interesse pelo estudo das concepções dos professores, tal como aliás pelo estudo das concepções de outros profissionais e de outros grupos humanos, baseia-se no pressuposto de que existe um substrato conceptual que joga um papel determinante no pensamento e na acção. Este substrato é de uma natureza diferente dos conceitos específicos – não diz respeito a objectos ou acções bem determinadas, mas antes constitui uma forma de os organizar, de ver o mundo, de pensar. Não se reduz aos aspectos mais imediatamente observáveis do comportamento e não se revela com facilidade – nem aos outros nem a nós mesmos. (PONTE, 1992, p. 1, grifo nosso)

Ao afirmar que as concepções desempenham um ‘papel determinante’ no pensamento e na acção do sujeito, tal citação ‘vai de encontro’ com o que foi discutido na subsecção anterior a respeito da influência dos saberes da experiência pré-profissional à constituição da prática profissional. Essa ideia – no campo educacional – é observada quando se evidencia uma ‘estreita’ relação entre as concepções do professor e sua prática pedagógica, ou seja, quando a primeira influencia a segunda¹⁸. No entanto, o contrário também pode ocorrer. Segundo Ponte (1992):

Dizer que as concepções e os saberes têm um importante carácter colectivo equivale a assumir que eles encontram a sua origem nas estruturas organizativas, nas relações institucionais, e nas dinâmicas funcionais em que estão integrados os seres humanos. Geram-se nas interacções inter-individuais e a sua evolução é muito marcada pelas dinâmicas colectivas. Esta impregnação de elementos sociais no processo de construção do saber reforça a perspectiva de que existe uma relação interactiva entre as concepções e as práticas. As concepções influenciam as práticas, no sentido em que apontam caminhos, fundamentam decisões, etc. Por seu lado, as práticas, que são condicionadas por uma multiplicidade de factores, levam naturalmente à geração de concepções que com elas sejam compatíveis e que possam servir para as enquadrar conceptualmente. (PONTE, 1992, p. 10, grifo nosso)

Assim, não há uma influência exclusiva das concepções sobre as práticas, mas, também, um movimento ‘contrário’ no qual as práticas, condicionadas por múltiplos fatores, acabam gerando concepções a elas compatíveis. Outra contribuição a respeito da relação entre as concepções e as práticas – corroborando com o estudo de Ponte (1992) – é apresentada por Thompson (1997, p. 13-14, grifo da autora) ao destacar a “[...] influência *potencial* que estas [concepções] podem ter na formação dos padrões de comportamento [dos professores], os quais podem ter se tornado habituais.”. Desse modo, a compreensão de que as concepções influenciam as práticas acaba auxiliando na Formação de Professores quando essa formação, ao reconhecer tal influência, atua na ‘reeducação’ das concepções dos licenciandos (futuros

¹⁸ Em estudo realizado com professores de Matemática, Ponte (1992) verificou tal influência. Por exemplo, os participantes que conceberam a Matemática como uma ciência ‘pronta’ e ‘acabada’ (o que representou grande parte dos pesquisados) deram a entender que o processo de ensino-aprendizagem alicerça-se numa prática da transmissão e da memorização (repetição) dos conteúdos matemáticos ‘dados’ pelo docente. Nacarato, Passos e Carvalho (2004) identificaram situação análoga ao constatar a existência de uma ‘forte’ relação entre as concepções em Matemática e a prática pedagógica dessa disciplina por futuros professores, no caso, cento e cinquenta e sete licenciandos em Pedagogia.

professores) e dos professores já em exercício. Concepções essas que – na maioria das vezes – alicerçam-se no empirismo e/ou no inatismo (BECKER, 2008, 2012) sem ao menos o sujeito ter consciência¹⁹ delas. Logo, a (re)significação de tais concepções a partir de uma concepção epistemológica construtivista – concepção essa advinda da teoria de Piaget – representa para a presente pesquisa (tese) uma possibilidade à melhoria da Formação (Inicial) de Professores.

Acerca da constituição das concepções, Ponte (1992, p. 1) afirma que as mesmas advêm de um processo simultaneamente “[...] individual (como resultado da elaboração sobre a nossa experiência) e social (como resultado do confronto das nossas elaborações com os outros)”. Quanto a sua natureza, o referido autor pontua:

As concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva. Actuam como uma espécie de filtro. Por um lado, são indispensáveis pois estruturam o sentido que damos às coisas. Por outro lado, actuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de actuação e compreensão. (PONTE, 1992, p. 1, grifo nosso)

Estabelecendo um paralelo com a Epistemologia Genética, as concepções (já construídas pelo sujeito) ‘atuam’ na assimilação do objeto pelo sujeito, ou seja, na atribuição de sentido (significado). Já o “elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas” – citado acima – refere-se ao fato das concepções dificultarem a assimilação de ‘novos’ objetos. Tal dificuldade, segundo a teoria piagetiana, é observada quando a perturbação advinda de uma situação de desequilíbrio é ignorada pelo sujeito.

Complementando a discussão acerca das concepções, Ponte (1992) destaca que as mesmas podem ser consideradas como um “pano de fundo organizador dos conceitos” e que elas constituem

[...] como que “miniteorias”, ou seja, quadros conceptuais que desempenham um papel semelhante ao dos pressupostos teóricos gerais dos cientistas (Confrey, 1990, p. 20). As concepções condicionam a forma de abordagem das tarefas, muitas vezes orientando-nos para abordagens que estão longe de ser as mais adequadas. Estreitamente ligadas às concepções estão as atitudes, as expectativas e o entendimento que cada um tem do que constitui o seu papel numa dada situação (Ponte et al., em publicação). (PONTE, 1992, p. 8-9)

Ao condicionar a forma de abordagem das tarefas, as concepções atuam sobre o fazer do sujeito. Em específico às concepções do professor, Cunha (2000) apresenta uma definição que ‘dialoga’ com as precedentes. Para essa autora, o sistema conceptual do professor representa

¹⁹ Consciência no sentido de tomada de consciência definida por Piaget et al. (1977) na seção anterior.

[...] um esquema teórico, mais ou menos consciente, mais ou menos explícito, mais ou menos consistente, que o professor possui, que lhe permite interpretar o que se lhe apresenta ao seu espírito, e que de alguma maneira o predispõe, e influencia a sua acção, em relação a isso (Guimarães, 1998, p. 20). (CUNHA, 2000, grifo nosso)

O referido “esquema teórico, mais ou menos consciente, mais ou menos explícito” que representa o sistema conceptual do professor se ‘aproxima’ do conceito de esquema (apresentado na subseção 2.4). Isso se deve, pois o esquema – enquanto uma organização invariante da conducta para uma dada classe de situações (VERGNAUD, 1996) – na maioria das vezes, ainda não é consciente (no sentido de tomada de consciência – Piaget et al. (1977)) e nem explícito para o sujeito; contudo, o esquema possibilita a ação do sujeito e a atribuição de significado (sentido) de determinado objeto.

Como a presente pesquisa investiga a (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática – e estando as concepções incluídas em tais saberes – então, apresentar algumas concepções difundidas a respeito da ciência Matemática torna-se importante à constituição de algumas categorias a serem utilizadas na análise dos dados. A esse respeito, Ponte (1992) explicita as concepções mais difundidas – por diferentes sujeitos, inclusive por professores – acerca da Matemática. Tais concepções encontram-se sintetizadas nas seguintes afirmações (e as respectivas complementações) apresentadas no quadro abaixo:

Quadro 15 – Concepções acerca da Matemática.

CONCEPÇÕES ACERCA DA MATEMÁTICA	
a) ‘ A parte mais substancial, acessível e fundamental da Matemática é o Cálculo! ’.	Essa concepção reduz a Matemática a um de seus aspectos mais pobres e de menor valor formativo. No entanto, não se desconsidera a importância dos cálculos ao ‘fazer’ matemático, o problema decorre da redução da Matemática a esse aspecto.
b) ‘ A Matemática consiste, essencialmente, na demonstração de proposições a partir de sistemas de axiomas mais ou menos arbitrários ’.	Essa concepção reduz a Matemática a sua estrutura dedutiva. Mesmo que a teoria Matemática necessite de uma organização axiomática, isso não significa que o seu processo de construção não ‘percorra’ outras fases de desenvolvimento, tal como o processo indutivo, com “o estabelecimento e o teste de conjecturas e o desenvolvimento de novas intuições. A dedução, só pode ter lugar na medida em que existe já uma linha condutora do pensamento e um grande refinamento dos conceitos envolvidos. (p. 15)”.
c) ‘ A Matemática é o domínio do rigor absoluto e da perfeição total ’.	Essa concepção acredita que na Matemática, ou seja, durante a sua construção, não ocorram erros, dúvidas, hesitações ou incertezas. No entanto, a “prática da Matemática, como produto humano, está sujeita às imperfeições naturais da nossa espécie. Nela há margem para se desenvolverem diversos estilos ou se tomarem diferentes opções. (p. 15-16)”.
d) ‘ A Matemática é ‘desligada’ completamente da realidade ’.	Essa concepção desconsidera o processo histórico de construção da Matemática. Logo, “quanto mais auto-suficiente [desligada da realidade], “pura” e abstracta, melhor seria a Matemática escolar. (p. 16)”. Decorre dessa concepção a não consideração da relevância social proveniente do ensino da Matemática.
e) ‘ Nada de novo ou criativo pode ser feito em Matemática, a não ser pelos ‘gênios ’.	Essa concepção considera que a maioria das pessoas não constrói a Matemática, com exceção do gênio que possui dom/talento (isto é, capacidades inatas) que lhe possibilita construir tal ciência.

Fonte – (PONTE, 1992).

Segundo o autor, essas concepções “[...] Formaram-se no período em que predominava o ensino fortemente elitista.”, na qual a Matemática “[...] importava apenas a um número reduzido de pessoas e esta ciência podia funcionar como um filtro selectivo.” (PONTE, 1992, p. 16). Tais concepções, por conseguinte, contribuem na/para a permanência de práticas pedagógicas empobrecidas, ‘mistificadoras’ e excludentes. Empobrecidas por reduzirem as atividades em sala de aula ao cálculo (técnicas algorítmicas). Mistificadoras no sentido de ‘dar a entender’ – mediante as ações de não contextualização dos conteúdos – que a Matemática encontra-se em um mundo ‘a parte’ da realidade social. E excludentes por subjugar a capacidade do estudante em aprender (e ‘criar’/construir) Matemática. Contudo – e considerando o referencial teórico-epistemológico adotado na presente pesquisa – o aluno é capaz de construir a Matemática mediante contínuas abstrações reflexionantes ‘tornadas’ refletidas (PIAGET et al., 1995) via progressivas tomadas de consciência (PIAGET et al., 1977).

A respeito das crenças, Ponte (1992) – valendo-se do estudo realizado por Thompson (1992) – expõe o seguinte:

As crenças não têm suporte empírico que as valide – são criações da imaginação humana (individual ou colectiva). Constituem apenas uma forma primitiva de saber. Por outro lado, há saberes que assentam directamente sobre crenças e que só nesse quadro fazem sentido (por exemplo, os membros de uma confissão religiosa, assente em determinadas crenças, sabem como executar os respectivos rituais). (PONTE, 1992, p. 8, grifo nosso)

A partir do exposto, compreende-se que as crenças representam criações da imaginação humana (individual ou coletiva) não validadas empiricamente. Constituem ‘uma forma primitiva’ do saber, mas não opostas/incompatíveis ao conhecimento. Segundo Ponte (1992, p. 8), as crenças podem ser consideradas uma parte do conhecimento ‘relativamente pouco elaborada’ mas que, também, ‘informam’ a ação (e a compreensão) do sujeito para com determinada prática (e objeto).

Assim, conforme Ponte (1992) – e respondendo a questão inferida no início desta subseção – crença não é sinônimo de concepção. Enquanto as concepções ‘têm uma natureza essencialmente cognitiva’ e ‘desempenham um papel semelhante ao dos pressupostos teóricos gerais’ utilizados pelos cientistas (‘miniteorias’), as crenças advêm de criações humanas ‘fantasistas’ e apresentam certa ‘carga emocional’. No entanto, não devem ser consideradas como ‘coisas’ opostas já que possuem apenas naturezas diferentes. Para o referido autor, a distinção entre crenças e concepção não é importante em si mesma,

[...] mas sim em relação a outras estruturas, tais como atitudes²⁰, conhecimento e práticas. A noção de atitude é fundamental para a psicologia social. As atitudes estão intimamente ligadas às crenças, especialmente quando consideradas como disposições para a ação (como em Brown & Cooney, 1982). A maioria dos autores considera as crenças como algo com uma carga emocional significativa relacionada às preferências, inclinações e linhas de ação. Assim, as crenças podem mostrar aspectos afetivos da personalidade do professor. (PONTE, 1999, p. 3, tradução nossa)

Embora as atitudes não constituam o objeto da presente investigação, a relação destas com as crenças torna pertinente a apresentação do seguinte resultado encontrado por Ardiles (2007). Essa autoria evidenciou – após analisar (quantitativamente e qualitativamente) respostas de um questionário aplicado a cento e vinte e dois professores de 1.^a a 4.^a séries do Ensino Fundamental – uma tendência de dependência e relação (correlação) entre as atitudes, as crenças e as concepções. Para essa autora, esses constructos (concepções, crenças e atitudes) ‘revelaram-se’ como fontes de informações importantes para o encaminhamento das práticas pedagógicas dos participantes, apontando que a atividade docente se dá em função do que os professores pensam sobre a Matemática (concepções e crenças) e do que sentem (atitudes) a respeito dessa ciência.

Em suma, acredita-se que as discussões realizadas responderam – a partir dos referenciais teóricos adotados – as perguntas esboçadas no início desta subseção.

Como um possível ‘desfecho’ da presente seção (3), na próxima subseção serão apresentadas algumas pesquisas, desenvolvidas pelos pares, cujas temáticas versaram sobre: a) a Formação Inicial do professor que ensina Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental; b) os saberes da experiência pré-profissional e as suas influências na Formação Inicial e na prática pedagógica. A apresentação de tais trabalhos torna-se pertinente por dois motivos, a saber: i) pelo fato das referidas pesquisas dialogarem com o objeto de investigação da (nossa) presente investigação, isto é, os saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem) na/durante a Formação Inicial do pedagogo; ii) pela possível utilização de alguns resultados, advindos de tais pesquisas, à elaboração do Grupo de Estudo (a ser apresentado na seção 5), bem como à análise e discussão dos dados (a ser realizada na seção 6).

²⁰ Considera-se, no presente estudo, a seguinte definição para o conceito de atitude: “**atitude** poderia ser definida como uma disposição pessoal, idiossincrática, presente em todos os indivíduos, dirigida a objetos, eventos ou pessoas, que assume diferente direção e intensidade de acordo com as experiências do indivíduo. Além disso, apresenta componentes do domínio afetivo, cognitivo e motor. (Brito, 1996, p. 11, grifo da autora)”.

3.4 A Formação Inicial de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais e saberes da experiência pré-profissional: alguns estudos desenvolvidos

Inicialmente, serão apresentadas algumas pesquisas que discutiram/investigaram alguns aspectos referentes à Formação Inicial de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Curi (2004) investigou os conhecimentos que os professores polivalentes necessitam construir, na Formação Inicial, para ensinar Matemática. A pesquisadora realizou – inicialmente – uma análise dos cursos que ofertam(ram) tal formação ao longo da história. Tal análise foi ‘orientada’ pelos seguintes questionamentos: a) Como ocorre (ocorreu) a formação do aluno-professor para ensinar Matemática?; b) Como, *atualmente*, os cursos estão organizados de modo a abordar os conhecimentos específicos, didáticos e curriculares²¹ referentes à Matemática? Além dessa pesquisa qualitativa do tipo bibliográfica e documental, Curi (2004) analisou alguns dados provenientes de entrevistas semiestruturadas, ‘memórias’ e portfólios elaborados pelas alunas-professoras (doze ao todo) que participaram de um curso²² de Formação Inicial de professores polivalentes. Nesse contexto, a autora visou identificar as contribuições de tal curso à formação das participantes e as relações que mesmas estabeleceram para com a Matemática.

Através da referida pesquisa, Curi (2004) evidenciou alguns aspectos (conclusões) que estabelecem algumas relações de proximidade com os assuntos já abordados na presente seção. Tais aspectos apresentam-se a seguir:

a) Nos cursos de Formação de Professores polivalentes no Brasil – no decorrer da história até a *atualidade* – observou-se (observa-se) a predominância de uma formação generalista alicerçada nos Fundamentos da Educação, ou seja, não se considera a necessidade de os alunos-professores construírem conhecimentos específicos sobre as disciplinas que irão ensinar. Assim, os cursos deixaram “[...] transparecer uma concepção de que o professor polivalente não precisa “saber Matemática”, basta saber como ensiná-la.” (CURI, 2004, p. 167).

²¹ A autora utilizou como referência a tipologia elaborada por Shulman (1986, 1987), tipologia essa já apresentada na subseção 3.2.

²² O referido curso – denominado **PEC Universitário** – foi realizado pela Secretaria Estadual de Educação de São Paulo em parceria com a Universidade de São Paulo (**USP**), a Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (**UNESP**) e a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (**PUC/SP**). Tal curso possibilitou a Formação Inicial – em nível Superior – para 7.000 professores em atuação na rede pública estadual e que ainda não possuíam graduação.

- b) Faz-se imprescindível que o professor – durante a sua Formação Inicial (e ou Contínua) – amplie seus conhecimentos sobre a Matemática²³, não a compreendendo apenas como uma disciplina escolar. Para tanto, tornam-se necessárias discussões em torno da natureza da Matemática, sua construção histórica, seu uso na sociedade atual, etc.
- c) As alunas-professoras apresentaram dificuldades em relação à aprendizagem da Matemática durante a Educação Básica, considerando-a uma disciplina de difícil compreensão e acessível a poucos (àqueles muito inteligentes). Algumas delas salientaram ter enveredado para o magistério como certa ‘fuga’ dessa disciplina. Além disso, ressaltaram que (ainda) precisam construir muitos conteúdos matemáticos, sendo a ‘Geometria’ e o ‘Tratamento da Informação’ os mais citados (nesta ordem) como os de maior dificuldade de compreensão.
- d) Os saberes da experiência das alunas-professoras, saberes esses advindos de suas práticas pedagógicas, serviram de referência para a análise das temáticas abordadas no curso (PEC Universitário). Assim, durante o curso houve a possibilidade de reflexão que provocou

[...] um efeito de retomada crítica dos saberes adquiridos anteriormente, dentro ou fora da prática profissional. A experiência profissional enriqueceu sobremaneira as atividades de formação propostas no material de Matemática e os alunos-professores passaram a analisar seus próprios saberes experienciais, com base na teoria estudada e, dessa forma, a construir novos saberes para ensinar Matemática. (CURI, 2004, p. 181, grifo nosso)

- e) Deve-se dar ‘maior atenção’ à Formação Inicial de professores, inserindo-os no contexto escolar para a realização de tarefas profissionais e experienciais.
- f) Há pouca (ou nenhuma) incorporação nos cursos de professores sobre os resultados advindos de pesquisas da área da Educação e Educação Matemática. Fato esse que evidencia (e reforça) o distanciamento entre as atividades da docência e as pesquisas realizadas no Ensino Superior.
- g) Observou-se dificuldade em/para encontrar especialistas sobre o ensino de Matemática e formador de professor de Matemática para as séries (anos) iniciais do Ensino Fundamental. A falta desses profissionais deve ser analisada ‘com atenção’ pela comunidade de educadores matemáticos e pelos cursos de pós-graduação.

²³ A esse respeito, diversas pesquisas (ABRAHÃO; SILVA, 2017; ARAMAN; SAMPAIO, 2013; ARAÚJO; PEREIRA, 2016; AZEVEDO et al., 2013; BARRETO; SOUSA, 2009; BEDNARCHUCK, 2012; BULOS, 2010; CARNEIRO, 2015; CARNEIRO; PASSOS; LUPIÁÑEZ, 2012; DICETTI; CERETA, 2016; LERA; DEULOFEU, 2014; OLIVEIRA, 2010; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2013; RIBEIRO; ALBRECHT, 2016; SANTOS; GHEDIN, 2016; SILVA; BURAK, 2016; SOARES, 2013; SOUZA; BORGES, 2016; TOZETTO; BRANDT, 2010; ZIMER, 2008) também apontaram a necessidade dos cursos de Pedagogia darem ‘mais atenção’ à formação Matemática do futuro professor para o exercício do magistério nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

h) Deve-se propiciar ao estudante – em formação – situações semelhantes (isomorfas) às quais terá que desenvolver com seus (futuros) alunos.

Rocha, M. (2005), assim como Curi (2004), também analisou o contexto histórico da Formação Inicial de professores polivalentes. Essa pesquisadora observou os conhecimentos matemáticos adquiridos pelo professor polivalente nos cursos de Formação – em nível Médio e Superior – investigando a concepção desse docente sobre a formação recebida e o modo como ensinavam os conteúdos matemáticos nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Os instrumentos de coleta dos dados e os métodos empregados foram: a) análise documental; b) aplicação de um questionário a um grupo de 15 professores polivalentes experientes que atuavam nas séries iniciais do Ensino Fundamental de uma escola pública de Cáceres (MT). A respeito da análise documental, investigaram-se todas as matrizes curriculares do curso Normal e HEM²⁴ (1957 a 1998) de Cáceres e do curso de Pedagogia (1987 a 2004) da Universidade Estadual do Mato Grosso (UNEMAT) do Campus de Cáceres. Além disso, analisou-se a história (trajetória) dos cursos de Formação Inicial de professores polivalentes no Brasil. Os resultados obtidos apresentam-se nos tópicos seguintes:

a) A análise sobre a legislação identificou que nem sempre as leis atenderam a todas as especificidades necessárias à formação do professor polivalente, embora a LDBEN nº. **9.394/96** dedica certa atenção à formação desse professor.

b) Em relação à Formação Inicial do professor das séries iniciais do Ensino Fundamental – tomando por base o curso de Pedagogia analisado e as concepções advindas do grupo de professores participantes – observaram-se os seguintes aspectos: b.1) as disciplinas constituintes dos cursos são fragmentadas dificultando, por conseguinte, o estabelecimento da relação entre teoria e prática; b.2) é dada ‘pouca atenção’ aos conteúdos específicos que esses professores terão que abordar aos seus alunos; b.3) em decorrência do aspecto anterior, os docentes continuam apresentando lacunas²⁵ (defasagens) referentes aos conteúdos matemáticos a serem ‘objetos de ensino’; b.4) enfatiza-se mais a formação metodológica (referente aos conteúdos matemáticos) do que a conceitual.

²⁴ HEM significa Habilitação Específica para o Magistério.

²⁵ Outras investigações (ABRAHÃO; SILVA, 2017; ARAMAN; SAMPAIO, 2013; ARAÚJO; PEREIRA, 2016; BARRETO; SOUSA, 2009; CARVALHO, 2007; DICETTI; CERETA, 2016; FERNANDES, 2013; FERNANDES; LEITE, 2015; NACARATO, 2010; OLIVEIRA, 2010; PROENÇA, 2015; RIBEIRO; ALBRECHT, 2016; ROSA, 2015; SANTOS; GHEDIN, 2016; SOARES, 2013; SOUZA; BORGES, 2016) também identificaram a existência de diversas lacunas conceituais dos licenciandos em Pedagogia em relação à Matemática.

c) Os participantes apontaram as ‘deficiências’ de aprendizagem sobre a Matemática (e o ensino de Matemática) durante as suas formações (em nível Médio e/ou Superior), salientando reproduzi-las durante as suas práticas pedagógicas.

Para finalizar, Rocha, M. (2005) alertou:

[...] o Curso de Pedagogia precisa ser repensado de forma que a organização curricular das áreas do conhecimento do campo de atuação do professor “polivalente” seja baseada nas três vertentes apontadas por Shulmam (1992). No caso da Matemática, esta organização deve contemplar os conhecimentos dos conteúdos de Matemática, os conhecimentos didáticos dos conteúdos de Matemática e também os conhecimentos curriculares desta disciplina. [...] O conhecimento e o domínio do conteúdo é condição essencial para que o professor possa compreender o processo de construção dos alunos. Sem esse domínio, fica impossível construir situações didáticas que problematizem os conhecimentos prévios com os quais, a cada momento, crianças, jovens e adultos se aproximem dos conteúdos escolares, desafiando-os a novas construções que vão constituindo saberes cada vez mais complexo e abrangente. (ROCHA, M., 2005, p. 252-253, grifo nosso)

Além de discutir a Formação Inicial do pedagogo (ao ensino de Matemática), Santos (2009) também indicou a necessidade de se (re)pensar a Formação Inicial do professor especialista²⁶. A pesquisa realizada pela referida autora verificou se os alunos da Pedagogia (também professores da Educação Infantil e séries iniciais do Ensino Fundamental) ‘ampliaram’ seus saberes matemáticos e significaram as suas práticas docentes a partir de uma disciplina²⁷ que tratou de conteúdos de Matemática, em específico, sobre os números naturais. Alicerçado na abordagem qualitativa – do tipo estudo de caso – participaram da pesquisa os professores universitários responsáveis pela referida disciplina (de quatro instituições de Ensino Superior da cidade de São Paulo) e dois alunos-professores de cada curso de Pedagogia investigado (num total de oito). Os instrumentos e métodos utilizados para a obtenção/análise dos dados foram: a) observação e registro das práticas docentes dos alunos-professores; b) análise dos planos de ensino da referida disciplina de Matemática; c) análise dos cadernos dos alunos-professores nos quais estavam registradas as aulas dessa disciplina; d) análise dos planos de ensino de tal disciplina; e) análise de cadernos, pastas e livros de Matemática das crianças que eram alunos dos alunos-professores investigados; f) entrevistas semiestruturadas, gravadas em áudio, envolvendo todos os participantes da pesquisa.

A partir da análise dos dados, Santos (2009) apresentou os seguintes resultados:

²⁶ O professor especialista, neste caso, refere-se ao professor de Matemática que atua nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

²⁷ A referida disciplina intitulava-se “Matemática da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental”.

- a) Para seis, dos oito alunos-professores, os estudos universitários não foram suficientes e significativos a ponto de utilizarem, com seus alunos da Educação Básica, as atividades propostas pelos professores universitários.
- b) Os alunos-professores do Ensino Fundamental preocuparam-se mais com as técnicas operatórias da Matemática, ‘seguindo’ o livro didático de modo acrítico, ou seja, sem a devida reflexão/problematização dos assuntos abordados (no livro).
- c) Os alunos-professores não (re)significaram suas práticas por meio dos estudos universitários realizados na Formação Inicial em nível Superior.

Mediante tais resultados, a pesquisadora ressaltou duas questões (reflexões) visando justificar (explicar) a ‘ineficiência’ da referida disciplina, a saber:

1 – *O tempo de formação inicial do futuro professor.* É eficiente formar um professor com conhecimentos mínimos acerca dos conteúdos matemáticos da educação infantil e do ensino fundamental em 80 horas/aulas, em um semestre letivo, em curso noturno?

2 – *A formação prática.* Como relacionar teoria e prática em um currículo engessado pela exigüidade de tempo, mais os conteúdos a serem desenvolvidos, mais as avaliações previstas para o encerramento das atividades do curso? (SANTOS, 2009, p. 179, grifo da autora)

Após lançar esses dois questionamentos-problemas, Santos (2009) propôs a criação de uma escola de professores para a Formação Inicial em tempo integral, cujo primeiro período seria destinado aos estudos teóricos e, no segundo, à prática. Segundo ela, tal escola possibilitaria uma ‘efetiva’ reflexão e ressignificação teórica em torno dos resultados advindos da prática de sala de aula. Em suas considerações finais, a autora alertou que a discussão sobre o professor polivalente (e sua formação) “[...] implica discutir a formação do professor especialista, pois foi com esse profissional que os professores polivalentes iniciaram-se nos conceitos básicos das diferentes áreas do conhecimento quando cursaram o ensino fundamental e o médio.²⁸” (SANTOS, 2009, p. 181, grifo nosso).

Outra contribuição a presente temática foi dada por Delgado (2003). Tal autora investigou como futuros professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico²⁹ refletiram acerca de suas práticas de ensino de Matemática, observando o modo e o conteúdo dessa reflexão. A

²⁸ O estudo desenvolvido por Ortega e Santos (2012) ‘caminhou’ nesta direção ao apontar a necessidade de (re)pensar a Formação Inicial do professor especialista. Isso se deve, pois parte das ‘visões’ dos alunos (futuros professores dos anos iniciais) sobre a Matemática advém de suas experiências – em grande parte negativas – vivenciadas durante o ensino de Matemática nos anos finais (6.º ao 9.º) do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Experiências essas que, segundo os autores, influenciam a futura prática pedagógica e a própria constituição da identidade profissional.

²⁹ A denominação 1.º Ciclo do Ensino Básico deve-se ao fato da pesquisa ter sido realizada em Portugal. Nesse país, tal termo refere-se à etapa de escolarização correspondente aos anos iniciais do Ensino Fundamental brasileiro.

pesquisa qualitativa – do tipo estudo de caso – contou com a participação de três futuras professoras do 1.º Ciclo, selecionadas dentre os alunos que frequentavam o 4.º ano do curso de professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico de uma Escola Superior de Educação em Portugal. Os instrumentos de coleta e os métodos de análise dos dados foram: a) observação das aulas das futuras professoras; b) aplicação de cinco entrevistas que se constituíram em momentos de reflexão sobre as referidas aulas; c) análise de alguns documentos (planos semanais de trabalho, planificações de aula, fichas de trabalho e trabalhos realizados pelas participantes). Para a análise dos dados foram considerados os seguintes aspectos: a) as perspectivas das participantes acerca da Matemática e o seu ensino; b) a formação educacional e o modo como encaravam a profissão e o seu desenvolvimento profissional. Com base no discurso produzido durante a reflexão sobre as aulas (observadas), construíram-se narrativas que complementaram a compreensão (e verificação) dos referidos aspectos.

A partir dos resultados encontrados, Delgado (2003) apontou as seguintes estratégias que devem ser priorizadas durante/na Formação Inicial do professor do 1º Ciclo do Ensino Básico:

- a) Incentivar o futuro professor a refletir sobre os saberes experienciais referentes ao ensino de Matemática vivenciado em sua Educação Básica, já que esses influenciaram as reflexões das participantes.
- b) Aprofundar o conhecimento de Matemática do futuro professor para que o mesmo compreenda melhor os tópicos matemáticos e as conexões entre eles.
- c) Ampliar os momentos de prática pedagógica e a reflexão sobre a mesma.
- d) “[...] criar mecanismos mais eficazes que ajudem os futuros professores a ser mais críticos, a desenvolver a sua capacidade de reflexão sobre a prática e encarar o questionamento como um aspecto fundamental do seu desenvolvimento profissional”. (DELGADO, 2003, p. 228).
- e) Acompanhar e subsidiar o futuro professor no início de sua carreira docente.

Após a apresentação das pesquisas anteriores que trataram de alguns aspectos (e problemas) referentes à Formação Inicial de professores dos anos iniciais ao/para o ensino de Matemática, serão apresentados alguns trabalhos que investigaram os saberes da experiência pré-profissional e as influências de tais saberes na/durante a Formação Inicial e na constituição da prática pedagógica.

Bertani, Lando e Freire (2006) – após investigar o processo de construção dos saberes docentes de futuros professores e professores em exercício que estavam em formação nos cursos de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) – concluíram que a história de vida escolar e profissional influencia (até mesmo

negativamente) a construção dos saberes docentes. Muitas vezes, conforme os autores, o licenciando se quer possui consciência de tal influência durante a graduação.

Townsend e Tomazzeti (2007), por sua vez, investigaram o processo de mobilização dos saberes na prática pedagógica de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental. Por meio de uma abordagem qualitativa – do tipo estudo de caso – participaram da pesquisa quatro professoras (uma de cada série – 1.^a a 4.^a) de uma escola filantrópica do município de Santa Maria (RS). Os instrumentos utilizados à identificação dos saberes foram entrevistas semiestruturadas, questionários, observações (filmagem das práticas das salas de aula) realizadas durante seis meses (no período de abril a setembro de 2004).

A partir do estudo realizado, Townsend e Tomazzeti (2007) apresentaram os seguintes resultados:

- a) As professoras mobilizaram os saberes disciplinares e curriculares³⁰ aprendidos durante a sua formação enquanto alunas da Educação Básica, ou seja, pertencentes à esfera experiencial, sem realizarem uma análise reflexiva acerca da adoção dos mesmos.
- b) A Formação Inicial (nas Licenciaturas) representou – para as participantes – um momento importante em suas trajetórias profissionais proporcionando-lhes a ‘instrumentalização’ teórica, ou seja, a apropriação de saberes em Psicologia, Sociologia, Filosofia, História (da Educação), em Didática e nas Metodologias de ensino de Alfabetização e Matemática. Entretanto, “[...] foi a prática, a vivência de sala de aula e de escola, que lhes permitiu tornar a atividade docente melhor organizada e mais proveitosa para os alunos.” (TOWNSEND e TOMAZZETI, 2007, p. 214). Esse fato indica, provavelmente, o não estabelecimento da relação entre teoria e prática na Formação Inicial de tais professoras.
- c) Os saberes mobilizados pelas professoras possuem particularidades referentes às suas trajetórias pessoais. Tais particularidades devem ser analisadas/rediscutidas de modo a tornar a prática pedagógica – que é influenciada por tais particularidades – mais consciente.

Em outro estudo, Silveira et al. (2005) utilizaram suas próprias histórias de vida (autobiográficas) para discutir questões teórico-conceituais acerca do saber da experiência, da prática educativa e da Formação Contínua. Alicerçados em Paulo Freire e Maurice Tardif, tais pesquisadores enunciaram algumas considerações em torno das referidas questões. Acerca da trajetória pré-profissional – momento no qual se dá a construção dos saberes da experiência pré-profissional – os autores observaram o seguinte:

³⁰ Os autores valeram-se das tipologias propostas por Tardif (2002) e Gauthier et al. (1988) que já foram discutidas na subseção 3.2.

Parece-nos que a trajetória pré-profissional é uma etapa determinante para a construção de saberes, se expressando de várias formas: através de experiências positivas, pelo choque da idealização que fazem da formação acadêmica e do que é ser professor, pelo prazer de conversar. (SILVEIRA et al., 2005, p. 6)

Após a constatação pelos referidos autores (SILVEIRA et al., 2005) de que a trajetória pré-profissional ‘é uma etapa determinante³¹’ à construção de saberes, então, faz-se necessário/importante (re)pensar a Formação Inicial dos professores especialistas responsáveis pelas disciplinas escolares ministradas nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Tal importância se deve, pois as experiências positivas (e negativas) vivenciadas pelos licenciandos (em Pedagogia) nas aulas de Matemática – nas referidas etapas da Educação Básica – contribuem à construção de atitudes, crenças, concepções, certezas e dúvidas acerca da Matemática (e seu processo de ensino e de aprendizagem). Logo, conforme já denotado por Santos (2009) e Ortega e Santos (2012), faz-se importante investigar (e contribuir) com a melhoria da Formação Inicial do professor de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio de modo que esse profissional desenvolva práticas pedagógicas condizentes com a ideia de uma Matemática possível de ser construída pelo aluno (e com significado).

Em relação à prática de professores no Ensino Superior, encontraram-se duas pesquisas que ‘confirmaram’ a influência dos saberes da experiência pré-profissional à constituição da prática pedagógica. A ‘primeira’ delas – realizada por Haruna (2004) – visou responder a seguinte questão: “Como os formadores da Licenciatura em Matemática entendem a construção dos seus próprios saberes docentes?”. Para a realização da pesquisa utilizaram-se os seguintes procedimentos metodológicos: a) entrevistas semiestruturadas realizadas com doze professores que ministravam alguma disciplina ligada à Matemática, na Licenciatura em Matemática, de uma Universidade de autarquia municipal localizada no estado de São Paulo; b) consulta a documentos da referida Universidade e da legislação vigente; c) observações e registros das práticas pedagógicas dos participantes. Como referencial para a análise dos dados coletados, Haruna (2004) fez uso das tipologias sobre os saberes docentes propostas por Tardif, Shulman e Saviani. Um dos resultados encontrados pelo autor apresenta-se a seguir:

Existem momentos nas falas dos professores/formadores em que é privilegiada a influência dos saberes docentes e de experiências anteriores, quando eram alunos,

³¹ Determinante no sentido de importante. Não condiz com o referencial teórico-epistemológico adotado na presente tese – ou seja, a Epistemologia Genética – atribuir ao adjetivo “determinante” o sentido de algo impossível de ser modificado/(re)significado.

bem como a influência da família, de grupos de estudo religioso, de momentos culturais, etc. Confirma-se, assim, o que os estudos assinalam: alguns saberes docentes têm sua origem nas experiências anteriores do profissional, independente da formação acadêmica. (HARUNA, 2004, p. 110-111, grifo nosso)

Logo, experiências provenientes de outras instâncias/esferas da vida do sujeito (familiar, cultural, religiosa, etc.), além da experiência escolar, também influenciam a constituição da própria prática pedagógica. Tal fato vai de encontro ao exposto por Tardif (2002) acerca das diferentes fontes que ‘contribuem’ na constituição dos saberes docentes e da prática pedagógica.

Num ‘segundo’ estudo, Andrade (2006) – por meio de narrativa das histórias de vida, de entrevistas semiestruturadas, questionários, diários de nota – buscou entender o sentido dos discursos de vinte professores (atuantes em universidades públicas e particulares de Fortaleza (CE) e sem formação pedagógica) sobre suas práticas de ensino, modos de ser e fazer (docente), suas concepções sobre como/onde/com quem aprenderam a lecionar no Ensino Superior. O estudo realizado alicerçou-se nas investigações de Maurice Tardif e na perspectiva dialógica e polifônica de Mikhail Bakhtin. Os resultados obtidos foram:

- a) O imaginário dos participantes acerca da docência constitui-se por um conjunto de crenças, valores, concepções e sentimentos, estabelecidos de modo mutável, dialético e dinâmico.
- b) Quanto à constituição das práticas de ensino desses professores, observaram-se três características: b.1) é autodidata e intuitiva; b.2) assenta-se na existência de um dom ou talento para ensinar; b.3) o conhecimento específico da disciplina lecionada é considerado como autossuficiente no sentido de suprir a falta dos conhecimentos pedagógicos³².
- c) Quanto às fontes, ou seja, onde aprenderam a lecionar, identificaram-se: a família, a escola, a profissão e as interações sociais. A respeito da influência dos saberes pré-profissionais, a autora pontuou:

Em relação à contribuição trazida da formação escolar pré-profissional, todos são enfáticos ao afirmarem que sem dúvida alguma a escola e seus rituais, sedimentados durante longos anos como estudantes deixam marcas indeléveis, que norteiam suas práticas principalmente no início de suas carreiras, as quais são reformuladas e adaptadas às suas necessidades; reconhecem, igualmente, que as rotinas escolares influenciaram a forma de estruturar, planejar e organizar suas aulas e que de início orientaram-se por lembranças advindas dos tempos de escolas. (ANDRADE, 2006, p. 80-81, grifo nosso)

³² As características b.2) e b.3) coincidem, respectivamente, com as ‘cegueiras’ conceituais “Basta ter talento!” e “Basta conhecer o conteúdo!” apresentadas por Gauthier et al. (1998). Tais ‘cegueiras’ contribuem à (des)profissionalização do ensino e ‘dão’ a entender que ‘qualquer um’ – sem formação específica à docência – pode ensinar.

A partir das discussões apresentadas na presente subseção – e considerando o já exposto nas subseções precedentes – tornam-se possíveis as seguintes proposições:

1.^a A Formação Inicial de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental deve:

- a) possibilitar a construção de conceitos matemáticos – ainda não aprendidos pelo licenciando durante a Educação Básica – que serão ‘objeto’ de ensino na futura prática pedagógica;
- b) propiciar a ‘ampliação’ dos conceitos matemáticos denotando os aspectos históricos de sua construção, sua utilização na sociedade atual, etc.
- c) inserir questões decorrentes da prática pedagógica escolar durante/na reflexão teórica de modo a possibilitar uma integração entre as disciplinas teóricas e ‘práticas’;
- d) incorporar os resultados das pesquisas em Educação e Educação Matemática na prática docente e na própria (re)estruturação dos cursos de Pedagogia;
- e) considerar os saberes experienciais ‘trazidos’ pelos alunos (de sua trajetória escolar, familiar/social e profissional dos já atuantes no magistério) à proposição das atividades a serem desenvolvidas no curso. A justificativa reside na influência que tais saberes exercem sobre a construção dos outros saberes (curriculares, disciplinares, pedagógicos, etc.) abordados na Formação Inicial.

2.^a Os saberes da experiência pré-profissional já construídos pelos estudantes devem ser (re)significados na Formação Inicial – e também ao longo da carreira docente – para que a utilização dos mesmos na (futura) prática pedagógica não ocorra de modo acrítico, ou seja, sem a devida reflexão (a partir de referenciais teóricos) dos seus limites e possibilidades.

EM SÍNTESE, nesta terceira seção abordaram-se algumas questões referentes à Formação de Professores. Nesse contexto, discutiu-se a importância da Formação Inicial – enquanto uma das primeiras etapas (e não a única) – no processo formativo do professor; observando-se, também, alguns de seus problemas advindos (em grande parte) do modelo da racionalidade técnica que ainda ‘estrutura’ considerável parcela dos cursos de graduação (e de Licenciaturas) em nosso país. Após a explicitação de algumas tipologias de conhecimentos e saberes docentes – sendo esses necessários e específicos à profissão professor – deu-se ‘atenção’ aos saberes da experiência pré-profissional devido ao objeto de estudo da presente investigação incidir sobre tais saberes. Apresentaram-se, também, algumas considerações a respeito das crenças e das concepções pelo fato das mesmas constituírem ‘uma parte’ dos saberes da experiência pré-profissional. Por fim, foram apresentadas algumas pesquisas –

desenvolvidas pelos pares – cujas discussões e resultados relacionam-se com o objeto de investigação da presente pesquisa que incide sobre a Formação Inicial do pedagogo em relação à Matemática (considerando-se, em particular, os saberes da experiência pré-profissional acerca dessa ciência).

Na próxima seção apresentar-se-á a metodologia utilizada para a realização da presente pesquisa.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Para se realizar uma pesquisa é preciso promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações [...] sobre determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito dele. Em geral isso se faz a partir do estudo de um problema, que ao mesmo tempo desperta o interesse do pesquisador e limita suas atividades de pesquisa a uma determinada porção do saber, a qual ele se compromete a construir naquele momento. Trata-se, assim, de uma ocasião privilegiada, reunindo o pensamento e a ação de uma pessoa, ou de um grupo, no esforço de elaborar o conhecimento de aspectos da realidade que deverão servir para a composição de soluções propostas aos seus problemas. (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p. 1-2, grifo nosso)

Conforme salientado na epígrafe, a realização de uma pesquisa necessita de ‘um’ “confronto entre os dados, as evidências, as informações sobre determinado assunto e o conhecimento teórico a respeito dele”. Na presente pesquisa, o assunto em questão refere-se aos saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino aprendizagem) e as possíveis (re)significações desses saberes advindas da participação/ação de duas licenciandas em Pedagogia no Grupo de Estudo a ser apresentado/detalhado na próxima seção (5). Como os dados tornam-se essenciais à investigação do referido assunto (problema de pesquisa) – investigação essa possibilitada pelo confronto/análise desses dados com os conhecimentos teóricos (em nosso caso, os conhecimentos denotados nas seções 2 e 3) – então, na presente seção abordar-se-ão os instrumentos e os procedimentos utilizados à obtenção (e à análise) dos dados. No entanto, num primeiro momento, serão apresentados: a) o problema de pesquisa investigado; b) os objetivos (geral e específicos) da pesquisa; c) a caracterização/delineamento da pesquisa.

4.1 O problema de pesquisa

Conforme já denotado na seção 1, enquanto problema de pesquisa pretende-se responder o seguinte questionamento:

Quais os limites e as possibilidades de um Grupo de Estudo alicerçado em elementos teóricos advindos da Epistemologia Genética e da Formação de Professores à (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional de licenciandas em Pedagogia em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem)?

Para investigar os limites e as possibilidades do GE, serão identificadas algumas (re)significações de alguns saberes da experiência pré-profissional (em relação à Matemática

e ao seu processo de ensino e aprendizagem) de duas licenciandas em Pedagogia, (re)significações essas provenientes da participação/ação das licenciandas no referido GE. Mediante essas (re)significações identificadas, poder-se-á, por fim, ‘responder’ o questionamento supracitado. Neste ponto, faz-se oportuno destacar (adiantar) que tanto a reconstituição de alguns desses saberes experienciais quanto a identificação de suas possíveis (re)significações dar-se-ão mediante a elaboração de casos (do tipo estudo de caso) para cada uma das licenciandas participantes da pesquisa. Na subseção 4.2 far-se-á uma discussão a respeito do estudo de caso e sua pertinência ao nosso objeto de investigação.

Após a explicitação do problema de pesquisa, apresentam-se – na subseção seguinte – os objetivos (geral e específicos) da presente investigação. Tais objetivos orientam as ‘ações’ utilizadas na/para a execução da pesquisa.

4.1.1 Objetivo geral e objetivos específicos

Enquanto objetivo geral visa-se:

Identificar os limites e as possibilidades de um Grupo de Estudo alicerçado em elementos teóricos advindos da Epistemologia Genética e da Formação de Professores à (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional de duas licenciandas em Pedagogia em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem).

Em relação aos objetivos específicos – isto é, às ‘ações’ particulares que dão ‘suporte’ à concretização do objetivo geral – pretendem-se:

- a) Reconstituir algumas informações a respeito da trajetória escolar das duas licenciandas, em particular das aulas de Matemática experienciadas pelas mesmas na/durante a Educação Básica.
- b) Identificar alguns conhecimentos (e do tipo esquemas) matemáticos – em específico os pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’¹ – construídos pelas duas licenciandas antes da participação/ação no Grupo de Estudo.
- c) Identificar algumas crenças e concepções em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem) construídas pelas duas licenciandas antes da participação/ação no Grupo de Estudo.
- d) Identificar algumas atitudes em relação à Matemática construídas pelas duas licenciandas antes da participação/ação no Grupo de Estudo.

¹ No decorrer da apresentação/caracterização das atividades/assuntos desenvolvidos no GE (ver adiante na seção 5) apresentar-se-á a definição/o detalhamento acerca do bloco de conteúdo ‘Tratamento da Informação’.

e) Identificar alguns conhecimentos (e do tipo esquemas) matemáticos – em específico os pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’ – (re)significados mediante a participação/ação das duas licenciandas no Grupo de Estudo.

f) Identificar algumas crenças e concepções em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem) (re)significadas mediante a participação/ação das duas licenciandas no Grupo de Estudo.

g) Identificar algumas atitudes em relação à Matemática (re)significadas mediante a participação/ação das duas licenciandas no Grupo de Estudo.

O primeiro objetivo específico (item a) justifica-se pela possibilidade do mesmo em reconstituir algumas lembranças (experiências) das licenciandas acerca da trajetória escolar, em particular dos aspectos gerais das aulas de Matemática ministradas pelos seus ‘antigos’ professores. Como os saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática foram construídos, em grande parte, durante/nas aulas de Matemática vivenciadas pelas licenciandas, então, tal reconstituição torna-se necessária considerando o objeto de investigação da presente pesquisa (ou seja, os referidos saberes).

O segundo objetivo específico (item b) justifica-se pela possibilidade do mesmo em identificar alguns conhecimentos matemáticos, já construídos pelas licenciandas (na/durante a Educação Básica), pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’. Conforme a subseção 3.2.1, os conhecimentos matemáticos anteriores constituem ‘uma das partes’ dos saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática; logo, identificá-los faz-se necessário considerando o objeto de investigação da presente pesquisa. Quanto ao ‘direcionamento’ ao referido bloco de conteúdo, o mesmo deve-se pela abordagem de alguns desses conteúdos matemáticos no GE (ver adiante na seção 5). Assim, a identificação de alguns conhecimentos matemáticos já construídos na Educação Básica (acerca de tais conteúdos) será necessária para – por meio de uma análise comparativa – a posterior identificação de algumas (re)significações (de alguns desses conteúdos pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’) advindas da participação/ação das licenciandas no GE.

Quanto ao terceiro objetivo específico (item c), a justificativa para a sua realização deve-se por motivo análogo ao item b. As crenças e as concepções acerca da Matemática (e seu processo de ensino e aprendizagem) constituem, também, ‘uma das partes’ do saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (rever subseção 3.2.1). Assim, a identificação de tais crenças e concepções já construídas pelas licenciandas antes da participação/ação no GE será necessária para – por meio de uma análise comparativa – a

posterior identificação de algumas (re)significações advindas da participação/ação das licenciandas no GE.

A identificação de algumas atitudes em relação à Matemática – ‘antes’ e ‘após’ a participação/ação das licenciandas no GE – (objetivos d e g) justifica-se pela relação das mesmas com as crenças e as concepções (em relação à Matemática). Conforme já denotado por Ardiles (2007), na subseção 3.3, observa-se uma tendência de dependência e relação (correlação) entre as atitudes, as crenças e as concepções. Assim, a identificação de algumas (re)significações de algumas atitudes em relação à Matemática poderá constituir outro indício quanto à (re)significação de algumas crenças e concepções acerca dessa ciência devido ao fato destas estarem correlacionadas com as atitudes.

Já os objetivos específicos e) e f) justificam-se pela possibilidade dos mesmos em propiciar – por meio de referida análise comparativa – a identificação de algumas (re)significações advindas da participação atuação das licenciandas no GE.

Na impossibilidade de identificar todos os saberes da experiência pré-profissional das licenciandas em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem) devido à própria composição/constituição multifacetada/plural desses saberes (rever subseções 3.2 e 3.2.1 a esse respeito), então, optou-se por identificar algumas de suas constituintes – ou seja, os conhecimento matemáticos, as crenças e as concepções acerca da Matemática (e seu processo de ensino e aprendizagem). Novamente destaca-se que a identificação das atitudes em relação à Matemática servirá apenas enquanto um outro indício para a identificação de algumas (re)significações acerca das crenças e das concepções. A própria dificuldade na identificação destas últimas (crenças e concepções), como pontuado por Ponte (1992), foi a justificativa para a inclusão da identificação das atitudes devido à relação (correlação) já explicada entre as mesmas.

Na subseção seguinte apresenta-se o delineamento/caraterização da pesquisa realizada.

4.2 A caracterização da pesquisa: uma abordagem qualitativa do tipo estudo de caso

A pesquisa realizada caracteriza-se enquanto uma abordagem predominantemente² qualitativa, do tipo estudo de caso. Conforme já exposto na subseção 4.1, cada um dos casos

² Este termo deve-se ao fato da pesquisa valer-se, também, da análise quantitativa na/durante a análise dos dados provenientes da aplicação de uma escala de atitudes em relação à Matemática (BRITO, 1996) (ver adiante nas subseções 4.4.1.2 e 4.5.3). Na presente pesquisa, considera-se o qualitativo e o quantitativo enquanto complementares no/para o processo de investigação. Contudo, destaca-se o caráter predominante da abordagem

elaborados – para cada uma das duas licenciandas participantes da investigação – possibilitou a reconstituição (de alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática) e a identificação das possíveis (re)significações. Conforme Lüdke e André (1998), uma pesquisa pode ser caracterizada enquanto qualitativa quando:

A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento. **[característica 1]**
 Os dados coletados são predominantemente descritivos. **[característica 2]**
 O “significado” que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador. **[característica 3]** (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p. 11-12, **[comentário nosso]**)

Durante a realização da presente pesquisa, o pesquisador-autor contemplou tais características quando: a) estabeleceu um contato direto com as licenciandas – através de diferentes instrumentos aplicados – que lhe permitiu identificar alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática e suas possíveis (re)significações (característica 1); b) obteve uma considerável quantidade de dados predominantemente descritivos, dados esses advindos, em grande parte, da transcrição literal de cada um dos vinte encontros³ que compuseram o GE (característica 2); c) identificou alguns “significados” atribuídos pelas licenciandas acerca da Matemática e seu processo de ensino aprendizagem, significados esses que constituem uma parte dos saberes da experiência pré-profissional referentes a tal ciência.

Sobre a justificativa para a escolha do estudo de caso enquanto uma estratégia de/para a pesquisa, YIN (2002) aponta o seguinte:

1. *Um estudo de caso é uma investigação empírica que*
 - investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real;
2. *A investigação de estudo de caso*
 - enfrenta uma situação tecnicamente única em que haverá muito mais variáveis de interesse do que pontos de dados, e, como resultado,
 - baseia-se em várias fontes de evidências, [...] e, como outro resultado,
 - beneficia-se do desenvolvimento prévio de proposições teóricas para conduzir a coleta e a análise de dados. (YIN, 2002, p. 32-33, grifos do autor)

Assim, a escolha de/em adotar o estudo do caso deveu-se à adequação do mesmo ao nosso objeto de investigação, pois reconstituir alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática e suas possíveis (re)significações (considerando-se a constituição

qualitativa na presente pesquisa pelo fato do nosso objeto de investigação ‘exigir’ este tipo de tratamento, exigência essa proveniente (também) dos instrumentos/procedimentos utilizados à obtenção dos dados.

³ Uma síntese de cada um desses vinte encontros que compuseram o GE será apresentada na próxima seção (na subseção 5.3).

heterogênea/histórica/pessoal desses saberes) constitui-se um ‘momento’ particular/único que exigiu, por parte do pesquisador-autor, vários instrumentos/fontes à obtenção dos dados (ver subseção 4.4) de modo a possibilitar a investigação do referido fenômeno.

Em relação às características de um estudo de caso qualitativo, André (2005) apresenta a *descrição* e a *heurística*:

Descrição significa que o produto final de um estudo de caso é uma descrição “densa” do fenômeno em estudo. Por descrição densa entende-se uma descrição completa e literal da situação investigada.

Heurística significa que os estudos de caso iluminam a compreensão do leitor sobre o fenômeno estudado. Podem revelar a descoberta de novos significados, estender a experiência do leitor ou confirmar o já conhecido. (ANDRÉ, p. 18, grifos da autora)

Nesse sentido, os dois estudos de caso (a serem apresentados na seção 6) contemplaram as características aludidas acima ao descreverem/identificarem: a) alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (saberes esses construídos, em grande parte, nas aulas de Matemática vivenciadas pelas licenciandas durante a Educação Básica); b) algumas possíveis (re)significações acerca de alguns desses saberes. Além disso, espera-se que tais casos auxiliem os leitores no que tange à compreensão do problema de pesquisa investigado, além de possibilitar a generalização naturalística. Sobre esse tipo de generalização e/ou transferência, André (2005) observa:

Quanto à generalização, Stake (1978) considera que os estudos de caso podem fornecer experiência vicária e se tornam, assim, uma fonte de generalização naturalística. O conhecimento em profundidade de um caso, segundo ele, pode ajudar-nos a entender outros casos. A generalização naturalística se dá no âmbito do leitor que, com base nas descrições feitas pelo autor do estudo e na sua própria experiência, fará associações e relações com outros casos, generalizando seus conhecimentos.

Lincoln e Guba (1985) usam o conceito de transferência em lugar de generalização. Eles partem do princípio que os resultados da pesquisa são sempre hipóteses provisórias e afirmam que a transferência é uma função direta da similaridade entre dois contextos. Se os contextos “A” e “B” são suficientemente congruentes, dizem eles, então as hipóteses de um contexto podem se aplicar ao outro. E acrescentam: não se pode falar em transferência com base no contexto de um único estudo. O que o pesquisador pode fazer é fornecer informações bem detalhadas do contexto em estudo de modo que o leitor tenha base suficiente para fazer julgamento da possibilidade de transferência para outro contexto. Essa base suficiente de informações os autores identificam como a “descrição densa”. (ANDRÉ, 2005, p. 62-63)

Essa discussão em torno da ‘validade’/pertinência do estudo de caso de/em propiciar uma generalização naturalística ‘justifica’ a não necessidade de um elevado número de participantes (casos) para a realização de uma pesquisa com abrangência/representatividade

da realidade. Assim, a elaboração dos dois casos ‘densos/profundos’ (ver adiante na seção 6), em nosso entendimento, possibilitará a generalização/transferência para outros casos referentes/relacionados ao (nosso) objeto de investigação.

Após essa breve caracterização da pesquisa no que tange à sua abordagem/tipo e pertinência quanto ao (nosso) problema de investigação, na subseção seguinte apresentam-se as participantes da pesquisa.

4.3 As participantes da pesquisa

As participantes da pesquisa – denominadas P-2 e P-4 – eram, na época da realização da pesquisa, duas licenciandas do curso de Pedagogia (de uma Universidade pública do interior do estado de São Paulo); curso esse que habilita professores para a atuação docente na Educação Infantil/anos iniciais do Ensino Fundamental e para a gestão (administração) educacional. Embora sete licenciandas tenham participado do GE – do início até o fim –, decidiu-se por considerar apenas duas delas. Pela abordagem adotada no presente estudo, a elaboração desses dois casos é suficiente pelo fato dos mesmos serem ‘representativos’⁴ quando considerado o conjunto total das licenciandas. No entanto, cabe ressaltar que as duas licenciandas – P-2 e P-4 – foram consideradas, também, pelo motivo de terem participado ativamente das atividades e dos assuntos discutidos no GE. Até porque, considerando o nosso referencial teórico-epistemológico, tornar-se-ia incoerente escolher licenciandas (para a elaboração dos dois estudos de caso) que menos ‘atuaram’ sobre o GE. Assim, para (re)significar a licencianda tem que agir de modo que essa ação possibilite a construção de novas significações/compreensões acerca de alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem).

Visando a uma ‘breve’ caracterização do percurso escolar dessas duas licenciandas – antes do ingresso no curso de Pedagogia – a seguir apresentam-se quadros cujas respostas advieram da aplicação do Questionário Inicial ‘Categoria A: Informações Contextuais’ (ver Apêndice A). Tal questionário será detalhado adiante (ver subseção 4.4.1.1).

⁴ É sabido (considerando-se o referencial teórico apresentado na seção 3) que os saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática, por serem pessoais/históricos/contextuais, diferem de uma licencianda para outra; contudo, tanto o contexto escolar das licenciandas (no qual esses saberes foram construídos) quanto as dificuldades referentes ao conteúdo matemático apresentaram, entre si, várias similaridades/pontos de congruência. Daí decorre a representatividade dos dois casos (da P-2 e da P-4).

Quadro 16 – Percurso escolar anterior à Formação Inicial (curso de Pedagogia) da P-2.

Informações Contextuais: P-2			Idade: 32 anos		
1) Período em que cursou a Educação Básica e ou Ensino Técnico e o tipo de administração:					
Educação Infantil: 1985 a 1986 (Pré)			Ensino Médio: _____ a _____		
Particular ()	Pública (X)	Cooperativa ()	Particular ()	Pública ()	Cooperativa ()
Ensino Fundamental: 1987 a 1994			Ensino Técnico: 1995 a 1997		
Particular ()	Pública (X)	Cooperativa ()	Particular ()	Pública (X)	Cooperativa ()
			Se sim, qual foi? Processamento de dados.		

Fonte – Resposta elaborada pela P-2, 2011.

Quadro 17 – Percurso escolar anterior à Formação Inicial (curso de Pedagogia) da P-4.

Informações Contextuais: P-4			Idade: 25 anos		
1) Período em que cursou a Educação Básica e ou Ensino Técnico e o tipo de administração:					
Educação Infantil: 1987 a 1991			Ensino Médio: 2001 a 2003		
Particular (X)	Pública ()	Cooperativa ()	Particular (X)	Pública ()	Cooperativa ()
Ensino Fundamental: 1992 a 2000			Ensino Técnico: _____ a _____		
Particular (X)	Pública (X)	Cooperativa ()	Particular ()	Pública ()	Cooperativa ()
			Se sim, qual foi? _____		

Fonte – Resposta elaborada pela P-4, 2011.

Em conversa posterior com as licenciandas, pode-se constatar que a P-2 e a P-4 já realizaram, respectivamente, graduação em bacharelado em Comunicação Social e Licenciatura Plena em Letras. No entanto, apenas a P-4 atuava – pelo menos na época da realização do GE – em sua área ministrando aulas de Língua Portuguesa (como professora substituta) em escolas da rede estadual no município em que residia. Em relação à formação técnica obtida pela P-2, a mesma salientou não trabalhar nesta área (processamento de dados) por não ter se ‘identificado’ com a profissão; motivo esse que a ‘levou’ a cursar Pedagogia. Além disso – e considerando os quadros anteriores – com exceção da P-4 que frequentou, em sua grande maioria, escolas particulares, a P-2 somente estudou em escolas públicas.

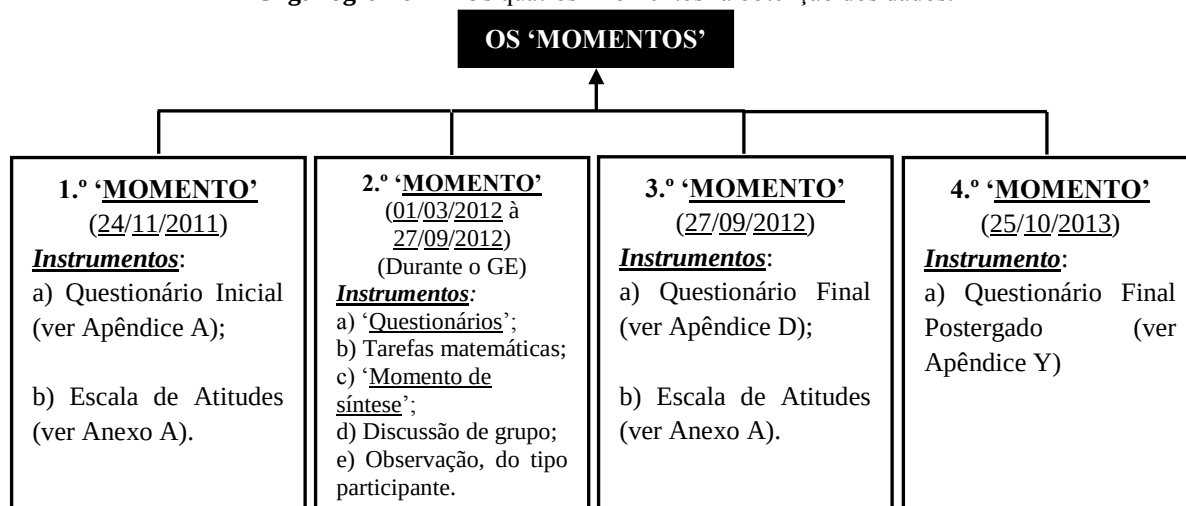
Após estas caracterizações contextuais das licenciandas no que tange ao período/tipo de escolas frequentadas durante a Educação Básica, na próxima subseção denotam-se os instrumentos e procedimentos utilizados à obtenção dos dados.

4.4 Instrumentos e procedimentos utilizados para a obtenção dos dados: uma visão geral

A obtenção dos dados ocorreu em quatro ‘momentos’. Faz-se válido salientar que os instrumentos utilizados possibilitaram a obtenção dos dados que ‘propiciaram’, através da análise dos mesmos, a ‘execução’ dos objetivos específicos (rever subseção 4.1.1). Esses objetivos, por sua vez, permitiram a investigação do objetivo geral (rever subseção 4.1.1). O

organograma seguinte apresenta a ocorrência temporal de tais ‘momentos’ e os seus respectivos instrumentos.

Organograma 4 – Os quatros ‘momentos’ à obtenção dos dados.



Fonte – Elaborado pelo autor, 2013.

Os dados advindos desses diversos instrumentos e sua posterior análise/confronto/comparação/cruzamento possibilitou a realização de uma pesquisa com mais “[...] credibilidade, transferibilidade, consistência e confirmabilidade” (ALVES, 1991, p. 61). Exemplificando, a comparação/cruzamento de dados provenientes de diferentes instrumentos e procedimentos (no diversos ‘momentos’) tornou mais ‘confiável/consistente’ a identificação de alguns saberes da experiência pré-profissional das licenciandas em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem) e as possíveis (re)significações desses saberes.

Os instrumentos utilizados pelo pesquisador-autor, e que permitiram a obtenção dos dados, podem ser agrupados em:

- a) questionários;
- b) escala de atitudes;
- c) tarefas matemáticas;
- d) elaboração textual – do tipo ‘momento de síntese’;
- e) discussão de grupo – do tipo entrevista informal;
- f) observação participante.

Os itens a) à c) serão detalhados nas próximas subseções. As discussões de grupo, ou entrevistas informais (FIORENTINI, LORENZATO, 2007, p. 123), foram realizadas entre o pesquisador-autor e as licenciandas na/durante a realização dos encontros que compuseram o

GE. Das discussões fez-se possível a obtenção de alguns dados pertinentes ao objeto investigado. A observação participante (GIL, 1999, p. 113) – isto é, a observação realizada pelo pesquisador-autor na/durante a realização das atividades desenvolvidas no GE – também permitiu, de modo análogo à discussão de grupo, a obtenção dos referidos dados (alguns saberes e suas (re)significações). O ‘momento de síntese’ – a ser apresentado detalhadamente na próxima seção (em específico na subseção 5.1) – constituiu um momento de/para o registro, por escrito, das atividades desenvolvidas no/durante o GE.

Visando a um detalhamento dos quatro ‘momentos’, ou seja, dos seus respectivos instrumentos (e dos procedimentos utilizados) à obtenção dos dados, apresentar-se-ão as subseções seguintes.

4.4.1 O 1.º ‘momento’: aplicação do Questionário Inicial e da Escala de Atitudes

O 1.º ‘momento’ à obtenção dos dados se deu por meio da aplicação do Questionário Inicial (ver Apêndice A) e da Escala de Atitudes (ver Anexo A). No entanto, anterior a essa aplicação, o pesquisador-autor verificou – dentre os licenciandos que na época frequentavam o 3.º ano do curso de Pedagogia – os interessados em participar da pesquisa. Para identificar os licenciandos interessados em participar da pesquisa (e, por conseguinte, do GE) o pesquisador (autor) contou com a ajuda da P-2. Essa participante – enquanto representante de sua turma no conselho do curso de Pedagogia – encaminhou um *e-mail* (tipo convite ‘informal’) a todos os licenciandos de sua turma (do 3.º ano). Nesse convite – elaborado pelo pesquisador-autor – foi salientada a finalidade da pesquisa a ser realizada. Cabe ressaltar que o fato do pesquisador-autor já ter sido professor destes licenciandos facilitou o estabelecimento do contato inicial para com a turma. Inicialmente, dez licenciandas indicaram interesse em participar da pesquisa.

Após verificar a disponibilidade dos interessados em participar da presente pesquisa, no dia 24 de novembro do ano de 2011 o pesquisador-autor reuniu-se com as dez licenciandas em uma sala da universidade. No referido dia, depois de apresentar ‘formalmente’ os objetivos da pesquisa (e do GE à Formação Inicial), as licenciandas, num primeiro momento, leram e assinaram o Termo de consentimento livre e esclarecido e o Termo de autorização (ver Apêndice B). Em seguida, foi entregue o Questionário Inicial (ver Apêndice A) sendo disponibilizadas duas horas para o seu preenchimento. Depois, as licenciandas responderam a Escala de Atitudes em relação à Matemática (ver Anexo A – BRITO, 1996) durante um período de, aproximadamente, trinta minutos. Feita a recolha e verificação do preenchimento

correto de ambos os instrumentos, o pesquisador-autor e as dez licenciandas combinaram um dia da semana ‘fixo’ à ocorrência dos encontros do GE nos dois semestres do próximo ano (2012). Finalizado este 1.º ‘momento’, o pesquisador-autor despediu-se das alunas e agradeceu o aceite para com a pesquisa.

Os referidos instrumentos utilizados neste 1.º ‘momento’ serão detalhados a seguir.

4.4.1.1 O Questionário Inicial (APÊNDICE A)

O Questionário Inicial – um instrumento elaborado pelo pesquisador-autor – mostrou-se pertinente à presente pesquisa, pois permitiu “[...] obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamento presente ou passado, etc.” (GIL, 2008, p. 121, grifo nosso.). Nesse sentido, foi possível investigar (parcialmente) alguns objetivos específicos – a), b) e c) (rever subseção 4.1.1) – através da análise das respostas dadas pelas participantes – por escrito – a algumas questões agrupadas em duas categorias⁵. Tais questões apresentam-se a seguir:

a) ‘Categoria B: Lembranças do SEU Ensino’:

a.1) Antes de ingressar na Universidade você frequentou diferentes etapas de escolaridade. Quais foram as impressões que tais etapas transmitiram para **VOCÊ** acerca do significado de **ESCOLA**?
Educação Infantil: _____

Ensino Fundamental (1.ª à 4.ª série): _____

Ensino Fundamental (5.ª à 8.ª série): _____

Ensino Médio: _____

Ensino Técnico: _____

a.2) Durante a sua trajetória escolar antes de ingressar na Universidade **VOCÊ** se recorda de algum(s) professor(s) que tenha(m) contribuído **positivamente** com sua formação? E àqueles que, por ventura, o fizeram **negativamente**?

Disciplina: _____	Justificativa: _____
() Influência Positiva.	_____
() Influência Negativa.	_____

a.3) De um modo geral, a maioria dos **SEUS** professores de Matemática adotou as seguintes posturas (didático-metodológicas) com qual frequência?

	NUNCA OU QUASE NUNCA	DE VEZ EM QUANDO	SEMPRE
1. Exposição Oral feita pelo professor na lousa.			

⁵ A Categoria A – Informações Contextuais – já foi apresentada na subseção 4.3.

2. Agrupamento dos alunos para realização de atividades sugeridas pelo professor.			
3. Atividades individuais solicitadas pelo professor.			
4. Aplicação de jogos envolvendo noções / conteúdos matemáticos.			
5. Troca de ideias entre alunos e professores.			
6. Troca de ideias entre alunos e alunos.			
7. Trabalho interdisciplinar, ou seja, a Matemática e outras áreas do conhecimento.			
8. Trabalho intradisciplinar, ou seja, a Matemática em outras áreas do conhecimento.			
9. Atividades envolvendo materiais concretos manipulativos.			
10. Confeção de algum material pelos alunos.			
11. Atividades lúdicas como: dramatizações, brincadeiras, entre outras.			
12. Uso de tecnologias (computador, internet, calculadora, projetor, etc.)			
Outros _____			

a.4) Na questão anterior você denotou as posturas (didático-metodológicas) adotadas pela maioria dos **SEUS** professores de Matemática. De todos os professores de Matemática que você teve algum não se “encaixa” nessa “maioria”? Em caso afirmativo, denote as posturas (didático-metodológicas) adotadas por esse professor e comente, abaixo do quadro, quais os motivos que tornavam a aula desse professor diferenciada das demais. **[Repete-se, aqui, o quadro anterior.]**

a.5) Como você avalia os conteúdos matemáticos aprendidos por **VOCÊ**?

	NÃO APRENDI	APRENDI + OU -	APRENDI BEM
a) Operações Aritméticas Básicas:			
b) Sistema de Numeração Decimal:			
c) Geometria Plana e Espacial:			
d) Grandezas e Medidas:			
e) Tratamento da Informação:			
f) Solução de Problemas:			

a.5.1) Em relação à questão anterior, escreva quais são os conteúdos que **VOCÊ** considera como pertencentes aos ‘Blocos de Conteúdos’.

‘BLOCOS’	CONTEÚDOS PERTENCENTES
a) Operações Aritméticas Básicas:	_____
b) Sistema de Numeração Decimal:	_____
c) Geometria Plana e Espacial:	_____
d) Grandezas e Medidas:	_____
e) Tratamento da Informação:	_____
f) Solução de Problemas:	_____

a.6) Dos conteúdos matemáticos salientados por **VOCÊ** como “NÃO APRENDI” (questão 5) qual(s) **VOCÊ** acha necessário(s) para sua futura atuação enquanto professor?

a.7) Na **SUA** opinião, o que é a Matemática?

a.8) Na **SUA** opinião, como se aprende a Matemática?

a.9) Na SUA opinião, como deve ser ensinada a Matemática?

4.4.1.2 A Escala de Atitudes em relação à Matemática (ANEXO A)

A escala de atitudes⁶ – validada por Brito (1996) – permitiu identificar algumas atitudes positivas e negativas em relação à Matemática. Assim, esse instrumento ‘possibilitou’ a investigação dos objetivos específicos d) e g). Tal escala é composta de vinte e uma afirmações, sendo que em cada afirmação a licencianda deve indicar (apenas) uma das alternativas possíveis, a saber: discordo totalmente, discordo, concordo e concordo totalmente. O quadro seguinte expõe as afirmações agrupadas nas categorias positiva e negativa.

Quadro 18 – Escala de atitudes em relação à Matemática: agrupamento das afirmações nas categorias positiva e negativa.

A F I R M A Ç Õ E S	POSITIVA	3) Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.
		4) A Matemática é fascinante e divertida.
		5) A Matemática me faz sentir seguro(a) e é, ao mesmo tempo, estimulante.
		9) O sentimento que tenho com relação à Matemática é bom.
		10) A Matemática é algo que eu aprecio grandemente.
		14) Eu gosto realmente de Matemática.
		15) A Matemática é uma das matérias que eu realmente gosto de estudar na escola.
		18) Eu fico mais feliz na aula de Matemática que na aula de qualquer outra matéria.
		19) Eu me sinto tranquilo(a) em Matemática e gosto muito dessa matéria.
		20) Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação à Matemática: Eu gosto e aprecio essa matéria.
	NEGATIVA	1) Eu fico sempre sob uma terrível tensão na aula de Matemática.
		2) Eu não gosto de Matemática e me assusta ter que fazer essa matéria.
		6) Dá um branco na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando estudo Matemática.
		7) Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço em Matemática.
		8) A Matemática me deixa inquieto(a), descontente, irritado(a) e impaciente.
		10) A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido(a) em uma selva de números e sem encontrar a saída.
		12) Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão.
		13) Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz em Matemática.
		16) Pensar sobre a obrigação de resolver um problema de Matemática me deixa nervoso(a).
		17) Eu nunca gostei de Matemática e é a matéria que me dá mais medo.
		21) Não tenho um bom desempenho em Matemática. ⁷

Fonte – (BRITO, 1996).

⁶ Mais informações a respeito da origem e tradução/readaptação e validação estatística da referida Escala de Atitudes encontram-se no estudo desenvolvido por Brito (1996).

⁷ Esta afirmação negativa não é considerada na soma total dos pontos da escala. Segundo Brito (1996), a sua inserção possui a finalidade de verificar a auto percepção do aluno em relação ao seu próprio desempenho em Matemática.

De acordo com a alternativa assinalada, cada afirmação positiva recebe uma pontuação distribuída da seguinte maneira: concordo totalmente (4 pontos); concordo (3 pontos); discordo (2 pontos); discordo totalmente (1 ponto). De maneira inversa, cada afirmação negativa é pontuada como: concordo totalmente (1 ponto); concordo (2 pontos); discordo (3 pontos); discordo totalmente (4 pontos). Assim, a pontuação da escala pode variar de um mínimo de 20 a um máximo de 80 pontos, indicando, respectivamente, atitudes mais negativas ou mais positivas em relação à Matemática.

Para identificar, dentre as licenciandas que responderam, àquelas que possuíam atitude positiva ou negativa, comparou-se a pontuação individual em relação à média dos pontos obtida pelo grupo. Por exemplo, supondo que a média do grupo seja 40 pontos, a licencianda que contabilizar um valor menor que esse possui uma atitude negativa; em contrapartida, valores maiores que 40 indicam uma atitude positiva.

4.4.2 O 2.º ‘momento’: os instrumentos e os procedimentos à obtenção dos dados realizados no/durante o Grupo de Estudo

O 2.º ‘momento’ à obtenção dos dados ocorreu durante a realização do GE. Para a constituição do *corpus* ‘denso e profundo’ dos dados, dados esses necessários à constituição dos dois estudos de caso, adotaram-se os seguintes instrumentos e procedimentos:

a) Gravação em áudio e vídeo de todos os encontros realizados. A partir dessas gravações, o pesquisador-autor fez a transcrição literal⁸ de cada um dos vinte encontros após três dias da ocorrência dos mesmos. A escolha pela transcrição ‘quase’ imediatamente após a ocorrência de cada encontro justifica-se no fato de que, ao fazê-la, consegue-se registrar o máximo de informações armazenadas recentemente na memória de curto prazo do pesquisador-autor. Tais transcrições contemplaram todas as atividades⁹ (desenvolvidas no GE) e uma grande parte dos demais assuntos discutidos no GE e pertinentes à investigação do fenômeno em questão. A justificativa pela realização da transcrição literal se deveu, pois esta forma de transcrição é a “[...] mais completa, mais informativa, [...] [sendo caracterizada pela] inclusão de sinais indicando entonações, sotaques, regionalismo e ‘erros’ de fala.” (HARTMUT, 2006, p. 206). Para a elaboração de cada uma das transcrições referente a cada um dos encontros

⁸ Na seção 5 (na subseção 5.3) apresentar-se-á uma síntese dos referidos vinte encontros que compuseram o GE. As transições desses vinte encontros encontram-se nos Apêndices E à X.

⁹ Tais atividades referem-se às atividades elaboradas pelo pesquisador-autor (ver adiante na subseção 5.1).

empregaram-se as seguintes estratégias: a) construção de cabeçalho identificando a data, o tempo de duração e o encontro realizado (1.º, 2.º, etc.); b) enumeração sequencial das falas do pesquisador-autor (identificado textualmente pela expressão “**Pesquisador/Participante**”) e das licenciandas (identificadas textualmente pelas expressões/abreviações “**P-2**, **P-4**, **P-5**, etc.”). Além dessas identificações/diferenciações, registraram-se as falas das licenciandas em *itálico* e as do pesquisador-autor sem esse recurso de digitação; c) comentários adicionais¹⁰ (observações do pesquisador-autor) denotados entre ‘[colchetes]’ e em ‘**negrito**’; d) registros, na forma de quadros, dos textos lidos/discutidos, dos desafios/situações propostas, do material gráfico e/ou textual utilizado pelo pesquisador-autor à explicação/discussão dos assuntos abordados, das resoluções apresentadas pelas licenciandas referentes aos desafios/situações, etc. Esquemáticamente, tais estratégias apresentam-se na figura a seguir:

Quadro 19 – Estratégias utilizadas à transcrição dos encontros.

APÊNDICE E – TRANSCRIÇÃO DO 1.º ENCONTRO	
Data: <u>01/03/2012</u> Tempo de Duração: <u>3 horas</u> .	
1. Pesquisador/Participante: fala do pesquisador-autor. 2. P-2: <i>fala da participante</i> . [Comentários adicionais complementando alguma ideia suprimida.] 3. P-4: <i>fala da participante</i> . [Comentários adicionais salientando expressões faciais observadas.]	
Quadro apresentando textos discutidos, soluções das licenciandas acerca de desafios/situações propostas, etc.	
[Comentários adicionais denotando: as atividades desenvolvidas, os agrupamentos realizados entre as licenciandas, os assuntos discutidos, etc.]	

Fonte – Elaborado pelo autor, 2012.

Conforme já pontuado, os instrumentos *discussão de grupo* (do tipo entrevista informal) e *observação participante* foram ‘utilizados/realizados’ durante a ocorrência dos encontros que compuseram o GE. A referida transcrição literal dos encontros possibilitou ao pesquisador-autor identificar alguns dados pertinentes ao (nosso) objeto de investigação, dados esses advindos de tais instrumentos.

¹⁰ Exemplos de comentários adicionais: observações das expressões faciais das licenciandas ao decorrer das discussões e/ou solução das ‘situações problema’ propostas, explicação das atividades desenvolvidas bem como dos ‘combinados’ entre o pesquisador-autor e as licenciandas, complementação das falas destas últimas, etc.

b) ‘*Aplicação*’ dos seguintes instrumentos/atividades¹¹: a) ‘questionários’, b) tarefas matemáticas (do tipo ‘situações problema’ e ‘desafios para casa’); c) elaboração textual – do tipo ‘momento de síntese’. As tarefas matemáticas foram situações propostas às licenciandas que exigiram, das mesmas, uma resolução (matemática). Durante a aplicação dos referidos instrumentos, o pesquisador-autor solicitou às licenciandas que resolvessem as tarefas matemáticas, respondessem os ‘questionários’ e elaborassem os ‘momentos de síntese’, individualmente. Esse material foi recolhido pelo pesquisador-autor para posterior análise. A seguir, apresentam-se o ‘conteúdo’ dos ‘questionários’, das tarefas matemáticas aplicadas, bem como a investigação de alguns objetivos específicos a partir da análise dos dados advindos dos mesmos:

b.1) Questionários:

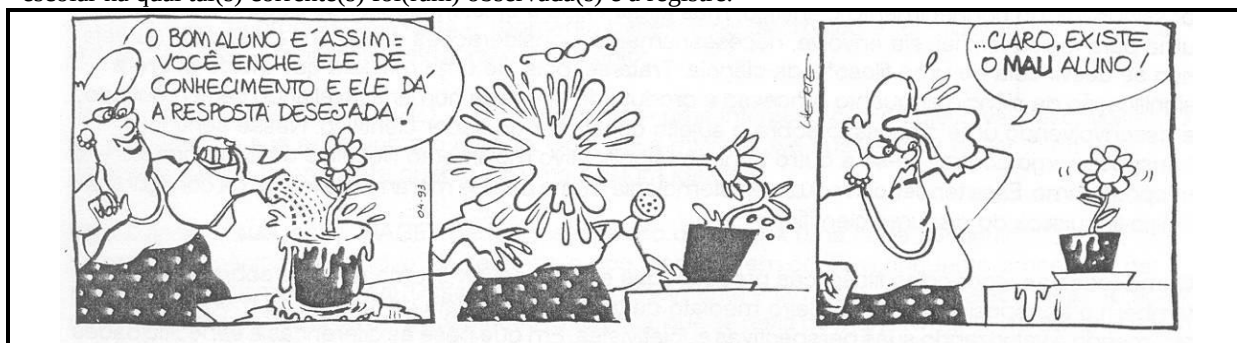
1) Durante a Educação Básica os gráficos e as tabelas foram abordados em quais situações? Para quais finalidades? Comente.

2) Se um aluno do 5.º ano do Ensino Fundamental lhe perguntasse o que é uma tabela como você a definiria?

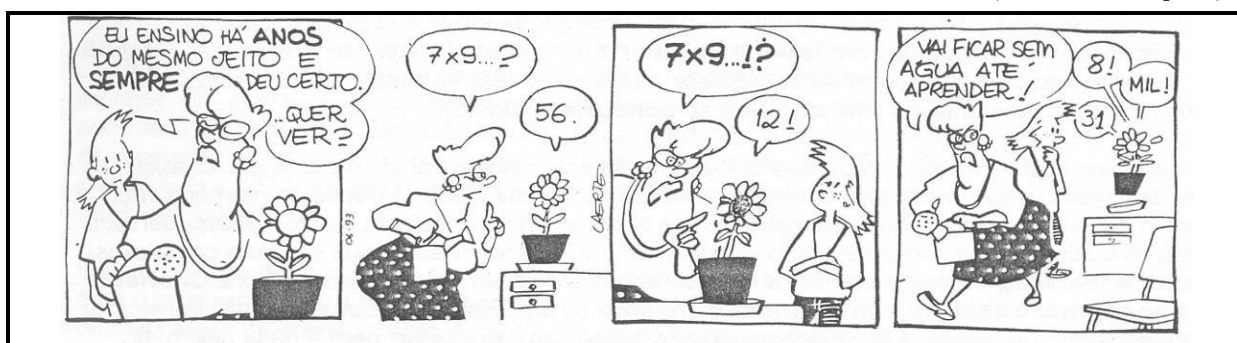
3) E em relação ao gráfico? Como seria a sua explicação?

4) De que modo seus professores de Matemática abordaram os gráficos e as tabelas?

5) Identifique qual(s) corrente(s) epistemológica(s) está(ão) implícita(s) nas tiras abaixo que representam as atitudes de uma professora de Matemática. Em seguida, tente se lembrar de alguma experiência escolar na qual tal(s) corrente(s) foi(ram) observada(s) e a registre.



Fonte – (BORJA, 1993, p. 15).



Fonte – (BORJA, 1993, p. 87).

¹¹ Algumas dessas referidas atividades, ver adiante na seção 5, foram (também) utilizadas no/durante o GE.

As questões anteriores (1 à 3) visaram possibilitar a investigação do objetivo específico b), de modo específico os conhecimentos matemáticos (do tipo esquemas) referentes ao conceito de média aritmética.

4) Considere sete números cuja Média Aritmética é 6. Adicionando um número a esse conjunto, a ‘nova’ Média Aritmética é 5,5. O número adicionado é:

- a) 0,5 b) 5,5 c) 5,75 d) 2 e) 3

5) No desafio anterior, qual número deve ser adicionado ao conjunto inicial (dos sete números) para que a Média Aritmética permaneça a mesma, ou seja, igual a 6?

- a) 7 b) 2 c) 6 d) 5 e) 4

As questões anteriores (4 e 5) visaram possibilitar a investigação do objetivo específico e), de modo específico, os conhecimentos (do tipo esquemas) matemáticos referentes ao conceito de média aritmética. Torna-se oportuno ressaltar que a aplicação destes instrumentos (do tipo tarefas matemáticas) ocorreu após a abordagem/resolução, pelas licenciandas, de uma diversidade de ‘situações problema’¹³ versando sobre o referido conteúdo.

6) Numa lanchonete há 4 tipos de sanduíches, 5 tipos de sucos e 2 tipos de sorvetes. De quantas maneiras diferentes podemos tomar um lanche composto de 1 sanduíche, 1 suco e 1 sorvete?

7) Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?

8) Em uma competição com 8 corredores, de quantos modos distintos podem ser conquistadas as medalhas de ouro e prata?

As questões anteriores (6 à 8) visaram possibilitar a investigação do objetivo específico b), de modo específico, alguns conhecimentos (do tipo esquemas) matemáticos referentes aos conceitos de princípio multiplicativo, permutação e arranjo.

9) As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Quantas placas podem ser criadas com as letras A, B e C e os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, podendo repetir a letra e não podendo repetir o algarismo?

10) A diretoria de um clube é composta por 12 membros que podem ocupar a função de presidente, secretário ou tesoureiro. De quantas maneiras pode-se formar, com os 12 membros, chapas que contenham presidente, secretário e tesoureiro?

11) Seis amigos foram ao parque de diversões ‘andar’ de montanha russa. Eles pretendem ir no mesmo carrinho; no entanto, no banco da frente – que ‘produz’ maior emoção – só cabem três pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem escolher o trio que irá no banco da frente?

¹³ Na próxima seção apresentar-se-ão, detalhadamente, as referidas situações problema que compuseram algumas das diversas atividades desenvolvidas no GE.

12) Quantos são os anagramas possíveis da palavra PAPAGAIO?

As questões anteriores (9 à 12) visaram possibilitar a investigação do objetivo específico e), de modo específico, os conhecimentos (do tipo esquemas) matemáticos pertencentes à Combinatória (permutação, arranjo e combinação). Faz-se importante destacar que a aplicação destes instrumentos (do tipo tarefas matemáticas) ocorreu após a abordagem/resolução, pelas licenciandas, de uma diversidade de ‘situações problema’ versando sobre os referidos conteúdos.

Os dados provenientes das elaborações escritas das licenciandas advindas do instrumento ‘momento de síntese’, bem como da ‘discussão de grupo’ foram, também, utilizados à identificação das possíveis (re)significações decorridas da participação/ação das licenciandas no GE.

4.4.3 O 3.º ‘momento’: a aplicação do Questionário Final e da Escala de Atitudes

O 3.º ‘momento’ à obtenção dos dados ocorreu no mesmo dia do último encontro (20.º) realizado em 27 de setembro do ano de 2012. Antes da discussão dos assuntos propostos para esse último encontro, o pesquisador-autor aplicou o Questionário Final (ver Apêndice D) e a Escala de Atitudes (ver anexo A), nesta ordem. Como no último encontro realizou-se uma síntese dos assuntos abordados denotando-se – do ponto de vista do pesquisador-autor – as possíveis (re)significações de alguns saberes da experiência pré-profissional das licenciandas em relação à Matemática, então, a aplicação do Questionário Final ocorreu antes de tal encontro de modo a não influenciar as respostas das licenciandas. Foram disponibilizadas uma hora e meia para o preenchimento do Questionário Final e trinta minutos para a Escala de Atitudes. Após, o pesquisador-autor recolheu e verificou se ambos os instrumentos haviam sido preenchidos corretamente.

Como a Escala de Atitudes aplicada foi a mesma utilizada no 1.º ‘momento’ (rever subseção 4.4.1.2), então, apenas explicitar-se-á o Questionário Final.

4.4.3.1 O Questionário Final (APÊNDICE D)

Do mesmo modo que o Questionário Inicial, o Questionário Final foi um instrumento elaborado pelo pesquisador-autor. Esse instrumento possibilitou investigar, a partir da perspectiva das licenciandas, as possíveis (re)significações acerca de alguns saberes da

experiência pré-profissional (em relação à Matemática) advindas da participação/ação das mesmas no GE. Embora tenha sido constituído por 3 categorias, apresentar-se-á apenas as questões da ‘Categoria A: Um Movimento de (Re)Significação’. Tais respostas auxiliarão ao/no confronto dos dados anteriores referentes às possíveis (re)significações em torno dos supracitados saberes:

a) Categoria A: Um Movimento de (Re)Significação:

a.1) A participação no Grupo de Estudo possibilitou a (re)significação, ou seja, uma ‘nova’ compreensão/entendimento acerca da Matemática (e seu ensino), de alguns tópicos da teoria de Jean Piaget e do papel dos saberes experienciais à constituição da prática docente? Em caso afirmativo, escreva como foi tal (re)significação nos itens abaixo:

a.1.1) Em relação ao conhecimento matemático (à Matemática):

a.1.2) Em relação ao ensino de Matemática, ou seja, o seu ‘futuro’ papel enquanto professor que ensinará Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental:¹⁴

a.2) Em específico à Matemática, como se deu a (re)significação das seguintes áreas que constituem o Bloco ‘Tratamento da Informação’?

a.2.1) Estatística:

a.2.2) Combinatória:

a.2.3) Probabilidade:

As questões a.1), a.1.1) e a.1.2) contribuíram na identificação (parcial) – e a partir da perspectiva das licenciandas – de algumas (re)significações referentes às crenças e às concepções acerca da Matemática (e do seu processo de ensino). Assim, tais respostas ‘relacionaram-se’ ao objetivo específico f) (rever subseção 4.1.1). Já as questões a.2), a.2.1), a.2.2) e a.2.3) possibilitaram a identificação (parcial) – e também a partir da perspectiva das licenciandas – de algumas (re)significações referentes aos conhecimentos matemáticos (objetivo específico e) referentes ao entendimento geral destas três áreas da Matemática.

4.4.4 O 4.º ‘momento’: a aplicação do Questionário Final Postergado (APÊNDICE Y)

O 4.º ‘momento’ à obtenção dos dados ocorreu em 25 de outubro do ano de 2013. Nesse dia, o pesquisador-autor enviou para as licenciandas um questionário, via *email*. Como as licenciandas já haviam concluído o curso de Pedagogia, o deslocamento até a universidade não foi possível. Assim, em conversa anterior com o pesquisador-autor, as licenciandas concordaram em responder o referido questionário na data supracitada. Todas as licenciandas o fizeram. A seguir constam as questões que compuseram o Questionário Final Postergado:

¹⁴ Embora a alternativa incida sobre o ensino de Matemática, por meio da resposta faz-se possível identificar possíveis (re)significações quanto ao modo de conceber a aprendizagem dessa disciplina.

- 1) Na **SUA** opinião, o que é a Matemática?
- 2) Na **SUA** opinião, como se aprende a Matemática?
- 2.1) Qual o papel do aluno no processo de aprendizagem da Matemática? Justifique sua resposta.
- 3) Na **SUA** opinião, como deve ser ensinada a Matemática?
- 3.1) Qual o papel do professor no processo de ensino da Matemática? Justifique sua resposta.

As questões anteriores (1 à 3.1) visaram possibilitar a investigação do objetivo específico f), ou seja, algumas crenças e concepções (re)significadas acerca da Matemática (e seu processo de ensino aprendizagem).

O intuito deste questionário postergado deveu-se pela possibilidade de auxiliar na identificação, após um ano de ocorrência do GE, as (re)significações construídas (ou não) acerca das crenças e concepções sobre a Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem. Conforme Piaget et al. (1978), recordar-se – pela memória – de conceituações anteriormente construídas é um indício de tomada de consciência da ação. Assim, investigar tais crenças e concepções decorrido certo tempo contribuiu na identificação das possibilidades do GE a tais (re)significações.

‘Findada’ a apresentação dos instrumentos e dos procedimentos utilizados à obtenção dos dados – ocorridos em 4 ‘momentos’ –, na subseção seguinte apresentar-se-ão os procedimentos utilizados para a análise dos referidos dados.

4.5 Procedimentos utilizados para a análise dos dados

Num primeiro momento, o pesquisador-autor realizou a leitura dos dados obtidos, sendo a mesma realizada diversas vezes de modo a possibilitar a identificação das informações pertinentes ao objeto de investigação. Em seguida, e conforme já indicado, realizou-se uma análise interpretativa/qualitativa dos dados mediante uma comparação entre alguns saberes da experiência pré-profissional (em relação à Matemática e ao seu processo de ensino e aprendizagem) e as possíveis (re)significações advindas da participação/ação das licenciandas no GE; ou seja, uma comparação entre o ‘antes’ e o ‘após’. Para a referida interpretação, utilizaram-se algumas categorias que se ‘relacionam’ com o conteúdo dos referidos dados, a saber: a) alguns conhecimentos (do tipo esquemas) matemáticos pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’; b) algumas crenças e concepções acerca da Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem; c) algumas afirmações indicativas de atitudes em relação à Matemática. Tais categorias advieram de investigações já desenvolvidas

pelos pares, cujo fundamento teórico à elaboração das mesmas já fora apresentado nas seções 2 e 3. Cabe ainda ressaltar que para a análise da escala de atitudes, além da comparação qualitativa entre a resposta obtida ‘antes’ e ‘após’ a participação/ação das licenciandas no GE, também se levou em consideração a diferença quantitativa obtida na escala aplicada nos dois momentos conforme já ressaltado.

Nas subseções seguintes apresentar-se-ão as referidas categorias.

4.5.1 Alguns conhecimentos matemáticos pertencentes ao Tratamento da Informação

Para a interpretação/qualitativa dos conhecimentos matemáticos, além de considerar o que as licenciandas entendem sobre alguns conceitos matemáticos¹⁵ (média aritmética, princípio multiplicativo, permutação, arranjo e combinação), conteúdos esses pertencentes ao bloco ‘Tratamento da Informação’, foram identificados – também – alguns esquemas (Vergnaud (1996a) – ver subseção 2.4) matemáticos elaborados pelas licenciandas ao resolverem determinadas tarefas matemáticas ‘antes’ e ‘após’ a participação/ação no GE. A escolha pela identificação dos esquemas deveu-se pela possibilidade dos mesmos em ‘revelar’ os conhecimentos-em-ação (VERGNAUD, 1996a) das licenciandas ao resolverem algumas tarefas matemáticas. Conforme já ressaltado na subseção 2.4, a análise das invariantes operatórias possui importância pelo fato de possibilitar a análise/compreensão da operacionalidade da ação do sujeito; operacionalidade essa que permite a conceptualização do real. Em nosso caso, a operacionalidade da ação das licenciandas ao resolver algumas situações problema matemáticas.

Além dos referidos conceitos, identificar-se-ão, também, algumas (re)significações acerca do entendimento geral sobre a Estatística, a Combinatória e a Probabilidade.

4.5.2 Algumas concepções sobre a Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem

Para a interpretação/qualitativa das concepções sobre a Matemática e seu processo de ensino aprendizagem, foram utilizadas algumas categorias advindas da literatura (ver subseção 3.3) e/ou do referencial teórico-epistemológico denotado na seção 2. Faz-se oportuno destacar que tais categorias não são disjuntas, isto é, as licenciandas podem

¹⁵ As definições de tais conceitos matemáticos serão apresentadas na seção seguinte (5).

apresentar mais de uma das referidas categorias em suas concepções. O quadro seguinte apresenta tais categorias:

Quadro 20 – Concepções acerca da Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem.

Concepções referentes à ciência Matemática:	
CATEGORIA	a) ‘A parte mais substancial, acessível e fundamental da Matemática é o Cálculo!’
	b) ‘A Matemática consiste, essencialmente, na demonstração de proposições a partir de sistemas de axiomas mais ou menos arbitrários’.
	c) ‘A Matemática é o domínio do rigor absoluto e da perfeição total’.
	d) ‘A Matemática é ‘desligada’ completamente da realidade’.
	e) ‘Nada de novo ou criativo pode ser feito em Matemática, a não ser pelos ‘gênios’.
	f) A Matemática é uma ciência (historicamente) construída pelo homem mediante contínuas abstrações reflexionantes (‘tornadas’ refletidas) explicitadas/representadas em linguagem matemática (formal).
Concepções referentes ao ensino da Matemática:	
CATEGORIA	a) Para ensinar Matemática basta a explicação/transmissão do conteúdo pelo professor. A ‘mente’ do aluno, portanto, é uma ‘tabula rasa’ na qual o conhecimento é ‘impresso’.
	b) Ensinar Matemática é difícil porque alguns alunos não nasceram para isso. Logo, não adianta adotar diferentes estratégias didático-metodológicas para ensinar Matemática.
	c) Para ensinar Matemática o professor deve elaborar situações que ‘exijam’ do aluno a sua ação sobre o objeto do conhecimento (matemático). Para a elaboração de situações ‘interessantes e necessárias’, o professor deve se ‘aproximar’ do conhecimento já construído pelo aluno de modo a propor – a partir dessa informação/‘aproximação’ – as referidas situações. Além disso, cabe ao professor oportunizar um ambiente de sala de aula na qual o intercâmbio/colaboração entre os próprios alunos (e entre os alunos e o professor) faça-se presente. A transmissão do conteúdo (pelo professor) apenas é proveitosa desde que o aluno já tenha construído os esquemas de assimilação necessários ao entendimento deste conteúdo.
Concepções referentes à aprendizagem da Matemática:	
CATEGORIA	a) A Matemática se aprende por estímulos dados pelo professor: ou seja, os alunos aprendem pela estimulação, como se bastasse “[...] uma série de estímulos ou de contingências de reforço para que determinadas aprendizagens se realizassem, então ele estará limitando ou até impedindo uma série de transformações no processo de aprendizagem” (BECKER, 2013, p.67).
	b) Alguns já nascem com o conhecimento matemático: “Quem nasceu assim, será sempre assim. Quem nasceu com talento para a matemática, sempre será talentoso; quem nasceu sem talento ou sem o dom para esse conhecimento, fará bem em não envidar esforços para aprendê-lo; será inútil” (BECKER, 2013, p.68).
	c) A Matemática é aprendida mediante a ação do sujeito sobre o objeto do conhecimento (matemático), num ‘movimento’ de interação.

Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Ponte (1992) e Becker (2013).

As categorias referentes à ciência Matemática – itens a) à e) – já foram denotadas na subseção 3.2. Tais categorias foram retiradas de Ponte (1992). O item f) foi elaborado pelo pesquisador-autor a partir da Epistemologia Genética abordada na seção 2.

Os itens a), b) e c) (da categoria referente ao ensino da Matemática) foram elaborados pelo pesquisador-autor levando-se em consideração as concepções epistemológicas empirista, apriorista/inatista e construtivista, respectivamente. De modo análogo, realizou-se o mesmo para a elaboração dos itens a), b) e c) da categoria referente à aprendizagem da Matemática, sendo utilizadas as contribuições de Becker (2013). Faz-se oportuno destacar que o significado de ‘ação’ a ser realizada pelo sujeito sobre o objeto (como apontado nos itens ‘c’ de ambas as categorias) é o defendido pela Epistemologia Genética (rever seção 2).

4.5.3 Algumas atitudes em relação à Matemática

As categorias utilizadas para a identificação de algumas atitudes em relação à Matemática estão representadas nas afirmações que constituem o instrumento “A Escala de Atitudes em relação à Matemática” (rever subseção 4.4.1.2). Conforme já exposto, além de identificar uma alteração quantitativa em relação à pontuação obtida na escala aplicada ‘antes’ e ‘após’ a participação/ação das licenciandas no GE, observar-se-á, para cada uma das afirmações, a possível alteração ‘qualitativa’ quanto à alternativa assinalada considerando-se o ‘antes’ e o ‘após’.

EM SÍNTESE, nesta seção apresentaram-se o problema de pesquisa e os objetivos geral e específicos da presente investigação. Em seguida, realizou-se a caracterização/delineamento da investigação como sendo uma abordagem predominantemente qualitativa, do tipo estudo de caso. O estudo de caso mostrou-se uma abordagem adequada ao (nosso) objeto de investigação, isto é, aos saberes da experiência pré-profissional (em relação à Matemática e ao seu processo de ensino e aprendizagem) e suas possíveis (re)significações. ‘Findada’ a breve caracterização ‘contextual’ das duas licenciandas em Pedagogia (as participantes da pesquisa), foram explicitados os 4 ‘momentos’ utilizados à obtenção dos dados; obtenção essa proveniente da aplicação de diversos instrumentos (questionários, escala de atitudes, tarefas matemáticas, produção textual do tipo ‘momento de síntese’, discussão de grupo e observação participante). Por fim, apresentou-se o procedimento utilizado à análise dos dados e algumas categorias que auxiliaram na interpretação dos mesmos.

Na próxima seção apresentar-se-á o Grupo de Estudo. Grupo esse embasado na Epistemologia Genética e em alguns resultados de investigações acerca da Formação (Inicial) de professores, em particular do professor que ensina Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

5 GRUPO DE ESTUDO: UMA PROPOSTA À (RE)SIGNIFICAÇÃO DE ALGUNS SABERES DA EXPERIÊNCIA PRÉ-PROFISSIONAL EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA

O GE proposto pelo pesquisador-autor – sob a supervisão do orientador da presente tese – foi realizado entre os meses de março a setembro de 2012 e contou com a colaboração/participação de sete licenciandas que frequentavam o último ano (4.º) do curso de Pedagogia. A carta (convite) para a livre participação no GE foi enviada em novembro de 2011, via *email*, a todos os estudantes do 3.º ano (do referido curso). Nessa carta, foram apresentados os objetivos do GE e as possíveis contribuições do mesmo à Formação Inicial dos licenciandos, em particular ao ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Inicialmente, dez alunas responderam afirmativamente e a elas foi aplicado um Questionário Inicial (ver Apêndice A). No entanto, iniciado o GE, apenas sete delas frequentaram-no até o término.

A tabela seguinte apresenta a frequência das sete licenciandas em cada um dos vinte encontros que constituíram o GE:

Tabela 2 – Frequência geral das licenciandas nos vinte encontros do GE.

ENCONTRO	PARTICIPANTES						
	P-1	P-2	P-4	P-5	P-7	P-8	P-9
1.º	X	X	X	X	X	-----	X
2.º	X	X	X	X	X	-----	X
3.º	X	X	X	X	X	X	X
4.º	X	X	X	X	X	X	-----
5.º	X	X	X	X	X	X	-----
6.º	-----	X	X	X	X	X	X
7.º	X	X	X	X	X	X	X
8.º	-----	X	X	-----	X	X	-----
9.º	X	X	X	X	X	X	X
10.º	X	X	X	X	X	X	X
11.º	-----	X	X	X	X	-----	-----
12.º	X	X	X	X	X	X	X
13.º	-----	X	X	X	X	X	-----
14.º	-----	X	X	X	X	X	-----
15.º	-----	X	X	-----	X	X	-----
16.º	-----	X	X	X	X	X	-----
17.º	-----	X	X	X	X	X	-----
18.º	X	X	X	X	X	X	X
19.º	X	X	X	X	X	X	-----
20.º	X	X	X	X	X	X	X
TOTAL (Frequência)	12	20	20	18	20	17	10

Legenda: P-1, P-2, P-4, P-5, P-7, P-8 e P-9: indicam cada uma das licenciandas que participou do GE.
X: indica a presença da licencianda no encontro realizado.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2012.

Todos os encontros ocorreram em uma sala de aula disponibilizada pela universidade na qual o referido curso de Pedagogia é ofertado. O tempo médio de duração dos encontros foi de 3h15min. O quadro seguinte apresenta o tempo de duração de cada encontro e a data de sua realização:

Quadro 21 – Dia de ocorrência e tempo de duração de cada encontro do GE.

ENCONTRO	DATA	TEMPO DE DURAÇÃO	ENCONTRO	DATA	TEMPO DE DURAÇÃO
1.º	01/03/2012	3h	11.º	17/05/2012	3h10min
2.º	08/03/2012	3h20min	12.º	31/05/2012	3h20min
3.º	15/03/2012	3h10min	13.º	14/06/2012	3h20min
4.º	22/03/2012	3h20min	14.º	21/06/2012	3h10min
5.º	29/03/2012	3h10min	15.º	28/06/2012	3h30min
6.º	05/04/2012	3h	16.º	16/08/2012	3h10min
7.º	12/04/2012	3h20min	17.º	23/08/2012	3h20min
8.º	19/04/2012	3h	18.º	30/08/2012	3h10min
9.º	26/04/2012	3h20min	19.º	13/09/2012	3h30min
10.º	10/05/2012	3h20min	20.º	27/09/2012	3h20min

Carga horária total: **65 horas.**

Fonte – Elaborado pelo autor, 2012.

Conforme já destacado anteriormente, o GE visou (objetivou) contribuir na (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional das licenciandas em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino aprendizagem). Para tal pretensão – e considerando as problemáticas já esboçadas na seção 3 acerca da Formação Inicial do professor que ensina(rá) Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental – o GE constituiu-se um espaço formativo para:

- a) a construção de alguns conteúdos matemáticos ainda não aprendidos pelas licenciandas durante a Educação Básica;
- b) o estudo de alguns tópicos da Epistemologia Genética – desenvolvida por Jean Piaget e colaboradores – visando à compreensão, pelas licenciandas, da gênese e do processo de construção do conhecimento;
- c) a discussão de conhecimentos e saberes didático-metodológicos e curriculares acerca dos referidos conteúdos matemáticos quando estes se tornam objeto de ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental;
- d) a reflexão/reeducação em torno de alguns saberes da experiência, em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem), construídos pelas licenciandas enquanto alunas da Educação Básica.

No campo da Matemática foram abordados alguns conteúdos pertencentes ao bloco ‘Tratamento da Informação’ (BRASIL, 1997, 1998); bloco esse constituído por conhecimentos matemáticos advindos da Estatística, Combinatória e Probabilidade. Tal opção deveu-se pela não aprendizagem – conforme salientado pelas licenciandas – de diversos conteúdos matemáticos pertencentes a esse bloco durante a Educação Básica. A seguir constam os conteúdos abordados no GE:

- a) Estatística: termos da pesquisa estatística (população, amostra, indivíduo ou objeto, variável qualitativa e quantitativa), Estatística Representativa (gráficos e tabelas) e Estatística Descritiva (média aritmética, mediana, moda, variância e desvio padrão);
- b) Combinatória: princípio fundamental da contagem (ou princípio multiplicativo), diagrama de árvore, permutação simples e com repetição, arranjo simples e com repetição e combinação;
- c) Probabilidade: espaço amostral, espaço amostral equiprovável, evento aleatório (certo, provável e impossível) e probabilidade (clássica e frequentista).

Já a escolha pelo estudo de alguns tópicos da Epistemologia Genética deveu-se pela possibilidade de tal estudo contribuir com a superação das concepções epistemológicas empiristas e/ou inatistas (aprioristas); concepções essas que, provavelmente, foram construídas pelas licenciandas nas aulas (de Matemática) vivenciadas na Educação Básica. Os tópicos abordados foram os seguintes:

- a) a gênese-construção da classificação: coleções figurais (Fase I), coleções não-figurais (Fase II) e classes (Fase III);
- b) a importância da ação (atividade) do sujeito ao desenvolvimento;
- c) a teoria da assimilação: organização e adaptação (assimilação e acomodação), a superação do empirismo e do inatismo;
- d) a questão da ‘necessidade’ na Educação;
- e) os fatores do desenvolvimento cognitivo: a maturação orgânica, a interação social (transmissão educativa), as experiências do tipo física e lógico-matemática e a equilíbrio;
- f) os estádios do desenvolvimento cognitivo: sensório-motor, pré-operatório, operatório concreto e operatório formal;
- g) o mecanismo de equilíbrio;
- h) o processo de tomada de consciência.

A respeito da referida superação, Nogueira (2013) aponta:

De acordo com Debastiani, Caldato e Nogueira (2011), a descrição do processo de construção do conhecimento (do indivíduo ou da ciência), perseguida pela Epistemologia Genética constitui um conjunto teórico que supera, de uma única vez, o empirismo e o apriorismo, contribuindo para que o futuro professor, ainda em sua fase inicial de formação possa alterar as concepções de ensino e aprendizagem, construídas durante toda sua história escolar.

Os licenciandos, que mesmo sem ter consciência são aprioristas, ou seja, acreditam que a origem do conhecimento está no próprio sujeito e entendem que a função do professor é apenas estimular para que estes conhecimentos aflorem, ao serem expostos à uma “quase visualização” de um conhecimento sendo construído, como o que ocorre nas provas piagetianas, certamente irão rever concepções e práticas.

Da mesma forma, os empiristas que acreditam que as bases do conhecimento estão nos objetos, em sua observação e que, portanto, o conhecimento é algo fluido, passível de ser repassado de um para outro pelo contato entre eles, seja de forma oral, escrita, gestual, ao constatar que a participação do professor no processo é necessária, porém não suficiente para a construção do conhecimento, certamente colocará em cheque suas convicções. (p. 306)

Nesse mesmo sentido – ou seja, o da superação – Becker (2012) destaca a importância de o professor conhecer o processo que explica a construção das primeiras noções matemáticas a partir dos primeiros reflexos (herdados) e dos esquemas de ação construídos pelo recém-nascido (sujeito) ao assimilar/acomodar, isto é, ao interagir com o meio (objeto):

[...] desconhecimento, quase total **[por parte dos professores entrevistados]** do significado psicológico dos reflexos (herdados) e dos esquemas (construídos), que emergem do exercício dos reflexos, cuja organização, assim que for traduzida pela função simbólica, gerará as primeiras noções matemáticas. Esse processo, que se estende por quatro a cinco anos, precisa ser conhecido pelo professor para que ele tenha condições de superar as visões epistemológicas deterministas, empiristas ou aprioristas, do desenvolvimento e da aprendizagem humanos. (BECKER, 2012, p. 125 **[comentário nosso]**)

Conforme denotado pelo referido autor, desconhecer¹ esse processo pode dificultar a superação das concepções epistemológicas deterministas (empiristas e/ou aprioristas), pois faltará ao professor (ou ao licenciando) um modelo teórico que lhe possibilite explicar a gênese e o processo do desenvolvimento cognitivo do estudante. Sem esse modelo – segundo Becker (2012) – o professor, na maioria das vezes, acabará valendo-se das ‘epistemologias do senso comum’ (empirismo e/ou apriorismo) quando questionado sobre a gênese e o processo do desenvolvimento cognitivo.

Assim, a concepção epistemológica ‘orientadora’ do GE – seja para a elaboração das atividades desenvolvidas bem como para os papéis desempenhados pelo pesquisador-autor e pelas licenciandas – foi a construtivista (piagetiana) que defende a

¹ Isso não significa, no entanto, que apenas o estudo acerca da teoria desenvolvida por Piaget (e colaboradores) possibilita tal superação. Há outras teorias cognitivistas que – valendo-se de referenciais e ‘pontos de partida’ diferentes – também possibilitam a explicação do processo de construção do conhecimento e, por conseguinte, a superação do empirismo e do apriorismo (inatismo).

importância/imprescindibilidade da ação do sujeito sobre o objeto para o desenvolvimento cognitivo (isto é, para a construção de estruturas cada vez mais ‘aptas’ à atuação/compreensão do meio/mundo). Se a ação do sujeito torna-se imprescindível à compreensão, então, o GE constituiu-se um espaço para a ação das licenciandas sobre diferentes objetos (os conteúdos matemáticos pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’, os referidos tópicos da Epistemologia Genética, os conhecimentos e saberes didático-metodológicos e curriculares dos referidos conteúdos e os próprios saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática). Essa ação das licenciandas ocorreu quando as mesmas: a) resolveram diversas atividades relacionadas aos referidos objetos; b) compartilharam as referidas resoluções no grupo; c) leram/discutiram, individualmente e em grupo, os textos teóricos relacionados a tais objetos; c) discutiram, em grupo, os diversos temas abordados durante o GE, inclusive os relacionados à futura prática docente de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental; d) elaboraram sínteses de cada encontro realizado. Assim – e por meio de tais ações – intentou-se que as licenciandas refletissem sobre os próprios saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem).

Ao ‘orientar-se’ para e pela ação – ação essa desencadeadora de contínuas equilíbrazões (e abstrações reflexionantes) (PIAGET et al., 1995) – o GE visou à ocorrência do isomorfismo (BRASIL, 2000b; CURI, 2004; GARCÍA, 1999) entre a Formação Inicial e a futura prática pedagógica a ser desenvolvida pelas licenciandas. Isto é, para que as licenciandas desenvolvam em suas futuras práticas situações de ensino nas quais os seus futuros alunos tenham que ‘ser’ ativos/questionadores/participativos, então, durante a Formação Inicial as mesmas devem vivenciar/experienciar situações homólogas.

Além de configurar-se um espaço às referidas ações, o GE também ‘orientou-se’ para constituir-se enquanto um grupo de estudo com algumas características colaborativas (de colaboração). Piaget (2002) – rever subseção 2.5 – defende a importância da colaboração (e do trabalho em grupo/equipe) à atividade intelectual do estudante e, por conseguinte, ao seu próprio desenvolvimento (cognitivo, afetivo e moral). Assim, a iniciativa do pesquisador-autor em construir – juntamente *com* as licenciandas – um GE² com algumas características colaborativas deveu-se à possibilidade do mesmo ao “desenvolvimento profissional³” dos

² Outras investigações que tratam dos ‘benefícios’ de grupos de estudo/trabalho à Formação Inicial de pedagogos (em relação à Matemática e ao seu ensino e aprendizagem) foram realizadas por Abrahão e Silva (2017), Biajone (2007), Nascimento (2013), Passos, Oliveira e Prenstteter (2007), Silva, Esteves e Souza (2010) e Toricelli (2009).

³ No caso do GE, o desenvolvimento profissional ocorreu mediante a possível (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem) durante a Formação Inicial.

envolvidos (CLARK et al., 1996, p. 196 apud BOAVIDA, 2005, p. 131). Mesmo que o projeto de/em propor um GE tenha partido do pesquisador-autor por conta da realização da presente pesquisa de doutoramento, o interesse das licenciandas em participar adveio do sentido (importância) de tal projeto às suas formações.

Acerca das relações necessárias à ocorrência da colaboração⁴, fez-se imprescindível o gradativo estabelecimento da confiança, conversação e negociação entre o pesquisador-autor e as licenciandas durante o GE. A confiança⁵ – considerada um dos primeiros ‘passos’ à colaboração (BOAVIDA, 2005) – permitiu o ‘expressar sem medo de errar’, no qual todos se sentiram “[...] confortáveis [...] em questionar publicamente ideias e valores uns dos outros.” (BLOND e WEBB, 1997, apud BOAVIDA, 2005, p. 149). O clima de respeito mútuo ‘instaurado’ na/pela confiança visou possibilitar a efetiva conversação (diálogo) entre o pesquisador-autor e as licenciandas (e entre as próprias licenciandas) acerca dos diversos temas abordados no GE.

Inúmeros foram os momentos – durante a realização do GE – nos quais as licenciandas indicaram confiar no outro (pesquisador-autor e demais licenciandas) a ponto de exporem: a) dúvidas sobre os assuntos propostos (e os não propostos); b) frustrações quanto ao curso de Pedagogia; c) expectativas/inseguranças acerca da (futura) profissão. Um exemplo de frustração – exposta a seguir – foi compartilhada em meio à discussão sobre as ações adotadas pelos ‘antigos’ professores de Matemática (das licenciandas) e a aproximação dessas ações à concepção epistemológica empirista. Durante o 10.º encontro, após a P-5 afirmar que na faculdade há atitudes e falas de professores que se aproximavam de uma concepção epistemológica empirista, as demais licenciandas também expuseram tal ocorrência como num momento de desabafo:

⁴ Embora o significado de colaboração – segundo Boavida (2005) – seja polissêmico, adota-se nesta pesquisa o seguinte sentido atribuído pela referida esta autora: “Os caminhos da colaboração podem ser muito diferentes. No entanto, para que um projecto de investigação seja bem sucedido parece ser essencial haver participação voluntária, negociar de uma forma cuidada, honesta, aberta e desde o início, o modo como o grupo irá funcionar, delinear um percurso de trabalho conjunto que se compreenda como apropriado e viável tendo em conta as necessidades, objectivos, interesses, expectativas e desejos de todos e negociar e renegociar as responsabilidades e papéis de cada um, de modo a que os benefícios da complementaridade de experiências, perspectivas e competências governem, para todos, o processo de colaboração. Neste âmbito, não se torna imprescindível a mutualidade na partilha de objectivos, papéis e responsabilidades. O importante é que haja um propósito comum que oriente o trabalho a desenvolver mas que enquadre a possibilidade de interesses e necessidades particulares, que haja uma liderança partilhada e uma relação não hierárquica, e que se crie um clima de à vontade e respeito mútuo para cada pessoa poder partilhar saberes e experiências e, por esta via, todos poderem aprender.” (BOAVIDA, 2005, p. 191).

⁵ Faz-se oportuno destacar que o pesquisador-autor ministrou uma disciplina às licenciandas enquanto estas frequentavam o 2.º ano do curso de Pedagogia. Durante a realização dessa disciplina – intitulada “Matemática na Educação Infantil” – acredita-se que o pesquisador-autor e as licenciandas estabeleceram uma boa convivência em sala de aula pautada no respeito/atenção à fala/dúvida/questionamento dos estudantes. Talvez essa boa relação tenha contribuído ao gradativo estabelecimento da confiança no decorrer do GE.

369. **P-5:** *O duro é que a gente ainda ouve isso aqui, na graduação. [Referiu-se às falas e às atitudes de alguns professores da graduação que se aproximam da concepção epistemológica empirista.]*⁶

370. **P-7:** *E é recente!*

371. **P-2:** *É sim!*

372. **Pesquisador/Participante**⁷: Então, segundo a perspectiva e vivência de vocês, algumas falas e ações dos seus professores se aproximam da concepção epistemologia empirista?

373. **P-2:** *Ah, sim, vivenciamos! E bem recentemente, por sinal!*

374. **Pesquisador/Participante:** Compartilha pra gente, por favor, sem citar o nome, pois devemos preservar o nome de quem a fez em respeito à ética profissional.

375. **P-2:** *Ah, eu acho assim, a partir do momento que você acha que deu um texto e você explicou algo, e você tem o direito de cobrar numa avaliação palavras do texto... pra mim isso é algo empirista.*

376. **P-4:** *E sem explicar nada! E ele acredita que enfiou o texto em nossa 'goela' abaixo.*

377. **Pesquisador/Participante:** Concordo com vocês!

378. **P-7:** *E é bem recente! [Apêndice N, 10.º Encontro]*

Mesmo sem serem questionadas pelo pesquisador-autor a respeito das aulas na graduação, as licenciandas expuseram uma vivência/experiência durante o curso de Pedagogia que lhes causou frustração. Ainda sobre a confiança que possibilita o livre questionamento/exposição de dúvidas, a P-2 afirmou:

293. **P-2:** *É igual no começo da aula! [Referiu-se ao início do encontro.] Como a gente tem esse entrosamento, essa maturidade sabe que ninguém vai te ofender se você perguntar uma dúvida. Porque depende da sala que você está, você não abre a boca pra perguntar! Eu não faço isso em muitas aulas da faculdade! Eu não pergunto do jeito que eu pergunto aqui! Eu não sou assim! [Apêndice U, 17.º Encontro]*

Além de pontuar a confiança para com o grupo o que lhe permitia expor as dúvidas sem o receio/medo de ser ofendida, a P-2 observou que não se sentia 'segura' em algumas aulas da faculdade para questionar (o que configurou outra frustração). Tal 'ambiente' de respeito mútuo – 'instaurado' na/pela confiança – possibilitou a 'crescente' conversação (diálogo/discussão) entre o pesquisador-autor e as licenciandas (e entre as próprias licenciandas) sobre os diversos assuntos abordados nos vinte⁸ encontros realizados.

Sobre a conversação (uma das relações necessárias à ocorrência da colaboração), Boavida (2005) expõe:

⁶ As frases 'localizadas' dentro dos colchetes e com a utilização do recurso tipográfico **negrito** foram elaboradas pelo pesquisador-autor.

⁷ As expressões pesquisador-autor e pesquisador/participante são sinônimas.

⁸ Uma síntese de cada encontro será apresentada na subseção 5.3. Nessa síntese serão apontados diversos momentos de conversação/diálogo/discussão ocorridos durante o GE.

A conversação funciona como “mediadora entre a experiência e o significado” (Christiansen et al., 1997b, p. 285). É através dela, seja connosco próprios ou com os outros, que descrevemos as nossas experiências, tornando possível a sua análise, que as clarificamos, que partilhamos o sentido que lhes atribuímos, que ouvimos – observando diferenças e semelhanças – perspectivas e experiências que não as nossas, que podem acordar em nós novos modos de compreender a nossa própria experiência e permitir-nos reconstruir conhecimento passado e imaginar possibilidades futuras. (BOAVIDA, 2005, p. 150)

Observa-se que o exposto por Boavida (2005) aproxima-se da discussão realizada por Piaget (2002) acerca da importância da colaboração (e da cooperação) à construção do conhecimento. Ouvir o que o outro fala e analisar/refletir sobre o conteúdo dessa fala pode auxiliar o processo de descentração (isto é, a diferenciação e coordenação dos diferentes pontos de vista) – (PIAGET; INHELDER, 1976, p. 256). Como já salientado na seção 2, a descentração mostra-se importante à construção das operações e que, por sua vez, propiciam ao indivíduo um conhecimento mais ‘objetivo’ de si e do ‘meio’ ao seu redor.

A respeito da negociação – isto é, dos acordos realizados entre o pesquisador-autor e as licenciandas – desde o primeiro encontro houveram tomadas de decisão conjuntas. É certo (e esperado) o surgimento de conflitos na/durante tais tomadas de decisão conjuntas, entretanto, os mesmos foram negociados de maneira ‘aberta e honesta’ durante o GE para que não se tornassem “[...] obstáculos impeditivos de uma colaboração efectiva [...]” (BOAVIDA, 2005, p. 153). Exemplificando, no primeiro encontro decidiu-se *conjuntamente* que o bloco a ser abordado seria o referente ao ‘Tratamento da Informação’ pelo fato de alguns dos conteúdos pertencentes a tal bloco não terem sido construídos pelas licenciandas na Educação Básica. O quadro a seguir apresenta outras negociações realizadas durante o GE:

Quadro 22 – ‘Momentos’ de negociação no Grupo de Estudo.

ENCONTRO	NEGOCIAÇÃO
7.º, 8.º, 11.º, 15.º	Sobre o ‘ <u>momento de síntese</u> ’ ser deixado como tarefa para casa. Nos encontros indicados na coluna à esquerda, não houve tempo hábil e ou disposição para a elaboração das sínteses devido às discussões/atividades ‘consumirem’ um espaço de tempo maior que o esperado/planejado e ou em decorrência do cansaço das licenciandas após algumas horas de participação/ação no encontro.
18.º	Sobre o ‘ <u>desafio para casa</u> ’ final ser realizado em trios. Num primeiro momento, o pesquisador-autor propôs que o mesmo fosse realizado individualmente. No entanto, devido aos compromissos já assumidos pelas licenciandas nas disciplinas do curso de Pedagogia, a realização do referido desafio individualmente acabaria se tornando inviável para as mesmas.
4.º, 6.º, 8.º, 10.º, 11.º, 13.º, 15.º, 19.º	Sobre as atividades (e assuntos) propostos nos referidos encontros (ver coluna à esquerda) serem concluídas no seguinte.

Fonte – Elaborado pelo autor, 2012.

Em suma, até o presente momento foram apresentados: a) os aspectos contextuais referentes ao GE (contato inicial com as licenciandas, dia de ocorrência de cada encontro, o seu local de realização e a frequência das licenciandas em cada encontro); b) o objetivo pretendido pelo GE (de modo a contribuir com a Formação Inicial das licenciandas em Pedagogia em relação à Matemática e ao seu processo de ensino e aprendizagem); c) os assuntos (alguns conteúdos matemáticos pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’ e alguns tópicos da Epistemologia Genética) abordados e as respectivas justificativas de tais escolhas; d) a concepção epistemológica construtivista ‘orientadora’ do GE; e) a constituição do GE com algumas características colaborativas (confiança, conversação e negociação).

Na subseção seguinte serão apresentados os tipos (categorias) de atividades elaboradas/propostas pelo pesquisador-autor, atividades essas desenvolvidas com as licenciandas durante os vinte encontros que compuseram o GE. Como já salientado, o GE – considerado uma alternativa/proposta metodológica à Formação Inicial do pedagogo em relação à Matemática – alicerçou-se/foi fundamentado nas várias discussões apresentadas nas seções 2 e 3 que trataram, respectivamente, da Epistemologia Genética e da Formação (Inicial) de professores (que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental) e seus saberes e/ou conhecimentos.

5.1 As atividades desenvolvidas no Grupo de Estudo

As atividades elaboradas/propostas pelo pesquisador-autor podem ser classificadas nas seguintes categorias:

- a) **Situação problema**: eram problemas, a serem resolvidos pelas licenciandas de modo individual e/ou em grupo, acerca dos temas/assuntos abordados no GE. Em vários momentos, os referidos problemas relacionavam-se aos assuntos apresentados nas atividades “movimento de retomada”, “leitura/discussão de texto teórico” e “história de ensino simulada”.
- b) **Movimento de retomada**: eram textos, a serem lidos individualmente e/ou em grupo, nos quais se retomavam/reconstituíam as atividades desenvolvidas pelas licenciandas ou as dúvidas provenientes dos encontros. Além disso, alguns desses textos também sintetizavam/definiam os assuntos abordados anteriormente.
- c) **Leitura/discussão de texto teórico**: eram textos teóricos, a serem lidos individualmente e/ou em grupo, que versavam sobre os temas/assuntos abordados durante o GE.
- d) **História de ensino simulada**: eram histórias hipotéticas nas quais uma professora de Matemática ‘valia-se’ de concepções construtivistas ao propor algumas atividades (e ações

didático-metodológicas) visando o ensino de alguns conteúdos matemáticos pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’.

e) **Momento de síntese**: nesta atividade as licenciandas eram solicitadas a escrever, individualmente, uma síntese dos assuntos abordados durante o encontro realizado. Além dessa síntese, solicitava-se o registro de possíveis dúvidas decorrentes do referido encontro.

f) **Exemplo de ensino**: eram exemplos de atividades utilizadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental para a abordagem de alguns conteúdos pertencentes ao bloco ‘Tratamento da Informação’. Às licenciandas cabia a identificação do(s) conteúdo(s) matemático(s) abordado(s), bem como o ano de escolaridade ao qual a referida tarefa se adequava.

g) **Questionário**: eram questões, do tipo aberta⁹, a serem respondidas individualmente pelas licenciandas. Tais questões visavam identificar alguns saberes da experiência pré-profissional, em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem), já construídos pelas licenciandas. Dentre esses saberes, investigavam-se: a) a construção (ou não) de alguns conteúdos pertencentes ao bloco ‘Tratamento da Informação’; b) as concepções e as crenças acerca da Matemática (e seu processo de ensino e aprendizagem) construídas em decorrência das aulas de Matemática vivenciadas na Educação Básica; c) as lembranças das aulas (de Matemática) vivenciadas pelas licenciandas durante a Educação Básica.

h) **Desafio para casa**: eram situações problema (categoria a) a serem resolvidas individualmente¹⁰ pelas licenciandas em casa (do tipo tarefa para casa). Tais problemas referiam-se aos temas/assuntos abordados durante o GE.

No dia de ocorrência de cada encontro, ou em dois/três dias anteriores ao mesmo, as licenciandas recebiam – em folhas impressas – as atividades a serem desenvolvidas naquele encontro. Tais atividades foram organizadas no documento intitulado “Material de Apoio: Grupo de Estudo para a Formação Inicial de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental” (ver Apêndice C). Ao término do GE, cada licencianda ficou com uma cópia desse documento.

Tanto os temas/assuntos abordados nas referidas atividades quanto à ocorrência (frequência e ordenação) dessas atividades durante o GE serão explicitados na subseção 5.3 que apresenta uma síntese de cada um dos vinte encontros. Nessa síntese é possível observar a continuidade observada entre uma atividade e a desenvolvida em seguida.

⁹ Conforme Gil (2008, p. 122, grifo do autor): “Nas **questões abertas** solicita-se aos respondentes para que ofereçam suas próprias respostas.”, ou seja, não há que se decidir – dentre um conjunto de alternativas elaboradas previamente pelo investigador – àquela que responda a pergunta.

¹⁰ Apenas o ‘desafio para casa’ (Final) – solicitado no 18.º encontro – foi realizado em trios a pedido das licenciandas.

Na próxima subseção apresentam-se os embasamentos teóricos, advindos da Epistemologia Genética e da teoria de Gérard Vergnaud, utilizados tanto para a elaboração quanto para a ocorrência (frequência e ordenação) das referidas atividades.

5.1.1 Embasamento na Epistemologia Genética e na teoria de Gérard Vergnaud

Conforme já indicado, a concepção epistemológica orientadora do GE foi a construtivista (piagetiana). Nesta, a ação do sujeito sobre o objeto torna-se condição necessária (imprescindível) à construção de esquemas (de ação) e/ou conceitos. O desequilíbrio (PIAGET, 1976a), nesse contexto, constitui um elemento importante ao desencadeamento dessa ação. Assim, ao elaborar as referidas atividades, o pesquisador-autor intentou que as mesmas constituíssem um possível momento de desequilíbrio/desafio (e provavelmente a ser superado) às licenciandas de modo a desencadearem as suas ações sobre os diferentes objetos (assuntos/conteúdos) abordados no GE. Em particular, ao elaborar as atividades “situação problema” e “desafio para casa” pretendeu-se que as mesmas representassem situações desequilibradoras e ‘*interessantes e necessárias*’ (PIAGET, 1998a, 1998b) às licenciandas.

As atividades ‘movimento de retomada’ e ‘momento de síntese’ foram elaboradas no intuito de representarem às licenciandas um momento de/para a ‘*reconstituição num todo*’ e a ‘*retrospecção*’ dos assuntos abordados e/ou das atividades já desenvolvidas. A reconstituição num todo representa um dos patamares do reflexionamento (PIAGET et al., 1995), patamar esse necessário aos demais (comparação, reflexão e metarreflexão). Como já abordado na seção 2, tais patamares ‘constituem’ a abstração reflexionante que é considerada um dos motores do desenvolvimento cognitivo (PIAGET et al., 1995, p. 274); abstração essa que possibilita ao sujeito a construção (e ou enriquecimento) de estruturas (esquemas de ação e ou conceitos) que permitam uma ‘melhor’ interação com o objeto. A retrospecção, por sua vez, é necessária ao mecanismo formador da conceituação, ou seja, da tomada de consciência da ação (PIAGET et al., 1977). Como o GE abordou diversos conteúdos, inclusive conteúdos matemáticos (cuja conceituação faz-se importante a sua construção), então, mostrou-se importante propor atividades que, provavelmente, possibilitassem a ‘*retrospecção*’.

A atividade ‘leitura/discussão de texto teórico’ visou constituir-se um momento para que as licenciandas realizassem ‘*regulações mais ativas*’ acerca do assunto abordado. Tais regulações são necessárias à progressiva tomada de consciência (PIAGET et al., 1977). Como a teoria ‘constitui-se’ de/por conceitos formalizados – e sendo o conceito uma tomada de

consciência de um esquema de ação – então, oportunizar momentos para a leitura/discussão desses textos pode ter colaborado à construção (pelas licenciandos) dos conceitos pertencentes aos diferentes assuntos abordados no GE. Já os dados provenientes dos ‘questionários’ possibilitaram a proposição de atividades ‘*interessantes e necessárias*’ (PIAGET, 1998a, 1998b) que pudessem desafiar as licenciandas à ‘agirem’ sobre os diferentes objetos tratados no GE.

Durante a elaboração dos diversos textos (‘texto teóricos’ e ‘movimento de retomada’), o pesquisador-autor atentou-se à linguagem, bem como aos símbolos matemáticos usados na/para a resolução das ‘situações problema’ matemáticas propostas no GE. Como a linguagem, segundo a Epistemologia Genética, representa uma importante ferramenta ao pensamento, então, a disponibilização de textos bem formulados ‘linguisticamente’ visou auxiliar às licenciandas ao/no entendimento dos assuntos abordados no GE. Ainda sobre a importância da linguagem e do simbolismo, Vergnaud (1996a) aponta que sem a utilização dos mesmos torna-se impossível a mudança de *status* dos conceitos-em-ato e dos teoremas-em-ato para conceitos e teoremas explícitos (e formais).

Além de embasar a proposição das atividades desenvolvidas no GE, a teoria de Piaget também ‘orientou’ a ocorrência (frequência e ordenação) das mesmas. Uma variedade de ‘situações problema’ acerca de determinado conceito matemático, por exemplo, era desenvolvida antes da ‘leitura/discussão de texto teórico’; texto esse que apresentava a formalização/conceituação do referido conceito. Por exemplo, a apresentação do texto que formalizou ‘matematicamente’ o conceito de permutação ocorreu após a resolução/discussão compartilhada, pelas licenciandas, de algumas situações referentes a tal conceito. Esta ordenação encontra fundamento na ideia sobre a conceituação (formalização) representar a forma final/acabada da abstração reflexionante. Logo, a ação das licenciandas (ao resolver algumas situações) foi o ponto de partida dos vários encontros realizados. Vergnaud (1996a) vai ao encontro a essa ideia de a ação do aluno ‘sobre’ a situação – ação essa graças aos esquemas – constituir o ponto de partida da prática pedagógica do professor e não, necessariamente, o ponto de chegada. Segundo o referido autor, antes da formalização, os alunos devem agir sobre diversas situações de modo a construírem os significados do referido conceito a ser, futuramente, teorizado (explicitado).

O significado de situação adotado à proposição das referidas atividades foi o mesmo utilizado por Vergnaud (1996a), ou seja, o de tarefa (cognitiva). Assim, as ‘situações problema’ e os ‘desafios para casa’ propostos tiveram a intenção de representar tarefas (cognitivas) a serem resolvidas pelas licenciandas, estando “os processos cognitivos e as

respostas do sujeito em função das situações com as quais eles se confrontam.” (VERGNAUD, 1996a, p. 171). Ou seja, a ação das licenciandas (procedimental-material e cognitiva-imaterial) estaria ‘em função’ das situações com as quais possivelmente estabeleceriam uma interação. Esse mesmo autor destaca a importância da oferta de uma variedade de situações – referentes a um dado campo conceitual – e ao longo de um determinado tempo (história) à construção (gradativa) de determinado conceito. É por esse motivo que, durante o GE, foi oportunizada às licenciandas uma variedade de situações referentes a um determinado conceito matemático.

A ideia/necessidade acerca da importância da continuidade observada entre as atividades (e entre os encontros) – a ser explicitada na subseção 5.3 – também adveio da Epistemologia Genética. Sendo o desenvolvimento um *continuum* (isto é, a construção precedente – além de abrir possibilidades à construção ‘futura’ – serve de alicerce (base) a esta última), então, desenvolver atividades respeitando essa continuidade pode ter auxiliado às licenciandas em suas (re)significações (isto é, na construção de novos esquemas de ação e ou conceitos) acerca dos diversos assuntos abordados no GE.

A utilização/ordenação dos ‘questionários’ durante os encontros também subsidiou-se na ideia a respeito de oferecer às licenciandas situações ‘*interessantes e necessárias*’ (PIAGET, 1998a, 1998b). Por exemplo, antes de propor uma variedade de situações acerca de determinado conceito matemático, investigava-se – por meio do ‘questionário’ – o que as licenciandas já sabiam (ou não) a respeito desse conteúdo. Com tal informação, o pesquisador-autor poderia propor situações possíveis de serem resolvidas pelas licenciandas.

Na subseção seguinte denotar-se-ão os porquês para a proposição de algumas atividades (bem como de seus assuntos constituintes) a partir dos estudos sobre a Formação de Professores.

5.1.2 Embasamento nos estudos sobre a Formação de Professores

As atividades – ‘história de ensino simulada’, ‘exemplo de ensino’ e alguns ‘textos teóricos’, textos esses que discutiram aspectos didático-metodológicos e curriculares dos conteúdos matemáticos – foram elaborados/propostos pelo pesquisador-autor visando à discussão/apresentação do conteúdo matemático sob a ‘perspectiva’ do seu ensino no Ensino Fundamental (em particular nos anos iniciais). Tal perspectiva refere-se à possibilidade de ‘relacionar’ o conteúdo específico (matemático) aos aspectos didático-metodológicos e curriculares, aspectos esses importantes ao/para o ensino do referido conteúdo. Por exemplo,

durante a abordagem dos conteúdos pertencentes à Estatística, apresentou-se um ‘texto teórico’ no qual se discutiu o ensino desses conteúdos, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, considerando-se os aspectos didático-metodológicos e psicológicos intervenientes nesse processo de ensino. O objetivo do pesquisador-autor ao discutir/apresentar o conteúdo matemático a partir da ‘perspectiva’ do seu ensino justificou-se pela/na tentativa de superar o modelo da racionalidade técnica que ‘supervaloriza/absolutiza’ o conhecimento específico e, conseqüentemente, ‘inferioriza’ os outros conhecimentos também necessários ao ‘fazer’ docente (didáticos, metodológicos, curriculares, da Psicologia da Educação, etc.). Tal modelo acaba ‘provocando’ essa supervalorização pelo fato de considerar o conhecimento específico como ‘autossuficiente’ ao ensino; nesse ponto cabe retomar Gauthier et al. (1998) quando afirma que um dos equívocos da profissão docente reside na ideia de que “Basta conhecer o conteúdo [para ensinar]!”.

Além da abordagem dos conteúdos matemáticos a partir da referida perspectiva, durante o GE (e para o desenvolvimento das atividades/assuntos abordados) foram levados em consideração os saberes da experiência pré-profissional das licenciandas em relação à Matemática, em particular os referentes ao ‘Tratamento da Informação’. Ao considerar os saberes já construídos pelos estudantes durante a graduação (Formação Inicial) pretendeu-se, também, superar o modelo da racionalidade técnica já que, segundo esse modelo, tais saberes devem ser desprezados em tal formação. Aliás, o GE pretendeu constituir-se – conforme já explicitado – num espaço em que tais saberes fossem reeducados/(re)significados. (Re)significação essa importante (e necessária) como defendido por diversos autores (ANTUNES; ZAPPAROLI; ARRUDA, 2005; ARAMAN; SAMPAIO, 2013; CARNEIRO, 2014, 2015; CAVALCANTE; SOARES, 2012; COSTA, 2013; COSTA; CURI, 2010; COSTA et al., 2017; GARCÍA, 1999; LÓPEZ; ALSINA, 2016; NACARATO, 2010; NAGY-SILVA; PASSOS; CYRINO, 2010; PIMENTA, 2008; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2013; SANTOS; GHEDIN, 2016; SILVA; PASSOS, 2016; SOARES, 2013).

Ainda sobre os conteúdos matemáticos abordados nas diversas atividades, os mesmos orientaram-se para ‘ir além’ daquilo que as licenciandas deverão ensinar nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esse ‘ir além’ – conforme Brasil (2000b), Curi (2004), Delgado (2009) e Mello (2000) – é importante/necessário para que a licencianda adquira uma maior ‘segurança’/compreensão à proposição de situações de ensino em suas (futuras) aulas de Matemática relacionadas a tais conteúdos. Além disso, as atividades propostas no GE abordaram alguns conteúdos matemáticos ainda não aprendidos durante a Educação Básica de modo a contribuir com a possível ‘superação’ da defasagem das licenciandas acerca de tais

conteúdos. Isso, pois a Formação Inicial deve tomar “[...] para si a responsabilidade de suprir as deficiências de escolarização básica que os futuros professores receberam tanto no ensino fundamental como no ensino médio.” (BRASIL, 2000b, p. 524), de modo que o (futuro) professor não reproduza em sua prática as insuficiências de sua formação.

A respeito de a atividade ‘história de ensino simulada’, a sua proposição justificou-se, também, pelo fato da mesma oportunizar um momento de/para a reflexão acerca de uma postura didático-metodológica ‘diferente’, postura essa adotada por uma professora (hipotética) de Matemática ao abordar os conteúdos matemáticos do bloco ‘Tratamento da Informação’. Essa postura didático-metodológica ‘diferente’ advém da concepção epistemológica construtivista ‘adotada’ pela referida professora (hipotética) durante a sua prática pedagógica. Esperava-se que nessas reflexões as licenciandas ‘percebessem’ outra possibilidade de ensinar Matemática e (re)analisassem/confrontassem, por conseguinte, os próprios saberes da experiência pré-profissional relacionados ao ensinar/aprender Matemática. Conforme Massabni (2011), a utilização de histórias hipotéticas no/durante o processo de formação pode auxiliar os licenciandos nessa análise/confronto.

Por fim, a proposição de ‘textos teóricos’ versando sobre alguns conhecimentos específicos e necessários ao ensino (curriculares, da Psicologia da Educação, específicos ‘o matemático’, didático-metodológicos) justificou-se nos estudos acerca da tipologia dos conhecimentos e saberes docentes (rever subseção 3.2). Assim, a abordagem desses diversos textos pretendeu explicitar às licenciandas o quão complexo é o ‘fazer docente’, fazer esse que se ‘alimenta’ de inúmeros saberes e conhecimentos construídos em toda uma trajetória de vida pessoal, escolar e profissional.

Na próxima subseção apresentar-se-ão os papéis desempenhados pelo pesquisador-autor e pelas licenciandas durante os encontros. Papéis esses que possibilitaram a dinâmica utilizada na/para a realização do GE.

5.2 Os diferentes papéis desempenhados no Grupo de Estudo

Como já ressaltado, desde o primeiro encontro do GE foram explicitados os papéis a serem desempenhados pelo pesquisador-autor e pelas licenciandas; papéis esses necessários à realização do GE – considerado um espaço de/para a Formação Inicial do professor que ensina(rá) Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental – constituído por características/relações colaborativas e orientado pela concepção epistemológica construtivista. Ao orientar-se por essa concepção, então, ao decorrer dos encontros que

compuseram o GE, pesquisador-autor e licenciandas tiveram que ‘agir sobre’ as diferentes atividades (e seus respectivos objetos/assuntos) propostas. Tais papéis/ações apresentam-se nas subseções seguintes.

5.2.1 O papel do pesquisador-autor

Durante a realização do GE, o pesquisador-autor desempenhou papéis diversos. Enquanto proponente do referido grupo, lhe coube elaborar as atividades (‘situação problema’, ‘movimento de retomada’, ‘leitura/discussão de texto teórico’, ‘história de ensino simulada’, ‘exemplo de ensino’, ‘questionário’ e ‘desafio para casa’) no intuito de que as mesmas constituíssem, para as licenciandas, situações/momentos desequilibradores que lhes ‘impulsionassem’ a ‘agir sobre’ os objetos/temas abordados no GE. Os resultados dos ‘questionários’ respondidos e a constante análise das atividades já realizadas pelas licenciandas foram importantes para que o pesquisador-autor, de posse de tais informações, continuamente propusesse atividades *‘interessantes e necessárias’*/possíveis de serem assimiladas (e posteriormente acomodadas) pelas licenciandas. Além de preocupar-se com a língua escrita (e com os simbolismos matemáticos) na/para a elaboração dos diversos textos teóricos, o pesquisador-autor utilizou vários autores¹¹ que investigaram alguns aspectos didático-metodológicos e curriculares referentes ao ensino e à aprendizagem dos conteúdos matemáticos, pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’, considerando os anos iniciais do Ensino Fundamental. Em alguns textos foram discutidos, também, alguns aspectos psicológicos envolvidos no/durante o processo de ensino e aprendizagem, aspectos esses provenientes de implicações da Epistemologia Genética quando pensada na/para a Educação. Como o GE intentou contribuir com a Formação Inicial das licenciandas, então, fez-se necessário contemplar esses aspectos nos textos elaborados/propostos.

Para o ‘gerenciamento’ (aplicação e ordenamento) das referidas atividades, o pesquisador-autor realizou as seguintes ações: a) aplicou ‘questionários’, antes da proposição das demais atividades, de modo a identificar os saberes/conhecimentos já construídos pelas licenciandas; b) propôs atividades num *continuum*, isto é, estabelecendo ‘ligações’ entre as mesmas; c) retomou, constantemente, os assuntos/temas abordados nas atividades realizadas no(s) encontro(s) anterior(es); d) propôs uma variedade de ‘situações problema’, acerca de determinado conceito matemático, ao longo de um determinado período; e) propôs ‘situações

¹¹ O Apêndice C apresenta os diversos textos teóricos utilizados durante o GE, bem como os referidos autores nos quais o pesquisador-autor ‘valeu-se’ na/para a elaboração dos referidos textos.

problema’ – acerca de determinado conceito matemático – em um ‘primeiro momento’; f) formalizou, num ‘último momento’, o referido conceito matemático mediante a realização das atividades ‘leitura/discussão de texto teórico’ e ‘movimento de retomada’. Conforme já ressaltado na subseção 5.1.1, tais ações fundamentam-se/justificam-se na Epistemologia Genética e na teoria de Gérard Vergnaud (já apresentadas na seção 2).

Ao planejar as referidas atividades e ‘gerenciar’ a ocorrência das mesmas ao longo dos vinte encontros, o pesquisador-autor acabou atuando como um professor. Segundo Becker (2012), o ‘ser’ professor – considerando-se a Epistemologia Genética – pode ser definido do seguinte modo:

Aproxima-se de um construtivismo quando se concebe como alguém que, em interação com o aluno, cria ações ou situações que possibilite a este realizar, mediante a própria atividade, abstrações reflexionantes; quando se esforça para “chegar onde o aluno está”; quando propõe desafios, constrói um processo de trocas verbais, investe na construção de um “clima” de aproximação entre ele e os alunos; quando organiza situações de aprendizagem, de reflexão sistemática dos erros cometidos por alunos e professor; quando provoca o aluno a pensar as ações significativas que praticou na sala de aula ou fora dela; quando não perde oportunidade de aprender com o aluno, fazer sistematicamente perguntas, cuidar para não dar matéria pronta, ajudar o aluno a exercer sua curiosidade e construir sua autonomia. (BECKER, 2012, p. 377)

Em conformidade ao defendido por Becker (2012), o pesquisador-autor – ao assumir estes variados papéis – visou estabelecer uma relação de interação com as licenciandas; relação essa pautada na conversação/trocas verbais. Tal conversação caracterizou-se/constituiu-se: a) pelo questionamento acerca das soluções das atividades (‘situação problema’, ‘exemplo de ensino’ e ‘desafio para casa’) elaboradas pelas licenciandas, bem como das possíveis dúvidas provenientes das mesmas; b) pela ‘aproximação’ aos saberes e aos conhecimentos referentes à Matemática (e seu processo de ensino e aprendizagem) já construídos pelas licenciandas durante a Educação Básica; c) pela reflexão sobre os erros advindos da realização das atividades destacadas no item a); d) pela partilha de dúvidas e expectativas envolvendo a futura prática docente nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Embora tais ações (questionar, aproximar-se, refletir, partilhar) só tenham ocorrido graças à efetiva participação/comprometimento das licenciandas, acredita-se que a predisposição do pesquisador-autor em ‘iniciar a abertura’ deste espaço/momento de/para a conversação foi fundamental.

Além dessas ações, o pesquisador-autor também explicou, quando necessário, os assuntos/temas abordados em algumas atividades (‘situação problema’, ‘exemplo de ensino’,

‘movimento de retomada’ e ‘leitura/discussão de texto teórico’). Tais explicações¹² fizeram-se necessárias, pois as licenciandas apresentaram dificuldades na assimilação dessas atividades. Para realizar essas explicações, o pesquisador-autor utilizou vários exemplos a fim de auxiliar as licenciandas na assimilação do conteúdo inicialmente apresentado nas referidas atividades. Além desses exemplos, o pesquisador-autor valeu-se de outra linguagem (diferente da inicialmente utilizada) de modo que os ‘novos’ significantes estivessem ‘mais próximos’ da capacidade de assimilação das licenciandas.

Enfim, todos esses papéis exigiram do pesquisador-autor uma constante ação e reflexão na/para a realização do GE construído colaborativamente com as licenciandas. Estas, por sua vez, também desempenharam variados papéis a serem explicitados na subseção seguinte.

5.2.2 O papel das licenciandas

Assim como o pesquisador-autor, as licenciandas também desempenharam diversos papéis no/durante o GE. As suas ações sobre as atividades propostas, bem como a construção gradativa do diálogo/conversação envolvendo todos os participantes foram cruciais ao satisfatório desenvolvimento do grupo. Como a ação é a desencadeadora de abstrações reflexionantes (e, por conseguinte, de progressivas tomadas de consciência) – e sendo tais abstrações as responsáveis pelo desenvolvimento/equilíbrio majorante – então, o agir das licenciandas foi fundamental à ocorrência das possíveis (re)significações dos saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem). Tais ações se deram quando as licenciandas: a) resolveram, individualmente e/ou em grupo, as ‘situações problema’, os ‘desafios para casa’ e os ‘exemplos de ensino’; b) compartilharam/compararam as referidas resoluções no grupo; c) leram/discutiram, individualmente e/ou em grupo, os textos presentes nas atividades ‘leitura/discussão de texto teórico’, ‘movimento de retomada’ e ‘história de ensino simulada’; d) discutiram, em grupo, os diversos temas abordados durante o GE, inclusive os relacionados à futura prática docente de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental; e) elaboraram, individualmente, sínteses (‘momento de síntese’) para cada encontro realizado.

¹² A explicação de determinado conteúdo nunca foi ‘desautorizada’ pela Epistemologia Genética. Essa explicação constitui mais uma técnica a ser utilizada pelo professor em sala de aula; contudo, o conteúdo de tal explicação (a ser construído pelo sujeito) deve estar ao nível das possibilidades de assimilação (e posterior acomodação) pelo aluno.

Embora tais ações tenham sido numerosas ao longo dos vinte encontros que compuseram o GE, abaixo apresentar-se-ão (apenas) dois desses momentos nos quais: i) as licenciandas e o pesquisador-autor discutiram um determinado assunto; ii) as licenciandas resolveram conjuntamente e auxiliadas pelo pesquisador-autor – uma ‘situação problema’.

Em relação à ação i), no 12.º encontro – durante a abordagem da questão do interesse na/para a Educação e o seu significado para a Epistemologia Genética – as licenciandas realizaram uma interessante discussão em grupo apresentada a seguir:

44. **P-5:** *Eu comentei com o pessoal que quando tinha que partir da necessidade do aluno eu ficava pensando “Nossa, não é só isso!”, porque o interesse... quando fala do interesse do aluno, o aluno está interessado não nas coisas difíceis de aprender, mas está interessado em outras coisas que é normal. Só que daí lendo e a gente foi conversando eu fui percebendo que cabe ao professor instigar o aluno pra ele ter esse interesse... então o trabalho do professor não é só o depois que ele [Referiu-se ao aluno.] tem o interesse pra ele trabalhar, é antes do interesse e depois também! Foi esse clique... “Nossa, o professor trabalha antes e depois que faltava!” que as pessoas falavam.*

45. **P-1:** *Como assim?*

46. **P-5:** *Tipo, assim, eu sou o professor e tenho que despertar o interesse no aluno... primeiro o professor desperta e depois pra ele saber o professor vai trabalhar este tema, que é o antes e o depois. Eu até comentei que falta explicar isso quando vão explicar aquela parte do interesse do aluno, porque ninguém tinha falado isso pra mim! Falam que tem que partir do interesse do aluno, toda a hora, e ninguém explica o antes que o professor tem que despertar este interesse e só o depois. [Enquanto falava, P-2, P-4 e P-8 sinalizaram concordar com P-5.]*

47. **P-8:** *É igual a gente na aula mesmo! Se é um assunto que interessa, que me desperta... agora se não a gente nem liga!*

48. **P-9:** *É, a gente tem uma disciplina na graduação atualmente e é exatamente isso, por esse caminho. Ninguém sente a necessidade, a importância do que está relacionado à disciplina... Então o professor coloca tal coisa, tal conteúdo lá... mas, em nenhum momento, particularmente eu vi o professor relacionar isso na nossa prática... Uma vez só eu vi ele relacionar para o nosso interesse, que eu vejo que é necessário já que vamos nos formar professores. Não adianta só entender a teoria se não vai ter um diferencial por parte da gente.*

49. **P-5:** *E parece óbvio quando você fala que é lógico que o professor tem que despertar o interesse do aluno... eu também achava isso antes, mas é por entender que a teoria de Piaget falava isso que me deixou feliz!*

50. **P-8:** *Ah, tá, entendi!*

51. **P-5:** *Que ela fala isso, e a gente conseguiu entender. E é assim que deve ser falado pras pessoas... quando vocês forem explicar o interesse pras pessoas, por favor, falem que tem o antes também. [Risos entre as participantes.]*

52. **Pesquisador/Participante:** *E a P-9 acabou de dizer que é complexo este processo! E realmente é mesmo, pois para que você saiba qual é o interesse adequado àqueles alunos você tem que saber os conteúdos possíveis de serem assimilados e acomodados, as metodologias possíveis de serem utilizadas com aqueles alunos, os recursos, os materiais que vão facilitar a ação do sujeito... No entanto, P-9, o significado de interesse para a Epistemologia Genética difere do significado do senso comum que foi sinalizado em sua fala. O interesse, sendo uma resultante da necessidade, constitui o aspecto dinâmico da assimilação. Percebam, pessoal, que é um todo complexo! Identificar o interesse (a necessidade) para uma determinada faixa etária de alunos e para um determinado campo de conhecimento exige conhecimento em Didática, Metodologia, do conteúdo específico, Psicologia, Filosofia, Sociologia, e por aí vai. É por isso, pessoal, que eu defendo que ser*

professor não é para qualquer um no sentido de que uma formação ruim basta.
[Apêndice P, 12.º Encontro]

Observa-se, no diálogo acima, que as licenciandas e o pesquisador-autor conversaram sobre a questão do interesse, tema esse não tão bem compreendido no meio educacional. Para a P-5, por exemplo, entender tal questão foi importante já que lhe possibilitaria pensar em sua futura prática docente com o devido fundamento teórico.

Em relação à ação ii), o pesquisador-autor propôs – no 15.º encontro – que as licenciandas resolvessem, coletivamente, a seguinte ‘situação problema’ envolvendo o conceito de arranjo: “Durante a semana da Educação Física, a escola está realizando uma competição entre as 8 turmas do Ensino Médio. Quantas são as possibilidades para o 1.º e 2.º lugares dentre as turmas participantes?”. Após 2 minutos disponibilizados para a leitura do enunciado, as licenciandas – auxiliadas pelo pesquisador-autor – começaram a discutir/pensar sobre a referida ‘situação problema’:

198. **P-8:** *Tem 8 turmas! Ah, tá!*
199. **P-2:** *Na competição inteira tem 1.º e 2.º lugares, não é isso?*
200. **P-8:** *Então vai ter 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8! Daí fica em 1.º lugar e 2.º lugar!*
201. **Pesquisador/Participante:** *Ou a turma fica em 1.º lugar ou em 2.º!*
202. **P-2:** *Dentre todos os 8!?*
203. **Pesquisador/Participante:** *Isso!*
204. **P-2:** *Então, se uma turma, por exemplo, a turma número 8 já está em 1.º lugar, pras outras 7 turmas sobrou só o 2.º lugar!*
205. **P-8:** *Ah, tá!*
206. **Pesquisador/Participante:** *Não tem mais colocações, é 1.º ou 2.º lugares.*
207. **P-8:** *Ah, tá, eu achei que tinha 8 em cada!*
208. **Pesquisador/Participante:** *Quais são as possibilidades de ter estas duas colocações entre as 8 turmas?*
209. **P-8:** *No 1.º lugar são os 8 que podem ficar! Mas, depois, no outro [Referiu-se ao 2.º lugar.] não!*
210. **Pesquisador/Participante:** *No outro não...*
211. **P-2 e P-7:** *São 7!*
212. **P-8:** *É, são 7!*
213. **Pesquisador/Participante:** *Tudo bem este pensamento, P-4?*
214. **P-4:** *Sim! [Falando em voz alta, P-8 registrou a resposta do referido desafio:]*
215. **P-8:** *No 1.º lugar todos podem ficar, já no 2.º lugar só 7 podem ficar!*
216. **P-2:** *Por que é isso, né!? Se os 8 podem ficar no 1.º lugar, no 2.º só podem ficar os 7 restantes. Não é isso!?*
217. **Pesquisador/Participante:** *É isso mesmo, pessoal! E quantas possibilidades dão?*
218. **P-8:** *Vão ficar 6!... Não, por que 6?*
219. **P-2:** *Não! Quantas são as possibilidades para o 1.º e 2.º lugares? Quantas possibilidades...*
220. **P-8:** *Ah!*
221. **P-2:** *Eu não sei responder isso! Quantas possibilidades... Para o 1.º lugar são 8 possibilidades, porque tem 8 turmas!*
222. **P-8:** *Tá!*
223. **P-2:** *Para o 2.º lugar são 7 possibilidades!*

224. **Pesquisador/Participante:** O pensamento de vocês está correto! Todo mundo entendeu esta parte? [Todas as participantes responderam “Sim!”.] Então, como eu faço pra calcular o total?

225. **P-2:** Não sei!

226. **Pesquisador/Participante:** Vocês não tem nenhuma ideia? [Como ninguém se pronunciou, o Pesquisador/Participante indagou:] Vamos ver se isso que eu vou fazer na lousa ajuda! [Enquanto desenhava na lousa o 1.º ‘Momento’ do esquema abaixo, o Pesquisador/Participante perguntou qual a preferência para identificar as salas, ou seja, por números ou por letras. P-2 respondeu que preferia números. No entanto, o Pesquisador/Participante salientou que iria denotar as salas ordinalmente para não confundir, já que poder-se-ia interpretar como se 2 salas tivessem ficado em 1.º lugar.]

SALAS – ENSINO MÉDIO	1.º	2.º	SALAS – ENSINO MÉDIO	1.º	2.º	SALAS – ENSINO MÉDIO	1.º	2.º
	Lugar	Lugar		Lugar	Lugar		Lugar	Lugar
	1. ^a			1. ^a	↖		1. ^a	↖
	2. ^a			2. ^a	↖		2. ^a	↖
	3. ^a			3. ^a	↖		3. ^a	↖
	4. ^a			4. ^a	↖		4. ^a	↖
	5. ^a			5. ^a	↖		5. ^a	↖
	6. ^a			6. ^a	↖		6. ^a	↖
	7. ^a			7. ^a	↖		7. ^a	↖
	8. ^a			8. ^a	↖		8. ^a	↖
1.º ‘Momento’			2.º ‘Momento’			3.º ‘Momento’		

227. **Pesquisador/Participante:** Olhem aqui! [Apontou para o referido esquema.] Se a 1.^a sala ficou em 1.º lugar, então, ela pode ficar em 2.º lugar?

228. **P-2 e P-8:** Não!

229. **Pesquisador/Participante:** Então, em 2.º lugar podem ficar quais salas?

230. **P-4:** Todas! [Referiu-se às salas restantes.]

231. **P-2:** A 2.^a, 3.^a, 4.^a, 5.^a, 6.^a, 7.^a e 8.^a!

232. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, pessoal? [Todas as participante responderam “Sim!”. O Pesquisador/Participante fez a seguinte representação no referido esquema – 2.º ‘Momento’.]

233. **P-2:** Mas se não foi ela que ficou [Referiu-se à 1.^a sala.] pode ficar a 2.^a sala! Daí fica tudo de novo: 1.^a, 3.^a, 4.^a, 5.^a, 6.^a, 7.^a e 8.^a. [Referiu-se ao 2.º lugar.]

234. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem o que a P-2 falou, pessoal? [As demais participantes sinalizaram afirmativamente. Deste modo, o Pesquisador/Participante completou o esquema – 3.º ‘Momento’.] Então nós vamos fazer o mesmo com a 2.^a, a 3.^a, até a 8.^a sala! Tentem calcular a partir disso... veja se vocês conseguem!

235. **P-8:** É 7×8 !

236. **Pesquisador/Participante:** A P-8 falou que fica 7×8 !?

237. **P-8:** Porque sempre... se tem 8 e você tira 1 de cada 1... é!

238. **Pesquisador/Participante:** A P-4 e a P-8 disseram que tem que fazer 7×8 ou 8×7 !

239. **P-8:** Espera, deixa eu ver primeiro!

240. **P-2:** 8 vezes 7 possibilidades! [A participante ficou olhando para o esquema feito na lousa.]

241. **P-8:** Porque todas vão sair 1! Se eu tenho 8... 8 salas...

242. **P-2:** Mas ali, oh [Apontou para o referido esquema.] vão ficar 7 de 7!?

243. **P-7:** Então...

244. **P-2:** Ou 8 de 7?

245. **P-8:** 7 porque cada um vai ter 7, mas tem 8 salas!

246. **P-2:** 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

247. **Pesquisador/Participante:** Cada sala que fica em 1.º lugar, as demais só podem ficar em 2.º.
248. **P-2:** *Então são 8 vezes 7 mesmo!*
249. **P-7:** *É!*
250. **P-8:** *Isso!*
251. **Pesquisador/Participante:** A gente ‘cai’ de novo aonde?
252. **P-8:** *No princípio multiplicativo! [Neste momento P-4 riu!]*
253. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem P-4?
254. **P-4:** *Sim!*
255. **Pesquisador/Participante:** E você P-8?
256. **P-8:** *Sim!*
257. **Pesquisador/Participante:** P-7...
258. **P-7:** *Tudo!*
259. **Pesquisador/Participante:** E você, P-2?
260. **P-2:** *Então, mas esse é o meu problema! Eu até entendo o problema, consigo raciocinar e tudo, mas não consigo pensar no cálculo!*
261. **P-8:** *Eu já pensei no cálculo! Eu já vi!*
262. **P-4:** *É, mas porque tinha o desenho! [Referiu-se ao esquema feito na lousa.]*
263. **P-2:** *Agora, né!*
264. **P-8:** *É, sem o desenho não! É, sem o desenho eu não tinha pensado que todos estes números [Referiu-se às 8 salas.] tinha essa possibilidade! Mas é falta de treino!*
265. **Pesquisador/Participante:** Também, uma certa ‘manha’ em como fazer problemas deste tipo, mas não só isso! Deu pra perceber, pessoal, que a Árvore de Possibilidades é um importante instrumento?
266. **P-4:** *Muito! [Apêndice S, 15.º Encontro]*

É possível observar, mediante a leitura do trecho acima, que a resolução conjunta – auxiliada por questionamentos e explicações do pesquisador-autor – constituiu um momento importante para que as licenciandas pensassem sobre uma ‘situação problema’ matemática. As trocas interindividuais (atentar-se ao ponto de vista do outro e à possível solução de uma ‘situação problema’) auxiliaram o ‘fazer Matemática’ realizado pelas licenciandas. Momentos como esses se fizeram presentes ao decorrer do GE de modo a ‘requerer’ (de todos os participantes) a efetiva ação sobre as atividades propostas (e desenvolvidas) no grupo. Faz-se oportuno destacar que o trecho anterior também possibilitou uma ‘exemplificação’ dos papéis desempenhados pelo pesquisador-autor (conforme já citado na subseção anterior).

A fim de explicitar os assuntos abordados/as atividades desenvolvidas durante o GE, na subseção seguinte apresentar-se-á uma síntese de cada um dos vinte encontros. A transcrição de cada um desses encontros apresenta-se nos Apêndices (E à X). Nesses apêndices é possível verificar as ações (os papéis) desempenhadas pelas licenciandas e o pesquisador-autor; ações essas imprescindíveis à ocorrência do GE orientado sob a concepção epistemológica construtivista (piagetiana).

5.3 Uma síntese de cada encontro realizado no Grupo de Estudo

Nesta subseção apresenta-se uma síntese das atividades realizadas e de considerável parte dos assuntos abordados em cada um dos vinte encontros que constituíram o GE. Esboça-se, antes de cada síntese textual de cada encontro, um quadro contendo os tipos de atividades realizadas e os assuntos abordados.

Quadro 23 – Síntese do 1.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Apresentação Inicial (texto).	1 – Objetivos (geral e específicos), justificativa e constituição do Grupo de Estudo a ser desenvolvido num trabalho com características colaborativas.
2 – Situação problema.	2 – Sobre os resultados advindos do Questionário Inicial aplicado.
3 – Situação problema.	3 – Desafio “Torre de Hanói”.
4 – Momento de síntese	4 – Referente aos assuntos abordados no encontro.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice E).

No 1.º encontro, inicialmente, as licenciandas mostraram-se receosas em responder as perguntas realizadas pelo pesquisador-autor acerca do texto inicial. Após a leitura do referido texto visando à apresentação dos objetivos e das justificativas à constituição do GE, foram definidos os papéis a serem desempenhados por cada participante de modo a possibilitar a construção de um trabalho, do tipo colaborativo, pautado na confiança, negociação e conversação. As licenciandas indicaram o interesse em participar do GE devido ao seu objetivo e por ‘sentirem’ falta de um espaço, na Formação Inicial, que tratasse do ensino de Matemática nos anos iniciais; assunto esse que lhes interessava tendo em vista a (futura) atuação docente. Durante a discussão em grupo (licenciandas e pesquisador-autor) em torno de ‘situações problema’ referentes aos resultados obtidos no Questionário Inicial (ver Apêndice A), foram discutidos os seguintes tópicos: a) a abordagem insuficiente – segundo as licenciandas – dos conteúdos matemáticos no curso de Pedagogia realizado, conteúdos esses que serão objeto de ensino na futura prática profissional; b) as licenciandas acreditavam que a Formação Inicial não estava possibilitando a compreensão das teorias educacionais a ponto de ‘utilizarem-nas’ na fundamentação das futuras práticas docentes; c) a postura didático-metodológica da maioria dos ‘antigos’ professores de Matemática (das licenciandas), posturas essas pautadas na tríade apresentação oral do conteúdo matemático x resolução de exemplo do referido conteúdo pelo professor x resolução de exercícios análogos (ao exemplo) pelos alunos; d) o entendimento das participantes sobre o que é a Matemática, como essa ciência é aprendida e como deve ser ensinada; e) as dificuldades vivenciadas pelas licenciandas durante a Educação Básica na aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos; por exemplo, todas

as licenciandas concordaram possuírem dificuldades acerca do conceito de função. Após a discussão sobre tais dificuldades, o pesquisador-autor e as licenciandas decidiram que o bloco de conteúdos abordado durante o GE seria o ‘Tratamento da Informação’. Em seguida, foi proposto às licenciandas uma ‘situação problema’ envolvendo o desafio Torre de Hanói, cujas soluções registradas em folha foram recolhidas pelo pesquisador-autor para análise. Por fim, as licenciandas elaboraram o ‘momento de síntese’.

Quadro 24 – Síntese do 2.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Movimento de retomada.	1 – Sobre as soluções elaboradas pelas licenciandas acerca da situação problema Torre de Hanói.
2 – Leitura/discussão de texto teórico.	2 – Bloco de conteúdo ‘Tratamento da Informação’: significação, constituição e abordagem no Ensino Fundamental.
3 – Questionário.	3 – Conhecimentos já construídos sobre gráficos e tabelas e o modo de ensino de seus ‘antigos’ professores.
4 – Momento de síntese.	4 – Referente aos assuntos abordados no encontro.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice F).

No 2.º encontro, posteriormente à discussão das soluções elaboradas por cada licencianda ao desafio Torre de Hanói, fez-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ acerca de considerações gerais do ‘Tratamento da Informação’. O referido texto apresenta-se a seguir:

Quadro 25 – Texto: Alguns pontos iniciais do ‘Tratamento da Informação’.

2.2 Alguns pontos iniciais do Tratamento da Informação O ‘bloco’ de conteúdo denominado ‘Tratamento da Informação’ foi citado como sendo àquele que representou para vocês a ‘maior’ dificuldade conceitual (e procedimental). Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – (1.ª a 4.ª série) – Vol. 3: Matemática, embora o Tratamento da Informação possa ser incorporado aos demais ‘blocos’ (Números e Operações, Espaço e Forma e Grandezas e Medidas), devido à sua demanda e relevância social foi possível destacá-lo como um ‘bloco’ de conteúdo. De modo geral, tal ‘bloco’ é constituído por conteúdos advindos da Estatística, Probabilidade e Combinatória. Para cada nível de ensino tal ‘bloco’ receberá um tratamento diferenciado, seja referente ao nível (profundidade) dos conteúdos abordados, bem como da metodologia a ser adotada. Na 1.ª ‘etapa’ do Ensino Fundamental, atualmente compreendido do 1.º ao 5.º ano, o referido documento (PCN) destaca o seguinte referente ao 1.º ciclo (1.ª e 2.ª séries): Os assuntos referentes ao Tratamento da Informação serão trabalhados neste ciclo de modo a estimularem os alunos a fazer perguntas, a estabelecer relações, a construir justificativas e a desenvolver o espírito de investigação. A finalidade não é a de que os alunos aprendam apenas a ler e a interpretar representações gráficas, mas que se tornem capazes de descrever e interpretar sua realidade, usando conhecimentos matemáticos. (BRASIL, 1997, p. 49) Em relação à 2.ª ‘etapa’ do Ensino Fundamental (6.º ao 9.º ano) é interessante observar o que pontua o PCN (5.ª a 8.ª séries) de Matemática: Integrarão este bloco estudos relativos a noções de Estatística e de probabilidade, além dos problemas de contagem que envolvem o princípio multiplicativo. Evidentemente, o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado
--

na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos.

Com relação à Estatística, a finalidade é fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem freqüentemente em seu dia-a-dia. Além disso, calcular algumas medidas estatísticas como média, mediana e moda com o objetivo de fornecer novos elementos para interpretar dados estatísticos.

Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis).

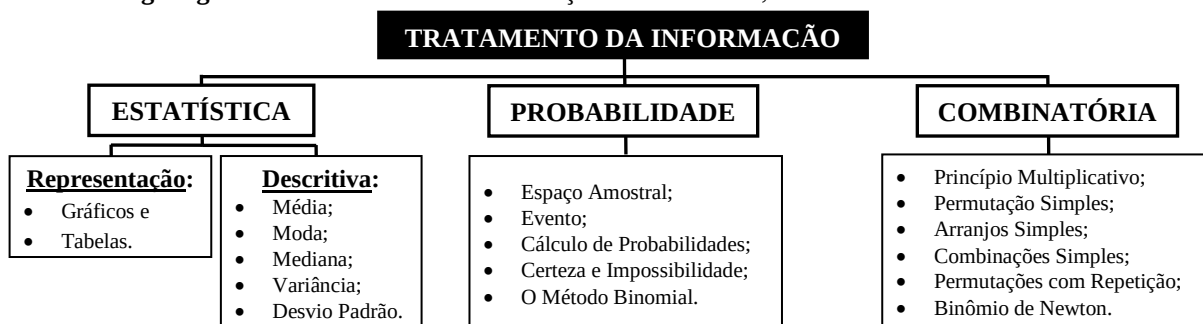
Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades. (BRASIL, 1998, p. 52)

A partir da leitura das duas citações, há algum trecho não compreendido? Alguma palavra causou em você certo ‘desequilíbrio’? Caso sim, comente.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Nesse momento, quando questionadas pelo pesquisador-autor, nenhuma das licenciandas se lembrou dos conteúdos que compunham a Estatística, a Combinatória e a Probabilidade. Ao apresentar o organograma – a seguir – que sintetiza parte dos assuntos constituintes deste bloco, as licenciandas salientaram terem apenas ‘ouvido falar’ de tais conceitos, sendo esse fato um indício da não aprendizagem/construção dos mesmos. Em particular, todas as licenciandas salientaram terem apenas ‘visto’, numa disciplina cursada na Pedagogia, os conteúdos de média, moda, mediana, variância e desvio padrão. Além disso, as licenciandas pontuaram que a abordagem desses conteúdos – feita pela grande maioria dos seus ‘antigos’ professores – decorreu da tríade já apontada no 1.º encontro, recorrendo-se à resolução de exercícios retirados de livros didáticos de Matemática.

Organograma 5 – Tratamento da Informação: Combinatória, Estatística e Probabilidade.



Fonte – Elaborado pelo autor, 2012 (Apêndice C).

Concluída a ‘aplicação’ do ‘questionário’ no qual se pretendeu identificar os conhecimentos já construídos sobre gráficos e tabelas, as licenciandas elaboraram o ‘momento de síntese’. Devido ao ‘término’ do tempo, algumas ‘situações problema’ decorrentes da ‘história de ensino simulada’ propostas para este encontro foram deixadas para o seguinte. Nessa história, exemplificada abaixo, relatam-se as ações didático-metodológicas de uma professora de Matemática hipotética (denominada Sueli) ao ensino de gráficos e tabelas para alunos do 6.º ano do Ensino Fundamental.

Quadro 26 – História de ensino simulada: ensino de gráficos e tabelas.

2.4 PROBLEMATIZADO: GRÁFICOS E TABELAS

Leia, atentamente, a situação problema exposta a seguir:

Durante o mês de maio, a professora de Matemática Sueli pediu aos seus alunos do **6º** ano **B** do Ensino Fundamental, da Escola Municipal Professor Alcântara, que ‘coletassem’ as seguintes informações (dados).

- A) Quantidade de irmãos.
- B) Quantidade e o tipo de animal de estimação.
- C) O gênero de filme preferido, apenas um.
- D) O sabor de sorvete preferido, apenas um.
- E) O número do calçado que usam.

Após a coleta, cada aluno trouxe suas anotações e a professora Sueli as escreveu na lousa, conforme exposto abaixo:

Amanda A) 2 B) Nenhum. C) Romance. D) Chocolate. E) 30.	Antônio A) 0 B) 1 gato. C) Comédia. D) Morango. E) 32.	Auréli A) 2 B) 2 gatos. C) Ação. D) Flocos. E) 28.	Beatriz A) 1 B) 1 papagaio. C) Ação. D) Morango. E) 28.	Beto A) 2 B) Nenhum. C) Comédia. D) Chocolate. E) 32.
Daniel A) 0 B) 1 cachorro. C) Terror. D) Morango. E) 34.	Daniele A) 3 B) 1 coelho. C) Ação. D) Coco. E) 28.	Diogo A) 3 B) Nenhum. C) Romance. D) Napolitano. E) 30.	Gustavo A) 2 B) 3 gatos. C) Comédia. D) Flocos. E) 30.	Igor A) 3 B) 1 cachorro. C) Terror. D) Napolitano. E) 26.
João A) 1 B) 1 gato. C) Ação. D) Coco. E) 32.	Júlia A) 1 B) Nenhum. C) Comédia. D) Chocolate. E) 26.	Kaik A) 4 B) Nenhum. C) Suspense. D) Coco. E) 28.	Leonardo A) 0 B) 1 cachorro. C) Ação. D) Morango. E) 34.	Lúcia A) 2 B) 2 gatos. C) Romance. D) Napolitano. E) 30.
Maria Lúcia A) 3 B) 2 gatos. C) Comédia. D) Napolitano. E) 28.	Nando A) 1 B) 1 cachorro. C) Comédia. D) Chocolate. E) 34.	Otávio A) 2 B) 2 coelhos. C) Terror. D) Morango. E) 32.	Patrícia A) 0 B) Nenhum. C) Suspense. D) Flocos. E) 30.	Sara A) 3 B) Nenhum. C) Romance. D) Napolitano. E) 28.

Em seguida, a professora Sueli pediu que os alunos, em dupla, organizassem cada um dos dados (itens A, B, C, D e E) de tal modo que ficasse mais fácil visualizá-los em relação a toda a sala. Como os alunos poderão organizar esses dados?

Fonte – Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Quadro 27 – Síntese do 3.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Momento de síntese.	1 – Sínteses elaboradas acerca do encontro anterior.

2 – História de ensino simulada E ¹³	2 – Ensino de gráficos e tabelas E
3 – Situação problema.	3 – Assuntos abordados no item anterior.
4 – Movimento de retomada.	4 – Resultados do questionário aplicado no 2.º encontro e uma definição de gráfico e tabela.
5 – Leitura/discussão de texto teórico.	5 – ‘Termos’ da pesquisa Estatística (população, amostra, indivíduo ou objeto, variável: quantitativa e qualitativa).
6 – Momento de Síntese.	6 – Referente aos assuntos abordados no encontro.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice G).

No 3.º encontro, no momento da socialização das sínteses, as licenciandas salientaram a importância de efetivamente participarem/atuarem sobre as atividades propostas pelo pesquisador-autor. Após a resolução das ‘situações problema’ relacionadas à ‘história de ensino simulada’ – exposta anteriormente – as licenciandas compartilharam as suas resoluções/respostas mediadas pelo pesquisador-autor. As referidas situações foram as seguintes:

1. De que modo você acredita que os alunos da professora Sueli organizariam os dados coletados?
2. Em dupla, organizem cada um dos dados (itens A, B, C, D e E) da maneira que conseguirem/preferirem.
3. Dentre alguns dos gráficos existentes (coluna, barra, circular e linha) quais são os indicados para a organização dos dados (itens A, B, C, D e E)? Há, entre estes tipos de gráficos, algum(s) que não é(são) apropriado(s) neste caso?
4. Os dados (itens A, B, C, D e E) podem ser organizados em uma única tabela? Em caso afirmativo, quantas linhas e quantas colunas seriam necessárias? Tente elaborar uma representação! Em caso negativo, justifique.

Durante tal compartilhamento, salientou-se a importância da aula de Matemática iniciar com uma problematização, já que tal problematização pode implicar no ‘agir’ do sujeito sobre o objeto do conhecimento. Arelada à abordagem dos resultados advindos do ‘questionário’ aplicado no encontro anterior, fez-se a leitura/discussão de um texto, do tipo ‘movimento de retomada’, acerca da definição de gráficos e tabelas. O referido texto apresenta-se a seguir:

Quadro 28 – Texto: Retomando gráficos e tabelas.

3.1. Retomando – Gráficos e Tabelas

No segundo encontro foi proposto um ‘pensar sobre’ alguns ‘meios’ para a organização dos dados obtidos na pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli aos seus alunos do 6.º ano B do Ensino Fundamental. Entre alguns ‘meios’ possíveis encontraram-se a utilização de tabelas. Diversas foram as definições expressas por vocês, participantes do Grupo de Estudo, acerca do gráfico e da tabela. Em relação à tabela, as ‘definições’ abrangeram as seguintes ideias: 1 – Dados numéricos que possuem certa relação entre si; 2 – Números organizados em determinada ordem; 3 – Linhas e colunas que se cruzam; 4 – Representação gráfica que expressa os dados; 5 – Descrição e explicação ou ilustração de informações.

¹³ A preposição ‘e’ – escrita em letra maiúscula e por meio dos recursos de digitação negrito/sublinhado ‘**E**’ – indica a relação existente entre duas ou mais atividades realizadas.

Quanto ao gráfico, obtiveram-se tais ‘definições’: 1 – Descrição dos dados em analogia com as Tabelas; 2 – Representação em porcentagem de alguma informação; 3 – Interpretação de informações visualizando a maior frequência; 4 – Formas de representar a Tabela; 5 – O desenho de uma ou mais informações; 6 – Quadro de informações, como uma Tabela, advindo de uma pesquisa.

A partir de tais saberes experienciais construídos por vocês acerca do que entendem por gráficos e tabelas, faz-se interessante um ‘movimento’ de análise-comparativa a partir de uma possível definição de gráfico e de tabela.

O **Gráfico** pode ser definido como um esquema visual representativo de dados. Já a **Tabela** pode ser definida como uma disposição em linhas e colunas de um grupo ordenado de números. Tal disposição é denominada **Matriz**.

A **Matriz** $m \times n$ (lê-se m por n , sendo m e n números inteiros maiores ou iguais a 1) é uma tabela retangular formada por $m.n$ números reais dispostos em m linhas e n colunas. Entre alguns tipos de matrizes, encontram-se:

a) **Matriz Quadrada**: recebe esse nome para $m = n$, ou seja, quando o número de linhas é igual ao número de colunas. Por exemplo, a matriz do tipo 2×2 expressa abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

b) **Matriz-Linha**: ocorre quando $m = 1$, ou seja, quando possui apenas 1 linha. Observe abaixo um exemplo de uma matriz-linha do tipo 1×4 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

c) **Matriz-Coluna**: nesse caso tem-se $n = 1$, ou seja, quando possui apenas 1 coluna. A matriz-coluna seguinte é do tipo 4×1 :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Curiosidade: Com o advento do computador e a crescente necessidade de se guardar muita informação, as matrizes adquiriram considerável importância. Por exemplo, o que vemos na tela de um computador é um ‘grande’ matriz no qual cada valor ‘guardado’ nas linhas e nas colunas da matriz representa um ponto colorido mostrado na tela (*pixel*). Quanto ‘maior’ o número de linhas e colunas ‘maior’ é a resolução e, portanto, melhor definida é a imagem.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Quando questionadas pelo pesquisador-autor, nenhuma das licenciandas disse ter aprendido que a matriz pode estar ‘relacionada’ a uma tabela e que o produto das linhas pelas colunas fornece o número de elementos da matriz. Em tal discussão, pontuou-se a necessidade da classificação como uma das operações intelectuais utilizadas ao agrupamento dos dados a serem representados em uma tabela. Em seguida, ocorreu a ‘leitura/discussão de texto teórico’ referente aos termos da pesquisa estatística (população, amostra, indivíduo, objeto, variável qualitativa e quantitativa). As ‘situações problema’ relacionadas a esse último texto – e que também se ‘relacionavam’ com a ‘história de ensino simulada abordada no 2.º encontro – foram deixadas como tarefa ‘para casa’. Ao final do encontro, solicitou-se a elaboração do ‘momento de síntese’.

Quadro 29 – Síntese do 4.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Momento de síntese.	1 – Sínteses elaboradas acerca do encontro anterior.
2 – Situação problema.	2 – Termos de uma pesquisa Estatística
3 Movimento de retomada.	3 – O ‘pensar sobre’ a tabela e a operação de classificação.
4 – Leitura/discussão de texto teórico <u>E</u>	4 – A gênese-construção das classificações (Fase I – coleções figurais)
5 – Situação problema.	5 – Referente à Fase I – coleções figurais.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice H).

No 4.º encontro, após a leitura/compartilhamento das sínteses elaboradas no encontro anterior, disponibilizou-se tempo para que algumas licenciandas resolvessem as ‘situações problema’ deixadas como tarefa, já que nem todas as resolveram ‘em casa’. As situações foram as seguintes:

1. No caso da pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli aos seus alunos, os itens (A, B, C, D e E) podem ser classificados como variáveis? Em resposta afirmativa, tente distribuí-los no quadro abaixo.

VARIÁVEIS			
QUALITATIVA		QUANTITATIVA	
<i>Nominal</i>	<i>Ordinal</i>	<i>Discreta</i>	<i>Contínua</i>

Em caso negativo, justifique a sua resposta.

2. É correto afirmar que os alunos do 6.º ano B do Ensino Fundamental que realizaram a pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli representavam uma amostra? Nesse caso, qual seria a população? E a aluna Amanda, qual seria o seu ‘papel’?

3. Existe alguma diferença entre *Indivíduo* ou *Objeto* referente aos ‘termos’ de uma pesquisa Estatística? Em caso afirmativo, dê um exemplo. Em caso negativo, justifique.

4. A abordagem destes ‘termos’ da pesquisa Estatística pode ser realizada para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental? Caso sim, quais critérios devem ser ‘levados em consideração’ no momento da elaboração da aula (ou sequência de ensino)?

Durante o compartilhamento das resoluções, foram discutidos alguns aspectos, a saber: a) a diferença entre variável qualitativa e quantitativa; b) a diferença entre quantidade discreta e contínua; c) a diferença entre indivíduo e objeto; d) a ocasião em que deve ser utilizado os termos da pesquisa estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental; e) a utilização do calendário no ensino da Estatística na referida etapa de escolaridade. Em seguida, fez-se a leitura do texto ‘movimento de retomada’ lembrando-se a definição de tabela e a relação desta com a operação de classificação. O referido texto apresenta-se a seguir:

Quadro 30 – Texto: O ‘pensar sobre’ a tabela.

4.1 Retomando – o ‘pensar sobre’ a Tabela

No encontro anterior definiu-se a Tabela como uma “*disposição em linhas e colunas de um grupo ordenado de números*”. Para o sujeito realizar tal ‘*disposição de um grupo ordenado de números*’ fazem-se necessárias algumas operações mentais, tais como a quantificação para verificar a frequência da *variável* em

questão – seja ela qualitativa ou quantitativa – e a classificação. Torna-se válido pontuar que tais operações mentais não são as únicas utilizadas pelo sujeito durante a construção de uma tabela, no entanto, para o momento, dar-se-á atenção a uma delas, no caso, a classificação.

Relembrando a questão 3 (item 3.1): “Para separar os filmes em gêneros (tipos) de tal modo a evidenciar a frequência de cada gênero preferido entre os alunos do 6.º ano B do Ensino Fundamental foi necessário realizar qual operação mental? Pense a respeito, justificando sua resposta.”, após a discussão com o Pesquisador/Participante identificou-se que a classificação era a tal operação mental que permitiu aos alunos do 6.º ano B separarem os filmes em gêneros (tipos). Neste caso, por exemplo, é possível pensar acerca desta classificação do seguinte modo:

Seja **A** ‘todos’ os filmes pesquisados pelos alunos do 6.º ano B do Ensino Fundamental. Considerando os seus gêneros (tipos), podemos representá-los conforme denotado a seguir:

B = filme de ação;

C = filme de comédia;

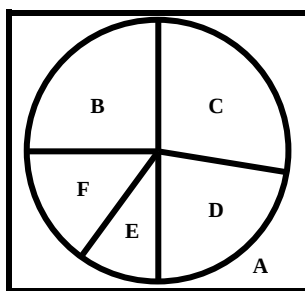
D = filme de romance;

E = filme de suspense;

F = filme de terror;

Daí, temos o seguinte: $A = B + C + D + E + F$.

Para proceder em tal classificação cada aluno teve que escolher o seu gênero de filme preferido como sendo o ‘algum’ dentre ‘todo’ o conjunto de filmes (**A**). Por exemplo, o aluno que escolheu como filme preferido o de terror (**F**) teve que ‘negar’ todos os outros (ou seja, **B**, **C**, **D** e **E**). No entanto, o critério que permitiu aos conjuntos **B** até **F** estarem incluídos em **A** foi o fato de ‘todos’ serem filmes. A figura abaixo representa o exposto:



A partir do exposto, e tomando como exemplo **F** (filme de terror), é possível denotar as seguintes relações:

$$F = A - (B + C + D + E)$$

$$F = A \wedge \text{não-}B \wedge \text{não-}C \wedge \text{não-}D \wedge \text{não-}E$$

1. Denote as relações possíveis a serem estabelecidas com os conjuntos **B**, **C**, **D** e **E**, considerando o referido exemplo.

2. Você já havia pensado a respeito da classificação conforme exposto no texto? As primeiras classificações de que você se lembra ter construídas foram quais? Como você definiria uma classificação?

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Durante a leitura desse texto, as licenciandas acharam interessante a representação de uma classe como sendo a diferença entre o ‘todo’ e as classes complementares. Dando continuidade, iniciou-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ sobre a gênese-construção das classificações¹⁴ a partir da Epistemologia Genética. Devido à dificuldade das licenciandas em compreender a definição da ‘compreensão’ e ‘extensão’ – dois conceitos necessários à construção de uma classe – o pesquisador expôs alguns exemplos. Mediante essa dificuldade,

¹⁴ A abordagem da gênese-construção das classificações se deu por dois motivos: a) o seu estudo pelas licenciandas pode colaborar à compreensão de que o conhecimento é construído gradativamente (em fases contínuas) pelo sujeito, não estando já pré-formado; b) as licenciandas poderão atuar com crianças que estarão construindo tal operação mental (classificação), logo, conhecer essa teoria pode vir a auxiliá-las em sua futura prática docente.

apenas foi possível a abordagem da primeira fase da classificação (Fase I – coleções figurais) e de uma ‘situação problema’ correlata a essa fase. As demais fases da classificação e outras duas atividades propostas para esse encontro – ‘exemplo de ensino’ e ‘momento de síntese’ – ‘ficaram’ para o próximo.

Quadro 31 – Síntese do 5.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Leitura/discussão de texto teórico <u>E</u> 2 – Situação problema.	1 – A gênese-construção das classificações: coleções não-figurais (Fase II); classes (Fase III) <u>E</u> 2 – Assuntos abordados no item anterior.
3 – Exemplo de ensino.	3 – Proposta para a construção da classificação aos alunos do estágio pré-operatório.
4 – Situação problema.	4 – Classificação de diferentes classes incluídas hierarquicamente.
5 – Momento de síntese.	5 – Referente ao encontro anterior e ao atual.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice I).

No 5.º encontro, inicialmente, o pesquisador-autor questionou as licenciandas acerca de suas compreensões sobre a Fase I das classificações realizando, em seguida, uma síntese dos assuntos já discutidos. Durante a ‘leitura/discussão de texto teórico’ da Fase II das classificações (coleções não-figurais), as licenciandas apresentaram dificuldades ao entendimento das dez propriedades de uma classificação. Assim, o pesquisador-autor entrevistou e explicou alguns exemplos – representados na lousa – para cada uma das referidas propriedades. Ao perceber que a P-2 conseguia compreender ‘mais facilmente’ tais propriedades, a P-8 disse que algumas pessoas ‘pegam mais fácil’ o conteúdo. Aproveitando esse comentário, o pesquisador começou uma discussão referente à questão da inteligência e do papel do meio e da ação do sujeito ao seu desenvolvimento. Durante a discussão/abordagem da Fase III (classes – inclusão e classificações hierárquicas), a P-2 compartilhou com o grupo que a sua sobrinha de 3 anos, a partir do discutido no texto, já estava realizando classificações. Em seguida, fez-se a leitura do ‘exemplo de ensino’ que representou uma proposta de ensino visando à construção ‘inicial’ da classificação aos alunos do estágio pré-operatório. Tal situação apresenta-se adiante:

Quadro 32 – Exemplo de ensino: uma proposta-atividade para a construção da classificação.

4.3 Uma proposta-atividade para a construção da classificação

Tal proposta – retirada do livro “Construção da Inteligência pela criança: atividades do período pré-operatório”, autoria de Maria da Glória Seber (1993) – é apresentada abaixo:

Classificação

As atividades de classificação possibilitam a construção de arranjos com invenções progressivas dos critérios utilizados para a reunião de objetos numa ou em várias coleções. A necessidade de as semelhanças e

diferenças entre os elementos oferecidos serem descobertas realizadas pela criança significa que o professor NUNCA deve fornecer critérios de seleção, mas sim contra-argumentar perguntando à criança, por exemplo, se ela concorda ou não em agrupar num só conjunto duas ou mais coleções e por quê.

Eis as atividades de classificação:

1. “Dê um como este”.
2. “Separe os parecidos”.
3. Separar o mesmo material continuamente.
4. Discutir os vários critérios adotados na seleção das coleções.
5. Julgar os critérios de separação de um outro grupo.
6. Descobrir os critérios adotados em coleções previamente formadas.
7. Dar um objeto diferente dos demais, dentre os já distribuídos.
8. Introduzir novos elementos nas coleções já feitas.
9. Determinar o número de coleções a serem construídas.
10. Antecipar as coleções a serem construídas.
11. Desenhar símbolos para as coleções já construídas.
12. Completar os espaços vazios dos arranjos, selecionando os objetos mais apropriados.
13. Trabalhar com os quantificadores (todos/alguns).

1. A proposta sugerida vai de encontro com a discussão realizada acerca da construção da classificação? Caso sim, ou não, justifique.

2. Em sua futura atuação enquanto professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental tal proposta pode se tornar útil? Caso sim, em qual momento? Pense a respeito.

3. Como já discutido, a classificação representa uma das operações mentais necessárias à construção das tabelas. No entanto, em sua opinião, tal operação mental faz-se importante para a construção de algum(s) outro(s) conceito(s) matemático(s)? Caso sim, cite-o(s).

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Em razão do tempo já transcorrido, apenas a questão 1 (do quadro acima) foi discutida entre as licenciandas e o pesquisador-autor. As outras duas questões foram deixadas como tarefa ‘para casa’. Em seguida, foi solicitada a realização da seguinte ‘situação problema’:

Quadro 33 – Situação Problema: classificação e inclusões hierárquicas de diversos elementos.

1. Considere os seguintes elementos desenhados em cartões retangulares:

Quantidade	Elemento
1	Abelha
1	Águia
1	Avião
1	Beija-Flor
1	Borboleta
1	Cachorro

Quantidade	Elemento
1	Cadeira
1	Cavalo
1	Cobra
1	Coruja
1	Escada
1	Gato

Quantidade	Elemento
1	Girafa
1	Libélula
1	Morcego
1	Pardal
6	Pato
1	Peixe
1	Rato

Realize várias classificações de modo a utilizar **TODOS** os 24 elementos estabelecendo as possíveis relações de inclusões hierárquicas entre os mesmos. A cada classe constituída é interessante que você a nomeie, como por exemplo, A = (classe dos elementos que possuem em comum o critério a); A' = (classe dos elementos que possuem em comum o critério a'), denotando, em seguida, qual relação lógica é possível estabelecer. Para tanto, utilize os estudos até o momento realizados acerca das classificações.

Fonte – Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Enquanto as licenciandas construíam as classes, o pesquisador-autor as auxiliou pelo fato de ter percebido a dificuldade das mesmas em realizar as inclusões considerando todos os 24 elementos. Por fim, as licenciandas elaboraram os ‘momentos de síntese’ acerca deste encontro e do anterior.

Quadro 34 – Síntese do 6.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Momento de Síntese.	1 – Sínteses elaboradas acerca do encontro anterior.
2 – Movimento de retomada.	2 – Assuntos já abordados nos encontros anteriores (do 1.º ao 5.º).
3 – Situação problema.	3 – Representações em gráficos de colunas (horizontal), barra (vertical) e setor circular.
4 – Questionário.	4 – Conhecimentos já construídos sobre alguns tipos de gráficos (linhas, cartograma, pictograma, histograma e polígono de frequência).
5 – Leitura/discussão de texto teórico <u>E</u>	5 – Gráficos (barras, colunas, setor circular ‘pizza’, linhas, cartograma, pictograma) <u>E</u>
6 – História de ensino simulada <u>E</u>	6 – Ensino de tabelas, gráfico de linha e classes de intervalos <u>E</u>
7 – Situação problema.	7 – Assuntos abordados nos itens anteriores (5 e 6).
8 – Momento de síntese.	8 – Referente aos assuntos abordados no encontro.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice J).

No 6.º encontro, ao longo da socialização das sínteses produzidas, as licenciandas salientaram a importância da mediação do pesquisador-autor – por meio de exemplificações, explicações e questionamentos – à compreensão do texto teórico referente às fases da classificação. Neste momento, o pesquisador-autor ressaltou a responsabilidade do professor nessa mediação. Em resposta a uma pergunta feita pela P-8, o pesquisador-autor salientou – segundo alguns estudos – que o não gostar da Matemática decorre (em grande parte) dos métodos de ensino utilizados pelos professores ao abordarem os conteúdos matemáticos.

Após o a leitura/discussão do texto ‘movimento de retomada’ no qual se contemplou uma síntese dos temas já desenvolvidos (do 1.º ao 5.º encontro), as participantes resolveram algumas ‘situações problema’ envolvendo gráficos de barras, colunas e setor circular, cujas respostas foram socializadas. Em seguida, por meio de um ‘questionário’, investigou-se a construção (ou não) de outras representações gráficas, a saber: gráfico de linha, cartograma, pictograma, histograma e polígono de frequência. Arelado à ‘leitura/discussão de texto teórico’ no qual se conceituou os gráficos de barras, colunas e setor circular, as licenciandas calcularam – via regra de três – os graus a constituir um gráfico de setor. Observou-se, durante os referidos cálculos, uma ajuda mútua entre as licenciandas. Para a abordagem do gráfico de linha foi utilizada a ‘história de ensino simulada’ apresentada a seguir:

Quadro 35 – História de ensino simulada: ensino de gráfico de linha.**PROBLEMATIZANDO...**

Após a primeira pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli, realizou-se uma segunda cujo objetivo foi investigar a quantidade de sorvete consumida no intervalo pelos alunos do 6.º ano B durante os meses de março a junho. Como a professora Sueli também ministra aulas no 6.º ano A, foi feita uma comparação entre as duas turmas. A cada intervalo, a professora Sueli pedia que os alunos marcassem numa cartolina, fixada na parede, um X indicando o consumo do sorvete naquele dia. A cada semana, era contabilizado o total de sorvetes consumidos e, ao final de cada mês, tais valores eram somados obtendo-se o

total de consumo mensal. Em cada mês, a professora Sueli e seus alunos anotavam os dados em uma tabela. Ao final da pesquisa, a tabela constituída foi a seguinte:

Tabela – Total de Sorvetes consumidos pelos alunos dos 6.º anos A e B

Mês	Turma	
	6º ano A	6º ano B
Março	352	289
Abril	345	321
Maio	288	250
Junho	321	311
TOTAL	1306	1171

Visando representar num gráfico que permitisse visualizar a ‘evolução’ (aumento ou diminuição) dos sorvetes consumidos pelos alunos durante os meses de março a junho, a professora Sueli propôs aos alunos a apresentação/organização dos dados por meio de um gráfico de Linhas (ou de Segmento). Após elaborar cada gráfico referente a cada turma separadamente, colocou-os num único gráfico, conforme denotado abaixo:

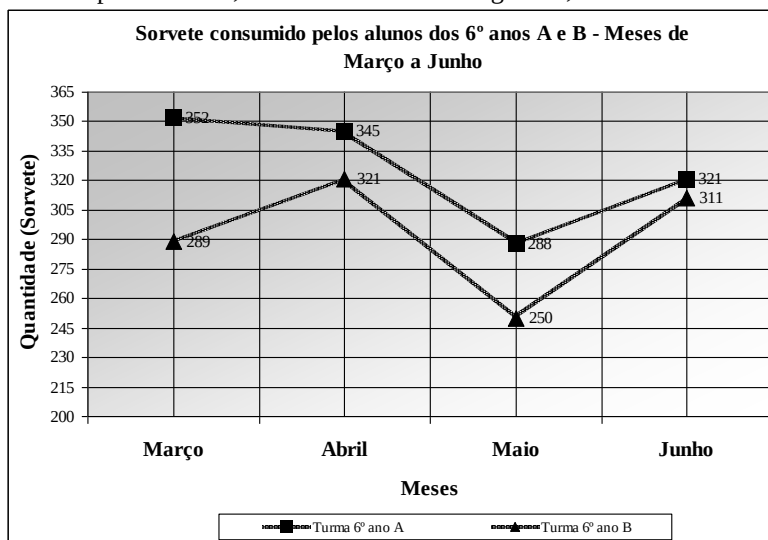


Gráfico de Linha – Sorvete consumido pelos alunos dos 6.º anos A e B – meses de março a junho

Fonte – Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Após a leitura dessa história, o pesquisador-autor propôs que as licenciandas resolvessem duas ‘situações problema’ relacionadas à referida história. Tais situações apresentam-se a seguir:

1. Suponha que você não tenha conhecimento da tabela e, apenas, do gráfico de Linha denotado há pouco. É possível saber, sem a realização de nenhuma operação matemática ‘mental’, qual turma tomou mais sorvete durante os meses de março a junho? Pense a respeito.

2. A partir do gráfico de Linha apresentado na página anterior, marque (V) para a afirmação verdadeira e (F) para a afirmação falsa.

- () a) Em relação ao 6.º ano A, durante os meses de março a abril ocorreu o maior decréscimo quanto ao consumo de sorvetes.
- () b) Em relação ao 6.º ano B, o total de sorvete consumido compreendendo os meses de maio a junho foi de 1171.
- () c) O mês em que o consumo de sorvete entre os 6.º anos A e B apresentou menor diferença foi o referente a março.
- () d) A diferença entre o total de sorvetes consumidos pelos alunos do 6.º anos A e B durante os meses de março a maio foi de 125.
- () e) O mês em que o consumo de sorvete entre os 6.º anos A e B apresentou menor diferença foi o referente a junho.

Ao compartilharem as respostas das ‘situações problema’ – advindas da interpretação do gráfico de linha denotado há pouco – as licenciandas salientaram as diferentes maneiras de/para resolver um mesmo problema. Segundo elas, tal compartilhamento – não vivenciado na Educação Básica – mostrou-se importante à ‘melhor’ compreensão. Nesse momento, o pesquisador-autor referiu-se à importância das trocas interindividuais em sala de aula à descentração do pensamento do aluno. Em continuidade às representações gráficas, abordaram-se o cartograma e o pictograma. Durante essa abordagem, o pesquisador-autor destacou ser este último um gráfico oportuno de ser utilizado nos anos iniciais do Ensino Fundamental devido ao seu aspecto lúdico. Em virtude do término do tempo, o histograma e o polígono de frequência foram ‘deixados’ para o encontro seguinte, sendo solicitado o registro do ‘momento de síntese’.

Quadro 36 – Síntese do 7.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Momento de Síntese.	1 – Sínteses elaboradas acerca do encontro anterior.
2 – Leitura/discussão de texto teórico <u>E</u>	2 – Gráficos (histograma e polígono de frequência) <u>E</u>
3 – História de ensino simulada <u>E</u>	3 – Ensino de tabelas, gráfico de linha e classes de intervalos <u>E</u>
4 – Situação problema.	4 – Assuntos abordados no item anterior (3).
5 – Desafio para casa.	5 – Conhecimentos já construídos sobre média aritmética.
6 – Leitura/discussão de texto teórico <u>E</u>	6 – Medidas de posição (aspectos iniciais): média aritmética <u>E</u>
7 – Situação problema.	7 – Referente à média aritmética.
8 – Desafio para casa.	8 – Problemas de vestibulares envolvendo interpretação de gráfico de linha e média aritmética.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice K).

No 7.º encontro, durante o compartilhamento das sínteses, houve uma discussão acerca da prática do professor de Matemática. Quando questionadas pelo pesquisador-autor, as licenciandas disseram que as atividades realizadas no GE eram importantes já que as mesmas possibilitavam uma nova maneira de/para abordar os conteúdos matemáticos referentes aos gráficos e às tabelas. Modo esse diferente do vivenciado por elas durante a Educação Básica, ou seja, àquele pautado no tripé explicação pelo professor x exemplo x exercícios. As licenciandas observaram, ainda, que o GE vinha oportunizando uma ‘nova’ maneira de aprender/ensinar, oportunidade essa não vivenciada no Ensino Superior (de modo geral). Em seguida, realizou-se a abordagem do histograma e do polígono de frequência por meio de ‘leitura/discussão de texto teórico’ e de uma ‘história de ensino simulada’ que tratou da representação/organização de dados em uma tabela. Observe, a seguir, a referida história:

Quadro 37 – História de ensino simulada: ensino de tabelas, gráfico de linha e classes de intervalos.**PROBLEMATIZANDO...**

Ao perceber que a abordagem realizada com as turmas dos 6.º anos ‘facilitava’ a aprendizagem dos conteúdos referentes ao Tratamento da Informação, a professora de Matemática Sueli resolveu também utilizá-la com seus alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental. Concomitantemente ao estudo das ‘Grandezas e Medidas’, mais especificamente as Medidas de Comprimento (metro), a professora Sueli mediu, com o auxílio de uma trena, a altura de todos os alunos do 8.º ano C. Enquanto media, a aluna Bianca ia anotando os valores aproximados na lousa:

Ana Laura 131 cm	Andressa 153 cm	Antônio 161 cm	Antônio José 158 cm	Augusto 147 cm
Beatriz 145 cm	Bianca 133 cm	Brian 147 cm	Camila 150 cm	Carlos 130 cm
Danilo 132 cm	Diego 153 cm	Edir 141 cm	Eduarda 171 cm	Fábio 159 cm
Felipe 130 cm	Fernanda 144 cm	Flávio 177 cm	Gabriel 162 cm	Geisa 152 cm
Gustavo 160 cm	Hugo 150 cm	Igor 133 cm	Juliana 145 cm	Júlio 151 cm
Mário 137 cm	Neide 142 cm	Paulo 152 cm	Thiago 143 cm	Vitor 130 cm

Após tal registro, a professora Sueli pediu aos alunos que organizassem os dados em ordem crescente. Decorrido certo tempo, o aluno Paulo foi à lousa e escreveu tais dados na referida ordem, colocando, inclusive, números repetidos caso existissem. Observe:

130, 130, 130, 131, 132, 133, 133, 137, 141, 142, 143, 144, 145, 145, 147, 147, 150, 150, 151, 152, 152, 153, 153, 158, 159, 160, 161, 162, 171, 177

Enquanto Paulo anotava na lousa, os demais alunos e a professora foram conferindo a resposta. Em seguida, a professora Sueli propôs aos estudantes que organizassem os dados por meio de uma tabela. No entanto, tal tabela deveria possuir, exatamente, 11 linhas e 2 colunas, considerando as denominações de cada coluna. Como sugestão, a professora falou que os dados teriam que serem agrupados em classes (intervalos).

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Após a leitura da referida história, o pesquisador-autor solicitou às licenciandas que resolvessem a seguinte ‘situação problema’ relacionada a tal história:

1. Em duplas, como vocês organizariam a tabela seguindo a orientação dada pela professora Sueli? Para facilitar, utilizem a tabela abaixo:

Após construírem as classes de intervalos, as licenciandas compartilharam as resoluções. Para findar as atividades ‘em atraso’, as licenciandas resolveram o ‘desafio para casa’ no qual se investigou o conhecimento (ou não) de média aritmética. Durante a

socialização das respostas ao referido desafio, a P-4 foi auxiliada por todos à compreensão do erro cometido.

Dando início às atividades propostas para este encontro (7.º), realizou-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ sobre algumas ideias iniciais a respeito das medidas de posição. Em seguida, o pesquisador-autor propôs que as licenciandas resolvessem algumas ‘situações problema’. Para resolvê-las, as licenciandas tiveram que calcular a média aritmética a partir de valores individuais e/ou organizados em tabelas que representavam variáveis quantitativas contínuas e discretas. Posteriormente à socialização e correção das resoluções, o pesquisador-autor apresentou as expressões matemáticas (formais) utilizadas para o cálculo da média aritmética. Durante a apresentação, o pesquisador-autor valeu-se dos problemas há pouco socializados para explicar o significado dos símbolos utilizados em tais expressões. Pelo fato da calculadora ter sido utilizada durante os cálculos, o pesquisador-autor atentou ao uso ‘construtivo’ desse recurso tecnológico nas aulas de Matemática.

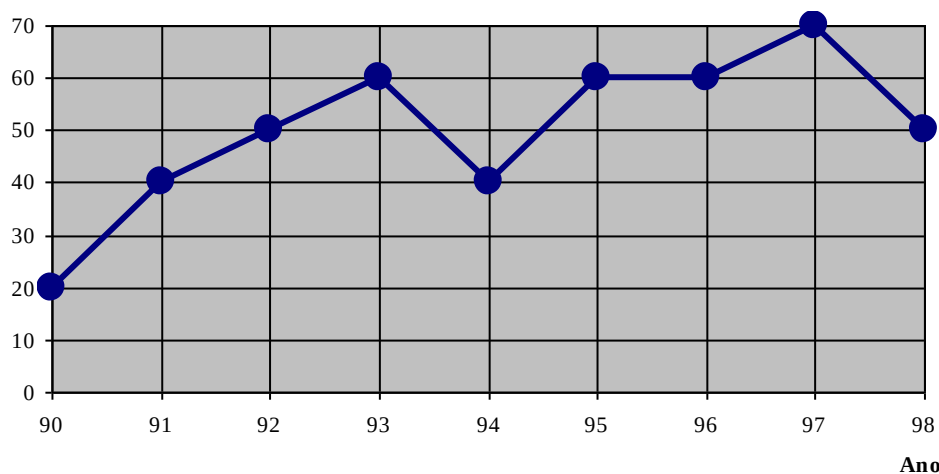
Devido ao pouco tempo à finalização do encontro, a abordagem dos conceitos de mediana e moda ficou para o próximo encontro. Além disso, o ‘momento de síntese’ foi solicitado como tarefa ‘para casa’. Por fim, pediu-se às licenciandas a solução do ‘desafio para casa’ constituído de três problemas retirados de vestibulares versando a interpretação de gráfico de linha e o conceito de média aritmética. Tais desafios apresentam-se a seguir:

Quadro 38 – Desafio para casa: questões de vestibular – interpretação gráfica e média aritmética.

7.3 Desafio para casa

1. (Vunesp) O gráfico representa, em milhares de toneladas, a produção do estado de São Paulo de um determinado produto agrícola entre os anos de 1990 a 1998.

Mil toneladas



Analisando o gráfico, observa-se que a produção:

- foi crescente entre 1992 e 1995.
- teve média de 40 mil toneladas ao ano.
- em 1993 teve acréscimo de 30% em relação ao ano anterior.
- a partir de 1995 foi decrescente.
- teve média de 50 mil toneladas ao ano.

2.(UFRN) Uma prova foi aplicada em duas turmas distintas. Na primeira, com 30 alunos, a média aritmética das notas foi de 6,40. Na segunda, com 50 alunos, foi 5,20. A média aritmética das notas dos 80 alunos foi:			
a) 5,65	b) 5,70	c) 5,75	d) 5,80
3. (UFAL) Considere 8 números cuja média aritmética é 4,5. Retirando-se um desses números, a média aritmética dos restantes é 4,2. O número retirado é			
a) 0,3	b) 3,3	c) 5,4	d) 6,6
			e) 8

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Quadro 39 – Síntese do 8.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Momento de síntese.	1 – Sínteses elaboradas acerca do encontro anterior.
2 – Movimento de retomada.	2 – Referente ao desafio para casa do encontro anterior.
3 – História de ensino simulada.	3 – Referente ao ensino de média aritmética.
4 – Leitura/discussão de texto teórico. E	4 – Referentes aos conceitos de mediana e moda E
5 – Situação problema.	5 – Referentes ao item anterior (4).
6 – Movimento de retomada.	6 – Dúvida a respeito da construção de classes de intervalos utilizadas em histogramas e polígonos de frequência.
7 – Leitura/discussão de texto teórico E	7 – Medidas de Dispersão: amplitude, variância, desvio padrão E
8 – Situação problema.	8 – Assuntos abordados no item anterior (5) e relacionados à história de ensino simulada (item 3).

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice L).

No 8.º encontro – concluída a socialização das sínteses – as participantes apresentaram as respostas elaboradas à solução do ‘desafio para casa’ proposto no encontro anterior. Neste momento, a P-7 salientou que sem o grupo – certamente – não teria conseguido resolver tal desafio; fato esse vivido por ela no vestibular ao não solucionar vários problemas de Matemática por não se lembrar da ‘fórmula’. Como a referida participante ainda possuía dúvidas quanto às expressões matemáticas utilizadas no cálculo da média aritmética, o pesquisador-autor retomou-as por meio de exemplos e representações registradas na lousa. Aproveitando a discussão a respeito das expressões matemáticas, o pesquisador ressaltou a preocupação dos alunos em decorar ‘mecanicamente’ as ‘fórmulas’ em detrimento da real compreensão do conceito matemático subjacente às mesmas. Discutiui-se, também, a passagem da aritmética à álgebra e a responsabilidade do professor do 4.º e 5.º anos do Ensino Fundamental em propiciar situações nas quais os estudantes ‘iniciem’ a construção da pré-álgebra.

Após, propôs-se a leitura da ‘história de ensino simulada’ – denotada a seguir – visando evidenciar a não suficiência da média aritmética à ‘melhor’ caracterização do centro de distribuição.

Quadro 40 – História de ensino simulada: ensino de média aritmética.

PROBLEMATIZANDO... Dando continuidade ao estudo da Estatística, a professora de Matemática Sueli pediu a um grupo de alunos dos 9º anos que frequentavam aulas de reforço (recuperação) que trouxessem a renda mensal de suas famílias. Os valores obtidos foram anotados na lousa pela aluna Priscila conforme mostrado abaixo: 457, 490, 525, 554, 689, 700, 722, 5.000 Após solicitar aos alunos o cálculo da Média Aritmética da renda mensal, João foi à lousa e registrou o seguinte: $\bar{x} = \frac{457 + 490 + 525 + 554 + 689 + 700 + 722 + 5000}{8} = \frac{9137}{8} = 1142,125$ A professora Sueli disse aos alunos para utilizarem como valor aproximado o número 1142 reais. Em seguida, colocou na lousa o seguinte questionamento: A Média Aritmética que mostra a renda mensal das famílias de vocês é um ‘bom’ valor (representativo) para indicar o centro da distribuição de frequências?
--

Fonte – Elaborado pelo autor, 2012 (Apêndice C).

Ao verificarem a não suficiência da média aritmética, o pesquisador-autor apresentou a ‘noção’ de mediana como outra medida à caracterização do centro de distribuição. Para tanto, fez-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ a respeito dos conceitos de mediana e moda. Em razão da dificuldade das licenciandas em compreender o texto teórico referente à mediana, o pesquisador-autor utilizou uma linguagem diferente e vários exemplos de modo a auxiliá-las. Em prosseguimento, as licenciandas resolveram ‘situações problema’ acerca dos referidos conceitos (mediana e moda).

Em seguida, deu-se início ao ‘movimento de retomada’ proposto para o presente encontro. Neste, retomou-se uma dúvida acerca da construção de classes de intervalos necessárias à construção de tabelas representativas da variável quantitativa contínua. Valendo-se da ‘história de ensino simulada’ – acima – fez-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ ressaltando as medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão) úteis à complementação da informação fornecida pela média aritmética. Devido ao término do encontro, a finalização da discussão das ‘situações problema’ referentes à variância e ao desvio padrão – resolvidos coletivamente entre as licenciandas – foi deixado para o encontro posterior. Além disso, o ‘momento de síntese’, conforme solicitado pelas licenciandas, ficou para ser redigido em casa.

Quadro 41 – Síntese do 9.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Movimento de retomada.	1 – Apresentação, em linguagem matemática, das 3 questões de vestibular solicitadas no 7.º encontro.
2 – Situação problema.	2 – Referentes aos conceitos de variância e de desvio padrão.
3 – Desafio para casa.	3 – Referente à média aritmética e às medidas de dispersão.

4 – Momento de síntese.	4 – Sínteses elaboradas acerca do encontro anterior.
5 – Leitura/discussão de texto teórico E	5 – Ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental E
6 – Situação problema.	6 – Proposta curricular acerca do ensino de Estatística nos anos iniciais.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice M).

No 9.º encontro, num primeiro momento, o pesquisador-autor retomou as atividades e os assuntos abordados no encontro anterior de modo a auxiliar as licenciandas faltantes. Durante essa retomada, as licenciandas salientaram estarem sendo realmente desafiadas nas atividades desenvolvidas no grupo. Segundo elas, diferentemente do que ocorreu na Educação Básica em que os exercícios realizados eram ‘apenas’ uma aplicação do conteúdo há pouco transmitido pelo professor, os problemas propostos no grupo exigiam o ‘pensar sobre’ os conceitos matemáticos em questão.

Em seguida, fez-se a leitura/discussão do texto ‘movimento de retomada’ no qual o pesquisador-autor apresentou as soluções do ‘desafio para casa’ referente às três questões de vestibular:

Quadro 42 – Movimento de retomada: retomando as questões de vestibular (desafio para casa).

8.2 Retomando o desafio

Durante o 7.º encontro realizaram-se discussões acerca da Média Aritmética, seu significado e algumas maneiras de calculá-la. Visando ‘desencadear’ um ‘pensar sobre’ os conteúdos matemáticos tratados até o momento, foi solicitada a solução de 3 problemas-desafio. A seguir far-se-ão comentários denotando a solução de tais problemas. Neste ponto é interessante o ‘confronto’ entre as 3 soluções seguintes e as elaboradas por vocês (participantes).

DESAFIO (1):

Torna-se válido pontuar que os ‘dados’ do problema estão representados no gráfico de Linha denotando a produção de um determinado produto agrícola no estado de São Paulo entre os anos de 1990 a 1998. O problema solicita a escolha do item que apresenta a afirmação verdadeira a partir da interpretação do referido gráfico. Para tanto, faz-se necessário excluir os itens que apresentam as afirmações falsas. Observe as justificativas dos itens falsos e da afirmação verdadeira.

a) É falso, pois de 1993 a 1995 a produção foi decrescente.

b) É falso, pois a Média Aritmética foi de 50 mil toneladas. Observe o cálculo realizado:

$$\bar{x} = \frac{20 + 40 + 50 + 60 + 40 + 60 + 60 + 70 + 50}{9} = \frac{450}{9} = 50 \text{ mil toneladas}$$

c) É falso, pois conforme o gráfico a produção de 1993 (60000 t.) apresenta um aumento de 10 mil toneladas com relação à produção de 1992 (50000 t.). Assim, houve um acréscimo de 1/5, ou seja, de 20%.

d) É falso, pois de 1996 a 1997 a produção foi crescente.

e) É verdadeiro, conforme o item b).

DESAFIO (2):

Para a solução deste 2.º problema faz-se necessária a utilização da ideia de Média Aritmética, bem como da expressão que permite o seu cálculo. O enunciado evidencia informações sobre a Média Aritmética das notas de uma prova que foi aplicada em duas turmas diferentes, conforme exposto abaixo:

1.ª TURMA

Média Aritmética ($\bar{x}_{1.ªTURMA}$) = 6,40
Total de Alunos (n) = 30

2.ª TURMA

Média Aritmética ($\bar{x}_{2.ªTURMA}$) = 5,20
Total de Alunos (n) = 50

‘Aplicando’ o conceito de Média Aritmética é possível saber as somatórias das notas obtidas pelos

30 alunos da 1.^a TURMA e pelos 50 alunos da 2.^a TURMA. Observe tais somatórias:

<u>1.^a TURMA</u>	<u>2.^a TURMA</u>
$\bar{X}_{1^{\text{a}}\text{TURMA}} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$	$\bar{X}_{2^{\text{a}}\text{TURMA}} = \frac{\sum_{j=1}^{50} x_j}{50}$
$6,40 = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$	$5,20 = \frac{\sum_{j=1}^{50} x_j}{50}$
$\sum_{i=1}^{30} x_i = 6,40 \times 30 = 192$	$\sum_{j=1}^{50} x_j = 5,20 \times 50 = 260$

Para descobrir a Média Aritmética dos alunos das duas turmas, basta somar os dois valores encontrados e dividi-los por 80 (total de alunos).

$$\bar{X}_{(1^{\text{a}}+2^{\text{a}}\text{TURMA})} = \frac{192 + 260}{80} = \frac{452}{80} = 5,65$$

Logo, a Média Aritmética das notas obtidas pelos alunos das duas turmas é 5,65; e o item correto é o **a).**

DESAFIO (3):

Do mesmo modo que o segundo, o 3.^o desafio faz referência à ideia de Média Aritmética. No entanto, o problema proposto diferencia-se, pois é feita uma ‘comparação’ entre duas Médias Aritméticas ao ocorrer a retirada de um elemento do conjunto inicial. Em seguida, solicita-se a descoberta deste número retirado. Vamos considerar os 8 números como sendo representados pela seguinte notação:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$$

Sabe-se que a Média Aritmética destes 8 números é 4,5. Retirando-se um destes elementos a ‘nova’ Média Aritmética (dos 7 números restantes) é 4,2. Por meio das expressões abaixo é possível calcular as somatórias dos 8 números e também dos 7 números restantes:

<u>SITUAÇÃO INICIAL</u>	<u>RETIRADA de UM NÚMERO</u>
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$
$4,5 = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$	$4,2 = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$
$\sum_{i=1}^8 x_i = 4,5 \times 8$	$\sum_{i=1}^7 x_i = 4,2 \times 7$
$\sum_{i=1}^8 x_i = 36$	$\sum_{i=1}^7 x_i = 29,4$

Para descobrir o número retirado basta fazer a diferença entre o resultado da somatória da ‘Situação Inicial’ e o resultado da somatória da ‘Retirada de Um Número’. Isso, pois a diferença entre as mesmas foi devido à retirada do número em questão.

$$x_{\text{RETIRADO}} = \sum_{i=1}^8 x_i - \sum_{i=1}^7 x_i$$

$$x_{\text{RETIRADO}} = 36 - 29,4 = 6,6$$

Desse modo, o número retirado foi o 6,6 e o item correto é o **d).**

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Durante a referida discussão, as licenciandas e o pesquisador-autor conversaram, novamente, sobre o significado de média aritmética. Após a finalização das ‘situações problema’ referentes à variância e ao desvio padrão, discutiu-se – a pedido da P-9 – o porquê

de tais medidas de dispersão e, também, o da Estatística. Dando continuidade, o pesquisador-autor solicitou a resolução do ‘desafio para casa’ – denotado a seguir – pretendendo um ‘desfecho’ dos assuntos abordados acerca da média aritmética e das medidas de dispersão.

Quadro 43 – Desafio para casa: média aritmética e medidas de dispersão.

8.3 DESAFIO PARA CASA

1. O professor de Educação Física Pedro foi encarregado de organizar atividades de lazer para 3 grupos de 6 pessoas cada e recebeu a informação de que a Média Aritmética de idade de cada grupo é 20 anos. Apenas esta informação é suficiente para o planejamento das atividades a serem realizadas? Justifique sua resposta.

Fonte – Elaborado pelo autor, 2012 (Apêndice C).

Concluída a socialização do ‘momento de síntese’ referente ao encontro anterior, o pesquisador projetou o organograma 5 (Tratamento da Informação: Combinatória, Estatística e Probabilidade) e pediu às licenciandas que analisassem como foi o ‘percurso’ da possível construção dos conceitos de Estatística até o momento. Em continuidade, fez-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ sobre o ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental e a resolução de uma ‘situação problema’ envolvendo comparações entre duas propostas curriculares relativas a tal ensino. A seguir apresenta-se o referido texto:

Quadro 44 – Texto: Ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

9.1 Ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Até o momento foram abordados alguns conteúdos pertencentes à Estatística, sendo essa uma das áreas que constituem o ‘bloco’ de conteúdo denominado Tratamento da Informação. Por meio de algumas situações problemas denotou-se a possibilidade da apresentação/organização dos dados coletados/observados por meio de tabelas e representações gráficas. Após, fez-se um estudo acerca de algumas medidas (*Média Aritmética e Mediana*) que permitem identificar o **centro** da distribuição de frequências e, desse modo, possibilitam uma ‘primeira’ interpretação dos dados coletados/observados. Foi ressaltada a necessidade de outras medidas (*Amplitude, Variância e Desvio Padrão*) para a determinação do ‘grau’ de variação existente dos tais dados permitindo, por conseguinte, uma ‘melhor’ interpretação da informação obtida por meio da Média Aritmética.

Após tal abordagem faz-se interessante os seguintes questionamentos tendo em vista a preocupação quanto à Formação Inicial do (futuro) professor de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental: “*Quais conteúdos necessitam ser abordados referentes à Estatística nesse nível de ensino?*”; “*Como realizar a abordagem de tais conteúdos?*”.

Visando auxiliar ao ‘pensar sobre’ os questionamentos, denota-se abaixo o rol de conteúdos conceituais e procedimentais em relação ao Tratamento da Informação proposto pelo PCN para o 1.º ciclo (1.ª e 2.ª séries) e para o 2.º ciclo (3.ª a 4.ª séries).

- Leitura e interpretação de informações contidas em imagens.
 - Coleta e organização de informações.
 - Criação de registros pessoais para comunicação das informações coletadas.
 - Exploração da função do número como código na organização de informações (linhas de ônibus, telefones, placas de carros, registros de identidade, bibliotecas, roupas, calçados).
 - Interpretação e elaboração de listas, tabelas simples, de dupla entrada e gráficos de barra para comunicar a informação obtida.
 - Produção de textos escritos a partir da interpretação de gráficos e tabelas. (BRASIL, 1997, p. 52)
-
- Coleta, organização e descrição de dados.

- Leitura e interpretação de dados apresentados de maneira organizada (por meio de listas, tabelas, diagramas e gráficos) e construção dessas representações.
- Interpretação de dados apresentados por meio de tabelas e gráficos, para identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos.
- Produção de textos escritos, a partir da interpretação de gráficos e tabelas, construção de gráficos e tabelas com base em informações contidas em textos jornalísticos, científicos ou outros.
- Obtenção e interpretação de média aritmética.
- Exploração da idéia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de “sorte”.
- Utilização de informações dadas para avaliar probabilidades.
- Identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais. (BRASIL, 1997, p. 61)

Outro material – de autoria própria – apresenta a distribuição dos conteúdos referentes ao Tratamento da Informação (Estatística) a serem ensinados do 1.º ao 5.º ano do Ensino Fundamental. Observe os quadros nos quais tais conteúdos encontram-se distribuídos por ano/bimestre.

1.º Ano do Ensino Fundamental – Tratamento da Informação (Estatística)			
1.º Bimestre	2.º Bimestre	3.º Bimestre	4.º Bimestre
• Tabelas Simples – registro de observações diárias.	• Tabelas Simples – registro de observações diárias. • Apresentação de informações pesquisadas de modo pessoal.	• Apresentação de informações pesquisadas de modo pessoal.	• Apresentação de informações pesquisadas de modo pessoal.

2.º Ano do Ensino Fundamental – Tratamento da Informação (Estatística)			
1.º Bimestre	2.º Bimestre	3.º Bimestre	4.º Bimestre
• Tabelas simples – leitura e interpretação.	• Gráfico de Colunas – leitura e interpretação.	• Tabelas simples – organização de informações coletadas.	• Gráficos de Colunas – organização de informações coletadas.

3.º Ano do Ensino Fundamental – Tratamento da Informação (Estatística)			
1.º Bimestre	2.º Bimestre	3.º Bimestre	4.º Bimestre
• Registro (pessoal) de informações coletadas.	• Registro (pessoal) de informações coletadas.	• Tabelas Simples – leitura, interpretação e descrição oral da situação apresentada.	• Gráficos de Barras e Colunas – leitura, interpretação e descrição oral da situação apresentada.

4.º Ano do Ensino Fundamental – Tratamento da Informação (Estatística)			
1.º Bimestre	2.º Bimestre	3.º Bimestre	4.º Bimestre
• Tabelas e Gráficos – leitura e interpretação de dados organizados.	• Tabelas e Gráficos (situações problemas) – solução por meio de dados organizados.	• Tabelas e Gráficos – descrição (por escrito) da situação apresentada.	• Tabela Simples e de Dupla Entrada – interpretação dos dados organizados. • Gráficos de Barras, Colunas e Linhas – interpretação dos dados organizados.

5.º Ano do Ensino Fundamental – Tratamento da Informação (Estatística)			
1.º Bimestre	2.º Bimestre	3.º Bimestre	4.º Bimestre
• Tabelas Simples e de Dupla Entrada (situações problemas) – solução a	• Gráficos de Barras e de Colunas (situações problemas) – solução a	• Tabelas e Gráficos – construção a partir de dados coletados.	• Gráfico de Setor – leitura dos dados apresentados.

partir dos dados apresentados.	partir dos dados apresentados. • Gráfico de Linhas – leitura dos dados apresentados.		• Tabelas e Gráficos – construção a partir de dados coletados.
--------------------------------	---	--	--

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

As respostas elaboradas acerca da referida ‘situação problema’ (a comparação entre as duas propostas curriculares) foram compartilhadas em conversação mediada pelo pesquisador-autor; entretanto – devido ao término do tempo – as demais ‘situações problema’ acerca do referido texto e o ‘momento de síntese’ foram solicitados como tarefa ‘para casa’.

Quadro 45 – Síntese do 10.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Desafio para casa.	1 – Referente à média aritmética e às medidas de dispersão.
2 – Leitura/discussão de texto teórico <u>E</u> 3 – Situação problema.	2 – Ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental <u>E</u> 3 – Referentes ao item anterior.
4 – Exemplo de ensino.	4 – Exemplos de atividades abordando alguns conteúdos estatísticos nos anos iniciais do Ensino Fundamental.
5 – Movimento de retomada.	5 – Assuntos abordados no Grupo de Estudo anterior (9º), enfatizando a solução de problemas enquanto estratégia didático-metodológica adotada na ‘efetivação’ do currículo.
6 – Leitura/discussão de texto teórico <u>E</u> 7 – Situação problema.	6 – Epistemologia Genética: a importância da atividade do sujeito, posturas epistemológicas (racionalismo e empirismo) <u>E</u> 7 – Assuntos abordados no item anterior (2).
8 – Questionário.	8 – Experiência vivenciada na Educação Básica condizente à concepção racionalista (apriorista) ou empirista.
9 – Desafio para casa.	9 – Problemas envolvendo os seguintes conceitos de Estatística: gráfico de coluna, média aritmética, moda e mediana, variância e desvio padrão.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice N).

No 10.º encontro, num primeiro momento, as participantes expuseram as respostas do ‘desafio para casa’ (rever quadro 43), realizando, concomitantemente, comparações entre tais respostas. Após, foram disponibilizados alguns minutos para a resolução das ‘situações problemas’ – requeridas como tarefa – já que a maioria não as fez. Durante o compartilhamento das respostas, discutiram-se: a) a importância e a justificativa psicológica do cotidiano à proposição das atividades nos anos iniciais do Ensino Fundamental; b) a importância da solução de problemas enquanto perspectiva metodológica para a abordagem dos conteúdos de Estatística nesse nível de ensino. Ainda em continuidade às atividades do encontro anterior, as licenciandas pensaram sobre alguns ‘exemplos de ensino’. Observe, no quadro a seguir, um exemplo de tal situação:

Quadro 46 – Exemplo de ensino: Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

5. Analise as atividades abaixo e identifique qual conteúdo foi abordado por meio das mesmas. Como referência utilize os conteúdos apresentados nos quadros¹⁵ esboçados há pouco.

ATIVIDADE 1: COMO ESTÁ O TEMPO?

Você vai registrar, durante 5 dias seguidos como estava o céu: ensolarado, nublado ou chuvoso. Registre a data e circule no quadro abaixo a condição do tempo.

DATA	CONDIÇÃO DO TEMPO		
			
			
			
			
			

Conteúdo abordado:

Fonte – Elaborado pelo autor, 2012 (APÊNDICE C).

Após o compartilhamento das respostas referentes aos ‘exemplos de ensino’, fez-se a leitura do texto ‘movimento de retomada’ no qual foram sintetizados os assuntos há pouco abordados. Em seguida, deu-se início à ‘leitura/discussão de texto teórico’ da Epistemologia Genética cujas temáticas contemplaram: a) a atividade (ação) do sujeito ao processo de construção/desenvolvimento; b) as correntes epistemológicas racionalistas (aprioristas) e empiristas. Arelado às referidas temáticas, propuseram-se ‘situações problema’ e um ‘questionário’. Nesse questionário foi possível identificar algumas posturas de ‘antigos’ professores (das licenciandas) próximas às referidas correntes epistemológicas; além disso, as licenciandas observaram, em algumas ações dos professores do curso de Pedagogia, uma aproximação à concepção empirista. Devido ao pouco tempo restante, o pesquisador-autor solicitou – como tarefa ‘para casa’ – duas atividades, a saber: a leitura do ‘texto teórico’ referente à teoria da assimilação; o ‘desafio para casa’ abrangendo os conceitos de Estatística (gráfico de coluna, média aritmética, moda, mediana, variância e desvio padrão).

Quadro 47 – Síntese do 11.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Leitura/discussão de texto teórico E 2 – Situação problema.	1 – Epistemologia Genética: teoria da assimilação (processo de assimilação e acomodação) E 2 – Assuntos abordados no item anterior (1).
3 – Movimento de retomada.	3 – Assuntos discutidos nos encontros anteriores.
4 – Leitura/discussão de texto teórico.	4 – Epistemologia Genética: a educação deve responder a uma necessidade, fatores do desenvolvimento cognitivo.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice O).

¹⁵ Os tais quadros apresentaram uma possível distribuição por bimestre dos conteúdos a serem abordados nos anos iniciais do Ensino Fundamental (1.º ao 5.º) referentes à Estatística.

No 11.º encontro – devido à dificuldade apresentada pelas participantes quanto à compreensão do ‘texto teórico’ acerca da teoria da assimilação – fez-se uma ‘leitura/discussão’ de cada parágrafo, no qual o pesquisador-autor explicitou vários exemplos no intuito de ‘retraduzir’ a linguagem formal utilizada por Piaget ao definir os conceitos de assimilação e de acomodação. Ao decorrer dessa discussão, a P-2 perguntou sobre o papel assumido pelo sujeito nas correntes epistemológicas racionalistas (aprioristas) e empiristas; fato esse que ‘levou’ o grupo a refletir sobre como essas epistemologias compreendem o aluno em sala de aula. Mesmo apresentando tais dificuldades, as licenciandas disseram sentir ‘falta’ de discussões teóricas ‘em profundidade’ como vêm ocorrendo no grupo. No intuito de ‘direcionar’ a teoria da assimilação ao contexto escolar, o pesquisador requereu a solução de uma ‘situação problema’ cujas respostas foram socializadas posteriormente. Em solicitação das licenciandas, combinou-se a elaboração do ‘momento de síntese’ – referente à teoria da assimilação – como tarefa ‘para casa’.

Em continuidade, a P-4 leu o ‘movimento de retomada’ no qual sintetizaram-se os assuntos discutidos no 9.º e 10.º encontros. Enquanto aguardava-se o retorno da P-5 que precisou se ausentar por alguns minutos, as licenciandas compartilharam suas frustrações quanto ao curso de Pedagogia, tais como: a) o não estabelecimento da relação entre teoria e prática; b) a concentração de disciplinas teóricas no 1.º ano implicando na dificuldade dos licenciandos em compreender este ‘novo’ conteúdo; c) as posturas de alguns professores que, segundo elas, aproximavam-se da concepção epistemológica empirista. A P-7 chegou a ‘igualar’ o ensino realizado na Universidade – de modo geral – com o vivenciado por elas na Educação Básica, ou seja, alicerçado numa prática pedagógica ‘mecanizada’ e tradicional. Ao retorno da P-5, fez-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ sobre os temas: a Educação deve responder a uma necessidade e os fatores do desenvolvimento cognitivo. As ‘situações problema’ referentes a tais assuntos (e que incidiram sobre a futura prática docente de Matemática) e os ‘textos/teóricos’ sobre os estádios ‘ficaram’ para o próximo encontro.

Quadro 48 – Síntese do 12.º encontro.

ATIVIDADE	ASSUNTO
1 – Leitura/discussão de texto teórico.	1 – Referente aos estádios do desenvolvimento cognitivo.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice P).

No 12.º encontro – visando auxiliar as participantes faltantes (P-1, P-8 e P-9) – o pesquisador-autor retomou (brevemente) os temas abordados no encontro anterior. Nesse momento, solicitou-se à P-5 que expusesse a compreensão, por ela elaborada, a respeito do

significado de necessidade advindo da teoria piagetiana. Decorrente dessa exposição, o grupo discutiu a importância da ‘boa’ formação para que o professor saiba promover situações de ensino e selecionar conteúdos que sejam ‘interessantes e necessários’ a cada nível de escolaridade. Aproveitando a questão em torno do interesse, o pesquisador-autor questionou se as expectativas inicialmente almejadas pelas licenciandas – quanto ao GE – estavam sendo ‘alcançadas’. Além de ressaltarem uma superação de tais expectativas, as licenciandas salientaram estarem mudando a própria concepção sobre a Matemática. No intuito de ‘confrontá-las’, o pesquisador-autor projetou as respostas obtidas no Questionário Inicial (ver Apêndice A, Categoria B, questão 7) acerca dos seus entendimentos sobre a Matemática. Mesmo sabendo que tais definições estavam ‘incompletas’, as licenciandas ainda não conseguiram ‘completá-las’.

Em seguida, realizou-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ acerca dos estádios do desenvolvimento (do sensório-motor ao operatório formal). Enquanto se discutia o texto, as licenciandas citavam os comportamentos das crianças – observadas por elas no estágio – condizentes às condutas pertencentes aos estádios abordados. Ao final da discussão sobre cada estágio, o pesquisador-autor projetou uma síntese do mesmo. Mediante o ‘pouco’ tempo restante; solicitou-se (como tarefa ‘para casa’): a) a resolução de duas ‘situações problema’ relacionando tais estádios à (futura) prática docente de Matemática; b) o registro do ‘momento de síntese’ e a leitura prévia de ‘texto/técnico’ referente ao mecanismo de equilíbrio que havia sido inicialmente proposto para este encontro.

Quadro 49 – Síntese do 13.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Situação problema.	1 – Referente aos estádios e à futura prática docente de Matemática.
2 – Momento de síntese.	2 – Sínteses elaboradas acerca dos encontros anteriores.
3 – Leitura/discussão de texto teórico.	3 – Epistemologia Genética: o mecanismo da equilíbrio.
4 – Movimento de retomada.	4 – Assuntos já abordados sobre a Epistemologia Genética e as possíveis implicações da mesma à prática pedagógica.
5 – Movimento de retomada.	5 – Desafio para casa, solicitado como tarefa para casa, acerca dos conteúdos estatísticos (gráfico de coluna, média aritmética, moda, mediana, variância e desvio padrão).
6 – Questionário <u>E</u> 7 – Situação problema.	6 – Entendimento acerca da Combinatória e da Probabilidade já construído na Educação Básica <u>E</u> 7 – Referentes a tais áreas da Matemática.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice Q).

No 13.º encontro, ao decorrer da socialização das duas ‘situações problema’ (deixadas como tarefa) discutiu-se a importância da compreensão da Epistemologia Genética à

superação do empirismo e do racionalismo (apriorismo). Nesse momento, a P-2 questionou o pesquisador-autor sobre o que fazer para saber ‘onde’ o aluno está e, assim, ‘dar’ continuidade à construção do (seu) conhecimento. A partir de sua prática pedagógica nos anos iniciais, o pesquisador-autor citou a utilização de avaliações diagnósticas à investigação daquilo que o aluno já construiu. Comentou-se, também, do ‘choque da realidade’ vivido pelo pesquisador-autor nos primeiros anos da docência o que o fez – em muitos episódios – reproduzir os saberes da experiência pré-profissional sem a devida reflexão. Em consequência de tal comentário, ressaltou-se a importância de uma ‘boa’ Formação Inicial, do acompanhamento no período de ‘iniciação’ no magistério e da constante ação-reflexão sobre/na prática pedagógica.

Concluída a leitura do ‘momento de síntese’ referente aos encontros anteriores, fez-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ sobre o mecanismo de equilíbrio. Durante a discussão, o pesquisador-autor destacou vários exemplos. Tanto o ‘momento de síntese’ quanto uma ‘situação problema’ relacionadas a tal mecanismo foram solicitados como tarefa ‘para casa’. Dando início às atividades propostas para este encontro, realizou-se a leitura do texto ‘movimento de retomada’ no qual se sintetizaram os assuntos abordados da Epistemologia Genética (atividade do sujeito, necessidade, fatores e estádios do desenvolvimento, teoria da assimilação e mecanismo de equilíbrio). O referido texto apresenta-se a seguir:

Quadro 50 – Movimento de Retomada: Síntese dos assuntos advindos da Epistemologia Genética.

13.1 Um movimento de retomada da Epistemologia Genética

Nos 4 últimos encontros foram discutidos os aspectos centrais da Epistemologia Genética. Partiu-se da importância da proposição de situações problemas ao aluno de modo a desencadear a sua ação sobre o objeto do conhecimento. Ao defender/comprovar a importância da atividade do sujeito à construção do conhecimento, Jean Piaget superou as correntes epistemológicas empiristas e racionalistas que eram (são) contrárias a essa ideia. Isso, pois para essas duas correntes epistemológicas o sujeito é considerado um ser passivo no qual o conhecimento irá depender da pressão exercida pelo meio sobre o sujeito (Empirismo) ou do ‘desabrochar’ do conhecimento pré-formado no sujeito (Racionalismo).

Para subsidiar a hipótese acerca da importância da atividade do sujeito, sendo tal atividade desencadeada por uma necessidade (desequilíbrio), Piaget elaborou a teoria da assimilação. Segundo tal teoria o que permite ao sujeito agir-interagir com o meio são duas funções indissociáveis herdadas geneticamente: a organização e a adaptação. Essa última advém do equilíbrio entre a assimilação (incorporação dos elementos do meio aos esquemas ou às estruturas de pensamento do sujeito já construídas) e acomodação (modificação dos esquemas que possibilita a incorporação de ‘novos’ elementos), sendo ambas complementares.

Dando continuidade, abordou-se a questão da escola responder a uma necessidade (interesse) na qual se discutiu que, em cada momento da vida do sujeito, há interesses diferentes cuja principal função (invariável) do interesse é desencadear no sujeito a sua ação. Para estudar os diferentes interesses, fez-se uma breve análise acerca das principais condutas observadas desde o nascimento até a adolescência, separando-as em estádios. Em cada estágio, observou-se um tipo de inteligência e ou pensamento, a saber: inteligência prática (estádio sensório-motor), pensamento intuitivo – centrado/irreversível (estádio pré-operatório), pensamento operatório – reversível ‘apoiado’ no plano concreto (estádio operatório concreto) e pensamento operatório formal – reversível ‘apoiado’ no plano hipotético-dedutivo (estádio operatório formal).

Visando ‘complementar’ a ideia acerca do equilíbrio entre a assimilação e acomodação, ressaltou-se o mecanismo de equilíbrio. Para tanto, definiu-se o equilíbrio – enquanto processo – como uma compensação proveniente das atividades do sujeito em resposta às perturbações, ou seja, ao ser desequilibrado o sujeito pode

vir a compensar tal conflito, modificando os seus esquemas de assimilação. Utiliza-se o termo ‘pode vir’, pois dependendo do nível do desequilíbrio o sujeito pode ignorá-lo, não ‘entrando/concluindo’ esse movimento compensatório. Por fim, discutiu-se também que o mecanismo de equilibração, além de constituir um dos fatores responsáveis pelo desenvolvimento do indivíduo, também coordena harmonicamente os outros três (fatores): a maturação orgânica, a interação social e as experiências (física e lógico-matemática).

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Num segundo ‘movimento de retomada’, as respostas do ‘desafio para casa’ – requerido no 10.º encontro – foram discutidas, inclusive dando-se atenção aos erros cometidos. No referido texto de retomada, elaborado pelo pesquisador-autor, apresentaram-se as soluções dos referidos desafios. Neste momento, as licenciandas julgaram importante pensar sobre os erros cometidos em tais desafios; momento esse não ocorrido durante a Educação Básica. O referido texto de retomada apresenta-se adiante:

Quadro 51 – Movimento de retomada: desafios para casa sobre a Estatística Descritiva.

13.2 Retomando os ‘Desafios para casa: Estatística Descritiva’

No 10.º encontro foi solicitada a solução acerca de alguns desafios versando sobre a Estatística Descritiva. Mediante a análise das respostas elaboradas pelas participantes, faz-se necessário apresentar as soluções dos desafios 1, 2, 3 e 4, pois os mesmos não foram realizados por algumas das participantes e/ou foram realizados de modo incorreto. Além disso, em relação à alternativa b) do 2.º desafio, as participantes, embora tenham dado uma resposta correta, não utilizaram uma ‘justificativa’ matemática valendo-se do Desvio Padrão.

DESAFIO (1): Um candidato tirou as seguintes notas em um concurso público prestado: 7,3; 6,5; 9,1; 8,2; 7,3; 6,4 e 9. A Média Aritmética, a Mediana e a Moda referente às notas desse candidato são, respectivamente:

Solução: Para o cálculo da Média Aritmética utiliza-se a seguinte expressão:

$$\bar{x} = \frac{6,4 + 6,5 + 7,3 + 7,3 + 8,2 + 9 + 9,1}{7} \cong 7,68 \cong 7,7$$

Em relação à obtenção da Mediana, como o número de elementos é ímpar ($n = 7$), então, para localizar o elemento central ordenado que divide a distribuição ao meio basta adicionar uma unidade ao número de elementos ($n = 7$), dividindo o total por 2.

$$\frac{7 + 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Assim, o 4.º elemento ordenado (7,3) – que divide a distribuição ao meio – representa a Mediana.

Por fim, para a obtenção da Moda é necessário observar se há elementos que se repetem na distribuição. Como o elemento 7,3 foi o único a se repetir duas vezes, então esse representa a Moda.

Assim, a alternativa correta corresponde à letra **c)** 7,7; 7,3; 7,3.

DESAFIO (2): Em um treinamento de salto em altura, os atletas realizaram 4 saltos cada um. Observe as marcas obtidas por três atletas e responda as questões.

Atleta A: 148 cm, 170 cm, 155 cm e 131 cm.

Atleta B: 145 cm, 151 cm, 150 cm e 152 cm.

Atleta C: 146 cm, 151 cm, 143 cm e 160 cm.

a) Qual deles obteve a melhor Média Aritmética?

b) Para auxiliar os atletas a melhorarem seus desempenhos, faz-se necessário investigar o quão regular encontram-se os resultados obtidos por eles. Nesse sentido, qual dos atletas acima apresentou melhor regularidade, ou seja, melhor homogeneidade? E qual deles apresentou a ‘pior’ regularidade?

Solução: a) Inicialmente faz-se necessário o cálculo das Médias Aritméticas obtidas pelos 3 atletas:

$$\text{Atleta A: } \bar{x}_A = \frac{148+170+155+131}{4} = \frac{604}{4} = 151 \text{ cm}$$

$$\text{Atleta B: } \bar{x}_B = \frac{145+151+150+152}{4} = \frac{598}{4} = 149,5 \text{ cm}$$

$$\text{Atleta C: } \bar{x}_C = \frac{146+151+143+160}{4} = \frac{600}{4} = 150 \text{ cm}$$

Analisando as marcas (de salto) obtidas pelos atletas e suas respectivas Médias Aritméticas, conclui-

se que a melhor Média Aritmética foi obtida pelo atleta B, já que o valor (149,5 cm) melhor representa o centro da distribuição dos saltos.

b) Embora as participantes respondessem corretamente, salientando que o atleta B foi o que apresentou melhor regularidade e o atleta A a pior, não justificaram matematicamente suas respostas utilizando o Desvio Padrão. Assim, será apresentado o cálculo do Desvio Padrão para cada uma das distribuições:

$$\text{Atleta A: } V_A = \frac{(148-151)^2 + (170-151)^2 + (155-151)^2 + (131-151)^2}{4} = \frac{9+361+16+400}{4} = \frac{786}{4} = 196,5$$

$$DP = \sqrt{196,5} \cong 14 \text{ cm}$$

$$\text{Atleta B: } V_B = \frac{(145-149,5)^2 + (151-149,5)^2 + (150-149,5)^2 + (152-149,5)^2}{4} = \frac{20,25+2,25+0,25+6,25}{4} = \frac{29}{4} = 7,25$$

$$DP = \sqrt{7,25} \cong 2,7 \text{ cm}$$

$$\text{Atleta C: } V_C = \frac{(146-150)^2 + (151-150)^2 + (143-150)^2 + (160-150)^2}{4} = \frac{16+1+49+100}{4} = \frac{166}{4} = 41,5$$

$$DP = \sqrt{41,5} \cong 6,4 \text{ cm}$$

Como o menor valor de Desvio Padrão foi obtido na distribuição do atleta B, então esse apresentou a melhor regularidade (homogeneidade). Em contrapartida, o maior valor foi obtido na distribuição do atleta A, indicando a 'pior' regularidade (heterogeneidade).

DESAFIO (3): Considere sete números cuja Média Aritmética é 6. Adicionando um número a esse conjunto, a 'nova' Média Aritmética é 5,5. O número adicionado é:

Solução: No referido problema é feita uma 'comparação' entre duas Médias Aritméticas ao ocorrer o acréscimo de um elemento no conjunto inicial. Em seguida, solicita-se a descoberta desse número acrescentado. Vamos considerar os 7 números do conjunto inicial como sendo representados pela seguinte notação:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$$

Sabe-se que a Média Aritmética destes 7 números é 6. Acrescentando-se um elemento (x_8) ao conjunto inicial, obtém-se a 'nova' Média Aritmética (5,5). Por meio das expressões abaixo é possível calcular as somatórias dos 7 números (do conjunto inicial) e também dos 8 números (após o acréscimo do elemento x_8):

<u>SITUAÇÃO INICIAL</u>	<u>ACRÉSCIMO de UM NÚMERO</u>
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$
$6 = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$	$5,5 = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$
$\sum_{i=1}^7 x_i = 6 \times 7$	$\sum_{i=1}^8 x_i = 5,5 \times 8$
$\sum_{i=1}^7 x_i = 42$	$\sum_{i=1}^8 x_i = 44$

Para descobrir o número adicionado (x_8) basta fazer a diferença entre os resultados das somatórias encontradas. Isso, pois a diferença entre as mesmas foi devido ao acréscimo do número em questão.

$$x_8 = \sum_{i=1}^8 x_i - \sum_{i=1}^7 x_i$$

$$x_8 = 44 - 42 = 2$$

Logo, o número acrescentado (x_8) equivale a 2 e o item correto é o **d**).

DESAFIO (4): No desafio anterior, qual número deve ser adicionado ao conjunto inicial (dos sete números) para que a Média Aritmética permaneça a mesma, ou seja, igual a 6?

Solução: Utilizando o raciocínio de modo análogo ao desafio anterior, tem-se agora a seguinte situação:

SITUAÇÃO INICIAL

ACRÉSCIMO de UM NÚMERO DE MODO A PERMANECER A MESMA MÉDIA ARITMÉTICA

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$ $6 = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$ $\sum_{i=1}^7 x_i = 6 \times 7$ $\sum_{i=1}^7 x_i = 42$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$ $6 = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$ $\sum_{i=1}^8 x_i = 6 \times 8$ $\sum_{i=1}^8 x_i = 48$
Para descobrir o número adicionado (x_8) basta fazer a diferença entre os resultados das somatórias encontradas. Isso, pois a diferença entre as mesmas foi devido ao acréscimo do número em questão. $x_8 = \sum_{i=1}^8 x_i - \sum_{i=1}^7 x_i$ $x_8 = 48 - 42 = 6$ Portanto, o número acrescentado (x_8) equivale a 6 e o item correto é o c).	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Visando identificar os conhecimentos já construídos (e as dificuldades) sobre alguns conteúdos de Probabilidade e Combinatória, aplicaram-se um ‘questionário’ e ‘situações problema’ cujas respostas foram recolhidas e posteriormente analisadas pelo pesquisador-autor.

Quadro 52 – Síntese do 14.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Situação problema.	1 – Referente ao mecanismo de equilibração.
2 – Momento de síntese.	2 – Referente ao encontro no qual discutiu-se o mecanismo de equilibração.
3 – Movimento de retomada.	3 – Referentes aos resultados advindos do questionário aplicado no encontro anterior acerca da Combinatória e da Probabilidade.
4 – Movimento de retomada.	4 – Referentes aos resultados advindos das resoluções das situações problema acerca da Combinatória e da Probabilidade.
5 – Leitura/discussão de texto teórico.	5 – Uma breve reflexão sobre a Combinatória e a Probabilidade e seu ensino.
6 – História de ensino simulada <u>E</u>	6 – Ensino de Combinatória: princípio multiplicativo <u>E</u>
7 – Situação problema.	7 – Assunto abordado no item anterior (6).
8 – Momento de síntese.	8 – Síntese elaborada acerca do encontro.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice R).

No 14.º encontro – primeiramente – as licenciandas socializaram as respostas da ‘situação problema’ envolvendo algumas implicações a respeito do conhecimento sobre o mecanismo de equilibração na (futura) prática docente de Matemática. Além disso, houve o compartilhamento do ‘momento de síntese’ acerca desse mecanismo. Em seguida, foram discutidas – no ‘movimento de retomada’ – as respostas advindas do ‘questionário’ referente à Probabilidade e à Combinatória. Num segundo ‘movimento de retomada’ – no qual o

pesquisador-autor propôs soluções a algumas das ‘situações problema’ envolvendo a Probabilidade e a Combinatória (resolvidas no encontro anterior) – as licenciandas confrontaram as respostas por elas elaboradas. Nesse ‘confronto’, observou-se uma ajuda mútua entre as mesmas no intuito de identificarem e refletirem sobre os erros cometidos. Ao final, as licenciandas disseram o quão importante esses momentos de discussão e confronto das respostas representam à construção do conhecimento; dinâmica essa não frequente na Educação Básica.

Durante a ‘leitura/discussão de texto teórico’ intitulado “Uma breve reflexão sobre a Combinatória e a Probabilidade e seu ensino”, as licenciandas julgaram interessante (e ao mesmo tempo ‘desequilibrador’) ‘conhecer’ a Matemática do ‘talvez’ alicerçada na ‘filosofia do azar’. Conforme denotado pelas participantes, tal conhecimento da Matemática do ‘talvez’ colaborou a um novo entendimento de suas concepções sobre a Matemática; concepção essa até então concebida de modo determinístico (absoluto). O referido texto discutido apresenta-se a seguir:

Quadro 53 – Texto: Uma breve reflexão sobre a Combinatória e a Probabilidade e seu ensino.

14.3 Uma breve reflexão sobre a Combinatória e a Probabilidade e seu ensino

Conforme já ressaltado, constituem o bloco ‘Tratamento da Informação’ a Estatística, a Combinatória e a Probabilidade. Para Lopes (2003):

A Combinatória, a Probabilidade e a Estatística inter-relacionam-se, proporcionando uma filosofia do azar de grande alcance para a compreensão do mundo atual e capacitam pessoas a enfrentarem tomada de decisões, quando somente dispõem de dados afetados pela incerteza, situações comuns em nosso cotidiano. (p. 53)

Ao se referir à ‘filosofia do azar’, a autora faz referência a outra possibilidade de ‘significar’ a Matemática, ou seja, como uma Matemática do ‘Talvez’, do ‘Possível’ (MUNIZ e GONÇALVES, 2006). Tal filosofia vem rebater a ideia de que a Matemática caracteriza-se apenas pela ‘Certeza’, pelo ‘Determinismo’. Por exemplo, durante o lançamento de um dado perfeito ‘Talvez’ saia a face 5, não sendo plausível afirmar com ‘Certeza’ a saída de tal face. Segundo Rodrigues (2011) essas, entre outras concepções equivocadas, tornam-se uma barreira ao ensino da Probabilidade, sendo necessário desde os anos iniciais da Educação Básica o professor ‘chamar’ a atenção do aluno para a noção do ‘Acaso’, da ‘Incerteza’.

Inúmeras pesquisas – (CARVALHO, 2004; CARVALHO, 2005; COSTA, 2004; COUTINHO e GONÇALVES, 2003; ESTEVES, 2001; LOPES, 2006a; LOPES, 2006; MIGUEL e MAGINA, 2003; PAMPLONA, 2006; RODRIGUES, 2006; entre outras) – apontam que a construção/desenvolvimento dos conceitos acerca da Combinatória e da Probabilidade dá-se mediante a proposição de situações problemas nas quais o aluno sinta-se desafiado a ‘descobrir’ as possibilidades de ocorrência de um determinado ‘Evento Aleatório’ bem como as maneiras de ‘Combinar’ e ‘Ordenar’ diferentes elementos.

Nesse contexto torna-se pertinente destacar a necessidade da AÇÃO-ATIVIDADE do sujeito sobre o objeto à construção do conhecimento, nos remetendo – novamente – à teoria de Piaget. Em sala de aula, o estudante deve ser desafiado a pensar sobre diferentes maneiras de **CONTAGEM** já que isso lhe oportunizará o desenvolvimento do pensamento combinatório, bem como ser desafiado a pensar sobre a **POSSIBILIDADE** da ocorrência de fenômenos naturais e produzidos pelo homem o que corroborará ao desenvolvimento do pensamento probabilístico.

Complementando o já exposto, Lopes (2003) destaca o seguinte a respeito da abordagem da Combinatória:

A Combinatória requer uma abordagem centrada na resolução de problemas, com origens diversificadas. Algumas propostas devem envolver a possibilidade de se obter a solução diretamente pela contagem. Outras, devem possibilitar aos alunos identificação de categorias nas quais a situação-problema pode-se classificar adequadamente. (p. 63)

As categorias denotadas se referem aos tipos de agrupamentos a serem feitos pelo estudante, tais como os arranjos, as combinações e as permutações. Ainda sobre o raciocínio combinatório, a autora pontua:

O raciocínio combinatório refere-se ao pensar sobre operações combinatórias que se definem frente às situações aleatórias e à enumeração do espaço amostral de todo experimento composto. A combinatória desempenha um papel relevante no desenvolvimento das capacidades lógicas do sujeito.

Batanero et al (1994) destacam Piaget, quando este considera que a compreensão do azar passa pelas operações combinatórias – fundamentais para o pensamento formal. Esses autores citam Stanley (1946), ao afirmar que a Combinatória não deve ser considerada somente um ramo das ciências matemáticas, pois está relacionada à quase todas as formas de conhecimentos úteis que a mente humana pode empregar ou desenvolver.

A diversidade de fenômenos presente na natureza, por intervenção humana ou não, dá origem a um grande número de causas produzidas por um acontecimento que poderá ser difícil de enumerar. A Combinatória auxilia-nos a elencar todos os diferentes modos de ordenar ou combinar as possibilidades de um evento. A partir dessa visão é que podemos perceber as amplas relações que o raciocínio combinatório pode estabelecer com a Física, a Química, a Biologia, a Economia e muitas outras.

A arte combinatória nos servirá como instrumento para confeccionarmos as combinações dos possíveis. Assim, poderemos calcular as Probabilidades das hipóteses relativas aos dados disponíveis, estabelecendo uma estreita conexão entre a Probabilidade e a Combinatória. (LOPES, 2003, p. 67)

Além de observar a estreita conexão entre a Combinatória e a Probabilidade, a autora destaca o seguinte acerca do pensamento probabilístico:

As investigações a respeito do pensamento probabilístico permitem que se façam recomendações sobre a prática educativa desse tema. Têm-se discutido sobre a necessidade de se realizar experimentos de simulação – nos quais apareçam seqüências aleatórias –, de se dar importância à utilização de vocabulário adequado para descrever e quantificar situações relacionadas ao azar e de se confeccionar tabelas de freqüências e gráficos para representação do comportamento de fenômenos aleatórios. Batanero e Serrano (1995) afirmam que a introdução gradual dos conceitos e da notação probabilística servirá para explicar, matematicamente, as regularidades observadas nos dados recolhidos.

O desenvolvimento do pensamento probabilístico requer o reconhecimento de situações de acaso na vida cotidiana e no conhecimento científico, bem como, a formulação e comprovação de conjecturas sobre o comportamento de fenômenos aleatórios simples e a planificação e realização de experiências nas quais se estude o comportamento de fatos que abarquem o azar. A partir dessas considerações, pode-se organizar situações didáticas que envolvam a observação de experimentos, com seus respectivos registros e análises, possibilitando a integração entre a Probabilidade e a Estatística. Nessa conjunção é que se terá o desenvolvimento do raciocínio estocástico. (LOPES, 2003, p. 64-65)

A referida citação denota a relação existente entre a Estatística e a Probabilidade, caracterizando o raciocínio estocástico como proveniente da ‘junção’ entre essas duas áreas.

Em suma, a construção da Estatística, Probabilidade e Combinatória mostra-se necessária à compreensão da realidade, pois o sujeito terá ‘ferramentas’ para interpretar os fenômenos ocorridos na natureza ou causados pelo homem.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Em seguida, valendo-se de uma ‘história de ensino simulada’, o pesquisador-autor solicitou a resolução de duas ‘situações problema’ nas quais o princípio multiplicativo fez-se necessário. No quadro seguinte, apresentam-se a referida história e as duas situações:

Quadro 54 – História de ensino simulada: problematizando a Combinatória.

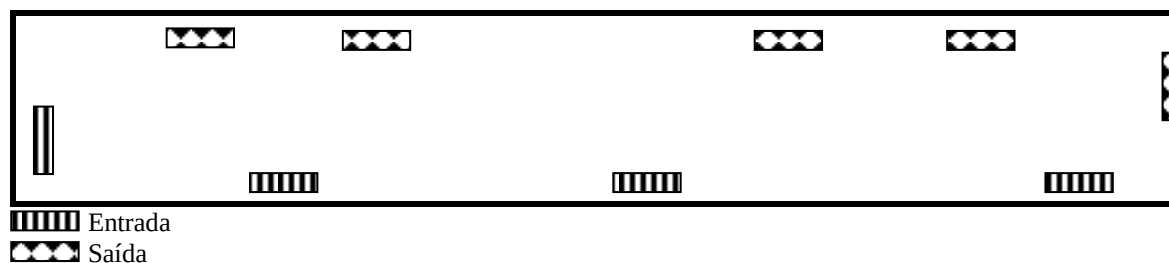
14.4 Problematizando: Combinatória

Leia atentamente a seguinte situação problema:

A professora de Matemática Sueli, visando abordar noções envolvendo o pensamento combinatório solicitou aos seus alunos do 9.º ano do Ensino Fundamental que pensassem acerca do seguinte problema:

Eduarda e sua família foram a um parque de diversões. No parque havia 4 entradas e 5 saídas. De quantos modos diferentes ela pode entrar e sair desse parque?

Em seguida, a professora Sueli colocou na lousa a seguinte representação no intuito de auxiliar os alunos a pensarem sobre o referido problema:



1. De que modo você acredita que os alunos da professora Sueli resolveriam tal desafio?
2. Após discutir as soluções encontradas pelos seus alunos, a professora Sueli pediu aos mesmos que pensassem sobre tal situação modificando o número de entradas para 20 e o número de saídas para 25. Qual seria a ‘nova’ resposta a ser dada pelos estudantes? Há algum princípio matemático que permite a solução de desafios deste tipo? Pense a respeito.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Findada a socialização das resoluções elaboradas pelas licenciandas acerca dos referidos problemas, as mesmas elaboraram o ‘momento de síntese’.

Quadro 55 – Síntese do 15.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Momento de síntese.	1 – Sínteses elaboradas acerca do encontro anterior.
2 – Movimento de retomada.	2 – Referente aos assuntos abordados no encontro anterior.
3 – Leitura/discussão de texto teórico <u>E</u>	3 – Referente ao princípio multiplicativo <u>E</u>
4 – Situação problema.	4 – Referente a tal princípio.
5 – Situação problema.	5 – Referentes aos conceitos de arranjo e permutação.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice S).

No 15.º encontro, ao decorrer da leitura do ‘momento de síntese’, as licenciandas indicaram a importância do diagrama de árvore¹⁶ à solução dos problemas referentes à

¹⁶ O Diagrama de árvore (ou árvore de possibilidades) é um procedimento ‘gráfico’ no qual se representam – de modo sistemático – as possibilidades de ‘combinação’ entre diversos elementos.

Combinatória e à Probabilidade. A P-2 ‘tirou’ algumas dúvidas sobre o processo de assimilação e a P-8 questionou ser possível (ou não) um sujeito ‘acomodar’ um conhecimento mediante a ‘presença’ de algumas lacunas que dificultam tal compreensão. Após a leitura do texto ‘movimento de retomada’ (realizada pela P-2), realizou-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ a respeito do princípio multiplicativo, sendo resolvida, pelas licenciandas, uma ‘situação problema’ relacionada a tal princípio. O referido texto e a situação apresentam-se a seguir:

Quadro 56 – Texto teórico (Princípio multiplicativo) e situação problema.

15.2 Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem (PFC)

Inicialmente, observemos a definição dada por Dante (2004) a respeito de tal princípio:

Se um evento é composto por duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na primeira etapa é **m** e o número de possibilidades na segunda etapa é **n**, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado por **mn**. (p. 360, grifos do autor)

Exemplificando, no problema proposto pela professora Sueli o evento a ser realizado por Eduarda era composto de duas etapas sucessivas e independentes: entrar e sair do parque. Como na etapa ‘*entrar*’ haviam 4 possibilidades (**m** = 4) e na etapa sucessiva ‘*sair*’ haviam 5 possibilidades (**n** = 5), então, o total de possibilidades de realizar o evento ‘*entrar e sair*’ era de $m \times n = 4 \times 5 = 20$. Veja que essas duas etapas são independentes, pois uma não depende da outra a sua ocorrência, ou seja, ‘*entrar*’ é independente de ‘*sair*’.

1. Você acha que tal princípio é válido apenas para um evento composto por duas etapas sucessivas e independentes ou pode haver mais etapas sucessivas e independentes? Discorra sobre e, em caso afirmativo, dê um exemplo.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Tendo em vista o período de ‘férias’, o pesquisador-autor solicitou a resolução de um ‘desafio para casa’ que pode ser classificado como sendo do tipo ‘história de ensino simulada’. Esse desafio consistiu na identificação de concepções epistemológicas (empirista, racionalista/apriorista e construtivista) implícitas nas falas provenientes de um diálogo hipotético observado entre três professoras de Matemática. No referido diálogo, apresentado a seguir, as professoras Márcia, Cláudia e Sueli conversam sobre o ensino-aprendizagem da Combinatória nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Quadro 57 – Desafio para casa: Conversando sobre o ensino de Combinatória.

15.3 Conversando sobre o ensino de Combinatória

Durante uma reunião pedagógica na escola da professora de Matemática Sueli, a coordenadora pediu que os docentes se reunissem por disciplina e conversassem sobre o assunto que estavam trabalhando. Desse modo, a professora Sueli agrupou-se com as professoras de Matemática Márcia e Cláudia. Observe o diálogo decorrente de tal discussão:

Então, eu estou trabalhando com meus alunos do 9.º ano alguns problemas envolvendo a Combinatória. Eu comecei com problemas em que os estudantes têm que resolver inicialmente de modo intuitivo, ou seja, por meio da contagem direta das possibilidades. E vocês, Márcia e Cláudia, também estão nesse assunto?

Professora Sueli

Eu também estou abordando a Combinatória com meus alunos do Ensino Médio. Mas eu já parti direto pras definições. Dei um exemplo do Princípio Multiplicativo e já parti pras fórmulas necessárias para o cálculo da Permutação, Fatorial, Arranjo e Combinação. Acho que não precisamos perder tempo com estas contagens diretas, porque isso o aluno já tem que saber!

Professora Márcia

Eu ainda não comecei. Como é o 2.º ano que eu me efetivei, ainda fico um pouco perdida em relação ao quando começar um assunto novo. É até bom a gente conversar porque iria perguntar isso pra vocês!

Professora Cláudia

Pare de se preocupar, Cláudia! Começa de uma vez, o aluno tem que correr atrás da matéria. Daqui alguns anos você vai ver que o importante é você fazer a sua parte, dê a matéria direitinho. Se o estudante não estiver afim é problema dele!

Professora Márcia

Márcia eu concordo que o aluno precisa agir sobre os conteúdos que estamos trabalhando. Mas, e se naquele momento o conteúdo abordado for muito além da sua capacidade de compreensão?

Professora Sueli

Ah, Sueli, mas se a gente tiver que se preocupar com os alunos que ainda não tem o necessário a gente vai ficar sempre no mesmo lugar. Sempre tem aquele estudante que não se dá bem com a Matemática, então, por mais que você faça nunca vai adiantar!

Professora Márcia

Nossa... Agora vocês duas me deixaram em dúvida! Sueli, como você faz para saber se o conteúdo 'novo' é possível de ser compreendido pelo aluno?

Professora Cláudia

Antes de um conteúdo 'novo' eu vejo o que o aluno já sabe acerca dos conteúdos que serão necessários. Por exemplo, para a abordagem da Combinatória, eu tenho que me certificar se os estudantes conseguem resolver problemas envolvendo a contagem direta das combinações (de modo aditivo) ou se já o fazem por meio do Princípio Multiplicativo.

Professora Sueli

Mas você concorda que com isso você vai gastar tempo, Sueli? E daí, talvez, você não consiga dar conta de todo o conteúdo anual?

Professora Márcia

Não que eu não queira 'cumprir' todo o conteúdo, mas eu prefiro que o aluno realmente aprenda e não apenas os memorize. Embora eu saiba, Márcia, das inúmeras cobranças que nós sofremos dos nossos 'superiores'...

Professora Sueli

E se você avaliar seu aluno, Sueli, e ver que ele ainda tem dificuldade em resolver os problemas por meio da contagem direta via modo aditivo?

Professora Cláudia

Se eu observo isso eu tenho que trabalhar inúmeras situações problemas para que o estudante compreenda bem quando utilizar a contagem direta.

Professora Sueli

Veja se eu estou entendendo! Depois que o estudante tiver solucionado vários problemas pela contagem direta você apresenta desafios para que, aos poucos, ele vá generalizando e sinta necessidade do Princípio Multiplicativo? Professora Cláudia	Isso mesmo Cláudia! À medida que os alunos vão avançando eu vou propondo problemas para que eles percebam que a contagem direta não é suficiente para a solução de certos desafios. Chego até a questionar: “<i>Será que não tem uma maneira mais fácil de resolver ao invés de ir contando uma a uma as combinações possíveis?</i>”. Professora Sueli
Então você acha, Sueli, que ensinar as fórmulas é errado? Professora Márcia	Não, Márcia! O ensino das fórmulas é necessário, pois além de representar um ‘pensamento formalizado sintético’, as mesmas facilitam a ‘vida’ do aluno. No entanto, acho que antes de aprender as fórmulas os estudantes devem aprender a <u>pensar sobre</u> as situações problemas envolvendo os conteúdos matemáticos. Assim, as fórmulas passarão a ter significado! Professora Sueli
Após me certificar, Cláudia, que meus alunos compreenderam o Princípio Multiplicativo, eu vou propondo inúmeros problemas envolvendo diferentes tipos de agrupamentos para que eles percebam quando a <u>ordem</u> dos elementos de um conjunto a combinar é importante ou não. Professora Sueli	Ah, daí você vai trabalhando gradativamente com os problemas de Permutação, Arranjo e Combinação? E, como são alunos do 9.º ano, você ainda não introduz as fórmulas, né? Professora Cláudia
É isso mesmo, Cláudia! Vou trabalhando gradativamente para que os alunos vão diferenciando estes três tipos de agrupamentos (Permutação, Arranjo e Combinação). E sobre as fórmulas, não vejo a necessidade de abordá-las no Ensino Fundamental, deixando-as para o Ensino Médio. Professora Sueli	Ah, Sueli, agradeço as suas dicas. Com certeza irá me auxiliar a pensar sobre a minha prática docente! Professora Cláudia

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Em continuidade à abordagem da Combinatória, as participantes resolveram parte das ‘situações problema’ envolvendo problemas de arranjo e permutação (simples e com repetição). As situações foram as seguintes:

1. Em nossa escola há 4 corredores que ligam a cantina com o pátio e 6 corredores que ligam o pátio com a biblioteca. Partindo da cantina e passando pelo pátio de quantas formas diferentes podemos chegar na biblioteca?

2. Durante a semana da Educação Física, a escola está realizando uma competição entre as 8 turmas do Ensino Médio. Quantas são as possibilidades para o 1.º e 2.º lugares dentre as turmas participantes?

2.1. Entre 27 de julho a 12 de agosto deste ano (2012) serão realizados os Jogos Olímpicos em Londres com a participação de 192 países. Quais são as possibilidades para as medalhas de ouro, prata e bronze?

3. Usando somente os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, e 6:

a) Quantos números de 2 algarismos podemos formar?

b) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?

c) Quantos números de 3 algarismos iniciados com o 1 na ordem da centena podemos formar?

4. O mundo ‘informatizado’ traz muitas facilidades e também alguns perigos. Frequentemente os noticiários mostram ações de hackers que, ao descobrirem as senhas de clientes bancários, causam inúmeros transtornos a todos. Nesse sentido, a Combinatória pode ajudar no processo de elaboração das senhas de tal modo a dificultar a ação desses criminosos. Suponha que você seja o gerente de um banco e tenha que decidir, dentre várias propostas, qual seria a melhor. Observe algumas possíveis propostas:

1.ª Proposta: Senha formada com 4 algarismos distintos.

2.ª Proposta: Senha formada com 4 algarismos.

3.ª Proposta: Senha formada com 2 algarismos distintos e 2 letras distintas.

4.ª Proposta: Senha formada com 2 algarismos e 2 letras.

5.ª Proposta: Senha formada com 4 letras distintas.

6.ª Proposta: Senha formada com 4 letras.

Qual seria a melhor proposta? Justifique.

Para a resolução das situações, as licenciandas conversaram entre si e utilizaram, apenas, o diagrama de árvore e o princípio multiplicativo. Para auxiliá-las, o pesquisador-autor disponibilizou um material de ‘apoio’ ao estabelecimento das relações matemáticas necessárias a tais soluções. Observe, no quadro abaixo, um dos materiais de ‘apoio’ disponibilizado para a resolução da situação problema 3:

Quadro 58 – Material de ‘apoio’ à resolução das situações problema combinatórias.

3. Usando somente os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, e 6:					
a) Quantos números de 2 algarismos podemos formar?					
b) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?					
c) Quantos números de 3 algarismos iniciados com o 1 na ordem da centena podemos formar?					
MATERIAL DE ‘APOIO’ ¹⁷					
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6

Fonte – Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice S).

Após a discussão de cada ‘situação problema’ resolvida – tendo ficado para o encontro seguinte (pós-férias) os problemas relacionados à combinação simples – combinou-se a elaboração do ‘momento de síntese’ apenas no próximo encontro.

¹⁷ Caso julgassem necessário, as participantes poderiam recortar os algarismos impressos no papel e manipulá-los.

Quadro 59 – Síntese do 16.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Desafio para casa.	1 – Diálogo hipotético acerca do ensino de Combinatória.
2 – Movimento de retomada.	2 – Síntese dos assuntos abordados nos encontros anteriores (1.º ao 15.º).
3 – Movimento de retomada.	3 – Referente às situações problema envolvendo os conceitos de arranjo e permutação.
4 – Situação problema.	4 – Referentes ao conceito de combinação.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice T).

No 16.º encontro foram socializadas, inicialmente, as respostas em torno do ‘desafio para casa’ referente ao diálogo hipotético entre três professoras de Matemática acerca do ensino de Combinatória. Durante o compartilhamento/discussão, as participantes evidenciaram a possibilidade de coexistência de duas ou mais concepções epistemológicas nas falas de um mesmo professor. Visando destacar os assuntos abordados nos quinze encontros anteriores, realizou-se a leitura do texto ‘movimento de retomada’. Antes da proposição de ‘situações problema’ referente à combinação simples, realizou-se um segundo ‘movimento de retomada’. Nesta retomada, o pesquisador propôs soluções (sistematizadas) acerca das ‘situações problema’ resolvidas pelas licenciandas no encontro anterior. O quadro abaixo exemplifica uma das soluções apresentada às licenciandas:

Quadro 60 – Exemplo de problema combinatório envolvendo arranjo simples e solução comentada.

PROBLEMA (2): Durante a semana da Educação Física, a escola está realizando uma competição entre as 8 turmas do Ensino Médio. Quantas são as possibilidades para o 1.º e 2.º lugares dentre as turmas participantes?
Solução: Consideremos: – A, B, C, D, E, F, G e H como representando as 8 turmas do Ensino Médio. Na competição só há vencedor para o 1.º e 2.º lugares; logo é necessário arranjar as 8 turmas 2 a 2. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $8 \times 7 = 56$ No 1.º lugar temos 8 possibilidades, ou seja, uma dentre as 8 turmas do Ensino Médio. Para o 2.º lugar há 7 possibilidades, pois uma dentre as 8 turmas do Ensino Médio já conquistou o 1.º lugar. Exemplificando, supondo que a turma A ficou em 1.º lugar, então o 2.º lugar pode ser ocupado pelas 7 turmas restantes (B, C, D, E, F, G e H). Além do Princípio Fundamental da Contagem é possível construir o Diagrama de Árvore. No entanto, por questão de ‘praticidade’ não há necessidade de fazê-lo. R: Há 56 possibilidades para o 1.º e 2.º lugares dentre as turmas participantes.

Fonte – Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Embora tenham conseguido solucionar – conjuntamente – os problemas relacionados à combinação simples por meio do diagrama de árvore e da contagem um a um, as licenciandas não conseguiram obter uma expressão matemática que possibilitasse o cálculo ‘direto’ do número de combinações. Ao lerem a solução comentada (elaborada pelo pesquisador-autor) acerca de tais problemas, observou-se um erro cometido pelo mesmo ao denotar o

procedimento do cálculo do número de combinações. Nesse momento, o grupo discutiu sobre o fato de muitos professores não aceitarem o erro, seja deles mesmos ou dos próprios alunos. Ainda nessa discussão, o grupo ressaltou a importância de o docente conhecer – em ‘profundidade’ – os assuntos a serem ensinados; caso contrário corre-se o ‘risco’ do professor ‘pular’ estes conteúdos ao decorrer do ano letivo. Em seguida, a P-2 salientou o quão difícil torna-se o trabalho do professor dos anos iniciais pelo fato do mesmo ter que abordar diversas áreas do conhecimento, no qual se discorreu a necessidade de (re)pensar a questão da polivalência no curso de Pedagogia.

Por ‘falta’ de tempo, o ‘momento de síntese’ do 15.º encontro foi deixado como tarefa, bem como a solução do ‘desafio para casa’ constituído por ‘exemplos de ensino’. Observe – adiante – um desses exemplos e três questionamentos referentes a esses exemplos:

Quadro 61 – Exemplo de ensino envolvendo Combinatória.

16.2 DESAFIO PARA CASA	
Identifique nas seguintes atividades o conteúdo matemático abordado e o ano a qual se destinam:	
<u>ATIVIDADE 1: COMBINANDO AS ROUPAS</u> Joana tem no seu guarda-roupa 2 saias, uma vermelha e a outra amarela. Ela também possui 3 blusas, sendo uma preta, a outra vermelha e a outra azul. Quantas são as combinações possíveis que Joana pode fazer usando uma saia e uma blusa?     	
<u>Conteúdo abordado:</u>	<u>Ano:</u>
<u>QUESTÕES:</u> 1) Em sua opinião, qual das atividades acima apresenta o maior nível de dificuldade? Por quê? 2) E o menor nível de dificuldade? Por quê? 3) Qual postura o professor deveria adotar ao abordar tais atividades?	

Fonte – Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Quadro 62 – Síntese do 17.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Momento de Síntese.	1 – Sínteses elaboradas referentes ao 15.º encontro.
2 – Desafio para casa/exemplo de ensino.	2 – Referente aos exemplos de ensino.
3 – Movimento de retomada.	3 – Referente ao desafio para casa/exemplos de ensino.
4 – Leitura/discussão de texto teórico.	4 – Análise Combinatória: alguns tipos de agrupamentos.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice U).

No 17.º encontro, após a socialização das sínteses referentes ao 15.º encontro, as licenciandas apresentaram as suas respostas acerca do ‘desafio para casa/exemplos de ensino’ referido anteriormente. Além de identificar, para cada atividade, o conteúdo abordado e o ano de escolaridade – aspecto esse no qual se observou certa dificuldade das licenciandas – destacaram-se os ‘exemplos de ensino’ que apresentavam o maior e o menor nível de dificuldade e a postura a ser adotada (pelo professor) à abordagem dos mesmos. Como ‘desfecho’ a tal desafio, realizou-se a leitura/discussão do texto ‘movimento de retomada’ no qual abordaram-se os seguintes assuntos: a) os conteúdos matemáticos abordados nos ‘exemplos de ensino’ e os respectivos anos de escolaridade; b) as justificativas didático-metodológicas e psicológicas referentes ao nível de dificuldade de tais situações; c) a postura pedagógica condizente à Epistemologia Genética (a importância do problema/desafio, das relações interindividuais à descentração do pensamento, etc.). Tal texto apresenta-se a seguir:

Quadro 63 – Texto: Retomando o desafio para casa/exemplo de ensino.

17.1 Retomando o desafio para casa

No encontro anterior solicitou-se a análise de algumas atividades envolvendo a Combinatória a serem utilizadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Observem, no quadro abaixo, os conteúdos matemáticos possíveis de serem trabalhados em cada uma das atividades, bem como o ano escolar ao qual se destinam:

ATIVIDADE	ANO (ESCOLARIDADE)	CONTEÚDO MATEMÁTICO
1 – Combinando as Roupas	2.º e 3.º	Adição (contagem direta 1 a 1) – 2.º ano. Multiplicação (ideia inicial de Combinatória) – 3.º ano.
2 – Ida à Festa (Problemas 1 e 2)	4.º e 5.º	Adição (contagem direta 1 a 1). Multiplicação (Princípio Fundamental da Contagem).
3 – Diversas Combinações (Problema 1)	4.º e 5.º	Multiplicação (Princípio Fundamental da Contagem).
3 – Diversas Combinações (Problema 2)	4.º e 5.º	Divisão (Princípio Fundamental da Contagem – operação inversa).
4 – Partidas de Futebol	4.º e 5.º	Adição. Multiplicação (Princípio Fundamental da Contagem).

Em relação ao nível de dificuldade, supõe-se que a Atividade 1 seja a de menor nível por permitir ao estudante ‘ligar’ as possíveis combinações entre as saias e as blusas desenhadas. Por meio de tal estratégia – ‘ligar’ – os estudantes terão um apoio visual para resolver o problema contando diretamente cada ‘combinação’, não sendo necessário ‘pensar sobre’ o Princípio Fundamental da Contagem (multiplicativo). Em contrapartida, o problema 2) – Atividade 3 – representa o maior nível de dificuldade por exigir do aluno o pensamento inverso da multiplicação, ou seja, a divisão. Além de pensar combinatoriamente, o estudante precisará dividir o total de opções ($n = 15$) pela quantia de saias ($m = 5$) para obter a quantidade de blusas. Ao solucionar tal problema (o de maior dificuldade) o sujeito necessitará – em ‘termos’ psicológicos – da reversibilidade operatória, por isso a sua abordagem só se faz possível, na maioria das vezes, entre o 4.º e 5.º anos do Ensino Fundamental.

Uma postura pedagógica condizente com os estudos desenvolvidos até o momento na/para a abordagem das atividades seria a metodologia da solução de problemas. Nesta metodologia cabe ao professor ‘despertar’ o interesse do aluno desafiando-o/‘desequilibrando-o’ a pensar sobre determinado objeto de conhecimento. Por se tratar de estudantes no início da escolaridade, em conformidade com os estádios do desenvolvimento cognitivo, as atividades iniciais devem ser próximas à realidade (convívio) do estudante. Tal ‘proximidade’ facilitará a

interpretação da situação problema pelo sujeito já que o mesmo valer-se-á dos seus esquemas de assimilação.

Além da importância (necessidade) do desafio ‘podendo’ implicar na atividade do aluno sobre o objeto de conhecimento, deve ser garantido momentos de troca de ideias entre os estudantes. Ao observar/interagir-se do modo utilizado pelo ‘outro’, na solução de determinado problema, o aluno poderá rever a própria estratégia. Tal ‘movimento’ de/ou ‘gerir’ diferentes pontos de vista corroborará ao processo de descentração que, por conseguinte, contribuirá à constituição da reversibilidade operatória (‘ir e vir mental’). Reversibilidade é muito importante à construção das estruturas lógico-matemáticas.

Outra questão pertinente refere-se ao ‘acompanhamento’ feito pelo professor durante a abordagem de tais atividades. Aconselha-se ‘acompanhar’ ‘mais de perto’ os alunos do 2.º ano (e em alguns casos do 3.º ano) pelo fato dos mesmos ainda não serem tão ‘independentes’ na solução dos problemas. Como se encontram em processo de alfabetização, uma boa alternativa é a discussão oral acerca do problema, sendo necessário o professor auxiliar o estudante durante/no registro das estratégias pessoais elaboradas. No entanto, independentemente do ano de escolaridade, o docente deve – intencionalmente – auxiliar os alunos, seja questionando algum erro observado e/ou chamando a atenção à necessidade da leitura e (re)leitura do enunciado de modo a permitir a sua compreensão e a ‘retirada’ da informação matemática a ser utilizada.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Em seguida, fez-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ no qual os diferentes agrupamentos combinatórios – arranjo/permutação (simples e com repetição) e combinação simples – foram sistematizados/definidos por meio da linguagem matemática formal. Observe o referido texto no quadro a seguir:

Quadro 64 – Texto: Análise Combinatória: alguns tipos de agrupamentos.

17.2 Análise Combinatória: alguns tipos de agrupamentos

Os problemas pertencentes à Combinatória – abordados nos três últimos encontros – denotaram diferentes tipos de agrupamentos que exigiram diferentes estratégias à solução. Nos itens seguintes far-se-á uma breve discussão acerca desses diferentes tipos de agrupamentos (Permutação, Arranjo e Combinação). Além disso, serão apresentadas algumas expressões (‘fórmulas’) visando ‘facilitar’ a solução dos referidos problemas.

17.2.1 Permutação simples e com repetição

Permutação Simples é definida como sendo o número de possibilidades de misturar/trocar/arrumar n elementos de um determinado conjunto em n posições de tal modo que cada possibilidade se diferencie pela ordem em que os elementos aparecem. Por exemplo, para obter os anagramas da palavra COR (6.º problema – item 15.4) permutaram-se os 3 elementos (letras C, O, R) em 3 posições. Na Permutação Simples cada um dos elementos terá ‘seu lugar’ em cada agrupamento ordenado, no caso do exemplo em cada anagrama feito.

A expressão abaixo possibilita calcular o número de Permutações Simples (P_n):

$$P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 \quad (1.)$$

, onde n indica o número de elementos do conjunto considerado.

Considerando a palavra COR, sendo n = 3 (total de elementos ‘letras’ do conjunto), ao utilizar a expressão (1.) encontra-se o total de anagramas a serem formados. Observe:

$$P_n = P_3 = 3 \times (3 - 1) \times (3 - 2) = 3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ possíveis anagramas}$$

O valor obtido em P_n também é denominado **FATORIAL** do número natural n , sendo indicado por $n!$ (lê-se “fatorial de n ou n fatorial”). Em expressão matemática temos:

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 \quad (2.)$$

, para $n \geq 1$.

Das expressões (1.) e (2.) obtém-se a expressão (3.):

$$P_n = n! \quad (3.)$$

Na Permutação Com Repetição há a ocorrência de elementos repetidos dentre os n elementos do conjunto a permutar. Ainda no 6.º problema (item 15.4), a partir da palavra ANA construíram-se os seguintes anagramas: ANA, AAN, NAA, NAA, ANA, AAN. É possível perceber que os 3 últimos anagramas são repetidos, fato esse devido à repetição da letra A no conjunto dos 3 elementos (letras A, N, A). Assim, o cálculo

das permutações possíveis difere do cálculo da Permutação Simples na qual não há repetição dos elementos.

No encontro anterior utilizou-se a seguinte divisão para calcular o número de anagramas da palavra ANA excluindo-se os repetidos. Veja abaixo:

$$\frac{\text{Quantidade de Possibilidades a partir de 3 elementos – letras A, N, A}}{\text{Quantidade de Possibilidades a partir dos 2 elementos repetidos – letras A, A}} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

‘Traduzindo’ o exposto em linguagem matemática obtemos a seguinte expressão que permite calcular o número de Permutações Com Repetição (P_r):

$$P_r = P_n^\alpha = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{\alpha \times (\alpha-1) \times (\alpha-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{n!}{\alpha!} \quad (4.)$$

, onde n indica o número de elementos do conjunto considerado e α representa o número de determinado elemento que se repetiu.

Considerando a palavra ANA, sendo $n = 3$ e $\alpha = 2$ (as 2 letras repetidas ‘A’), ao utilizar a expressão (4.) encontra-se o total de anagramas a serem formados. Observe:

$$P_n^\alpha = P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3 \text{ possíveis anagramas}$$

‘Generalizando’ a expressão (4.) obtém-se:

$$P_r = P_n^{\alpha, \beta, \dots, \gamma} = \frac{n!}{\alpha! \times \beta! \times \dots \times \gamma!} \quad (5.)$$

, onde n indica o número de elementos do conjunto considerado e $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ representam os números de determinados elementos que se repetiram.

Aplicando a expressão (5.) calcula-se o número de anagramas da palavra COCO (6.º problema – item 15.4). Observe:

$$P_r = P_n^{\alpha, \beta} = \frac{n!}{\alpha! \times \beta!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1)} = \frac{24}{4} = 6 \text{ possíveis anagramas}$$

, onde n indica os 4 elementos ‘letras’ da palavra COCO (C, O, C, O), α representa as 2 letras repetidas ‘C’ e β indica as 2 letras repetidas ‘O’.

17.2.2 Arranjo simples e com repetição

Arranjo Simples é definido como sendo o número de possibilidades de misturar/trocar/arrumar $\underline{n}$ elementos de um determinado conjunto em $\underline{m}$ posições, com $\underline{m} \leq \underline{n}$, de tal modo que cada possibilidade se diferencie pela ordem em que os elementos aparecem. Pode-se ainda dizer que os $\underline{n}$ elementos foram tomados/arranjados $\underline{m}$ a $\underline{m}$. Exemplificando, no 2.º problema (item 15.4) as 8 turmas do Ensino Médio ($\underline{n}$) foram arranjadas 2 a 2 ($\underline{m}$ a $\underline{m}$) já que pretendia-se descobrir as possibilidades para o 1.º e 2.º lugares numa competição realizada entre as 8 turmas.

Por meio da seguinte expressão faz-se possível calcular o número de Arranjos Simples ($A_{n,m}$ ¹⁸) para $\underline{n}$ elementos arranjados $\underline{m}$ a $\underline{m}$:

$$A_{n,m} = \underbrace{\left(\overset{1.ª \text{ posição}}{\overbrace{n}} \right) \times \left(\overset{2.ª \text{ posição}}{\overbrace{n-1}} \right) \times \left(\overset{3.ª \text{ posição}}{\overbrace{n-2}} \right) \times \dots \times \left[\overset{m-ésima \text{ posição (última)}}{\overbrace{n-(m-1)}} \right]}_{m \text{ fatores}} \quad (6.)$$

, onde:

n indica as possibilidades na 1.ª posição por possuir n elementos disponíveis;

$(n-1)$ indica as possibilidades na 2.ª posição por possuir $n - 1$ elementos disponíveis;

$(n-2)$ indica as possibilidades na 3.ª posição por possuir $n - 2$ elementos disponíveis;

$(n-(m-1))$ indica as possibilidades na m -ésima (‘última’) posição por possuir $n - (m - 1)$ elementos disponíveis.

Utilizando a referida expressão (6.) no exemplo citado, sendo $\underline{n} = 8$ (8 turmas do Ensino Médio) e $\underline{m} = 2$ (1.º e 2.º lugares), obtém-se como resposta 56 possibilidades. Observe a seguir:

$$\begin{aligned} A_{n,m} = A_{8,2} &= \overset{1.ª \text{ posição}}{\overbrace{(8)}} \times \overset{2.ª \text{ posição}}{\overbrace{(8-1)}} = \\ &= 8 \times (8 - 1) = \\ &= 8 \times 7 = 56 \text{ possibilidades} \end{aligned}$$

Outro exemplo de Arranjo Simples encontra-se na 1.ª proposta do 4.º problema (item 15.4) visando o cálculo do número possível de senhas a serem formadas. Considerando $\underline{n} = 10$ (10 algarismos) e $\underline{m} = 4$ (4 dígitos ‘posições’ da senha), através da expressão (6.) calcula-se o número de senhas formadas nesta proposta.

¹⁸ $A_{n,m}$ – ‘lê-se Arranjo de n elementos tomados m a m ’.

Observe abaixo:

$$A_{n,m} = A_{10,4} = (n) \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times [n-(m-1)] =$$

$$= \left(\overset{1.ª \text{ posição}}{\overbrace{10}} \right) \times \left(\overset{2.ª \text{ posição}}{\overbrace{10-1}} \right) \times \left(\overset{3.ª \text{ posição}}{\overbrace{10-2}} \right) \times \left[\overset{m-ésima \text{ posição (4.ª)}}{\overbrace{10-(4-1)}} \right] =$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040 \text{ possíveis senhas}$$

No caso do Arranjo Com Repetição, o número de possibilidades não diminui de uma posição a outra já que o elemento considerado na 1.ª posição pode ser repetido na 2.ª posição, e assim por diante. A expressão seguinte permite calcular o número de Arranjos Com Repetição $[(AR)_{n,m}]$ para n elementos arranjados m a m não necessariamente distintos:

$$(AR)_{n,m} = \underbrace{\overset{1.ª \text{ posição}}{\overbrace{n}} \times \overset{2.ª \text{ posição}}{\overbrace{n}} \times \overset{3.ª \text{ posição}}{\overbrace{n}} \times \dots \times \overset{m-ésima \text{ posição (última)}}{\overbrace{n}}}}_{m \text{ fatores}} = n^m \quad (7.)$$

, onde n representa as possibilidades em cada uma das posições a serem ‘ocupadas’.

Aplicando tal expressão (7.) é possível obter o número de senhas a serem formadas na 2.ª proposta (problema 4 – item 15.4):

$$(AR)_{n,m} = (AR)_{10,4} = \underbrace{\overset{1.ª \text{ posição}}{\overbrace{n}} \times \overset{2.ª \text{ posição}}{\overbrace{n}} \times \overset{3.ª \text{ posição}}{\overbrace{n}} \times \overset{m-ésima \text{ posição (4.ª)}}{\overbrace{n}}}}_{m \text{ fatores (4 vezes)}} =$$

$$= 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10000 \text{ possíveis senhas}$$

, onde n indica os 10 elementos (algarismos) e m representa as 4 posições (dígitos) formados de algarismos não necessariamente distintos.

17.2.3 Combinação simples

Até o momento a **ordem** dos elementos permutados e arranjados foi importante para diferenciar os agrupamentos ordenados. Assim, o anagrama COR diferiu de CRO, pois a ordem dos elementos (letras) deste segundo sofreu alteração quando comparado ao primeiro. No entanto, no caso da Combinação Simples a **ordem** dos elementos combinados não importa. Exemplificando, no 8.º problema (item 15.4) discutiu-se que as duplas Beto-Carla $\{\underline{B}, \underline{C}\}$ e Carla-Beto $\{\underline{C}, \underline{B}\}$ eram as mesmas, já que a ordem dos alunos não implicou em duplas diferentes.

Intuitivamente, o conceito de Combinação Simples associa-se à noção de escolher subconjuntos. No referido exemplo, a partir do conjunto dos alunos selecionados pela professora Sueli {Beto (B), Carla (C), Danilo (D), Eduarda (E)} formaram-se 6 possíveis subconjuntos (duplas):

$$\{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}$$

Assim, define-se Combinação Simples como sendo o número de subconjuntos com exatamente m elementos, no qual os subconjuntos escolhidos advêm de n elementos de um conjunto tomados/arranjados m a m . Como a **ordem** dos elementos não importa já que se formam subconjuntos, o cálculo das Combinações Simples pode ser representado nas seguintes etapas:

1.ª – Calculam-se os n elementos do conjunto arranjados m a m , recaindo na expressão (6.):

$$A_{n,m} = \underbrace{\left(\overset{1.ª \text{ posição}}{\overbrace{n}} \right) \times \left(\overset{2.ª \text{ posição}}{\overbrace{n-1}} \right) \times \left(\overset{3.ª \text{ posição}}{\overbrace{n-2}} \right) \times \dots \times \left[\overset{m-ésima \text{ posição (última)}}{\overbrace{n-(m-1)}} \right]}_{m \text{ fatores}}$$

No caso do exemplo, para os 4 alunos arranjados 2 a 2 temos:

$$A_{n,m} = A_{4,2} = (n) \times (n-1) = \left(\overset{1.ª \text{ posição "da dupla"}}{\overbrace{4}} \right) \times \left(\overset{2.ª \text{ posição "da dupla"}}{\overbrace{4-1}} \right) = 4 \times 3 = 12$$

2.ª – Calculam-se as permutações possíveis de serem formadas com os m elementos do subconjunto. Tal cálculo determina o múltiplo de subconjuntos que irá se repetir. Por meio da expressão (1.) é possível realizar tal cálculo:

$$P_m = m \times (m-1) \times (m-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

No referido exemplo, permutam-se os 2 elementos (alunos) que formam os subconjuntos (duplas):

$$P_m = P_2 = m \times (m-1) = (2) \times (2-1) = 2 \times 1 = 2$$

3.ª – Para calcular o total de Combinações Simples $(C_{n,m})$, divide-se o total dos n elementos arranjados m a m pelo total das permutações formadas com os m elementos do subconjunto:

$$C_{n,m} = \frac{A_{n,m}}{P_m} = \frac{\underbrace{\left(\overset{1.ª \text{ posição}}{\overbrace{n}} \right) \times \left(\overset{2.ª \text{ posição}}{\overbrace{n-1}} \right) \times \left(\overset{3.ª \text{ posição}}{\overbrace{n-2}} \right) \times \dots \times \left[\overset{m-ésima \text{ posição (última)}}{\overbrace{n-(m-1)}} \right]}_{m \text{ fatores}}}{m \times (m-1) \times (m-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} \quad (8.)$$

Ao realizar tal divisão excluem-se os subconjuntos repetidos, no caso do exemplo as duplas repetidas. Aplicando tal expressão (8.) neste exemplo temos:

$$C_{4,2} = \frac{A_{4,2}}{P_2} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = \frac{12}{2} = 6 \text{ possíveis duplas}$$

A partir dos 3 tipos de agrupamentos (Arranjo, Combinação e Permutação) percebe-se que a solução da maioria dos problemas envolvendo a Combinatória depende da natureza dos mesmos, ou seja, será necessário analisar quando a ordem dos elementos importa ou não.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Para a apresentação/explicação das expressões matemáticas utilizadas na/para o cálculo dos diferentes tipos de agrupamento combinatório (permutação, arranjo e combinação), o pesquisador-autor recorreu às ‘situações problema’ já resolvidas pelas licenciandas. Segundo elas, a utilização desses problemas (exemplificados) mostrou-se importante ao ‘início’ da compreensão das expressões matemáticas e à diferenciação entre os tipos de agrupamentos. Como tarefa ‘para casa’, solicitou-se a resolução de quatro ‘desafios para casa’ envolvendo alguns problemas de Combinatória.

Quadro 65 – Síntese do 18.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Leitura/discussão de texto teórico.	1 – Uma possível relação entre Estatística, Combinatória e Probabilidade.
2 – Desafio para casa <u>E</u>	2 – Referente às situações problemas de Combinatória <u>E</u>
3 – Leitura/discussão de texto teórico.	3 – Referente aos referidos problemas (item 2).
4 – Leitura/discussão de texto teórico <u>E</u>	4 – Algumas considerações sobre a Probabilidade <u>E</u>
5 – Situação problema.	5 – Referentes ao assunto anterior (4).
6 – História de ensino simulada <u>E</u>	6 – Referente à Probabilidade Frequentista <u>E</u>
7 – Situação problema.	7 – Referente ao assunto anterior (6).
8 – Situação problema.	8 – Referente à Probabilidade Clássica.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice V).

No 18.º encontro – num primeiro momento – o pesquisador-autor sintetizou os assuntos abordados nos cinco últimos encontros para as licenciandas P-1 e P-9 pelo fato das mesmas terem faltado. Além disso, colocou-se à disposição para discutir possíveis dúvidas provenientes dos textos e problemas (em atraso) a serem lidos/resolvidos. Em continuidade, realizou-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ evidenciando uma possível relação entre Estatística, Combinatória e Probabilidade. Esse texto decorreu de uma ‘situação problema’ já solucionada pelas participantes no 13.º encontro quando se pretendeu identificar as dificuldades acerca da Combinatória e da Probabilidade. Observe-o no quadro seguinte:

Quadro 66 – Relação entre Estatística, Combinatória e Probabilidade: um exemplo.

17.3 Uma possível relação entre Combinatória, Estatística e Probabilidade

Como já salientado, a Combinatória, a Estatística e a Probabilidade constituem o bloco denominado

‘Tratamento da Informação’. Além das especificidades de cada uma, faz-se possível o estabelecimento de relações entre as mesmas. No desafio 5 (item 13.3.1), por exemplo, antes de calcular a probabilidade de não sair soma 5 nas faces de dois dados perfeitos lançados simultaneamente, foi necessário denotar os 36 pares provenientes de tal lançamento. Assim, para solucionar um problema pertencente à Probabilidade utilizou-se da Combinatória e da Estatística.

Para o cálculo do número dos possíveis pares a serem formados com as faces dos dois dados lançados simultaneamente, recorre-se ao Princípio Fundamental da Contagem (Combinatória). A partir desse princípio temos:

$$N^{\circ} (\text{pares possíveis}) = \overset{\text{possibilidades do 1}^{\circ} \text{ dado}}{\widehat{6}} \times \overset{\text{possibilidades do 2}^{\circ} \text{ dado}}{\widehat{6}} = 36$$

, sendo que em cada lançamento de cada dado há 6 possibilidades de saída: {(FACE 1) ou (FACE 2) ou (FACE 3) ou (FACE 4) ou (FACE 5) ou (FACE 6)}.

Além de calcular o total de possíveis pares foi preciso obtê-los para saber, do total dos pares, quais não possuíam soma 5. Para a construção de tais pares utilizou-se da seguinte representação retangular por meio de uma Tabela (Estatística):

2.º DADO (lançado)	6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
	5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
	4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
	3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
	2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
	1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
Face		1	2	3	4	5	6
1.º DADO (lançado)							

A obtenção de tais pares também poderia advir do Diagrama de Árvore, ferramenta essa importante à Combinatória.

Por fim, sabendo que o total de pares provenientes do lançamento de dois dados simultâneos é 36 e o total de pares cuja soma não seja 5 é 32, calcula-se a Probabilidade por meio da seguinte divisão (razão):

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{número de pares cuja soma não é 5}}{\text{número total de pares}} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9} \approx 0,89$$

O valor encontrado ($\approx 0,89$) indica que há aproximadamente 89% de chance de não sair soma 5 a partir do lançamento simultâneo de dois dados perfeitos.

Fonte – Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Aproveitando a discussão acerca da Probabilidade, fez-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ sobre os conceitos de evento aleatório e espaço amostral, sendo solicitada uma ‘situação problema’ relacionada a tais assuntos. Observe, adiante, o referido texto:

Quadro 67 – Texto: Algumas considerações sobre a Probabilidade.

17.4 Algumas considerações sobre a Probabilidade

A Probabilidade representa uma das áreas da Matemática que “cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.” (DANTE, 2004, p. 379). Entende-se por experimentos aleatórios os fenômenos produzidos pelo homem, como por exemplo, o lançamento simultâneo de dois dados perfeitos – denotado no item anterior. Nos fenômenos aleatórios os resultados não são previsíveis, ou seja, não é possível determinar ‘*com certeza*’ o resultado a ser obtido.

Para calcular a Probabilidade, isto é, a chance de ocorrência de determinado **Evento Aleatório**, utiliza-se a seguinte razão:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \quad (9.)$$

, onde:

A representa o **Evento Aleatório**, ou seja, o conjunto dos elementos dos quais se espera a ocorrência;

Ω (Lê-se ‘Ômega’) indica o **Espaço Amostral**, isto é, o conjunto de todos os resultados possíveis advindos de um experimento ou fenômeno aleatório.

No exemplo utilizado anteriormente, o Evento Aleatório – não ocorrência de soma 5 – é constituído pelos seguintes pares:

A = {(1,6), (1,5), (1,3), (1, 2), (1, 1), (2, 6), (2, 5), (2, 4), (2, 2), (2, 1), (3, 6), (3, 5), (3, 4), (3, 3), (3, 1), (4, 6), (4, 5), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (5, 6), (5, 5), (5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1), (6, 6), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1)},

totalizando $n(A) = 32$.

Já o Espaço Amostral é composto por todos os possíveis pares advindos do experimento aleatório – lançamento simultâneo de dois dados perfeitos. Observe-o:

$\Omega = \{(1,6), (1,5), (1,4), (1,3), (1,2), (1,1), (2,6), (2,5), (2,4), (2,3), (2,2), (2,1), (3,6), (3,5), (3,4), (3,3), (3,2), (3,1), (4,6), (4,5), (4,4), (4,3), (4,2), (4,1), (5,6), (5,5), (5,4), (5,3), (5,2), (5,1), (6,6), (6,5), (6,4), (6,3), (6,2), (6,1)\}$, totalizando $n(\Omega) = 36$.

Fonte – Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice V).

Após o compartilhamento das resoluções dos ‘desafios para casa’ elaboradas pelas licenciandas (tarefa do encontro anterior), deu-se início às atividades propostas para o presente encontro. Assim, fez-se a leitura/discussão do texto ‘movimento de retomada’ no qual as resoluções – há pouco compartilhadas – foram confrontadas com as elaboradas pelo pesquisador-autor. O referido texto apresenta-se a seguir:

Quadro 68 – Texto: Retomando os ‘desafios para casa’ envolvendo Análise Combinatória.

18.1 Retomando os ‘desafios para casa’ envolvendo Análise Combinatória

No encontro anterior foi solicitada a solução de quatro desafios (situações problemas) envolvendo a Combinatória. Observe as soluções comentadas de tais desafios a seguir:

DESAFIO (1): As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Quantas placas podem ser criadas com as letras **A, B e C** e os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, podendo repetir a letra e não podendo repetir o algarismo?

Solução: As placas a serem formadas possuem a seguinte ‘configuração’:

1ª Letra	2ª Letra	3ª Letra	1º Algarismo	2º Algarismo	3º Algarismo	4º Algarismo
----------	----------	----------	--------------	--------------	--------------	--------------

$\underbrace{\hspace{15em}}_{7 \text{ DÍGITOS}}$

As três primeiras posições são formadas de 3 letras. Como as letras disponíveis são 3 (A, B, C) e podem ser repetidas, pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$\underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3 \text{ DÍGITOS}} = 27 \text{ possibilidades para as 3 letras}$$

As quatro ‘últimas’ posições são formadas de 4 algarismos. Como os 7 algarismos disponíveis (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) não podem ser repetidos temos um Arranjo Simples ($A_{7,4}$):

$$A_{7,4} = \underbrace{7 \times 6 \times 5 \times 4}_{4 \text{ DÍGITOS}} = 840 \text{ possibilidades para os 7 algarismos}$$

Para calcular o total de placas possíveis multiplicam-se os dois resultados encontrados:

$$\text{Total de placas} = 27 \times 840 = 22680$$

R: Podem ser criadas 22680 placas diferentes.

DESAFIO (2): A diretoria de um clube é composta por 12 membros que podem ocupar a função de presidente, secretário ou tesoureiro. De quantas maneiras pode-se formar, com os 12 membros, chapas que contenham presidente, secretário e tesoureiro?

Solução: As chapas a serem formadas devem possuir presidente, secretário e tesoureiro. Como a ordem neste caso é importante, os 12 membros devem ser tomados/arranjados 3 a 3. Para o cálculo das chapas possíveis utiliza-se a expressão abaixo:

$$A_{12,3} = \underbrace{12 \times 11 \times 10}_{3 \text{ FUNÇÕES—Presidente, Secretário e Tesoureiro}} = 1320 \text{ possibilidades}$$

R: É possível formar 1320 chapas diferentes.

DESAFIO (3): Seis amigos foram ao parque de diversões ‘andar’ de montanha russa. Eles pretendem ir no mesmo carrinho, no entanto, no banco da frente – que ‘produz’ maior emoção – só cabem três pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem escolher o trio que irá no banco da frente?

Solução: Consideremos o conjunto dos amigos abaixo:

– Amigos = {Antônio (**A**), Beto (**B**), Camila (**C**), Daniele (**D**), Eduarda (**E**), Fábio (**F**)}

No banco da frente do carrinho da montanha russa só cabem três pessoas, assim, devem ser

formados trios entre os 6 amigos. Neste caso a ordem a ser ocupada por cada amigo em cada trio é irrelevante, pois o trio Antônio-Beto-Camila {A, B, C} é o mesmo que Beto-Antônio-Camila {B, A, C}. Desse modo faz-se necessário combinar os 6 amigos 3 a 3.

Para o cálculo das Combinações Simples $C_{6,3}$ realizam-se as seguintes etapas:

1.^a – Calculam-se os 6 amigos do conjunto arranjados 3 a 3:

$$A_{6,3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{\substack{3 \text{ OCUPAÇÕES NO BANCO} \\ \text{DA FRENTE DO CARRINHO}}} = 120 \text{ possibilidades de trios}$$

2.^a – Calculam-se as permutações possíveis de serem formadas com os 3 amigos do subconjunto (trio). Tal cálculo determina o múltiplo de subconjuntos (trios) que irão se repetir.

$$P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

3.^a – Para calcular o total de Combinações Simples ($C_{6,3}$), divide-se o total dos 6 amigos arranjados 3 a 3 pelo total das permutações formadas com os 3 elementos do subconjunto (trio):

$$C_{6,3} = \frac{A_{6,3}}{P_3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = \frac{120}{6} = 20 \text{ possíveis trios}$$

R: Há 20 maneiras diferentes de escolher os trios que irão no banco da frente do carrinho da montanha russa.

DESAFIO (4): Quantos são os anagramas possíveis da palavra PAPAGAIO?

Solução: Para o cálculo dos anagramas possíveis da palavra PAPAGAIO basta aplicar a expressão da Permutação Com Repetição já que as letras ‘A’ e ‘P’ se repetem.

Considerando $n = 8$ como representando o número de letras da palavra PAPAGAIO, $\alpha = 3$ indicando as 3 letras ‘A’ repetidas e $\beta = 2$ referindo-se às 2 letras ‘P’ repetidas, temos:

$$P_n^{\alpha,\beta} = P_8^{3,2} = \frac{8!}{3! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{6720}{2} = 3360 \text{ possíveis anagramas}$$

R: A partir da palavra PAPAGAIO é possível formar 3360 diferentes anagramas.

Fonte – Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Em seguida, realizou-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ referente à Probabilidade Clássica (Laplaciana). Neste momento, abordaram-se – por meio de exemplos e de duas ‘situações problema’ – os conceitos de espaço amostral (equiprovável), evento aleatório (certo, provável e impossível) e ponto amostral. Concluída a socialização das resoluções desses problemas, as estudantes leram uma ‘história de ensino simulada’ a respeito da Probabilidade Frequentista e resolveram ‘situações problema’ correlatas a tal história.

Em continuidade, propuseram-se quatro ‘situações problema’ versando sobre a Probabilidade Clássica. As soluções elaboradas pelas licenciandas advieram de um contexto de ajuda mútua com mediações do pesquisador-autor. Por fim – a pedido das licenciandas – os ‘momentos de síntese’ referentes a este encontro e o anterior (17.º) foram deixados como tarefa ‘para casa’. Solicitou-se, também, um ‘desafio para casa’ (final) que consistiu na elaboração de uma situação de ensino visando à abordagem de um (ou mais) conteúdo(s) pertencente(s) ao bloco ‘Tratamento da Informação’ nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para tanto, dever-se-ia fundamentar a referida situação na Epistemologia Genética. Em comum acordo, decidiu-se que a elaboração desse desafio (final) seria em trios.

Quadro 69 – Síntese do 19.º encontro.

ATIVIDADE(S)	ASSUNTO(S)
1 – Momento de síntese.	1 – Sínteses elaboradas referentes aos encontros anteriores (17.º e 18.º)
2 – Movimento de retomada.	2 – Referente às situações problema envolvendo a Probabilidade Clássica.
3 – Leitura/discussão de texto teórico.	3 – Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental.
4 – Exemplo de ensino.	4 – Atividades para o ensino de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental.
5 – Leitura/discussão de texto teórico.	5 – Referente ao processo de tomada de consciência (Epistemologia Genética).

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice W).

No 19.º encontro, durante a socialização dos ‘momentos de síntese’, a P-8 questionou a possibilidade de continuidade do grupo no ano seguinte; fato esse que se constituiu em um possível indicativo da pertinência do GE enquanto ‘espaço formativo’. Após confrontar as soluções sistematizadas apresentadas no ‘movimento de retomada’ com as soluções construídas pelas participantes (advindas das ‘situações problema’ envolvendo a Probabilidade Clássica), realizou-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ sobre o ensino de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nessa atividade discutiram-se questões didático-metodológicas, curriculares e psicológicas à abordagem da Probabilidade no referido nível de escolaridade. O referido texto apresenta-se a seguir:

Quadro 70 – Texto: Ensino de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

19.2 Ensino de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental o professor deve oportunizar ao aluno a construção de algumas noções pertencentes à Probabilidade. Conforme o PCN (1.ª a 4.ª série):

Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1997, p. 40)

Além de destacar a principal finalidade do ensino de Probabilidade nos anos iniciais, tal documento pontua os seguintes conteúdos conceituais e procedimentais a serem construídos pelo estudante no 2.º ciclo (3.ª e 4.ª séries):

- Interpretação de dados apresentados por meio de tabelas e gráficos, para identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos.
- Exploração da idéia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de “sorte”.
- Utilização de informações dadas para avaliar probabilidades. (p. 61)

Visando propiciar a construção dos referidos conteúdos, o professor deve organizar situações de ensino pautadas em problemas/desafios ‘próximas’ à realidade do aluno, ou seja, possíveis de serem assimiladas/acomodadas pelo aprendiz. Devido ao ‘momento psicológico’ vivenciado pelo estudante nesta etapa da escolaridade, a abordagem das noções probabilísticas dar-se-á mais ‘intensamente’ no 4.º e 5.º ano. No entanto, inúmeras situações envolvendo o previsível e o imprevisível podem (devem) ser gradativamente

trabalhadas desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, bem como na Educação Infantil.

Segundo Piaget e Inhelder (1951), antes dos 7-8 anos, aproximadamente, a criança ainda não consegue distinguir o possível do necessário, donde o pensamento oscila entre o previsível e o imprevisível. Essa não diferenciação entre o possível e o necessário deve-se à impossibilidade de compreender a ideia do acaso. Ao serem questionadas sobre o porquê da saída de determinada face de um dado lançado aleatoriamente, a criança desse estágio (pré-operatório) justificará valendo-se do seu desejo, capricho ou fantasia. Com o início das operações ‘concretas’ (7-8 anos a 11-12 anos, aproximadamente), o sujeito consegue estabelecer certos tipos de comparações entre as probabilidades de determinados eventos. Isso se deve, pois o indivíduo diferencia as operações (associadas ao domínio do que é dedutível) do acaso (associado ao domínio do que é imprevisível).

Complementando a discussão a respeito do ensino de Probabilidade nos anos iniciais, Rodrigues (2006) pontua:

Quanto a estudos relativos a noções de Probabilidade especificamente nas séries iniciais da escolarização, foi possível identificar os seguintes objetivos: a) compreender noções básicas sobre resultados de acontecimentos (certo, possível, mais provável, mais freqüente); b) adquirir um vocabulário básico para falar a respeito desse conceito matemático e começar a situar as probabilidades de acontecimentos numa escala de 0 a 1; c) identificar características de acontecimentos previsíveis ou aleatórios a partir de situação-problema; d) contribuir para desenvolver a capacidade crítica e autonomia do aluno para que exerça plenamente a cidadania e; e) contribuir para a construção de um pensamento não determinístico. (p. 9)

Nesse nível de ensino, bem como nos demais, torna-se importante o estabelecimento de relações envolvendo a Probabilidade, a Combinatória e a Estatística. Além de tais áreas, a construção da Probabilidade necessita da construção das estruturas multiplicativas já que a ideia de Probabilidade envolve as noções de proporção, razão (parte/todo – fração).

Por fim, ao propiciar a construção das noções iniciais pertencentes à Probabilidade (e à Combinatória e Estatística) o docente colaborará à constituição de um pensamento matemático não determinístico ‘alicerçado’ na ‘filosofia do azar’. Pensamento esse importante à formação da criticidade que possibilite ao aluno uma ‘maior’ compreensão da realidade circundante.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

As licenciandas acharam pertinente (e necessária) a integração – ressaltada no texto – entre as diversas áreas da Matemática no momento do ensino; entretanto, perceberam o quão difícil torna-se esta tarefa ao professor.

Ao decorrer da análise de ‘exemplos de ensino’ à abordagem da Probabilidade nos anos iniciais, as licenciandas (novamente) tiveram dificuldade em identificar o ano de escolaridade. Observe um dos ‘exemplos de ensino’:

Quadro 71 – Exemplo de ensino: ensino de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

1. Identifique nas seguintes atividades o conteúdo matemático abordado e o ano a qual se destinam:

ATIVIDADE 1: AS POSSIBILIDADES DE “TIRAR” OS ANIMAIS DO ZOOLÓGICO

Rogério, Eduardo e Pedro fizeram um dado de cartolina e colaram em cada uma das faces a figura dos animais que eles viram no zoológico. Observe as figuras abaixo:

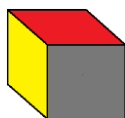


Figura 1

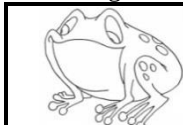
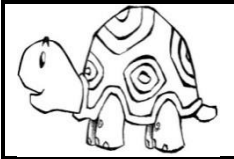


Figura 2



Figura 3

		
Figura 4	Figura 5	Figura 6
1. Se Rogério jogar o dado uma vez, qual a chance de sair a Figura 5? Explique como você pensou para responder essa questão. R: _____ 2. Se Eduardo jogar o dado mais uma vez, qual a chance de sair a Figura 3? R: _____ 3. Pedro escolheu a Figura 4 já que ele gosta muito de tartaruga. Se jogar o dado uma vez, qual a possibilidade de sair essa figura? Explique como você pensou para responder essa questão. R: _____ 4. Rogério escolheu as Figuras 1 e 3. Se jogar o dado uma vez, qual a possibilidade de sair uma dessas figuras? Justifique sua resposta. R: _____ 5. Eduardo escolheu a metade das figuras. Se jogar o dado uma vez, qual a possibilidade de sair uma dessas figuras? Explique como você pensou para responder essa questão. R: _____		
Conteúdo abordado: _____		Ano: _____

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice C).

Antes da 'leitura/discussão de texto teórico' acerca do processo de tomada de consciência, o pesquisador-autor questionou as licenciandas sobre o que entendiam por esse processo. Em tal discussão, a cada parágrafo, o pesquisador-autor apresentou exemplos no intuito de auxiliá-las ao 'início' do entendimento a respeito da tomada de consciência. Devido ao 'término' do tempo, solicitaram-se como tarefa: a) a elaboração de 'situação problema' 'relacionando' o processo de tomada de consciência à futura prática pedagógica de Matemática; b) a (re)leitura do referido 'texto teórico'; c) o registro do 'momento de síntese'.

Quadro 72 – Síntese do 20.º encontro.

	ASSUNTO(S)
1 – Leitura/discussão de texto teórico <u>E</u> 2 – Situação problema.	1 – Referente ao processo de tomada de consciência (Epistemologia Genética) <u>E</u> 2 – Referente ao item anterior (2).
3 – Momento de síntese.	3 – Sínteses elaboradas acerca do encontro anterior.
4 – Desafio para casa.	4 – Situação de ensino: abordagem de algum conteúdo do Tratamento da Informação nos anos iniciais do Ensino Fundamental.
5 – Leitura/discussão de texto teórico.	5 – (Re)significando os saberes da experiência acerca da Matemática.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2012 (ver Apêndice X).

No 20.º e último encontro fez-se, novamente, a 'leitura/discussão de texto teórico' sobre o processo de tomada de consciência e a socialização das respostas acerca da 'situação problema' (requerida como tarefa). Neste momento, o pesquisador-autor ressaltou a

responsabilidade do docente dos anos iniciais pelo fato do mesmo ‘lidar’ com alunos em transição, isto é, do estágio pré-operatório ao operatório concreto. Tal comentário incidiu na importância da Formação de Professores, sendo citada – a esse respeito – a preocupação de alguns países europeus ao exigir uma especialização (do tipo mestrado) que habilite o professor a atuar, exclusivamente, em determinada área do conhecimento nos anos iniciais. Em seguida, realizaram-se as leituras das sínteses referentes ao encontro anterior.

Após a aplicação do Questionário Final (ver Apêndice D) e da Escala de Atitudes (ver Anexo A), as licenciandas compartilharam o ‘desafio para casa’ final (solicitado no 18.º encontro) e ressaltaram a imprescindibilidade do grupo para a elaboração dos exemplos de ensino visando à abordagem de conteúdos pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’. Durante o compartilhamento, o pesquisador-autor realizou alguns questionamentos que julgou necessário a respeito das situações elaboradas pelas licenciandas (em trio). Por fim, realizou-se a ‘leitura/discussão de texto teórico’ no qual foram abordados os seguintes tópicos: a) os assuntos discutidos ao decorrer dos encontros; b) o objetivo do GE à (re)significação dos saberes da experiência pré-profissional; c) o papel do professor e do aluno numa concepção epistemológica construtivista (piagetiana); d) uma ‘nova’ compreensão acerca da Matemática.

Findada as discussões/encerramento das atividades propostas nesse encontro, as licenciandas e o pesquisador-autor realizaram uma confraternização em comemoração ao GE desenvolvido/construído entre ambos ao longo dos últimos meses. O pesquisador-autor, após agradecimento devido à efetiva participação/ação das licenciandas durante o GE, colocou-se à disposição das licenciandas.

Após a apresentação da síntese de cada um dos encontros que compuseram o GE, na subseção seguinte apresentam-se algumas dificuldades enfrentadas durante os referidos encontros.

5.4 As dificuldades provenientes da realização do Grupo de Estudo

Algumas dificuldades foram identificadas durante a realização do GE. As mesmas apresentam-se nos tópicos abaixo:

a) As faltas (ausências) de algumas licenciandas em vários encontros (rever tabela 2). Tais ausências dificultaram a abordagem das atividades propostas, ainda mais quando a mesma licencianda se ausentava de encontros seguidos. Em alguns encontros, o pesquisador-autor – na tentativa de minimizar tais ‘perdas’ – disponibilizava um tempo (no início do encontro) para que as licenciandas realizassem as atividades ainda não realizadas; no entanto, essa ação

do pesquisador-autor acabava por prejudicar o desenvolvimento/a continuidade das atividades propostos para o presente encontro.

b) A não realização de alguns ‘desafios para casa’ e ‘momentos de síntese’ solicitados pelo pesquisador-autor. Compreende-se os outros compromissos/afazeres das licenciandas e que, provavelmente, ocasionaram na não realização das tarefas. No entanto, essa não realização acabou prejudicando o desenvolvimento das atividades propostas em alguns encontros.

c) As discussões de outros temas não planejados para determinado encontro (por exemplo, sobre a prática docente nos anos iniciais, a Formação de Professores, a Formação Inicial no curso de Pedagogia, a questão da indisciplina em sala de aula, etc.) também prejudicaram o desenvolvimento das atividades propostas. No entanto, a discussão desses outros temas fizeram-se importantes por representarem anseios/dúvidas das licenciandas acerca da futura profissão. Além disso, a oportunidade de/em discutir outros temas tornou-se um indício da confiança estabelecida entre as licenciandas e o pesquisador-autor; confiança essa necessária ao estabelecimento de relações colaborativas no/durante o GE.

d) Alguns textos teóricos (elaborados pelo pesquisador-autor) como, por exemplo, o referente à teoria da assimilação – proposto no 11.º encontro – foi de difícil compreensão pelas licenciandas. A não exemplificação dos conceitos de assimilação e acomodação (no referido texto) foi um dos motivos para essa dificuldade, além do fato da utilização, no texto, de citações diretas ‘retiradas’ das obras de Piaget. Mediante tal dificuldade, o pesquisador-autor apresentou algumas exemplificações durante uma discussão/explicação estabelecida para com as licenciandas.

e) A abordagem de várias atividades em um único encontro. O anseio e a expectativa do pesquisador-autor em colaborar na/com a formação das licenciandas acabou provocando, em alguns encontros, uma ‘sobrecarga’ de atividades para as licenciandas. No entanto, ao perceber tal sobrecarga – aliás, incoerente com a concepção epistemológica adotada – o pesquisador-autor acabou retomando-as no encontro seguinte.

EM SÍNTESE, o GE – enquanto um ‘espaço formativo’ – visou oportunizar às licenciandas algumas (re)significações acerca de alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem). As atividades propostas e a dinâmica estabelecida (os diversos papéis/ações realizados) durante os encontros pretenderam, por parte do pesquisador-autor, propiciar às licenciandas uma

‘nova’ experiência acerca do ‘fazer Matemática’, fazer esse orientado na/pela concepção epistemológica construtivista (piagetiana).

Na próxima seção apresentam-se os dois estudos de casos que permitirão identificar alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática e suas possíveis (re)significações; (re)significações essas advindas da participação/ação das duas licenciandas no GE. A partir disso, poder-se-á investigar os limites e as possibilidades do GE à referida (re)significação e, por conseguinte, responder ao problema de pesquisa da presente investigação.

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Nesta seção apresentam-se os dois estudos de caso referentes às possíveis (re)significações de alguns saberes da experiência pré-profissional (em relação à Matemática) de duas licenciandas em Pedagogia (P-2 e P-4). As (re)significações – isto é, ‘novas’ interpretações/entendimentos/assimilações acerca de alguns conhecimentos matemáticos, de algumas crenças e concepções acerca da Matemática (e seu processo de ensino e aprendizagem) – não construíram-se ‘rapidamente’. Tais (re)significações desenvolveram-se – ao decorrer de um determinado período – por meio das diversas atividades realizadas pelas licenciandas no GE. Logo, a explicação de tais (re)significações ‘encontra-se’ na ação das licenciandas ao interagirem com o meio (GE), num ‘movimento’ *continuum*. Apenas opta-se por realizar uma análise comparativa – do tipo ‘antes’ e ‘após’ – para a identificação das possíveis (re)significações por uma questão de sistematização/apresentação/análise dos dados. Ao se identificar as referidas (re)significações (construídas pelas duas licenciandas) poder-se-á, assim, identificar os limites e as possibilidades do GE às (re)significações.

No entanto, antes de apresentar o ‘antes’ e as possíveis (re)significações ‘após’ a participação/ação das licenciandas no GE, reconstituir-se-ão algumas experiências advindas das aulas de Matemática frequentadas pelas participantes P-2 e P-4 durante a Educação Básica. Experiências essas que se tornaram o ‘espaço’/meio no qual as licenciandas construíram os seus saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem).

6.1 O caso da P-2: ‘reconstituindo’ algumas lembranças do ensino, em particular

algumas ‘características’ das aulas de Matemática vivenciadas na Educação Básica

Uma primeira aproximação ao ensino vivenciado pela P-2 foi possível mediante a análise das respostas obtidas a algumas questões contidas no Questionário Inicial aplicado. Quando questionada sobre as ‘impressões’ acerca do significado de ESCOLA, (rever questão a.1, subseção 4.4.1.1), significado esse construído na/durante a Educação Básica, a P-2 respondeu o seguinte (considerando-se as duas etapas do Ensino Fundamental):

Ensino Fundamental (1.^a à 4.^a série): Estudo, Exercícios, Memorização, Decorar, Comportamento, Obediência.

Ensino Fundamental (5.^a à 8.^a série): Dificuldade, Memorização, Autoridade e Exercícios.

Ao utilizar as palavras “memorização” e “decorar” para representar o significado de ESCOLA, a P-2 deu indícios de ter vivenciado um Ensino Fundamental cuja memorização/decoração fez-se presente. A memorização em si não é prejudicial, tendo em vista a necessidade de alguns automatismos na/durante a aprendizagem de determinado procedimento matemático. O automatismo referente aos resultados da tabuada, por exemplo, torna-se importante para a realização eficiente do algoritmo da multiplicação e da divisão. O problema ocorre quando tal memorização é desprovida de significado/compreensão, ou seja, quando o aluno apenas ‘aplica’ uma expressão/algoritmo matemático sem compreender os porquês de tal utilização e do conceito matemático ‘ali’ representado, ou seja, sem ‘relacionar’ o significante ao significado numa dada situação (VERGNAUD, 1996a).

Adiante, a P-2 respondeu – rever questão a.2, subseção 4.4.1.1 – ter vivenciado uma influência positiva, na disciplina de Matemática, durante a sua trajetória escolar. Observe a sua resposta:

Apesar da memorização bastante presente e minhas dificuldades com o conteúdo, era uma professora que sempre incentivava, não frisava os erros.

Tal resposta indicou, novamente, a presença da memorização na/durante as aulas de Matemática desenvolvidas por uma de suas professoras. No entanto, “*apesar da memorização*”, o bom relacionamento estabelecido para com essa professora – que a “*incentivava*” e “*não frisava os erros*” – foi o fator responsável pela construção de uma influência positiva. A afetividade, conforme Piaget (1990), é importante pelo fato da mesma constituir a energética (o ‘combustível’) para a ação. Contudo, além de uma boa relação entre alunos e professor, em sala de aula o docente deve propor situações ‘*interessantes e necessárias*’ (PIAGET, 1998a, 1998b) que ‘exijam’, dos estudantes, a sua efetiva ação ao interagir com o meio. As “*dificuldades com o conteúdo*” – além de próprias/esperadas quando do processo de construção do conhecimento (matemático) – provavelmente decorreram da predominância da memorização (‘*bastante presente*’) em detrimento dessa efetiva ação da P-2 sobre as atividades propostas. Priorizar a memorização pode ter sido um dos empecilhos à realização/ocorrência das abstrações reflexionantes (PIAGET et al., 1995), abstrações essas imprescindíveis ao processo de conceituação (e formalização) do conteúdo matemático via tomada de consciência (PIAGET et al., 1977).

Na questão a.3, do referido questionário (rever subseção 4.4.1.1), a P-2 assinalou o seguinte sobre as estratégias didático-metodológicas adotadas pela maioria dos seus ‘antigos’ professores de Matemática:

Quadro 73 – Estratégias didático-metodológicas adotadas pela maioria dos professores de Matemática da P-2.

ESTRATÉGIAS DIDÁTICO-METODOLÓGICAS	NUNCA OU QUASE NUNCA	DE VEZ EM QUANDO	SEMPRE
1. Exposição Oral feita pelo professor na lousa.			X
2. Agrupamento dos alunos para realização de atividades sugeridas pelo professor.		X	
3. Atividades individuais solicitadas pelo professor.			X
4. Aplicação de jogos envolvendo noções / conteúdos matemáticos.	X		
5. Troca de ideias entre alunos e professores.		X	
6. Troca de ideias entre alunos e alunos.	X		
7. Trabalho interdisciplinar, ou seja, a Matemática e outras áreas do conhecimento.	X	X	
8. Trabalho intradisciplinar, ou seja, a Matemática em outras áreas do conhecimento.	X		
9. Atividades envolvendo materiais concretos manipulativos.	X		
10. Confeção de algum material pelos alunos.		X	
11. Atividades lúdicas como: dramatizações, brincadeiras, entre outras.	X		
12. Uso de tecnologias (computador, internet, calculadora, projetor, etc.)		X	

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2011.

Mediante as alternativas assinaladas, pode-se inferir que a maioria das aulas de Matemática vivenciadas pela P-2 pautou-se na dupla “*exposição oral feita pelo professor na lousa*” x “*atividades individuais solicitadas pelo professor*”. A “*troca de ideias entre alunos e professor*” – troca essa necessária à possível descentração do pensamento e, por conseguinte, ao próprio desenvolvimento (PIAGET, 1998b) – de vez em quando ocorria. Nesse ponto cabe destacar que a exposição do conteúdo nunca foi desautorizada pelo construtivismo piagetiano, sendo a linguagem um importante instrumento ao/para o pensamento (BECKER, 2012; PIAGET, 2002; VERGNAUD, 1996a, 1996b). O problema ocorre quando o ensino reduz-se/principia-se na/pela exposição/transmissão, não permitindo ao aluno a sua efetiva ação sobre o objeto do conhecimento; ação essa que lhe possibilitará (mediante contínuas abstrações reflexionantes e num considerável período de tempo) compreender o conceito matemático representado em/pela linguagem formal.

Ainda em continuidade ao quadro anterior, faz-se possível supor que a não utilização de “*atividades envolvendo materiais concretos manipulativos*” pode ter sido um fator que dificultou o estabelecimento, pela P-2, de relações matemáticas via abstração pseudoempírica (PIAGET et al., 1995); relações essas necessárias aos contínuos reflexionamentos (diferenciações) e reflexões (integrações) imprescindíveis à construção dos conceitos

matemáticos. A “troca de ideias entre alunos e alunos” também quase nunca ocorreu. Esse fato contraria, por assim dizer, o defendido por Piaget (2002) acerca da importância da colaboração (entre iguais) e do trabalho em equipe (intercâmbio) à construção das operações, isto é, das ações interiorizadas tornadas reversíveis. Operações essas que – ao serem conceituadas via tomada de consciência (PIAGET et al., 1977) — poderão constituir-se (e com o auxílio da linguagem/simbolismos) em conceitos matemáticos formalizados.

Na questão a.4, rever subseção 4.4.1.1, a P-2 recordou-se de uma professora de Matemática que diferenciou-se da grande maioria dos seus ‘antigos’ professores no que diz respeito às estratégias didático-metodológicas utilizadas em sala de aula. Observe o respondido pela P-2:

Essa professora incentivava bastante a participação dos alunos, fazia questionamentos, nos fez montar as figuras geométricas e levava alguns jogos. Também quando chamava a lousa pedia para a sala ajudar, não focando os erros mas valorizando os acertos.

Ao fazer questionamentos, essa ‘antiga’ professora da P-2 – provavelmente – propiciou aos alunos um momento de/para pensar sobre o conteúdo matemático. Tais momentos contribuíram para a caracterização de uma aula de Matemática diferenciada na qual os estudantes tinham ‘vez’ e ‘voz’ para conversar/discutir sobre as resoluções das atividades abordadas. No quadro seguinte faz-se possível observar essa diferença quanto à adoção das estratégias didático-metodológicas da referida professora:

Quadro 74 – Estratégias didático-metodológicas adotadas por uma professora de Matemática da P-2.

ESTRATÉGIAS DIDÁTICO-METODOLÓGICAS	NUNCA OU QUASE NUNCA	DE VEZ EM QUANDO	SEMPRE
1. Exposição Oral feita pelo professor na lousa.			X
2. Agrupamento dos alunos para realização de atividades sugeridas pelo professor.		X	
3. Atividades individuais solicitadas pelo professor.		X	
4. Aplicação de jogos envolvendo noções / conteúdos matemáticos.		X	
5. Troca de ideias entre alunos e professores.			X
6. Troca de ideias entre alunos e alunos.		X	
7. Trabalho interdisciplinar, ou seja, a Matemática e outras áreas do conhecimento.			X
8. Trabalho intradisciplinar, ou seja, a Matemática em outras áreas do conhecimento.			X
9. Atividades envolvendo materiais concretos manipulativos.		X	
10. Confeção de algum material pelos			X

alunos.			
11. Atividades lúdicas como: dramatizações, brincadeiras, entre outras.		X	
12. Uso de tecnologias (computador, internet, calculadora, projetor, etc.)		X	

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2011.

Além da estratégia “*exposição oral feita pelo professor na lousa*”, outras estratégias (“*troca de ideias entre alunos e professor*”, “*trabalho interdisciplinar, ou seja, a Matemática e outras áreas do conhecimento*”, “*trabalho intradisciplinar, ou seja, a Matemática em outras áreas do conhecimento*” e “*confeção de algum material pelos alunos*”) também estiveram frequentemente presentes nas aulas de Matemática dessa ‘antiga’ professora da P-2. Tais estratégias diferenciadas vão de encontro ao proposto pelos documentos oficiais (BRASIL, 1997, 1998, 2018) no que tange à utilização de diversas estratégias a serem adotadas em sala de aula pelo professor. Dependendo do modo pelo qual essa ‘antiga’ professora ‘orientou’ a confecção de materiais pelos alunos, a mesma pode ter contribuído para que esses alunos estabelecessem algumas relações matemáticas via abstração pseudoempírica (PIAGET et al., 1995). Quando questionada, a P-2 disse se recordar, vagamente, de ter construído alguns sólidos geométricos durante as aulas da referida professora. Nesse ponto cabe ressaltar que a construção e a manipulação de objetos concretos são um ‘apoio’ ao estabelecimento (mental – via abstração reflexionante) das relações matemáticas (comparar, ordenar, associar, corresponder, etc.) necessárias à construção do conceito matemático. Ao contrário do propagado erroneamente no meio educacional, quando da apropriação superficial e difusa da Epistemologia Genética (CAETANO, 2009), a ‘simples’ manipulação – sem a devida intencionalidade/questionamento do professor para com o aluno – não auxiliará o aluno na construção do conceito matemático.

Além do Questionário Inicial, outros instrumentos foram utilizados durante o GE (rever subseção 4.4.2) no intuito de conhecer ‘ainda mais’ o ensino de Matemática vivenciado pela P-2 na Educação Básica. Na elaboração produzida, a partir da atividade “momento de síntese”, obteve-se a seguinte resposta da P-2 sobre a transmissão do conteúdo matemático como sendo algo exato:

Vivenciar a construção do conhecimento embasado em uma teoria e as trocas interpessoais tem sido bastante significativo e satisfatório, principalmente por poder compartilhar as diferentes maneiras de pensar e resolver uma situação dada e assim tenho tentado quebrar vários paradigmas dos meus anos escolares, principalmente o fato de muitos conteúdos terem sido transmitidos como algo exato e é dessa maneira que se faz como sendo uma maneira única. [Momento de síntese, 7.º Encontro]

Ao que tudo indica, as aulas de Matemática vivenciadas pela P-2, além de não terem sido pautadas na troca/compartilhamento de ideias – como indicado no quadro 73 – ocorreram em um meio (de ensino) caracterizado na/pela ‘transmissão’ da ciência Matemática como um ‘fazer único’, ou seja, um único caminho para se resolver determinado exercício (e/ou situação problema). Esse único caminho, conforme indicado pela P-2, se deu por meio da utilização do algoritmo convencional (as ‘fórmulas’). No entanto, tal concepção de que a Matemática ‘se faz’ por um único caminho vem sendo (re)significada graças “as trocas interpessoais” ocorridas no GE, cujas trocas “*tem sido bastante significativo e satisfatório, principalmente por poder compartilhar as diferentes maneiras de pensar e resolver uma situação dada*”. Esta autorreflexão da P-2 – advinda de uma progressiva tomada de consciência da importância do seu agir/pensar em intercâmbio com as demais licenciandas do GE – representou um indício dos benefícios do trabalho em equipe (grupo) e da colaboração (PIAGET, 2002) à construção/desenvolvimento.

Retomando a questão a respeito do uso do algoritmo convencional, a licencianda escreveu o seguinte em uma atividade ‘momento de síntese’:

Fiquei surpresa comigo mesma como me prendo às formulas, ficando evidente a solução dos desafios de Probabilidade que as resoluções podem ocorrer de diferentes maneiras, e que alguns problemas não possuem “fórmulas” para sua resolução. Fica evidente que é necessário efetuar um grande processo de (re)significação. [Momento de síntese, 19.º Encontro]

O trecho “*Fiquei surpresa*” sinaliza um indício de início de tomada de consciência da P-2 no que tange à resolução de desafios matemáticos, resolução essa até então limitada pelo uso das ‘fórmulas’. A utilizar a expressão “*como me prendo às fórmulas*”, a P-2 – mais uma vez – deu indícios de que as suas aulas de Matemática pautaram-se na utilização/aplicação de expressões matemáticas (o algoritmo convencional). O “*grande processo de (re)significação*” indicado refere-se à necessária (re)significação acerca do ‘fazer Matemática’, isto é, de que a resolução dos problemas pode/deve ocorrer por diferentes ‘caminhos’, sendo o algoritmo apenas mais um dentre esses ‘caminhos’. Aliás, o algoritmo – sendo um esquema (VERGNAUD, 1996a) – só ‘torna-se’ compreensível ao aluno quando a construção do conceito matemático – ‘representado’ no/pelo algoritmo – advém da resolução de uma diversidade (variedade) de situações ao decorrer de um determinado tempo (história). Além disso, a tal necessidade de (re)significação representa um indício da importância da Formação Inicial à reeducação/reflexão acerca dos próprios saberes da experiência pré-profissional, corroborando com o já salientado em diversas pesquisas (ARAMAN; SAMPAIO, 2013;

CARNEIRO, 2014, 2015; CAVALCANTE; SOARES, 2012; COSTA, 2013; COSTA; CURI, 2010; COSTA et al., 2017; DELGADO, 2003; LÓPEZ; ALSINA, 2016; NACARATO, 2010; NAGY-SILVA; PASSOS; CYRINO, 2010; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2013; SANTOS; GHEDIN, 2016; SILVA; PASSOS, 2016; SOARES, 2013) a respeito dessa necessária reeducação.

Por meio do instrumento ‘discussão de grupo’ utilizado no/durante o GE – (rever subseção 4.4.2) – uma fala da P-2 ‘confirmou’ o exposto até o momento, ou seja, de que as suas aulas de Matemática caracterizaram-se pela ‘aplicação’ do algoritmo (em extensas listas de exercícios). Tal resposta adveio do questionamento (feito pelo pesquisador-autor) sobre as experiência vividas nas aulas de Matemática:

103. Pesquisador/Participante: Ok! Uma influência negativa... alguém mais teve em Matemática?

104. P-2: *Então, eu estive pensando sobre a questão... Eu não diria que foram influências positivas e nem negativas o meu ensino. Embora não foi nada inovador e sim tradicional, mas era uma relação tranquila quanto aos questionamentos com a professora, ela retornava, ela explicava. Mas era aquela coisa muito... listas de exercícios, não tinha situação problema, essa vivência da Matemática no seu cotidiano, não tinha esse lado... E daí, de repente, eu paro pra pensar nos meus boletins e eu não tinha notas ruins em Matemática, mas eu tenho muita dificuldade hoje, e que na época eu não sentia... porque eu ia lá, fazia toda a lista de exercícios, quando eu tinha dúvida sobre como ‘montar a conta’ ela sempre respondia, podia fazer perguntas, podia até trocar com o colega. Mas eu tenho muito isso, eu tenho momentos e falo assim “Eu não aprendi!”, eu sinto isso, sabe... se você me dar um problema aqui agora eu não sei resolver! Então eu fico questionando isso, sabe, a postura que foi errada, a falta dessa vivência maior, eu não sei. É muita dúvida!*
[Transcrição do 1.º Encontro, Apêndice E]

Esse ‘movimento’ de se autoquestionar é um indício de que a P-2 está, por meio de um movimento retrospectivo, tentando compreender o porquê (as razões funcionais) de não ter aprendido determinados conceitos matemáticos. Ao buscar as razões funcionais de uma inadaptação (nesse caso a não aprendizagem), o sujeito realiza um ‘movimento’ (da periferia ao centro) imprescindível à tomada de consciência da própria ação (PIAGET et al., 1977). Essa ‘sensação’ “Eu não aprendi!” pode ser um indício de que a ‘aplicação’ do algoritmo (nas extensas listas de exercícios), sem a devida compreensão dos porquês de sua utilização, acabou implicando na não aprendizagem (construção) de alguns conteúdos matemáticos abordados na Educação Básica. Até porque, não é a repetição da ‘aplicação’ do algoritmo nos inúmeros exercícios que possibilitará a construção. Isso se explica, pois a ação do aluno ao resolver diversas situações problema (desequilibradoras) – ação essa caracterizada/constituída de/por contínuas abstrações reflexionantes (PIAGET et al., 1995) e progressivas tomadas de consciência (PIAGET et al., 1977) – é que possibilitará tal construção. Ao afirmar que não

aprendeu, então, pode-se inferir que a P-2 não tenha realizado ‘suficientemente’ tais abstrações reflexionantes e progressivas tomadas de consciência (num duplo ‘movimento’ de interiorização e exteriorização).

Ainda sobre as aulas de Matemática, quando questionada sobre como ocorreu o ensino de gráficos e tabelas – rever questão 1, subseção 4.4.2 – a P-2 disse que o mesmo se deu por meio da tríade *exposição na lousa x giz x exercícios*. Observe uma parte da fala da P-2 a esse respeito:

Eu coloquei que foi conforme apareceu no livro didático sem fazer relação ou referência com os acontecimentos cotidianos. Pra mim foi bastante sucinta e rápida essa abordagem!

Ao não “*fazer relação ou referência com os acontecimentos cotidianos*”, parece que a abordagem de gráficos e tabelas deu-se de uma maneira ‘desligada/desconexa’ da realidade. Nesse ponto cabe o questionamento do quão essa prática pode ser prejudicial à própria construção da concepção acerca da ciência Matemática, a ponto de muitos a considerarem como ‘algo’ à parte/desligada da realidade, como já apontado por Ponte (1992). Ao abordar os gráficos e as tabelas de uma forma ‘*bastante sucinta e rápida*’ e ‘desconexa’ da realidade, supõe-se que essa professora da P-2 não levou em consideração a importância de propor atividades ‘*interessantes e necessárias*’ (PIAGET, 1998a, 1998b) ao nível da capacidade de assimilação dos alunos. Tais atividades teriam sido importantes à construção, pela P-2, dos conteúdos matemáticos referentes aos conceitos de gráficos e tabelas. Aliás, em se tratando da Estatística, a utilização do próprio contexto de sala de aula (número de alunos que faltaram durante a semana, número de alunos aniversariantes no mês de agosto, etc.) poderia ter sido melhor aproveitado pela referida professora à proposição das referidas atividades. Sobre a utilização do cotidiano – na/para a proposição das atividades a serem desenvolvidas em sala de aula – torna-se oportuno destacar que os benefícios de sua utilização se devem pelo fato do mesmo estar ‘mais próximo’ das estruturas de assimilação dos estudantes. Daí, utilizá-lo como o ‘ponto de partida’ da prática pedagógica torna-se uma possibilidade em sala de aula já que ‘auxiliará’ os alunos no processo inicial de assimilação/significação do conteúdo abordado. Contudo, o ensino deve ‘ir além’ do cotidiano, pois o ‘ponto de chegada’/objetivo ‘final’ da Educação Básica reside na construção (pelo estudante) dos conceitos formalizados (isto é, da teoria) pelas diversas áreas.

Acerca das extensas listas de exercícios (solicitadas pelos seus ‘antigos’ professores de Matemática) que lhe causavam um tipo de ‘overdose de conhecimento’ – rever questão 7, subseção 4.4.2 – a P-2 expôs o seguinte:

258. **P-2:** *Eu acho que ocorreram várias vezes!*
259. **Pesquisador/Participante:** Você se lembra de uma que marcou bastante ou todas marcaram bastante?
260. **P-2:** *Eu vejo cenas, assim, eu tinha professores que chegava, lotava a lousa, já tinha as listas de exercícios, daí você copia e resolve os exercícios... Um monte de vezes!*
261. **Pesquisador/Participante:** Você tentava 1.º se situar, né: “Onde eu estou?”
262. **P-2:** *Sim!*
263. **Pesquisador/Participante:** Agora, “O que eu tenho que fazer? Como?”. Daí você ia ver o modelo. Daí pensava assim: “Vou treinar bastante porque daí eu vou saber!”. Você pensava assim?
264. **P-2:** *Sim, daí eu ia saber!*
265. **P-7:** *E daí gerava sempre um problema quando o professor não passava o modelo. A 1.ª pergunta era: “Mas, cadê o modelo?”* [Referiu-se ao questionamento feito pelos seus antigos colegas da Educação Básica, inclusive por ela mesma.]
266. **P-2:** *É, cadê o modelo!?* [Risos entre P-2 e P-4.]
267. **P-7:** *Cadê os passos, tipo: “Faz um pra gente ver como faz!”.*
268. **Pesquisador/Participante:** O modelo não é ruim! Só, que, dependendo da maneira que o professor o utiliza pode ‘engessar’ a capacidade de solução de problema no aluno!
269. **P-2:** *Assim como a lista só com base naquilo que eu dei hoje, por exemplo, só com divisão.* [Referiu-se à queixa das participantes referentes aos seus antigos professores pedirem listas de exercícios acerca de um só conteúdo, e não relacionando outros da mesma disciplina, de modo a permitir que os alunos solucionem problemas relacionando variados conceitos.] [Transcrição do 11.º Encontro, Apêndice O]

O tal modelo – referido pelas licenciandas (P-2 e P-7) – era uma resolução de determinado tipo de atividade (geralmente um exercício) feita no início da aula, pelo professor, na qual utilizava-se (‘aplicava-se’) um algoritmo convencional ‘relacionado’ ao conceito matemático que estava sendo abordado. A P-2 indicou acreditar, na época de estudante da Educação Básica, que o treino/aplicação do algoritmo seria suficiente à aprendizagem. Entretanto, como já salientado anteriormente, a mesma chegou à conclusão de que não aprendeu alguns conteúdos matemáticos tendo, apenas, os memorizado. Tais episódios vivenciados pela P-2 contribuíram para a construção da concepção de que a Matemática se reduz ao cálculo (PONTE, 1992), cujo único caminho para se ‘fazer Matemática’ é o por meio da aplicação da ‘fórmula’. Mesmo vivenciando tais momentos na maioria das ‘antigas’ aulas de Matemática, inclusive de sobrecarga no que se refere aos professores que ‘lotavam’ a lousa, o ensino da Matemática (para a P-2) não lhe causou traumas conforme evidenciado no trecho seguinte:

342. **Pesquisador/Participante:** Então aprender Matemática pra vocês nunca foi gostoso?
[...]
348. **Pesquisador/Participante:** E pra você P-2?
349. **P-2:** Foi gostoso, mas não sei se foi significativo...
350. **Pesquisador/Participante:** Tá! E pra você, P-5?
351. **P-5:** De novo, vão achar que eu tô copiando, mas foi o que a P-2 falou! Sim, inclusive várias vezes eu relato de ter visto isso, foi legal, aprendi... **[Referiu-se aos conteúdos matemáticos referentes aos gráficos e tabelas.]** Mas muita coisa eu não lembro, eu não sei se eu construí bem, e depois eu não sei... Mas eu acho que...
352. **P-2:** Mas se você tinha aprendido e se você rever você não lembraria?
353. **P-5:** Então, eu não sei! Aí que está o problema!
354. **Pesquisador/Participante:** Vocês acham que daqui alguns anos, ao vocês estudarem alguma coisa referente à Moda, Média, Dispersão, vai ser diferente?
355. **P-1:** Vai! **[Resposta compartilhada pelas demais participantes.]**
356. **P-2:** Eu acho que houve uma compreensão **[referiu-se aos conteúdos abordados no Grupo de Estudo]** e não uma memorização **[ocorrida nas aulas de Matemática da Educação Básica]**... eu vejo muito isso, assim, no meu ensino dos anos atrás... **[Transcrição do 10.º Encontro, Apêndice N]**

Embora tenha sido “gostoso, mas não sei se foi significativo...”, as aulas de Matemática da P-2 não lhe causaram traumas, pois foi “gostoso”. No entanto, esse aspecto de “não sei se foi significativo” sinalizou que os conteúdos matemáticos abordados não foram, de fato, compreendidos no sentido de sua conceituação (PIAGET, et al., 1977). Esse adjetivo (gostoso) indicou o aspecto afetivo que contribuiu, de certo modo, para que a P-2 – mesmo com as dificuldades provenientes do tipo de aula vivenciada – não desistisse de resolver as atividades solicitadas.

Em suma, mesmo não tendo estabelecido uma relação ruim para com a Matemática de modo a lhe causar medo/receio, a P-2 vivenciou, em sua grande maioria, aulas de Matemática pautadas na *exposição oral do conteúdo pelo professor x solicitação de listas exercícios (individuais) conforme o modelo*. A utilização do algoritmo convencional, sem a devida ‘correspondência’ (de compreensão) com o conceito matemático por ele ‘representado’, provavelmente, fez-se presente no ‘fazer Matemática’ da P-2. Fazer esse que acabou por lhe ‘construir’ a ideia de que a resolução de exercícios (e ou situações problema) de Matemática se faz, unicamente, pela utilização/aplicação da ‘fórmula’. Tal ideia vai de encontro a uma das concepções mais difundidas acerca da ciência Matemática, ou seja, de que essa ciência se reduz ao cálculo (PONTE, 1992). Concepção essa, segundo o autor, que contribui ao empobrecimento da prática pedagógica de Matemática. O fazer/calcular sem compreensão, isto é, sem a progressiva tomada de consciência (PIAGET et al., 1977) desse fazer/calcular não contribuirá para a construção da ciência Matemática.

6.1.1 Alguns conhecimentos matemáticos pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’: o ‘antes’ e o ‘após’ a participação/ação no GE

Nesta subseção apresentam-se alguns conhecimentos matemáticos pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’ construídos na/durante a Educação Básica pela P-2. Logo em seguida, apresentam-se as possíveis (re)significações para alguns desses conhecimentos, (re)significações essas advindas da participação/ação da P-2 no GE ao realizar as diversas atividades desenvolvidas no GE, inclusive ao resolver – individualmente e em grupo – as diversas ‘situações problema’ e os ‘desafios para casa’ relacionados a tais conhecimentos matemáticos (rever seção 5).

Quando questionada sobre o que entendia por ‘Tratamento da Informação’ (rever questão a.5.1, subseção 4.4.1.1), a P-2 escreveu tratar-se de “*Tabelas, gráficos, pesquisa, analisar dados*”. Mediante a referida resposta, pode-se inferir que a P-2 apenas elencou alguns conteúdos/procedimentos pertencentes à Estatística, não contemplando as outras áreas relacionados à Combinatória e à Probabilidade; áreas essas que também pertencem ao bloco ‘Tratamento da Informação’. Para investigar o que a participante entendia por Combinatória e Probabilidade, adiante, o pesquisador-autor solicitou que a mesma respondesse uma questão (questão 8, rever subseção 4.4.1.1) cuja resposta apresenta-se a seguir:

Probabilidade: Identificar a quantidade de vezes que algo pode ou não ocorrer.

Por exemplo: - chance de ganhar na mega-sena

- de dar cara ou coroa ao lançar uma moeda.

Combinatória: São as possibilidades de combinar elementos

Por exemplo: Roupas; comidas.

A partir das respostas elaboradas pela P-2 acerca do que entendia por Estatística, Probabilidade e Combinatória, é possível indicar que a licencianda possuía um conhecimento geral/superficial acerca dessas áreas; conhecimento esse construído na/durante a sua Educação Básica. Isso se deve, pois – pelo menos ao nível do conceito/definição – a participante não definiu (ao nível formal) tais áreas e nem citou/explicitou os diversos conteúdos matemáticos pertencentes às mesmas. Inclusive, quando questionada sobre o que entendia por princípio multiplicativo, arranjo, combinação e permutação, a P-2 não soube defini-los, apenas se lembrou de ter aplicado umas ‘fórmulas’ para resolver uns exercícios, mas que nunca tinha entendido direito quando usar cada uma dessas ‘fórmulas’. Tal indício corrobora com o já destacado anteriormente em diversas pesquisas (ABRAHÃO; SILVA, 2017; ARAMAN; SAMPAIO, 2013; ARAÚJO; PEREIRA, 2016; BARRETO; SOUSA,

2009; CARVALHO, 2007; DICETTI; CERETA, 2016; FERNANDES, 2013; FERNANDES; LEITE, 2015; NACARATO, 2010; OLIVEIRA, 2010; PROENÇA, 2015; RIBEIRO; ALBRECHT, 2016; ROSA, 2015; SANTOS; GHEDIN, 2016; SOARES, 2013; SOUZA; BORGES, 2016) acerca das lacunas conceituais apresentadas por futuros professores que ensinarão Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Após a participação/ação no GE, a P-2 apresentou – na perspectiva dela – as possíveis (re)significações construídas em relação à Estatística, à Combinatória e à Probabilidade:

Quadro 75 – Possíveis (re)significações respondidas pela P-2 acerca do ‘Tratamento da Informação’.

	ÁREAS	RESPOSTA da questão a.2 – rever subseção 4.4.3
APÓS	Estatística	<i>Percebi que em alguns momentos resolvia os problemas mecanicamente com a fórmula em mente e depois compreendi com significado. Ex: média aritmética, moda, etc.</i>
	Probabilidade	<i>Nesse caso, foi fantástico perceber que não precisei de fórmulas, pois era um conteúdo que eu tinha muita dificuldade, não sabia nem por onde tentar/começar a resolver, principalmente devido aquela visão se não sei a fórmula jamais encontrarei um resultado, isso para mim foi re-significado, ou seja, pelo menos pensar sobre o problema buscando solucioná-lo, tentar alternativas. Acredito que foi uma das re-significações mais importantes para mim, até mesmo uma mudança de postura, acreditar que é possível resolver uma situação-problema de diferentes maneiras e que entre eles existem as fórmulas.</i>
	Combinatória	<i>Em relação à probabilidade acredito que realmente ocorreu construção de conhecimento, já havia tido contato com esse conteúdo, entretanto não lembrava nem mesmo como iniciar as resoluções, mas a experiência coletiva foi fantástica, as trocas foram fundamentais auxiliaram bastante nas soluções dos problemas.</i>

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2012.

Faz-se possível identificar, a partir das respostas elaboradas pela P-2, que a (re)significação foi perceber a não necessidade da ‘fórmula’ para resolver as atividades envolvendo os conceitos matemáticos dessas áreas. Como a aplicação do algoritmo convencional foi tão utilizado na/durante a Educação Básica – muitas vezes sem a real compreensão do porquê da sua utilização –, então, ‘desprender-se’ da obrigatoriedade dessa utilização foi algo benéfico. Inclusive, perceber que há diferentes meios/caminhos para resolver/‘fazer Matemática’ foi uma experiência ‘fantástica’. Em um ‘momento de síntese’, P-2 apresentou uma (re)significação ao relacionar a Combinatória e a Probabilidade conforme evidenciado a seguir:

O mais significativo deste encontro foi compreender a elaboração do Diagrama de Árvore, e a relação que existe entre Combinação e Probabilidade, pois em alguns casos é necessário combinar, ordenar antes de saber a Probabilidade. **[Momento de síntese, 14.º Encontro]**

¹ No referido problema, a professora de Matemática Sueli registrou a medida de cada uma das alturas dos seus alunos 30 alunos. As mesmas apresentam-se a seguir (na unidade de medida cm): 130, 130, 130, 131, 132, 133, 133, 137, 141, 142, 143, 144, 145, 145, 147, 147, 150, 150, 151, 152, 152, 153, 153, 158, 159, 160, 161, 162, 171, 177.

6, 4 0	
+5, 2 0	
11, 6 0	$11,60 \div 2 = 5,80$

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2012.

Quadro 78 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 3.

3) (UFAL) Considere 8 números cuja média aritmética é 4,5. Retirando-se um desses números, a média aritmética dos restantes é 4,2. O número retirado é				
a) 0,3	b) 3,3	c) 5,4	d) 6,6	e) 8
Resolução: A participante realizou as duas multiplicações $8 \times 4,5 = 36$ e $7 \times 4,2 = 29,4$. Em seguida, subtraiu 29,4 de 36, obtendo o valor 6,6. A participante marcou a alternativa correta d).				

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2012.

A partir dos esquemas matemáticos elaborados pela P-2 para resolver as três tarefas matemáticas (1 à 3), é possível identificar que a mesma sabia resolver problemas envolvendo o conceito de média aritmética, com exceção da tarefa 2 na qual a licencianda ficou em dúvida sobre qual alternativa assinalar. Tal fato é um indício de uma ainda não conceituação desse conteúdo matemático. Quando questionada sobre o que entendia pelo conceito de média aritmética, a P-2 disse se recordar das palavras “*meio*” e “*ponto*”. No entanto, não definiu esse conceito do ponto de vista matemático (e nem por meio da linguagem formal), fato esse ser um outro indício da ainda não ocorrência da abstração refletida e em sua ‘fase final’ (PIAGET et al., 1995) acerca desse conceito matemático.

Após a participação/ação da P-2 no GE – no que tange aos esquemas matemáticos elaborados nas resoluções de duas tarefas matemáticas envolvendo o conceito de média aritmética – identificaram-se as seguintes resoluções:

Quadro 79 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 4.

4) Considere sete números cuja Média Aritmética é 6. Adicionando um número a esse conjunto, a ‘nova’ Média Aritmética é 5,5. O número adicionado é:				
a) 0,5	b) 5,5	c) 5,75	d) 2	e) 3
Resolução: $7 \cdot 6 = 42$ $8 \cdot 5,5 = 44$ $44 - 42 = 2$ $x_8 = 44 - 42 = 2$ $\text{representando} \rightarrow \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7}{7} = 6$ $x = 7 \cdot 6 = 42$ $\frac{42+x_8}{8} = 5,5 \rightarrow 42 + x_8 = 44$ A participante marcou com um x a alternativa correta (d).				

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2012.

Quadro 80 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 5.

5) No desafio anterior, qual número deve ser adicionado ao conjunto inicial (dos sete números) para que a Média Aritmética permaneça a mesma, ou seja, igual a 6?				
a) 7	b) 2	c) 6	d) 5	e) 4

Resolução:

$$\frac{\text{soma } 8}{8} = 6 \qquad 7 \cdot 6 = 42$$

$$\text{soma } 8 = 6 \cdot 8 \qquad 8 \cdot 6 = 48$$

$$\text{soma } 8 = 48 \qquad 48 - 42 = 6$$

A participante marcou com um x a alternativa correta (c).

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2012.

Mediante a análise dos esquemas elaborados percebe-se que a P-2 passou a utilizar uma representação/procedimento para o cálculo de média aritmética mais ‘próxima’ do algoritmo convencional. Tal fato pode indicar um melhor entendimento/(re)significação acerca de tal conceito matemático, pois quando a ‘forma’ se desprende do ‘conteúdo’ é um indício de conceituação (PIAGET et al., 1977). O algoritmo convencional, por exemplo, representa uma ‘forma’ desprendida de seu ‘conteúdo’. Além de utilizar esquemas mais elaborados, ou seja, mais ‘próximos’ do algoritmo convencional, a P-2 (re)significou o próprio conceito de média aritmética como apresentado no ‘momento de síntese’ seguinte:

Compreendi as medidas de dispersão que incidem sobre a média que são a variância e o desvio padrão, e que sua utilização é para um número significativo de dados, ou seja, são utilizados em pesquisas com quantidades elevadas de participantes, com o objetivo de verificar se a média é representativa, ou se há bastante discrepância entre os dados coletados. [Momento de síntese, 8.º Encontro]

O conceito de média aritmética – que ‘antes’ se limitava às expressões “*meio*” e “*ponto*” – passou a representar uma medida de posição que poderia (ou não) ser representativa para um determinado conjunto de dados relacionados a determinada variável. Logo, identificou-se uma (re)significação referente ao conceito de média aritmética ‘após’ a participação/ação da P-2 no GE.

Em relação aos esquemas matemáticos elaborados na/para a resolução de tarefas matemáticas envolvendo os conceitos de princípio multiplicativo, permutação e arranjo identificaram-se – ‘antes’ da participação/ação da P-2 no GE – os seguintes:

Quadro 81 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 6.

6) Numa lanchonete há 4 tipos de sanduíches, 5 tipos de sucos e 2 tipos de sorvetes. De quantas maneiras diferentes podemos tomar um lanche composto de 1 sanduíche, 1 suco e 1 sorvete?

Resolução:

$$4 \times 5 \times 2 = 40 \text{ maneiras.}$$

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2012.

Quadro 82 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 7.

7) Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?

Resolução:

			123	
			213	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	321	$3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ números.}$
2	2	2	132	
3	3	3	231	
			312	

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2012.

Quadro 83 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 8.

8) Em uma competição com 8 corredores, de quantos modos distintos podem ser conquistadas as medalhas de ouro e prata?

Resolução:

A participante não conseguiu resolver a tarefa. Ela nomeou os participantes como sendo as primeiras oito letras do alfabeto. Devido ao insucesso na ‘combinação’ dos 8 corredores considerando-se o primeiro e o segundo lugares, ela apagou a resolução.

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2012.

Conforme apresentado nos quadros 81 e 82, a participante conseguiu resolver os problemas envolvendo os conceitos de princípio multiplicativo (tarefa 6) e permutação simples (tarefa 7). No caso da resolução da tarefa 7, além de apresentar a multiplicação “ $3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ números}$ ”, a P-2 indicou, um a um, os possíveis 6 números formados com os algarismos 1, 2 e 3 (sem repeti-los num mesmo número). Em relação à tarefa 8, tarefa essa que envolvia o conceito de arranjo, a licencianda não obteve êxito. A P-2 não havia (ainda) construído o esquema/ algoritmo conhecido como diagrama de árvore, esquema esse que (provavelmente) teria lhe auxiliado a pensar sobre a tarefa matemática não solucionada e a resolver (mais facilmente) a tarefa 7.

Após a participação/ação da P-2 no GE, na qual a mesma resolveu uma diversidade de ‘situações problema’ e ‘desafios para casa’ envolvendo os referidos conceitos pertencentes à Combinatória (rever seção 5), a licencianda elaborou os seguintes esquemas ao resolver quatro tarefas matemáticas:

Quadro 84 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 9.

9) As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Quantas placas podem ser criadas com as letras A, B e C e os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, podendo repetir a letra e não podendo repetir o algarismo?

Resolução:

$$(PR)_3 = 3 \times 3 \times 3 = 27 \Rightarrow \text{letras}$$

$$A_{7,4} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840 \text{ números}$$

$$\text{Total de placas} \Rightarrow 27 \times 840 = 22680 \text{ placas.}$$

R: Podem ser criadas 22680 placas formadas por 3 letras e 4 algarismos.

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2012.

Quadro 85 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 10.

10) A diretoria de um clube é composto por 12 membros que podem ocupar a função de presidente, secretário ou tesoureiro. De quantas maneiras pode-se formar, com os 12 membros, chapas que contenham presidente, secretário e tesoureiro?

Resolução:

$$A_{12,3} = 12 \times 11 \times 10 = 1.320 \text{ chapas.}$$

R: Pode-se formar 1320 chapas contendo presidente, secretário e tesoureiro.

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2012.

Quadro 86 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 11.

11) Seis amigos foram ao parque de diversões ‘andar’ de montanha russa. Eles pretendem ir no mesmo carrinho; no entanto, no banco da frente – que ‘produz’ maior emoção – só cabem três pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem escolher o trio que irá no banco da frente?

Resolução:

$$C_{6,3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = \frac{120}{6} = 20$$

R: De 20 maneiras diferentes pode-se escolher os trios.

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2012.

Quadro 87 – Resolução elaborada pela P-2 da tarefa matemática 12.

12) Quantos são os anagramas possíveis da palavra PAPAGAIO?

Resolução:

$$P_8^{2,3} = \frac{8!}{2! 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2! 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{6.720}{2} = 3.360$$

R: São 3.360 anagramas possíveis da palavra PAPAGAIO.

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2012.

A P-2 obteve êxito ao resolver as referidas tarefas matemáticas envolvendo os conceitos de combinação, permutação e arranjo. Para tanto, a licencianda sentiu-se ‘à vontade’ para utilizar o esquema/algoritmo convencional. Quando questionada sobre o porquê de ter utilizado os algoritmos convencionais, a P-2 disse que, ‘agora’, os mesmos tinham significado. Como o algoritmo convencional representa uma ‘forma’ desprendida de seu ‘conteúdo’, então, a sua livre utilização torna-se um indício de início de processo de conceituação (PIAGET et al., 1977) do conteúdo matemático por ele representado. Assim, observa-se um considerável avanço ao comparar os referidos esquemas (utilizados na resolução das tarefas 9 à 12) com os elaborados pela P-2 nas tarefas anteriores (6 à 8).

Quando questionada sobre o que diferenciava estes três tipos de agrupamentos combinatórios, a licencianda respondeu ser “a ordem importar ou não” e o “lugar ocupado” por cada um dos elementos a combinar. Mediante tal resposta faz-se possível identificar uma (re)significação a respeito destes conteúdos matemáticos tendo em vista que, no início do GE, a licencianda sequer sabia diferenciá-los. Em particular, durante uma ‘discussão de grupo’ sobre o conceito de permutação, a P-2 disse que para permutar um determinado número de

elementos era necessário que cada um deles ocupasse “o seu lugarzinho, todos eles”; por exemplo, no caso da permutação de um determinado conjunto de letras, cada “letrinha vai ter a sua casinha”. Embora não tenha conceituado formalmente tal conteúdo matemático, a participante deu indícios de ter iniciado um progressiva tomada de consciência a respeito do mesmo.

Para a P-2, a abordagem do diagrama de árvore foi importante para o entendimento da Combinatória:

Foi possível concluir que algumas resoluções são facilmente efetuadas através do Diagrama de Árvore, entretanto algumas exigem a resolução através de multiplicação, porém todos não exigiram as fórmulas, mas sim que se pensasse sobre as situações apresentadas. Acredito que ainda preciso de mais tempo para identificar quando trata-se de Arranjo, Permutação e Combinação. [Momento de Síntese, 16.º Encontro]

O exposto pela participante corrobora com o afirmado por Vergnaud (1996a) referente à importância de o aluno resolver uma diversidade de situações, num determinado (e longo) período de tempo, de modo a construir os referidos conceitos matemáticos. A conceituação dos referidos conteúdos (média aritmética, permutação, arranjo e combinação), em sua forma final – via abstração refletida (PIAGET et al., 1995) – ainda não foi construída pela P-2. A linguagem (e os símbolos) – isto é, os significantes – tornam-se importantes nesse processo de conceituação (via abstração refletida em sua forma final). Contudo, sem os esquemas e as situações, tais significantes permanecem ‘vazios’ de sentido (VERGNAUD, 1996a, p. 191). O diagrama de árvore referido pela licencianda e as diversas situações resolvidas foram, assim, importantes a esse processo inicial de conceituação dos conteúdos matemáticos.

6.1.2 Algumas crenças e concepções em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem): o ‘antes’ e o ‘após’ a participação/ação no GE

Para facilitar a comparação entre o ‘antes’ e o ‘após’, optou-se pela utilização de quadros que apresentam as respostas e/ou falas da P-2 quando questionada sobre “O que é a Matemática?” e “Como a mesma é aprendida/deve ser ensinada?”. Tais respostas e/ou falas visaram identificar – conforme já destacado na seção 4 – algumas crenças e concepções construídas pela licencianda acerca da Matemática e do seu processo de ensino e aprendizagem.

No quadro seguinte apresentam-se as respostas e/ou falas da P-2 referentes ao questionamento “*O que é a Matemática?*”:

Quadro 88 – Algumas concepções da P-2 acerca da Matemática.

	INSTRUMENTO	RESPOSTA
‘ANTES’	a.7) Na <u>SUA</u> opinião, o que é a Matemática? – Questionário Inicial, rever subseção 4.4.1.1.	<i>Para mim Matemática é uma ciência considerada exata que envolve informações e dados geralmente números com o objetivo de calcular, expor resultados, informações de pesquisa e auxiliar a resolução de problemas diários.</i>
	‘Discussão de grupo’ (síntese das falas apresentadas no GE).	A Matemática se ‘reduz’ ao cálculo, à aplicação (obrigatória) das ‘fórmulas’ para resolver os exercícios escolares. Embora auxilie a resolver problemas do cotidiano, a Matemática – na escola – ‘encontra-se’ desvinculada/desconexa da vida cotidiana.
‘APÓS’	a.1.1) Em relação ao conhecimento matemático (à Matemática) – Questionário Final, rever subseção 4.4.3.	<i>Para mim a grande re-significação em relação à Matemática deu-se na descoberta de que ela não é algo exato (por exemplo a questão da régua) e não precisa necessariamente ser transmitida mecanicamente com fórmulas prontas que devem ser aplicadas em lista de exercícios, mas sim como uma disciplina envolvente que possui uma história em sua construção com o intuito de avaliar o cotidiano humano, que as questões problemas mobilizam a ação que gera a necessidade, desperta o interesse. Também ficam evidentes que muitos conteúdos foram vistos por mim durante os anos escolares porém sem tomada de consciência, sem saber sua real função/maneira de resolver, ou seja, com compreensão.</i>
	1) Na <u>SUA</u> opinião, o que é a Matemática? – Questionário Final Postergado, rever subseção 4.4.4.	<i>Matemática é um conjunto de conhecimentos construídos pela humanidade ao longo dos anos com o intuito de facilitar à vida cotidiana dos seres humanos e também para explicar fenômenos, acontecimentos e invenções.</i>

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2011-2012.

Ao comparar as respostas e/ou falas ‘antes’ e ‘após’ a participação/ação da P-2 no GE, pode-se inferir que as ‘maiores’ (re)significações ocorreram quando a licencianda: a) passou a conceber a Matemática enquanto uma ciência historicamente construída “*pela humanidade ao longo dos anos*”; b) passou a não mais reduzir a Matemática ao cálculo/algoritmo e indicou que essa ciência auxilia na explicação de “*fenômenos, acontecimentos e invenções*”. Para a licencianda, a Matemática (‘agora’) não está mais desvinculada/desligada da realidade, pois faz parte da vida cotidiana e auxilia o homem em seus afazeres. Antes da participação/ação da P-2 no GE, a concepção de Matemática construída pela licencianda era a de uma ciência reduzida ao cálculo e à utilização (obrigatória) do algoritmo para se ‘fazer Matemática’, além de estar (quando abordada na escola) ‘desligada’ da realidade. Conforme Ponte (1992), tais concepções são empobrecedoras (já que reduzem a Matemática a um de seus aspectos de menor valor formativo) e mistificadoras, pois transmitem a falsa ideia de que essa ciência ‘encontra-se’ em um mundo ‘à parte’. Como as concepções ‘informam’/‘alimentam’ a prática

docente (NACARATO; PASSOS; CARVALHO, 2004; PONTE, 1992; THOMPSON, 1997), então, as referidas (re)significações construídas pela P-2 poderão (provavelmente) contribuir com a sua futura prática pedagógica de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Em relação ao modo de conceber a aprendizagem da Matemática, a P-2 elaborou as seguintes respostas e/ou falas ao questionamento “*Como a Matemática é aprendida?*”:

Quadro 89 – Algumas concepções da P-2 acerca da aprendizagem da Matemática.

	INSTRUMENTO	RESPOSTA
‘ANTES’	a.8) Na SUA opinião, como se aprende a Matemática? – Questionário Inicial, ver subseção 4.4.1.1.	<i>Tendo contato com os conteúdos conceituais porém atuando, participando ativamente, manipulando materiais concretos, refletindo sobre os conteúdos, desenvolvendo atividades em grupo, fazendo trocas, acertando e errando, fazendo exercícios e até mesmo memorizando alguns conteúdos e conceitos, como por exemplo a tabuada; porém sempre com compreensão.</i>
	‘Discussão de grupo’ (síntese das falas apresentadas no GE).	A aprendizagem da Matemática decorre da explicação realizada pelo professor e, também, das atividades que o aluno realiza em sala de aula.
‘APÓS’	2) Na SUA opinião, como se aprende a Matemática? – Questionário Final Postergado, ver subseção 4.4.4.	<i>A matemática é aprendida em um processo de ensino e aprendizagem e também de forma não sistematizada em situações do dia a dia, como ao comprar um objeto (preço - troco). Em processo de ensino e aprendizagem é necessário que os sujeitos atuem sobre o conhecimento, reflitam, sintam-se incomodados com as informações, busquem, façam e ao final dessas situações existam formas de sistematizações como por exemplo, explicações. Muitas vezes é necessário que o professor desequilibre os alunos, façam-os pensar sobre questões ou situações problemas, auxiliando se necessário, com perguntas, ou até mesmo explicações. Vejo que é um processo que exige tempo e dedicação.</i>
	2.1) Qual o papel do aluno no processo de aprendizagem da Matemática? Justifique sua resposta. – Questionário Final Postergado, ver subseção 4.4.4.	<i>O aluno deve ser ativo e participativo no processo de aprendizagem de Matemática, deve estar envolvido com as situações, tentando buscar soluções. Por exemplo, quando depara-se com uma questão-problema, deve tentar resolvê-las, com a ajuda e discussões com os colegas da sala, e principalmente explicar quais foram os caminhos que pensaram, mesmo que a resposta não esteja exata no final, mas é importante compreender o caminho que percorreu e o que "deu errado", para assim realmente assimilar e acomodar o conhecimento.</i>

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2011-2012.

Num primeiro momento, no ‘antes’, a P-2 deu indícios de que a Matemática era aprendida via ‘pressão externa’/estímulos. Além de afirmar que a aprendizagem decorria da explicação realizada pelo professor, a licencianda disse que – para aprender – o aluno devia ter “*contato com os conteúdos conceituais*”. Esse modo de conceber a aprendizagem da Matemática – segundo Becker (2013) – ‘aproxima-se’ da concepção epistemológica empirista, concepção essa que acredita que a ‘pressão externa’ exercida pelo objeto sobre o sujeito garante o desenvolvimento/a construção do conhecimento. No entanto, a licencianda

também destacou a importância da ação do sujeito à aprendizagem da Matemática. Ao fazê-la, a P-2 ‘aproxima-se’ de uma concepção epistemológica construtivista; porém, a licencianda não explicou o porquê da importância dessa ação à aprendizagem da Matemática.

Após a participação/ação no GE, a P-2 afirmou que faz-se necessário o “*aluno ser ativo e participativo no processo de aprendizagem*” da Matemática. Para explicar o que caracterizaria um aluno “*ativo e participativo*”, a licencianda utilizou expressões/ações como “*atuem sobre o conhecimento, reflitam, sintam-se incomodados com as informações, busquem, façam*”, expressões/ações essas que ‘aproximam’ a sua resposta de uma concepção epistemológica construtivista. Contudo, ao afirmar que “*é necessário que o professor [...] façam-os [os alunos] pensar sobre questões ou situações problemas*”, a P-2 deu indícios de, também, valer-se de uma concepção epistemológica empirista para explicar como se dá a aprendizagem da Matemática. O professor desempenha um importante papel na/para a proposição de situações ‘interessantes e necessárias/desequilibradoras’ (PIAGET, 1998a, 1998b), porém, a aprendizagem (o ‘pensar’) decorre da ação do aluno, pois quem aprende/constrói é o estudante ao agir/interagir com (e sobre) o objeto. Assim, não é coerente – a partir da Epistemologia Genética – afirmar que o professor ‘faça’ o aluno pensar por meio de uma ‘pressão externa’ exercida sobre o estudante. Como já salientado por Becker (2013), um mesmo sujeito pode apresentar, ao mesmo tempo e de modo alternado, duas ou mais concepções epistemológicas. No caso da P-2 – no que diz respeito à sua concepção epistemológica sobre a aprendizagem da Matemática – a licencianda (ainda) apresenta (mesmo ‘após’ a participação/ação no GE) as duas concepções epistemológicas (empirista e construtivista).

Ademais, mesmo tendo sido solicitada a justificar as suas respostas referentes às questões 2) e 2.1), a licencianda não valeu-se dos elementos teóricos abordados no GE (acerca da Epistemologia Genética) para explicar a importância da ação – do ponto de vista psicológico e epistemológico – à aprendizagem da Matemática. Essa não utilização pode ser mais um indício da ainda não superação da concepção epistemológica empirista, superação essa possível – conforme aponta Nogueira (2013) – através da conceituação (via abstração refletida) da Epistemologia Genética que explica a gênese/desenvolvimento do sujeito a partir da ação (interação) para com o objeto; ação essa caracterizada de/por contínuos desequilíbrios/reequilíbrios (PIAGET, 1976a) constituído de por contínuas abstrações reflexionantes (PIAGET et al., 1995) e progressivas tomadas de consciência da ação (PIAGET et al., 1977). Logo, em relação à concepção epistemológica referente à

aprendizagem da Matemática, a P-2 (ainda) não (re)significou a sua concepção inicial a ponto de superar a concepção epistemológica empirista.

Em relação ao ensino da Matemática, obtiveram-se as seguintes respostas:

Quadro 90 – Algumas concepções da P-2 acerca do ensino da Matemática.

	INSTRUMENTO	RESPOSTA
'ANTES'	a.9) Na SUA opinião, como deve ser ensinada a Matemática? – Questionário Inicial, rever subseção 4.4.1.1.	<i>Acredito que primeiramente deve ser apresentado uma situação, um problema, um questionamento, ocorrer discussões e trocas entre os alunos e o professor, conhecer o que os alunos respondem, compreendem sobre o tema, depois fazer uma exposição conceitual, tirar as dúvidas, aplicar atividades, exercícios e jogos ou brincadeiras, sempre dialogando e verificando se o conteúdo foi aprendido e compreendido pelo aluno.</i>
	a.1.1) Em relação ao ensino da Matemática... – Questionário Final, rever subseção 4.4.3.	<i>Descobri que realmente é possível deixar os alunos agirem sobre as situações, instigarem a encontrar soluções, provocando desequilíbrios e auxiliando-os a questionarem soluções sem o uso de formulas que me foram tanto cobradas ao longo dos anos escolares. Acredito que sem dúvida dessa maneira a matemática torne-se mais prazerosa e menos temida pelas crianças, com um ensino mais próximo do cotidiano.</i>
'APÓS'	3) Na SUA opinião, como deve ser ensinada a Matemática? – Questionário Final Postergado, rever subseção 4.4.4.	<i>Acredito que primeiramente é necessário tirar o medo que os alunos tem da matemática, desmistificando o fato de ser algo difícil ou somente para "gênios", por meio de conversas, e até exercícios que sejam de fácil solução, para que os alunos sintam-se capazes e encorajados a aprenderem. Acho que os conteúdos quando possível devem ser contextualizados, como por exemplo, explicar o porque do surgimento dos números na história da humanidade (necessidade de quantificação), dizerem para pensarem em como faziam antes dos números existirem.</i> <i>Acredito que a utilização de materiais concretos facilitem na visualização, como palito de sorvete, ilustrações, montagem dos materiais geométricos em cartolina/papel, desenhos, etc. Também visualizo que as situações/questões problemas facilitem e estimulem na resolução, desde que haja discussões sobre as resoluções, ouvindo os alunos e sistematizando as informações. E principalmente ficar atento as dificuldades dos alunos uma vez que cada sujeito é único e traz histórias de vida diferentes que direta ou indiretamente interferem no aprendizado.</i> <i>Acho que momentos em que os próprios alunos se ajudem também é interessante, pois em alguns momentos um compreende mais rapidamente que o outro e as trocas são enriquecedoras.</i>
	3.1) Qual o papel do professor no processo de ensino da Matemática? Justifique sua resposta. – Questionário Final Postergado, rever subseção 4.4.4.	<i>O professor é o mediador entre o conhecimento e o aluno, é ele quem domina o conteúdo, e deve contribuir para que o aluno aproprie-se dele. O professor é o responsável por planejar a aula e proporcionar os facilitadores para que o aluno compreenda o que está sendo ensinado, permitindo que o mesmo sinta-se a vontade para questionar e comentar o que está estudando, entendendo que o ambiente de sala de aula é um ambiente de troca. Ele é o responsável por acompanhar o desenvolvimento do aluno, isso significa que deve verificar se e como o conteúdo está sendo assimilado pela criança, compreendendo de que os alunos necessitam de tempo e de idas e voltas (espiral) sobre os assuntos para realmente apropriar-se deles.</i>

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2011-2012.

Antes da participação/ação no GE, a P-2 acreditava que o ensino da Matemática deveria ocorrer mediante a apresentação de uma situação ao aluno e por meio da ‘aplicação’ de atividades/exercícios. No entanto, ao não destacar a importância da ação do aluno sobre essa situação ‘apresentada’ pelo professor, a licencianda ‘aproxima-se’ de uma concepção epistemológica empirista (BECKER, 2012), ou seja, como se esse ‘apresentar’ e ‘aplicar’ fossem suficientes à aprendizagem/construção do conhecimento. Embora a participante diga ser relevante “*conhecer o que os alunos respondem, compreendem sobre o tema*”, ações essas mais ‘próximas’ de uma concepção epistemológica construtivista, não citou ser necessário utilizar deste conhecimento (já construído pelo aluno) para propor atividades ‘*interessantes e necessárias*’ (PIAGET, 1998a, 1998b) e potencialmente desequilibradoras (PIAGET, 1976a) aos estudantes.

Após a participação/ação no GE, a licencianda apresentou indícios ‘próximos’ da concepção epistemológica construtivista, referente ao ensino da Matemática, quando afirmou os seguintes pontos: a) “*é possível deixar os alunos agirem sobre as situações, instigarem a encontrar soluções*”; b) em sala de aula devem ser realizadas “*discussões sobre as resoluções, ouvindo os alunos e sistematizando as informações*”; c) o professor deve “*ficar atento as dificuldades dos alunos uma vez que cada sujeito é único e traz histórias de vida diferentes que direta ou indiretamente interferem no aprendizado*”; d) “*Acho que momentos em que os próprios alunos se ajudem também é interessante, pois em alguns momentos um compreende mais rapidamente que o outro e as trocas são enriquecedoras*”. Além de citar tais pontos, a P-2 ressaltou ser o professor o “*mediador*” entre o “*conhecimento e o aluno*” no/durante o processo de ensino. Em uma ‘discussão de grupo’, a P-2 qualificou o seu entendimento pela expressão ‘professor mediador’ do seguinte modo:

Achei muito válido nossa discussão sobre a práxis educativa, pois tem sido possível vivenciar uma postura do professor mediador da aprendizagem, que facilita a compreensão e apropriação do conhecimento através da interação e exposição das dúvidas, questionamentos e compreensões.

Embora a P-2 tenha apresentado – ‘após’ a sua participação/ação no GE – vários indícios que ‘aproximam’ a sua concepção de ensino da construtivista, em suas respostas também constam trechos que fazem alusão à concepção epistemológica empirista. Na citação anterior, por exemplo, a licencianda indicou que a mediação do professor “*facilita a compreensão e apropriação do conhecimento*” pelo aluno, além de afirmar que “*as situações/questões problemas facilitem e estimulem na resolução*”. Faltou à P-2 destacar que

é na ação, e apenas por meio dela, que a aprendizagem ocorrerá, não sendo possível, portanto, que uma ação realizada pelo professor implique em aprendizagem (pelo aluno). O papel do ensino (e um dos papéis do professor) é o de promover situações desequilibradoras (PIAGET, 1976a) que podem vir a ser assimiladas pelo aluno, desde que este atue sobre tais situações valendo-se de seus esquemas e ou conceitos já construídos.

Em suma, faz-se possível destacar que a ‘maior’ (re)significação identificada na P-2 referiu-se à concepção de Matemática enquanto uma ciência historicamente construída pela humanidade, cujo meio/caminho para se ‘fazer Matemática’ não é mais único/orientado pelo algoritmo. A construção de esquemas na/para a resolução das ‘situações problema’ e dos ‘desafios para casa’ foram importantes para a construção da referida (re)significação. Quanto ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, as respostas e/ou falas analisadas indicaram a presença das concepções epistemológicas empiristas e construtivista (BECKER, 2013). Logo, a primeira concepção (ainda) não foi totalmente superada pela segunda. Devido à própria constituição das concepções (PONTE, 1992), torna-se difícil – e em um relativo curto espaço de tempo – uma (re)significação a esse nível, isto é, a da superação. Além dessa dificuldade inerente à (re)significação de uma concepção, faltou à P-2 tomar consciência (PIAGET et al., 1977) dos conteúdos abordados nos diversos ‘textos teóricos’ utilizados no GE, textos esses que apresentaram/discutiram os diversos assuntos da Epistemologia Genética.

Assim como realizado com os conteúdos matemáticos, a abordagem desses assuntos (da teoria de Piaget) deveria ter sido feita mediante a resolução (individual e em grupo) – pelas licenciandas – de mais atividades do tipo ‘situação problema’ envolvendo tais assuntos. Os próprios ‘textos teóricos’ deveriam ter sido elaborados utilizando-se mais exemplificações pelo fato destas estarem (provavelmente) ‘mais próximas’ das estruturas de assimilação das licenciandas. Em vários desses textos, o pesquisador-autor já iniciou a discussão/apresentação com a teoria, isto é, com a conceituação dos elementos da Epistemologia Genética. O erro do pesquisador-autor foi supor que as licenciandas – por cursarem o último ano da Licenciatura em Pedagogia – já tivessem construído os esquemas e os conceitos necessários à assimilação de tais assuntos da teoria piagetiana. Essa falha/erro, aliás, torna-se incoerente ao considerar o referencial teórico epistemológico adotado na presente investigação. Independentemente do conteúdo, o professor deve investigar, antecipadamente, as estruturas já construídas pelo aluno de modo que as atividades propostas possam ser, provavelmente, as mais ‘*interessantes e necessárias*’ (PIAGET, 1998a, 1998b) possíveis.

6.1.3 Algumas atitudes em relação à Matemática: o ‘antes’ e o ‘após’ a participação/ação no GE

Embora as atitudes não constituam uma das partes do saber da experiência pré-profissional – conforme indicado por Ardiles (2007) – há uma relação (correlação) entre as concepções, as crenças e as atitudes do sujeito acerca de determinado objeto. Ao identificar alterações no que tange às alternativas assinaladas nos itens que compõem a escala de atitudes aplicada, será possível inferir – mediante a referida correlação – se houve (re)significação acerca da ‘nova’ relação estabelecida para com a Matemática. Para auxiliar na análise/comparação, no quadro seguinte apresentam-se as alternativas assinaladas pela P-2 ‘antes’ e ‘após’ a participação/ação no GE:

Quadro 91 – Escala de Atitudes em relação à Matemática: alternativas assinaladas pela P-2.

NEGATIVAS	AFIRMAÇÃO	‘ANTES’	‘APÓS’
	01. Eu fico sempre sob uma terrível tensão na aula de Matemática.	D	DT
	02. Eu não gosto de Matemática e me assusta ter que fazer essa matéria.	D	DT
	06. “Dá um branco” na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando estudo Matemática.	D	D
	07. Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço em Matemática.	C	D
	08. A Matemática me deixa inquieto(a), descontente, irritado(a) e impaciente.	D	DT
	10. A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido(a) em uma selva de números e sem encontrar a saída.	D	DT
	12. Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão.	D	DT
	13. Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz em Matemática.	C	D
	16. Pensar sobre a obrigação de resolver um problema de Matemática me deixa nervoso(a).	C	DT
	17. Eu nunca gostei de Matemática e é a matéria que me dá mais medo.	D	DT
	21. Não tenho um bom desempenho em Matemática.	C	D
POSITIVAS	AFIRMAÇÃO	‘ANTES’	‘APÓS’
	03. Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.	C	C
	04. A Matemática é fascinante e divertida.	D	C
	05. A Matemática me faz sentir seguro(a) e é, ao mesmo tempo, estimulante.	D	C
	09. O sentimento que tenho com relação à Matemática é bom.	D	C
	11. A Matemática é algo que eu aprecio grandemente.	D	C
	14. Eu gosto realmente de Matemática.	D	C
	15. A Matemática é uma das matérias que eu realmente gosto de estudar na escola.	D	C
	18. Eu fico mais feliz na aula de Matemática que na aula de qualquer outra matéria.	D	D
	19. Eu me sinto tranquilo(a) em Matemática e gosto muito dessa matéria.	D	C
	20. Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação à Matemática: Eu gosto e aprecio essa matéria.	D	C

Fonte: Resposta elaborada pela P-2, 2011-2012.

De um modo geral, as afirmações negativas sofreram alterações ao comparar-se o ‘antes’ e o ‘após’ da participação/ação da P-2 no GE. A licencianda, por exemplo, não fica mais sob uma terrível tensão na aula de Matemática; assim, a sua crença de que a aula de Matemática é terrível foi (re)significada. Tal fato decorre, supõe-se, da possibilidade de se ‘fazer Matemática’ sem a obrigatoriedade da ‘fórmula’. A sensação de insegurança apresentou uma alteração positiva; em particular, resolver problemas matemáticos não deixa a P-2 mais nervosa. Considerando-se as crenças e as concepções correlacionadas a essas atitudes, pode-se inferir que ocorreram algumas (re)significações (benéficas) nesse sentido.

Acerca das afirmações positivas, as alterações não foram tão significativas, embora tenham ocorrido. Contudo, a licencianda (ainda) não fica mais feliz na aula de Matemática se comparado a outra matéria.

Em relação à análise quantitativa de ambas as escalas aplicadas, a P-2 obteve uma ‘nova’ pontuação totalizando 66 pontos. Em comparação à pontuação totalizada na primeira escala aplicada (no caso 48 pontos), observou-se um acréscimo de 18 pontos e um aumento percentual em 37,5%. Ao comparar esta ‘nova’ pontuação com a média obtida pelo grupo ($\bar{x} \cong 64,2$), a participante – segundo o procedimento estabelecido por Brito (1996) – apresentou, na segunda escala aplicada, uma atitude positiva em relação à Matemática.

Em suma, as alterações identificadas em algumas afirmações acerca de algumas atitudes em relação à Matemática fornecem alguns indícios sobre algumas (re)significações acerca das concepções e das crenças e elas correlacionadas. Por exemplo, a crença de que Matemática, por se difícil, dá medo, ‘passou’ por uma (re)significação; (re)significação essa, acredita-se, advinda da participação/ação da P-2 ao resolver/pensar sobre as atividades desenvolvidas no GE relacionadas aos conteúdos matemáticos do ‘Tratamento da Informação’.

6.2 O caso da P-4: ‘reconstituindo’ algumas lembranças do ensino, em particular algumas ‘características’ das aulas de Matemática vivenciadas na Educação Básica

Uma primeira aproximação ao ensino vivenciado pela P-4 adveio da análise das respostas obtidas no Questionário Inicial aplicado. Quando questionada sobre as ‘impressões’ acerca do significado de ESCOLA, (rever questão a.1, subseção 4.4.1.1), significado esse construído na/durante a Educação Básica, a P-4 respondeu o seguinte:

Educação Infantil: Era uma época de brincadeiras.

Ensino Fundamental (1.^a à 4.^a série): *A escola começou a ficar mais séria, tinha prova.*

Ensino Fundamental (5.^a à 8.^a série): *A escola era realmente séria. Quando mudei para a escola pública sofri um choque terrível, nada mais era sério.*

Ensino Médio: *Preparação para o vestibular.*

De uma “*época de brincadeiras*” que, supõe-se, trazia satisfação para a P-4 durante/na Educação Infantil, a escola passou a ser “*séria*” no Ensino Fundamental I (1.^a à 4.^a série) e “*realmente séria*” no Ensino Fundamental II (5.^a à 8.^a série). Essa seriedade, segundo a P-4, decorria da ‘cobrança’, talvez exagerada, acerca dos inúmeros conteúdos – das diversas disciplinas – abordados nestas duas etapas da escolaridade. Embora seja a função da escola garantir a construção, pelo aluno, do conhecimento sistematicamente acumulado pela humanidade, por que não propiciar um ‘espaço’ afetivo no qual tais construções ocorram de modo prazeroso? A respeito da afetividade, faz-se válido relembrar o exposto por Piaget (1990) acerca da importância da mesma, considerada a energética (combustível) da ação, para a construção/desenvolvimento do sujeito.

Em seguida, a P-4 salientou – rever questão a.2, subseção 4.4.1.1 – ter vivenciado uma influência negativa, na disciplina de Matemática, durante a sua trajetória escolar:

Era um ensino descontextualizado, onde eu não via sentido nenhum em aprender e se tornava cada vez mais difícil. Hoje eu não gosto de Matemática.

Nessa fala aparece um primeiro indício acerca da relação estabelecida pela P-4 para com a Matemática. Para ela, o ensino descontextualizado da Matemática acabou implicando na falta de “*sentido*” em/para aprendê-la, tornando-a, por conseguinte, cada vez mais difícil. Construir sentido a respeito de determinado ‘objeto’, no caso a Matemática, é sinônimo de construir uma significação (para a Matemática), sendo toda significação uma assimilação dos dados (do objeto) a esquemas ou conceitos já construídos pelo sujeito (PIAGET et al., 1996). Ao afirmar que a Matemática não possui sentido, então, a P-4 deu indícios (confirmados adiante) de não ter construído – via contínuas abstrações reflexionantes (PIAGET et al., 1995) e tomadas de consciências (PIAGET et al., 1977) – algumas estruturas (esquemas e ou conceitos) ‘relacionadas’ aos diversos conteúdos matemáticos abordados na Educação Básica. Essa não construção de tais estruturas de/para a assimilação acabou por contribuir na constituição de um sentimento negativo, a ponto da P-4 afirmar o seguinte: “*Hoje eu não gosto de Matemática.*”. O não gostar remete à afetividade, nesse caso, à sua falta. Como já discutido anteriormente, a falta de afetividade – isto é, da energética (combustível) da/para a ação (PIAGET, 1990) – pode implicar na não ação do sujeito em/para interagir com o objeto.

Como o conhecimento se constrói a partir dessa ação – conforme a Epistemologia Genética – então, o não agir sobre o objeto implica na não construção do conhecimento.

Na questão a.3 do referido questionário (rever subseção 4.4.1.1), a P-4 assinalou o seguinte sobre as estratégias didático-metodológicas adotadas pela maioria dos seus ‘antigos’ professores de Matemática:

Quadro 92 – Estratégias didático-metodológicas adotadas pela maioria dos professores de Matemática da P-4.

ESTRATÉGIAS DIDÁTICO-METODOLÓGICAS	NUNCA OU QUASE NUNCA	DE VEZ EM QUANDO	SEMPRE
1. Exposição Oral feita pelo professor na lousa.			X
2. Agrupamento dos alunos para realização de atividades sugeridas pelo professor.	X		
3. Atividades individuais solicitadas pelo professor.			X
4. Aplicação de jogos envolvendo noções / conteúdos matemáticos.	X		
5. Troca de ideias entre alunos e professores.		X	
6. Troca de ideias entre alunos e alunos.		X	
7. Trabalho interdisciplinar, ou seja, a Matemática e outras áreas do conhecimento.	X		
8. Trabalho intradisciplinar, ou seja, a Matemática em outras áreas do conhecimento.	X		
9. Atividades envolvendo materiais concretos manipulativos.	X		
10. Confecção de algum material pelos alunos.	X		
11. Atividades lúdicas como: dramatizações, brincadeiras, entre outras.	X		
12. Uso de tecnologias (computador, internet, calculadora, projetor, etc.)	X		

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2011.

De modo análogo ao observado na P-2, a maioria das aulas da P-4 – segundo o que ela se recordou – pautou-se na dupla “*exposição oral feita pelo professor na lousa*” x “*atividades individuais solicitadas pelo professor*”. As estratégias “*troca de ideias entre alunos e professor*” e “*troca de ideias entre alunos e alunos*” – troca essa necessária à possível descentração do pensamento e, por conseguinte, ao próprio desenvolvimento (PIAGET, 1998b) – de vez em quando ocorriam. No entanto, a P-4 não soube caracterizar – pelo fato de não se recordar – como tais trocas ocorreram; logo, não faz-se possível inferir se tais trocas foram ‘promotoras’ do referido processo de descentração. Já a estratégia “*agrupamento dos alunos para realização de atividades sugeridas pelo professor*” quase nunca ocorreu, ou seja, durante a sua Educação Básica não foram oportunizados momentos de/para o trabalho em grupo e a colaboração entre os alunos na resolução das atividades propostas em sala de aula.

Conforme defendido por Piaget (2002), o trabalho em equipe (em grupo) e a colaboração tornam-se importantes à própria construção das operações ao permitirem ao estudante confrontar as suas ideias com as do outro. Esse confronto contribui à já citada descentração do próprio pensamento (PIAGET; INHELDER, 1976; PIAGET, 1998b), descentração essa necessária à construção do pensamento operatório (objetivo e reversível).

Em relação às demais estratégias apresentadas no quadro anterior (*“aplicação de jogos envolvendo noções / conteúdos matemáticos”, “trabalho interdisciplinar, ou seja, a Matemática e outras áreas do conhecimento”, “trabalho intradisciplinar, ou seja, a Matemática em outras áreas do conhecimento”, “atividades envolvendo materiais concretos manipulativos”, “confeção de algum material pelos alunos”, “atividades lúdicas como: dramatizações, brincadeiras, entre outras” e “uso de tecnologias (computador, internet, calculadora, projetor, etc.)”*), a P-4 assinalou que as mesmas nunca (ou quase nunca) foram utilizadas pelos seus ‘antigos’ professores de Matemática. Se tais estratégias quase nunca foram utilizadas e a *“exposição oral feita pelo professor na lousa”* se fez presente frequentemente, então, o ensino de Matemática vivenciado pela P-4 pautou-se/principiou-se na/pela linguagem. Como apontado por Piaget (2002), um dos fracassos da educação escolar deve-se ao fato da mesma – ao pautar-se quase que exclusivamente pela linguagem – não permitir ao estudante a sua efetiva ação (e também material) sobre o objeto do conhecimento. Momentos que possibilitassem experiências do tipo física e lógico-matemática (PIAGET, 1998b) provavelmente não se fizeram presentes na maioria das aulas de Matemática da P-4 tendo em vista a pouca utilização de atividades envolvendo a manipulação/construção de materiais concretos. A manipulação/construção tornam-se importantes enquanto um ‘apoio’ à ocorrência das abstrações empírica e pseudoempírica (PIAGET et al., 1995) e essas, por sua vez, são fundamentais à construção do conhecimento/ao desenvolvimento do pensamento operatório.

Quando questionada se, dentre os seus ‘antigos’ professores de Matemática, ‘existiu’ algum professor que realizou um ensino ‘diferenciado’ – rever questão a.4, subseção 4.4.1.1 – a P-4 disse não existir ou, pelo menos, ela não se lembrou.

No decorrer dos encontros do GE, a P-4 apresentou alguns indícios que corroboraram com o dado analisado há pouco acerca da ruim relação estabelecida para com a Matemática, relação essa advinda das aulas vivenciadas na/durante a Educação Básica. Por exemplo, no 1.º encontro, durante uma ‘discussão de grupo’, a P-4 afirmou o seguinte quando questionada pelo pesquisador-autor sobre as influências negativas de ‘antigos’ professores:

90. **P-4:** *Ele [referiu-se a um antigo professor de Matemática] fala que você é burro, que não vai aprender mesmo, porque ele próprio não sabe. E, daí, quando o aluno pergunta ele se sente ofendido, e como ele não pode demonstrar que ele não sabe ele vai ofender o aluno...*

91. **Pesquisador/Participante:** Quem aqui já foi ofendido, muito?

92. **P-4:** *Eu... [Risos.]. Eu não lembro muito, especificamente, mas me marcou. A Matemática pra mim, desde que eu me conheço, que eu entrei na escola, eu acho que foi um professor que falou muito mal, que eu não sabia mesmo, uma coisa assim... Porque eu, Matemática pra mim dá até alergia, eu não posso nem ouvir em falar em Matemática. [A participante, neste momento, imitou tal alergia ao passar a mão direita sobre o braço e as demais participantes deram risada.]*

93. **Pesquisador/Participante:** Então você vivenciou, é uma ‘prova viva’ de que tanto as influências negativas quanto as positivas... Você teve alguma positiva?

94. **P-4:** *Ah, assim, que eu me lembre... eu não tive nenhuma positiva! E eu acho que depois de um período, eu já estava tão calejada... eu acho que coloquei na cabeça “Não gosto de Matemática!”... então, qualquer pessoa depois de uma certa época que veio falar pra mim “Ah, a Matemática é bom, é legal, vamos fazer!”, eu já não aceitava mais que podia ser bom. Eu acho que eu internalizei isso! [Transcrição do 1.º Encontro, Apêndice E]*

A primeira fala da P-4 evidenciou um fato (infelizmente) ainda presente na escola, ou seja, a ineficiente Formação Inicial de professores para o ensino de Matemática que pode desencadear, conseqüentemente, momentos como o narrado pela licencianda. Ao não saber o conteúdo (a ser ensinado), o ‘antigo’ professor da P-4 valeu-se de um subterfúgio para ‘fugir’ da resposta, chamando-a de “burra”. Ao que tudo indica, tal ofensa ‘bloqueou’ a P-4 no que se refere à possibilidade do seu agir/‘fazer Matemática’, causando-lhe, inclusive “até alergia, eu não posso nem ouvir em falar em Matemática”. Para ela, a Matemática tornou-se um obstáculo intransponível, de nada adiantando os outros falarem “Ah, a Matemática é bom, é legal, vamos fazer!”. Mais uma vez retoma-se a questão da importância da afetividade – defendida por Piaget (1990) – e o quanto a sua ‘inexistência’ implica na não ação do sujeito sobre o objeto. Sem a ação – conforme a Epistemologia Genética – a construção torna-se difícil, senão impossível. Tal experiência acabou contribuindo na construção, pela P-4, de uma crença de que a Matemática é impossível de ser aprendida. Essa crença pode reforçar a existência da concepção – apontada por Pontes (1992) – de que a maioria das pessoas não constrói a Matemática, com exceção do gênio que possui dom/talento (ou seja, capacidades inatas) que lhe possibilita construir tal ciência.

O trauma vivido pela P-4 foi tanto que a mesma não conseguiu se recordar, ao certo, o que ocorreu nas suas ‘antigas’ aulas de Matemática de modo a lhe causar tal trauma. Esse fato foi citado pela participante em uma ‘discussão de grupo’ – realizada no 10.º encontro – na qual foram compartilhadas experiências das ‘antigas’ aulas de Matemática vivenciadas pelas licenciandas. Observe:

283. **P-8:** *Eu lembro de experiência... Mas assim, eu lembro, de uma coisa que marcou... eu tinha maior medo... A gente tinha chamada oral de tabuada, aí o professor pegava a lista e ele ia assim, oh: [Imitou o seu ‘antigo’ professor de Matemática ao sortear um aluno – da lista de presença – para recitar determinada tabuada.] “Número tal, fale a tabuada do número 7!”. Tinha que falar a tabuada inteirinha, tinha que levantar e falar. E eu morria de medo de esquecer a tabuada, eu ficava nervosa...*
284. **P-2:** *E se você errasse, o que acontecia?*
285. **P-8:** *Baixava ponto!*
286. **P-2:** *Então é uma experiência!*
287. **Pesquisador/Participante:** *Sim, é uma experiência!*
288. **P-8:** *E é uma experiência de Matemática!*
289. **P-2:** *Eu não fui torturada!*
290. **P-8:** *Ah, eu fui! Eu morria de medo...*
291. **Pesquisador/Participante:** *Então, aqui, a ‘torturada’ foi a P-8, a P-4 e quem mais?*
292. **P-7:** *Eu!*
293. **Pesquisador/Participante:** *Você não, né P-5?*
294. **P-5:** *Não!*
295. **Pesquisador/Participante:** *E você também não, né P-1?*
296. **P-1:** *Não!*
297. **P-7:** *Tinha chamada oral e eu morria de medo! E era assim, você errou, tirava ponto...*
298. **P-8:** *E daí se você errava as crianças começavam a gozar da sua cara!*
299. **P-4:** *Vocês acreditam que eu não tenho recordação de nada! É verdade! Eu sei que eu sofri, que eu fui torturada, que me dava alergia falar de Matemática, mas não sei como foi. Além daquele fato que eu já falei do professor me falar que eu não conseguia aprender mesmo, que eu era burra!*
300. **P-7:** *Até a minha Educação Física era assim!*
301. **P-4:** *Parece, Pesquisador/Participante, que essa parte, assim, apagou da minha mente. [Referiu-se às aulas de Matemática vivenciadas na Educação Básica.]*
302. **Pesquisador/Participante:** *Você, P-4, bloqueou...*
303. **P-4:** *Eu não lembro de nada. [Risos.]*
304. **Pesquisador/Participante:** *O nosso cérebro é tão ‘inteligente’ que ele ‘bloqueia’ situações negativas que a gente vive, em muitos casos...*
305. **P-8:** *Mas é mesmo!*
306. **P-4:** *Todo mundo me pergunta: “Por que você não gosta da Matemática?”. E eu respondo: “Eu não sei o porquê!”. Eu não gosto, mas..., sabe, não tem um porquê, assim, do que aconteceu!*
307. **P-2:** *Eu, nas aulas de Matemática, era bem quietinha!*
308. **P-7:** *Eu, então, nem olhava pro lado! [Transcrição do 10.º Encontro, Apêndice N]*

Assim como observado na maioria das aulas da P-2, a P-4 também vivenciou momentos de “overdose de conhecimento”, ou seja, momentos que dificultaram a assimilação/compreensão (e posterior acomodação) do conteúdo abordado pelo professor. O trecho seguinte mostra-se revelador nesse sentido:

288. **P-4:** *Eu lembro, Pesquisador/Participante, que quando eu fazia o 3.º colegial, assim, e eu fiz em escola particular. O professor, assim, achava que a classe inteira sabia toda a base da Matemática... e daí ele ia explicar e eu nem sei que assunto lá... [Risos da participante.] Mas, vamos supor, ele ia explicar e acreditava que a classe inteira já tinha construído toda a base da Matemática...*
289. **Pesquisador/Participante:** *E o duro é que ele acredita mesmo, na maioria das vezes!*

290. **P-4:** *E daí ele achava que só precisava explicar aquele conceito daí pra frente!*
291. **Pesquisador/Participante:** Ok!
292. **P-4:** *Então, por exemplo, sei lá, ele começava a falar, ele até remetia alguma coisa: “Lembra disso? Então, é assim! E vamos pra frente!”... Então, sabe, eu começava... Ah, imagina! Pra mim era tudo grego!*
293. **Pesquisador/Participante:** Então parecia uma outra língua, embora seja uma outra língua que é a Matemática!
294. **P-4:** *É, e eu não entendia nada! As aulas de Matemática pra mim, assim, eu ficava olhando pras contas, passava os resultados [Risos da participante.] entendeu!? E eu percebia que a classe estava acompanhando o que ele estava ensinando, mas eu acredito que tenham também alguns alunos, né, que não acompanhavam que nem eu!*
295. **Pesquisador/Participante:** Claro, acho que com certeza! [Risos entre todos.]
296. **P-4:** *Sabe assim, ele perguntava e os outros respondiam! Ele corrigia na lousa e todo o mundo tinha feito... Agora eu, mas nem... [Fez um gesto com as mãos indicando não estar compreendendo ‘nada’ referente aos conteúdos abordados nas aulas do professor de Matemática.] Nem nada, assim! [Transcrição do 11.º Encontro, Apêndice O]*

Para a P-4, a abordagem dos conteúdos de Matemática feita de modo ‘apressado’ (pelo seu ‘antigo’ professor de Matemática do Ensino Médio) acabou contribuindo para que a mesma caracteriza-se a Matemática como sendo algo “grego”, isto é, sem compreensão. Ela “ficava olhando pras contas” sem, no entanto, compreender o que estava ‘ocorrendo’. Nesse momento, o conteúdo abordado estava ‘distante’ da capacidade de assimilação da P-4. Logo, ao ser incapaz de compensar o obstáculo/a perturbação/o desequilíbrio provocado pelas atividades propostas pelo seu antigo professor, a licencianda o ignorou (PIAGET et al., 1995), isto é, não as realizou. Supõe-se, ainda, que a utilização do algoritmo convencional abordado de modo apressado pelo seu ‘antigo’ professor – isto é, sem o tempo necessário para a construção de esquemas que os ‘signifique’ em uma diversidade de situações (VERGNAUD, 1996a) – acabou contribuindo para a ocorrência da referida incompreensão denotada pela P-4. Assim, para que não fosse prejudgada pelos seus colegas e/ou professores, a mesma fingia entender o assunto abordado conforme expresso no trecho seguinte:

255. **Pesquisador/Participante:** Então você fingia que aprendia para que isso não lhe causasse constrangimento!?
256. **P-4:** *Sim!*
257. **Pesquisador/Participante:** Copiava do colega, não por má fé, não é isso, mas era para que você não fosse prejudgada pelo professor.
258. **P-4:** *Eu lembro, assim, do 3.º colegial, posso falar?*
259. **Pesquisador/Participante:** Sim!
260. **P-4:** *O professor do cursinho... ele era do cursinho e dava aula pra gente. E daí era aquela sala enorme, eu acho que tinha 60 alunos na sala. E daí ele passava o exercício da apostila e falava pra gente fazer! Eu olhava aquilo e pra mim era tudo grego! [Risos da participante.] Eu não sabia nem por onde começar!*
261. **P-8:** Não tinha explicação?

262. **P-4:** *Ele partia do pressuposto que a gente já tinha toda aquela base, né... e eu, imagina! Então ele... até no começo eu fazia esforço e pensava “To entendendo!”*, daí ele já... por exemplo, ele ia fazer o exercício na lousa! Aí ele começava a fazer e não ia passo a passo, sabe... certinho, assim! Então ele começava a fazer e eu até acompanhava, mas daí ele pulava uns pedaços, porque ele já sabia se todo mundo já entendeu, então ele já dava o resultado final... porque todo mundo entendeu o processo que chega ali. E eu... **[Indicou, gestualmente, não haver compreendido a explicação do referido professor de Matemática.]**

263. **Pesquisador/Participante:** A P-4, no início, tentou manter a atividade ao máximo, só que a perturbação foi tão grande, o desequilíbrio – que é o sinônimo – foi tão grande que não deu pra ela compensar isso, para que pudesse acomodar esse novo. Então ela teve que ignorar, ela foi obrigada a ignorar...

264. **P-4:** *É, eu copiava lá do jeito que ele colocou a explicação na lousa, não entendia...* **[Transcrição do 13.º Encontro, Apêndice Q]**

As situações vividas pela P-4, em algumas aulas de Matemática, acabaram causando-lhe o medo em perguntar/questionar. Logo, restava-lhe copiar o texto da lousa e tentar ‘acompanhar’ a explicação realizada pelo professor. Pelo menos para a P-4, a troca de ideias/questionamento entre ela e seus colegas (e entre o professor) não era possível pela falta de confiança. A ruim relação estabelecida para com essa ciência foi um dos fatores que a fez desistir de prestar o vestibular para o curso de Licenciatura em Biologia, já que nesse curso ‘tinha’ Matemática:

343. **P-4:** *Eu adorava esta parte dos genes! Eu só não fiz Biologia porque tinha Matemática!* **[As demais participantes riram.]** *Mas é verdade, nesta parte da Probabilidade eu adorava fazer os exercícios... nossa, eu fazia um monte!* **[Transcrição do 14.º Encontro, Apêndice R]**

Durante a discussão acima, a P-4 disse ter gostado de fazer os exercícios de probabilidade porque, na Biologia, a abordagem da Matemática foi ‘outra’:

347. **P-4:** *Nossa, eu adorava esta parte! Eu sempre adorei Biologia, e eu acho que eu aprendi aí, porque eu acho que foi um outro enfoque, não só da Matemática!*

348. **Pesquisador/Participante:** Seria porque você via uma utilização com significado daquilo que você estava fazendo?

349. **P-4:** *É!* **[Transcrição do 14.º Encontro, Apêndice R]**

Podemos supor, a partir da fala da P-4, que em muitos momentos das aulas de Matemática o conteúdo abordado e/ou as atividades solicitadas ocorreram de modo ‘mecânico’, ou seja, aplicava-se o algoritmo convencional sem a real compreensão de sua utilização, culminando, por conseguinte, na ‘imagem’ de uma Matemática do tipo ‘grega’. A P-4 observou, inclusive, o desespero sentido por ela quando os números e as letras das expressões/resoluções matemáticas se ‘misturavam’:

281. P-4: *Em mim dava desespero quando eu via as letras misturadas com os números na lousa!* [Transcrição do 17.º Encontro, Apêndice 17]

O desespero sentido pela P-4 indicou a sua incapacidade de/para assimilar o conteúdo abordado em sala de aula. Tal incapacidade se deveu a (ainda) não construção de esquemas e ou conceitos que lhe possibilitassem assimilar os conteúdos matemáticos pertencentes à Álgebra (ou que utilizassem da linguagem algébrica).

Em suma, assim como observado na P-2, a grande maioria das aulas de Matemática da P-4 parece ter sido pautada na lógica “*exposição oral do conteúdo*” x “*resolução de exercícios utilizando o algoritmo convencional*”. A não abordagem de situações ‘*interessantes e necessárias*’ (PIAGET, 1998a, 1998b), respeitando o tempo à efetiva ação sobre o objeto – de modo a construir o pensamento operatório formal que lhe possibilitasse compreender as expressões matemáticas – acabou implicando em uma visão/concepção de Matemática como algo sem sentido/desligada da realidade (PONTE, 1992). A aplicação do algoritmo, sem o seu devido significado, contribuiu para essa falta de sentido. Além disso, a humilhação sofrida pela P-4, em uma das aulas de Matemática, acabou por atrapalhar o seu desempenho posterior nessa disciplina, causando-lhe um tipo de bloqueio que acabou culminando no não gostar de Matemática. Eis a importância (e grande responsabilidade) do professor de Matemática em promover situações de ensino adequadas ao momento (estádio) de desenvolvimento do aluno, bem como em propiciar um ambiente de sala de aula pautado na colaboração/cooperação, cuja realização de atividades em grupo (também) se faça presente. A P-4, na grande maioria das suas ‘antigas’ aulas de Matemática, infelizmente não experienciou esse tipo de ensino.

6.2.1 Alguns conhecimentos matemáticos pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’: o ‘antes’ e o ‘após’ a participação/ação no GE

Nesta subseção apresentam-se alguns conhecimentos matemáticos pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’ construídos na/durante a Educação Básica pela P-4. Logo em seguida, apresentam-se as possíveis (re)significações para alguns desses conhecimentos, (re)significações essas advindas da participação/ação da P-4 no GE ao realizar as diversas atividades desenvolvidas no GE, inclusive ao resolver – individualmente e coletivamente – as diversas ‘situações problema’ e os ‘desafios para casa’ relacionados a tais conhecimentos matemáticos (rever seção 5).

Quando questionada sobre o que entendia por ‘Tratamento da Informação’ (rever questão a.5.1, subseção 4.4.1.1), a P-4 escreveu tratar-se de “*Análise de gráfico e tabelas*”.

Pode-se inferir que a licencianda, assim como a P-2, apenas referiu-se a dois conteúdos/procedimentos pertencentes à Estatística e não contemplou outros relacionados à Combinatória e à Probabilidade; áreas essas que também constituem o bloco ‘Tratamento da Informação’. Para investigar o que a participante entendia por Combinatória e Probabilidade, o pesquisador-autor solicitou que a mesma respondesse uma questão (questão 8, ver subseção 4.4.1.1) cuja resposta apresenta-se a seguir:

Probabilidade: *São chances de algo acontecer ou não hipóteses*

Combinatória: *São combinações, permutações: exemplo eu tenho uma saia azul e uma rosa e tenho 3 blusas de cores diferentes quantas vezes eu vou conseguir usar uma saia e uma blusa diferente, acho que seria isso*

Embora as palavras “*combinações*” e “*permutações*” tenham sido apresentadas na resposta acima, quando questionada pelo pesquisador-autor sobre o que entendia por esse conceitos matemáticos, a P-4 disse ter ‘apenas’ ouvido falar nesses nomes. Defini-los – segundo a licencianda – não seria possível, pois ela não tinha entendido/conceituado (PIAGET et al., 1977) tais conteúdos abordados no Ensino Médio. Aliás, o exemplo elaborado pela P-4 não se referiu a uma permutação, fato esse que se constituiu um indício da utilização de uma palavra/significante (representativa de um conceito matemático) sem o seu real significado. Como já pontuado por Vergnaud (1996a), a utilização apressada do algoritmo convencional (a ‘fórmula’) e a não resolução de uma variedade de situações problema acerca de determinado conceito/campo conceitual – e ao longo de um considerável período de para/a ação sobre o objeto do conhecimento de modo a possibilitar a construção, pelo estudante, dos esquemas necessários à conceituação do referido conceito – acabam ‘provocando’ episódios como o apresentado pela P-4, ou seja, o da utilização de uma palavra/significante sem a real compreensão do seu significado.

Em relação à resposta elaborada para a Probabilidade, a P-4 não soube exemplificar como calcular as “*chances de algo acontecer ou não*”. Em relação aos conceitos de espaço amostral, evento aleatório equiprovável, evento certo e impossível, a licencianda não soube defini-los e/ou exemplificá-los. Faz-se pertinente ressaltar que, quando solicitada a responder o que entendia por Probabilidade e Combinatória, a P-4 proferiu o seguinte questionamento “*Mas não é a mesma coisa?*”. Tal questionamento indicou, mais uma vez, a (ainda) não construção pela licencianda acerca do entendimento a respeito dessas áreas da Matemática.

Considerando tais respostas acerca do ‘Tratamento da Informação’, a P-4 deu indícios de ter construído um conhecimento superficial a respeito dos conteúdos que ‘constituem’ a

Estatística, a Combinatória e a Probabilidade. Adiante, inclusive, poder-se-á constatar algumas lacunas/dificuldades da P-4 no que tange à resolução de algumas tarefas matemáticas envolvendo alguns conceitos pertencentes a tais áreas. Esse fato, de modo análogo ao observado na P-2, corrobora com a literatura (ABRAHÃO; SILVA, 2017; ARAMAN; SAMPAIO, 2013; ARAÚJO; PEREIRA, 2016; BARRETO; SOUSA, 2009; CARVALHO, 2007; DICETTI; CERETA, 2016; FERNANDES, 2013; FERNANDES; LEITE, 2015; NACARATO, 2010; OLIVEIRA, 2010; PROENÇA, 2015; RIBEIRO; ALBRECHT, 2016; ROSA, 2015; SANTOS; GHEDIN, 2016; SOARES, 2013; SOUZA; BORGES, 2016) a respeito das lacunas conceituais dos licenciandos em Pedagogia acerca dos conteúdos de Matemática.

Após a participação/ação no GE, a P-4 apresentou – na perspectiva dela – as possíveis (re)significações relativas à Estatística, à Combinatória e à Probabilidade:

Quadro 93 – Possíveis (re)significações respondidas pela P-4 acerca do ‘Tratamento da Informação’.

	ÁREAS	RESPOSTA da questão a.2 – rever subseção 4.4.3
‘APÓS’	Estatística	<i>A estatística para mim foi o mais difícil principalmente a construção de gráficos, mas com exemplos e a explicação do professor foi muito tranquilo e prazeroso.</i>
	Probabilidade	<i>A probabilidade foi o mais fácil, mas também percebi que não preciso decorar nenhuma fórmula para resolver os problemas de probabilidade. E que há relação entre a combinatória e a probabilidade pois para encontrarmos o espaço amostral podemos utilizar o mesmo diagrama de árvore da combinatória, para a resolução dos problemas.</i>
	Combinatória	<i>Pude perceber que não preciso de formulas para resolver os problemas de combinatória, basta entender o enunciado e resolver pelo diagrama de árvore, por exemplo, que eu não conhecia, mas foi de fundamental importância para o real entendimento dos problemas e para eu ter mais confiança no meu pensamento/reflexão sem utilizar/decorar fórmulas.</i>

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2012.

Mediante a análise do quadro anterior, pode-se identificar duas (re)significações apontadas pela P-4, a saber: a) a relação existente entre a Combinatória e a Probabilidade, ou seja, a utilização da Combinatória para a constituição do espaço amostral a ser utilizado para o cálculo da probabilidade clássica; b) a utilização do esquema/algoritmo diagrama de árvore (ou árvore de possibilidades) na/para a resolução de situações envolvendo os diferentes tipos de agrupamentos combinatórios. Em relação à (re)significação a), ‘antes’ da participação/ação no GE, a P-4 – devido à abordagem estanque dos conteúdos matemáticos durante a Educação Básica – (ainda) não havia estabelecido tal relação entre a Combinatória e a Probabilidade. Além dessas (re)significações específicas a tais áreas, a licencianda citou a não mais necessidade (obrigatoriedade) da ‘fórmula’ para o seu ‘fazer Matemática’. Essa

(re)significação, segundo a participante, foi importante para a construção de uma ‘nova’ relação para com a Matemática, relação essa até então traumática e limitada pelo uso obrigatório do algoritmo convencional.

Ainda sobre a Combinatória e a Probabilidade, outras duas (re)significações foram identificadas. Observe, nos dois ‘momentos de síntese’ elaborados pela P-4, o ‘novo’ entendimento acerca das referidas áreas:

Existem vários tipos de Combinatória, com agrupamentos, problemas de contagem Arranjo, Grupo, Permutação, Combinação Simples, e tudo isso com Repetição e sem Repetição. Vale lembrar que não são todos resolvidos da mesma forma, portanto é preciso pensar sobre o que se pede em cada problema primeiro para conseguir resolver corretamente. É preciso também entender cada tipo de Combinatória para facilitar o como fazer em cada problema. [Momento de síntese, 15.º Encontro]

A Probabilidade tenta sistematizar fenômenos aleatórios, mas não dá conta totalmente, pois os resultados não são previsíveis. Não é possível determinar com certeza o resultado a ser obtido. Por isso, o Espaço Amostral deve ser sempre Equiprovável, ou seja, os elementos devem possuir a mesma Probabilidade de ocorrer para que o aleatório fique “amenizado”. A Probabilidade Frequentista é usada para estimar um evento, principalmente quando ele não pode ser calculado teoricamente pela razão entre Evento e Espaço Amostral, ele é então calculado pela quantidade de experimentos. Quanto maior for a quantidade, maior será a estimativa. Para se calcular a frequência relativa do dado perfeito, por exemplo, é necessário pelo menos que esse dado seja lançado 1000 vezes e que todas as faces tenham a frequência relativa dentro de uma média e que sejam parecidas. [Momento de síntese, 18.º Encontro]

Ao afirmar “É preciso também entender cada tipo de Combinatória para facilitar o como fazer em cada problema.”, a P-4 deu indícios de uma progressiva construção relativa à diferenciação entre os tipos de agrupamentos combinatórios. Adiante, quando da análise dos esquemas utilizados para a resolução das tarefas matemáticas envolvendo os conceitos de arranjo, permutação e combinação, apresentar-se-á uma fala da licencianda na qual esse tipo de diferenciação foi explicitada. Em relação à Probabilidade, a P-4 construiu algumas (re)significações referentes: a) ao entendimento de Probabilidade enquanto uma ciência que sistematiza fenômenos aleatórios; b) à questão da previsibilidade inerente ao pensamento/cálculo probabilístico; c) à diferença entre a probabilidade clássica e a frequentista.

Em relação às tarefas matemáticas e aos esquemas, far-se-á uma análise comparativa para cada um dos conceitos, a saber: média aritmética, permutação, arranjo e combinação.

Antes da participação/ação da P-4 no GE, no que tange aos esquemas matemáticos elaborados nas resoluções de três tarefas matemáticas acerca do conceito de média aritmética, identificou-se o seguinte:

Quadro 94 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 1.

1) Considerando o problema proposto pela professora de Matemática Sueli (relativo às alturas dos alunos do 8.º ano C²) como você iria proceder para obter a Média Aritmética de tais valores? Após escrever como você procedeu, registre a Média Aritmética encontrada.

Resolução:

A participante excluiu da soma as medidas iguais. Ao final, dividiu o resultado por 22, sendo esse o número de vezes que cada uma das medidas não repetidas apareceu no registro feito pela professora de Matemática Sueli.

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2012.

Quadro 95 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 2.

2) (UFRN) Uma prova foi aplicada em duas turmas distintas. Na primeira, com 30 alunos, a média aritmética das notas foi de 6,40. Na segunda, com 50 alunos, foi 5,20. A média aritmética das notas dos 80 alunos foi:
a) 5,65 b) 5,70 c) 5,75 d) 5,80

Resolução:

$$6,40 + 5,20 = 11,60$$

$$11,60 \div 2 = 5,80$$

A participante não conseguiu resolver a tarefa matemática corretamente. Ela somou as médias 6,40 e 5,20. O resultado (11,60) foi por ela dividido por 2, obtendo-se o valor 5,80.

Logo, assinalou a alternativa incorreta d).

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2012.

Quadro 96 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 3.

3) (UFAL) Considere 8 números cuja média aritmética é 4,5. Retirando-se um desses números, a média aritmética dos restantes é 4,2. O número retirado é
a) 0,3 b) 3,3 c) 5,4 d) 6,6 e) 8

Resolução:

A participante não conseguiu resolver a tarefa matemática corretamente. Ela subtraiu 4,5 de 4,2 e marcou a alternativa a).

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2012.

Mediante os esquemas/resoluções elaborados pela P-4 acerca das tarefas matemáticas, pode-se inferir que a mesma ainda não sabia ‘utilizar’ o conceito de média aritmética em situações que ‘exigiam’ tal conteúdo. Quando questionada sobre o que entendia por esse conceito, a licencianda respondeu “*Soma tudo e divide pelo total.*”; embora questionada novamente, a P-4 não soube detalhar/explicitar mais a sua resposta. O fato de não ter obtido êxito nas resoluções das referidas tarefas pode ser um indício de que a licencianda necessitava

² No referido problema, a professora de Matemática Sueli registrou a medida de cada uma das alturas dos seus alunos 30 alunos. As mesmas apresentam-se a seguir (na unidade de medida cm): 130, 130, 130, 131, 132, 133, 133, 137, 141, 142, 143, 144, 145, 145, 147, 147, 150, 150, 151, 152, 152, 153, 153, 158, 159, 160, 161, 162, 171, 177.

resolver/discutir uma diversidade de situações envolvendo o conceito de média aritmética para a compreensão desse “*Soma tudo e divide pelo total*”.

Após a participação/ação da P-4 no GE – no que se refere aos esquemas matemáticos elaborados nas resoluções de duas tarefas matemáticas envolvendo o conceito de média aritmética – obteve-se o seguinte:

Quadro 97 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 4.

4) Considere sete números cuja Média Aritmética é 6. Adicionando um número a esse conjunto, a ‘nova’ Média Aritmética é 5,5. O número adicionado é:				
a) 0,5	b) 5,5	c) 5,75	d) 2	e) 3
Resolução:				
$\begin{array}{r} \text{somatória } 6 \times 7 = 42 \\ \text{somatória } 8 \times 5,5 = 44 \\ \hline 02 \end{array}$				
A participante circulou a alternativa correta (d).				
Observação: A participante registrou, ao final da folha, o algoritmo da multiplicação referente a $5,5 \times 8$.				

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2012.

Quadro 98 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 5.

5) No desafio anterior, qual número deve ser adicionado ao conjunto inicial (dos sete números) para que a Média Aritmética permaneça a mesma, ou seja, igual a 6?				
a) 7	b) 2	c) 6	d) 5	e) 4
Resolução:				
$\frac{6+6+6+6+6+6+7}{8} \qquad \frac{42+7}{8} = \frac{49}{8} \qquad \frac{42+2}{8} = \frac{44}{8}$ $\frac{42+6}{8} = \frac{48}{8} \qquad \frac{42+5}{8} = \frac{47}{8} \qquad \frac{42+4}{8} = \frac{46}{8}$				
A participante circulou a alternativa (a) escrevendo após o número 7 o seguinte: = 6 . Após, circulou a alternativa correta (c) escrevendo ao lado a palavra exatamente.				
Observação: A participante registrou, fora do espaço delimitado à solução da tarefa, o seguinte:				
$\begin{array}{r} 49 \quad \quad 8 \\ 01 \quad 6 \\ 44 \quad \quad 8 \\ 4 \quad 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \quad \quad 8 \\ 5 \quad 0 \quad 6 \\ 6 \quad \quad 8 \\ 7 \quad 5, \\ 46 \quad \quad 8 \\ 6 \quad 5, \end{array}$				

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2012.

Os esquemas elaborados pela P-4, ao resolver corretamente ambas as tarefas matemáticas, indicam um avanço com relação à utilização/ao entendimento do procedimento matemático referente ao conceito de média aritmética. Os esquemas utilizados na tarefa 5 se

aproximaram do algoritmo convencional (que também é um tipo de esquema). Tais indícios representam uma (re)significação acerca desse conteúdo matemático, inclusive quando se compara o insucesso nas resoluções das tarefas 1 à 3. Aliás, durante a ‘discussão de grupo’ referente ao compartilhamento da resolução de um ‘desafio para casa’³, a P-4 respondeu o seguinte:

Não, pois percebemos que a média aritmética nem sempre está próxima do número de valores, que no caso tem 20 anos, no exemplo. Teríamos que calcular a amplitude, a variância e o desvio padrão para ter certeza se as medidas realmente ficassem próximas da média aritmética... mas também não dá pra calcular porque também não tem todas as idades dos alunos. Se as idades dos alunos forem próximas a 20 anos, o professor pode planejar a atividade, mas se tiverem alunos muito mais novos e muitos mais velhos a média aritmética não vai ser fiel à quantidade de alunos igual a 20 anos.

Tal resposta evidencia uma (re)significação da P-4 acerca do conceito de média aritmética. Ao afirmar que “*nem sempre [a média aritmética] está próxima do número de valores*” a licencianda referiu-se ao fato da média aritmética nem sempre ser uma medida de posição representativa de um conjunto de dados (por exemplo, a média aritmética do conjunto de idades 9, 10 e 80 anos é 33 anos; tal medida não é representativa desse conjunto). Inclusive, a participante citou as medidas de dispersão (variância e desvio padrão) utilizadas para a ‘qualificação’/caracterização da média aritmética de modo a identificar se a mesma é representativa (ou não).

Em relação aos esquemas matemáticos elaborados na/para a resolução de tarefas matemáticas envolvendo os conceitos de princípio multiplicativo, permutação e arranjo, ‘antes’ da participação/ação da P-4 no GE, identificaram-se os seguintes:

Quadro 99 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 6.

6) Numa lanchonete há 4 tipos de sanduíches, 5 tipos de sucos e 2 tipos de sorvetes. De quantas maneiras diferentes podemos tomar um lanche composto de 1 sanduíche, 1 suco e 1 sorvete?	
Resolução:	
5 vezes	

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2012.

Quadro 100 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 7.

7) Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?	
Resolução:	
5 números	123 213 231 132 312

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2012.

³ O ‘desafio para casa’ foi o seguinte: “1. O professor de Educação Física Pedro foi encarregado de organizar atividades de lazer para 3 grupos de 6 pessoas cada e recebeu a informação de que a Média Aritmética de idade de cada grupo é 20 anos. Apenas esta informação é suficiente para o planejamento das atividades a serem realizadas? Justifique sua resposta.”

Quadro 101 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 8.

8) Em uma competição com 8 corredores, de quantos modos distintos podem ser conquistadas as medalhas de ouro e prata?
Resolução: A participante não conseguiu resolver a tarefa.

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2012.

Ao analisar as resoluções elaboradas pela P-4 nas tarefas 6 e 7 é possível inferir que a mesma (ainda) não construiu o conceito do princípio fundamental da contagem (ou princípio multiplicativo), bem como o de permutação, pelo menos do ‘ponto de vista’ do seu procedimento (matemático). O mesmo pode ser indicado acerca do conceito de arranjo, pois a participante não conseguiu resolver a tarefa 8. A licencianda utilizou o método da tentativa um a um (um tipo de esquema) – no caso da tarefa 7 – para combinar os algarismos 1, 2 e 3; contudo, não obteve êxito no que tange à resolução correta da mesma. Conforme salientado pela P-4, durante o Ensino Médio ela *‘lembrava-se de ter visto’* exercícios parecidos como esses. No entanto, agora, sem se lembrar da ‘fórmula’, não daria para resolver as referidas tarefas. Aliás, nem com a ‘fórmula’ ela conseguia saber quando *“era arranjo, quando era combinação, etc.”*. A utilização apressada do algoritmo convencional, como já referido por Vergnaud (1996a), acaba provocando episódios como o narrado pela P-4, ou seja, a utilização de um significante (uma expressão matemática) sem a devida compreensão do seu significado (dos invariantes operatórios/esquemas) e do ‘quando’ utilizar tal expressão.

Devido às tentativas (não exitosas) de resolução das tarefas 6 à 8, pode-se afirmar que a P-4 (ainda) não construiu os esquemas matemáticos necessários (e referentes) aos conceitos de princípio multiplicativo, permutação e arranjo. Faltava à licencianda resolver uma diversidade de situações, para o campo conceitual (combinatório), de modo que os esquemas construídos pudessem (futuramente) – por meio de uma progressiva tomada de consciência (PIAGET et al., 1977) e com o auxílio da linguagem – constituírem-se em conceitos formalizados (explícitos).

Após a participação/ação da P-4 no GE – no que se refere aos esquemas matemáticos elaborados nas resoluções de quatro tarefas matemáticas envolvendo os conceitos de permutação, arranjo e combinação – identificaram-se as seguintes resoluções:

Quadro 102 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 9.

9) As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Quantas placas podem ser criadas com as letras A, B e C e os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, podendo repetir a letra e não podendo repetir o algarismo?
Resolução:

$$\underbrace{3 \times 3 \times 3}_{\text{repetir}} \times \underbrace{7 \times 6 \times 5 \times 4}_{\text{não pode repetir}} = 22.680$$

placas podem ser criadas

$$\begin{array}{r} 1. \quad 1 \quad 3 \quad 4 \\ \times \quad 6 \\ \hline 5 \quad 6 \quad 7 \quad 0 \\ \times \quad 4 \\ \hline 22 \quad 6 \quad 8 \quad 0 \end{array}$$

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2012.

Quadro 103 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 10.

10) A diretoria de um clube é composto por 12 membros que podem ocupar a função de presidente, secretário ou tesoureiro. De quantas maneiras pode-se formar, com os 12 membros, chapas que contenham presidente, secretário e tesoureiro?

Resolução:

$$\underbrace{12 \times 11 \times 10}_{\text{não pode repetir}} = 1.320$$

chapas diferentes

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \\ \times \quad 1 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 2 \\ \times \quad 1 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 2 \end{array}$$

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2012.

Quadro 104 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 11.

11) Seis amigos foram ao parque de diversões ‘andar’ de montanha russa. Eles pretendem ir no mesmo carrinho; no entanto, no banco da frente – que ‘produz’ maior emoção – só cabem três pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem escolher o trio que irá no banco da frente?

Resolução:

$$\underbrace{6 \times 5 \times 4}_{\text{não pode repetir}} = 120$$

maneiras diferentes

$$\begin{array}{r} 3 \quad 0 \\ \times \quad 4 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 0 \end{array}$$

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2012.

Quadro 105 – Resolução elaborada pela P-4 da tarefa matemática 12.

12) Quantos são os anagramas possíveis da palavra PAPAGAIO?

Resolução:

$$\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{40.320}{12} = 3.360$$

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2012.

As resoluções corretas apresentadas pela P-4 às referidas tarefas dão indícios de uma (re)significação envolvendo os conceitos de permutação, arranjo e combinação. A utilização de esquemas ‘mais próximos’ ao algoritmo convencional – esquemas esses elaborados pela P-4 sem a exigência/obrigação do uso do algoritmo convencional – pode ser um indicativo de um melhor entendimento acerca dos referidos conceitos matemáticos, pois quando a ‘forma’ se desprende do ‘conteúdo’ é um indício de conceituação (PIAGET et al., 1977). O algoritmo convencional, por exemplo, representa uma ‘forma’ desprendida de seu ‘conteúdo’. A licencianda conseguiu, à sua maneira, elaborar os próprios esquemas que lhe permitiu ‘fazer Matemática’, fazer esse, segundo ela, ‘impossibilitado’ durante a Educação Básica. Tal impossibilidade adveio, em partes, da obrigatoriedade do uso do algoritmo convencional sem

o devido significado. Além da elaboração dos referidos esquemas, a P-4 construiu uma (re)significação no que tange à explicação acerca da diferenciação entre os tipos de agrupamentos combinatórios. A esse respeito, observe o seguinte ‘momento de síntese’:

Como foi discutido todos os procedimentos de diferentes maneiras de resolver os problemas de Combinatória, quando entrei em contato com as fórmulas, todas devidamente explicadas e contextualizadas, foi muito fácil entender, e elas vieram apenas para facilitar o cálculo, pois na falta delas sei resolver Combinatória do meu jeito, fazendo minhas contas. Conclui que na Permutação e no Arranjo a ordem dos elementos é de fundamental importância para diferenciar os agrupamentos ordenados. Por exemplo, o anagrama COR é diferente do anagrama CRO. Já, na Combinação, a ordem dos elementos não importa, pois as duplas BC e CB continuam sendo as mesmas. [Momento de síntese, 17.º Encontro]

Ao destacar que há momentos em que a “*ordem dos elementos importa*”, e “*tem outros que não*”, a P-4 realizou uma diferenciação entre os tipos de agrupamentos combinatórios (permutação, arranjo e combinação). Tal diferenciação é um indício de uma progressiva tomada de consciência (PIAGET et al., 1977), isto é, de um início de conceituação dos referidos conteúdos matemáticos, bem como da ocorrência de constantes abstrações reflexionantes (PIAGET et al., 1995) envolvendo tais conteúdos.

Ao compararmos os esquemas elaborados pela P-4 na resolução das tarefas 9 à 12 com as resoluções das tarefas 6 à 8 é possível observar um considerável avanço. Avanço esse advindo – segundo ela – do entendimento/utilização do diagrama de árvore ao resolver algumas ‘situações problema’ envolvendo o princípio multiplicativo e os diferentes agrupamentos combinatórios propostos no/durante o GE:

Foi possível concluir que algumas resoluções são facilmente efetuadas através do Diagrama de Árvore, entretanto algumas exigem a resolução através de multiplicação, porém todos não exigiram as fórmulas, mas sim que se pensasse sobre as situações apresentadas. Acredito que ainda preciso de mais tempo para identificar quando trata-se de Arranjo, Permutação e Combinação. [Momento de Síntese, 16.º Encontro]

Conforme salientado no ‘momento de síntese’, a não obrigatoriedade quanto à utilização da ‘fórmula’ parece ter sido para a P-4 uma importante (re)significação quanto ao ‘fazer Matemática’ no/durante o GE.

Do modo análogo ao observado na P-2, os conceitos de média aritmética, permutação, arranjo e combinação ainda não ‘atingiram’ a conceituação em sua forma final – via abstração refletida – cuja representação se dá por meio da linguagem formal. Assim, torna-se necessário para a P-4 a ação sobre uma diversidade de situações – e num considerado período de tempo –

envolvendo tais conceitos de modo a construí-los nos patamares mais elevados da abstração reflexionante (PIAGET et al., 1995). No entanto, a (re)significação referente à possibilidade de ‘fazer Matemática’ por diferentes caminhos/esquemas constituiu, para a licencianda, uma importante (re)significação a respeito da própria ciência Matemática que, agora, passou a ter significado.

6.2.2 Algumas crenças e concepções em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem): o ‘antes’ e o ‘após’ a participação/ação no GE

Para facilitar a comparação entre o ‘antes’ e o ‘após’, optou-se pela utilização de quadros que apresentam as respostas e/ou falas da P-4 quando questionada sobre “O que é a Matemática?” e “Como a mesma é aprendida/deve ser ensinada?”. Tais respostas visaram identificar, conforme já apresentado na seção 4 – algumas crenças e concepções construídas pela licencianda acerca da Matemática e do seu processo de ensino e aprendizagem.

No quadro seguinte apresentam-se as respostas e/ou falas da P-4 referentes ao questionamento “O que é a Matemática?”:

Quadro 106 – Algumas concepções da P-4 acerca da Matemática.

	INSTRUMENTO	RESPOSTA
‘ANTES’	a.7) Na <u>SUA</u> opinião, o que é a Matemática? – Questionário Inicial, rever subseção 4.4.1.1.	<i>Algo terrível de que tenho medo.</i>
	‘Discussão de grupo’ (síntese das falas apresentadas no GE).	A Matemática não foi feita para mim, eu nunca entendia o que estava sendo abordado pelo professor, parecia “grego”. Até tinham aqueles poucos alunos, os muito inteligentes, que entendiam. Era tudo muito descontextualizado. E sempre tinha um único caminho para resolver os exercícios, ou seja, por meio da ‘fórmula’.
‘APÓS’	a.1.1) Em relação ao conhecimento matemático (à Matemática) – Questionário Final, rever subseção 4.4.3.	<i>Passei a ter outra visão da matemática, pois percebi que sempre há outro modo de resolver os exercícios. O mais importante é que percebi sentido na matemática entendi realmente para que serve e de onde vem com exercícios que me fez pensar/refletir e não apenas resolver mecanicamente sem compreensão.</i>
	1) Na <u>SUA</u> opinião, o que é a Matemática? – Questionário Final Postergado, rever subseção 4.4.4.	<i>A matemática é possível para mim. Eu percebi que sei fazer matemática, e que sempre há mais de um caminho para resolver os exercícios. E não é tão exata quanto eu pensava antes de participar do nosso grupo.</i>

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2011-2012.

Considerando o quadro anterior, é possível inferir que a Matemática, para a P-4, era “*algo terrível*”, cujo medo adveio – em grande parte – de um momento vivenciado em sala de aula no qual a licencianda foi humilhada. Assim como identificado por Ponte (1992), a licencianda possuía uma concepção de Matemática descontextualizada, pautada no cálculo/aplicação obrigatória do algoritmo (da ‘fórmula’) para se ‘fazer Matemática’. A licencianda construiu a crença de que essa ciência era ‘terrível’, a ponto de dar-lhe ‘alergia’. Além disso, a P-4 acreditava que a Matemática não lhe era possível. Em uma ‘discussão de grupo’, por exemplo, a licencianda falou o seguinte:

Então, antes eu tinha mais [medo da Matemática]! Agora parece que está mais acessível... antes eu tinha uma visão de que a Matemática era uma coisa que eu não conseguia alcançar, [Neste momento ergueu os braços imitando tentar pegar ‘algo’.] que era muito alto, que eu não chegava mesmo! E parece que é uma outra visão, né!? De que parece que ela está bem mais acessível do que eu imaginava.

Ao acreditar que a Matemática não lhe era possível/alcançável, a P-4 deu indícios de aproximar-se da concepção apresentada por Ponte (1992) de que “nada de novo ou criativo pode ser feito em Matemática, a não ser pelos gênios”. Conforme Ponte (1992), a propagação de tal concepção em muito contribuiu para a permanência de práticas pedagógicas excludentes, práticas essas que subjogam a capacidade do estudante em aprender (e ‘criar’/construir) Matemática. No entanto – e considerando o referencial teórico-epistemológico adotado na presente pesquisa – o aluno é capaz de construir a Matemática mediante contínuas abstrações reflexionantes ‘tornadas’ refletidas (PIAGET et al., 1995) via progressivas tomadas de consciência (PIAGET et al., 1977).

Após a participação/ação no GE, a licencianda passou a “*ter outra visão da matemática*”, ‘visão’/concepção essa advinda da possibilidade de/em resolver as ‘situações problema’ (e os ‘desafios para casa’) propostas no GE. A construção de alguns esquemas matemáticos (já apresentados na subseção anterior) pode ter auxiliado nesse sentido. Assim, ao se sentir capaz em ‘fazer Matemática’, a P-4 (re)significou a sua concepção inicialmente construída durante a Educação Básica. A Matemática, ‘após’ o GE, não era mais concebida como uma ciência de ‘caminho único’, pois “*sempre há outro modo de resolver os exercícios*”. Essa ciência passou a ter sentido, pois os conhecimentos (e do tipo esquemas) construídos passaram a ter significado, isto é, foram assimilados por suas estruturas (PIAGET et al., 1996, p. 140). A concepção anterior de que a Matemática era ‘desligada’ da realidade – (PONTE, 1992) – (re)significou-se. Tal (re)significação fez-se possível mediante a compreensão “*para que serve e de onde vem*” os conteúdos matemáticos, cujos exercícios

propostos no GE foram resolvidos de modo ‘reflexivo/pensante’, e não mais “*mecanicamente sem compreensão*” como ocorria na Educação Básica. Nesse ponto cabe destacar – conforme pontuado por diversas pesquisas (ARAMAN; SAMPAIO, 2013; CARNEIRO, 2014, 2015; CAVALCANTE; SOARES, 2012; COSTA, 2013; COSTA; CURI, 2010; COSTA et al., 2017; LÓPEZ; ALSINA, 2016; NACARATO, 2010; NAGY-SILVA; PASSOS; CYRINO, 2010; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2013; SANTOS; GHEDIN, 2016; SILVA; PASSOS, 2016; SOARES, 2013) – sobre a importância da Formação Inicial na/para a reeducação/(re)significação dos saberes da experiência pré-profissional (dos licenciandos) em relação à Matemática. A P-4, por exemplo, necessitava (re)significar as suas crenças e concepções sobre a ciência Matemática de modo a não mais concebê-la como algo terrível/impossível de construir/descontextualizada.

Em relação ao modo de conceber a aprendizagem da Matemática, a P-4 elaborou as seguintes respostas e/ou falas ao questionamento “*Como a Matemática é aprendida?*”:

Quadro 107 – Algumas concepções da P-4 acerca da aprendizagem da Matemática.

	INSTRUMENTO	RESPOSTA
‘ANTES’	a.8) Na SUA opinião, como se aprende a Matemática? – Questionário Inicial, rever subseção 4.4.1.1.	<i>De forma lúdica, mas não aprendi assim, por isso, não sei ensinar dessa forma.</i>
	‘Discussão de grupo’ (síntese das falas apresentadas no GE).	Para aprender tem que prestar atenção na explicação do professor e fazer todos os exercícios dados por ele. No entanto, mesmo resolvendo todos os exercícios, não adiantava muito. Acho que não nasci para isso.
‘APÓS’	Discussão de grupo’ (síntese das falas apresentadas no GE).	A aprendizagem da Matemática se deve às atividades realizadas pelo professor em sala de aula.
	2) Na SUA opinião, como se aprende a Matemática? – Questionário Final Postergado, rever subseção 4.4.4.	<i>A matemática se aprende quando o aluno resolve os problemas dados pelo professor. E, para resolvê-los, não precisamos nos prender às “fórmulas”.</i>
	2.1) Qual o papel do aluno no processo de aprendizagem da Matemática? Justifique sua resposta. – Questionário Final Postergado, rever subseção 4.4.4.	<i>O aluno tem que ser ativo, ou seja, ele tem que pensar sobre os problemas matemáticos.</i>

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2011-2012.

Num primeiro momento (‘antes’), a P-4 afirmou que a aprendizagem da Matemática deveria ocorrer “*de forma lúdica*”. Quando questionada pelo pesquisador-autor, a licencianda não soube justificar a importância do lúdico à aprendizagem da Matemática. Devido à insuficiência dessa resposta à identificação da(s) concepção(s) sobre a aprendizagem da Matemática, o pesquisador-autor analisou algumas falas (da P-4) provenientes de algumas ‘discussões de grupo’. Em tais falas apareceram indícios que ‘aproximaram’ a concepção da licencianda – no que concerne à aprendizagem da Matemática – às concepções epistemológicas empirista e apriorista (BECKER, 2013). Em relação à concepção

epistemológica empirista, a P-4 disse acreditar na ideia de que a aprendizagem decorria da “*explicação do professor*”, ou seja, como se a ação do professor (‘pressão externa’) implicasse na aprendizagem do aluno. Sobre a concepção epistemológica apriorista, a licencianda afirmou que “não tinha nascido” para aprender Matemática. Tal afirmação ‘aproxima-se’ da concepção “nada de novo ou criativo pode ser feito em Matemática, a não ser pelos ‘gênios’” (PONTE, 1992), ‘gênios’ esses que já possuem as capacidades inatas para aprender Matemática. Durante a Educação Básica, a P-4 vivenciou um momento traumático ao ouvir de seu ‘antigo’ professor de Matemática de que não conseguiria aprender. Acredita-se que tal fato tenha contribuído para que a licencianda construísse essa concepção a respeito de sua incapacidade de ‘fazer Matemática’.

Após a participação/ação da licencianda no GE, a mesma indicou que a “*matemática se aprende quando o aluno resolve problemas*”, e que “*o aluno tem que ser ativo*”. Essas respostas dão indícios de uma concepção epistemológica construtivista; no entanto, a P-4 não justificou, a partir da Epistemologia Genética, os porquês da importância dessa ação – do ponto de vista psicológico e epistemológico – à aprendizagem da Matemática. Essa não justificativa pode ser um indício da ainda não conceituação da teoria piagetiana, conceituação essa necessária – conforme defendido por Nogueira (2013) – à superação das concepções epistemológicas empirista e apriorista. Quando questionada pelo pesquisador-autor, em uma ‘discussão de grupo’, sobre o que ela achava a respeito do fato de alguns alunos não conseguirem aprender Matemática, a P-4 disse não acreditar mais nisso, pois ela tinha conseguido aprender/resolver as atividades matemáticas desenvolvidas no GE. Ao que tudo indica, a concepção epistemológica apriorista, inicialmente construída na Educação Básica, foi (re)significada. Contudo, a P-4 ainda atribuía a aprendizagem à ação (exclusiva) do professor, e não à própria ação do aluno. Tal indício permite concluir que a licencianda (ainda) acreditava/utilizava as concepções epistemológicas empirista (e também a construtivista) na/para a explicação referente à aprendizagem da Matemática.

Em síntese, acerca da concepção referente à aprendizagem da Matemática, observou-se uma (re)significação/superação acerca da concepção epistemológica apriorista. Já em relação à concepção epistemológica empirista, a licencianda ainda a utiliza conjuntamente com a concepção epistemológica construtivista. Pode-se inferir a existência de um certo avanço, pois, ‘antes’, a P-4 sequer almejava a possibilidade de ‘construir’/aprender/‘fazer Matemática’. Agora, no ‘após’, a licencianda passou a atribuir a aprendizagem ao ‘fazer’ do aluno ao resolver “*os problemas dados pelo professor*” mas, ainda, continua atrelando tal aprendizagem à ação/‘pressão externa’ exercida pelo professor sobre o aluno. Em hipótese

alguma diminui-se a importância do professor à proposição de situações ‘*interessantes e necessárias*’ (PIAGET et al., 1998a,1998b) e ao ‘gerenciamento’ dessas situações e das trocas/intercâmbios/diálogos a serem realizados em sala de aula. No entanto, a concepção epistemológica empirista (ainda) necessita de uma (re)significação no sentido de sua total superação. O já discutido na subseção 6.1.2 – acerca das limitações do GE a essa superação – cabe, também, no caso da P-4.

Acerca do ensino da Matemática, a P-4 elaborou as seguintes respostas e/ou falas quando questionada sobre “*Como a Matemática deve ser ensinada?*”:

Quadro 108 – Algumas concepções da P-4 acerca do ensino da Matemática.

	INSTRUMENTO	RESPOSTA
‘ANTES’	a.9) Na SUA opinião, como deve ser ensinada a Matemática? – Questionário Inicial, rever subseção 4.4.1.1.	<i>Com aplicação de jogos envolvendo conteúdos matemáticos e tudo o que eu respondi na questão 3 nunca ou quase nunca. De um jeito totalmente diferente do que eu aprendi.</i>
	‘Discussão de grupo’ (síntese das falas apresentadas no GE).	Acredita que o conhecimento matemático deve ser passado ao aluno pelo professor.
‘APÓS’	a.1.1) Em relação ao ensino da Matemática... – Questionário Final, rever subseção 4.4.3.	<i>Percebi o quanto a matemática é importante e mais do que isso, a forma de como a matemática deve ser ensinada de forma concreta, sempre com exemplos acessíveis aos alunos, sempre questionando, e propondo situações-problemas para que eles se sintam desequilibrados sempre e possam pensar/refletir sobre a matemática. E também o quanto é trabalhoso ensinar dessa forma.</i>
	3) Na SUA opinião, como deve ser ensinada a Matemática? – Questionário Final Postergado, rever subseção 4.4.4.	<i>A matemática deve ser ensinada de modo que ela faça sentido para o aluno, de uma maneira contextualizada. Dar exemplos aos alunos, questioná-los sobre os assuntos matemáticos que o professor está dando na aula.</i>
	3.1) Qual o papel do professor no processo de ensino da Matemática? Justifique sua resposta. – Questionário Final Postergado, rever subseção 4.4.4.	<i>É bem isso que eu falei na resposta anterior. O professor tem que provocar o aluno, fazer com que perceba que a Matemática é importante para a sua vida e para o seu futuro.</i>

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2011-2012.

Antes da participação/ação da P-4 no GE, a licencianda acreditava que o ensino da Matemática decorria da “*aplicação de jogos envolvendo conteúdos matemáticos*”, além das demais estratégias respondidas na questão a.3 (rever Questionário Inicial, subseção 4.4.1.1) na categoria nunca ou quase nunca. Relembrando, as referidas estratégias foram: a) “*agrupamento dos alunos para realização de atividades sugeridas pelo professor*”; b) “*trabalho interdisciplinar, ou seja, a Matemática e outras áreas do conhecimento*”; c) “*trabalho intradisciplinar, ou seja, a Matemática em outras áreas do conhecimento*”; d) “*atividades envolvendo materiais concretos manipulativos*”; e) “*confeção de algum material*”.

pelos alunos”; f) “atividades lúdicas como: dramatizações, brincadeiras, entre outras”; g) “uso de tecnologias (computador, internet, calculadora, projetor, etc.)”. No entanto, quando questionada pelo pesquisador-autor, a P-4 não soube justificar o porquê/a importância da utilização de tais estratégias no ensino da Matemática, além de não citar a importância da ação dos alunos – ao realizarem as referidas estratégias – à construção do conhecimento. A licencianda não afirmou, também, sobre a importância do professor propor situações ‘*interessantes e necessárias*’ (PIAGET, 1998a, 1998b) aos estudantes. Em uma ‘discussão de grupo’, a P-4 afirmou que o conhecimento matemático é ‘passado’ para o aluno pelo professor. Tal afirmação, segundo Becker (2012), ‘aproxima’ a sua concepção de ensino da concepção epistemológica empirista.

Considerando as respostas ‘após’ a participação/ação da P-4 no GE, parece que a sua concepção de ensino mescla entre uma concepção epistemológica construtivista – ao afirmar a necessidade do professor propor “*situações-problemas para que eles se sintam desequilibrados sempre e possam pensar/refletir sobre a Matemática*”, isto é, orientada na/pela ação do aluno – e uma concepção epistemológica empirista ao afirmar que o “*professor tem que provocar o aluno*” e “*dar*” algo para o estudante. É claro que cabe ao professor essa provocação; a questão é a P-4 indicar que esse provocar basta à aprendizagem. Assim como observado na P-2, a concepção de ensino da Matemática da P-4 alterna entre o empirismo e o construtivismo. Falta-lhe, ainda, uma conceituação (PIAGET et al., 1977) da teoria de Piaget, conceituação essa necessária, como pontuado por Nogueira (2013), para a superação da concepção epistemológica empirista.

Em suma, acredita-se que a ‘maior’ (re)significação construída pela P-4 foi a de que a Matemática é uma ciência possível de ser construída (por ela), não sendo ‘algo’ externo/descontextualizado. O ‘fazer Matemática’ no/durante o GE contribuiu para essa (re)significação; sentir-se capaz de resolver as situações problema – através da construção de esquemas próprios – foi fundamental. Mesmo que a P-4 ainda não tenha superado a concepção epistemológica empirista para explicar o ensino e a aprendizagem da Matemática, a ‘nova’ relação/(re)significação estabelecida para com a Matemática – provavelmente – lhe auxiliará para a realização de uma prática pedagógica diferente da vivenciada na Educação Básica. Prática essa orientada para a resolução de situações problema, cujo ‘fazer Matemática’ não dependa (obrigatoriamente) do algoritmo convencional. A crença de uma Matemática “*terrível*”, que “*dava até alergia*” e “*inacessível*” foi, felizmente, (re)significada positivamente.

6.2.3 Algumas atitudes em relação à Matemática: o ‘antes’ e o ‘após’ a participação/ação no GE

Como já destacado anteriormente, embora as atitudes não constituam uma das partes do saber da experiência pré-profissional – conforme indicado por Ardiles (2007) – há uma relação (correlação) entre as concepções, as crenças e as atitudes do sujeito acerca de determinado objeto. Ao identificar alterações no que tange às alternativas assinaladas nos itens que compõem a escala de atitudes aplicada, será possível inferir – mediante a referida correlação – se houve (re)significação acerca da ‘nova’ relação estabelecida para com a Matemática.

Para auxiliar na análise/comparação, no quadro seguinte apresentam-se as alternativas assinaladas pela P-4 ‘antes’ e ‘após’ a participação/ação no GE:

Quadro 109 – Escala de Atitudes em relação à Matemática: alternativas assinaladas pela P-4.

NEGATIVAS	AFIRMAÇÃO	‘ANTES’	‘APÓS’
	01. Eu fico sempre sob uma terrível tensão na aula de Matemática.	CT	D
	02. Eu não gosto de Matemática e me assusta ter que fazer essa matéria.	CT	D
	06. “Dá um branco” na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando estudo Matemática.	CT	D
	07. Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço em Matemática.	CT	D
	08. A Matemática me deixa inquieto(a), descontente, irritado(a) e impaciente.	CT	D
	10. A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido(a) em uma selva de números e sem encontrar a saída.	CT	D
	12. Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão.	CT	D
	13. Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz em Matemática.	CT	D
	16. Pensar sobre a obrigação de resolver um problema de Matemática me deixa nervoso(a).	CT	DT
	17. Eu nunca gostei de Matemática e é a matéria que me dá mais medo.	CT	C
POSITIVAS	21. Não tenho um bom desempenho em Matemática.	CT	D
	AFIRMAÇÃO	‘ANTES’	‘APÓS’
	03. Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.	DT	C
	04. A Matemática é fascinante e divertida.	DT	C
	05. A Matemática me faz sentir seguro(a) e é, ao mesmo tempo, estimulante.	DT	C
	09. O sentimento que tenho com relação à Matemática é bom.	DT	C
	11. A Matemática é algo que eu aprecio grandemente.	DT	D
	14. Eu gosto realmente de Matemática.	DT	D
	15. A Matemática é uma das matérias que eu realmente gosto de estudar na escola.	DT	D
	18. Eu fico mais feliz na aula de Matemática que na aula de qualquer outra matéria.	DT	D
	19. Eu me sinto tranquilo(a) em Matemática e gosto muito dessa matéria.	DT	D
	20. Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação à Matemática: Eu gosto e aprecio essa matéria.	DT	D

Fonte: Resposta elaborada pela P-4, 2011-2012.

Em relação às afirmações negativas, identificou-se uma diferença considerável (e positiva) acerca das atitudes em relação à Matemática. Antes da participação/ação da P-4 no GE, a licencianda apresentava, e na maior intensidade, as atitudes mais negativas em relação a essa ciência. Ela sentia uma terrível tensão nas aulas de Matemática, tinha uma sensação de insegurança, inquietude, descontentamento, irritação, um verdadeiro sentimento de aversão para com essa ciência. Além de não se sentir capaz de ‘fazer Matemática’, pensar em resolver problemas matemáticos a deixava nervosa, sendo a Matemática a matéria que lhe dava mais medo. Após a participação/ação da P-4 no GE, tais atitudes modificaram-se consideravelmente, conforme apresentado no quadro anterior. A Matemática ainda lhe causa medo, mas não tanto quanto antes. Ao conseguir resolver as ‘situações problema’ valendo-se de esquemas próprios, a resolução de problemas matemáticos passou a não deixá-la mais nervosa (vide afirmação 16).

Acerca das afirmações positivas, identificaram-se, também, uma melhora considerável quanto à intensidade da alternativa assinalada ao comparar-se o ‘antes’ e o ‘após’. Compreender os problemas e os esquemas utilizados na/para a resolução das ‘situações problema’ contribuiu para que a Matemática se tornasse fascinante e divertida; o ‘fazer Matemática’ – agora possível graças a sua ação de/em resolver os problemas – contribuiu para o interesse e o gosto por essa disciplina. No entanto, mesmo após a participação/ação no GE, a P-4 ainda não se sente tranquila em Matemática a ponto de gostar e apreciar essa matéria.

Em relação à análise quantitativa de ambas as escalas aplicadas, a P-4 obteve uma ‘nova’ pontuação totalizando 54 pontos. Em comparação à pontuação totalizada na primeira escala aplicada (no caso 20 pontos), observou-se um acréscimo de 34 pontos e um aumento percentual em 157%. Ao comparar esta ‘nova’ pontuação com a média obtida pelo grupo ($\bar{x} \cong 64,2$), a participante – segundo o procedimento estabelecido por Brito (1996) – ainda apresenta uma atitude negativa em relação à Matemática. Contudo, tal melhora foi significativa.

Em suma, as alterações identificadas em algumas afirmações – acerca de algumas atitudes em relação à Matemática – possibilitam alguns indícios sobre algumas (re)significações referentes às concepções e às crenças a elas correlacionadas. Por exemplo, a crença anteriormente apresentada pela P-4 acerca de a Matemática ser algo terrível/impossível (rever subseção 6.2) foi (re)significada. A crença em sua incapacidade de ‘fazer Matemática’ parece ter sido (re)significada (vide afirmação 13). Acredita-se que tais (re)significações tenham advindo da participação/ação da P-4 no GE. Grupo esse concebido/orientado na/pela concepção epistemológica construtivista piagetiana cuja máxima reside na ação do sujeito

sobre o objeto (do conhecimento) de modo a permitir, ao sujeito, a construção de estruturas (esquemas de ação e ou conceitos) cada vez ‘melhores’/aptos à compreensão/atuação sobre o meio. Ao considerar que no início do GE a P-4 apresentou um certo bloqueio, proveniente de um momento humilhante vivenciado em uma aula de Matemática, então, acredita-se que, de um certo modo, o GE tenha contribuído positivamente nesse sentido. Como a afetividade constitui a energética da/para a ação (PIAGET, 1990), sentir-se capaz foi um fator importante para que a P-4 agisse ‘sobre’ os diferentes objetos matemáticos abordados no GE.

6.3 Alguns limites e possibilidades do Grupo de Estudo à (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem)

Após a elaboração dos dois estudos de caso das licenciandas P-2 e P-4 – estudos esses que possibilitaram identificar algumas (re)significações de alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino aprendizagem) – faz-se necessário investigar, devido ao objetivo da presente tese, os limites e as possibilidades do GE a tais (re)significações.

Quanto às possibilidades do GE, identificaram-se as seguintes (re)significações:

- a) a Matemática passou a ser concebida/(re)significada enquanto uma ciência possível de ser construída, além de possuir significado/sentido;
- b) a construção das licenciandas acerca de alguns conhecimentos (e do tipo esquemas matemáticos) – referentes aos conteúdos de média aritmética, permutação, arranjo e combinação – contribuiu na/para a (re)significação anterior, inclusive para a própria (re)significação acerca do bloco ‘Tratamento da Informação’;
- c) não há mais, para as licenciandas, um único caminho à resolução dos problemas matemáticos; as ‘fórmulas’ deixaram de representar o ‘tudo ou nada’ para tal resolução, ou seja, sem as mesmas faz-se possível ‘fazer Matemática’;
- d) o aprender Matemática – antes pautado na aplicação obrigatória das ‘fórmulas’ – agora decorre da ação das licenciandas sobre as situações problema, ação essa significada mediante a elaboração de diversos esquemas.

Tais possibilidades/(re)significações fizeram-se possíveis graças à ação das licenciandas ao resolverem – individualmente e/ou coletivamente – as atividades desenvolvidas no GE. Conforme já apresentado na seção 5, tal grupo – ‘orientado’ pela concepção epistemológica construtivista – constituiu-se em um espaço formativo no qual o

agir com o outro (via diálogo/colaboração/troca de ideias) fez-se presente no/durante os encontros realizados.

Em relação aos limites do GE à referida (re)significação, identificaram-se:

- a) a ainda presença da concepção epistemológica empirista no que se refere à explicação, pelas licenciandas, de como se dá o processo de ensino e aprendizagem da Matemática;
- b) a não conceituação dos conteúdos matemáticos (média aritmética, permutação, arranjo e combinação) em sua forma final (abstração refletida) representada em linguagem formal.

Acerca do limite a), acredita-se que a não superação da concepção epistemológica empirista – superação essa advinda da conceituação, pelas licenciandas, da Epistemologia Genética – deveu-se:

- i) ao pouco tempo destinado ao estudo/reflexão acerca dos elementos teóricos que constituem a Epistemologia Genética. Faltou, às licenciandas, resolverem mais ‘situações problema’ referentes ao construtivismo piagetiano de modo que elas, por meio dessa ação (reflexionamento e reflexão), conceituassem essa teoria epistemológica.
- ii) aos ‘textos teóricos’, elaborados pelo pesquisador-autor, que apresentaram/discutiram os referidos elementos teóricos da Epistemologia Genética. Tais textos, supõe-se, deveriam ter ‘utilizado’ mais exemplificações pelo fato destas estarem (provavelmente) ‘mais próximas’ das estruturas de assimilação das licenciandas. Em vários desses textos, por exemplo, o pesquisador-autor já ‘iniciou’ a discussão/apresentação com a teoria, isto é, com a conceituação dos referidos elementos. O erro do pesquisador-autor foi supor que as licenciandas – por cursarem o último ano da Licenciatura em Pedagogia – já tivessem construído os esquemas e os conceitos necessários à assimilação de tais assuntos da teoria piagetiana. Essa falha/erro, aliás, é incoerente com o referencial teórico epistemológico adotado na presente investigação. Independentemente do conteúdo, o professor deve investigar, antecipadamente, as estruturas já construídas pelo aluno de modo que as atividades propostas possam ser, provavelmente, as mais ‘*interessantes e necessárias*’ (PIAGET, 1998a, 1998b) possíveis.

Em relação ao limite b), supõe-se que essa não conceituação – em sua forma final – deveu-se à necessidade de mais tempo à explicitação/teorização dos esquemas matemáticos construídos pela P-2 e P-4 ao resolverem as diversas situações ‘relacionadas’ aos conceitos matemáticos (média aritmética, permutação, arranjo e combinação). Tal teorização/explicação advém de uma progressiva tomada de consciência (PIAGET et al., 1977) dos referidos esquemas e que devem, por sua vez, serem representados em linguagem formal (matemática).

De um modo geral, acredita-se que o GE – entre seus limites e suas possibilidades – tenha contribuído com a Formação Inicial das licenciandas em Pedagogia em relação à Matemática e ao seu processo de ensino e aprendizagem. Talvez as (re)significações construídas contribuam para que as futuras práticas pedagógicas – influenciadas pelos saberes da experiência – ‘tornem-se’ o oposto da maioria das ‘antigas’ aulas de Matemática vivenciadas pelas licenciandas na Educação Básica. Espera-se que as práticas pedagógicas das licenciandas ‘orientem-se’ na/pela ação – ação essa caracterizada por contínuos reflexionamentos e reflexões (PIAGET et al., 1995) – de modo a oportunizarem aos seus (futuros) alunos, mediante às suas próprias ações, compreenderem/significarem a Matemática enquanto uma ciência possível de ser construída/conceituada. Prática essa que incentive a construção de esquemas próprios, cuja utilização do algoritmo convencional – quando ocorrer – seja feita com compreensão.

EM SÍNTESE, nesta seção apresentaram-se os estudos de caso da P-2 e da P-4. Por meio de tais estudos fez-se possível investigar as (re)significações de alguns saberes da experiência pré-profissional referentes à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem). A identificação de tais (re)significações possibilitou investigar os limites e as possibilidades do GE, limites e possibilidades esses que constituíram o problema de pesquisa da presente tese.

Na próxima seção apresentar-se-ão as conclusões e algumas implicações da pesquisa.

7 CONCLUSÕES E ALGUMAS IMPLICAÇÕES DA PESQUISA

A presente pesquisa visou responder o seguinte questionamento:

Quais os limites e as possibilidades de um Grupo de Estudo alicerçado em elementos teóricos advindos da Epistemologia Genética e da Formação de Professores à (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional de licenciandas em Pedagogia em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem)?

O referido Grupo de Estudo, ‘orientado’ na/pela concepção epistemológica construtivista (piagetiana), constituiu-se um espaço formativo para:

- a) a construção de alguns conteúdos matemáticos – pertencentes ao bloco ‘Tratamento da Informação’ – ainda não aprendidos pelas licenciandas durante a Educação Básica;
- b) o estudo de alguns tópicos da Epistemologia Genética – desenvolvida por Jean Piaget e colaboradores – visando à compreensão, pelas licenciandas, da gênese e do processo de construção do conhecimento;
- c) a discussão de conhecimentos e saberes didático-metodológicos e curriculares acerca dos referidos conteúdos matemáticos quando estes se tornam objeto de ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental;
- d) a reflexão/reeducação em torno de alguns saberes da experiência em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem) construídos pelas licenciandas enquanto alunas da Educação Básica.

Para a constituição do referido espaço formativo – construído colaborativamente entre o pesquisador-autor e licenciandas em Pedagogia – o pesquisador-autor utilizou-se de alguns resultados dos estudos sobre a Formação de Professores e de vários elementos teóricos advindos da Epistemologia Genética na/para a elaboração (e para o desenvolvimento/aplicação/ordenação) das diversas atividades realizadas nos vinte encontros que compuseram o GE. Em relação à concepção epistemológica construtivista (piagetiana) – concepção essa ‘orientadora’ do GE (e utilizada pelo pesquisador-autor à sua constituição/desenvolvimento) – faz-se oportuno retomar que a mesma defende a importância/imprescindibilidade da ação do sujeito sobre o objeto para o desenvolvimento cognitivo (isto é, para a construção de estruturas cada vez mais ‘aptas’ à atuação/compreensão do meio/mundo). Como a ação do sujeito torna-se imprescindível à compreensão, então, o GE constituiu-se um espaço para a ação das licenciandas sobre os diferentes objetos (os conteúdos matemáticos pertencentes ao ‘Tratamento da Informação’, os diversos tópicos da Epistemologia Genética, os conhecimentos e saberes didático-metodológicos e curriculares

dos referidos conteúdos e os próprios saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática). As diversas ações das licenciandas (participantes do GE) ocorreram quando as mesmas: a) resolveram diversas atividades relacionadas aos referidos objetos; b) compartilharam as referidas resoluções no grupo; c) leram/discutiram, individualmente e em grupo, os textos teóricos relacionados a tais objetos; c) discutiram, em grupo, os diversos temas abordados durante o GE, inclusive os relacionados à futura prática docente de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental; d) elaboraram sínteses de cada encontro realizado. Portanto, e por meio de tais ações, intentou-se que as licenciandas refletissem sobre os próprios saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem).

Ao ‘orientar-se’ para e pela ação – ação essa desencadeadora de contínuas equilíbrazões (e abstrações reflexionantes) (PIAGET et al., 1995) – o GE visou à ocorrência do isomorfismo (BRASIL, 2000b; CURI, 2004; GARCÍA, 1999) entre a Formação Inicial e a futura prática pedagógica a ser desenvolvida pelas licenciandas. Isto é, para que as licenciandas desenvolvam em suas futuras práticas situações de ensino nas quais os seus futuros alunos tenham que ‘ser’ ativos/questionadores/participativos, então, durante a Formação Inicial as mesmas devem vivenciar/experienciar situações isomorfas. O GE, nesse aspecto, obteve êxito ao propiciar às licenciandas tais situações de ensino isomorfas cuja ação/questionamento/participação fez-se presente.

Para a realização da investigação (predominantemente) qualitativa – do tipo estudo de caso – o pesquisador-autor valeu-se de diferentes instrumentos e procedimentos (a) questionários; b) escala de atitudes; c) tarefas matemáticas; d) elaboração textual – do tipo ‘momento de síntese’; e) discussão de grupo – do tipo entrevista informal; f) observação participante) à obtenção dos dados. A utilização desses diversos instrumentos e procedimentos – ‘aplicados’ em quatro momentos distintos – fez-se necessária devido às ‘características’ do objeto investigado, isto é, dos saberes da experiência pré-profissional e suas possíveis (re)significações. Aliás, o pesquisador-autor teve que delimitar quais as ‘constituintes’ do saber da experiência pré-profissional (em relação à Matemática e ao seu processo de ensino e aprendizagem) seriam identificadas/analizadas. A necessidade de tal delimitação deveu-se à própria constituição plural/heterogênea dos saberes da experiência pré-profissional (TARDIF, 2002). Assim, o pesquisador-autor considerou apenas algumas das ‘constituintes’ desses saberes na/para a realização da pesquisa, a saber: a) alguns conteúdos matemáticos pertencentes ao bloco ‘Tratamento da Informação’; b) algumas crenças e concepções acerca da ciência Matemática e do seu processo de ensino e aprendizagem.

Além dessas ‘constituintes’ do saber da experiência pré-profissional, o pesquisador-autor também identificou algumas atitudes em relação à Matemática. Embora as atitudes não constituam um saber – conforme já discutido na seção 3 – a justificativa para a investigação de algumas atitudes deveu-se pela correlação destas com as crenças e as concepções, correlação essa identificada no estudo realizado por Ardiles (2007). Logo, a identificação de algumas (re)significações de algumas atitudes em relação à Matemática constituiu outro indício quanto à (re)significação de algumas crenças e concepções acerca da Matemática. A própria dificuldade na identificação destas últimas (crenças e concepções), como pontuado por Ponte (1992), foi a justificativa para a inclusão da identificação das atitudes.

Após a análise-síntese dos dois estudos de caso (da P-2 e da P-4), fez-se possível identificar alguns limites e algumas possibilidades do GE à (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (e ao seu processo de ensino e aprendizagem).

Em relação às possibilidades, identificaram-se as seguintes (re)significações:

- a) a Matemática passou a ser concebida/(re)significada enquanto uma ciência possível de ser construída, além de possuir significado/sentido;
- b) a construção de alguns conhecimentos (e do tipo esquemas matemáticos) – referentes aos conteúdos de média aritmética, permutação, arranjo e combinação – contribuiu na/para a (re)significação anterior, inclusive para a própria (re)significação acerca do bloco ‘Tratamento da Informação’;
- c) não há mais um único caminho à resolução dos problemas matemáticos; as ‘fórmulas’ deixaram de representar o ‘tudo ou nada’ para tal resolução, ou seja, sem as mesmas faz-se possível ‘fazer Matemática’;
- d) a aprendizagem da Matemática – antes pautado na aplicação obrigatória das ‘fórmulas’ – agora decorre da ação das licenciandas sobre as situações problema, ação essa significada por meio da elaboração de diversos esquemas.

Essas possibilidades/(re)significações fizeram-se possíveis graças à ação das licenciandas ao resolverem – individualmente e/ou coletivamente – as diversas atividades desenvolvidas no GE. A construção (e o início de uma progressiva tomada de consciência) de esquemas matemáticos, utilizados na/para a resolução de diversas situações, fez-se imprescindível à construção das referidas (re)significações. Deste modo, conclui-se que uma ‘nova’ compreensão/entendimento do saber da experiência pré-profissional em relação à Matemática decorre de uma ‘nova’ construção (com significado) do próprio conhecimento matemático.

Acerca dos limites do GE, identificaram-se:

- a) a ainda presença da concepção epistemológica empirista no que se refere à explicação, pelas licenciandas, de como se dá o processo de ensino e aprendizagem da Matemática;
- b) a não conceituação dos conteúdos matemáticos (média aritmética, permutação, arranjo e combinação) em sua forma final (abstração refletida) representada em linguagem formal.

Embora as licenciandas não tenham ‘superado’ a concepção epistemológica empirista, tendo em vista a (ainda) não teorização (via abstração refletida) da Epistemologia Genética, as participantes – pelo menos ao nível da ação – iniciaram uma progressiva conceituação a respeito da importância da ação do aluno ao/para o processo de aprendizagem. As diversas ações realizadas por elas, ao decorrer do GE, mostraram-se importantes nesse sentido.

Em relação às dificuldades encontradas durante a realização da pesquisa, faz-se oportuno ressaltar a dificuldade proveniente da dupla função assumida pelo pesquisador-autor, ou seja, a de ‘formador’ e a de pesquisador. Ao mesmo tempo em que os encontros eram ‘pensados’/organizados, fazia-se a análise prévia/transcrição dos dados que constituíram um ‘corpus’ denso de dados. Aliás, fazia-se, também, contínuos movimentos de retomada dos assuntos abordados nos encontros e quais atividades ‘*interessantes e necessárias*’ (PIAGET, 1998a, 1998b) deveriam ser propostas no próximo encontro de modo a contribuir para que o *maximum* de ação das licenciandas sobre o objeto do conhecimento fosse realizado.

Em relação à discussão acerca da teoria utilizada, faz-se oportuno destacar o quão profícuo foi a Epistemologia Genética para a proposição do GE – conforme já denotado na seção 5. Além de embasar/justificar algumas atividades desenvolvidas no GE, a teoria de Piaget auxiliou na própria organização/ordenação dessas atividades. Contudo, cabe ao educador ‘retirar’ as implicações da Epistemologia Genética para a Educação. Devido ao seu objetivo principal, ou seja, ao estudo epistemológico, a teoria de Piaget não ‘contempla’ algumas questões inerentes à aprendizagem e ao ensino de conteúdos específicos. Assim, acabou sendo necessária – também – a teoria de Vergnaud para se pensar sobre o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos específicos; no caso os referentes ao ‘Tratamento da Informação’. De todo modo, a Epistemologia Genética – enquanto uma teoria explicativa da gênese e do desenvolvimento do conhecimento – possibilitou o embasamento do GE em sua concepção epistemológica ‘geral’.

Além da Epistemologia Genética ter ‘embasado’ o GE, tal teoria fez-se importante na/para a análise dos dados. Este duplo papel ‘possibilitado’ pela teoria piagetiana foi ‘observado’ nas pesquisas realizadas por Caimi (2006), Manzini (2007), Massabni (2011), Serres (2010), Turchielo (2017) e Zaslavsky (2010). Em tais pesquisas, a Epistemologia

Genética foi utilizada ao/para o embasamento de propostas com vistas à Formação Inicial de professores (de diferentes especialidades) e, também, para a análise dos dados. Tal fato comprova, por assim dizer, as inúmeras possibilidades da teoria piagetiana para ‘se pensar’ a Formação (Inicial) de professores e para ‘se fazer’ pesquisas no campo da Educação e da Educação Matemática.

Em relação à contribuição da pesquisa para a prática profissional, acredita-se que o GE possa servir enquanto uma proposta/‘ponto de partida’ para se pensar as disciplinas da Educação Matemática desenvolvidas nos cursos de Licenciatura em Pedagogia. Esse ‘ponto de partida’, supõe-se, se dará na proposição de disciplinas que deem atenção ao conteúdo específico de Matemática que será objeto de ensino na futura prática profissional. No entanto, ‘atrelado’ à abordagem do conteúdo específico, tais disciplinas também deverão abordar, (e de modo ‘integrado’ a esses conteúdos específicos), os outros conhecimentos necessários à docência, tais como os didático-metodológicos, os curriculares, os psicológicos, etc.

Ainda acerca do conteúdo específico, a presente pesquisa identificou (nas licenciandas P-2 e P-4) diversas lacunas conceituais referentes a alguns conteúdos pertencentes ao bloco ‘Tratamento da Informação’. Tal fato corroborou com o já apontado por várias investigações (ABRAHÃO; SILVA, 2017; ARAMAN; SAMPAIO, 2013; ARAÚJO; PEREIRA, 2016; BARRETO; SOUSA, 2009; CARVALHO, 2007; DICETTI; CERETA, 2016; FERNANDES, 2013; FERNANDES; LEITE, 2015; NACARATO, 2010; OLIVEIRA, 2010; PROENÇA, 2015; RIBEIRO; ALBRECHT, 2016; ROSA, 2015; SANTOS; GHEDIN, 2016; SOARES, 2013; SOUZA; BORGES, 2016) que também identificaram lacunas conceituais, em diversos conteúdos de Matemática, de licenciandos em Pedagogia. A não atenção, durante a Formação Inicial, a essas defasagens comprometerá a futura prática docente desses profissionais. Sem a construção do conhecimento matemático torna-se difícil a elaboração de situações de ensino que abordem tais conteúdos. Deste modo, torna-se necessário que os cursos de Licenciatura em Pedagogia responsabilizem-se em/por ‘suprir’ tais defasagens, embora saiba-se que tal medida não seja de fácil concretização.

Em relação à referida defasagem, faz-se pertinente o questionamento sobre a necessidade de se repensar os cursos de Licenciatura em Matemática. Isso se deve, pois tais cursos ‘formam’ professores para atuação nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. E, em certa parte, tais lacunas/defasagens ‘devem-se’ às práticas desenvolvidas por esses professores nessas etapas da escolaridade. Assim como defendido por outras pesquisas (ORTEGA, SANTOS, 2012; SANTOS, 2009; SILVEIRA et al., 2005), a presente investigação também conclui a respeito da imprescindibilidade de ‘se pensar’ a Formação

Inicial do professor de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

Ainda sobre o curso de Pedagogia, faz-se oportuno destacar a dificuldade no que tange à polivalência. Exigir do futuro professor a abordagem/ensino de conteúdos específicos de diversas áreas torna-se uma tarefa difícil, pois os licenciandos em Pedagogia deveriam já ter construído, durante a Educação Básica, esses conteúdos que se tornarão objeto de ensino (futuramente). No entanto, considerando ‘apenas’ a Matemática, sabe-se que tais conteúdos ainda exigem construção. Logo, a ‘estruturação’ dos cursos de Licenciatura em Pedagogia deveria ser revista, pois torna-se quase impossível ‘suprir’ todas as defasagens – das diversas áreas do conhecimento – que, provavelmente, os licenciandos apresentam ao iniciarem o curso.

Em relação aos saberes da experiência pré-profissional, a presente pesquisa corrobora com o defendido por diversos outros estudos (ARAMAN; SAMPAIO, 2013; CARNEIRO, 2014, 2015; CAVALCANTE; SOARES, 2012; COSTA, 2013; COSTA; CURI, 2010; COSTA et al., 2017; LÓPEZ; ALSINA, 2016; NACARATO, 2010; NAGY-SILVA; PASSOS; CYRINO, 2010; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2013; SANTOS; GHEDIN, 2016; SILVA; PASSOS, 2016; SOARES, 2013) acerca da importância de a Formação Inicial desenvolver um trabalho de reeducação/(re)educação/reflexão em torno de tais saberes. Re(significação) essa necessária para que os licenciandos ‘passem’ a compreender a Matemática enquanto uma ciência possível de ser construída com significado.

Ainda sobre os referidos saberes (da experiência pré-profissional) e sua influência à futura prática profissional – (CARNEIRO, 2014, 2015; COSTA; CURI, 2010; LÓPEZ; ALSINA, 2016; MARQUESIN, 2016; NACARATO, 2010; QUEIROZ, 2007; SANTOS; GHEDIN, 2016; TARDIF, 2002; TARDIF; RAYMOND, 2000; TOWNSEND; TOMAZETTI, 2007; ZIBETTI; SOUZA, 2007) – acredita-se que a presente pesquisa tenha contribuído ao desvelar que tais saberes, caso não sejam (re)significados, acabarão – provavelmente – influenciando a futura prática. Por exemplo, a não (re)significação das licenciandas (P-2 e P-4) sobre a Matemática ser ‘feita’ apenas pelo uso (obrigatório) do algoritmo convencional poderia ‘implicar’, possivelmente, numa prática profissional pautada nessa lógica. E, conforme já discutido, tal prática em muito prejudica o estudante na/para a aprendizagem da Matemática.

Em relação ao desenvolvimento de outros estudos análogos ao desenvolvido na presente investigação, acredita-se que o próprio GE – ‘orientado’ na/pela concepção epistemológica construtivista e constituído por diversos ‘tipos’ de atividades embasadas na

Epistemologia Genética e em estudos sobre a Formação de Professores – poderá vir a ser utilizado em pesquisas futuras que investiguem a (re)significação de alguns saberes da experiência pré-profissional de outras áreas do saber. Assim, a proposta elaborada/desenvolvida, e apresentada na presente tese, poderá abrir possibilidades ao desenvolvimento de outras investigações relacionadas à (nossa) temática.

Enfim, espera-se que a presente investigação tenha contribuído para ‘se pensar’ a Formação Inicial do professor que ensina(rá) Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Formação essa importante para que o (futuro) professor realize práticas pedagógicas de Matemática que oportunizem, aos seus (futuros) alunos e mediante as suas próprias ações, construam/conceituarem os diversos conteúdos matemáticos e a compreenderem/ significarem a Matemática enquanto uma ciência possível de ser construída. O GE, enquanto uma proposta/alternativa metodológica – podendo ser considerado um esquema – contribuiu, de algum modo, para uma melhoria no que tange à Formação Inicial das licenciandas (P-2 e P-4) em relação à Matemática.

REFERÊNCIAS

- ABRAHÃO, A. M. C.; SILVA, S. A. F. da. Pesquisas sobre a Formação Inicial do professor que ensina Matemática no princípio da escolarização. **ZETETIKÉ**, Campinas, v. 25, n. 1, p. 94-116, jan./abr. 2017.
- ACIOLY-RÉGNIER, N. M. Como traduzir o caminho do burro em um teorema em ação: análise de situações de conhecimento matemático contextualizado à luz da teoria dos campos conceituais. **Em Teia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Pernambuco, v. 5, n. 1, p.1-21, jan./abr. 2014.
- ALVES, F. T. O. **Quando professoras se encontram para estudar Matemática: saberes em movimento**. 2007. 176 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2007.
- ALVES, J. A. O planejamento de pesquisas qualitativas em educação. **Caderno Pesquisa**, São Paulo, v. ?, n. 77, p. 53-61, Mai., 1991.
- ANDRADE, T. P. P. de. **O professor universitário sem formação pedagógica, a origem e a construção de sua prática docente: Que racionalidade? Que caminhos?** 2006, 129 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Ceará, 2006.
- ANDRÉ, M. E. D. A. de. **Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional**. Brasília: Liberlivros, 2005. 70 p.
- ANTUNES, F. C. A.; ZAPPAROLI, F. V. D.; ARRUDA, S. de. M. A construção dos saberes docentes no estágio supervisionado em Matemática. In: Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, 5., 2005, Bauru. **Atas do V ENPEC**, Bauru: ABRAPEC, 2005. v.1, p. 1-9.
- ARAMAN, E. M. de O.; SAMPAIO, H. R. Os licenciandos em Pedagogia e seus entendimentos a respeito de Matemática e seu ensino. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., 2013, Curitiba. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba: SBEM, 2013. p. 1-16.
- ARANHA, A. V. S. Profissão docente e formação continuada. **Revista Extra-Classe**, Belo Horizonte, v. 1, n. 2, p. 200-209, Jan. 2009.
- ARAÚJO, P. M. de; PEREIRA, C. da S. O ensino de Matemática nos cursos de Pedagogia da cidade de Campina Grande. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, São Paulo. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul/SBEM, 2016. p. 1-13.
- ARDILES, R. N. de. **Um estudo sobre as concepções, crenças e atitudes dos professores em relação à Matemática**. 2007, 236 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.
- AZEVEDO, J.; ASSIS, A. M. R. B. de; BORBA, R. E. de S. R; PESSOA, C. A. dos S. Princípio Fundamental da Contagem: estudantes do curso de graduação em Pedagogia

resolvendo problemas combinatórios. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., 2013, Curitiba. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba: SBEM, 2013.

BARRETO, M. C.; SOUSA, A. C. G. de. Conversões e tratamentos: futuros professores resolvem problemas matemáticos. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4., 2009, Taguatinga. **Anais do IV Simpósio Internacional de Educação Matemática**. Brasília: SBEM, 2009.

BECKER, F. **A epistemologia do professor: o cotidiano da escola**. Petrópolis: Vozes, 2008. 344 p.

BECKER, F. **Epistemologia do professor de Matemática**. Petrópolis: Vozes, 2012. 496 p.

BECKER, F. **O caminho da aprendizagem em Jean Piaget e Paulo Freire: Da ação à operação**. Petrópolis: Vozes, 2010. 296 p.

BECKER, F. Sujeito do conhecimento e ensino de Matemática. **Schème**, Marília, v. 5, p. 65-86. set. 2013.

BEDNARCHUCK, J. Z. **Formação Inicial em Matemática: as manifestações dos egressos de Pedagogia sobre a formação para a docência nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2012. 171 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2012.

BELLINI, L.M.; NOGUEIRA, C.M.I.; PAVANELLO, R.M e ANDRADE, D. As palavras-chave da didática das ciências: uma análise piagetiana. In: Colóquio Internacional de Epistemologia e Psicologia Genéticas, 2., Marília. **Anais do II Colóquio Internacional de Epistemologia e Psicologia Genéticas**, Marília: Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista – UNESP, 2011.

BERNARDI, L. T. M. dos S.; GRANDO, C. M.; TAGLIEBER, J. E. A relação teoria e prática na formação do educador. **Contraponto**, Itajaí, v. 5, n. 12, p. 49-63, Jan./Abr., 2005.

BERTANI, J. A.; LANDO, J. C.; FREIRE, I. A. A. Os saberes docentes e a formação do professor de Matemática. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 3., 2006, Águas de Lindóia. **Anais do III SIPEM**, Curitiba: Editora UFPR, 2006. v.1, p. 1-12.

BIAJONE, J. A abordagem do trabalho de projetos na formação estatística do pedagogo. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática**. Belo Horizonte: SBEM, 2007. p. 1-16.

BLOND, J.; WEBB, K. Practitioner and researcher perspectives in teacher research and the construction of knowledge. In: CHRISTIANSEN, H. et al. (Eds.). **Recreating relationships: Collaboration and educational reform**. New York: State University of New York Press, 1997. p. 83-103.

- BOAVIDA, A. N. R. **A argumentação em Matemática**: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração. 2005. 975 p. Tese (Doutorado em Educação) – Departamento de Educação, Faculdade de Ciências – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2005.
- BORJA, A. de et al. **Construtivismo em revista**. São Paulo: FDE/Diretoria Técnica, 1993. 114 p.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, SEB, 2017. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>>. Acesso em: 12 nov. 2018.
- BRASIL. **Decreto nº 3.276**, de 6 de dezembro de 1999. Brasília: Casa Civil, 1999.
- BRASIL. **Decreto nº 3.554**, de 7 de agosto de 2000. Brasília: Casa Civil, 2000a.
- BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional n.º 9.394**, de 20 de dezembro de 1996. Brasília: MEC/SEF, 1996.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998a. 148 p.
- BRASIL. **Proposta de diretrizes para a Formação Inicial de professores da Educação Básica em cursos de nível superior**. Brasília: MEC/SEF, 2000b. 82 p.
- BRASIL. **Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil**. v. 3. Brasília: MEC/SEF, 1998b. 269 p.
- BRASIL. **Resolução CNE/CP n.º 2/2015**, de 1.º de julho de 2015. Brasília: CNE, 2015.
- BRASIL. **Resultados do SAEB 2003**: Brasil. Brasília: MEC, 2004. 85 p.
- BRITO, M. R. F. de. **Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática em estudantes de 1º e 2º graus**. 1996. 398 p. Tese (Livre docência em Psicologia Educacional) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.
- BULOS, A. M. M. O curso de Pedagogia e a Matemática nos anos iniciais. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10., 2010, Ilhéus. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Ilhéus: Via Litterarum/SBEM, 2010. p. 1-11.
- CAETANO, R. S. **Alguns reflexos da didática construtivista no ensino de Matemática nas quatro séries iniciais do Ensino Fundamental**. 2009. 431 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2009.
- CAETANO, R. S. **Investigação e análise acerca da construção de estruturas multiplicativas a partir das aditivas (inseridas num contexto de solução de problemas)**

nos alunos das séries iniciais da Educação Básica. 2006. 175 p. Iniciação Científica – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2006.

CAETANO, R. S. Investigando o processo de construção de estruturas multiplicativas em alunos de 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental. In: Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, 6., 2007, Florianópolis. **Anais do VI ENPEC.** Florianópolis: Gráfica Floriprint, 2007. v. 01. 1 CD-ROM.

CAIMI, F. E. **Processos de conceituação da ação docente em contextos de sentido a partir da Licenciatura em História.** 2006. 271 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2006.

CAPORALE, S. M. M.; NACARATO, A. M. As relações estabelecidas entre os saberes da experiência e os saberes da matemática, pelos(as) professores (as), em exercício, ao freqüentarem o curso de Pedagogia. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós Graduação em Educação Matemática, 7., 2003, Rio Claro. **Anais do VII EBRAPEM,** Rio Claro: UNESP, 2003. v.1, p. 1-5.

CARNEIRO, R. F. A Formação de professores dos anos iniciais em um curso de Pedagogia: contribuições das disciplinas de Matemática. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais do VI Simpósio Internacional de Educação Matemática.** Brasília: SBEM, 2015. p. 1-11.

CARNEIRO, R. F. Narrativas de alunas-professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma cultura de aula de Matemática. **BOLEMA,** Rio Claro, v. 28, n. 49, p. 875-895, ago. 2014.

CARNEIRO, R. F.; PASSOS, C. L. B.; LUPIÁÑEZ, J. L. A formação matemática de professores da educação primária na Espanha: contribuições para a realidade brasileira. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 5., 2012, Petrópolis. **Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Brasília: SBEM, 2012. p. 1-22.

CARRAHER, T. N. **O método clínico:** usando os exames de Piaget. 5. ed. São Paulo: Cortez, 1998. 161 p.

CARUSO, P. DM. **Professor de Matemática:** transmissão de conhecimento ou construção de significados? 2002. 311 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

CARVALHO, M. Pedagogia e os conteúdos matemáticos: a formação do professor dos anos iniciais e Educação Infantil. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática.** Belo Horizonte: SBEM, 2007. p. 1-19.

CASTRO, M. C. S. de. **Quem és e como ensinas:** identidade e modelos de profissionalidade docente do licenciado em Matemática da Universidade do Estado da Bahia. 2003, 124 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Departamento de Educação, Universidade do Estado da Bahia, Salvador, 2003.

CAVALCANTE, J. L.; SOARES, L. H. Resolução de problemas e formação docente: saberes e vivências no curso de Pedagogia. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 5., 2012, Petrópolis. **Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Brasília: SBEM, 2012. p. 1-19.

CHAKUR, C. R. de S. L. A profissionalidade docente em uma abordagem construtivista. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, n.117, p. 149-176, Nov., 2002.

CLARK, C.; MOSS, P. A. ; GOERING, S.; HERTER, R. J.; LAMAR, B.; LEONARD, D.; ROBBINS, S.; RUSSELL, M.; TEMPLIN, M.; WASCHA, K. Collaboration as dialogue: teacher and researchers engaged in conversation and professional development. **American Educational Research Journal**, Washington, v. 33, n. 1, p. 193-231, 1996.

COLETO, A. P. D. **A atuação de professores nas séries iniciais do Ensino Fundamental como facilitadores das interações sociais nas atividades de conhecimento físico**. 2007. 192 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

COLLARES, D. **Epistemologia Genética e pesquisa docente**. 2001. 202 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

COSTA, J. de M.; VIGINHESKI, L. V. M.; JACINSKI, E. ; PINHEIRO, N. A. M. Formação em Matemática de licenciandos em Pedagogia : uma análise à luz do pluralismo metodológico. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 719-738, ago. 2017.

COSTA, N. M. L. da; POLONI, M. Y. Percepções de concluintes de Pedagogia sobre o conhecimento profissional para docência em Matemática. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4., 2009, Taguatinga. **Anais do IV Simpósio Internacional de Educação Matemática**. Brasília: SBEM, 2009.

COSTA, R. F. da. Modelos de Racionalidade na Formação de Professores: levantamento de pesquisas na BDTE (2010-2015). In: Reunião Nacional – ANPEd, 38., 2017, São Luís. **Anais da 38.ª Reunião Nacional – ANPEd**, São Luís: UFMA, 2017. v.1, p. 1-6.

COSTA, S. C. S. da. O professor que ensina Matemática nos anos iniciais: limites e possibilidades de um curso de Formação Inicial. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba: SBEM, 2013. p. 1-14.

COSTA, S. C. S. da; CURI, E. A influência das crenças na Formação Inicial do professor que ensina Matemática nos anos iniciais. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10., 2010, Ilhéus. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Ilhéus: Via Litterarum/SBEM, 2010. p. 1-10.

CUNHA, M. A. V. **Didática fundamentada na teoria de Piaget**. Rio de Janeiro: Forense, 1973. 95 p.

CUNHA, M. H. Saberes profissionais de professores de Matemática: dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação. **Millenium on.line**. Portugal: Revista do Instituto

Superior Politécnico de Viseu. 2000. Disponível em
<http://www.ipv.pt/millennium/17_ect8.htm> Acesso em: 23 Jul. 2010.

CURI, E. **Formação de professores polivalentes: uma análise de conhecimentos para ensinar Matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos.** 2004. 197 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

DEBASTIANI, J. N.; CALDATTO, M. E.; NOGUEIRA, C. M. I. Exames piagetianos: reflexões sobre sua utilização na prática docente. In: Colóquio Internacional de Epistemologia e Psicologia Genéticas, 2., 2011, Marília. **Anais do II Colóquio Internacional de Epistemologia e Psicologia Genéticas.** Marília: Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista – UNESP, novembro de 2011.

DELGADO, C. R. S. C. A. **Reflexão sobre as práticas de ensino da Matemática de futuros professores do 1º ciclo: três estudos de caso.** 2003. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2003.

DICETTI, T. da S.; CERETA, A. de S.; ROMIO, L. C.; MARIANI, R. de C. P. Formação de professores polivalentes: uma pesquisa acerca do conhecimento matemático. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, São Paulo. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática.** São Paulo: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul/SBEM, 2016. p. 1-12.

FERNANDES, J. A.; LEITE, L. Compreensão do conceito de razão por futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 241-262, abr. 2015.

FERNANDES, V. M. J. Revelações na Formação Inicial de professores para ensinar Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., 2013, Curitiba. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática.** Curitiba: SBEM, 2013. p. 1-13.

FIORENTINI, D. et al. (Org.). **Cartografias do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a).** Campinas: Mercado das Letras: Associação de Leitura do Brasil – ALB, 1998. 335 p.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2007. 228 p.

FIORENTINI, D.; SOUZA, A. J. de Jr.; MELO, G. F. A. de. Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: FIORENTINI, D. et al. (Org.). **Cartografias do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a).** Campinas: Mercado das Letras: Associação de Leitura do Brasil – ALB, 1998. p. 307-335.

FRANCHI, Anna. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática: Uma (nova) introdução.** São Paulo: EDUC, 2010. Cap. 7, p. 189-232.

FURTH, H. G. **Piaget na sala de aula.** Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1997. 231 p.

- FURTH, H. G.; WACHS, H. **Piaget na prática escolar: A criatividade no currículo integral**. 6. ed. Tradução de Nair Lacerda. São Paulo: IBRASA, 1995. 339 p.
- GARCÍA, C. M. **Formação de Professores: para uma mudança educativa**. Porto: Porto Editora, 1999. 271 p.
- GAUTHIER, C.; MARTINEAU, S.; DESBIENS, J-F.; MALO, A.; SIMARD, D. **Por uma teoria da pedagogia: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente**. Tradução de Francisco Pereira de Lima. Ijuí/BRA: Editora UNIJUÍ, 1998. (Coleção “Fronteiras da educação”)
- GEBARA, J.; MARIN, C. A. Representação do professor: um olhar construtivista. **Ciências & Cognição**, UFRJ, v. 6, n. 2, p. 26-32. 2005. Disponível em: <www.cienciasecognicao.org>. Acesso em 11. Jan. 2008.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008. 200 p.
- GIMENES, J.; PENTEADO, M. G. Grupo de estudo: uma contribuição para professores de séries iniciais. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós Graduação em Educação Matemática, 8., 2004, Londrina. **Anais do VIII EBRAPEM**, Londrina: UEL, 2004. v.1, p. 1-5.
- GOMES, M. G.; MORETTI, M. T. Conhecimento matemático: obstáculos e conflitos na formação de professores do Ensino Fundamental. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós Graduação em Educação Matemática, 7., 2003, Rio Claro. **Anais do VII EBRAPEM**, Rio Claro: UNESP, 2003. v.1, p. 1-5.
- HARUNA, L. H. **Visões de formadores da Licenciatura em Matemática na construção dos saberes docentes**. 2004, 143 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, 2004.
- IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos e Funções**. São Paulo: Atual, 1977. 316p.
- KAMII, C. **A criança e o número: Implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 a 6 anos**. Tradução de Regina A. de Assis. Campinas: Papirus, 2005. 124 p.
- KISS, C. **Grupo de estudos: uma alternativa para qualificar a prática construtivista interacionista nas séries iniciais do Ensino Fundamental**. 2006. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.
- LERA, C. G. de; DEULOFEU, J. Conocimientos y creencias entorno a la resolución de problemas de profesores y estudiantes de profesor de Matemáticas. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 28, n. 48, p. 191-208, abr. 2014.
- LIMA, L. de O. **Piaget: sugestões aos educadores**. Petrópolis: Vozes, 2000. 254 p.

- LÓPEZ, P.; ALSINA, Á. Creencias de los futuros maestros sobre la aptitud Matemática: consideraciones para promover procesos de cambio en la Formación Inicial. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 30, n. 56, p. 892-905, dez. 2016.
- LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986. 99p.
- MANZINI, N. I. J. Roteiro pedagógico: um instrumento para a aprendizagem de conceitos de Física. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 13, n. 1, p. 127-136, 2007.
- MARQUESIN, D. F. B. Narrativas autobiográficas de futuras professoras: marcas da Matemática escolar. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, São Paulo. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul/SBEM, 2016. p. 1-11.
- MASSABNI, V. G. O construtivismo na prática de professores de ciências: realidade ou utopia? **Ciências & Cognição**, UFRJ, v. 10, n. 4, p. 104-114. 2005. Disponível em: <www.cienciasecognicao.org>. Acesso em 11. Jan. 2008.
- MASSABNI, V. G. Os conflitos de licenciandos e o desenvolvimento profissional docente. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 37, n. 4, p. 793-808, Dez., 2011.
- MELLO, G. N. de. Formação inicial de professores para a Educação Básica: uma (re)visão radical. **São Paulo em Perspectiva**, São Paulo, v.14, n.1, p. 98-110, 2000.
- MIZUKAMI, M. da G. N. et al. **Escola e aprendizagem da docência**: processos de investigação e formação. São Carlos: EdUFSCar, 2006. 203 p.
- MONTERO, L. **A construção do conhecimento profissional docente**. Lisboa: Instituto Piaget, 2001. 249 p.
- MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 28, p. 50-61, Jan./Fev./Mar./Abr., 2005.
- MOTA, E. A. D.; PRADO, G. do V. T.; PINA, T. A. Buscando possíveis sentidos de saber e conhecimento na docência. **Cadernos de Educação**, Pelotas, n. 30, p. 109-134, jan./jun., 2008.
- NACARATO, A. M. A Formação Matemática das professoras das séries iniciais: a escrita de si como prática de formação. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 23, n. 37, p. 905-930, dez. 2010.
- NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B.; CARVALHO, D. L. Os graduandos em pedagogia e suas filosofias pessoais frente à matemática e seu ensino. **Zetetikè**, Campinas, v. 12, n. 21, p. 9-33, Jan./Jun., 2004.
- NAGY-SILVA, M. C.; PASSOS, M. M.; TRINDADE, M. C. de C. Matemática e boa aula de Matemática: algumas características na visão de futuros professores de Matemática das séries

iniciais. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10., 2010, Ilhéus. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Ilhéus: Via Litterarum/SBEM, 2010.

NASCIMENTO, J. de C. P. do. Grupos colaborativos na formação do professor para ensinar Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma vivência com alunos do curso de Pedagogia no âmbito do programa observatório da Educação. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba: SBEM, 2013. p. 1-15.

NOGUEIRA, C. M. I. A Formação de Professores que ensinam Matemática e os conteúdos escolares: uma reflexão sustentada na Epistemologia Genética. **Schème**, Marília, v. 5, p. 284-312. set. 2013. Disponível em:
<<http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/scheme/article/view/3230/2525>> Acesso em 07 abr. 2016

OLIVEIRA, G. M. de; OLIVEIRA, A. T. de C. C. de. A Matemática na Formação Inicial de professores dos anos iniciais: reflexões a partir de uma análise de teses e dissertações defendidas entre 2005 e 2010 no Brasil. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., 2013, Curitiba. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba: SBEM, 2013. p. 1-16.

OLIVEIRA, L. L. A. de. Histórias em quadrinhos e Matemática, essa conexão é possível? In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10., 2010, Ilhéus. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Ilhéus: Via Litterarum/SBEM, 2010.

ORTEGA, E. M. V.; SANTOS, V de M. A Matemática e o lugar do professor dos anos iniciais: o ponto de vista dos alunos da pedagogia. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 6, n. 1, p. 27-43, Mai., 2012.

PACHECO, J. A. de B. **Formação de Professores: teoria e prática**. Braga: CEEP, 1995. 206 p.

PACHECO, J. A. de B.; FLORES, M. A. **Formação e avaliação de professores**. Porto/POR: Porto Editora, 1999.

PASSOS, C. L. B.; OLIVEIRA, R. M. M. A. de; PRENSTER, R. Grupo de Estudo Colaborativo: Matemática conectada com histórias infantis promovendo desenvolvimento profissional. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática**. Belo Horizonte: SBEM, 2007. p. 1-17.

PIAGET, J. **A equilibração das estruturas cognitivas: o problema central do desenvolvimento**. Rio de Janeiro: Zahar, 1976a. 175 p.

PIAGET, J. A evolução intelectual entre a adolescência e a maturidade. **Revista Portuguesa de Pedagogia**, Coimbra, n. 1, ano 5, p. 83-95, 1971.

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança**. Rio de Janeiro: LTC, 1990. 370 p.

PIAGET, J. **Ensaio de lógica operatória**. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1976b. 394 p.

PIAGET, J. **Epistemologia Genética**. São Paulo: Martins Fontes, 2007. 123 p.

PIAGET, J. et al. **A tomada de consciência**. São Paulo: Melhoramentos, 1977. 211 p.

PIAGET, J. et al. **As formas elementares da dialética**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1996. 228 p.

PIAGET, J. et al. **Fazer e compreender**. São Paulo: Melhoramentos, 1978. 186 p.

PIAGET, J. et. al. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. 292 p.

PIAGET, J. **O estruturalismo**. Rio de Janeiro: DIFEL, 2003. 126 p.

PIAGET, J. **O nascimento da inteligência na criança**. Rio de Janeiro: LTC, 1987. 389 p.

PIAGET, J. **Para onde vai a Educação?** Rio de Janeiro: José Olympio, 2002. 80p.

PIAGET, J. **Pedagogia**. Lisboa: Instituto Piaget, 1998a. 256 p.

PIAGET, J. **Psicologia e Pedagogia**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1998b. 184 p.

PIAGET, J. **Seis estudos de psicologia**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2001. 136 p.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **Gênese das estruturas lógicas elementares**. Rio de Janeiro: Zahar, 1971. 356 p.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **Da lógica da criança à lógica do adolescente**: ensaio sobre a construção das estruturas operatórias formais. São Paulo: Livraria Pioneira, 1976. 260 p.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **Gênese das estruturas lógicas elementares**. Tradução de Álvaro Cabral. 2. ed., Rio de Janeiro: Zahar, 1975. 356 p.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. Tradução de Christiano M. Oiticica. Rio de Janeiro: Zahar, 1975. 331 p.

PICETTI, J. S. **Formação continuada de professores**: da abstração reflexionante à tomada de consciência. 2008. 143 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

PIMENTA, S. G. Professor reflexivo: construindo uma crítica. In: GHEDIN, E.; PIMENTA, S. G. (Org.). **Professor reflexivo no Brasil**: gêneses e crítica de um conceito. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2006. p. 17-52.

PIMENTA, S. G. Professor: formação, identidade e trabalho docente. In: _____. (Org.). **Saberes pedagógicos e atividade docente**. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2008. p. 15-60.

- PONTE, J. P. da. Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. **Educação Matemática: Temas de Investigação**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, p. 185-239. 1992. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm>. Acesso em 25 ago. 2008.
- PONTE, J. P. da. Las creencias y concepciones de maestros como un tema fundamental en formación de maestros. In: KRAINER, K.; GOFFREE, F. (ed.) **On research in teacher education: From a study of teaching practices to issues in teacher education**. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, 1999. p. 43-50. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_sp.htm> Acesso em: 23 Jul. 2010.
- PONTE, J. P. da.; CARLOS, J.; FERREIRA, I. C.; CRUZ, I. **Por uma formação inicial de professores de qualidade**. 2000. (Documento de um grupo de trabalho do CRUP — Conselho de Reitores das Universidades Portuguesas) Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm>. Acesso em 17 jul. 2010.
- PORLÁN, R.; RIVERO, A. **El conocimiento de los profesores: una propuesta formativa en el área de Ciencias**. España: Díada Editora S. L, 1998. (Colección “Investigacion y Enseñanza, Serie Fundamentos, 9”)
- POZZO, J. I. **A solução de problema: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Artmed, 1998. 177 p.
- PROENÇA, M. C. de. O ensino de frações via resolução de problemas na formação de futuras professoras de Pedagogia. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 729-755, ago. 2015.
- QUEIROZ, J. C. G. **As fontes do saber matemático de professores dos anos iniciais**. 2007. 109 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.
- RAPOPORT, A.; SILVA, J. A. da. A utilização de referenciais teóricos na prática docente. **Psicologia América Latina**. [online]. Fev. 2006. Disponível em <<http://pepsic.bvs-psi.org.br/scielo.php>>. Acesso em 23. Jul. 2008.
- RIBEIRO, J. A.; ALBRECHT, E. Reflexões sobre o ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: Formação do Professor. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, São Paulo. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul/SBEM, 2016. p. 1-12.
- RIVAS, M. A.; GODINO, J. D.; CASTRO, W. F. Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 26, n. 42B, p. 559-588, abr. 2012.
- ROCHA, L. P. **(Re)constituição dos saberes de professores de Matemática nos primeiros anos de docência**. 2005. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

ROCHA, M. S. **Professores polivalentes das séries iniciais do Ensino Fundamental: concepção da formação e do ensino de Matemática**. 2005. 269 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Católica Dom Bosco, Campo Grande, 2005.

ROSA, J. E. da. Formação matemática no contexto do curso de Pedagogia a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural. In: Reunião Anual da ANPEd, 37., 2015, Florianópolis. **37.ª Reunião Científica da ANPEd**. Florianópolis: ANPEd, 2015.

SANTOS, A. A. P. dos. **O estágio como espaço de elaboração dos saberes docentes e a Formação do Professor**. 2008. 170 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2008.

SANTOS, E. O. dos; GHEDIN, E. A Formação Inicial de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais nas pesquisas nacionais e regionais. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, São Paulo. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul/SBEM, 2016. p. 1-12.

SANTOS, M. B. Q. de C. P. dos. **Ensino da Matemática em cursos de Pedagogia: a formação do professor polivalente**. 2009. 205 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

SANTOS, M. B. Q. de C. P. dos. Os fundamentos do ensino de Matemática e o curso de Pedagogia. In: Encontro Paulista de Educação Matemática, 7., 2004, São Paulo. **Anais do VII EPEM**, São Paulo: SBEM SP, 2004. v.1, p. 1-12.

SÃO PAULO. **Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo**. São Paulo: SEE, 2004.

SÃO PAULO. **Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo**. São Paulo: SEE, 2005.

SCHÖN, D. A. **Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SERRES, F. F. **Concepções e prática do ensinar Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: estudo de caso de um curso de Pedagogia a distância**. 2010. 103 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

SHULMAN, L. S. 'Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform'. In: **Harvard Educational Review**. v. 57. n. 1, p. 1-22, 1987.

SHULMAN, L. S. Those Who understand: knowledge growth in teaching. In: **Education Researcher**. vol. 15, n. 2, february, p. 4-14, 1986.

SILVA, A. J. N. da; PASSOS, C. L. B. Impressões dos futuros professores quanto a alfabetização e o ensino de Matemática: uma análise de narrativas autobiográficas produzidas em diários reflexivos. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, São Paulo. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo: Programa de Pós-

Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul/SBEM, 2016. p. 1-12.

SILVA, B. A. C. **Geometria no ciclo de alfabetização**: um estudo sobre as atitudes dos alunos do ciclo de alfabetização diante da geometria e suas relações com a aprendizagem. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, 2016.

SILVA, G. A. **O conhecimento declarativo do professor alfabetizador no ensino de geometria**. 2018. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, 2018.

SILVA, R. G. da; ESTEVES, A. K.; SOUZA, N. M. M. de. Aproximações em processo na Formação Inicial de professores que ensinam Matemática na escola fundamental. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Ilhéus. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Ilhéus: Via Litterarum/SBEM, 2010. p. 1-10.

SILVA, V. da S.; BURAK, D.. A formação de pedagogos para o ensino de Matemática nos anos iniciais: alguns apontamentos a partir de dissertações e teses. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, São Paulo. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul/SBEM, 2016.

SILVEIRA, D. N.; FORSTER, M. M. dos S.; FAGUNDES, M. C. V.; NÖRNBERG, N. Com ousadia e com um pouco de medo: o cotidiano do estar/ser professor. **Revista Eletrônica “Fórum Paulo Freire”**, São Leopoldo, ano 1, n. 1, p. 1-12, Jul., 2005.

SILVEIRA, V. N. S. Racionalidade e organização: as múltiplas faces do enigma. **RAC**, Curitiba, v. 12, n. 4, p. 1107-1130, out./dez., 2008.

SOARES, G. A. Formação Matemática oferecida no curso de Pedagogia: revelando olhares. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., 2013, Curitiba. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba: SBEM, 2013.

SOUZA, E. da S. **Um estudo histórico-pedagógico de crenças de futuros professores acerca do ensino-aprendizagem da noção de número natural**. 1996, 168 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.

SOUZA, K. C. S.; BORGES, M. F. A formação matemática dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental para a docência. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, São Paulo. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul/SBEM, 2016. p. 1-12.

TARDIF, M. **Saberes Docentes e Formação Profissional**. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2002. 325 p.

TARDIF, M. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários: Elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas

consequências em relação à formação para o magistério. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 13, p. 5-24, Jan./Fev./Mar./Abr., 2000.

TARDIF, M.; LESSARD, C. **O trabalho docente**: elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas. 3. ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2007. 317 p.

TARDIF, M.; RAYMOND, D. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. **Educação & Sociedade**, Campinas, v.21, n.73, p. 209-244, dez., 2000.

THOMPSON, A. G. A relação entre concepção de matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica. **Zetetikê**, Campinas, v. 15, n. 8, p. 9-44, Jul./Dez., 1997.

TORICELLI, L. **A colaboração em um grupo de alunas da Pedagogia que ensinam (ou ensinam)** Matemática. 2009. 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba, 2009.

TOWNSEND, C. B.; TOMAZZETI, E. M. A mobilização de saberes nas práticas de professores nos anos iniciais: um estudo de caso. **Educar**, Curitiba, n.29, p. 207-221, 2007.

TOZETTO, A. S.; BRANDT, C. F. Letramento para a docência em Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10., 2010, Ilhéus. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Ilhéus: Via Litterarum/SBEM, 2010.

TURCHIELO, L. B. **A Formação de Professores reflexivos no curso de Pedagogia a Distância da UFRGS**: um estudo de caso. 2017. 210 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

VERGNAUD, G. **El niño, las Matemáticas y la Realidad; problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria**. Tradução de Luis O. Segura. México: Trillas, 1991, ? p.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. Cap. 3, p. 155-191.

VERGNAUD, G. Au fond de l'action, la conceptualisation. In: BARBIER, J. M. **Savoirs théoriques et savoirs d'action**. Paris: PUF, 1996b. p. 276-292.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 1, p. 15-27, 2011.

YIN, R. K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. Porto Alegre: Bookman, 2. ed., 2001. 202 p.

ZASLAVSKY, S. S. **Formação Inicial de professores de História e a tomada de consciência das relações espaço-temporais**. 2010. 201 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

ZEICHNER, K. M. **A formação reflexiva de professores**: idéias e práticas. n. 3. Lisboa: Educa, 1993. (Coleção "Educa-Professores").

ZIBETTI, M. L. T.; SOUZA, M. P. R. de. Apropriação e mobilização de saberes na prática pedagógica: contribuição para a formação de professores. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v.33, n.2, p. 247-262, Mai./Ago., 2007.

ZIMER, T. T. B. **Aprendendo a ensinar Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental**. 2008. 299 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

ANEXO (CD-ROM)

ANEXO A – ESCALA DE ATITUDES EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA (BRITO, 1996)

Instrução: Cada uma das frases abaixo expressa o sentimento que cada pessoa apresenta com relação à Matemática. Você deve comparar o seu sentimento pessoal com aquele expresso em cada frase, assinalando um dentre os quatro pontos colocados abaixo de cada uma delas, de modo a indicar com a maior exatidão possível, o sentimento que você experimenta com relação à Matemática.

01. Eu fico sempre sob uma terrível tensão na aula de Matemática.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

02. Eu não gosto de Matemática e me assusta ter que fazer essa matéria.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

03. Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

04. A Matemática é fascinante e divertida.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

05. A Matemática me faz sentir seguro(a) e é, ao mesmo tempo, estimulante.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

06. “Dá um branco” na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando estudo Matemática.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

07. Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço em Matemática.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

08. A Matemática me deixa inquieto(a), descontente, irritado(a) e impaciente.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

09. O sentimento que tenho com relação à Matemática é bom.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

10. A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido(a) em uma selva de números e sem encontrar a saída.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

11. A Matemática é algo que eu aprecio grandemente.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

12. Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

13. Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz em Matemática.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

14. Eu gosto realmente de Matemática.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

15. A Matemática é uma das matérias que eu realmente gosto de estudar na escola.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

16. Pensar sobre a obrigação de resolver um problema de Matemática me deixa nervoso(a).

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

17. Eu nunca gostei de Matemática e é a matéria que me dá mais medo.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

18. Eu fico mais feliz na aula de Matemática que na aula de qualquer outra matéria.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

19. Eu me sinto tranquilo(a) em Matemática e gosto muito dessa matéria.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

20. Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação à Matemática: Eu gosto e aprecio essa matéria.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

21. Não tenho um bom desempenho em Matemática.

() Discordo Totalmente () Discordo () Concordo () Concordo Totalmente

APÊNDICES (CD-ROM)

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO INICIAL

Caro Estudante/Participante:

Inicialmente, muito obrigado por contribuir e ajudar a construir este trabalho/pesquisa. As questões abaixo visam mapear alguns elementos de sua trajetória enquanto aluno da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio) e ou Ensino Técnico. Em específico, em relação à Matemática e ao seu processo de ensino e aprendizagem. Desde já firma-se o compromisso do pesquisador com o total zelo e discrição dos dados coletados, respeitando as normas éticas da pesquisa científica, assim como do retorno acerca das conclusões/apontamentos observados.

Categoria A – Informações Contextuais:

Nome: _____	Identificação: _____
Idade: _____	

1) Período em que cursou a Educação Básica e ou Ensino Técnico e o tipo de administração:

Educação Infantil: _____ a _____ Particular () Pública () Cooperativa ()	Ensino Médio: _____ a _____ Particular () Pública () Cooperativa ()
Ensino Fundamental: _____ a _____ Particular () Pública () Cooperativa ()	Ensino Técnico: _____ a _____ Particular () Pública () Cooperativa () Se sim, qual foi? _____

Categoria B – “Lembranças do SEU Ensino”:

1) Antes de ingressar na Universidade você frequentou diferentes etapas de escolaridade. Quais foram as impressões que tais etapas transmitiram para **VOCÊ** acerca do significado de **ESCOLA**?

Educação Infantil: _____

Ensino Fundamental (1.^a a 4.^a série): _____

Ensino Fundamental (5.^a a 8.^a série): _____

Ensino Médio: _____

Ensino Técnico: _____

2) Durante a sua trajetória escolar antes de ingressar na Universidade **VOCÊ** se recorda de algum(s) professor(s) que tenha(m) contribuído **positivamente** com a sua formação? E àqueles que, por ventura, o fizeram **negativamente**?

Disciplina: _____ () Influência Positiva. () Influência Negativa.	Justificativa: _____ _____
---	-------------------------------

Disciplina: _____ () Influência Positiva.	Justificativa: _____ _____
---	-------------------------------

() Influência Negativa.	_____
Disciplina: _____ () Influência Positiva. () Influência Negativa.	Justificativa: _____ _____ _____
Disciplina: _____ () Influência Positiva. () Influência Negativa.	Justificativa: _____ _____ _____

3) De um modo geral, a maioria dos **SEUS** professores de Matemática adotou as seguintes posturas (didático-metodológicas) com qual frequência?

	NUNCA OU QUASE NUNCA	DE VEZ EM QUANDO	SEMPRE
1. Exposição Oral feita pelo professor na lousa.			
2. Agrupamento dos alunos para realização de atividades sugeridas pelo professor.			
3. Atividades individuais solicitadas pelo professor.			
4. Aplicação de jogos envolvendo noções / conteúdos matemáticos.			
5. Troca de ideias entre alunos e professores.			
6. Troca de ideias entre alunos e alunos.			
7. Trabalho interdisciplinar, ou seja, a Matemática e outras áreas do conhecimento.			
8. Trabalho intradisciplinar, ou seja, a Matemática em outras áreas do conhecimento.			
9. Atividades envolvendo materiais concretos manipulativos.			
10. Confecção de algum material pelos alunos.			
11. Atividades lúdicas como: dramatizações, brincadeiras, entre outras.			
12. Uso de tecnologias (computador, internet, calculadora, projetor, etc.)			
Outros _____			

4) Na questão anterior você denotou as posturas (didático-metodológicas) adotadas pela maioria dos **SEUS** professores de Matemática. De todos os professores de Matemática que você teve algum não se “encaixa” nessa “maioria”? Em caso afirmativo, denote as posturas (didático-metodológicas) adotadas por esse professor e comente, abaixo do quadro, quais os motivos que tornavam a aula desse professor diferenciada das demais.

	NUNCA OU QUASE NUNCA	DE VEZ EM QUANDO	SEMPRE
1. Exposição Oral feita pelo professor na lousa.			
2. Agrupamento dos alunos para realização de atividades sugeridas pelo professor.			
3. Atividades individuais solicitadas pelo professor.			
4. Aplicação de jogos envolvendo noções / conteúdos matemáticos.			

5. Troca de ideias entre alunos e professores.			
6. Troca de ideias entre alunos e alunos.			
7. Trabalho interdisciplinar, ou seja, a Matemática e outras áreas do conhecimento.			
8. Trabalho intradisciplinar, ou seja, a Matemática em outras áreas do conhecimento.			
9. Atividades envolvendo materiais concretos manipulativos.			
10. Confecção de algum material pelos alunos.			
11. Atividades lúdicas como: dramatizações, brincadeiras, entre outras.			
12. Uso de tecnologias (computador, internet, calculadora, projetor, etc.)			
Outros _____			

R:

5) Como você avalia os conteúdos matemáticos aprendidos por **VOCÊ**?

	NÃO APRENDI	APRENDI + OU -	APRENDI BEM
a) Operações Aritméticas Básicas:			
b) Sistema de Numeração Decimal:			
c) Geometria Plana e Espacial:			
d) Grandezas e Medidas:			
e) Tratamento da Informação:			
f) Solução de Problemas:			

5.1) Em relação à questão anterior, escreva quais são os conteúdos que **VOCÊ** considera como pertencentes aos ‘Blocos de Conteúdos’:

‘BLOCOS’	CONTEÚDOS PERTENCENTES
a) Operações Aritméticas Básicas:	
b) Sistema de Numeração Decimal:	
c) Geometria Plana e Espacial:	

d) Grandezas e Medidas:	
e) Tratamento da Informação:	
f) Solução de Problemas:	

6) Dos conteúdos matemáticos salientados por **VOCÊ** como “**NÃO APRENDI**” (questão 5) qual(s) **VOCÊ** acha necessário(s) para sua futura atuação enquanto professor?
R: _____

7) Na **SUA** opinião, o que é a Matemática?
R: _____

8) Na **SUA** opinião, como se aprende a Matemática?
R: _____

9) Na **SUA** opinião, como deve ser ensinada a Matemática?

R: _____

Categoria C – A Formação Inicial (Graduação):

1) Na questão 1 (II – “**Lembranças do SEU Ensino**”) **VOCÊ** denotou algumas impressões acerca do significado de ESCOLA transmitidas ao longo das diferentes etapas de escolaridade. Após frequentar mais da metade da Licenciatura as **SUAS** impressões foram mantidas ou modificadas? Comente.

R: _____

2) Na Licenciatura **VOCÊ** já deve ter cursado disciplinas que abordaram questões acerca do ensino de Matemática. Tais disciplinas contribuíram para que as **SUAS** ideias acerca da Matemática (e do seu ensino) fossem modificadas? Comente em caso afirmativo ou negativo.

R: _____

3) Ao concluir a Licenciatura **VOCÊ** acredita que possuirá os conhecimentos necessários para promover um ensino de Matemática de qualidade, ou seja, que propicie/permita a ‘máxima’ aprendizagem pelo aluno? Comente em caso afirmativo ou negativo.

R: _____

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO E TERMO DE AUTORIZAÇÃO

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

FACULDADE DE CIÊNCIAS, CAMPUS DE BAURU

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO E TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Por meio dos presentes termos, eu, Richael Silva Caetano, aluno regular do Programa de Pós-Graduação em Educação Para A Ciência da UNESP, Campus de Bauru, solicito o seu consentimento e a sua autorização para: 1 – Aplicação de questionários e testes; 2 – Realização de entrevistas a serem gravadas em áudio; 3 – Gravação em áudio e vídeo de sua participação em atividades a serem desenvolvidas em um Grupo de Estudo.

Os questionários, testes, entrevistas e as atividades do Grupo de Estudo correspondem à parte de minha pesquisa de Doutorado que é financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e que está sendo elaborada em torno de questões que envolvem a Formação Inicial de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. O objetivo é investigar as possibilidades e os limites de um Grupo de Estudo – alicerçado em ‘elementos’ advindos da Epistemologia Genética e dos estudos acerca da Formação de Professores – à Formação Inicial de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Em respeito às normas de ética (Resolução CNS n.º 196, 10 de outubro de 1996, Ministério da Saúde) cumpre salientar que o interesse da pesquisa é o de contribuir com uma proposta metodológica para a Formação Inicial de professores, corroborando, de certo modo, com o ensino de Matemática da escola pública.

Estamos à disposição para fornecer os esclarecimentos adicionais julgados necessários. Aproveitamos a oportunidade para agradecer a atenção dispensada para esta solicitação.

Bauru, __ de **novembro** de **2011**.

(Richael Silva Caetano, Programa de Pós-Graduação em Educação Para A Ciência, telefone: (14) 9682-6643, e-mail: richael13@yahoo.com.br)

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Estou ciente de que serão aplicados questionários e testes, serão realizadas entrevistas a serem gravadas em áudio e ocorrerão gravações em áudio e vídeo de minha participação em um Grupo de Estudo. Esses procedimentos constituem uma parte da pesquisa de Richael Silva Caetano e visam contribuir com a Formação Inicial de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Será garantido pelo pesquisador que o meu nome e as informações e imagens não serão divulgados. Estou ciente de que posso ter acesso às informações e imagens coletadas.

Bauru, __ de **novembro** de **2011**.

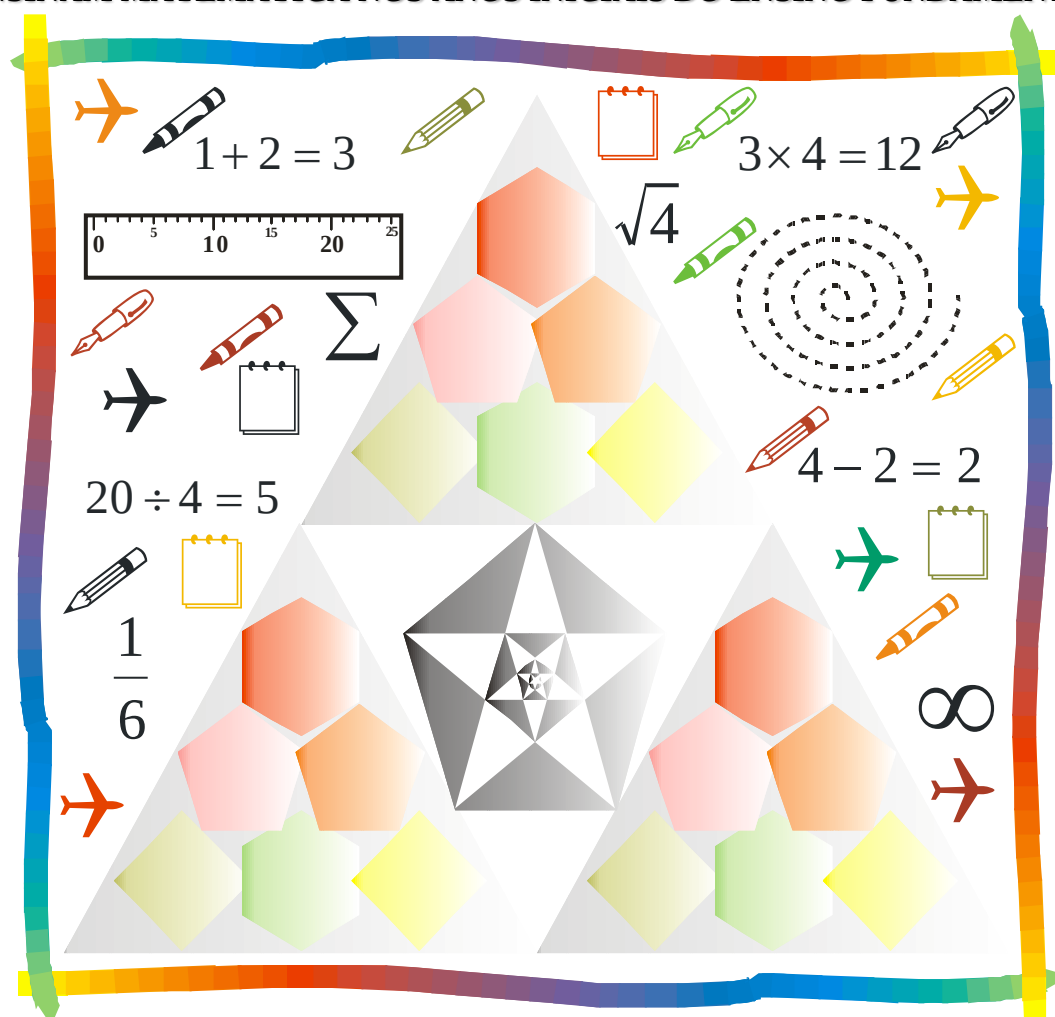
Nome Completo e por Extenso: _____

Assinatura: _____

APÊNDICE C – MATERIAL DE APOIO: GRUPO DE ESTUDO PARA A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

**– UNESP –
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
– FACULDADE DE CIÊNCIAS –**

GRUPO DE ESTUDO PARA A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL



(RE)SIGNIFICANDO OS SABERES EXPERIENCIAIS: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA EM CONSTRUÇÃO

Prof. Responsável: Me. Richael Silva Caetano
Prof. Orientador: Dr. Nelson Antonio Pirola

**BAURU
2012**

Caro(a) licenciando(a):

Muito obrigado pela participação neste Grupo de Estudo que, de certa forma, será construído com as suas experiências, ideias acerca da Educação, da Matemática e da Educação Matemática. O objetivo principal desta iniciativa reside na reflexão teórico/empírica sobre o ensino dos conteúdos matemáticos destinado aos alunos dos cinco anos iniciais do Ensino Fundamental.

No decorrer do Grupo de Estudo serão abordadas as seguintes temáticas:

1. Conteúdos disciplinares de Matemática – a decidir entre os seguintes: os campos numéricos e o Sistema de Numeração Decimal (**SND**); cálculos e operações envolvendo as estruturas aditivas e multiplicativas; unidades de medidas convencionais e não convencionais; Geometria Euclidiana bidimensional e tridimensional; Tratamento da Informação;
2. Conteúdos específicos de Educação: Metodologia da Matemática, Didática da Matemática, Teoria Educacional Construtivista (piagetiana);
3. Conteúdos experienciais: conhecimentos advindos da sua experiência escolar enquanto aluno(a) concernente ao ensino de Matemática.

Contudo, as temáticas apresentadas serão abordadas conjuntamente, visando estabelecer uma tríade cujo foco reside na constante reflexão/ação e teórico/empírica em torno dos processos de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

No final desta jornada, composta por 20 encontros, espera-se fomentar um espaço de/para reflexões acerca da necessária ocorrência da práxis – ‘confronto’ entre a teoria e a prática – utilizando como base teórica a Epistemologia Genética elaborada por Jean Piaget e colaboradores.

Desde já agradecemos à imensa e preciosa contribuição a construção deste trabalho.

Atenciosamente,

Prof. Me. Richael Silva Caetano

Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola

CRONOGRAMA

2012																											
MARÇO							ABRIL							MAIO							JUNHO						
D	S	T	Q	Q	S	S	D	S	T	Q	Q	S	S	D	S	T	Q	Q	S	S	D	S	T	Q	Q	S	S
				1	2	3	1	2	3	4	5	6	7			1	2	3	4	5						1	2
4	5	6	7	8	9	10	8	9	10	11	12	13	14	6	7	8	9	10	11	12	3	4	5	6	7	8	9
11	12	13	14	15	16	17	15	16	17	18	19	20	21	13	14	15	16	17	18	19	10	11	12	13	14	15	16
18	19	20	21	22	23	24	22	23	24	25	26	27	28	20	21	22	23	24	25	26	17	18	19	20	21	22	23
25	26	27	28	29	30	31	29	30						27	28	29	30	31			24	25	26	27	28	29	30

JUNHO							AGOSTO							SETEMBRO							OCTUBRO						
D	S	T	Q	Q	S	S	D	S	T	Q	Q	S	S	D	S	T	Q	Q	S	S	D	S	T	Q	Q	S	S
					1	2				1	2	3	4														1
3	4	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	10	11	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	11	12	13	14	15	16	12	13	14	15	16	17	18	16	17	18	19	20	21	22	13	14	15	16	17	18	19
17	18	19	20	21	22	23	19	20	21	22	23	24	25	23	24	25	26	27	28	29	20	21	22	23	24	25	26
24	25	26	27	28	29	30	26	27	28	29	30	31		30	31						27	28	29	30	31		

DIA	GRUPO DE ESTUDO
01/03/2012	Primeiro Encontro – Esclarecendo Alguns Pontos Iniciais – Dinâmica de Apresentação.
08/03/2012	Segundo Encontro.
15/03/2012	Terceiro Encontro.
22/03/2012	Quarto Encontro.
29/03/2012	Quinto Encontro.
05/04/2012	Sexto Encontro.
12/04/2012	Sétimo Encontro.
19/04/2012	Oitavo Encontro.
26/04/2012	Nono Encontro.
10/05/2012	Décimo Encontro.
17/05/2012	Décimo Primeiro Encontro.
31/05/2012	Décimo Segundo Encontro.
14/06/2012	Décimo Terceiro Encontro.
21/06/2012	Décimo Quarto Encontro.
28/06/2012	Décimo Quinto Encontro.
16/08/2012	Décimo Sexto Encontro.
23/08/2012	Décimo Sétimo Encontro.
30/08/2012	Décimo Oitavo Encontro.
13/09/2012	Décimo Nono Encontro.
27/09/2012	Vigésimo Encontro – Algumas Considerações Sínteses – Dinâmica de Encerramento.

SUMÁRIO

1 PRIMEIRO ENCONTRO: ESCLARECENDO ALGUNS PONTOS INICIAIS – DINÂMICA DE APRESENTAÇÃO	326
1.1 Discussão acerca do Questionário Inicial aplicado.....	329
1.2 Desafio	332
1.3 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	333
2 SEGUNDO ENCONTRO	334
2.1 Retomando o Desafio – A torre de Hanói.....	334
2.2 Alguns pontos iniciais do Tratamento da Informação	335
2.3 Saberes já construídos: Gráficos e Tabelas.....	336
2.4 Problematizando: Gráficos e Tabelas	337
2.5 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	339
3 TERCEIRO ENCONTRO.....	340
3.1 Retomando – Gráficos e Tabelas	340
3.2 Algumas considerações de uma pesquisa Estatística.....	341
3.3 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	344
4 QUARTO ENCONTRO	345
4.1 Retomando – o ‘pensar sobre’ a Tabela.....	345
4.2 A gênese-construção das classificações.....	346
4.2.1 Coleções figurais – Fase I	348
4.2.2 Coleções não-figurais – Fase II.....	350
4.2.3 Classes (inclusão e classificações hierárquicas) – Fase III	352
4.3 Uma proposta-atividade para a construção da classificação	353
4.4 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	354
5 QUINTO ENCONTRO.....	355
5.1 Classificação – ‘ação/operação’	355
5.2 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	356
6 SEXTO ENCONTRO	357
6.1 Um movimento de retomada (síntese)	357
6.2 Diferentes representações gráficas.....	357
6.2.1 Conceituando alguns tipos de gráficos.....	360
6.3 Desafio para casa – atividade individual	367
6.4 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	367
7 SÉTIMO ENCONTRO	368
7.1 Retomando a atividade individual ‘para casa’	368
7.2 Estatística Descritiva: medidas de posição	368
7.2.1 Média aritmética.....	368
7.2.2 Mediana.....	371
7.2.3 Moda.....	372

7.3 Desafio para casa	373
7.4 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	374
8 OITAVO ENCONTRO	375
8.1 Retomando uma dúvida	375
8.2 Retomando o desafio	376
8.3 Estatística Descritiva: medidas de dispersão	378
8.3.1 Amplitude.....	378
8.3.2 Variância	378
8.3.3 Desvio padrão.....	380
8.4 Desafio para casa	380
8.5 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	381
9 NONO ENCONTRO	382
9.1 Ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental.....	382
9.2 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	387
10 DÉCIMO ENCONTRO	388
10.1 Um movimento de retomada (síntese)	388
10.2 Epistemologia Genética: algumas considerações	388
10.2.1 A teoria da assimilação: o processo de assimilação e acomodação	391
10.3 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	394
10.4 Desafios para casa: Estatística Descritiva.....	395
11 DÉCIMO PRIMEIRO ENCONTRO	398
11.1 Um movimento de retomada (síntese)	398
11.2 ‘A Educação deve responder a uma necessidade’	398
11.3 Os fatores do desenvolvimento	399
11.4 Estádios de desenvolvimento	401
11.4.1 Estádio sensório-motor (o recém-nascido e o lactente)	401
11.4.2 Estádio pré-operatório (a primeira infância)	402
11.4.3 Estádio operatório concreto (a segunda infância)	404
11.4.4 Estádio operatório formal (a adolescência)	406
11.5 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	407
12 DÉCIMO SEGUNDO ENCONTRO	408
12.1 Um movimento de retomada.....	408
12.2 O Mecanismo de Equilibração.....	408
12.3 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	410
13 DÉCIMO TERCEIRO ENCONTRO.....	411
13.1 Um movimento de retomada da Epistemologia Genética.....	411
13.2 Retomando os ‘Desafios para casa: Estatística Descritiva’	411
13.3 Retomando o Tratamento da Informação	413
13.3.1 Alguns desafios envolvendo Combinatória e Probabilidade.....	414

14 DÉCIMO QUARTO ENCONTRO.....	416
14.1 Um movimento de retomada.....	416
14.2 Retomando alguns desafios envolvendo Combinatória e Probabilidade.....	416
14.3 Uma breve reflexão sobre a Combinatória e a Probabilidade e seu ensino	420
14.4 Problematisando: Combinatória	421
14.5 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	422
15 DÉCIMO QUINTO ENCONTRO	423
15.1 Um movimento de retomada.....	423
15.2 Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem (PFC).....	423
15.3 Conversando sobre o ensino de Combinatória.....	424
15.4 Alguns tipos de problemas envolvendo a Combinatória	426
15.5 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	430
16 DÉCIMO SEXTO ENCONTRO.....	431
16.1 Um movimento de retomada ‘geral’	431
16.2 Retomando alguns tipos de problemas envolvendo a Combinatória	432
16.3 Desafio para casa	439
17 DÉCIMO SÉTIMO ENCONTRO	442
17.1 Retomando o desafio para casa.....	442
17.2 Análise Combinatória: alguns tipos de agrupamentos.....	443
17.2.1 Permutação simples e com repetição	443
17.2.2 Arranjo simples e com repetição	444
17.2.3 Combinação simples	445
17.3 Uma possível relação entre Combinatória, Estatística e Probabilidade.....	447
17.4 Algumas considerações sobre a Probabilidade	448
17.5 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	449
17.6 Desafios para casa: Análise Combinatória	450
18 DÉCIMO OITAVO ENCONTRO	451
18.1 Retomando os ‘desafios para casa’ envolvendo Análise Combinatória	451
18.2 Retomando a Probabilidade Clássica (Laplaciana)	452
18.3 Problematisando: Probabilidade Frequentista	453
18.4 Alguns desafios envolvendo Probabilidade	455
18.5 Um desafio final.....	456
18.6 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	456
19 DÉCIMO NONO ENCONTRO	457
19.1 Retomando alguns desafios envolvendo Probabilidade.....	457
19.2 Ensino de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental	460
19.3 O processo de tomada de consciência.....	462
19.4 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’	464
20 VIGÉSIMO ENCONTRO	465

20.1 (Re)significando os saberes da experiência acerca da Matemática	465
REFERÊNCIAS	468

1 PRIMEIRO ENCONTRO: ESCLARECENDO ALGUNS PONTOS INICIAIS – DINÂMICA DE APRESENTAÇÃO

O presente Grupo de Estudo, a ser construído conjuntamente com você – licenciando da Pedagogia – visa estabelecer uma relação entre a Epistemologia Genética de Jean Piaget, estudos acerca da Formação de Professores e os saberes experienciais. Estes saberes, segundo Tardif (2002), advêm da experiência ‘vívda’ nas esferas familiar, social, educativa e profissional.

Tal Grupo de Estudo, por sua vez, insere-se na pesquisa de Doutorado intitulada “(Re)Significando os Saberes Experienciais: Uma Proposta Metodológica em Construção”. Como evidenciado no título, a proposta metodológica em construção – no caso o referido Grupo de Estudo – visa ‘desencadear’ processos de (re)significações sobre os saberes experienciais dos participantes acerca da Matemática e de seu processo de ensino e de aprendizagem. Considerando tal contexto, duas questões fazem-se presentes (e pertinentes):

1. Como a Epistemologia Genética e os estudos sobre a Formação de Professores podem colaborar à Formação Inicial do professor que ensina Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental?
2. Como (re)significar os saberes experienciais em relação à Matemática e seus processos de ensino e aprendizagem – construídos pelo aluno durante a Educação Básica – na Formação Inicial do professor que ensina Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental?

No entanto, qual é a possível relação entre a Epistemologia Genética e a (re)significação dos saberes experienciais? Uma possível relação reside na utilização da Teoria de Piaget à **(re)significação dos saberes experienciais**¹ dos alunos durante a Formação Inicial. E, como citado no primeiro parágrafo, tal relação dar-se-á por intermédio das análises/estudos que ocorrerão no referido Grupo de Estudo.

Visando uma melhor delimitação da pesquisa (de Doutorado) ao participante, torna-se válido denotar o Objetivo Geral da mesma:

OBJETIVO GERAL: Analisar os limites e as possibilidades de um Grupo de Estudo – alicerçado na Epistemologia Genética e em estudos sobre a Formação de Professores – à (re)significação dos saberes da experiência pré-profissional dos licenciandos (relativos à Matemática e seus processos de ensino e aprendizagem) durante a Formação Inicial do (futuro) professor que ensina Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Em relação aos objetivos específicos, a referida pesquisa pretende identificar os saberes da experiência pré-profissional em relação à Matemática (e seus processos de ensino e aprendizagem) antes e após a efetiva participação/ação no Grupo de Estudo.

Enquanto objetivos específicos do Grupo de Estudo – a ser realizado num trabalho conjunto/colaborativo com as participantes/licenciandas – pretende-se que o mesmo oportunize:

1. A construção de alguns conteúdos matemáticos (ainda) não aprendidos durante a Educação Básica.
2. O estudo da Epistemologia Genética – desenvolvida por Jean Piaget e colaboradores – de modo a compreender o processo de construção do conhecimento.

¹ A (re)significação consiste numa ‘nova’ significação dos saberes da experiência mediante a construção de ‘novas’ estruturas (esquemas de ação e ou conceitos) de assimilação.

3. A discussão de aspectos didático-metodológicos e curriculares acerca dos referidos conteúdos matemáticos quando estes se tornam objeto de ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental.
4. A reflexão em torno dos saberes da experiência em relação à Matemática, saberes esses construídos durante a Educação Básica.

Em linhas gerais, tal Grupo de Estudo, considerado um procedimento metodológico de investigação oportunizando o trabalho colaborativo entre pesquisador e licenciandos, será constituído por:

- 1 – Textos teóricos abordando os seguintes tópicos da Epistemologia Genética: o processo de Equilíbrio Majorante, a construção das estruturas lógico-matemáticas (PIAGET e INHELDER, 1971), os fatores do desenvolvimento cognitivo e o processo de Tomada de Consciência (PIAGET et al., 1977).
- 2 – Textos teóricos contemplando a construção de alguns conteúdos matemáticos – os salientados pelos licenciandos como sendo os principais obstáculos – alicerçados na Epistemologia Genética. Neste ponto discutir-se-ão algumas possíveis estratégias didáticas e metodológicas que podem propiciar a ocorrência das experiências física e lógico-matemática, sendo as mesmas importantes ao processo de Equilíbrio Majorante.
- 3 – Textos teóricos contemplando aspectos didático-metodológicos e curriculares referente ao ensino de determinado conteúdo matemático, bem como da Educação de modo geral.
- 4 – Trechos de entrevistas advindas da minha dissertação (CAETANO, 2009) nas quais ficam evidentes as influências dos saberes experienciais à constituição da prática docente.

Para constituir-se enquanto um trabalho colaborativo, durante a realização do Grupo de Estudo deverão ser observados (e alcançados) os seguintes critérios:

- 1.º – Confiança: constituindo um dos ‘primeiros’ passos à colaboração de modo a instaurar um clima de respeito mútuo entre todos os participantes. O ‘confiar no outro’ permite o ‘expressar sem medo de errar’, e sem tal ‘expressão’ torna-se complicada a superação das dúvidas que o sujeito possui.
- 2.º – Diálogo/Conversação: em estreita relação com o 1.º critério, permite a ‘efetiva’ comunicação entre os pares. Tal comunicação torna-se importante para que as reflexões individuais e coletivas desencadeiem um ‘pensar sobre’ mais elaborado acerca das questões em discussão.
- 3.º – Negociação: ‘acordos’ realizados entre os sujeitos donde os conflitos surgidos não devem ser encarados como um fator negativo, mas sim um elemento do processo dinâmico de construção de conhecimento.

No entanto, para a consolidação de tais critérios, torna-se imprescindível a ‘efetiva participação’ de todos, ou seja, o cumprimento das tarefas delegadas ao Pesquisador/Participante e aos licenciandos/participantes. Sem tal ‘cumprimento’, a ‘efetiva comunicação’ durante o Grupo de Estudo não será possível, impedindo que as negociações sejam acordadas, bem como dificultando a confiança entre os membros. Em suma, colaboração envolve uma negociação cuidadosa, decisões conjuntas, uma efetiva comunicação e aprendizagem mútua, visando o empreendimento focado no diálogo profissional (DAY, 1999).

Para finalizar, faz-se oportuno citar a origem deste trabalho e o porquê da importância em possibilitar aos licenciandos uma (re)significação dos seus saberes experienciais concernentes à Matemática e seus processos de ensino e de aprendizagem. A origem reside

nas experiências (pessoal, acadêmica e profissional) do Pesquisador/Participante que lhe permitiu, no decorrer de quase 9 anos, o estabelecimento das seguintes ideias:

- 1.^a – Um dos obstáculos dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental para abordar os conteúdos matemáticos aos seus alunos é devido a não construção destes conceitos (por esses docentes) durante a Educação Básica.
- 2.^a – O professor utiliza-reproduz em sua prática pedagógica os saberes experienciais advindos da trajetória escolar, principalmente os construídos na Educação Básica (durante o Ensino Fundamental e Médio). Esta reprodução – na maioria das vezes – ocorre acriticamente, ou seja, o docente não reflete **sobre porque** utiliza determinadas estratégias didático-metodológicas em suas aulas.
- 3.^a – A Formação Inicial não vem garantindo ao professor a compreensão das teorias educacionais, colaborando a execução de práticas docentes não fundamentadas teoricamente. Assim, torna-se imprescindível um movimento de (re)avaliação, (re)formulação dos cursos (de Licenciatura) permitindo ao estudante compreender as teorias educacionais através de situações de ensino que possibilitem-no visualizar o “papel” da(s) teoria(s) na prática de sala de aula.

Em relação à primeira ideia, as pesquisas de (CAPORALE e NACARATO, 2003; GOMES e MORETTI, 2003; CURI, 2004; DELGADO, 2003; ROCHA, M. 2005; SANTOS, 2004) evidenciam que a não aprendizagem da Matemática pelo aluno na Educação Básica traz sérias implicações a sua atuação como professor, levando-o a reproduzir as defasagens de sua formação. Nesta reprodução o docente, em muitos casos de modo não consciente, transmite aos seus estudantes que a Matemática é uma disciplina estática, constituída somente por regras/fórmulas e acessível a poucos.

Sobre a influência dos saberes experienciais à constituição da prática pedagógica, os trabalhos realizados por (QUEIROZ, 2007; TARDIF, 2002; TARDIF e RAYMOND, 2000; TOWNSEND e TOMAZETTI, 2007; ZIBETTI e SOUZA, 2007) sinalizam que estes saberes – construídos principalmente no período em que o aluno cursou a Educação Básica – são utilizados pelos professores em suas práticas pedagógicas de modo acrítico. Esta utilização acaba, na maioria das vezes, supervalorizando os saberes da experiência, chegando a ponto de negar os abordados na faculdade (principalmente os saberes da Formação Pedagógica). Os referidos autores salientam que isto ocorre devido, em grande parte, a Formação Inicial do professor por não propiciar ao estudante a reflexão sobre estes saberes (experienciais), ou seja, o aluno (futuro-professor) “passa” pela Licenciatura sem modificar suas ideias construídas sobre o ensino na (sua) Educação Básica.

A respeito da Formação Inicial (3.^a ideia), os estudos analisados (ANTUNES, ZAPPAROLI e ARRUDA, 2005; CURI, 2004; FELÍCIO e OLIVEIRA, 2008; GOMES e MORETTI, 2003; NEHRING e POZZOBON, 2006; ROCHA, L. 2005; SANTOS, 2004) indicam ser o Estágio Supervisionado um “local” propício e fértil à reflexão sobre a prática por meio das Teorias Educacionais. Nesta reflexão os alunos poderão (re)significar os saberes adquiridos ao longo de sua trajetória (pessoal e acadêmica), colaborando assim à constituição de um profissional que saiba investigar a sua (futura) prática docente e solucionar/minimizar os problemas advindos da mesma.

Em relação ao motivo, ou seja, à justificativa, é possível remetê-la ao seguinte questionamento: “*Por que é importante investigar a Formação Inicial do professor que ensina Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental?*”. Esta resposta, a meu ver complexa, justifica-se nas seguintes proposições relacionadas à importância da construção da

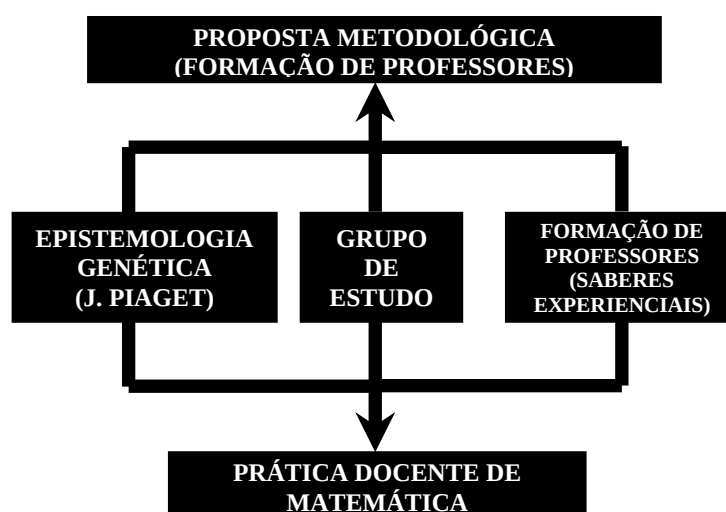
Matemática pelos alunos desta etapa de escolaridade; construção esta mediada pelo papel do professor como “animador” de situações problemas, segundo o enfoque interacionista/construtivista (CUNHA, 1973; FURTH, 1997; KAMII, 2005; LIMA, 2000; PIAGET, 2002):

1.^a Proposição: Porque infelizmente, conforme exposto por diferentes órgãos de avaliação governamental, considerável parcela dos alunos da Educação Básica não está construindo os conceitos matemáticos. Assim, torna-se necessário investigar alternativas para auxiliar os professores em sua Formação Inicial, não somente dos anos iniciais, mas de todos os outros níveis de ensino.

2.^a Proposição: Porque a experiência como docente dos anos iniciais do Ensino Fundamental permitiu verificar a importância de uma construção “sólida” dos conteúdos matemáticos (pelo estudante) nos anos iniciais para o possível desempenho satisfatório nas séries posteriores.

3.^a Proposição: Porque os estudos na área (CUNHA, 1973; FURTH e WACHS, 1995; LIMA, 2000; PIAGET, 2001) indicam que a construção de estruturas operatório-concretas de pensamento, via construção de conteúdos matemáticos pelos alunos dos anos iniciais, colabora – em um futuro próximo – à construção da lógica formal. Sendo esta lógica (formal) imprescindível à constituição da autonomia (PIAGET, 1994) e permitindo ao sujeito raciocinar nas diversas esferas (científica, artística, filosófica, etc.).

O esquema abaixo esboça, de modo geral, as inter-relações provenientes da presente proposta de estudo:



1.1 Discussão acerca do Questionário Inicial aplicado

A partir do Questionário Inicial aplicado foi possível observar algumas ideias de vocês, participantes, acerca do significado de Educação (de modo geral) e de questões acerca dos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, bem como da própria Matemática enquanto uma ciência. A seguir serão esboçadas algumas questões no intuito de oportunizar um ‘pensar sobre’ acerca das questões respondidas.

1.^a – De que modo influências positivas e negativas interferem no processo de aprendizagem da Matemática? Rememore as vivências que te marcaram, seja de modo positivo ou negativo, para ‘pensar sobre’ tal questão.

2.^a – Quando questionado sobre as posturas didático-metodológicas adotadas pela maioria dos seus professores de Matemática durante a Educação Básica, o resultado foi o seguinte:

ESTRATÉGIAS DIDÁTICO-METODOLÓGICAS	NUNCA OU QUASE NUNCA	DE VEZ EM QUANDO	SEMPRE
1. Exposição Oral feita pelo professor na lousa.	0	1	9
2. Agrupamento dos alunos para realização de atividades sugeridas pelo professor.	3	6	1
3. Atividades individuais solicitadas pelo professor.	0	1	9
4. Aplicação de jogos envolvendo noções / conteúdos matemáticos.	8	0	2
5. Troca de ideias entre alunos e professores.	4	4	2
6. Troca de ideias entre alunos e alunos.	6	3	1
7. Trabalho interdisciplinar, ou seja, a Matemática e outras áreas do conhecimento.	9	1	0
8. Trabalho intradisciplinar, ou seja, a Matemática em outras áreas do conhecimento.	7	3	0
9. Atividades envolvendo materiais concretos manipulativos.	6	4	0
10. Confecção de algum material pelos alunos.	6	4	0
11. Atividades lúdicas como: dramatizações, brincadeiras, entre outras.	9	1	0
12. Uso de tecnologias (computador, internet, calculadora, projetor, etc.)	5	5	0

O que tais frequências indicam quanto ao agir destes professores em relação ao que acreditavam ser o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática?

3.^a – Na escrita de vocês, um professor de Matemática ‘diferenciado’, ou seja, que ‘melhor’ ensina, é caracterizado como sendo àquele que realiza as seguintes ações: interação (diálogo) entre alunos e professor, realização de trabalhos em grupo, observação das dificuldades apresentadas pelos alunos, dinamicidade nas aulas. Por que tais ‘ações’ colaboram ao processo de aprendizagem dos conteúdos matemáticos?

4.^a – A respeito dos conteúdos matemáticos aprendidos por vocês durante a Educação Básica, obteve-se o seguinte resultado:

“BLOCO” DE CONTEÚDOS	NÃO APRENDI	APRENDI + OU -	APRENDI BEM
a) Operações Aritméticas Básicas	0	2	8
b) Sistema de Numeração Decimal	0	5	5
c) Geometria Plana e Espacial	3	6	1
d) Grandezas e Medidas	1	6	3
e) Tratamento da Informação	4	5	1
f) Solução de Problemas	1	6	3

O ‘bloco’ Operações Aritméticas Básicas foi o que apresentou maior frequência no critério “APRENDI BEM”, em contrapartida, o ‘bloco’ Tratamento da Informação denotou maior frequência no critério “NÃO APRENDI”. O que os critérios “APRENDI BEM”, “APRENDI + OU -” e “NÃO APRENDI” representam para vocês?

5.^a – As respostas dadas por vocês acerca da questão “O que é a Matemática” apresentam-se transcritas no quadro abaixo:

PARTICIPANTE	RESPOSTA
P-1	<i>É uma linguagem numérica.</i>
P-2	<i>Para mim Matemática é uma ciência considerada exata que envolve informações e dados geralmente números com o objetivo de calcular, expor resultados, informações de pesquisa e auxiliar a resolução de problemas diários.</i>
P-3	<i>É uma disciplina que desenvolve o raciocínio-lógico bem como a interpretação de</i>

	<i>textos (situações-problemas) e dados.</i>
P-4	<i>Algo terrível de que tenho medo.</i>
P-5	<i>É uma área do conhecimento que desenvolve o raciocínio lógico, que estimula a nossa mente, e que trata dos fenômenos relacionados a números.</i>
P-6	<i>Matemática está a todo momento ao nosso redor. Em tudo usa-se Matemática, para isso deve-se raciocinar e pensar.</i>
P-7	<i>Uma disciplina em que abrange as questões utilizadas todos os dias em nosso cotidiano para fazer contas, medir coisas é algo muito amplo.</i>
P-8	<i>Entender os números – resolver problemas.</i>
P-9	<i>Na minha opinião a Matemática é a somatória das necessidades de busca e aperfeiçoamento do Homem através dos tempos para melhor desenvolver a sua vida individual e coletiva. Assim sendo, ela é por si blocos de conteúdos e saberes que fazem a sistematização da vida do Homem.</i>
P-10	<i>Para mim, Matemática é a ciência que estuda números e suas diferentes atribuições e articulações.</i>

É possível estabelecer uma definição síntese a partir das ideias expressas? Será que tal definição contempla uma visão geral da Matemática enquanto uma ciência?

6.^a – Diversas foram as respostas em relação à questão “Como se aprende a Matemática?” conforme evidenciado no quadro abaixo:

PARTICIPANTE	RESPOSTA
P-1	<i>Através de aula expositiva e prática.</i>
P-2	<i>Tendo contato com os conteúdos conceituais porém atuando, participando ativamente, manipulando materiais concretos, refletindo sobre os conteúdos, desenvolvendo atividades em grupo, fazendo trocas, acertando e errando, fazendo exercícios e até mesmo memorizando alguns conteúdos e conceitos, como por exemplo a tabuada; porém sempre com compreensão.</i>
P-3	<i>Através dos conceitos, partindo do concreto e não só da teoria, utilizando exemplos, jogos, materiais.</i>
P-4	<i>De forma lúdica, mas não aprendi assim, por isso, não sei ensinar dessa forma.</i>
P-5	<i>Primeiramente entendendo, compreendendo, fazendo relação com algo, tentando fazer, errando, fazendo de novo até acertar. Em alguns casos, a memorização é necessária, mas somente depois de ter clareza do que se está fazendo.</i>
P-6	<i>Através de jogos e brincadeiras.</i>
P-7	<i>Boa parte dela acho que é aprendido na prática, fazendo exercícios, manipulando objetos, mas isso deve ocorrer após ou durante a explicação de um professor, pela leitura em livros, internet.</i>
P-8	<i>“Hoje” aprendi que se aprende com jogos que envolva o conteúdo e também para fixação resolução de exercícios.</i>
P-9	<i>A Matemática se inicia com o desenvolvimento cognitivo e social-histórico das crianças, pois ele é um conteúdo e base concretizados e utilizado na vida dos Homens. A criança aprende a Matemática por meio da racionalidade individual e coletiva.</i>
P-10	<i>Através de exemplos concretos, para que o aluno possa abstrair o conhecimento.</i>

Você conseguiria elaborar uma possível justificativa do porquê de cada uma das respostas obtidas? Por exemplo, por que P-1 (Participante 1) afirma que a aprendizagem da Matemática ocorre “através de aula expositiva e prática”?

7.^a – Compare a sua resposta com as das demais participantes acerca da questão “Como deve ser ensinada a Matemática?”:

PARTICIPANTE	RESPOSTA
P-1	<i>De maneira lúdica e tentando trazer para o concreto o que for possível, para maior compreensão dos alunos.</i>
P-2	<i>Acredito que primeiramente deve ser apresentado uma situação, um problema, um questionamento, ocorrer discussões e trocas entre os alunos e o professor, conhecer os ? os alunos respondem, compreendem sobre o tema, depois fazer uma exposição</i>

	<i>conceitual, tirar as dúvidas, aplicar atividades, exercícios e jogos ou brincadeiras, sempre dialogando e verificando se o conteúdo foi aprendido e compreendido pelo aluno.</i>
P-3	<i>Deve ir construindo o conhecimento, articular com materiais, jogos, atividades lúdicas, me recordo que não compreendia as coisas, exercícios, era tudo muito complexo.</i>
P-4	<i>Com aplicação de jogos envolvendo conteúdos matemáticos e tudo o que eu respondi na questão 3 nunca ou quase nunca. De um jeito totalmente diferente do que eu aprendi.</i>
P-5	<i>Deve ser ensinada de forma prazerosa, de forma clara e com paciência. O professor deve explicar oralmente mas também deve deixar o aluno tentar fazer, e usar a memorização somente em caso de que for necessário.</i>
P-6	<i>Usando o cotidiano do aluno, juntamente com jogos.</i>
P-7	<i>Ela deve ser explicada por um professor que dê espaço para os alunos questionarem, manipularem objetos, que explique aos alunos no que estão errando, as definições dos termos, porque deve ser feito dessa forma e não de outra.</i>
P-8	<i>Com jogos, troca de idéias e exercícios de fixação.</i>
P-9	<i>A Matemática deve ser ensinada aliando saberes nos quais se instrumentaliza a criança nos modos concretos, abstratos, respeitando a sua fase psicológica e social, assim sendo, aliando também ela a seus conteúdos prévios e construindo com ela novas formas de saber explorar seu próprio modo de vida.</i>

A resposta do outro ‘completa’ a sua? Ou a opõe? Ou não possuem relação? Pense acerca de tais questionamentos.

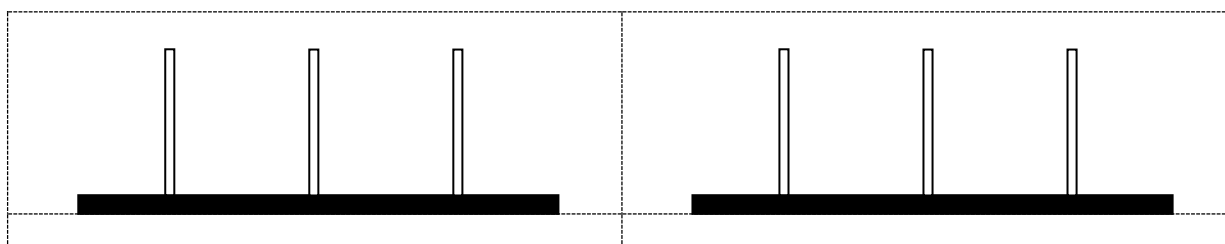
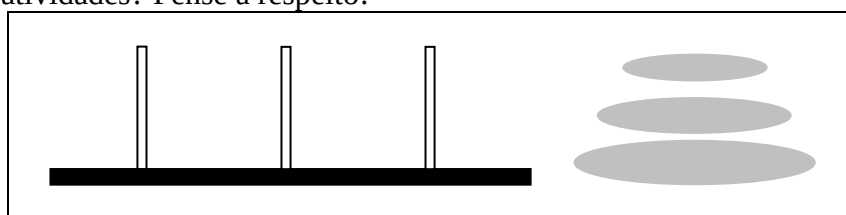
1.2 Desafio

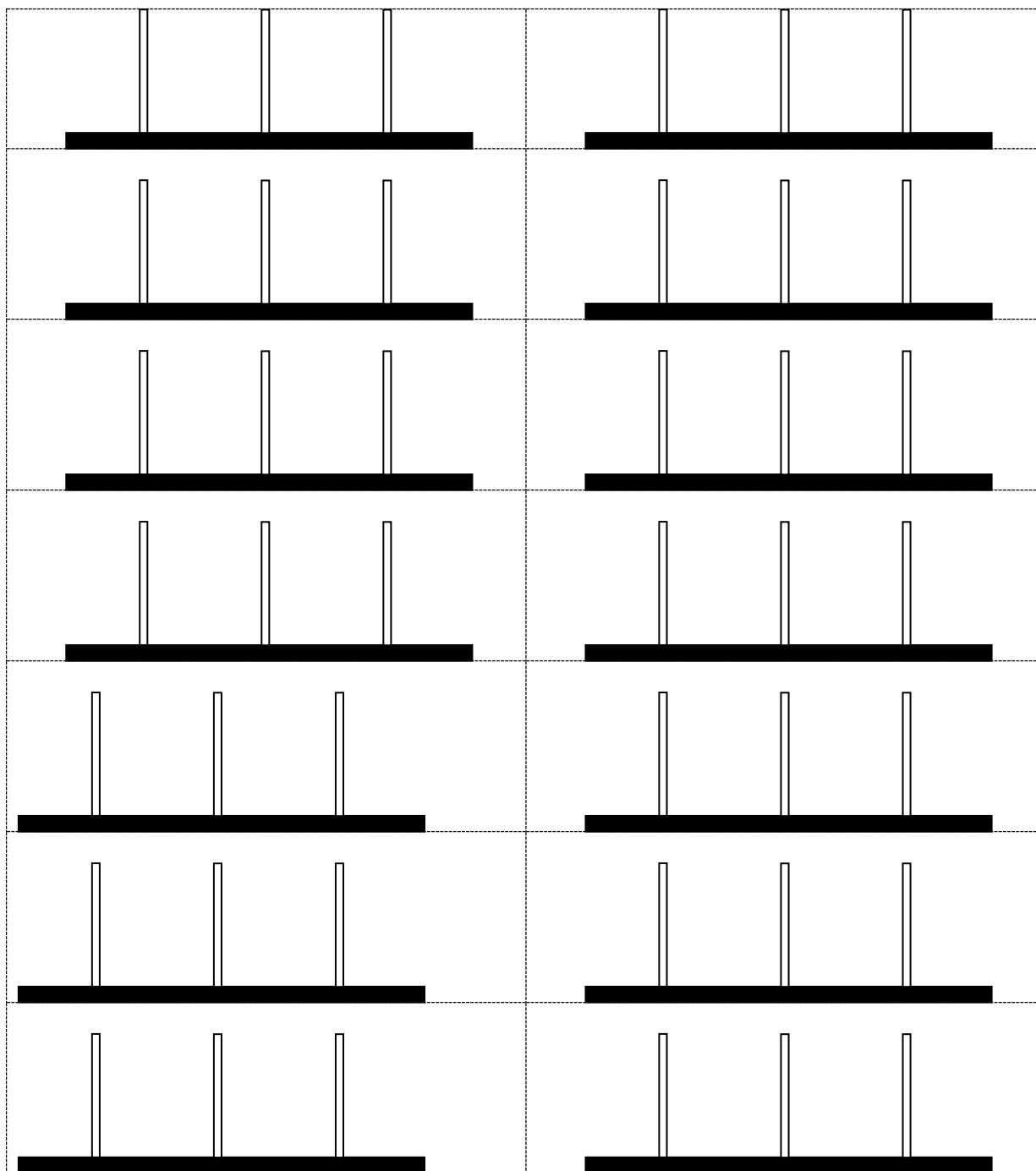
A Torre de Hanói é um jogo de origem oriental. O material é composto por uma base onde estão afixados três pequenos bastões em posição vertical denominados torres A, B e C. Apresenta-se ao sujeito 2 ou mais discos de diâmetros decrescentes afixados em A e pede-se que se transporte tais discos para C, usando como intermediária a torre B. As regras são:

- 1 – Movimentar um só disco de cada vez.
- 2 – Uma peça maior não pode ficar acima de uma menor.
- 3 – Não é permitido movimentar uma peça que esteja abaixo da outra.

Realize o desafio, inicialmente, para dois discos de diâmetros decrescentes denominados I e II, sendo $I > II$ (o diâmetro de I é maior que o diâmetro de II). Em seguida, tente para três discos, denominados I, II e III, sendo $I > II > III$.

Após a realização de tais desafios, o que é possível descobrir? Há algum fato comum entre as duas atividades? Pense a respeito!





1.3 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’

O que foi possível concluir a partir deste primeiro encontro? Denote suas impressões no quadro abaixo e no início do próximo encontro realize a leitura do mesmo.

2 SEGUNDO ENCONTRO

2.1 Retomando o Desafio – A torre de Hanói

Em nosso primeiro encontro foi solicitada a realização do desafio denominado ‘A Torre de Hanói’. É interessante, agora, pensarmos um pouco acerca da lógica envolvida na solução do mesmo. Observadas as regras denotadas anteriormente, para transpor os discos da torre A para a torre C, usando como intermediária a torre B, o número mínimo de deslocamentos necessários encontra-se expresso abaixo:

N.º de Discos	Mínimo de Deslocamentos Necessários
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
...	...
<u>n</u>	

Após a realização do desafio, o que foi possível descobrir?

Há algum fato comum entre o desafio para 2 discos e para 3 discos?

E se, ao invés de transpormos os discos de A para C o fizéssemos de B para C? O que aconteceria?

É possível a elaboração de alguma expressão numérica para representar o número mínimo de deslocamento para **n** discos?

2.2 Alguns pontos iniciais do Tratamento da Informação

O ‘bloco’ de conteúdo denominado ‘Tratamento da Informação’ foi citado como sendo àquele que representou para vocês a ‘maior’ dificuldade conceitual (e procedimental).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – (1.^a a 4.^a série) – Vol. 3: Matemática, embora o Tratamento da Informação possa ser incorporado aos demais ‘blocos’ (Números e Operações, Espaço e Forma e Grandezas e Medidas), devido à sua demanda e relevância social foi possível destacá-lo como um ‘bloco’ de conteúdo. De modo geral, tal ‘bloco’ é constituído por conteúdos advindos da Estatística, Probabilidade e Combinatória.

Para cada nível de ensino tal ‘bloco’ receberá um tratamento diferenciado, seja referente ao nível (profundidade) dos conteúdos abordados, bem como da metodologia a ser adotada. Na 1.^a ‘etapa’ do Ensino Fundamental, atualmente compreendido do 1.^o ao 5.^o ano, o referido documento (PCN) destaca o seguinte referente ao 1.^o ciclo (1.^a e 2.^a séries):

Os assuntos referentes ao Tratamento da Informação serão trabalhados neste ciclo de modo a estimularem os alunos a fazer perguntas, a estabelecer relações, a construir justificativas e a desenvolver o espírito de investigação.

A finalidade não é a de que os alunos aprendam apenas a ler e a interpretar representações gráficas, mas que se tornem capazes de descrever e interpretar sua realidade, usando conhecimentos matemáticos. (BRASIL, 1997, p. 49)

Em relação à 2.^a ‘etapa’ do Ensino Fundamental (6.^o ao 9.^o ano) é interessante observar o que pontua o PCN (5.^a à 8.^a séries) de Matemática:

Integrarão este bloco estudos relativos a noções de Estatística e de probabilidade, além dos problemas de contagem que envolvem o princípio multiplicativo. Evidentemente, o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos.

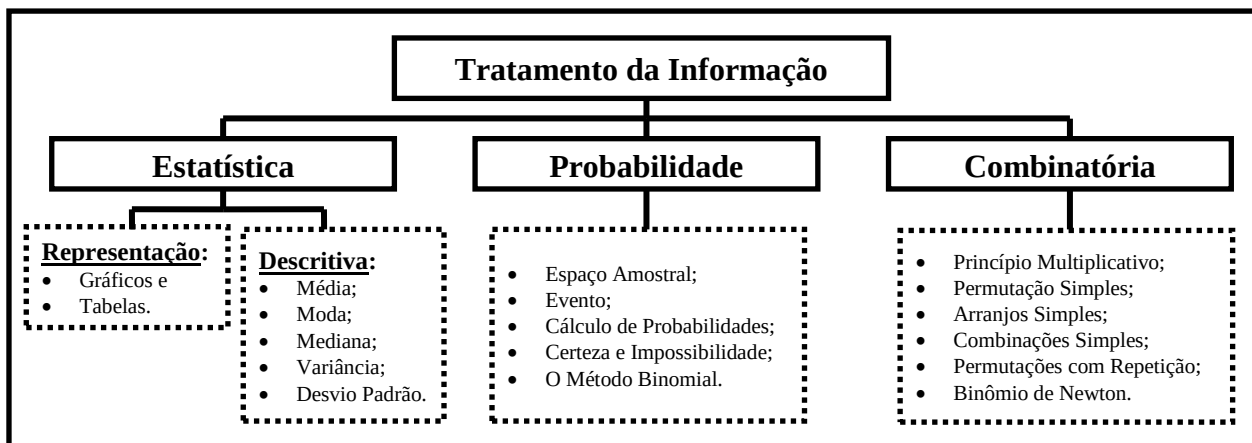
Com relação à Estatística, a finalidade é fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem freqüentemente em seu dia-a-dia. Além disso, calcular algumas medidas estatísticas como média, mediana e moda com o objetivo de fornecer novos elementos para interpretar dados estatísticos.

Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis).

Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades. (BRASIL, 1998, p. 52)

A partir da leitura das duas citações, há algum trecho não compreendido? Alguma palavra causou em você certo ‘desequilíbrio’? Caso sim, comente.

Para finalizar esta breve introdução, tendo em vista que discussões mais aprofundadas acerca do tratamento didático-metodológico do referido ‘bloco’ far-se-ão em encontros posteriores, será apresentado um esquema denotando parte dos conteúdos constituintes do Tratamento da Informação, sendo que alguns serão abordados adiante.



2.3 Saberes já construídos: Gráficos e Tabelas

1. Durante a Educação Básica os gráficos e as tabelas foram abordados em quais situações? Para quais finalidades? Comente.

2. Se um aluno do 5.º ano do Ensino Fundamental lhe perguntasse o que é uma tabela como você a definiria?

3. E em relação ao gráfico? Como seria a sua explicação?

4. De que modo seus professores de Matemática abordaram os gráficos e as tabelas?

B**C****D****E**

3. Dentre alguns dos gráficos existentes (coluna, barra, circular e linha) quais são os indicados para a organização dos dados (itens A, B, C, D e E)? Há, entre estes tipos de gráficos, algum(s) que não é(são) apropriado(s) neste caso?

[illegible]

3 TERCEIRO ENCONTRO

3.1 Retomando – Gráficos e Tabelas

No segundo encontro foi proposto um ‘pensar sobre’ alguns ‘meios’ para a organização dos dados obtidos na pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli aos seus alunos do 6.º ano B do Ensino Fundamental. Entre alguns ‘meios’ possíveis encontraram-se a utilização de tabelas. Diversas foram as definições expressas por vocês, participantes do Grupo de Estudo, acerca do gráfico e da tabela.

Em relação à tabela, as ‘definições’ abrangeram as seguintes ideias: 1 – Dados numéricos que possuem certa relação entre si; 2 – Números organizados em determinada ordem; 3 – Linhas e colunas que se cruzam; 4 – Representação gráfica que expressa os dados; 5 – Descrição e explicação ou ilustração de informações.

Quanto ao gráfico, obtiveram-se tais ‘definições’: 1 – Descrição dos dados em analogia com as Tabelas; 2 – Representação em porcentagem de alguma informação; 3 – Interpretação de informações visualizando a maior frequência; 4 – Formas de representar a Tabela; 5 – O desenho de uma ou mais informações; 6 – Quadro de informações, como uma Tabela, advindo de uma pesquisa.

A partir de tais saberes experienciais construídos por vocês acerca do que entendem por gráficos e tabelas, faz-se interessante um ‘movimento’ de análise-comparativa a partir de uma possível definição² de gráfico e de tabela.

O **Gráfico** pode ser definido como um esquema visual representativo de dados. Já a **Tabela** pode ser definida como uma disposição em linhas e colunas de um grupo ordenado de números. Tal disposição é denominada **Matriz**.

A **Matriz** $m \times n$ (lê-se m por n , sendo m e n números inteiros maiores ou iguais a 1) é uma tabela retangular formada por $m.n$ números reais dispostos em m linhas e n colunas. Entre alguns tipos de matrizes, encontram-se:

a) **Matriz Quadrada**: recebe esse nome para $m = n$, ou seja, quando o número de linhas é igual ao número de colunas. Por exemplo, a matriz do tipo 2×2 expressa abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

b) **Matriz-Linha**: ocorre quando $m = 1$, ou seja, quando possui apenas 1 linha. Observe abaixo um exemplo de uma matriz-linha do tipo 1×4 :

$$[1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$$

c) **Matriz-Coluna**: nesse caso tem-se $n = 1$, ou seja, quando possui apenas 1 coluna. A matriz-coluna seguinte é do tipo 4×1 :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

² Conforme o dicionário online Michaelis, alguns dos significados de definição – *sf (lat definitione)* – são: “1 Ação de definir. 2 Proposição que expõe com clareza e exatidão os caracteres genéricos e diferenciais de uma coisa. 3 Palavras com que se define.” Acessado em 10 de março de 2012: <<http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portuguesportugues&palavra=defini%E7%E3o>>

Curiosidade: Com o advento do computador e a crescente necessidade de se guardar muita informação, as matrizes adquiriram considerável importância. Por exemplo, o que vemos na tela de um computador é um ‘grande’ matriz no qual cada valor ‘guardado’ nas linhas e nas colunas da matriz representa um ponto colorido mostrado na tela (*pixel*). Quanto ‘maior’ o número de linhas e colunas ‘maior’ é a resolução e, portanto, melhor definida é a imagem.

1. As definições sugeridas por vocês acerca dos gráficos e das tabelas são equivalentes com as denotadas há pouco? Ou se contradizem? Pense a respeito, justificando sua resposta.

2. No caso da pesquisa realizada pelos alunos da professora de Matemática Sueli, a tabela utilizada para representar o item C (Gênero de Filme Preferido) corresponderia a qual tipo de matriz? Como você a escreveria?

3. Para separar os filmes em gêneros (tipos) de tal modo a evidenciar a frequência de cada gênero preferido entre os alunos do 6.º ano B do Ensino Fundamental foi necessário realizar qual operação mental? Pense a respeito, justificando sua resposta.

3.2 Algumas considerações de uma pesquisa Estatística

Antes de prosseguir com as discussões a respeito dos gráficos e das tabelas, faz-se necessário delimitar alguns ‘termos’ de uma pesquisa Estatística. No entanto, brevemente, torna-se interessante a análise acerca do significado de Estatística proposto por Costa Neto (2002):

Podemos considerar a Estatística como a ciência que se preocupa com a organização, descrição, análise e interpretação dos dados experimentais, visando a tomada de decisões.

A razão pela qual consideramos a Estatística uma ferramenta importante para a tomada de decisões está no fato de que ela não deve ser considerada como um fim em si própria, mas como um instrumento fornecedor de informações que subsidiarão, em consequência, a tomada de melhores decisões, baseadas em fatos e dados. A Estatística é, portanto, uma ciência meio, e não um fim. Daí ter utilidade, como ciência de apoio, em variados outros campos do conhecimento.

Essa conceituação é absolutamente geral e engloba o conceito usual do que seja a Estatística. Esse conceito usual, popular, logo relaciona a Estatística com tabelas e

gráficos nos quais os dados experimentalmente obtidos são representados. Ouvimos, assim, falar em estatísticas do movimento da Bolsa de Valores, estatísticas da loteria esportiva, estatísticas da Saúde Pública, estatísticas do crescimento da população, etc. Entretanto, essa noção usual prende-se normalmente apenas à parte de organização e descrição dos dados observados. Há ainda todo um campo de atuação da Ciência Estatística que se refere à análise e interpretação desses dados que normalmente escapa à noção corrente.

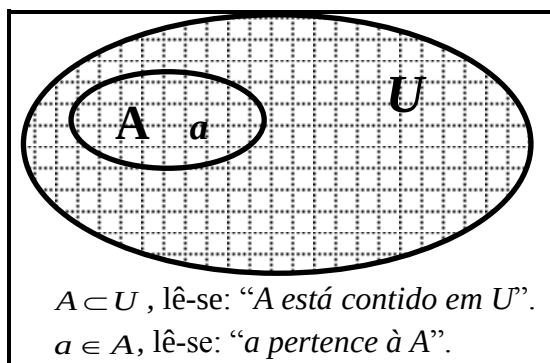
Evidentemente, tanto a parte de organização e descrição dos dados como aquela que diz respeito à sua análise e interpretação são importantes. É razoável também que, para poder-se fazer análise e interpretação dos dados observados, deva-se primeiramente proceder à sua organização e descrição. (p. 1)

Dentre os referidos ‘termos’ de uma pesquisa Estatística encontram-se:

a) **População** (*Universo*) e **Amostra**.

Uma *população* ou *universo* (U) é um conjunto de elementos com pelo menos uma característica comum. Tal característica comum delimita inequivocamente quais elementos pertencem à população e quais os que não pertencem.

Uma *amostra* (A) é um subconjunto da população, necessariamente finito, já que todos os elementos serão examinados para a realização do estudo estatístico desejado. Observe o diagrama abaixo:



b) **Indivíduo** ou **Objeto**.

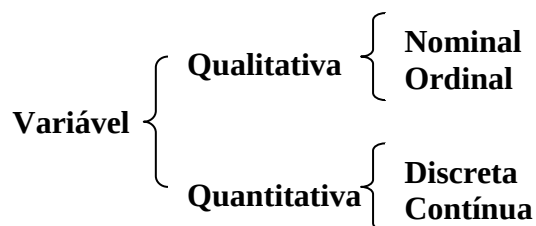
Cada elemento que compõe uma amostra é um *indivíduo* ou *objeto*. Por exemplo, no diagrama acima, o elemento a é o *indivíduo* ou *objeto* que pertence e compõe a amostra A .

c) **Variável**.

Denomina-se *variável* a uma característica de interesse que está associada a cada *elemento* (ou *indivíduo*) do conjunto (da *amostra* ou da *população*) que está sendo examinado. Tal variável pode ser de 2 tipos:

c.1) **Variável Qualitativa** – este tipo de variável apresenta como possíveis valores uma qualidade (ou atributo) dos indivíduos/objetos pesquisados, tais como: esporte favorito, cor do cabelo, grau de escolaridade, etc. Além disso, podem ser classificadas como sendo *ordinais* ou *nominais*. As variáveis qualitativas ***ordinais*** apresentam uma ordem nos seus valores, por exemplo, grau de escolaridade. Já as variáveis qualitativas ***nominais*** não apresentam tal ordem nos seus valores, por exemplo, esporte favorito.

c.2) **Variável Quantitativa** – nesse tipo de variável os possíveis valores são números. As variáveis quantitativas podem ser ***discretas***, quando se referem à contagem (números inteiros), ou ***contínuas***, quando tratam de medida (*números reais*). Por exemplo, “número de irmãos” é uma variável quantitativa *discreta*; já a “altura” é uma variável quantitativa *contínua*. Em resumo:



1. No caso da pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli aos seus alunos, os itens (A, B, C, D e E) podem ser classificados como variáveis? Em resposta afirmativa, tente distribuí-los no quadro abaixo.

VARIÁVEIS			
QUALITATIVA		QUANTITATIVA	
<i>Nominal</i>	<i>Ordinal</i>	<i>Discreta</i>	<i>Contínua</i>

Em caso negativo, justifique a sua resposta.

2. É correto afirmar que os alunos do 6.º ano B do Ensino Fundamental que realizaram a pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli representavam uma amostra? Nesse caso, qual seria a população? E a aluna Amanda, qual seria o seu ‘papel’?

3. Existe alguma diferença entre *Indivíduo* ou *Objeto* referente aos ‘termos’ de uma pesquisa Estatística? Em caso afirmativo, dê um exemplo. Em caso negativo, justifique.

[illegible]

O que foi possível concluir a partir deste terceiro encontro? Denote suas impressões no quadro abaixo e no início do próximo encontro realize a leitura do mesmo.

[illegible]

4 QUARTO ENCONTRO

4.1 Retomando – o ‘pensar sobre’ a Tabela

No encontro anterior definiu-se a tabela como uma “*disposição em linhas e colunas de um grupo ordenado de números*”. Para o sujeito realizar tal ‘*disposição de um grupo ordenado de números*’ fazem-se necessárias algumas operações mentais, tais como a quantificação para verificar a frequência da *variável* em questão – seja ela qualitativa ou quantitativa – e a classificação. Torna-se válido pontuar que tais operações mentais não são as únicas utilizadas pelo sujeito durante a construção de uma tabela, no entanto, para o momento, dar-se-á atenção a uma delas, no caso, a classificação.

Relembrando a questão 3 (item 3.1): “*Para separar os filmes em gêneros (tipos) de tal modo a evidenciar a frequência de cada gênero preferido entre os alunos do 6.º ano B do Ensino Fundamental foi necessário realizar qual operação mental? Pense a respeito, justificando sua resposta.*”, após a discussão com o Pesquisador/Participante identificou-se que a classificação era a tal operação mental que permitiu aos alunos do 6.º ano B separarem os filmes em gêneros (tipos). Neste caso, por exemplo, é possível pensar acerca desta classificação do seguinte modo:

Seja A ‘todos’ os filmes pesquisados pelos alunos do 6.º ano B do Ensino Fundamental. Considerando os seus gêneros (tipos), podemos representá-los conforme denotado a seguir:

B = filme de ação;

C = filme de comédia;

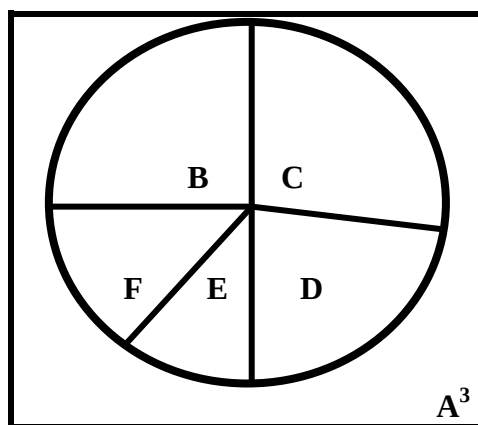
D = filme de romance;

E = filme de suspense;

F = filme de terror;

Daí, temos o seguinte: $A = B + C + D + E + F$.

Para proceder em tal classificação cada aluno teve que escolher o seu gênero de filme preferido como sendo o ‘algum’ dentre ‘todo’ o conjunto de filmes (A). Por exemplo, o aluno que escolheu como filme preferido o de terror (F) teve que ‘negar’ todos os outros (ou seja, B , C , D e E). No entanto, o critério que permitiu aos conjuntos B até F estarem incluídos em A foi o fato de ‘todos’ serem filmes. A figura abaixo representa o exposto:



A partir do exposto, e tomando como exemplo F (filme de terror), é possível denotar as seguintes relações:

³ Faz-se necessário ressaltar que o conjunto A representa, apenas, o conjunto de ‘todos’ os gêneros (tipos) de filmes considerados na pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli. Desse modo, A não representa o conjunto de ‘TODOS’ os gêneros (tipos) de filmes já produzidos.

$$F = A - (B + C + D + E)$$

$$F = A \wedge^4 \text{não-}B \wedge \text{não-}C \wedge \text{não-}D \wedge \text{não-}E$$

1. Denote as relações possíveis a serem estabelecidas com os conjuntos **B**, **C**, **D** e **E**, considerando o referido exemplo.

2. Você já havia pensado a respeito da classificação conforme exposto no texto? As primeiras classificações de que você se lembra de ter construídas foram quais? Como você definiria uma classificação?

Após tais questionamentos, é interessante investigar qual é a ‘origem psicológica’ das classificações, compreendendo, desse modo, como o sujeito constrói tal estrutura do pensamento. Para tanto, serão discutidas algumas ideias advindas do estudo realizado por Jean Piaget e Bärbel Inhelder acerca da “Gênese das Estruturas Lógicas Elementares”.

4.2 A gênese-construção das classificações

Em seu livro intitulado “Gênese das Estruturas Lógicas Elementares”, Jean Piaget e Bärbel Inhelder (1971) discutem como se origina e ocorre a construção da classificação e da seriação. Como problema principal da pesquisa realizada, os autores pontuam o seguinte:

O nosso principal problema, inspirado pelas preocupações da epistemologia genética, é, pelo contrário, compreender porque a organização do comportamento de classificação e de seriação assume esta ou aquela forma, e por que essas formas sucessivas tendem a converter-se em estruturas lógico-matemáticas (não porque a Lógica ou as Matemáticas tivessem imposto os modelos, *a priori*, mas porque o sujeito, sem os conhecer, tende por si mesmo a construir formas que lhes são progressivamente isomorfas). Uma das questões centrais em que insistimos é, por exemplo, estabelecer como se constrói, gradualmente a estrutura da inclusão, que de modo nenhum é dada (nem sob a forma hereditária, nem sob a forma da *Gestalt* etc.), mas, pelo contrário, forma-se de maneira muito mais laboriosa do que se imaginaria, partindo dos seus modelos lingüísticos adultos. (PIAGET E INHELDER, 1971, p. 342, grifos dos autores)

⁴ O símbolo (ou operador) lógico $\wedge$ representa uma ‘interseção’, sendo essa um conjunto de elementos que, simultaneamente, pertence a dois ou mais conjuntos.

Para o entendimento da organização do comportamento de classificação e de seriação, Piaget e Inhelder (1971) identificam⁵ algumas fases, ou, melhor dizendo, alguns ‘conjuntos’ de comportamentos sucessivos percorridos pelas crianças para a construção das classificações e das seriações. Da citação é possível apontar que tais estruturas provêm de uma construção realizada pelo sujeito a partir da sua ação/operação sobre o objeto. Neste primeiro momento far-se-á uma discussão acerca da construção das classificações, ficando a seriação em ocasião posterior.

Segundo os autores, a classificação remete à constituição das *classes*, e essa comporta duas espécies de caracteres ou relações denominadas *compreensão* e *extensão*:

- 1) As qualidades comuns aos seus membros e aos das classes de que ela faz parte, assim como as diferenças específicas que distinguem seus próprios membros das outras classes (*compreensão*).
- 2) As relações da parte com o todo (dependência, pertença e inclusão) determinados pelos quantificadores “todos”, “alguns” (incluindo “um”) e “nenhum”, aplicados aos membros da classe considerada e aos das classes de que ela faz parte, mas só se qualificadas em 1) (*extensão* da classe). (PIAGET e INHELDER, 1971, p. 31)

Faz-se interessante observar outra definição acerca da *compreensão* e *extensão*:

Def. 1. Dado um sistema de classes A , A' e B , de tal modo que $B = A + A'$ e $A \times A' = 0$ (sendo, pois, A' o complementar de A sob B , visto que A e A' são disjuntivas), chamaremos “*compreensão*” dessas classes ao conjunto de qualidades comuns aos indivíduos de cada uma dessas classes e ao conjunto das diferenças que os distinguem os membros de uma das classes e os de outra.

[...]

Def. 5. Chamamos “*extensão*” ao conjunto de membros (ou indivíduos) de uma classe, definida pela sua *compreensão*. (PIAGET e INHELDER, 1971, p. 19-20)

Pode-se pensar em torno de tais caracteres (*compreensão* e *extensão*) a partir dos filmes pesquisados pelos alunos do 6.º ano B. Cada qualidade referente a cada uma das classes, ou seja, ‘ação’ (classe **B**), ‘comédia’ (classe **C**), ‘romance’ (classe **D**), ‘suspense’ (classe **E**) e ‘terror’ (classe **F**) representa a sua *compreensão*. Por exemplo, no caso dos filmes contidos na classe **B**, a *compreensão* é a qualidade comum ‘ação’ dos seus elementos. Já a *extensão* refere-se ao conjunto dos elementos que possuem a *compreensão* ‘ação’, ou seja, a toda a classe **B**.

Neste ponto torna-se oportuno ressaltar que, muito antes da linguagem, ou seja, no estágio sensório-motor – compreendendo crianças de 6-8 a 18-24 meses – é possível identificar condutas que anunciam a classificação (e também a seriação). Conforme os autores:

No que diz respeito à classificação, ela [a criança] reconhece imediatamente, quando se coloca diante dela um objeto em certas situações, as suas características de utilização possível, relativamente aos esquemas habituais de assimilação: equilibrar, sacudir, bater, lançar por terra etc. Quando se lhe apresenta um objeto inteiramente novo para ela, aplica-lhe sucessivamente êsses diversos esquemas conhecidos, como se procurasse compreender a natureza da coisa desconhecida determinando se é para equilibrar, para produzir um som (sacudindo-a), para esfregar etc. Trata-se, pois, de uma espécie de classificação prática, recordando a definição pelo uso, mas desenvolvendo-se por sucessivos ensaios e não mediante a repartição em coleções simultâneas. (PIAGET e INHELDER, 1971, p. 27, [comentário nosso])

⁵ Para tal identificação foram realizados testes com crianças entre a faixa etária dos 3 aos 13-14 anos.

A partir desta verificação acerca das ‘raízes’ da classificação (e da seriação) advinda da ação (inteligência) prática do sujeito, faz-se possível denotar que a linguagem e a função simbólica, embora condições necessárias ao desenvolvimento posterior de tais estruturas lógicas, não representam a condição suficiente. Sobre isso Piaget e Inhelder (1971) observam:

[...] abaixo do nível onde, graças à linguagem e a função simbólica (condições necessárias, mas não suficientes), o pensamento se torna possível, já se discerne a existência de raízes donde brotarão as futuras classificações e seriações. Aí se encontra, notadamente, sob uma forma muito primitiva, um jogo de relações de semelhanças e diferenças que constituirão a matéria das “compreensões” desses sistemas ulteriores. Mas, no tocante à “extensão”, só a encontramos sob a forma infralógica⁶ da distribuição no espaço das partes de um mesmo objeto, único ou coletivo, e ainda não sob a forma pré-lógica ou lógica de coleções não-figurais ou de classes. (p. 29-30)

Em relação aos ‘conjuntos’ de comportamentos sucessivos percorridos pela criança para a construção da classificação foram identificados: 1.º - Coleções Figurais; 2.º - Coleções Não-Figurais; 3.º Classe (Inclusão e Classificações Hierárquicas). Tais fases serão explicitadas nos tópicos adiante.

4.2.1 Coleções figurais – Fase I

As coleções figurais são identificadas quando a criança dispõe os elementos a classificar agrupando-os segundo as configurações espaciais. Ao fazê-lo, o sujeito atribui-lhe uma significação, seja do ponto de vista da compreensão ou da extensão. Nessa fase os aspectos perceptivos e intuitivos influenciam, sobremaneira, o pensamento da criança. Observe o exemplo denotado pelos autores:

Por exemplo, a criança colocará um triângulo por cima de um quadrado, achando que essas duas formas estão aparentadas, na medida em que o triângulo recorda o telhado de uma casa e o quadrado o corpo do edifício; nesse caso, o triângulo deve realmente ser colocado sobre o quadrado e não em qualquer outro lugar, o que confere um significado específico à configuração espacial, do ponto de vista das relações 1) [compreensão]. Em outros exemplos, o “alguns” e o “todos” dependerão da configuração espacial das coleções justapostas ou reunidas etc., a qual adquirirá assim uma significação do ponto de vista das relações 2) [extensão]. (PIAGET e INHELDER, 1971, p. 32, [comentário nosso])

Nas coleções figurais as relações espaciais remetem às ligações entre os objetos, ou seja, às relações de *compreensão*, não sendo observada, nessa fase, diferenciação suficiente entre a *compreensão* e a *extensão*.

Em resumo, a coleção figural constituiria o início da coordenação entre as ligações da parte com o todo, fornecidas pela percepção sob uma forma espacial (e não meramente inclusiva) e as relações de semelhança e diferenças fornecidas pelos esquemas perceptivos, sensório-motores, figurados, e pelos primeiros esquemas verbais, mas sob uma forma temporalmente sucessiva e não só simultânea. (PIAGET e INHELDER, 1971, p. 35)

Mesmo sem uma ordem de sucessão regular, foram identificadas as seguintes subfases:

⁶ As operações infralógicas ou espaços-temporais consistem em ligar não os objetos, mas os elementos de objetos totais. Em contrapartida, as operações lógico-aritméticas consistem em ligar os objetos entre si sob a forma de classes, relações e números.

A) Os **alinhamentos** – a uma só dimensão – contínuos ou descontínuos. São observadas algumas reações características, tais como:

I) Pequenos alinhamentos parciais: a criança não procura classificar todos os objetos apresentados, apenas constrói algumas coleções não-exaustivas e sem relações entre si. No entanto, tais coleções assumem uma forma linear.

II) Alinhamentos contínuos, mas com mudança de critério: a criança, embora construa um alinhamento total, esquece os termos precedentes e, sem querer, muda o critério de semelhança durante as suas aproximações sucessivas. Tal alteração de critérios denota as dificuldades de coordenação entre as relações de semelhança e as ligações da parte com o todo.

III) Intermediários entre os alinhamentos e os objetos coletivos ou complexos: Conforme Piaget e Inhelder (1971):

Sendo os objetos coletivos ou complexos coleções figurais de mais de uma dimensão, é possível observar duas espécies de intermediários entre os alinhamentos e essas outras formas de coleções: a) alinhamentos múltiplos, estando uma das linhas orientadas numa direção diferente da outra (por exemplo, em ângulo reto); b) figuras que começam sob a forma de alinhamento e depois se completam sob a forma de superfícies. (p. 40)

B) Os **objetos coletivos**: esse tipo de coleção, por definição, é uma montagem, em duas ou três dimensões, de elementos semelhantes (homogeneidade) que formam uma figura inteira, ou seja, como se representasse uma única peça. Tais coleções são muito menos frequentes do que os objetos complexos, pois, não há razão nenhuma que impeça a criança de juntar aos elementos semelhantes outros que são heterogêneos visando completar a sua forma.

C) Os **objetos complexos**: além das características denotadas em b) o sujeito utiliza elementos heterogêneos para a constituição da ‘figura’. A coleção é montada em forma de superfície ou de volume adquirindo uma configuração de conjunto variável. Tal configuração possui um significado ‘aos olhos’ do sujeito, por meio das relações internas de diferenças (heterogeneidade) entre os elementos. Observam-se duas variedades:

I) Objetos complexos de forma geométrica: consiste em imprimir à coleção uma forma geométrica, permitindo manter certas semelhanças internas entre os elementos, mas por intermédio das simetrias das figuras.

II) Objetos complexos de forma empírica. Como um exemplo típico, os autores denotam o observado no comportamento de uma criança:

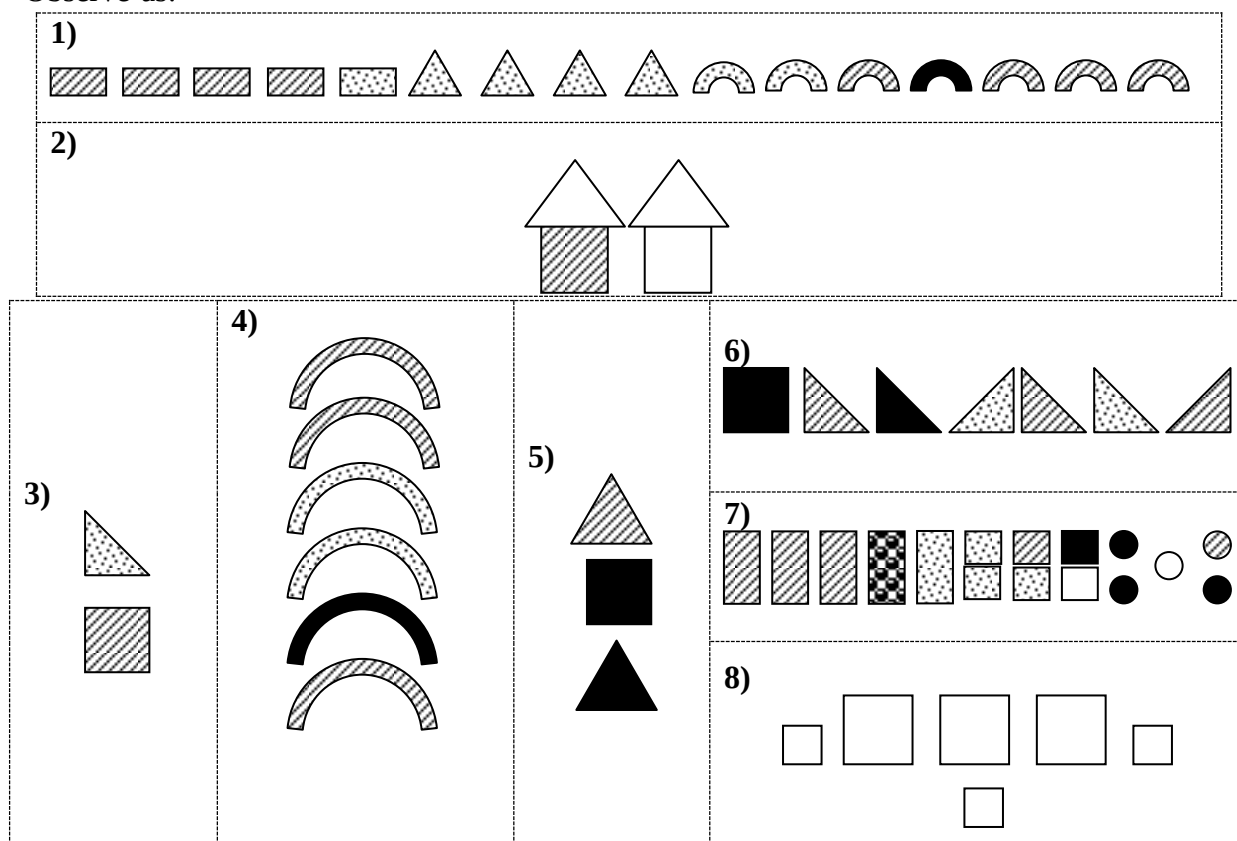
FRA (4; 0), após ter construído sua dupla cerca de retângulos e de quadrados, acrescenta bruscamente três círculos em cima e diz: “Isto é a torre Eiffel”. (PIAGET e INHELDER, 1971, p. 45)

Em síntese, acerca das coleções figurais os autores pontuam:

Ora, como vimos incessantemente, os modelos perceptivos sugerem, nessa situação, a utilização de conjuntos espaciais como os alinhamentos e os objetos coletivos e complexos a duas ou três dimensões. É então que se produz o fenômeno específico que nos parece constitutivo das coleções figurais; procurando construir a coleção correspondente às suas assimilações sucessivas, mas não possuindo ainda os instrumentos operantes que permitem traduzi-las no “todos” e “alguns” que assegurem a fixação das extensões correspondentes, o sujeito avança ora da compreensão para a extensão, ora da extensão para a compreensão, e nunca de acordo com um princípio de correspondência unívoca e recíproca, mas por simples

indiferenciação (e por uma indiferenciação que prolonga, mas reforçando-se consideravelmente, a da semelhança e da contigüidade, já em ação no plano das assimilações de partida). (PIAGET e INHELDER, 1971, p. 64)

1. As coleções denotadas abaixo são exemplos de construções realizadas por crianças quando solicitadas a “reunir o que se parece” diferentes formas geométricas bidimensionais. Observe-as:



A partir das discussões realizadas no item 4.2.1 ‘Coleções Figurais’ separe tais coleções em: a) pequenos alinhamentos parciais; b) alinhamentos contínuos com mudança de critério; c) intermediário entre os alinhamentos e os objetos coletivos ou complexos; d) objetos coletivos; e) objetos complexos. Indique ao lado de cada letra os números correspondentes das coleções representadas acima.

- a) _____
 b) _____
 c) _____
 d) _____
 e) _____

4.2.2 Coleções não-figurais – Fase II

Entre a primeira fase constituída pelas coleções figurais e a terceira fase referente às classes (inclusões e classificações hierárquicas) encontra-se uma segunda fase denominada coleções não-figurais. Essas coleções ainda não podem ser nomeadas como classes por ausência de toda e qualquer hierarquia inclusiva, no entanto, também já não são figurais, pois são constituídas de pequenos agregados baseados unicamente na semelhança, embora se conservem justapostos entre si, não estando incluídos ou “encaixados” em classes mais genéricas.

No intuito de compreender o que caracteriza esta segunda fase, faz-se oportuno denotar as propriedades de uma classificação, verificando, após, quais dessas propriedades estão presentes na mesma. Piaget e Inhelder (1971) identificam 10 propriedades:

- 1) Não existe (no material a classificar) o elemento isolado ou sem classe. O que equivale a dizer que é preciso classificar todos os elementos e que, se existe um (x) que é único da sua espécie, também dará lugar a uma classe específica (mas, nesse caso, singular): (x) $\in$ (A_x).
- 2) Tampouco existe uma classe isolada, isto é, toda a classe específica A , caracterizada pela propriedade a , opõe à sua complementar A' (caracterizada por não- a), sob o gênero mais próximo B , ou seja, $A + A' = B$.
- 3) Uma classe A compreende todos os indivíduos de caráter a .
- 4) Uma classe A só compreende os indivíduos de caráter a .
- 5) As classes de nível idêntico são disjuntas: $A \times A' = 0$; ou, $A_n \times A_m = 0$.
- 6) Uma classe complementar A' compreende seus caracteres próprios a_x (portanto $A' = A_x$), que não possuem a sua complementaridade A : os indivíduos de caráter a são, portanto, não- a_x , assim como os indivíduos de caráter a_x são não- a .
- 7) Uma classe A (ou A') está incluída em toda e qualquer classe superior que compreenda todos os seus elementos, a começar pelo mais próximo B ; ou seja, $A = B - A'$ (ou $A' = B - A$) e $A \times B = A$, o que equivale a dizer que todos os A são alguns B .
- 8) Simplicidade em extensão: reduzir os encaixamentos (7) ao *mínimo* compatível com os caracteres em compreensão.
- 9) Simplicidade em compreensão: os mesmos critérios (por exemplo, cores) para distinguir as classes do mesmo nível.
- 10) Simetria nas subdivisões: se a classe B_1 está subdividida em A_1 e A'_1 , segundo um critério que se encontra em B_2 então B_2 estará subdividida em A_2 e A'_2 . (p. 67-68)

Os sujeitos da segunda fase – coleções não-figurais – ‘efetua’ as seguintes propriedades: (1) classificam todos os elementos do material apresentado; (2) sempre repartem tais elementos em duas ou mais coleções; (3) cada uma dessas coleções elaboradas contém todos os elementos semelhantes; (4) e nada mais contendo senão tais elementos semelhantes; (2 e 6) observam-se complementaridades parciais; (5) há disjunção das coleções do mesmo nível e realizam pesquisas visando às simplicidades (8 e 9) e às simetrias (10). No entanto, a propriedade (7) – inclusão – é ignorada pelo sujeito, fato esse que distingue as coleções não-figurais das classes propriamente ditas.

Neste ponto, faz-se importante o seguinte questionamento: *O que permite ao sujeito passar da fase I (coleções figurais) à fase II (coleções não-figurais)?* Tal explicação remete aos processos de retroação e antecipação (semi-) observadas no sujeito a partir de sua constante ação sobre o objeto. Conforme Piaget e Inhelder (1971):

[...] do ponto de vista do próprio funcionamento das ações e do pensamento, a característica mais genérica da fase I é que o indivíduo progride por aproximações sucessivas, esquecendo o que acabou de fazer e não provendo o que vai fazer em seguida; êle alinha, por exemplo, o conjunto de elementos dados, mudando a todo instante o critério que determina suas aproximações sucessivas, ou então constrói um objeto coletivo ou complexo, justapondo os elementos sem plano nem coerência (e quando anuncia, no desenvolvimento de um plano, que “eu quero fazer uma casa” etc., isso significa que o sujeito esqueceu a sua intenção inicial de classificar e envereda pelo caminho do jogo ou da ornamentação). Em contrapartida, [...] com o início da abstração ou inferência da qualidade comum se caracteriza pelo abandono desse método de assimilações sucessivas e pela intervenção de processos retroativos que consistem em lembrar o início da construção das coleções, a fim de introduzir um fator de coerência entre o princípio e a seqüência ulterior ou até reorganizar esse início em função da seqüência. Ao tornar-se retroativo, o esquema de assimilação acaba então, necessariamente, por revestir-se de um aspecto antecipatório, pois a

consistência com o que precede conduz à escolha e à intenção, a respeito do que vai seguir-se: semi-antecipações, somente, isto é, não prevendo o conjunto das iniciativas ulteriores e surgindo apenas no decorrer das tentativas múltiplas (erros e correções) mas, em todo caso, uma semi-antecipação suficiente para engendrar um começo de método, muito superior ao de aproximações sucessivas. (p. 346-347)

Os tais métodos ‘superiores’ dizem respeito ao *método ascendente* e ao *método descendente*. O primeiro ocorre quando o sujeito constitui coleções maiores a partir de pequenas coleções, tendo por critérios as qualidades comuns limitadas. Já, no segundo, inicia-se pelos grandes agrupamentos, tendo por critério as qualidades comuns mais genéricas, e, em seguida, há subdivisão em pequenas coleções. Finalizando, os autores indagam o seguinte:

[...] os sujeitos desse nível jamais atingem uma coordenação completa entre os dois métodos, o que equivale a dizer que, quando empregam um dos dois, não antecipam, *ipso facto* o outro ou os seus resultados. Por exemplo, quando se subdividiu uma coleção *B* em duas coleções *A* e *A'*, os sujeitos não entenderam, sem um novo ato do pensamento (por vezes, nem mesmo coroado de êxito), que ambas faziam sempre parte de *B*. Em resumo, a antecipação ainda implica apenas resultados estáticos das manipulações e não transformações, o que justifica, portanto, a incompreensão da inclusão e das operações como tais.

E por esse fato se entende também por que motivo, na fase II, a extensão e a compreensão, embora melhor diferenciadas e coordenadas do que na fase I, ainda não o são inteiramente, visto que a regulação do “todos” e do “alguns” pressupõe um esquema de inclusão e este implica, em um mesmo todo do processo ascendente $A + A' = B$ e do processo descendente (que constitui a operação inversa) $B - A' = A$. (PIAGET e INHELDER, 1971, p 348-349)

1. Nas ‘Coleções Figurais’ (item 4.2.1) é possível identificar alguma(s) das 10 propriedades da classificação? Caso sim, quais? Caso não, justifique.

2. No exemplo exposto no item 4.1 a respeito da classificação dos gêneros (tipos) de filmes preferidos pelos alunos do 6.º ano do Ensino Fundamental é possível identificar alguma(s) das 10 propriedades da classificação? Caso sim, quais e por quê? Caso não, justifique.

4.2.3 Classes (inclusão e classificações hierárquicas) – Fase III

A construção da classe pelo sujeito, ou seja, da ‘completa’ diferenciação entre as relações de *compreensão* e de *extensão* é devido à coordenação entre os métodos *ascendente* e *descendente* constituindo, assim, um só sistema de transformações. Ao fazê-lo o sujeito compreende o que é uma inclusão, sendo capaz de construir classificações hierárquicas. Segundo Piaget e Inhelder, a compreensão da inclusão ocorre quando:

[...] mesmo sem destruir a reunião $B = A + A'$, diremos que a criança compreende a inclusão se fôr capaz de perceber que “todos” os A são “alguns” B , ao passo que não haverá inclusão se os sujeitos assimilarem (e veremos que é precisamente o caso) o enunciado “todos os A são B (ou são b)” (por exemplo, tôdas as rodela são azuis) sob a forma “todos os A são todos os B ” (a criança negará, assim, que todas as rodela são azuis, “porque também há quadrados azuis”). A segunda contrapova consistirá, simplesmente, em apurar, no caso em que $A + A' = B$, se há “mais de A ” ou “mais de B ”, por outras, palavras, se o todo é maior do que a parte. Ora, quando os A são mais numerosos do que os A' , o fato de dissociar pelo pensamento os A dos A' destrói o todo B e a criança responde que há mais A do que B (reduzindo-se então os B aos A'), o que é evidentemente incomparável com a noção de inclusão! (PIAGET E INHELDER, 1971, p. 70)

Faz-se oportuno ressaltar que a construção da relação “*todos*”⁷ os A são “*alguns*”⁸ B demanda um ação/operação crescente por parte do sujeito sobre o objeto com o qual estabelece contínuas interações. É fato que a linguagem e a função simbólica desempenham um papel importante, no entanto, o principal fator de desenvolvimento reside no caráter operatório da inteligência, na qual a reversibilidade marca o início do pensamento operatório permitindo ao sujeito desvencilhar-se das ilusões advindas da percepção e da intuição.

A partir do exposto, é possível perceber as fases sucessivas percorridas pela criança à construção da classificação. Embora seja uma noção ‘simples’ quando interpretada do ponto de vista do adulto, tal operação intelectual demanda tempo e esforço por parte do sujeito a sua constituição. Nesta ‘empreitada’, inicialmente, a manipulação/ação no concreto – possibilitando à criança ‘pensar sobre’ tais ações – faz-se necessária.

4.3 Uma proposta-atividade para a construção da classificação

Tal proposta – retirada do livro “Construção da Inteligência pela criança: atividades do período pré-operatório”, autoria de Maria da Glória Seber (1993) – é apresentada abaixo:

Classificação⁹

As atividades de classificação possibilitam a construção de arranjos com invenções progressivas dos critérios utilizados para a reunião de objetos numa ou em várias coleções. A necessidade de as semelhanças e diferenças entre os elementos oferecidos serem descobertas realizadas pela criança significa que o professor NUNCA deve fornecer critérios de seleção, mas sim contra-argumentar perguntando à criança, por exemplo, se ela concorda ou não em agrupar num só conjunto duas ou mais coleções e por quê.

Eis as atividades de classificação:

1. “Dê um como este”.
2. “Separe os parecidos”.
3. Separar o mesmo material continuamente.
4. Discutir os vários critérios adotados na seleção das coleções.
5. Julgar os critérios de separação de um outro grupo.
6. Descobrir os critérios adotados em coleções previamente formadas.
7. Dar um objeto diferente dos demais, dentre os já distribuídos.
8. Introduzir novos elementos nas coleções já feitas.
9. Determinar o número de coleções a serem construídas.
10. Antecipar as coleções a serem construídas.

⁷ “Todos” é o regulador usado pelo indivíduo abrangendo todos os elementos que fazem parte do conjunto.

⁸ “Alguns” é o regulador usado pelo sujeito para se referir a uma parte do conjunto.

⁹ A referente proposta encontra-se em Seber (1993, p. 60-61).

11. Desenhar símbolos para as coleções já construídas.
12. Completar os espaços vazios dos arranjos, selecionando os objetos mais apropriados.
13. Trabalhar com os quantificadores (todos/alguns).

1. A proposta sugerida vai de encontro com a discussão realizada acerca da construção da classificação? Caso sim, ou não, justifique.

2. Em sua futura atuação enquanto professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental tal proposta pode se tornar útil? Caso sim, em qual momento? Pense a respeito.

3. Como já discutido, a classificação representa uma das operações mentais necessárias à construção das tabelas. No entanto, em sua opinião, tal operação mental faz-se importante para a construção de algum(s) outro(s) conceito(s) matemático(s)? Caso sim, cite-o(s).

4.4 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’

O que foi possível concluir a partir deste quarto encontro? Denote suas impressões no quadro abaixo e no início do próximo encontro realize a leitura do mesmo. Escreva, após, as dúvidas provenientes das discussões realizadas.

Dúvidas:

5.1 Classificação – ‘ação/operação’¹⁰,

Quantidade	Elemento	Quantidade	Elemento	Quantidade	Elemento
1	Abelha	1	Cadeira	1	Girafa
1	Águia	1	Cavalo	1	Libélula
1	Avião	1	Cobra	1	Morcego
1	Beija-Flor	1	Coruja	1	Pardal
1	Borboleta	1	Escada	6	Pato
1	Cachorro	1	Gato	1	Peixe
				1	Rato

5.2 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’

O que foi possível concluir a partir deste quinto encontro? Denote suas impressões no quadro abaixo e no início do próximo encontro realize a leitura do mesmo. Escreva, após, as dúvidas provenientes das discussões realizadas.

1

Dúvidas: _____

6 SEXTO ENCONTRO

6.1 Um movimento de retomada (síntese)

Devido à ‘pouca’ atenção dada pelos seus ‘antigos’ professores de Matemática ao Tratamento da Informação está sendo realizado um trabalho visando uma (re)significação, ou até certa ampliação-aprofundamento dos conhecimentos matemáticos referentes à Estatística, sendo essa uma das ‘grandes’ áreas deste bloco de conteúdo. Pontuou-se a necessidade – dentre tantas outras, para a construção das tabelas (e gráficos) – da realização da operação de classificação pelo sujeito. Visando compreender tal classificação em ‘termos psicológicos’, utilizou-se o estudo psicogenético desenvolvido por Jean Piaget e Bärbel Inhelder no qual foi investigada a origem-gênese e o desenvolvimento-construção das estruturas lógicas elementares.

No entanto, tal trabalho de (re)significação está visando, também, um ‘novo’ olhar acerca da futura prática docente de Matemática de vocês. Para tanto estão ocorrendo, em vários momentos, discussões de cunho didático-metodológicas sobre o ensino de determinado conteúdo matemático.

Neste instante, faz-se oportuno não ‘perder de vista’ as relações que estão sendo estabelecidas entre os saberes experienciais de cada uma acerca do ensino de Matemática vivenciado na Educação Básica, entre as ideias principais da Epistemologia Genética e a prática docente de Matemática visando contribuir à Formação Inicial de vocês e à Formação Contínua do Pesquisador/Participante. Assim, dando continuidade à abordagem de outros conceitos referentes à Estatística, far-se-á um estudo acerca de alguns tipos de representações gráficas e conceitos referentes à Estatística Descritiva (Média, Moda e Mediana). No presente encontro dar-se-á atenção às representações gráficas, ficando a abordagem da Estatística Descritiva para o próximo encontro.

6.2 Diferentes representações gráficas

Como ressaltado no item 3.1, definiu-se gráfico enquanto um esquema visual representativo de dados. Durante a discussão acerca do **como** organizar os itens da pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli, o Pesquisador/Participar elaborou, para os itens A, B e D, alguns tipos de gráficos. Relembremos três deles:

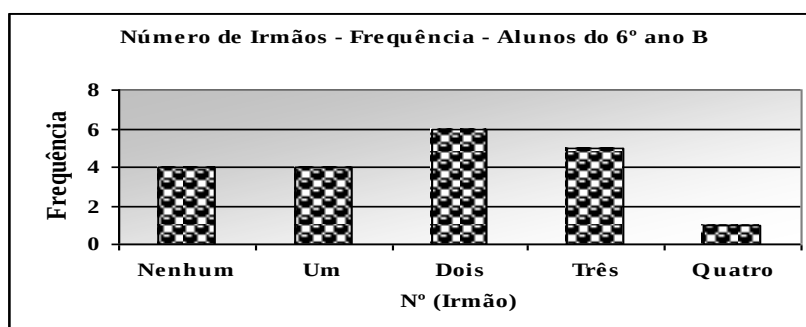


Gráfico de Colunas – Item A (Número de Irmãos – Frequência)



jusqu'à :

[illegible]

[illegible]

5. A partir dos seus saberes experiências complete os quadros, abaixo, visando à caracterização dos outros tipos de gráficos denotados no parágrafo anterior.

<u>Gráfico de Linhas</u>	
<u>Um exemplo de quando foi utilizado</u>	<u>Uma imagem que o recorda</u>

<u>Cartograma</u>	
<u>Um exemplo de quando foi utilizado</u>	<u>Uma imagem que o recorda</u>

<u>Pictograma</u>	
<u>Um exemplo de quando foi utilizado</u>	<u>Uma imagem que o recorda</u>

Histograma	
<u>Um exemplo de quando foi utilizado</u>	<u>Uma imagem que o recorda</u>

Polígono de Frequência	
<u>Um exemplo de quando foi utilizado</u>	<u>Uma imagem que o recorda</u>

6.2.1 Conceituando alguns tipos de gráficos

No item anterior foi feita uma discussão acerca de alguns tipos de gráficos a partir dos seus saberes experienciais adquiridos durante o ensino de Matemática na Educação Básica. Visando a uma melhor compreensão, denotar-se-ão possíveis conceituações de tais gráficos.

6.2.1.1 Gráfico de barras e de colunas

Tanto o gráfico de Barras (‘barras’ horizontais) quanto o gráfico de Colunas (‘barras’ verticais) são costumeiramente utilizados para a apresentação/organização de variáveis qualitativas (nominais ou ordinais). No entanto, servem também para representar variáveis quantitativas discretas. Em tais gráficos, as barras devem possuir larguras iguais e seus comprimentos são proporcionais à frequência de cada dado. Para o seu traçado são necessários dois ‘eixos’ que se intersectam formando um ângulo de 90°.

6.2.1.2 Gráfico de setor “pizza”

Esse tipo de gráfico, já denotado no item 6.1, serve para a apresentação/organização de variáveis qualitativas e quantitativas. Tal gráfico possui como base um círculo representando o total dos dados pesquisados. Cada setor construído indica a frequência da referida variável. Tomando como exemplo o gráfico de Setor – Item D (Sorvete Preferido), temos que:

1 – O total de alunos pesquisados foi 20, então, 20 representa o total do círculo (100% ou 360°).

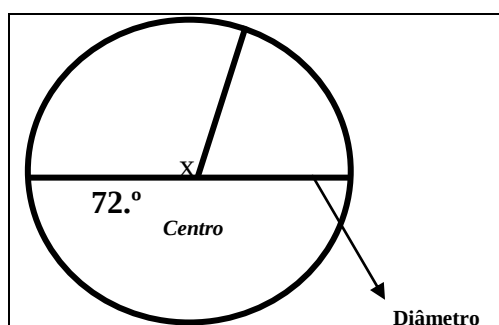
2 – A frequência de cada variável qualitativa nominal (Chocolate, Coco, Flocos, Morango e Napolitano) é representada por um setor, ou seja, uma parte do círculo total. A ‘soma’ de todos os setores obtidos deve ser igual a 100% ou 360°. No entanto, como construir tais setores? Inicialmente deve ser observada a frequência de cada variável (em número cardinal), conforme apresentada na tabela abaixo:

Sorvete	Frequência
Chocolate	4
Coco	3
Flocos	3
Morango	5
Napolitano	5
TOTAL (Alunos)	20

Por meio de **regra de três simples** é possível obter quantos graus cada setor representa do total do círculo. Para a obtenção do setor indicando a frequência do sorvete de ‘Chocolate’ procede-se da seguinte maneira:

$20 \xrightarrow{\text{equivale}} 360^\circ$ $4 \xrightarrow{\text{equivale}} x^\circ$ $\frac{20}{4} = \frac{360}{x}$ $20 \cdot x = 360 \times 4$ $x = \frac{1440}{20} = 72^\circ$	$20 \xrightarrow{\text{equivale}} 100\%$ $4 \xrightarrow{\text{equivale}} x\%$ $\frac{20}{4} = \frac{100}{x}$ $20 \cdot x = 100 \times 4$ $x = \frac{400}{20} = 20\%$	$100\% \xrightarrow{\text{equivale}} 360^\circ$ $20\% \xrightarrow{\text{equivale}} x^\circ$ $\frac{100}{20} = \frac{360}{x}$ $100 \cdot x = 360 \times 20$ $x = \frac{7200}{100} = 72^\circ$
--	---	---

Conforme os cálculos realizados, obteve-se que o setor circular representando o ‘Chocolate’ possui ângulo de 72° (graus¹¹) e equivale a 20% (por cento¹²) do total pesquisado. Após o traçado do círculo, por meio de um transferidor, é possível desenhar tal setor ‘fazendo uma abertura’ de 72° a partir do centro (do círculo) e posicionando o transferidor sobre o diâmetro (do círculo). Observe a figura abaixo:



De modo análogo, é possível calcular os demais setores referentes ao ‘Coco’, ‘Flocos’, ‘Morango’ e ‘Napolitano’ para, assim, construir¹³ o gráfico de Setor.

1. Para os demais sabores (Coco, Flocos, Morango e Napolitano) calcule o valor correspondente em % (porcentagem) e a ‘abertura’ angular ($^\circ$) do setor circular.

¹¹ O grau, cujo símbolo é ($^\circ$), representa uma medida dos ângulos planos correspondendo a $\frac{1}{360}$ de uma circunferência (círculo). De origem babilônica, cada grau pode ser dividido em minutos, que equivalem a $\frac{1}{60}$ do grau e em segundos correspondendo a $\frac{1}{60}$ do minuto.

¹² A porcentagem (ou percentagem – %) indica uma medida de razão cujo denominador é ‘sempre’ 100. No caso do exemplo adotado, dizer que o ‘Chocolate’ representa 20% equivale à razão (fração) $\frac{20}{100}$. Para obter 20% de 20, sendo 20 o total de alunos pesquisados, procede-se da seguinte maneira: $\frac{20}{100} \times 20 = \frac{400}{100} = 4$. Este número 4, portanto, representa os 4 alunos que preferem o sorvete de ‘Chocolate’.

¹³ Para maior facilidade quanto ao traçado deste tipo de gráfico, bem como de outros, é possível utilizar o software da Microsoft Office Excel selecionando a opção ‘assistente gráfico’ na ‘barra de ferramentas’. Para tanto, deve-se inicialmente colocar na planilha uma tabela de frequência referente ao assunto pesquisado e, após selecioná-la, pode-se elaborar por meio de tal opção o gráfico desejado.

6.2.1.3 Gráfico de linhas (segmento)

O gráfico de Linhas é composto por dois eixos (um horizontal e outro vertical) e serve para representar a evolução de um fenômeno ou processo investigado, isto é, o seu crescimento, decrescimento ou constância num determinado período.

PROBLEMATIZANDO...

Após a primeira pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli, realizou-se uma segunda cujo objetivo foi investigar a quantidade de sorvete consumida no intervalo pelos alunos do 6.º ano B durante os meses de março a junho. Como a professora Sueli também ministra aulas no 6.º ano A, foi feita uma comparação entre as duas turmas. A cada intervalo, a professora Sueli pedia que os alunos marcassem numa cartolina, fixada na parede, um X indicando o consumo do sorvete naquele dia. A cada semana, era contabilizado o total de sorvetes consumidos e, ao final de cada mês, tais valores eram somados obtendo-se o total de consumo mensal. Em cada mês, a professora Sueli e seus alunos anotavam os dados em uma tabela. Ao final da pesquisa, a tabela constituída foi a seguinte:

Tabela – Total de Sorvetes consumidos pelos alunos dos 6.º anos A e B

Mês	Turma	
	6.º ano A	6.º ano B
Março	352	289
Abril	345	321
Maio	288	250
Junho	321	311
TOTAL	1306	1171

Visando representar num gráfico que permitisse visualizar a ‘evolução’ (aumento ou diminuição) dos sorvetes consumidos pelos alunos durante os meses de março a junho, a professora Sueli propôs aos alunos a apresentação/organização dos dados por meio de um gráfico de Linhas (ou de Segmento). Após elaborar cada gráfico referente a cada turma separadamente, colocou-os num único gráfico, conforme denotado abaixo:

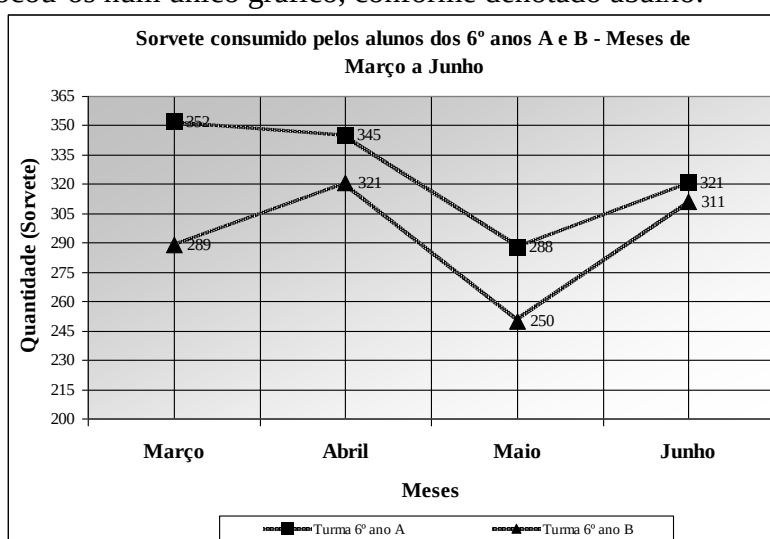


Gráfico de Linha – Sorvete consumido pelos alunos dos 6.º anos A e B – meses de março a junho

1. Suponha que você não tenha conhecimento da tabela e, apenas, do gráfico de Linha denotado há pouco. É possível saber, sem a realização de nenhuma operação matemática ‘mental’, qual turma tomou mais sorvete durante os meses de março a junho? Pense a respeito.

2. A partir do gráfico de Linha apresentado na página anterior, marque (V) para a afirmação verdadeira e (F) para a afirmação falsa.

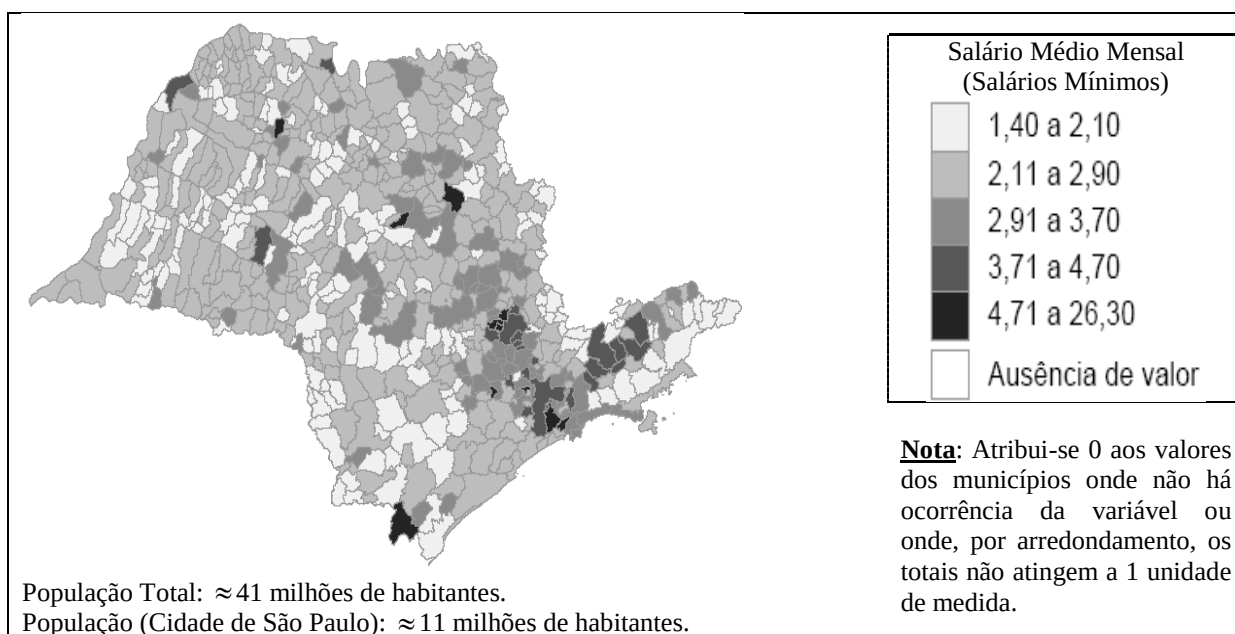
- () a) Em relação ao 6.º ano A, durante os meses de março a abril ocorreu o maior decréscimo quanto ao consumo de sorvetes.
- () b) Em relação ao 6.º ano B, o total de sorvete consumido compreendendo os meses de maio a junho foi de 1171.
- () c) O mês em que o consumo de sorvete entre os 6.º anos A e B apresentou menor diferença foi o referente a março.
- () d) A diferença entre o total de sorvetes consumidos pelos alunos do 6.º anos A e B durante os meses de março a maio foi de 125.
- () e) O mês em que o consumo de sorvete entre os 6.º anos A e B apresentou menor diferença foi o referente a junho.

6.2.1.4 Cartograma

Conforme Crespo (1995):

Cartogramas são *representações sobre uma carta geográfica*. Eles são muito úteis quando queremos relacionar dados estatísticos com áreas geográficas ou políticas. Essas representações são muito úteis para expressarem população e densidade. (p. 46, grifo nosso)

Como exemplo, faz-se interessante observar o seguinte Cartograma:



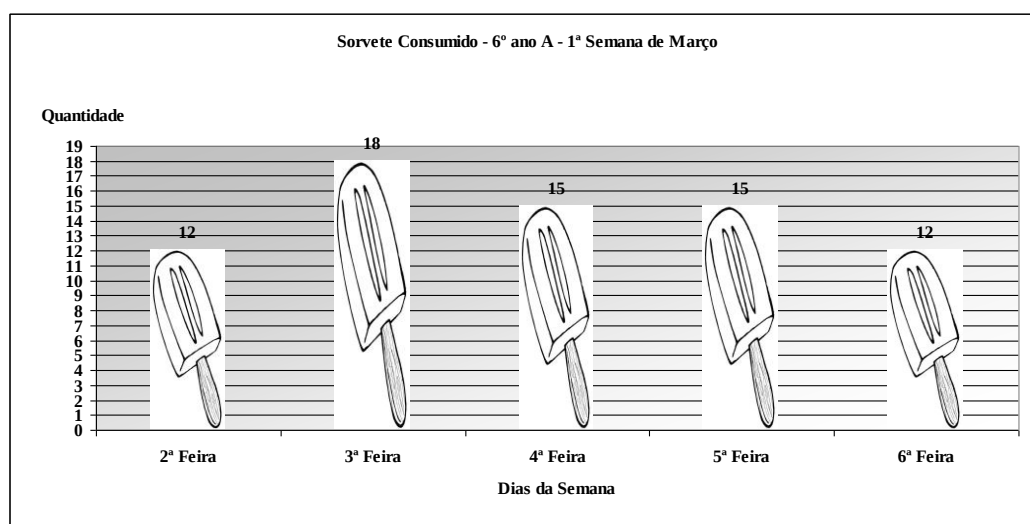
Cartograma – Salário Médio Mensal (Salário Mínimo) no estado de São Paulo

Fonte – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (malha generalizada) – Rio de Janeiro: IBGE, 2011.

1. A partir do Cartograma apresentado, o que é possível concluir em relação ao Salário Médio Mensal da população do estado de São Paulo?

6.2.1.5 Pictograma

O Pictograma representa um tipo de gráfico ‘ilustrado’, ou seja, a variável é transformada em desenho no intuito de chamar a atenção do leitor. Como exemplo, observe o gráfico construído pelos alunos da professora Sueli ao apresentar/organizar os sorvetes consumidos na 1.^a semana de aula do mês de março:



Pictograma – Sorvete Consumido na 1.^a Semana de Março pelos alunos do 6.º ano A

1. Você acredita que tal tipo de gráfico seria interessante de ser abordado nos anos iniciais do Ensino Fundamental? Em caso afirmativo, ou negativo, argumente sobre.

6.2.1.6 Histograma e polígono de frequência

O Histograma é uma representação gráfica adequada para a apresentação/organização das variáveis quantitativas contínuas, ou seja, quando a variável tem seus valores indicados por classes (intervalos¹⁴) de frequência.

¹⁴ Intervalo, para a Álgebra Elementar, é um conjunto que contém cada número entre dois extremos indicados e, possivelmente, os próprios extremos. Por exemplo, no intervalo fechado $[1, 5]$ dos Números Reais ($\mathbb{R}$) estão contidos todos os números entre 1 a 5, inclusive o 1 e o 5. Já no intervalo aberto $]1, 5[$ dos Números Reais estão contidos os números entre 1 a 5, exceto o 1 e o 5. A diferença entre os intervalos fechado e aberto reside, pois, no primeiro são considerados os próprios números ‘extremos’, no entanto, no segundo apenas estão os

PROBLEMATIZANDO...

Ao perceber que a abordagem realizada com as turmas dos 6.º anos ‘facilitava’ a aprendizagem dos conteúdos referentes ao Tratamento da Informação, a professora de Matemática Sueli resolveu também utilizá-la com seus alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental. Concomitantemente ao estudo das ‘Grandezas e Medidas’, mais especificamente as Medidas de Comprimento (metro), a professora Sueli mediu, com o auxílio de uma trena, a altura de todos os alunos do 8.º ano C. Enquanto media, a aluna Bianca ia anotando os valores aproximados¹⁵ na lousa:

<u>Ana Laura</u> 131 cm	<u>Andressa</u> 153 cm	<u>Antônio</u> 161 cm	<u>Antônio José</u> 158 cm	<u>Augusto</u> 147 cm
<u>Beatriz</u> 145 cm	<u>Bianca</u> 133 cm	<u>Brian</u> 147 cm	<u>Camila</u> 150 cm	<u>Carlos</u> 130 cm
<u>Danilo</u> 132 cm	<u>Diego</u> 153 cm	<u>Edir</u> 141 cm	<u>Eduarda</u> 171 cm	<u>Fábio</u> 159 cm
<u>Felipe</u> 130 cm	<u>Fernanda</u> 144 cm	<u>Flávio</u> 177 cm	<u>Gabriel</u> 162 cm	<u>Geisa</u> 152 cm
<u>Gustavo</u> 160 cm	<u>Hugo</u> 150 cm	<u>Igor</u> 133 cm	<u>Juliana</u> 145 cm	<u>Júlio</u> 151 cm
<u>Mário</u> 137 cm	<u>Neide</u> 142 cm	<u>Paulo</u> 152 cm	<u>Thiago</u> 143 cm	<u>Vitor</u> 130 cm

Após tal registro, a professora Sueli pediu aos alunos que organizassem os dados em ordem crescente. Decorrido certo tempo, o aluno Paulo foi à lousa e escreveu tais dados na referida ordem, colocando, inclusive, números repetidos caso existissem. Observe:

130, 130, 130, 131, 132, 133, 133, 137, 141, 142, 143, 144, 145, 145, 147, 147, 150, 150, 151, 152, 152, 153, 153, 158, 159, 160, 161, 162, 171, 177

Enquanto Paulo anotava na lousa, os demais alunos e a professora foram conferindo a resposta. Em seguida, a professora Sueli propôs aos estudantes que organizassem os dados por meio de uma tabela. No entanto, tal tabela deveria possuir, exatamente, 11 linhas e 2 colunas, considerando as denominações de cada coluna. Como sugestão, a professora falou que os dados teriam que serem agrupados em classes (intervalos).

1. Em duplas, como vocês organizariam a tabela seguindo a orientação dada pela professora Sueli? Para facilitar, utilizem a tabela abaixo:

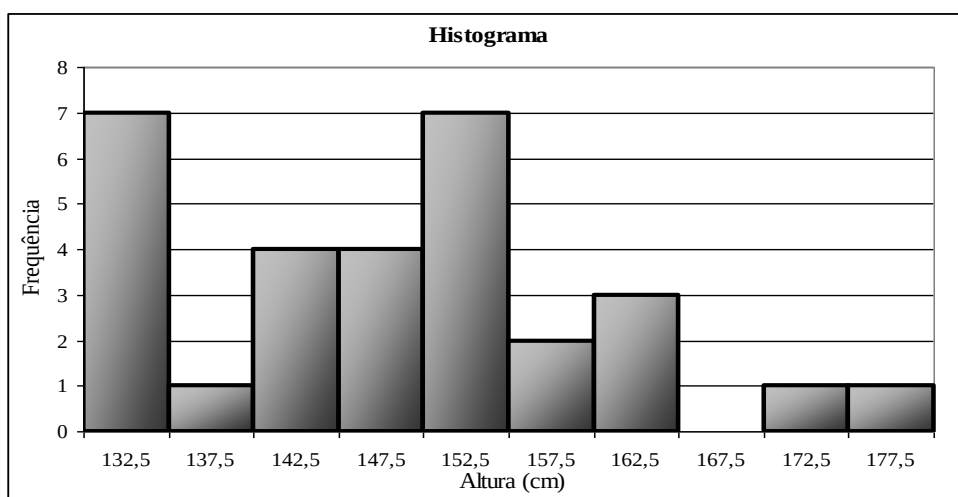
números contidos entre eles. Observam-se também a ‘combinação’ destes intervalos, podendo ser do tipo semiaberto ou semifechado.

¹⁵ Os valores denotados na lousa, por representarem uma unidade de medida – no caso, o metro – foram arredondados com o intuito de facilitar o registro. Como fora utilizado um instrumento de medida – a trena – é oportuno chamar a atenção do aluno para o fato de que os valores ‘medidos’ apresentam uma aproximação do valor real que representa a altura do estudante.

Uma possível tabela a ser elaborada levando em consideração as sugestões da professora Sueli é denotada abaixo:

Altura (cm) – Intervalos	Frequência
[130, 135[	7
[135, 140[	1
[140, 145[	4
[145, 150[	4
[150, 155[	7
[155, 160[	2
[160, 165[	3
[165, 170[	0
[170, 175[	1
[175, 180[	1

Com a tabela já pronta e, em se tratando de uma variável quantitativa contínua, faz-se possível uma representação gráfica da mesma por meio de um Histograma, conforme abaixo:

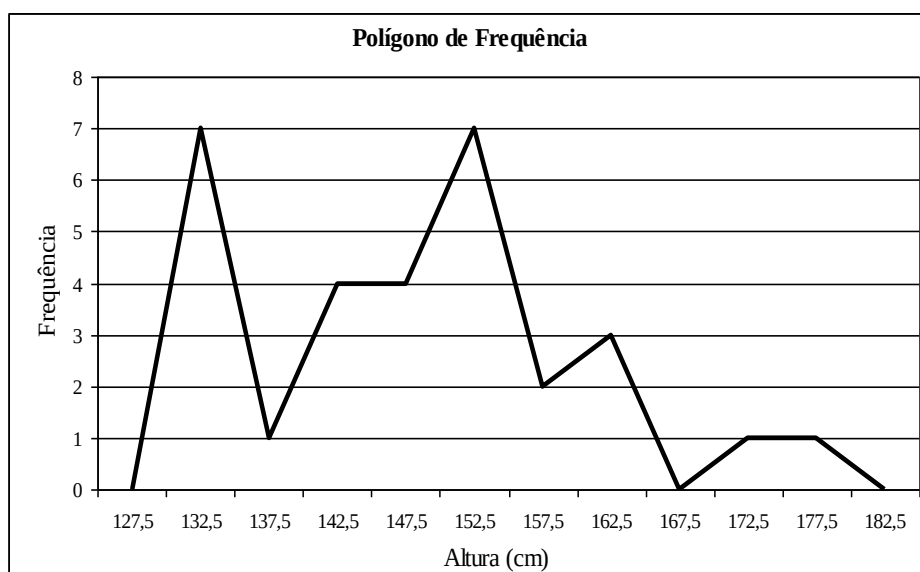


Histograma – Frequência das classes (intervalos) referentes à altura dos alunos do 8.º ano C

Como o Histograma ‘apresenta/organiza’ variáveis quantitativas contínuas, então, as frequências estão associadas a intervalos de variação da variável e não a valores individuais. Conforme denotado acima, as classes de frequência – neste caso a altura – foram representadas pelos seus pontos médios¹⁶.

Além do Histograma é possível apresentar/organizar as variáveis quantitativas contínuas por meio do Polígono de Frequência. No entanto, para completar a figura – exposta a seguir – consideram-se duas classes laterais com frequência nula. No exemplo considerado, as tais classes laterais serão [125, 130[e [180, 185[e suas frequências serão 0.

¹⁶ Tomando como exemplo a primeira classe (intervalo) – [130, 135[– o ponto médio, assim como os demais, foi obtido por meio da seguinte operação: $\frac{(130+135)}{2} = \frac{265}{2} = 132,5$. Ou seja, o ponto médio corresponde à metade soma dos dois ‘extremos’ que limitam o intervalo.



Polígono de Frequência – Frequência das classes (intervalos) referentes à altura dos alunos do 8.º ano C

6.3 Desafio para casa – atividade individual

Considerando o problema proposto pela professora de Matemática Sueli (relativo às alturas dos alunos do 8.º ano C) como você iria proceder para obter a Média Aritmética de tais valores? Após escrever **como** você procedeu, registre a Média Aritmética encontrada.

6.4 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’

O que foi possível concluir a partir deste sexto encontro em relação às diversas representações gráficas? Denote suas impressões no quadro abaixo e no início do próximo encontro realize a leitura do mesmo. Escreva, após, as dúvidas provenientes das discussões realizadas.

Dúvidas:

7 SÉTIMO ENCONTRO

7.1 Retomando a atividade individual ‘para casa’

A partir de uma pesquisa organizada pela professora de Matemática Sueli foi possível coletar as medidas aproximadas (alturas em cm) dos seus alunos do 8.º ano C. Por se tratar de uma variável quantitativa contínua, chegou-se a conclusão da necessidade da utilização do Histograma e do Polígono de Frequência para a apresentação/organização dos dados obtidos. Uma característica ‘peculiar’ foi a elaboração de uma tabela mostrando a frequência dos intervalos¹⁷ da variável e não a frequência da variável ‘absoluta’.

Dando continuidade, foi solicitado o cálculo da Média Aritmética de tais valores. As respostas obtidas por cada uma de vocês, participantes, nos permitem concluir *o quê* em relação ao modo (ao **como**) utilizado para tal obtenção?

A Média, neste caso Aritmética¹⁸, indica uma **Medida de Posição** da distribuição das frequências da variável em questão. Além da Média que compõe tais **medidas**, observamos a Mediana e a Moda.

7.2 Estatística Descritiva: medidas de posição

Além da apresentação/organização dos dados por meio de gráficos e tabelas, a Estatística Descritiva preocupa-se em estabelecer certas **quantidades (medidas)** que possibilitam caracterizar a distribuição das frequências. Dentre algumas **medidas** encontram-se as **Medidas de Posição** que “servem para localizar a distribuição de frequências sobre o eixo da variação da variável em questão” (COSTA NETO, 2002, p. 20). Observem a seguir os três tipos de **Medidas de Posição**: Média, Mediana e Moda.

7.2.1 Média aritmética

A Média Aritmética representa uma **medida (quantidade)** que caracteriza o **centro** da distribuição de frequências. No caso da pesquisa realizada pela professora de Matemática Sueli, a Média Aritmética referente à altura dos 30 alunos do 8.º ano C foi 147,3. Para tal cálculo realizou-se a soma de todos os valores coletados e tal resultado foi dividido pelo total de alunos ($n = 30$).

1. Em relação aos valores obtidos a partir da ‘medição’ dos alunos do 8.º ano C, o que significa esta medida 147,3 denominada Média Aritmética?

¹⁷ Costa Neto (2002) adverte ser necessário tomar cuidado quanto à distribuição dos valores em classes de intervalos. Para este autor não é recomendado o agrupamento em intervalos quando o número de valores (**n**) é muito pequeno, considerando $n < 25$.

¹⁸ Tal especificação se fez necessária tendo em vista a existência de outras Médias, tais como a Média Geométrica ($\bar{x}_g$), Média Harmônica ($\bar{x}_h$) e a Média Ponderada ($\bar{x}_p$).

É possível definir a Média Aritmética ($\bar{x}$) em ‘termos’ matemáticos. Considerando x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) o conjunto dos dados, a Média Aritmética é definida por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad (1.)$$

Tal expressão (1.) permite o cálculo da Média Aritmética quando os valores coletados ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$) estão presentes. No entanto, como fazer para calcular a Média Aritmética a partir *apenas* da tabela?

2. Considerando a tabela representando a frequência dos intervalos das ‘alturas’ dos alunos do 8.º ano C, calcule a Média Aritmética. Lembre-se de que os valores obtidos por meio da medição de cada um dos estudantes não podem ser utilizados para tal cálculo.

Tabela – Distribuição da Frequência dos Intervalos referentes à altura dos alunos do 8.º ano C

Altura (cm) – Intervalos	Frequência
[130, 135[	7
[135, 140[	1
[140, 145[	4
[145, 150[	4
[150, 155[	7
[155, 160[	2
[160, 165[	3
[165, 170[	0
[170, 175[	1
[175, 180[	1
TOTAL	30

3. A tabela do problema anterior denota uma variável quantitativa contínua. No caso de uma tabela representando uma variável quantitativa discreta, o cálculo da Média Aritmética seria feito do mesmo modo? Pense a respeito considerando a seguinte tabela que apresenta o número de irmãos pesquisados pelos alunos do 6.º ano B da professora de Matemática Sueli.

N.º (Irmãos)	Frequência
0	4
1	4
2	6
3	5
4	1
TOTAL	20

A expressão que permite calcular a Média Aritmética a partir de uma tabela que apresenta os intervalos de classes de uma variável quantitativa contínua é definida abaixo:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{n} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \dots + x_n \cdot f_n}{n} \quad (2.)$$

, onde x_i representa o ponto médio de cada intervalo e f_i a frequência deste intervalo.

Para calcular a Média Aritmética solicitada no 2.º problema, faz-se necessário primeiramente o estabelecimento dos pontos médios das classes de intervalos. Observe a tabela abaixo:

Tabela – Cálculo da Média Aritmética

Altura (cm) – Intervalos	Frequência (f_i)	Ponto Médio (x_i)	$x_i \cdot f_i$
[130, 135[	7	132,5	927,5
[135, 140[	1	137,5	137,5
[140, 145[	4	142,5	570
[145, 150[	4	147,5	590
[150, 155[	7	152,5	1067,5
[155, 160[	2	157,5	315
[160, 165[	3	162,5	487,5
[165, 170[	0	167,5	0
[170, 175[	1	172,5	172,5
[175, 180[	1	177,5	177,5
TOTAL	30		4445

Por meio dos dados obtidos, temos que: $\bar{x} = \frac{4445}{30} \cong 148,17$. Esse é o valor da Média Aritmética calculada a partir da tabela utilizada.

4. É possível perceber que os valores das Médias Aritméticas obtidas a partir das expressões (1.) e (2.) são praticamente iguais. O que isso significa? Em alguma situação tais valores poderão diferir consideravelmente? Pense a respeito.

De maneira análoga, a expressão que possibilita calcular a Média Aritmética de uma tabela que denota uma variável quantitativa discreta é definida abaixo:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_c \cdot f_c}{n} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \dots + x_n \cdot f_n}{n} \quad (3.)$$

, onde x_c representa o valor de cada classe e f_c a sua frequência.

Utilizando tal expressão (3.) é possível obter a Média Aritmética do 3.º problema. Observe o cálculo abaixo:

$$\bar{x} = \frac{0.4 + 1.4 + 2.6 + 3.5 + 4.1}{20} = \frac{35}{20} = 1,75$$

Embora 1,75 ‘irmãos’ não existam, este valor é aceitável, pois representa uma **medida de posição** (tendência central) referente ao número de irmãos dos alunos do 6.º ano B.

5. Utilizando a expressão (1.) é possível encontrar a Média Aritmética referente ao número de irmãos dos alunos do 6.º ano B usando a tabela do problema 3.? Caso sim, este valor obtido é igual ao calculado por meio da expressão (3.)? Pense a respeito.

PROBLEMATIZANDO...

Dando continuidade ao estudo da Estatística, a professora de Matemática Sueli pediu a um grupo de alunos dos 9.º anos que frequentavam aulas de reforço (recuperação) que trouxessem a renda mensal de suas famílias. Os valores obtidos foram anotados na lousa pela aluna Priscila, conforme mostrado abaixo:

457, 490, 525, 554, 689, 700, 722, 5.000

Após solicitar aos alunos o cálculo da Média Aritmética da renda mensal, João foi à lousa e registrou o seguinte:

$$\bar{x} = \frac{457 + 490 + 525 + 554 + 689 + 700 + 722 + 5000}{8} = \frac{9137}{8} = 1142,125$$

A professora Sueli disse aos alunos para utilizarem como valor aproximado o número 1142 reais. Em seguida, colocou na lousa o seguinte questionamento:

A Média Aritmética que mostra a renda mensal das famílias de vocês é um ‘bom’ valor (representativo) para indicar o **centro** da distribuição de frequências?

6. Em sua opinião, quais argumentos os alunos da professora Sueli utilizariam para justificar se a Média Aritmética obtida era (ou não) um ‘bom’ valor representativo? Pense a respeito.

7.2.2 Mediana

Além da Média Aritmética, a Mediana é outra **medida (quantidade)** que caracteriza o **centro** da distribuição de frequências. No entanto, seu cálculo é feito de modo diferente em relação ao da Média Aritmética já que considera a ordem dos valores que constituem o conjunto dos dados. Faz-se interessante observar a definição proposta por Costa Neto (2002) acerca da Mediana:

Definimos a mediana de um conjunto de n valores ordenados, sendo n ímpar, como igual ao valor de ordem $(n+1)/2$ desse conjunto. Se n for par, a mediana poderia ser definida como qualquer valor situado entre o de ordem $n/2$ e o de ordem $(n/2) + 1$. Por simplificação, para n par, consideraremos a mediana como o valor médio entre os valores de ordem $n/2$ e $(n/2) + 1$ do conjunto de dados. Vemos que a idéia ligada ao conceito de mediana é dividir o conjunto ordenado de valores em duas partes com igual número de elementos. (p. 22)

1. Utilizando a definição exposta por Costa Neto (2002) calcule a Mediana da renda mensal familiar dos alunos da professora Sueli. Em seguida, compare tal valor com o da Média Aritmética, verificando qual deles melhor representa o **centro** da distribuição de frequências.

2. É possível calcular a Mediana utilizando apenas as tabelas denotadas nos problemas 2 e 3 do item anterior (7.2.1 Média Aritmética)? Em caso afirmativo, calcule. Em caso negativo, justifique. Pense a respeito em grupo.

3. Em qual situação a Mediana é a mais indicada para caracterizar o **centro** da distribuição de frequências? Pense a respeito a partir das discussões realizadas.

7.2.3 Moda

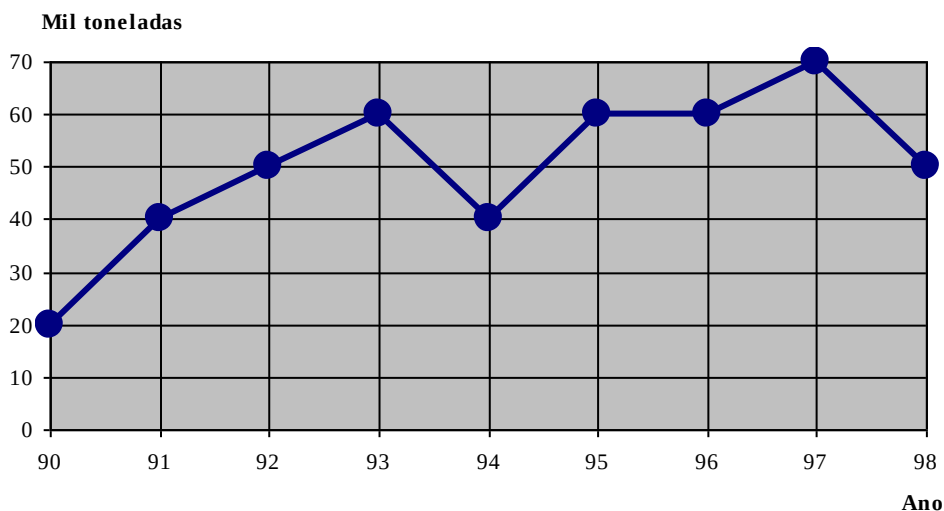
Afirmar que o acesso a rede social ‘Facebook’ ‘*está em moda*’ é sinônimo de que muitas pessoas estão ‘frequentando’ tal página virtual. De modo análogo, a Moda de um conjunto de valores é o valor (ou valores) que possui a maior frequência.

1. Do conjunto de dados coletados pela professora Sueli acerca do comprimento (altura) de seus alunos do 8.º ano C encontre a Moda. Em seguida, obtenha a Moda referente ao número de irmãos do 6.º ano B.

2. É correto afirmar que sempre será possível obter a Moda de um conjunto de valores? Para facilitar dê um exemplo caso não seja possível.

7.3 Desafio para casa

1. (Vunesp) O gráfico representa, em milhares de toneladas, a produção do estado de São Paulo de um determinado produto agrícola entre os anos de 1990 a 1998.



Analisando o gráfico, observa-se que a produção:

- a) foi crescente entre 1992 e 1995.
- b) teve média de 40 mil toneladas ao ano.
- c) em 1993 teve acréscimo de 30% em relação ao ano anterior.
- d) a partir de 1995 foi decrescente.
- e) teve média de 50 mil toneladas ao ano.

2.(UFRN) Uma prova foi aplicada em duas turmas distintas. Na primeira, com 30 alunos, a média aritmética das notas foi de 6,40. Na segunda, com 50 alunos, foi 5,20. A média aritmética das notas dos 80 alunos foi:

- a) 5,65
- b) 5,70
- c) 5,75
- d) 5,80

a) 0,3 b) 3,3 c) 5,4 d) 6,6 e) 8

e) 8

[illegible]This image shows a full page of blank handwriting practice paper. It features multiple sets of horizontal lines. Each set consists of three lines: two solid outer lines and one dashed middle line, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced across the entire page, leaving no margins or additional markings.

8 OITAVO ENCONTRO

8.1 Retomando uma dúvida

No encontro anterior, durante a discussão-construção da tabela denotando as classes de intervalos das medidas (alturas) dos 30 alunos do 8.º ano C, ocorreu o seguinte questionamento: “*Como e quantas classes de intervalos é preciso construir?*”. Spiegel (1974, p. 45-46) nos fornece algumas regras para o estabelecimento de tais intervalos. Observe-as abaixo:

- 1.ª Regra:** Dentre os dados coletados/observados determinam-se o *maior* e o *menor* números. Em seguida, calcula-se a *amplitude total* do rol, ou seja, a *diferença* entre o *maior* e o *menor* número.
- 2.ª Regra:** Divide-se a referida *amplitude total* em um número conveniente de classes de intervalos que tenham a mesma amplitude. Como nem sempre isso é possível, em alguns casos usam-se classes de intervalos de amplitudes diferentes. Dependendo dos dados, o número de classes de intervalos é normalmente entre 5 e 20.
- 3.ª Regra:** Na tentativa de diminuir erros, aconselha-se que as classes de intervalos, quando possível, sejam escolhidas de modo que seus pontos médios coincidam com dados coletados/observados.
- 4.ª Regra:** Calcula-se a frequência de cada classe de intervalo.

Aplicando tais regras na pesquisa realizada pelos alunos do 8.º ano C temos o seguinte:

1.ª Regra: O menor e o maior número coletado foram 130 e 177, respectivamente. Logo, a amplitude total do rol é $177 - 130 = 47$.

2.ª Regra: No caso da situação considerada, optou-se pela construção de 10 classes de intervalos. Assim, para determinar a amplitude de cada classe, realiza-se a operação $47 \div 10 = 4,7 \approx 5$. Desta maneira, foram construídas 10 classes de intervalos semiabertas (ou semifechadas) com amplitude 5. Entretanto, como a classe $[165, 170[$ teve frequência nula, seria pertinente pensar em outra quantidade de classes de intervalos. Tal proposta foi dada por uma das participantes ao sugerir a construção de 8 classes¹⁹ de intervalos cuja amplitude foi 6. Para obter esse valor procede-se de modo análogo por meio do seguinte cálculo: $47 \div 8 = 5,875 \approx 6$.

3.ª Regra: Embora, entre as 10 classes de intervalos, observa-se uma frequência nula em $[165, 170[$, é possível constatar que os dados coletados, em sua maioria, ‘giram’ em torno dos pontos médios das referidas classes. Tal fato também é observado para as duas outras situações nas quais foram construídas 8 ou 7 classes de intervalos.

4.ª Regra: ‘Contam-se’ os valores compreendidos nas classes de intervalos constituídas. Para números de classes diferentes observa-se alteração na frequência das mesmas já que suas amplitudes são diferentes.

Para auxiliar na decisão do número de classes a construir, Costa Neto (2002, p. 16) denota um diagrama no qual é possível determinar tal número ‘aproximado’. Na situação considerada (sendo 30 o total de dados coletados), conforme o referido diagrama, um número ‘apropriado’ de classes de intervalos seria 6. Tal fato, porém, não significa que o número de classes construídas (10, 8 ou 7) esteja errado. Apenas, por questão de *precisão* (ou *rigor*) aconselhar-se-ia um número de classes próximo a 6.

¹⁹ As 8 classes de intervalos ‘fechadas’ propostas pela participante foram: $[130, 135]$; $[136, 141]$; $[142, 147]$; $[148, 153]$; $[154, 159]$; $[160, 165]$; $[166, 171]$ e $[172, 177]$. Outra participante construiu 7 classes de intervalos semiabertas (ou semifechadas) com amplitude 7, conforme denotado a seguir: $[130, 137[$; $[137, 144[$; $[144, 151[$; $[151, 158[$; $[158, 165[$; $[165, 172[$ e $[172, 179[$.

8.2 Retomando o desafio

Durante o 7.º encontro realizaram-se discussões acerca da Média Aritmética, seu significado e algumas maneiras de calculá-la. Visando ‘desencadear’ um ‘pensar sobre’ os conteúdos matemáticos tratados até o momento, foi solicitada a solução de 3 problemas-desafio. A seguir far-se-ão comentários denotando a solução de tais problemas. Neste ponto é interessante o ‘confronto’ entre as 3 soluções seguintes e as elaboradas por vocês (participantes).

DESAFIO (1):

Torna-se válido pontuar que os ‘dados’ do problema estão representados no gráfico de Linha denotando a produção de um determinado produto agrícola no estado de São Paulo entre os anos de 1990 a 1998. O problema solicita a escolha do item que apresenta a afirmação verdadeira a partir da interpretação do referido gráfico. Para tanto, faz-se necessário excluir os itens que apresentam as afirmações falsas. Observe as justificativas dos itens falsos e da afirmação verdadeira.

a) É falso, pois de 1993 a 1995 a produção foi decrescente.

b) É falso, pois a Média Aritmética foi de 50 mil toneladas. Observe o cálculo realizado:

$$\bar{x} = \frac{20 + 40 + 50 + 60 + 40 + 60 + 60 + 70 + 50}{9} = \frac{450}{9} = 50 \text{ mil toneladas}$$

c) É falso, pois conforme o gráfico a produção de 1993 (60000 t.) apresenta um aumento de 10 mil toneladas com relação à produção de 1992 (50000 t.). Assim, houve um acréscimo de $\frac{1}{5}$, ou seja, de 20%.

d) É falso, pois de 1996 a 1997 a produção foi crescente.

e) É verdadeiro, conforme o item b).

DESAFIO (2):

Para a solução deste 2.º problema faz-se necessária a utilização da ideia de Média Aritmética, bem como da expressão que permite o seu cálculo. O enunciado evidencia informações sobre a Média Aritmética das notas de uma prova que foi aplicada em duas turmas diferentes, conforme exposto abaixo:

<u>1.ª TURMA</u>	<u>2.ª TURMA</u>
Média Aritmética ($\bar{x}_{1^{\circ}TURMA}$) = 6,40	Média Aritmética ($\bar{x}_{2^{\circ}TURMA}$) = 5,20
Total de Alunos (n) = 30	Total de Alunos (n) = 50

‘Aplicando’ o conceito de Média Aritmética é possível saber as somatórias das notas obtidas pelos 30 alunos da 1.ª TURMA e pelos 50 alunos da 2.ª TURMA. Observe tais somatórias:

<u>1.ª TURMA</u>	<u>2.ª TURMA</u>
$\bar{x}_{1^{\circ}TURMA} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$	$\bar{x}_{2^{\circ}TURMA} = \frac{\sum_{j=1}^{50} x_j}{50}$
$6,40 = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$	$5,20 = \frac{\sum_{j=1}^{50} x_j}{50}$
$\sum_{i=1}^{30} x_i = 6,40 \times 30 = 192$	$\sum_{j=1}^{50} x_j = 5,20 \times 50 = 260$

Para descobrir a Média Aritmética dos alunos das duas turmas, basta somar os dois valores encontrados e dividi-los por 80 (total de alunos).

$$\bar{x}_{(1^{\circ}+2^{\circ}TURMA)} = \frac{192 + 260}{80} = \frac{452}{80} = 5,65$$

Logo, a Média Aritmética das notas obtidas pelos alunos das duas turmas é 5,65; e o item correto é o **a**).

DESAFIO (3):

Do mesmo modo que o segundo, o 3.º desafio faz referência à ideia de Média Aritmética. No entanto, o problema proposto diferencia-se, pois é feita uma ‘comparação’ entre duas Médias Aritméticas ao ocorrer a retirada de um elemento do conjunto inicial. Em seguida, solicita-se a descoberta deste número retirado. Vamos considerar os 8 números como sendo representados pela seguinte notação:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$$

Sabe-se que a Média Aritmética destes 8 números é 4,5. Retirando-se um destes elementos a ‘nova’ Média Aritmética (dos 7 números restantes) é 4,2. Por meio das expressões abaixo é possível calcular as somatórias dos 8 números e também dos 7 números restantes:

<u>SITUAÇÃO INICIAL</u>	<u>RETIRADA de UM NÚMERO</u>
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$
$4,5 = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$	$4,2 = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$
$\sum_{i=1}^8 x_i = 4,5 \times 8$	$\sum_{i=1}^7 x_i = 4,2 \times 7$
$\sum_{i=1}^8 x_i = 36$	$\sum_{i=1}^7 x_i = 29,4$

Para descobrir o número retirado basta fazer a diferença entre o resultado da somatória da ‘Situação Inicial’ e o resultado da somatória da ‘Retirada de Um Número’. Isso, pois a diferença entre as mesmas foi devido à retirada do número em questão.

$$x_{\text{RETIRADO}} = \sum_{i=1}^8 x_i - \sum_{i=1}^7 x_i$$

$$x_{\text{RETIRADO}} = 36 - 29,4 = 6,6$$

Desse modo, o número retirado foi o 6,6 e o item correto é o **d**).

1. Qual(s) desafio(s) causou(aram) em você um certo ‘desequilíbrio’²⁰? Houve(ram) dificuldade(s) no momento de ‘pensar sobre’ os mesmos?

²⁰ A partir da Epistemologia Genética de Jean Piaget, em linhas gerais, um ‘desequilíbrio’ representa um estado ‘momento’ psicológico de dúvidas no sujeito. Tal dúvida é desencadeada por uma situação problema vivenciada pelo sujeito, podendo essa ser de ‘ordem’ prática, cognitiva ou afetiva. ‘Maiores’ discussões far-se-ão posteriormente.

8.3 Estatística Descritiva: medidas de dispersão

Durante o estudo das Medidas de Posição (Média, Mediana e Moda) foi possível perceber que nem sempre a Média Aritmética representa uma ‘boa’ **quantidade** para denotar o **centro** da distribuição de frequências. Como exemplo pode-se citar a Média Aritmética da renda mensal das famílias dos alunos do 9.º ano da professora de Matemática Sueli. Após algumas discussões, concluiu-se que a tal **medida** não representava a ‘realidade’ da maioria das famílias estudadas em relação à renda mensal. Relembrando o cálculo da Média Aritmética nesse caso, temos o seguinte:

$$\bar{x} = \frac{457 + 490 + 525 + 554 + 689 + 700 + 722 + 5000}{8} = \frac{9137}{8} = 1142,125$$

Fazendo uma comparação entre a Média Aritmética obtida (R\$ 1142,125) e os valores que denotam as rendas mensais observam-se ‘grandes’ variações. Por exemplo, a diferença entre a menor renda (R\$ 457,00) e a Média Aritmética é de R\$ 685,125.

Assim, a Estatística Descritiva – visando indicar o quanto os dados se encontram dispersos em torno da região central – ‘elaborou’ as **Medidas de Dispersão**, ou seja, **quantidades (medidas)** que mostram a variação existente no conjunto de valores. Costa Neto (2002, p. 24) ressalta que tais medidas servem como complementação (*qualificação*) das informações fornecidas pelas **Medidas de Posição** (Média Aritmética). Para tanto, far-se-ão discussões acerca de três **Medidas de Dispersão**: Amplitude, Variância e Desvio Padrão.

8.3.1 Amplitude

A Amplitude (**A**), já definida no item 8, é a *diferença* entre o *maior* e o *menor* valores do conjunto de dados coletados/observados. Pode ser representada por meio da seguinte expressão:

$$A = x_{\max} - x_{\min} \quad (4.)$$

Por meio de tal expressão (4.) é possível calcular a amplitude referente ao conjunto das rendas mensais coletadas. Observe:

$$A = 5000 - 457 = 4543$$

A amplitude encontrada (4543) indica que há ‘grande’ dispersão (variação) entre as rendas mensais coletadas. No entanto, como a sua obtenção depende apenas de dois valores (*‘extremos’*) do conjunto dos dados, salvo alguns casos, a amplitude não é muito utilizada como **Medida de Dispersão**. Desse modo, faz-se o uso da Variância.

8.3.2 Variância

No item 8.3 observou-se uma considerável variação entre a menor renda mensal e a Média Aritmética. No gráfico de Dispersão estão representadas as rendas mensais coletadas, bem como a Média Aritmética das mesmas. Por meio desse gráfico é possível perceber como dispersos estão os valores entre si e em relação à própria média.

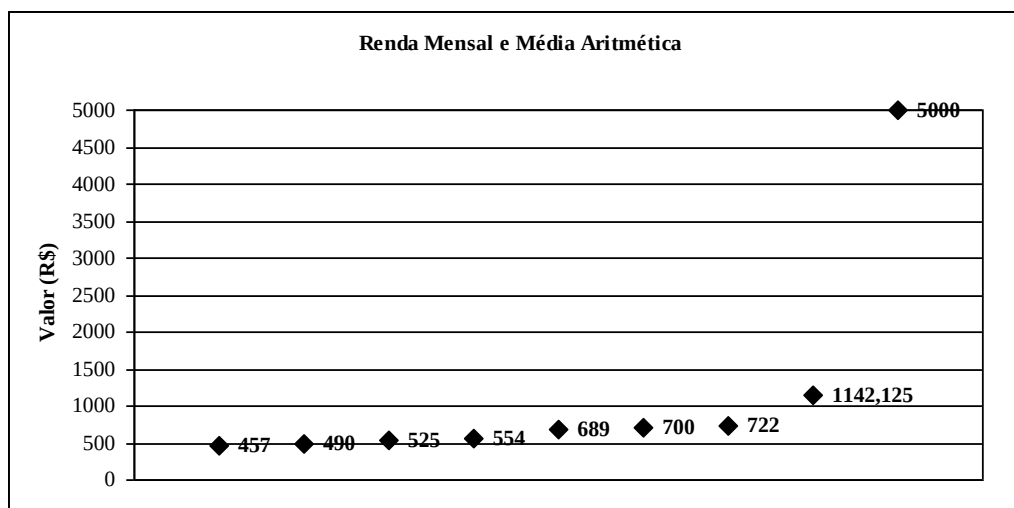


Gráfico de Dispersão – Renda Mensal das famílias dos alunos do 9.º ano e Média Aritmética

1. Tomando como ‘ponto’ central a Média Aritmética (1142,125), calcule a diferença entre cada uma das rendas mensais x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 8$) e a média ($\bar{x}$). Tal operação pode ser indicada por $(x_i - \bar{x})$. Em seguida, some todas as diferenças encontradas e obtenha a Média Aritmética das mesmas.

<u>Rendas Mensais</u> x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 8$)	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
457		
490		
525		
554		
689		
700		
722		
5000		
$\Sigma =$	$\Sigma =$	$\Sigma =$
Média Aritmética =	Média Aritmética =	Média Aritmética =

2. O que foi possível descobrir a partir da somatória (Σ) dos resultados provenientes de $(x_i - \bar{x})$? Por que o valor encontrado foi esse? Para auxiliar na justificativa é possível utilizar o gráfico denotado há pouco.

3. Complete a tabela acima calculando o quadrado dos valores das diferenças das rendas mensais em relação à sua própria média. Tal operação pode ser representada por $(x_i - \bar{x})^2$. Em seguida, some todos os valores encontrados e obtenha a Média Aritmética das mesmas.

O número encontrado _____ é a Variância (**V**) do conjunto de rendas mensais das famílias dos alunos do 9.º ano. Tal valor evidencia uma grande dispersão (variação) entre as rendas mensais coletadas.

Em termos matemáticos, a Variância²¹ é definida por meio da expressão abaixo, considerando x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) os valores coletados/observados:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (5.)$$

No entanto, para a obtenção da Variância houve a necessidade de elevar as diferenças ao quadrado. Desse modo, o valor (da Variância) encontrado não está na mesma unidade de medida dos valores da variável, em nosso exemplo, na unidade de medida das rendas mensais (R\$ reais). Para resolver tal problema introduz-se o conceito de Desvio Padrão.

8.3.3 Desvio padrão

O Desvio Padrão (**DP**) é uma **medida** que representa a raiz quadrada positiva da Variância. O seu cálculo é feito a partir da Variância, conforme denotado abaixo:

$$DP = +\sqrt{V} \quad (6.)$$

No exemplo considerado, o cálculo do Desvio Padrão encontra-se representado a seguir:

$$DP = +\sqrt{2135237,36} \cong 1461,25$$

Assim, o Desvio Padrão do conjunto das rendas mensais é de R\$ 1461,25, o que indica um grupo *heterogêneo*, ou seja, cuja variação entre os valores é grande. Em contrapartida, quanto mais próximo de 0 é o Desvio Padrão, mais *homogênea* é a distribuição dos valores da variável.

8.4 Desafio²² para casa

O professor de Educação Física Pedro foi encarregado de organizar atividades de lazer para 3 grupos de 6 pessoas cada e recebeu a informação de que a Média Aritmética de idade de cada grupo é 20 anos. Apenas esta informação é suficiente para o planejamento das atividades a serem realizadas? Justifique sua resposta.

²¹ Para o cálculo da Variância considerando uma amostra da população utiliza-se a seguinte expressão:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \text{ Utiliza-se } (n-1) \text{ no denominador por motivos ligados à Estatística Indutiva.}$$

²² Tal desafio foi ‘inspirado’ em uma situação problema proposto por Dante (2004, p. 289).

8.5 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’

O que foi possível concluir a partir deste oitavo encontro em relação à Estatística Descritiva: Medidas de Dispersão? Denote suas impressões no quadro abaixo e no início do próximo encontro realize a leitura do mesmo. Escreva, após, as dúvidas provenientes das discussões realizadas.

[illegible]

Dúvidas: _____

9 NONO ENCONTRO

9.1 Ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Até o momento foram abordados alguns conteúdos pertencentes à Estatística, sendo essa uma das áreas que constituem o ‘bloco’ de conteúdo denominado Tratamento da Informação. Por meio de algumas situações problemas denotou-se a possibilidade da apresentação/organização dos dados coletados/observados por meio de tabelas e representações gráficas. Após, fez-se um estudo acerca de algumas medidas (*Média Aritmética* e *Mediana*) que permitem identificar o **centro** da distribuição de frequências e, desse modo, possibilitam uma ‘primeira’ interpretação dos dados coletados/observados. Foi ressaltada a necessidade de outras medidas (*Amplitude*, *Variância* e *Desvio Padrão*) para a determinação do ‘grau’ de variação existente dos tais dados permitindo, por conseguinte, uma ‘melhor’ interpretação da informação obtida por meio da Média Aritmética.

Após tal abordagem faz-se interessante os seguintes questionamentos tendo em vista a preocupação quanto à Formação Inicial do (futuro) professor de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental: *“Quais conteúdos necessitam ser abordados referentes à Estatística nesse nível de ensino?”*; *“Como realizar a abordagem de tais conteúdos?”*.

Visando auxiliar ao ‘pensar sobre’ os questionamentos, denota-se abaixo o rol²³ de conteúdos conceituais e procedimentais em relação ao Tratamento da Informação proposto pelo PCN para o 1.º ciclo (1.ª e 2.ª séries) e para o 2.º ciclo (3.ª a 4.ª séries).

- Leitura e interpretação de informações contidas em imagens.
- Coleta e organização de informações.
- Criação de registros pessoais para comunicação das informações coletadas.
- Exploração da função do número como código na organização de informações (linhas de ônibus, telefones, placas de carros, registros de identidade, bibliotecas, roupas, calçados).
- Interpretação e elaboração de listas, tabelas simples, de dupla entrada e gráficos de barra para comunicar a informação obtida.
- Produção de textos escritos a partir da interpretação de gráficos e tabelas. (BRASIL, 1997, p. 52)

-
- Coleta, organização e descrição de dados.
 - Leitura e interpretação de dados apresentados de maneira organizada (por meio de listas, tabelas, diagramas e gráficos) e construção dessas representações.
 - Interpretação de dados apresentados por meio de tabelas e gráficos, para identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos.
 - Produção de textos escritos, a partir da interpretação de gráficos e tabelas, construção de gráficos e tabelas com base em informações contidas em textos jornalísticos, científicos ou outros.
 - Obtenção e interpretação de média aritmética.
 - Exploração da idéia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de “sorte”.
 - Utilização de informações dadas para avaliar probabilidades.
 - Identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais. (BRASIL, 1997, p. 61)

²³ Faz-se oportuno ressaltar que tal documento (PCN) contempla o que ‘deveria’ ser ensinado da 1ª a 4.ª série do Ensino Fundamental em relação à Matemática, assim, não contempla os conteúdos a serem abordados no 1.º ano do Ensino Fundamental. A inclusão deste primeiro ‘ano’ deve-se às Leis n.º. 11.114, de 16/05/2005 e n.º. 11.274, de 6/2/2006, na qual o Ensino Fundamental passa a ser constituído por 9 anos de estudo, recebendo alunos com 6 anos de idade (ou a completar). Estabelecendo uma comparação com as séries ‘atuais’, o 1.º ano equivale à Pré-escola da Educação Infantil, o 2.º ano à 1ª série do Ensino Fundamental, e assim por diante.

Outro material²⁴ – de autoria própria – apresenta a distribuição dos conteúdos referentes ao Tratamento da Informação (Estatística) a serem ensinados do 1.º ao 5.º ano do Ensino Fundamental. Observe os quadros nos quais tais conteúdos encontram-se distribuídos por ano/bimestre.

1.º Ano do Ensino Fundamental – Tratamento da Informação (Estatística)			
1.º Bimestre	2.º Bimestre	3.º Bimestre	4.º Bimestre
Tabelas Simples – registro de observações diárias.	- Tabelas Simples – registro de observações diárias. - Apresentação de informações pesquisadas de modo pessoal.	Apresentação de informações pesquisadas de modo pessoal.	Apresentação de informações pesquisadas de modo pessoal.

2.º Ano do Ensino Fundamental – Tratamento da Informação (Estatística)			
1.º Bimestre	2.º Bimestre	3.º Bimestre	4.º Bimestre
Tabelas simples – leitura e interpretação.	Gráfico de Colunas – leitura e interpretação.	Tabelas simples – organização de informações coletadas.	Gráficos de Colunas – organização de informações coletadas.

3.º Ano do Ensino Fundamental – Tratamento da Informação (Estatística)			
1.º Bimestre	2.º Bimestre	3.º Bimestre	4.º Bimestre
Registro (pessoal) de informações coletadas.	Registro (pessoal) de informações coletadas.	Tabelas Simples – leitura, interpretação e descrição oral da situação apresentada.	Gráficos de Barras e Colunas – leitura, interpretação e descrição oral da situação apresentada.

4.º Ano do Ensino Fundamental – Tratamento da Informação (Estatística)			
1.º Bimestre	2.º Bimestre	3.º Bimestre	4.º Bimestre
Tabelas e Gráficos – leitura e interpretação de dados organizados.	Tabelas e Gráficos (situações problemas) – solução por meio de dados organizados.	Tabelas e Gráficos – descrição (por escrito) da situação apresentada.	- Tabela Simples e de Dupla Entrada – interpretação dos dados organizados. - Gráficos de Barras, Colunas e Linhas – interpretação dos dados organizados.

5.º Ano do Ensino Fundamental – Tratamento da Informação (Estatística)			
1.º Bimestre	2.º Bimestre	3.º Bimestre	4.º Bimestre
Tabelas Simples e de Dupla Entrada (situações problemas) – solução a partir dos dados apresentados.	- Gráficos de Barras e de Colunas (situações problemas) – solução a partir dos dados apresentados. - Gráfico de Linhas – leitura dos dados apresentados.	Tabelas e Gráficos – construção a partir de dados coletados.	- Gráfico de Setor – leitura dos dados apresentados. - Tabelas e Gráficos – construção a partir de dados coletados.

²⁴ Em colaboração com a Prof.^a Dr.^a Luciana Vanessa de Almeida Buranello, fora elaborado o Currículo Comum de Matemática do 1.º ao 9.º ano do Ensino Fundamental implementado no Sistema Municipal de Ensino de Bauru. Tal projeto, coordenado pela Prof.^a Dr.^a Thaís Cristina Rodrigues Tezani – docente do Departamento de Educação da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), campus Bauru/SP – foi realizado conjuntamente com os professores em exercício da rede municipal de ensino. Além da Matemática, as demais disciplinas escolares foram contempladas.

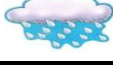
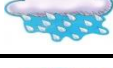
1. Com exceção dos conteúdos referentes à Probabilidade e Combinatória denotados no PCN, faça uma comparação entre os conteúdos propostos por esse documento e os ressaltados nos quadros de nossa autoria. Registre as semelhanças e as diferenças.

2. Qual(s) diferença(s) é(são) possível(s) observar entre os quadros do 1.º e 2.º anos do Ensino Fundamental? Pense a respeito do porquê de tal(s) diferença(s).

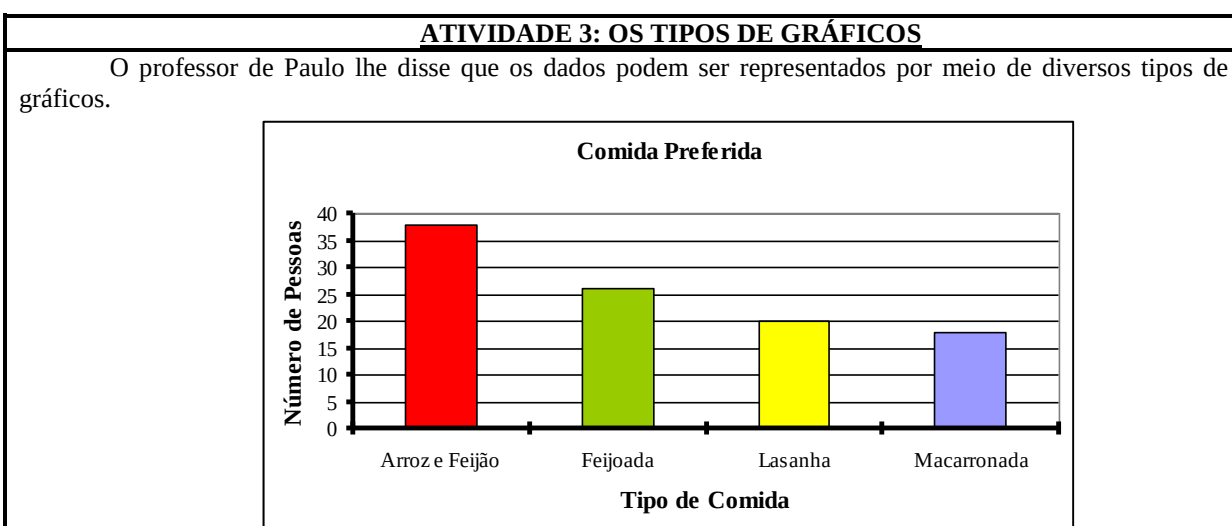
3. No início do texto foi colocado o seguinte questionamento: “*Como realizar a abordagem de tais conteúdos?*”. A partir dos trechos retirados do PCN e dos quadros apresentados é possível respondê-lo? Pense a respeito.

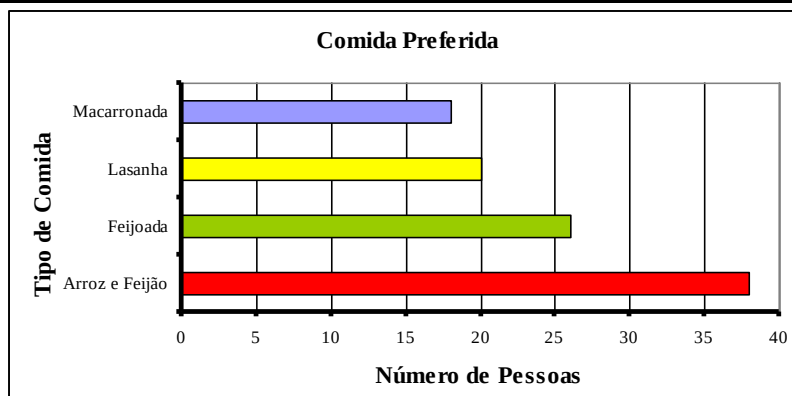
4. Se na 1.ª ‘etapa’ do Ensino Fundamental ainda não é o momento para a formalização do pensamento matemático de modo a ser expresso por meio de uma ‘fórmula’, como deve ser realizada a abordagem do conceito de Média Aritmética para os alunos do 2.º ciclo? Pense a respeito.

5. Analise as atividades abaixo e identifique qual conteúdo foi abordado por meio das mesmas. Como referência utilize os conteúdos apresentados nos quadros esboçados há pouco.

ATIVIDADE 1: COMO ESTÁ O TEMPO?			
Você vai registrar, durante 5 dias seguidos como estava o céu: ensolarado, nublado ou chuvoso. Registre a data e circule no quadro abaixo a condição do tempo.			
DATA	CONDIÇÃO DO TEMPO		
			
			
			
			
			
Conteúdo abordado:			

ATIVIDADE 2: QUAL FOI O GASTO?	
A mãe de Lucas anotou quanto gastou durante uma semana ao fazer compras no mercado perto de sua casa.	
DIA DA SEMANA	GASTOS
SEGUNDA-FEIRA	32 REAIS
QUARTA-FEIRA	27 REAIS
SEXTA-FEIRA	52 REAIS
Leia a Tabela e responda: a) Em que dia da semana ela gastou menos? b) Quanto ela gastou na quarta-feira? c) Quanto ela gastou numa semana?	
Conteúdo abordado:	





1. Que dados você observa em cada gráfico na linha horizontal?

PRIMEIRO GRÁFICO: _____

SEGUNDO GRÁFICO: _____

2. Que dados você observa em cada gráfico na linha vertical?

PRIMEIRO GRÁFICO: _____

SEGUNDO GRÁFICO: _____

3. O que podemos dizer sobre os dois gráficos?

R: _____

Conteúdo abordado: _____

ATIVIDADE 4: INTERPRETANDO UMA TABELA

Eduarda encontrou em uma página da internet a seguinte tabela mostrando o horário em que um tipo de flor abre e fecha durante o dia. Observe os dados na tabela abaixo.

Data	'Abertura' da Flor	'Fechamento' da Flor
02/03	5h45min	18h01min
03/03	5h46min	18h01min
04/03	5h46min	18h02min
05/03	5h46min	18h02min
06/03	5h47min	18h03min
07/03	5h47min	18h03min
08/03	5h48min	18h04min
09/03	5h48min	18h04min
10/03	5h48min	18h05min

1. Por meio da Tabela responda:

a) O que é possível concluir em relação à variação da 'Abertura' da Flor, dia após dia?

R: _____

b) O que é possível concluir em relação à variação do 'Fechamento' da Flor, dia após dia?

R: _____

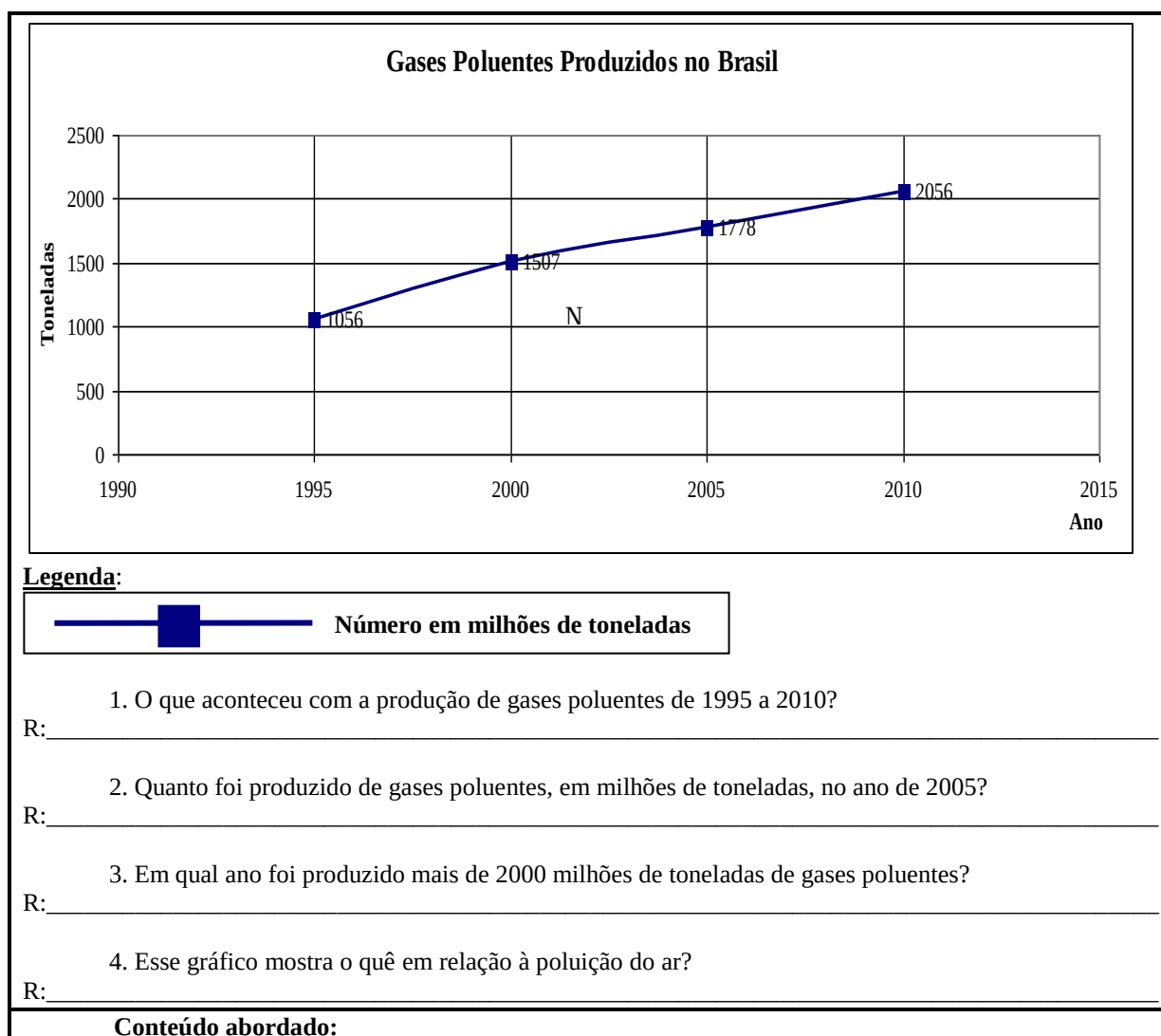
c) Podemos afirmar que esta flor fica mais aberta ou mais fechada? Por quê?

R: _____

Conteúdo abordado: _____

ATIVIDADE 5: AUMENTO DE GASES POLUENTES

Antonio viu no jornal o seguinte gráfico que mostra a variação da produção de gases poluentes no Brasil nos últimos anos.



9.2 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’

O que foi possível concluir a partir deste nono encontro relativo ao Ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental? Denote suas impressões no quadro abaixo e no início do próximo encontro realize a leitura do mesmo. Escreva, após, as dúvidas provenientes das discussões realizadas.

Dúvidas: _____

10 DÉCIMO ENCONTRO

10.1 Um movimento de retomada (síntese)

No 9.º encontro foram realizadas algumas discussões referentes ao Ensino de Estatística nos anos iniciais (1.º ao 5.º) do Ensino Fundamental. Além de citar os conteúdos a serem ensinados, foi denotada uma possível distribuição dos mesmos em cada bimestre (1.º ao 4.º) de cada ano (1.º ao 5.º). Durante a discussão do questionamento “*Como realizar a abordagem de tais conteúdos?*” chegou-se à conclusão da adoção da solução de problemas²⁵ enquanto estratégia didático-metodológica.

Sem desconsiderar outros fatores (filosóficos, socioeconômicos, históricos, morais, entre outros) que influenciam a constituição de uma proposta curricular, devido ao objetivo do Grupo de Estudo, dentre tantos outros, dar-se-á atenção aos aspectos psicológicos intervenientes em tal constituição, sendo utilizado como referencial teórico a Epistemologia Genética.

10.2 Epistemologia Genética: algumas considerações

Ao utilizar a solução de problemas como estratégia didático-metodológica à ‘execução’ da proposta curricular, faz-se oportuno o seguinte questionamento: “*Por que propor problemas aos alunos colabora ao processo de aprendizagem?*”. Ao tentar solucionar um problema o estudante está agindo sobre o objeto de conhecimento em questão. Mas, “*Qual a importância do agir (atividade/ação) do sujeito ao processo de construção de conhecimento?*”. Visando refletir sobre tal questão, torna-se válido a análise das ideias de Jean Piaget a respeito da atividade do sujeito.

A ACTIVIDADE DO SUJEITO²⁶

Um dos temas que permanecem constantes, ao longo dos escritos pedagógicos de Piaget, é o da actividade do sujeito. Este tema é frequentemente associado a outras temáticas, como o papel do professor, os métodos pedagógicos, a autonomia da criança. E é sempre contraposto ao verbalismo.

A actividade do sujeito faz sempre alusão à tomada em consideração da individualização do ensino. No entanto, Piaget especifica, pouco a pouco, este conceito, colocando a tónica já não na importância de experimentar uma realidade para a poder compreender, mas na actividade como uma característica do pensamento da criança.

Nos seus primeiros escritos, Piaget fala, com efeito, da actividade em termos de experiência e de descoberta. A actividade é associada ao facto de que a educação deve responder a uma necessidade. Ora, esta última deve ser experimentada pela criança, isto é, deve corresponder a uma <<realidade vivida>>. Tomemos, por exemplo, o domínio da educação internacional. Seria possível, como o fazia o ensino tradicional, explicar à criança, de forma verbal, no que ela consiste. Mas os resultados seriam decepcionantes, porque a criança aceitaria muito simplesmente conhecimentos definitivos, impostos do exterior, sem os interiorizar. Para que os possa assimilar, é necessário que a criança seja colocada numa situação em que ela própria exerça uma certa actividade, como os intercâmbios interescolares, as viagens, etc.

A partir dos anos 40, a actividade é associada à ideia de actividade operatória ou instrumental, funcionando por ocasião de manipulações ou de experiências. A necessidade de experiência torna-se necessidade de experimentação. A actividade torna-se actividade construtiva do pensamento. É a acção que permitirá a construção das operações intelectuais. (...) Pela sua actividade, a criança constrói, assim, os seus próprios instrumentos operatórios para compreender o mundo. Vemos que a ideia de experimentação, se bem que sempre presente, passa progressivamente para segundo plano, depois da construção operatória. Falando de actividade no domínio da educação, Piaget refere-se, cada vez mais, à actividade operatória, isto é, lógica,

²⁵ O significado da palavra problema utilizada é a mesmo adotado por Sternberg (2012, p. 383-384): “Empenhamo-nos na resolução de problemas quando precisamos suplantarmos obstáculos para responder a uma pergunta ou atingir uma meta. Se pudermos obter rapidamente uma resposta de memória, não temos um problema. Caso não tenhamos uma resposta imediata, então temos um problema para ser resolvido.”. Embora o autor use o termo “resolução de problemas”, neste trabalho tal expressão é considerada como sinônimo da utilizada por nós (solução de problemas).

²⁶ Trecho retirado do livro ‘Pedagogia’ (PIAGET, 1998, p. 18-19).

[illegible]

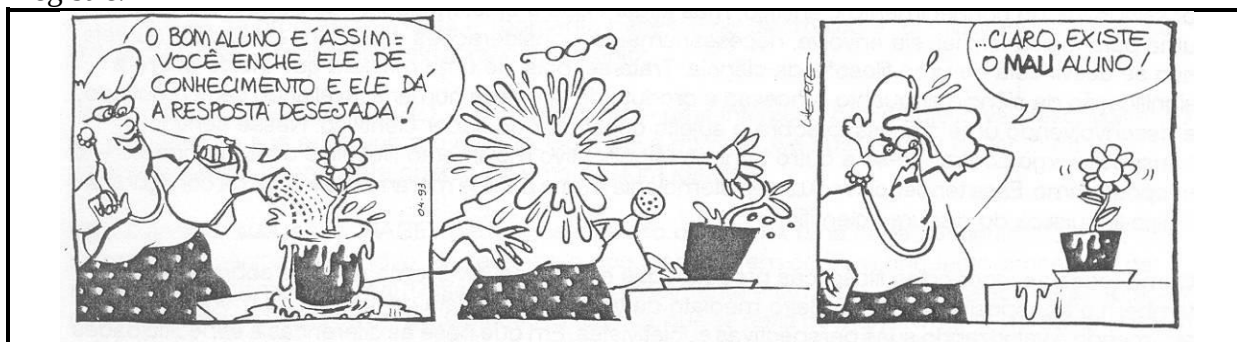
Ao propor a Epistemologia Genética – também denominada Construtivismo Sequencial Probabilístico – Piaget ‘supera’ duas antigas correntes epistemológicas: o Racionalismo e o Empirismo. No quadro abaixo são denotadas as ideias centrais de tais correntes bem como seus idealizadores iniciais.

	Idealizador	Ideias Centrais
RACIONALISMO	Platão ²⁹	IDÉIA 1 – O sujeito nasce com conhecimentos. IDÉIA 2 – O sujeito necessita de estímulos para despertar os conhecimentos. IDÉIA 3 – O sujeito é a base fundamental dos conhecimentos.

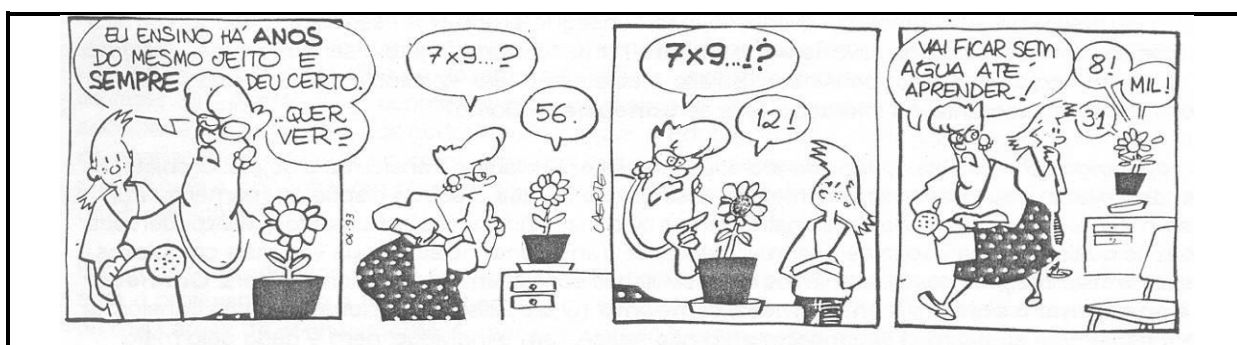
²⁹ Alguns estudiosos ‘seguidores’ de Platão foram René Descartes, Bento de Espinoza, Gottfried Wilhelm von Leibniz.

EMPIRISMOAristóteles³⁰**IDÉIA 1** – O sujeito nasce ignorante “TÁBULA RASA”.**IDÉIA 2** – O sujeito conhece somente pela experiência de seus 5 sentidos, não há conhecimento sem experiência.**IDÉIA 3** – O objeto é a base fundamental dos conhecimentos.

2. Identifique qual(s) corrente(s) epistemológica(s) está(ão) implícita(s) nas tiras abaixo que representam as atitudes de uma professora de Matemática. Em seguida, tente se lembrar de alguma experiência escolar na qual tal(s) corrente(s) foi(ram) observada(s) e a registre.



Fonte – (BORJA, 1993, p. 15).



Fonte – (BORJA, 1993, p. 87).

3. Durante a sua experiência escolar, tente se recordar de alguma fala ou postura de seu professor na qual fica explícita, ou implícita, uma ideia condizente ao racionalismo. Caso consiga, anote-a para posterior discussão.

³⁰ Alguns estudiosos ‘seguidores’ de Aristóteles foram Tomás de Aquino, John Locke, George Berkeley, David Hume.

De modo geral, é possível representar tais correntes epistemológicas na figura abaixo:

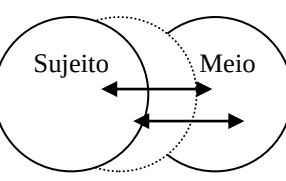
De modo geral, é possível representar as correntes epistemológicas na figura abaixo:					
					
	1) Predominância do sujeito	2) Predominância do meio (objeto)	3) Interação entre o sujeito e o meio (objeto)		
Epistemologia:	Tendência para o Racionalismo Idealismo ↓	Tendência para o Empirismo Materialismo ↓	Tendência para o Estruturalismo Construtivismo ↓		
Psicologia:	Teorias Inatistas: ↓	Teorias Condutistas (Learning) ↙ ↘	Teorias Interacionistas: ↙ ↘		
Representantes:	Teoria das <<faculdades mentais>>	Behavio-rismo americano ↓	Reflexo-logia soviética ↓	Gestaltismo (sem progressão genética)	Construti-vismo seqüencial (J. Piaget)
Autores:		Skinner	Pavlov	K. Lewin	Jean Piaget

Figura – Três clássicas teorias do conhecimento. (LIMA, 1973, p. 352)

Neste ponto cabe um terceiro questionamento: “*Se o conhecimento advém de uma interação-ação entre o sujeito e o objeto, o que permite ao sujeito interagir-agir com o objeto?*”. Para tal explicação faz-se necessário recorrer à teoria da assimilação, denotada no próximo tópico.

10.2.1 A teoria da assimilação: o processo de assimilação e acomodação

O que permite ao sujeito interagir-agir com o meio (objeto) são duas funções herdadas geneticamente: a *organização* e a *adaptação*. A *adaptação*, por sua vez, é constituída por duas invariantes funcionais: a *assimilação* e a *acomodação*. Como auxílio ao entendimento de tais conceitos, faz-se oportuno o exposto por Piaget (1987):

O organismo é um ciclo de processos físico-químicos e cinéticos que, em relação constante com o meio, engendram-se mutuamente. Sejam *a*, *b*, *c* etc. os elementos dessa totalidade organizada e *x*, *y*, *z* etc. os elementos correspondentes do meio ambiente. O esquema da organização é, pois, o seguinte:

- 1) $a + x \rightarrow b$;
- 2) $b + y \rightarrow c$;
- 3) $c + z \rightarrow a$ etc.

Os processos 1), 2) etc. Tanto podem consistir em reações químicas (quando o organismo ingere substâncias *x* que ele transformará em substância *b* que fazem

parte da sua estrutura), como em transformações físicas quaisquer ou, enfim, de um modo particular, em comportamentos sensório-motores (quando um ciclo de movimentos corporais a combinados com os movimentos exteriores x chega a um resultado b que participa igualmente no ciclo da organização). A relação que une os elementos organizadores a , b , c etc. aos elementos do meio x , y , z etc. constitui, portanto, uma relação de *assimilação*, quer dizer, o funcionamento do organismo não destrói, mas conserva o ciclo de organização e coordena os dados do meio de modo a incorporá-los nesse ciclo. Suponhamos, pois, que se produz no meio uma variação que transforma x em x' . Ou o organismo não se adapta e há uma ruptura do ciclo, ou há adaptação, o que significa que o ciclo organizado se modificou ao fechar-se sobre si mesmo.

- 1) $a + x' \rightarrow b'$;
- 2) $b' + y \rightarrow c$;
- 3) $c + z \rightarrow a$ etc.

Se denominarmos *acomodação* esse resultado das pressões exercidas pelo meio (transformação de b em b'), poderemos dizer, portanto, que a *adaptação é um equilíbrio entre a assimilação e a acomodação*. (PIAGET, 1987, p. 16-17, grifos do autor)

Logo, assimilar significa incorporar os elementos do meio aos esquemas³¹ (ou às estruturas de pensamento) do sujeito. Entretanto, quando tais esquemas são modificados possibilitando a incorporação de ‘novos’ elementos observa-se, assim, a ocorrência da acomodação. Acerca da relação de interdependência entre estas duas invariantes, Piaget denota o seguinte:

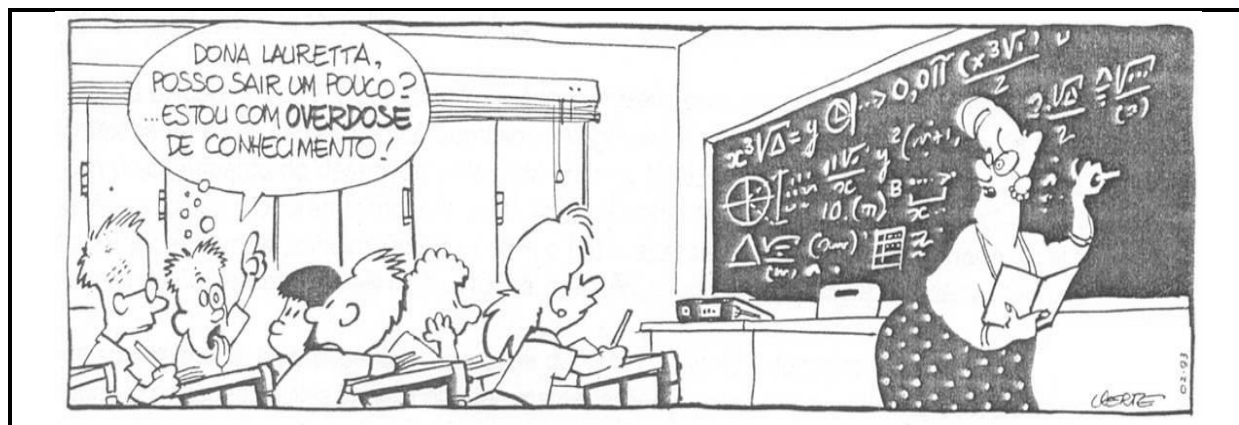
A assimilação nunca pode ser pura, visto que, ao incorporar os novos elementos os esquemas anteriores, a inteligência modifica incessantemente os últimos para ajustá-los aos novos dados. Mas, inversamente, as coisas nunca são conhecidas em si mesmas, porquanto esse trabalho de acomodação só é possível em função do processo inverso de assimilação. (PIAGET, 1987, p. 18)

No mesmo sentido, entre a adaptação e a organização há uma indissociabilidade, pois, “é adaptando-se às coisas que o pensamento se organiza e é organizando-se que estrutura as coisas” (PIAGET, 1987, p. 19). Assim, a atividade-ação do sujeito sobre o objeto e sobre si mesmo explica a organização intelectual e o desenvolvimento de esquemas (ou estruturas de pensamento) cada vez mais complexas. Para findar a discussão, citemos Piaget (1987):

[...] as relações entre o sujeito e o seu meio consistem numa interação radical, de modo tal que a consciência não começa pelo conhecimento dos objetos nem pelo da atividade do sujeito, mas por um estado indiferenciado; e é desse estado que derivam dois movimentos complementares, um da incorporação das coisas ao sujeito, o outro de acomodação às próprias coisas. (p. 386)

1. O que a representação da sala da professora de Matemática Laureta indica em relação ao processo de assimilação e acomodação?

³¹ Conforme Piaget (1987, p. 359), o esquema “constitui uma espécie de conceito sensório-motor ou, mais amplamente, o equivalente motor de um sistema de relações e de classes.”.



Fonte – (BORJA, 1993, p. 31).

2. O ocorrido com o aluno da professora de Matemática Laureta também foi vivenciado por você durante a Educação Básica nas aulas de Matemática? Tente se recordar de situações caso isso tenha ocorrido, registrando-as.

de situações caso isso tenha ocorrido, registrando-as:

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.[illegible]

10.4 Desafios para casa: Estatística Descritiva

1. Um candidato tirou as seguintes notas em um concurso público prestado: 7,3; 6,5; 9,1; 8,2; 7,3; 6,4 e 9. A Média Aritmética, a Mediana e a Moda referente às notas desse candidato são, respectivamente:

- a) 7,3; 7,4; 7,7
b) 7,4; 7,3; 7,7
c) 7,7; 7,3; 7,3
d) 7,8; 7,3; 7,3
e) 7,9; 7,4; 7,3

2. Em um treinamento de salto em altura, os atletas realizaram 4 saltos cada um. Observe as marcas obtidas por três atletas e responda as questões.

Atleta A: 148 cm, 170 cm, 155 cm e 131 cm.
Atleta B: 145 cm, 151 cm, 150 cm e 152 cm.
Atleta C: 146 cm, 151 cm, 143 cm e 160 cm.

- a) Qual deles obteve a melhor Média Aritmética?

[illegible]

- b) Para auxiliar os atletas a melhorarem seus desempenhos, faz-se necessário investigar o quão regular encontram-se os resultados obtidos por eles. Nesse sentido, qual dos atletas acima apresentou melhor regularidade, ou seja, melhor homogeneidade? E qual deles apresentou a ‘pior’ regularidade?

[illegible]

-
- This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]

11 DÉCIMO PRIMEIRO ENCONTRO

11.1 Um movimento de retomada (síntese)

A análise da proposta curricular de Matemática referente à abordagem dos conteúdos de Estatística ‘nos levou’ a pensar sobre o porquê da adoção da solução de problemas enquanto estratégia didático-metodológica. Como resposta chegou-se à conclusão da importância do agir do sujeito (aluno) ao processo de construção de conhecimento. Para tanto, foram evidenciadas as funções herdadas geneticamente (*organização* e *adaptação*) que propiciam tal inter(ação) entre o sujeito e o meio (objeto), fazendo-se breve discussão quanto a duas funções invariantes (*assimilação* e *acomodação*) que, quando em equilíbrio, permitem a adaptação/organização do sujeito ao real e a si mesmo.

Durante a discussão da importância da atividade do sujeito ressaltou-se que “a educação deve responder a uma necessidade”, ideia essa que causou algumas incompreensões da teoria de Piaget quando utilizada no meio educacional. Nesse sentido, no item abaixo, far-se-á uma breve abordagem acerca de tal assunto.

11.2 ‘A Educação deve responder a uma necessidade’

Ao se referir “a uma necessidade”, de modo algum Piaget reduz o processo educativo ao ensino dos ‘conteúdos’ prático-utilitários de uso exclusivo da esfera cotidiana. Caso o tivesse feito, o seu estudo-investigação acerca das estruturas formais do pensamento que permitem ao sujeito ‘ultrapassar’ o real teria sido desnecessário. É certo que na Educação Primária (anos iniciais do Ensino Fundamental) o ensino deve (deveria) partir da realidade vivida pelo aluno. Tal fato ocorre, pois, esse é o período no qual o pensamento do sujeito, por não ter se ‘desprendido’ do real, ainda necessita operar sobre o concreto.

Acerca da necessidade Piaget (2001) expõe o seguinte:

Em todos os níveis, a ação supõe sempre um interesse que a desencadeia, podendo-se tratar de uma necessidade fisiológica, afetiva ou intelectual (a necessidade apresenta-se neste último caso sob a forma de uma pergunta ou de um problema). Em todos os níveis, a inteligência procura compreender, explicar etc.; só que se as funções de interesse, da explicação etc. são comuns a todos os estágios, isto é, “invariáveis” como funções, não é menos verdade – que os “interesses” (em oposição ao “interesse”) variam consideravelmente, de um nível mental a outro, e que as explicações particulares (em oposição à função de explicar) assumem formas muito diferentes de acordo com o grau de desenvolvimento intelectual. Ao lado das funções – constantes, é preciso distinguir as estruturas variáveis, e é precisamente a análise dessas estruturas progressivas ou formas sucessivas de equilíbrio que marca as diferenças ou oposições de um nível de conduta para outro, desde os comportamentos elementares do lactente até à adolescência. (p. 14-15)

Da citação conclui-se que em cada nível de desenvolvimento mental (estádios) serão observados interesses diferentes, cuja principal função do interesse é desencadear no sujeito a sua ação. Por exemplo, no estágio sensório-motor o interesse/necessidade residirá na organização do espaço ‘prático’, inicialmente o espaço próximo ao recém-nascido. É por isso que nos primeiros meses de vida o bebê organiza/ ‘classifica’³² – por meio da manipulação – tudo o que é para sugar, o que é para olhar, o que é para pegar, o que é para sacudir, etc.

Mais adiante, Piaget ressalta:

A criança, como o adulto, só executa alguma ação exterior ou mesmo inteiramente interior quando impulsionada por um motivo e este se traduz sempre sob a forma de uma necessidade (uma necessidade elementar ou um interesse, uma pergunta, etc.).

³² Faz-se oportuno ressaltar que o bebê não tem consciência de que está realizando uma classificação.

Ora, como já bem demonstrou Claparède, uma necessidade é sempre a manifestação de um desequilíbrio. Ela existe quando qualquer coisa, fora de nós ou em nós (no nosso organismo físico ou mental) se modificou, tratando-se, então, de um reajustamento de conduta em função desta mudança. Por exemplo, a fome ou a fadiga provocarão a procura do alimento ou do repouso. O encontro do objeto exterior desencadeará a necessidade de manipulá-lo; sua utilização para fins práticos suscitará uma pergunta ou um problema teórico. Uma palavra de alguém exercitará a necessidade de imitar, de simpatizar ou levará a reserva e oposição quando entra em conflito com as nossas tendências. Inversamente, a ação se finda desde que haja satisfação das necessidades, isto é, logo que o equilíbrio – entre o fato novo, que desencadeou a necessidade, e a nossa organização mental, tal como se apresentava anteriormente – é reestabelecido. (PIAGET, 2001, p. 15-16)

O exposto evidencia – brevemente – o processo de *Equilibração*, sendo esse imprescindível ao desenvolvimento (fisiológico, afetivo e cognitivo) do indivíduo. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, quando o aluno não é ‘desequilibrado’ a agir sobre o objeto de conhecimento, provavelmente, o aprender perderá interesse (sentido). Tal fato decorre, em grande parte, do verbalismo do professor por acreditar que o seu falar-expor será suficiente para a assimilação-acomodação do conhecimento. De modo algum nega-se a importância da *interação social* (relações interindividuais) ao processo de aprendizagem, bem como ao desenvolvimento em geral do indivíduo. A *interação social*, a *maturação orgânica* e as *experiências física e lógico-matemáticas*, coordenadas pelo processo de *equilibração*, constituem os quatro fatores responsáveis pelo desenvolvimento do sujeito. No próximo item serão abordados tais fatores.

11.3 Os fatores do desenvolvimento

A maturação orgânica consiste-se no desenvolvimento fisiológico do indivíduo, representando uma condição necessária ao crescente desenvolvimento mental do homem. No entanto, não é uma condição suficiente à evolução cognitiva, já que tal evolução só se faz possível mediante as interações (experiências) do sujeito com o meio (objeto), propiciando/desencadeando a ação e ou operação. Ao discutir a gênese-construção das estruturas lógicas elementares (classificação e seriação), Piaget analisa alguns fatores intervenientes em tal construção, ressaltando o seguinte em relação à maturação:

Portanto, somos obrigados, por medida de prudência, a reservar uma parte **[da explicação referente à gênese-construção das estruturas lógicas]** à maturação, supondo, por exemplo, que o momento culminante dos 7 aos 8 anos, tão notável sob múltiplos aspectos para o desenvolvimento das estruturas operantes nas nossas sociedades ditas civilizadas (onde êsse período coincide com o início da instrução escolar do primeiro grau etc.), corresponde, sem dúvida, a alguma transformação das estruturas nervosas.

Mas, de fato, não sabemos e não conhecemos, sobretudo, qualquer estrutura cognitiva que se possa demonstrar ser resultante, exclusivamente, de fatores endógenos ligados à maturação. A noção de maturação parece um pouco mais clara do ponto de vista negativo, no sentido em que atribuir à falta de aparelhos nervosos suficientes a ausência de um comportamento (por exemplo, a ausência entre os 2 e 4 anos de todo e qualquer raciocínio hipotético-dedutivo) parece comportar um significado. Sob o seu aspecto positivo, a maturação do sistema nervoso limita-se, pelo contrário, a ampliar incessantemente o campo das possibilidades acessíveis ao sujeito; mas, entre a possibilidade de um comportamento e sua atualização, é preciso contar ainda com a intervenção ativa do meio físico (exercício e experiência adquirida) e, além dessa aprendizagem, com todas as influências educativas do meio social. (PIAGET, 1971, p. 16-17, [comentário nosso])

Ao abordar a questão da maturação, Piaget ressalta os outros fatores do desenvolvimento ao citar a necessidade da intervenção ativa do meio físico (exercício e experiência) e das influências educativas do meio social (interação social).

Em relação à experiência, Piaget a entende não como uma recepção (contato, ou seja, pressão exercida pelo meio sobre o sujeito), mas sim como ação e construção progressivas. É experimentando a realidade que o indivíduo a constrói – inicialmente no plano prático e depois no mental. Acerca do significado da experiência, Piaget esboça uma interessante conclusão:

Em conclusão, não só a experiência é tanto mais ativa e mais compreensiva quanto mais a inteligência amadurece, mas também as “coisas” sobre as quais ela se desenvolve nunca poderão ser concebidas independentemente da atividade do sujeito. Essa segunda constatação vem reforçar, pois, a primeira e indicar que, se a experiência é necessária ao desenvolvimento intelectual, não poderá ser interpretada, implicitamente, como as teorias empiristas querem, isto é, como auto-suficientes. É verdade que quanto mais ativa for a experiência, tanto mais a realidade sobre que ela incide se torna independente do eu e, por conseguinte, mais “objetiva”. [...] Com efeito, é na medida em que o sujeito é ativo que a experiência se objetiva; portanto, a objetividade não significa independência em relação à atividade assimiladora da inteligência, mas, simplesmente, dissociação em relação ao eu e à sua subjetividade egocêntrica. A objetividade da experiência é uma conquista da acomodação e da assimilação combinadas, isto é, da atividade intelectual do sujeito e não um dado primordial que se lhe impõe de fora. [...] O caráter cada vez mais complementar dessas duas funções **[assimilação e acomodação]** permite-nos, assim, concluir que a experiência, longe de emancipar-se da atividade intelectual, só progride na medida em que é organizada e animada pela própria inteligência. (PIAGET, 1987, p. 344, [comentário nosso]).

Desse modo, a experiência só existe graças à ação do sujeito ao assimilar-acomodar a realidade. Em seus estudos, Piaget classifica a experiência em dois tipos: a *Experiência Física* e a *Experiência Lógico-Matemática*. A primeira ocorre quando o indivíduo extrai as propriedades do objeto ao agir sobre ele. Por exemplo, ao manipular e observar um objeto o indivíduo extrai suas propriedades, tais como sua cor, seu formato, sua superfície, etc. Já a *Experiência Lógico-Matemática* decorre quando o sujeito extrai a propriedade da coordenação das ações realizadas sobre o objeto. Tomemos como exemplo a classificação na qual o indivíduo coordena as ações referentes à união dos objetos que apresentam uma característica (propriedade) em comum. No entanto, observa-se uma indissociabilidade entre estes dois tipos de experiências. Conforme Becker (2010):

Esses dois componentes do processo de desenvolvimento não devem ser concebidos como estanques, mas como aspectos indissociáveis, e sempre presentes, de toda a experiência. “Está claro, efetivamente, que não existe experiência física, por mais elementar que seja, sem relacionamentos ou correspondências, sem classificação, seriação ou medida etc., portanto sem um quadro concernente à experiência lógico-matemática. Reciprocamente, uma experiência de segundo tipo apoia-se sobre os objetos extraindo da ação o essencial de suas abstrações: ora, na medida em que os objetos se prestam a essas ações ou operações (em que são coordenáveis, classificáveis, enumeráveis etc.), junta-se ao componente lógico-matemático, que permanece essencial, um segundo plano de experiência física, uma vez que o sujeito aprende ao menos que os objetos submetem-se a suas manipulações e são, portanto, logicizáveis e matematizáveis” (LCS, p. 387). (p. 217)

Sobre a ‘*Interação Social*’, Piaget defende a importância das trocas interindividuais ao processo de construção de conhecimento. Ao interagir com o outro, o sujeito pode vir a questionar seu ponto de vista, ‘desequilibrando-se’. Caso ocorra um ‘novo’ equilíbrio

(reequilíbrio) o indivíduo pode ampliar o ‘poder’ explicativo de suas estruturas de pensamento. Nesse sentido, a escola pode desempenhar um importante papel já que a mesma constitui, por excelência, um espaço propício às trocas entre professor e alunos e entre os próprios alunos.

Por fim, a *Equilibração*³³, coordenando os três fatores precedentes, é concebida “como compensação das perturbações exteriores por meio das atividades do sujeito, que serão as respostas a essas perturbações.” (PIAGET, 2001, p. 97).

1. No 5.º problema (item 9.1 “Ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental”) identifique nas atividades propostas a ocorrência da experiência física e lógico-matemática. Qual a importância do conhecimento acerca de tal assunto para a sua futura atuação enquanto professora de Matemática? Pense a respeito!

2. Para a abordagem da classificação, de que modo o professor pode utilizar o conhecimento a respeito da experiência (física e lógico-matemática) em sua prática docente?

No item 11.2, ao discorrer sobre a necessidade, destacou-se que em cada nível do desenvolvimento cognitivo há interesses diferentes correspondentes ao ‘momento’ psicológico vivenciado pelo sujeito. Assim, no próximo tópico serão ressaltados tais níveis (estádios), do lactente à adolescência.

11.4 Estádios de desenvolvimento

Cada estágio caracteriza-se por determinada forma de comportamento (conduta) utilizada pelo sujeito para explicar/compreender/agir sobre o meio, sendo que o estágio anterior torna-se condição necessária à construção do posterior. Aqui, um questionamento faz-se oportuno: “*Se a ‘nova’ conduta é construída a partir de condutas anteriores que lhe serviram de base, como explicar o início de tal construção, ou seja, no recém-nascido?*”. Para responder tal questionamento, no próximo item serão realizadas algumas discussões.

11.4.1 Estádio sensório-motor (o recém-nascido e o lactente)

O recém-nascido vale-se dos reflexos herdados hereditariamente às interações realizadas com o meio, não havendo ainda diferenciação entre este meio e o seu eu. Através do exercício de tais reflexos, observam-se a construção das primeiras adaptações adquiridas (novos hábitos) e a organização das percepções. Acerca do início da vida mental no recém-nascido, Piaget ressalta o seguinte:

³³ Em momento posterior será realizado um estudo mais ‘aprofundado’ acerca do processo de *Equilibração*.

No recém-nascido, a vida mental se reduz ao exercício de aparelhos reflexos, isto é, às coordenações sensoriais e motoras de fundo hereditário, que correspondem a tendências instintivas, como a nutrição. [...] Desde o início, os reflexos da sucção melhoram com o exercício: um recém-nascido mama melhor depois de uma ou duas semanas que nos primeiros dias. (PIAGET, 2001, p. 18)

Mas, “*Como explicar a construção dos novos hábitos e a organização das percepções por meio do exercício dos reflexos herdados hereditariamente?*”. Segundo Piaget:

Um ciclo reflexo é sempre, no ponto de partida, mais um ciclo cujo exercício, em lugar de se repetir, incorpora novos elementos, constituindo com eles totalidades organizadas mais amplas, por diferenciações progressivas; a seguir, basta que os movimentos do lactente, quaisquer que sejam, atinjam um resultado interessante – interessante porque os movimentos são assimiláveis a um esquema anterior – para que o sujeito reproduza logo esses novos movimentos. Esta “reação circular”, como a chamaram, desempenha papel essencial no desenvolvimento senso-motor e representa a forma mais evoluída de assimilação. (PIAGET, 2001, p. 19)

Percebe-se que graças às duas invariantes funcionais (assimilação e acomodação), o lactente consegue modificar os reflexos – por diferenciação e integração progressivas – transformando-os em novos hábitos e organizando as suas percepções.

Situada entre o nascimento até aproximadamente os 24 meses de vida, neste estágio observa-se a *inteligência prática*, isto é, as soluções dos problemas – provenientes da interação sujeito e objeto (meio) – devem-se exclusivamente à *ação* realizada através da *percepção* e do *movimento físico*, decorrendo daí a denominação sensório-motora. Nessa etapa as aquisições (construção das estruturas) são mais rápidas e mais numerosas.

Como ainda está na fase pré-verbal, para agir sobre o mundo o sujeito utiliza a percepção e os movimentos organizados em *esquemas de ação*, ou seja, o bebê incorpora um ‘novo’ objeto utilizando esses esquemas, como por exemplo, sacudir, esfregar, balançar. Assim, a compreensão desse ‘novo’ objeto deu-se pelo *exclusivo* uso/manipulação.

No decorrer dos 24 meses, e por meio da ação física sobre os objetos, a criança constrói algumas noções fundamentais para o desenvolvimento ao estágio seguinte, tais como a noção de *objeto permanente*³⁴ e de *causalidade*³⁵. Ao final de tal estágio observa-se a diferenciação entre a criança (o seu eu) e os demais objetos contidos no meio, elaborando, assim, o espaço físico. Com o aparecimento da linguagem, a criança torna-se capaz de reconstituir suas ações em narrativas, antecipando suas ações futuras pela representação verbal. Daí faz-se possível um ‘novo’ conjunto de comportamentos (condutas), caracterizando o estágio seguinte.

11.4.2 Estádio pré-operatório (a primeira infância)

Nesse estágio, compreendendo (em média) a faixa etária dos 2 aos 7-8 anos, observa-se o rápido desenvolvimento da linguagem e da função simbólica. A linguagem, conforme expõe Furth (1997), representa:

³⁴ A noção de objeto permanente refere-se à capacidade da criança encontrar um objeto que foi escondido. Para tanto, há a necessidade de o sujeito conservar tal objeto em sua mente, sendo um indício das primeiras imagens mentais (representação) na criança.

³⁵ Pode-se definir causalidade como o estabelecimento de relações que a criança constrói ao interagir com o objeto. Por exemplo, ao descobrir que objetos de vidro ao caírem no chão podem quebrar a criança estabelece (constrói) a relação causal: queda do copo de vidro x possível quebra desse objeto. Tal construção se dá concomitantemente ao do objeto permanente.

O sistema natural dos símbolos falados (e ouvidos), forma de comunicação típica de uma sociedade. Uma das manifestações do funcionamento simbólico. A linguagem é adquirida e utilizada como outro comportamento simbólico e influencia a inteligência indiretamente, através do impacto social e educativo da sociedade. (p. 229, grifo nosso)

Decorre dessa afirmação que a linguagem é um dos comportamentos simbólicos, uma das manifestações da função simbólica, então, para compreender melhor a linguagem, torna-se oportuno esclarecer a função simbólica. Observe o seguinte exemplo (de nossa autoria): “Quando brinca, a criança pode, por exemplo, usar dois pedaços de madeira para representar duas pessoas. Ao representar dois pedaços de madeira como sendo duas pessoas, pode-se dizer que a criança está pensando simbolicamente”. Segundo Lima (2000):

No nível simbólico (intuição) a criança não distingue ainda a diferença entre a aparência e a realidade (metáfora, ilusão, duplo sentido). Isso só ocorre na adolescência. As crianças não percebem o sentido satírico das caricaturas (como ocorre com muitos adultos retardados no desenvolvimento). (p. 229)

A função simbólica consiste na capacidade de se construir ou produzir um símbolo de modo a representar aquilo que se conhece, mas que não está presente no momento atual. Assim, no exemplo anterior, a criança representou duas pessoas (*aquilo que ela conhece*) só que sem as suas presenças; o fez por meio dos pedaços de madeira que serviram de símbolo à sua ação. Concomitantemente ao desenvolvimento destas estruturas de pensamento, o indivíduo começa a classificar e a ordenar os objetos, bem como a contar. Como salienta Piaget, ao substituir a ação pela representação, ou seja, ao se servir de símbolos, a criança inicia o seu pensamento.

Neste estágio observa-se o que Piaget denomina de *jogo simbólico*, ou seja, uma vassoura ou uma caixa de fósforos, por exemplo, perde o seu significado objetivo, simbolizando aquilo que a criança deseja. Esse período coincide com o começo da aquisição da linguagem. A linguagem abre um ‘novo’ mundo para a criança, já que as palavras (substitutas dos acontecimentos e dos objetos) ampliam o rol de relações da criança com o meio. Assim, as ações passam a ser representadas, onde os esquemas de ação (característicos do estágio sensório-motor) ‘abrem espaço’ para os da representação.

A relação entre a linguagem e este ‘início’ do pensamento (representativo) é exposto por Piaget (2001):

A linguagem, permitindo ao sujeito contar suas ações, fornece de uma só vez a capacidade de reconstituir o passado, portanto, de evocá-lo na ausência de objetos sobre os quais se referiram as condutas anteriores, de antecipar as ações futuras, ainda não executadas, e até substituí-las, às vezes, pela palavra isolada, sem nunca realizá-las. Este é o ponto de partida do pensamento. (p. 27)

O uso da linguagem propicia também à criança uma troca de informações com os outros. Devido ao *egocentrismo* (ou seja, o indivíduo ainda ‘não se coloca’ no lugar do outro), o diálogo é praticamente inexistente. Mesmo quando brinca em conjunto com outras crianças, verifica-se que cada criança fala para si sem se interessar com as respostas dos outros. A este fato deve-se denominar de *monólogo coletivo* em vez de conversa ou diálogo.

Nesse período a criança manifesta grande curiosidade por aquilo que a circunda. A todo o momento faz perguntas do tipo: “O que é?”; “Por quê?” Este “por que” não exige apenas uma resposta causal, mas também final, na medida em que ela entende que tudo é orientado para um fim. Mesmo para as coisas que acontecem por acaso, como por exemplo existir montanhas num lugar e não existir noutro, a criança pretende uma justificação final.

Os estudos desenvolvidos por Piaget revelam que a representação do mundo feita por uma criança difere da do adulto. Nos primeiros anos do estágio pré-operatório a criança não entenderá a *Noção de Conservação*. Para investigar a questão da conservação, por exemplo, pode-se utilizar a seguinte situação:

Dispõe-se na mesa, sob o olhar da criança, duas fileiras (A e B) contendo o mesmo número de elementos (fichas vermelhas), conforme apresentado na figura abaixo:

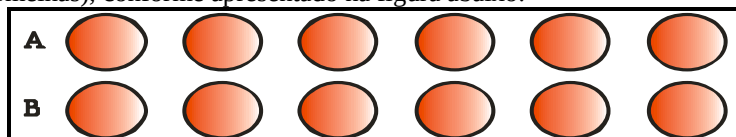


Figura 1 – Noção de Conservação: correspondência um a um (perceptiva).

Após essa primeira visualização, pergunta-se à criança se o número de elementos de ambas as fileiras são iguais. Tendo-se como resposta a afirmação da criança (ou seja, $A = B$), em sua frente, uma das fileiras é alterada, como mostrado a seguir:

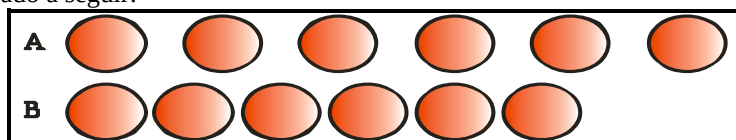


Figura 2 – Noção de Conservação: correspondência um a um (não perceptiva).

Em seguida, pergunta-se à criança se o número de fichas do conjunto A é igual ao do conjunto B.

Quadro – Prova da Noção de Conservação (quantidade). (CARRAHER, 1998)

Conforme Piaget, a criança ainda não ‘conserva a quantidade descontínua/discreta’, pois, em seu raciocínio a reversibilidade ainda não foi construída. O fato das crianças ainda não conservarem quantidades ocorre pela imposição da percepção, de suas experiências pessoais sobre o seu raciocínio, que ainda é pré-operatório (egocêntrico). Ao agir pela intuição³⁶, a criança não estabelece o ‘ir e vir’ mental, não conseguindo, por exemplo, reconstituir mentalmente a fila B. Como o ‘tamanho’ dessa é menor, então, a mesma conclui que contém menos elementos.

A partir dessa reversibilidade (‘ir e vir’ mental) será possível a construção das operações. Tais operações caracterizam o comportamento (condutas) do próximo estágio, a ser denotado no item seguinte.

11.4.3 Estágio operatório concreto (a segunda infância)

O primeiro estágio das operações são as concretas. Tal pensamento operatório deve-se ao desenvolvimento progressivo (o equilíbrio) dos estágios anteriores, nos quais a criança construiu a capacidade de reversibilidade, em oposição à irreversibilidade/centração/intuição. Cronologicamente corresponde (em média) à faixa etária dos 7-8 aos 11-12 anos; intervalo esse correspondente à grande parte dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Como mesmo denota Piaget (2001):

A idade média de sete anos, que coincide com o começo da escolaridade da criança, propriamente dita, marca uma modificação decisiva no desenvolvimento mental. Em cada um dos aspectos complexos da vida psíquica, quer se trate da inteligência ou da vida afetiva, das relações sociais ou da atividade propriamente individual, observa-

³⁶ A intuição representa o pensamento do estágio pré-operatório. Corresponde, cronologicamente, dos 5 aos 8 anos do desenvolvimento mental. Caracteriza-se por não possuir reversibilidade, sendo dominado por centrações, ou seja, há a fixação da atenção (percepção ou representação) num só ponto da totalidade, não acompanhando as transformações realizadas.

se o aparecimento de formas de organizações novas, que completam as construções esboçadas no decorrer do período precedente, assegurando-lhes um equilíbrio mais estável e que também inaugura uma série ininterrupta de novas construções. (p. 40)

Dessa afirmação decorre a importância dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao pleno desenvolvimento das operações concretas. É justamente neste estágio que se inicia a construção das estruturas lógico-matemáticas. O mesmo autor, sobre a constituição da lógica nas crianças, explicita:

Aos 7-8 anos, em média (mas, repetimos, estas idades dependem dos meios sociais e escolares), a criança chega, depois de interessantes fases de transição, cujos detalhes não poderíamos abordar aqui, à constituição de uma lógica e de estruturas operatórias que chamaremos “concretas”. Este caráter “concreto”, por oposição ao formal, é particularmente instrutivo para a psicologia das operações lógicas em geral. Significa que neste nível, que é o dos primórdios de uma lógica propriamente dita, as operações ainda não repousam sobre proposição de enunciados verbais, mas sobre os próprios objetos que elas se limitam a classificar, a seriar, a colocar em correspondência etc. Em outras palavras, a operação nascente ainda está ligada à ação sobre os objetos e à manipulação efetiva, ou simplesmente mentalizada. Contudo, por estarem próximas da ação, estas “operações concretas” já se organizam em estruturas reversíveis, apresentando suas leis de totalidade (por exemplo, as classificações). (PIAGET, 2001, p. 105-106, grifo nosso)

As palavras sublinhadas denotam as necessárias ações a serem realizadas pelas crianças sobre o meio concreto. Classificar, seriar, colocar em correspondência de um para um, de um para muitos, devem se constituir as ações a serem interiorizadas pelas crianças sob a ‘ótica’ da reversibilidade. A experiência (ou seja, a ação direta – e mental – sobre o objeto concreto) necessita fazer parte deste estágio de desenvolvimento mental.

Mais uma vez defende-se a importância da experiência, permitindo à criança construir estruturas de pensamento mais complexas, como a formal (hipotético-dedutiva). Para delimitar/caracterizar as diferenças entre as operações concretas e as formais, Piaget utiliza as noções de *grupo*³⁷ algébrico. Esse autor verifica que no estágio operatório concreto, a criança, ao ‘operar mentalmente’, ainda não utiliza todas as propriedades do grupo; a estas estruturas cognitivas denomina *agrupamento*³⁸. É oportuno esclarecer que as ideias de “grupo” e “agrupamento” relacionam-se com as ações interiorizadas (as operações) que são manipuladas mentalmente pelas crianças. Assim, como as ações (antes de serem interiorizadas/

³⁷ “O “grupo” é, sem dúvida, a mais fundamental das estruturas matemáticas. O sistema dos números inteiros Z fornece-nos um exemplo. Interpretemos os elementos de Z como operadores. Assim $+ 3$ significará “acrescentar 3”, $- 4$ significará “subtrair 4” e 0 significará “nada acrescentar nem subtrair”. Seja então $\circ$ a operação que consiste em compor entre estes dois elementos de Z , assim interpretados segundo as leis ordinárias da aritmética. Ter-se-á, por exemplo:

$$(-4) \circ (+3) = -1$$

Dizer que Z forma um grupo com referência à operação $\circ$ quer dizer que:

1. A todo par de elementos de Z , $\circ$ faz corresponder a um elemento de Z .
2. A operação $\circ$ é associativa.
3. Existe em Z um elemento neutro 0 , tal que qualquer que seja $x \in Z$ tenha-se $x \circ 0 = x$.
4. A todo elemento de x de Z corresponde um elemento inverso y , que é $-x$, e tal que $x \circ y = x \circ (-x)$.” (PIAGET, 1976, p. 85-86)

³⁸ Segundo Battro (1976): “Sugerimos que a noção de agrupamentos surgiu de observações psicológicas relacionadas às *operações concretas*, que as crianças efetuam quando se dedicam a *classificar* ou *seriar* objetos.” (p. 160, grifos do autor). Complementando, Lima (2000) realiza uma interessante abordagem a respeito dos agrupamentos: “Antes de a mente atingir o nível das operações com grupos e redes (e suas combinatórias), já é capaz de *operações concretas* (com os objetos ou com seus símbolos). São essas operações (pré-formais) que Piaget chama “agrupamento” (classificações, seriações, correlatos, substituições, tábua-de-duas-ou-mais-entradas, matrizes, árvores, etc.).” (p. 151-152, grifo nosso).

representadas) foram ‘praticadas inicialmente’ no sensório-motor, então, por transitividade, obtém-se que as operações formais (caracterizadas pelas propriedades do “grupo”) são derivadas do primeiro estágio do desenvolvimento mental. O esboço a seguir salienta a não construção (ainda) de todas as estruturas cognitivas que permitem as realizações das operações de “grupo”.

Mesmo antes de se encontrar no estágio operatório concreto, a criança já é capaz de ordenar uma série de objetos por tamanhos e de comparar dois objetos indicando qual o maior (capacidade de comparação e classificação). No entanto, ainda não é capaz de compreender a propriedade transitiva. Ou seja, se o objeto **A** é maior que o objeto **B** e, se **B** é maior que o objeto **C**, a criança ainda não está apta para concluir que **A** é maior que **C** (isto se deve à falta das estruturas cognitivas características do “agrupamento”, no qual a reversibilidade ainda é ausente neste estágio – do pré-operatório). Nessa etapa, o indivíduo só conclui que **A** é maior que **C** se ambos os objetos são apresentados à criança ‘um ao lado do outro’.

Em contrapartida, no início do estágio das operações concretas, a criança já é capaz de compreender a propriedade transitiva (graças à reversibilidade). Porém, a capacidade de compreensão da propriedade transitiva só ocorre se aplicada a objetos concretos que a criança tenha visto (*concretamente*). Por exemplo, utilizemos o objeto **A** (uma galinha), o objeto **B** (um avestruz) e o objeto **C** (um elefante). Tomando como elementos **A**, **B** e **C**, a criança desta fase consegue compreender a relação: “*se A é menor que B, e se B é menor que C, então A é menor que C*”. Como a criança construiu ‘concretamente’ tais objetos em sua mente (já que os vivenciou, interiorizando a ação – de conhecer – ao nível das operações reversíveis), então ela consegue compreender a transitividade.

No entanto, o indivíduo ‘operatório concreto’ ainda é incapaz de compreender a propriedade transitiva quando aplicada a objetos hipotéticos. Por exemplo, se colocar à criança o problema da seguinte forma: **A** é maior que **B**, e **B** é maior que **C**; qual é maior: **A** ou **C**? Somente quando construir as estruturas cognitivas de “grupo”, a criança conseguirá solucionar esse problema hipotético. Ao conseguir realizar a solução de tal problema hipotético, dá-se ‘início’³⁹ ao estágio seguinte, o das operações formais.

11.4.4 Estágio operatório formal (a adolescência)

Como argumentado anteriormente, no estágio operatório formal, devido à progressiva construção das estruturas cognitivas de classificação, seriação, ordenação, entre outras, o adolescente consegue compor as propriedades operatórias do “grupo”. Em média, essa fase compreende a faixa etária dos 11-12 anos em diante.

A capacidade (construída) do “*ir e vir*” mental desprende-se da recorrência ao concreto, adquirindo a denominada característica lógica-formal. Assim, o adolescente aprende a solucionar problemas estabelecendo um leque de alternativas (*hipóteses*) a serem confrontadas com a realidade (*dedução*), construindo um modo de pensamento semelhante aos adultos que atingiram já tal nível. Neste estágio a linguagem representa a ferramenta mais importante ao indivíduo.

Como mostra Piaget (2001):

Ora, após os 11 ou 12 anos, o pensamento formal torna-se possível, isto é, as operações lógicas começam a ser transpostas do plano da manipulação concreta para o das idéias, expressas em linguagem qualquer (a linguagem das palavras ou dos símbolos matemáticos etc.), mas sem o apoio da percepção, da experiência, nem mesmo da crença. O pensamento formal, é portanto, “hipotético-dedutivo”, isto é,

³⁹ Torna-se oportuno ressaltar que de um estágio a outro se observam comportamentos/conduitas intermediárias (de transição), num movimento contínuo. Assim, não há passagens abruptas.

capaz de deduzir as conclusões de puras hipóteses e não somente de uma observação real. (p. 59, grifo noso)

Convém notar que tal estágio de desenvolvimento depende em grande parte do grau de formação (Educação) que à pessoa foi oportunizado. Muitos adultos, segundo Piaget, nunca chegam a fazer raciocínios formais. Nas sociedades em que não existem escolas formais, nenhum dos seus membros é capaz de raciocinar formalmente pelo fato deste estágio ‘ser’ o fruto das complexas produções intelectuais construídas pelo homem (as Ciências, a Filosofia, a Arte, a Moral etc.).

Em suma, Piaget conclui o seguinte a respeito do desenvolvimento mental:

Como conclusão, pode-se constatar a unidade profunda dos processos que, da construção do universo prático, devido à inteligência sensório-motora do lactente, chega à reconstrução do mundo pelo pensamento hipotético-dedutivo do adolescente, passando pelo conhecimento do universo concreto devido ao sistema de operações da segunda infância. Viu-se como estas construções sucessivas consistem em descentralizações do ponto de vista, imediato e egocêntrico, para situá-lo em coordenações mais ampla de relações e noções, de maneira que cada novo agrupamento terminal integre a atividade própria, adaptando-a a uma realidade mais global. (PIAGET, 2001, p. 65)

1. De que modo o conhecimento dos estágios do desenvolvimento propostos por Piaget pode auxiliar a sua prática pedagógica (de Matemática)? Pense a respeito elaborando um exemplo.

2. Conhecer o processo de construção do conhecimento pelo indivíduo colabora à superação das teses empiristas e racionalistas? Pense a respeito.

11.5 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’

O que foi possível concluir (*assimilar-acomodar*) a partir deste décimo primeiro encontro? Denote suas impressões no quadro abaixo e no início do próximo encontro realize a leitura do mesmo. Escreva, após, as dúvidas provenientes das discussões realizadas.

Dúvidas:

12 DÉCIMO SEGUNDO ENCONTRO

12.1 Um movimento de retomada

No encontro anterior abordou-se a questão do interesse (necessidade) enquanto desencadeador da ação do sujeito sobre o objeto permitindo-lhe o desenvolvimento (cognitivo e afetivo/moral.). Por meio das discussões realizadas, chegou-se à conclusão de que, em sala de aula, o professor deve ‘despertar’ o interesse do aluno à assimilação-acomodação dos conteúdos escolares por meio de situações ‘desequilibradoras’. Também foram denotados os fatores responsáveis pelo desenvolvimento do sujeito, no qual o processo (mecanismo) de *Equilibração*, além de constituir um dos fatores, é o responsável pela coordenação ‘harmônica’ dos demais (maturação orgânica, interação social e experiência física e lógico-matemática).

Visando a uma ‘melhor’ compreensão acerca do processo (mecanismo) de *Equilibração*, no próximo item far-se-á uma breve análise.

12.2 O Mecanismo de Equilibração

Inicialmente, faz-se relevante pontuar que o equilíbrio psicológico – na teoria piagetiana – não é concebido “como um balanceamento de forças em estado de repouso”, mas sim como “compensação proveniente das atividades do sujeito em resposta às perturbações exteriores.” (PIAGET, 2001, p. 88). Mais uma vez, Piaget destaca a imprescindibilidade da ação do sujeito, pois, “ao *maximum* de equilíbrio corresponderá, então, não um estado de repouso, mas um *maximum* de atividades do sujeito que compensarão, de um lado, as perturbações atuais, e, por outro lado, as perturbações virtuais.” (PIAGET, 2001, p. 88).

Neste ponto torna-se oportuno o questionamento: “*O que constitui uma perturbação?*” Uma perturbação é todo obstáculo que não permite ao sujeito assimilar o meio (objeto), ou seja, decorre da não possibilidade de incorporar o meio aos esquemas de ação ou às estruturas de pensamento já construídas. Dependendo do nível dessa perturbação, o sujeito pode ignorá-la ou agir sobre a mesma compensando-a. Piaget (1995) denota 2 situações observadas nos níveis elementares em relação a tal compensação:

Nos níveis elementares, as compensações podem consistir, apenas, em eliminar o obstáculo, negligenciando-o ou deformando a representação, e isto já constitui um início de construção, visto que uma reação negativa é um esboço de negação. Ou então, ao contrário, a compensação consiste em modificar o esquema de assimilação e é, então, construtiva, no sentido de uma diferenciação, exigindo esta, em seguida, novas integrações. (PIAGET, 1995, p. 284-285)

É possível observar, novamente, o papel da assimilação e da acomodação ao desenvolvimento do sujeito, pois, uma compensação construtiva implica em modificação do esquema de assimilação, ou seja, em acomodação. Conforme Piaget (2001):

Levando-se em conta, então, a interação fundamental entre fatores internos e externos, toda conduta é uma *assimilação* do dado a esquemas anteriores (assimilações a esquemas hereditários em graus diversos de profundidade) e toda conduta é, ao mesmo tempo, *acomodação* destes esquemas à situação atual. Daí resulta que a teoria do desenvolvimento apela, necessariamente, para a noção de equilíbrio, pois toda conduta tende a assegurar equilíbrio entre fatores internos e externos ou, mais em geral, entre assimilação e a acomodação. (PIAGET, 2001, p. 89)

Um ponto importante a destacar acerca deste processo (mecanismo) de *Equilibração* é que a sua ocorrência (efetivação) não conduzirá ao ‘equilíbrio anterior’, mas a um estado

melhor daquela ao qual se partiu, construindo ‘formas’ melhores de equilíbrio, denominado por Piaget (1976) como **Equilibração Majorante**. Sobre tal ideia, o autor observa o seguinte:

O conceito central que nos parece impor-se na explicação do desenvolvimento cognitivo [...] é, pois, o de um melhoramento das formas de equilíbrio, ou seja, de uma “equilibração majorante”. Nosso esforço consistiu em procurar-lhes os mecanismos constituindo o problema em explicar suas duas dimensões inseparáveis: a compensação das perturbações responsáveis pelo desequilíbrio motivador da pesquisa e a construção das novidades que caracterizam a majoração. (PIAGET, 1976, p. 156)

Assim, todo desequilíbrio representa uma possibilidade ao desenvolvimento do sujeito por ‘impulsioná-lo’ a ultrapassar o seu estágio atual por meio de uma reequilibração. Neste aspecto podemos remeter a discussão à questão do interesse (necessidade), já salientado em item anterior. Conforme Piaget (1976), a fecundidade do desequilíbrio,

[...] se mede pela possibilidade de superá-los – quer dizer, sair deles. É, pois, evidente que a fonte do progresso deve ser procurada na reequilibração, naturalmente, no sentido, não de um retorno à forma anterior de equilíbrio, cuja insuficiência é responsável pelo conflito ao qual esta equilíbrio provisória chegou, mas de um melhoramento dessa forma precedente. (p. 19)

Vale destacar, ainda, duas diferentes formas de equilíbrio existentes, sendo a primeira referente às formas inferiores de equilíbrio na qual a compensação será em resposta às perturbações atuais. Já, a segunda, diz respeito às estruturas superiores ou operatórias donde a compensação será em resposta às perturbações virtuais. Nesse sentido, Piaget (2001) destaca:

No caso das formas inferiores de equilíbrio, sem estabilidade (formas senso-motoras e perceptivas), as perturbações consistem em modificações reais e atuais do meio, às quais as atividades compensatórias do sujeito respondem, então, como podem, sem sistema permanente [...].

No caso das estruturas superiores ou operatórias, por outro lado, as perturbações, às quais o sujeito responde, podem consistir em modificações virtuais, isto é, nos casos *optimum* podem ser imaginadas e antecipadas pelo sujeito sob forma de operações diretas de um sistema (operações exprimindo transformações em sentido inicial qualquer); neste caso, as atividades compensatórias consistirão, igualmente, em imaginar e antecipar as transformações, mas no sentido inverso (operações recíprocas ou inversas de um sistema de operações reversíveis). (p. 97)

Um exemplo desta ‘passagem’ das formas inferiores de equilíbrio às estruturas superiores ou operatórias é citado por Piaget (2001):

Um exemplo análogo de equilíbrio cognitivo será o do processo que chega às noções de conservação (tal como a conservação da matéria no caso da transformação de uma bolinha de argila em salsicha). A estratégia mais provável no início é a centralização (representativa e não perceptiva) sobre apenas uma das características transformadas; por exemplo, a quantidade aumenta porque o objeto se alonga. Alcançando este resultado, a estratégia que se torna, portanto, a mais provável, consiste em observar a segunda característica transformada, e em supor que a quantidade diminua porque a salsicha se adelgaça. Este estado atinge uma nova estratégia, que se torna a mais provável em função das duas precedentes (a segunda, podendo ser muito rapidamente superada). Esta estratégia consiste em oscilar entre as duas dimensões e em observar a solidariedade (sem proporções exatas) do alongamento da salsicha e de seu adelgaçamento. Esta terceira reação leva a uma acentuação, nas transformações, em oposição às configurações estáticas, que eram as únicas consideradas no início. Segue-se, neste caso, uma quarta estratégia, através da

13 DÉCIMO TERCEIRO ENCONTRO

13.1 Um movimento de retomada da Epistemologia Genética

Nos 4 últimos encontros foram discutidos os aspectos centrais da Epistemologia Genética. Partiu-se da importância da proposição de situações problemas ao aluno de modo a desencadear a sua ação sobre o objeto do conhecimento. Ao defender/comprovar a importância da atividade do sujeito à construção do conhecimento, Jean Piaget superou as correntes epistemológicas empiristas e racionalistas que eram (são) contrárias a essa ideia. Isso, pois para essas duas correntes epistemológicas o sujeito é considerado um ser passivo no qual o conhecimento irá depender da pressão exercida pelo meio sobre o sujeito (Empirismo) ou do ‘desabrochar’ do conhecimento pré-formado no sujeito (Racionalismo).

Para subsidiar a hipótese acerca da importância da atividade do sujeito, sendo tal atividade desencadeada por uma necessidade (desequilíbrio), Piaget elaborou a teoria da assimilação. Segundo tal teoria o que permite ao sujeito agir-interagir com o meio são duas funções indissociáveis herdadas geneticamente: a organização e a adaptação. Essa última advém do equilíbrio entre a assimilação (incorporação dos elementos do meio aos esquemas ou às estruturas de pensamento do sujeito já construídas) e acomodação (modificação dos esquemas que possibilita a incorporação de ‘novos’ elementos), sendo ambas complementares.

Dando continuidade, abordou-se a questão da escola responder a uma necessidade (interesse) na qual se discutiu que, em cada momento da vida do sujeito, há interesses diferentes cuja principal função (invariável) do interesse é desencadear no sujeito a sua ação. Para estudar os diferentes interesses, fez-se uma breve análise acerca das principais condutas observadas desde o nascimento até a adolescência, separando-as em estádios. Em cada estádio, observou-se um tipo de inteligência e ou pensamento, a saber: inteligência prática (estádio sensório-motor), pensamento intuitivo – centrado/irreversível (estádio pré-operatório), pensamento operatório – reversível ‘apoiado’ no plano concreto (estádio operatório concreto) e pensamento operatório formal – reversível ‘apoiado’ no plano hipotético-dedutivo (estádio operatório formal).

Visando ‘complementar’ a ideia acerca do equilíbrio entre a assimilação e acomodação, ressaltou-se o mecanismo de equilíbrio. Para tanto, definiu-se o equilíbrio – enquanto processo – como uma compensação proveniente das atividades do sujeito em resposta às perturbações, ou seja, ao ser desequilibrado o sujeito pode vir a compensar tal conflito, modificando os seus esquemas de assimilação. Utiliza-se o termo ‘pode vir’, pois dependendo do nível do desequilíbrio o sujeito pode ignorá-lo, não ‘entrando/concluindo’ esse movimento compensatório. Por fim, discutiu-se também que o mecanismo de equilíbrio, além de constituir um dos fatores responsáveis pelo desenvolvimento do indivíduo, também coordena harmonicamente os outros três (fatores): a maturação orgânica, a interação social e as experiências (física e lógico-matemática).

13.2 Retomando os ‘Desafios para casa: Estatística Descritiva’

No 10.º encontro foi solicitada a solução acerca de alguns desafios versando sobre a Estatística Descritiva. Mediante a análise das respostas elaboradas pelas participantes, faz-se necessário apresentar as soluções dos desafios 1, 2, 3 e 4, pois os mesmos não foram realizados por algumas das participantes e/ou foram realizados de modo incorreto. Além disso, em relação à alternativa b) do 2.º desafio, as participantes, embora tenham dado uma resposta correta, não utilizaram uma ‘justificativa’ matemática valendo-se do Desvio Padrão.

DESAFIO (1): Um candidato tirou as seguintes notas em um concurso público prestado: 7,3; 6,5; 9,1; 8,2; 7,3; 6,4 e 9. A Média Aritmética, a Mediana e a Moda referente às notas desse candidato são,

respectivamente:

Solução: Para o cálculo da Média Aritmética utiliza-se a seguinte expressão:

$$\bar{x} = \frac{6,4 + 6,5 + 7,3 + 7,3 + 8,2 + 9 + 9,1}{7} \cong 7,68 \cong 7,7$$

Em relação à obtenção da Mediana, como o número de elementos é ímpar ($n = 7$), então, para localizar o elemento central ordenado que divide a distribuição ao meio basta adicionar uma unidade ao número de elementos ($n = 7$), dividindo o total por 2.

$$\frac{7 + 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Assim, o 4.º elemento ordenado (7,3) – que divide a distribuição ao meio – representa a Mediana.

Por fim, para a obtenção da Moda é necessário observar se há elementos que se repetem na distribuição. Como o elemento 7,3 foi o único a se repetir duas vezes, então esse representa a Moda.

Assim, a alternativa correta corresponde à letra **c)** 7,7; 7,3; 7,3.

DESAFIO (2): Em um treinamento de salto em altura, os atletas realizaram 4 saltos cada um. Observe as marcas obtidas por três atletas e responda as questões.

Atleta A: 148 cm, 170 cm, 155 cm e 131 cm.

Atleta B: 145 cm, 151 cm, 150 cm e 152 cm.

Atleta C: 146 cm, 151 cm, 143 cm e 160 cm.

- Qual deles obteve a melhor Média Aritmética?
- Para auxiliar os atletas a melhorarem seus desempenhos, faz-se necessário investigar o quão regular encontram-se os resultados obtidos por eles. Nesse sentido, qual dos atletas acima apresentou melhor regularidade, ou seja, melhor homogeneidade? E qual deles apresentou a ‘pior’ regularidade?

Solução: a) Inicialmente faz-se necessário o cálculo das Médias Aritméticas obtidas pelos 3 atletas:

$$\text{Atleta A: } \bar{x}_A = \frac{148+170+155+131}{4} = \frac{604}{4} = 151 \text{ cm}$$

$$\text{Atleta B: } \bar{x}_B = \frac{145+151+150+152}{4} = \frac{598}{4} = 149,5 \text{ cm}$$

$$\text{Atleta C: } \bar{x}_C = \frac{146+151+143+160}{4} = \frac{600}{4} = 150 \text{ cm}$$

Analisando as marcas (de salto) obtidas pelos atletas e suas respectivas Médias Aritméticas, conclui-se que a melhor Média Aritmética foi obtida pelo atleta B, já que o valor (149,5 cm) melhor representa o centro da distribuição dos saltos.

b) Embora as participantes respondessem corretamente, salientando que o atleta B foi o que apresentou melhor regularidade e o atleta A a pior, não justificaram matematicamente suas respostas utilizando o Desvio Padrão. Assim, será apresentado o cálculo do Desvio Padrão para cada uma das distribuições:

$$\text{Atleta A: } V_A = \frac{(148-151)^2 + (170-151)^2 + (155-151)^2 + (131-151)^2}{4} = \frac{9+361+16+400}{4} = \frac{786}{4} = 196,5$$

$$DP = \sqrt{196,5} \cong 14 \text{ cm}$$

$$\text{Atleta B: } V_B = \frac{(145-149,5)^2 + (151-149,5)^2 + (150-149,5)^2 + (152-149,5)^2}{4} = \frac{20,25+2,25+0,25+6,25}{4} = \frac{29}{4} = 7,25$$

$$DP = \sqrt{7,25} \cong 2,7 \text{ cm}$$

$$\text{Atleta C: } V_C = \frac{(146-150)^2 + (151-150)^2 + (143-150)^2 + (160-150)^2}{4} = \frac{16+1+49+100}{4} = \frac{166}{4} = 41,5$$

$$DP = \sqrt{41,5} \cong 6,4 \text{ cm}$$

Como o menor valor de Desvio Padrão foi obtido na distribuição do atleta B, então esse apresentou a melhor regularidade (homogeneidade). Em contrapartida, o maior valor foi obtido na distribuição do atleta A, indicando a ‘pior’ regularidade (heterogeneidade).

DESAFIO (3): Considere sete números cuja Média Aritmética é 6. Adicionando um número a esse conjunto, a ‘nova’ Média Aritmética é 5,5. O número adicionado é:

Solução: No referido problema é feita uma ‘comparação’ entre duas Médias Aritméticas ao ocorrer o acréscimo de um elemento no conjunto inicial. Em seguida, solicita-se a descoberta desse número acrescentado. Vamos considerar os 7 números do conjunto inicial como sendo representados pela seguinte notação:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$$

Sabe-se que a Média Aritmética destes 7 números é 6. Acrescentando-se um elemento (x_8) ao conjunto inicial, obtém-se a ‘nova’ Média Aritmética (5,5). Por meio das expressões abaixo é possível calcular as somatórias dos 7 números (do conjunto inicial) e também dos 8 números (após o acréscimo do elemento x_8):

<u>SITUAÇÃO INICIAL</u>	<u>ACRÉSCIMO de UM NÚMERO</u>
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$ $6 = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$ $\sum_{i=1}^7 x_i = 6 \times 7$ $\sum_{i=1}^7 x_i = 42$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$ $5,5 = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$ $\sum_{i=1}^8 x_i = 5,5 \times 8$ $\sum_{i=1}^8 x_i = 44$
Para descobrir o número adicionado (x_8) basta fazer a diferença entre os resultados das somatórias encontradas. Isso, pois a diferença entre as mesmas foi devido ao acréscimo do número em questão. $x_8 = \sum_{i=1}^8 x_i - \sum_{i=1}^7 x_i$ $x_8 = 44 - 42 = 2$ Logo, o número acrescentado (x_8) equivale a 2 e o item correto é o d).	

DESAFIO (4): No desafio anterior, qual número deve ser adicionado ao conjunto inicial (dos sete números) para que a Média Aritmética permaneça a mesma, ou seja, igual a 6?

Solução: Utilizando o raciocínio de modo análogo ao desafio anterior, tem-se agora a seguinte situação:

<u>SITUAÇÃO INICIAL</u>	<u>ACRÉSCIMO de UM NÚMERO DE MODO A PERMANECER A MESMA MÉDIA ARITMÉTICA</u>
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$ $6 = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$ $\sum_{i=1}^7 x_i = 6 \times 7$ $\sum_{i=1}^7 x_i = 42$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$ $6 = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$ $\sum_{i=1}^8 x_i = 6 \times 8$ $\sum_{i=1}^8 x_i = 48$
Para descobrir o número adicionado (x_8) basta fazer a diferença entre os resultados das somatórias encontradas. Isso, pois a diferença entre as mesmas foi devido ao acréscimo do número em questão. $x_8 = \sum_{i=1}^8 x_i - \sum_{i=1}^7 x_i$ $x_8 = 48 - 42 = 6$ Portanto, o número acrescentado (x_8) equivale a 6 e o item correto é o c).	

13.3 Retomando o Tratamento da Informação

Como já esboçado anteriormente, além da Estatística, constituem o bloco ‘Tratamento da Informação’ a Probabilidade e a Combinatória. No entanto, antes da abordagem dos conceitos pertinentes a tais áreas, faz-se oportuno uma discussão acerca do entendimento das participantes sobre as mesmas. Desse modo, tente se recordar dos saberes experienciais – vivenciados por você durante a Educação Básica – registrando, nos quadros abaixo, o que você entende por Probabilidade e Combinatória.

Probabilidade:

Combinatória:

13.3.1 Alguns desafios envolvendo Combinatória e Probabilidade

Abaixo constam alguns desafios envolvendo o pensamento combinatório e probabilístico. Individualmente, tente resolvê-los do modo que julgarem mais convenientes.

1. Numa lanchonete há 4 tipos de sanduíches, 5 tipos de sucos e 2 tipos de sorvetes. De quantas maneiras diferentes podemos tomar um lanche composto de 1 sanduíche, 1 suco e 1 sorvete?

2. Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?

3. Ao jogarmos um dado, qual é a probabilidade de sair um número maior do que 3?

4. Numa caixa opaca estão 7 bolas, cada uma delas numeradas com um número de 1 a 7. Podemos representá-las conforme denotado abaixo:

1

2

3

4

5

6

7

a) Tirou-se uma bola ao acaso. O que é mais provável sair, uma bola com um número par ou com um número ímpar? Qual é o número que indica a probabilidade de sair um número par? E a probabilidade de sair um número ímpar?

b) Se colocarmos na caixa uma bola com o número 8, qual será a ‘nova’ resposta em relação à questão anterior?

5. No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos, qual é a probabilidade de não sair soma 5?

6. Qual(s) desafio(s) você achou fácil? E difícil? Justifique sua resposta.

14 DÉCIMO QUARTO ENCONTRO

14.1 Um movimento de retomada

No encontro anterior, além da discussão referente à solução dos desafios envolvendo a Estatística Descritiva, deu-se início à investigação a respeito do entendimento das participantes acerca da Combinatória e da Probabilidade, sendo as mesmas pertencentes e constituintes do bloco ‘Tratamento da Informação’. Num primeiro momento, as participantes escreveram sobre o que entendiam por Combinatória e Probabilidade. As respostas obtidas apresentam-se no quadro abaixo:

Entendimento acerca da Probabilidade e da Combinatória construído durante a Educação Básica.	
PARTICIPANTE	RESPOSTA
P-2	Probabilidade: Identificar a quantidade de vezes que algo pode ou não ocorrer. Por exemplo: - chance de ganhar na mega-sena - de dar cara ou coroa ao lançar uma moeda.
	Combinatória: São as possibilidades de combinar elementos Por exemplo: Roupas; comidas.
P-4	Probabilidade: São chances de algo acontecer ou não hipóteses
	Combinatória: São combinações, permutações: exemplo eu tenho uma saia azul e uma rosa e tenho 3 blusas de cores diferentes quantas vezes eu vou conseguir usar uma saia e uma blusa diferente, acho que seria isso
P-5	Probabilidade: Se refere a chance de que algo aconteça. Referente a um elemento dentro de inúmeros elementos Por exemplo: a probabilidade de chover amanhã é de 50% pois pode chover ou não chover.
	Combinatória: Refere-se a quantidade de combinações que podem ser realizadas com um número x de elemento.
P-7	Probabilidade: Me recordo muito pouco de ter estudado sobre isso. Mas acredito que seja a possibilidade ou chance de uma determinada coisa acontecer ou ocorrer, como por exemplo um jogo de loteria.
	Combinatória: Também não consigo me recordar de quando eu estudei sobre esse assunto. A combinatória é por exemplo, quando temos mais de uma blusa e podemos combinar com uma calça.
P-8	Probabilidade: Qual a chance (quantidade) de sair ou pegar certo objeto.
	Combinatória: Quantas combinações são possíveis de realizar com determinados objetos.

1. O que é possível concluir por meio do referido quadro? Registre abaixo a sua resposta para posterior discussão.

Visando dar continuidade à referida investigação, foi solicitada a solução de alguns desafios envolvendo a Combinatória e a Probabilidade. Observe no próximo item uma possível solução para alguns desses desafios e realize um ‘confronto’ entre tais soluções e as elaboradas por você.

14.2 Retomando alguns desafios envolvendo Combinatória e Probabilidade

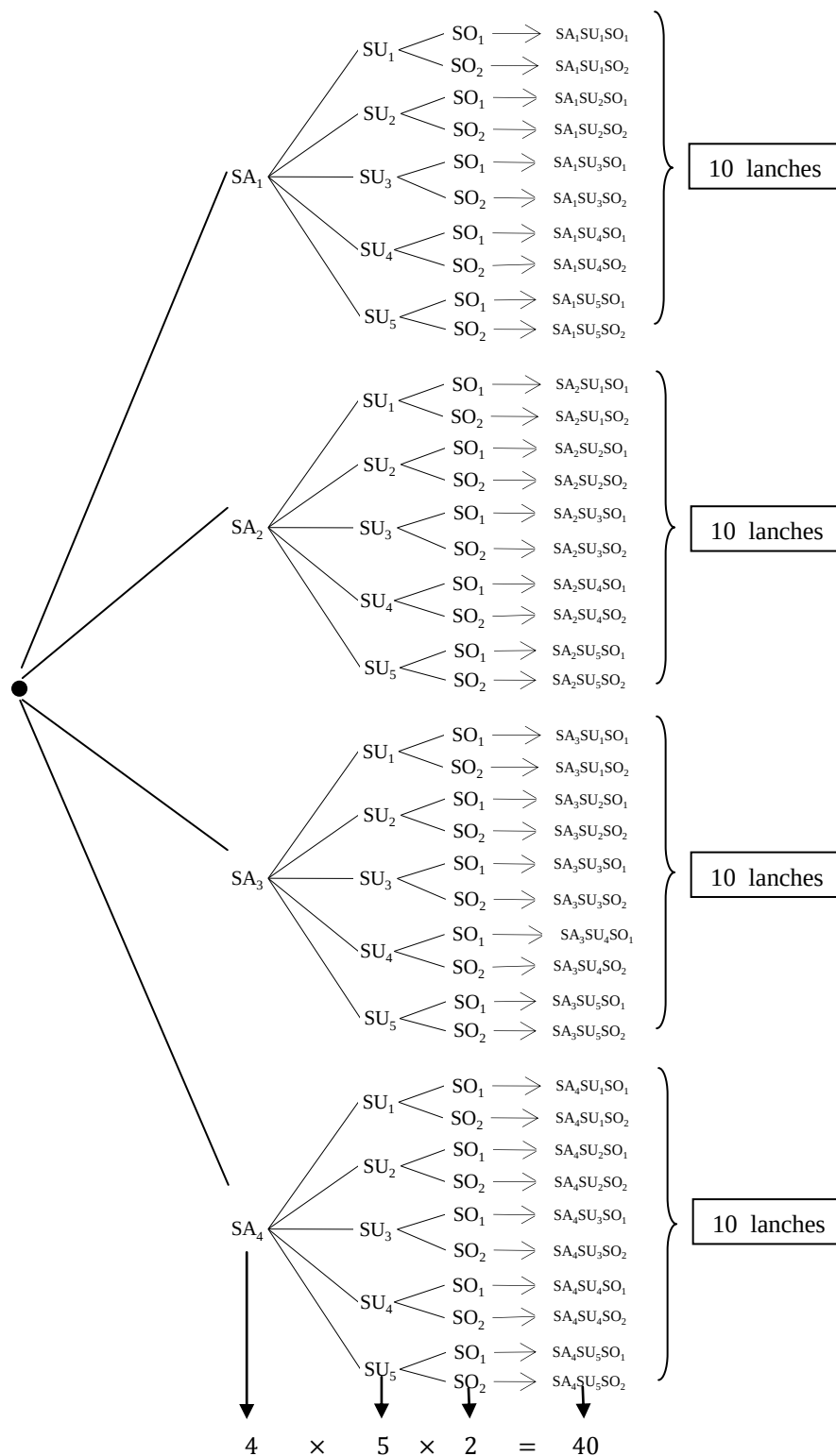
DESAFIO (1): Numa lanchonete há 4 tipos de sanduíches, 5 tipos de sucos e 2 tipos de sorvetes. De quantas maneiras diferentes podemos tomar um lanche composto de 1 sanduíche, 1 suco e 1 sorvete?

Solução: O problema solicita todas as maneiras possíveis para se formar um lanche composto de 1 sanduíche, 1 suco e 1 sorvete. Para tanto, a lanchonete disponibiliza 4 tipos de sanduíches, 5 tipos de sucos e 2 tipos de sorvetes.

Consideremos:

- SA como representando o conjunto dos sanduíches: $SA = \{SA_1, SA_2, SA_3, SA_4\}$;
- SU como representando o conjunto dos sucos: $SU = \{SU_1, SU_2, SU_3, SU_4, SU_5\}$;
- SO como representando o conjunto dos sorvetes: $SO = \{SO_1, SO_2\}$.

No Diagrama de Árvore (ou Árvore de Possibilidades) denotado abaixo é possível visualizar todas as maneiras possíveis à constituição do referido lanche:

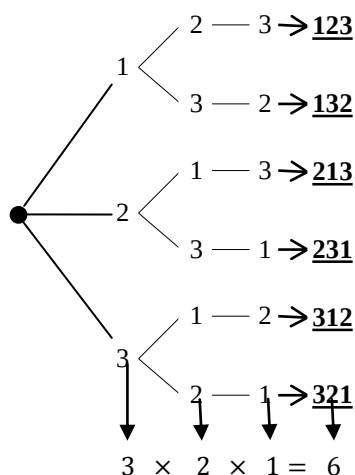


R : Há 40 possibilidades diferentes de se tomar um lanche constituído de 1 sanduíche, 1 suco e 1 sorvete. Assim,

um cliente que frequentar a lanchonete 40 dias tem a possibilidade de tomar 1 lanche diferente por dia.

DESAFIO (2): Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?

Solução: O problema solicita a formação de números de 3 algarismos, ou seja, que ‘ocupem’ a posição da centena, dezena e unidade. Novamente faz-se possível valer-se do Diagrama de Árvore para facilitar a solução:



Consideremos o conjunto formado pelos três algarismos {1, 2 e 3}. Sabe-se que no número a ser constituído não é permitida a repetição dos algarismos. Assim, na ordem das centenas é possível o algarismo 1, 2 ou 3, sendo observadas 3 possibilidades. Já, para a ordem das dezenas só é possível a utilização de dois algarismos, pois, um dentre os três do conjunto já foi usado na ordem da centena. Por exemplo, caso a centena seja ocupada pelo algarismo 1, então, restam 2 possibilidades – os algarismos 2 e 3. Por fim, para a ordem da unidade resta apenas 1 algarismo, pois os outros dois foram utilizados na ordem da centena e da dezena. No exemplo anterior, considerando a centena ocupada pelo algarismo 1 e a dezena pelo algarismo 2 resta apenas 1 possibilidade, ou seja, a unidade deverá ser constituída pelo algarismo 3.

R: É possível formar 6 números diferentes de três algarismos com os algarismos 1, 2 e 3.

DESAFIO (3): Ao jogarmos um dado, qual é a probabilidade de sair um número maior do que 3?

Solução: Consideremos um dado em cujas faces estão representadas os seguintes números: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Assim, o conjunto de todos os resultados possíveis ao se jogar o dado é {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Para que saia um número maior que 3, então, faz-se necessária a ‘saída’ das faces 4, 5 ou 6. Logo, há 3 possibilidades em 6 (do total do conjunto dos resultados possíveis).

R: A probabilidade de sair um número maior do que 3 é $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$ ou 50%.

DESAFIO (4): Numa caixa opaca estão 7 bolas, cada uma delas numeradas com um número de 1 a 7. Podemos representá-las conforme denotado abaixo:



a) Tirou-se uma bola ao acaso. O que é mais provável sair, uma bola com um número par ou com um número ímpar? Qual é o número que indica a probabilidade de sair um número par? E a probabilidade de sair um número ímpar?

b) Se colocarmos na caixa uma bola com o número 8, qual será a ‘nova’ resposta em relação à questão anterior?

Solução: a) A caixa opaca é constituída pelo seguinte conjunto (TOTAL) de 7 bolas numeradas: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. É possível separar tal conjunto nos subconjuntos abaixo:

NÚMERO PAR: {2, 4, 6}

NÚMERO ÍMPAR: {1, 3, 5, 7}

A chance de sair, ao acaso, uma bola par é de 3 possibilidades em 7. Já, no caso de uma bola ímpar, a chance é de 4 possibilidades em 7.

R: É mais provável que seja tirada uma bola ímpar, sendo a sua probabilidade de $\frac{4}{7}$ ou $\sim 57,14\%$. Já, a probabilidade de sair uma bola par é de $\frac{3}{7}$ ou $\sim 42,86\%$. Percebe-se que, mesmo sendo menos provável a retirada de uma bola par, não é impossível a sua ocorrência.

R: A probabilidade de sair uma bola par ou ímpar é de $\frac{4}{8}$ ou $\frac{1}{2}$ ou 50%. Assim, as chances são as mesmas.

Solução: Antes de pensar a respeito da probabilidade de não sair soma 5, é necessário obter todos os possíveis pares constituídos pelas faces dos dois dados perfeitos lançados simultaneamente. No Diagrama denotado abaixo observam-se todos os 36 possíveis pares:

O problema solicita a probabilidade de não sair soma 5 no lançamento simultâneo de dois dados, então, inicialmente, faz-se importante contar os pares cuja soma resulta em 5. Os mesmos encontram-se no subconjunto abaixo:

Por outro lado, os demais pares não pertencentes ao subconjunto ‘Soma 5’ constituem as outras possibilidades de não sair soma 5. Como há 36 possíveis pares, então, o subconjunto formado pelos pares cuja soma não é 5 possui $36 - 4 = 32$ pares.

R: A probabilidade de não sair soma 5 é de $\frac{32}{36}$ ou $\frac{8}{9}$ ou $\sim 89\%$. Embora a chance de obter um par cuja soma seja 5 é pequena não significa que a mesma é impossível.

1. Em relação ao Desafio (5), é possível obter todos os possíveis pares advindos do lançamento simultâneo de dois dados perfeitos por meio do Diagrama de Árvore (Árvore de Possibilidades)? Em caso afirmativo, construa-o abaixo:

14.3 Uma breve reflexão sobre a Combinatória e a Probabilidade e seu ensino

Conforme já ressaltado, constituem o bloco ‘Tratamento da Informação’ a Estatística, a Combinatória e a Probabilidade. Para Lopes (2003):

A Combinatória, a Probabilidade e a Estatística inter-relacionam-se, proporcionando uma filosofia do azar de grande alcance para a compreensão do mundo atual e capacitam pessoas a enfrentarem tomada de decisões, quando somente dispõem de dados afetados pela incerteza, situações comuns em nosso cotidiano. (p. 53)

Ao se referir à ‘filosofia do azar’, a autora faz referência a outra possibilidade de ‘significar’ a Matemática, ou seja, como uma Matemática do ‘*Talvez*’, do ‘*Possível*’ (MUNIZ e GONÇALVES, 2006). Tal filosofia vem rebater a ideia de que a Matemática caracteriza-se apenas pela ‘*Certeza*’, pelo ‘*Determinismo*’. Por exemplo, durante o lançamento de um dado perfeito ‘*Talvez*’ saia a face 5, não sendo plausível afirmar com ‘*Certeza*’ a saída de tal face. Segundo Rodrigues (2011) essas, entre outras concepções equivocadas, tornam-se uma barreira ao ensino da Probabilidade, sendo necessário desde os anos iniciais da Educação Básica o professor ‘chamar’ a atenção do aluno para a noção do ‘*Acaso*’, da ‘*Incerteza*’.

Inúmeras pesquisas – (CARVALHO, 2004; CARVALHO, 2005; COSTA, 2004; COUTINHO e GONÇALVES, 2003; ESTEVES, 2001; LOPES, 2006a; LOPES, 2006; MIGUEL e MAGINA, 2003; PAMPLONA, 2006; RODRIGUES, 2006; entre outras) – apontam que a construção/desenvolvimento dos conceitos acerca da Combinatória e da Probabilidade dá-se mediante a proposição de situações problemas nas quais o aluno sinta-se desafiado a ‘descobrir’ as possibilidades de ocorrência de um determinado ‘*Evento Aleatório*’ bem como as maneiras de ‘*Combinar*’ e ‘*Ordenar*’ diferentes elementos.

Nesse contexto torna-se pertinente destacar a necessidade da AÇÃO-ATIVIDADE do sujeito sobre o objeto à construção do conhecimento, nos remetendo – novamente – à teoria de Piaget. Em sala de aula, o estudante deve ser desafiado a pensar sobre diferentes maneiras de **CONTAGEM** já que isso lhe oportunizará o desenvolvimento do pensamento combinatório, bem como ser desafiado a pensar sobre a **POSSIBILIDADE** da ocorrência de fenômenos naturais e produzidos pelo homem o que corroborará ao desenvolvimento do pensamento probabilístico.

Complementando o já exposto, Lopes (2003) destaca o seguinte a respeito da abordagem da Combinatória:

A Combinatória requer uma abordagem centrada na resolução de problemas, com origens diversificadas. Algumas propostas devem envolver a possibilidade de se obter a solução diretamente pela contagem. Outras, devem possibilitar aos alunos identificação de categorias nas quais a situação-problema pode-se classificar adequadamente. (p. 63)

As categorias denotadas se referem aos tipos de agrupamentos a serem feitos pelo estudante, tais como os arranjos, as combinações e as permutações⁴⁰. Ainda sobre o raciocínio combinatório, a autora pontua:

O raciocínio combinatório refere-se ao pensar sobre operações combinatórias que se definem frente às situações aleatórias e à enumeração do espaço amostral de todo experimento composto. A combinatória desempenha um papel relevante no desenvolvimento das capacidades lógicas do sujeito.

Batanero et al (1994) destacam Piaget, quando este considera que a compreensão do azar passa pelas operações combinatórias – fundamentais para o pensamento formal. Esses autores citam Stanley (1946), ao afirmar que a Combinatória não deve ser

⁴⁰ Um estudo mais detalhado acerca destes tipos de agrupamentos far-se-á em momento posterior.

considerada somente um ramo das ciências matemáticas, pois está relacionada à quase todas as formas de conhecimentos úteis que a mente humana pode empregar ou desenvolver.

A diversidade de fenômenos presente na natureza, por intervenção humana ou não, dá origem a um grande número de causas produzidas por um acontecimento que poderá ser difícil de enumerar. A Combinatória auxilia-nos a elencar todos os diferentes modos de ordenar ou combinar as possibilidades de um evento. A partir dessa visão é que podemos perceber as amplas relações que o raciocínio combinatório pode estabelecer com a Física, a Química, a Biologia, a Economia e muitas outras.

A arte combinatória nos servirá como instrumento para confeccionarmos as combinações dos possíveis. Assim, poderemos calcular as Probabilidades das hipóteses relativas aos dados disponíveis, estabelecendo uma estreita conexão entre a Probabilidade e a Combinatória. (LOPES, 2003, p. 67)

Além de observar a estreita conexão entre a Combinatória e a Probabilidade, a autora destaca o seguinte acerca do pensamento probabilístico:

As investigações a respeito do pensamento probabilístico permitem que se façam recomendações sobre a prática educativa desse tema. Têm-se discutido sobre a necessidade de se realizar experimentos de simulação – nos quais apareçam seqüências aleatórias –, de se dar importância à utilização de vocabulário adequado para descrever e quantificar situações relacionadas ao azar e de se confeccionar tabelas de freqüências e gráficos para representação do comportamento de fenômenos aleatórios. Batanero e Serrano (1995) afirmam que a introdução gradual dos conceitos e da notação probabilística servirá para explicar, matematicamente, as regularidades observadas nos dados recolhidos.

O desenvolvimento do pensamento probabilístico requer o reconhecimento de situações de acaso na vida cotidiana e no conhecimento científico, bem como, a formulação e comprovação de conjecturas sobre o comportamento de fenômenos aleatórios simples e a planificação e realização de experiências nas quais se estude o comportamento de fatos que abarquem o azar. A partir dessas considerações, pode-se organizar situações didáticas que envolvam a observação de experimentos, com seus respectivos registros e análises, possibilitando a integração entre a Probabilidade e a Estatística. Nessa conjunção é que se terá o desenvolvimento do raciocínio estocástico. (LOPES, 2003, p. 64-65)

A referida citação denota a relação existente entre a Estatística e a Probabilidade, caracterizando o raciocínio estocástico como proveniente da ‘junção’ entre essas duas áreas.

Em suma, a construção da Estatística, Probabilidade e Combinatória mostra-se necessária à compreensão da realidade, pois o sujeito terá ‘ferramentas’ para interpretar os fenômenos ocorridos na natureza ou causados pelo homem.

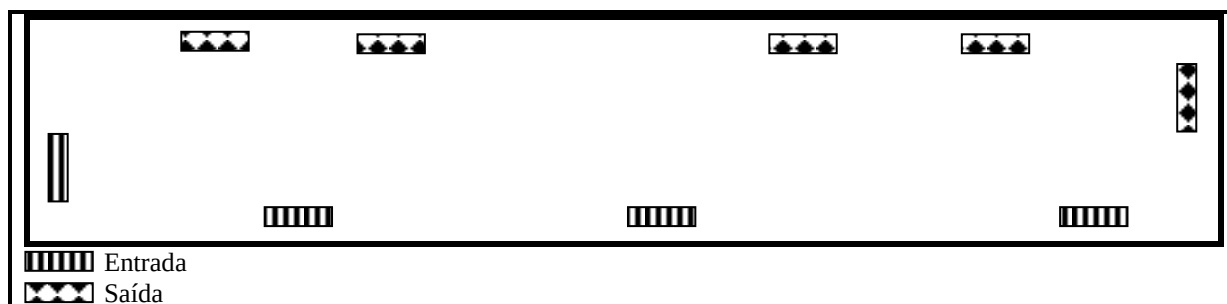
14.4 Problematicando: Combinatória

Leia atentamente a seguinte situação problema:

A professora de Matemática Sueli, visando abordar noções envolvendo o pensamento combinatório solicitou aos seus alunos do 9.º ano do Ensino Fundamental que pensassem acerca do seguinte problema:

Eduarda e sua família foram a um parque de diversões. No parque havia 4 entradas e 5 saídas. De quantos modos diferentes ela pode entrar e sair desse parque?

Em seguida, a professora Sueli colocou na lousa a seguinte representação no intuito de auxiliar os alunos a pensarem sobre o referido problema:



1. De que modo você acredita que os alunos da professora Sueli resolveriam tal desafio?

2. Após discutir as soluções encontradas pelos seus alunos, a professora Sueli pediu aos mesmos que pensassem sobre tal situação modificando o número de entradas para 20 e o número de saídas para 25. Qual seria a ‘nova’ resposta a ser dada pelos estudantes? Há algum princípio matemático que permite a solução de desafios deste tipo? Pense a respeito.

14.5 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’

O que foi possível concluir (*assimilar-acomodar*) a respeito da Combinatória e da Probabilidade? Tente sintetizar as ideias, relacionando os assuntos abordados. Escreva, após, as dúvidas provenientes das discussões realizadas.

Dúvidas:

15 DÉCIMO QUINTO ENCONTRO

15.1 Um movimento de retomada

No encontro anterior houve a discussão a respeito dos desafios envolvendo a Combinatória e a Probabilidade. Para tanto, as participantes compararam / ‘confrontaram’ as suas respostas com as soluções propostas pelo Pesquisador/Participante. Após a apresentação do Diagrama de Árvore (ou Árvore de Possibilidades) utilizado na solução dos desafios 1 e 2, as participantes julgaram interessante esse procedimento para a solução de alguns problemas combinatórios, salientando ainda não terem estudado tal método. Além deste episódio, durante a discussão dos desafios 3 e 4 algumas participantes disseram não terem aprendido que a relação ‘3 possibilidades em 6 chances’ – referente à probabilidade de sair um número maior do que 3 ao se jogar um dado perfeito – poderia ser expresso sob a forma fracionária $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$ ou 50%.

Dando prosseguimento, foram apresentadas algumas ideias a respeito da Combinatória e da Probabilidade, sendo ressaltado – pelo Pesquisador/Participante – que tais ‘ramos’ da Matemática, juntamente com a Estatística, constituem uma espécie de ‘filosofia do azar’ caracterizada pela incerteza, possibilidade. Nesse momento, algumas participantes mostraram-se surpresas ao perceberem que a Matemática não é ‘a’ Ciência do determinismo, da certeza como acreditavam ser.

Por fim, foi abordado um problema utilizado pela professora de Matemática Sueli aos alunos do 9.º ano visando o estudo do Princípio Multiplicativo, sendo o mesmo importante à solução de parte de problemas pertencentes à Combinatória. Dando continuidade, no próximo item far-se-á uma discussão a respeito de tal princípio, denominado também de Princípio Fundamental da Contagem.

15.2 Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem (PFC)

Inicialmente, observemos a definição dada por Dante (2004) a respeito de tal princípio:

Se um evento é composto por duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na primeira etapa é **m** e o número de possibilidades na segunda etapa é **n**, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado por **mn**. (p. 360, grifos do autor)

Exemplificando, no problema proposto pela professora Sueli o evento a ser realizado por Eduarda era composto de duas etapas sucessivas e independentes: entrar e sair do parque. Como na etapa ‘*entrar*’ haviam 4 possibilidades (**m** = 4) e na etapa sucessiva ‘*sair*’ haviam 5 possibilidades (**n** = 5), então, o total de possibilidades de realizar o evento ‘*entrar e sair*’ era de $m \times n = 4 \times 5 = 20$. Veja que essas duas etapas são independentes, pois uma não depende da outra a sua ocorrência, ou seja, ‘*entrar*’ é independente de ‘*sair*’.

1. Você acha que tal princípio é válido apenas para um evento composto por duas etapas sucessivas e independentes ou pode haver mais etapas sucessivas e independentes? Discorra sobre e, em caso afirmativo, dê um exemplo.

15.3 Conversando sobre o ensino de Combinatória

Durante uma reunião pedagógica na escola da professora de Matemática Sueli, a coordenadora pediu que os docentes se reunissem por disciplina e conversassem sobre o assunto que estavam trabalhando. Desse modo, a professora Sueli agrupou-se com as professoras de Matemática Márcia e Cláudia. Observe o diálogo decorrente de tal discussão:

Então, eu estou trabalhando com meus alunos do 9.º ano alguns problemas envolvendo a Combinatória. Eu comecei com problemas em que os estudantes têm que resolver inicialmente de <u>modo intuitivo</u>, ou seja, por meio da contagem direta das possibilidades. E vocês, Márcia e Cláudia, também estão nesse assunto? <i>Professora Sueli</i>	Eu também estou abordando a Combinatória com meus alunos do Ensino Médio. Mas eu já <u>parti direto pras definições</u>. Dei um exemplo do Princípio Multiplicativo e já parti pras fórmulas necessárias para o cálculo da Permutação, Fatorial, Arranjo e Combinação. Acho que não precisamos perder tempo com estas contagens diretas, porque isso o aluno já tem que saber! <i>Professora Márcia</i>
Eu ainda não comecei. Como é o 2.º ano que eu me efetivei, ainda fico um pouco perdida em relação ao <u>quando</u> começar um assunto novo. É até bom a gente conversar porque iria perguntar isso pra vocês! <i>Professora Cláudia</i>	Pare de se preocupar, Cláudia! Começa de uma vez, o aluno tem que correr atrás da matéria. Daqui alguns anos você vai ver que o importante é você fazer a sua parte, <u>dê</u> a matéria direitinho. Se o estudante não estiver afim é problema dele! <i>Professora Márcia</i>
Márcia eu concordo que o aluno precisa <u>agir sobre</u> os conteúdos que estamos trabalhando. Mas, e se naquele momento o conteúdo abordado for muito além da sua capacidade de compreensão? <i>Professora Sueli</i>	Ah, Sueli, mas se a gente tiver que se preocupar com os alunos que ainda não tem o necessário a gente vai ficar sempre no mesmo lugar. Sempre tem aquele estudante que não se <u>dá bem</u> com a Matemática, então, por mais que você faça <u>nunca</u> vai adiantar! <i>Professora Márcia</i>
Nossa... Agora vocês duas me deixaram em dúvida! Sueli, como você faz para saber se o conteúdo ‘novo’ é possível de ser compreendido pelo aluno? <i>Professora Cláudia</i>	Antes de um conteúdo ‘novo’ eu vejo o que o aluno já sabe acerca dos conteúdos que serão necessários. Por exemplo, para a abordagem da Combinatória, eu tenho que me certificar se os estudantes conseguem resolver problemas envolvendo a contagem direta das combinações (de modo aditivo) ou se já o fazem por meio do Princípio Multiplicativo. <i>Professora Sueli</i>
Mas você concorda que com isso você vai <u>gastar tempo</u>, Sueli? E daí, talvez, você não consiga dar conta de todo o conteúdo anual? <i>Professora Márcia</i>	Não que eu não queira ‘cumprir’ todo o conteúdo, mas eu prefiro que o aluno realmente aprenda e não apenas os memorize. Embora eu saiba, Márcia, das inúmeras cobranças que nós sofremos dos nossos ‘superiores’... <i>Professora Sueli</i>
E se você avaliar seu aluno, Sueli, e ver que ele ainda tem dificuldade em resolver os problemas por meio da contagem direta via modo aditivo? <i>Professora Cláudia</i>	Se eu observo isso eu tenho que trabalhar inúmeras situações problemas para que o estudante compreenda bem quando utilizar a contagem direta. <i>Professora Sueli</i>

1. Durante o seu período de ‘férias’, analise a conversa denotada acima observando as concepções epistemológicas implícitas nas falas das professoras e identifique nos trechos ideias condizentes aos assuntos estudados da teoria de Piaget.

[illegible]

15.4 Alguns tipos de problemas envolvendo a Combinatória

Terminada a reunião pedagógica, a professora Cláudia procurou a professora Sueli e lhe pediu que mostrasse as atividades que havia preparado para os alunos do 9.º ano acerca da Combinatória. No entanto, antes de compartilhar as situações problemas, a professora Sueli disse ser importante, num primeiro momento, os estudantes terem um meio concreto como ‘apoio’ ao pensamento matemático. Além disso, salientou ser interessante propor situações problemas próximas ao contexto dos estudantes em que os mesmos sintam-se interessados em agir sobre o conteúdo matemático.

A seguir consta a sequência⁴¹ das atividades trabalhadas pela professora Sueli⁴². Além de solucionar tais problemas, reflita acerca dos questionamentos denotados.

1. Em nossa escola há 4 corredores que ligam a cantina com o pátio e 6 corredores que ligam o pátio com a biblioteca. Partindo da cantina e passando pelo pátio de quantas formas diferentes podemos chegar na biblioteca?

2. Durante a semana da Educação Física, a escola está realizando uma competição entre as 8 turmas do Ensino Médio. Quantas são as possibilidades para o 1.º e 2.º lugares dentre as turmas participantes?

2.1. Entre 27 de julho a 12 de agosto deste ano (2012) serão realizados os Jogos Olímpicos em Londres com a participação de 192 países. Quais são as possibilidades para as medalhas de ouro, prata e bronze?

3. Usando somente os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, e 6:
a) Quantos números de 2 algarismos podemos formar?

⁴¹ Para a proposição de tal sequência foi observado o trabalho desenvolvido por Esteves (2001).

⁴² Inicialmente a professora Sueli mostrou à professora Cláudia o problema referente às entradas e saídas do parque de diversões abordado no encontro anterior.

b) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?

c) Quantos números de 3 algarismos iniciados com o 1 na ordem da centena podemos formar?

4. O mundo ‘informatizado’ traz muitas facilidades e também alguns perigos. Frequentemente os noticiários mostram ações de hackers que, ao descobrirem as senhas de clientes bancários, causam inúmeros transtornos a todos. Nesse sentido, a Combinatória pode ajudar no processo de elaboração das senhas de tal modo a dificultar a ação desses criminosos. Suponha que você seja o gerente de um banco e tenha que decidir, dentre várias propostas, qual seria a melhor. Observe algumas possíveis propostas:

- 1.^a Proposta: Senha formada com 4 algarismos distintos.
- 2.^a Proposta: Senha formada com 4 algarismos.
- 3.^a Proposta: Senha formada com 2 algarismos distintos e 2 letras distintas.
- 4.^a Proposta: Senha formada com 2 algarismos e 2 letras.
- 5.^a Proposta: Senha formada com 4 letras distintas.
- 6.^a Proposta: Senha formada com 4 letras.

Qual seria a melhor proposta? Justifique.

5. Na competição realizada durante a semana da Educação Física classificaram-se para a final o 1.º ano A e o 2.º ano B, ambas do Ensino Médio. Será vencedora a sala que ganhar duas competições seguidas ou vencer três competições alternadas. O professor Laércio, organizador dessa semana, pediu a ajuda da professora Sueli para calcular o número máximo de competições que poderão ser realizadas para que haja uma sala vencedora. Faz-se necessária tal ‘previsão’ para que o professor Laércio organize as atividades desenvolvidas ao término da semana da Educação Física. Além de calcular o número máximo de competições, registre quais seriam esses resultados.

6. Anagrama é um tipo de ‘jogo’ realizado com as letras de uma palavra. Por exemplo, com a palavra PÉ podemos formar dois anagramas: (PÉ) e (ÉP). Assim, calcule quantos são os Anagramas das seguintes palavras:

a) COR

b) DOR

c) AMOR

d) ANA

e) COCO

Para resolver todos os itens foi utilizado o mesmo procedimento? Discorra sobre.

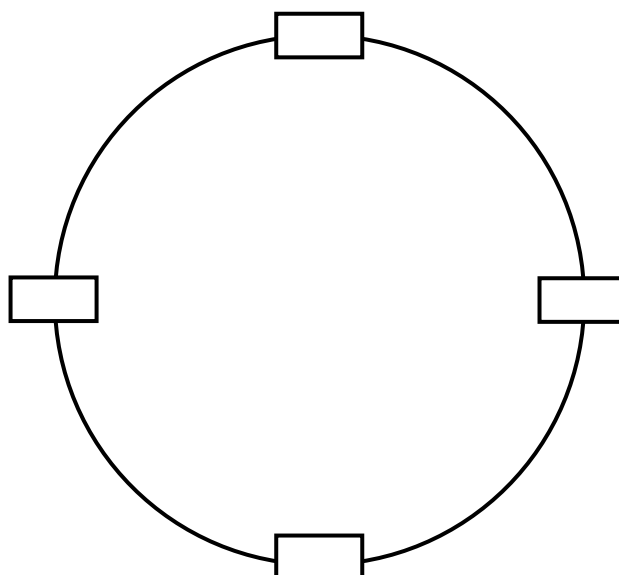
7. No final do ano, como parte da comemoração referente à formatura, a professora Sueli e seus alunos do 3.º ano B do Ensino Médio viajaram para Salvador – Bahia. Eles se hospedaram na pousada Beira Mar. Na avenida onde se localizava tal pousada havia 4 restaurantes: ACARAJÉ, ALTA MARÉ, LUNA e OSTRAS. Para receber desconto na pousada, a professora Sueli teve que escolher um dos restaurantes para o almoço e outro (diferente) para o jantar. No primeiro dia da estadia em Salvador, de quantas maneiras a professora Sueli pode escolher os restaurantes para o almoço e o jantar?

7.1 Suponha, agora, que a professora Sueli teria que escolher também um restaurante diferente para o café da manhã. Qual seria o ‘novo’ resultado?

8. No mês de novembro, a diretora da escola da professora Sueli recebeu um convite para enviar uma dupla formada por alunos dos 9.º anos na Olimpíada de Matemática. Assim, ela pediu para a professora Sueli selecionar, em cada uma das quatro turmas de 9.º ano, um aluno que obteve o melhor desempenho. Com os 4 alunos selecionados, de quantas maneiras a diretora pode formar a dupla para enviar na Olimpíada?

81. Suponha, agora, que a diretora tenha que enviar um trio. Qual seria o ‘novo’ resultado?

9. Nos problemas 7 e 8 foi encontrado o mesmo número de possibilidades? Em caso afirmativo ou negativo justifique.



15.5 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’

O que foi possível concluir a respeito dos diferentes problemas envolvendo a Combinatória? Escreva, após, as dúvidas provenientes das discussões realizadas.

Dúvidas:

16 DÉCIMO SEXTO ENCONTRO

16.1 Um movimento de retomada ‘geral’

Conforme já salientado, o presente Grupo de Estudo representa uma proposta metodológica que pretende contribuir com a Formação Inicial do professor de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Visando auxiliar o ‘Movimento de Retomada’, no quadro abaixo serão denotados os ‘principais’ assuntos já abordados até o momento:

GRUPO DE ESTUDO (encontro)	ASSUNTO ABORDADO
1.º	1. ‘Apresentação’ da proposta metodológica (Grupo de Estudo) a ser desenvolvida: Questões de Pesquisa, Objetivos (Gerais e Específicos) e Justificativa.
2.º	1. Tratamento da Informação – Discussão Geral: Significado e Constituição.
3.º	1. Tratamento da Informação – Estatística: Gráficos e Tabelas (Definição); ‘Termos’ da Pesquisa Estatística (População, Amostra, Indivíduo ou Objeto, Variável – Quantitativa e Qualitativa).
4.º	1. Tratamento da Informação – Estatística: Tabelas (Classificação). 2. Epistemologia Genética – Gênese-Construção das Classificações: Coleções Figurais (Fase I); Coleções Não-Figurais (Fase II); Classes (Fase III).
5.º	1. Epistemologia Genética – Classificação.
6.º	1. Tratamento da Informação – Estatística: Gráficos (Barras, Colunas, Setor Circular ‘Pizza’, Linhas, Cartograma, Pictograma, Histograma e Polígono de Frequência).
7.º	1. Tratamento da Informação – Estatística Descritiva: Medidas de Posição (Média Aritmética, Mediana e Moda).
8.º	1. Tratamento da Informação – Estatística: Histograma e Polígono de Frequência (Classes de Intervalos). 2. Tratamento da Informação – Estatística Descritiva: Medidas de Dispersão (Amplitude, Variância e Desvio Padrão).
9.º	1. Ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental: Rol de conteúdos (1.º ao 5.º ano) e Atividades (Exemplos).
10.º	1. Epistemologia Genética – Considerações ‘Gerais’: Atividade do Sujeito; Posturas Epistemológicas (Empirismo e Racionalismo); Teoria da Assimilação (Organização, Adaptação, Assimilação e Acomodação).
11.º	1. Epistemologia Genética: Educação deve responder a uma Necessidade; Fatores do Desenvolvimento (Maturação Orgânica, Interação Social, Experiência Física e Lógico-Matemática e Equilíbrio); Estádios do Desenvolvimento (Sensorio-Motor, Pré-Operatório, Operatório Concreto e Operatório Formal).
12.º	1. Epistemologia Genética: Mecanismo de Equilíbrio.
13.º	1. Epistemologia Genética – Síntese dos assuntos discutidos. 2. Tratamento da Informação – Combinatória e Probabilidade.
14.º	1. Ensino de Combinatória e Probabilidade.
15.º	1. Tratamento da Informação – Combinatória: Princípio Fundamental da Contagem; Diferentes Tipos de Agrupamentos em Situações Problemas (Arranjo, Combinação e Permutação). 2. Ensino de Combinatória – Diálogo hipotético entre professores de Matemática.

No decorrer dos referidos assuntos estudados houve a preocupação em ‘pensar sobre’ a (futura) prática docente de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, no qual os saberes experienciais (de cada participante) vêm sendo constantemente ‘alvo’ de reflexões de modo a oportunizar possíveis (re)significações.

Em continuidade à construção dos conteúdos matemáticos, no próximo item serão denotadas possíveis soluções dos problemas propostos no encontro anterior envolvendo a Combinatória. Além de analisar tais soluções, confronte-as com as elaboradas por você.

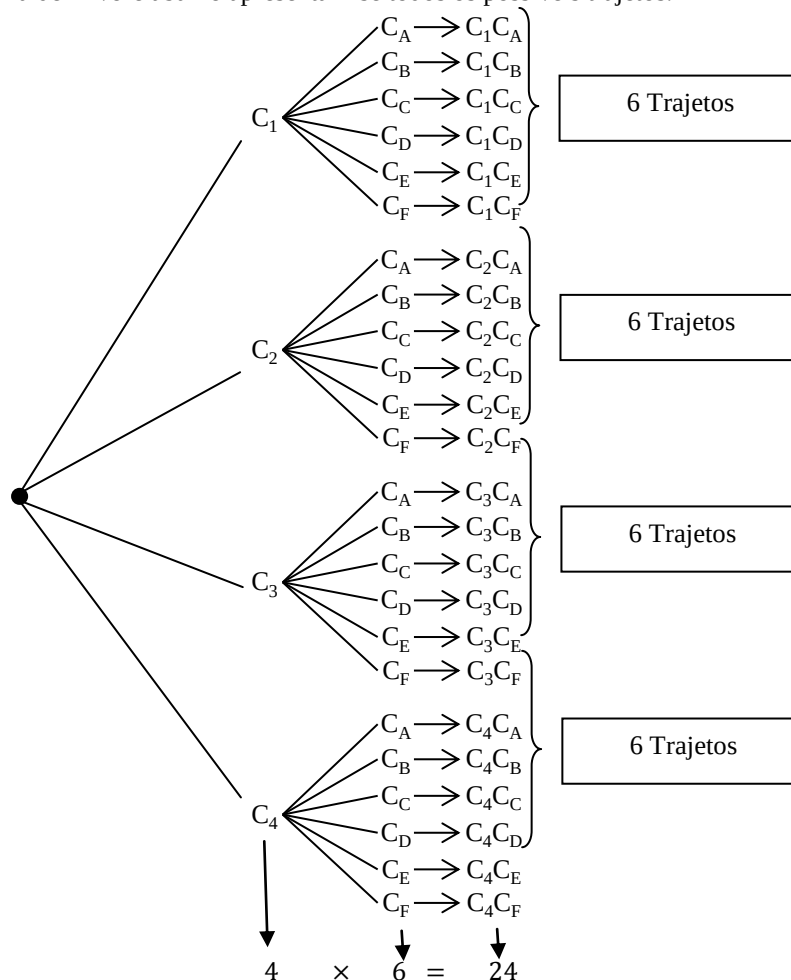
16.2 Retomando alguns tipos de problemas envolvendo a Combinatória

PROBLEMA (1): Em nossa escola há 4 corredores que ligam a cantina com o pátio e 6 corredores que ligam o pátio com a biblioteca. Partindo da cantina e passando pelo pátio de quantas formas diferentes podemos chegar na biblioteca?

Solução: Conforme o enunciado há 4 corredores que ligam a cantina ao pátio e 6 corredores que ligam o pátio à biblioteca. Para ir da cantina à biblioteca deve-se passar pelo pátio. É possível calcular os diferentes trajetos por meio do Diagrama de Árvore ou pelo Princípio Fundamental da Contagem (ou Princípio Multiplicativo). Consideremos:

- C_1, C_2, C_3 e C_4 como representando os 4 corredores que ligam a cantina ao pátio.
- C_A, C_B, C_C, C_D, C_E e C_F como representando os 6 corredores que ligam o pátio à biblioteca.

No Diagrama de Árvore abaixo apresentam-se todos os possíveis trajetos.



A referida multiplicação – também denominada Princípio Fundamental da Contagem – é outra maneira de obter o número de trajetos possíveis. Os números 4 e 6 indicam as duas etapas sucessivas e independentes que constituem o evento ‘partir da cantina à biblioteca passando pelo pátio’. Como indicado acima o número 4 representa as 4 possibilidades da etapa ‘ida da cantina ao pátio’; já o número 6 denota as 6 possibilidades da etapa ‘ida do pátio à biblioteca’. Para calcular os possíveis trajetos basta multiplicar ambos os números.

R: Há 24 formas diferentes de chegar à biblioteca partindo da cantina e passando pelo pátio.

PROBLEMA (2): Durante a semana da Educação Física, a escola está realizando uma competição entre as 8 turmas do Ensino Médio. Quantas são as possibilidades para o 1.º e 2.º lugares dentre as turmas participantes?

Solução: Consideremos:

- A, B, C, D, E, F, G e H como representando as 8 turmas do Ensino Médio.

Na competição só há vencedor para o 1.º e 2.º lugares; logo é necessário arranjar as 8 turmas 2 a 2. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$8 \times 7 = 56$$

No 1.º lugar temos 8 possibilidades, ou seja, uma dentre as 8 turmas do Ensino Médio. Para o 2.º lugar há 7 possibilidades, pois uma dentre as 8 turmas do Ensino Médio já conquistou o 1.º lugar. Exemplificando,

supondo que a turma A ficou em 1.º lugar, então o 2.º lugar pode ser ocupado pelas 7 turmas restantes (B, C, D, E, F, G e H).

Além do Princípio Fundamental da Contagem é possível construir o Diagrama de Árvore. No entanto, por questão de 'praticidade' não há necessidade de fazê-lo.

R: Há 56 possibilidades para o 1.º e 2.º lugares dentre as turmas participantes.

PROBLEMA (2.1): Entre 27 de julho a 12 de agosto deste ano (2012) serão realizados os Jogos Olímpicos em Londres com a participação de 192 países. Quais são as possibilidades para as medalhas de ouro, prata e bronze?

Solução: Utilizando o pensamento análogo do problema anterior, pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$192 \times 191 \times 190 = 6967680$$

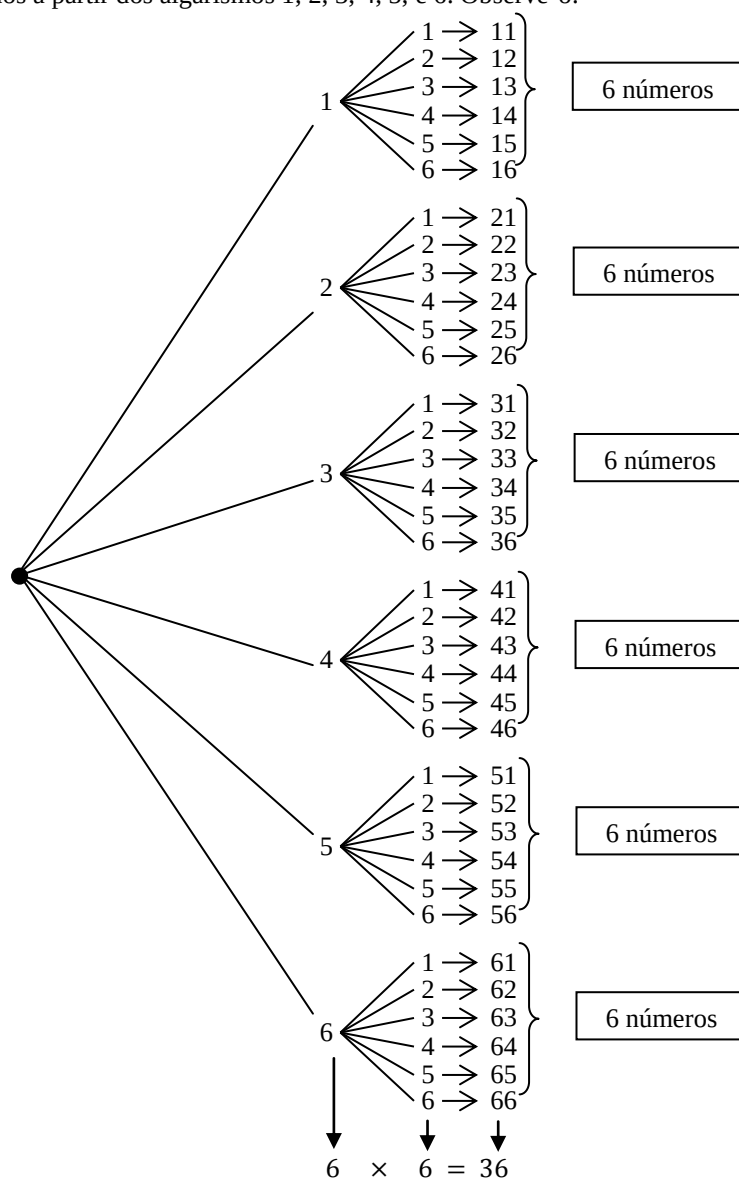
Os números 192, 191 e 190 indicam as possibilidades para as medalhas de ouro, prata e bronze, respectivamente. Assim, os 192 países foram arranjados 3 a 3.

R: Há 6967680 possibilidades para as medalhas de ouro, prata e bronze dentre os 192 países participantes das Olimpíadas em Londres.

PROBLEMA (3): Usando somente os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, e 6:

- Quantos números de 2 algarismos podemos formar?
- Quantos números de 3 algarismos podemos formar?
- Quantos números de 3 algarismos iniciados com o 1 na ordem da centena podemos formar?

Solução: a) Por meio do Diagrama de Árvore pode-se obter todos os números de 2 algarismos possíveis de serem formados a partir dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, e 6. Observe-o:



Como denotado há 6 possibilidades para a ordem das dezenas – algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 – e 6 possibilidades para a ordem das unidades – algarismos 1, 2, 3, 4, 5, e 6. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, basta multiplicar ambos os números (6 e 6) para obter o resultado. Pode-se ainda afirmar que os 6 algarismos foram arranjados 2 a 2 não necessariamente distintos.

R: Há 36 números de 2 algarismos possíveis de serem formados utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

b) De modo análogo, aplicando o Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

R: Há 216 números de 3 algarismos possíveis de serem formados utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

c) Neste problema, a ordem das centenas só pode ser iniciada pelo algarismo 1. Assim, há apenas 1 possibilidade para a centena, 6 possibilidades para a dezena e 6 possibilidades para a unidade. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$1 \times 6 \times 6 = 36$$

R: Há 36 números – de 3 algarismos iniciados com o 1 na ordem da centena – possíveis de serem formados utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

PROBLEMA (4): O mundo ‘informatizado’ traz muitas facilidades e também alguns perigos. Frequentemente os noticiários mostram ações de hackers que, ao descobrirem as senhas de clientes bancários, causam inúmeros transtornos a todos. Nesse sentido, a Combinatória pode ajudar no processo de elaboração das senhas de tal modo a dificultar a ação desses criminosos. Suponha que você seja o gerente de um banco e tenha que decidir, dentre várias propostas, qual seria a melhor. Observe algumas possíveis propostas:

- 1.^a Proposta: Senha formada com 4 algarismos distintos.
- 2.^a Proposta: Senha formada com 4 algarismos.
- 3.^a Proposta: Senha formada com 2 algarismos distintos e 2 letras distintas.
- 4.^a Proposta: Senha formada com 2 algarismos e 2 letras.
- 5.^a Proposta: Senha formada com 4 letras distintas.
- 6.^a Proposta: Senha formada com 4 letras.

Qual seria a melhor proposta? Justifique.

Solução: Para o gerente escolher a melhor proposta faz-se necessário descobrir o número de senhas possíveis a serem formadas em cada uma das propostas. Inicialmente consideremos:

– **A** como representando o conjunto dos algarismos: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \text{ e } 9\}$ totalizando 10 elementos.

– **L** como representando o conjunto das letras: $L = \{A, B, C, D, E, F, \dots, Y \text{ e } Z\}$ totalizando 26 elementos.

A senha a ser constituída possui 4 dígitos como esboçado na figura abaixo:

1.º Dígito	2.º Dígito	3.º Dígito	4.º Dígito

Utilizando o Princípio Fundamental da Contagem calcula-se o número de senhas possíveis em cada uma das propostas. Observe:

1.^a Proposta: Senha formada com 4 algarismos distintos.

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040 \text{ possibilidades}$$

Na 1.^a proposta os 10 algarismos foram arranjados 4 a 4. Por serem distintos os algarismos não podem ser repetidos, logo de um dígito a outro diminui-se 1 possibilidade.

2.^a Proposta: Senha formada com 4 algarismos.

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000 \text{ possibilidades}$$

Na 2.^a proposta como os algarismos não são distintos, ou seja, podem ser repetidos não há diminuição de possibilidade de um dígito a outro. Deste modo, os 10 algarismos foram arranjados 4 a 4 não necessariamente distintos.

3.^a Proposta: Senha formada com 2 algarismos distintos e 2 letras distintas.

$$10 \times 9 \times 26 \times 25 = 58500 \text{ possibilidades}$$

Na 3.^a proposta os 10 algarismos foram arranjados 2 a 2 e as 26 letras foram arranjadas 2 a 2. Por serem distintos o algarismo utilizado no 1.º dígito não pode ser repetido no 2.º implicando na diminuição de 1 possibilidade. De modo análogo, a letra usada no 3.º dígito não pode ser repetida no 4.º dígito; assim diminui-se 1 possibilidade.

4.^a Proposta: Senha formada com 2 algarismos e 2 letras.

$$10 \times 10 \times 26 \times 26 = 67600 \text{ possibilidades}$$

5.^a Proposta: Senha formada com 4 letras distintas.

$$26 \times 25 \times 24 \times 23 = 358800 \text{ possibilidades}$$

Na 5.^a proposta as 26 letras foram arranjadas 4 a 4. Por serem distintas as letras não podem ser repetidas, logo de um dígito a outro diminui-se 1 possibilidade.

6.^a Proposta: Senha formada com 4 letras.

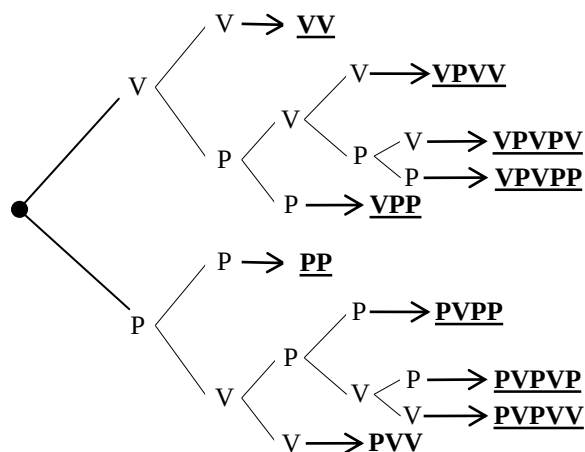
$$26 \times 26 \times 26 \times 26 = 456976 \text{ possibilidades}$$

Na 6.^a proposta como as letras não são distintas, isto é, podem ser repetidas não há diminuição de possibilidade de um dígito a outro. Assim, as 26 letras foram arranjadas 4 a 4 não necessariamente distintas.

R: A melhor proposta a ser escolhida pelo gerente é a 6.^a pelo fato de ‘possuir’ o maior número de possibilidades de senhas a serem constituídas. Quanto maior o número de senhas menor será a chance de atuação do hacker.

PROBLEMA (5): Na competição realizada durante a semana da Educação Física classificaram-se para a final o 1.^o ano A e o 2.^o ano B, ambas do Ensino Médio. Será vencedora a sala que ganhar duas competições seguidas ou vencer três competições alternadas. O professor Laércio, organizador dessa semana, pediu a ajuda da professora Sueli para calcular o número máximo de competições que poderão ser realizadas para que haja uma sala vencedora. Faz-se necessária tal ‘previsão’ para que o professor Laércio organize as atividades desenvolvidas ao término da semana da Educação Física. Além de calcular o número máximo de competições, registre quais seriam esses resultados.

Solução: No Diagrama de Árvore – apresentado a seguir – a letra **V** indica ‘venceu’ e **P** significa ‘perdeu’.



Como representado, há 10 possíveis resultados considerando a regra da competição, ou seja, vencer duas competições seguidas ou vencer três competições alternadas. O ‘maior’ resultado ocorre em **PVPVP** ou **VPVPV**, assim o número máximo de competições será 5.

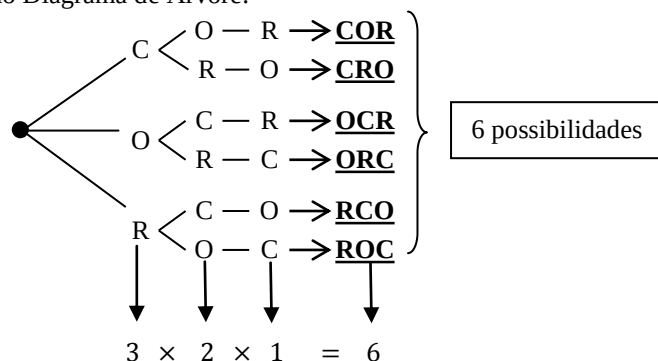
R: O professor Laércio terá que organizar a semana da Educação Física de modo a permitir a ocorrência de até 5 competições para que uma das turmas classificadas na final vença. Os possíveis resultados serão: **VV**, **VPVV**, **VPVPV**, **VPVPP**, **VPP**, **PP**, **PVPP**, **PVPVP**, **PVPVV** e **PVV**.

PROBLEMA (6): Anagrama é um tipo de ‘jogo’ realizado com as letras de uma palavra. Por exemplo, com a palavra **PÊ** podemos formar dois anagramas: (PÊ) e (ÊP). Assim, calcule quantos são os Anagramas das seguintes palavras:

- a) COR b) DOR c) AMOR d) ANA e) COCO

Para resolver todos os itens foi utilizado o mesmo procedimento? Discorra sobre.

Solução: a) As letras que constituem a palavra COR devem ser misturadas de modo a formar os seguintes anagramas denotados no Diagrama de Árvore:



Além do Diagrama, pode-se utilizar o Princípio Fundamental da Contagem conforme registrado acima.

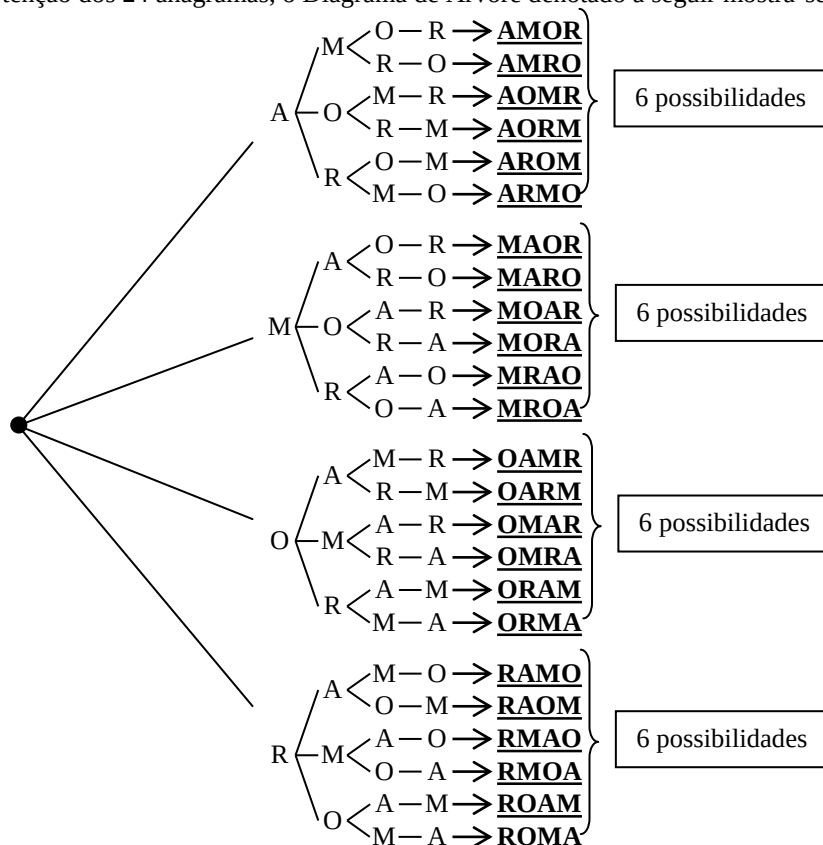
R: Com a palavra COR formam-se 6 anagramas.

b) R: Analogamente ao item a), é possível constituir 6 anagramas com a palavra DOR, tais como: DOR, DRO, ODR, ORD, RDO e ROD.

c) De modo análogo aos itens anteriores, por meio do Princípio Fundamental da Contagem calcula-se a quantidade de anagramas da palavra AMOR. Observe tal cálculo:

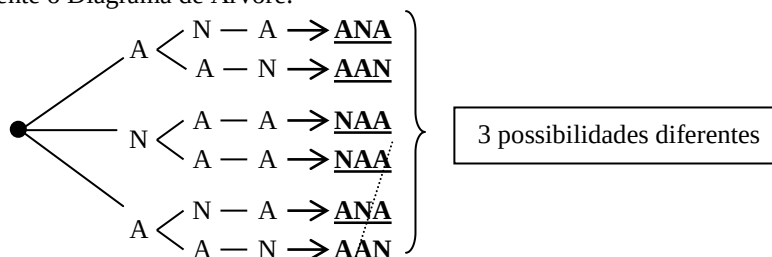
$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Para a obtenção dos 24 anagramas, o Diagrama de Árvore denotado a seguir mostra-se pertinente:



R: Faz-se possível construir 24 anagramas a partir da palavra AMOR.

d) A palavra ANA possui o mesmo número de letras das palavras COR e DOR. No entanto, por possuir 2 letras repetidas 'A' o cálculo da quantidade de anagramas não se dá por meio do Princípio Fundamental da Contagem. Observemos inicialmente o Diagrama de Árvore:



Conforme o Diagrama, há 3 anagramas a serem constituídos a partir da palavra ANA, tais como: ANA, AAN e NAA. Como há 2 letras 'A', para obter a quantidade de anagramas pode-se fazer a seguinte divisão:

$$\frac{\text{Quantidade de Possibilidades a partir de 3 elementos – letras A, N, A}}{\text{Quantidade de Possibilidades a partir dos 2 elementos repetidos – letras A, A}} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

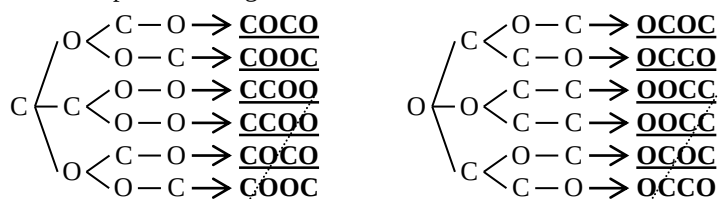
R: A partir da palavra ANA constroem-se 3 anagramas.

e) Analogamente à divisão realizada no item anterior temos:

$$\frac{\text{Quantidade de Possibilidades a partir de 4 elementos – letras C, O, C, O}}{\text{Quantidade de Possibilidades a partir dos 2 'Grupos' de elementos repetidos – letras C, C e O, O}} =$$

$$= \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{24}{4} = 6$$

Para comprovar, observe parte do Diagrama de Árvore abaixo:

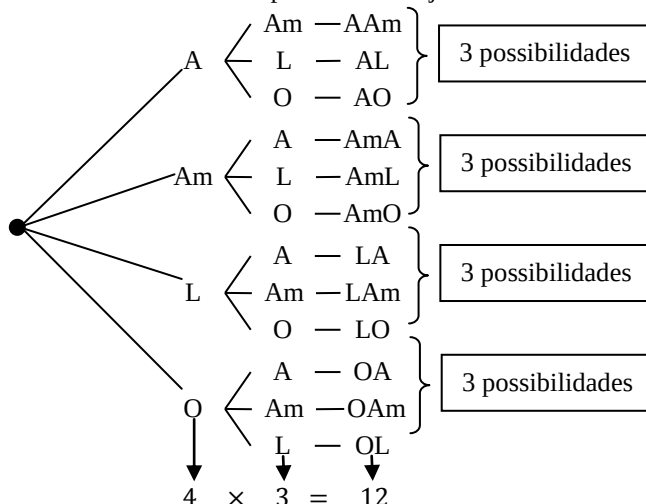


R: Mediante o Diagrama de Árvore, a partir da palavra COCO são formados 6 anagramas, tais como: COCO, COOC, CCOO, OCOC, OCCO e OCCO.

PROBLEMA (7): No final do ano, como parte da comemoração referente à formatura, a professora Sueli e seus alunos do 3.º ano B do Ensino Médio viajaram para Salvador – Bahia. Eles se hospedaram na pousada Beira Mar. Na avenida onde se localizava tal pousada havia 4 restaurantes: ACARAJÉ, ALTA MARÉ, LUNA e OSTRAS. Para receber desconto na pousada, a professora Sueli teve que escolher um dos restaurantes para o almoço e outro (diferente) para o jantar. No primeiro dia da estadia em Salvador, de quantas maneiras a professora Sueli pode escolher os restaurantes para o almoço e o jantar?

Solução: A professora Sueli possui 4 opções de restaurantes a serem arranjados 2 a 2 já que devem ser escolhidos 2 restaurantes, um para o almoço e outro (diferente) para o jantar. Denotemos os restaurantes pelas seguintes siglas: **A** = Acarajé; **AM** = Alta Maré; **L** = Luna e **O** = Ostras.

O Diagrama de Árvore abaixo denota todos os possíveis arranjos:



Utilizando o Princípio Fundamental da Contagem – exposto acima – encontra-se também o total de arranjos a serem feitos com os restaurantes. Para o almoço há 4 possibilidades, já, para o jantar, como os restaurantes não podem ser repetidos restam 3.

R: Há 12 maneiras de serem escolhidos restaurantes diferentes para o almoço e o jantar.

PROBLEMA (7.1): Suponha, agora, que a professora Sueli teria que escolher também um restaurante diferente para o café da manhã. Qual seria o ‘novo’ resultado?

Solução: Analogamente ao problema anterior, aplicando o Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

R: Há 24 maneiras de serem escolhidos restaurantes diferentes para o café da manhã, o almoço e o jantar.

PROBLEMA (8): No mês de novembro, a diretora da escola da professora Sueli recebeu um convite para enviar uma dupla formada por alunos dos 9.º anos na Olimpíada de Matemática. Assim, ela pediu para a professora Sueli selecionar, em cada uma das quatro turmas de 9.º ano, um aluno que obteve o melhor desempenho. Com os 4 alunos selecionados, de quantas maneiras a diretora pode formar a dupla para enviar na Olimpíada?

Solução: A professora Sueli escolheu o seguinte conjunto de alunos:

– Alunos = {Beto (**B**), Carla (**C**), Danilo (**D**), Eduarda (**E**)}.

Desse conjunto devem ser formados subconjuntos com apenas 2 elementos, ou seja, 2 alunos. A ordem em que os elementos (alunos) aparecem nesses subconjuntos não importa, pois Beto-Carla {**B**, **C**}, por exemplo,

é a mesma dupla que Carla-Beto $\{\underline{C}, \underline{B}\}$. Assim, os subconjuntos de 2 elementos (duplas) obtidos por meio de contagem direta são:

$$\{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}$$

Além da contagem direta, pode-se utilizar o seguinte raciocínio (procedimento):

1.º - Inicialmente calcula-se os 4 elementos (alunos) arranjados 2 a 2:

$$4 \times 3 = 12$$

2.º - Em seguida, calcula-se todas as ‘misturas’ possíveis de serem formadas com 2 elementos (alunos) já que pretende-se formar duplas. Tal cálculo é realizado para determinar o múltiplo de subconjuntos que irá se repetir.

$$2 \times 1 = 2$$

3.º - Para descobrir o total de combinações, ou seja, duplas a serem constituídas, divide-se o total dos 4 elementos arranjados 2 a 2 pelo total de ‘misturas’ formadas com 2 elementos:

$$\frac{12}{2} = 6$$

R: A diretora poderá formar 6 duplas combinando os 4 alunos escolhidos pela professora Sueli.

PROBLEMA (8.1): Suponha, agora, que a diretora tenha que enviar um trio. Qual seria o ‘novo’ resultado?

Solução: Utilizando o raciocínio (procedimento) análogo temos:

1.º - Calcula-se os 4 elementos (alunos) arranjados 3 a 3.

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

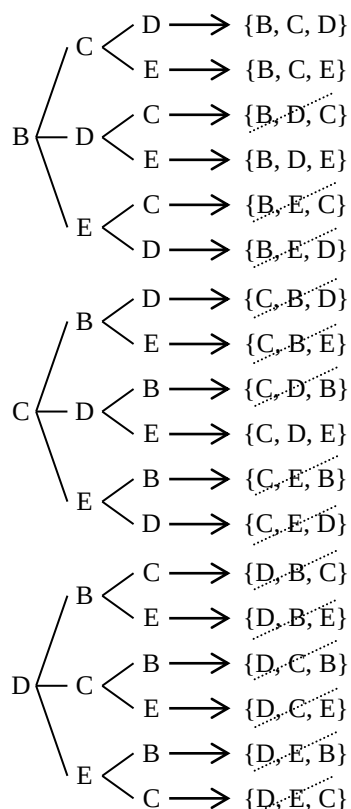
2.º - Calcula-se todas as ‘misturas’ possíveis de serem constituídas com 3 elementos (alunos) já que pretende-se formar trios. Tal cálculo é realizado para determinar o múltiplo de subconjuntos que irá se repetir.

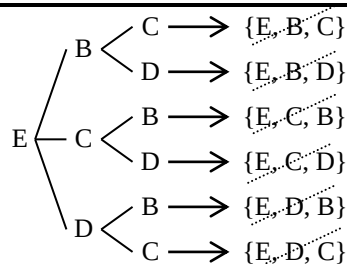
$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

3.º - Para descobrir o total de combinações, ou seja, trios a serem formados, divide-se o total dos 4 elementos arranjados 3 a 3 pelo total de ‘misturas’ formadas com 3 elementos:

$$\frac{24}{6} = 4$$

Para ‘comprovar’ e visualizar tal resultado observe no Diagrama de Árvore, abaixo, todos os subconjuntos possíveis de serem formados com 3 elementos cada, inclusive os repetidos:





No referido Diagrama os subconjuntos diferentes são: {B, C, D} Beto-Carla-Danilo, {B, C, E} Beto-Carla-Eduarda, {B, D, E} Beto-Danilo-Eduarda e {C, D, E} Carla-Danilo-Eduarda, o que 'comprova' serem 4 combinações possíveis.

R: A diretora poderá formar 4 trios combinando os 4 alunos escolhidos pela professora Sueli.

16.3 Desafio para casa

1. Identifique nas seguintes atividades o conteúdo matemático abordado e o ano a qual se destinam:

ATIVIDADE 1: COMBINANDO AS ROUPAS

Joana tem no seu guarda-roupa 2 saias, uma vermelha e a outra amarela. Ela também possui 3 blusas, sendo uma preta, a outra vermelha e a outra azul. Quantas são as combinações possíveis que Joana pode fazer usando uma saia e uma blusa?

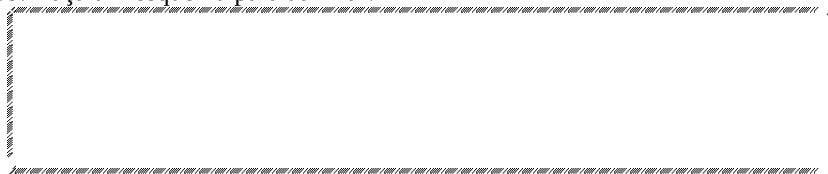


Conteúdo abordado:

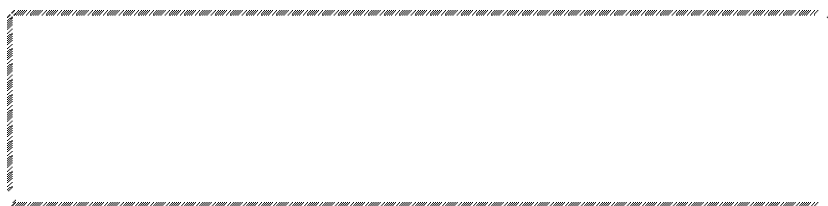
Ano:

ATIVIDADE 2: A IDA À FESTA

1. Luciana foi a uma festa com sua família. No jantar foram servidos 3 tipos de saladas e 3 tipos de massas: macarrão, lasanha e ravióli. Quantos pratos diferentes eram possíveis montar combinando as saladas e os tipos de massas? Faça um esquema para auxiliar.



2. Após o jantar foram servidos alguns tipos de brigadeiros. Os 3 tipos de brigadeiros feitos eram de chocolate branco, chocolate meio amargo e chocolate ao leite. Além dos brigadeiros haviam 3 tipos de cobertura: coco ralado, castanha picada e granulado de chocolate. Faça as combinações possíveis e descubra quantas opções de brigadeiros tinham na festa.



Conteúdo abordado:

Ano:

ATIVIDADE 3: DIVERSAS COMBINAÇÕES

1. Após o passeio ao zoológico, a turma de Joana parou para comer em uma lanchonete. Nessa lanchonete cada um podia montar o próprio lanche e todos ficaram animados. As crianças podiam escolher entre 3 tipos de pães (pão francês, pão de hambúrguer e pão de forma) e 5 tipos de recheios (frango, mortadela, presunto, queijo e salame). Quantos sanduíches diferentes os alunos poderiam montar com um tipo de pão e um tipo de recheio?

2. Amanda disse para sua mãe que tem 15 opções diferentes para combinar suas blusas com 5 saias. Quantas blusas Amanda tem?

Conteúdo abordado:**Ano:****ATIVIDADE 4: PARTIDAS DE FUTEBOL**

No campeonato de futebol da escola foram formados 4 grupos (A, B, C, e D) com 3 times cada. O jogos foram organizados da seguinte forma:

- Na primeira fase cada time do grupo A jogará contra todos os tipos do grupo B, e cada time do grupo C jogará contra todos do grupo D.
- No final do campeonato, o vencedor dos grupos A versus B jogará com o vencedor dos grupos C versus D, conforme o esquema abaixo.

Quantas partidas precisarão ser previstas?

R: _____

PRIMEIRA FASE

GRUPO A	<i>versus</i>	GRUPO B		GRUPO C	<i>versus</i>	GRUPO D
e		h		k		n
f		i		l		o
g		j		m		p

FINAL

Vencedor de A versus B	<i>versus</i>	Vencedor de C versus D
------------------------	---------------	------------------------

Conteúdo abordado:**Ano:**

Em sua opinião, qual das atividades acima apresenta o maior nível de dificuldade? Por quê?

✓

✓

✓

17 DÉCIMO SÉTIMO ENCONTRO

17.1 Retomando o desafio para casa

No encontro anterior solicitou-se a análise de algumas atividades envolvendo a Combinatória a serem utilizadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Observem, no quadro abaixo, os conteúdos matemáticos possíveis de serem trabalhados em cada uma das atividades, bem como o ano escolar ao qual se destinam:

ATIVIDADE	ANO (ESCOLARIDADE)	CONTEÚDO MATEMÁTICO
1 – Combinando as Roupas	2.º e 3.º	Adição (contagem direta 1 a 1) – 2.º ano. Multiplicação (ideia inicial de Combinatória) – 3.º ano.
2 – Ida à Festa (Problemas 1 e 2)	4.º e 5.º	Adição (contagem direta 1 a 1). Multiplicação (Princípio Fundamental da Contagem).
3 – Diversas Combinações (Problema 1)	4.º e 5.º	Multiplicação (Princípio Fundamental da Contagem).
3 – Diversas Combinações (Problema 2)	4.º e 5.º	Divisão (Princípio Fundamental da Contagem – operação inversa).
4 – Partidas de Futebol	4.º e 5.º	Adição. Multiplicação (Princípio Fundamental da Contagem).

Em relação ao nível de dificuldade, supõe-se que a Atividade 1 seja a de menor nível por permitir ao estudante ‘ligar’ as possíveis combinações entre as saias e as blusas desenhadas. Por meio de tal estratégia – ‘ligar’ – os estudantes terão um apoio visual para resolver o problema contando diretamente cada ‘combinação’, não sendo necessário ‘pensar sobre’ o Princípio Fundamental da Contagem (multiplicativo). Em contrapartida, o problema 2) – Atividade 3 – representa o maior nível de dificuldade por exigir do aluno o pensamento inverso da multiplicação, ou seja, a divisão. Além de pensar combinatoriamente, o estudante precisará dividir o total de opções ($n = 15$) pela quantia de saias ($m = 5$) para obter a quantidade de blusas. Ao solucionar tal problema (o de maior dificuldade) o sujeito necessitará – em ‘termos’ psicológicos – da reversibilidade operatória, por isso a sua abordagem só se faz possível, na maioria das vezes, entre o 4.º e 5.º anos do Ensino Fundamental.

Uma postura pedagógica condizente com os estudos desenvolvidos até o momento na/para a abordagem das atividades seria a metodologia da solução de problemas. Nesta metodologia cabe ao professor ‘despertar’ o interesse do aluno desafiando-o/‘desequilibrando-o’ a pensar sobre determinado objeto de conhecimento. Por se tratar de estudantes no início da escolaridade, em conformidade com os estádios do desenvolvimento cognitivo, as atividades iniciais devem ser próximas à realidade (convívio) do estudante. Tal ‘proximidade’ facilitará a interpretação da situação problema pelo sujeito já que o mesmo valer-se-á dos seus esquemas de assimilação.

Além da importância (necessidade) do desafio ‘podendo’ implicar na atividade do aluno sobre o objeto de conhecimento, deve ser garantido momentos de troca de ideias entre os estudantes. Ao observar/interar-se do modo utilizado pelo ‘outro’, na solução de determinado problema, o aluno poderá rever a própria estratégia. Tal ‘movimento’ de/em ‘gerir’ diferentes pontos de vista corroborará ao processo de descentração que, por conseguinte, contribuirá à constituição da reversibilidade operatória (‘ir e vir mental’). Reversibilidade essa muito importante à construção das estruturas lógico-matemáticas.

Outra questão pertinente refere-se ao ‘acompanhamento’ feito pelo professor durante a abordagem de tais atividades. Aconselha-se ‘acompanhar’ ‘mais de perto’ os alunos do 2.º ano (e em alguns casos do 3.º ano) pelo fato dos mesmos ainda não serem tão ‘independentes’ na solução dos problemas. Como se encontram em processo de alfabetização, uma boa alternativa é a discussão oral acerca do problema, sendo necessário o professor auxiliar o estudante durante/no registro das estratégias pessoais elaboradas. No entanto, independentemente do ano de escolaridade, o docente deve – intencionalmente – auxiliar os alunos, seja questionando algum erro observado e/ou chamando a atenção à necessidade da leitura e (re)leitura do enunciado de modo a permitir a sua compreensão e a ‘retirada’ da informação matemática a ser utilizada.

17.2 Análise Combinatória: alguns tipos de agrupamentos

Os problemas pertencentes à Combinatória – abordados nos três últimos encontros – denotaram diferentes tipos de agrupamentos que exigiram diferentes estratégias à solução. Nos itens seguintes far-se-á uma breve discussão acerca desses diferentes tipos de agrupamentos (Permutação, Arranjo e Combinação). Além disso, serão apresentadas algumas expressões (‘fórmulas’) visando ‘facilitar’ a solução dos referidos problemas.

17.2.1 Permutação simples e com repetição

Permutação Simples é definida como sendo o número de possibilidades de misturar/trocar/arrumar n elementos de um determinado conjunto em n posições de tal modo que cada possibilidade se diferencie pela ordem em que os elementos aparecem. Por exemplo, para obter os anagramas da palavra COR (6.º problema – item 15.4) permutaram-se os 3 elementos (letras C, O, R) em 3 posições. Na Permutação Simples cada um dos elementos terá ‘seu lugar’ em cada agrupamento ordenado, no caso do exemplo em cada anagrama feito.

A expressão abaixo possibilita calcular o número de Permutações Simples (P_n):

$$P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \quad (1.)$$

, onde n indica o número de elementos do conjunto considerado.

Considerando a palavra COR, sendo n = 3 (total de elementos ‘letras’ do conjunto), ao utilizar a expressão (1.) encontra-se o total de anagramas a serem formados. Observe:

$$P_n = P_3 = 3 \times (3 - 1) \times (3 - 2) = 3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ possíveis anagramas}$$

O valor obtido em P_n também é denominado FATORIAL do número natural n , sendo indicado por $n!$ (lê-se “fatorial de n ou n fatorial”). Em expressão matemática temos:

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \quad (2.)$$

, para $n \geq 1$.

Das expressões (1.) e (2.) obtém-se a expressão (3.):

$$P_n = n! \quad (3.)$$

Na Permutação Com Repetição há a ocorrência de elementos repetidos dentre os n elementos do conjunto a permutar. Ainda no 6.º problema (item 15.4), a partir da palavra ANA construíram-se os seguintes anagramas: ANA, AAN, NAA, NAA, ANA, AAN. É possível perceber que os 3 últimos anagramas são repetidos, fato esse devido à repetição da letra A no conjunto dos 3 elementos (letras A, N, A). Assim, o cálculo das permutações possíveis difere do cálculo da Permutação Simples na qual não há repetição dos elementos.

No encontro anterior utilizou-se a seguinte divisão para calcular o número de anagramas da palavra ANA excluindo-se os repetidos. Veja abaixo:

$$\frac{\text{Quantidade de Possibilidades a partir de 3 elementos – letras A, N, A}}{\text{Quantidade de Possibilidades a partir dos 2 elementos repetidos – letras A, A}} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

‘Traduzindo’ o exposto em linguagem matemática obtemos a seguinte expressão que permite calcular o número de Permutações Com Repetição (P_r):

$$P_r = P_n^\alpha = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{\alpha \times (\alpha-1) \times (\alpha-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{n!}{\alpha!} \quad (4.)$$

, onde n indica o número de elementos do conjunto considerado e α representa o número de determinado elemento que se repetiu.

Considerando a palavra ANA, sendo $n = 3$ e $\alpha = 2$ (as 2 letras repetidas ‘A’), ao utilizar a expressão (4.) encontra-se o total de anagramas a serem formados. Observe:

$$P_n^\alpha = P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3 \text{ possíveis anagramas}$$

‘Generalizando’ a expressão (4.) obtém-se:

$$P_r = P_n^{\alpha, \beta, \dots, \gamma} = \frac{n!}{\alpha! \times \beta! \times \dots \times \gamma!} \quad (5.)$$

, onde n indica o número de elementos do conjunto considerado e $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ representam os números de determinados elementos que se repetiram.

Aplicando a expressão (5.) calcula-se o número de anagramas da palavra COCO (6.º problema – item 15.4). Observe:

$$P_r = P_n^{\alpha, \beta} = \frac{n!}{\alpha! \times \beta!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1)} = \frac{24}{4} = 6 \text{ possíveis anagramas}$$

, onde n indica os 4 elementos ‘letras’ da palavra COCO (C, O, C, O), α representa as 2 letras repetidas ‘C’ e β indica as 2 letras repetidas ‘O’.

17.2.2 Arranjo simples e com repetição

Arranjo Simples é definido como sendo o número de possibilidades de misturar/trocar/arrumar $\underline{n}$ elementos de um determinado conjunto em $\underline{m}$ posições, com $\underline{m} \leq \underline{n}$, de tal modo que cada possibilidade se diferencie pela **ordem** em que os elementos aparecem. Pode-se ainda dizer que os $\underline{n}$ elementos foram tomados/arranjados $\underline{m}$ a $\underline{m}$. Exemplificando, no 2.º problema (item 15.4) as 8 turmas do Ensino Médio ($\underline{n}$) foram arranjadas 2 a 2 ($\underline{m}$ a $\underline{m}$) já que pretendia-se descobrir as possibilidades para o 1.º e 2.º lugares numa competição realizada entre as 8 turmas.

Por meio da seguinte expressão faz-se possível calcular o número de Arranjos Simples ($A_{n,m}$ ⁴³) para $\underline{n}$ elementos arranjados $\underline{m}$ a $\underline{m}$:

$$A_{n,m} = \underbrace{\left(\overset{1.ª \text{ posição}}{\tilde{n}} \right) \times \left(\overset{2.ª \text{ posição}}{\overbrace{n-1}} \right) \times \left(\overset{3.ª \text{ posição}}{\overbrace{n-2}} \right) \times \dots \times \left[\overset{m-ésima \text{ posição (última)}}{\overbrace{n-(m-1)}} \right]}_{m \text{ fatores}} \quad (6.)$$

, onde:

n indica as possibilidades na 1.ª posição por possuir n elementos disponíveis;

$(n-1)$ indica as possibilidades na 2.ª posição por possuir $n - 1$ elementos disponíveis;

$(n-2)$ indica as possibilidades na 3.ª posição por possuir $n - 2$ elementos disponíveis;

⁴³ $A_{n,m}$ – ‘lê-se Arranjo de n elementos tomados m a m ’.

$(n-(m-1))$ indica as possibilidades na m -ésima ('última') posição por possuir $n - (m - 1)$ elementos disponíveis.

Utilizando a referida expressão (6.) no exemplo citado, sendo $\underline{n} = 8$ (8 turmas do Ensino Médio) e $\underline{m} = 2$ (1.º e 2.º lugares), obtém-se como resposta 56 possibilidades. Observe a seguir:

$$\begin{aligned} A_{n,m} = A_{8,2} &= \overbrace{(\underline{n})}^{1.ª \text{ posição}} \times \overbrace{\left(\overbrace{n-1}^{2.ª \text{ posição}} \right)} = \\ &= 8 \times (8 - 1) = \\ &= 8 \times 7 = 56 \text{ possibilidades} \end{aligned}$$

Outro exemplo de Arranjo Simples encontra-se na 1.ª proposta do 4.º problema (item 15.4) visando o cálculo do número possível de senhas a serem formadas. Considerando $\underline{n} = 10$ (10 algarismos) e $\underline{m} = 4$ (4 dígitos 'posições' da senha), através da expressão (6.) calcula-se o número de senhas formadas nesta proposta. Observe abaixo:

$$\begin{aligned} A_{n,m} = A_{10,4} &= (n) \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times [n - (m-1)] = \\ &= \overbrace{\left(\overbrace{10}^{1.ª \text{ posição}} \right)} \times \overbrace{\left(\overbrace{10-1}^{2.ª \text{ posição}} \right)} \times \overbrace{\left(\overbrace{10-2}^{3.ª \text{ posição}} \right)} \times \overbrace{\left[\overbrace{10-(4-1)}^{m\text{-ésima posição (4.ª)}} \right]} = \\ &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040 \text{ possíveis senhas} \end{aligned}$$

No caso do Arranjo Com Repetição, o número de possibilidades não diminui de uma posição a outra já que o elemento considerado na 1.ª posição pode ser repetido na 2.ª posição, e assim por diante. A expressão seguinte permite calcular o número de Arranjos Com Repetição $[(AR)_{n,m}]$ para $\underline{n}$ elementos arranjados $\underline{m}$ a $\underline{m}$ não necessariamente distintos:

$$(AR)_{n,m} = \underbrace{\overbrace{\underline{n}}^{1.ª \text{ posição}} \times \overbrace{\underline{n}}^{2.ª \text{ posição}} \times \overbrace{\underline{n}}^{3.ª \text{ posição}} \times \cdots \times \overbrace{\underline{n}}^{m\text{-ésima posição (última)}}}_{m \text{ fatores}}} = n^m \quad (7.)$$

, onde n representa as possibilidades em cada uma das posições a serem 'ocupadas'.

Aplicando tal expressão (7.) é possível obter o número de senhas a serem formadas na 2.ª proposta (problema 4 – item 15.4):

$$\begin{aligned} (AR)_{n,m} = (AR)_{10,4} &= \underbrace{\overbrace{\underline{n}}^{1.ª \text{ posição}} \times \overbrace{\underline{n}}^{2.ª \text{ posição}} \times \overbrace{\underline{n}}^{3.ª \text{ posição}} \times \overbrace{\underline{n}}^{m\text{-ésima posição (4.ª)}}}_{m \text{ fatores (4 vezes)}} = \\ &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10000 \text{ possíveis senhas} \end{aligned}$$

, onde n indica os 10 elementos (algarismos) e m representa as 4 posições (dígitos) formados de algarismos não necessariamente distintos.

17.2.3 Combinação simples

Até o momento a **ordem** dos elementos permutados e arranjados foi importante para diferenciar os agrupamentos ordenados. Assim, o anagrama COR diferiu de CRO, pois a ordem dos elementos (letras) deste segundo sofreu alteração quando comparado ao primeiro. No entanto, no caso da Combinação Simples a **ordem** dos elementos combinados não importa. Exemplificando, no 8.º problema (item 15.4) discutiu-se que as duplas Beto-Carla $\{\underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathbf{C}}\}$ e Carla-Beto $\{\underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{B}}\}$ eram as mesmas, já que a ordem dos alunos não implicou em duplas diferentes.

Intuitivamente, o conceito de Combinação Simples associa-se à noção de escolher subconjuntos. No referido exemplo, a partir do conjunto dos alunos selecionados pela professora Sueli {Beto (**B**), Carla (**C**), Danilo (**D**), Eduarda (**E**)} formaram-se 6 possíveis subconjuntos (duplas):

$$\{\mathbf{B}, \mathbf{C}\}, \{\mathbf{B}, \mathbf{D}\}, \{\mathbf{B}, \mathbf{E}\}, \{\mathbf{C}, \mathbf{D}\}, \{\mathbf{C}, \mathbf{E}\}, \{\mathbf{D}, \mathbf{E}\}$$

Assim, define-se Combinação Simples como sendo o número de subconjuntos com exatamente **m** elementos, no qual os subconjuntos escolhidos advêm de **n** elementos de um conjunto tomados/arranjados **m** a **m**. Como a **ordem** dos elementos não importa já que se formam subconjuntos, o cálculo das Combinações Simples pode ser representado nas seguintes etapas:

1.^a – Calculam-se os **n** elementos do conjunto arranjados **m** a **m**, recaindo na expressão (6.):

$$A_{n,m} = \underbrace{\left(\overset{1.^{\text{a}} \text{ posição}}{\tilde{n}} \right) \times \left(\overset{2.^{\text{a}} \text{ posição}}{\overbrace{n-1}} \right) \times \left(\overset{3.^{\text{a}} \text{ posição}}{\overbrace{n-2}} \right) \times \cdots \times \left[\overset{m\text{-ésima posição (última)}}{\overbrace{n-(m-1)}} \right]}_{m \text{ fatores}}$$

No caso do exemplo, para os 4 alunos arranjados 2 a 2 temos:

$$A_{n,m} = A_{4,2} = (n) \times (n-1) = \left(\overset{\text{"1.ª posição" da dupla}}{\tilde{4}} \right) \times \left(\overset{\text{"2.ª posição" da dupla}}{\overbrace{4-1}} \right) = 4 \times 3 = 12$$

2.^a – Calculam-se as permutações possíveis de serem formadas com os **m** elementos do subconjunto. Tal cálculo determina o múltiplo de subconjuntos que irá se repetir. Por meio da expressão (1.) é possível realizar tal cálculo:

$$P_m = m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

No referido exemplo, permutam-se os 2 elementos (alunos) que formam os subconjuntos (duplas):

$$P_m = P_2 = m \times (m-1) = (2) \times (2-1) = 2 \times 1 = 2$$

3.^a – Para calcular o total de Combinações Simples ($C_{n,m}$), divide-se o total dos **n** elementos arranjados **m** a **m** pelo total das permutações formadas com os **m** elementos do subconjunto:

$$C_{n,m} = \frac{A_{n,m}}{P_m} = \frac{\underbrace{\left(\overset{1.^{\text{a}} \text{ posição}}{\tilde{n}} \right) \times \left(\overset{2.^{\text{a}} \text{ posição}}{\overbrace{n-1}} \right) \times \left(\overset{3.^{\text{a}} \text{ posição}}{\overbrace{n-2}} \right) \times \cdots \times \left[\overset{m\text{-ésima posição (última)}}{\overbrace{n-(m-1)}} \right]}_{m \text{ fatores}}}{m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1} \quad (8.)$$

Ao realizar tal divisão excluem-se os subconjuntos repetidos, no caso do exemplo as duplas repetidas. Aplicando tal expressão (8.) neste exemplo temos:

$$C_{4,2} = \frac{A_{4,2}}{P_2} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = \frac{12}{2} = 6 \text{ possíveis duplas}$$

A partir dos 3 tipos de agrupamentos (Arranjo, Combinação e Permutação) percebe-se que a solução da maioria dos problemas envolvendo a Combinatória depende da natureza dos mesmos, ou seja, será necessário analisar quando a ordem dos elementos importa ou não.

1. Classifique, quando possível, os problemas abordados no 15.º encontro (item 15.4) considerando os 3 tipos de agrupamentos estudados:

PROBLEMA		CLASSIFICAÇÃO
1.		
2.		
2.1.		
3.	a)	
	b)	
	c)	
4.	1. ^a	
	2. ^a	

	proposta	
	3. ^a	
	proposta	
	4. ^a	
	proposta	
	5. ^a	
	proposta	
	6. ^a	
	proposta	
	5.	
	a)	
	b)	
6.	c)	
	d)	
	e)	
	7.	
	7.1.	
	8.	
	8.1.	

17.3 Uma possível relação entre Combinatória, Estatística e Probabilidade

Como já salientado, a Combinatória, a Estatística e a Probabilidade constituem o bloco denominado ‘Tratamento da Informação’. Além das especificidades de cada uma, faz-se possível o estabelecimento de relações entre as mesmas. No desafio 5 (item 13.3.1), por exemplo, antes de calcular a probabilidade de não sair soma 5 nas faces de dois dados perfeitos lançados simultaneamente, foi necessário denotar os 36 pares provenientes de tal lançamento. Assim, para solucionar um problema pertencente à Probabilidade utilizou-se da Combinatória e da Estatística.

Para o cálculo do número dos possíveis pares a serem formados com as faces dos dois dados lançados simultaneamente, recorre-se ao Princípio Fundamental da Contagem (Combinatória). A partir desse princípio temos:

$$\text{N}^\circ (\text{pares possíveis}) = \overset{\text{possibilidades do 1.º dado}}{\widehat{6}} \times \overset{\text{possibilidades do 2.º dado}}{\widehat{6}} = 36$$

, sendo que em cada lançamento de cada dado há 6 possibilidades de saída: {(FACE 1) ou (FACE 2) ou (FACE 3) ou (FACE 4) ou (FACE 5) ou (FACE 6)}.

Além de calcular o total de possíveis pares foi preciso obtê-los para saber, do total dos pares, quais não possuíam soma 5. Para a construção de tais pares utilizou-se da seguinte representação retangular por meio de uma Tabela (Estatística):

2.º DADO (lançado)	6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
	5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
	4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
	3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
	2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
	1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
Face		1	2	3	4	5	6
1.º DADO (lançado)							

A obtenção de tais pares também poderia advir do Diagrama de Árvore, ferramenta essa importante à Combinatória.

Por fim, sabendo que o total de pares provenientes do lançamento de dois dados simultâneos é 36 e o total de pares cuja soma não seja 5 é 32, calcula-se a Probabilidade por meio da seguinte divisão (razão):

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{número de pares cuja soma não é 5}}{\text{número total de pares}} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9} \cong 0,89$$

O valor encontrado ($\cong 0,89$) indica que há aproximadamente 89% de chance de não sair soma 5 a partir do lançamento simultâneo de dois dados perfeitos.

17.4 Algumas considerações sobre a Probabilidade

A Probabilidade representa uma das áreas da Matemática que “cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.” (DANTE, 2004, p. 379). Entende-se por experimentos aleatórios os fenômenos produzidos pelo homem, como por exemplo, o lançamento simultâneo de dois dados perfeitos – denotado no item anterior. Nos fenômenos aleatórios os resultados não são previsíveis, ou seja, não é possível determinar ‘com certeza’ o resultado a ser obtido.

Para calcular a Probabilidade, isto é, a chance de ocorrência de determinado **Evento Aleatório**, utiliza-se a seguinte razão:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \quad (9.)$$

, onde:

A representa o **Evento Aleatório**, ou seja, o conjunto dos elementos dos quais se espera a ocorrência;

Ω (Lê-se ‘Ômega’) indica o **Espaço Amostral**, isto é, o conjunto de todos os resultados possíveis advindos de um experimento ou fenômeno aleatório.

No exemplo utilizado anteriormente, o Evento Aleatório – não ocorrência de soma 5 – é constituído pelos seguintes pares:

$A = \{(1,6), (1,5), (1,3), (1, 2), (1, 1), (2, 6), (2, 5), (2, 4), (2, 2), (2, 1), (3, 6), (3, 5), (3, 4), (3, 3), (3, 1), (4, 6), (4, 5), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (5, 6), (5, 5), (5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1), (6, 6), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1)\}$, totalizando $n(A) = 32$.

Já o Espaço Amostral é composto por todos os possíveis pares advindos do experimento aleatório – lançamento simultâneo de dois dados perfeitos. Observe-o:

$\Omega = \{(1,6), (1,5), (1, 4), (1,3), (1, 2), (1, 1), (2, 6), (2, 5), (2, 4), (2, 3), (2, 2), (2, 1), (3, 6), (3, 5), (3, 4), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (4, 6), (4, 5), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1), (5, 6), (5, 5), (5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1), (6, 6), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1)\}$, totalizando $n(\Omega) = 36$.

1. No lançamento de um dado, defina o **Espaço Amostral** e os seguintes **Eventos Aleatórios**:

- A: ocorrência de face par.
- B: ocorrência de face menor do que 3.
- C: ocorrência de face ímpar.
- D: ocorrência de face menor do que 1.
- E: ocorrência de face menor do que 7.

17.6 Desafios para casa: Análise Combinatória

1. As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Quantas placas podem ser criadas com as letras **A**, **B** e **C** e os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, podendo repetir a letra e não podendo repetir o algarismo?

[illegible]

2. A diretoria de um clube é composta por 12 membros que podem ocupar a função de presidente, secretário ou tesoureiro. De quantas maneiras pode-se formar, com os 12 membros, chapas que contenham presidente, secretário e tesoureiro?

[illegible]

3. Seis amigos foram ao parque de diversões ‘andar’ de montanha russa. Eles pretendem ir no mesmo carrinho; no entanto, no banco da frente – que ‘produz’ maior emoção – só cabem três pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem escolher o trio que irá no banco da frente?

[illegible]

4. Quantos são os anagramas possíveis da palavra PAPAGAIIO?

[illegible]

18 DÉCIMO OITAVO ENCONTRO

18.1 Retomando os ‘desafios para casa’ envolvendo Análise Combinatória

No encontro anterior foi solicitada a solução de quatro desafios (situações problemas) envolvendo a Combinatória. Observe as soluções comentadas de tais desafios a seguir:

DESAFIO (1): As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Quantas placas podem ser criadas com as letras **A, B e C** e os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, podendo repetir a letra e não podendo repetir o algarismo?

Solução: As placas a serem formadas possuem a seguinte ‘configuração’:

1.^a Letra 2.^a Letra 3.^a Letra 1.^o Algarismo 2.^o Algarismo 3.^o Algarismo 4.^o Algarismo

7 DÍGITOS

As três primeiras posições são formadas de 3 letras. Como as letras disponíveis são 3 (A, B, C) e podem ser repetidas, pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$\underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3 \text{ DÍGITOS}} = 27 \text{ possibilidades para as 3 letras}$$

As quatro ‘últimas’ posições são formadas de 4 algarismos. Como os 7 algarismos disponíveis (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) não podem ser repetidos temos um Arranjo Simples ($A_{7,4}$):

$$A_{7,4} = \underbrace{7 \times 6 \times 5 \times 4}_{4 \text{ DÍGITOS}} = 840 \text{ possibilidades para os 7 algarismos}$$

Para calcular o total de placas possíveis multiplicam-se os dois resultados encontrados:

$$\text{Total de placas} = 27 \times 840 = 22680$$

R: Podem ser criadas 22680 placas diferentes.

DESAFIO (2): A diretoria de um clube é composta por 12 membros que podem ocupar a função de presidente, secretário ou tesoureiro. De quantas maneiras pode-se formar, com os 12 membros, chapas que contenham presidente, secretário e tesoureiro?

Solução: As chapas a serem formadas devem possuir presidente, secretário e tesoureiro. Como a ordem neste caso é importante, os 12 membros devem ser tomados/arranjados 3 a 3. Para o cálculo das chapas possíveis utiliza-se a expressão abaixo:

$$A_{12,3} = \underbrace{12 \times 11 \times 10}_{3 \text{ FUNÇÕES—Presidente, Secretário e Tesoureiro}} = 1320 \text{ possibilidades}$$

R: É possível formar 1320 chapas diferentes.

DESAFIO (3): Seis amigos foram ao parque de diversões ‘andar’ de montanha russa. Eles pretendem ir no mesmo carrinho, no entanto, no banco da frente – que ‘produz’ maior emoção – só cabem três pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem escolher o trio que irá no banco da frente?

Solução: Consideremos o conjunto dos amigos abaixo:

– Amigos = {Antônio (**A**), Beto (**B**), Camila (**C**), Daniele (**D**), Eduarda (**E**), Fábio (**F**)}

No banco da frente do carrinho da montanha russa só cabem três pessoas, assim, devem ser formados trios entre os 6 amigos. Neste caso a ordem a ser ocupada por cada amigo em cada trio é irrelevante, pois o trio Antônio-Beto-Camila {A, B, C} é o mesmo que Beto-Antônio-Camila {B, A, C}. Desse modo faz-se necessário combinar os 6 amigos 3 a 3.

Para o cálculo das Combinações Simples $C_{6,3}$ realizam-se as seguintes etapas:

1.^a – Calculam-se os 6 amigos do conjunto arranjados 3 a 3:

$$A_{6,3} = \underbrace{6 \times 5 \times 4}_{\substack{3 \text{ OCUPAÇÕES NO BANCO} \\ \text{DA FRENTE DO CARRINHO}}} = 120 \text{ possibilidades de trios}$$

2.^a – Calculam-se as permutações possíveis de serem formadas com os 3 amigos do subconjunto (trio). Tal cálculo determina o múltiplo de subconjuntos (trios) que irão se repetir.

$$P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

3.^a – Para calcular o total de Combinações Simples ($C_{6,3}$), divide-se o total dos 6 amigos arranjados 3 a 3 pelo total das permutações formadas com os 3 elementos do subconjunto (trio):

$$C_{6,3} = \frac{A_{6,3}}{P_3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = \frac{120}{6} = 20 \text{ possíveis trios}$$

R: Há 20 maneiras diferentes de escolher os trios que irão no banco da frente do carrinho da montanha russa.

DESAFIO (4): Quantos são os anagramas possíveis da palavra PAPAGAIO?

Solução: Para o cálculo dos anagramas possíveis da palavra PAPAGAIO basta aplicar a expressão da Permutação Com Repetição já que as letras ‘A’ e ‘P’ se repetem.

Considerando $n = 8$ como representando o número de letras da palavra PAPAGAIO, $\alpha = 3$ indicando as 3 letras ‘A’ repetidas e $\beta = 2$ referindo-se às 2 letras ‘P’ repetidas, temos:

$$P_n^{\alpha,\beta} = P_8^{3,2} = \frac{8!}{3! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{6720}{2} = 3360 \text{ possíveis anagramas}$$

R: A partir da palavra PAPAGAIO é possível formar 3360 diferentes anagramas.

18.2 Retomando a Probabilidade Clássica (Laplaciana)

No encontro anterior, no item 17.4, solicitou-se a ‘descoberta’ do **Espaço Amostral** proveniente do lançamento de um dado e alguns **Eventos Aleatórios** correlatos. Para o referido experimento aleatório – lançamento de um dado – observa-se o seguinte Espaço Amostral (Ω):

$\Omega = \{(\text{FACE } 1), (\text{FACE } 2), (\text{FACE } 3), (\text{FACE } 4), (\text{FACE } 5), (\text{FACE } 6)\}$, totalizando $n(\Omega) = 6$ possibilidades de saída das faces.

Cada uma das ‘FACES’ que compõe o Espaço Amostral recebe o nome de **Ponto Amostral**. Como tal experimento caracteriza-se pelo **Acaso/Incerteza**, então se faz possível apenas uma previsão (*probabilidade*) em relação à saída das faces.

Acerca dos Eventos Aleatórios correlatos ao lançamento do dado temos:

- Evento **A** (face par) = $\{(\text{FACE } 2), (\text{FACE } 4), (\text{FACE } 6)\}$, totalizando $n(A) = 3$.
- Evento **B** (face menor do que 3) = $\{(\text{FACE } 1), (\text{FACE } 2)\}$, totalizando $n(B) = 2$.
- Evento **C** (face ímpar) = $\{(\text{FACE } 1), (\text{FACE } 3), (\text{FACE } 5)\}$, totalizando $n(C) = 3$.
- Evento **D** (face menor do que 1) = $\emptyset$ (Lê-se ‘Vazio’), totalizando $n(D) = 0$.
- Evento **E** (face menor do que 7) = $\{(\text{FACE } 1), (\text{FACE } 2), (\text{FACE } 3), (\text{FACE } 4), (\text{FACE } 5), (\text{FACE } 6)\}$, totalizando $n(E) = 6$.

O Evento **D** por ser vazio é denominado **Evento Impossível**, ou seja, não ocorrerá. Já o Evento **E**, por coincidir com o Espaço Amostral (Ω), recebe o nome de **Evento Certo**, pois há a certeza de que o mesmo ocorrerá.

Utilizando a expressão (9.) definida no item 17.4 calcula-se a Probabilidade, isto é, a chance de ocorrência de cada um dos referidos eventos:

$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ ou } 50\%$
$p(B) = \frac{\text{número de elementos de } B}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \cong 0,3333 \text{ ou } 33,33\%$
$p(C) = \frac{\text{número de elementos de } C}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ ou } 50\%$
$p(D) = \frac{\text{número de elementos de } D}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0$
$p(E) = \frac{\text{número de elementos de } E}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{6}{6} = 1 \text{ ou } 100\%$

Tais cálculos realizados ‘devem-se’ à definição Clássica de Probabilidade (ou Modelo Laplaciano) pelo fato do experimento aleatório em questão (lançamento de um dado) possuir um Espaço Amostral **Equiprovável**. Considera-se Equiprovável todo Espaço Amostral cujos

⁴⁶ **FR** – ‘lê-se ‘Frequência Relativa’.

200	94	47%
2000	1034	51,7%
20000	10091	50,45%

Previsões do tempo, resultados eleitorais, mortalidade causada por doenças, entre outras, são probabilidades calculadas usando-se frequências relativas de pesquisas estatísticas. Nesses casos, quanto maior for o histórico de dados a ser analisado, melhor será a previsão.

Ao término do tempo disponibilizado para a discussão, a professora Sueli registrou na lousa algumas atividades. Observe-as:

1. Na tabela presente no texto como foram calculados os valores da Frequência Relativa? Realize tais cálculos.

2. Um dado foi lançado 2400 vezes, obtendo-se o seguinte resultado:

FACE	Número de Vezes (FA)	Frequência Relativa (FR)
1	356	
2	378	
3	305	
4	317	
5	556	
6	488	

a) Complete a coluna referente à Frequência Relativa (FR) expressando os valores em porcentagem.

b) Em sua opinião, o dado lançado pode ser considerado ‘honesto’/‘perfeito’? Justifique a sua resposta.

3. Há alguma relação entre a Probabilidade Clássica e a Probabilidade Frequentista? Discorra sobre.

[illegible]

Visando desafiar ainda mais seus alunos, a professora Sueli propôs alguns desafios. Além de envolver Probabilidade, os problemas utilizados ‘colaboraram’ à constante retomada/aprofundamento do pensamento combinatório. Solucione tais desafios compartilhando os resultados obtidos com o grupo.

a) pelo menos 2 coroas.
b) exatamente 2 coroas.
c) pelo menos 1 coroa.

[illegible]

a) uma bola verde?
b) uma bola azul?
c) uma bola azul ou uma bola verde?

3. Um casal planeja ter exatamente 2 filhos. Qual é a probabilidade de:

- a) duas crianças serem meninas?
- b) duas crianças serem meninos?
- c) pelo menos uma criança ser menino?
- d) nenhuma criança ser menina?

4. Uma urna contém as letras A, A, A, N, N e D. Retira-se letra por letra. Qual a probabilidade de sair a palavra ANANDA?

18.5 Um desafio final

Elabore uma Situação de Ensino, a ser apresentada no último encontro, visando à abordagem de um (ou mais) conteúdo(s) pertencente(s) ao bloco ‘Tratamento da Informação’. Denote, brevemente, os objetivos a serem alcançados, a metodologia a ser utilizada pelo professor, os recursos necessários e os instrumentos de avaliação. Fundamente tal proposta na Epistemologia Genética valendo-se dos assuntos abordados.

18.6 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’

O que foi possível concluir a respeito dos assuntos discutidos neste encontro envolvendo a Probabilidade? Escreva, após, as dúvidas provenientes das discussões realizadas.

Dúvidas:

19 DÉCIMO NONO ENCONTRO

19.1 Retomando alguns desafios envolvendo Probabilidade

No encontro anterior foram propostos quatro desafios envolvendo a Probabilidade, sendo que, em três deles, fez-se necessário a Combinatória para a determinação do Espaço Amostral. Observe as soluções comentadas de tais desafios e confronte com as elaboradas por você.

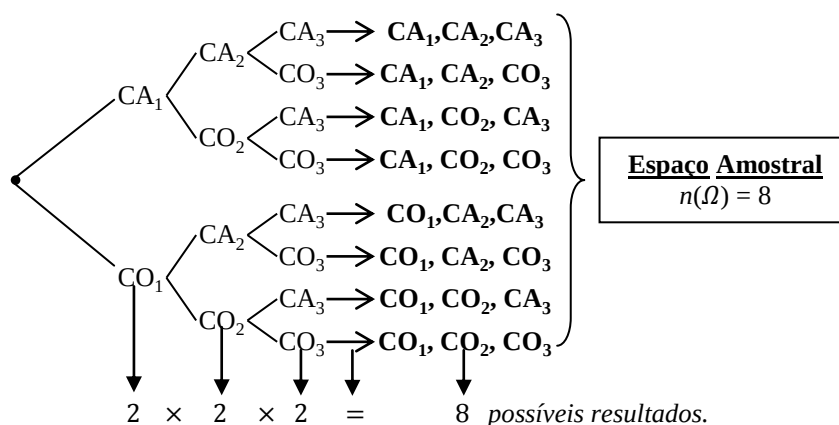
DESAFIO (1): Eduardo possui 3 moedas perfeitas distinguíveis. No lançamento simultâneo dessas 3 moedas, qual é a probabilidade de serem obtidas:

- pelo menos 2 coroas.
- exatamente 2 coroas.
- pelo menos 1 coroa.

Solução: Num primeiro momento faz-se necessário determinar o Espaço Amostral do experimento aleatório – lançamento de 3 moedas perfeitas distinguíveis. Consideremos as seguintes notações:

- CA₁ (Cara da Moeda 1) e CO₁ (Coroa da Moeda 1);
- CA₂ (Cara da Moeda 2) e CO₂ (Coroa da Moeda 2);
- CA₃ (Cara da Moeda 3) e CO₃ (Coroa da Moeda 3), sendo Moeda 1 ≠ Moeda 2 ≠ Moeda 3.

Por meio do Diagrama de Árvore obtém-se o Espaço Amostral, ou seja, todos os possíveis resultados provenientes do lançamento destas 3 moedas. Observe-o a seguir:



a) O Evento Aleatório – pelo menos 2 coroas – é composto pelas seguintes possibilidades:

$A = \{(CA_1, CO_2, CO_3), (CO_1, CA_2, CO_3), (CO_1, CO_2, CA_3), (CO_1, CO_2, CO_3)\}$, totalizando $n(A) = 4$.

Logo, há 4 possibilidades em 8 de ocorrer ‘pelo menos 2 coroas’. Utilizando a expressão (9.) temos:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ ou } 50\%$$

R: Há 50% de chance de ocorrer ‘pelo menos 2 coroas’ no lançamento de 3 moedas perfeitas distinguíveis.

b) O Evento Aleatório – exatamente 2 coroas – é composto pelas seguintes possibilidades:

$B = \{(CA_1, CO_2, CO_3), (CO_1, CA_2, CO_3), (CO_1, CO_2, CA_3)\}$, totalizando $n(B) = 3$.

Logo, há 3 possibilidades em 8 de ocorrer ‘exatamente 2 coroas’. Utilizando a expressão (9.) temos:

$$p(B) = \frac{\text{número de elementos de } B}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8} = 0,375 \text{ ou } 37,50\%$$

R: Há 37,50% de chance de ocorrer ‘exatamente 2 coroas’ no lançamento de 3 moedas perfeitas distinguíveis.

c) O Evento Aleatório – pelo menos 1 coroa – é composto pelas seguintes possibilidades:

$C = \{(CA_1, CA_2, CO_3), (CA_1, CO_2, CA_3), (CA_1, CO_2, CO_3), (CO_1, CA_2, CA_3), (CO_1, CA_2, CO_3), (CO_1, CO_2, CA_3), (CO_1, CO_2, CO_3)\}$, totalizando $n(C) = 7$.

Logo, há 7 possibilidades em 8 de ocorrer ‘pelo menos 1 coroa’. Utilizando a expressão (9.) temos:

$$p(C) = \frac{\text{número de elementos de } C}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{7}{8} = 0,875 \text{ ou } 87,50\%$$

R: Há 87,50% de chance de ocorrer ‘pelo menos 1 coroa’ no lançamento de 3 moedas perfeitas distinguíveis.

DESAFIO (2): Lucas colocou numa caixa opaca 7 bolas verdes e 5 bolas azuis. Qual é a probabilidade de, ao acaso, retirar:

- uma bola verde?
- uma bola azul?
- uma bola azul ou uma bola verde?

Solução: A caixa opaca na qual Lucas colocou 7 bolas verdes (BV) e 5 bolas azuis (BA) constitui o seguinte Espaço Amostral:

$\Omega = \{BV_1, BV_2, BV_3, BV_4, BV_5, BV_6, BV_7, BA_1, BA_2, BA_3, BA_4, BA_5\}$, totalizando $n(\Omega) = 12$ bolas.

a) O Evento Aleatório ‘uma bola verde’ é composto pelas seguintes possibilidades:

$A = \{BV_1, BV_2, BV_3, BV_4, BV_5, BV_6, BV_7\}$, totalizando $n(A) = 7$.

Como na caixa opaca há 7 bolas verdes, então há 7 possibilidades em 12 de retirar uma bola verde ao acaso. Utilizando a expressão (9.) temos:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7}{12} \cong 0,5833 \text{ ou } 58,33\%$$

R: Há aproximadamente 58,33% de chance de retirar da caixa uma bola verde ao acaso.

b) O Evento Aleatório ‘uma bola azul’ é composto pelas seguintes possibilidades:

$B = \{BA_1, BA_2, BA_3, BA_4, BA_5\}$, totalizando $n(B) = 5$.

Como na caixa opaca há 5 bolas azuis, então há 5 possibilidades em 12 de retirar uma bola azul ao acaso. Utilizando a expressão (9.) temos:

$$p(B) = \frac{\text{número de elementos de } B}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{5}{12} \cong 0,4167 \text{ ou } 41,67\%$$

R: Há aproximadamente 41,67% de chance de retirar da caixa uma bola azul ao acaso.

c) O Evento Aleatório ‘uma bola verde ou uma bola azul’ é composto pelas seguintes possibilidades:

$C = \{BV_1, BV_2, BV_3, BV_4, BV_5, BV_6, BV_7, BA_1, BA_2, BA_3, BA_4, BA_5\}$, totalizando $n(C) = 12$.

Como na caixa opaca há 7 bolas verdes e 5 bolas azuis, então há 12 possibilidades em 12 de retirar uma bola verde ou uma bola azul ao acaso. Utilizando a expressão (9.) temos:

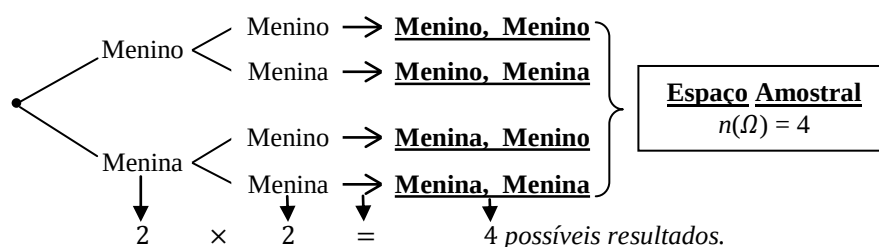
$$p(C) = \frac{\text{número de elementos de } C}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{12}{12} = 1 \text{ ou } 100\%$$

R: Há 100% de chance de retirar da caixa uma bola verde ou uma bola azul ao acaso. Logo, este evento denominado Evento Certo sempre ocorrerá.

DESAFIO (3): Um casal planeja ter exatamente 2 filhos. Qual é a probabilidade de:

- duas crianças serem meninas?
- duas crianças serem meninos?
- pelo menos uma criança ser menino?
- nenhuma criança ser menina?

Solução: Inicialmente faz-se necessário determinar o Espaço Amostral do ‘experimento aleatório’ – nascimento de 2 filhos. Por meio do Diagrama de Árvore obtém-se o referido Espaço Amostral:



a) O Evento Aleatório ‘duas crianças serem meninas’ é composto pela seguinte possibilidade:

$A = \{(Menina, Menina)\}$, totalizando $n(A) = 1$.

Há 1 possibilidade em 4 de duas crianças serem meninas. Utilizando a expressão (9.) temos:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ ou } 25\%$$

R: Há 25% de chance de duas crianças serem meninas.

b) O Evento Aleatório ‘duas crianças serem meninos’ é composto pela seguinte possibilidade:

$B = \{(Menino, Menino)\}$, totalizando $n(B) = 1$.

Há 1 possibilidade em 4 de duas crianças serem meninos. Utilizando a expressão (9.) temos:

$$p(B) = \frac{\text{número de elementos de } B}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ ou } 25\%$$

R: Há 25% de chance de duas crianças serem meninos.

c) O Evento Aleatório ‘pelo menos uma criança ser menino’ é composto pelas seguintes possibilidades:

$C = \{(\text{Menino, Menino}), (\text{Menino, Menina}), (\text{Menina, Menino})\}$, totalizando $n(C) = 3$.

Há 3 possibilidades em 4 de pelo menos uma criança ser menino. Utilizando a expressão (9.) temos:

$$p(C) = \frac{\text{número de elementos de } C}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ ou } 75\%$$

R: Há 75% de chance de pelo menos uma criança ser menino.

d) O Evento Aleatório 'nenhuma criança ser menina' é composto pela seguinte possibilidade:

$D = \{(\text{Menino, Menino})\}$, totalizando $n(D) = 1$.

Há 1 possibilidade em 4 de nenhuma criança ser menina. Utilizando a expressão (9.) temos:

$$p(D) = \frac{\text{número de elementos de } D}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ ou } 25\%$$

R: Há 25% de chance de nenhuma criança ser menina.

DESAFIO (4): Uma urna contém as letras A, A, A, N, N e D. Retira-se letra por letra. Qual a probabilidade de sair a palavra ANANDA?

Solução 1: Inicialmente calcula-se a quantidade dos possíveis anagramas a serem formados a partir das letras A, A, A, N, N e D. Este valor representa o total do Espaço Amostral ' $n(\Omega)$ '.

Para tal cálculo basta aplicar a expressão da Permutação Com Repetição já que as letras 'A' e 'N' se repetem. Observe-a abaixo:

$$P_n^{\alpha, \beta} = P_6^{3, 2} = \frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{120}{2} = 60 \text{ possíveis anagramas diferentes}$$

, onde $n = 6$ representa o número de letras, $\alpha = 3$ indica as 3 letras 'A' repetidas e $\beta = 2$ refere-se às 2 letras 'N' repetidas.

Logo $n(\Omega) = 60$.

A probabilidade de sair a palavra ANANDA é de 1 possibilidade em 60 anagramas. Utilizando a expressão (9.) temos:

$$p(\text{ANANDA}) = \frac{n(\text{ANANDA})}{n(\Omega)} = \frac{1}{60} \cong 0,0167 \text{ ou } 1,67\%$$

R: Há aproximadamente 1,67% de chance de sair a palavra ANANDA ao retirar letra por letra da urna.

Solução 2: Para que seja formada a palavra ANANDA, as letras devem ser retiradas da urna, uma a uma, na seguinte ordem:

1.^a Posição 2.^a Posição 3.^a Posição 4.^a Posição 5.^a Posição 6.^a Posição

A e
 N e
 A e
 N e
 D e
 A

A cada posição, a chance de sair determinada letra modifica já que houve diminuição do Espaço Amostral. Por exemplo, na 1.^a posição, a Probabilidade de sair a letra 'A' é:

$$p(\text{saída da 1.ª letra 'A'}) = \frac{n(A)}{n(\Omega^i)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

1.^a Posição

Na 2.^a posição, com a diminuição do Espaço Amostral devido à tirada da 1.^a letra 'A', a Probabilidade de retirar a letra 'N' é:

$$p(\text{saída da 2.ª letra 'N'}) = \frac{n(N)}{n(\Omega^{ii})} = \frac{2}{5}$$

2.^a Posição

Analogamente, para as demais letras temos:

$p(\text{saída da 3.ª letra 'A'}) = \frac{n(A)}{n(\Omega^{iii})} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 3.^a Posição
$p(\text{saída da 4.ª letra 'N'}) = \frac{n(N)}{n(\Omega^{iv})} = \frac{1}{3}$ 4.^a Posição
$p(\text{saída da 5.ª letra 'D'}) = \frac{n(D)}{n(\Omega^v)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 5.^a Posição
$p(\text{saída da 6.ª letra 'A'}) = \frac{n(A)}{n(\Omega^{vi})} = \frac{1}{1} = 1$ 6.^a Posição

Para calcular a Probabilidade de sair a palavra ANANDA, multiplicam-se as Probabilidades referentes às sucessivas retiradas das letras:

$$p(\text{ANANDA}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{2}{120} = \frac{1}{60} \cong 0,0167 \text{ ou } 1,67\%$$

19.2 Ensino de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental o professor deve oportunizar ao aluno a construção de algumas noções pertencentes à Probabilidade. Conforme o PCN (1.^a a 4.^a série):

Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1997, p. 40)

Além de destacar a principal finalidade do ensino de Probabilidade nos anos iniciais, tal documento pontua os seguintes conteúdos conceituais e procedimentais a serem construídos pelo estudante no 2.^o ciclo (3.^a e 4.^a séries):

- Interpretação de dados apresentados por meio de tabelas e gráficos, para identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos.
- Exploração da idéia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de “sorte”.
- Utilização de informações dadas para avaliar probabilidades. (p. 61)

Visando propiciar a construção dos referidos conteúdos, o professor deve organizar situações de ensino pautadas em problemas/desafios ‘próximas’ à realidade do aluno, ou seja, possíveis de serem assimiladas/acomodadas pelo aprendiz. Devido ao ‘momento psicológico’ vivenciado pelo estudante nesta etapa da escolaridade, a abordagem das noções probabilísticas dar-se-á mais ‘intensamente’ no 4.^o e 5.^o ano. No entanto, inúmeras situações envolvendo o previsível e o imprevisível podem (devem) ser gradativamente trabalhadas desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, bem como na Educação Infantil.

Segundo Piaget e Inhelder (1951), antes dos 7-8⁴⁷ anos, aproximadamente, a criança ainda não consegue distinguir o possível do necessário, donde o pensamento oscila entre o previsível e o imprevisível. Essa não diferenciação entre o possível e o necessário deve-se à impossibilidade de compreender a ideia do acaso. Ao serem questionadas sobre o porquê da saída de determinada face de um dado lançado aleatoriamente, a criança desse estágio (pré-operatório) justificará valendo-se do seu desejo, capricho ou fantasia. Com o início das operações ‘concretas’ (7-8 anos a 11-12 anos, aproximadamente), o sujeito consegue estabelecer certos tipos de comparações entre as probabilidades de determinados eventos. Isso se deve, pois o indivíduo diferencia as operações (associadas ao domínio do que é dedutível) do acaso (associado ao domínio do que é imprevisível).

Corroborando na discussão a respeito do ensino de Probabilidade nos anos iniciais, Rodrigues (2006)⁴⁸ pontua:

Quanto a estudos relativos a noções de Probabilidade especificamente nas séries iniciais da escolarização, foi possível identificar os seguintes objetivos: a) compreender noções básicas sobre resultados de acontecimentos (certo, possível, mais provável, mais freqüente); b) adquirir um vocabulário básico para falar a respeito desse conceito matemático e começar a situar as probabilidades de acontecimentos numa escala de 0 a 1; c) identificar características de acontecimentos previsíveis ou aleatórios a partir de situação-problema; d) contribuir para desenvolver a capacidade crítica e autonomia do aluno para que exerça plenamente a

⁴⁷ Tal faixa etária corresponde ao 1.^o e 2.^o anos do Ensino Fundamental.

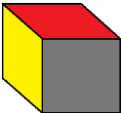
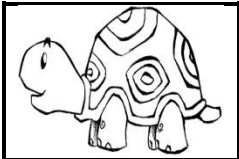
⁴⁸ Em seu artigo, o referido autor faz referência às séries iniciais e não aos anos iniciais. Logo, as considerações esboçadas não ‘abrangem’ o 1.^o ano do Ensino Fundamental.

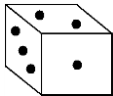
cidadania e; e) contribuir para a construção de um pensamento não determinístico. (p. 9)

Nesse nível de ensino, bem como nos demais, torna-se importante o estabelecimento de relações envolvendo a Probabilidade, a Combinatória e a Estatística. Além de tais áreas, a construção da Probabilidade necessita da construção das estruturas multiplicativas já que a ideia de Probabilidade envolve as noções de proporção, razão (parte/todo – fração).

Por fim, ao propiciar a construção das noções iniciais pertencentes à Probabilidade (e à Combinatória e Estatística) o docente colaborará à constituição de um pensamento matemático não determinístico ‘alicerçado’ na ‘filosofia do azar’. Pensamento esse importante à formação da criticidade que possibilite ao aluno uma ‘maior’ compreensão da realidade circundante.

1. Identifique nas seguintes atividades o conteúdo matemático abordado e o ano a qual se destinam:

ATIVIDADE 1: AS POSSIBILIDADES DE “TIRAR” OS ANIMAIS DO ZOOLÓGICO	
Rogério, Eduardo e Pedro fizeram um dado de cartolina e colaram em cada uma das faces a figura dos animais que eles viram no zoológico. Observe as figuras abaixo:   Figura 1  Figura 2  Figura 3  Figura 4  Figura 5  Figura 6 1. Se Rogério jogar o dado uma vez, qual a chance de sair a Figura 5? Explique como você pensou para responder essa questão. R: _____ 2. Se Eduardo jogar o dado mais uma vez, qual a chance de sair a Figura 3? R: _____ 3. Pedro escolheu a Figura 4 já que ele gosta muito de tartaruga. Se jogar o dado uma vez, qual a possibilidade de sair essa figura? Explique como você pensou para responder essa questão. R: _____ 4. Rogério escolheu as Figuras 1 e 3. Se jogar o dado uma vez, qual a possibilidade de sair uma dessas figuras? Justifique sua resposta. R: _____ 5. Eduardo escolheu a metade das figuras. Se jogar o dado uma vez, qual a possibilidade de sair uma dessas figuras? Explique como você pensou para responder essa questão. R: _____	
Conteúdo abordado:	Ano:

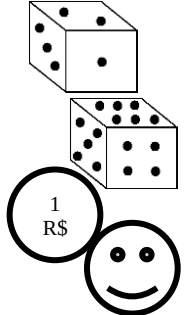
ATIVIDADE 2: O JOGO DE DADOS															
1. Com um grupo de 4 colegas, jogue o dado 6 vezes e complete o quadro com o número da face que caiu em cada jogada.  <table border="1" style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr style="border-top: 2px dashed red; border-bottom: 2px dashed red;"> <th style="padding: 5px;">Número de Jogada</th> <th style="padding: 5px;">Número da Face que caiu na jogada</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="border: none; padding: 5px;">1</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none; padding: 5px;">2</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none; padding: 5px;">3</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none; padding: 5px;">4</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none; padding: 5px;">5</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr style="border-bottom: 2px dashed red;"><td style="border: none; padding: 5px;">6</td><td style="border: none;"></td></tr> </tbody> </table>		Número de Jogada	Número da Face que caiu na jogada	1		2		3		4		5		6	
Número de Jogada	Número da Face que caiu na jogada														
1															
2															
3															
4															
5															
6															

a) Qual número apareceu mais vezes?	b) Qual número apareceu menos vezes?	c) Durante o lançamento, algum número não apareceu?
2. O número de vezes que o dado é jogado influencia as respostas? Pense a respeito com os seus colegas. R: _____		
Conteúdo abordado:		Ano:

ATIVIDADE 3: É PROVÁVEL ACONTECER...

A probabilidade de sair determinado número ao jogar um dado é equiprovável, isto é, a possibilidade de sair o número 2, por exemplo, é igual à de sair o número 4. Na Matemática, a probabilidade é um número que indica a chance de ocorrência de um evento num experimento aleatório; e tal número pode ser expresso por meio de uma fração.

Consideremos uma moeda que possui duas faces: cara e coroa. Se jogarmos a moeda para o alto, a probabilidade de a moeda cair com a face coroa virada para cima é de $\frac{1}{2}$, pois existem duas possibilidades (igualmente possíveis) de a moeda cair com uma das faces viradas para cima (ou coroa ou cara). Assim, a probabilidade de cair a face cara ou a face coroa virada para cima é de 1 em 2.



1. Ao jogarmos um dado, qual a probabilidade de sair o número 5? Escreva a sua resposta utilizando fração.

R: _____

2. Em uma caixa há 4 bolas azuis e 6 bolas verdes. Qual a chance de alguém tirar uma bola verde dessa caixa?

R: _____

Conteúdo abordado:

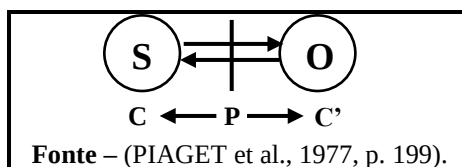
Ano:

19.3 O processo de tomada de consciência

O que representa/significa a Tomada de Consciência? Diferentemente do senso comum que a considera como uma espécie de ‘iluminação’ da consciência, Piaget et al. (1977) a concebe um processo dinâmico e construtivo no qual um esquema de ação é transformado num conceito. Assim, a tomada de consciência equivale, essencialmente, numa conceituação.

Acerca deste processo de tomada de consciência, Becker (2010) pontua:

A tomada de consciência [conforme diagrama abaixo] tem início com objetivos e resultados (periferia – P) de uma ação; só aos poucos o sujeito toma consciência dos fatores internos (C e C’) seja do sujeito (coordenação das ações), seja do objeto (causa e efeito, força, etc.). As “relações entre o sujeito e o seu meio consistem numa interação radical, de modo tal que a consciência não começa pelo conhecimento dos objetos nem pelo da atividade do sujeito, mas por um estado indiferenciado; e é desse estado que derivam dois movimentos complementares, um de incorporação das coisas ao sujeito, o outro de acomodação às próprias coisas” (NI, p. 389). (p. 164)



Exemplificando tal processo de movimento gradativo da periferia (P) ao Centro (C e C’) relembremos o desafio ‘A Torre de Hanói’. No primeiro encontro solicitou-se a solução

desse desafio inicialmente no plano representativo, isto é, valendo-se de representações simbólicas (no papel) sem recorrência ao meio concreto (Torre de Hanói). Com exceção de 2 participantes que solucionaram o desafio para 2 e 3 discos, as demais não conseguiram fazê-lo valendo-se de representações simbólicas. Assim, não foi possível ‘tomar consciência’ do procedimento necessário a tal solução, ou seja, dos fatores internos (C e C’ – propriedade ‘transitiva’ ao utilizar a segunda haste como intermediária na passagem dos discos da primeira para a terceira haste.).

No segundo encontro, após verificar a dificuldade de grande parte das participantes, disponibilizou-se um meio concreto (Torre de Hanói) para ‘o pensar sobre’ o desafio. Como esperado – e corroborando aos estudos de Piaget et al. (1977) – as referidas participantes obtiveram êxito ‘imediato’ para a solução considerando 2 e 3 discos. Nesse caso, o concreto apoiou as ações visando um objetivo (passar os discos da primeira para a terceira haste) até obter-se o resultado (construção da ‘nova’ torre na terceira haste). Logo, solucionou-se o desafio partindo da periferia (P), embora as participantes ainda não tivessem ‘tomado consciência’ dos fatores internos (C e C’).

Por meio desse exemplo, percebe-se que a ‘fonte’/início da tomada de consciência advém da ação do sujeito. Mediante sucessivas assimilações e acomodações provenientes de desequilíbrios/reequilíbrios, a ação vai sendo interiorizada em ‘forma’ de operações permitindo a construção gradativa do conceito (conceituação). No entanto, tal passagem da ação à operação (e conceituação) não se dá de modo direto, sendo observados alguns níveis esboçados por Piaget et al. (1977):

O primeiro desses níveis é o da ação material sem conceituação, mas cujo sistema dos esquemas já constitui um saber muito elaborado. Ora, se esse nível, cujas construções levam às estruturas operatórias mais fundamentais (em suas capacidades de coordenação, mas ainda escapam à consciência do sujeito), pode parecer ao psicólogo uma espécie de começo absoluto, isso não passa, no entanto, de uma ilusão de ponto de vista: ele está ligado por todos os intermediários às fontes orgânicas de que tira sua matéria. O segundo nível é o da conceituação, que tira seus elementos da ação em virtude de suas tomadas de consciência, mas a eles acrescenta tudo o que comporta de novo o conceito em relação ao esquema. Quanto ao terceiro nível, contemporâneo das operações formais que se constituem em torno de 11-12 anos, ele é o das “abstrações refletidas” no sentido definido acima. Seu mecanismo formador, que consiste em operações na segunda potência, portanto em operações novas mas realizadas sobre as operações anteriores, mostra suficientemente que se trata uma vez mais de abstrações a partir do nível precedente, mas compostas e enriquecidas segundo combinações não efetuadas até aquele momento. (p. 208)

Em suma, Piaget et al. (1977) destaca:

[...] o mecanismo da tomada de consciência aparece em todos esses aspectos como um processo de conceituação que reconstrói e depois ultrapassa, no plano da semiotização e da representação, o que era adquirido no plano dos esquemas de ação. Não há, portanto, diferença de natureza, numa tal perspectiva, entre a tomada de consciência da ação própria e o conhecimento das seqüências exteriores ao sujeito, comportando ambos uma elaboração gradativa de noções a partir de um dado, quer este consista em aspectos materiais da ação executada pelo sujeito, quer em aspectos materiais das ações que são realizadas entre os objetos. (p. 204)

1. De que modo essa ‘breve’ e inicial discussão a respeito do processo de tomada de consciência pode colaborar em sua atuação como professor de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental? Pense a respeito.

This image shows a full page of blank handwriting practice paper. It features ten sets of horizontal lines. Each set consists of a solid top line, a dashed middle line, and a solid bottom line, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced across the entire page.

19.4 Momento de Síntese – ‘Idas e Voltas’

O que foi possível concluir a respeito dos assuntos discutidos neste encontro envolvendo o ensino de Probabilidade e o processo de tomada de consciência? Escreva, após, as dúvidas provenientes das discussões realizadas.

[illegible]

Dúvidas:

20 VIGÉSIMO ENCONTRO

20.1 (Re)significando os saberes da experiência acerca da Matemática

Durante seis meses o nosso Grupo de Estudo – alicerçado num trabalho colaborativo pautado na confiança, diálogo/conversação profissional e negociação – oportunizou um ‘pensar sobre’ a ‘futura’ prática docente de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para tanto, diversos assuntos foram discutidos e inter-relacionados, tais como:

1 – O bloco de conteúdo ‘Tratamento da Informação’, seu significado, a importância de sua construção ao aluno e sua constituição (Estatística, Combinatória e Probabilidade):

1.1 – Estatística: Termos da Pesquisa Estatística (População, Amostra, Indivíduo ou Objeto, Variável Qualitativa e Quantitativa), Estatística Representativa (Gráficos e Tabelas) e Estatística Descritiva (Média Aritmética, Mediana, Moda, Variância e Desvio Padrão);

1.2 – Combinatória: Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo), Diagrama de Árvore, Permutação Simples e Com Repetição, Arranjo Simples e Com Repetição e Combinação;

1.3 – Probabilidade: Espaço Amostral; Espaço Amostral Equiprovável; Evento Aleatório (Certo, Provável, Impossível), Probabilidade (Clássica e Frequentista).

2 – O Ensino de Estatística, Combinatória e Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental: situações de ensino, a importância da proposição de problemas (desafios), rol de conteúdos e sua distribuição-abordagem nos anos iniciais.

3 – Tópicos da Teoria de Piaget (Epistemologia Genética):

3.1 – Gênese-construção da Classificação: Coleções Figurais (Fase I), Coleções Não-Figurais (Fase II) e Classes (Fase III);

3.2 – A Atividade do sujeito;

3.3 – A Teoria da Assimilação: Organização e Adaptação (Assimilação e Acomodação);

3.4 – A questão da ‘Necessidade’ na Educação;

3.5 – Os Fatores do desenvolvimento cognitivo: Maturação Orgânica, Interação Social; Experiência Física e Lógico-matemática e Equilibração;

3.6 – Os Estádios do desenvolvimento cognitivo: Sensorio-Motor, Pré-Operatório, Operatório Concreto e Operatório Formal;

3.7 – O Mecanismo de Equilibração;

3.8 – O Processo de Tomada de Consciência.

4 – Teses Epistemológicas: Empirismo e Racionalismo.

Por meio de situações problemas (desafios) os referidos assuntos foram abordados visando à construção/(re)significação dos saberes experienciais acerca da Matemática e seu ensino e aprendizagem. Conforme denotado no primeiro encontro, a Formação Inicial deve oportunizar ao licenciando (futuro professor) uma reflexão a respeito desses saberes experienciais. Fiorentini et al. (1998), García (1999) e Pimenta (2008) apontam a necessidade das Licenciaturas propiciarem uma espécie de ‘reeducação’ de tais saberes. Caso contrário, respostas – como a denotada abaixo por uma professora da 2.^a série do Ensino Fundamental – continuarão a serem observados no universo escolar.

Pesquisador: Ao representar as operações aritméticas na lousa, você utilizou uma representação em forma de casas para indicar as classes decimais: unidade e dezena. Por que decidiu utilizar esta representação?

Professora – 2.^a série: *Sinceridade, porque os livros trazem isso, eu aprendi assim (...); é bem assim mesmo, eu aprendi assim e eu sigo porque eles (os estudantes) também se confundem quando eu não faço essa divisão (ou seja, “casinha” da unidade, “casinha” da dezena). Então eles já confundem com a divisão, sem eu acho que seria um pouco mais difícil! Mas é porque é isso mesmo, os livros trazem assim, eu aprendi assim e a gente vai trabalhando da mesma forma!* (CAETANO, 2009, p. 282)

Os saberes construídos pela professora da 2.^a série enquanto aluna da Educação Básica foram ‘tão’ fortes que acabaram influenciando a sua prática docente. Acerca de tal influência, Tardif (2002) observa:

[...], uma boa parte do que os professores sabem sobre o ensino, sobre os papéis do professor e sobre como ensinar provém de sua própria história de vida, principalmente de sua socialização enquanto alunos. Os professores são trabalhadores que ficaram imersos em seu lugar de trabalho durante aproximadamente 16 anos (em torno de 15.000 horas), antes mesmo de começarem a trabalhar. *Essa imersão se expressa em toda uma bagagem de conhecimentos anteriores, de crenças, de representações e de certezas sobre a prática docente.* (TARDIF, 2002, p. 68, grifo nosso)

Em relação aos saberes experienciais referentes à Matemática, uma possível (re)significação – a ser feita pelo futuro professor – reside em compreendê-la enquanto uma Ciência proveniente de uma ‘longa’ construção e sistematização realizada pela humanidade historicamente. Ao contrário do que muitos propagam, a Matemática não representa ‘apenas’ a Ciência da ‘Certeza’, mas, também, do ‘Talvez’. Além dos números e cálculos, a Matemática ocupa-se pela teorização do espaço, estudo e mensuração das formas e objetos, estimativa, análise e interpretação das informações (dados) via abordagem estatística, combinatória e probabilística, desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, dentre outras. Por se tratar de uma construção humana, tal ciência não deve ser (mais) encarada como ‘algo’ inacessível, um bicho de ‘sete cabeças’, mas sim um conhecimento possível de ser aprendido por todos.

Nesse processo de aprendizagem o professor possui um importante papel ao planejar/executar/avaliar situações de ensino que abordem os conteúdos matemáticos (conceituais, procedimentais e atitudinais). Espera-se que, ao longo do Grupo de Estudo, tenha havido uma possível (re)significação a respeito do ensino (e aprendizagem) de Matemática. Diferentemente do ensino vivenciado pelas participantes que fora calcado, ora no empirismo, ora no racionalismo, (re)significar o ensino de Matemática na perspectiva construtivista implica em concebê-lo um processo de constante ação/reflexão/‘nova’ ação/‘nova’ reflexão pelo professor propiciando a constante ação-operação/atividade pelo aluno. Atividades que promovam a memorização sem significado dos procedimentos (algoritmos) devem ser substituídas por aquelas que permitam a compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos. Nesse ‘novo’ contexto, o autoritarismo que induz à heteronomia deve dar espaço ao diálogo/troca de ideias entre aluno-aluno e aluno-professor.

Além do diálogo e das relações interindividuais que colaboram à gradativa constituição da autonomia, nos anos iniciais deve ser dada atenção à importância da manipulação/experimentação no concreto ao ‘pensar matemático’ do aluno. A manipulação, no entanto, não é concebida como um fim em si mesma, mas um apoio às soluções provisórias elaboradas mediante um desafio (desequilíbrio/necessidade). Por exemplo, antes de compreender (conceituar) uma classe hierárquica constituída pelas operações lógicas $A + A' = B$; $A = B - A'$ e $A' = B - A$, o aluno necessitou experimentar/vivenciar/construir inúmeras coleções (das figurais às não-figurais) valendo-se dos mais diferentes objetos.

Em suma, a reflexão de Furth (1997) torna-se pertinente já que o presente Grupo de Estudo representou uma possível tentativa de mudança na Formação Inicial de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental:

Sei que mudança é coisa difícil e que toda espécie de argumentos pode ser apresentada contra qualquer mudança; desses argumentos o não menos importante é aquele que afirma que qualquer coisa proposta como mudança ainda não foi tentada.

E como não foi tentada, não sabemos se dará certo. Logo... nenhuma mudança.
(FURTH, 1997, p. 220)

REFERÊNCIAS

- ANTUNES, F. C. A.; ZAPPAROLI, F. V. D.; ARRUDA, S. de. M. A construção dos saberes docentes no estágio supervisionado em Matemática. In: Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, 5., 2005, Bauru. **Atas do V ENPEC**, Bauru: ABRAPEC, 2005. v.1, p. 1-9.
- BATTRO, A. M. **O pensamento de Jean Piaget: psicologia e epistemologia**. Tradução de Lino Macedo. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1976. 389 p.
- BECKER, F. **O caminho da aprendizagem em Jean Piaget e Paulo Freire: da ação à operação**. Rio de Janeiro: Vozes, 2010. 296 p.
- BORJA, A. de et al. **Construtivismo em revista**. São Paulo: FDE. Diretoria Técnica, 1993. 114 p.
- BRASIL (SEF). **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, DF: MEC, 1997. 142 p.
- BRASIL (SEF). **Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática**. Brasília, DF: MEC, 1998. 148 p.
- CAETANO, R. S. **Alguns Reflexos da Didática Construtivista no Ensino de Matemática nas Quatro Séries Iniciais do Ensino Fundamental**. 2009. 431 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Ciências, UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA, Bauru, 2009.
- CAPORALE, S. M. M.; NACARATO, A. M. As relações estabelecidas entre os saberes da experiência e os saberes da matemática, pelos(as) professores (as), em exercício, ao freqüentarem o curso de Pedagogia. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós Graduação em Educação Matemática, 7., 2003, Rio Claro. **Anais do VII EBRAPEM**, Rio Claro: UNESP, 2003. v.1, p. 1-5.
- CARRAHER, T. N. **O método clínico: usando os exames de Piaget**. 5. ed. São Paulo: Cortez, 1998. 161 p.
- CARVALHO, R. P. F. **A formação de conceitos probabilísticos em alunos da 4.^a série do Ensino Fundamental**. 2005. 96 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Católica de Brasília, Brasília.
- CARVALHO, R. P. F. Formação de conceitos probabilísticos em crianças da 4.^a série do Ensino Fundamental. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife. **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004.
- COSTA, C. Ap. da. Análise Combinatória: como aborda-la a partir do Ensino Fundamental? In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife. **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004.
- COSTA NETO, P. L. de O. **Estatística**. São Paulo: Edgard Blücher, 2002. 266 p.

COUTINHO, C. de Q. e S.; GONÇALVES, M. C. O livro didático e a Formação do Professor de Matemática para o ensino de probabilidades. In: II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2003, Santos. **Anais do II SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Santos: SBEM, 2003.

CUNHA, M. A. V. **Didática fundamentada na teoria de Piaget**. Rio de Janeiro: Forense, 1973. 95 p.

CURI, E. **Formação de professores polivalentes: uma análise de conhecimentos para ensinar Matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos**. 2004. 197 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 2 ed. São Paulo: Ática, 2004. 624 p.

DAY, C. **Developing teachers: The challenges of lifelong learning**. London: Falmer Press, 1999.

DELGADO, C. R. S. C. A. **Reflexão sobre as práticas de ensino da Matemática de futuros professores do 1.º ciclo: três estudos de caso**. 2003. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2003.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam a construção do raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8.ª série do Ensino Fundamental**. 2001. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

FELÍCIO, H. M. dos S.; OLIVEIRA, R. A. de. A formação prática e professores no estágio curricular. **Educar**, Curitiba, n.32, p. 215-232, 2008.

FIORENTINI, D. et al. **Cartografias do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a)**. Campinas: Mercado das Letras: Associação de Leitura do Brasil – ALB, 1998. 335 p.

FURTH, H. G. **Piaget na sala de aula**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1997. 231 p.

FURTH, H. G.; WACHS, H. **Piaget na prática escolar: A criatividade no currículo integral**. 6. ed. Tradução de Nair Lacerda. São Paulo: IBRASA, 1995. 339 p.

GARCÍA, C. M. **Formação de Professores: para uma mudança educativa**. Porto: Porto Editora, 1999. 271 p.

GOMES, M. G.; MORETTI, M. T. Conhecimento matemático: obstáculos e conflitos na formação de professores do Ensino Fundamental. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós Graduação em Educação Matemática, 7., 2003, Rio Claro. **Anais do VII EBRAPEM**, Rio Claro: UNESP, 2003. v.1, p. 1-5.

KAMII, C. **A criança e o número: Implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 a 6 anos**. Tradução de Regina A. de Assis. Campinas: Papirus, 2005. 124 p.

LIMA, L. de O. **A escola secundária moderna: organização, métodos e processos**. 10. ed. Petrópolis: Vozes, 1973. 670 p.

LIMA, L. de O. **Piaget: Sugestões aos educadores**. Petrópolis: Vozes, 2000. 254 p.

LOPES, C. Ap. E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil**. 2003. 281 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

LOPES, C. Ap. E. A Estatística e a Probabilidade na Educação Básica e a Formação de Professores. In: III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006a, Águas de Lindóia. **Anais do III SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Águas de Lindóia: SBEM, 2006.

LOPES, J. M. O ensino de Probabilidades através de jogos e da metodologia de resolução de problemas. In: III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006, Águas de Lindóia. **Anais do III SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Águas de Lindóia: SBEM, 2006.

MIGUEL, M. I.; MAGINA, S. As estratégias de solução de problemas combinatórios: um estudo exploratório. In: II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2003, Santos. **Anais do II SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Santos: SBEM, 2003.

MUNIZ, C. A.; GONÇALVES, H. J. L. A Educação Estatística no Ensino Fundamental: discussões sobre a práxis de professores que ensinam Matemática no interior de Goiás. In: III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006, Águas de Lindóia. **Anais do III SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Águas de Lindóia: SBEM, 2006.

NEHRING, C. M.; POZZOBON, M. C. C. Os saberes docentes em um curso de licenciatura em Matemática. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 3., 2006, Águas de Lindóia. **Anais do III SIPEM**, Curitiba: Editora UFPR, 2006. v.1, p. 1-19.

PAMPLONA, A. S. A resolução de formulação de problemas de probabilidades pelo professor de Matemática. In: III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006, Águas de Lindóia. **Anais do III SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Águas de Lindóia: SBEM, 2006.

PIAGET, Jean Piaget et. al. **Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais**. Trad. Fernando Becker e Petronilha Beatriz G. da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. 292 p.

PIAGET, J. **A construção do real na criança**. Trad. Ramon Américo Vasques. 3.^a ed., São Paulo: Ática, 2002. 392 p.

PIAGET, J. **A equilibração das estruturas cognitivas: o problema central do desenvolvimento**. Tradução de Marion M. dos S. Penna. Rio de Janeiro: Zahar Editora, 1976.

- PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança**. Trad. Álvaro Cabral e Christiano Monteiro Oiticica. 3.^a ed., Rio de Janeiro: LTC, 1990. 370 p.
- PIAGET, J. et al. **A Tomada de Consciência**. São Paulo: Melhoramentos, 1977. 211 p.
- PIAGET, J. **Ensaio de lógica operatória**. Porto Alegre: Globo, 1976, 389 p.
- PIAGET, J. **O Juízo moral na criança**. São Paulo: Summus, 1994. 304 p.
- PIAGET, J. **O nascimento da inteligência na criança**. Trad. Álvaro Cabral. 4.^a ed., Rio de Janeiro: LTC, 1987. 389 p.
- PIAGET, J. **Para onde vai a Educação?** 16. ed. Tradução de Ivete Braga. Rio de Janeiro: José Olympio, 2002. 80 p.
- PIAGET, J. **Pedagogia**. Trad. Joana Chaves. Lisboa: Instituto Piaget, 1998. 256 p.
- PIAGET, J. **Seis estudos de psicologia**. 24. ed. Tradução de Maria Alice Guimarães D' Amorim e Paulo Sérgio Lima Silva. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2001. 136 p.
- PIAGET, J.; INHELDER, B. **A origem da idéia de acaso na criança**. Tradução de Ana Maria Coelho. Rio de Janeiro: Record, 1951. 328 p.
- PIAGET, J.; INHELDER, B. **Gênese das estruturas lógicas elementares**. Tradução de Álvaro Cabral. 2. ed., Rio de Janeiro: Zahar, 1971. 356 p.
- PIMENTA, S. G. (org.). **Saberes pedagógicos e atividade docente**. 6.ed. São Paulo/BRA: Cortez, 2008.
- QUEIROZ, J. C. G. **As fontes de saber matemático de professores dos anos iniciais**. 2007. 109 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.
- ROCHA, L. P. **(Re)constituição dos saberes de professores de Matemática nos primeiros anos de docência**. 2005. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.
- ROCHA, M. S. **Professores polivalentes das séries iniciais do Ensino Fundamental: concepção da formação e do ensino de Matemática**. 2005. 269 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Católica Dom Bosco, Campo Grande, 2005.
- RODRIGUES, J. M. S. **Formação Matemática de Professores de atuação multidisciplinar nas séries iniciais do Ensino Fundamental: indicativo para estudos de noções de probabilidades**. In: III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006, Águas de Lindóia. **Anais do III SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Águas de Lindóia: SBEM, 2006.
- RODRIGUES, J. M. S. **A Probabilidade como componente curricular na Formação Matemática Inicial de Professores Polivalentes**. 2011. 150 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

SANTOS, M. B. Q. de. C. P. dos. Os fundamentos do ensino de Matemática e o curso de Pedagogia. In: Encontro Paulista de Educação Matemática, 7., 2004, São Paulo. **Anais do VII EPEM**, São Paulo: SBEM SP, 2004. v.1, p. 1-12.

SEBER, M. da G. **Construção da inteligência pela criança: atividades do período pré-operatório**. São Paulo: Scipione, 1993. 320 p.

SPIEGEL, M. R. **Estatística: resumo da teoria, 875 problemas resolvidos, 619 problemas propostos**. Trad. de Pedro Cosentino. Ed. Rev. por Carlos José Pereira de Lucena. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1974. 580 p.

STERNBERG, R. J. **Psicologia Cognitiva**. Tradução de Anna Maria Dalle Luche e Roberto Galman. São Paulo: Cengage Learning, 2010. 591 p.

TARDIF, M. **Saberes Docentes e Formação Profissional**. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2002. 325 p.

TARDIF, M.; RAYMOND, D. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. **Educação & Sociedade**, Campinas, v.21, n.73, p. 209-244, dez., 2000.

TOWNSEND, C. B.; TOMAZZETI, E. M. A mobilização de saberes nas práticas de professores nos anos iniciais: um estudo de caso. **Educar**, Curitiba, n.29, p. 207-221, 2007.

ZIBETTI, M. L. T.; SOUZA, M. P. R. de. Apropriação e mobilização de saberes na prática pedagógica: contribuição para a formação de professores. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v.33, n.2, p. 247-262, maio/ago., 2007.

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO FINAL

Caro Participante:

Obrigado pela efetiva participação que propiciou a construção colaborativa de nosso Grupo de Estudo. No decorrer dos 20 encontros (abrangendo um período de 6 meses) foram discutidos diversos temas que contribuíram ao ‘pensar sobre’ a ‘futura’ prática docente de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. As questões abaixo visam identificar possíveis construções/(re)significações provenientes do Grupo de Estudo acerca da Matemática (e seu ensino), da teoria de Jean Piaget e dos saberes experienciais. Novamente firma-se o compromisso do pesquisador com o total zelo e discrição dos dados coletados, respeitando as normas éticas da pesquisa científica, assim como do retorno acerca das conclusões/apontamentos observados.

Nome: _____

Identificação:

Categoria A – Um Movimento de (Re)Significação:

1) A participação no Grupo de Estudo possibilitou a (re)significação, ou seja, uma ‘nova’ compreensão/entendimento acerca da Matemática (e seu ensino), de alguns tópicos da teoria de Jean Piaget e do papel dos saberes experienciais à constituição da prática docente? Em caso afirmativo, escreva como foi tal (re)significação nos itens abaixo:

a) Em relação ao conhecimento matemático (à Matemática):

R: _____

b) Em relação ao ensino de Matemática, ou seja, o seu ‘futuro’ papel enquanto professor que ensinará Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental:

R: _____

c) Em relação aos assuntos abordados da teoria de Jean Piaget:

R: _____

d) Em relação aos saberes experienciais construídos na Educação Básica:

R: _____

2) Em específico à Matemática, como se deu a (re)significação das seguintes áreas que constituem o bloco ‘Tratamento da Informação’?

a) Estatística:

R: _____

b) Combinatória:

R: _____

c) Probabilidade:

R: _____

Categoria B – Uma Avaliação do Grupo de Estudo:

1) A partir de **SUA** vivência no Grupo de Estudo pontue:

a) Os aspectos **POSITIVOS** em relação às discussões realizadas, o material elaborado e as ações do Pesquisador/Participante:

R: _____

[illegible][illegible]

1) Como **VOCÊ** avalia a **SUA** participação/envolvimento no Grupo de Estudo? Discorra sobre.

[illegible]

APÊNDICE E – TRANSCRIÇÃO DO 1.º ENCONTRO

Data: 01/03/2012

Tempo de Duração: 3 horas.

1. **Pesquisador/Participante:** Oi turma! Hoje, o objetivo deste primeiro encontro é uma discussão inicial, porque eu acredito ter falado muito no geral sobre o nosso Grupo de Estudo. Vocês concordam comigo? **[Participantes sinalizaram afirmativamente por meio de expressão facial.]**

Então, hoje, eu vou tentar fazer uma delimitação bem aprofundada do que nós iremos fazer, para que vocês tenham a consciência daquilo que nós iremos desenvolver, e também de onde partiu esse projeto, que tem uma história de mais ou menos 10 (dez) anos. **[As participantes fizeram uma expressão facial de espanto, surpresa quanto ao tempo de ‘gestação’ da presente pesquisa.]**

Então, nós é que iremos construir este Grupo, até porque não existe apostila pronta em meu computador! Eu vou elaborar a partir do resultado do último encontro. É claro que eu vou começar a mandar os textos a serem discutidos durante o Grupo dias antes do encontro. Isso, para que, quem possa já dar uma lida prévia seria interessante para chegar aqui com as ‘questões na cabeça’. E por que eu não posso sobrecarregar vocês de material já pronto? É porque, talvez não atinja, e é a partir dos conhecimentos prévios, que estou coletando de vocês, que tentarei estabelecer essa ponte entre a ‘prática’ que vocês já construíram acerca do que é o ensino de Matemática e a teoria a ser estudada. E, por favor, perguntem a todo o momento, e eu vou tentar falar o mínimo, pois o objetivo é a nossa interação! Vocês, enquanto participantes do Grupo e eu, além de pesquisador e mediador, também sou um participante que, com a absoluta certeza, também estarei aprendendo com vocês. Alguém já participou de um Grupo Colaborativo? **[A maioria sinalizou negativamente, com exceção de P-9.]** Então vamos tentar compreender como é, até porque eu também nunca participei!

2. **P-9:** *Eu participava de um Grupo de Estudo Marxista aos sábados, mas, assim, era uma proposta um pouco diferente, porque vinham mais palestrantes, a gente participava nas discussões e aprofundava sobre os assuntos da área, mas não como você está propondo... Pelo que eu entendi até agora o nosso vai ser uma interação, onde serão utilizados nossos conhecimentos prévios e você vai estar junto!*

3. **Pesquisador/Participante:** Ok! É isso mesmo. A colaboração no sentido de que nós tentaremos discutir e tentar solucionar um problema que é a prática de ensino de Matemática. Como pensá-la? De que maneira? Utilizando qual referencial teórico? Quais as justificativas para as ações adotadas? E, será que os saberes que vocês já têm construído influenciam na maneira de agir em sala? **[A maioria sinalizou afirmativamente através de expressão facial.]**

Então, turma, o que eu gostaria, agora, é que vocês realizassem uma leitura individual das páginas iniciais do texto onde estão denotados os objetivos, hipóteses e como será constituído nosso Grupo de Estudo. Façam, por favor, uma leitura cuidadosa e anotem todas as dúvidas para discutirmos em seguida.

[Após 25 minutos disponibilizados para a leitura, retornaram-se as discussões.]

4. **Pesquisador/Participante:** Então, o objetivo destes parágrafos iniciais foi tentar denotar uma contextualização. Foi possível? **[Algumas participantes sinalizaram afirmativamente por meio de expressão facial e outras responderam “Sim!”.]**

Começando na primeira página onde eu agradeço a participação de todas é ressaltado que o objetivo principal reside na reflexão teórico-empírica, ou seja, essa ‘jogada’ teoria e prática de tal modo que a teoria não se distancie da realidade e, também, que a prática não se supervalorize e negue a contribuição teórica. Acho que vocês já ouviram aquele discurso no qual afirma que “Se aprende na prática mesmo!”? **[As participantes sinalizaram afirmativamente através de expressão facial.]**

Vocês concordam com tal afirmação? **[P-2 e P-5 responderam “Não!”, as demais não apresentaram reação em relação à questão.]**

5. **P-2 e P-5:** *Não totalmente, né!*

6. **Pesquisador/Participante:** Não... Não totalmente, porque a prática é um confronto com a realidade, e confrontar sem uma teoria pode acarretar, provavelmente, mais erros do que acertos. E, me parece que, ficar ‘errando’ toda a vez com as crianças, nossos alunos, não é adequado! **[As participantes indicaram concordar com a afirmação.]**

Eu acredito que errar frequentemente com alunos adolescentes e adultos também não é correto, imagine com crianças que se encontram em pleno desenvolvimento moral, da personalidade... Sobre as temáticas que vão ser abordadas, vocês possuem alguma dúvida quanto aos possíveis conteúdos? **[As participantes sinalizaram não possuir dúvida.]**

A partir dos questionários respondidos por vocês, o conteúdo que ‘ganhou’ foi o Tratamento da Informação, ou seja, àquele que vocês possuem maior dificuldade. É isso mesmo? **[As participantes responderam “Sim!”.]**

É importante esclarecer que o Tratamento da Informação não é somente gráficos e tabelas; também aborda-se a Estatística ao analisar os dados por meio da obtenção da média, moda, mediana, etc. Também faz parte a Combinatória enquanto possibilidade de combinar elementos, por exemplo, “Quais são as diferentes maneiras de combinar se eu tenho 2 saias e 3 blusas?”. Entra também a Probabilidade enquanto a chance da ocorrência de um evento, por exemplo, se eu joga uma moeda, probabilisticamente, há metade de chance de sair cara ou coroa. Então, o Tratamento da Informação aborda esses conteúdos centrais quando nos direcionamos até o Ensino Médio, porque, em nível superior os assuntos são cada vez mais complexos e não é nosso interesse aqui abordá-los. **[Neste momento, as participantes, com exceção de P-1, sinalizaram riso indicando que, se já é difícil a compreensão dos conteúdos do Tratamento da Informação ao nível de Ensino Médio, imagine então os referentes ao nível de Ensino Superior.]**

Só que, para trabalhar com o Tratamento da Informação nos anos iniciais onde se tem uma forte atenção no estudo de gráficos e tabelas e também nas noções iniciais de Combinatória e de Probabilidade, nós vamos ‘recair’ aonde? O que vocês acham? **[Silêncio entre as participantes.]**

Por exemplo, para construir uma tabela, que raciocínio, que pensamento o aluno já precisa ter construído para compreendê-la?

7. **P-9:** *Seria a tal da Equilibração Majorante!?*

8. **Pesquisador/Participante:** A Equilibração Majorante permeia toda e qualquer construção, tanto na área da Língua Portuguesa, na Matemática... ou também de ‘aprendizagens práticas’ como aprender a jogar bola... Tudo bem? É um mecanismo interno do sujeito, não é apenas na área da cognição, mas também da afetividade e nas demais.

9. **P-9:** *Além do que você falou aí, e a coisa da Tomada da Consciência que você falou, se a gente não aprendeu isso no início a gente não vai conseguir explicar, é isso?*

10. **Pesquisador/Participante:** Sim, a compreensão inicial de um conceito é essencial para a ocorrência dessa tomada de consciência, sendo que ela não ocorre apenas na escola. Esse processo ‘inicia’, de modo marcante, digamos assim, com o aparecimento da função simbólica (e semiótica) do sujeito, lembrando que tal função representa tanto a linguagem falada quanto a interior que aparece em forma de imagens mentais, pensamentos e também através do simbolismo, quando a criança, por exemplo, afirma que o traço feito por ela num papel representa a sua família. Isso é o símbolo... a diferença entre o símbolo e o signo é que o signo é uma convenção social e histórica, por exemplo, o símbolo que representa a letra *a* possui um ‘significado objetivo’ sendo compartilhado socialmente. Já o símbolo, enquanto uma construção subjetiva do sujeito, tem um significado para ele, e para o outro compreender o significado daquele símbolo é necessário que o sujeito externalize o que significa. Tudo bem? **[As participantes sinalizaram que estava tudo bem por meio de expressão facial.]**

Mas, voltando à questão... Quais são os conceitos matemáticos necessários para que o sujeito compreenda, por exemplo, a disposição dos elementos numa tabela?

11. **P-2:** *As operações?* **[Fez referência às operações aritméticas.]**

12. **Pesquisador/Participante:** Ok, é por aí mesmo! Para sanar as dúvidas quanto aos gráficos e tabelas, o gráfico sendo uma correspondência entre duas ‘relações’... Lembram do *x* e do *y*? **[As participantes expressaram riso e sinalizaram afirmativamente.]** Nada mais são do que uma função, que para cada *x*, dependendo da minha função desse *x* ‘ $f(x) = y$ ’ o meu *y* pode variar produzindo, assim, curvas, ‘retas’ que podem ser constantes, que podem aumentar ou diminuir. Só que, esse estabelecimento de correspondência se inicia nos primeiros anos de vida do sujeito, quando ele constrói correspondência entre objetos concretos. Então, dá pra perceber que uma dificuldade na compreensão da criança sobre o que é uma tabela está muito antes... Assim, não é de se estranhar que se tais construções não forem adquiridas por esse sujeito ativo fica complicada a compreensão desse assunto. Desse modo, para trabalhar o Tratamento da Informação nós vamos ter que nos remeter à gênese do número e das estruturas lógicas elementares. Piaget e Alina Szeminska (uma grande psicóloga que não é muito citada) pesquisaram a gênese do número na criança por um longo período e acompanharam mês a mês, ano a ano como inicia o processo de classificação do sujeito (a Fase I, a Fase II, Fase III) até chegar à síntese numérica com aproximadamente 7-8 anos. Lembrando sempre que essas idades são apenas aproximações, certo? **[As participantes sinalizaram afirmativamente por meio de expressão facial.]**

Então nós vamos trabalhar o Tratamento da Informação, mas lembrando que não vamos abordar apenas a questão didática desse conteúdo, a questão é uma ‘superação’ de conhecimentos ainda não construídos por vocês. Assim, em alguns momentos nós iremos presenciar textos no qual serão discutidos ‘matematicamente’ alguns conteúdos, certo? **[As participantes responderam “Sim” e expressaram-no por um movimento facial.]**

Sobre o item 2, esses conteúdos específicos da Educação **[Metodologia, Didática, Psicologia, etc.]**, alguma dúvida? **[As participantes não expressaram nenhuma objeção.]** E sobre o item 3 acerca dos saberes experienciais... tudo bem? **[Expressaram não possuírem dúvidas quanto aos tópicos que constituirão o Grupo de Estudo.]**

Resumindo, em nosso Grupo de Estudo será feita a abordagem destes três tópicos **[Conteúdos de Matemática, conteúdos específicos da Educação e saberes experienciais.]** Ao final dos 20 encontros, conforme mostrado no cronograma que se encontra na página 3.

Voltando à discussão das páginas iniciais, vocês compreenderam qual é o objetivo do nosso Grupo de Estudo? Eu queria que vocês falassem! **[As participantes indicaram receio em responder, permanecendo caladas.]**

Alguém pode nos dizer como vai ser a ‘dinâmica’ do nosso Grupo de Estudo?

13. **P-9:** *Eu vou tentar!*

14. **Pesquisador/Participante:** Por favor, a fala é ‘aberta’ pessoal!

15. **P-9:** *Eu entendi que o Grupo de Estudo vai fazer parte da sua tese de doutorado e que você vai colocar em prática as suas três hipóteses... agora eu perdi onde está escrito... Mas essa hipótese de que na Formação Inicial não há muitas vezes esse diálogo entre o que foi aprendido e o que não foi aprendido nos primeiros anos do Ensino Fundamental por nós, estudantes, e também a questão de que muitas vezes as pessoas passam pelo curso de Licenciatura mas que elas acabam ficando com os saberes experienciais do que ele aprendeu, ou seja, ele acaba se tornando um profissional de forma acrítica, como você colocou no texto.*

16. **Pesquisador/Participante:** Foi muito interessante você partir das minhas hipóteses que eu formulei ao longo de mais ou menos uns 8 a 9 anos. Vocês concordam com essas hipóteses que se encontram na página 6? **[As participantes, após folhear a referida frase, afirmaram “Sim!”]**

Vocês acreditam que isso ocorre na maioria das vezes? **[P-9 ergueu a mão e começou a falar.]**

17. **P-9:** *Eu tenho certeza que é importante porque eu senti isso. Faltou... eu acho que faltou muito mais espaço... Por exemplo, quando você deu aula ou o professor N. deu uma boa visão pra gente porque eu nunca havia analisado ou aprendido enquanto criança... Mas eu acho que falta mais espaço... Pra mim tinha que ter no mínimo 5 anos de Pedagogia, porque eu sinto que faltam algumas coisas, principalmente dessa parte de Matemática, de como ela deve ser trabalhada, principalmente pela nossa formação na Educação Básica no Brasil que é muito limitada...*

18. **Pesquisador/Participante:** Você está se referindo a esse déficit de conteúdos?

19. **P-9:** *É, é isso mesmo, falta mais espaço para a Matemática dentro da Licenciatura!*

20. **Pesquisador/Participante:** Então quer dizer que vocês acreditam que na Pedagogia ainda é insuficiente o que se é trabalhado?

21. **P-1:** *Eu... eu acho que é insuficiente em relação à Matemática!*

22. **Pesquisador/Participante:** Então todas concordam? **[As participantes sinalizaram afirmativamente.]** Ok! Eu gostaria que vocês observassem na página 6 a minha terceira hipótese: “A Formação Inicial não vem garantindo ao professor a compreensão das Teorias Educacionais, colaborando a execução de práticas docentes não fundamentadas teoricamente.”. Vocês concordam com isso?

23. **P-5:** *Sim!* **[As demais participantes sinalizaram concordar com a colega através de expressão facial.]**

24. **Pesquisador/Participante:** Por que sim? Qual o ‘sentimento’ que vocês têm que lhes permitem concordam com essa minha ideia, minha hipótese?

25. **P-5:** *Ai.. parte assim de mim mesma, quando eu penso em algum trabalho, em alguma atividade pra dar pras crianças, eu tenho dificuldade de justificar teoricamente as minhas ações... Eu até penso, eu sei que está certo, mas eu tenho dificuldade de pensar e no que prova que isso está certo, assim, qual teoria que... embasando a minha atitude. Eu acho que é uma dificuldade que você mesmo comentou, que é dos próprios professores que também não conseguem justificar teoricamente aquilo que fazem.*

26. **P-2:** *Mas eu acho que no curso ocorre mais dos professores darem ‘pinceladas’ nas teorias, e não de um aprofundamento... [As demais participantes concordaram e falaram ao mesmo tempo, sinalizando certo descontentamento em relação à atual situação que vivenciaram.]*

27. **P-9:** *O que acontece é que há aprofundamento por parte do aluno que se interessa, se vê dentro de uma teoria, eu, por exemplo, no meu caso trabalho com a histórico-crítica..., mas ao mesmo tempo eu acho muito importante ter essa experiência... é por isso que eu estou aqui hoje, porque eu acho importantíssima toda essa teoria do Piaget! Eu vejo que isso dá conta dessa parte da Matemática, e a teoria no caso histórico-crítica não dá conta disso. Dá conta do social, da realidade, como é desenvolvido. Eu acho que falta um aprofundamento das teorias que você [Referiu-se à P-2.] falou que acabam dando só uma ‘pincelada’.*

28. **P-7:** *Eu acho muito difícil partir da gente mesmo buscar essa teoria, já que aqui na faculdade só dão essas pinceladas. É muito difícil chegar na biblioteca e decidir que livro eu pego... tem várias teorias, e o que eu vou ler? Sozinho, é muito difícil!*

29. **P-9:** *É, uma realidade do curso de Pedagogia que eu sinto é que não deveria ser um curso noturno, é primordial que os cursos de Licenciatura fossem durante o dia, que houvessem espaço, laboratórios... por exemplo, você [Referiu-se ao Pesquisador/Participante.] sentiu falta disso quando você citou... ou a própria professora T. com relação à tecnologia...*

30. **Pesquisador/Participante:** Em relação a essa questão da necessidade da Licenciatura ser integral, alguns trabalhos já abordaram esse tema. E é realmente muito séria essa questão!

31. **P-9:** *E os estágios, por exemplo... eles [Referiu-se ao proposto no Curso.] dizem que é supervisionado, mas na verdade não é supervisionado, porque você chega e não é bem vindo na escola [Neste momento P-2 e P-4 deram risada sinalizando terem vivido situação análoga.] Você é um inimigo que está sendo colocado ali! [P-1 interrompeu e disse “É um espião” e P-4 disse o mesmo.] É que nem na escola particular, quando você chega e é tratado como mais um pra ser um ‘pau pra toda obra’! A verdade é que o estágio deveria ser diferente...*

32. **P-2:** *Mas, além disso, voltando ao que a P-5 comentou, as orientações para as atividades que nós mesmos vamos desenvolver dentro das escolas não leva embasamento teórico. Vê-se que cada um, por si só, fosse atrás e tentasse embasar o que está fazendo, só que também não tem um retorno [Referiu-se aos professores do curso de Pedagogia.] também para sabermos o que colocamos ali como embasamento é válido ou não.*

33. **P-7:** *A gente sabia o que queria fazer, mas não sabia por a teoria para embasar aquilo ali.*

34. **Pesquisador/Participante:** Digamos, assim, que está faltando aquela ‘tomada de consciência’ daquilo que está sendo realizado na prática?

35. **P-2:** *É! Porque não tem! Essa ponte não existe dentro da Universidade!*

36. **Pesquisador/Participante:** Ok! Então sobre essas 3 hipóteses que, como eu disse, foi no decorrer de 2002 até mais ou menos 2010, sem problema? Vocês concordam? **[As participam indicaram concordar e P-9 complementou.]**

37. **P-9:** *Sem problema e continuam igual, continuam existindo. [As participantes deram risada acerca da atual situação!]*

[Dando continuidade, o Pesquisador/Participante realizou a leitura do primeiro problema de pesquisa do presente estudo.]

38. **Pesquisador/Participante:** Esse é um questionamento que eu tenho até agora! Uma coisa é estudar a fundo uma teoria do conhecimento, chamada Epistemologia Genética, vocês podem até acrescentar: Construtivista, Estruturalista, Sequencial e Probabilística piagetiana. Outra coisa é... “O que essas ideias chaves ou centrais podem colaborar com a nossa questão?” **[Ou seja, em relação à Formação Inicial de Professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.]** É uma outra questão, ok! E eu vou tentar, juntamente com vocês, e isso deve ser bem frisado, o Grupo é nosso, eu não sou o professor aqui, sou um colaborador.

Sobre a primeira questão, como você **[P-9]** colocou, a Equilibração Majorante, em linhas gerais, é um processo psicológico e o sujeito não toma consciência do mesmo no início. Ocorre quando o sujeito, a partir de um ‘desequilíbrio’ consegue estabelecer o equilíbrio, como se fosse uma ‘balança’ em constante atividade entre o aspecto ‘negativo’ (a dúvida) e o ‘positivo’ (a solução). Quando o sujeito passa a compreender o que é uma adição, ou seja, que o 8 é um conjunto independentemente se eu juntar 1+7 ou 3+5 ou 4+4 ou 6+2, isso indica que ele compreendeu o que é uma adição (e também um número) e essa compreensão se deu por meio de uma Equilibração Majorante. E, qualquer desenvolvimento do sujeito depende dessa Equilibração Majorante, e tal Equilibração depende das abstrações que nós vamos estudar nos próximos encontros alguns tipos de abstrações, tais como as empíricas, a reflexionante que é constituída pelo reflexionamento e reflexão... mas não se preocupem, são apenas informações gerais que nós vamos abordar com mais profundidade. **[Neste momento, P-2 interrompeu e sinalizando certo ‘espanto’ indagou.]**

39. **P-2:** *Semana que vem não vai aparecer um aqui! [Riso geral.]*

40. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, entendo, mas um dos objetivos do Grupo de Estudo é ‘desequilibrá-las’, sim, só que desequilíbrios possíveis de tal modo que os esquemas de assimilação/interpretação já construídos por vocês as permitam ultrapassá-los. Tudo bem? **[As participantes sinalizaram concordar com a afirmação.]**

Em relação à 2.^a questão, que foi algo que eu evidenciei muito em minha dissertação de mestrado, em relação à influência dos saberes experienciais dos professores... Então, eu quero saber, afinal de contas, qual o papel desses saberes experienciais – em particular os conhecimentos prévios, certezas e crenças sobre a Matemática e sobre o seu ensino e

aprendizagem já construídos por vocês, durante a Educação Básica – na Formação Inicial do professor que ensina Matemática, que serão vocês futuramente. Como possibilitar uma (re)significação, ou melhor, uma re-estruturação dos saberes que vocês já possuem acerca do que é ensinar a Matemática, do que é aprender a Matemática e do que é a Matemática!? Como eu vou tentar... e não só apenas eu, sou somente o mediador dessa (re)significação... vai depender também de vocês... Ok? Como fazer esse processo de (re)significação? É aí que reside a relação entre a teoria de Piaget e os saberes experienciais. Vocês entenderam quando eu explico como vai ser a lógica dessa (re)significação, lá na página 4 nas notas de rodapé? **[As alunas leram novamente a referida explicação no texto.]** Alguma dúvida?

41. **P-1:** *Essa (re)significação, deixa eu ver se eu entendi, é como se nós fossemos para a sala de aula e sem a teoria nós reproduzíssemos o que a gente aprendeu dos nossos professores?*

42. **Pesquisador/Participante:** Isso é uma significação sua que você já tem agora!

43. **P-1:** *Daí, por exemplo, ao participar do Grupo de Estudos, entro em contato com a teoria, e vou pra sala de aula e daí por meio dessa (re)significação eu daria a aula de uma outra maneira...*

44. **Pesquisador/Participante:** Se você conseguir mudar seu modo de pensar, por uma concepção ‘mais construtivista’, que considere o sujeito como ativo e não como um passivo, que você tenha consciência daquilo do que você está fazendo, o que você vai atingir ao longo de uma sequência de ensino... você obteve uma (re)significação.

45. **P-2:** *Eu acho que a questão é a de um convencimento, de você realmente acreditar naquilo, pois a grande dificuldade dos professores que já atuam na área, porque eles lêem e a teoria e falam “Mas daquele jeito que eu faço dá certo, então por que eu vou mudar!?” A questão não é só entrar em contato, tem que haver um envolvimento, você tem que confiar que aquilo é possível sim e dará resultado. **[Neste momento P-9 falou conjuntamente concordando com a participante.]***

46. **P-9:** *Eu sempre fiquei em dúvida com essa a questão, como no PARFOR, eles recebem esse tipo de teoria porque tem pessoas ali na prática escolar há 15, 20 anos, ou quase aposentando, então para eles assimilarem aquilo **[Referiu-se aos textos teóricos.]** é uma coisa muito forte, porque eles já estão aqui... **[P-2 interrompeu.]***

47. **P-2:** *Para eles é grande a mudança!*

48. **P-9:** *É! Eu acho que é muito mais difícil para eles fazerem essa (re)significação do que a gente, já que a gente tá iniciando ainda...*

49. **P-1:** *É! A gente partiu do nada... **[Referiu-se que ainda não possuem experiência docente.]***

50. **P-9:** *Por mais que seja fragmentado o nosso ensino e falte muita coisa, a grande maioria da nossa turma, com exceção da M., não é da sala de aula, então pra gente é muito mais fácil essa (re)significação do que essas pessoas que já estão nas classes. Porque eles já tem elencado, a parte da Formação Inicial deles e mais a Formação da parte **[Referiu-se à Formação Contínua realizada de modo ‘informal’ por meio da prática docente diária.]***

então eu acho que eles somam tudo e cria uma barreira maior ainda pra poder entender uma outra teoria.

51. Pesquisador/Participante: O que você falou cabe perfeitamente... (Re)significar um ‘habitus’ já adquirido por um professor experiente é um trabalho que demanda um tempo, um espaço absurdo... e a própria teoria de Piaget explica... Como assim? A pessoa já construiu vários esquemas de assimilação, ou seja, ela já acredita muito naquilo, sendo tal assimilação maneiras de ‘agir’/‘interpretar’ uma determinada situação. Aquilo está tão ‘engessado’ que ela acredita naquilo piamente, desequilibrá-la é muito mais difícil, porque aquilo parece que já nasceu com ela, mas não nasceu, só parece, tudo bem? E essa dificuldade, esse engessamento dessa possibilidade de rever alguma coisa, tem a ver com um processo cognitivo definido por Piaget e outros grandes estudiosos que se chama reversibilidade... é a capacidade de você ir e vir no seu pensamento e colocar ‘contra-provas’ naquilo que você acredita. Você não pode seguir só um caminho, você pode partir pra outros, você pode contestar outros... E a teoria de Piaget, como está sendo colocada aqui no Grupo, também tem esse objetivo de poder colaborar a essa ‘maior reversibilidade’ do pensamento de vocês, porque a reversibilidade é imprescindível à construção de qualquer conhecimento matemático, e nós vamos abordar depois o por que disso, de modo mais aprofundado... Tudo bem? Alguma dúvida? **[As participantes indicaram não possuírem dúvidas quanto ao exposto por meio de expressão facial.]**

Rapidamente eu denoto os Objetivos Geral e Específicos da tese. O Objetivo Geral sendo a análise das implicações do nosso Grupo de Estudo, constituído por reflexões teóricas advindas da relação entre a Epistemologia Genética e a prática docente de Matemática. O nosso objetivo aqui é nunca perder de vista a prática docente de Matemática, tentar encarar, perceber, ‘ver’ a teoria de Piaget numa prática real. E tais implicações para a (re)significação dos saberes de vocês. Será que em setembro **[Mês final do Grupo de Estudo.]** os saberes de vocês terão sido (re)significados? Esse é o grande ‘x’ da questão! **[As participantes indicaram, por meio de expressão facial e por algumas falas, o interesse nessa (re)significação.]** Esse é o objetivo central da minha pesquisa. E por que eu faço questão de apresentar o porquê desse Grupo na tese? Porque eu acredito que vocês devem compreender, ‘com transparência’, o porquê de estarmos aqui. Em relação aos Objetivos Específicos, alguém tem alguma dúvida? Os mesmos iniciam na página 4 e vão até o item 6 na página 5. Alguém tem dúvida quanto aos mesmos? **[As participantes, por meio de expressão facial, sinalizaram, aparentemente, não possuírem dúvidas quanto aos Objetivos Específicos.]**

Vocês acham que alguma desses Objetivos Específicos eu já comecei a ‘fazer’?

52. P-2: *O número 1.*

53. Pesquisador/Participante: O número 1? Que seria, identificar os saberes experienciais de vocês?

54. P-9: *Sim, pelos questionários. [Referiu-se ao Questionário Inicial já aplicado.]*

55. Pesquisador/Participante: Ok! Então isso ficou visível a todas. **[As participantes, através de gesto facial, indicaram concordar.]** E o número 2, será que eu já comecei?

56. P-9: *Sim, quando você investigou as nossas dificuldades conceituais por meio do questionário. [Neste momento, algumas participantes responderam “Sim” e outras indicaram concordar com a fala de P-9 por meio de expressão facial.]*

57. **Pesquisador/Participante:** Vocês estão percebendo que estou coletando os conhecimentos prévios de vocês! Seguindo aquela lógica da teoria de Piaget! Todo mundo consegue perceber isso ‘claramente’. **[As participantes sinalizaram afirmativamente, respondendo “Sim” ou através de expressão facial.]** E o objetivo número 3? **[Observou-se silêncio das participantes por uns 2 minutos.]** O que vocês acham?

58. **P-2:** *Eu acho que ainda não!* **[As demais participantes fizeram uma expressão de riso concordaram com a P-2.]**

59. **Pesquisador/Participante:** Então são ‘cenas do próximo capítulo’? **[As participantes sinalizaram concordar com a questão, e algumas responderam ‘Cenas do próximo capítulo’.]** Vocês concordam, desse modo, que do objetivo 3 ao 6 nós iremos trabalhar nos próximos encontros? E, por que eu acho interessante denotar esses objetivos? Para que vocês criem já expectativa daquilo que nós iremos estudar. Ok?

60. **P-9:** *Muito legal!*

61. **Pesquisador/Participante:** Eu defino na página 5 o que haverá em nosso Grupo de Estudo: textos teóricos da teoria de Piaget, textos teóricos da construção dos conteúdos matemáticos e trechos de entrevistas e histórias simuladas para que vocês visualizem na prática aquilo que estamos discutindo, seja na questão dos saberes da experiência do professor, seja na maneira do professor conceber o aluno. Será que tal concepção está condizente com a teoria que estamos adotando, ou não? Quando o professor, implicitamente concebe o aluno enquanto um ser passivo, quais as consequências disso ao dar a aula? Agora, um ponto essencial, por ser o nosso primeiro encontro, a respeito de nossa interação. Quando eu falo do trabalho colaborativo, que tem que haver confiança, diálogo/conversação e negociação. O que vocês acham a respeito desses três critérios? Se são pertinentes, ou se não são; é difícil consegui-los, ou não!? Eu queria uma ideia a respeito de vocês. Sobre a confiança, o que acham?

62. **P-9:** *É essencial, né, porque se eu chego aqui e me sinto incomodada, ameaçada, ou, sei lá, examinada de forma a achar negativo aquilo que estou falando, ou seja, “Ela não sabe!”... você acaba se sentindo com medo! Agora, se você está confiando nas pessoas que estão aqui, que te conhecem, que a pessoa que está aplicando, que no caso, seja o nosso professor, ou o nosso Grupo, você se sente à vontade para falar. É a mesma coisa na sala de aula com as crianças... se elas sentem confiança no professor elas vão falar também... são coisas diferentes mas é a mesma coisa!*

63. **Pesquisador/Participante:** Isso é interessante já que, segundo alguns documentos, durante a Formação Inicial deve haver um isomorfismo entre as situações vivenciadas pelos licenciandos com àquelas que ele terá que desempenhar na escola. E isso que você acabou de falar são situações análogas, que cabe perfeitamente nisso! Vocês já se sentiram constrangidas, intimidadas? Ainda se sentem nessa situação? **[As participantes indicaram, por meio de expressão facial, ainda passarem por tais situações, e P-9 respondeu.]**

64. **P-9:** *Sim, muitas vezes!*

65. **Pesquisador/Participante:** Inclusive no Ensino Superior? Podem falar, mas, por favor, sem citar nomes já que devemos observar a ética e o respeito para com os colegas de

profissão. Vocês ainda se sentem não confiantes? Ameaçadas? **[Todas responderam “Sim” e sinalizaram por meio de expressão facial.]** Até mesmo ridicularizadas?

66. **P-9:** *Também, já aconteceu. [As demais participantes concordaram com a fala de P-9.]*

67. **Pesquisador/Participante:** E, o que será que tais vivências de vocês ‘tão forte’ podem acarretar na futura atuação de vocês enquanto professora? **[Após 1 minuto de silêncio colocou-se outra questão.]** Corre-se o risco de vocês, entre aspas, ‘inconscientemente’ fazerem isso? **[P-2, P-4 e P-5 concordaram, respondendo “Sim”.]**

68. **P-9:** *Se isso acontecer constantemente... Porque as práticas que a gente viveu, a gente tem que lutar para poder (re)significar tudo isso! Mas, por exemplo, a gente veio do ensino tradicional, então os primeiros contatos que eu tive no estágio, quando eu fui atuar na escola, acaba sendo muito mais visível, você, em silêncio, quietinho, é uma coisa que está ‘inconsciente’ na gente, ou seja, como a gente tem que agir com a criança, que é um processo que a gente viveu. É a mesma coisa do tipo de Educação que as pessoas têm em casa, com pais liberais ou pais rigorosos, a pessoa acaba levando resquícios daquilo!*

69. **Pesquisador/Participante:** Isso que você falou é interessante! Já foi estudado, mais ou menos, a partir da década de 1980-1990, por vários educadores em diversas partes do mundo, os saberes docentes, e dentro desses saberes tem um, com várias denominações, como a que estamos utilizando aqui, que também pode ser chamado de saber da tradição pedagógica, que se refere a tudo aquilo que está ‘instaurado’ na cultura escolar, demarcando aquilo que deve ser feito e isso é transmitido ao aluno durante os anos de ensino. Por exemplo, a fala “Oh, quando você chegar na escola, você deve ficar quietinho.”. Já ouviram isso? **[P-9 respondeu “Sim!” rindo.]** E, realizar uma ‘superação’ desta cultura ‘instalada’ é uma coisa muito complicada... Além de questões maiores, essa mudança deve ter início em nós mesmos, essa modificação deste ‘habitus’ adquirido – conforme denominação de Bordieu. E essa modificação demanda certo tempo quanto a esses saberes de vocês já construídos, e, possivelmente, em alguns até já ‘cristalizados’, demanda muito esforço... Por isso, como estou colocando aqui, que durante o nosso Grupo de Estudo de trabalho colaborativo, o empenho de todas é essencial. Ficou ‘claro’, pessoal? **[P-2, P-4 e P-9 sinalizaram concordar através de expressão facial.]** A partir do momento que eu concebo todo mundo aqui, enquanto um ser ativo, inclusive a mim, se eu não me empenhar eu não vou poder agir, e daí ocorrerão pouquíssimas modificações. Tudo bem?

Em relação ao 2.º critério – diálogo/conversação – alguma dúvida? **[Silêncio geral.]** Pessoal, para um primeiro encontro é normal essa vergonha... Mas é importante que aqui não tenhamos hierarquia, apenas desempenhamos diferentes papéis. Eu possuo o meu papel enquanto mediador, mas também participante das discussões e vocês possuem o de vocês, são dois papéis diferentes, mas ambos importantes. Até porque, a elaboração desse material por mim também é bastante complicado, porque não tem nada pronto, é a partir do feedback, do retorno, que surge durante as nossas discussões é que eu vou elaborando a nossa ‘rotina’, mas que também causa em mim muitas dúvidas. Assim, estamos no mesmo ‘par’ de dificuldades/dúvidas. E a negociação, conseguiram entender de modo bem geral o que significa isso? A P-4 poderia falar para nós para ouvirmos a sua voz! **[Risos entre as participantes.]**

70. **P-4:** *Eu acho que é muito importante, né, imprescindível!*

71. **Pesquisador/Participante:** Numa negociação todo mundo vai ter que aceitar a opinião do outro?

72. **P-4:** *Hum... tem que se respeitar, pelo menos!*

73. **Pesquisador/Participante:** Isso! Aceitar em termos de respeito, agora discordar eu espero que aconteça muito aqui! Por que é interessante uma discussão construtiva?

74. **P-9:** *Porque é a troca de ideias, né! Se todo mundo acha que o azul é importante e outro não acha...* [Nesse instante P-5 falou para P-2: “Para desequilibrar!”.]

75. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo, pode falar... É para desequilibrar. A partir do momento que eu tenho que sair da minha ‘zona de conforto’ para refletir sobre a ideia de outra pessoa, eu também vou fazer um movimento de retroação da minha ideia, eu vou voltar! E eu posso modificá-la, ou não; vai depender de como essa dinâmica evolui. E se o Grupo chega a um consenso, ou seja, concorda que tal solução é a melhor para tal problema/situação, nós conseguimos um acordo, algo negociado, negociável! E, pessoal, estabelecer um trabalho colaborativo não é fácil, todo mundo concorda? [As participantes sinalizaram concordar por meio de expressão facial.] É muito mais ‘econômico’, em termos de tempo, de ‘desgaste’ psicológico emocional uma aula expositiva! Todo mundo concorda? Por quê?

76. **P-4:** *Por que não há interação!*

77. **Pesquisador/Participante:** Ótimo! Não tem aquela dinâmica se construindo a cada retorno, ao retorno do aluno, só que todo mundo aqui já está cansado de saber que ser um sujeito passivo não leva a muita coisa!

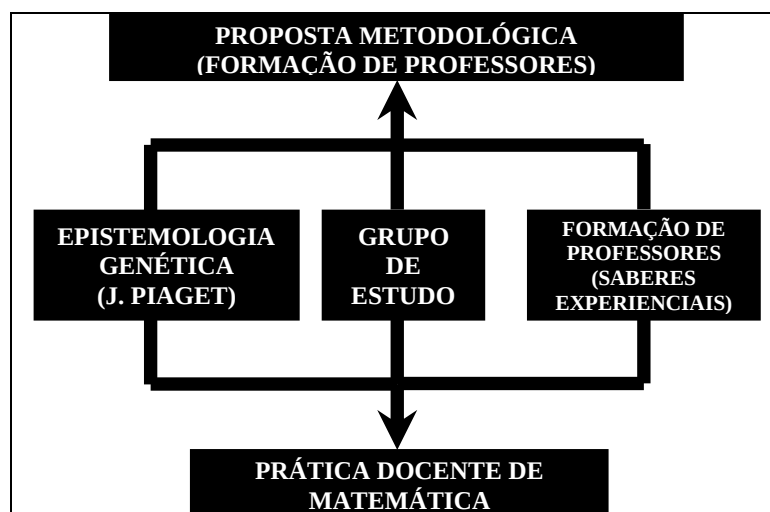
Eu acredito, pessoal, que para terminarmos essa parte é interessante pensarmos o que justifica a importância da Formação Inicial dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais, que eu coloquei em forma de 3 proposições na página 7. Vocês concordam com estas 3 proposições do porquê é importante essa Formação Inicial e que, indiretamente vai incidir sobre a construção da Matemática pelo aluno? [P-5 sinalizou por meio de expressão facial concordar, P-9 disse “Com certeza” e as demais participantes pareceram pensar sobre tal questão.] Sobre a 1.^a proposição, diversos órgãos de avaliação governamental (SAEB, SARESP, etc.) mostram que o ensino de Matemática no Brasil não está bom, recentemente, em 2011, o SARESP evidenciou que mais de 90% dos alunos egressos do Ensino Médio se encontram, em Matemática, abaixo do básico. [As participantes indicaram espanto através de expressão facial e P-9 falou “Nossa!”.]

E a 2.^a proposição, enquanto professor durante mais de 5 anos dos anos iniciais, eu pude comprovar, na minha prática, que a não aprendizagem nos anos iniciais acarreta uma defasagem pro ‘resto’ da vida, caso na 5.^a e 6.^a série não houver um trabalho sério para mudar tal situação. E mesmo assim é difícil!

E a 3.^a [Referiu-se à última proposição.] vários autores indicam que a construção das estruturas lógico-matemáticas por esses alunos dos anos iniciais vai colaborar, num futuro muito próximo, à constituição da lógica formal, ou proposicional! Inclusive nós vamos estudar aqui até um pouco de lógica para compreendermos o que é esse pensamento formal, certo! Vocês, enquanto professoras dos anos iniciais, não vão chegar com os alunos nessa complexa formalização, mas eu acredito ser imprescindível vocês conhecerem o que ela significa... já que vocês vão ‘dar’ o alicerce, para que da 5.^a série em diante essa formalização se torne cada vez mais crescente até o ponto do aluno conseguir raciocinar apenas por proposições verbais e não ter mais que recorrer ao real para confrontar suas hipóteses, que é

algo difícil, tudo bem? [P-2, P-4, P-5 e P-9 indicaram concordar por meio de expressão facial.]

Eu coloquei o esquema aqui [Foi projetado na tela o esquema, conforme abaixo.]:



78. **Pesquisador/Participante:** De modo geral, o esquema do nosso Grupo de Estudo é o seguinte... Ele tem ‘conversação’ com a teoria de Piaget, de um lado, e com os saberes experienciais, do outro. Só que, não perdendo de foco a prática docente de Matemática, e tudo isso constitui, apenas, porque é uma iniciativa, uma proposta metodológica para a Formação de Professores.

Será que agora, pessoal, deu pra ter uma ‘maior’ compreensão do que nós iremos fazer? [As participantes expressaram, através de expressão facial, compreender o exposto.]

79. **P-9:** Ah, com certeza!

80. **Pesquisador/Participante:** Alguma dúvida, por favor? [O silêncio pareceu indicar não haver dúvidas.] Esboçamos as origens, os porquês, quais são os objetivos, as hipótese de onde eu parti, como será a dinâmica, como será constituído o nosso Grupo de Estudo...

[Dando continuidade, foram disponibilizados aproximadamente 25 minutos para a leitura dos resultados obtidos e posterior discussão.]

81. **Pesquisador/Participante:** Em relação à 1.^a questão: “De que modo influências positivas ou negativas interferem no processo de aprendizagem da Matemática?”. Lembram-se daquele quadro e que eu pedi pra vocês colocarem as influências positivas e negativas dos seus antigos professores, no questionário? [As participantes indicaram se lembrar do Questionário Inicial respondido.] Agora estou pedindo para que vocês reflitam um pouco sobre de que modo tais influências interferem. “Rememore suas vivências positivas ou negativas para pensar sobre tal questão.”. Quem começa?

82. **P-9:** Alguém quer começar? [A participante falou, emitindo um leve ‘riso’ logo em seguida.]

83. **P-1:** Eu não entendi... Como assim? Quais influências?

84. **Pesquisador/Participante:** Primeiro estou perguntando se você acredita que as influências positivas ou negativas, sejam marcantes dos professores, interferem no processo da aprendizagem da Matemática?

85. **P-1:** *Ah, tá, dos professores! Ah, se aquele professor não gosta de Matemática ele vai dar o necessário...*

86. **Pesquisador/Participante:** Então ele ‘deu’ pra você uma influência negativa!

87. **P-1:** *Negativa! Já o professor que gosta dá atividades diferenciadas, vai empolgar mais!*

88. **Pesquisador/Participante:** E vocês acreditam que isso interfere em muito para aprender Matemática?

89. **P-9:** *Simplesmente interfere. Interfere completamente... se o professor não sabe o que está fazendo ele não vai ensinar nada, não vai dar nada de bom! Ele vai simplesmente passar o que está no livro didático! E, daí, se o aluno perguntar ele vai falar “É desse jeito!”, e pronto!*

90. **P-4:** *Ele [referiu-se a um antigo professor de Matemática] fala que você é burro, que não vai aprender mesmo, porque ele próprio não sabe. E, daí, quando o aluno pergunta ele se sente ofendido, e como ele não pode demonstrar que ele não sabe ele vai ofender o aluno...*

91. **Pesquisador/Participante:** Quem aqui já foi ofendido, muito?

92. **P-4:** *Eu... [Risos.]. Eu não lembro muito, especificamente, mas me marcou. A Matemática pra mim, desde que eu me conheço, que eu entrei na escola, eu acho que foi um professor que falou muito mal, que eu não sabia mesmo, uma coisa assim... Porque eu, Matemática pra mim dá até alergia, eu não posso nem ouvir em falar em Matemática. [A participante, neste momento, imitou tal alergia ao passar a mão direita sobre o braço e as demais participantes deram risada.]*

93. **Pesquisador/Participante:** Então você vivenciou, é uma ‘prova viva’ de que tanto as influências negativas quanto as positivas... Você teve alguma positiva?

94. **P-4:** *Ah, assim, que eu me lembre... eu não tive nenhuma positiva! E eu acho que depois de um período, eu já estava tão calejada... eu acho que coloquei na cabeça “Não gosto de Matemática!”... então, qualquer pessoa depois de uma certa época que veio falar pra mim “Ah, a Matemática é bom, é legal, vamos fazer!”, eu já não aceitava mais que podia ser bom. Eu acho que eu internalizei isso!*

95. **Pesquisador/Participante:** O que você acabou de falar é interessante, embora seja algo triste. Na própria teoria de Piaget, se o sujeito não aceitar o desafio-desequilíbrio não vai acontecer nenhuma mudança. Tudo bem, pessoal? Pode até surgir uma dúvida, mas se o sujeito não tiver a ‘disposição’ de encarar essa dúvida ele vai continuar na mesma situação cognitiva ou afetiva, por exemplo. É oportuno observar que as nossas experiências, vivências podem ser interpretadas segundo a teoria de Piaget! Eu acho que isso é interessante, aí está a riqueza de aliar teoria e a realidade (prática), a teoria dando subsídio para a interpretação da

realidade, bem como essa possibilitando um redirecionamento da teoria. Vamos lá, alguém mais sobre as influências positivas!

96. P-9: *Eu lembro da professora, da 1.^a a 4.^a série eu estudava numa escola pública chamada H. B. Lá eu tive uma professora de Matemática na 3.^a e 4.^a série chamada R. e acho que ela contribuiu muito para o meu gosto com a Matemática, porque quando eu cresci eu tive muitas dificuldades, mas assim, no colégio onde eu fui estudar mas essa é a parte mais negativa do processo. Mas o que ela trabalhou muito com a gente era o quanto era importante a Matemática no nosso dia-a-dia, que a Matemática cabe em tudo. Então ela levava a gente para fazer aula-passeio, Lembro de uma muito interessante na hora do nosso intervalo-recreio, ela falou pra todo mundo levar moedas que a gente iria comprar na parte da cantina e aí a aula de adição, subtração e depois ela usava isso que a gente aplicou ali: “Quanto que vai ter de troco?”, essa relação que foi super gostoso, todo mundo ficou afim de aprender, eu lembro que foi um dia muito legal. [A participante expressou felicidade por meio de expressão facial.] Todo mundo sentou pra comer o lanche em roda e ela continuou falando ainda mais sobre a Matemática, e depois quando ela mandava a gente ir até a lousa e resolver contas... ela tinha também essa parte tradicional, mas que ela usava isso “Lembra se você for comprar em tal lugar, lembra como faz isso...”. Então eu acho que ela despertou que a Matemática não é uma coisa só do papel e do porque a gente está fazendo isso... eu lembro que chegava em casa e falava o que ela fazia com a gente, eu me lembro que ela montava jogos, colocava a gente em roda, ela tinha uma postura muito bacana. Eu tive uma experiência muito boa nos primeiros anos, é por isso que eu gosto de Matemática, eu acho que é por isso também, porque eu vejo em tudo, eu acho que é muito legal!*

97. Pesquisador/Participante: Você comentou que o ‘fazer contas’ era algo tradicional. Por quê?

98. P-9: *Não, porque eu via que ela tinha muito de aulas expositivas, eu via muito ela como a dona da verdade ainda, porque ela ao mesmo tempo tinha práticas inovadoras... eu acho que até pra época, não me lembro. Eu lembro que tinha essa prática porque era obrigatório todo mundo ir na lousa em tal momento...*

99. Pesquisador/Participante: Mas, a conta em si, ou o algoritmo, você não encara como tradicional!?

100. P-9: *Não, eu não encaro. Mas a prática dela em si, ser obrigatório... mas ao mesmo tempo ela tinha outras práticas que não eram...*

101. Pesquisador/Participante: Ela fazia uma ‘mesclagem’ entre o tradicional e a inovação?

102. P-9: *Isso! E depois disso eu não me lembro mais... lá na 5.^a série, em diante, em uma escola particular eu tive uma experiência super negativa, os professores falavam “Vocês não sabem nada, não estão interessados...” e isso era numa escola particular! [A participante sinalizou certo tom irônico pelo fato de, mesmo numa escola particular, serem observadas tais atitudes dos professores.]*

103. Pesquisador/Participante: Ok! Uma influência negativa... alguém mais teve em Matemática?

104. P-2: *Então, eu estive pensando sobre a questão... Eu não diria que foram influências positivas e nem negativas o meu ensino. Embora não foi nada inovador e sim tradicional, mas era uma relação tranquila quanto aos questionamentos com a professora, ela retornava, ela explicava. Mas era aquela coisa muito... listas de exercícios, não tinha situação problema, essa vivência da Matemática no seu cotidiano, não tinha esse lado... E daí, de repente, eu paro pra pensar nos meus boletins e eu não tinha notas ruins em Matemática, mas eu tenho muita dificuldade hoje, e que na época eu não sentia... porque eu ia lá, fazia toda a lista de exercícios, quando eu tinha dúvida sobre como 'montar a conta' ela sempre respondia, podia fazer perguntas, podia até trocar com o colega. Mas eu tenho muito isso, eu tenho momentos e falo assim "Eu não aprendi!", eu sinto isso, sabe... se você me dar um problema aqui agora eu não sei resolver! Então eu fico questionando isso, sabe, a postura que foi errada, a falta dessa vivência maior, eu não sei. É muita dúvida!*

105. Pesquisador/Participante: *Então me parece que você teve uma aprendizagem... utilizando o termo 'estática'... naquele momento lhe serviu para algum desafio, só que você não tomou 'consciência' daquilo que você aprendeu. Tomada de consciência no sentido de você conceituar as suas ações e operações (intelectuais). Você acredita que isso, por você ter muita dificuldade em acessar os conhecimentos que, em hipótese, mediante o boletim, foi aprendido, então quer dizer que faltou um outro 'passo'...*

106. P-2: *Sim, é isso! Não tem igual a P-4 que teve trauma, isso não aconteceu comigo, não me lembro de influência negativa, de "Ah, como você é burra!" ou com outros alunos da sala, mas eu sinto muito isso, eu tenho um déficit...*

107. Pesquisador/Participante: *É interessante porque, nos permite pensar que, o fato de não ter tido influências, positivas ou negativas, não implica se aprendeu melhor (ou não). Todo mundo concorda? [As participantes, através de expressão facial, indicaram concordar.]*

108. P-7: *Isso o que ela está falando acho que aconteceu comigo. A professora ia explicar determinado conteúdo, vamos supor que era problema. Ele começava com o da adição, daí ele ia dar a prova e era só aquilo. Daí, sei lá, no outro semestre era o mesmo problema, mas só com multiplicação, então você sabia fazer aquilo ali separado. Vinha a prova e vinha o título ali, você sabia que era aquela 'continha', então... geralmente as minhas notas eram boas, como ela disse. [Referiu-se à P-2.] Só que quando chega lá na frente, no vestibular, onde está tudo misturado e não tem o título em cima "Faça tal continha!", aí não sabe, no meu caso eu não sei fazer. [Nesse instante P-4 concordou com a fala da participante indicando ter vivenciado situação análoga.] Daí dá a entender que realmente eu não aprendi!*

109. P-1: *É, não tinha resolução de problemas...*

110. P-2: *Eram apenas exercícios.*

111. P-7: *É! Na época que a gente estudava davam a equação então era daquele jeito, tudo era separadinho, então naquele momento era fácil. Mas eu também tive muito essa parte da P-4, minha professora dava muita tarefa, aquelas listas de exercícios enormes, aí a gente se descabelava pra fazer em casa e, no outro dia, ela chegava, dividia a lousa em várias partes, ia sorteando por número e mandando cada um ir... Daí ficava todo mundo na lousa*

resolvendo uma questão, acabava e ela ia corrigir na lousa, se estava errado ela perguntava “Quem fez isso aqui?”, daí a sala inteira dizia “Foi não sei quem!”...

112. Pesquisador/Participante: E esse ‘quem’ já dava um ‘frio na barriga’?

113. P-7: A gente já chegava na sala tremendo [As demais participantes, em conversas paralelas, sinalizaram imaginar a situação exposta, tendo, talvez, vivenciado situação semelhante.] Podia até levar o caderno na lousa pra copiar, só que aí a gente chegava mais cedo na aula nesse caso e conferia com todos, daí se o dele estava igual ao meu então está bom, porque a gente não sabia qual a gente ia lá fazer, literalmente ia a sala inteira. Daí quando ela via que estava errado, ela mandava aquela pessoa ir até lá e corrigir, mas daí “O que eu errei?” “Não sei!”, e daí apaga tudo e ficava lá com o giz na mão tremendo “O que eu faço?”. [Risos das demais participantes.] E daí o pessoal da sala ficava gritando “Faça isso, faça aquilo!”, daí você ficava lá quase meia hora, quase chorando com o giz sem saber o que fazer. Daí ela vinha, “Oh, é assim e assim, pega o giz e faz, pronto e acabou!!”. Às vezes não seria até comigo, porque eu chegava em casa, pedia ajuda pra minha irmã pra eu ter certeza que estava certo, só que acontecia com os outros... e o medo era tão grande de ser com a gente, de ela fazer isso, então era muito complicado, você já fica com aquele medo!

114. Pesquisador/Participante: E analisando hoje isso é uma triste situação!

115. P-7: E ela não dava espaço pra perguntar antes, pra olhar se estava certo, era a gente mesmo que corrigia. Ela ficava lá e a gente tinha que corrigir sozinho no caderno!

116. Pesquisador/Participante: O que foi interessante que a P-7 falou recai na 2.^a questão, concordam [As participantes indicaram aceitar por meio de expressão facial.]... dessa maneira expositiva. Porque a 2.^a pedia: “Quando questionado sobre as posturas didático-metodológicas adotadas pela maioria dos seus professores de Matemática durante a Educação Básica”, o resultado foi o seguinte:

ESTRATÉGIAS DIDÁTICO-METODOLÓGICAS	NUNCA OU QUASE NUNCA	DE VEZ EM QUANDO	SEMPRE
1. Exposição Oral feita pelo professor na lousa.	0	1	9
2. Agrupamento dos alunos para realização de atividades sugeridas pelo professor.	3	6	1
3. Atividades individuais solicitadas pelo professor.	0	1	9
4. Aplicação de jogos envolvendo noções / conteúdos matemáticos.	8	0	2
5. Troca de ideias entre alunos e professores.	4	4	2
6. Troca de ideias entre alunos e alunos.	6	3	1
7. Trabalho interdisciplinar, ou seja, a Matemática e outras áreas do conhecimento.	9	1	0
8. Trabalho intradisciplinar, ou seja, a Matemática em outras áreas do conhecimento.	7	3	0
9. Atividades envolvendo materiais concretos manipulativos.	6	4	0
10. Confeção de algum material pelos alunos.	6	4	0
11. Atividades lúdicas como: dramatizações, brincadeiras, entre outras.	9	1	0
12. Uso de tecnologias (computador, internet, calculadora, projetor, etc.)	5	5	0

Esse Quadro, ou melhor, essa Tabela porque possui quantidades numéricas, tá pessoal, essa é a diferença entre Quadro e Tabela, o Quadro traz apenas informações qualitativas e Tabelas trazem informações quantitativas, além das qualitativas. Quantitativas expressas por frequências numéricas, percentuais, em forma de média... Percebe-se que ‘SEMPRE’ a maioria dos professores de vocês utilizava a exposição oral, ok? **[As participantes aceitaram o questionamento.]** ‘SEMPRE’ haviam atividades individuais, que é o item 3. **[P-2, P-5, P-5 e P-9 falaram, em tom baixo, “Sim.”]** E olha que pena, ‘NUNCA ou QUASE NUNCA’ um trabalho interdisciplinar ou intradisciplinar. Vocês conseguem perceber essa diferença entre esses itens? **[A maioria através de expressão facial sinalizou visualizar tal diferença.]** ‘NUNCA ou QUASE NUNCA’ atividades lúdicas, aplicação de jogos. ‘DE VEZ em QUANDO’ utilizavam alguma tecnologia, mas acredito que nesse mundo atual isso é pouco. Também observamos ‘DE VEZ em QUANDO’ a confecção de algum material, mas, será que tal atividade não era apenas para terminar a aula do dia? **[As participantes mostraram-se pensativas.]** ‘DE VEZ em QUANDO’ alguns materiais concretos manipulativos, mas será que tais materiais eram utilizados no início das aulas para o aluno pensar sobre o conteúdo, ou ficava só no final da aula como diversão ou para fixação do conteúdo? O que vocês acham, pessoal? É a segunda hipótese, pessoal?

117. **P-5:** *Não, no meu caso eu acho que respondi essa ‘DE VEZ em QUANDO’ ou ‘SEMPRE’, porque eu lembro de uma situação onde a professora deu várias coisas, eu tenho uma lembrança positiva dela... Quando ela foi ensinar ângulo, ela levou o LEGO com um hominho, sabe! E daí você colocava no primeiro degrau e perguntava que ângulo o hominho estava em relação ao chão... ela também fez isso com a rampa do pátio da escola onde o ângulo deveria ser maior/menor, essas coisas... Eu acho que teve uma maneira assim correta de utilizar esses materiais... Mas, muitas vezes, eu acredito sim, que seja a segunda hipótese.*

118. **Pesquisador/Participante:** O que esses números aqui **[Referiu-se à Tabela acima.]** indica quanto ao agir dos professores de vocês? Em relação ao que eles acreditavam ser o processo de ensino e aprendizagem da Matemática? **[Silêncio entre as participantes.]** Para o professor ficar só na tríade exposição oral, atividade individual e correção na lousa, o que ele acredita que seja o processo de ensinar e de aprender Matemática?

119. **P-4:** *Repetição!*

120. **P-5:** *Ele transmite o conhecimento e o aluno recebe!*

121. **P-2:** *Recepção!*

122. **P-9:** *O aluno recebe!*

123. **Pesquisador/Participante:** Então o aluno é o que nessa recepção? Passivo? **[As participantes indicaram concordar com a questão.]** Vocês se lembram qual é a tendência epistemológica que alicerça tal ideia? **[Após, mais ou menos, 1 minuto de silêncio, P-9 indagou.]**

124. **P-9:** *Seria... que o aluno seria também uma tabula rasa!*

125. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo! Os professores que agem dessa maneira acreditam nessa ideia de tabula rasa, e tem um nome que define essa teoria do conhecimento...

126. **P-2:** *É a inatista?*
127. **Pesquisador/Participante:** Não!
128. **P-2:** *Então é o empirismo!* [As demais participantes agitaram-se, emitindo risos em baixo tom.]
129. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, pessoal? O empirismo parte da hipótese de que o sujeito vai receber determinada informação e vai aprender ‘imediatamente’. Por exemplo, falei (o professor), transmitiu, recebeu (o aluno), aprendeu e acabou! E o inatismo?
130. **P-2:** *Está dentro já do sujeito o conhecimento.*
131. **Pesquisador/Participante:** Isso! Para o inatismo, o meio fornece alguns estímulos, mas os conhecimentos já estão dentro do sujeito, ele já nasceu com aquilo... Alguém já ouviu o professor falar assim, no corredor: “Ah, esse, coitadinho, não nasceu pra Matemática!”? [As participantes deram risada em sinal de já terem vivenciado tal situação.]
132. **P-2:** *Ah, sim, até atualmente!*
133. **Pesquisador/Participante:** Em qual situação?
134. **P-2:** *Em comentários, mesmos, eu estava numa sala de professores e os professores estavam falando de um determinado aluno eles usaram realmente esse termo: “Não adianta, ele não nasceu mesmo pra isso!”.*
135. **P-4:** [Em tom irônico e rindo.] *“Não vai dar boa coisa!”* [Referiu-se às falas já faladas por professores conhecidos.]
136. **Pesquisador/Participante:** Dá pra perceber nessa fala a ideia inatista, não dá!? É como se aquele sujeito já nascesse pré-determinado, fadado ao fracasso... E falas empiristas? Vocês poderiam me dar um exemplo de uma fala empirista? [Após 1 minuto ninguém se manifestou.] Lembra de uma fala comum, habitual?
137. **P-2:** *Por exemplo, eu preciso abrir sua cabeça e colocar alguma coisa lá dentro?*
138. **Pesquisador/Participante:** Sim, perfeito! Porque, se o sujeito é um ser passivo, é você (professor) quem vai fazer a pressão nele. É uma fala, muito boa! Uma outra? Ninguém se lembra?... P-1?
139. **P-1:** *Ah, por exemplo, quando o professor fala: “Ah, eu já dei esse conteúdo!”, como se tivesse ‘dado’ fosse o suficiente!*
140. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo! É como assim, “Eu já expliquei muito bem, eu falo, falo, falo e o aluno tem a obrigação de na prova tirar nota A”. Vocês concordam comigo que isso é uma fala empirista? [As participantes, através de expressão facial, concordaram com tal questionamento.] E para esse professor passar a ter uma fala ‘construtivista’, como essa lógica deve ser?

141. P-2: *Em primeiro lugar o professor tem que parar de conceber o aluno enquanto passivo. E, também, se o professor não quiser mudar não tem como (re)significar.*

142. Pesquisador/Participante: É interessante nós mesmos começarmos a nos questionar porque o querer mudar a sua própria postura é um dos ‘primeiros’ passos nesse processo de (re)significação. Vocês concordam, pessoal? **[As participantes concordaram com tal questionamento por meio de expressão facial.]** Podemos prosseguir com a nossa discussão? **[Neste momento P-6 chegou e lhe foi fornecido o texto para que a mesma passasse a fazer parte da discussão. Rapidamente foi-lhe esboçado as discussões realizadas até o momento.]**

Então vamos à questão 3. “Na escrita de vocês, um professor de Matemática ‘diferenciado’, ou seja, que ‘melhor’ ensina, é caracterizado como sendo àquele que realiza as seguintes ações: interação (diálogo) entre alunos e professor, realização de trabalhos em grupo, observação das dificuldades apresentadas pelos alunos, dinamicidade nas aulas. Por que tais ‘ações’ colaboram no processo de aprendizagem dos conteúdos matemáticos?” Eu escrevi aquilo que vocês colocaram no questionário. Porque tais ações ajudam o aluno a melhor construir a Matemática?

143. P-1: *Porque essas ações norteiam o professor a saber o que o aluno já aprendeu, o que ele está com um pouco de dificuldade, e o que o professor tem que fazer para poder ‘alcançar’ o aluno.*

144. P-2: *Eu acho também que ele ‘envolve’ o aluno com o conteúdo, pois, conhecendo, partindo do que o aluno já traz, a questão do diálogo e de realizar trabalhos em grupo o aluno vai se envolvendo com o conteúdo!*

145. P-4: *E não é um conteúdo pronto, né! O aluno constrói mesmo, você percebe o que o aluno tem de dificuldade e trabalha isso!*

146. P-5: *As dificuldades, também. É importante o professor conhecer a dificuldade do aluno... Eu acho isso muito importante, porque, para você acertar, você tem que saber onde está errando, muitas vezes nem o professor sabe pra poder te falar, muitas vezes você tem que ‘enxergar’ onde está errando para poder acertar.*

147. P-2: *Ou então, a P-7 deu um exemplo muito claro... Te mandam na lousa e o aluno faz errado e a professora pede “Corrija!”. E aí!? Se eu errei é porque eu já estou com dificuldade, eu não sei ao certo o que fazer. E assim é uma maneira do professor identificar a dificuldade do aluno e poder auxiliar. Não só constatar que errou!*

148. Pesquisador/Participante: É interessante observar que as justificativas que vocês falaram podem ser interpretadas a partir da teoria de Piaget. Quando fala nessa questão do ‘melhor envolvimento’ é quando o aluno, devido a essa afetividade, ‘envolve-se’ mais com o professor. A afetividade para a inteligência constitui uma ‘energética’, ou seja, um ‘querer se superar’. Alunos e professores que não se ‘envolvem’ dificultam aquela ‘química’, entre aspas. Foi muito bem colocado por você, P-1, quando reportou que o professor consegue acompanhar a evolução dos alunos. Se eu parto da hipótese de um construtivismo sequencial piagetiano, esse acompanhamento é primordial para, a partir de onde ele está e, mediado pelo professor, nesse movimento de interação constante, o aluno poderá galgar compreensões ‘melhores’ formalizadas. Alguém mais quer comentar algo acerca da 3.^a questão? **[Como ninguém se pronunciou, deu-se continuidade.]**

4.^a questão: “A respeito dos conteúdos matemáticos aprendidos por vocês durante a Educação Básica, obteve-se o seguinte resultado:” **[Foi mostrada a Tabela abaixo.]**

“BLOCO” DE CONTEÚDOS	NÃO APRENDI	APRENDI + OU -	APRENDI BEM
a) Operações Aritméticas Básicas	0	2	8
b) Sistema de Numeração Decimal	0	5	5
c) Geometria Plana e Espacial	3	6	1
d) Grandezas e Medidas	1	6	3
e) Tratamento da Informação	4	5	1
f) Solução de Problemas	1	6	3

As Operações Aritméticas Básicas foi respondida por 8 de vocês, “APRENDI BEM”; Sistema de Numeração Decimal, metade respondeu “APRENDI + ou –” e metade “APRENDI BEM”; a Geometria Plana e Espacial, 6, ou seja, mais da metade aprendeu mais ou menos e 3 responderam que não aprendeu; em relação à Grandezas e Medidas 6 (mais da metade) respondeu “APRENDI + ou –”; Tratamento da Informação, 9 estão nas categorias “NÃO APRENDI” e “APRENDI + ou –”; e na Solução de Problemas 6 colocam que aprendeu mais ou menos e 3 que “APRENDI BEM”. O Bloco Operações Aritméticas Básicas foi o que apresentou a maior frequência no critério “APRENDI BEM”, em compensação o Bloco Tratamento da Informação denotou maior frequência no critério “NÃO APRENDI”. O que os critérios “APRENDI BEM”, “APRENDI + OU -” e “NÃO APRENDI” representam para vocês, ou seja, quando sabem que é oportuno utilizá-los? O que significa para a P-7, por exemplo, que ela APRENDEU BEM alguma coisa? O que significa, assim, que ela APRENDEU + ou –? Ou, o que significa NÃO APRENDI?

149. P-6: *Eu acho assim, com o passar do tempo... Como faz muito tempo que eu fiz esse caminho... O que é “Eu não aprendi” é aquilo que eu tive mais dificuldade no decorrer dos anos estudar. O aprender mais ou menos é o que eu aprendi... é... ah... porque o professor ele... ensinava a gente a parte da aritmética básica, pelo menos quando eu estudei, no começo era só aritmética básica mesmo e os outros conteúdos vinham no decorrer dos anos?*

150. Pesquisador/Participante: Essas operações se referem às quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão)?

151. P-6: *Isso, das quatro operações! E daí, assim, se você não aprendesse a básica, você não teria condição para aprender as outras, então, é... já tinha uma dificuldade lá atrás, entendeu... Quando, no decorrer do tempo do seu estudo que a criança tinha dificuldade maior, eu acho que, para mim, o que eu aprendi mesmo foi o básico, depois no decorrer foi que teve aquela maior dificuldade... ou “NÃO APRENDI” ou “APRENDI + ou –” vem da dificuldade que eu tive em estudar Matemática.*

152. P-1: *Olhando esse gráfico... tabela! Hum...?*

153. Pesquisador/Participante: É uma tabela!

154. P-1: *Quando eu li a Tabela eu estive pensando... se a gente for notar as Operações Aritméticas Básicas, que seriam, entre aspas, mais fácil, tem mais “APRENDI BEM” do que os outros que vai ficando mais complexo o conteúdo. Então, se os outros [Referiu-se aos demais conteúdos esboçados na Tabela em questão.] que eu “APRENDI + ou –” é mais complexo que o ‘básico’, então será que realmente eu “APRENDI BEM” o básico?*

155. **Pesquisador/Participante:** Compreendi. Você está se referindo aos níveis de dificuldade, não é?
156. **P-1:** *É!*
157. **Pesquisador/Participante:** O que vocês acham? **[Colocou a questão para todas as participantes.]**
158. **P-5:** *Eu acho que a gente coloca isso no “APRENDI BEM” quando você se lembra muito do professor dando isso...*
159. **Pesquisador/Participante:** Se ‘lembrar’ ou saber utilizar em diferentes situações?
160. **P-5:** *Então, aí...*
161. **P-9:** *Ah, se eu sei utilizar em diferentes situações porque se eu sei, eu sei bem!*
162. **P-6:** *Porque aí chega na hora da aula do N., que deu Matemática pra gente, daí as pessoas dizem “Ah se eu tivesse aprendido desse jeito eu gostaria mais de Matemática!”, ou seja, será que a gente aprendeu mesmo?*
163. **P-9:** *É porque foi passado de outra forma, né!*
164. **P-6:** *É, de outra forma! É...*
165. **P-9:** *Diferente do tradicional!*
166. **P-1:** *Eu falei sobre aprendeu bem, o básico, porque pra mim, pra aprender os mais complexos é preciso saber bem o básico e o não aprendeu ou aprendeu mais ou menos os outros conteúdos quer dizer que tem alguma coisa no básico.*
167. **P-9:** *Muitas vezes as crianças podem ter assimilado até o básico, por exemplo, as quatro operações básicas, mas adiante isso está tão defasado, é tudo tão complexo que não é passado, por exemplo, o Tratamento da Informação e essas coisas mais complexas que seriam importantíssimas e ser aliados com as outras matérias não é feito isso, principalmente na escola pública... Então eu acho que tem partes e outros interessados é que haja isso mesmo, porque quanto mais aprofundado você sabe Matemática, mais você tem o raciocínio e a percepção até das outras coisas que estão acontecendo.*
168. **P-1:** *É como se uma coisa puxasse a outra!*
169. **Pesquisador/Participante:** Então é possível afirmar que esse critério “NÃO APRENDI” é quando vocês, além de não se lembrarem, vocês não têm a mínima ideia do que aquele Bloco de Conteúdo se refere? Pode ser isso? Em relação ao “NÃO APRENDI”? **[Silêncio entre as participantes indicando, provavelmente, duvidar de alguma parte do questionamento.]** Ou apenas sabe citar os conteúdos?
170. **P-9:** *Você sabe, mas não sabe fazer também!*
171. **P-6:** *É quando você já viu...*

172. **P-2:** *É, já ‘viiuuu’...* [Nesse instante as demais participantes deram risada, inclusive a P-2.]

173. **Pesquisador/Participante:** Você já viu, eu ‘passei por aqui’... [Riso geral.]

174. **P-9:** *Por exemplo, você já viu aquele gráfico, mas você sabe realmente ler esse gráfico, você sabe trabalhar com esse gráfico?!*

175. **Pesquisador/Participante:** E em relação ao “APRENDEU + ou –”? É no intuito daquela ideia: “Eu consigo dar um jeitinho!”, “Eu me viro mais ou menos!”?

176. **P-9:** *É igual aquele ‘jeitinho brasileiro’!* [A expressão facial das participantes denotou riso.]

177. **Pesquisador/Participante:** E agora o “APRENDI BEM”... eu consigo utilizar em algumas situações mas não em todas! Seria isso?

178. **P-6:** *Ah, eu acho que se eu “APRENDI BEM” eu aprendi, aprendi!*

179. **Pesquisador/Participante:** Então aprendi, aprendi é aprendi mesmo?

180. **P-6:** *Ah, sim!*

181. **P-9:** *É, pelo menos o básico!*

182. **P-2:** *Deveria ser, quando você diz “APRENDI BEM” você deveria saber utilizar em diversas situações...*

183. **P-5:** *É, eu aprendi, mas talvez não em tudo!*

184. **Pesquisador/Participante:** Compreendi! É interessante também a gente rever a nossa posição quanto a esses critérios!

185. **P-9:** *Ah, por exemplo, com relação às Operações Aritméticas Básicas, quando eu coloquei “APRENDI BEM” é porque eu acho que aprendi mesmo! E o mais ou menos eu coloquei nessa questão de, ah, eu sei resolver algumas coisas, mas com coisas mais complexas eu não sei usar!*

186. **P-6:** *Eu também coloquei nesse sentido!*

187. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, pessoal, essa 4.^a questão? Deu para elucidar alguns porquês, entendimentos... [Ninguém manifestou possuir alguma outra dúvida.]

Em relação à 5.^a questão. E ela é muito interessante porque eu quero saber de vocês como definem a Matemática. Por isso eu coloquei aquela pergunta no Questionário Inicial “O que é a Matemática?”. E eu obtive 10 respostas diferentes, algumas ‘conversavam’ entre si, outras não. E eu peço que vocês estabeleçam, ou, se é possível estabelecer uma definição síntese a partir das ideias contidas no Quadro com as respostas de vocês.

PARTICIPANTE	RESPOSTA
P-1	<i>É uma linguagem numérica.</i>

P-2	<i>Para mim Matemática é uma ciência considerada exata que envolve informações e dados geralmente números com o objetivo de calcular, expor resultados, informações de pesquisa e auxiliar a resolução de problemas diários.</i>
P-3	<i>É uma disciplina que desenvolve o raciocínio-lógico bem como a interpretação de textos (situações-problemas) e dados.</i>
P-4	<i>Algo terrível de que tenho medo.</i>
P-5	<i>É uma área do conhecimento que desenvolve o raciocínio lógico, que estimula a nossa mente, e que trata dos fenômenos relacionados a números.</i>
P-6	<i>Matemática está a todo momento ao nosso redor. Em tudo usa-se Matemática, para isso deve-se raciocinar e pensar.</i>
P-7	<i>Uma disciplina em que abrange as questões utilizadas todos os dias em nosso cotidiano para fazer contas, medir coisas é algo muito amplo.</i>
P-8	<i>Entender os números – resolver problemas.</i>
P-9	<i>Na minha opinião a Matemática é a somatória das necessidades de busca e aperfeiçoamento do Homem através dos tempos para melhor desenvolver a sua vida individual e coletiva. Assim sendo, ela é por si blocos de conteúdos e saberes que fazem a sistematização da vida do Homem.</i>
P-10	<i>Para mim, Matemática é a ciência que estuda números e suas diferentes atribuições e articulações.</i>

E, a partir do que tem no Quadro, será que essa síntese vai contemplar uma visão geral da Matemática enquanto uma ciência? **[Após aproximadamente 5 minutos para a leitura do referido Quadro, deu-se início à discussão.]**

Então, vamos lá, é possível uma definição?

188. **P-1:** *Eu fiz uma síntese!*

189. **Pesquisador/Participante:** Por favor, leia pra gente!

190. **P-1:** *Eu coloquei que a Matemática é uma linguagem numérica que auxilia o raciocínio lógico para a melhor vivência no nosso cotidiano!*

191. **Pesquisador/Participante:** É uma possível definição! Alguém mais? P-5?

192. **P-5:** *Eu acredito que é mais ou menos isso! Eu anotei algumas palavras que se repetiram e o que escrevemos foi números, a relação com o pensar e alguns falaram a relação com o cotidiano... e isso tudo encaixaria na frase que P-1 comentou!*

193. **Pesquisador/Participante:** E você, P-2?

194. **P-2:** *Eu também fui pelo mesmo caminho delas! [As demais participantes concordaram com a definição exposta inicialmente por P-1.]*

195. **Pesquisador/Participante:** E vocês acham que essa definição contempla a Matemática enquanto uma ciência?

196. **P-9:** *Está faltando muita coisa que não foi citada!*

197. **Pesquisador/Participante:** Que coisa? O que mais?

198. **P-9:** *Ah, é muita mais que isso, que só uma coisa exata. Eu explicaria de uma forma desde o seu desenvolvimento, por exemplo, do surgimento, do por que surgiram os números e tudo mais...*

199. **P-1:** *Mas foi por causa do cotidiano!*

200. **P-9:** *Não... mas o que ele tá perguntando é se só o que a gente colocou aqui dá conta de explicar a Matemática enquanto uma ciência! Ou seja, o que é a Matemática em si! É isso que eu acho, que ela faz parte de tudo!*

201. **P-1:** *Eu mesma não saberia falar.*

202. **P-4:** *É, eu também não sei!*

203. **P-6:** *A gente sabe que está faltando, mas não saberia falar! A nossa resposta é uma síntese do que está aqui, mas eu acho que a definição da Matemática tem que ser uma coisa mais ampla, e eu, particularmente, não saberia definir esse âmbito!*

204. **P-9:** *E não foi só do cotidiano, todo esse desenvolvimento que teve, teve a ver com o desenvolvimento da Matemática. Eu vejo tudo isso! Por que o homem buscou e foi desenvolvendo a ciência da Matemática? Foi pela necessidade do desenvolvimento que teve da sociedade. E tudo mais!*

205. **P-1:** *No cotidiano da época!*

206. **Pesquisador/Participante:** Para facilitar... Se a gente parte dessa definição síntese de que é uma linguagem numérica... é apenas uma linguagem numérica?

207. **P-6:** *Ah, então, é isso!*

208. **Pesquisador/Participante:** Além de ser uma linguagem numérica, é uma linguagem ‘espacial’ quando se refere à teorização do espaço, que ‘recai’ na geometria. Porque a geometria, em si, não necessita de uma linguagem numérica, ela possui a sua linguagem própria. Se nós considerarmos, por exemplo, a Geometria Euclidiana Plana, desenvolvida por Euclides, com os seus axiomas... Vocês já ouviram falar nesse termo? **[Devido ao silêncio, observou-se uma possível não compreensão por parte das participantes.]** Axiomas são ideias iniciais que não precisam ser provadas, de tão simples são auto-constatadas, e a partir desses axiomas vão se construindo teoremas, proposições. E não precisa de uma linguagem numérica para essa construção, tudo bem? Ou seja, a Geometria enquanto uma formalização do espaço ela não utiliza uma linguagem numérica, e sim uma linguagem, entre aspas, ‘espacial’. Assim nós complementamos a nossa definição. Mas a Matemática não é só uma linguagem numérica e ‘espacial’, também é uma linguagem das ‘relações’, onde encontramos a função. A ‘maravilhosa’ função, e maravilhosa no sentido de que, acredito que algumas tiveram dificuldades com relação a esse assunto! **[As participantes, em tom baixo, responderam “Sim.”.]** Mas, além disso tudo, é uma ciência que estuda o acaso...

209. **P-1:** *A probabilidade.*

210. **Pesquisador/Participante:** Isso! Nas probabilidades enquanto uma possibilidade de previsão. E também é uma ciência que ajuda a tratar as informações, por meio da linguagem

numérica, só que de uma maneira mais ‘refinada’. Quando, por exemplo, se apresentam vários números em uma tabela de várias ‘entradas’. Imaginemos uma tabela constituída de 10 colunas e 30 linhas, embora utilize número, a disposição dos mesmos indica o tratamento de uma ideia, de uma informação. E, se nós adentrarmos na Matemática Pura a discussão vai muito além, mas não é o nosso objetivo aqui. Tudo bem a 5.^a questão? Pretende-se que em setembro, ao término do nosso Grupo de Estudo, vocês também tenham construída essa ‘visão’, a partir das nossas discussões... dessa maior completude que é a Matemática. Porque não é apenas o professor do 6.^o ao 9.^o ano e do Ensino Médio que tem que compreender o que é a Matemática enquanto uma ciência. Eu acredito que vocês também tenham que possuir essa compreensão! Concordam? **[As participantes sinalizaram concordar por meio de expressão facial.]**

Sobre a 6.^a questão: “Diversas foram as respostas em relação à questão “Como se aprende a Matemática?” conforme evidenciado no quadro abaixo.” **[O referido Quadro apresenta-se a seguir.]**

PARTICIPANTE	RESPOSTA
P-1	<i>Através de aula expositiva e prática.</i>
P-2	<i>Tendo contato com os conteúdos conceituais porém atuando, participando ativamente, manipulando materiais concretos, refletindo sobre os conteúdos, desenvolvendo atividades em grupo, fazendo trocas, acertando e errando, fazendo exercícios e até mesmo memorizando alguns conteúdos e conceitos, como por exemplo a tabuada; porém sempre com compreensão.</i>
P-3	<i>Através dos conceitos, partindo do concreto e não só da teoria, utilizando exemplos, jogos, materiais.</i>
P-4	<i>De forma lúdica, mas não aprendi assim, por isso, não sei ensinar dessa forma.</i>
P-5	<i>Primeiramente entendendo, compreendendo, fazendo relação com algo, tentando fazer, errando, fazendo de novo até acertar. Em alguns casos, a memorização é necessária, mas somente depois de ter clareza do que se está fazendo.</i>
P-6	<i>Através de jogos e brincadeiras.</i>
P-7	<i>Boa parte dela acho que é aprendido na prática, fazendo exercícios, manipulando objetos, mas isso deve ocorrer após ou durante a explicação de um professor, pela leitura em livros, internet.</i>
P-8	<i>“Hoje” aprendi que se aprende com jogos que envolva o conteúdo e também para fixação resolução de exercícios.</i>
P-9	<i>A Matemática se inicia com o desenvolvimento cognitivo e social-histórico das crianças, pois ele é um conteúdo e base concretizados e utilizado na vida dos Homens. A criança aprende a Matemática por meio da racionalidade individual e coletiva.</i>
P-10	<i>Através de exemplos concretos, para que o aluno possa abstrair o conhecimento.</i>

[Foram disponibilizados aproximadamente 5 minutos para a leitura do referido Quadro.]

A pergunta é a seguinte, lá na página 10: “Você conseguiria elaborar uma possível justificativa do porquê de cada uma das respostas obtidas? Por exemplo, por que P-1 (Participante 1) afirma que a aprendizagem da Matemática ocorre “Através de aula expositiva e prática”?”

211. P-2: *Eu vi, assim, das respostas relendo agora, muita influência das disciplinas dos conteúdos matemáticos que nós tivemos. Muito veio de lá! Tanto a que você ensinou como a que o N. ensinou! Eu senti muita essa presença em cada resposta que eu fui lendo! Eu ia lembrando da matéria, dos conteúdos que foram passados, sobre a ludicidade, sobre os jogos, sobre o trabalho em grupo, sobre o trabalho com os concreto... [Neste momento P-6 também citou os concretos.] Eu acho que a principal justificativa seria essa, essa influência.*

212. **P-1:** *É que volta naquela questão de saber que é o certo, mas não saber qual é o embasamento teórico disso. A gente sabe que estudou isso na faculdade, mas não sabe direito de onde veio.*

213. **P-9:** *E, ao mesmo tempo, dos resquícios que a gente traz da nossa formação inicial de nós enquanto alunos do Ensino Fundamental. Por exemplo, a parte do P-1 respondeu “Como se aprende Matemática”, através de aula expositiva e prática... Mas assim, eu senti, é assim que se aprende Matemática?, através de aula expositiva e prática e ponto!? Seria só isso? Isso lembra o quê? Se a gente colocar isso em evidência parece as aulas que a gente assistia na maioria quando era criança. Aula expositiva e prática, mas no quê? Fórmulas?*

214. **Pesquisador/Participante:** Seria interessante especificar o que é essa exposição!

215. **P-9:** *É, porque isso parece uma coisa empirista, expositiva! E prático no sentido de que “Você vai fazer isso, isso e aquilo!”, “Sente em grupo e faça isso!”.*

216. **P-6:** *Eu acho que expositiva é no sentido de colocar na lousa e deixar ali na lousa. E a parte prática é o exercício em si!*

217. **P-1:** *Assim, a gente tem que ter a parte lúdica, prática, mas não pode ‘abrir mão’ da exposição!*

218. **Pesquisador/Participante:** Por que não pode ‘abrir mão’ dessa exposição, P-1?

219. **P-1:** *Ah, o aluno vai estar no jogo, assim, mas ele vai estar baseado em quê... ele vai estar jogando por jogar? Ele tem que saber as operações, tem que saber o objetivo [Nesse instante, esse último item também foi falado por P-6.] Por exemplo, tem que jogar um jogo matemático, de mais e de menos, mas antes de chegar nesse jogo, onde ele vai ter aprendido isso? A exposição viria disso! De dar uma exposição inicial pro aluno pra depois... [P-4 falou “Uma explicação!”,], isso, uma explicação!*

220. **Pesquisador/Participante:** Então quer dizer que o jogo não seria o início dessa aprendizagem?

221. **P-9:** *Não, poderia ser! Depende da fase em que a criança está! Por exemplo, se ela já consegue abstrair uma ideia, seria muito melhor uma aula expositiva. Mas se ela está no operatório concreto, é muito interessante pelo jogo, passa-se vídeo... por isso depende de onde a criança está. Por isso que fica assim através de aula expositiva e prática, depende de qual nível de criança você está trabalhando!*

222. **Pesquisador/Participante:** Mas, o que é esse abstrair?

223. **P-9:** *Bom, abstrair... é o processo que eu entendo uma coisa científica, não sei... é uma coisa assim, que ela consegue já tirar daquilo, daquela significância que ela está tendo do símbolo, do signo e consegue fazer uma coisa própria. Ela já tem autonomia suficiente pra entender esse processo. Por exemplo, ela não precisa de 2 canetas mais 2 pra entender que tem 4, ela já tem toda aquela significação de que “O que é o 4?”, que o 4 não é só o 3+1, entendeu, enfim, ou 1+3, ela já sabe qual é o 4, por exemplo, ela sabe definir o que é uma divisão, por exemplo, ela sabe da parte dos números decimais, ela já tem abstração com ela...*

Então, quando o professor vai na lousa com a parte expositiva ela já sabe o que é isso, ela já abstraiu esse processo, ela consegue imaginar a parte concreta na mente dela...

224. **P-1:** *Mas ela [Referiu-se à criança.] pode usar as 4 laranjas antes mesmo de estar nessa fase!*

225. **P-6:** *Ela nem pode saber o que é o 4, mas ela... [Observou-se certa confusão conceitual por parte das participantes.]*

226. **Pesquisador/Participante:** É interessante essa discussão da abstração, porque a abstração não é apenas aquela ideia formalizada... não... pelo contrário. E nós vamos estudar que as abstrações mais simples recorrem ao meio físico, mas é um tipo de abstração. Quando o sujeito manipula os objetos para tomar um ‘contato’ com as formas ou as propriedades desse objeto ou suas características físicas, ele está sim já abstraindo, mas é uma abstração chamada de ‘empírica’ pelo fato de ‘retirar’ aquelas características do objeto. Agora, quando o sujeito consegue pôr em relação as ações realizadas com os objetos, ele já alcança um outro nível de abstração, mas que necessita da empírica também. E, nós vamos estudar ao longo dos textos como ocorre essa interação entre esses vários tipos de abstrações para que ao final do 5.º ano o sujeito consiga ‘ir’ bem pro 6.º ano e começar a galgar abstrações mais formalizadas, que seriam as abstrações reflexivas (refletidas). **[Neste momento, P-9 interrompeu.]**

227. **P-9:** *Foi isso que eu quis dizer! [Riso.] É, as abstrações reflexivas!*

228. **Pesquisador/Participante:** Isso! É válido começarmos a diferenciar esses termos, não agora já que estamos numa conversa inicial, pra gente poder localizar em qual tipo de abstração encontram-se nossos alunos. Vocês concordam? **[As participantes, através de expressão facial, indicaram “Sim.”]** Foi bem interessante, P-9, a sua fala permitiu perceber que você estava se referindo a um tipo de abstração, apenas não sabia denominá-la.

Por fim a 7.ª questão referente ao “Como deve ser ensinada a Matemática”.

229. **P-6:** *Eu acho que se refere a tudo que nós falamos anterior... a maneira lúdica, concreta... [Devido ao silêncio apresentado pelas demais participantes, foram disponibilizados 5 minutos para a leitura do seguinte Quadro.]*

PARTICIPANTE	RESPOSTA
P-1	<i>De maneira lúdica e tentando trazer para o concreto o que for possível, para maior compreensão dos alunos.</i>
P-2	<i>Acredito que primeiramente deve ser apresentado uma situação, um problema, um questionamento, ocorrer discussões e trocas entre os alunos e o professor, conhecer os ? os alunos respondem, compreendem sobre o tema, depois fazer uma exposição conceitual, tirar as dúvidas, aplicar atividades, exercícios e jogos ou brincadeiras, sempre dialogando e verificando se o conteúdo foi aprendido e compreendido pelo aluno.</i>
P-3	<i>Deve ir construindo o conhecimento, articular com materiais, jogos, atividades lúdicas, me recordo que não compreendia as coisas, exercícios, era tudo muito complexo.</i>
P-4	<i>Com aplicação de jogos envolvendo conteúdos matemáticos e tudo o que eu respondi na questão 3 nunca ou quase nunca. De um jeito totalmente diferente do que eu aprendi.</i>

P-5	<i>Deve ser ensinada de forma prazerosa, de forma clara e com paciência. O professor deve explicar oralmente mas também deve deixar o aluno tentar fazer, e usar a memorização somente em caso de que for necessário.</i>
P-6	<i>Usando o cotidiano do aluno, juntamente com jogos.</i>
P-7	<i>Ela deve ser explicada por um professor que dê espaço para os alunos questionarem, manipularem objetos, que explique aos alunos no que estão errando, as definições dos termos, porque deve ser feito dessa forma e não de outra.</i>
P-8	<i>Com jogos, troca de idéias e exercícios de fixação.</i>
P-9	<i>A Matemática deve ser ensinada aliando saberes nos quais se instrumentaliza a criança nos modos concretos, abstratos, respeitando a sua fase psicológica e social, assim sendo, aliando também ela a seus conteúdos prévios e construindo com ela novas formas de saber explorar seu próprio modo de vida.</i>

230. **Pesquisador/Participante:** A partir dessas respostas, é possível dizer que uma completa a outra? Ou, que uma opõe a outra? Ou, que não possuem relação?

231. **P-4:** *Possui sim relação!*

232. **Pesquisador/Participante:** Elas possuem relação? [As participantes sinalizaram concordar com a fala de P-4 respondendo “Sim.”.]

233. **P-2:** *Algumas até se completam!*

234. **Pesquisador/Participante:** Como, por exemplo? Por favor!

235. **P-4:** *Que nem, a primeira resposta fala do lúdico e a segunda fala da resolução de problemas, então... uma ‘casa’ com a outra. Então uma vai acrescentando a outra...*

236. **P-6:** *Daí a quinta resposta fala de forma prazerosa, com calma e paciência...*

237. **P-2:** *E a seis já fala: “Usando o cotidiano do aluno.”.*

238. **Pesquisador/Participante:** E isso tem a ver com o lúdico, com o jogo, com todos os restantes!?

239. **P-9:** *Com os conhecimentos prévios também!*

240. **Pesquisador/Participante:** Vocês saberiam me dar uma justificativa psicológica do por que o cotidiano é importante?

241. **P-1:** *Porque é o concreto da criança.*

242. **Pesquisador/Participante:** E o que mais além desse concreto?

243. **P-1:** *Ah, eu não sei!*

244. **Pesquisador/Participante:** Mas... é só no cotidiano da criança que tem concreto? Na sala de aula, mesmo, uma situação que não tem nada a ver com o cotidiano pode ser concreto também, não pode? [P-4 e P-9 responderam “Pode.”.]

245. **P-1:** *E o cotidiano poderia ser aquilo que ela já conhece... há a possibilidade de trazer conteúdos novos.*

246. **Pesquisador/Participante:** E por que é importante partir daquilo que a criança já conhece? Em termos ou explicação psicológica?

247. **P-4:** *É os conhecimentos prévios dela!*

248. **Pesquisador/Participante:** E o conhecimento prévio, afinal de contas, é importante para quê, ou para quem ou por quê?

249. **P-1:** *Quando o professor for fazer uma relação.*

250. **P-4:** *Pra ele saber o que o aluno já sabe e, a partir daí, evoluir. Acrescentar conhecimento...*

251. **Pesquisador/Participante:** E... é fácil ‘utilizar’ essa lógica em sala de aula. [As participantes começaram a rir.]

252. **P-6:** *Não, porque cada um tem uma vivência, tem o que passou, o que foi... não o que foi ensinado, mas o que foi explicado pra ele, o que ele teve de ‘concreto’, de experiência nesse... porque tem pais que deixa a criança o dia inteiro dentro de casa... não deixa a criança ter experiência nenhuma! A experiência que ela vai ter é a televisão. Entendeu!? E na televisão a gente sabe que não tem que mostre o conteúdo.*

253. **Pesquisador/Participante:** Compreendi! Algo mais, pessoal? [Como não houve nenhuma manifestação, deu-se por encerrada a discussão.]

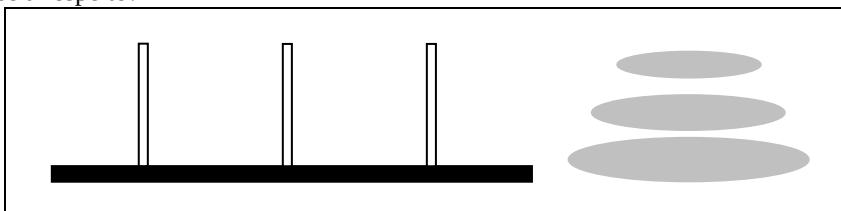
[Em seguida, visando investigar o nível de tomada de consciência das participantes em relação às operações lógicas, foi solicitado que fizessem, e individualmente, o seguinte desafio.]

A Torre de Hanói é um jogo de origem oriental. O material é composto por uma base onde estão afixados três pequenos bastões em posição vertical denominados torres A, B e C. Apresenta-se ao sujeito 2 ou mais discos de diâmetros decrescentes afixados em A e pede-se que se transporte tais discos para C, usando como intermediária a torre B. As regras são:

- 1 – Movimentar um só disco de cada vez.
- 2 – Uma peça maior não pode ficar acima de uma menor.
- 3 – Não é permitido movimentar uma peça que esteja abaixo da outra.

Realize o desafio, inicialmente, para dois discos de diâmetros decrescentes denominados I e II, sendo I > II (o diâmetro de I é maior que o diâmetro de II). Em seguida, tente para três discos, denominados I, II e III, sendo I > II > III.

Após a realização de tais desafios, o que é possível descobrir? Há algum fato comum entre as duas atividades? Pense a respeito!



[Após ter disponibilizado cerca de 30 minutos para a realização do referido desafio, as participantes realizaram o “Momento de Síntese”, ou seja, escreveram o que foi possível concluir a partir do primeiro encontro no Grupo de Estudo.]

APÊNDICE F – TRANSCRIÇÃO DO 2.º ENCONTRO

Data: 08/03/2012

Tempo de Duração: 3 horas e 20 minutos.

1. **Pesquisador/Participante:** Olá pessoal! Hoje nós vamos iniciar retomando o desafio [Fez referência a Torre de Hanói.] do encontro anterior. Eu gostaria que cada uma falasse o que o desafio causou em você ao se deparar com ele. Vamos começar com P-4, por favor. [Risos entre as participantes presentes – P-2, P-4, P-5 e P-7 – pelo fato de P-4 ter apresentado ‘grande’ dificuldade ao tentar solucionar o Desafio.]
2. **P-4:** *Sei lá... Eu acho que depois que a P-2 falou eu achei que poderia terminar o desafio, mas pra mim foi difícil.*
3. **Pesquisador/Participante:** Pra você foi difícil ficar apenas com aquela representação no papel?
4. **P-4:** *Eu acho que até se tivesse o desafio pra eu fazer no concreto seria difícil. [Nesse instante a participante falou rindo.]*
5. **Pesquisador/Participante:** Eu trouxe o desafio ‘no concreto’, ou seja, você, e quem mais quiser, poderá manipular ‘realmente’ as peças para realizarem novamente o desafio. [Foi trazido no papel a representação das torres e fichas individuais recortadas em papelão de tal modo a permitir a real movimentação dos discos (peças).] E você, P-5?
6. **P-5:** *Eu achei que, quando eu li, como eu já tinha visto num filme alguém fazendo no concreto eu pensei que não fosse tão difícil, só que quando eu comecei a fazer começou a me confundir, até que eu errei... Daí eu fui voltando ao enunciado do desafio para ver as regras porque eu havia esquecido as regras por falta de atenção na hora de ler... No começo eu achei fácil, mas no final eu achei difícil, porque você tem que prestar atenção em todas as regras e fazer aqui no papel [Referiu-se à representação das torres desenhadas no papel e entregues a cada participante.] Eu acho que no papel é mais difícil do que no concreto!*
7. **Pesquisador/Participante:** E você, P-2?
8. **P-2:** *No começo eu achei difícil... Na primeira leitura eu pensei que não havia entendido direito. Mas depois conforme vai fazendo alguma coisa sai... Não foi frustrante pra mim, foi tranquilo... Assim, não fiquei considerando se estava certo ou errado porque eu não fiquei pensando nisso, tanto que eu nem pensei se daria pra fazer com menos movimentos. Eu já pensei e fiz!*
9. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você P-7?
10. **P-7:** *Eu também achei difícil. Eu li a primeira vez e comecei fazendo e daí não deu certo. Daí eu fui ler novamente o enunciado e tive que ler várias vezes pra poder entender exatamente o que ele pedia. Mas eu achei que o mais difícil era entender! [Neste momento chegou a P-3.]*

11. **Pesquisador/Participante:** Olá P-3! O que você achou do desafio, já que você tentou fazê-lo em casa tendo em vista que no primeiro encontro não conseguiu comparecer?
12. **P-3:** *Eu achei difícil. Eu li várias vezes e não estava entendendo muito bem o que era pra fazer. Não sei se é porque teve alguma explicação no primeiro encontro...*
13. **Pesquisador/Participante:** Não! No primeiro encontro eu pedi para as participantes tentarem resolverem o desafio e não lhes foi dada nenhuma ajuda.
14. **P-3:** *Então foi difícil. Eu não sabia se tinha que fazer Probabilidade... porque eu imaginei que seria assim, como tinham vários discos seria probabilidade fazer A B C, depois C B A, mudando as ordens e colocando os discos na ordem inversa que era um maior que o outro.*
15. **Pesquisador/Participante:** Probabilidade ou combinações?
16. **P-3:** *É, combinações!*
17. **Pesquisador/Participante:** Não, nesse caso não se referia a combinações! Ok, pessoal! ... Vamos fazer o seguinte: ler novamente o enunciado. Alguém pode ler pra gente? **[P-2 fez a leitura do enunciado e das regras do desafio. Após a leitura, P-1 chegou e foi-lhe explicado o que estava ocorrendo naquele momento pelo Pesquisador/Participante.]** O que você achou do nosso desafio?
18. **P-1:** *Eu achei que eu tive muita dificuldade pra interpretar o desafio. Uma dificuldade em interpretação.*
19. **Pesquisador/Participante:** Foi uma dificuldade de interpretação e depois seguido de sua execução?
20. **P-1:** *Não... depois que eu entendi eu consegui fazer!*
21. **Pesquisador/Participante:** Ah, sim! Lembra que o objetivo do nosso Grupo é vocês tomarem consciência inclusive de suas próprias ações. Tudo bem? ... Tendo em vista isso, eu fiz uma análise ‘psicológica’ tentando compreender como vocês fizeram para resolver o desafio, descrevendo os desenhos feitos por vocês no papel onde estava o esquema-representativo das 3 torres. **[Neste momento as participantes se agitaram e algumas exclamaram: “Ai meu Deus!”.]** Eu tentei compreender as ações de cada uma, eu só não vou ler da P-3 porque eu não tinha a sua solução em mãos. Eu acho interessante esse ‘movimento’ em que eu irei ler aquilo que vocês fizeram no papel e vocês, com a solução de em mãos, irão me dizer se o que eu pensei está correto ou não! E vocês vão tentar compreender porque eu fiz essa descrição. Vocês acham interessante isso? **[As participantes concordaram, afirmando “Sim!”.]**

[Foi feita a leitura da análise, realizada pelo Pesquisador/Participante, acerca da solução proposta por cada participante, conforme consta no quadro abaixo. Para cada participante havia o questionamento se aquilo que foi lido procedia ou não. Faz-se válido pontuar que cada comentário foi lido separadamente, dando oportunidade para a participante em questão discutir com o Pesquisador/Participante.]

DESAFIO – A torre de Hanói.	
PARTICIPANTE	COMENTÁRIO ACERCA DA SOLUÇÃO
P-1	É interessante denotar que a participante apresentou dificuldade em interpretar o referido desafio. Observou-se confusão para a realização do desafio com 2 discos e também com 3 discos. Em uma das ilustrações indicou ter deslocado o disco I (sendo $I > II$) antes de ter deslocado o disco II. Embora tenha indicado realizar três movimentos para a realização do desafio com 2 discos, não foi possível compreender como realizou o deslocamento citado anteriormente. Para 3 discos a confusão é mais acentuada, o que indica uma dificuldade de compreensão e de pensamento operatório. Com apenas quatro movimentos indica ter conseguido realizar o desafio, sendo que o mínimo necessário seriam 7 movimentações. Devido às confusões ressaltadas, a participante não respondeu o que foi possível descobrir acerca dos desafios e nem sobre um fato comum entre ambos.
P-2	Embora não tenha considerado o exposto no enunciado do desafio, ou seja, a relação de grandeza entre os discos ($I > II$), consegue realizar o desafio para 2 discos indicando ter ‘executado’ três movimentos. É interessante observar que, em apenas um esquema ilustrativo, a participante conseguiu ‘operar’ utilizando o bastão B como o intermediário entre o A e o C. Já, para 3 discos, ao tentar resolver o desafio utilizando apenas um esquema ilustrativo, observou-se certa confusão. No entanto, ao representar cada movimentação em um esquema ilustrativo, a participante conseguiu realizar o desafio indicando a necessidade de sete movimentos. A participante não respondeu o que foi possível descobrir a partir dos dois desafios realizados, bem como, um possível fato comum entre os mesmos.
P-4	É interessante observar que tal participante apresentou certa dificuldade ao realizar o desafio, tendo feito alguns rascunhos antes de representá-lo definitivamente na folha-atividade que lhe foi oferecida onde constavam alguns esquemas ilustrativos dos bastões da torre de Hanói. Foi a primeira participante a indicar que $I > II$ por meio do desenho no referido esquema. Para o desafio com 2 discos indicou a realização de três movimentações. No entanto, para 3 discos, a participante não obteve êxito, mostrando-se um pouco nervosa. Devido à tal dificuldade e por ser a participante que mais tempo levou para tentar solucionar os desafios, ela não respondeu o que descobriu acerca dos mesmos e, tampouco, qual fato comum está presente em ambos.
P-5	A participante, inicialmente, não considerou a indicação colocada no enunciado denotando $I > II > III$. Ao invés disso representou, por meio de uma legenda, cores para os diferentes discos (a cor azul para o disco pequeno, a cor rosa para o médio e a cor verde para o disco grande). Para o desafio com 2 discos considerou os discos azul (pequeno) e rosa (médio). Nos dois primeiros esquemas ilustrativos a participante riscou-os, indicando ter cometido algum erro. Observou-se uma confusão quanto à solução deste desafio, e a participante não deixou evidente como fez as movimentações. Com relação aos 3 discos, novamente, o esquema representado pela participante indicou confusão, não sendo possível visualizar as movimentações realizadas, bem como, a solução do desafio. Por não ter conseguido resolver os dois desafios, a participante não respondeu o que descobriu acerca dos mesmos, tão pouco o fato comum entre eles.
P-7	A participante utilizou a indicação do enunciado para os dois desafios ($I > II > III$). Tanto para 2 quanto para 3 discos foram realizados os movimentos corretos de modo a transpor os discos de A para C. Desse modo, a participante obteve sucesso na solução do desafio para 2 discos indicando a realização de três movimentos e para 3 discos com 7 movimentos. Contudo, não respondeu as questões referentes ao ‘o que foi possível descobrir’ a partir do desafio proposto, tampouco denotou o que há em comum entre os dois desafios.

22. **Pesquisador/Participante:** P-1 você concorda com o que foi lido a respeito do desafio para 2 discos?

23. **P-1:** *Bem, eu acho que fiz os movimentos... Ah... [Neste momento ficou pensativa tentando representar, através de gestos com os braços as movimentações realizadas com os discos.]*

24. **Pesquisador/Participante:** Então será que você não representou no papel aquilo que pensou e realizou mentalmente? É interessante você ler novamente o enunciado para compreender se, ao tentar solucionar o desafio realmente seguiu as regras propostas! **[Após uns 2 minutos, a participante se pronunciou.]**

25. **P-1:** *Ah, você está certo! Eu não cumpri as regras que estavam escrito no papel... Foi mesmo uma dificuldade de interpretação.*

26. **Pesquisador/Participante:** E sobre o que foi lido em relação ao desafio para 3 discos, você concorda?

27. **P-1:** *Sim, eu concordo, tive mesmo dificuldade!* **[A participante concordou com os comentários restantes lidos pelo Pesquisador/Participante.]**

[Após a leitura da solução proposta pela P-2 iniciou-se a discussão com a mesma.]

28. **Pesquisador/Participante:** Em relação a solução para 2 discos, o lido por mim confere?

29. **P-2:** *Sim, é isso mesmo!*

30. **Pesquisador/Participante:** E em relação ao desafio para 3 discos, você confundiu mesmo quando tentou realizá-lo em apenas um esquema ilustrativo?

31. **P-2:** *Não, eu achei que você não iria entender já que ficou cheio de setas indicando os movimentos num único desenho. Daí eu resolvi desenhar cada movimento dos discos em um esquema separadamente.*

32. **Pesquisador/Participante:** Então quer dizer que você conseguiu perceber que foram necessários 7 movimentos para resolver o desafio com 3 discos?

33. **P-2:** *Sim!*

34. **Pesquisador/Participante:** É interessante você ter me falado isso porque, agora, eu posso modificar a minha análise tendo-a confrontado com você! Vejam, pessoal, como é interessante a nossa troca porque daí eu tenho esse ‘feedback’ pra poder fazer a minha análise! **[P-2 concordou com o restante lido.]**

[Seguida da leitura da solução proposta por P-4 iniciou-se a conversa com a mesma. Faz-se oportuno ressaltar que, durante a leitura, P-4 riu a todo o tempo.]

35. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, P-4? Você quer completar com alguma informação? Alguma dúvida?

36. **P-4:** *Ah, sei lá [Risos.] Eu acho que... eu não consegui terminar! Eu fiz até onde eu consegui!*

37. **Pesquisador/Participante:** Ok! Vocês estão achando interessante ouvir a minha ‘análise’? Vocês acham que isso pode auxiliá-las numa ‘auto-interpretação’? **[As participantes, por meio de expressão facial, concordaram. P-2 salientou.]**

38. **P-2:** *Sim, auxilia! Você mesma não percebe! É interessante o olhar do outro sobre você!*

39. **Pesquisador/Participante:** Interessante a sua fala! Isso que estou fazendo, justificado pela teoria piagetiana, refere-se à necessidade das relações (trocas) interindividuais. Tais relações, ao confrontarem a sua solução com a opinião do outro, pode dar início ao processo de tomada de consciência. Tentem imaginar fazer isso, tais relações numa sala de aula ‘normal’. Seria interessante? O que vocês acham?

40. **P-4:** *Eu acho que seria, mas, ao mesmo tempo é difícil. É impossível fazer isso toda aula e em todo o momento!*

41. **Pesquisador/Participante:** O que você falou tem justificativa. A todo o momento, em toda aula, realizar tal análise individual de cada aluno seria algo não executável mediante as atuais condições de trabalho do professor. Mas é interessante percebermos que, em um momento ou outro, seria oportuno possibilitar ao aluno tal ‘auto-interpretação’ auxiliada pelo professor. Acredito que o ‘simples’ fato de dialogar abertamente com o aluno durante a aula já seria um ‘grande’ passo nesse processo de interação entre professor e aluno.

[Após a leitura da solução realizada pela P-5, a participante concordou com toda a análise feita pelo Pesquisador/Participante. Visando evidenciar se alguma informação adicional seria necessária, foi realizado o questionamento abaixo.]

41. **Pesquisador/Participante:** Você quer acrescentar alguma coisa?

42. **P-5:** *Não! Foi o que eu falei antes. Ao ler eu me imaginei fazendo e achei que seria fácil. Mas, quando fui fazer percebi que era difícil e me confundi bastante já que não me atentei ao que estava escrito no enunciado e nas regras.*

43. **Pesquisador/Participante:** Pelo que você acabou de falar o problema foi não ter ‘obedecido’ simultaneamente as 3 regras?

44. **P-5:** *Não, eu acho que nem foi essa questão. Foi que eu nem me atentei às regras, não que eu não tenha entendido, mas que eu não prestei atenção!*

45. **Pesquisador/Participante:** Ok!

46. **P-5:** *Quando eu vi o desenho [Referiu-se aos esquemas-representativos das torres desenhadas no papel.] eu peguei e fui fazendo... Eu nem prestei atenção nas regras, no que estava escrito. Na hora eu pensei que havia entendido tudo! Agora eu enxergo que não prestei atenção, mas na hora eu não percebi, eu achei que estava sabendo!*

47. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem! Agora com essa nossa discussão e ouvindo os comentários das soluções realizadas pelas demais participantes, você passou a compreender melhor o desafio?

48. **P-5:** Sim!

[Em seguida foi feita a leitura da solução desenvolvida por P-7. Após ocorreu a discussão.]

49. **Pesquisador/Participante:** Você concorda P-7 com o que eu acabei de ler?

50. **P-7:** Sim, eu concordo.

51. **Pesquisador/Participante:** Então, pessoal, eu peço para que vocês agora peguem a página 12 – do texto entregue – onde está intitulado “Retomando o Desafio – A Torre de Hanói”. [Foi feita a leitura, pelo Pesquisador/Participante, do exposto abaixo.]

2.1. Retomando o Desafio – A torre de Hanói

Em nosso primeiro encontro foi solicitada a realização do desafio denominado ‘A Torre de Hanói’. É interessante, agora, pensarmos um pouco acerca da lógica envolvida na solução do mesmo. Observadas as regras denotadas anteriormente, para transpor os discos da torre A para a torre C, usando como intermediária a torre B, o número mínimo de deslocamentos necessários encontra-se expresso abaixo:

N.º de Discos	Mínimo de Deslocamentos Necessários
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
...	...
<u>n</u>	

Após a realização do desafio, o que foi possível descobrir?
 Há algum fato comum entre o desafio para 2 discos e para 3 discos?
 E se, ao invés de transpormos os discos de A para C o fizéssemos de B para C? O que aconteceria?
 É possível a elaboração de alguma expressão numérica para representar o número de deslocamento para **n** discos?

52. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, vocês conseguem interpretar essa tabela sem problema? [As participantes sinalizaram não haver dificuldade em compreender o que estava expresso na tabela.] Agora eu vou dar um tempo para vocês pensarem acerca das questões não respondidas. Quem precisar eu vou dar uma folha representando as torres A, B e C e fichas cortadas no papelão de tal modo a possibilitar a movimentação real dos discos. [Enquanto as participantes estavam pensando a respeito das referidas questão, P-9 chegou.]

53. **Pesquisador/Participante:** Olá P-9! Retomando, em nosso primeiro encontro, o que você sentiu a respeito do desafio?

54. **P-9:** Ah, eu achei o desafio interessante!

55. **Pesquisador/Participante:** Você achou o desafio fácil, médio, difícil?

56. **P-9:** *Eu achei que depende! Porque se você achar um caminho rapidamente vai ser fácil fazer! Depende da interpretação.*

57. **Pesquisador/Participante:** Então você acha que depende da interpretação! Eu fiz uma análise da solução que você me deu e eu irei ler e gostaria que você confirmasse se foi realmente isso que pensou ou não. **[Foi iniciada a leitura do exposto no quadro abaixo.]**

DESAFIO – A torre de Hanói.	
PARTICIPANTE	COMENTÁRIO ACERCA DA SOLUÇÃO
P-9	Por meio do desenho elaborado no esquema percebeu-se que a participante, após quatro movimentos, acabou invertendo a posição dos discos, já que no início considerou o disco II sendo maior que o disco I e, portanto, o desenhou embaixo do disco I. Entretanto, finalizou o desafio com o disco I abaixo do disco II. Tal resposta evidencia a confusão da participante em seguir as orientações e regras expostas no enunciado. Para o desafio com 3 discos a participante não tentou nenhuma solução. Evidentemente, não respondeu as questões finais do desafio referentes a uma possível descoberta a partir da realização do mesmo, e também não encontrou um fato comum entre os mesmos.

58. **Pesquisador/Participante:** Você concorda com o primeiro parágrafo lido?

59. **P-9:** *Então... qual que era mesmo as regras? Eu não me lembro?*

60. **Pesquisador/Participante:** O desafio começava com o disco maior (I) colocado no início, na base, o disco II, sendo menor que o disco I, ficava encima do desse disco, e o disco III, o menor de todos, ficava encima do disco II. Tudo bem? Você concorda com a minha descrição?

61. **P-9:** *Ah... tudo bem. Eu concordo, é isso mesmo que você leu.*

62. **Pesquisador/Participante:** Agora, em relação ao desafio com 3 discos você não tentou nenhuma solução. Foi isso mesmo?

63. **P-9:** *Sim, eu não tentei porque eu achei que era a mesma resolução para o de 2 discos. Eu pensei que não precisava desenhar. Eu achei que, como eu havia pensado para 2 discos, não era preciso desenhar para 3 discos.*

64. **Pesquisador/Participante:** Ah, sim! Mas você acredita que para 3 discos é o mesmo número de movimentações?

65. **P-9:** *Eu acho que sim... é só você isolar cada torre.*

66. **Pesquisador/Participante:** Você tentou contar para 3 discos para ver quantas movimentações seriam necessárias?

67. **P-9:** *Ah, isso não!*

68. **Pesquisador/Participante:** Você achou então que daria para generalizar?

69. **P-9:** *Não... não para generalizar! Eu entendi que era para fazer ou com 2 ou com 3 discos.*

70. **Pesquisador/Participante:** Ah, tá! Compreendi! [Após ler novamente o desafio proposto e as questões após a realização do mesmo, P-9 indagou.]

71. **P-9:** *Ah, é verdade! Eu não respondi as duas questões sobre o que eu achei do desafio, se eles tinham algum fato comum.*

72. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, P-9!

73. **P-9:** *Agora, sobre a hipótese que eu criei, mesmo iniciando na ordem crescente ou decrescente, se você passar de forma isolada, vai inverter a ordem, tipo, do A pro C. Então, por exemplo, não importando se estivesse crescente ou decrescente na torre A, a partir de uma forma isolada, pra chegar na torre C, inverte a ordem.*

74. **Pesquisador/Participante:** Ok, compreendi o que você quis dizer! [Fez referência ao fato de que, caso não seja observada a regra de manter os discos na ordem inicial (decrescente ou crescente), ao passar os discos de uma torre para outra, será invertida a ordem. Por exemplo, supondo que os discos na torre A estejam na ordem decrescente, ao ‘isolar’ a torre B e, passando os discos diretamente para a torre C, inverter-se-á a ordem obtendo a crescente. No entanto, procedendo dessa maneira, o desafio perde seu objetivo, bem como sua ‘complexidade’. Tal fato evidenciou consideráveis dificuldades em compreensão do desafio proposto pela P-9] Entretanto, seria interessante você, com o desenho das torres em mãos e os discos móveis, tentasse novamente resolver o desafio, atentando às regras do mesmo! [Após uns 2 minutos, a participantes disse ter conseguido realizar o mínimo de deslocamentos necessários para 3 discos, totalizando 7 movimentos.]

75. **Pesquisador/Participante:** Vamos retomar as seguintes questões acerca do desafio:. Dá pra perceber na tabela que, conforme aumenta o número de discos aumentam o número mínimo de deslocamentos necessários. Para n discos, ou seja, um valor qualquer, como 10, 30, 300, 1000 será necessário um grande número de deslocamentos. Imaginem tentar descobrir/fazer ‘no concreto’ o desafio para 1000 discos. É quase impossível, não é?

76. **P-2:** *É, teria que subir numa escada.* [Risos entre todas as participantes.]

77. **Pesquisador/Participante:** É interessante verificar que a Matemática..., uma das finalidades dela é essa, ou seja, minimizar o trabalho/esforço do ser humano propondo soluções mais ‘rápidas’ e menos ‘dispendiosas’. Você já haviam pensado sob esta ótica? [P-3 sinalizou, por meio de expressão facial ainda não ter pensado assim. Já, as demais participantes concordaram com o exposto há pouco.] Ao descobrir qual é a expressão matemática que permite calcular o número mínimo de deslocamentos necessários para n discos, ficará muito mais fácil descobrir quantos movimentos mínimos serão necessários, por exemplo, para 20 discos. Vocês concordam que, com 20 discos, já fica complicado fazer manipulando os discos! [As participantes sinalizaram, por meio de expressão facial, concordar com o ressaltado pelo Pesquisador/Participante.] É complicado tanto no aspecto da ação física de pegar uma rodela e por numa torre e assim, sucessivamente; e também na questão do tempo. Mas antes de discutirmos a questão da expressão matemática, sendo a mesma uma síntese de um pensamento formal, vamos discutir as questões antes. “Após a realização do desafio, o que foi possível descobrir?” Eu pediria que cada uma lesse a sua resposta. Podemos começar com a P-9?

78. **P-9:** *Movimentando cada um por vez, de forma isolada, vamos transferir da torre A para a torre final C, dentro da regra do crescente e do decrescente.*
79. **Pesquisador/Participante:** *Você compreendeu que a ordem deve ser mantida, ou seja, se na torre A estiver na decrescente, ao final, na torre C deverá estar também na decrescente. Tudo bem?*
80. **P-9:** *Sim, tudo bem!*
81. **Pesquisador/Participante:** *P-4, você pode ler pra gente?*
82. **P-4:** *Eu não tinha entendido direito como fazer o exercício. Daí depois que eu ouvi a discussão aqui, aí eu entendi melhor. Mas eu só consegui mesmo fazer depois que eu manipulei e mudei os discos no concreto! [Ao falar a participante riu.]*
83. **Pesquisador/Participante:** *Ah, tá! E isso foi o que você conseguiu descobrir? [P-4 sinalizou e respondeu “Sim!”.] Ok, tudo bem! P-1...*
84. **P-1:** *Eu não consegui compreender o desafio ao resolver no encontro anterior. Quando eu tive contato com o jogo “concreto” e com alguém que me explicou as regras, consegui realizar com facilidade, e descobri que o concreto facilita na compreensão.*
85. **Pesquisador/Participante:** *E você, P-5?*
86. **P-5:** *Bem, após realizar o desafio eu descobri a importância do concreto para a realização das operações... quando você faz na sua cabeça você acha que é fácil, mas também tive a dificuldade de passar pro papel. E também descobri a importância de se ler com atenção e interpretar bem o que o exercício pede.*
87. **Pesquisador/Participante:** *Leia pra gente P-2, por favor!*
88. **P-2:** *Eu descobri que sem a torre B não é possível cumprir o desafio e que é necessário bastante atenção no enunciado.*
89. **Pesquisador/Participante:** *E agora você, P-7:*
90. **P-7:** *Eu coloquei que nos dois desafios precisa de um bastão intermediário.*
91. **Pesquisador/Participante:** *E você, P-3, o que respondeu?*
92. **P-3:** *Eu descobri que tem várias formas de realizar o desafio... depende de como a pessoa enxerga e interpreta... e eu coloquei que eu consegui fazer manipulando as peças, porque em casa só no papel eu não consegui.*
93. **Pesquisador/Participante:** *Ok! Depois nós voltamos numa conclusão acerca desta primeira questão. Vamos à segunda pergunta: “Há algum fato comum entre o desafio para 2 discos e para 3 discos?” P-3 leia pra gente o que você respondeu, por favor!*

94. **P-3:** *Eu acho que sim porque os movimentos se repetem nas idas e vindas, só o último movimento que vai ser o final de colocar todos os discos no lugar certo. Eu fiz assim: vai e volta, um de cada vez.*
95. **Pesquisador/Participante:** Então para você o fato comum é o ir e volta com os discos para poder passar da torre A para a torre C?
96. **P-3:** *Sim.*
97. **Pesquisador/Participante:** E você, P-7?
98. **P-7:** *Eu coloquei, por exemplo, o desafio para 3 discos, o primeiro movimento que você faz passando o primeiro aí ele se iguala aquele que foi feito com 2 discos, daí os movimentos ficam iguais se você exclui aquele. [Referiu-se ao fato de que, ao movimentar o disco III da torre A, acaba ficando nesta torre apenas os discos I e II, recaindo no desafio para dois discos.] Eu acho que quanto mais discos tiver, ele vai se repetir nos passos do anterior.*
99. **Pesquisador/Participante:** Por exemplo, com 3 discos eu tenho I, II e III, na ordem decrescente. Se eu pego o III e deixo só o I e II, o desafio volta a ser com 2 discos? É nesse sentido que você colocou o fato comum?
100. **P-7:** *É!*
101. **Pesquisador/Participante:** Leia a sua resposta, P-2 por favor!
101. **P-2:** *Eu coloquei que, tanto pra 2 quanto para 3 discos usa-se o mesmo tipo de raciocínio para se resolver.*
102. **Pesquisador/Participante:** Esse raciocínio poderia ser expresso de que maneira?
103. **P-2:** *Eu pensei no jeito de pensar mesmo, de como se resolveria... Eu pensei do mesmo jeito, tanto com 2 quanto com 3. Nos mesmos tipos de ações, ou seja, de tirar primeiro um e passar pra tal lugar... esse raciocínio eu quis dizer! Eu não tive que mudar o tipo de raciocínio que eu tinha feito com 2 discos para resolver com 3.*
104. **Pesquisador/Participante:** A P-5...
105. **P-5:** *Eu coloquei a mesma coisa que a P-2, que é o mesmo exercício, que usa o mesmo raciocínio, só a complexidade que aumenta. Eu pensei, você já fez uma vez então a dificuldade só vai aumentando, mas o começo é igual...*
106. **Pesquisador/Participante:** Ok! A P-4, por favor.
107. **P-4:** *Eu coloquei que, quanto maior o número de discos é maior o número mínimo de deslocamentos.*
108. **Pesquisador/Participante:** Para você isso é o fato comum? [A participante sinalizou, através de expressão facial, concordar.] Ok! E você P-1, leia a sua resposta.

109. **P-1:** *Eu coloquei uma diferença de que com 2 discos segue uma ordem A, B e C. [Referiu-se ao movimentos dos discos realizados nas torres.] Já, com 3 discos é necessário pular a torre B no primeiro movimento, mas as séries continuam as mesmas.*

110. **Pesquisador/Participante:** Se eu consegui entender, você disse que para o desafio com 2 discos eu uso a torre B no início como intermediária, agora para 3 discos isso não ocorre no início, ou seja, primeiro eu uso a torre C para movimentar o disco III e depois eu uso a torre B.

111. **P-1:** *É isso mesmo!*

112. **Pesquisador/Participante:** E você, P-9, o que descobriu em comum?

113. **P-9:** *Ah, eu cheguei aqui atrasada e perdi todo o ‘fio da meada’. Pelo que eu entendi a minha hipótese sobre o desafio estava errada, então eu coloquei que ambos conseguem... da mesma forma... isoladamente inverter...*

114. **Pesquisador/Participante:** No final iremos discutir uma síntese para essa questão. Vamos à terceira pergunta: “E se, ao invés de transpormos os discos de A para C o fizéssemos de B para C? O que aconteceria?” O que você respondeu, P-7?

115. **P-7:** *Eu coloquei que daria na mesma, a quantia de movimentos seria igual, só que ao invés de usar a torre B como intermediária seria utilizada a A.*

116. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você, P-2?

117. **P-2:** *Foi exatamente a mesma coisa. Seriam feitos o mesmo número mínimo de deslocamentos e apenas mudaria o bastão intermediário.*

118. **Pesquisador/Participante:** Vocês pensaram isso mentalmente ou tiveram que realizar uma ‘testagem’? **[Todas as participantes indicaram, por meio de expressão facial, ter realizado a testagem.]** Todas aqui concordam que seria o mesmo desafio? Todas tiveram que testar? **[Todas as participantes responderam “Sim.”]** Então quer dizer que vocês, no primeiro momento da questão pensaram “É a mesma coisa!”, só que precisaram testar no concreto.

119. **P-1:** *Não, primeiro eu testei e depois eu coloquei que é a mesma coisa.*

120. **P-4:** *Eu também. [Risos pela participante.]*

121. **P-3:** *Eu também tive que testar primeiro.*

122. **P-9:** *Eu não, primeiro eu hipotetizei e depois testei.*

123. **P-5:** *Primeiro eu pensei, depois eu testei!*

124. **Pesquisador/Participante:** Então vamos ver se eu entendi... A P-1, P-3 e P-4 primeiro fizeram o desafio no concreto e depois descobriram que seria a mesma coisa, o ‘mesmo’ desafio. Já P-2, P-5, P-7 e P-9 primeiro pensaram que seria a mesma coisa e depois só testaram para verificar a hipótese inicialmente estabelecida. **[Todas as participantes**

concordaram com a referida fala.] Então chegou a hora da tão ‘sonhada’ questão da expressão matemática: “É possível a elaboração de alguma expressão numérica para representar o número mínimo de deslocamento para n discos?”. Quem conseguiu, por favor, levante a mão! **[Nenhuma das participantes levantou a mão indicando ter conseguido obter uma expressão matemática para expressar o número mínimo de deslocamentos para n discos.]** Não?

125. P-2 e P-7: *A gente acha que sim, é possível descobrir uma expressão!* **[Risos entre as participantes.]**

126. Pesquisador/Participante: Todas concordam que é possível obter uma expressão? **[Todas as participantes responderam “Sim.”.]** Eu coloquei em forma de questão para poder ‘desequilibrá-las’, porque eu podia ter colocado em forma afirmativa “É possível a elaboração de uma expressão numérica para representar o número mínimo de deslocamentos para n discos. Descubra-a.” Mas eu não queria influenciar vocês com tal afirmação, tudo bem? Eu vi que vocês tentaram descobrir a expressão das mais diversas maneiras. Vocês fizeram vários cálculos? **[P-2, P-7, P-1 responderam “Sim.”.]** Pessoal, é possível sim a obtenção de uma expressão. **[Neste momento o Pesquisador/Participante foi até a lousa e colocou o seguinte esquema, visando explicar para as participantes como obter a referida expressão.]**

1 disco → 1 movimento	$2^1 = 2$
2 discos → 3 movimentos	$2^2 = 4$
3 discos → 7 movimentos	$2^3 = 8$
4 discos → 15 movimentos	$2^4 = 16$
5 discos → 31 movimentos	$2^5 = 32$

[Num primeiro momento, o Pesquisador/Participante escreveu na lousa o número mínimo de deslocamentos necessários para cada quantidade de discos, lembrando o exposto na tabela entregue às participantes. Em seguida, conforme mostrado no esquema acima, foi escrito as potências na base 2. Abaixo denota-se a conversa entre o Pesquisador/Participante e as participantes a esse respeito.]

127. Pesquisador/Participante: Pessoal eu acredito que a dificuldade de vocês foi em não conseguir relacionar o número de movimentos com o ‘resultado’ de uma determinada potência. Vamos ver isso... **[O Pesquisador/Participante foi explicando os resultados da potência na base 2 um de cada vez.]** Quando eu pego o 2 e elevo a 1 eu tenho quanto, pessoal? **[As participantes P-1, P-2, P-4, P-5 e P-7 responderam em tom baixo, denotando certa insegurança, “Dois.”.]** Todo mundo consegue entender isso? **[Nenhuma participante se pronunciou, implicando não haver dúvida.]** Quando eu tenho 2 e elevo à segunda eu tenho 4. Alguém pensou eu utilizar alguma ideia relacionada à potenciação para tentar descobrir a expressão? **[Todas as participantes responderam “Não.”.]** Quando eu elevo 2 à terceira potência eu tenho quanto? **[Todas as participantes responderam “Oito.”.]** Isso, tenho 8, ou seja, 2 vezes 2 vezes 2... 2 vezes 2 é 4, 4 vezes 2 é 8. E 2 elevado à quarta potência? **[Neste momento as participantes realizaram um cálculo mental para a obtenção do resultado de 2^4 . O Pesquisador/Participante, na lousa, escreveu o seguinte.]**

$$2^4 = \underbrace{2 \times 2}_{4} \times 2 \times 2$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{4 \times 2}_{8}$$

$$\quad \quad \quad \quad \underbrace{8 \times 2}_{16}$$

128. Pesquisador/Participante: 2 vezes 2 são 4, vezes 2 dão 8 e vezes 2 são 16. Percebem? [As participantes, por meio de expressão facial, sinalizaram compreender o porquê do número 16 como sendo o resultado de 2^4 .] O que acontece daqui pra aqui? [Referiu-se ao resultado de 2^1 e, em seguida, de 2^2 .] [Todas as participantes responderam “Dobra.”] E daqui pra aqui? [Referiu-se ao resultado de 2^2 e, em seguida, 2^3 .] [Todas as participantes responderam “Dobra.”] E daqui pra aqui? [Referiu-se ao resultado de 2^3 e, em seguida, 2^4 .] [Todas as participantes responderam “Dobra.”] Percebem que eu não preciso ficar fazendo 2 vezes 2 vezes 2 vezes 2 vezes ..., basta eu considerar o resultado da potência anterior e dobrá-lo, no caso de base igual a 2. Então, para 2^5 basta eu pegar o resultado de 2^4 que é 16 e dobrá-lo, obtendo 32. [O pesquisador/Participante escreveu na lousa o seguinte esquema.]

$$\begin{array}{l} 2^1 = 2 \quad \swarrow 2 \times \\ 2^2 = 4 \quad \swarrow 2 \times \\ 2^3 = 8 \quad \swarrow 2 \times \\ 2^4 = 16 \quad \swarrow 2 \times \\ 2^5 = 32 \quad \swarrow 2 \times \end{array}$$

129. Pesquisador/Participante: E daí, pessoal, vocês conseguiram entender essa relação “dobro”? [As participantes, por meio de expressão facial, sinalizaram compreender.] Alguém possui alguma dúvida? [Nenhuma participante manifestou-se indicando não haver dúvida.] Agora é necessário prestarmos atenção ao seguinte fato. Para 1 disco é necessário, no mínimo, 1 movimento. Observem que 2^1 é igual a 2, e esse 2 para ‘chegar’ no 1 é necessário tirar quanto? [Todas as participantes responderam: “Um.”] Para 2 discos, conforme escrito na lousa, eu preciso de, no mínimo, 3 movimentos; e vejam que 2^2 dá 4. Esse 4 para ‘chegar’ no 3 é necessário tirar quanto? [Novamente, as participantes falaram “Um’.] Se eu tenho 3 discos, são necessários, no mínimo, 7 movimentos. 2^3 me dá... 8 menos 1 resulta em 7, ou seja, o número que indica o mínimo de deslocamentos necessários para 3 discos. [Neste momento, as participantes P-1, P-2, P-4, P-5 e P-7 fizeram um “Sim” por meio de expressão facial, indicando estarem compreendendo a relação entre o número mínimo de deslocamentos e os resultados da potência na base 2 para, por conseguinte, obter-se a referida expressão Matemática.] Para 4 discos são necessários 15 movimentos, não é isso!? Só que 2^4 é 16, eu vou novamente tirar 1! E se eu tenho $\underline{n}$ discos? Qual é a expressão para poder representar o número mínimo de deslocamentos para $\underline{n}$ discos?

130. P-1: n é igual a $2^n - 1$?

131. **Pesquisador/Participante:** Isso! O número mínimo de deslocamentos para n discos é igual a $2^n - 1$! [Enquanto o Pesquisador/Participante escreveu tal expressão na lousa, as demais participantes leram-na conjuntamente e, por meio de expressão facial, pode-se concluir que as mesmas compreenderam o porquê de tal expressão.]

132. **P-4:** Olha que fácil né! [Referiu-se às demais participantes.]

133. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, todo mundo conseguiu compreender a relação que estabeleci entre a potência na base 2 e os resultados para alguns valores de discos?

134. **P-2:** Mas... como você pensa que seria a potência?

135. **Pesquisador/Participante:** Como a pessoa sabe que há uma relação com a potência na base 2? [Todas as participantes sinalizaram estarem se questionando a respeito.] Isso ocorre a partir de um conhecimento já construído pelo sujeito acerca da potência, no caso quando a base é 2. Ou seja, eu sabia que os resultados de alguns expoentes na base 2 eram: 2, 4, 8, 16, 32, 64... Daí eu comparei esses resultados com os números mínimos de deslocamentos e verifiquei que, para cada número de discos, o deslocamento mínimo representa esse número como o expoente na base 2 menos 1. Na maioria das vezes, o ‘pensar sobre’ a obtenção de uma expressão começa por tentativa e erro, testagem. O sujeito poderia, por exemplo, ter começado a pensar assim: [Escreveu na lousa o exposto abaixo.]

Para 1 disco é necessário 1 movimento $\rightarrow 2 \cdot x - 1$, sendo x o número de discos $\rightarrow 2 \cdot 1 - 1 = 1$
 Para 2 discos são necessários 3 movimentos $\rightarrow 2 \cdot x - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

Para 1 disco o sujeito poderia pensar na expressão “ $2 \cdot x - 1$ ”, sendo x o número de discos e dá pra ver que o resultado dessa expressão para 1 disco é igual a 1. Para 2 discos essa expressão também dá certo, porque $2 \cdot 2 - 1 = 3$ movimentos. Agora, observem novamente aqui. [Referiu-se ao escrito na lousa, conforme mostrado a seguir.]

Para 3 discos são necessários 3 movimentos $\rightarrow 2 \cdot x - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

Observem que a expressão “ $2 \cdot x - 1$ ” apenas vale para 1 e 2 discos, e não para o restante. Como eu escrevi na lousa, para 3 discos o resultado da expressão foi 5, mas o número mínimo de deslocamentos é 7. Desse modo, tal expressão não é a correta! [P-1, P-2, P-5, P-4 e P-7 expressaram, por meio de gesto facial, ‘acompanharem’ o exposto pelo Pesquisador/Participante.] Como entre a multiplicação e a potência existe certo ‘parentesco’, então o sujeito pode pensar na potenciação para tentar obter tal expressão. Aí, pessoal, para conseguir a obtenção dessa expressão, que representa um pensamento formal/ ‘síntese’, é necessário ao sujeito a construção de tais conceitos e procedimentos matemáticos, pois, se o aluno nunca ‘viu’ uma potência, acredito eu que ficaria complicado ele pensar a respeito dessa expressão.

136. **P-4:** Ah, isso de conhecimento eu não tenho! [A referida participante riu ao dizer tal frase.]

137. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, pessoal? Dúvidas? [Como ninguém se manifestou deu-se prosseguimento. Foram disponibilizados alguns minutos para as participantes anotarem os ‘esquemas’ escritos pelo Pesquisador/Participante na lousa.] Pessoal, podemos prosseguir?

138. **P-5:** *Eu tenho uma dúvida... Vamos supor que eu tenha 20 discos, então pra saber o número de deslocamentos eu vou colocar 2 elevado a 20 menos 1? [Algumas participantes repetiram o final da fala salientado por P-5.] Como eu calculo isso?*

139. **Pesquisador/Participante:** Se você não tiver uma calculadora científica, é preciso fazer ‘manualmente’, ou seja, terá que calcular a multiplicação 2 vezes 2 vezes 2 vezes ... 20 vezes. **[O Pesquisador/Participante escreveu na lousa o denotado abaixo.]**

$$2^{20} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{20 \text{ vezes}}$$

As reticências, pessoal, significam que eu multipliquei até ‘chegar’ em 20 vezes. Se eu apenas coloco as reticências, e não termino com x 2 significa que eu vou multiplicando até o infinito, mas não é esse o caso! Tudo bem?

140. **P-5:** *Ah, sim! Eu havia pensado nisso... Ah, tá! Tudo bem. [As demais participantes não manifestaram nenhuma dúvida.]*

141. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, eu acabei de fazer a exposição de algumas ideias na lousa. Todo mundo concorda? **[Todas as participantes, através de gesto facial, indicaram concordar com o questionamento.]** Isso caracteriza uma aula ‘tradicional’? **[P-3, P-2, P-4, P-5 e P-7 falaram “Não”.]** Por que não?

142. **P-4:** *Porque a gente viu sentido naquilo que você fez! [Neste momento apontou o dedo na lousa referindo-se aos esquemas apresentados pelo Pesquisador/Participante, rindo, seguidamente.]*

143. **P-3:** *Eu acho que foi porque a gente fez antes, pensou antes, e como ninguém chegou em nenhuma solução você foi explicar.*

144. **Pesquisador/Participante:** Então, quer dizer que, primeiro, eu coloquei um desafio para vocês, uma situação problema... que... desencadeou em vocês algum ‘desconforto’? **[Todas as participantes, exceto P-9 responderam “Sim.”.]**

145. **P-5:** *Muito! [Riu o olhou para P-2 que estava sentada ao lado.]*

146. **Pesquisador/Participante:** Mas... foi um desafio interessante? **[Todas as participantes, por meio de expressão facial, concordaram com o questionamento.]** Nesse ponto é interessante chamar a atenção de que a exposição não é uma atitude exclusivamente tradicional. A partir do momento que o professor expõe no intuito de colaborar com o pensamento do aluno, e não de ‘massacrar’ tal pensamento, tem uma grande diferença, não tem!? E, a utilização das ideias propostas por Piaget é nesse sentido, ou seja, do professor enquanto mediador... Sobre essa questão do mediador, dá pra vocês começarem a imaginar o que isso significa numa ação real? **[P-2, P-3, P-4, P-5 e P-7 responderam “Sim.”]** E, pessoal, fazer isso com os futuros alunos de vocês do 1.º ao 5.º é imprescindível! Só que daí intervêm outras questões nessa interação na sala de aula, tais como: falta de tempo, a necessidade de estabelecer com o aluno um contrato de trabalho para que ele se comprometa, gradativamente, em participar. ‘Psicologicamente falando’ esse tipo de exposição, permitindo a efetiva interação com o aluno, contribui, em muito, na construção da sua aprendizagem. E nós vamos estudar isso no decorrer do nosso Grupo de Estudo de tal modo que vocês, quando

questionados acerca de tal importância, saibam justificar os porquês. Alguém quer comentar alguma coisa?

147. P-3: *Quando, por exemplo, você dá a aula, você costuma fazer assim, então? Primeiro os alunos fazem, depois eles chegam nas conclusões deles, e depois você vai explicando pra retirar as dúvidas deles, para que os alunos vão construindo...*

148. Pesquisador/Participante: Sim! Por exemplo, na faculdade. Por que eu disponibilizava os textos antes? Porque o meu intuito era resolver as dúvidas de vocês. **[Referiu-se ao fato do Pesquisador/Participante ter sido, há cerca de 2 anos, o professor da disciplina “Matemática na Educação Infantil”.]** Só que, infelizmente, por vários fatores, durante as aulas eu mais apresentava o conteúdo do que auxiliava-os nas dúvidas. Vocês acham que se, durante as aulas, eu apenas respondesse as dúvidas, advindas do ‘desequilíbrio’/dificuldade de vocês não teria sido ainda mais produtivo? **[Todas as participantes concordam com o questionamento.]** Eu sei que há outros fatores como trabalho... eu compreendo... No entanto se você quer seguir, entre aspas, uma lógica de ensino piagetiana, conforme eu já falei em nosso 1.º encontro, é necessário que o aluno se comprometa, ou seja, você vai ter que se envolver naquele movimento de aprendizagem... Mais alguma questão?

149. P-3: *Eu! A minha dúvida é que... eu acho interessante do jeito que você mostrou pra gente... porque eu lembro que quando eu era da Educação Básica era totalmente o contrário, mas, por exemplo, se a gente conseguisse resolver sozinha o desafio, então qual seria a sua participação? Você iria pra lousa mostrar de novo ou...?*

150. Pesquisador/Participante: Por exemplo, se vocês já conseguissem resolver sozinhas e eu percebo, porque o professor necessita ter um olhar diagnóstico em boa parte da aula, ou seja, se eu percebo que vocês já ultrapassaram esse nível de dificuldade, a minha obrigação é ‘dar’ uma dificuldade maior, certo? Vocês acham que a interação de vocês nos comentários não foi interessante? **[Todas as participantes concordaram.]** O papel do professor, enquanto mediador do conhecimento é também de, além de propiciar tal interação, dar progressivamente níveis de dificuldades crescentes aos seus alunos. E a gente pode fazer uma analogia com as fases do desenvolvimento cognitivo do sujeito e daí é importante compreender a Teoria de Piaget pra poder ‘aplicar’ na sala de aula também. Alguém possui outro questionamento? **[Como ninguém se pronunciou, foi dado prosseguimento.]**

[Em seguida foi projetada a resolução do desafio Torre de Hanói para 2 e 3 discos, utilizando uma apresentação com recursos gráficos e de animação elaborado pelo Pesquisador/Participante no programa da Microsoft Office PowerPoint. Durante tal apresentação o Pesquisador/Participante foi ressaltando o que era necessário fazer para solucionar o desafio para 2 discos e, após, para 3 discos. P-9 percebeu onde havia confundido, ao inverter a ordem da grandeza (crescente e decrescente) dos discos aos passá-los da torre A para a torre C. Neste momento, P-4 e P-9 realizaram os mesmos movimentos apresentados no programa utilizando as peças móveis e o desenho das 3 torres disponibilizadas em papel no início do encontro. Como finalização deste assunto, o Pesquisador/Participante salientou.]

Percebam que, para a resolução destes desafios, eu sempre preciso de uma torre intermediária e também sempre irei ‘construir’ e ‘desconstruir’ “pirâmides” **[Referiu-se ao fato de que, o empilhamento em ordem decrescente dos discos lembrarem, visualmente, uma pirâmide.]** Vocês estão conseguindo compreender o fato comum entre os desafios? **[Todas as participantes sinalizaram tal compreensão através de expressão facial.]** Se eu

tenho 4 discos, irei utilizar o mesmo raciocínio, só de daí terei que ‘ir’ e ‘voltar’, ‘construo’ “pirâmide” e desconstruo “pirâmide” até conseguir movimentar todos os discos para a torre desejada e na ordem decrescente. Tudo bem sobre a Torre de Hanói? Acharam interessante o desafio?

151. **P-5:** *Muito! [Ideia compartilhada pelas demais participantes.]*

152. **Pesquisador/Participante:** Tal desafio visava verificar a ‘capacidade’ operatória de vocês. Ao questioná-las sobre se, ao invés de partir da torre A eu partisse da torre B para a C e usando a torre A como intermediária, segundo os estudos de Piaget, os alunos que respondem corretamente tal questão sem precisar testar, isso implica que tais alunos já construíram as operações lógicas do pensamento formal ou hipotético-dedutivas. Agora, os alunos que precisaram testar, depois de ter criado a hipótese, ou, primeiro testar e depois obter a resposta, isso significa que os sujeitos ainda estão ‘caminhando’ para a construção deste raciocínio operatório formal, ou seja, da lógica das proposições verbais exclusivamente, no qual o ‘real’ não é mais necessário para você pensar sobre as ideias testando-as empiricamente.

153. **P-9:** *Mas às vezes você, por exemplo, inseguro em certas situações, mesmo que você já tenha construído esse formal você se sinta mais seguro usando o concreto novamente para poder ter certeza. Por exemplo, eu me senti desconfiada, então achava que estava tudo errado o que eu fiz, então eu senti necessidade de poder usar as peças manipulativas para poder ter certeza absoluta do que estava fazendo... E daí eu tive certeza! Mas antes eu tinha... porque eu não sou a especialista e você é matemático, daí você falou que eu havia errado nas regras, e daí eu fiquei nervosa e me embananei tudo achando que tinha feito tudo errado... e daí eu tive que fazer tudo pelo concreto. Então talvez haja essa hipótese também.*

154. **Pesquisador/Participante:** Sim, pode ser! Se o sujeito pensa, apenas... **[P-9 interrompeu.]**

155. **P-9:** *Eu entendi essa primeira hipótese, se o sujeito já tem essa construção formal ele não vai sentir necessidade de utilizar o concreto.*

156. **Pesquisador/Participante:** Sim, porque daí o sujeito já construiu um pensamento, no caso do nosso desafio, denominado ‘transitividade prática’, ou seja, vocês se lembram dessa relação transitiva: A maior que B e B maior que C, então A maior que C. Tentem pensar em outro momento, a respeito dessa transitividade e o desafio da torre de Hanói!

157. **P-9:** *É... foi como eu te expliquei. Eu havia feito o desafio com 2. Eu não sabia que era para explicar quantos movimentos. E daí eu estabeleci uma hipótese: se você mover isoladamente você chegará ao objetivo da torre.*

158. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem! Ok! Pessoal, por favor, individualmente façam a leitura do seguinte texto. **[Foram disponibilizados alguns minutos para a leitura da seguinte explicação acerca do Bloco de Conteúdo Tratamento da Informação.]**

2.2 Alguns pontos iniciais do Tratamento da Informação

O ‘bloco’ de conteúdo denominado ‘Tratamento da Informação’ foi citado como sendo àquele que representou para vocês a ‘maior’ dificuldade conceitual (e procedimental).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – (1.^a a 4.^a série) – Vol. 3: Matemática, embora o Tratamento da Informação possa ser incorporado aos demais ‘blocos’ (Números e Operações, Espaço e Forma e Grandezas e Medidas), devido à sua demanda e relevância social foi possível destacá-lo como um ‘bloco’ de

conteúdo. De modo geral, tal ‘bloco’ é constituído por conteúdos advindos da Estatística, Probabilidade e Combinatória.

Para cada nível de ensino tal ‘bloco’ receberá um tratamento diferenciado, seja referente ao nível (profundidade) dos conteúdos abordados, bem como da metodologia a ser adotada. Na 1.^a ‘etapa’ do Ensino Fundamental, atualmente compreendido do 1.^o ao 5.^o ano, o referido documento (PCN) destaca o seguinte referente ao 1.^o ciclo (1.^a e 2.^a séries):

Os assuntos referentes ao Tratamento da Informação serão trabalhados neste ciclo de modo a estimularem os alunos a fazer perguntas, a estabelecer relações, a construir justificativas e a desenvolver o espírito de investigação.

A finalidade não é a de que os alunos aprendam apenas a ler e a interpretar representações gráficas, mas que se tornem capazes de descrever e interpretar sua realidade, usando conhecimentos matemáticos. (BRASIL, 1997, p. 49)

Em relação à 2.^a ‘etapa’ do Ensino Fundamental (6.^o ao 9.^o ano) é interessante observar o que pontua o PCN (5.^a à 8.^a séries) de Matemática:

Integrarão este bloco estudos relativos a noções de Estatística e de probabilidade, além dos problemas de contagem que envolvem o princípio multiplicativo. Evidentemente, o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos.

Com relação à Estatística, a finalidade é fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem freqüentemente em seu dia-a-dia. Além disso, calcular algumas medidas estatísticas como média, mediana e moda com o objetivo de fornecer novos elementos para interpretar dados estatísticos.

Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis).

Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades. (BRASIL, 1998, p. 52)

A partir da leitura das duas citações, há algum trecho não compreendido? Alguma palavra causou em você certo ‘desequilíbrio’? Caso sim, comente.

[Após a leitura por todas as participantes, foi iniciada uma discussão acerca do mesmo.]

159. Pesquisador/Participante: Pessoal, a partir da leitura foi possível compreender quais conteúdos compõe o ‘Bloco’ Tratamento da Informação?

160. P-2: *Sim!*

161. Pesquisador/Participante: Quais seriam tais conteúdos?

162. P-2: *Estatística, Probabilidade e Combinatória.*

163. Pesquisador/Participante: Ok! O que você me disse são áreas da Matemática que compõe o Tratamento da Informação e que, por sua vez, são constituídas por conteúdos! E nós vamos rever na página 14 onde eu fiz um esquema denotando tais áreas e esses conteúdos,

acho que ficou interessante! No texto que eu pedi pra vocês lerem eu denotei duas considerações dos PCN's que representam dois documentos oficiais ainda em voga no Brasil. Embora pareça que os mesmos não são 'muito' consultados, mas ainda são Parâmetros Nacionais na questão do Currículo. **[Neste momento foi feita a leitura, pelo Pesquisador/Participante, da citação retirada do PCN (1.^a a 4.^a série do Ensino Fundamental).]** Isso que eu acabei de ler é realizado na maioria das salas do 1.º ao 5.º ano, atualmente? **[Todas as participantes responderam “Não.”]** Vocês perceberam que o documento não diz que o aluno é obrigado a construir representações gráficas! Porque ainda não é...

164. **P-9:** *Porque ainda não é a hora do aluno fazer isso, né!*

165. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo. O aluno, nesse nível de escolaridade necessita aprender a ler e interpretar, apenas... Ou seja, é uma outra informação... vocês concordam comigo? **[As participantes, através de expressão facial, concordaram com o exposto.]** Porque a construção de um gráfico para esses alunos ainda é uma operação intelectual complexa, e nós vamos entender o porquê ao decorrer do nosso Grupo de Estudo. **[Em seguida, foi realizada a leitura, pelo Pesquisador/Participante da citação retirada do PCN (5.^a a 8.^a séries).]** Vocês já ouviram falar em Estatística, Probabilidade e Contagem? **[Todas as participantes sinalizaram, por meio de expressão facial, 'ter ouvido' acerca destes assuntos.]** Mas, vocês saberiam me dizer quais conteúdos compõe os mesmos?

166. **P-2 e P-9:** *Não!* **[As demais participantes concordaram com o denotado por P-2 e P-9.]**

167. **Pesquisador/Participante:** Uma coisa que devemos prestar atenção é que de 5.^a a 8.^a série o foco não é na formalização de tais conceitos e suas representações em expressões (fórmulas)! Esse é um trabalho para o professor de Matemática do Ensino Médio... Também foi citado, na parte da Estatística, a abordagem da média, moda e mediana. Vocês já estudaram?

168. **P-4:** *Sim, na aula da professora M.!* **[As demais participantes concordaram com a P-4.]**

169. **Pesquisador/Participante:** Ah, então vocês já sabem bem estes assuntos?

170. **P-4:** *Não, a gente já ouviu falar.* **[Risos entre todas as participantes.]**

171. **P-9:** *Até porque era muito conteúdo e pouco tempo pra professora M. trabalhar em um semestre!*

172. **Pesquisador/Participante:** Ah, sim, eu compreendo que durante um semestre é difícil dar conta de uma grande quantidade de conteúdos. Então quer dizer que a professora falou sobre média, moda, mediana?

173. **P-2:** *Sim!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**

174. **Pesquisador/Participante:** Ela chegou a falar de Variância e Desvio Padrão?

175. **P-2:** *Sim!*

176. **P-4:** *É... a gente viu tudo né! Mas...*
177. **P-2:** *É, a professora M. falou... [Risos entre todas as participantes.]*
178. **Pesquisador/Participante:** Então vocês acham interessante nós realizarmos um trabalho/estudo acerca disso?
179. **P-2:** *Sim! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*
180. **Pesquisador/Participante:** Então nós vamos abordar o que é a Estatística! E vocês se lembram da minha hipótese de que a não construção de alguns saberes matemáticos por vocês, futuras professoras, pode acarretar ou acarreta numa insegurança no momento de ‘dar a aula’, de ‘tirar’ a dúvida do aluno...
181. **P-5:** *Sim!*
182. **Pesquisador/Participante:** Então eu estou cumprindo essa hipótese, tentando que vocês superem tais dúvidas por meio daquele processo de (re)significação. Compreenderam?
183. **P-5:** *É interessante ver que nós temos dificuldades nisso e nos dados que você coletou da sua pesquisa sobre o currículo os alunos também têm porque não é trabalhado esses conteúdos com eles. E daí dá pra fazer essa relação que você falou... ou seja, o professor não sabe e daí ele não trabalha isso com aluno... Isso pode ser, né!*
184. **P-9:** *E muitas vezes, também, dentro da matéria do que seria o currículo, a professora T. estava citando que a gente não tem... Porque na maioria dos cursos de Pedagogia não tem essa disciplina do currículo... Então isso acarreta até dentro disso da Matemática, porque, tem pessoas, profissionais que podem, e isso é uma hipótese minha, que não tem conhecimento disso. Por exemplo, se eu for trabalhar Tratamento da Informação eu vou ter que passar gráficos pros alunos... mas ele não tem a noção do que é uma representação gráfica...*
185. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo! Talvez esse profissional não saiba o que deve ser trabalhado, com qual profundidade, o que deve ser abordado para aquela série, aquela idade e o que ainda não é... Foi muito pertinente a sua colocação. E daí podemos nos questionar: “É o aluno que não aprendeu ou ele sequer foi ensinado?” Porque todo mundo, com exceção daqueles que nascem com sérios comprometimentos neurológicos, tem perfeitamente todas as ‘condições’ de atingir o nível de pensamento formal. Qualquer ser humano, ok! Só que daí depende das situações de ensino! E tal fato chega ao ponto da P-4, porque eu fiz a análise do nosso primeiro encontro, dizer que a Matemática dá alergia!
186. **P-4:** *Dá! [Observaram-se risos entre todas as participantes quando P-4 estendeu os dois braços e mostrou-os sinalizando apresentar uma ‘alergia’.]*
187. **Pesquisador/Participante:** Ou seja, pessoal, não é a Matemática que dá ‘alergia’! É o método de ensino de alguns professores que, infelizmente, te causaram uma aversão! **[Neste momento o Pesquisador/Participante apontou o dedo em direção à P-4.]**
188. **P-4:** *Sim! Concordo!*

189. **P-3:** *Então não existe aquela hipótese de que tal aluno tem facilidade em Matemática e tal aluno tem facilidade em Português?*

190. **Pesquisador/Participante:** De modo geral não! Alguns estudos biológicos afirmam que a mulher possui mais atenção em cálculos matemáticos do que o homem. Mas tal facilidade advém da interação que esse sujeito vivenciou com aquela disciplina escolar, e a influência do professor é um dos fatores que provoca o gostar ou não! Todos têm a mesma capacidade... inclusive, durante alguns anos.

191. **P-9:** *E a realidade também influencia. Por exemplo, um estudante veio do 7.º ano de uma escola pública e daí ele ingressou na particular. Só que daí, caso a sua escola pública não seja boa, ele vai apresentar dificuldade em relação a algum aluno que sempre estudou naquela boa escola particular. Por exemplo, no desafio da torre de Hanói, esse estudante não iria conseguir saber sobre a potência, essa é a minha hipótese, até porque alunos de 7.º e 8.º ano, muitas vezes, ainda não sabem direito nem ler e escrever, e eu falo isso e que não é uma coisa da minha cabeça, porque eu já trabalhei em uma escola e vivenciei isso! Então fica difícil se esse aluno não teve toda essa construção, esse alicerce...*

192. **Pesquisador/Participante:** E você percebe que esse alicerce inicia ‘formalmente’ na Educação Infantil.

193. **P-9:** *Com certeza!*

194. **Pesquisador/Participante:** Porque a aprendizagem do conhecimento pelo sujeito não depende só do estímulo, porque daí nós seríamos ‘empiristas’, tudo bem!? E também não depende só do sujeito, porque daí seríamos ‘inatistas’. Depende da interação entre ambos, o meio/objeto e o sujeito na ação que ele vai desempenhar. Só que, dependendo do meio no qual o sujeito se encontra, como no seu caso P-4, o ‘massacre’ em você foi tão grande que houve uma construção de uma ‘barreira’ psicológica, não houve?

195. **P-4:** *Sim! Houve!*

196. **Pesquisador/Participante:** E... eu espero que em nosso Grupo de Estudo, de alguma maneira tente ‘minimizar’ essa barreira...

197. **P-5:** *E no caso de dois alunos que estudam na mesma escola com os mesmos professores, desde a pré-escola... O que explicaria a diferença a diferença de um e outro seria então a vida lá fora da escola?*

198. **Pesquisador/Participante:** Além da ‘vida lá fora’ vai depender do modo como cada sujeito vai interpretar/assimilar um conhecimento. Não existe uma interpretação ‘exatamente’ igual, mediante o mesmo estímulo entre duas pessoas... Por exemplo, o professor diz uma fala ‘única’, mas cada aluno vai interpretá-la de modo diferente dependendo dos seus esquemas de assimilação já construídos.

199. **P-9:** *E daí a realidade influencia nisso também. Por exemplo, um aluno chega em casa e é auxiliado pelos pais que lhe dão brinquedos apropriados e tudo mais... já o outro aluno chega em casa mas não é auxiliado por ninguém, seja porque a mãe trabalha, e daí ele vai ficar com alguma dúvida da aula, até porque, por mais que a professora faça, numa sala cheia de alunos é difícil ‘tirar’ todas as dúvidas dos alunos. Por exemplo, uma de nós*

[Referiu-se às demais participantes.] *que, se Deus quiser, teremos uma boa formação, mesmo assim vai ser muito difícil porque a realidade escolar... a gente vai estar na sala de aula, vai chegar alunos com problemas auditivos, a outra com síndrome de down... Então, é uma coisa muito difícil da gente trabalhar, mesmo com o conceito que a gente vai ter!*

200. Pesquisador/Participante: É por isso que o ‘máximo’ de formação é necessário, para que o professor possa, da melhor maneira possível, realizar um bom trabalho, mesmo com as condições adversas do meio social ao qual o aluno pertence. Ainda sobre essa questão da interação e que 2 pessoas irão interagir de modo diferente com o conhecimento... lembram daquele termo que nós estudamos no primeiro encontro acerca do construtivismo piagetiano de que ele pode ser chamado de construtivismo sequencial probabilístico estruturalista... Probabilisticamente, as chances de duas pessoas viverem as mesmas coisas do nascimento até a morte é impossível!

201. P-9: *Claro!*

202. P-5: *Exatamente! [As demais participantes concordaram com a fala de P-5.]*

203. Pesquisador/Participante: É por isso que dois alunos, que vão à escola juntos, com os mesmos professores, mas que aprendem diferente! Em relação aos demais termos referentes à Combinatória e Probabilidade citadas no trecho do PCN, o objetivo é que vocês modifiquem, ou melhor, ampliem seus conhecimentos acerca dos mesmos. Tudo bem? **[Todas as participantes sinalizaram concordar.]** Em relação ao texto que vocês leram, ficou algum termo, alguma parte não compreendida?

204. P-9: *Não! Eu entendi os termos... Só que daí eu fiquei pensando e lembrando e como esse processo é difícil, é complexo... eu li e fui relembando a minha história na escola, tanto na minha passagem na escola pública quanto na escola particular eu sinto as mesmas coisas, de que ficou muito desconexo uma coisa da outra, não tinham relações... E, eu penso assim, muita parte disso aqui **[Referiu-se aos conteúdos do Tratamento da Informação denotados no texto lido.]** poderiam ser trabalhados por outras disciplinas, ou relações, ou projetos, e nunca foi feito. Na verdade nem em escola particular, então a gente vê que... dá pra colocar em dúvida da própria escola em si... Como ainda está muito estagnada e que é preciso mudar muita coisa, e que está um processo ainda muito lento!*

205. Pesquisador/Participante: Um trabalho interdisciplinar ou intradisciplinar nem pensar! Como vocês já responderam no Questionário Inicial. E você, P-1, alguma dúvida?

206. P-1: *Não, eu concordei com tudo! Compreendi o que estava escrito!*

207. Pesquisador/Participante: E você, P-4?

208. P-4: *Eu acho assim, eu concordei com a P-9, mas daí eu fiquei pensando quando eu for dar aula... **[Risos.]** Eu, sei lá, tenho a impressão de que eu vou frustrar muito... e eu tenho medo disso... porque como eu tenho esse medo da Matemática, eu não sei se eu vou conseguir ensinar meus alunos... Eu acredito que seja muito importante e eu queria poder dar essa importância pra Matemática que ela tem, e conseguir passar isso pro meu aluno!*

209. Pesquisador/Participante: Pensa comigo, P-4! O primeiro passo você já está dando pelo fato de estar aqui... porque você não está sendo obrigada. Já é uma tentativa e muito

‘digna’ da sua parte de querer se superar. Então um conselho que eu te dou, além do empenho, tentar todo dia ‘se falar’: “Eu sou capaz!”. Certo!? Você tem que tentar fazer um movimento de introspecção: “Eu não fui capaz até esse momento porque eu tive a infelicidade de viver situações na escola que colaboraram para esse não gostar da Matemática!”. Só que, acredito eu, e vou tentar propor situações para que você, ao pensar sobre elas, tente ‘abolir’ tais barreiras, ou melhor, ‘diminuí-las’. Eu não posso garantir que toda essa dificuldade será superada porque estamos tentando (re)significar saberes construídos durante toda a Educação Básica em 6 meses... Mas eu penso que se você começar a acreditar um pouco mais em sua capacidade, você começará a compreender que existe uma outra maneira de ensinar Matemática e de se relacionar melhor com ela! Tudo bem? **[P-4 sinalizou, por meio de expressão facial, concordar com o exposto.]** E você, P-5, alguma dúvida?

210. **P-5:** *Não! Foi o que a P-1 falou! Eu fiquei pensando no como mesmo, como aqui fala que “os alunos se tornem capazes de descrever e interpretar sua realidade usando seus conhecimentos matemáticos”. Só que daí a sua cabeça vai fazendo uma viagem em como isso vai ser feito, eu acredito que ao longo do Grupo nós vamos aprofundar isso!*

211. **Pesquisador/Participante:** Esse é um dos nossos objetivos! E você, P-2?

212. **P-2:** *Não, tudo tranquilo!*

213. **Pesquisador/Participante:** P-7?

214. **P-7:** *Eu coloquei aqui que na primeira citação ele fala que é muito mais que só ler e interpretar e também na segunda citação falando sobre as representações que aparecem no seu dia-a-dia, que ele complementa este, que é descrever e interpretar a sua realidade!*

215. **Pesquisador/Participante:** Quando a gente pega um jornal não está cheio de gráficos e diagramas, não é isso, pessoal?!

216. **P-7:** *É, e às vezes a gente não consegue fazer essa associação, porque o jornal a gente não estabelece essa noção com a Matemática... [Nesse instante P-4 interrompeu, indagando.]*

217. **P-4:** *A gente pula essa parte! [Risos.]*

218. **Pesquisador/Participante:** Por exemplo, o dólar, atualmente, se encontra numa situação complicada... Na seção de Economia o jornal sempre traz por meio de gráficos de linhas o aumento e o decaimento do dólar, mostrando a sua ‘alta’ e sua ‘queda’. É interessante ver que, em pouco espaço, é possível perceber situação do dólar, um ‘fato’ que interfere em nosso dia-a-dia, mesmo que não percebamos... E você, P-3?

219. **P-3:** *Ah, eu entendi sim. Eu fico pensando em como fazer, em como passar de uma atividade para outra...*

220. **Pesquisador/Participante:** Você quer saber quando é o momento de abordar um outro conteúdo mais complexo dando continuidade à aprendizagem do aluno?

221. **P-3:** *É!*

222. **Pesquisador/Participante:** A melhor maneira é você acompanhar, dia-a-dia, qual é a resposta do aluno diante do desafio que você propõe a ele. Agora, se você esperar, ao final de cada mês, para realizar uma prova, daí, talvez... [Neste momento P-9 interrompeu.]

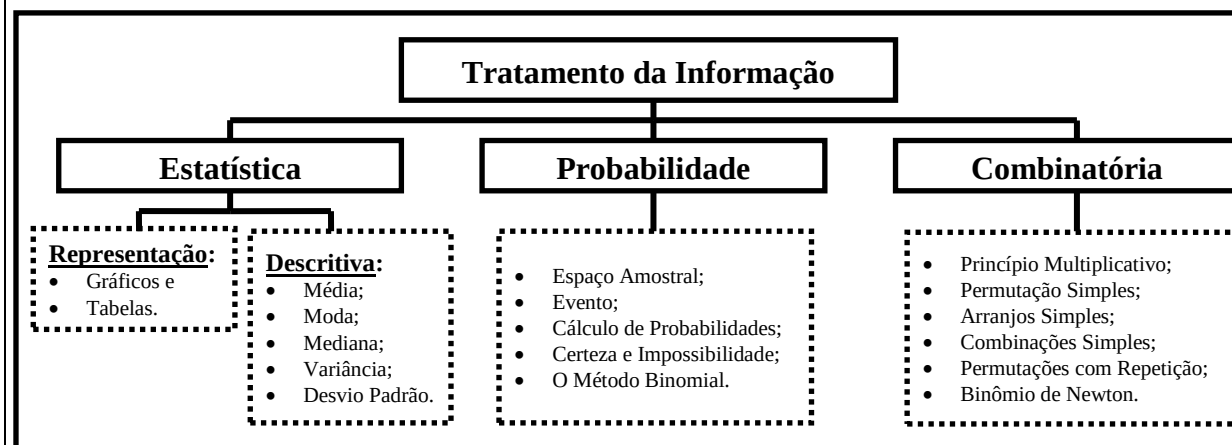
223. **P-9:** *Ah, e se o aluno tiver dificuldade de ler e escrever?*

224. **Pesquisador/Participante:** No caso de alunos menores?

225. **P-9:** *Não, também no caso de alunos maiores! Ou também, no dia daquela prova o aluno pode estar num dia ruim... então você não pode somar tudo aquilo pra dizer que ele não sabe...*

226. **Pesquisador/Participante:** Lembra da disciplina que eu ministrei para vocês no qual a Avaliação não era o ‘vale tudo’? Era nesse sentido, pois, é difícil avaliar a aprendizagem do seu aluno a partir de um único instrumento de avaliação e num único dia! Era por isso que eu pedia os trabalhos individuais semanais onde vocês poderiam colocar as dúvidas para eu poder acompanhar o ‘desenvolvimento’ de vocês... havia o trabalho em grupo... É importante, sim, uma avaliação individual pra você verificar o nível de síntese atingida pelo aluno, só que não é a única, tudo bem? É importante acompanhar o processo e ver no produto o que o sujeito está conseguindo fazer... Na Educação, a meu ver, não há necessidade de ‘medidas radicais’, ou seja, ou eu vejo só o produto, ou eu vejo só o processo, vamos ver os dois! Até porque, querendo ou não, o produto é necessário. Concordam comigo, pessoal? **[A maioria das participantes, por meio de expressão facial, concordou com o questionamento.]** Pessoal, podemos ir à página 14, por favor? Alguém pode fazer a leitura? **[A P-1 realizou a leitura do trecho denotado abaixo.]**

Para finalizar esta breve introdução, tendo em vista que discussões mais aprofundadas acerca do tratamento didático-metodológico do referido ‘bloco’ far-se-ão em encontros posteriores, será apresentado um esquema denotando parte dos conteúdos constituintes do Tratamento da Informação, sendo que alguns serão abordados adiante.



[Em seguida, o Pesquisador/Participante foi apresentando cada um dos conteúdos pertencentes a cada uma das áreas (Estatística, Probabilidade e Combinatória). Após citar os conteúdos da Probabilidade, realizou o seguinte questionamento.]

227. **Pesquisador/Participante:** Vocês se recordam de exercícios ou problemas em que eram necessários tais conteúdos da Probabilidade?

228. **P-9:** *Bom, eu me recordo das Probabilidades nas provas que eu fiz de Concurso Público, nas provas tipo... “Meu Deus, isso não foi passado pra mim!?”... Eu criei hipóteses minhas, eu não me lembrava de nada concreto de conteúdo que tinham me passado!*

229. **Pesquisador/Participante:** Ok! E as demais?

230. **P-1:** *Nesse tipo de situação, pra fazer os problemas do Concurso eu usei Lógica!*

231. **Pesquisador/Participante:** Então quer dizer que você usou mais Lógica do que esse conteúdo. **[Referiu-se às Probabilidades.]**

232. **P-1:** *Sim!*

233. **Pesquisador/Participante:** Não que a Lógica não seja necessária! Acontece que tais conteúdos facilitariam na resolução dos problemas!

234. **P-1:** *É, porque usando só a Lógica acaba dando mais trabalho!*

235. **Pesquisador/Participante:** Alguém mais, pessoal?

236. **P-5:** *Método Binomial... eu nem me lembro disso!*

237. **Pesquisador/Participante:** Ok! Iremos abordá-lo! **[Dando continuidade foi perguntado às participantes se recordavam do estudo dos conteúdos pertencente à área da Combinatória. Novamente, as participantes indicaram não se ‘lembrar bem’ dos mesmos, indicando que não foi realizado um estudo durante a Educação Básica de tal modo a contemplar a efetiva construção de tais conceitos pelas participantes.]**

[Em seguida foi solicitado que as participantes pensassem a respeito das questões – abaixo – para posterior discussão.]

1. Durante a Educação Básica os Gráficos e as Tabelas foram abordados em quais situações? Para quais finalidades? Comente.
2. Se um aluno do 5.º ano do Ensino Fundamental lhe perguntasse o que é uma Tabela como você a definiria?
3. E em relação ao Gráfico? Como seria a sua explicação?
4. De que modo seus professores de Matemática abordaram os Gráficos e as Tabelas?

[Decorridos 10 minutos deu-se início a leitura das respostas por cada participante permitindo o compartilhamento entre todas. O Pesquisador/Participante, após a leitura da primeira questão, pediu para que P-3 falasse a respeito.]

238. **P-3:** *Eu coloquei que foi abordado em situações problemas, é... tipo para ilustrar o que estava sendo falado no texto, ou... a gente resolvendo essa situação problema ilustrasse no gráfico ou na tabela.*

239. **Pesquisador/Participante:** Então no texto, do problema, havia dados numéricos e pediam pra transformar isso numa tabela ou num gráfico?

240. **P-3:** *Isso! Ou fazer a leitura do gráfico e da tabela.*

241. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-7?

242. **P-7:** *Bom... eu me recordo muito pouco destes conteúdos, não sei se foi pelo fato de mudar de escola e daí eu acabei perdendo... Mas eu me lembro, assim, o professor passar do livro didático... tinha o conteúdo no livro e a finalidade era simplesmente mostrar: “Olha, aqui estão o gráfico e a tabela e no dia-a-dia vocês vão encontrar no jornal.”* **[Referiu-se à atitude adotada pelos seus professores de Matemática.]** *Ou seja, a gente não tinha que construir isso, nem atividades, nem nada disso!*

243. **Pesquisador/Participante:** Não teve nenhum trabalho de aprofundamento?

244. **P-7:** *Não, era só mostrar mesmo: “Isso é um gráfico.”, “Isso é uma tabela.”... e ponto!*

245. **Pesquisador/Participante:** Então na realidade o objetivo era apenas mostrar pra vocês, e só isso! **[A participante concordou com a afirmação.]** P-2?

246. **P-2:** *Foi bem isso mesmo! Quando apareceu no livro didático, como exemplo ainda... tipo: “Aqui tem um exemplo e isso é uma tabela... e isso é um gráfico!”* **[Referiu-se à atitude adotada pela maioria dos seus professores de Matemática.]** *Eu me lembro de uma vez quando eu estava na 4.^a série e a professora fez com a gente um tabela na lousa perguntando sobre os sabores do sorvete, pra turma! Foi uma coisa que me marcou porque foi diferente, não saiu do livro, ela pegou uma coisa da realidade...*

247. **Pesquisador/Participante:** P-5, leia pra gente, por favor!

248. **P-5:** *Eu coloquei que os gráficos e as tabelas foram abordados em situações como a P-2 falou, no livro já tinha o enunciado com os dados e daí nós construíamos a tabela ou o gráfico. Ou tinha o gráfico com perguntas pra você interpretar... eu lembro bastante de gráficos e tabelas, do resto do Tratamento da Informação não, eu lembro que eu fiz bastante, tanto de interpretar quanto de construir!*

249. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-4?

250. **P-4:** *O meu também foi tabelas prontas, assim, ... até tinha exercícios perguntando uma coisa da tabela, do gráficos, assim, ... mas era pronto mesmo, pegava do livro ou de algum lugar...*

251. **Pesquisador/Participante:** E te diziam qual era a finalidade de fazer aquilo?

252. **P-4:** *Não!*

253. **Pesquisador/Participante:** E você, P-1?

254. **P-1:** *Essa resposta eu coloquei na quatro!*

255. **Pesquisador/Participante:** Então, tudo bem! O que você colocou?

256. **P-1:** *Eu coloquei que, geralmente, gráficos e tabelas era para ilustrar conteúdos de Geografia, na Matemática era pouco utilizada!*

257. **Pesquisador/Participante:** Perfeito! Era isso que eu queria saber, sobre qual a finalidade do seu estudo! E você, P-9?

258. **P-9:** *Eu coloquei que eram abordados quando apareciam dentro de materiais didáticos, principalmente apostilados, em questões sobre os conteúdos abordados. Eu me lembro tanto em Matemática quanto em Geografia/História. Mas era geralmente assim, por exemplo, em História tinha algum dado, conteúdo, e daí tinha gráficos ou tabelas que estavam inseridos ali, no texto. Eu não me lembro de ter sido desafiada a construir um gráfico ou uma tabela.*

[Após a leitura da segunda questão “2. Se um aluno do 5.º ano do Ensino Fundamental lhe perguntasse o que é uma Tabela como você a definiria?”, o Pesquisador/Participante pediu que as participantes apenas lessem para que as demais, e ele próprio, pudessem ‘perceber’ como a mesma definiria uma Tabela. A primeira a iniciar foi a P-4.]

259. **P-4:** *São dados numéricos que possuem certa relação entre si!*

260. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você, P-1?

261. **P-1:** *Eu falaria que tabela é um quadro com informações organizado em uma determinada ordem!*

262. **Pesquisador/Participante:** P-5!

263. **P-5:** *Eu coloquei que tabela é uma maneira de representar alguns dados, assim como representamos em texto, mas em alguns casos a visualização em tabela facilita o entendimento.*

264. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você, P-2?

265. **P-2:** *Tabelas são linhas e colunas com dados que se cruzam indicando a frequência de um acontecimento de tal fato ou situação!*

266. **Pesquisador/Participante:** P-7, por favor, leia para a gente!

267. **P-7:** *Um espaço utilizado para descrever e explicar algumas informações, para simplificar!*

268. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você, P-9?

269. **P-9:** *Bom, uma tabela é uma construção onde nós podemos explicar alguma informação sobre alguma coisa. Por exemplo, time de futebol, a gente pode mostrar na tabela quantas vezes o São Paulo foi campeão de alguns campeonatos e quanto o Corinthians foi de outros... então a gente pode pegar isso com os colegas e colocá-los em tabelas.*

270. **Pesquisador/Participante:** E você, P-3, como definiria uma Tabela?

271. **P-3:** *Eu diria que a tabela é uma forma de representação gráfica para perceber e ilustrar os dados e para facilitar o entendimento.*

[Dando continuidade, o Pesquisador/Participante solicitou que cada participante fizesse a leitura da resposta acerca da definição do Gráfico – pergunta 3. A primeira a ler foi a P-3.]

272. **P-3:** *Eu falaria que, assim como a tabela, o gráfico também é uma forma de representação dos dados que foram vistos no texto, por exemplo. Uma forma de descrever e ilustrar e facilita a leitura desses dados.*

273. **Pesquisador/Participante:** E você, P-7?

274. **P-7:** *Gráficos é uma representação em porcentagem de algum evento ou informação de algo!*

275. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-2?

276. **P-2:** *Gráficos são maneiras de interpretar informações dando possibilidades de saber qual a opção foi a mais escolhida, menos escolhida ou a intermediária.*

277. **Pesquisador/Participante:** P-5!

278. **P-5:** *Gráfico é uma maneira de representar a tabela. Em alguns casos os dados são melhor visualizados no gráfico...*

279. **Pesquisador/Participante:** Leia pra gente, P-4.

280. **P-4:** *É um desenho de uma ou mais informações!*

281. **Pesquisador/Participante:** P-1...

282. **P-1:** *O gráfico é uma forma representativa dos resultados alcançados em uma pesquisa em construção numérica.*

283. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você, P-9?

284. **P-9:** *O gráfico é um quadro de informação assim como uma tabela. E pode vir, por exemplo, de uma pesquisa... de uma pesquisa de rua realizada no bairro. E daí podem perguntar “Quantas pessoas moram com você? Quantas mulheres, quantos homens? Quantas crianças? Quem já teve dengue?”. Então o gráfico pode ser uma ajuda pra passar s informações.*

285. **Pesquisador/Participante:** Ok! Pessoal, deu pra perceber, a partir das respostas dadas por vocês, que as definições sobre o que é uma Tabela e um Gráfico são diferentes, com alguns aspectos em comum. No entanto, não hoje, mas em encontros posteriores será feita um ‘resumo-síntese’ acerca de tais definições.

[Após a leitura da última questão (4) deu-se início a apresentação das respostas elaboradas pelas participantes. A P-5 iniciou a leitura de sua resposta.]

286. **P-5:** *Mediante explicação pelo professor na lousa e resolução de exercícios previamente estabelecidos no livro didático.*

287. **Pesquisador/Participante:** Apenas isso, P-5?
288. **P-5:** *Sim... e a construção, porque nós construíamos também, eu esqueci de escrever!*
289. **Pesquisador/Participante:** P-2, por favor!
290. **P-2:** *Eu coloquei que foi conforme apareceu no livro didático sem fazer relação ou referência com os acontecimentos cotidianos. Pra mim foi bastante sucinta e rápida essa abordagem!*
291. **Pesquisador/Participante:** E você, P-3?
292. **P-3:** *Pelo que eu lembro o professor explicava o que é um gráfico e o que é uma tabela, mas... passava conteúdo, assim, sem contextualizar...*
293. **Pesquisador/Participante:** Era exposição oral e, em seguida, exercício no caderno?
294. **P-3:** *Sim, era!*
295. **Pesquisador/Participante:** P-7, leia pra gente!
296. **P-7:** *Então eles abordaram como se era um meio pra representar alguma informação, bem sucinto, era a explicação e mostrando o livro didático de que aquilo existia. O professor explicava usando mais o livro, nem era muito na lousa, ele abria o livro, olhava ali... [Neste momento, P-2 interrompeu.]*
297. **P-2:** *“Abra o livro na página tal!” [Risos, referindo-se à fala/atitude adotada pelos seus professores de Matemática.]*
298. **Pesquisador/Participante:** Então os professores de vocês faziam assim: “Abram o livro na página tal, tá vendo isso daí, chama tabela!” **[Neste instante todas as participantes riram da indagação proferida.]** “Sabe o que você faz com isso? Você pega da letra a) e faz igual até a letra g)!” **[Referiu-se às falas dos seus professores de Matemática solicitando aos alunos a resolução-fixação de repetidos exercícios.]**
299. **P-2:** *Era isso mesmo!*
300. **P-7:** *É, era assim, por exemplo, como a P-9 falou, o professor pedia pra ler junto o enunciado, por exemplo, uma tabela de times de futebol e depois pedia os exercícios!*
301. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem! E você, P-4, leia pra gente, por favor!
302. **P-4:** *Eu coloquei, pelo que eu lembro, esses exercícios eram muito poucos, eu não me lembro muito...*
303. **Pesquisador/Participante:** P-1?
303. **P-1:** *As tabelas eram dificilmente usadas. Quando utilizadas era para analisarmos uma já pronta e não construí-la. Gráficos eram construídos a partir de pequenas pesquisas na sala de aula!*

304. **Pesquisador/Participante:** Então os seus professores faziam pesquisas com vocês?

305. **P-1:** *Ah, eu me lembro de ter uma vez! [Devido a esta fala, as demais participantes riram!] Por exemplo, ele mandava pesquisar o que a gente comeu de manhã, por exemplo, leite, sabe, tipo assim...*

306. **Pesquisador/Participante:** Mas a grande maioria dos seus professores de Matemática usava a exposição na lousa x livro x giz e exercícios?

307. **P-1:** *Sim, é!* [Nesse momento, as demais participantes indicaram concordar com P-1.]

308. **Pesquisador/Participante:** E você, lê pra gente P-9, por favor!

309. **P-9:** *Eu coloquei que não me lembro como explicaram o que era gráfico e tabela, só me recordo de ver o conteúdo inserido dentro das matérias... foi como eu te falei, estando inseridos em outras disciplinas como a Geografia, História, não foram trabalhados comigo a construção destes conceitos. [Referiu-se aos Gráficos e as Tabelas.]*

310. **Pesquisador/Participante:** Ok! Pessoal, deu pra perceber que eu ‘mapeei’ os conhecimentos prévios de vocês? [Todas as participantes, por meio de expressão facial, sinalizaram identificar tal percepção.] Àqueles saberes experienciais que é um dos itens que estou tentando verificar na minha Tese. Certo!? Parti do que cada uma falou nesse trabalho de (re)significação, complementação, de aprofundamento. Passando, num primeiro momento, pela própria construção destes conceitos por vocês, ok? [Como nenhuma participante realizou comentários, deu-se prosseguimento.]

[Em seguida, foi feita a leitura, por P-9, de uma situação problema envolvendo a utilização de gráficos e tabelas. No entanto, devido ao tempo restante para a finalização do encontro, tal situação problema foi deixada para o próximo encontro. Porém, foi solicitado a cada participante que elaborasse o “Momento de Síntese – Idas e Voltas”, ou seja, que escrevessem o que foi possível concluir a partir deste encontro.]

APÊNDICE G – TRANSCRIÇÃO DO 3.º ENCONTRO

Data: 15/03/2012

Tempo de Duração: 3 horas e 10 minutos.

[Inicialmente foi solicitada a leitura do “Momento de Síntese – Idas e Voltas” elaborada por cada participante. Em seguida, cada uma foi questionada acerca do que estava achando do Grupo de Estudo, ou seja, se estavam considerando válido ou da necessidade de mudanças.]

1. **Pesquisador/Participante**: Pessoal, eu acho interessante começarmos com a leitura da síntese do último encontro feita por vocês, para que cada uma ‘tome’ consciência daquilo que o outro conseguiu compreender e, para que vocês também realizem um processo de retomada daquilo que foi trabalhado. De tal modo que, o que formos estudar hoje constitua uma sequência – continuidade de construção. Tudo bem? Vamos começar com a P-5.

2. **P-5**: *A partir deste segundo encontro pude concluir a importância de ler e interpretar com muita atenção um enunciado, a importância do concreto para certas pessoas. E também o quão é importante trabalhar o tratamento da informação com os alunos de uma maneira diferente de como foi trabalhado conosco, agora só falta o “como”, como trabalhar de maneira diferente e que realmente ocasione uma aprendizagem por parte dos alunos.*

3. **Pesquisador/Participante**: Então quer dizer que pra você uma questão ainda a construir refere-se a uma estratégia didático-metodológica que seja adequada a faixa etária que vocês vão trabalhar?

4. **P-5**: *Sim!*

5. **Pesquisador/Participante**: Ou seja, o ‘como’ trabalhar o Tratamento da Informação ou outros conteúdos, ou só o Tratamento da Informação?

6. **P-5**: *Outros conteúdos também!*

7. **Pesquisador/Participante**: Ok! Por favor, P-4, leia pra gente!

8. **P-4**: *O meu pensamento matemático é ainda muito concreto, pois eu ainda tenho muita dificuldade de formular hipóteses mentais sem antes testar. Não consegui chegar nem perto na elaboração de uma expressão numérica para representar o número de deslocamentos para n discos, mas consigo perceber o quanto a Matemática é importante e como me faz falta.*

9. **Pesquisador/Participante**: É interessante você colocar que, na sua concepção, pra você ainda o seu pensamento matemático é muito concreto. E veja se, aquilo que eu interpreto, é o que você pensa! Você diz a respeito da dificuldade de apenas ‘ficar’ com a definição do livro didático ou da lousa, ou seja, apenas com uma proposição verbal? É isso que você entende como uma construção Matemática não concreta?

10. **P-4:** *É isso! Eu preciso de manipulação mesmo! E bem antes, mesmo! [Neste momento fez gestos com as mãos simulando pegar algum objeto, rindo concomitantemente.]*

11. **Pesquisador/Participante:** Você sente a necessidade de, antes de compreender um conceito de modo aprofundado, você ainda sente a necessidade de ter um objeto pra manipular? **[A participante sinalizou concordar por meio de expressão facial.]** Você percebe, P-4, que ‘hipóteses’ você formula a todo o momento, você concorda comigo?

12. **P-4:** *Sim.*

13. **Pesquisador/Participante:** Só que as suas hipóteses ainda estão ‘presas’ ao real. A principal característica do pensamento formal é quando as hipóteses se ‘desprenderem’ do real e ‘vão’ para o campo das possibilidades. Vocês conseguiram compreender essa fala, pessoal. **[Nenhuma participante se manifestou, indicando, através de expressão facial, ter compreendido tal afirmação.]** O real é apenas uma destas possibilidades do pensamento. Nós, mesmos no pensamento formal não vamos menosprezar o real, o concreto, só que daí o real vai ser apenas uma possibilidade... Todo mundo já ouviu falar da Física Quântica? **[Todas as participantes indicaram já ter ‘ouvido’ sobre.]** A Física Quântica representa um pensamento formalizado de ‘grande’ complexidade. E tal formalização, tais hipóteses se ‘desprenderam’ do real, estando apenas ao nível das proposições verbais (mentais) estabelecidas pela pessoa que a elaborou. Tudo bem? Todo pensamento matemático formalizado possui tal característica. No entanto, o pensamento matemático inicialmente construído pela criança não é assim, é precisamente aquilo que você, P-4, colocou, de ainda haver a necessidade de raciocínios no ‘campo’ do concreto. E a própria História da Matemática evidencia isso. Mas é interessante você ‘tomar’ a consciência de que você necessita do concreto, mas a possibilidade de superá-lo é grande, até porque por você já ter adquirido o sistema linguístico (ler – escrever – compreender) fica mais ‘fácil’, de certo modo, tal superação. Pra você e para as demais participantes fica mais ‘fácil’ a ascensão à Matemática formalizada. **[Todas as participantes concordaram com o exposto.]** Você pode ler a sua síntese, P-2?

14. **P-2:** *Compreender para mim que minhas ações em relação ao desafio da Torre de Hanói e também perceber como se deu todo o desenvolvimento da quantidade de deslocamentos mínimos. Saber quais serão os conteúdos abordados nos próximos encontros em relação ao Bloco Tratamento da Informação e, cada vez mais, saber a importância e como aplicar a teoria piagetiana na prática, sentindo na “pele” como se faz.*

15. **Pesquisador/Participante:** Turma, neste momento faz-se oportuno o questionamento que vou fazer e quero que vocês respondam com sinceridade! Vocês acham que esta proposta de estudo é diferenciada da maioria das aulas no Ensino Superior? **[Todas as participantes presentes neste início – P-2, P-4, P-5 e P-7 – sinalizaram, por meio de expressão facial, concordar.]** Por quê? Eu quero ouvir vocês!

16. **P-2:** *Eu sinto assim, pelo menos aqui eu vejo que a gente está participando mais, está discutindo mais e a gente está fazendo, também! Não ficou só aquela coisa, assim, “Leia o texto, diz o que você acha e ‘morre’ por ali”. [Referiu-se às práticas adotadas por parte dos seus professores do Ensino Superior.] Às vezes os textos até trazem exemplos de como seria, os vídeos que eles passam na sala, mas não é a gente constrói, que participa dessa construção. A gente recebe a coisa pronta, feita... onde há a possibilidade de alguns casos de*

discussão, mas fica ali, você não sente, é isso que eu sinto aqui, que eu estou fazendo... Por mais dificuldades que se tenha, iguala a P-4 falou que pra tomar consciência você precise do concreto, ou até na questão lá..., realmente eu não tenho como conseguir chegar em fórmula nenhuma. **[Referiu-se ao fato de não conseguir elaborar a expressão Matemática que indica o número mínimo de deslocamentos para o desafio da Torre de Hanói.]** Tudo bem, eu tenho consciência dessa dificuldade, mas é importante participar, sentir como seria, se colocar no lugar do outro. Estou sentindo muito isso!

17. **P-4:** Eu percebo que as nossas aulas são mais positivas mesmos... Então falta essa coisa de testar, experimentar... Eu acho que é o que a P-2 falou mesmo!

18. **P-7:** É bom poder participar, né! É algo que também parte daquilo que a gente tem dificuldade. Não é só, ah... porque o professor chega, põe e acha que aquilo que a gente tem que aprender e pronto! Ele dá uma aula ali, se aprendeu, ótimo, senão a dúvida é sua e você tem que correr atrás. Aqui não, eu acho que a gente tá partindo de uma outra ideia, você está vendo as nossas dificuldades pra caminhar com a gente a partir disso! E eu acho que essa troca também é bem grande aqui... você vê o que cada um pensa e talvez é aquilo que você nunca imagina, e daí o outro pensou e também é muito importante, como é diferente né!

19. **P-2:** E ajuda até a mudar o seu ponto de vista, né!

20. **P-7:** Às vezes você acha que só o seu é certo, mas daí tem várias visões bem diferentes daquilo.

21. **Pesquisador/Participante:** Isso tem relação com aquelas relações interindividuais que eu já falei que nós iremos discutir bem melhor, que contribuiu como um dos fatores ao desenvolvimento cognitivo do indivíduo? **[Todas as participantes, inclusive P-9 que acabara de chegar, responderam “Sim.”]** E você, P-5?

22. **P-5:** Eu acho que é bem isso mesmo... porque é diferente você falar pra nós, assim, “Ah, você tem que falar pro seu aluno testar, tentar descobrir e depois dar a resposta!” **[Referiu-se às falas utilizadas pela maioria dos seus professores do Ensino Superior.]** Mas aqui, no caso da expressão mesmo, nós fizemos isso, a gente tentou, falou em grupo, depois você deu a resposta, só que nós vivenciamos isso. E daí fica mais forte pra você levar pra sua prática quando você vivenciar, e não só ficar ouvindo o professor falar. Eu acho que fica mais forte. E, realmente, a interação mesmo, porque, às vezes na aula tem tanta coisa pra abordar com tantos alunos que você não tem espaço pra você falar... E aqui tem mais espaço. **[Interrompendo a fala da participante, chegou P-8 que, até então, por alguns problemas particulares não havia iniciada a participação no Grupo de Estudo. Após recebê-la, deu-se continuidade à discussão pedindo para a P-9 ler a síntese elaborada do encontro anterior.]**

23. **P-9:** Foi possível termos mais conhecimento sobre a parte curricular do ensino de Matemática, assim como informações sobre os blocos referentes aos tratamentos das informações. Assim conclui a importância do saber dos conteúdos na prática docente. Ou seja, ter conhecimento sobre esses conteúdos, porque muitas vezes não é passado na sala de aula.

24. **Pesquisador/Participante:** Desculpa, P-7, leia a sua síntese pra gente!

25. **P-7:** *Eu percebi a importância da interação na construção do aprendizado do aluno de modo como foi e ainda são explicados estes conceitos e como cada um interpreta. Da importância da manipulação do concreto, realidade vivenciada de cada aluno, tudo isso beneficia o aluno e a construção do aprendizado dele.*

26. **Pesquisador/Participante:** Obrigada! E, além disso, P-9, eu perguntei pro pessoal o que estavam achando do nosso Grupo de Estudo, se está sendo válido, se é uma proposta diferenciada quando comparada às aulas no Ensino Superior... As colegas haviam concordado que sim, gostaria de saber a sua opinião! Ou seja, caso seja diferenciada, por quê? Quais são os elementos que a tornam diferente, e se está contribuindo, ou não, em sua aprendizagem conjunta do nosso Grupo! Porque, como eu já falei, a cada semana que eu tenho que preparar as atividades, o direcionamento que eu vou dar, eu também estou aprendendo muito, e isso pra mim também é complexo!

27. **P-9:** *Bem, eu acho que tem vários itens, assim, que poderia elencar como diferenciais. Primeiro eu acho que pelo número de pessoas, porque, quando a gente começa a ter em demasia, 40-50 alunos, isso com certeza faz com que se perca... Porque o professor... ele traz o foco de conhecimento individual de cada aluno... isso eu sinto que os professores acabam não tendo... No Ensino Superior mesmo, é um fator que às vezes eu acho que acaba dificultando, eles não tem tempo de ter conhecimento... Por exemplo, eu sou a P-9, mas, qual que será que foi meu desenvolvimento até aqui!?... Eu acho que esses elementos acabam dificultando... Porque quanto mais o professor pode ter conhecimento do seus alunos, porque aqui você vai acabar tendo, sabendo muito mais das coisas nossas, ideias, do que a gente conhece do que um professor do Ensino Superior, ou seja, como é estabelecido. Eu acho que a gente, tendo mais possibilidade de mostrar as ideias, muitas vezes fica muito na aula expositiva... Outra coisa que eu... não sei... é uma opinião particular que eu critico muito é as tais semanas de seminários. Eu acho que, que nem..., muitas vezes... algumas vezes foi proveitoso, mas a maioria das vezes eu senti que ficou uma coisa assim, a gente poderia ter aprendido muito mais coisas que acabaram não tendo... eu não sei se foi de vocês também? [Neste momento olhou para as participantes indicando fazer tal questionamento para as mesmas.] É muitas semanas naquilo, naquilo... talvez se fosse outro jeito, de atividades que fossem mais interessantes... Mas eu vejo isso, que os seminários são semanas de coisas expositivas e que nem às vezes a gente conhece bem isso, que tem certeza do que está fazendo! Porque a gente vai aprender a dar o tema que a gente vai apresentar... a gente nunca tinha visto este conteúdo antes, nenhum contato, nenhum ‘palpável’. Eu acho que isso é uma das principais dificuldades que todos temos! Só pra fazer uma analogia com o que está acontecendo aqui, no Grupo. Aqui não, a gente tá entendendo o que é o Tratamento da Informação, você tá ‘puxando’ da gente e entender o que a gente sabe ou não sabe, desafiando a gente... e nós estamos caminhando todos juntos!*

28. **Pesquisador/Participante:** Interessante! É interessante esta questão do número de alunos! Vocês concordam com a colega, pessoal? **[As demais sinalizaram concordar.]** Realmente, além de analisar o que é diferente, nós não devemos perder o foco das limitações que o professor do Ensino Superior possui. Fazer esse trabalho minucioso e bem ‘detalhado’ que eu estou fazendo com vocês... para um professor universitário é quase impossível. Eu mesmo quando fui professor de vocês me esforcei ao máximo, mas eu não consegui fazer nem 20% do que pretendo fazer em nosso Grupo de Estudo. Tudo bem? E esta questão dos seminários é relevante também... O professor que propõe o seminário deve se ‘cercar’ de estratégias de tal modo que lhe indique se, realmente, a sala compreendeu o que o grupo está propondo. Daí estas estratégias são as mais variadas. Por exemplo, no meu caso eu utilizava

questionamentos... Lembra que eu comentava com vocês: “Se vocês conseguirem responder essas questões, isto implica que a essência do que está no texto foi apreendida (aprendida) por vocês!”. Cada professor utiliza a sua estratégia, porque a aula necessita de um direcionamento do professor... vocês concordam comigo?

29. P-9: Total! [Tal opinião, por meio da expressão facial das demais participantes, foi compartilhada e aceita.]

30. Pesquisador/Participante: Total, mas sendo um direcionamento de tal modo a permitir o aluno se expressar, ou seja, para que ele não perca a liberdade de conversar com o professor acerca do assunto que está sendo tratado.

31. P-8: *É, porque, você tem um conhecimento e você sabe o que tem que passar pra gente... A gente não sabe, então, se você direcionando, aí a classe vai se envolvendo, e daí vai surgindo questões que cada um vai, como cada um tem um conhecimento próprio em cima daquilo, com a dúvida, com o perguntar, vai acrescentando!*

32. Pesquisador/Participante: Interessante! Eu fico me perguntado, assim, quando a teoria de Piaget ‘chegou’ no Brasil, uma das primeiras coisas que foi mais erroneamente difundida foi que Piaget era adepto do não-diretívismo. Já ouviram isso?

33. P-8: *Sim, deixar tudo livre!*

34. Pesquisador/Participante: Isso, o *laissez faire*, ou seja, a criança, por si só construirá o conhecimento naturalmente. Só que, pelo contrário, o não-diretívismo de outra tendência educacional, não do construtivismo piagetiano. E eu não vou entrar em detalhes por não ser o nosso foco! E é oportuno pensarmos a esse respeito, pois, dependendo da ‘corrente’ teórica que o educador diz utilizar, ele acaba propagando falsas ideias de outras ‘correntes’ teóricas, e isso é algo que se deve tomar cuidado para não acontecer. **[Em seguida, o Pesquisador/Participante conversou com a P-8 no intuito de situá-la nas discussões e estudos já realizados nos Grupos de Estudos anteriores.]**

[Dando continuidade, o Pesquisador/Participante solicitou que as participantes pensassem a respeito da situação problema e das questões contidas no material entregue, disponibilizando 30 minutos. Como P-2 e P-7 já haviam realizado, em dupla, tal atividade, as demais participantes foram separadas em um trio (P-1, P-5 e P-9) e em uma dupla (P-4 e P-8). Observe, a seguir, tal situação problema.]

2.4. Problematicando: Gráficos e Tabelas

Leia, atentamente, a situação problema exposta a seguir:

Durante o mês de maio, a professora de Matemática Sueli pediu aos seus alunos do **6.º** ano **B** do Ensino Fundamental, da Escola Municipal Professor Alcântara, que ‘coletassem’ as seguintes informações (dados).

- A) Quantidade de irmãos.
- B) Quantidade e o tipo de animal de estimação.
- C) O gênero de filme preferido, apenas um.
- D) O sabor de sorvete preferido, apenas um.
- E) O número do calçado que usam.

Após a coleta, cada aluno trouxe suas anotações e a professora Sueli as escreveu na lousa, conforme exposto abaixo:

<u>Amanda</u> A) 2 B) Nenhum. C) Romance. D) Chocolate. E) 30.	<u>Antônio</u> A) 0 B) 1 gato. C) Comédia. D) Morango. E) 32.	<u>Aurélio</u> A) 2 B) 2 gatos. C) Ação. D) Flocos. E) 28.	<u>Beatriz</u> A) 1 B) 1 papagaio. C) Ação. D) Morango. E) 28.	<u>Beto</u> A) 2 B) Nenhum. C) Comédia. D) Chocolate. E) 32.
<u>Daniel</u> A) 0 B) 1 cachorro. C) Terror. D) Morango. E) 34.	<u>Daniele</u> A) 3 B) 1 coelho. C) Ação. D) Coco. E) 28.	<u>Diogo</u> A) 3 B) Nenhum. C) Romance. D) Napolitano. E) 30.	<u>Gustavo</u> A) 2 B) 3 gatos. C) Comédia. D) Flocos. E) 30.	<u>Igor</u> A) 3 B) 1 cachorro. C) Terror. D) Napolitano. E) 26.
<u>João</u> A) 1 B) 1 gato. C) Ação. D) Coco. E) 32.	<u>Júlia</u> A) 1 B) Nenhum. C) Comédia. D) Chocolate. E) 26.	<u>Kaik</u> A) 4 B) Nenhum. C) Suspense. D) Coco. E) 28.	<u>Leonardo</u> A) 0 B) 1 cachorro. C) Ação. D) Morango. E) 34.	<u>Lúcia</u> A) 2 B) 2 gatos. C) Romance. D) Napolitano. E) 30.
<u>Maria Lúcia</u> A) 3 B) 2 gatos. C) Comédia. D) Napolitano. E) 28.	<u>Nando</u> A) 1 B) 1 cachorro. C) Comédia. D) Chocolate. E) 34.	<u>Otávio</u> A) 2 B) 2 coelhos. C) Terror. D) Morango. E) 32.	<u>Patrícia</u> A) 0 B) Nenhum. C) Suspense. D) Flocos. E) 30.	<u>Sara</u> A) 3 B) Nenhum. C) Romance. D) Napolitano. E) 28.

Em seguida, a professora Sueli pediu que os alunos, em dupla, organizassem cada um dos dados (itens A, B, C, D e E) de tal modo que ficasse mais fácil visualizá-los em relação a toda a sala. Como os alunos poderão organizar esses dados?

1. De que modo você acredita que os alunos da professora Sueli organizariam os dados coletados?
2. Em dupla, organizem cada um dos dados (itens A, B, C, D e E) da maneira que conseguirem/preferirem.
3. Dentre alguns dos gráficos existentes (coluna, barra, circular e linha) quais são os indicados para a organização dos dados (itens A, B, C, D e E)? Há, entre estes tipos de gráficos, algum(s) que não é(são) apropriado(s) neste caso?
4. Os dados (itens A, B, C, D e E) podem ser organizados em uma única tabela? Em caso afirmativo, quantas linhas e quantas colunas seriam necessárias? Tente elaborar uma representação! Em caso negativo, justifique.

[Durante a solução da referida situação problema pelas participantes, observou-se o seguinte: 1 – Na dupla (P-4 e P-8), P-4 foi auxiliada/orientada por P-8, mas também a ajudou a contar a frequência dos itens; 2 – No trio (P-1, P-5 e P-9) cada participante fez individualmente as questões e conferiram se o resultado estava igual; 3 – Em vários momentos houve troca de ideias entre as participantes, seja no trio ou nas duplas. Decorridos 35 minutos, deu-se início à discussão.]

35. Pesquisador/Participante: Pessoal, em duplas ou trios vocês pensaram acerca dos 4 questionamentos. Sobre a primeira questão, o que cada dupla ou trio respondeu? Vamos começar com a dupla P-4 e P-8

36. P-8: *Por meio de tabelas.*

37. Pesquisador/Participante: Tabela foi a única resposta?

38. **P-4:** *Eu pensei mais, assim, pelo fato de que os alunos iriam quantificar, por exemplo, 6 alunos tem 2 irmãos, mas não colocar mesmo, certinho, em uma tabela. Mais, assim, fazer essa relação!*
39. **Pesquisador/Participante:** Acho que compreendi! Seria mais no sentido de achar uma relação de quantidade?
40. **(P-4 e P-8):** *Sim!*
41. **Pesquisador/Participante:** E a dupla da P-2 e P-7?
42. **P-2:** *Nós colocamos também que acreditamos que os alunos iriam colocar em tabelas, mas que eles colocariam, tipo assim, A [Referiu-se ao item A – Quantidade de Irmãos] e pondo a quantidade, sabe, 2, 0, 2, 1, 2... [Referiu-se ao fato dos alunos observarem apenas os valores deste item, colocando-os na ordem como ‘apareceram’ na ‘lousa’.] Ou seja, não conseguir montar já a tabelinha certinha, contando quantos 0...*
43. **Pesquisador/Participante:** Os alunos iriam separar o que cada um colocou neste item?
44. **P-2:** *Isso!*
45. **Pesquisador/Participante:** E depois eles iriam ver quantas vezes apareceram 1 irmão, 2 irmãos, nenhum irmão...
46. **P-2:** *Isso, pra daí montar a tabela!*
47. **Pesquisador/Participante:** E o trio?
48. **P-5:** *Bom, nós achamos, assim, que eles não iriam dividir que 4 alunos responderam Romance... só se tivesse uma explicação anterior. A gente pensou, assim, que eles iriam fazer em tabelas e a gente pensou na hipótese deles dividirem por gênero, ou seja, o que as meninas responderam, os meninos...*
49. **Pesquisador/Participante:** Percebam que é ainda mais ‘refinada’ a maneira que o trio apontou. Pois, além de verificar a frequência para cada tipo de filme preferido, por exemplo, ainda haveria uma subdivisão entre meninos e meninas!
50. **P-9:** *Eu, por exemplo, falei pra elas do trio que fazia muito isso quando criança. Separava os meninos e meninas! Eles veriam quantos meninos tem gatos, quantas meninas têm...*
51. **Pesquisador/Participante:** Interessante esse pensamento. Isso significa que nenhuma dupla ou trio respondeu que os alunos organizariam por meio de gráficos? **[Todas as participantes concordaram com o questionamento.]** Ok! Agora, na questão 2, eu pedi que vocês organizassem cada um dos itens (A, B, C, D e E) da maneira que vocês conseguissem/preferirem. Só que eu vou fazer diferente. Ao invés de, inicialmente, eu ouvir a produção de vocês, eu vou expor como que, ‘matematicamente’ de modo formal dá pra organizar. E, assim, vocês vão fazer um ‘movimento’ de confronto entre aquilo que vocês pensaram e o que irei colocar. Vocês acham interessante?

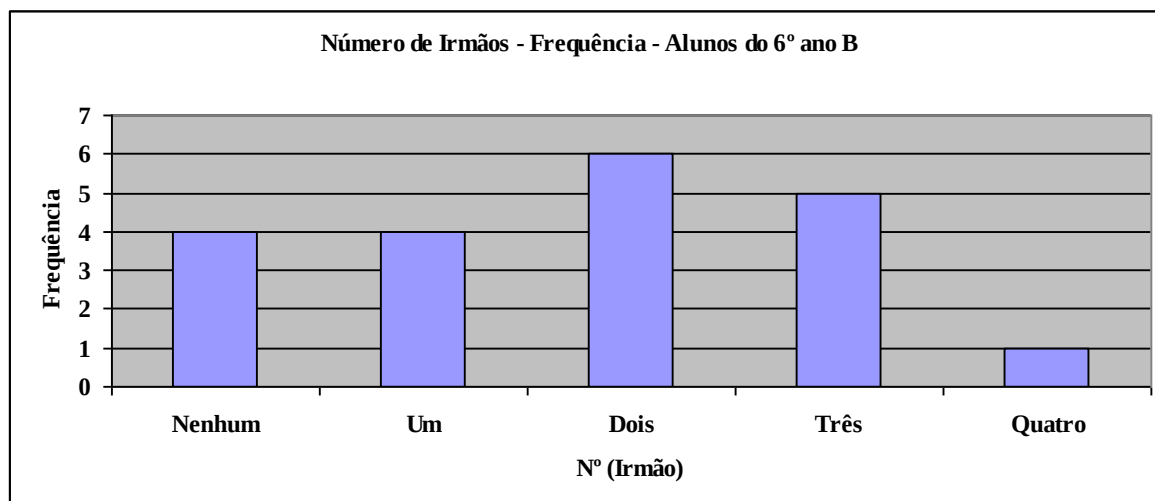
52. **P-5:** *Sim!*

53. **P-9:** *Eu adoro!*

54. **Pesquisador/Participante:** Então vamos ao item A – Número de Irmãos. Quem obteve esta tabela? [O Pesquisador/Participante projetou na tela a seguinte tabela.]

N.º - Irmãos	Frequência
Nenhum	4
Um	4
Dois	6
Três	5
Quatro	1
TOTAL	20

[As participantes do trio e da dupla (P-2 e P-7) levantaram a mão indicando terem elaborado a referida tabela. Após conferir os valores colocados pelas participantes em sua tabela, ao questionar se as mesmas haviam colocado o “TOTAL” a resposta foi “Não.”. Em seguida foi projetado um segundo modo de representar os dados do item A, como mostrado abaixo.]



55. **Pesquisador/Participante:** E desse modo, alguém fez?

56. **P-4:** *Não, nem pensar! [Riso geral.]*

57. **P-5:** *A P-1 pensou, mas daí a culpa foi minha porque eu achei que gráfico a gente faz depois.*

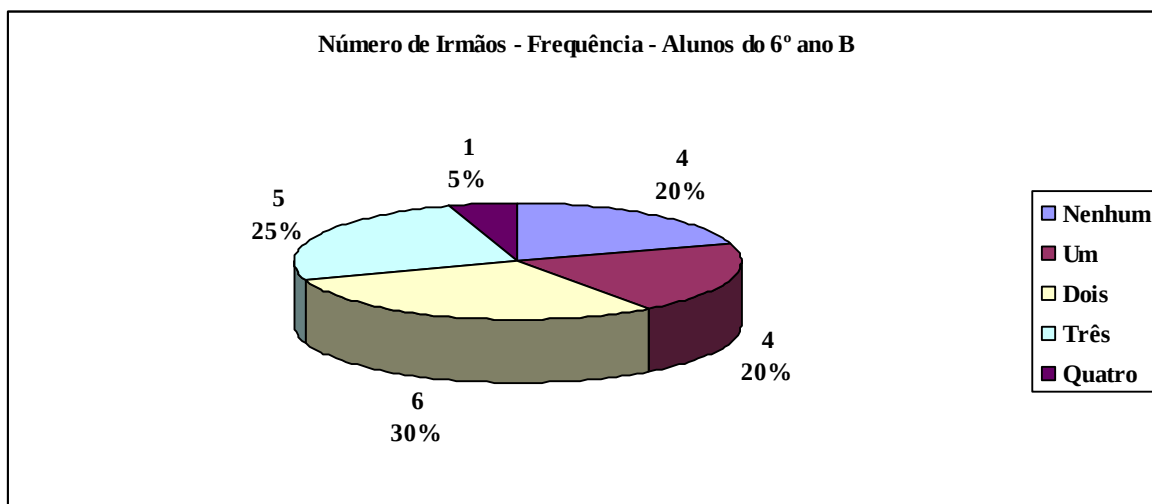
58. **Pesquisador/Participante:** Então você havia pensado, P-1? [A referida participante respondeu “Sim.”.] Perfeito, é outra possibilidade!

59. **P-4:** *A gente pensou, assim, de haver a possibilidade de fazer um gráfico, mas como na minha concepção a tabela é mais fácil, a gente foi pela tabela.*

60. **Pesquisador/Participante:** Ah, então quer dizer que vocês também fizeram uma tabela?

61. **P-4:** *Sim, fizemos!*

62. **Pesquisador/Participante:** Então quer dizer que todas fizeram uma tabela! Ok! Esse gráfico aqui, então, ninguém chegou a fazer? [Ouvindo-se um “Não.” coletivo.] [O gráfico referido pelo pesquisador/participante foi o seguinte.]



63. **Pesquisador/Participante:** Vocês sabem representar estes dados por meio de um gráfico de setor ou circular, ou o ‘famoso’ gráfico de ‘pizza’? [Todas indicaram, inicialmente, saber construir tal gráfico.] Todas sabem transformar a frequência em porcentagem? [Novamente, as participantes sinalizaram afirmativamente.] Vocês percebem que os três modos representam a mesma informação?

64. **P-8:** *É, aquele gráfico [Apontou o gráfico de colunas.] fica melhor de enxergar.*

65. **P-9:** *Ah, em relação ao gráfico circular eu não lembro como faz os cálculos, tipo assim, dados básicos eu sei calcular, como, por exemplo, 25% eu divido em 4... Agora, coisas mais complexas eu não sei calcular!*

66. **Pesquisador/Participante:** Ah, sim! Então vocês acham interessante, nos próximos encontros, nós fazermos um estudo sobre esta transformação em gráfico de setor, passá-lo para gráfico de linha, de coluna? [Todas as participantes concordaram, respondendo “Sim”.]

67. **P-9:** *Eu acho legal!*

68. **P-8:** *É, porque é melhor a visualização pras crianças já estando na tabela... gráfico, desculpa, eu confundi!*

69. **Pesquisador/Participante:** Qual gráfico?

70. **P-8:** *Os dois, porque nós discutimos na pergunta e os dois dão uma visão, assim, geral pra criança do 6.º ano...*

71. **P-4:** *Eles enxergam...* [Neste momento P-4, por meio de gestos utilizando os braços e falando conjuntamente indicou as diferenças ‘alturas’ do gráfico de coluna projetado

na tela, evidenciando que tal representação facilita compreender qual variável obteve maior frequência.]

72. **Pesquisador/Participante:** É interessante, ao final desse Bloco de Conteúdo, com as construções que realizaremos conjuntamente, vocês irão compreender que, para uma situação é melhor a tabela; já, no momento de uma visualização geral ‘rápida’ o gráfico é muito mais ‘didático’! Tudo bem, pessoal? **[Como ninguém se manifestou, deu-se prosseguimento.]** Vamos ao item B! Vocês acham interessante fazermos a discussão desse modo? **[As participantes concordaram. Desse modo, foi projetado a seguinte tabela, seguida de explicação do Pesquisador/Participante.]**

Animais	Frequência (Total de Alunos)
Nenhum	7
Cachorro	4
Coelho	2
Gato	6
Papagaio	1
TOTAL	20

Nesta tabela foi colocado quantos alunos não possuíam animais, quantos tinham cachorro, coelho, gato e papagaio. Eu não coloquei aqui **[Referiu-se à tabela acima.]** a quantidade de animais.

73. **P-2:** *Mas lá em cima, no B, está escrito “Quantidade e o Tipo de Animal”!*

74. **Pesquisador/Participante:** Eu sei, mas a “Quantidade” está escrito em outra tabela!

75. **P-4:** *E o que a gente fez está errado, então?* **[Risos.]**

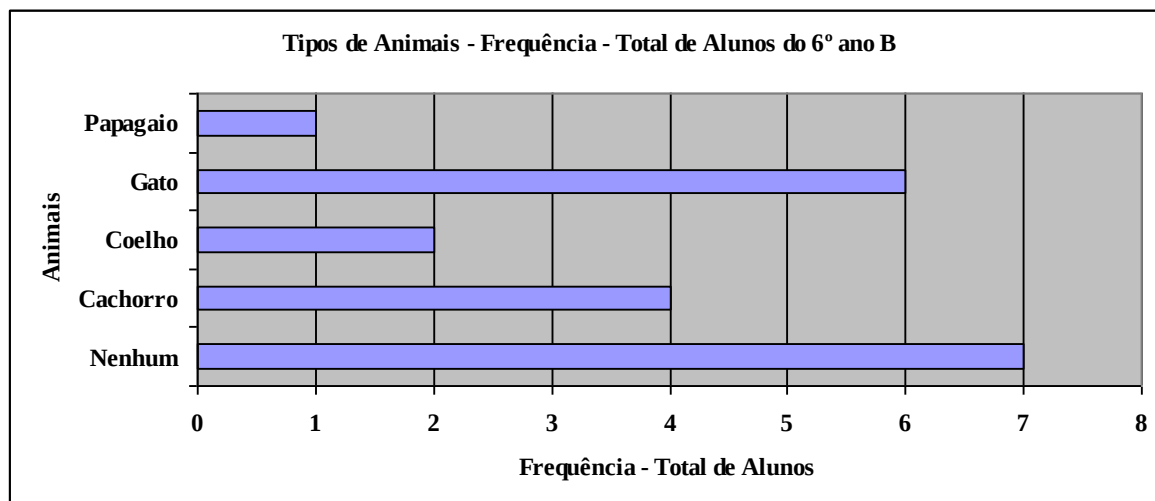
76. **Pesquisador/Participante:** Não, calma! Vamos por parte. Eu pensei o seguinte: colocar numa mesma tabela a quantidade e os animais que apareceram ao mesmo tempo poderia ficar complicado. Mas se alguém fez assim, me explique depois, por favor! Então, olha, 7 alunos não possuem animal, 4 alunos têm cachorro, 2 alunos têm coelho, 6 alunos têm gato e 1 aluno tem papagaio. Eu não contei aqui a quantidade de animais que apareceram. **[P-5, P-8 e P-9 fizeram um movimento com a cabeça indicando compreender a fala exposta.]** Até porque a quantidade de animais que aparece é 19 e nesta tabela é o total de alunos, que no caso são 20. Tudo bem, pessoal? Vocês conseguiram perceber isso? Quem fez este tipo de tabela?

77. **P-5:** *Ah, como é mesmo?*

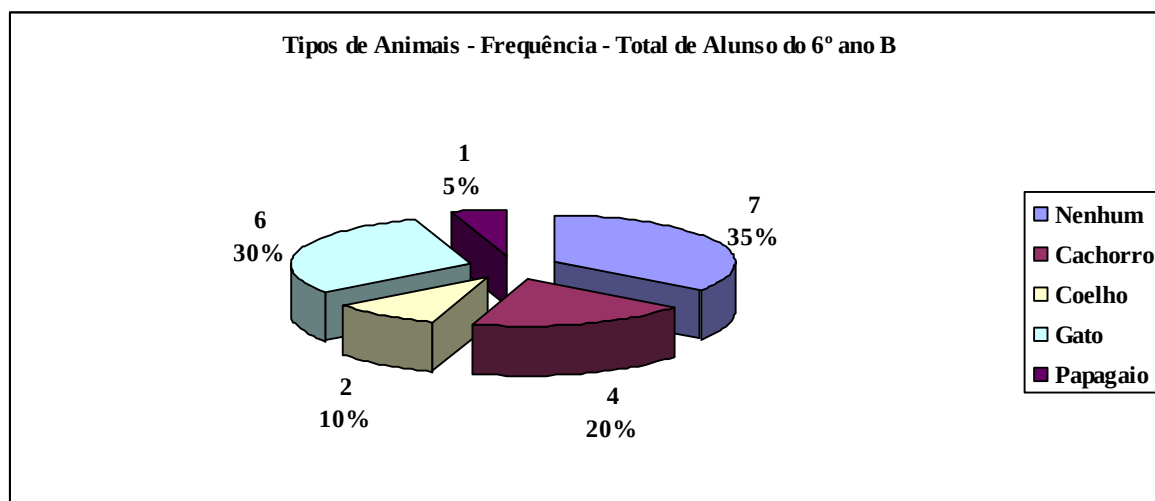
78. **Pesquisador/Participante:** Olha, aqui **[Referiu-se à tabela acima.]** está o número de alunos que possuem ou não animais e o tipo. Eu não contei aqui a quantidade de animais que os alunos do 6.º ano B possuem. Percebam que esta é uma situação onde a pessoa vai ter que relacionar, ao mesmo tempo, primeiro o tipo de animal que aparece e, depois, a sua quantidade. Alguém obteve esta tabela? **[P-2 e P-4, por meio de expressão facial, indicaram “Não.” e P-1 falou o exposto abaixo.]**

79. **P-1:** *Eu acho que a gente fez o de quantidade!*

80. **Pesquisador/Participante:** Alguém, por um acaso fez esse gráfico?



Nem, tampouco, esse de setor?



[Nenhuma participante indagou ter construído os gráficos apresentados.]

81. **P-4:** *De jeito nenhum!* [Risos entre as participantes.]

82. **Pesquisador/Participante:** Vamos, então, à tabela que mostra a quantidade de animais de estimação, ok! [Neste instante foi projetada a seguinte tabela.]

Animais	Frequência (Total de Alunos)
Cachorro	4
Coelho	3
Gato	11
Papagaio	1
TOTAL	19

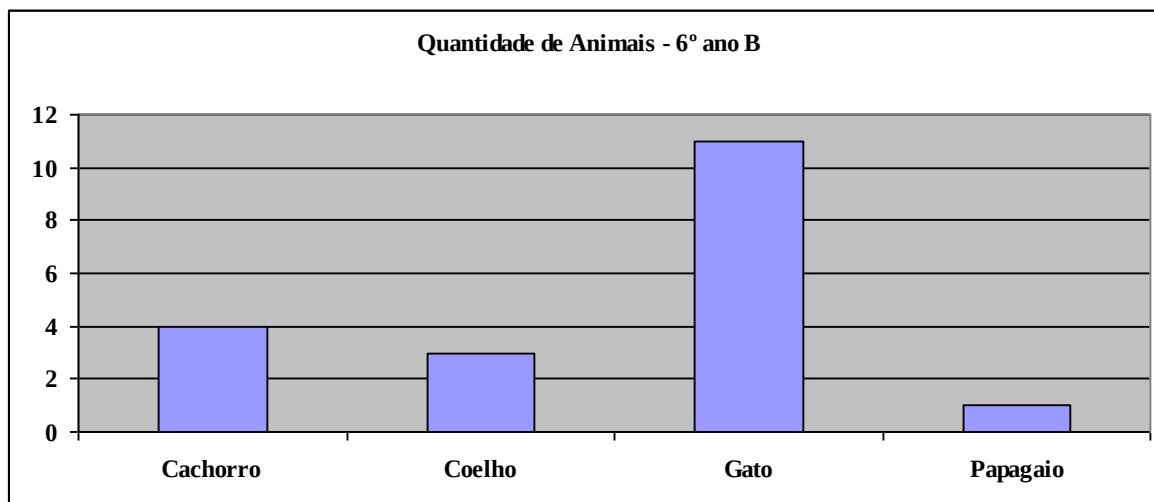
Então, quer dizer que, no 6.º ano B, entre seus alunos, havia um total de 4 cachorros, 3 coelhos, 11 gatos e 1 papagaio. Quem obteve esta tabela?

83. **P-8:** *Nós, só que colocamos o Nenhum!*

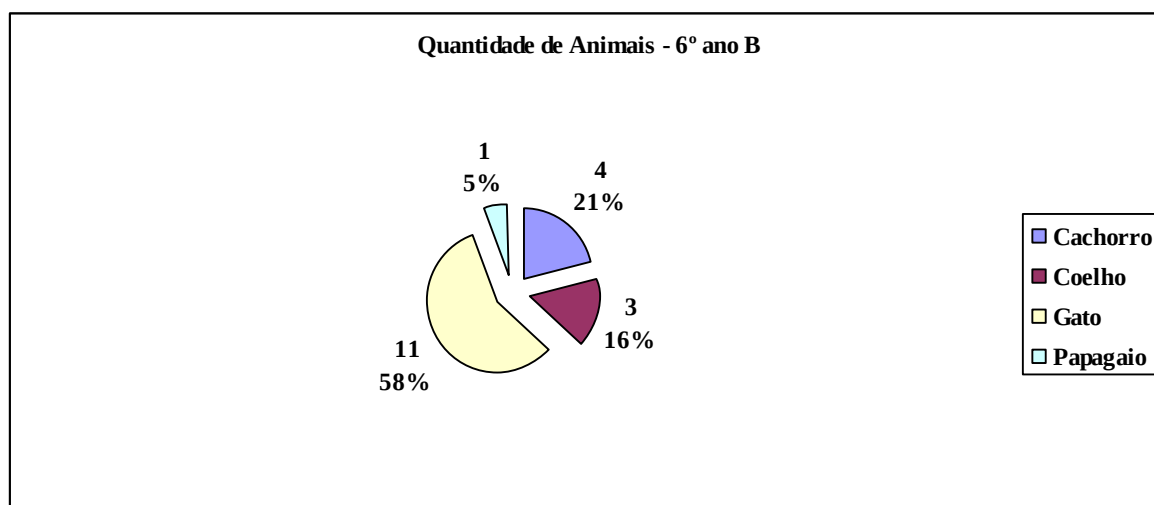
84. **Pesquisador/Participante**: Só que Nenhum não é animal! Vocês percebem esta diferença?
85. **P-4**: *A gente juntou tudo numa só! [Falou de modo ‘expansivo’, ou seja, exaltando a voz e fazendo um movimento de abertura com os braços.] Olha que bonito que ficou!*
86. **Pesquisador/Participante**: Vocês entenderam?
87. **P-8**: *Ah, agora sim!*
88. **Pesquisador/Participante**: A dupla da P-2 e P-7, como fizeram?
89. **P-2**: *Nós fizemos tudo junto! Nós colocamos a quantidade e o tipo de animal!*
90. **Pesquisador/Participante**: Ah, é! Representa lá na lousa pra gente ver!
91. **P-2**: *Ah não! A gente foi pegando como os alunos responderam, 1 gato, 2 gatos, a gente foi colocando.*
92. **Pesquisador/Participante**: **[Após ter visto o que a dupla elaborou no papel, indagou.]** Eu compreendi , vocês colocaram num mesmo ‘esquema’ toda esta informação!
93. **P-2**: *Sim!*
94. **Pesquisador/Participante**: Mas vocês conseguiram perceber como foi feito ali? **[Referiu-se às tabelas e gráficos projetados na lousa.]**
95. **P-2**: *Sim!*
96. **Pesquisador/Participante**: E vocês? **[Dirigiu-se ao trio, observando aquilo que fizeram.]**
97. **P-9**: Ah, a gente fez 2 tabelas!
98. **P-5**: *Como o gato deu uma variada, a gente puxou uma setinha, [Referiu-se ao fato de que, a variável Gato, de uma tabela para outra, variou sua quantidade. No entanto, o trio não se atentou que a variável Coelho também teve esta variação.] porque a gente sabia que não era uma tabela. Mas, assim, era uma forma de representar.*
99. **Pesquisador/Participante**: Não, vocês estão certas. Vocês organizaram um tipo de representação! Mas, pessoal, todas perceberam os dois tipos de representação? Uma mostrando os tipos de animais em relação ao total de alunos e a outra a quantidade de animais... Tudo bem?
100. **P-8**: *Aqui, pra ficar certo o nosso, eu teria que tirar o ‘Nenhum’ porque não é animal?*
101. **Pesquisador/Participante**: Isso! Dá pra perceber, pelo enunciado, que os alunos pesquisaram o tipo e, também, a quantidade. Então são duas informações, por isso, pra que fique ‘melhor’, há necessidade de 2 representações. Dúvidas sobre isso, pessoal, por favor?

102. **P-8:** *Não, já tiramos!* [Nenhuma participante se pronunciou.]

103. **Pesquisador/Participante:** Também se faz possível esta representação, na qual fica evidente que o que ganhou aí foi o gato! [Projetou o seguinte gráfico.]



Ou, se preferirem, esta também:



104. **P-2:** *Dá pra voltar naquela outra?* [Pedi para projetar novamente a tabela e os gráficos referentes ao tipo de animal do total de alunos do 6.º ano B.]

105. **Pesquisador/Participante:** Claro! [A dupla, P-2 e P-7, conferiram a tabela que fizeram, após a discussão, com a projetada.] Tudo bem? Pessoal, ficou compreendido o item B? O trio que não fez desta maneira compreendeu porque eu fiz assim?

106. **P-5:** *Sim!*

107. **Pesquisador/Participante:** A maneira que vocês organizaram está correta. Mas, ‘matematicamente’ falando, a maneira formal de representar é essa! É interessante, numa sala, haver espaço para este compartilhamento de ideia. E, será que as aulas não seriam mais produtivas se primeiro ele deixasse os alunos agir sobre e, depois, houvesse esse bate papo?

108. **P-8:** *Eu acho que assim teria mais ‘fixação’ do aluno. Porque ele vai ver onde errou pra poder melhorar!*

109. **P-2:** *Mas, daí, eu penso assim, tem que ter todo um trabalho em relação ao erro... porque pode ocorrer dos outros alunos desprezarem...*

110. **Pesquisador/Participante:** Com certeza!

111. **P-8:** *E isso acontece muito na parte deles, quando eles apontam o dedo pra quem errou!*

112. **P-2:** *Eles apontam o dedo, literalmente!*

113. **Pesquisador/Participante:** É o que eu sempre digo! Se o professor não souber o seu ‘papel’, a sua responsabilidade, e saber ‘sair’ desta situação, a coisa ‘pega fogo’!

114. **P-5:** *Nós aqui temos uma dúvida. Nós já tínhamos uma noção da tabela, do gráfico. Mas pra criança que nunca tenha visto, é possível fazer esta construção primeiro e depois o professor explicar, nessa troca?*

115. **Pesquisador/Participante:** Primeiro é indicado que ela faça a maneira dela, como eu deixei vocês fazerem!

116. **P-5:** *Mesmo que não tenha ainda este conhecimento!?*

117. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro! É interessante a sua colocação porque vários educadores matemáticos dizem que a aula de Matemática não deve começar com a definição... A aula de Matemática deve começar com a ação, a construção, a tentativa do sujeito em resolver um problema...

118. **P-9:** *Uma problematização...*

119. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo, uma problematização! Percebam que vão surgir numa sala de 30 alunos as mais diversas maneiras de representação, inclusive entre alguns gráficos e tabelas, concordam comigo? A partir do momento que estamos numa sala heterogênea, pode sim haver alunos que já sabem fazer tabelas. **[As participantes, através de expressão facial, concordaram com a afirmação.]** E, também, podem haver alunos que não sabem nem escrever direito e irão desenhar o animal, da maneira dele, e fazer tracinhos... e também é uma maneira de organizar. Só que, o papel do professor é, a partir da representação do aluno, auxiliá-lo a galgar um nível formalizado como a tabela ou o gráfico. Tudo bem, pessoal? **[Ninguém se manifestou, indicando terem acompanhado a fala exposta.]** Eu havia falado em nosso primeiro encontro que, um dos objetivos do nosso Grupo era permitir que vocês vivenciassem situações de ensino análogas que vocês terão que desenvolver com os seus alunos. Vocês acham que está sendo cumprido isso? **[P-2 e P-5 respondeu “Sim.”, e as demais sinalizaram concordar por meio de expressão facial.]** Conforme um documento do MEC, um dos graves erros, dos muitos da Formação Inicial de Professores, é este não isomorfismo, ou seja, equivalência. Pede-se que você faça assim, mas você mesmo não vivenciou isso no Ensino Superior, ou em qualquer outro lugar!

120. P-9: *Ontem eu lembrei muito de você, Pesquisador/Participante, porque na aula da T., a gente tava justamente falando isso, da fragmentação no ensino. Por exemplo, mesmo aqui no Ensino Superior não há interdisciplinaridade, porque os próprios professores do Departamento não conversam entre si. Se a gente nem vive isso aqui, como a gente vai saber fazer essa interdisciplinaridade quando chegar pra dar aula lá?*

121. Pesquisador/Participante: E isso é um problema a nível mundial. Sabe por quê? Eu vou tomar como exemplo a Licenciatura em Matemática, que foi o curso que eu fiz. Ali eu tive aula com Pedagogo, Engenheiro, Físico, Matemático, Educador Matemático, Artes Gráficas... e eu suponho que eles ‘nunca’ conversaram. E quando eu digo esse ‘nunca’ não é um nunca real, porque eles faziam as reuniões (conselhos) obrigatórios... agora sentar junto para discutir o que cada um abordou, como dar sequência, como estabelecer tal interdisciplinaridade nunca observei e vivenciei. Por exemplo, o que de Geometria poderia aproveitar em Álgebra, e assim por diante, eu nunca senti no curso. E, na Licenciatura eu não vivenciei situações isomorfas, raras poucas exceções.

122. P-9: *E outra coisa, uma teoria ‘conversar’ com a outra. Eu não sou construtivista, mas eu estou aqui porque eu acredito em muita... a parte do Piaget eu vou utilizar isso, independente do meu conceito histórico-crítico ou não. Apesar da minha postura, eu acredito nisso... Imagina se eu estivesse me formando como uma pessoa radical, extremista: “Eu sou isso aqui então o seu é falso!”. Eu acho que a gente tem que conhecer pra poder desenvolver isso! Por exemplo, a histórico-crítico não dá conta disso... das etapas do desenvolvimento... então, pra mim é importante... eu não vou negar isso! Isso que eu acho lamentável porque acontece no meio acadêmico, formam-se os grupinhos de interesse comum de cada professor e daí que eles não conversam ainda mais! Eu sinto até em algumas aulas que um quer acabar falando mal da teoria da outra, eu acho que não devia haver isso! Eu acho que devia conversar, porque, o que aconteceu... com as teorias que a gente teve cada um foi criando maneiras diferentes de ver diferente...*

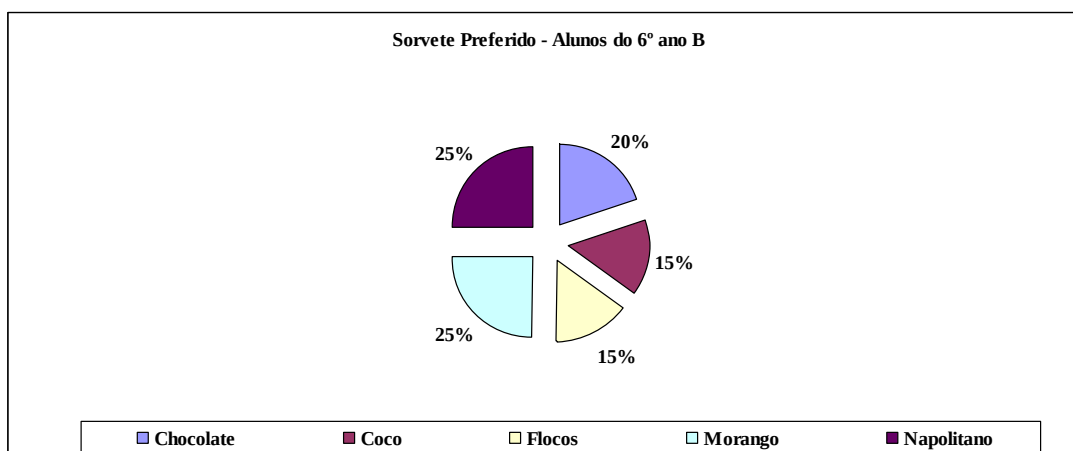
123. Pesquisador/Participante: Eu acho que devemos partir do seguinte pressuposto, a partir do momento que o ser humano é complexo, uma teoria, por mais bem fundamentada que seja, ela nunca vai dar conta de toda a complexidade desse sujeito! Na minha concepção você achar que apenas uma teoria dá conta de tudo é um absurdo! Vamos ao item C? [Referiu-se ao item da pesquisa “O gênero de filme preferido”.] Quem obteve esta tabela? [Foi projetada a tabela a seguir.]

Gênero (Filme)	Frequência
Ação	5
Comédia	6
Romance	4
Suspense	2
Terror	3
TOTAL	20

[Todas as participantes ergueram as mãos indicando ter elaborado a mesma tabela. No entanto, salientaram que a única ‘coisa’ que faltou foi o TOTAL.]

É interessante colocar este item ‘TOTAL’ pra quem for ler a tabela perceber, ‘rapidamente’, que havia 20 pessoas. Isso também é chamado de somatória. Vocês conhecem este símbolo? [Desenhou na lousa o símbolo representativo da somatória “ Σ ”.] Alguém que colocar algo sobre o item C? [Como ninguém se pronunciou deu-se continuidade.] E o

item D, sorvete preferido? Eu resolvi representar assim, olha! [Neste instante, projetou o seguinte gráfico.]



Alguém fez este setor circular? [As participantes indicaram não terem feito tal gráfico.]

124. **P-9:** *A gente até chegou a comentar... mas daí a gente acabou fazendo como fizemos os outros. [Ou seja, fizeram novamente uma representação por meio da tabela.]*

125. **Pesquisador/Participante:** Todos os grupos fizeram tabela? [Indicaram, por meio de expressão facial, que haviam feito uma tabela.] Então vamos conferir... [Entre si, as participantes conferiram se as frequências para cada variável estavam iguais, confirmando que haviam feito corretamente a tabela do tipo de sorvete preferido.] E vocês percebem se contarmos cada frequência nós vamos obter o total 20, que representa o número de alunos da pesquisa.

126. **P-8:** *É interessante que eu e a P-4 até contamos pra ver se tínhamos feito certo!*

127. **Pesquisador/Participante:** É interessante que o aluno coloque o total até pra ele ver se fez tudo certo! Querem fazer algum comentário, ou, tudo bem até aqui?

128. **P-9:** *Tudo ótimo!*

129. **Pesquisador/Participante:** E o último item, o 'Número do Calçado'... [Neste momento foi projetada a seguinte tabela.]

Número do Calçado	Frequência
n.º 26	2
n.º 28	6
n.º 30	5
n.º 32	?
n.º 34	3
TOTAL	20

O número 26 é usado por 2 crianças, o número 28 por 6, o número 30 por 5, o número 32 eu não sei, o número 34 por três... [Durante este último trecho da fala as participantes interromperam e indagaram.]

130. **P-8:** *Mas foi por 4! [Referiu-se à frequência que obteve em relação ao número 32.]*
131. **Pesquisador/Participante:** Percebam, pessoal, que isso que eu coloquei é uma pegadinha! Dá pra fazer isso com o aluno desde que saiba o TOTAL. Dá pra perceber quantos alunos usam o número 32? **[Todas as participantes falaram “Sim.”]** Como?
132. **P-5:** *É só somar tudo e tirar do Total!*
133. **Pesquisador/Participante:** Vejam que eu coloquei aqui uma estratégia didática sobre como problematizar algo que o aluno já sabe... ele sabe que a aluna Amanda usa o número tal, que a outra usa número tal... Mas, na hora de representar, ainda dá pra abordar uma outra situação problema.
134. **P-9:** *Legal!*
135. **Pesquisador/Participante:** Vamos dar continuidade à terceira questão: “3. Dentre alguns dos gráficos existentes (coluna, barra, circular e linha) quais são os indicados para a organização dos dados (itens A, B, C, D e E)? Há, entre estes tipos de gráficos, algum(s) que não é(são) apropriado(s) nesse caso?” Vamos começar com o trio?
136. **P-5:** *Nós achamos que o gráfico não apropriado é o de linha, porque... porque...*
137. **P-1:** *Porque ele mostra a variação...*
138. **P-9:** *Porque, por exemplo, se fosse só um sabor... mas como tem várias coisas iria ficar muito complexo pra representar num gráfico de linhas na nossa opinião. São vários sabores diferentes com vários valores diferentes...*
139. **P-5:** *Eu acho que não é só o fato de ser complexo, mas é incoerente porque mostra variação e não tem variação! [Simultaneamente realizou movimentos com os braços indicando ‘subidas’ e ‘descidas’ visando representar tal variação.]*
140. **P-9:** *Se ele tá com o objetivo que o gráfico teria acabaria ficando mais confuso...*
141. **P-5:** *Não ia representar o que é...*
142. **P-9:** *Ficaria mais fácil representar por meio de um gráfico circular, de barra...*
143. **Pesquisador/Participante:** Ok! E vocês, P-2 e P-7?
144. **P-7:** *Nós também colocamos que o gráfico de linha não era apropriado!*
145. **Pesquisador/Participante:** E a P-8 e a P-4?
146. **P-8:** *Também! Só que nós, o que nós estávamos pensando? [Olhou para P-4.] Tipo assim, de visualização... igual o que você colocou sobre a melhor visualização... e o gráfico de linha com aqueles pontinhos e... [Utilizando os braços imitou a ‘ligação’ entre os pontos produzindo segmentos de reta.] e nesse caso o gráfico de barras é o de melhor visualização.*

147. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo, pessoal! Construir um gráfico de linhas até dá, só que, não é coerente porque não há variação nas ‘variáveis’, cada valor é único e não há taxa de crescimento e decréscimo. Como, por exemplo, um gráfico de linha (com os pontos e os segmentos de reta) indicando que no mês de novembro o candidato estava ali, depois ele decaiu, subiu, ou ficou na mesma...

148. **P-9:** *Por exemplo, o sorvete, quanto eles estavam consumindo por semana, e na outra, e na outra...*

149. **Pesquisador/Participante:** Daí sim, perfeito! Vocês compreenderam o que a P-9 falou, pessoal? **[Todas, por meio de expressão facial, sinalizaram entender o exposto pela participante.]** E a respeito da última questão: “4. Os dados (itens A, B, C, D e E) podem ser organizados em uma única tabela? Em caso afirmativo, quantas linhas e quantas colunas seriam necessárias? Tente elaborar uma representação! Em caso negativo, justifique.”. **[Todas responderam, praticamente ao mesmo tempo, “Sim.”.]** Então, quantas linhas e colunas seriam necessárias para esta representação?

150. **P-9:** *Nós colocamos 21 linhas e 6 colunas!*

151. **P-7:** *Nós também!*

152. **P-8:** *Isso!*

153. **Pesquisador/Participante:** Então todo mundo chegou neste resultado! Ok! Vocês chegaram a fazer?

154. **P-9:** *Sim!*

155. **P-8:** *Fiz só o comecinho!*

156. **Pesquisador/Participante:** Eu também, aqui, fiz só o comecinho... **[Projetou a seguinte tabela.]**

Aluno	N.º Irmãos	Animal e Quantidade	Filme Preferido	Sorvete Preferido	N.º Calçado
Amanda	2	0	Romance	Chocolate	30
Antônio	0	1 gato	Comédia	Morango	32
Aurélio	2	2 gatos	Ação	Flocos	28
Beatriz	1	1 papagaio	Ação	Morango	28
Beto	2	0	Comédia	Chocolate	32
...	..	...	...	...	...
Sara	3	0	Romance	Napolitano	28

157. **P-9:** *Nós fizemos tudo... é por isso que demoramos...* **[Risos entre as participantes do trio – P-1, P-5 e P-9.]**

158. **Pesquisador/Participante:** Vocês fizeram deste jeito, pessoal? **[Apontando para o projetado na lousa.]** **[As participantes responderam “Sim.”.]** Eu também só fiz o começo e daí indiquei com os ‘3 pontinhos’ que a tabela continuou até a última aluna, a Sara. Ou seja, esta reticência significa que tem ‘coisas’ aqui, informações, mas eu resolvi já ‘partir’ pra Sara. Então ficariam 6 colunas e 21 linhas!

159. **P-4:** *Mas isso daí [Apontou a tabela projetada.] não precisava fazer, né!? Era só contar o número de alunos e as proposições e...*

160. **Pesquisador/Participante:** As proposições ou os itens?

161. **P-4:** *É, sim, os itens! E daí você conta 1, 2, 3, 4, 5 itens, mais a coluna dos alunos que dão 6 e os alunos e a linha pra colocar os itens, dando 21 linhas. Por isso eu nem fiz... [Risos.]*

162. **Pesquisador/Participante:** Isso P-4! Tá vendo, oh! Você já está já começando a ter mais autoconfiança.

163. **P-4:** *Eu ia testar, mas daí eu pensei e falei “Não precisa!”.* [Com tal fala, todas as participantes riram.]

164. **Pesquisador/Participante:** Alguém quer fazer mais algum comentário? Vocês acharam interessantes as questões colocadas? [Todas indicaram afirmativamente.] Vocês conseguiram ‘pensar sobre’ a importância e a necessidade dos gráficos e das tabelas para a organização e a descrição das informações? É muito mais fácil ver o que a sala prefere, por exemplo, de sorvete por meio de uma tabela do que como a professora de Matemática Sueli colocou na lousa cada aluno. Vocês concordam? [Todas, por meio de expresso facial, sinalizaram concordar.] Vamos, então, começar com uma leitura do assunto que é pro encontro de hoje! [Foi realizada, pelo Pesquisador/Participante, a leitura do seguinte texto.]

3.1. Retomando – Gráficos e Tabelas

No segundo encontro foi proposto um ‘pensar sobre’ alguns ‘meios’ para a organização dos dados obtidos na pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli aos seus alunos do 6.º ano B do Ensino Fundamental. Entre alguns ‘meios’ possíveis encontraram-se a utilização de tabelas. Diversas foram as definições expressas por vocês, participantes do Grupo de Estudo, acerca do gráfico e da tabela.

Em relação à tabela, as ‘definições’ abrangeram as seguintes ideias: 1 – Dados numéricos que possuem certa relação entre si; 2 – Números organizados em determinada ordem; 3 – Linhas e colunas que se cruzam; 4 – Representação gráfica que expressa os dados; 5 – Descrição e explicação ou ilustração de informações.

Quanto ao gráfico, obtiveram-se tais ‘definições’: 1 – Descrição dos dados em analogia com as Tabelas; 2 – Representação em porcentagem de alguma informação; 3 – Interpretação de informações visualizando a maior frequência; 4 – Formas de representar a Tabela; 5 – O desenho de uma ou mais informações; 6 – Quadro de informações, como uma Tabela, advindo de uma pesquisa.

A partir de tais saberes experienciais construídos por vocês acerca do que entendem por gráficos e tabelas, faz-se interessante um ‘movimento’ de análise-comparativa a partir de uma possível definição de gráfico e de tabela.

O **Gráfico** pode ser definido como um esquema visual representativo de dados. Já a **Tabela** pode ser definida como uma disposição em linhas e colunas de um grupo ordenado de números. Tal disposição é denominada **Matriz**.

[Após a leitura do 3.º parágrafo a respeito das definições do Gráfico, a P-5 pontuou o seguinte.]

165. **P-5:** *Eu acho que muitas vezes a gente relacionou assim, tem os dados, faz a tabela e depois faz o gráfico. Só que poderia pegar os dados e já fazer o gráfico!*

166. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro!

167. **P-5:** *Mas daí eu tive o pensamento, assim, de pegar os dados, fazer a tabela e depois o gráfico.*

168. **P-1:** *Só, que, com a tabela fica mais fácil a visualização pra...*

169. **P-5:** *É, fica mais fácil pra fazer o gráfico!*

170. **Pesquisador/Participante:** A tabela facilita na visualização da frequência para que depois, ao fazer o gráfico com os eixos que se cruzam, no caso de um gráfico de coluna, é só você colocar em um dos eixos o tal item/elemento e daí subir a coluna até àquela frequência.

171. **P-5:** *Só que, na sua exposição, você colocou direto o gráfico! [Referiu-se à projeção do item D – Sorvete Preferido.]*

172. **Pesquisador/Participante:** Sim, eu coloquei direto! Só que, mesmo colocando direto o gráfico eu tive que pensar antes, por exemplo, quantas vezes o sorvete de chocolate apareceu...

173. **P-5:** *Você pensou como tabela, mas não fez!*

174. **Pesquisador/Participante:** Não fiz, mas eu precisei esquematizar mentalmente como tabela. No entanto, como eu usei o programa da Microsoft Office Power Point, fui ‘obrigado’ a denotar a tabela para daí o gráfico ser elaborado. Mas, se eu tivesse feito o gráfico ‘no papel’, eu faria do modo que te falei! Vocês conseguem perceber isso, pessoal? **[Todas as participantes indicaram compreender tal relação.]** Há uma relação entre tabela e gráfico. Ambos fornecem as mesmas informações, só muda a sua representação, seu ‘desenho’.

[Dando continuidade, foi feita a leitura do texto restante. Após, cada participante, individualmente, realizou a leitura do quadro acerca da Matriz, exposto abaixo.]

A **Matriz** $m \times n$ (lê-se m por n , sendo m e n números inteiros maiores ou iguais a 1) é uma tabela retangular formada por $m.n$ números reais dispostos em m linhas e n colunas. Entre alguns tipos de matrizes, encontram-se:

a) **Matriz Quadrada:** recebe esse nome para $m = n$, ou seja, quando o número de linhas é igual ao número de colunas. Por exemplo, a matriz do tipo 2×2 expressa abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

b) **Matriz-Linha:** ocorre quando $m = 1$, ou seja, quando possui apenas 1 linha. Observe abaixo um exemplo de uma matriz-linha do tipo 1×4 :

$$[1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$$

c) **Matriz-Coluna:** nesse caso tem-se $n = 1$, ou seja, quando possui apenas 1 coluna. A matriz-coluna seguinte é do tipo 4×1 :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Curiosidade: Com o advento do computador e a crescente necessidade de se guardar muita informação, as matrizes adquiriram considerável importância. Por exemplo, o que vemos na tela de um computador é um

‘grande’ matriz no qual cada valor ‘guardado’ nas linhas e nas colunas da matriz representa um ponto colorido mostrado na tela (*pixel*). Quanto ‘maior’ o número de linhas e colunas ‘maior’ é a resolução e, portanto, melhor definida é a imagem.

[Após alguns minutos, iniciou-se a discussão acerca do texto lido.]

175. Pesquisador/Participante: Pessoal, como foi a abordagem no Ensino Médio da Matriz?

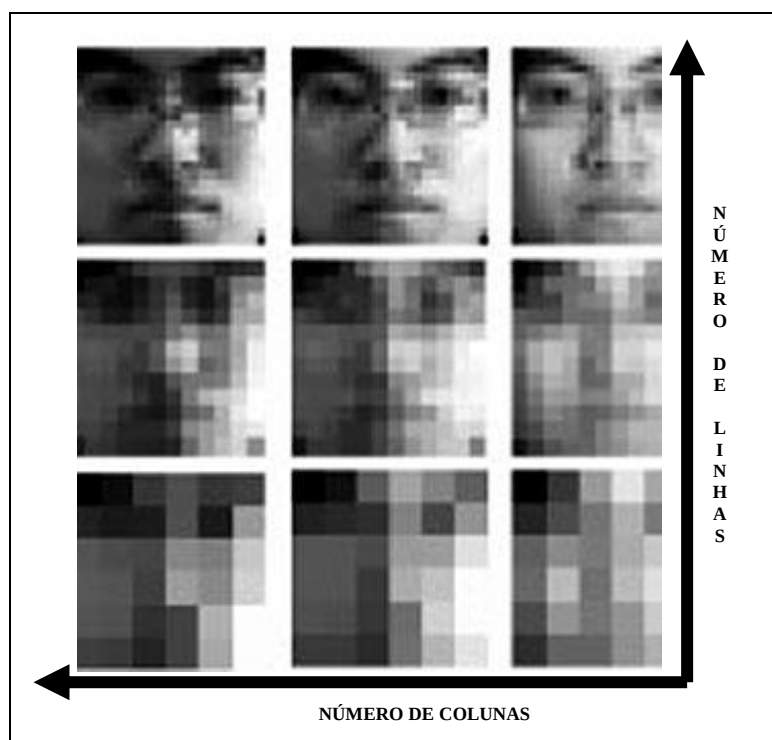
176. P-9: *Eu lembro que o professor explicou, deu uns exemplos mas não estabeleceu essa relação!*

177. Pesquisador/Participante: Os professores de Matemática de vocês em algum momento chegou a relacionar Matriz com Tabela?

178. P-9: *É isso que eu to falando! Não!* **[Fala compartilhada pelas demais participantes.]**

179. P-1: *Ah, eu fiquei pensando, assim, o que Matriz tem a ver com Gráfico?*

180. Pesquisador/Participante: Com gráfico não! Mas tem a ver com a tabela. A partir de uma Matriz você pode vir a fazer uma tabela e, a partir dessa você pode fazer um gráfico. Fazer um gráfico diretamente a partir de uma Matriz é um pouco complicado, embora seja possível. **[Durante a leitura do texto foi realizada uma conversa com as participantes visando a sanar possíveis dúvidas. Acerca da ‘Curiosidade’ denotada, foi projetada a seguinte representação mostrando a relação entre a resolução na tela do computador – constituída pelo número de linhas e de colunas de uma Matriz – e a qualidade da imagem.]**



181. Pesquisador/Participante: Vocês sabiam desta relação entre Matriz e a Resolução das filmadoras, máquinas fotográficas, tela do computador, etc.

182. P-9: Não! **[Resposta compartilhada pelas demais participantes.]** *Eu não me lembro disso ter sido passado pra gente!*

183. Pesquisador/Participante: Vocês acham que mostrar tal aplicação teria sido um modo de facilitar a aprendizagem deste conceito chamado Matriz? Talvez tal aprendizagem tivesse mais significado?

184. P-9: *Totalmente! Se os professores tivesse mostrado isso pra gente, no Ensino Médio, com certeza a gente saberia o porquê da importância de estar estudando isso. Porque, pelo que me lembro, eu não via muito sentido quando o professor apresentou este conteúdo, porque pra mim era apenas um monte de números colocados em ordem e que daí a gente fazia a adição entre as matrizes.*

185. Pesquisador/Participante: Ok! Pessoal, vamos pensar agora acerca das seguintes questões. **[Pesquisador/Participante disponibilizou 15 minutos para as participantes responderem as questões denotadas abaixo.]**

1. As definições sugeridas por vocês acerca dos gráficos e das tabelas são equivalentes com as denotadas há pouco? Ou se contradizem? Pense a respeito, justificando sua resposta.
2. No caso da pesquisa realizada pelos alunos da professora de Matemática Sueli, a tabela utilizada para representar o item C (Gênero de Filme Preferido) corresponderia a qual tipo de matriz? Como você a escreveria?
3. Para separar os filmes em gêneros (tipos) de tal modo a evidenciar a frequência de cada gênero preferido entre os alunos do 6.º ano B do Ensino Fundamental foi necessário realizar qual operação mental? Pense a respeito, justificando sua resposta.

[Em relação à primeira questão, todas as participantes concordaram não haver contradição entre definições apresentadas por elas e as sugeridas pelos Pesquisador/Participante. Apenas disseram que as suas definições necessitavam de alguma complementação. Sobre a segunda questão, observou-se o seguinte:]

186. Pesquisador/Participante: Como ficou a sua Matriz P-1?

187. P-1: *Eu fiz uma matriz coluna.*

188. Pesquisador/Participante: Como você a escreveu?

189. P-1: *Ficou 5 linhas e 1 colunas. Eu coloquei o 4, 6, 5, 3 e 2. [O Pesquisador/Participante denotou tal matriz coluna na lousa.]*

4
6
5
3
2

190. **Pesquisador/Participante:** E cada número aqui [Referiu-se à matriz escrita na lousa.] corresponde a um tipo de gênero de filme?

191. **P-1:** *Sim!*

192. **Pesquisador/Participante:** Ótimo!

[Quando questionada, P-5 e P-8 denotaram ter feito a mesma matriz. Já P-9 também fez uma matriz coluna, no entanto, mudou a ordem ao colocar os números referentes às frequências dos gêneros do filme de modo crescente. Tal matriz foi escrita na lousa pelo Pesquisador/Participante.]

2
3
4
5
6

[A P-7 não conseguir obter nenhuma matriz. Já P-2 e P-4 também não conseguiram, no entanto, utilizam como justificativa o fato de não saber onde colocar a coluna da tabela em que são registrados os gêneros de filmes preferidos. A P-4 ergueu a folha de resposta e mostrou-a ao Pesquisador/Participante dizendo que, embora tenha escrito os números constituintes da matriz, seja na matriz tipo linha ou tipo coluna, não soube o porquê disso. No intuito de auxiliar o entendimento das participantes P-2 e P-4, o Pesquisador/Participante fez o seguinte esquema na lousa. Em seguida falou algumas considerações.]

		COLUNAS	
		Frequência	
LINHAS	1. ^a	Ação	$a_{1 \times 1}$ 5
	2. ^a	Comédia	$a_{2 \times 1}$ 6
	3. ^a	Romance	$a_{3 \times 1}$ 4
	4. ^a	Suspense	$a_{4 \times 1}$ 2
	5. ^a	Terror	$a_{5 \times 1}$ 3

193. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, quando for pra transformar uma tabela em matriz é necessário omitir o nome das categorias (variáveis). Se retomarmos a definição de matriz veremos que ela é uma disposição em linhas e colunas de números ordenados. Ordenada no sentido de que, cada cruzamento de linha com coluna representa um tipo de informação. Por exemplo, o elemento $a_{1 \times 1}$ [Apontou para a representação feita na lousa.], este 1 representa a linha, que no caso é a primeira, e este 1 representa a coluna, que nesse caso é única. A frequência do filme de ação foi quanto? [As participantes, após olharem na tabela referente já construída, responderam “Cinco.”. Mediante tal resposta, o Pesquisador/Participante escreveu o número 5 como o primeiro elemento da matriz escrita na lousa e denota na representação acima.] A comédia ‘cruzado’ com a frequência é o elemento da segunda linha com a única coluna. [Enquanto disse isso escreveu o número 6, conforme acima. Do mesmo modo, o Pesquisador/Participante foi preenchendo o restante da matriz, chamando a atenção das participantes ao fato de que cada elemento

$a_{m \times n}$ indica o cruzamento de uma linha com uma linha, representando, cada um, uma informação. Também ressaltou que as matrizes obtidas pelas participantes P-1, P-4, P-8 e P-9 estavam corretas e que apresentaram os números em outra ordem simplesmente pelo fato de terem mudado a ordem das categorias (variáveis) dos tipos de filmes nas linhas.]

[Após tal explanação, o Pesquisador/Participante questionou cada uma das participantes se haviam compreendido. Todas disseram ter ‘atingido’ tal compreensão. Para finalizar, foi retomada a leitura acerca da definição de matriz, atentando ao fato de que, para saber a quantidade de elementos de uma matriz basta multiplicar o número de linhas pelo número de colunas. Tomando como exemplo a matriz representando o gênero de filme preferido, o Pesquisador/Participante escreveu na lousa o seguinte esquema.]

LINHA	COLUNA
m . n	
5 x 1 = 5	

194. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, e se eu tenho uma matriz da ordem 2×7 ? Quantos elementos tal matriz irá possuir? **[As participantes ficaram em silêncio.]** Lembrem que, o 2 representa o número de linhas e o 7 o número de colunas. Nós vimos no exemplo que a matriz coluna 5×1 tinha 5 elementos, sendo este 5 o produto de 5 linhas por 1 coluna. Então, quantos elementos terá uma matriz de ordem 2×7 ?

195. **P-9:** 14.

196. **Pesquisador/Participante:** Quando vocês estudaram matriz foram discutidas tais questões? Da possibilidade de relacioná-la com uma tabela? Deste produto das linhas pela colunas? De que cada elemento é o cruzamento de uma linha com uma coluna? **[Todas as participantes sinalizaram que tais questões não foram abordadas pelos seus antigos professores de Matemática.]** Deu pra perceber aqui, pessoal, que cada elemento é o cruzamento de uma linha com uma coluna? **[Neste instante apontou para a representação anterior escrita na lousa.]** **[Todas as participantes indicaram – por meio de expressão facial – compreender, e P-8 respondeu “Sim.”]** Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, quando vocês forem ministrar aulas, tal conteúdo deverá ser ensinado?

197. **P-2:** Não.

198. **Pesquisador/Participante:** Não! Correto. Só que, a ideia geral de ordenar os números vai, ou não?

199. **P-8:** Sim!

200. **Pesquisador/Participante:** Deu pra perceber, então, né! Na hora do aluno pensar sobre uma tabela... Vamos para a última questão?

201. **P-9:** Vamos!

202. **Pesquisador/Participante:** A terceira questão é muito interessante porque daqui nós vamos ‘pegar uma brecha’ para a teoria de Piaget nos próximos encontros. **[Após a leitura da 3.ª questão, o Pesquisador/Participante perguntou para as participantes o que haviam pensado. P-8 4 P-4 não obtiveram nenhuma resposta. Já P-2 disse o seguinte.]**

203. **P-9:** *Olha, eu não sei se eu entendi direito a questão, mas, para mim, seria a adição para o sujeito contar os frequência dos itens!*

204. **Pesquisador/Participante:** Para observar a frequência eu concordo com você, é a adição! Só que eu não estou perguntando a frequência, eu pergunto para separar os filmes... de tal modo, aí sim, a possibilidade de fazer a frequência. Conseguiu compreender?

205. **P-2:** *Não!*

206. **Pesquisador/Participante:** Eu pergunto assim, ó... qual é a operação mental que o aluno tem que já ter construído para poder separar os filmes em gêneros. Para que daí, depois, ele possa contar a frequência de cada tipo de filme.

207. **P-2:** *É aquele negócio de agrupamento...?*

208. **P-1:** *É o pensamento lógico?*

209. **Pesquisador/Participante:** Em Matemática sempre vamos precisar do pensamento lógico, mas não é esta a questão. E sobre o agrupamento, é mais ou menos por aí, na ideia de agrupar... Deixa eu ouvir as outras participantes. Alguém conseguiu?

210. **P-9:** *Então, tem uma coisa, eu não entendi o que você colocou na questão. Eu entendi que era a minha operação mental!*

211. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro, você realiza uma operação mental...

212. **P-9:** *Ou seja, como a criança pensaria...*

213. **Pesquisador/Participante:** A mesma operação que você fez você a criança também fez! Mas... eu estou perguntando qual é o nome desta operação mental.

214. **P-4:** *Correspondência biunívoca?*

215. **P-8:** *Mas você ainda lembra?* **[Risos entre todas as participantes.]** *A P-4 lembra umas coisas...*

216. **Pesquisador/Participante:** A correspondência biunívoca é importante, mas não é isso! **[Como ninguém conseguiu responder, o Pesquisador/Participante disse a todas que a tal operação mental era a classificação.]** Pessoal, vocês conseguiram compreender? **[As participantes, com exceção de P-9, sinalizaram ter compreendido que tal operação era a classificação. P-9 insistiu em questionar a 3.ª questão, de modo a defender que sua resposta estava correta, embora o Pesquisador/Participante tenha lido tal questão algumas vezes mudando a ‘estrutura’ da pergunta. Tal atitude de P-9 causou no Grupo certo desconforto. Ao perceber tal situação, o Pesquisador/Participante disse para P-9 que, realmente, a questão poderia ter causado dúvidas, e que isso acontece. Após alguns**

minutos de conversa com P-9 houve a concordância de que tal operação seria a classificação, no entanto, a participante não abandonou a ideia de que sua resposta inicial responderia a questão.]

Pessoal, vocês já fizeram um estudo profundo sobre a classificação? Vocês já ‘pararam’ pra pensar da importância da classificação para a construção da tabela? Ou de outros conceitos matemáticos? **[As participantes sinalizaram não terem pensando, ainda, a respeito.]** Porque, por exemplo, se a criança não souber classificar os tipos de filmes, vai ter sentido fazer uma tabela mostrando a frequência de cada tipo?

217. **P-2:** *Não! É o que acontece com os blocos com as crianças menores! Muitas vezes ela não consegue distinguir pela cor ou pela forma... Mas seria a mesma coisa, ela partir da classificação.*

218. **Pesquisador/Participante:** Isso! Porque a criança ainda não construiu a ideia de classe, para assim poder classificar observando um critério único. E vocês se lembram que, conjuntamente à construção dos conteúdos matemáticos eu vou fazer a ‘ponte’ com a teoria de Piaget? **[P-1, P-2, P-4, P-7 e P-8 sinalizaram, por meio de expressão facial, “Sim.”.]** Então, quer dizer que, para o sujeito conseguir compreender a tabela e o gráfico vocês terão que ver anteriormente se a criança consegue fazer essa operação simples, entre aspas, a classificação. Porque, senão, vocês irão perder tempo ao abordar tais conteúdos para os seus alunos. Tudo bem, pessoal? A partir do momento que nós fomos caminhando com o conteúdo da Matemática eu vou tentar fazer essas pontes com aquilo que Piaget investigou... pra gente poder ‘aplicar’ a teoria na prática... Sobre esta questão, P-9, tudo bem? **[A participante indicou ter compreendido. Novamente instaurou-se certo conflito com a fala de P-2.]**

219. **P-2:** *Na próxima você vai ter que por alternativa! [Risos entre P-2, P-4, P-7 e P-8. Para ‘contornar’ tal situação, visando que P-9 não se sentisse em desconforto, o Pesquisador/Participante salientou.]*

220. **Pesquisador/Participante:** Mas, da próxima vez, e isso é interessante, a maneira como eu fiz a pergunta não estava clara! Isso pode acontecer. E é por isso quando vamos aplicar algo pro aluno... aqui nós estamos em Grupo discutindo... mas com as crianças nós devemos tomar muito cuidado com a maneira do enunciado. Porque o enunciado pode atrapalhar, em muito, o pensamento do aluno!

221. **P-2:** *E também tem que, por você já saber a resposta, você acha que o enunciado já está ‘claro’!*

222. **Pesquisador/Participante:** Essa é uma outra dificuldade da pessoa que está elaborando o enunciado! É interessante pensar sobre este ponto. Dependendo das informações presentes no enunciado, pode facilitar resolver o problema ou dificultar.

223. **P-8:** *E daí desanima! Até pra própria matéria.*

224. **Pesquisador/Participante:** Isso! Podemos prosseguir? **[Como ninguém se manifestou, o Pesquisador/Participante solicitou a leitura, individual, do item 3.2, denotado abaixo.]**

3.2 Algumas considerações de uma pesquisa Estatística

Antes de prosseguir com as discussões a respeito dos gráficos e das tabelas, faz-se necessário delimitar

alguns ‘*termos*’ de uma pesquisa Estatística. No entanto, brevemente, torna-se interessante a análise acerca do significado de Estatística proposto por Costa Neto (2002):

Podemos considerar a Estatística como a ciência que se preocupa com a organização, descrição, análise e interpretação dos dados experimentais, visando a tomada de decisões.

A razão pela qual consideramos a Estatística uma ferramenta importante para a tomada de decisões está no fato de que ela não deve ser considerada como um fim em si própria, mas como um instrumento fornecedor de informações que subsidiarão, em consequência, a tomada de melhores decisões, baseadas em fatos e dados. A Estatística é, portanto, uma ciência meio, e não um fim. Daí ter utilidade, como ciência de apoio, em variados outros campos do conhecimento.

Essa conceituação é absolutamente geral e engloba o conceito usual do que seja a Estatística. Esse conceito usual, popular, logo relaciona a Estatística com tabelas e gráficos nos quais os dados experimentalmente obtidos são representados. Ouvimos, assim, falar em estatísticas do movimento da Bolsa de Valores, estatísticas da loteria esportiva, estatísticas da Saúde Pública, estatísticas do crescimento da população, etc. Entretanto, essa noção usual prende-se normalmente apenas à parte de organização e descrição dos dados observados. Há ainda todo um campo de atuação da Ciência Estatística que se refere à análise e interpretação desses dados que normalmente escapa à noção corrente.

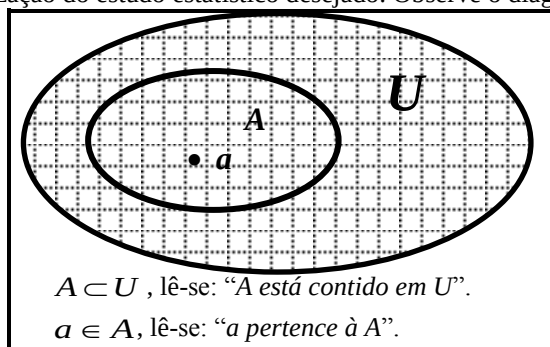
Evidentemente, tanto a parte de organização e descrição dos dados como aquela que diz respeito à sua análise e interpretação são importantes. É razoável também que, para poder-se fazer análise e interpretação dos dados observados, deva-se primeiramente proceder à sua organização e descrição. (p. 1)

Dentre os referidos ‘*termos*’ de uma pesquisa Estatística encontram-se:

a) **População** (*Universo*) e **Amostra**.

Uma *população* ou *universo* (U) é um conjunto de elementos com pelo menos uma característica comum. Tal característica comum delimita inequivocamente quais elementos pertencem à população e quais os que não pertencem.

Uma *amostra* (A) é um subconjunto da população, necessariamente finito, já que todos os elementos serão examinados para a realização do estudo estatístico desejado. Observe o diagrama abaixo:



b) **Indivíduo** ou **Objeto**.

Cada elemento que compõe uma amostra é um *indivíduo* ou *objeto*. Por exemplo, no diagrama acima, o elemento a é o *indivíduo* ou *objeto* que pertence e compõe a amostra A .

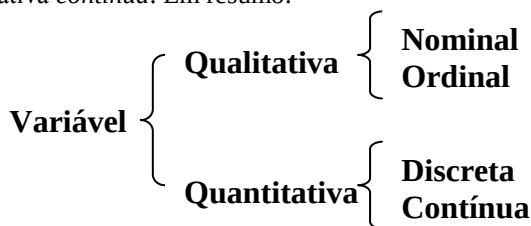
c) **Variável**.

Denomina-se *variável* a uma característica de interesse que está associada a cada *elemento* (ou *indivíduo*) do conjunto (da *amostra* ou da *população*) que está sendo examinado. Tal variável pode ser de 2 tipos:

c.1) **Variável Qualitativa** – este tipo de variável apresenta como possíveis valores uma qualidade (ou atributo) dos indivíduos/objetos pesquisados, tais como: esporte favorito, cor do cabelo, grau de escolaridade, etc. Além disso, podem ser classificadas como sendo *ordinais* ou *nominais*. As variáveis qualitativas **ordinais** apresentam uma ordem nos seus valores, por exemplo, grau de escolaridade. Já as variáveis qualitativas **nominais** não apresentam tal ordem nos seus valores, por exemplo, esporte favorito.

c.2) **Variável Quantitativa** – nesse tipo de variável os possíveis valores são números. As variáveis quantitativas podem ser **discretas**, quando se referem à contagem (números inteiros), ou **contínuas**, quando

tratam de medida (*números reais*). Por exemplo, “número de irmãos” é uma variável quantitativa *discreta*; já a “altura” é uma variável quantitativa *contínua*. Em resumo:



[Foi discutido o significado da Estatística proposto por Costa Neto (2002) e as participantes acharam interessante a definição de Estatística enquanto ciência meio. P-9 argumentou que, antes de cursar a disciplina ‘Estatística Aplicada na Educação’ na graduação, acreditava que a Estatística tratasse apenas de gráficos e tabelas. Desse modo, percebeu que o proposto por Costa Neto (2002) possuía veracidade acerca do entendimento advindo do senso comum sobre o que é Estatística. Em relação à discussão dos ‘termos’ de uma pesquisa Estatística pontuou-se o denotado abaixo.]

225. **Pesquisador/Participante**: O que vocês entenderam por população ou universo?

226. **P-4**: *Eu acho que é o todo...*

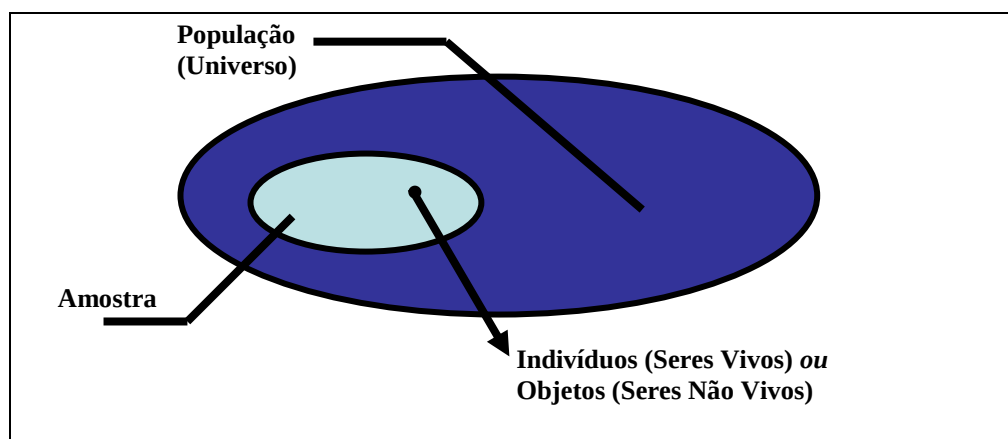
227. **Pesquisador/Participante**: Em que sentido é este todo?

228. **P-4**: *Ah... toda a população de uma determinada região, por exemplo.*

229. **Pesquisador/Participante**: Isso! Vejam que ‘todo’ não é suficiente... tem que haver um critério no qual todos compartilhem, que seja comum. E isso é uma população ou universo. Por exemplo, todos os habitantes da América do Sul possuem em comum habitarem a região do planeta denominada América do Sul... Todos os habitantes de Bauru, critério comum... residirem numa mesma cidade. Sobre a população todo mundo entendeu? [As participantes responderam “Sim.”.] E a amostra?

230. **P-9**: *É uma parte, do subconjunto...*

231. **Pesquisador/Participante**: É uma parte, um subconjunto desta... [As participantes completaram com a palavra **população**. Neste momento o Pesquisador/Participante projetou o seguinte diagrama.]



A elipse azul escura representa a população. Contida nela está a elipse azul clara que representa a amostra, ou seja, uma parte da população. Tal amostra é composta por indivíduos ou objetos. **[Quando questionadas sobre o entendimento das notações “ $A \subset U$ ” e “ $a \in A$ ” as participantes disseram ter compreendido. Para finalizar, foi feita a análise da variável.]** Agora eu quero que alguém me explique o que é uma variável, um dos termos da pesquisa Estatística. P-1, o que você entendeu o que é essa variável?

232. **P-1:** *Eu entendi assim, por exemplo, dentro daquela amostra vai ter determinadas características... daí dentro da... essas características vai ter cada um que gosta... seria mais ou menos uma variável... daí tem a qualitativa e a quantitativa. A qualitativa poderia ser a própria característica e a quantitativa quantas pessoas, o número...*

233. **Pesquisador/Participante:** Sobre a quantitativa e qualitativa é mais ou menos isso... Mas vamos nos atentar primeiro sobre a variável.

234. **P-9:** *É uma característica de interesse comum dentro da amostra. Por exemplo, os gêneros de filmes preferidos do pessoal do 4.º ano...*

235. **Pesquisador/Participante:** Todo mundo consegue perceber? Por exemplo, ação, comédia, romance, suspense e terror são variáveis. **[Todas as participantes indicaram ter compreendido por meio de expressão facial.]**

236. **P-1:** *São variáveis qualitativas...*

237. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo, P-1! Romance, Ação, Suspense são variáveis qualitativas porque não se referem à quantidades e sim à qualidades. E são do tipo nominal ou ordinal?

238. **P-9:** *Nominal.*

239. **Pesquisador/Participante:** Por quê?

240. **P-9:** *Porque ordinal tem a ver com ordem, grau que cada um tem, por exemplo, Ensino Superior, Ensino Fundamental, 1.º grau, 2.º grau, 3.º grau [Enquanto falava realizou movimentos com o braço direito indicando uma ‘subida’.] é uma coisa ordinal. Agora nominal não, só nomeia o que é!*

241. **Pesquisador/Participante:** Vocês compreenderam esta diferença? Quando eu tenho um critério qualitativo nominal não importa a ordem da colocação, agora, se for qualitativo ordinal daí você tem que observar uma ordem. Por exemplo, quando vai investigar o nível de escolaridade de uma amostra serão observadas as seguintes variáveis: analfabeto, Ensino Fundamental incompleto, Ensino Fundamental completo, Ensino Médio incompleto, Ensino Médio completo, Ensino Superior incompleto, Ensino Superior completo, Pós-Graduação, Mestrado, Doutorado. Existe uma ordenação desta variável qualitativa. Tudo bem, pessoal? **[Ninguém se manifestou indicando tal compreensão.]** E a variável quantitativa? Qual a diferença com a qualitativa? **[P-1, P-5 e P-9 responderam “São números.”]** Como assim, “são números”? Expliquem melhor.

242. **P-9:** *Agora são números!*

243. **Pesquisador/Participante:** Você quis dizer que agora as variáveis são representadas por números? [P-9 sinalizou “Sim.” e as demais participantes compartilharam tal ideia.] E, como mostrado no diagrama, a variável quantitativa se divide em duas, na discreta e na contínua. Quando ela é discreta?

244. **P-8:** *Quando ela é um número inteiro. E contínua é quando ela é dividida. [Como nenhuma outra participante respondeu o Pesquisador/Participante denotou o exposto abaixo.]*

245. **Pesquisador/Participante:** Então a quantitativa contínua é quando provém de um intervalo de medida, por exemplo? [Todas as participantes responderam “Sim.”] E a quantitativa discreta advém de uma contagem? [Ninguém respondeu.] Por exemplo, naquele exemplo da professora de Matemática Sueli... [Neste instante P-9 interrompeu.]

246. **P-9:** *Mas não só de contagem, e aquele lá do número do calçado?*

247. **Pesquisador/Participante:** Vocês acham que o número do calçado é uma variável discreta?

248. **P-9:** *Isso, discreta... É por isso que eu estou falando, já que ele está falando sobre contagem...*

249. **P-2:** *Mas o número do sapato não é uma contagem...*

250. **Pesquisador/Participante:** Mas não teve que contar quantas unidades ‘cabiam’ no ‘sapato’ para poder determinar o número 28, o número 30

251. **P-2:** *É um tipo de sequência...*

252. **Pesquisador/Participante:** Sim! Mas vocês conseguem compreender que foi um tipo de contagem?

253. **P-9:** *Sim!* [Resposta compartilhada pelas demais participantes.]

251. **Pesquisador/Participante:** Percebam que o número do sapato corresponde a um número inteiro? [Todas as participantes responderam “Sim.”] Agora, se eu pego intervalos de tamanhos, de 0 a 15 cm, de 15 a 25 cm e vejo quantas pessoas estão em cada intervalo... daí esta variável é quantitativa contínua. Tudo bem, pessoal? Deu pra perceber a diferença? [Todas as participantes, através de expressão facial, indicaram ter compreendido a diferença entre as variáveis quantitativas discreta e contínua.] Estes termos que estamos discutindo são necessários para que possamos, em nossos próximos Grupos de Estudo, aprofundarmos os conceitos referentes à Estatística.

[Devido ao tempo já excedido, foi solicitado que cada participante resolvesse os problemas referentes a tal tópico – termos de uma pesquisa Estatística. No entanto, antes do encerramento, cada participante escreveu o ‘Momento de Síntese’, denotando o que haviam compreendido do presente encontro.]

APÊNDICE H – TRANSCRIÇÃO DO 4.º ENCONTRO

Data: 22/03/2012

Tempo de Duração: 3 horas e 20 minutos.

[No início do encontro estavam presentes P-2, P-5, P-7 e P-8. Foi solicitado que cada uma fizesse a leitura da síntese do encontro anterior, visando a retomada dos assuntos tratados, bem como, ressaltar alguns pontos julgados oportunos. A P-5 começou a leitura.]

1. **P-5:** *Esse terceiro encontro foi muito produtivo, aprendemos sobre gráficos e tabelas e iniciamos estudos à pesquisa estatística. Além de aprendermos sobre os conceitos, também aprendemos como ensinar tais conceitos.*

2. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-2, leia por favor!

3. **P-2:** *Discussão sobre a construção do conceito de tabela e gráfico, remetendo a questão através do cruzamento das informações contidas nas linhas e colunas compreender matriz. Introdução sobre definição e nomenclaturas sobre pesquisas estatísticas. Considerei fantástica a possibilidade de denominar a operação mental necessária para conseguir construir uma tabela, ou seja, a classificação.*

4. **Pesquisador/Participante:** Eu enviei pra vocês como se dá a construção psicológica da classificação. A P-2 e a P-7 conseguiram ler antes do Grupo e vocês perceberam o quanto é complexo?

5. **P-2:** *Muito!*

6. **Pesquisador/Participante:** Não é! O adulto, por já ter construído aquilo “naturalmente”, entre aspas, nem percebe. Daí geralmente vem aquela postura rígida quando a criança erra mediante uma classificação: “Mas você não tá vendo, isso daqui é tão fácil!”. É importante compreender que não basta a criança apenas ver, mas iremos chegar até lá. P-7, por favor, fale a sua síntese.

7. **P-7:** *Neste terceiro encontro foram abordadas questões que eu não tenho nenhum conhecimento, então fiquei um pouco perdida nos pensamentos e reflexões, mas a partir de então eu posso refletir e realmente assimilar esses conteúdos. Eu também pude perceber que as coisas não tem uma única maneira de se fazer, existe várias possibilidades, e nessa dificuldade eu acabo ficando presa em uma possibilidade só.*

8. **Pesquisador/Participante:** Esta sua fala final eu achei muito interessante! Porque a possibilidade de uma coisa não ser apenas de uma maneira é uma das características de um pensamento formal. Porque, quando você vai e volta na sua ideia e você não fica preso a sua estrutura de pensamento já construída, você consegue ‘ultrapassá-la’ melhorando-a. E isso é interessante... E, quando você toma consciência das ações ou das operações é devido a esta capacidade de reversibilidade total. Nós iremos discuti-la quando tratarmos do pensamento formal ou hipotético dedutivo denominado por Piaget como Grupo das 4 Transformações, ou o INRC (Identidade, Negação, Recíproca e Correlativa). P-8, leia pra gente, por favor!

9. **P-8:** *Neste terceiro encontro discutirmos a realização de tabelas e gráficos, dentro da visão do aluno da 6.ª série – analisando as várias possibilidades de realização para maior entendimento desse aluno, e uma visão geral de futuro professor.*

10. **Pesquisador/Participante:** E, é interessante, e eu acho que vocês também estão achando que, uma coisa é estudar a teoria, e este estudo é válido com certeza. A outra coisa é, concomitante a este estudo da teoria, você poder visualizar possibilidades de prática... eu acho que daí fica mais interessante, não fica?

11. **P-8:** *Isso que eu acho, que eu tô achando legal nossa discussão no Grupo. Porque o que falta é isso, a gente ter prática... porque a gente tem muita teoria... aí, na hora... mesmo... você dá possibilidade de enxergar, de ter esse ‘clique’... e você tendo conhecimento, na hora de apresentar você vai lembrar de como apresentar aquilo, das várias maneiras de como é discutido o assunto!*

12. **Pesquisador/Participante:** Legal! E esse é um dos objetivos do nosso Grupo de Estudo.

13. **P:** *Ah, então está ótimo!*

14. **Pesquisador/Participante:** Havia ficado para analisarmos hoje 4 questões referentes aos termos de uma pesquisa Estatística. Deu pra resolver os problemas em casa? **[Como P-8 não havia conseguido resolver em casa por falta de tempo, foram disponibilizados 15 minutos para as participantes retomarem ou realizarem tais situações problemas. Durante este tempo, observou-se várias trocas de ideias entre as participantes presentes. Abaixo denota-se as referidas questões.]**

1. No caso da pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli aos seus alunos, os itens (A, B, C, D e E) podem ser classificados como variáveis? Em resposta afirmativa, tente distribuí-los no quadro abaixo.			
VARIÁVEIS			
QUALITATIVA		QUANTITATIVA	
Nominal	Ordinal	Discreta	Contínua
Em caso negativo, justifique a sua resposta.			
2. É correto afirmar que os alunos do 6.º ano B do Ensino Fundamental que realizaram a pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli representavam uma amostra? Nesse caso, qual seria a população? E a aluna Amanda, qual seria o seu ‘papel’?			
3. Existe alguma diferença entre <i>Indivíduo</i> ou <i>Objeto</i> referente aos ‘termos’ de uma pesquisa Estatística? Em caso afirmativo, dê um exemplo. Em caso negativo, justifique.			
4. A abordagem destes ‘termos’ da pesquisa Estatística pode ser realizada para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental? Caso sim, quais critérios devem ser ‘levados em consideração’ no momento da elaboração da aula (ou sequência de ensino)?			

[Neste intervalo de tempo, P-1 chegou. Deste modo, foi-lhe solicitado que realizasse a leitura de sua síntese, antes da discussão das respostas.]

15. **P-1:** *Foi possível concluir qual a importância do uso de gráficos e tabelas para o tratamento da informação e assim partir para conteúdos mais complexos, como matriz e estatística.*

16. **Pesquisador/Participante:** Então você compreendeu isso do encontro anterior! Ok! Agora, pessoal, vamos às questões. **[Em relação à primeira questão, as participantes concordaram que os itens (A, B, C, D e E) são variáveis. Todas colocaram o item A (número de irmãos) como sendo uma variável quantitativa discreta. No entanto, para o item B (quantidade e número de animais) todas as participantes também a classificaram como quantitativa discreta. Neste momento, houve a necessidade de intervenção do Pesquisador/Participante.]**

17. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, aí tem um problema... **[As participantes sinalizaram ‘certa’ surpresa.]** As variáveis do item B são o cachorro, coelho, gato e papagaio... e são representadas por nomes ‘qualitativos’ e não quantitativos...

18. **P-2 e P-7:** *Mas a gente colocou a quantidade na quantitativa discreta e o tipo de animal na qualitativa nominal.* **[Referiram-se ao fato de que, durante a representação de tal variável foi necessária a construção de duas tabelas, uma para denotar a quantidade de animais que os alunos do 6.º ano B possuíam e a outra para denotar o número de alunos que tinham cada um dos tipos de animais ou nenhum.]**

19. **Pesquisador/Participante:** Interessante a colocação de vocês! Mas, mesmo assim, no momento de classificar tal variável só podemos considerá-la como qualitativa nominal. **[Todas as participantes apagaram a resposta colocada no quadro acima, consertando-a.]** Por que será? **[Como ninguém respondeu, o Pesquisador/Participante denotou.]** Eu acho que até consigo compreender porque na quantidade de animais vocês colocaram na variável quantitativa discreta, pois, foi pelo fato de denotar a quantidade de animais. Foi mais ou menos isso? **[Todas as participantes responderam “Sim.”]**

20. **P-2:** *Tem que ser a nominal porque só o número sozinho não seria representativo?*

21. **Pesquisador/Participante:** Isso! Ou seja, a variável é aquilo que vai modificando no momento da pessoa pesquisar. Neste caso, o que foi mudando não foi o valor numérico em si, mas o tipo de animal: o cachorro, o gato, o papagaio e o coelho. **[Para auxiliar tal discussão, o Pesquisador/Participante projetou novamente as duas tabelas referentes ao item B, já denotadas no encontro anterior. Durante tal projeção, estabeleceu-se uma conversa com as participantes ressaltando que, de uma tabela para a outra na 1.ª coluna o que variou foi o nome dos animais, por isso a classificação enquanto uma variável qualitativa. Visando com que as participantes compreendessem o porquê de tais nomes (qualitativa ou quantitativa) o Pesquisador/Participante expôs o seguinte.]** É qualitativa quando se refere a nomes (qualidades), podendo ser nominal quando estes nomes não estão em ordem e ordinal quando estes nomes, estas qualidades precisam de uma ordem para ‘aparecer’. Por exemplo, nível de escolaridade, Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio, ... há uma ordem das pessoas ‘passarem’ por estas diferentes ‘qualidades’ de formação. Tudo bem, pessoal? Deu pra compreender?

22. **P-8:** *Sim!* **[Resposta compartilhada pelas demais participantes.]**

[Em relação aos itens C (filme preferido) e D (sorvete preferido) todas as participantes classificaram corretamente como sendo uma variável qualitativa nominal. Já, no item E (número do calçado) observou-se certa dúvida entre as participantes.]

23. **P-8:** *Eu coloquei o número do calçado no quantitativo discreto!*

24. **Pesquisador/Participante:** Quem mais colocou? [Levantaram a mão as participantes P-1 e P-2. Quando questionada, P-7 respondeu que havia colocado na quantitativa contínua por se referir a uma medida, mas, a partir da discussão com as demais mudou a resposta. Neste sentido, o Pesquisador/Participante a questionou.] Você mudou sua resposta?

25. **P-7:** Sim!

26. **Pesquisador/Participante:** Mas você mudou sua resposta porque você entendeu ou ainda está em dúvida?

27. **P-2:** Então, a gente está em dúvida! [Resposta compartilhada com P-5.]

28. **Pesquisador/Participante:** Qual é a dúvida de vocês?

29. **P-5:** Inicialmente a gente pensa que vai tudo para o discreto, pelo fato de ser número, eu não sei. Mas daí a gente fica pensando: “Ele não fala de uma quantidade!”, ele não está expressando uma quantidade... E, pra isso, foi como a P-7 falou, uma medida.

30. **Pesquisador/Participante:** Se nós formos pensar num valor único, inteiro, é discreto, já que é um número sem ‘intervalo’. Então, por exemplo, tantos alunos calçam o número 26, ou seja, um valor unitário de calçado. O número 28, quantos calçam? Agora, se a professora fosse medir o comprimento do pé de cada aluno e depois colocasse tais frequências em intervalos de medidas dos referidos comprimentos, daí sim seria uma variável quantitativa contínua. Por exemplo, 20 alunos medem entre 20 a 25 cm... Tudo bem, P-7. [A referida participante, por meio de gesto facial, indicou ter compreendido.] A quantitativa contínua, pessoal, é aquela variável que faz referência a um número que não é inteiro, e que é obtido por meio de uma ação de ‘medir’ e não de contar. Ou seja, que ‘pega’ um intervalo de medida. Na Matemática, por exemplo, discutem-se os assuntos considerando estes dois tipos de quantidades, a discreta e a contínua. Cada uma vai depender do assunto que está sendo abordado. A contínua é abordada em assuntos referentes à medida, ou seja, à topologia ou a geometria... Deu, pessoal, pra acompanhar esse meu raciocínio? [Todas as participantes sinalizaram tal ‘acompanhamento’.]

31. **P-5:** Então o que diferencia as duas é o intervalo?

32. **Pesquisador/Participante:** Isso! Porque as duas são números, só que a diferença está em que, a discreta é obtida por meio da contagem de um número inteiro; já na contínua advém de uma medida expressa em um intervalo. [Como não houve mais nenhum questionamento, iniciou-se a leitura da 2.^a questão por P-2. Em seguida, e mesma denotou.]

33. **P-2:** Então, a gente até chegou a discutir... Nós entendemos assim, poderia ser uma amostra se fosse considerado todos os alunos do Ensino Fundamental, porque se todos os alunos fossem só da sala, se considerasse só a sala, daí seria a população, e não a amostra.

34. **Pesquisador/Participante:** E vocês, também tiveram este mesmo pensamento? [P-1 disse em tom baixo: “Eu coloquei amostra.”] Então você, P-1, considerou como sendo uma amostra?

35. **P-1:** *Sim, uma amostra.*
36. **Pesquisador/Participante:** Então, neste caso, qual seria a população?
37. **P-1:** *Seria o... Ensino Fundamental... dos 6^{os} anos.*
38. **Pesquisador/Participante:** Então a população seria todos os 6^{os} anos daquela escola?
39. **P-1:** *É!*
40. **Pesquisador/Participante:** Alguém colocou a mesma coisa que P-1?
41. **P-7:** *Eu coloquei, só que considerando a escola toda. E daí eu fiquei pensando se seriam todos os alunos da sala que fizeram a pesquisa...*
42. **P-2:** *É, porque daí, caso tivessem faltado alunos daquela sala, seria uma amostra em relação a população do 6.º ano B.*
43. **Pesquisador/Participante:** Vamos supor que tal sala tivesse 35 alunos. Àqueles 20 alunos que fizeram a pesquisa seria uma amostra da população da sala do 6.º ano B. Agora, supondo que pegaram todos os alunos do 6.º ano B, essa seria a amostra! E a população pode variar, ou seja, pode ser considerada todos os 6^{os} anos da escola ou a escola toda. Então quer dizer que este ‘termo’ não é fixo. Dá pra entender, pessoal? **[Todas as participantes indicaram ter realizado tal compreensão.]** Você sempre deve tomar em consideração qual é o conjunto total que está considerando e desse retirar uma parte, ou seja, a amostra. Podemos prosseguir? Então quer dizer que, se a justificativa for coerente, levando em consideração o que acabei de falar, não há resposta errada. Agora, e a aluna Amanda? Vamos supor que o 6.º ano B é a amostra, a escola ou os demais alunos dos 6^{os} anos a população, a aluna Amanda que pertence ao 6.º ano B, ela possui qual papel? **[Todas responderam “É o indivíduo.”]** Ficou compreendido, pessoal? É interessante sabermos bem tais termos pois, no momento de estudar os assuntos mais complicados da Estatística eles aparecerão. **[Dando continuidade a P-1 leu a 3.ª questão e, em seguida, respondeu]**
44. **P-1:** *Eu acho que tem diferença entre o indivíduo e o objeto.*
45. **Pesquisador/Participante:** Qual?
46. **P-1:** *Porque o objeto é o que vai ser trabalhado. O indivíduo é o meio...*
47. **Pesquisador/Participante:** Então essa é a sua resposta?
48. **P-1:** *É, porque o indivíduo vai ajudar ele a compreender esse objeto. É... vou dar um exemplo, ela usou os alunos pra responder essas perguntas [Ela refere-se à professora de Matemática Sueli que solicitou aos alunos a responderem os itens da pesquisa.] O objeto deles seriam as perguntas, no caso. [Referiu-se aos itens A, B, C, D e E.]*
49. **Pesquisador/Participante:** Entendi o que você falou! Ok! E você, P-5, o que colocou?

50. **P-5:** *Então, nós conversamos juntas. [Apontou para P-2, P-7 e P-8.] O objeto seria... um objeto mesmo, uma coisa a ser pesquisada. E... indivíduos... pessoas. Ou seja, tem essa diferença de um ser vivo e de um ser não vivo. Os dois se referem a...*
51. **P-2:** *A elementos de uma...*
53. **P-5:** *Isso, aos elementos de uma amostra! E nisto eles seriam iguais. A única diferença seria entre vivos e não vivos.*
54. **Pesquisador/Participante:** *Então as demais concordam com a P-2 e P-5? [P-7 e P-8 concordaram, respondendo “Sim.”] P-1 o correto é o que P-5 falou. Deu pra entender?*
55. **P-1:** *Sim!*
56. **Pesquisador/Participante:** *Eu entendi a sua resposta, possui lógica. Só que, neste caso, tanto indivíduo quanto o objeto são os elementos da amostra. A diferença é que a ‘coisa’ pesquisada pode ter vida ou não. Por exemplo, no caso da pesquisa o sorvete era o objeto, já o tipo de animal era indivíduo, já que se refere a elementos vivos. Porque indivíduos não precisam ser apenas seres humanos. Tudo bem? P-5 você já havia pensado nisso?*
57. **P-5:** *Eu acho que só agora eu pensei! Na hora eu pensei mais em pessoas mesmos. Mas é ser vivo!*
58. **Pesquisador/Participante:** *Vocês já haviam pensado a respeito destes assuntos?*
59. **P-1:** *Não. E nós nos questionamos bastante sobre como abordar com as crianças estes conceitos ‘técnicos’.*
60. **Pesquisador/Participante:** *Interessante! Então vamos à 4.^a questão. Leia pra gente P-8 tal questão. [Após a leitura, P-8 respondeu.]*
61. **P-8:** *Nós colocamos que sim! [Nós pelo fato de tal pergunta ter sido pensada por P-2, P-5, P-7 e P-8] Do mesmo jeito que discutimos aqui, em quantitativa, qualitativa... agora que entendemos melhor seria mais fácil explicar pro aluno. Mas agora a gente estava discutindo sobre os termos, se já introduz os termos estatísticos, né!? Aí a discussão foi “Será que eles entenderiam os nomes?”, ou, como a gente iria explicar sem falar o nome! Então nós ficamos nessa discussão!*
62. **Pesquisador/Participante:** *Ok! O que você acha, P-1?*
63. **P-1:** *Então, pela experiência que eu tenho numa escola que eu fiz estágio eles usavam os termos... Eles faziam toda a explicação mas usavam os termos, dando nomes. Então, os alunos entendiam o que significava e no final dava o nome daquilo o termo técnico.*
64. **Pesquisador/Participante:** *Mas o termo ‘técnico’ era reforçado exaustivamente ou apenas falado?*
65. **P-1:** *Não, era falado! Até porque era na Educação Infantil. Mas os professores falavam o porquê disso porque mais pra frente, no Fundamental, nos anos finais... assim, 4.^o ou 5.^o ano eles [Referiu-se aos alunos.] vão ter mais contato com isso... eles já vão entender*

mais facilmente. Porque eles já vão ter ouvido falar, já vão estar mais familiarizado com isso!

66. **P-5:** *Mas se for explicar [Referiu-se ao aluno.] e não usar o termo técnico, é considerado certo ou errado, se ela explicar corretamente mas não usar o termo técnico?*

67. **P-1:** *Não, mas lá não fica testando se o aluno fez certo ou...*

68. **P-5:** *Não, mas, não fique no testar...*

69. **P-1:** *Ah, então é considerado correto... daí a gente pergunta “Ah, então você quis dizer isso, isso, isso...”*

70. **P-5:** *Ah, entendi!*

71 **Pesquisador/Participante:** Alguém mais quer fazer uma colocação? **[Ninguém se pronunciou.]** Eu concordo com a postura que a P-1 acabou de falar. Uma coisa é você falar o termo correto pra essa criança porque a obrigação da escola é transmitir conhecimento sistematizado. Esse é o nosso papel. O dia que o nosso papel não for mais esse, eu acho que a escola pode acabar e esse dinheiro pra Educação deve ser revertido, caso antes não seja desviado, para instituições, organizações sérias que nós sabemos que tem bastante. Mas enquanto a escola existir, e eu acredito que para o ser humano continuar sendo um ser humano, a escola em nossa sociedade ocidentalizada é imprescindível, por mais sucateada que ela esteja. Certo? Uma coisa é você massacrar o seu aluno na questão da memorização... dele ‘engolir’ até a vírgula daquela definição. E isso eu sou contra. Outra coisa é você apresentar o termo correto, mas é você, já que estamos nos anos iniciais, utilizar a vivência do aluno, já que é a realidade mais próxima, durante tal abordagem. Por exemplo: “Ai pessoal, hoje a gente vai conversar sobre a população de Bauru.” – um assunto de Geografia. “O que é a população de Bauru.” **[O professor perguntou ao aluno, hipoteticamente.]** “Ah, é a gente que mora na mesma casa.” **[Uma possível resposta do aluno].** Vocês percebem que possui sentido, não? **[Referiu-se às participantes.]** E daí o professor pode perguntar: “Mas não pode ser, também, pessoas que não morem dentro da sua casa?” “Ah, eu acho que sim!” **[A resposta do aluno, hipoteticamente.]** Vocês estão percebendo **[Referiu-se às participantes]** que estou pegando exemplos que não estão diretamente relacionados com a Matemática pra discutir a ideia de população. Outro exemplo, em relação aos elementos de uma amostra, quando o professor enfatiza que cada aluno representa um indivíduo em relação ao todo... Vocês estão conseguindo estabelecer tal analogia?

72. **P-2:** *Sim! [As demais participantes compartilharam a resposta.]*

73. **Pesquisador/Participante:** Agora os termos qualitativo, quantitativo é um termo demasiado formal pra você abordá-lo no 1.º e no 2.º ano do Ensino Fundamental. Agora ‘nome’ e ‘número’ já acredito ser mais adequando, em que ‘nome’ se referindo a uma qualidade e número a uma quantidade. A partir do momento que os alunos vão avançando nos anos iniciais, daí sim o professor, a cada momento, além de falar mais destes termos, começar a dar uma explicação ‘mais’ Matemática, desde que não ultrapasse o nível de compreensão do aluno. Mas não chegando ao nível de abordagem que estamos tendo aqui. Lembra que eu falei que os alunos da Pedagogia têm que compreender os conteúdos específicos de maneira aprofundada pra que eles tenham ‘maior’ liberdade no momento de propor situações de ensino

e poder avaliar o que é muito complexo e o que não é! Tudo bem? Então, como fazer isso? Numa sala de 1.º ano como vocês iriam introduzir estas noções intuitivas da Estatística?

74. **P-1:** *Ah, na escola, às vezes a gente começava algum tema de festa junina, coisa assim... Daí colocava umas imagens de bichinho numa caixinha e perguntavam: “Quantos vocês acham que tem aqui?” Daí os alunos iam falando... Depois o professor ia contando, por exemplo, quantos alunos falou que tinham 10 bichinhos, e daí anotava o número de alunos; depois quantos acham que tinham 7, e assim vai... E daí a gente ia anotando...*

75. **Pesquisador/Participante:** Então vocês anotavam na lousa?

76. **P-1:** *Sim, ia anotando na lousa.*

77. **Pesquisador/Participante:** Vocês perceberam que, neste caso, eles estavam organizando os dados? **[Todas as participantes sinalizaram compreender o exposto.]** A organização dos dados não pertence à Estatística? Certo! Uma outra coisa que muitos professores fazem sem perceber que possui um ‘gêrmen’ estatístico... o calendário. Vocês conseguem compreender porque eu falei isso? **[Como ninguém se pronunciou o Pesquisador/Participante denotou.]** O calendário não organiza uma informação?

78. **P-8:** *Sim, em dia, semana, mês.,,*

79. **Pesquisador/Participante:** Não é uma maneira de fazer uma organização de uma informação!? Que é ordenado, ou seja, possui uma ordem a ser perseguida... 1.º janeiro 1, 2, 3, 4... 31; 2.º fevereiro 1, 2, 3, ... 28 ou 29, 3.º março... Então é interessante compreender que nos anos iniciais os assuntos são iniciais, introdutórios. Vocês precisam compreender qual é a essência da Estatística pra ver qual é a ideia principal. No caso, a Estatística, como já estamos vendo, tem como ideias iniciais a organização e a descrição, e são essas que deverão ser trabalhadas com os alunos nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Depois vem a análise e a interpretação, só que tais ideias da Estatística são adequados pro final do Ensino Fundamental e pro Ensino Médio. Tudo bem, turma? Alguém quer fazer algum comentário? **[Ninguém se pronunciou.]**

[Dando continuidade, foram disponibilizados 25 minutos para a leitura do próximo tópico 4.1, no qual foi solicitado que as participantes respondessem duas questões, conforme denotado abaixo.]

4.1 Retomando – o ‘pensar sobre’ a Tabela

No encontro anterior definiu-se a Tabela como uma “*disposição em linhas e colunas de um grupo ordenado de números*”. Para o sujeito realizar tal ‘*disposição de um grupo ordenado de números*’ fazem-se necessárias algumas operações mentais, tais como a quantificação para verificar a frequência da *variável* em questão – seja ela qualitativa ou quantitativa – e a classificação. Torna-se válido pontuar que tais operações mentais não são as únicas utilizadas pelo sujeito durante a construção de uma tabela, no entanto, para o momento, dar-se-á atenção a uma delas, no caso, a classificação.

Relembrando a questão 3 (item 3.1): “*Para separar os filmes em gêneros (tipos) de tal modo a evidenciar a frequência de cada gênero preferido entre os alunos do 6.º ano B do Ensino Fundamental foi necessário realizar qual operação mental? Pense a respeito, justificando sua resposta.*”, após a discussão com o Pesquisador/Participante identificou-se que a classificação era a tal operação mental que permitiu aos alunos do 6.º ano B separarem os filmes em gêneros (tipos). Neste caso, por exemplo, é possível pensar acerca desta classificação do seguinte modo:

Seja A ‘*todos*’ os filmes pesquisados pelos alunos do 6.º ano B do Ensino Fundamental. Considerando os seus gêneros (tipos), podemos representá-los conforme denotado a seguir:

B = filme de ação;

C = filme de comédia;

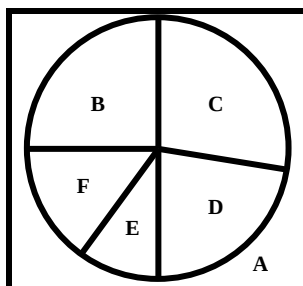
D = filme de romance;

E = filme de suspense;

F = filme de terror;

Daí, temos o seguinte: $A = B + C + D + E + F$.

Para proceder em tal classificação cada aluno teve que escolher o seu gênero de filme preferido como sendo o 'algum' dentre 'todo' o conjunto de filmes (A). Por exemplo, o aluno que escolheu como filme preferido o de terror (F) teve que 'negar' todos os outros (ou seja, B , C , D e E). No entanto, o critério que permitiu aos conjuntos B até F estarem incluídos em A foi o fato de 'todos' serem filmes. A figura abaixo representa o exposto:



A partir do exposto, e tomando como exemplo F (filme de terror), é possível denotar as seguintes relações:

$$F = A - (B + C + D + E)$$

$$F = A \wedge \text{não-}B \wedge \text{não-}C \wedge \text{não-}D \wedge \text{não-}E$$

1. Denote as relações possíveis a serem estabelecidas com os conjuntos B , C , D e E , considerando o referido exemplo.

2. Você já havia pensado a respeito da classificação conforme exposto no texto? As primeiras classificações de que você se lembra ter construídas foram quais? Como você definiria uma classificação?

[Transcorrido o tempo disponibilizado, iniciou-se a conversa acerca do referido texto. Para tanto, o Pesquisador/Participante projetou a figura denotada acima usando o recurso de animação gráfica do Microsoft Office Power Point para denotar a divisão do todo 'A' em suas partes 'B, C, D, E e F'. O Pesquisador/Participante ressaltou ter tomado o mesmo exemplo, da pesquisa realizada, só que chamando a atenção para outro aspecto. Foi conversado sobre, a partir deste momento, a letra 'A' representar a união dos tipos de filmes denotados pelas letras 'B', 'C', 'D', 'E' e 'F', ou seja, $A = B + C + D + E + F$. No entanto, no momento de discutir as relações matemáticas, tomando como exemplo 'F' (filme de terror) o Pesquisador/Participante percebeu que as participantes estavam com dúvidas acerca da 2.^a relação ($F = A \wedge \text{não-}B \wedge \text{não-}C \wedge \text{não-}D \wedge \text{não-}E$). Deste modo, realizou a seguinte intervenção.]

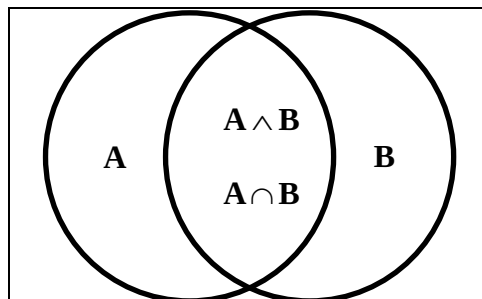
80. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, porque eu posso representar F desse modo: $F = A \wedge \text{não-}B \wedge \text{não-}C \wedge \text{não-}D \wedge \text{não-}E$? [Como ninguém respondeu, o Pesquisador/Participante chamou a atenção para a definição de intersecção.] Vocês se lembram, pessoal, quando o professor do Ensino Médio trabalhou conjuntos com vocês? Vocês se lembram da intersecção? [P-2 falou pra P-7, em tom baixo que se lembrava, fazendo em cada uma das mãos uma forma circular que se cruzavam.] O que é P-2?

81. **P-2:** Quando tinha, por exemplo, dois conjuntos e que colocava um em cima do outro, e daí ficava aquele meio...

82. **Pesquisador/Participante:** 'Aquele meio' era o produto da intersecção?

83. **P-2:** Eu não sei se é isso?

84. **Pesquisador/Participante:** Vocês se lembram disso que a P-2 falou? [Como as participantes demonstraram tentar se recordar do exposto por P-2, o Pesquisador/Participante desenhou na lousa o seguinte diagrama, falando conjuntamente.]



Consideramos os conjuntos dos elementos A e o conjunto dos elementos B. A intersecção $A \wedge B$ ou $A \cap B$ representa o conjunto dos elementos que pertencem, ao mesmo tempo, aos conjuntos A e B. [Ao escrever a segunda denotação $A \cap B$ as participantes exclamaram “Ah!” indicando que, durante a Educação Básica, haviam estudado a intersecção utilizando o símbolo “ $\cap$ ” e não o apresentado no texto “ $\wedge$ ”. Talvez esta tenha sido uma das dificuldades das participantes em recordar tal operação (intersecção).] Eu estou dizendo aqui [Neste momento começou a escrever a 2.^a relação na lousa referente ao ‘F’, explicando conjuntamente.] que o F é igual ao meu A intersecção não B e, o e é a mesma coisa que a intersecção, não C e não D e não E.

85. **P-1:** Isso é o mesmo que falar... F é igual a união com B, com C...?

86. **Pesquisador/Participante:** Não! A união é outra operação lógica.

87. **P-2:** Esse não B é o conjunto dos elementos sem o B?

88. **Pesquisador/Participante:** Sim, é o conjunto dos elementos de A menos os elementos de B. Ou seja, o não B é o A menos o B. [Denotou na lousa não-B = $A - B$.] Então, quer dizer que, no não B eu tenho o C, o D, o E e o F. [O Pesquisador/Participante escreveu na lousa a seguinte representação, fazendo de modo análogo para o ‘A’. Em seguida, as participantes foram respondendo quais conjuntos compunham o não-C, não-D e não-E e o Pesquisador/Participante foi anotando na lousa. A intersecção, aqui [Apontou para a representação abaixo.] é quando eu ‘pego’ aquilo que se repetiu em todos. Nesta representação o B se repetiu em todos?

$$F = \underbrace{A}_{\substack{B \\ C \\ D \\ E \\ F}} \wedge \underbrace{\text{não} - B}_{\substack{C \\ D \\ E \\ F}} \wedge \underbrace{\text{não} - C}_{\substack{B \\ D \\ E \\ F}} \wedge \underbrace{\text{não} - D}_{\substack{B \\ C \\ E \\ F}} \wedge \underbrace{\text{não} - E}_{\substack{B \\ C \\ D \\ F}}$$

89. **P-2:** Não! [Resposta compartilhada pelas demais participantes. De modo análogo, o Pesquisador/Participante foi questionando se cada um dos conjuntos C, D e E havia se repetido em todos, obtendo como resposta “Não.”.]

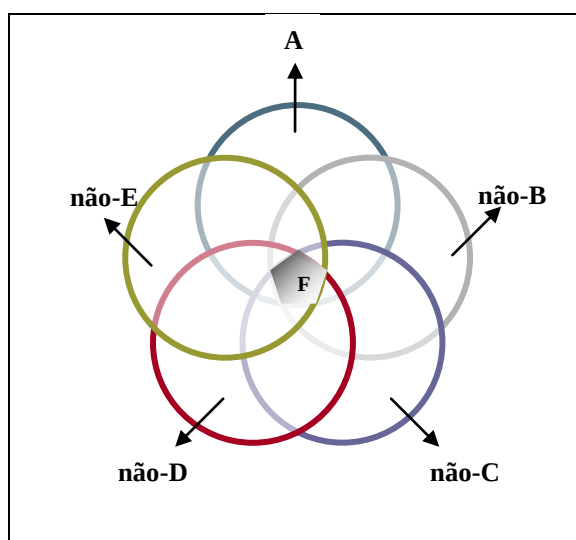
90. **Pesquisador/Participante:** Então, pessoal, qual conjunto se repetiu em todos? **[Todas as participantes responderam “F.”.]** Então quer dizer que a intersecção de tudo isso é o conjunto F. Essa é uma maneira lógica de representar o conjunto F. E daí, pessoal?

91. **P-2:** *Eu acho que eu não entendi!*

92. **Pesquisador/Participante:** O que você não entendeu P-2?

93. **P-2:** *Porque você pega o que se repetiu em todos?*

94. **Pesquisador/Participante:** Porque a intersecção é aquilo que se repete em todos, ou seja, que pertence simultaneamente, ao mesmo tempo, em todos os conjuntos. **[Para auxiliar o entendimento de P-2, o Pesquisador-Participante desenhou na lousa o exposto abaixo.]**



Você tem que considerar o que se repete em A, em não-B, em não-C, em não-D e em não-E. Dá pra ver, por meio do desenho que o ponto de intersecção comum é o conjunto F.

95. **P-2:** *Ah, tá! Agora eu entendi!*

96. **Pesquisador/Participante:** Vocês já haviam pensado na questão da negação, ou seja, para alguma coisa ser ‘algo’ ela não pode ser outra coisa?

97. **P-5:** *Não!*

98. **Pesquisador/Participante:** Ou seja, o que é um cachorro é porque ele não é um gato! Uma maçã não é uma pêra! E, a negação, psicologicamente falando, é importante na estruturação da lógica pelo sujeito. O que vocês acham, o que eu falei auxiliou ou não?

99. **P-8:** *Sim, embora você tenha ido mais além do que eu tinha pensado!*

100. **Pesquisador/Participante:** Mas deu pra acompanhar o raciocínio?

101. **P-2:** *Deu!* **[Foram disponibilizados alguns minutos para que as participantes anotassem o que foi denotado na lousa.]**

102. Pesquisador/Participante: Podemos pensar assim, a partir do momento que o B representa os filmes de ação, então o não-B representa os filmes de comédia, romance, suspense e terror. Ou seja, para que um filme seja considerado de ação ele não pode ser de comédia, romance, suspense ou terror. É interessante observar que o sujeito realiza tais negações mas sem tomar consciência disso. Vocês concordam comigo? **[Todas as participantes, por meio de expressão facial, sinalizaram concordar. P-7 levantou a mão e questionou.]**

103. P-7: *No caso faz tudo isso pra chegar à conclusão de que F é igual a F?*

104. Pesquisador/Participante: Sim. Eu não estou afirmando que o sujeito vai pensar assim. Eu estou ressaltando que, de um ‘modo’ matemático, é uma maneira de representar tal conjunto, valendo-se de operações lógicas. Eu acredito que, é bem provável que nem o aluno do Ensino Médio pense acerca desta 2.^a relação ($F = A \wedge \text{não-B} \wedge \text{não-C} \wedge \text{não-D} \wedge \text{não-E}$)! Só que, matematicamente ‘falando’, eu quis tomar este exemplo traduzindo em uma linguagem lógica e relacionando isso com a classificação, porque, você percebe que, para ser um não-B o sujeito tem que classificar em outro tipo. Tudo bem? **[P-7 respondeu “Sim”.]**

105. P-5: *E essa 1.^a ($F = A - (B + C + D + E)$) e essa 2.^a que você acabou de falar representam a mesma coisa?*

106. Pesquisador/Participante: Isso mesmo! Ok! Lembrando que existem vários caminhos para ‘dizer’ alguma coisa, várias formas de pensar... Na Matemática, embora alguns julguem existir apenas um único caminho, geralmente aquele da fórmula memorizada, existem outros que possibilitam a solução de um problema. E a Lógica, por apresentar várias relações, é possível representar o conjunto F até de outras maneiras... **[Neste instante P-8 indagou, rindo concomitantemente.]**

107. P-8: *Mas, se tem outras representações... quais seriam então? Eu não consigo imaginar outra! [Risos entre as participantes.]*

108. Pesquisador/Participante: Se tomarmos apenas no campo da Lógica, o F pode ser o não não F. **[Todas as participantes denotaram certo ‘espanto’. Desse modo, o Pesquisador/Participante anotou na lousa.]**

$F = \text{não-não-F}$

109. P-1: *Vai começar a sair fumaça da minha cabeça! [Risos entre as participantes.]*

110. Pesquisador/Participante: Se eu nego a primeira negação eu anulo ambas! **[Todas as participantes responderam “Ah!”.]** É neste sentido que eu falei que existem outras representações, mas não é o nosso intuito ficar aprofundando isso! Até porque, pessoal, não vamos nos aprofundar em Lógica, apenas vamos utilizar alguns de seus conceitos! Tudo bem, P-8?

111. P-8: *Sim! Mas é bom parar! [Risos entre as participantes.]*

112. Pesquisador/Participante: Eu não quero que o ‘desequilíbrio’ ultrapasse certo nível. E, que pena que a P-4 ainda não chegou!

113. **Pesquisador/Participante:** *É, talvez ela tivesse saído correndo!* [Risos entre as participantes.]

[Retomando a 1.^a questão do item 4.1, foram disponibilizados 10 minutos para que as participantes o resolvessem. O Pesquisador/Participante perguntou a cada uma como havia feito as relações dos conjuntos B, C, D e E. Observou-se que todas haviam representado de modo correto, anotando, na lousa, as referidas relações lógicas.]

$B = A - (C + D + E + F)$ $B = A \wedge \text{não-}C \wedge \text{não-}D \wedge \text{não-}E \wedge \text{não-}F$
$C = A - (B + D + E + F)$ $C = A \wedge \text{não-}B \wedge \text{não-}D \wedge \text{não-}E \wedge \text{não-}F$
$D = A - (B + C + E + F)$ $D = A \wedge \text{não-}B \wedge \text{não-}C \wedge \text{não-}E \wedge \text{não-}F$
$E = A - (B + C + D + F)$ $E = A \wedge \text{não-}B \wedge \text{não-}C \wedge \text{não-}D \wedge \text{não-}F$

[Em relação à 2.^a questão, a discussão segue abaixo.]

114. **Pesquisador/Participante:** Então, vocês já haviam pensado acerca da classificação conforme exposto no item 4.1? [Todas as participantes responderam “Não.”.] Ok! E vocês conseguem se lembrar das primeiras classificações que vocês construíram?

115. **P-8:** *Também não, está longe pra mim!* [Tal colocação deve-se a idade da participante ser a maior dentre todos.]

116. **Pesquisador/Participante:** Ok! Como que vocês, então, definiriam o que é uma classificação? Leia pra gente, P-2!

117. **P-2:** *Classificar é colocar em ordem dividindo em grupos coisas com uma característica semelhante.*

118. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você, P-1?

119. **Pesquisador/Participante:** *Eu não escrevi no papel, mas eu colocaria que é uma organização.*

120. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você, P-5?

121. **P-5:** *Ah... eu não sei, eu não consegui formular...*

122. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, não há problema. P-7?

123. **P-7:** *Eu coloquei que seria uma forma de organizar ou ordenar algo.*

124. **Pesquisador/Participante:** E você, P-8?

125. **P-8:** *Eu também pensei e tô igual a P-5.*

126. Pesquisador/Participante: Então, pessoal, visando compreender qual é a gênese, a origem da classificação, para daí, poder compreender o que a mesma significa. Embora a classificação pareça simples, a sua explicação psicológica não o é, então, eu utilizei como referencial um livro importante de Piaget e Inhelder, chamado “Gênese das Estruturas Lógicas Elementares”. Neste livro os autores analisam de modo minucioso qual é a 1.^a conduta que indica um tipo de classificação do sujeito, e aborda também o que esse sujeito realiza antes de realmente classificar. **[Neste momento, o Pesquisador/Participante pediu que as participantes realizassem a leitura do item 4.2, individualmente, para posterior discussão em Grupo. Tal item está exposto abaixo.]**

4.2 A gênese-construção das classificações

Em seu livro intitulado “Gênese das Estruturas Lógicas Elementares”, Jean Piaget e Bärbel Inhelder (1971) discutem como se origina e ocorre a construção da classificação e da seriação. Como problema principal da pesquisa realizada, os autores pontuam o seguinte:

O nosso principal problema, inspirado pelas preocupações da epistemologia genética, é, pelo contrário, compreender porque a organização do comportamento de classificação e de seriação assume esta ou aquela forma, e por que essas formas sucessivas tendem a converter-se em estruturas lógico-matemáticas (não porque a Lógica ou as Matemáticas tivessem imposto os modelos, *a priori*, mas porque o sujeito, sem os conhecer, tende por si mesmo a construir formas que lhes são progressivamente isomorfas). Uma das questões centrais em que insistimos é, por exemplo, estabelecer como se constrói, gradualmente a estrutura da inclusão, que de modo nenhum é dada (nem sob a forma hereditária, nem sob a forma da *Gestalt* etc.), mas, pelo contrário, forma-se de maneira muito mais laboriosa do que se imaginaria, partindo dos seus modelos lingüísticos adultos. (PIAGET E INHELDER, 1971, p. 342, grifos dos autores)

Para o entendimento da organização do comportamento de classificação e de seriação, Piaget e Inhelder (1971) identificam algumas fases, ou, melhor dizendo, alguns ‘conjuntos’ de comportamentos sucessivos percorridos pelas crianças para a construção das classificações e das seriações. Da citação é possível apontar que tais estruturas provêm de uma construção realizada pelo sujeito a partir da sua ação/operação sobre o objeto. Neste primeiro momento far-se-á uma discussão acerca da construção das classificações, ficando a seriação em ocasião posterior.

Segundo os autores, a classificação remete à constituição das *classes*, e essa comporta duas espécies de caracteres ou relações denominadas *compreensão* e *extensão*:

1) As qualidades comuns aos seus membros e aos das classes de que ela faz parte, assim como as diferenças específicas que distinguem seus próprios membros dos das outras classes (*compreensão*). 2) As relações da parte com o todo (*dependência*, *pertença* e *inclusão*) determinados pelos quantificadores “todos”, “alguns” (incluindo “um”) e “nenhum”, aplicados aos membros da classe considerada e aos das classes de que ela faz parte, mas só se qualificadas em 1) (*extensão* da classe). (PIAGET e INHELDER, 1971, p. 31)

Faz-se interessante observar outra definição acerca da compreensão e extensão:

Def. 1. Dado um sistema de classes A , A' e B , de tal modo que $B = A + A'$ e $A \times A' = 0$ (sendo, pois, A' o complementar de A sob B , visto que A e A' são disjuntivas), chamaremos “compreensão” dessas classes ao conjunto de qualidades comuns aos indivíduos de cada uma dessas classes e ao conjunto das diferenças que os distinguem os membros de uma das classes e os de outra.
[...]

Def. 5. Chamamos “extensão” ao conjunto de membros (ou indivíduos) de uma classe, definida pela sua compreensão. (PIAGET e INHELDER, 1971, p. 19-20)

Pode-se pensar em torno de tais caracteres (*compreensão* e *extensão*) a partir dos filmes pesquisados pelos alunos do 6.º ano B. Cada qualidade referente a cada uma das classes, ou seja, ‘ação’ (classe **B**), ‘comédia’ (classe **C**), ‘romance’ (classe **D**), ‘suspense’ (classe **E**) e ‘terror’ (classe **F**) representa a sua *compreensão*. Por exemplo, no caso dos filmes contidos na classe **B**, a *compreensão* é a qualidade comum ‘ação’ dos seus

elementos. Já a *extensão* refere-se ao conjunto dos elementos que possuem a *compreensão* ‘ação’, ou seja, a toda a classe **B**.

Neste ponto torna-se oportuno ressaltar que, muito antes da linguagem, ou seja, no estágio sensório-motor – compreendendo crianças de 6-8 a 18-24 meses – é possível identificar condutas que anunciam a classificação (e também a seriação). Conforme os autores:

No que diz respeito à classificação, ela [a criança] reconhece imediatamente, quando se coloca diante dela um objeto em certas situações, as suas características de utilização possível, relativamente aos esquemas habituais de assimilação: equilibrar, sacudir, bater, lançar por terra etc. Quando se lhe apresenta um objeto inteiramente novo para ela, aplica-lhe sucessivamente esses diversos esquemas conhecidos, como se procurasse compreender a natureza da coisa desconhecida determinando se é para equilibrar, para produzir um som (sacudindo-a), para esfregar etc. Trata-se, pois, de uma espécie de classificação prática, recordando a definição pelo uso, mas desenvolvendo-se por sucessivos ensaios e não mediante a repartição em coleções simultâneas. (PIAGET e INHELDER, 1971, p. 27, [comentário nosso])

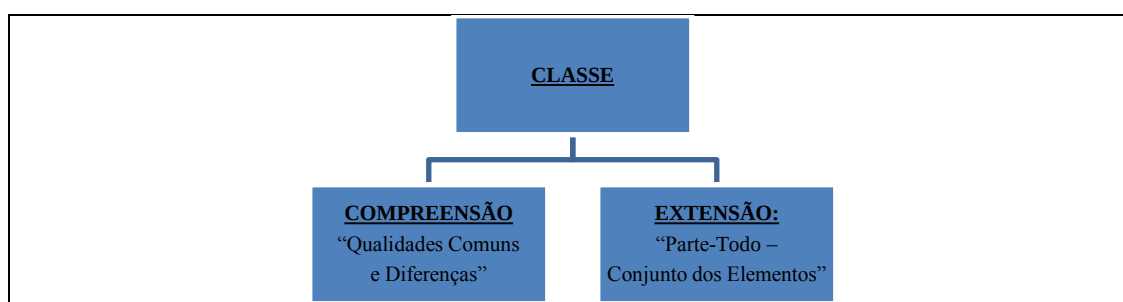
A partir desta verificação acerca das ‘raízes’ da classificação (e da seriação) advinda da ação (inteligência) prática do sujeito, faz-se possível denotar que a linguagem e a função simbólica, embora condições necessárias ao desenvolvimento posterior de tais estruturas lógicas, não representam a condição suficiente. Sobre isso Piaget e Inhelder (1971) observam:

[...] abaixo do nível onde, graças à linguagem e a função simbólica (condições necessárias, mas não suficientes), o pensamento se torna possível, já se discerne a existência de raízes donde brotarão as futuras classificações e seriações. Aí se encontra, notadamente, sob uma forma muito primitiva, um jogo de relações de semelhanças e diferenças que constituirão a matéria das “compreensões” desses sistemas ulteriores. Mas, no tocante à “extensão”, só a encontramos sob a forma infralógica da distribuição no espaço das partes de um mesmo objeto, único ou coletivo, e ainda não sob a forma pré-lógica ou lógica de coleções não-figurais ou de classes. (p. 29-30)

Em relação aos ‘conjuntos’ de comportamentos sucessivos percorridos pela criança para a construção da classificação foram identificados: 1.º - Coleções Figurais; 2.º - Coleções Não-Figurais; 3.º Classe (Inclusão e Classificações Hierárquicas). Tais fases serão explicitadas nos tópicos adiante.

[Enquanto as participantes realizavam a leitura, P-4 chegou. Deste modo, foi-lhe solicitado que também realizasse a leitura de tal item.]

[Durante a leitura do item feita pelo Pesquisador/Participante, a cada parágrafo ou citação havia uma conversa sobre o entendimento das participantes. Na 1.ª citação, as participantes perguntaram o que era *Gestalt* já que não lembravam o seu significado. Assim, o Pesquisador/Participante ressaltou uma explicação geral, já que, tal assunto será abordado em momento posterior. Enquanto foi realizada a discussão acerca da compreensão e da extensão, o Pesquisador/Participante projetou o seguinte esquema.]



127. Pesquisador/Participante: Olha, pessoal, para o sujeito compreender o que é uma classe, é necessária a construção da compreensão, ou seja, as qualidades comuns ou as

diferenças que faz, por exemplo, o filme de ação – qualidade comum ação – ser diferente do filme de terror. E a extensão, referindo-se a parte-todo, de modo a contemplar o conjuntos de todos os elementos que apresentam a mesma compreensão.

128. **P-8:** *Então quer dizer que a extensão, no exemplo, é toda a classe B?*

129. **Pesquisador/Participante:** Sim, é isso! Com este exemplo deu pra ficar mais fácil o entendimento da compreensão e da extensão? **[Como nenhuma participante se manifestou, o Pesquisador/Participante colocou o seguinte exemplo considerando o Grupo de Estudo.]** Nós somos uma classe, cuja característica comum é sermos estudantes. Então a nossa compreensão, a nossa qualidade comum é sermos estudantes. E isso nos diferencia, por exemplo, da classe do pessoal que trabalha na administração da faculdade. Eles possuem a qualidade comum serem administradores, que é a compreensão deles; diferente da nossa compreensão. O nosso Grupo de Estudo constitui a nossa extensão. Tudo bem?

130. **P-2:** *Sim! Deu pra compreender!* **[Resposta compartilhada pelas demais participantes.]**

[Dando continuidade à leitura, deu-se atenção ao fato de que, conforme as pesquisas de Piaget e Inhelder, muito antes da linguagem a criança já realiza uma classificação a nível ‘prático’ a partir do uso dos objetos, identificando ‘coisas’ semelhantes e diferentes pelo uso. Concluída tal leitura, as participantes disseram ter, agora, compreendido os conceitos abordados. As mesmas pediram que o próximo item a ser lido (4.2.1) fosse feito de modo conjunto, sendo mediado pelo Pesquisador/Participante. Deste modo, iniciou-se a leitura-discussão do referido item. O mesmo encontra-se exposto abaixo.]

4.2.1 Coleções figurais – Fase I

As coleções figurais são identificadas quando a criança dispõe os elementos a classificar agrupando-os segundo as configurações espaciais. Ao fazê-lo, o sujeito atribui-lhe uma significação, seja do ponto de vista da compreensão ou da extensão. Nessa fase os aspectos perceptivos e intuitivos influenciam, sobremaneira, o pensamento da criança. Observe o exemplo denotado pelos autores:

Por exemplo, a criança colocará um triângulo por cima de um quadrado, achando que essas duas formas estão aparentadas, na medida em que o triângulo recorda o telhado de uma casa e o quadrado o corpo do edifício; nesse caso, o triângulo deve realmente ser colocado sobre o quadrado e não em qualquer outro lugar, o que confere um significado específico à configuração espacial, do ponto de vista das relações 1) [compreensão]. Em outros exemplos, o “alguns” e o “todos” dependerão da configuração espacial das coleções justapostas ou reunidas etc., a qual adquirirá assim uma significação do ponto de vista das relações 2) [extensão]. (PIAGET e INHELDER, 1971, p. 32, [comentário nosso])

Nas coleções figurais as relações espaciais remetem às ligações entre os objetos, ou seja, às relações de *compreensão*, não sendo observada, nessa fase, diferenciação suficiente entre a *compreensão* e a *extensão*.

Em resumo, a coleção figural constituiria o início da coordenação entre as ligações da parte com o todo, fornecidas pela percepção sob uma forma espacial (e não meramente inclusiva) e as relações de semelhança e diferenças fornecidas pelos esquemas perceptivos, sensório-motores, figurados, e pelos primeiros esquemas verbais, mas sob uma forma temporalmente sucessiva e não só simultânea. (PIAGET e INHELDER, 1971, p. 35)

Mesmo sem uma ordem de sucessão regular, foram identificadas as seguintes subfases:

A) Os **alinhamentos** – a uma só dimensão – contínuos ou descontínuos. São observadas algumas

reações características, tais como:

I) Pequenos alinhamentos parciais: a criança não procura classificar todos os objetos apresentados, apenas constrói algumas coleções não-exaustivas e sem relações entre si. No entanto, tais coleções assumem uma forma linear.

II) Alinhamentos contínuos, mas com mudança de critério: a criança, embora construa um alinhamento total, esquece os termos precedentes e, sem querer, muda o critério de semelhança durante as suas aproximações sucessivas. Tal alteração de critérios denota as dificuldades de coordenação entre as relações de semelhança e as ligações da parte com o todo.

III) Intermediários entre os alinhamentos e os objetos coletivos ou complexos: Conforme Piaget e Inhelder (1971):

Sendo os objetos coletivos ou complexos coleções figurais de mais de uma dimensão, é possível observar duas espécies de intermediários entre os alinhamentos e essas outras formas de coleções: a) alinhamentos múltiplos, estando uma das linhas orientadas numa direção diferente da outra (por exemplo, em ângulo reto); b) figuras que começam sob a forma de alinhamento e depois se completam sob a forma de superfícies. (p. 40)

B) Os *objetos coletivos*: esse tipo de coleção, por definição, é uma montagem, em duas ou três dimensões, de elementos semelhantes (homogeneidade) que formam uma figura inteira, ou seja, como se representasse uma única peça. Tais coleções são muito menos frequentes do que os objetos complexos, pois, não há razão nenhuma que impeça a criança de juntar aos elementos semelhantes outros que são heterogêneos visando completar a sua forma.

C) Os *objetos complexos*: além das características denotadas em b) o sujeito utiliza elementos heterogêneos para a constituição da ‘figura’. A coleção é montada em forma de superfície ou de volume adquirindo uma configuração de conjunto variável. Tal configuração possui um significado ‘aos olhos’ do sujeito, por meio das relações internas de diferenças (heterogeneidade) entre os elementos. Observam-se duas variedades:

I) Objetos complexos de forma geométrica: consiste em imprimir à coleção uma forma geométrica, permitindo manter certas semelhanças internas entre os elementos, mas por intermédio das simetrias das figuras.

II) Objetos complexos de forma empírica. Como um exemplo típico, os autores denotam o observado no comportamento de uma criança:

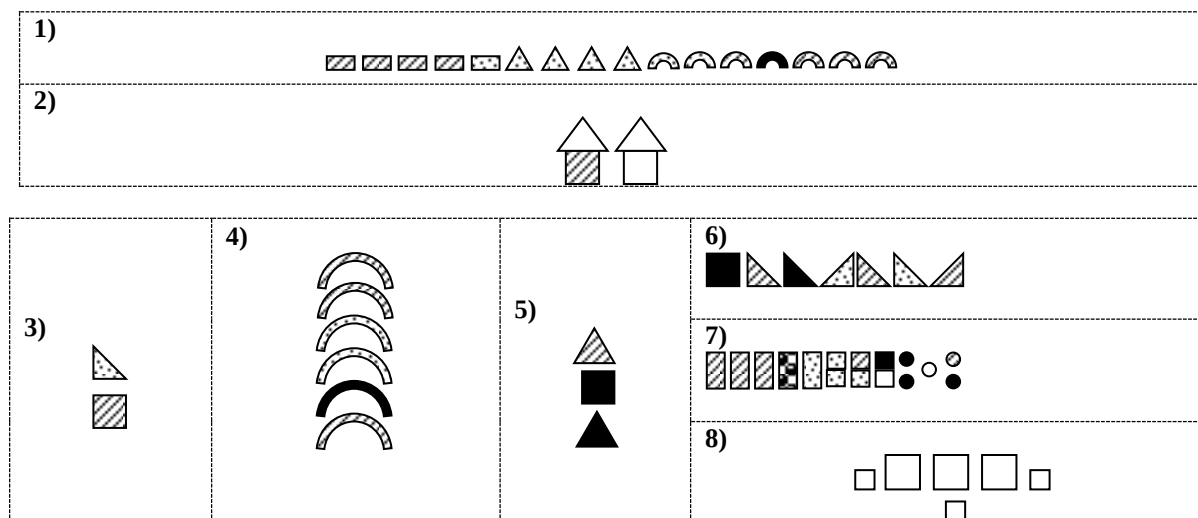
FRA (4; 0), após ter construído sua dupla cerca de retângulos e de quadrados, acrescenta bruscamente três círculos em cima e diz: “*Isto é a torre Eiffel*”. (PIAGET e INHELDER, 1971, p. 45)

Em síntese, acerca das coleções figurais os autores pontuam:

Ora, como vimos incessantemente, os modelos perceptivos sugerem, nessa situação, a utilização de conjuntos espaciais como os alinhamentos e os objetos coletivos e complexos a duas ou três dimensões. É então que se produz o fenômeno específico que nos parece constitutivo das coleções figurais; procurando construir a coleção correspondente às suas assimilações sucessivas, mas não possuindo ainda os instrumentos operantes que permitem traduzi-las no “*todos*” e “*alguns*” que assegurem a fixação das extensões correspondentes, o sujeito avança ora da compreensão para a extensão, ora da extensão para a compreensão, e nunca de acordo com um princípio de correspondência unívoca e recíproca, mas por simples indiferenciação (e por uma indiferenciação que prolonga, mas reforçando-se consideravelmente, a da semelhança e da contigüidade, já em ação no plano das assimilações de partida). (PIAGET e INHELDER, 1971, p. 64)

[P-4 realizou a leitura de todo o texto de modo contínuo, não havendo interrupções para discussão. Observou-se certa dispersão de P-1 e P-5 durante a leitura feita por P-4, indicando, talvez, o não entendimento ou o ‘cansaço’, pois já estava quase no encerramento do encontro. Antes de fazer a leitura da situação problema referente a tal item, P-4, após ler o enunciado disse “Só por Deus!”, sinalizando, talvez, possuir dúvidas acerca do texto.]

1. As coleções denotadas abaixo são exemplos de construções realizadas por crianças quando solicitadas a “reunir o que se parece” diferentes formas geométricas bidimensionais. Observe-as:



A partir das discussões realizadas no item 4.2.1 ‘Coleções Figurais’ separe tais coleções em: a) pequenos alinhamentos parciais; b) alinhamentos contínuos com mudança de critério; c) intermediário entre os alinhamentos e os objetos coletivos ou complexos; d) objetos coletivos; e) objetos complexos. Indique ao lado de cada letra os números correspondentes das coleções representadas acima.

- a) _____
- b) _____
- c) _____
- d) _____
- e) _____

131. Pesquisador/Participante: Obrigado, P-4! Vamos parar um momento porque eu acho que é necessário. Para auxiliar na compreensão, é importante saber o seguinte. ‘Piaget’ dava pra criança várias figuras bidimensionais cortadas, tais como, quadrados, triângulos, retângulos, círculos, etc., de várias cores. Tais figuras eram colocadas sobre uma mesa próxima a criança de tal modo que ela pudesse manipulá-las. E daí o experimentador pedia pra criança reunir tudo o que se ‘parece’. As primeiras reações das crianças, que os autores denominaram Coleções Figurais, ocorrem quando o sujeito reuni tais figuras em forma de alinhamentos ou fazendo objetos coletivos ou objetos complexos. E, além disso, os autores ressaltaram que, durante esta fase, a criança não consegue considerar, simultaneamente a compreensão e a extensão, ou seja, ou ela considera entre 2 objetos a qualidade comum, só que depois ela esquece e muda o critério (a qualidade), ou ela não pega todos os elementos que possuem aquela qualidade comum formando a extensão. Por isso que, nem sempre, a criança vê a necessidade de classificar todos os objetos postos na mesa. Pessoal, tá dando pra ‘melhorar’ a compreensão do texto? **[As participantes, responderam, com certa cautela, “Sim.”.]**

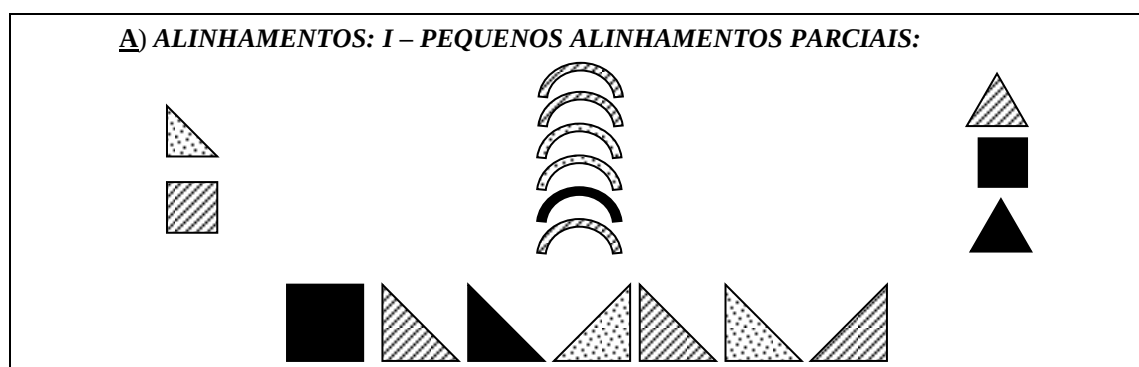
Então, oh, eu fiz de propósito... Eu poderia ter colocado, abaixo de cada subfase, uma figura representativa.

132. P-2: *É, teria ficado mais fácil!*

133. Pesquisador/Participante: Mas daí eu queria saber se vocês conseguiram estabelecer uma ‘correspondência’ entre a ‘definição’ lida e a visualização mental que a exemplificasse.

134. P-4: *Então você viu que a nossa capacidade é menos 1! [Risos entre as demais participantes.]*

135. **Pesquisador/Participante:** Então, vocês querem tentar fazer este problema, pessoal?
136. **P-2:** *Pode fazer igual as crianças, não precisa classificar todas...?* [Risos entre as participantes.]
137. **Pesquisador/Participante:** Parece que você começou a compreender. [Risos.] Deu pra perceber o porquê, durante a Coleção Figural, da criança não ver a necessidade de classificar todos os objetos, considerando a sua extensão e nem a sua compreensão ao mudar de critério. A criança, desta fase, por falta de retroação e de antecipação, constituindo a capacidade de ir e voltar no pensamento, ou fica ‘quase’ na compreensão, já que muda de critério, ou ‘classifica’ tudo, mas sem levar em consideração um critério comum.
138. **P-2:** *E ele interrogava as crianças?*
139. **Pesquisador/Participante:** Sim, a todo o momento. E haviam alguns momentos em que a criança não sabia explicar o porquê colocou as figuras daquele jeito. Porque num momento era o cachorro, passado um certo tempo, ela pegava aquilo ali e fazia um alinhamento ou qualquer outra coisa...
140. **P-8:** *Eu achei legal a criança que colocou o quadrado e o círculo e disse que era a torre Eiffel.*
141. **Pesquisador/Participante:** Isso é um exemplo de um objeto complexo. Aquilo teve uma significação subjetiva pra criança, lembrando a configuração espacial da torre. Por isso que no texto é colocado que, durante a Coleção Figural, o que predomina no pensamento da criança é a intuição e a percepção. Não é nem a lógica e suas relações. [Após, foram disponibilizados 15 minutos para as participantes separarem as coleções denotadas no quadro anterior. No intuito de auxiliá-las, após 10 minutos, o Pesquisador/Participante disse que haviam 4 coleções pertencentes à a), e 1 coleção pertencente a cada uma das outras “b), c), d) e e)”.]
[Decorrido o tempo, o Pesquisador/Participante combinou com as participantes que iria projetar as respostas, solicitando que as mesmas as confrontassem com as suas. Observe a 1.^a projeção.]



[Todas as participantes classificaram as 4 coleções corretamente, evidenciando, muito provavelmente, o entendimento do que é um alinhamento constituído de pequenos alinhamentos parciais. Neste momento P-4 observou.]

142. **P-4:** *Então ele não pega todos os elementos?*

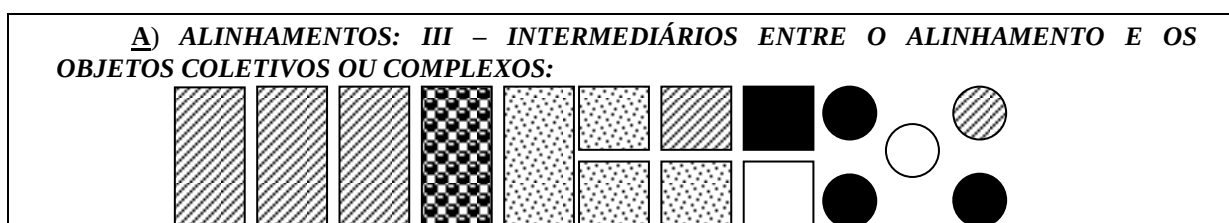
142. Pesquisador/Participante: Isso! A criança, por não considerar a extensão não vê a necessidade de classificar todas as figuras comuns e, também, não mantém o mesmo critério (compreensão). Agora, quando a criança percebe a necessidade de classificar tudo, ocorre isso daqui. [Neste momento projetou-se o segundo tipo de alinhamento.]



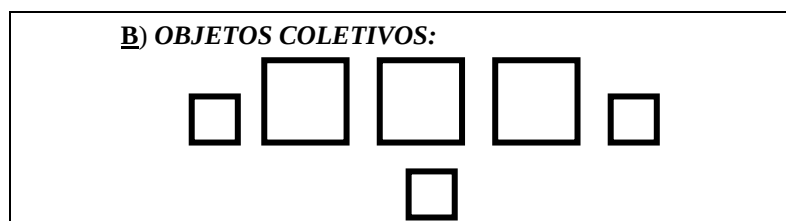
[Novamente, todas as participantes acertaram. O Pesquisador/Participante pontuou que a criança ao construir este tipo de alinhamento esquece o critério anterior, ou seja, começa juntando dois retângulos de mesma cor, no entanto, ao pegar um terceiro retângulo, não leva em consideração o primeiro, mudando a cor do retângulo, considerando apenas o critério comum dos dois últimos serem retângulos. Finalizando destacou que tal dificuldade reside na ‘falta’ de retroação da criança, que ainda está em vias de construção.]

143. P-5: Olhando ali [Apontou para o alinhamento projetado na lousa.] você percebe a coerência que ela usou! Mas a criança não foi fazendo assim, pegou o primeiro dali [Apontou para o 1.º retângulo do alinhamento.] e pegou o outro dali? [Apontou para a última figura do alinhamento.]

144. Pesquisador/Participante: Não! Conforme eu denotei no texto, a criança vai construindo sucessivamente, esquecendo o critério anterior. Agora, a coleção intermediária é... [Projetou-se o seguinte.]



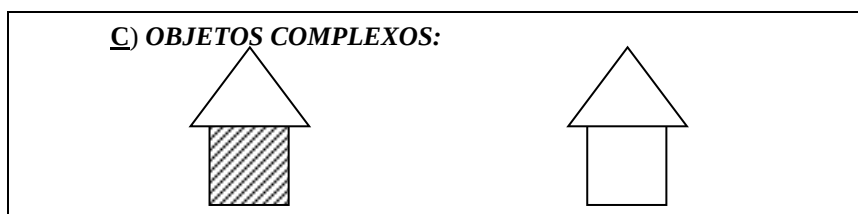
[Todas as participantes acertaram. O Pesquisador/Participante ressaltou que a criança iniciou um alinhamento só que, depois, construiu objetos coletivos. Acerca do objeto coletivo, antes de projetar, o Pesquisador/Participante argumenta que coletivo refere-se ao fato de haverem apenas ‘objetos’ – figuras semelhantes.]



[Ao perceber que apenas a P-4 errou, o Pesquisador/Participante pontuou que a diferença entre o coletivo e o complexo reside no fato de que, o primeiro constitui uma figura inteira utilizando apenas figuras semelhantes; já no segundo há figuras diferentes constituindo um ‘todo’ significado para a criança.]

145. **P-4:** *Ah, então o objeto complexo é a casa, onde usa figuras diferentes!*

146. **Pesquisador/Participante:** Isso. No caso do objeto complexo, dá pra perceber que a criança faz uma representação espacial que lembra uma casa. Para ela, o triângulo em cima do quadrado simboliza uma casa. **[Para finalizar projeta a última coleção representando um objeto complexo.]**



Tudo bem, pessoal? **[As participantes indicaram haver compreendido.]**

[Em comum acordo decidiu-se continuar os demais itens referentes às fases da classificação no próximo Grupo de Estudo. Inclusive o ‘Momento de Síntese’ ficou para ser preenchido apenas ao final do próximo encontro, já que as participantes julgaram interessante elaborar uma síntese acerca de todo o assunto. Finalizando, o Pesquisador/Participante denotou o seguinte.]

147. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, vocês viram como é complexo este assunto? Alguém já havia estudado isso? **[Ninguém se pronunciou.]** É interessante nós compreendermos bem porque, no momento da atuação de vocês, seja na Educação Infantil ou nos anos iniciais do Ensino Fundamental, saber como se dá a construção da classificação pode ajudá-las a auxiliar os seus alunos a ‘superarem’ tais fases de modo que, os mesmos, construam uma importante estrutura lógica. E, para a construção de muitos aspectos da Matemática a classificação é necessária...

148. **P-5:** *Eu posso fazer uma colocação?*

149. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro!

150. **P-5:** *Deixa eu ver se eu compreendi. Das tabelas, pra organizar os dados a gente tem que saber classificar. Agora a gente tá vendo a classificando e tá aprendendo como a criança aprende a classificar.*

151. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo! Vocês perceberam que eu estou tentando ligar um assunto no outro? **[Todas as participantes indicaram, por meio de expressão facial, ‘visualizar’ tal ligação.]** O assunto conceitual da Matemática: “Estatística”. O assunto metodológico: “Como fazer.” O assunto de explicação da construção de tal conceito, que, como eu falei no primeiro encontro, como se dá a construção de alguns conceitos pela teoria de Piaget. Tudo bem, turma? **[Todas as participantes responderam “Sim.”]** Eu estou tentando ‘conjuguar’ a experiência de vocês onde eu perguntei em vários momentos o que vocês sabiam a respeito, com o conteúdo a ser construído, como pensar isso numa futura prática didática e como poder justificar. Quando você, P-5, der uma atividade de classificação aos alunos do 1.º ano e souber auxiliar a criança a atingir, lá pelos 7-8 anos, uma ‘verdadeira’ classificação hierárquica por inclusão. E você vai saber o porquê a criança faz isso ou isso quando alguém te questionar acerca do porquê você fez assim ou de outro modo... Certo? Vocês estão achando interessante?

152. **P-5:** *Muito! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*
153. **P-2:** *E assim, quando você der pras crianças numa sala pra ela classificar você pode intervir, questionando?*
154. **Pesquisador/Participante:** Você deve! Primeiro elas têm que manipular livremente, observando como cada criança interage com aquilo. Em grupo ou individualmente, o ‘duro’ é a quantidade de alunos, né, pessoal! Esse é um dos problemas da Escola Pública. Você pode perguntar pro aluno assim: “Porque daqui você foi pra cá?”...
155. **P-2:** *Então, esta é a minha dúvida. Mas então aí eu posso questionar?*
156. **Pesquisador/Participante:** Deve.
157. **P-2:** *E se eu falar pra criança não fazer só por cor, mas pegando os quadrados?*
158. **Pesquisador/Participante:** Você pode ‘jogar’ com a criança, mas sem induzi-la. Por exemplo, perguntar pra ela porque no início ela colocou aquelas figuras juntas. Depois questioná-la sobre porque, em um dado momento, ela pegou uma figura diferente, com mais lados... Questionar é imprescindível para que o sujeito pense acerca daquilo que ele fez. Para que ajude a criança naquele movimento de ‘voltar’, retroagir, pra que o pensamento dele vá constituindo àquela mobilidade, reversibilidade. E as trocas interindividuais, como eu tenho colocado em nosso Grupo de Estudo, é um momento imprescindível de acontecer na escola. Tudo bem? Excelente a sua pergunta, P-2! Alguém mais?
159. **P-5:** *E, assim, essa classificação inicia-se na Educação Infantil?*
160. **Pesquisador/Participante:** Inicia-se antes da Educação Infantil, dependendo com qual idade a criança ingressa.
161. **P-5:** *Na Educação Infantil é pras crianças separarem. Já no Ensino Fundamental dá pedir pra elas registrarem?*
162. **Pesquisador/Participante:** Na Educação Infantil já dá pras crianças registrarem, desenhando, só que eles vão ter um pouco de dificuldade em separar e, ‘ao mesmo tempo’, registrar.
163. **P-5:** *Mas é importante, né!?*
164. **Pesquisador/Participante:** Sim!
165. **P-5:** *Porque eu lembro que, quando pede pra criança da Educação Infantil registrar ela sente um pouco de dificuldade.*
166. **Pesquisador/Participante:** Realmente! Isso ocorre porque, como iremos estudar mais adiante a partir da teoria de Piaget, tudo o que a criança conquistou no plano da ação ela terá que reconstruir no plano da representação. Em seguida o fará no plano das operações concretas e, assim que construídas, terá que reconstruir no plano das operações formais. Vejam como é complexo! No entanto, parece que, a maioria dos alunos no Brasil ‘estacionou’

no plano das operações concretas, não conseguem reconstruir no plano formal por meio da análise de proposições verbais apenas. Alguém mais?

167. P-5: *É, acontece até com a gente. Ah, eu sei, mas daí eu não consigo escrever.*
[Referiu-se ao fato de que, no plano das operações/ações concretas consegue resolver um problema, no entanto, ao representá-lo apenas em proposições verbais, estabelecendo as relações decorrentes, possui dificuldade.]

168. Pesquisador/Participante: É por isso que na Torre de Hanói, alguns tiveram a necessidade de primeiro fazer... porque ainda não ‘passaram’ para o plano das operações formais aquilo que no plano da ação faz rapidamente. Percebiam que estamos vivenciando as hipóteses de Piaget aqui!

169. P-5: *Sim!*

APÊNDICE I – TRANSCRIÇÃO DO 5.º ENCONTRO

Data: 29/03/2012

Tempo de Duração: 3 horas e 10 minutos.

[Inicialmente, o Pesquisador/Participante perguntou o que as participantes estavam ‘achando’ acerca da 1.ª Fase da classificação denominada Coleções Figurais.]

1. **P-2:** *Olha, eu vou falar o que eu acho, não tenho certeza! Eu entendo que são formas, maneiras que todo ser humano vai... não sei se propondo, se testando pra formar alguns conjuntos... e que vais e passando por fases mesmo de... às vezes pega uma cor como referência mas daí se esquece daquilo, muda a forma... São maneiras mesmo de ir organizando as coisas.*

2. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo! A Coleção Figural é o que você acabou de pontuar, o sujeito vai mudando os critérios! Por que será que a criança, pertencente a esta fase, não mantém um critério do começo ao final de uma coleção que ela se propõe a formar?

3. **P-4:** *Ele não tem... ah, como é que é... ele vai e volta...*

4. **P-2:** *Ah reversibilidade!*

5. **P-4:** *Isso! A reversibilidade.*

6. **Pesquisador/Participante:** Isso! É devido a esta reversibilidade que a criança ainda não construiu. Está todo mundo conseguindo acompanhar a nossa discussão? **[Todas as participantes presentes – P-2, P-4, P-5, P-7 e P-8 – sinalizaram afirmativamente.]** E, por que será que tal fase chama Coleção Figural? Tentem pensar nesta qualidade “Figural”!

7. **P-2:** *Figura! Imagem?*

8. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo! O sujeito desta fase está ‘preso’ à imagem, à percepção, à representação ‘da figura’. Lembra, P-8, que você colocou no outro Grupo de Estudo em que você achou interessante a criança que representou a torre Eiffel?

9. **P-8:** *Sim!*

10. **Pesquisador/Participante:** Percebam que esta criança está presa à intuição, à percepção, à imagem... Lembrando que há um momento, nós vamos chegar a estudar o estádios do desenvolvimento cognitivo, e é o momento que a criança se encontra no período ‘simbólico’ (pré-operatório). Então o símbolo está em construção, ou seja, poder representar a torre Eiffel por meio de um agrupamento de figuras geométricas é uma maneira do sujeito pensar sobre isso! Tudo bem, pessoal? Alguém mais? A P-5, ao final do Grupo anterior, pontuou algo interessante ao fazer um resumo de tudo o que nós havíamos feito. Vocês perceberam? **[Todas as participantes, por meio de expressão facial, concordaram.]** Ela conseguiu compreender o seguinte: os saberes experienciais de vocês, identificados como maior dificuldade foi o Bloco Tratamento da Informação. Tendo em vista isso, nós começamos a abordar uma das áreas deste Bloco denominada Estatística. E, ‘dentro’ da Estatística, nós começamos a analisar a parte organizacional e de representação – Gráficos e

Tabelas. No Grupo de Estudo da semana que vem iremos retomar a abordagem dos conceitos da Estatística entrando, em seguida, na Estatística Descritiva. No entanto, ao trabalhar as tabelas que são necessárias para a construção dos Gráficos, lembra que nós já conversamos sobre isso?! Que, mesmo não elaborando uma Tabela no papel é necessário observar as frequências das variáveis para daí estabelecer o Gráfico... E, pra construir uma Tabela, nós concluímos a necessidade da classificação. Tudo bem até aí?

11. P-5: *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

12. Pesquisador/Participante: Mas, de onde surge?... Se nós estamos numa perspectiva construtivista, precisamos observar como o sujeito realiza esta construção. Só que, para isso, nós recorremos ao estudo das estruturas lógicas constituídas pelo sujeito e, então recaímos em Piaget. E, a partir de tais ideias pensar sobre estratégias didático-metodológicas que auxiliem nossos alunos em tais construções! Tudo bem, pessoal? Todo mundo estava mais ou menos situado no que acabei de falar? **[Todas as participantes, por meio de gesto facial, mostraram-se acompanhar tal raciocínio.]** E hoje nós vamos estudar as Coleções Não-Figurais e depois as Classes que representam as classificações pela presença da inclusão e classificação hierárquica.

[Foram disponibilizados 20 minutos para a leitura do texto acerca das Coleções Não-Figurais e para a solução de duas questões colocadas após o mesmo. O referido texto encontra-se denotado a seguir.]

4.2.2 Coleções não-figurais – Fase II

Entre a primeira fase constituída pelas coleções figurais e a terceira fase referente às classes (inclusões e classificações hierárquicas) encontra-se uma segunda fase denominada coleções não-figurais. Essas coleções ainda não podem ser nomeadas como classes por ausência de toda e qualquer hierarquia inclusiva, no entanto, também já não são figurais, pois são constituídas de pequenos agregados baseados unicamente na semelhança, embora se conservem justapostos entre si, não estando incluídos ou “encaixados” em classes mais genéricas.

No intuito de compreender o que caracteriza esta segunda fase, faz-se oportuno denotar as propriedades de uma classificação, verificando, após, quais dessas propriedades estão presentes na mesma. Piaget e Inhelder (1971) identificam 10 propriedades:

- 1) Não existe (no material a classificar) o elemento isolado ou sem classe. O que equivale a dizer que é preciso classificar todos os elementos e que, se existe um (x) que é único da sua espécie, também dará lugar a uma classe específica (mas, nesse caso, singular): (x) $\mathcal{E}$ (A_x).
- 2) Tampouco existe uma classe isolada, isto é, toda a classe específica A , caracterizada pela propriedade a , opõe à sua complementar A' (caracterizada por não- a), sob o gênero mais próximo B , ou seja, $A + A' = B$.
- 3) Uma classe A compreende todos os indivíduos de caráter a .
- 4) Uma classe A só compreende os indivíduos de caráter a .
- 5) As classes de nível idêntico são disjuntas: $A \times A' = 0$; ou, $A_n \times A_m = 0$.
- 6) Uma classe complementar A' compreende seus caracteres próprios a_x (portanto $A' = A_x$), que não possuem a sua complementaridade A : os indivíduos de caráter a são, portanto, não- a_x , assim como os indivíduos de caráter a_x são não- a .
- 7) Uma classe A (ou A') está incluída em toda e qualquer classe superior que compreenda todos os seus elementos, a começar pelo mais próximo B ; ou seja, $A = B - A'$ (ou $A' = B - A$) e $A \times B = A$, o que equivale a dizer que todos os A são alguns B .
- 8) Simplicidade em extensão: reduzir os encaixamentos (7) ao mínimo compatível com os caracteres em compreensão.
- 9) Simplicidade em compreensão: os mesmos critérios (por exemplo, cores) para distinguir as classes do mesmo nível.
- 10) Simetria nas subdivisões: se a classe B_1 está subdividida em A_1 e A'_1 , segundo um

critério que se encontra em B_2 então B_2 estará subdividida em A_2 e A'_2 . (p. 67-68)

Os sujeitos da segunda fase – coleções não-figurais – ‘efetuam’ as seguintes propriedades: (1) classificam todos os elementos do material apresentado; (2) sempre repartem tais elementos em duas ou mais coleções; (3) cada uma dessas coleções elaboradas contém todos os elementos semelhantes; (4) e nada mais contendo senão tais elementos semelhantes; (2 e 6) observam-se complementaridades parciais; (5) há disjunção das coleções do mesmo nível e realizam pesquisas visando às simplicidades (8 e 9) e às simetrias (10). No entanto, a propriedade (7) – inclusão – é ignorada pelo sujeito, fato esse que distingue as coleções não-figurais das classes propriamente ditas.

Neste ponto, faz-se importante o seguinte questionamento: *O que permite ao sujeito passar da fase I (coleções figurais) à fase II (coleções não-figurais)?* Tal explicação remete aos processos de retroação e antecipação (semi-) observadas no sujeito a partir de sua constante ação sobre o objeto. Conforme Piaget e Inhelder (1971):

[...] do ponto de vista do próprio funcionamento das ações e do pensamento, a característica mais genérica da fase I é que o indivíduo progride por aproximações sucessivas, esquecendo o que acabou de fazer e não provendo o que vai fazer em seguida; êle alinha, por exemplo, o conjunto de elementos dados, mudando a todo instante o critério que determina suas aproximações sucessivas, ou então constrói um objeto coletivo ou complexo, justapondo os elementos sem plano nem coerência (e quando anuncia, no desenvolvimento de um plano, que “eu quero fazer uma casa” etc., isso significa que o sujeito esqueceu a sua intenção inicial de classificar e envereda pelo caminho do jogo ou da ornamentação). Em contrapartida, [...] com o início da abstração ou inferência da qualidade comum se caracteriza pelo abandono desse método de assimilações sucessivas e pela intervenção de processos retroativos que consistem em lembrar o início da construção das coleções, a fim de introduzir um fator de coerência entre o princípio e a seqüência ulterior ou até reorganizar esse início em função da seqüência. Ao tornar-se retroativo, o esquema de assimilação acaba então, necessariamente, por revestir-se de um aspecto antecipatório, pois a consistência com o que precede conduz à escolha e à intenção, a respeito do que vai seguir-se: semi-antecipações, somente, isto é, não prevendo o conjunto das iniciativas ulteriores e surgindo apenas no decorrer das tentativas múltiplas (erros e correções) mas, em todo caso, uma semi-antecipação suficiente para engendrar um começo de método, muito superior ao de aproximações sucessivas. (p. 346-347)

Os tais métodos ‘superiores’ dizem respeito ao *método ascendente* e ao *método descendente*. O primeiro ocorre quando o sujeito constitui coleções maiores a partir de pequenas coleções, tendo por critérios as qualidades comuns limitadas. Já, no segundo, inicia-se pelos grandes agrupamentos, tendo por critério as qualidades comuns mais genéricas, e, em seguida, há subdivisão em pequenas coleções. Finalizando, os autores indagam o seguinte:

[...] os sujeitos desse nível jamais atingem uma coordenação completa entre os dois métodos, o que equivale a dizer que, quando empregam um dos dois, não antecipam, *ipso facto* o outro ou os seus resultados. Por exemplo, quando se subdividiu uma coleção B em duas coleções A e A' , os sujeitos não entenderam, sem um novo ato do pensamento (por vezes, nem mesmo coroado de êxito), que ambas faziam sempre parte de B . Em resumo, a antecipação ainda implica apenas resultados estáticos das manipulações e não transformações, o que justifica, portanto, a incompreensão da inclusão e das operações como tais.

E por esse fato se entende também por que motivo, na fase II, a extensão e a compreensão, embora melhor diferenciadas e coordenadas do que na fase I, ainda não o são inteiramente, visto que a regulação do “todos” e do “alguns” pressupõe um esquema de inclusão e este implica, em um mesmo todo do processo ascendente $A + A' = B$ e do processo descendente (que constitui a operação inversa) $B - A' = A$. (PIAGET e INHELDER, 1971, p 348-349)

1. Nas ‘Coleções Figurais’ (item 4.2.1) é possível identificar alguma(s) das 10 propriedades da classificação? Caso sim, quais? Caso não, justifique.

2. No exemplo exposto no item 4.1 a respeito da classificação dos gêneros (tipos) de filmes preferidos pelos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental é possível identificar alguma(s) das 10 propriedades da

classificação? Caso sim, quais e por quê? Caso não, justifique.

[Neste momento P-1 chegou e realizou a leitura do texto solicitado. Transcorrido o tempo deu-se início à discussão. Foi feita a leitura, pelo Pesquisador/Participante, do 1.º parágrafo. Após questionar as participantes sobre o entendimento deste parágrafo, P-2 salientou, conforme exposto abaixo.]

13. **P-2:** *Sim! Só vamos, assim, retomar um pouquinho! Então, tudo o que foi feito em relação ao outro encontro não são classes ainda... são tentativas de...*

14. **Pesquisador/Participante:** Isso! E ainda na segunda fase não é uma Classe.

15. **P-2:** *Mesmo nessas Coleções Não-Figurais ainda não é uma Classe!*

16. **Pesquisador/Participante:** Sim!

17. **P-2:** *Então é só na terceira fase!*

18. **Pesquisador/Participante:** Isso! Com a constituição da Classe. Pessoal, tá dando pra compreender estas diferenças? Há algum termo deste 1.º parágrafo que causou dúvidas em vocês?

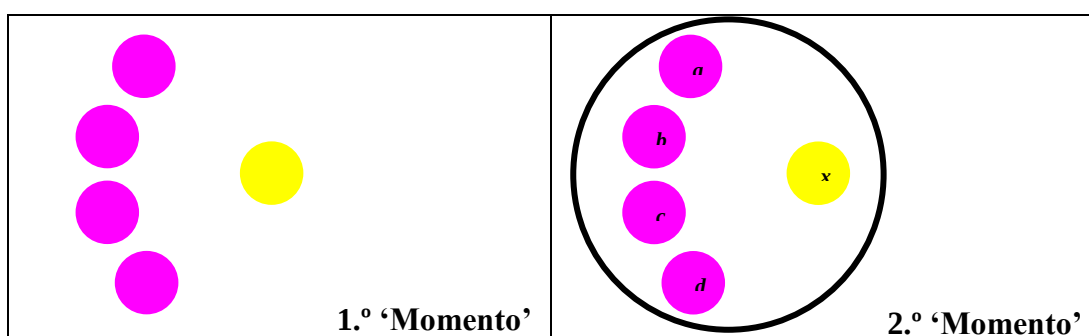
19. **P-5:** *O que é hierarquia inclusiva?*

20. **Pesquisador/Participante:** É quando um conjunto pertence, está contido em outro. Então, por exemplo, o conjunto dos números Naturais está incluído no dos Inteiros, ou seja, há uma inclusão hierárquica entre os Naturais e os Inteiros. Tudo bem?

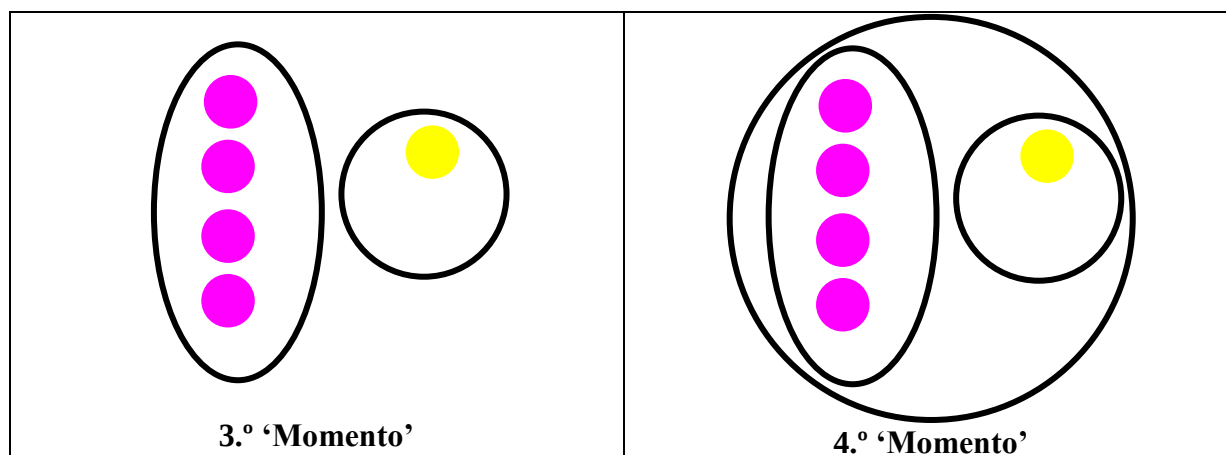
21. **P-5:** *Isso ainda não existe aqui! [Referiu-se à 2.ª Fase das Coleções Não-Figurais.]*

22. **Pesquisador/Participante:** Se existisse tal inclusão hierárquica já não seria mais uma Coleção Não-Figural e sim uma Classe! Ok? Podemos prosseguir, pessoal?

[Dando continuidade à discussão, o Pesquisador/Participante continuou a leitura do 2.º parágrafo. Após ler a 1.ª propriedade da classificação, percebeu-se a necessidade de escrever na lousa uma representação de modo a ilustrá-la, já que as participantes indicaram possuir dúvidas quanto ao entendimento da mesma. Enquanto denotava o seguinte esquema, o Pesquisador/Participante foi falando concomitantemente.]



23. **Pesquisador/Participante:** Dá-se ao sujeito um conjunto de 5 rodela [‘1.º **Momento**’] e pede-se ao mesmo que as classifique. O sujeito vai classificar quando, primeiro, utilizar todos os elementos [2.º **Momento**’] ‘a’, ‘b’, ‘c’, ‘d’ e ‘x’. Ele compreende o seguinte, ao fazer a classificação: eu tenho a classe das rodela rosa e tenho a classe, embora seja unitária (singular), da amarela [3.º **Momento**’]. Estas duas classes estão incluídas hierarquicamente na classe das rodela. [4.º **Momento**’]

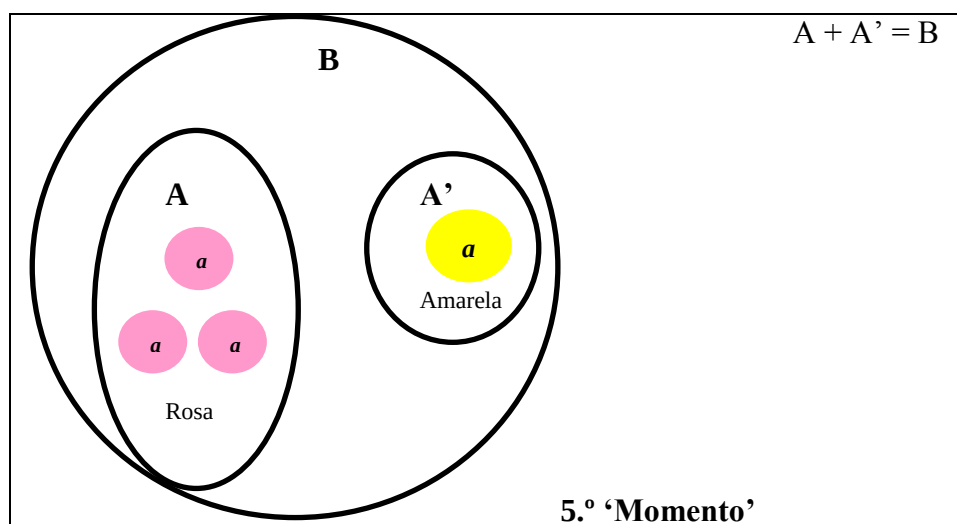


Ou seja, todas as rodela foram classificadas. Mesmo que tenha ficado um elemento isolado ele foi classificado. Porque ele está contido nesta classe ‘maior’, digamos assim! Melhorou a compreensão da 1.ª propriedade? **[Todas as participantes sinalizaram afirmativamente. Em continuidade, foi feita a leitura da 2.ª propriedade da classificação e posterior discussão.]**

24. **Pesquisador/Participante:** Esta 2.ª propriedade ficou um pouco confusa?

25. **P-4:** *Sim!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**

26. **Pesquisador/Participante:** Então vamos tentar compreendê-la a partir deste exemplo das rodela. Nós podemos chamar a classe das rodela rosa de A maiúsculo, e que possuem como característica o a minúsculo sendo a cor rosa. E, a classe da rodela amarela A' possui como característica o a' minúsculo que é a cor amarela. [5.º **Momento**]



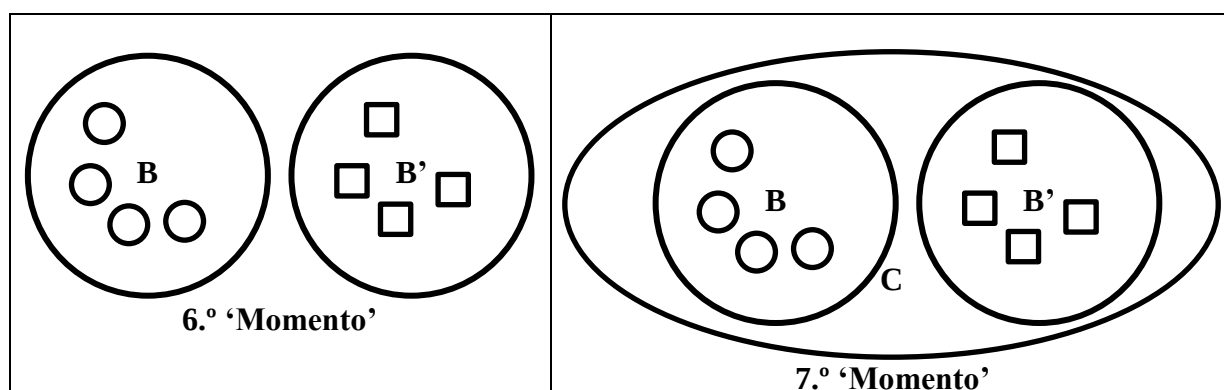
Essa característica $\underline{a}$ é o ‘oposto’ dessa característica $\underline{a'}$. [Neste instante apontou para as rodela desenhadas na lousa referentes às rosas e à amarela.] Mas, se eu juntar este A com o A’ eu vou ter o todo que no caso podemos chamar de B. [Ao dizer isso escreveu na lousa, ao lado da representação acima, $A + A' = B$.] Então, pessoal, é neste sentido o significado da 2.^a propriedade: $A + A' = B$! Ou seja, a característica $\underline{a}$ se opõe à característica $\underline{a'}$... Lembram no Grupo anterior quando discutimos a negação, pra ser uma rodela rosa não pode ser amarela! Pessoal, deu pra começar a compreender melhor a 2.^a propriedade? [As participantes, enquanto anotavam o esquema feito na lousa, sinalizaram que estavam compreendendo tal propriedade por meio de expressão facial.] Concluindo, esta classe A complementa a classe A’ e A’ complementa a classe A constituindo a classe mais próxima B.

[Foi feita a leitura da 3.^a e 4.^a propriedades. Devido às explicações e representações expostas na lousa, as participantes salientaram que ‘agora’ haviam conseguido compreendê-las. Para a explicação da 5.^a propriedade, o Pesquisador/Participante ressaltou que o símbolo $\times$ da expressão $A \times A' = 0$ possuía também o significado de intersecção. Ao dizê-lo, escreveu na lousa o seguinte.]

$$\begin{array}{c} \wedge \\ A \cap A' = 0 \\ \times \end{array}$$

27. **P-2:** Mas daí o elemento comum não é o fato delas serem rodela?

28. **Pesquisador/Participante:** Mas daí ao levar em consideração apenas o fato de serem rodela não permite diferenciá-las entre a e a’. O sujeito pode, sim, classificá-las como sendo apenas rodela, como é o caso classe B. Só que, daí, não terá uma classe complementando a outra. Agora, haveria sim uma classe caso eu tivesse também o seguinte... [Neste momento desenhou, ao lado da representação esboçada no 5.º ‘Momento’, o exposto abaixo.]



Agora, a complementar de B, ou seja, das rodela coloridas seria a classe B’, isto é, dos quadrados coloridos. [6.º Momento] O critério comum de B é ser rodela, e o de B’ é ser quadrado. Dá pra perceber que a intersecção de B e B’ não resulta em nenhum elemento. Mas, a reunião destas duas classes estaria contida em qual classe mais próxima? [7.º Momento]

29. **P-2:** Seria das Figuras Geométricas?

30. **Pesquisador/Participante:** Isso! É a classe das Figuras Planas. [Escreveu ao lado da letra C ‘Figuras Planas’.] Eu posso chamar esta classe de C, lembrando que poderia ser qualquer outra letra ou símbolo. Então, a classe B mais B’ constitui a C. [Denotou na lousa, abaixo da expressão que indicava a disjunção entre B e B’, a seguinte relação.]

$$B \times B' = 0$$

$$B + B' = C$$

31. **P-2:** *Então, mas assim, oh! E, se de repente eu tivesse um grupo assim: os amarelos e os rosas, que eu iria estar misturando as rodelaas com os quadrados. Mesmo assim continuaria assim?*

32. **Pesquisador/Participante:** Sim, mas agora o critério da classe C seria ‘Cores’ e não ‘Figuras Planas’. Conseguiram visualizar isso, pessoal? [Todas as participantes, por meio de gesto facial, sinalizaram afirmativamente.] Percebam que a C [Apontou para o esquema denotado no 7.º Momento.] contém as triangulares, as pentagonais, as em forma de losango ou as irregulares... tudo bem!? Deu pra compreender pessoal?

33. **P-5:** *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

34. **Pesquisador/Participante:** A compreensão das propriedades da classificação está ficando mais “palpável”? [Como todas as participantes sinalizaram afirmativamente, deu-se continuidade à discussão das demais propriedades.]

[Após a leitura da 6.ª propriedade, P-7 disse não haver compreendido-a. Deste modo, o Pesquisador/Participante realizou a seguinte intervenção.]

35. **Pesquisador/Participante:** O texto está falando que os elementos da classe A’ possuem a característica a_x . Eu poderia chamar de a’, mas o texto resolver escrever desta maneira. E, apenas acrescentou que o conjunto dos elementos A’ é igual ao conjunto dos elementos A_x , já que tais elementos contém a característica a_x . E o texto denota que os elementos de caractere a_x são os não-a e os elementos de caractere a são o não- a_x ... lembrando, através da negação que, para que algo seja alguma coisa há a necessidade de se negar ‘outra’ coisa... [Durante tal explicação o Pesquisador/Participação utilizou o esquema denotado no 5.º Momento.] Tudo bem, P-7?

36. **P-8:** *Porque não deixou a’ ao invés de colocar a_x ?* [Falou isso em tom irônico, desencadeando riso entre as demais participantes. A partir disso é possível inferir a dificuldade das participantes em pensarem ao]

37. **Pesquisador/Participante:** É devido apenas à notação adotada pelo autor.

38. **P-4:** *É porque é Matemática!* [Risos entre as participantes.]

39. **Pesquisador/Participante:** A Matemática é maravilhosa, P-4! [Riso geral.] Eu vou aplicar uma injeção de ânimo na P-4! [Riso geral.] Devia existir, né pessoal?!

40. **P-4:** *Se existisse eu ia tomar...* [Risos.]

[Dando continuidade, foi feita a leitura, pelo Pesquisador/Participante, da 7.^a propriedade referente à inclusão. Neste momento, para explicar a relação $A \times B = A$ considerou-se o exemplo das rodela rosa e amarela. Para tanto, escreveu-se na lousa as seguintes relações.]

$A \times B = A$	$A = B - A'$
$A' \times B = A'$	$A' = B - A$

[Ao discutir a 8.^a propriedade ressaltou-se que, a simplicidade em extensão reside no fato de ‘encaixar’ as classes ‘mais simples’, no caso das rodela rosa (A) e amarela (A’), numa classe próxima, ou seja, na classe das rodela (B). Se fossem ‘encaixadas’ as classes das rodela rosa (A) e amarela (A’) diretamente na das Figuras Planas (C) não haveria tal simplicidade de extensão.]

[Em relação à 9.^a propriedade, observou-se a seguinte discussão.]

41. **Pesquisador/Participante**: Dá pra visualizar tal propriedade, pessoal?
 42. **P-7**: Poderia misturar os objetos e só separar pela cores? [A participante referiu-se ao fato de misturar as rodela e os quadrados, separando-os por cores, independentemente de suas formas serem diferentes.] Por exemplo, no quadrado e no círculo, eu separaria a rodela rosa e o quadrado rosa dos amarelos?
 43. **Pesquisador/Participante**: Não!
 44. **P-2**: Porque daí as classes não seriam do mesmo nível, não é isso?
 45. **Pesquisador/Participante**: Isso! Porque eu teria quadrados e rodela. Aqui não são classes do mesmo nível? [Apontou para a representação do 5.^o ‘Momento’.] E eu peguei o critério ‘mais simples’ que é a cor... é isso que representa a 9.^a propriedade! [Todas as participantes, a partir do exemplo denotado, sinalizaram compreender tal propriedade.]
- [A 10.^a propriedade foi deixada em momento posterior para discussão devido ao seu nível de dificuldade, embora P-2 tivesse dado um exemplo que poderia representá-la.]
46. **Pesquisador/Participante**: Pessoal, melhorou o entendimento das propriedades a partir da nossa conversa?
 47. **P-7**: Ah, vamos ver na hora de fazer!
 48. **P-8**: É, agora que você explicou sim, mas depois tem que voltar e ler de novo. E você, entendeu P-1?
 49. **P-1**: É... mais ou menos!
 50. **Pesquisador/Participante**: Mais ou menos!? Em qual parte você não conseguiu compreender?

51. **P-8:** *A P-2 foi falando junto com você e deu pra ir entendendo...* [A participante indicou que o diálogo estabelecido entre P-2 e o Pesquisador/Participante no momento da discussão das propriedades da classificação facilitou a sua compreensão.]

52. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, quando a gente for fazer na ‘prática’ a classificação vai melhorar. Podemos continuar? [As participantes concordaram.]

[O Pesquisador/Participante deu continuidade à leitura do referido texto. Durante a leitura do 3.º parágrafo, chamou-se atenção ao fato de que, a criança que se encontra na fase das Coleções Não-Figurais ainda não construiu a 7.ª propriedade referente à inclusão. Neste sentido, ressaltou-se o seguinte.]

53. **Pesquisador/Participante:** A criança da 2.ª fase ainda não compreende que A e A' estão contidos em B de tal modo que $A = B - A'$ e $A' = B - A$. A criança apenas realiza uma união aparente de $A + A'$ totalizando B , mas não consegue ‘fazer’ o caminho inverso, ou seja, obter A' a partir de $B - A$ e A por meio de $B - A'$. Deu pra perceber, pessoal? [Neste instante apontou para a representação feita na lousa referente ao 5.º ‘Momento’.] Quem se encontra na 2.ª fase entende muito bem esta operação de justaposição $A + A' = B$, mas não compreende ainda a operação inversa $A = B - A'$ e $A' = B - A$ já que ainda não construiu a inclusão ‘de fato’. Se você perguntar pra esta criança, “O que contém mais, rodela ou rodela rosa?” A criança desta fase vai responder “Rodela rosa!” pois ainda ele não compreendeu que as rodela rosa estão incluídas nas rodela. Este sujeito ainda fica preso à quantidade de cada classe. A partir do momento que o sujeito compreende a operação inversa podemos dizer que ele está na 3.ª fase. E daí, P-1, está dando pra compreender?

54. **P-1:** *Sim, essa parte que você explicou melhorou bastante!*

55. **Pesquisador/Participante:** Ah, que bom! Já estava ficando preocupado!

[Durante a leitura do 4.º parágrafo e da citação subsequente, houve a discussão acerca da importância da retroação possibilitando ao sujeito manter um critério do começo ao fim para classificar os elementos do conjunto. Tal capacidade de conservar um único critério é que diferenciava as crianças da 2.ª fase das Coleções Não-Figurais com as da 1.ª Fase das Coleções Figurais. Neste momento P-5 ressaltou que devido a esta não retroação que a criança produzia os alinhamentos mudando os critérios e P-1 compartilhou com a mesma tal ideia. O Pesquisador/Participante chamou a atenção ao fato de que a prova do conhecimento enquanto uma construção apóia-se nestas descobertas de Piaget ao acompanhar o início e o desenvolvimento do conhecimento pelo sujeito, pois, caso o conhecimento já nascesse com o indivíduo, logo de início o mesmo saberia classificar corretamente todos os elementos de um conjunto.]

[Finalizando, foi discutido o significado dos métodos ascendentes e descendentes. Acerca da última citação denotada ressaltou-se que nas Coleções Não-Figurais ainda não há uma diferenciação ‘completa’ da compreensão e da extensão pelo fato do sujeito ainda não pensar, simultaneamente, por meio do processo ascendente $A + A' = B$ e descendente ($A' = B - A$ ou $A = B - A'$).]

56. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, deu pra compreender a diferença entre as Coleções Figurais das Não-Figurais? [A P-1 sinalizou possuir dúvida, no entanto, ao ‘pensar mais um pouco’ a mesma acabou falando que havia compreendido. Tal

comportamento indicou, provavelmente, um movimento de ‘acomodação’ de um ‘novo’ conhecimento. Após tal episódio, P-2 ressaltou o exposto abaixo.]

57. **P-2:** *Assim, oh... nas figurais que seriam uma sequência contínua que ele faz com os objetos. Já nas não-figurais ele faz pequenos grupos...*

58. **Pesquisador/Participante:** Sim, lembrem que nas Coleções Não-Figurais os sujeitos fazem pequenos agregados conservando um único critério, uma semelhança, ou seja, tem uma compreensão e também uma extensão já que o sujeito agrupa todos os elementos que possuem o mesmo critério. Ok? Ele só não entende a inclusão porque na pergunta “Existem mais rosas ou flores?”, caso existam mais rosas ele vai responder que há mais rosas, porque o sujeito não consegue ‘conjugar’ a operação direta e ‘voltar’ pela inversa.

59. **P-2:** *Eu posso dizer que não existe uma sequência quanto a isso, ou seja, tem criança que pode ir direto para as Coleções Não-Figurais?!*

60. **Pesquisador/Participante:** Não! Sempre a criança irá ‘passar’ pelas Coleções Figurais. Dentro das Figurais é que não tinha sequência, o sujeito podia fazer complexo, coletivo ou alinhamento, independentemente da ordem. O sujeito primeiro vai ‘passar’ pelas Figurais por estar preso à intuição e à percepção... Agora na 2.^a fase a criança está começando a fazer ‘operações’...

61. **P-2:** *Mas pode ser rápido? Por exemplo, num instante passar da 1.^a para a 2.^a fase?*

62. **Pesquisador/Participante:** Num instante... Eu diria que... no caso de uma superdotação... mais ou menos.

63. **P-8:** *Quem você conhece assim?*

64. **P-2:** *Minha sobrinha!*

65. **Pesquisador/Participante:** Como você observou isso na sua sobrinha?

66. **P-2:** *Assim, a minha sobrinha ganhou 20 cavalinhos de brinquedo e de 4 em 4 era de uma cor. E daí eu pedi pra ela, brincando na verdade, “Separe eles pra mim!” e ela começou a separar por cor mesmo! E, assim, na verdade ninguém tinha falado nada pra ela e ela separou... Mas daí eu comecei a perguntar assim, pra ela: “Tem mais cavalinhos brancos ou vermelhos?”, daí ela foi lá e contou e respondeu que eram iguais. Daí eu já assustei, “Nossa, ela já pensou em contar tudo!”... daí eu virei pra ela e perguntei: “E aí, tem mais brancos ou mais cavalos?”, e ela respondeu mais cavalos!*

67. **Pesquisador/Participante:** Quantos anos?

68. **P-2:** *Três!*

69. **Pesquisador/Participante:** Interessante!

70. **P-2:** *Daí eu até pensei que ela não havia entendido a minha pergunta! [Risos entre as participantes.]*

71. **Pesquisador/Participante:** Pode acontecer da criança ter pego a última palavra da pergunta! Pode ser! No entanto, seria necessário fazer mais testes, embora possa ser um caso de superdotação. Porque, embora sejam necessários testes rigorosos, isso indica que a sua sobrinha já compreendeu a regulação “todos” e “alguns”, ou seja, “alguns” brancos são “todos” cavalos.

72. **P-2:** *E outro dia eu fiz também, sabe aqueles espetinhos que são todos coloridos, tipo petiscos/ garfinhos, eu fiz a mesma coisa! Daí eu pedi pra ela separá-los pra mim, e ela brigou comigo porque ela não separou o verde limão do verde escuro e misturou os dois. Daí eu perguntei se tava certo e ela falou que sim porque tava tudo verde! E daí eu mostrei a diferença e ela separou. E quando eu perguntei se tinha mais de uma cor ou mais garfinhos ela respondeu que tinham mais garfinhos.*

73. **Pesquisador/Participante:** Interessante! No entanto, tem que ver que pra sua sobrinha tais objetos possuem uma vivência cotidiana, ela os utiliza. Tente pegar outros objetos que ela possui pouco contato. Porque isso também influencia pra poder fazer um teste. Mas pode ser, porque não! Eu já afirmei aqui que os superdotados irão percorrer todas as fases, no entanto eles o farão mais rapidamente!

74. **P-2:** *Eu vejo assim, eu não acho que seja superdotação. Eu vejo que ela é uma criança muito atenta! Ela presta muito atenção naquilo que a gente fala!*

75. **P-8:** *É, mas você vê que ela é atenta, e tem criança que não é, por isso ela é diferente. Tem criança que, por mais que você fale as coisas ela não... por mais que tenha objetos e que estejam numa classe igual tem criança que não ‘pega’, e sua sobrinha... ela tem aquela atenção especial... É diferente...*

76. **Pesquisador/Participante:** Seria interessante, P-2, você pegar esses cavalinhos, pegue dois outros animais de brinquedo: um cachorro e um hipopótamo... E daí você pergunta pra ela: “O que tem mais, animais pra você brincar ou cavalos de brincar?” ou “O que tem mais, cavalos de brincar ou animais pra você brincar?”. Se ela responder que são animais pra brincar daí é um forte indício da construção da inclusão. Você percebe que eu mudei o critério... não tem só cavalos, eu ampliei a classe, eu peguei duas complementares uma específica (singular) constituída de cachorro e a outra pelo hipopótamo. Caso ela responda corretamente é um forte indício de que já compreenda a inclusão com a relação “alguns” cavalos são “todos” os animais pra brincar. No entanto, nas Coleções Não-Figurais a criança vai responder que tem mais cavalos já que há 20 em comparação a 1 cachorro e 1 hipopótamo. Pessoal, esta interessante discussão facilitou ainda mais a compreensão acerca das fases da classificação? **[Todas as participantes, por meio de expressão facial, indicaram afirmativamente.]**

[Em seguida, o Pesquisador/Participante retornou às duas questões acerca do texto discutido. Em relação à 1.ª questão sobre a existência das propriedades de classificação nas Coleções Figurais, P-2 discursou o exposto abaixo.]

77. **P-2:** *Eu entendo que não, porque não existe uma classificação! Existem critérios isolados, na verdade!*

78. **Pesquisador/Participante:** Quem concorda com P-2? **[P-7 levantou a mão esquerda sinalizando concordar com P-2.]**

79. **P-8:** *E esse daqui de fazer a casinha?* [Referiu-se a uma representação de uma casa feita por uma criança que se encontra na fase das Coleções Figurais.]

80. **P-2:** *Então ele muda, ele nem lembra que estava classificando!* [Como se observou certa dúvida entre as participantes, o Pesquisador/Participante interveio.]

81. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, lembrem que o experimentador colocou na mesa várias formas geométricas e pediu para a criança agrupar aquilo que parecia semelhante. Vocês concordam que o quadrado não se parece com o triângulo, e mesmo assim a criança os juntou para representar uma casa!

82. **P-8:** *Ah, sim!*

83. **P-1 e P-5:** *E a 4 e a 8?* [Referiram-se às representações 4 e 8 denotadas no item das Coleções Figurais – Situação Problema 1.]

84. **Pesquisador/Participante:** Qual é a dúvida?

85. **P-1:** *Eu acho que aí aparecem as propriedades!*

86. **Pesquisador/Participante:** Não podemos esquecer que na 4 o sujeito não classificou os quadrados que estavam juntos, nem os triângulos...

87. **P-4:** *Ele não separou, assim, 3 montinhos, colocou tudo uma coisa só...* [Referiu-se ao fato de que, caso a criança desta fase já realizasse a classificação, teria separado o total de formas geométricas em classes complementares.]

88. **P-8:** *Ah, ficou faltando ele classificar os quadrados, os triângulos... faltando na mesa!*

89. **Pesquisador/Participante:** Isso! E na 8 sobraram na mesa outras figuras que o sujeito não classificou.

90. **P-2:** *É que o problema não mostrou, na verdade, as várias formas geométricas que a criança tinha que separar e que estavam na mesa!*

91. **P-8:** *Na verdade, oh, tinham todas essas formas!* [Referiu-se às formas geométricas representadas nas construções feitas pela criança da fase das Coleções Figurais.]

92. **P-1:** *Ah, eu entendi...!*

93. **Pesquisador/Participante:** Então, pessoal, vocês concordam com a P-2 que nas Coleções Figurais não tem nenhuma das 10 propriedades da classificação! Ok? [Todas as participantes, após interessante discussão, chegaram à conclusão de que as propriedades da classificação não se encontram na 1.ª Fase das Coleções Figurais.]

[Sobre a 2.ª questão referente a presença, ou não, das 10 propriedades no exemplo do item 4.2.1 a respeito da pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli observou-se o seguinte.]

94. **P-5:** *Eu enxerguei algumas, não sei se tem todas as propriedades.*

95. **P-8:** *Eu também não sei se tem todas...*
96. **P-4:** *É, talvez a que não teria seria a da reversibilidade, a 7.^a propriedade...*
97. **Pesquisador/Participante:** *Seria a da inclusão?*
98. **P-4:** *É!*
99. **P-2:** *Mas, o fato de ter representado o item F por meio do não-B, não-C... não significa que tenha a reversibilidade, a inclusão?*
100. **Pesquisador/Participante:** *Sim! Vocês conseguiram entender o que a P-2 falou pessoal? [As demais participantes, exceto P-8, compreenderam a ideia exposta por P-2 ao afirmar que em tal exemplo também havia a 7.^a propriedade. Neste sentido, o Pesquisador/Participante pediu a P-2 que falasse novamente a sua ideia.]*
101. **P-2:** *A questão de compreender, que, em F, na categoria terror seria o total e o não-B, não-C, não-D e não-E já é uma reversibilidade...*
102. **Pesquisador/Participante:** *É isso mesmo!*
103. **P-8:** *Ok!*
104. **P-2:** *A única que eu não consigo ver é a 10.^a propriedade, até porque a gente não estudou ela ainda.*
105. **Pesquisador/Participante:** *Daqui a pouco vamos analisá-la!*
106. **P-8:** *Gente, que complexo isso! Eu preciso depois ler novamente! Eu não pego fácil que nem a P-2! Por isso eu falo que ela é inteligente! Ela pega rápido as coisas.*
107. **P-4:** *Igual a sua sobrinha, P-2!*
108. **P-8:** *Eu acredito em inteligência, lógico que é construído, tanto o meio, mas tem um fator também que... Eu tenho uma amiga que a família são todos inteligentes, eles passam assim, em tudo quanto é 1.^o lugar em todo concurso...[Tal fala indicou que a participante, embora aceite a ideia de conhecimento enquanto construção, ainda atribui à inteligência um fator hereditário.]*
109. **P-2:** *Mas você concorda que o ambiente em que eles vivem influenciam...*
110. **P-8:** *Sim!*
111. **P-4:** *Por exemplo, pega a sobrinha da P-2 e coloca num outro lugar...*
112. **P-8:** *Não, eu sei disso, eu acredito!*
113. **P-4:** *Muda tudo!*
114. **P-2:** *Imagina o estímulo dessa casa da sua colega, deve ser altíssimo!*

Considerando as 10 propriedades definidoras de uma classificação, marque, no quadro abaixo, um **X** para as propriedades que são observadas em cada uma das Fases da classificação.

[illegible]

[Enquanto as participantes conferiam suas respostas, P-1 mostrou-se um pouco confusa. Desse modo, P-2 interveio no intuito de auxiliá-la. P-7 denotou o fato de que, após a exposição das 10 propriedades no texto lido, havia um parágrafo em que estava explícito que o sujeito da fase das Coleções Não-Figurais apenas não realiza a 7.^a propriedade da inclusão, e este fato o diferenciava dos sujeitos da fase das Classes (3.^a). Após tal auxílio, P-1 disse que havia conseguido compreender o referido quadro e as propriedades da classificação pertencer às fases.]

128. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, é interessante vocês conversarem, trocarem ideias entre si, pois nem sempre ajuda eu ficar falando a todo o momento! Vocês acham que a compreensão de vocês acerca das fases da classificação está melhorando!

129. **P-2:** *Ah, eu tô achando que hoje estou entendendo melhor do que no anterior, até o anterior eu estou entendendo melhor!*

130. **P-4:** *Ah, eu entendi, mas se tirar a explicação feita na lousa eu não sei!*

131. **P-8:** *Ah, eu entendi, mas, tipo assim, se você me perguntar eu não sei responder... Eu precisava de fazer... eu, eu preciso fazer exercícios... É o que eu gravo, Pesquisador/Participante.*

132. **Pesquisador/Participante:** Daqui a pouco você vai fazer uma atividade!

133. **P-8:** *A minha maneira de entender é diferente. Eu acho que a P-1 é assim, também! A gente precisa do concreto!*

134. **P-1:** *É!*

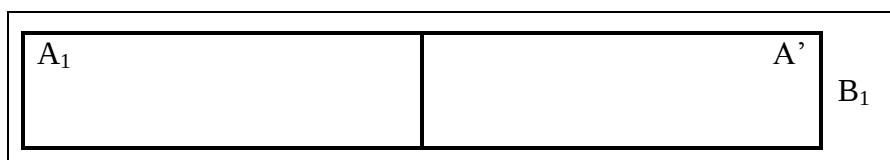
135. **Pesquisador/Participante:** É por isso que eu trouxe uma atividade, com tais figuras, para vocês realmente fazerem uma classificação! Pra poder confrontar aquilo que estamos lendo, estudando.

136. **P-8:** *Quando eu estudava, eu pegava o texto, eu lia o texto, daí fazia perguntas e respondia... pra mim poder entender e destrinchar aquele texto!*

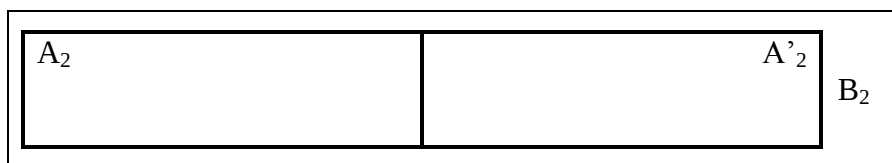
137. **P-5:** *Eu também fazia isso!*

138. **P-8:** *Se eu ler apenas uma vez, não consigo!*

139. **Pesquisador/Participante:** Ok! Pessoal, vamos tentar entender a 10.^a propriedade, porque eu acho que agora, após estas discussões, fica mais fácil. Tal propriedade denota o seguinte: “Simetria nas subdivisões: se a classe B_1 está subdividida em A_1 e A' , segundo um critério que se encontra em B_2 então B_2 estará subdividida em A_2 e A'_2 .” Vamos tentar imaginar isso! Supondo uma classe B_1 subdividida nas classes A_1 e A' . [Neste momento, o Pesquisador/Participante desenhou na lousa o seguinte esquema.]



E agora nós temos uma outra classe B_2 também subdividida em A_2 e A'_2 . [Abaixo da representação anterior, o Pesquisador/Participante desenhou o exposto a seguir.]

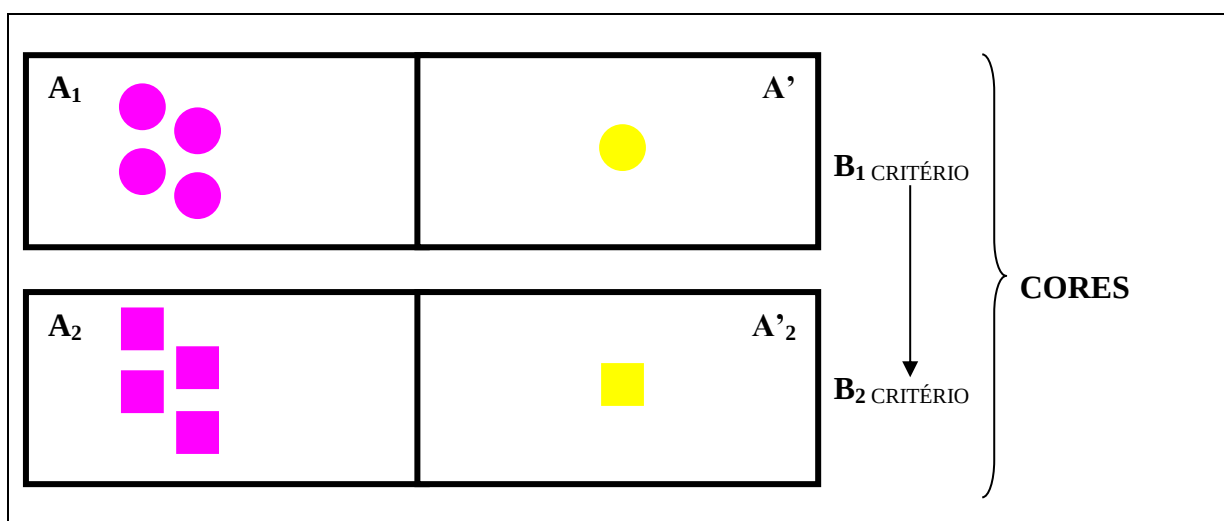


Lembrando, pessoal, que o critério da classe B_1 encontra-se na classe B_2 . Como imaginar um exemplo disso? É por isso que tal propriedade denomina-se simetria nas subdivisões.

140. **P-2:** Não seria o exemplo que eu dei aquela hora?

141. **Pesquisador/Participante:** Fale ele pra gente... Aquela hora, P-2, você nos deu um exemplo que representou a 10.^a propriedade. No entanto, percebi que as suas colegas não conseguiram acompanhar seu pensamento, por isso pedi pra esperarmos um pouco! [As demais participantes concordaram com o Pesquisador/Participante.]

142. **P-2:** Ficaria assim: no A_1 ficariam as rodelaas rosas e no A' a rodela amarela. No A_2 ficariam os quadrados rosas e no A'_2 o quadrado amarelo. [Enquanto falava, o Pesquisador/Participante completou os esquemas há poucos denotados, de tal modo a representar o exposto a seguir.]



151. **P-8:** O critério seria a cor?

152. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo, o critério seria a cor! [Neste momento, o Pesquisador/Participante escreveu a palavra CORES, na lousa, sinalizando ser esse o critério comum entre B_1 e B_2 .] Deu pra compreender esta 10.^a propriedade, pessoal? [Nenhuma participante se manifestou, indicando, por meio de expressão facial ter entendido a partir do exemplo citado por P-2.] Vocês perceberam, pessoal, que o critério cor subdividiu as classes, ou seja, de um lado as rosas e de outro as amarelas. E era realmente o que você tinha falado, P-2! Só que naquele momento eu percebi que as suas colegas...

153. **P-8:** Ficamos no ar, né! [Risos entre as demais participantes.]

154. **Pesquisador/Participante:** Sim, eu percebi que naquele momento, sem as discussões que fizemos posteriormente, o nível de desequilíbrio, se é que posso chamar isso, seria demais...

155. **P-5:** *É isso aí!*

156. **P-2:** *Daí eu fiquei desequilibrada e achei: “Nossa, eu viajei!”* [Risos entre as participantes.]

157. **Pesquisador/Participante:** E isso é interessante porque numa sala de aula vai acontecer episódios como esse. [Todas as participantes concordaram.] E é neste sentido que o professor, ou o orientador, tem que estar atento pra poder fazer essa mediação, até o ponto de falar pro aluno ‘esperar um pouco’. Está dando pra compreender, pessoal?

158. **P-5:** *Isso eu entendi! [Apontou para a representação há pouco desenhada na lousa.] Se o conjunto de Figuras Planas tivessem as rodela rosa e o quadrado rosa. E no amarelo só tivessem quadrados amarelos. Daí a gente separaria por cor, e daí ia ficar a rodela rosa e o quadrado rosa e do outro lado só o quadrado amarelo. E daí ia separar de novo, mas só a rodela rosa do quadrado rosa, já o amarelo não. Daí aonde ficaria a simetria nisso?*

159. **Pesquisador/Participante:** Neste caso não haveria simetria, pois a classe cujo critério é a cor amarela não se subdividira em classes, já que não teríamos as rodela amarelas.

160. **P-5:** *Ah, eu entendi! Então nós temos que observar o critério que é usado para dividir as classes e depois em subdivisões destas classes.*

161. **P-1:** *Mas este critério COR é obrigatório?*

162. **Pesquisador/Participante:** Não! É apenas um exemplo.

163. **P-1:** *Poderia ser FORMA?*

164. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro!

165. **P-2:** *Daí poderia pegar formas e ao mesmo tempo cores.*

166. **Pesquisador/Participante:** Sim, poderia, mas daí nós cairíamos na classificação multiplicativa que consiste em adotar, simultaneamente, dois ou mais critérios. E a que estamos estudando, agora, é a classificação simples, ou também chamada de aditiva. Além destas 10 propriedades, na classificação multiplicativa há mais 4 que a caracterizam! [Neste momento as participantes agitaram-se, sinalizando ser tal classificação mais complexa que a abordada no presente momento.] Esta classificação multiplicativa remete à gênese da matriz... lembram daquelas tabelas de inúmeras entradas com n linhas e m colunas, é mais ou menos isso! Pessoal, podemos prosseguirmos? [As participantes concordaram em prosseguir com a leitura do texto referente ao item 4.2.3 – Classes. O mesmo é esboçado abaixo.]

4.2.3 Classes (inclusão e classificações hierárquicas) – Fase III

A construção da classe pelo sujeito, ou seja, da ‘completa’ diferenciação entre as relações de compreensão e de extensão é devido à coordenação entre os métodos *ascendente* e *descendente* constituindo,

assim, um só sistema de transformações. Ao fazê-lo o sujeito compreende o que é uma inclusão, sendo capaz de construir classificações hierárquicas. Segundo Piaget e Inhelder, a compreensão da inclusão ocorre quando:

[...] mesmo sem destruir a reunião $B = A + A'$, diremos que a criança compreende a inclusão se fôr capaz de perceber que “todos” os A são “alguns” B , ao passo que não haverá inclusão se os sujeitos assimilarem (e veremos que é precisamente o caso) o enunciado “todos os A são B (ou são b)” (por exemplo, tôdas as rodela são azuis) sob a forma “todos os A são todos os B ” (a criança negará, assim, que todas as rodela são azuis, “porque também há quadrados azuis”). A segunda contrapova consistirá, simplesmente, em apurar, no caso em que $A + A' = B$, se há “mais de A ” ou “mais de B ”, por outras, palavras, se o todo é maior do que a parte. Ora, quando os A são mais numerosos do que os A' , o fato de dissociar pelo pensamento os A dos A' destrói o todo B e a criança responde que há mais A do que B (reduzindo-se então os B aos A'), o que é evidentemente incomparável com a noção de inclusão! (PIAGET E INHELDER, 1971, p. 70)

Faz-se oportuno ressaltar que a construção da relação “*todos*” os A são “*alguns*” B demanda um ação/operação crescente por parte do sujeito sobre o objeto com o qual estabelece contínuas interações. É fato que a linguagem e a função simbólica desempenham um papel importante, no entanto, o principal fator de desenvolvimento reside no caráter operatório da inteligência, na qual a reversibilidade marca o início do pensamento operatório permitindo ao sujeito desvencilhar-se das ilusões advindas da percepção e da intuição.

A partir do exposto, é possível perceber as fases sucessivas percorridas pela criança à construção da classificação. Embora seja uma noção ‘simples’ quando interpretada do ponto de vista do adulto, tal operação intelectual demanda tempo e esforço por parte do sujeito a sua constituição. Nesta ‘empreitada’, inicialmente, a manipulação/ação no concreto – possibilitando à criança ‘pensar sobre’ tais ações – faz-se necessária.

[Decorridos 10 minutos, foi iniciada a discussão e todas as participantes concordaram que o exposto no texto já havia sido discutido. Desse modo, foi feita a leitura pelo Pesquisador/Participante da atividade denotada a seguir.]

4.3 Uma proposta-atividade para a construção da classificação

Tal proposta – retirada do livro “Construção da Inteligência pela criança: atividades do período pré-operatório”, autoria de Maria da Glória Seber (1993) – é apresentada abaixo:

Classificação

As atividades de classificação possibilitam a construção de arranjos com invenções progressivas dos critérios utilizados para a reunião de objetos numa ou em várias coleções. A necessidade de as semelhanças e diferenças entre os elementos oferecidos serem descobertas realizadas pela criança significa que o professor NUNCA deve fornecer critérios de seleção, mas sim contra-argumentar perguntando à criança, por exemplo, se ela concorda ou não em agrupar num só conjunto duas ou mais coleções e por quê.

Eis as atividades de classificação:

1. “Dê um como este”.
2. “Separe os parecidos”.
3. Separar o mesmo material continuamente.
4. Discutir os vários critérios adotados na seleção das coleções.
5. Julgar os critérios de separação de um outro grupo.
6. Descobrir os critérios adotados em coleções previamente formadas.
7. Dar um objeto diferente dos demais, dentre os já distribuídos.
8. Introduzir novos elementos nas coleções já feitas.
9. Determinar o número de coleções a serem construídas.
10. Antecipar as coleções a serem construídas.
11. Desenhar símbolos para as coleções já construídas.
12. Completar os espaços vazios dos arranjos, selecionando os objetos mais apropriados.
13. Trabalhar com os quantificadores (todos/alguns).

1. A proposta sugerida vai de encontro com a discussão realizada acerca da construção da classificação? Caso sim, ou não, justifique.

2. Em sua futura atuação enquanto professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental tal proposta

pode se tornar útil? Caso sim, em qual momento? Pense a respeito.

3. Como já discutido, a classificação representa uma das operações mentais necessárias à construção das tabelas. No entanto, em sua opinião, tal operação mental faz-se importante para a construção de algum(s) outro(s) conceito(s) matemático(s)? Caso sim, cite-o(s).

[As participantes acharam interessante a Proposta-Atividade sugerida. Com relação à 1.^a questão, todas concordaram que a proposta ‘vai de encontro’ com a discussão realizada acerca da construção da classificação. Foi ressaltado que as atividades propostas pela autora – Maria da Glória Seber – trabalhavam as ideias referentes à compreensão, extensão, inclusão, antecipação, retroação, reguladores “todos” e “alguns”. Devido ao tempo já transcorrido, as questões 2 e 3 foram deixadas como ‘tarefa’ para casa a ser retomada no próximo encontro.]

[Visando com que as participantes realizassem várias classificações, o Pesquisador/Participante leu a atividade denotada abaixo.]

5.1 Classificação – ‘ação/operação’

No encontro anterior denotou-se uma breve análise acerca da origem da classificação e do seu desenvolvimento, percorrendo desde a fase inicial das coleções figurais até a constituição das classes. No intuito de possibilitar um ‘pensar sobre’ a classificação ‘na ação’ será solicitada a seguinte situação problema.

1. Considere os seguintes elementos desenhados em cartões retangulares:

Quantidade	Elemento
1	Abelha
1	Águia
1	Avião
1	Beija-Flor
1	Borboleta
1	Cachorro

Quantidade	Elemento
1	Cadeira
1	Cavalo
1	Cobra
1	Coruja
1	Escada
1	Gato

Quantidade	Elemento
1	Girafa
1	Libélula
1	Morcego
1	Pardal
6	Pato
1	Peixe
1	Rato

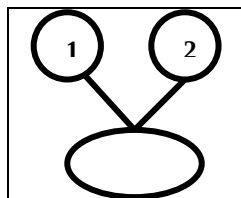
Realize várias classificações de modo a utilizar **TODOS** os 24 elementos estabelecendo as possíveis relações de inclusões hierárquicas entre os mesmos. A cada classe constituída é interessante que você a nomeie, como por exemplo, $A =$ (classe dos elementos que possuem em comum o critério a); $A' =$ (classe dos elementos que possuem em comum o critério a'), denotando, em seguida, qual relação lógica é possível estabelecer. Para tanto, utilize os estudos até o momento realizados acerca das classificações.

[Para cada participante foram dados 24 cartões feitos em papel representando os 24 elementos de modo a permitir que as mesmas os reunissem em classes e, assim, pudessem estabelecer as relações lógicas já discutidas – $A + A' = B$, sendo A e A' complementares; $B + B' = C$, sendo B e B' complementares, etc. O Pesquisador/Participante esclareceu que todos os 24 elementos deveriam ser utilizados para a constituição das classes, e que haveria mais do que duas classes a serem constituídas. P-5 questionou se teriam vários critérios. Em resposta o Pesquisador/Participante disse que haveria vários critérios, mas que, ao final, existiria um critério comum que ‘pegaria’ todos os 24 elementos. P-2 pensou em começar a constituir uma 1.^a classe apenas com os patos e o Pesquisador/Participante disse que tal critério seria interessante de ser utilizado para a 1.^a classe a ser construída.]

[P-1 ressaltou que usaria como critérios o fato dos elementos pertencerem à terra, à água e ao ar. O Pesquisador/Participante advertiu que, embora fosse possível realizar tal classificação, não seria possível realizar todas as inclusões possíveis entre as classes. P-1, após tal fala, realizou o seguinte questionamento.]

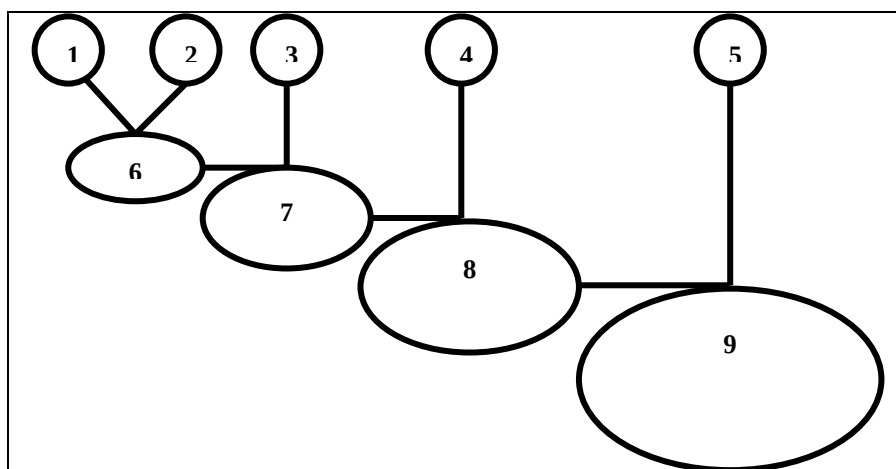
167. **P-1:** Então, o que seria esta inclusão?

168. Pesquisador/Participante: A inclusão é quando, por exemplo, você tem uma classe com um critério comum, outra classe com outro critério comum e estas duas classes formam um classe ‘maior’ que contém estas duas classes ‘menores’. [Neste momento, o Pesquisador/Participante desenhou na lousa o seguinte esquema.]



169. Pesquisador/Participantes: Tudo bem, pessoal? Por exemplo, consideremos a classe ‘maior’ dos animais mamíferos. Daí temos a classe dos animais racionais que somos nós, depois a classe dos macacos, depois dos morcegos, depois das baleias, etc., e todas estas classes ‘menores’ estão incluídas na classe ‘maior’ dos mamíferos.

[Foram disponibilizados 5 minutos iniciais no qual o Pesquisador/Participante não realizou nenhuma intervenção. Neste intervalo de tempo percebeu-se que as participantes estavam encontrando certa dificuldade. Desse modo, o Pesquisador/Participante lhes disse que, para a realização das inclusões possíveis, deveriam ser constituídos, separadamente, 5 classes inicialmente. Como as participantes denotaram, por meio de expressão facial, certa ‘confusão’, foi esboçado na lousa o seguinte esquema.]



170. Pesquisador/Participante: Primeiro vocês irão separar os 24 elementos em 5 classes. Depois, duas destas classes (1 e 2) vão formar uma outra classe (6). Esta classe (6) com mais outra (3) formará uma classe maior (7). Esta classe (7) com mais outra (4) formará uma maior ainda (8). E esta (8) com a última classe (5) formará uma classe (9) que conterà os 24 elementos. [Enquanto o Pesquisador/Participante realizava tal explicação, as participantes começaram a rir indicando certo espanto quanto às inúmeras relações de inclusões hierárquicas possíveis de serem realizadas a partir dos 24 elementos considerados. O Pesquisador/Participante pediu que, inicialmente, as mesmas tentassem separar todos os elementos nas 5 classes.]

[P-2 e P-4 pensaram em constituir duas classes, uma com as aves, incluindo os patos repetidos e outra apenas com insetos. P-8 complementou sinalizando ser possível outra classe apenas com os mamíferos. No entanto, P-2 observou que também haviam

répteis e P-4 advertiu que existia o peixe e daí não saberia onde colocá-lo. P-1, P-5 e P-7 observavam a discussão realizada ente P-2, P-4 e P-8 e também foram separando os elementos por meio dos critérios expostos pelas 3 participantes. P-8 quis juntar a cobra com o peixe e P-4 falou que não havia critério comum entre ambos por serem réptil e peixe; P-2 interrompeu dizendo que não existia problemas em deixá-los juntos constituindo uma outra classe. Neste momento P-8 indagou.]

171. **P-8:** *Mas só dá pra fazer 5 classes?*

172. **Pesquisador/Participante:** Não, é possível fazer mais do que 5 classes. No entanto, do modo como propondo para que vocês consigam formar as tais relações de inclusão, é necessário formar apenas 5 classes. Porque, caso vocês formem mais classes, ao fazerem as inclusões algumas classes ficarão de fora.

173. **P-8:** *Você deveria ter feito um aquário, daí dava pra por o peixe aqui!* [Risos entre as participantes.]

174. **Pesquisador/Participante:** Uma ajuda, já que senão vai ficar complicado vocês iniciarem a construção das 5 classes. A classe mais simples, digamos assim, é a constituída apenas pelos patos.

175. **P-1:** *Só pelos patos?*

176. **P-2:** *Sim, pelos 6.*

177. **Pesquisador/Participante:** Vocês podem até nomear como eu pedi! A classe A igual os patos (A = patos). Daí vocês vão construir outra classe que seja complementar à classe dos patos.

178. **P-8:** *Mas o pato é só pato?*

179. **Pesquisador/Participante:** É uma ave-pato!

180. **P-8:** *Ah tá!*

[As participantes iniciaram novamente um ‘pensar sobre’ tais classificações. P-1 e P-5 tentavam, em dupla, a obtenção das demais classes. P-2, P-4, P-7 e P-8 tentaram constituir outra classe com os animais que tinham asas. Ao perceberem a presença do avião acharam que seria possível colocá-lo nesta classe já que também possuía asas. P-7 disse que deveriam separar os elementos que tinham asas e os que não tinham; já P-2 denotou que faria sentido separar os elementos que possuíam patas e os que não possuíam. Neste momento, P-4 falou, em tom elevado: “E a escada? Vamos colocá-la aonde?”. Como as participantes ficaram numa situação ‘complicada’, o Pesquisador/Participante interveio dizendo para as mesmas não considerarem o critério ‘patas’. Após dizer isso, P-2 questionou.]

181. **P-2:** *Então asas tem a ver?*

182. **Pesquisador/Participante:** Também não!

183. **P-4:** *Então devemos fazer a classe das aves!*
184. **P-2:** *Mas daí, depois, nós precisamos pegar os outros elementos, e daí...*
185. **P-4:** *Ah, mais, não sei!*
186. **P-2:** *Você conseguiu fazer?* **[Referiu-se ao Pesquisador/Participante, observando-se, em seguida, risos das demais participantes.]**
187. **Pesquisador/Participante:** No livro está denotado as classes iniciais, depois as inclusões eu tive que fazê-las sozinho.
188. **P-2:** *Então lá dizia que a classe inicial começa com pato?*
189. **Pesquisador/Participante:** Sim, começa com a classe dos patos! Acho interessante vocês pensarem mais um pouco!
190. **P-8:** *Tá bom! O que vocês pensaram, P-1 e P-5?*
191. **P-1:** *Eu separei em 6!*
192. **P-8:** *Em quais você separou?*
193. **P-1:** *Eu separei em pato; as aves; os insetos; o outro é o peixe e a cobra que botam ovos; os mamíferos e os objetos.*
194. **P-8:** *Ah, foi igual ao que eu fiz!*
195. **Pesquisador/Participante:** Turma, é interessante pontuar que vocês não estão errando, ok! Só que, desta maneira, as relações lógicas possíveis de tal modo a chegar numa classe ‘total’ fica complicado! Mas quando vocês forem aplicar esta atividade com seus alunos, se ele considerar apenas um critério comum, como só ter asas e formar uma classe está certo! Só que, além disso o sujeito precisa antecipar de modo a pensar em como incluir todos os elementos em uma classe ‘final’.
196. **P-4:** *É, daí não inclui!*
197. **P-8:** *Ah, então não tem jeito!*
198. **Pesquisador/Participante:** Sim, tem! Oh, pra ajudá-las mais um pouco! A primeira classe seria a dos patos. A segunda classe seria a das aves não-patos. Agora vocês tentem pensar nas restantes, tudo bem? **[P-2 falou que a próxima seria a dos insetos; a próxima seria a dos mamíferos. Neste momento, P-1 disse.]**
199. **P-1:** *A gente, está tudo relacionado aos patos!*
200. **P-8:** *Daí tem a do pato e a do inseto!*
201. **P-1:** *Mas que semelhança tem do pato com o inseto?*

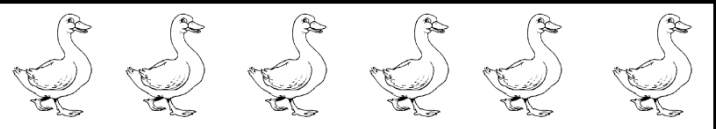
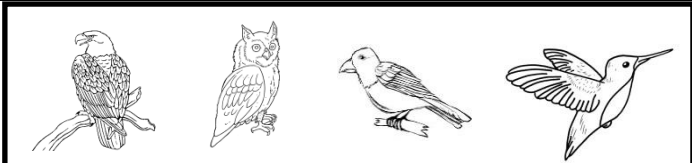
202. **P-2:** *Pato come inseto! Ave como inseto!*
203. **P-8:** *É isso que eu ia falar!* [Observou-se, entre todas as participantes, um ‘pensar sobre’ diferentes maneiras para a classificação dos elementos restantes. P-8 disse ser possível classificar em animais domésticos e P-4 falou que a girafa não era um animal doméstico.]
204. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, é interessante as possibilidades. Lembra que eu falei que as duas primeiras classes constituiriam uma maior?
205. **P-2:** *Sim, são as aves!*
206. **Pesquisador/Participante:** Sim!
207. **P-2:** Mas e o resto?
208. **P-1:** *Ah, os animais em geral!*
209. **P-5:** *Vamos fazer as 5 classes primeiro, depois a gente junta!*
210. **P-1:** *Porque a 5.^a poderia ser essas coisas, aqui. [Ergueu os cartões representando os objetos inanimados – avião, cadeira e escada.] Porque daí ficariam os animais e os...*
211. **Pesquisador/Participante:** Esta 5.^a que você falou P-1 tem o quê em comum?
212. **P-1:** *Não são vivos!*
213. **Pesquisador/Participante:** Isso, perfeitamente!
214. **P-5:** *Ah, então a gente já tem 3, vamos separar. E daí sobrou os mamíferos e os insetos mais a cobra e o peixe e desses vai ter que virar dois, não é isso?*
215. **Pesquisador/Participante:** Vocês já tem os patos, as aves não-patos e os objetos sem vida. Daí eu falei que vocês precisam formar 5 classes separadas e depois realizar as inclusões.
216. **P-5:** *Então nós temos os mamíferos, os insetos, a cobra e o peixe. [Como o Pesquisador/Participante percebeu que as participantes insistiam nas classificações ‘biológicas’, advertiu o seguinte.]*
217. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, não pensem nas classes da Biologia! [Todas exclamaram: “Ah!”.]
218. **P-2:** *Ah, mas então, poderia ser o que a P-1 falou, os insetos e os que não são insetos!*
219. **P-8:** *Mas daí sobra o peixe!?*
220. **P-2:** *Mas é como não insetos. E daí ficamos com 1, 2, 3, 4 e 5. [Apontou, com os dedos, para as classes agrupadas em sua carteira.]*

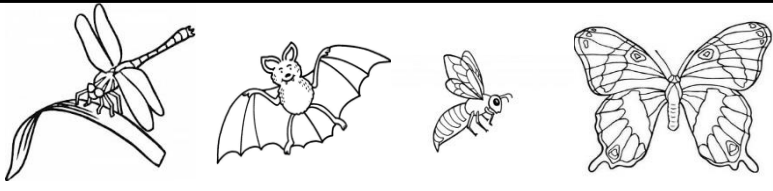
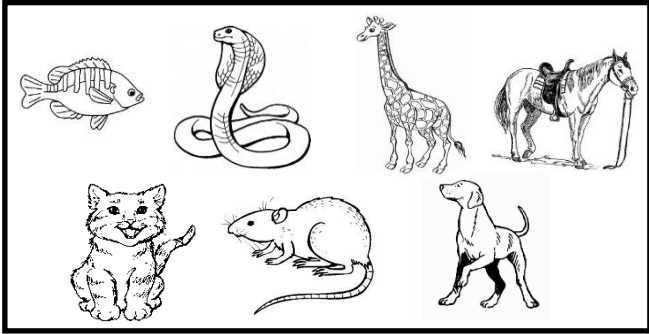
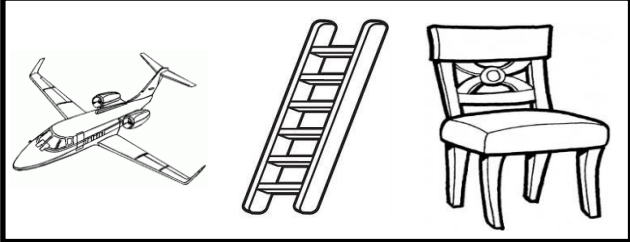
221. **P-8:** *Ah, tá! Aí dá!*
222. **Pesquisador/Participante:** Fala pra gente P-2 qual seria! **[Observou-se certa dúvida entre as participantes acerca das classes constituídas. Neste momento, o Pesquisador/Participante, no intuito de auxiliá-las, foi discriminando cada classe elaborada pelas participantes.]** Então vamos lá: temos primeiro a classe dos patos.
223. **P-2:** *Isso!*
224. **Pesquisador/Participante:** A segunda...
225. **P-2:** *Os animais aves que não são patos.*
226. **Pesquisador/Participante:** A terceira?
227. **P-2:** *Os não vivos!*
228. **Pesquisador/Participante:** A quarta classe?
229. **P-2:** *Os insetos.*
230. **Pesquisador/Participante:** Hummm, se formarmos uma classe com os insetos não conseguiremos as inclusões pretendidas...
231. **P-2:** *Então está errado pra poder fazer as inclusões.*
232. **P-1:** *Então são os voadores?*
233. **Pesquisador/Participante:** Isso P-1! Então a outra classe são dos voadores mas não...
234. **P-8:** *Não aves!*
235. **Pesquisador/Participante:** Isso, P-8!
236. **P-2:** *Então o morcego vai entrar aqui também!*
237. **Pesquisador/Participante:** Isso, P-2! Conseguiram compreender? **[Todas as participantes responderam “Sim!”.]** E a última classe serão...
238. **P-1 e P-2:** *As que não voam!*
239. **Pesquisador/Participante:** Pronto! Vocês acharam as 5 classes isoladas. Agora tentem estabelecer relações de inclusões entre elas. **[Decorridos alguns minutos o Pesquisador/Participantes realizou alguns questionamentos.]**
240. **Pesquisador/Participante:** Qual seria a primeira classe constituída a partir das duas ‘iniciais’?
241. **P-1:** *A das aves!*

242. **Pesquisador/Participante**: Quem formaria esta classe?
243. **P-1**: *A dos patos e a das aves não-patos.*
244. **Pesquisador/Participante**: Isso! E além de serem aves, todos os patos e aves não-patos tem qual característica em comum?
245. **P-8**: *Conseguem voar!*
246. **Pesquisador/Participante**: Isso!
247. **P-2**: *Mas o pato não voa!*
248. **P-8**: *Voa sim! Os selvagens!*
249. **Pesquisador/Participante**: Mesmo os patos que não são selvagens conseguem voar!
250. **P-2**: *Então pra fazer a outra inclusão eu posso juntar esses que voam que são as aves e a outra classe dos que voam mas não são aves?*
251. **Pesquisador/Participante**: Sim, pode! É isso mesmo! Animais que voam! Vocês perceberam o que a P-2 falou, pessoal?
252. **P-8**: *Não! Fala de novo! O primeiro é o pato!*
253. **Pesquisador/Participante**: Isso, primeiro juntou os patos e as aves não-patos e daí formou as aves!
254. **P-1**: Ah! [Ideia compartilhada entre as demais indicando que estavam ‘acompanhando’ o raciocínio de P-2.]

[Todas as participantes foram anotando as classes formadas e as inclusões realizadas entre as mesmas. P-2 foi falando e as demais foram anotando.]

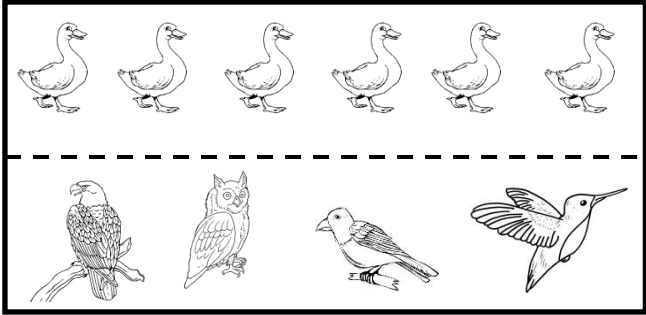
255. **P-2**: *Primeiro foi a classe dos patos. Depois a das aves não-patos. Depois a das aves que voam...* [Visando auxiliá-las na sistematização das ideias, o Pesquisador/Participante projetou na lousa, inicialmente, as 5 classes constituídas. Ao projetar chamou a atenção ressaltando que as letras utilizadas para denominar as classes não importavam caso tivessem utilizado letras diferentes. Observe-as abaixo.]

Classe A = patos.	
Classe A' = aves não-patos.	

Classe B' = voam mas não-aves.	
Classe C' = animais que não voam.	
Classe D' = objetos inanimados.	

[As participantes foram anotando, embora o Pesquisador/Participante deixou claro que as mesmas já haviam construído tais classes. P-1 questionou porque a classe dos animais que não voam foi chamada de C'. Em resposta, o Pesquisador/Participante salientou que poderia ser outra letra, como por exemplo, classe V.]

256. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, percebam que agora vocês vão realizar as inclusões. A primeira delas vocês já realizaram, olhem aqui. [Foi projetada a primeira inclusão, constituindo a classe das aves que voam.]

Classe B = aves que voam. $A + A' = B$ $A = B - A'$ $A' = B - A$	
--	--

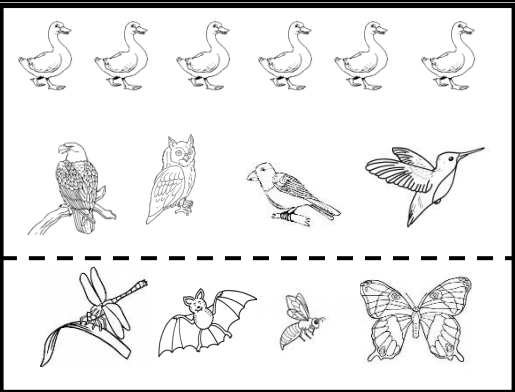
[As participantes anotaram a notação utilizada pelo Pesquisador/Participante. A pedido, o Pesquisador/Participante voltou as projeções pois as participantes quiseram conferir os nomes dados às classes. Neste momento, P-8 salientou.]

257. **P-8:** *Está faltando só aquele clique! É como a professora de alfabetização R. nos fala que quando a criança está se alfabetizando temos que observar aquele momento que ela passa a entender! A gente, quando aprendeu, nem percebeu esse clique!*

258. **Pesquisador/Participante:** Sim, a tomada de consciência! Vocês perceberam que eu não estou falando a resposta, estou apenas auxiliando-as neste processo de modo gradativo, a 'tomar consciência' das classes estabelecidas. **[Todas as participantes indicaram concordar com o Pesquisador/Participante.]** Percebam que vocês utilizaram todas as propriedades... Vocês classificaram todos os elementos, cada classe possui uma característica em comum e há uma classe complementar com outra característica... Vocês estão fazendo as classificações mais 'simples' em compreensão e em extensão... Agora, continuando, a classe B vocês podem juntar com qual outra para constituir uma classe maior?

259. **P-2:** *Os que voam!*

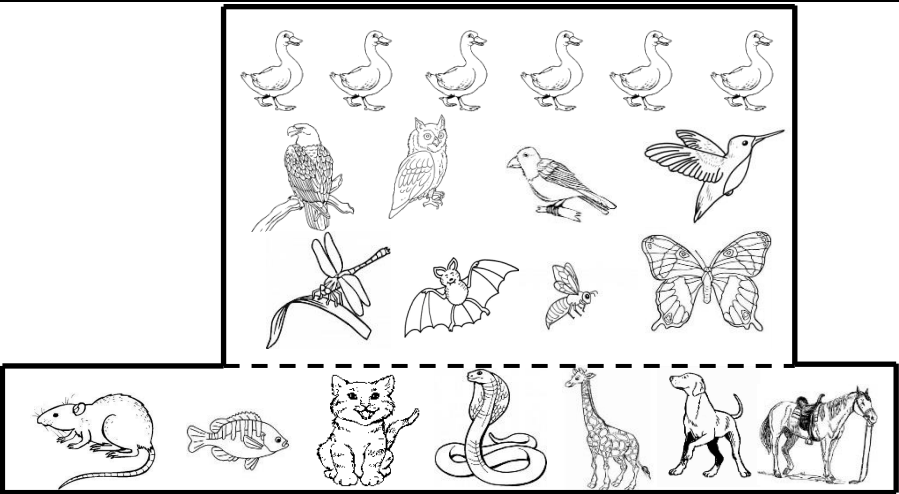
260. **Pesquisador/Participante:** Sim! Tudo bem, pessoal? **[Todas as participantes indicaram compreender a resposta dada por P-2. Desse modo, foi projetada a referida classe.]**

Classe C = animais que voam. $B + B' = C$ $B = C - B'$ $B' = C - B$	
--	---

[Novamente, todas anotaram o exposto na projeção.]

261. **P-2:** *E a outra seria só os animais!*

262. **Pesquisador/Participante:** Isso! Todo mundo percebeu? **[P-1 falou a mesma ideia que P-2. As demais participantes indicaram, por meio de expressão facial, terem compreendido que a próxima classe seria a dos animais. Para tanto, foi realizada a seguinte projeção.]**

Classe D = animais. $C + C' = D$ $C = D - C'$ $C' = D - C$	
---	--

263. **Pesquisador/Participante**: Pessoal, e qual será a última inclusão? O que a classe dos animais e a dos objetos inanimados formarão? **[As participantes ficaram pensativas.]**

264. **P-1**: *É tudo preto e branco!* **[Riso geral.]**

265. **Pesquisador/Participante**: É verdade! **[Risos.]** E é interessante que os nossos alunos darão respostas bem originais e com muita coerência!

266. **P-8**: *É, nós nem pintamos ainda!* **[Referiu-se às figuras que ainda não foram coloridas e que estavam em preto e branco.]**

267. **Pesquisador/Participante**: Dá pra perceber que tal situação que estamos vivenciado é análoga a situação que vocês vão vivenciar com seus alunos?

268. **P-8**: *Sim, e isso que dá medo!*

269. **Pesquisador/Participante**: E vocês se lembram que eu falei que a Formação Inicial não permitem ao licenciando vivenciar situações parecidas com as quais que ele será responsável por realizar? E a gente tá conseguindo fazer isso aqui, não está? **[Todas as participantes respondera “Sim!”.]** Vocês estão achando interessante fazer estas reflexões?

270. **P-5**: *Muito!* **[Ideia compartilhada pelas demais participantes.]**

271. **P-2**: *Isso é significativo, marca.*

272. **Pesquisador/Participante**: E a última classe, qual é a característica comum?

273. **P-2**: *Todas pertencem ao planeta Terra?*

274. **Pesquisador/Participante**: Sim, pode! Eu não chamei assim, mas pode ser!

275. **P-1**: *É a natureza?*

276. **Pesquisador/Participante**: Não, porque a escada ou o avião, por exemplo, não pertencem a natureza já que foram criados pelo homem! Mas a questão da Terra tem lógica! Tudo pertence ao planeta Terra!

277. **P-2**: *Todos são seres!*

278. **Pesquisador/Participante**: Isso, P-2! Era isso que eu queria que vocês concluíssem. Que todos os elementos são seres, vivos e não-vivos! E daí terminamos! **[Foi projetada a última classe.]**

Classe E = animais e objetos inanimados $D + D' = E$ $D = E - D'$ $D' = E - D$	
--	--

279. **Pesquisador/Participante:** Vejam, pessoal, como foi possível incluir todas as 5 coleções inicialmente elaboradas. Observem, agora, uma visão geral destas relações de inclusão. [Neste momento, projetou-se o último esquema.]

	A < $\subset$ B < $\subset$ C < $\subset$ D < $\subset$ E

[Ao fazê-lo, o Pesquisador/Participante ressaltou o fato de que uma classe ‘menor’ foi incluída em outra ‘maior’, e assim sucessivamente. Por fim, esboçou que o sujeito que consegue realizar tais ‘operações’ demonstra já ter construído as das 10 propriedades de uma classificação hierárquica, na qual os métodos ascendente e descendente ocorrem de modo complementar/simultaneamente.]

280. **Pesquisador/Participante:** O que vocês acharam desta atividade ‘prática’?

281. **P-1:** Muito bom! Eu consegui compreender mais! [Ideia compartilhada pelas demais participantes.]

282. **Pesquisador/Participante:** Eu acredito que até o texto com as citações de Piaget seriam mais bem compreendidas agora! É interessante vocês retornarem o texto em casa!

283. **P-5:** *É legal a gente ter feito porque na proposta da atividade parecia ser fácil. Mas daí fazendo deu pra ver que não era tão fácil assim... e imagina pedir isso pra criança sem ter feito antes!*

284. **P-8:** *Sim! E eu acho que em grupo seria mais fácil pros alunos porque daí um ia ajudando o outro...*

285. **P-5:** *Porque até pra nós não foi fácil!*

286. **P-8:** *Não! Isso mesmo!*

287. **Pesquisador/Participante:** E percebam que quando o professor for aplicar uma atividade em sala é necessário ele ter realizado-a antes!

288. **P-2:** *E uma coisa que eu achei bem interessante nesta atividade foi a questão da tentativa e erro e tendo um incentivo! Porque se você está sozinho e dá errado daí você nem tenta mais! Mas aqui, além da troca, teve o incentivo, “É isso aí mesmo, está indo pelo caminho certo!”* [Referiu-se às dicas dadas pelo Pesquisador/Participante.]

289. **P-8:** *É como o jogo quente ou frio!*

290. **Pesquisador/Participante:** Vocês perceberam que eu fui contra-argumentando com vocês? [Todas indicaram que tiveram tal percepção.] Agora se eu tivesse apresentado o problema e dito as respostas não teria sido compreendido tão bem!

291. **P-2:** *Sim, não teria sido significativo!*

292. **P-8:** *É verdade, a gente não iria questionar e teria ido direto na resposta!*

[Nos minutos finais do encontro foi solicitado a cada participante a elaboração do ‘Momento de Síntese’ dos dois últimos encontros.]

APÊNDICE J – TRANSCRIÇÃO DO 6.º ENCONTRO

Data: 05/04/2012

Tempo de Duração: 3 horas.

[No início do encontro estavam presentes P-2, P-4, P-5, P-7 e P-8. O Pesquisador/Participante denotou que naquele dia seriam abordadas diferentes representações gráficas visando uma retomada e, de certo modo, um aprofundamento de alguns tipos de gráficos. Entretanto, num primeiro momento cada participante fez a leitura do ‘Momento de Síntese’ do encontro anterior. P-5 foi a primeira a ler sua síntese.]

1. **P-5:** *Após trabalharmos gráficos e tabelas, começamos a aprender sobre a classificação, que é necessária para a construção de tabelas. Aprendemos que o processo de classificação não é tão simples como se pensa, e trabalhamos todo o processo que o indivíduo percorre até concluir classes que perpassa pelas coleções figurais e não-figurais. Conclui que esses processos não são fáceis, mas são possíveis desde que trabalhados de maneira correta e que possibilite uma postura ativa do indivíduo.*

2. **Pesquisador/Participante:** Pela sua leitura, embora eu já tivesse feito a tabulação da sua síntese, eu compreendi que pra você ficou claro estas fases e este processo psicológico até a construção das classes?

3. **P-5:** *Sim, eu entendi! Talvez eu não saiba falar, mas se eu der uma olhada, né, eu me recordo! Eu aprendi... eu acho assim, que falta olhar mais... Eu mesma dando uma olhada já me recorda!*

4. **Pesquisador/Participante:** Talvez seja uma dificuldade de explicitar isso?

5. **P-5:** *Isso!*

6. **Pesquisador/Participante:** Mas ‘internamente’ e, a partir daquela atividade de classificar os patos, as aves... Você acha que essa atividade contribuiu?

7. **P-5:** *Sim!*

8. **Pesquisador/Participante:** Pra poder compreender a questão da operação direta e da inversa... das inclusões hierárquicas?

9. **P-5:** *Sim, com certeza!*

10. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-4 leia pra gente, por favor?

11. **P-4:** *Pela leitura das coleções figurais, não-figurais e classes não consegui entender, principalmente as representações matemáticas $A + A' = B$. Só consegui entender depois das representações feitas na lousa e consegui entender mais claramente depois das atividades com as figuras dos seres vivos e não vivos, na teoria foi muito difícil, mas consegui entender e no final ficou tudo bem mais claro.*

12. **Pesquisador/Participante:** Então após esse seu envolvimento na atividade “prática” auxiliou a compreensão da teoria?
13. **P-4:** *Sim! E depois que você explicou tudo certinho na lousa. [Referiu-se à explicação realizada pelo Pesquisador/Participante na qual exemplificou, por meio de vários esquemas, as propriedades da classificação.]*
14. **Pesquisador/Participante:** Então, quer dizer que a minha mediação também se fez necessária?
15. **P-4:** *Com certeza! Se fosse só pelo texto... [Risos. P-2 interrompeu e falou.]*
16. **P-2:** *É por todos, não foi só por você! [Referiu-se ao fato da explicação realizada pelo Pesquisador/Participante ter auxiliado a compreensão das demais participantes.]*
17. **Pesquisador/Participante:** *Sim?*
18. **P-2:** *Sim, aquelas propriedades... eu tive muitas dificuldades, eu não conseguiria sozinha... [As demais participantes falaram conjuntamente indicando que também tiveram dificuldades na compreensão das propriedades de classificação.]*
19. **Pesquisador/Participante:** Nesse sentido, pessoal, é importante pensarmos o quanto nosso papel é necessário. Porque da mesma maneira que vocês tiveram dificuldades, e isso é esperado, os alunos também possuem! Mesmo que aquele assunto seja interessante, e eu acredito que está sendo, não é!? Mas, dependendo do nível de aprofundamento conceitual se faz necessário uma mediação, as nossas trocas interindividuais que estou frisando bem... Porque, se nós formos utilizar a contribuição da teoria de Piaget ao ensino, segundo Lauro de Oliveira Lima, ele aponta que não seria nem tanto o construtivismo, mas sim o interacionismo. Ou seja, no intuito de professor e alunos interagirem, discutirem sobre o conhecimento, e esta discussão ser mediada por alguém que sabe um pouco a mais pra que esse sujeito atinja, também, esse nível de conhecimento mais formalizado. Estamos neste mesmo entendimento, pessoal?
20. **P-2:** *É, porque se falam que não basta o seu desejo, por exemplo, eu pego o livro e lesse eu não iria entender sem uma mediação, sem uma explicação, sem essa troca, não iria aprender, tenho plena consciência disso!*
21. **Pesquisador/Participante:** Ok! Você pode ler pra gente, P-2...
22. **P-2:** *Formidável compreender o desenvolvimento da classificação, pois jamais havia pensado como essas construções ocorrem, desde as coleções figurais, passando pelas não-figurais e chegando até nas classificações, compreendendo a importância da reversibilidade. Vale ressaltar que entendi melhor as classificações nesse encontro tendo a visão geral e principalmente sendo desafiada a realizar a proposta atividade. Considerei uma atividade válida e significativa, que com certeza deve ser aplicada com as crianças tendo clareza dos objetivos a serem alcançados, podendo trabalhar com conjuntos e gráficos.*
23. **Pesquisador/Participante:** Ok! Pessoal, vocês estão conseguindo sentir na pele que, não a todo o momento, porque não dá pra ficar desequilibrando o sujeito a todo o momento, porque não dá tempo dele ‘atingir’ aquele re-equilíbrio. Mas, em alguns momentos, estou de

modo proposital questionando vocês! Está dando pra perceber que o texto produzido está tentando estabelecer uma comunicação com vocês? **[Todas as participantes, por meio de expressão facial, indicaram afirmativamente.]** Neste texto de hoje, ao tratar de assuntos da Matemática em si, eu tentei este estabelecimento de diálogo colocando várias questões para que pensemos sobre as mesmas. Tudo bem? **[Como todas indicaram não haver nenhuma dúvida, P-7 fez a leitura de sua síntese.]**

24. **P-7:** *A partir do quarto e do quinto encontro pude perceber que as coleções figurais e não-figurais ainda não são classificações, já que para ser uma classificação é necessário que haja as 10 propriedades. E sendo detectada a 7.^a propriedade da classificação, todas as outras estão presentes. E pude observar mais uma vez como é importante manipular os objetos, quando nós pudemos organizar as figuras classificando-as, e também a importância da tentativa e do erro, e do professor estar sempre mediando estas relações.*

25. **Pesquisador/Participante:** Ok! Pessoal, se eu tivesse dada a atividade do encontro passado apenas com a quantidade dos elementos e sem o recurso das figuras representadas nos cartões de papel teria ficado mais complicado? **[Todas as participantes, através de gesto facial, sinalizaram “Sim.”.]**

26. **P-7:** *Eu acho que não seria significativo!*

27. **Pesquisador/Participante:** Em que sentido?

28. **P-7:** *Ah, porque, quando só coloca lá parece que já tá pronto ali...*

29. **Pesquisador/Participante:** Eu não quis me referir a apenas eu apresentar a solução na lousa. Apenas no sentido de eu dar o problema pra vocês resolverem sem o recurso das peças pra manipular.

30. **P-7:** *Ah, seria bem mais difícil!*

31. **Pesquisador/Participante:** Vocês acreditam que aumentaria o nível de dificuldade?

32. **P-8:** *Sim!* **[Resposta compartilhada pelas demais participantes.]**

33. **Pesquisador/Participante:** Então me parece que, ainda aqui, assim como acontece com as crianças, ou até mesmo num curso de Matemática, o concreto como um apoio ao pensamento... Seria isso? Porque vocês tiveram que pensar pra constituir as classes e as inclusões.

34. **P-2:** *Sim, muito!*

35. **Pesquisador/Participante:** Porque eu, vocês concordam, não fiquei dando as respostas, apenas dei um direcionamento pra que vocês tivessem de onde partir... Mas depois vocês, sozinhas, foram elaborando as classificações. Eu apenas fiz um trabalho final de sistematização. Então, retomando, a partir das figuras que apoiaram o pensamento de vocês foi possível estabelecer as classes e as inclusões realizadas entre elas. Daí foi possível compreender aquelas relações $A + A' = B$, etc.? **[Todas as participantes responderam afirmativamente.]** P-4, tal representação matemática passou a ter mais significado?

36. **P-4:** *Sim!*

37. **Pesquisador/Participante:** E um dos problemas da Matemática a nível do Ensino Médio reside nesta falta de significação do aluno, principalmente na parte algébrica quando não compreende as simbologias utilizadas. Ou seja, o que significa a notação “ $f(x)$, quando x está num conjunto e produz uma imagem tal”... Percebiam que a superação desta dificuldade demanda um trabalho desde os anos iniciais de tal modo a permitir ao aluno a construção das noções matemáticas de modo satisfatório. Por exemplo, pro sujeito ‘passar’ da aritmética pra álgebra é necessária a plena construção desta primeira, e para tal construção possibilitando ao aluno ‘pensar sobre’ o conceito matemático é importante o apoio no concreto. **[Todas as participantes, através da expressão facial, indicaram concordar com o exposto. Em seguida, P-8 leu a sua síntese.]**

38. **P-8:** *No quarto encontro recordamos tabelas e discutimos como constrói a classificação e a seriação em seguida discutimos as coleções figurais onde se dá o início da construção da classificação; vimos que é importante manipular os objetos livremente depois questionar o aluno. Importante o trabalho em grupo e a tentativa e erro e o educador incentivando. Gostei muito da prática depois da explicação. Ajuda bastante na fixação do conteúdo.*

39. **Pesquisador/Participante:** Ok!

40. **P-8:** *Pesquisador/Participante você tem estudo sobre isso, sobre o ensino da Matemática... porque no Ensino Fundamental os alunos gostam da Matemática e depois eles passam a não gostar mais, né! Eles acabam ficando com medo da Matemática, e daí né, o que se perde nesse meio, pra essa parte mais complicada!? É isso?*

41. **Pesquisador/Participante:** Sim! Eu já li alguns trabalhos da UNICAMP que trata desta parte quando a criança passa a não gostar da Matemática... De modo geral, os estudos trazem que a criança da Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental gostam da Matemática pelo fato da mesma, de modo geral ‘despertar’ a curiosidade, ‘aguçar’ o pensamento... Só que, os métodos de ensino vivenciados por esses sujeitos que acabam ‘matando’ o prazer pelos números, pelas formas, pelas relações lógicas. Então, infelizmente, são as ações dos professores, de modo consciente ou não, e também tem muito professor que não dá a devida atenção para a Matemática por achar que a alfabetização da língua materna seja suficiente e que o professor de Matemática do 6.º ano em diante que resolva o problema... Só que não, se esse não gostar já vir dos iniciais nos anos iniciais, o professor do Ciclo II (Ensino Fundamental nos anos finais) e Ensino Médio, embora seja possível reverter tal situação, terá um grande trabalho!

42. **P-8:** *Então tem estudos sobre isso!*

43. **Pesquisador/Participante:** Sim, há vários. Nesse sentido, o governo... não é pra esquecer do Ciclo II e do Ensino Médio de maneira alguma já que é necessário dar uma continuidade de qualidade no ensino, no entanto, deveriam dar uma atenção ‘enorme’ na Educação Infantil e anos iniciais do Fundamental. Porque, querendo ou não, é onde ocorre a construção das “bases” para que o aluno depois constitua um pensamento formalizado, hipotético-dedutivo. Isso não significa que o pensamento do aluno dos anos iniciais não possua sistematização, no entanto ainda esse pensamento está preso ao real, na qual o concreto se faz necessário. E um fato observado atualmente é que, mesmo no Ensino Médio,

devido a toda essa defasagem no ensino, os alunos estão chegando, até mesmo no Ensino Superior, ainda em vias de finalização ou em construção do estágio das operações concretas. Em Grupos posteriores iremos estudar mais afundo estes tipos de pensamento: o ‘prático’, o ‘concreto’, digamos assim, e o hipotético-dedutivo. Este último pensamento, em tese, já poderia ser observado em alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e Superior, no entanto, aqui mesmo na Universidade parte dos alunos ainda não atingiu tal pensamento hipotético. É claro que há fortes chances deste aluno chegar a construí-lo, no entanto, apenas em algumas áreas e não em todas. Porque, mesmo o sujeito que faz o curso de Letras, ele certamente terá um pensamento hipotético-dedutivo em sua área específica, mas talvez na área da Matemática ainda não! Tudo bem? **[Todas as participantes, por meio de expressão facial, indicaram afirmativamente.]**

[Dando continuidade, o Pesquisador/Participante perguntou se as mesmas haviam pensado sobre as questões 2 e 3 acerca da Proposta-Atividade – item 4.3 – deixado como ‘tarefa’. No entanto, como apenas P-2 e P-4 fizeram tais questões decidiu-se que as mesmas seriam retomadas no próximo Grupo de Estudo. Em seguida, foi solicitada a leitura dos itens 6 e 6.1 – denotados abaixo – e a solução, individualmente, das questões 1 a 5 para posterior discussão.]

6.1 Um movimento de retomada ‘síntese’

Devido à ‘pouca’ atenção dada pelos seus ‘antigos’ professores de Matemática ao Tratamento da Informação está sendo realizado um trabalho visando uma (re)significação, ou até certa ampliação-aprofundamento dos conhecimentos matemáticos referentes à Estatística, sendo essa uma das ‘grandes’ áreas deste bloco de conteúdo. Pontuou-se a necessidade – dentre tantas outras, para a construção das tabelas (e gráficos) – da realização da operação de classificação pelo sujeito. Visando compreender tal classificação em ‘termos psicológicos’, utilizou-se o estudo psicogenético desenvolvido por Jean Piaget e Bärbel Inhelder no qual foi investigada a origem-gênese e o desenvolvimento-construção das estruturas lógicas elementares.

No entanto, tal trabalho de (re)significação está visando, também, um ‘novo’ olhar acerca da futura prática docente de Matemática de vocês. Para tanto estão ocorrendo, em vários momentos, discussões de cunho didático-metodológicas sobre o ensino de determinado conteúdo matemático.

Neste instante, faz-se oportuno não ‘perder de vista’ as relações que estão sendo estabelecidas entre os saberes experienciais de cada uma acerca do ensino de Matemática vivenciado na Educação Básica, entre as ideias principais da Epistemologia Genética e a prática docente de Matemática visando contribuir à Formação Inicial de vocês e à Formação Contínua do Pesquisador/Participante. Assim, dando continuidade à abordagem de outros conceitos referentes à Estatística, far-se-á um estudo acerca de alguns tipos de representações gráficas e conceitos referentes à Estatística Descritiva (Média, Moda e Mediana). No presente encontro dar-se-á atenção às representações gráficas, ficando a abordagem da Estatística Descritiva para o próximo encontro.

6.2 Diferentes representações gráficas

Como ressaltado no item 3.1, definiu-se gráfico enquanto um esquema visual representativo de dados. Durante a discussão acerca do **como** organizar os itens da pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli, o Pesquisador/Participar elaborou, para os itens A, B e D, alguns tipos de gráficos. Relembremos três deles:

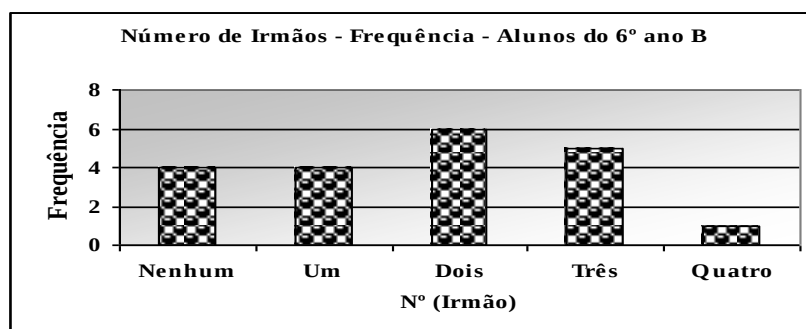


Gráfico de Colunas – Item A (Número de Irmãos – Frequência)

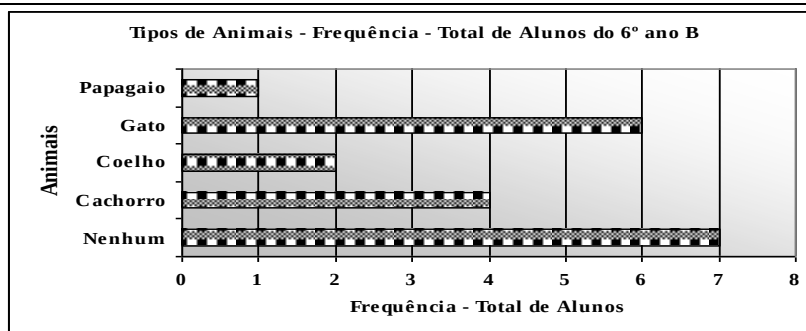


Gráfico de Barras – Item B (Tipos de Animais de Estimação – Total de Alunos)

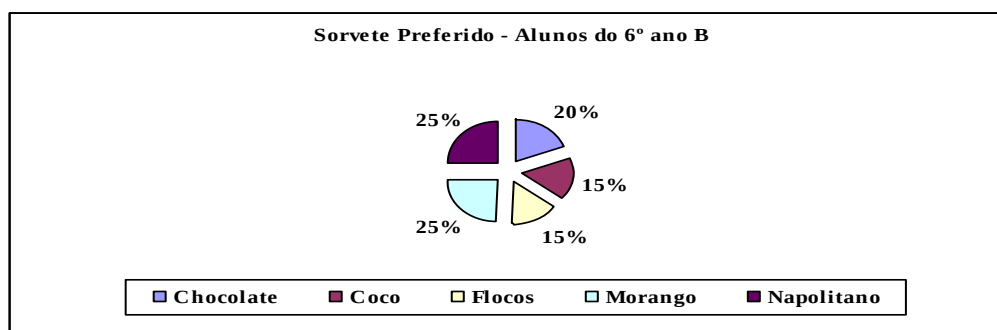


Gráfico de Setor – Item D (Sorvete Preferido – Frequência)

- Os 3 gráficos denotados apresentam diferenças? Caso sim, quais? Caso não, justifique.
- No gráfico de Setor – Item D, considerando $n = 20$ como sendo o total de alunos que realizaram a pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli, descubra o número (*cardinal*) de alunos que preferiu cada um dos sabores de sorvete. Após tal descoberta, explique o porquê do procedimento matemático adotado.
- É possível transformar o gráfico de Setor – Item D – em um gráfico de Colunas? Caso sim, como fazer? E o oposto também é possível? Pense a respeito.
- Os 3 tipos de representações gráficas utilizadas (Colunas, Barras e Setor) são *algumas* dentre *todas* as existentes. Tal relação “*algumas* dentre *todas*” remete a qual operação mental? Justifique sua resposta.

Neste ponto torna-se interessante denotar *alguns* outros tipos de gráficos existentes. Além dos já apresentados, observam-se o gráfico de Linhas (Linear ou de Segmento); Cartograma; Pictograma; Histograma e Polígono de Frequência.

- A partir dos seus saberes experiências complete os quadros, abaixo, visando à caracterização dos outros tipos de gráficos denotados no parágrafo anterior.

Gráfico de Linhas	
<u>Um exemplo de quando foi utilizado</u> _____ _____	<u>Uma imagem que o recorda</u> _____ _____

Cartograma	
<u>Um exemplo de quando foi utilizado</u> _____ _____	<u>Uma imagem que o recorda</u> _____ _____

Pictograma	
<u>Um exemplo de quando foi utilizado</u> _____ _____	<u>Uma imagem que o recorda</u> _____ _____

<u>Histograma</u>	
<u>Um exemplo de quando foi utilizado</u>	<u>Uma imagem que o recorda</u>

<u>Polígono de Frequência</u>	
<u>Um exemplo de quando foi utilizado</u>	<u>Uma imagem que o recorda</u>

[Decorridos 30 minutos, foi iniciada a discussão. A respeito do item 6 – Um Momento de Síntese – não houve nenhuma questão a pontuar. Após relembrar os gráficos denotados pelo Pesquisador/Participante representando os dados pesquisados pelos alunos da professora de Matemática Sueli, deu-se início à discussão das questões 1 a 5. No entanto, como P-9 chegou foi dado alguns minutos para que a mesma se acomodasse e se interessasse das atividades que estavam sendo realizadas. Em relação à 1.^a questão, as respostas obtidas encontram-se a seguir. P-8 iniciou a leitura de sua resposta.]

44. **P-8:** Bom, eu pus que sim, que tem diferenças. Que o gráfico é a representação dos dados visualmente e que cada gráfico é representado por um modelo, ou seja, pelo de barra, coluna e de setor... Eu pus isso, agora não sei... pra explicar... você estava falando que cada... As diferenças são que um é de setor, outro de coluna e outro de barra e que... eu achei pessoal, que você escolhe um dependendo da situação!

45. **Pesquisador/Participante:** Tá bom! P-7 leia pra gente, por favor!

46. **P-7:** Eu coloquei que o gráfico serve para uma disposição dos dados!

47. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-2...

48. **P-2:** Eu coloquei: Sim. Cada gráfico representa os dados de maneira diferente, sendo um de colunas, outro de barras e outro de setor. Cada um dos tipos gráficos mostra melhor um tipo de variável, entretanto não sei dizer qual, permitindo sua visualização com melhor facilidade. Mas eu não sei dizer quais são os tipos ideais para cada variável.

49. **Pesquisador/Participante:** O mais adequado, por exemplo?

50. **P-2:** É, eu não sei!

51. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você P-4, leia pra gente!

52. **P-4:** É, eu acho que as diferenças é, por exemplo, os números aqui... No gráfico de colunas o número está aqui [Indicou a posição vertical erguendo o braço esquerdo de modo a formar um ângulo de 90° em relação ao plano do chão.] e no de barras o número está aqui. [Utilizou novamente o mesmo braço colocando-o paralelamente em relação ao plano do chão indicando a posição horizontal.]

53. **Pesquisador/Participante:** É na horizontal e na vertical?
54. **P-2:** *É, o x e o y que você falou. [Referiu-se aos eixos x e y denotados na construção do plano cartesiano comumente denotado nos livros didáticos.]*
55. **P-4:** *E pra mim os dois são iguais!*
56. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-5...
57. **P-5:** *Eu coloquei que as representações deles são diferentes já que dá pra ver no visual e que dois deles [Referiu-se aos gráficos de barras e de colunas.] representam números e o outro representa porcentagem. [Referiu-se ao gráfico de setor.] Eu vi essa diferença.*
58. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem! P-9, por favor diga pra gente!
59. **P-9:** *Bom, eu vi a mesma coisa. A parte do numeral pra representar os dados... [A participante descreveu o gráfico de colunas apresentado, sem ressaltar as diferenças entre 3 os gráficos.]*
60. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, ao final vamos estabelecer uma síntese acerca desta questão. Existem, sim, diferenças. Entre o gráfico de colunas e o de barras há apenas a diferença da posição das ‘barras’, do desenho, certo! Porque no de colunas as ‘barras’ estão na vertical e no gráfico de barras as ‘barras’ estão na horizontal. Esta é a única diferença, porque ambos os gráficos são interessantes para representar as variáveis qualitativas, sejam ordinais ou nominais... mas também dá pra representar a quantitativa discreta, já a contínua não! Tudo bem? Iremos ver isso mais pra frente.
61. **P-5:** *E a escolha de uma ou outra, de coluna ou barra é pessoal? Ou tem certos tipos que fica melhor de colunas e outros de barras?*
62. **Pesquisador/Participante:** Quando se tratam de variáveis qualitativas, que é a mais comum, tanto faz! Geralmente as pessoas optam pelo de colunas pelo fato de, visualmente, realizarem as comparações entre o ‘tamanho’ das ‘colunas’/retângulos enfileiradas ‘verticalmente’ uma ao lado da outra.
63. **P-8:** *Eu acho que fica melhor a visualização! Eu enxergo melhor no gráfico de colunas. [Ao dizer tal afirmação a participante fez um gesto com os dedos indicando uma comparação entre o ‘tamanho’ das colunas.]*
64. **Pesquisador/Participante:** Isso, P-8, parece que ‘enxergar’ na vertical as diferenças de frequência é melhor! Mas, matematicamente ‘falando’ é a mesma coisa que na horizontal. Vocês concordam comigo, pessoal? **[Todas as participantes, por meio de gesto facial, indicaram concordar.]** Agora, o gráfico de setor serve tanto para as variáveis qualitativas quanto para as quantitativas. Só que vocês percebem que com o gráfico de setor não fica mais fácil visualizar a relação da parte com o todo? **[As participantes responderam “Sim.”]** Então essa é uma das diferenças entre o gráfico de barras e colunas com o de setor. Porque no meu gráfico de setor eu tenho o todo, que no caso é a base em forma de um círculo e eu vou dividindo as frequências em setores representativos. Então eu posso visualizar, por exemplo, que em relação ao todo o morango e o flocos é o que teve menos! **[Referiu-se ao gráfico**

utilizado no texto.] Daí você podem perguntar se no gráfico de barras ou de colunas não dá pra estabelecer esta comparação parte-todo... Até dá, mas visualmente no gráfico de setor isso é mais fácil de fazer! Ok! Comentários, dúvidas...

65. **P-5:** *E no de setor... no de pizza não precisa necessariamente estar em porcentagem!?*

66. **Pesquisador/Participante:** Não precisa! Pode juntamente com a porcentagem indicar a quantidade de cada frequência, e até mesmo os graus de cada setor. E nós veremos isso daqui um pouco. E, sabendo os graus de cada setor e o número total pesquisado, dá pra saber a frequência e a porcentagem de cada. Podemos prosseguir? Alguma dúvida P-2?

67. **P-2:** *Eu só fiquei pensando nesse grau do setor, mas depois nós veremos mais pra frente!*

68. **Pesquisador/Participante:** Ok! [O Pesquisador/Participante realizou a leitura da 2.^a questão atentando ao fato de que, sem olhar na tabela referente à frequência de cada um dos sabores de sorvete preferidos, as participantes – utilizando apenas o total de alunos pesquisados e as porcentagens de cada setor – deveriam encontrar o valor (cardinal) de cada frequência dos referidos sabores.] Vamos ouvir as respostas de cada participante. P-8, você conseguiu obter o valor de cada variável?

69. **P-8:** *Eu fiz a regra de três porque eu sei que faz assim... Mas daí eu fiz assim: peguei o 20 que era total e o 25% que era o de Napolitano. Daí 20 vezes 25% dá 500, daí corta os dois zeros e dá 5. Mas dá pra fazer desse jeito: 100% igual a 25...*

70. **P-2:** *É igual a 20 alunos.*

71. **P-8:** *É, tá certo, a 20 alunos.*

72. **P-2:** *E daí você coloca 25% igual a x.*

73. **Pesquisador/Participante:** Não, é 25 igual a 100... Ah, não, você tá certo, tem que ficar embaixo. [Referiu-se à disposição da grandezas para a realização da regra de três.]

74. **Pesquisador/Participante:** Você compreendeu o que a P-2 falou?

75. **P-8:** *Sim, tá certo!*

76. **Pesquisador/Participante:** E fazendo isso você consegue encontrar as demais frequências. [As demais participantes indicaram compreender a conversa realizada entre P-2, P-8 e o Pesquisador/Participante. A P-7, P-2 e P-4 disseram ter feito o mesmo procedimento, ou seja, a regra de três. Quando questionada, P-5 disse o seguinte.]

77. **P-5:** *Então, eu não lembrei que nessa situação usava a regra de três, então eu fiz de cabeça. Mas eu sei fazer como vocês fizeram...*

78. **Pesquisador/Participante:** E como você fez ‘de cabeça’?

79. **P-5:** *Ah, eu pensei, porque assim esses valores é fácil, né. Você pensa assim, 25% é $\frac{1}{4}$ de 20, então daí dão 5 alunos. Daí o outro também é 25%, daí sobra 10, daí fica 15% e 15% e 20%, daí eu pensei em 3, 3 e 4 porque fica coerente.*

80. **Pesquisador/Participante:** Entendi!

81. **P-5:** *Mas agora com elas falando que usaram a regra de três eu sei. E até pensei que estes valores [Referiu-se às porcentagens expressas no gráfico de setor em questão.] dá pra fazer de cabeça, mas outros não dariam, daí eu precisava até lembrar, mas depois que elas falaram eu lembrei. E no início da aula eu até falei pro Pesquisador/Participante que adorava a regra de três, e daí eu nem lembrei! [Risos entre as participantes.]*

82. **P-2:** *Eu não acredito, P-5!*

83. **Pesquisador/Participante:** E você P-9?

84. **P-9:** *Eu usei regra de três. Mas daí eu tinha que lembrar os sabores... [Ao observar a resposta da participante percebeu-se que a mesma não havia realizado os cálculos por meio da regra de três. Devido a não presença da mesma nos dois Grupos anteriores, a participante ainda estava um pouco ‘perdida’, tentando se situar nas atividades que estavam sendo realizadas.]*

85. **Pesquisador/Participante:** Mas você utilizaria a regra de três?

86. **P-9:** *Sim!*

87. **Pesquisador/Participante:** Se você tiver alguma dúvida, P-9, fale!

88. **P-9:** *Ok!*

89. **Pesquisador/Participante:** E porque a gente utiliza este procedimento matemático ‘regra de três’?

90. **P-9:** *Pra facilitar!*

91. **Pesquisador/Participante:** Além de facilitar, porque a gente usa a regra de três?

92. **P-8:** *Porque tem um ‘x’? [Risos entre as participantes.]*

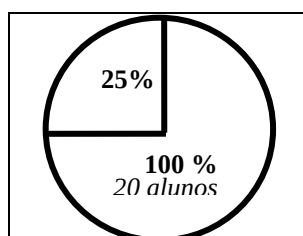
93. **Pesquisador/Participante:** E por que desse ‘x’?

94. **P-8:** *Porque o ‘x’ é incógnita!*

95. **Pesquisador/Participante:** Concordo, é uma incógnita. Mas, o porquê da regra de três?... Que envolve uma incógnita pra facilitar... [Nenhuma participante respondeu. P-9, rindo, respondeu: “Porque sim!”.]

96. **Pesquisador/Participante:** Então vamos tentar compreender. O gráfico de setor representa a parte em relação ao todo, ou seja, representa uma divisão que me remete a uma razão. Razão é uma divisão entre dois números ou duas grandezas. Se eu tenho o meu todo,

ele equivale ao meu total que é 100% equivalente a uma quantidade, que no nosso exemplo eram 20 alunos. Se eu quero pegar uma parte deste todo, eu vou pegar também uma parte deste total de 20 alunos. Então eu vou utilizar as ideias de razão e de proporção entre o todo e a parte, que neste caso são grandezas diretamente proporcionais. **[As participantes foram registrando o exposto pelo Pesquisador/Participante.]** Eu acho interessante a gente compreender a regra de três, né pessoal! **[Neste momento, o Pesquisador/Participante foi à lousa e desenhou o seguinte esquema, falando concomitantemente.]**



Nós temos o todo que é 100% equivalendo a 20 alunos. No entanto eu quero saber quanto vale 25%. Então, podemos representar assim: **[O Pesquisador/Participantes escreveu na lousa a seguinte representação.]**

$$\begin{array}{l} 100\% \xrightarrow{\text{equivale}} 20\text{alunos} \\ 25\% \xrightarrow{\text{equivale}} x(\text{alunos}) \end{array}$$

Dá pra perceber que, se eu diminuir a porcentagem o número de alunos também diminuirá. Desse modo nós teremos grandezas diretamente proporcionais, ou seja, que se ‘movem’ num mesmo sentido, digamos assim. Nós colocamos aqui **[Apontou com o dedo indicador a incógnita ‘x’ denotada na representação acima.]** o ‘x’, mas poderia ser o símbolo de um coração, sol, estrela, árvore... **[O Pesquisador/Participante foi desenhando, ao lado do ‘x’, desenhos representativos destes seres. O fez no intuito de frisar que o ‘x’ pode ser qualquer outro símbolo, e isto não irá influenciará no resultado.]** No entanto, a linguagem matemática, por convenção e visando certa estética, geralmente utiliza as letras do alfabeto para a representação da incógnita, mais particularmente os ‘famosos’ ‘x’, ‘y’ e ‘z’. Lembra que estamos tratando da razão, ou seja, da divisão do todo (100%) por uma parte (25%); e também da divisão do total de 20 alunos por uma parte ‘x’ de alunos? Desse modo, eu posso escrever a representação colocada na lousa desta maneira: **[Escreveu abaixo da referida representação o seguinte.]**

$$\frac{100\%}{25\%} = \frac{20(\text{alunos})}{x(\text{alunos})}$$

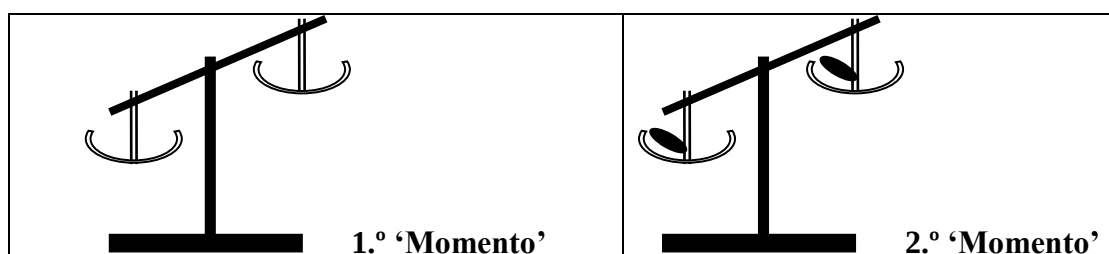
Eu pude colocar o sinal de igual entre as duas divisões porque tais razões, por se referirem a grandezas diretamente proporcionais, são equivalentes. Daí vem aquela ‘famosa’ multiplicação em cruz. Mas o por quê desta multiplicação em cruz? **[Nenhuma participante soube responder a questão colocada pelo Pesquisador/Participante.]** Na multiplicação em cruz teríamos: **[Escreveu na lousa o exposto abaixo.]**

$$\begin{array}{l} 100 \times x = 25 \times 20 \\ x = \frac{500}{100} = 5 \end{array}$$

Percebam que as porcentagens foram anuladas já que a divisão de ‘elementos iguais’ me produz um elemento neutro, assim como com os ‘alunos’ que qualificavam os números 20 e a incógnita ‘x’. Tudo bem esta questão, pessoal? **[As participantes responderam “Sim.”.]** Quando estamos numa proporção, como é o caso, a multiplicação em cruz nos ajuda a encontrar o resultado. Tal estratégia é adotada para facilitar os cálculos, mas podemos resolver por meio do método do ‘balanceamento’. Ou seja, se eu multiplicar ambos os lados por 25 eu não vou alterar o resultado. **[Escreveu na lousa o seguinte.]**

$$(25) \times \frac{100\%}{25\%} = \frac{20(\text{alunos})}{x(\text{alunos})} \times (25)$$

Nós podemos pensar nisso em analogia a uma balança. Imagine que uma balança esteja deste modo. **[Desenhou na lousa o exposto abaixo – 1.º Momento.]**



Dá pra perceber que se eu colocar um feijão em cada prato não vai alterar o resultado. **[2.º ‘Momento’]** Tudo bem, pessoal? **[Todas as participantes indicaram, por meio de expressão facial, compreender tal afirmação.]** Vocês perceberam que não vai desequilibrar, então é a mesma analogia destas multiplicações por 25. No entanto, além de multiplicar ambos os lados por 25 eu também posso fazer isso daqui, não posso? **[Acrescentou, na representação anterior a multiplicação, em ambos os lados por ‘x’.]**

$$(x) \times (25) \times \frac{100\%}{25\%} = \frac{20(\text{alunos})}{x(\text{alunos})} \times (25) \times (x)$$

Agora basta ‘anularmos’ este 25 do numerador com esse do denominador e este x do denominador com este do numerador. **[Na representação acima, o Pesquisador/Participante fez um traço inclinado nos números e incógnitas indicando o ‘anulamento’, escrevendo, em seguida o seguinte.]**

$$\begin{aligned} x \times 100 &= 20 \times 25 \\ x &= \frac{500}{100} = 5 \end{aligned}$$

Vejam, pessoal, nós recaímos na mesma situação da multiplicação em cruz que fizemos há pouco. Deu pra acompanhar? **[Todas as participantes, através de expressão facial, indicaram afirmativamente.]** Durante o Ensino Fundamental vocês haviam estudado este ‘processo’ de ‘balanceamento’, ou os professores explicaram a multiplicação em cruz e pronto!?

97. **P-5:** Não, eu lembro de ter aprendido assim! **[Com o dedo indicador esquerdo apontou para a lousa referindo-se ao processo de ‘balanceamento’.]** Eu lembro que o que

faz de um lado faz do outro e tinha até a questão da balança, mas... eu lembro dela falando [Referiu-se a sua professora de Matemática.] mas...

98. **Pesquisador/Participante:** Mas você se lembra dela falando disso e relacionando com a multiplicação em cruz?

99. **P-5:** *Então, eu não lembro... Mas eu lembro ela falando isso, o que faz de um lado tem que fazer do outro! Então eu acredito que ela tenha explicado! [Referiu-se à multiplicação em cruz.]*

100. **Pesquisador/Participante:** Eu também acredito que sua professora tenha a explicado. Talvez ela não tenha dado várias situações para que você tivesse construído bem este processo de ‘balanceamento’ e podendo, por meio dele explicar o porquê da multiplicação em cruz!

101. **P-5:** *É, até porque a gente começou a fazer tudo pela multiplicação em cruz e até esquecemos desse negócio de fazer tudo igual de cada lado.*

102. **Pesquisador/Participante:** É que nem os professores faziam assim, oh... [Escreveu na lousa o seguinte.]

$$25 = x + 2$$

E daí o professor falava que pra passar o 2 do outro lado do sinal de igual é preciso mudar o sinal.

103. **P-9:** *É verdade!*

104. **Pesquisador/Participante:** Daí fica assim: [Escreveu na lousa o exposto abaixo.]

$$25 = x + 2$$

$$25 - 2 = x$$

$$23 = x$$

A maioria dos professores dizia que era só passar o número pro outro lado e mudar o sinal!

105. **P-9:** *Isso mesmo, eu lembro disso! [Resposta compartilhada pelas demais participantes, seguidos de risos.]*

106. **Pesquisador/Participante:** Turma, na verdade não ‘passa’ nada. Apenas é realizado o mesmo processo de ‘balanceamento’. Mas, como assim?... Simples, eu somo menos 2 deste lado e somo menos 2 deste lado. [Denotou na lousa o seguinte.]

$$(-2) + 25 = x + 2 + (-2)$$

Mais dois e menos dois é igual a 0. Vinte e cinco menos dois eu vou obter o mesmo resultado daqui. [Apontou para a representação anterior.]

107. **P-8:** *Ah, nesse caso agora você precisou somar!?*

108. Pesquisador/Participante: Isso, você tem que pensar de modo análogo utilizando a ideia da balança. Assim, se você somar de um lado terá que somar do outro, do mesmo modo se você multiplicar ou dividir ou subtrair. Tudo bem?

109. P-8: *Sim!*

110. P-9: *Qual era a hipótese desses professores que passavam assim pra gente? [Referiu-se aos professores de Matemática que apenas dizem pro aluno ‘passar’ o número do outro lado do sinal de igual ‘trocando’ o sinal.] Eu não me lembro do professor ter explicado isso que você explicou pra gente. Talvez seja a hipótese de que os nossos professores achavam que a gente não tinha construção suficiente pra isso? Qual seria a ideia dele?*

111. Pesquisador/Participante: Sim, esta poderia ser uma justificativa. A outra é que isso iria complicar a cabeça do aluno... Só que, pensem bem, daí parece que a Matemática é algo mágico: “Corta, faz em cruz!”. Mas, o porquê de tudo isso? Vocês estão acompanhando a nossa discussão? **[As demais participantes, por meio de expressão facial, sinalizaram estar ‘acompanhando’ a discussão.]**

112. P-8: *Mas a gente não vê isso! Eu mesmo não tenho segurança de passar isso pro aluno da gente!*

113. Pesquisador/Participante: Olha, mas isso a gente não vai chegar a abordar pros nossos alunos dos anos iniciais. Ok! Isso daqui é o segundo ciclo do Ensino Fundamental, mas o interesse aqui é que vocês compreendam estes ‘processos’ que muitas vezes ficaram sem a devida explicação!

114. P-8: *Ah tá!*

115. Pesquisador/Participante: Mas, por exemplo, a gente pode fazer uma atividade com os nossos alunos desse tipo. Podemos pedir pro aluno colocar 10 elementos num conjunto A e 10 elementos num conjunto B e perguntar onde tem mais, menos ou se é igual. Após verificar que são iguais, você pode pedir pro aluno juntar mais 2 elementos em cada um dos conjuntos e fazer a mesma pergunta. O aluno irá verificar que não mudou esta relação de igualdade. Dá pra perceber que esta atividade ‘lembra’ o processo de balanceamento? Estamos trabalhando as relações lógicas e até mesmo aritméticas com nossos alunos sem necessitar envolver o ‘x’ enquanto uma incógnita.

116. Pesquisador/Participante: *É verdade!* **[Neste momento realizou um gesto com as duas mãos indicando o equilíbrio observado entre os ‘pratos’ de uma balança.] [Percebendo que P-2 estava inquieta, o Pesquisador/Participante pediu que a mesma expusesse sua dúvida.]**

117. P-2: *Como eu explico pro aluno que ele tem que pegar o 25 pra multiplicar e o x pra multiplicar? [Referiu-se à explicação do ‘balanceamento’ visando compreender a multiplicação em cruz.] Eu multiplico sempre onde está a incógnita?*

118. Pesquisador/Participante: Não! Nesse caso você precisa ‘anular’ os denominadores, que no caso são o 25 e o x! Deu pra compreender?

119. **P-2:** *Sim! E no caso daquele menos dois que você somou? [Referiu-se ao $25 = x + 2$.]*
120. **Pesquisador/Participante:** Neste caso você quer ‘isolar’ a incógnita deixando-a sozinha em um dos lados do sinal de igual. Como o x está adicionado por 2, é necessário subtrair 2 de ambos os ‘lados’. Fazendo isso iremos anular o 2 que está sendo adicionado ao x , já que obteremos o elemento neutro da adição que no caso é o 0. Deu pra entender?
121. **P-2:** *Sim! Então é assim que eu explicaria pro aluno?*
122. **Pesquisador/Participante:** Sim, a meu ver seria uma explicação oportuna.
123. **P-2:** E ali? [Apontou para o exemplo da multiplicação em cruz.]
124. **Pesquisador/Participante:** Neste caso a explicação se dá pela necessidade de anular os denominadores! Tudo bem?
125. **P-2:** *Ah, sim! [Ideia compartilhada entre as demais participantes.]*
126. **Pesquisador/Participante:** Ah, mas e se o aluno quiser que o ‘ x ’ fique do outro lado do sinal de igual? [Referiu-se ao $25 = x + 2$.] [Como nenhuma participante se pronunciou, houve a necessidade de intervenção.]

Nós fazemos assim: iremos adicionar em ambos os termos ‘menos x ’, para que haja o ‘cancelamento’ da incógnita no ‘lado’ inicialmente colocado.

$$\begin{aligned} (-x) + 25 &= x + 2 + (-x) \\ (-x) + 25 &= 2 \end{aligned}$$

Tudo bem, pessoal, porque eu fiz isso? [Todas as participantes responderam “Sim.”.] Agora, do mesmo modo feito no anterior, eu quero ‘isolar’ a incógnita, assim eu vou somar menos 25 deste ‘lado’ e menos 25 deste outro ‘lado’. [Acrescentou na última ‘expressão’ o seguinte.]

$$(-25) + (-x) + 25 = 2 + (-25)$$

Agora eu posso ‘cancelar’? [Todas as participantes indicaram afirmativamente.] Então fica menos ‘ x ’ igual a 2 menos 25. [Em continuidade, anotou o seguinte.]

$$-x = 2 - 25$$

E para fazer com que o ‘ x ’ possua um valor positivo, é possível multiplicar cada um dos termos por menos 1 e não irá alterar o resultado. [Terminou a solução, escrevendo o seguinte.]

$$\begin{aligned} (-1) \times (-x) &= (2 - 25) \times (-1) \\ x &= -2 + 25 \\ x &= 25 - 2 \end{aligned}$$

Todo mundo compreendeu as multiplicações por esse menos 1? [Ninguém se manifestou indicando não haver dúvida.] Percebam que eu cheguei no mesmo resultado só que eu demorei mais! É por isso, P-9, que muitas vezes o professor, pra não perder tempo,

porque ele acha que explicar isso é uma perda de tempo, ele acaba mandando o aluno passar pro outro lado e inverter o sinal... Só que, talvez, isso pode causar várias dificuldades conceituais no futuro! Vocês concordam comigo, pessoal? **[Todas as participantes responderam “Sim.”]** Vocês querem que eu volte em alguma parte? **[Ninguém se pronunciou sinalizando a compreensão do exposto.]** Turma, será que é por isso que a Matemática acaba se tornando um ‘bicho’ de ‘Sete Cabeças’ quando o aluno avança entre os anos?

127. **P-9:** *Sim, porque você não aprende a criar outros caminhos, geralmente, por exemplo, sobre isso aí, o professor não pede pra você achar uma alternativa que seja diferente da regra que ele manda você fazer. Porque antes de você nos explicar pra mim não tinha como, eu só conseguia fazer com aquela ideia de passar o número pro outro lado... mas agora eu vi diferente.*

128. **Pesquisador/Participante:** Ok!

129. **P-9:** *Então daí a criança ou o jovem consegue fazer só daquele jeito. E daí é um ensino técnico, mecânico...*

130. **Pesquisador/Participante:** Algum outro comentário?

131. **P-4:** *Você pode ensinar o aluno só assim... sem a multiplicação em cruz?*

132. **Pesquisador/Participante:** Não, você pode ensinar as regras... desde que antes o aluno compreenda o porquê destes procedimentos. Porque a gente tem que facilitar a ‘vida’ do aluno, vocês concordam?

133. **P-4:** *Sim!*

134. **P-2:** *É, assim como a P-5 comentou, eu acho que a minha professora explicou isso pra mim também! [Indicou o fato de estar recordando da explicação do ‘balanceamento’ pela sua professora de Matemática.] Sabe quando você vai lembrando... Só que como não usa a gente esquece!*

135. **P-5:** *É que a gente vai fazendo tanto exercício de multiplicação em cruz... que a gente acaba esquecendo...*

136. **P-8:** *É... a professora explica e depois dá tanto exercício que a gente nem se lembra mais...*

137. **Pesquisador/Participante:** Compreendi! Vamos à 3.^a questão: “É possível transformar o Gráfico de Setor – Item D em um Gráfico de Colunas?. **[Antes de completar a leitura da referida questão, todas as participantes responderam “Sim.”. Em seguida, disseram que após transformar os valores percentuais em valores cardinais referentes às frequências de cada sabor de sorvete, é possível construir um Gráfico de Colunas. No entanto, P-2 fez o seguinte questionamento.]**

138. **P-2:** *Mas eu poderia fazer um gráfico de colunas com os valores percentuais?*

139. **Pesquisador/Participante:** Sim, você poderia construir o gráfico indicando em percentual. No entanto, seria necessário indicar o total de alunos pesquisados para que, quem fosse ler, pudesse transformar o valor percentual em cardinal.

140. **P-2:** *Ok!*

141. **Pesquisador/Participante:** Muito bem pontuado isso! Todo mundo compreendeu? **[Todas as participantes, por meio de gesto facial, sinalizaram afirmativamente.]** Vocês acham interessante essa transformação de Gráfico de Setor para o de Coluna?... Isso possibilita ao aluno compreender esta questão da mobilidade, do ir e vir, de que existe mais de um caminho para a solução de algo... Nos anos iniciais o aluno ainda não vai construir esse Gráfico de Setor, mas ele terá de interpretá-lo... e, a partir dele, auxiliado pelo professor, este aluno poderá, sim, construir um Gráfico de Coluna ou de Barra... Ah, mas daí vocês poderiam me perguntar: “Mas o aluno vai já utilizar a regra de três?”... Ainda não, mas como a P-5 falou, se o total é 20 e ele quer descobrir quanto é 25% que é igual a $\frac{1}{4}$, e $\frac{1}{4}$ já é possível do estudante calcular... Percebam como já é possível abordar o Gráfico de Setor com nossos alunos dos anos iniciais! **[Todas as participantes responderam “Sim.”.]**

[Em relação à 4.^a questão, todas as participantes responderam que a operação mental necessária para a compreensão da relação “algumas dentre todas” era a classificação. Foi interessante observar que nenhuma das participantes apresentou dificuldade em responder tal questão, sinalizando a compreensão de operação de classificação. Chegou-se a conclusão de que – mediante os estudos anteriores acerca da classificação – não havia a necessidade de justificar tal resposta. Finalmente foi pontuado ser imprescindível o professor conhecer bem tal operação que representa uma estrutura lógica do pensamento do sujeito e que será utilizada em vários momentos e em outras disciplinas além da Matemática. P-2 disse ser complexa, além do próprio entendimento psicológico da classificação, identificar em qual fase a criança se encontra, para, assim, poder desenvolver um trabalho de modo a permitir que o estudante progrida. Após esta fala, o Pesquisador/Participante pontuou o denotado a seguir.]

142. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo, muito bem observado. Não é simples identificar se o aluno já se encontra nas Coleções Não-Figurais ou se ainda está realizando um alinhamento contínuo ou um objeto complexo. É por isso que é interessante estabelecer um trabalho em conjunto com outros professores para que haja a troca de ideias entre tais questões. É a mesma coisa quando vocês forem identificar em qual hipótese de escrita o aluno se encontra, seja a silábica sem valor sonoro, com valor sonoro, silábico-alfabética...

143. **P-2:** *É mesmo! Às vezes você afirma: “Ah, é pré-silábica!”*, daí vem a professora e diz: “Não!”. **[Risos entre as participantes.]**

144. **Pesquisador/Participante:** É mais ou menos essa analogia. Certo! Na 5.^a questão eu quis saber os saberes da experiência de vocês. Quem conseguiu dar um exemplo de Gráfico de Linhas e fez uma imagem? Levante a mão! **[Apenas P-5 levantou o braço esquerdo.]** Você fez P-5?

145. **P-5:** *Ah, eu tentei!*

146. **Pesquisador/Participante:** Você deu um exemplo de quando estudo Gráfico de Linhas?

147. **P-5:** *Ah, o que eu me lembro representando Gráfico de Linha é representando temperatura ou o dólar.*

148. **Pesquisador/Participante:** Você representou por meio de um esquema? [Após responder “Sim”, a participante mostrou a todos o seguinte desenho, salientando que não havia colocado nenhum valor numérico.]



149. **Pesquisador/Participante:** Ok! Além da P-5, alguém deu um exemplo de quando estudou Gráfico de Linhas e desenhou? [Erguendo a mão, P-9 respondeu.]

150. **P-9:** *Eu acabei de lembrar! [Risos.] No 1.º colegial, gráficos... na aula de História e Geografia... Gráficos no valor do petróleo dos países lá...*

151. **Pesquisador/Participante:** Ok! Então essa foi a sua lembrança de Gráfico de Linhas! E Cartograma, alguém lembra de algum exemplo? [Novamente P-5 ergueu o braço e falou.]

152. **P-5:** *Eu lembro pra representar o clima! Põe o clima de cada região... Ah... isso não é! É?*

153. **Pesquisador/Participante:** *Sim!*

154. **P-5:** *Ah tá! Tinha cada região e a gente pintava, tinha a legenda...*

155. **P-8:** *Ah, é isso mesmo!*

156. **Pesquisador/Participante:** Após a fala da P-5 alguém se recordou?

157. **P-2:** *Então, a gente até comentou [Referiu-se às participantes P-7 e P-8] mas nós não fizemos.*

158. **Pesquisador/Participante:** Ok! E o Pictograma, alguém?

159. **P-2:** *Eu lembrei de um gráfico, de introdução de automóveis, e aí eram os anos conforme iam produzindo e ia pondo os carrinhos marcando...*

160. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo, é um Pictograma! Então sobre o Pictograma vocês só pensaram? [As participantes P-2, P-4, P-5 e P-7 responderam: “Sim.”.] Então no momento que eu perguntei não veio rapidamente à mente?

161. **P-2:** *Então, a gente ia lendo a questão e ia conversando sobre, só que não fomos escrevendo.*

162. **P-8:** *Então, como elas tiveram aula de Estatística, então elas lembraram... Eu como já tinha muita Estatística [Referiu-se ao fato de ter feito um curso superior no qual utilizou bastante a Estatística.] eu não fiz a disciplina, por isso não lembrava...*

163. **Pesquisador/Participante**: Compreendi! E o Histograma? Alguém conseguiu lembrar de um exemplo e de uma representação visual?
164. **P-2**: *Eu lembro que era um tipo de barras só que não tinham intervalos entre eles, eles eram juntos...*
165. **Pesquisador/Participante**: Eram juntinhos?
166. **P-2**: *Sim!*
167. **Pesquisador/Participante**: E qual foi o exemplo?
168. **Pesquisador/Participante**: *Ah, isso eu não sei!*
169. **Pesquisador/Participante**: Alguém lembra? [Ninguém conseguiu lembrar.]
170. **P-5**: *Eu pensei num exemplo e não sei se está correto ou não! Mas eu vou falar... Eu pensei em anos... mas daí eu pensei na questão e... por exemplo, de 1900 a 1950 e daí a barra ficaria assim que é entre um e outro [Com as mãos representou o contorno de um quase retângulo já que não completou com uma das bases.]*
171. **Pesquisador/Participante**: Tem a ver com essa questão de intervalo, entre um e outro, mas não precisa ser anos...
172. **P-5**: *Mas se fosse assim, os anos, e tivesse um número quebrado seria?*
173. **Pesquisador/Participante**: Depende da variável que você está considerando. Porque o Histograma foi feito para representar a variável quantitativa contínua, onde realmente têm números aproximados ‘quebrados’ advindos de medições...
174. **P-5**: *Poderia ser taxa de natalidade?*
175. **Pesquisador/Participante**: Se é observado a frequência desta classe de intervalo da natalidade sim.
176. **P-5**: *Ok!*
177. **Pesquisador/Participante**: Tudo bem, P-5?
178. **P-5**: *Não!*
179. **Pesquisador/Participante**: Então vamos lá!
180. **P-5**: *Ter um número ‘quebrado’, como fala?*
181. **Pesquisador/Participante**: Decimal!
182. **P-5**: *Ah, sim, decimal. Ter esse número é uma regra? [Referiu-se ao fato de que, caso o gráfico possua números decimais, então representará uma variável quantitativa contínua.]*

183. **Pesquisador/Participante:** Não, o fato de possuir números decimais não significa que seja uma variável quantitativa contínua.

184. **P-2:** *Seria, por exemplo... uma coisa contínua que estou analisando, por exemplo, entre o 1 e o 2 tem números ali..*

185. **Pesquisador/Participante:** Isso. Poderia ser, a partir do seu exemplo, assim: entre 1 e 2 metros, quantas crianças estão dentro deste intervalo de medida? Poderíamos ter crianças com 1 metro e 1 centímetro, 1 metro e 15 centímetros, 1 metro e 46 centímetros, etc... Deu pra compreender, pessoal? Percebam que eu considere os valores contidos neste intervalo de medida... **[As participantes indicaram compreender o exposto.]**

186. **P-5:** *Por exemplo, eu dei o exemplo dos anos. Vamos supor que eu fosse considerar quantas pessoas nasceram entre 1950 e... Seria um Histograma? Porque umas nasceram em 1951, outra em 1952, a gente não sabe.*

187. **Pesquisador/Participante:** Então, você poderia utilizar um Gráfico de Colunas para representar quantos nasceram em 1951, em 1952... Seria mais adequado! **[O Pesquisador/Participante quis testar até que ponto a participante defenderia sua ideia.]**

188. **P-5:** *Mas daí não seriam muitos?*

189. **Pesquisador/Participante:** É, você está certa. Acho que você poderia, caso quisesse representar um número elevado, utilizar intervalos num Histograma. Mas a gente pode ver esta questão mais adiante quando formos estudá-lo! É necessário perceber que o Histograma representa a frequência de classes de intervalos, e não um número em si! Tudo bem, pessoal? **[Como ninguém se manifestou, o Pesquisador/Participante perguntou se alguém havia se lembrado do Polígono de Frequência. P-7 respondeu o denotado abaixo.]**

190. **P-7:** *Ah, eu tava lembrando o exemplo, o contorno!*

191. **Pesquisador/Participante:** Qual foi este contorno? Mostre pra gente!

192. **P-7:** *Então, foi um contorno...* **[Neste instante, P-2 interrompeu e falou.]**

193. **P-2:** *Seria o contorno do Histograma... pegaria os pontos médios e ia ligando...* **[Com a dedo indicador esquerdo fez movimentos no ar representando a união entre pontos por meio de segmentos de reta.]**

194. **Pesquisador/Participante:** Seria mais ou menos isso aqui? **[Mostrou o Polígono de Frequência a ser estudo nas próximas páginas do texto.]**

[Nenhuma participante se pronunciou, sinalizando que este tipo gráfico, caso tenha sido abordado durante a Educação Básica, não foi ‘profundamente’ estudado.]

É interessante, pessoal, porque foi possível ‘mapear’ os saberes de vocês. Dá pra perceber que não foi feito um trabalho tão aprofundado sobre isso. Vocês concordam? É igual uma de vocês disse num Grupo anterior onde o professor falava: “Olha, esse conteúdo existe, está aqui no livro e pronto!”.

195. **P-5:** *No meu caso, só pra salientar, eu acho que foi diferente. Eu só não acho se foi trabalhado de uma maneira correta porque eu lembro muito de gráfico. Eu acho que num*

ano trabalhou muito tempo, talvez eu não lembre porque talvez não foi trabalhado de uma maneira correta... Mas eu lembro de muito gráfico no 2.º e 3.º colegial. Então foi trabalhado bastante, talvez eu não sei devido à maneira que não foi trabalhado correto!

196. Pesquisador/Participante: Compreendi!

197. P-8: *E você estudou em escola pública, não é?* [Tal pergunta indica a surpresa da participante de presenciar um aluno da escola pública que tenha estudado tal assunto.]

198. P-5: *Sim, é!*

199. Pesquisador/Participante: Que bom! Talvez você não se recorde pelo nome “Polígono de Frequência”. Mas talvez você o saiba identificar! Poder ser, também, não é P-5?

200. P-5: *Pode!*

[Dando continuidade, foi solicitada a leitura – em dupla, trio ou individual – do texto denotado abaixo e a solução de uma questão. Para tanto foram disponibilizados 25 minutos.]

6.2.1 Conceituando alguns tipos de gráficos

No item anterior foi feita uma discussão acerca de alguns tipos de gráficos a partir dos seus saberes experienciais adquiridos durante o ensino de Matemática na Educação Básica. Visando a uma melhor compreensão, denotar-se-ão possíveis conceituações de tais gráficos.

6.2.1.1 Gráfico de barras e de colunas

Tanto o gráfico de Barras (‘barras’ horizontais) quanto o gráfico de Colunas (‘barras’ verticais) são costumeiramente utilizados para a apresentação/organização de variáveis qualitativas (nominais ou ordinais). No entanto, servem também para representar variáveis quantitativas discretas. Em tais gráficos, as barras devem possuir larguras iguais e seus comprimentos são proporcionais à frequência de cada dado. Para o seu traçado são necessários dois ‘eixos’ que se intersectam formando um ângulo de 90°.

6.2.1.2 Gráfico de setor “pizza”

Esse tipo de gráfico, já denotado no item 6.1, serve para a apresentação/organização de variáveis qualitativas e quantitativas. Tal gráfico possui como base um círculo representando o total dos dados pesquisados. Cada setor construído indica a frequência da referida variável. Tomando como exemplo o gráfico de Setor – Item D (Sorvete Preferido), temos que:

1 – O total de alunos pesquisados foi 20, então, 20 representa o total do círculo (100% ou 360°).

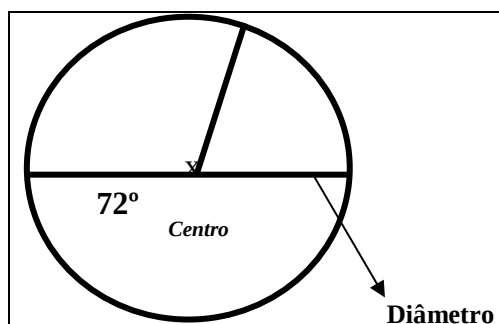
2 – A frequência de cada variável qualitativa nominal (Chocolate, Coco, Flocos, Morango e Napolitano) é representada por um setor, ou seja, uma parte do círculo total. A ‘soma’ de todos os setores obtidos deve ser igual a 100% ou 360°. No entanto, como construir tais setores? Inicialmente deve ser observada a frequência de cada variável (em número cardinal), conforme apresentada na tabela abaixo:

Sorvete	Frequência
Chocolate	4
Coco	3
Flocos	3
Morango	5
Napolitano	5
TOTAL (Alunos)	20

Por meio de **regra de três simples** é possível obter quantos graus cada setor representa do total do círculo. Para a obtenção do setor indicando a frequência do sorvete de ‘Chocolate’ procede-se da seguinte maneira:

$20 \xrightarrow{\text{equivale}} 360^\circ$ $4 \xrightarrow{\text{equivale}} x^\circ$ $\frac{20}{4} = \frac{360}{x}$ $20 \cdot x = 360 \times 4$ $x = \frac{1440}{20} = 72^\circ$	$20 \xrightarrow{\text{equivale}} 100\%$ $4 \xrightarrow{\text{equivale}} x\%$ $\frac{20}{4} = \frac{100}{x}$ $20 \cdot x = 100 \times 4$ $x = \frac{400}{20} = 20\%$	$100\% \xrightarrow{\text{equivale}} 360^\circ$ $20\% \xrightarrow{\text{equivale}} x^\circ$ $\frac{100}{20} = \frac{360}{x}$ $100 \cdot x = 360 \times 20$ $x = \frac{7200}{100} = 72^\circ$
--	---	---

Conforme os cálculos realizados, obteve-se que o setor circular representando o ‘Chocolate’ possui ângulo de 72° (graus) e equivale a 20% (por cento) do total pesquisado. Após o traçado do círculo, por meio de um transferidor, é possível desenhar tal setor ‘fazendo uma abertura’ de 72° a partir do centro (do círculo) e posicionando o transferidor sobre o diâmetro (do círculo). Observe a figura abaixo:



De modo análogo, é possível calcular os demais setores referentes ao ‘Coco’, ‘Flocos’, ‘Morango’ e ‘Napolitano’ para, assim, construir o gráfico de Setor.

1. Para os demais sabores (Coco, Flocos, Morango e Napolitano) calcule o valor correspondente em % (porcentagem) e a ‘abertura’ angular ($^\circ$) do setor circular.

[O Pesquisador/Participante fez a leitura dos itens 6.2.1 e 6.2.1.1. Nenhuma participante apresentou dúvida a respeito de tais itens. Dando continuidade, o Pesquisador/Participante realizou a leitura do item 6.2.1.2, fazendo comentários de modo a facilitar a compreensão do texto. As participantes acharam interessante a explicação referente ao traçado dos graus de um setor por meio de um transferidor, embora todas dissessem ter aprendido tal procedimento.]

[Com relação à questão 1, todas as participantes não tiveram dificuldades para calcular os valores em porcentagem e graus referentes aos sabores de sorvete. Apenas P-4 pontuou que não havia ainda aprendido o cálculo em graus, mas que, após a discussão havia compreendido bem como fazê-lo.]

[Em prosseguimento, o Pesquisador/Participante pediu para que P-2 realizasse a leitura do item 6.2.1.3. Tal item encontra-se exposto abaixo.]

6.2.1.3 Gráfico de linhas (segmento)

O gráfico de Linhas é composto por dois eixos (um horizontal e outro vertical) e serve para representar a evolução de um fenômeno ou processo investigado, isto é, o seu crescimento, decrescimento ou constância num determinado período.

PROBLEMATIZANDO...

Após a primeira pesquisa solicitada pela professora de Matemática Sueli, realizou-se uma segunda cujo objetivo foi investigar a quantidade de sorvete consumida no intervalo pelos alunos do 6.º ano B durante os meses de março a junho. Como a professora Sueli também ministra aulas no 6.º ano A, foi feita uma comparação entre as duas turmas. A cada intervalo, a professora Sueli pedia que os alunos marcassem numa cartolina, fixada na parede, um X indicando o consumo do sorvete naquele dia. A cada semana, era

contabilizado o total de sorvetes consumidos e, ao final de cada mês, tais valores eram somados obtendo-se o total de consumo mensal. Em cada mês, a professora Sueli e seus alunos anotavam os dados em uma tabela. Ao final da pesquisa, a tabela constituída foi a seguinte:

Tabela – Total de Sorvetes consumidos pelos alunos dos 6.º anos A e B

Mês	Turma	
	6º ano A	6º ano B
Março	352	289
Abril	345	321
Maio	288	250
Junho	321	311
TOTAL	1306	1171

Visando representar num gráfico que permitisse visualizar a ‘evolução’ (aumento ou diminuição) dos sorvetes consumidos pelos alunos durante os meses de março a junho, a professora Sueli propôs aos alunos a apresentação/organização dos dados por meio de um gráfico de Linhas (ou de Segmento). Após elaborar cada gráfico referente a cada turma separadamente, colocou-os num único gráfico, conforme denotado abaixo:

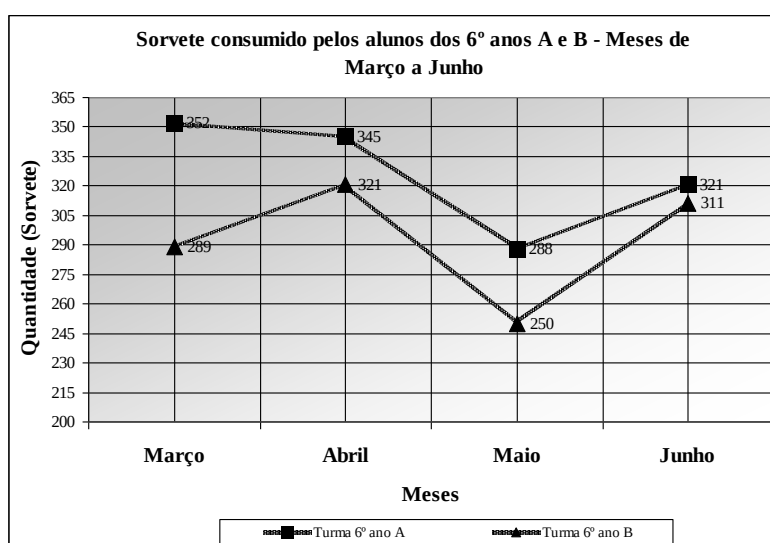


Gráfico de Linha – Sorvete consumido pelos alunos dos 6.º anos A e B – meses de março a junho

[Após a leitura, o Pesquisador/Participante perguntou se as participantes já haviam estudado gráficos deste tipo. A expressão facial das mesmas indicou que apesar de terem visto tal tipo de representação gráfica não se recordaram de terem feito atividades acerca do mesmo. Em seguida, o Pesquisador/Participante disponibilizou 10 minutos para que as participantes pensassem sobre os seguintes problemas referentes ao referido gráfico.]

- Suponha que você não tenha conhecimento da tabela e, apenas, do gráfico de Linha denotado há pouco. É possível saber, sem a realização de nenhuma operação matemática ‘mental’, qual turma tomou mais sorvete durante os meses de março a junho? Pense a respeito.
- A partir do gráfico de Linha apresentado na página anterior, marque (V) para a afirmação verdadeira e (F) para a afirmação falsa.
 - ☐ a) Em relação ao 6.º ano A, durante os meses de março a abril ocorreu o maior decréscimo quanto ao consumo de sorvetes.
 - ☐ b) Em relação ao 6.º ano B, o total de sorvete consumido compreendendo os meses de maio a junho foi de 1171.
 - ☐ c) O mês em que o consumo de sorvete entre os 6.º anos A e B apresentou menor diferença foi o referente a março.
 - ☐ d) A diferença entre o total de sorvetes consumidos pelos alunos do 6.º anos A e B durante os meses de março a maio foi de 125.
 - ☐ e) O mês em que o consumo de sorvete entre os 6.º anos A e B apresentou menor diferença foi o

referente a junho.

[Em relação à 1.^a questão, P-8 iniciou a discussão respondendo o seguinte.]

201. **P-8:** *Sim. É possível pelos números.* [Neste momento, com o dedo indicador esquerdo apontou para o referido gráfico projetado na lousa em que estavam denotados os números de sorvetes consumidos a cada mês por cada uma das turmas.] *Eu vi que a parte do 6.º ano está em cima do debaixo* [Referiu-se ao fato do ‘traçado gráfico’ denotando os sorvetes consumidos pelo 6.º ano A estar acima do ‘traçado’ do 6.º ano B.]

202. **Pesquisador/Participante:** Então você viu por aí!?

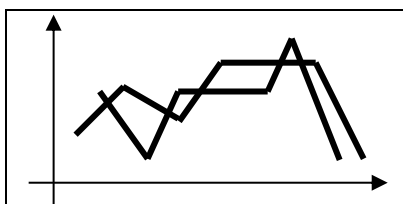
203. **P-8:** *É!*

204. **P-4:** *Como a linha de cima é maior que a de baixo...*

205. **Pesquisador/Participante:** Esta linha é no sentido de representar o consumo de todo o 6.º ano A e de todo o 6.º ano B? [Todas as participantes indicaram, por meio de expressão facial, afirmativamente.] Todas pensaram assim? [Obteve-se novamente a mesma resposta.] Esse gráfico é simples, né pessoal!

206. **P-4:** *Agora se fosse cruzado...*

207. **Pesquisador/Participante:** É, P-4, se fosse cruzado daí a coisa ia complicar. [Risos entre todos.] Se fosse, por exemplo, um gráfico assim... [Representou na lousa o exposto abaixo.]



Daria pra fazer sem calcular? [Todas responderam “Não.”. P-4 salientou que daria até pra fazer por meio de um cálculo mental, mas que não daria pra fazer apenas visualmente como no exemplo em questão.] É interessante chamar a atenção do aluno pra essa questão. Mesmo nos anos iniciais onde, ainda, a abordagem deste tipo de gráfico não é apropriada, é possível fazer um trabalho para que ele compreenda aumentos, diminuições ou constâncias de uma determinada variável. A seção econômica do jornal traz muito este tipo de gráfico mostrando a variação do dólar... Comecem a analisá-lo, seria uma atividade interessante...

Na 2.^a questão eu coloquei várias afirmações e pedi pra que vocês, a partir do gráfico, julgassem se eram verdadeiras ou falsas. Vamos ver o que vocês responderam.

[Em relação ao item a) todas disseram que a afirmação era falsa, e que o mês de maior decréscimo do 6.º ano A foi entre os meses de abril a maio. Sobre o item b), novamente todas acertaram dizendo que a afirmação era falsa; quando questionadas responderam que a resposta correta seria 561 sorvetes. Neste momento o Pesquisador/Participante chamou a atenção ao fato de que grande parte dos alunos, por descuido, não realizam a leitura atenta do problema e acabam errando por achar que a

questão referia-se a todos os meses pesquisados. P-2 confessou ter feito isso inicialmente e que, após conferir a resposta com P-7, percebeu ter lido apressadamente o problema.]

[Retomando, todas as participantes responderam que o item c) era falso, no entanto, ao questioná-las do porquê P-4 disse que o mês cuja diferença entre os 6.º anos A e B foi menor era maio. Porém, ao ouvir a resposta das demais ressaltando o mês correto, P-4 ressaltou ter se confundido e que realmente a resposta correta seria o mês de junho. Neste momento, o Pesquisador/Participante interveio.]

208. **Pesquisador/Participante:** Você compreendeu, P-4, que no gráfico é possível observar a menor diferença visualmente porque as linhas estão quase se cruzando. E quando as linhas se cruzam, o que isso significa?

209. **P-5:** *Que os valores são iguais.*

210. **Pesquisador/Participante:** Isso... que foi o mesmo consumo de sorvete, neste caso.

[Dando continuidade ao 2.º problema, ao questioná-las sobre o item d) todas as participantes responderam que tal afirmação era verdadeira. Foi solicitado à P-4 que explicasse como resolveu tal item. Após alguns instantes a participante disse o seguinte.]

211. **P-4:** *Você tinha que primeiro... Daí você tinha que fazer 352 menos 288...* [Percebeu-se que a participante estava em dúvida acerca do modo utilizado para resolver o referido problema. P-2 tentou auxiliá-la perguntando como a mesma tinha feito. O Pesquisador/Participante, no intuito de ajudá-la perguntou quais valores mostrados no gráfico (projetado) a participante utilizou. Como resposta, foi possível concluir que P-4 realizou as seguintes operações registradas na lousa pelo Pesquisador/Participante.]

6.º ano A	–	3 5 2		
		2 8 8		
		0 6 4		
6.º ano B	–	2 8 9		
		2 5 0		
		0 3 9		

		6 4	
	+	3 9	
		1 0 3	

[Após denotar tais operações na lousa, P-4 percebeu que havia errado. P-4 cometeu uma confusão na interpretação da afirmação – item d). A participante considerou, para cada turma em separado, o consumo de sorvete no mês de março subtraindo-o do consumo referente ao mês de maio; em seguida somou os valores obtidos de cada turma (6.º anos A e B). O Pesquisador/Participante salientou que a participante, embora tivesse calculado diferenças, não compreendeu o que a afirmação ressaltou, ou seja, a diferença de sorvetes consumidos pelos alunos dos 6.º anos A e B entre os meses de março a maio. P-4 observou atentamente o exposto na lousa, no entanto não se pronunciou. Visando ‘dar um tempo’ para que a mesma pensasse sobre a solução que havia feito, o Pesquisador/Participante pediu que as demais participantes compartilhassem o modo como haviam resolvido o problema. P-9, desse modo, respondeu o exposto abaixo.]

212. **P-9:** *Eu subtraí a diferença de cada mês!*

213. **Pesquisador/Participante:** Interessante. Vamos representar isso que você fez na lousa. Então a Mariana foi fazendo assim. [Enquanto escrevia as operações na lousa, o

Pesquisador/Participante foi descrevendo-as e perguntando à P-9 se era mesmo desse modo.]

$\begin{array}{r} 3 \ 5 \ 2 \\ - 2 \ 8 \ 9 \\ \hline 6 \ 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \ 4 \ 5 \\ - 3 \ 2 \ 1 \\ \hline 2 \ 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \ 8 \ 8 \\ - 2 \ 5 \ 0 \\ \hline 3 \ 8 \end{array}$
$63 + 24 + 38 = 125$		

[As demais participantes acharam interessante o modo como P-9 resolveu o problema. Para tanto, ela calculou a diferença de consumo dos 6.º anos A e B em cada mês (março, abril e maio), somando, em seguida os valores encontrados. O Pesquisador/Participante salientou que a solução estava correta e que, para tanto, haviam sido realizadas quatro operações aritméticas: 3 subtrações e uma adição. Com o intuito de investigar outras soluções perguntou-se à P-8 como havia feito. A resposta encontra-se a seguir.]

214. **P-8:** *Eu peguei o valor total e...*

215. **Pesquisador/Participante:** Como você achou o valor total?

216. **P-8:** *Eu peguei aqui na tabela!*

217. **P-2:** *Mas era pra olhar só o gráfico e não a tabela!*

218. **P-8:** Ah, tá!

219. **Pesquisador/Participante:** Sim. Mas o problema não proíbe olhar a tabela... diga pra gente como vocês fez!

220. **P-9:** *Eu peguei o valor total, 1306, e tirei o mês de junho. [Referiu-se ao cálculo do consumo de sorvete pelo 6.º ano A nos meses de março a maio. Visando auxiliá-la, o Pesquisador/Participante anotou na lousa o que P-9 foi falando.]*

$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 0 \ 6 \\ - 3 \ 2 \ 1 \\ \hline 9 \ 8 \ 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9 \ 8 \ 5 \\ - 8 \ 6 \ 0 \\ \hline 1 \ 2 \ 5 \end{array}$
$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 7 \ 1 \\ - 3 \ 1 \ 1 \\ \hline 8 \ 6 \ 0 \end{array}$	

221. **Pesquisador/Participante:** Também está certo! Percebam como é rico compartilhar na sala de aula os diferentes procedimentos. Não é interessante!? Amplia a possibilidade de compreender os diferentes caminhos... E vocês duas? [Referiu-se a P-2 e P-7.]

222. **P-2:** *Nós somamos 352 e 345 e 288 e depois somamos 289 e 321 e 250 e depois tiramos 985 e 860. [Enquanto falava, o Pesquisador/Participante anotou na lousa.]*

$\begin{array}{r} 3 \ 5 \ 2 \\ 3 \ 4 \ 5 \\ 2 \ 8 \ 8 \\ \hline 9 \ 8 \ 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \ 8 \ 9 \\ 3 \ 2 \ 1 \\ 2 \ 5 \ 0 \\ \hline 8 \ 6 \ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9 \ 8 \ 5 \\ - \ 8 \ 6 \ 0 \\ \hline 1 \ 2 \ 5 \end{array}$
--	--	---

[P-5 salientou ter feito do mesmo modo que P-2 e P-7. Após perguntar a P-4 se havia compreendido, a mesma afirmou ter conseguido entender. Em seguida, o Pesquisador/Participante ressaltou o denotado abaixo.]

223. **Pesquisador/Participante:** E dá pra fazer isso nos anos iniciais? [Todas as participantes disseram “Sim.”] Não só pode como deve ser feito de modo a ampliar as possibilidades de compreensão do aluno, para que ele veja que há diferentes maneiras e que estão todas corretas. Acharam interessante?

224. **P-5:** *Muito! Eu não imaginava que tinha 3 diferentes...*

225. **Pesquisador/Participante:** E isso contribuiu, de certo modo, para a reversibilidade... aqueles vários caminhos – idas e voltas – para você resolver um único problema. Tudo bem?

226. **P-2:** *E é muito interessante porque em várias situações não tem só uma forma de se resolver, e a escola não ensina isso!*

227. **Pesquisador/Participante:** Daí o pensamento se ‘engessa’, né! Como a gente está há tempo falando... Quando formos estudar o processo de tomada de consciência nós iremos recair na questão da reversibilidade. E, inclusive, para a construção do pensamento formal, caso a reversibilidade seja ‘deficitária’, o sujeito tem dificuldades para constituir o hipotético-dedutivo. [Para finalizar a 2.^a questão, todos chegaram à conclusão de que a afirmação do item e) era verdadeira e que a mesma já havia sido respondida anteriormente.]

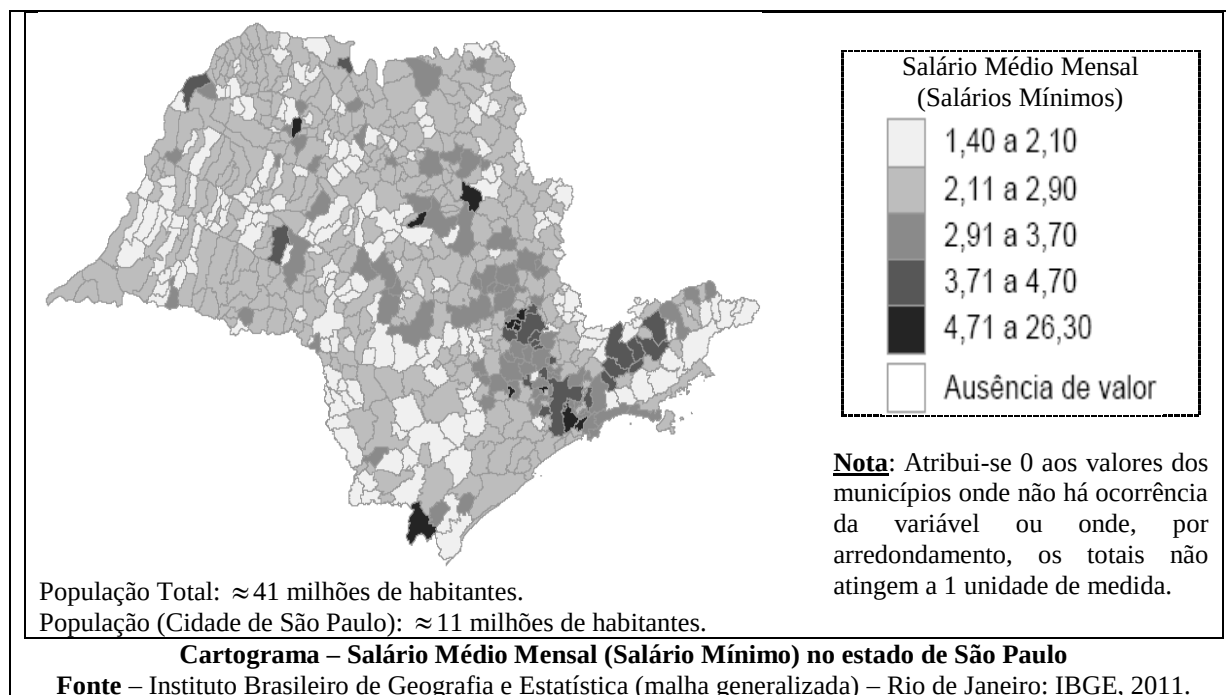
[Em seguida, P-4 realizou a leitura do item 6.2.4 – exposto abaixo.]

6.2.1.4 Cartograma

Conforme Crespo (1995):

Cartogramas são *representações sobre uma carta geográfica*. Eles são muito úteis quando queremos relacionar dados estatísticos com áreas geográficas ou políticas. Essas representações são muito úteis para expressarem população e densidade. (p. 46, grifo nosso)

Como exemplo, faz-se interessante observar o seguinte Cartograma:



[O Pesquisador/Participante projetou o Cartograma utilizado no texto. Após a leitura por P-4, ressaltou-se que tal Cartograma foi elaborado no ‘site’ do IBGE, e que em neste ‘site’, ao passar a ‘seta’ sobre as cidades apareciam os nomes de modo a poder identificá-las. Quando questionadas sobre a compreensão de que um Cartograma é um tipo de gráfico nenhuma participante disse ter feito tal ‘analogia’. Todas responderam, mediante pergunta feita pelo Pesquisador/Participante, que a variável abordada no Cartograma era do tipo quantitativa contínua.]

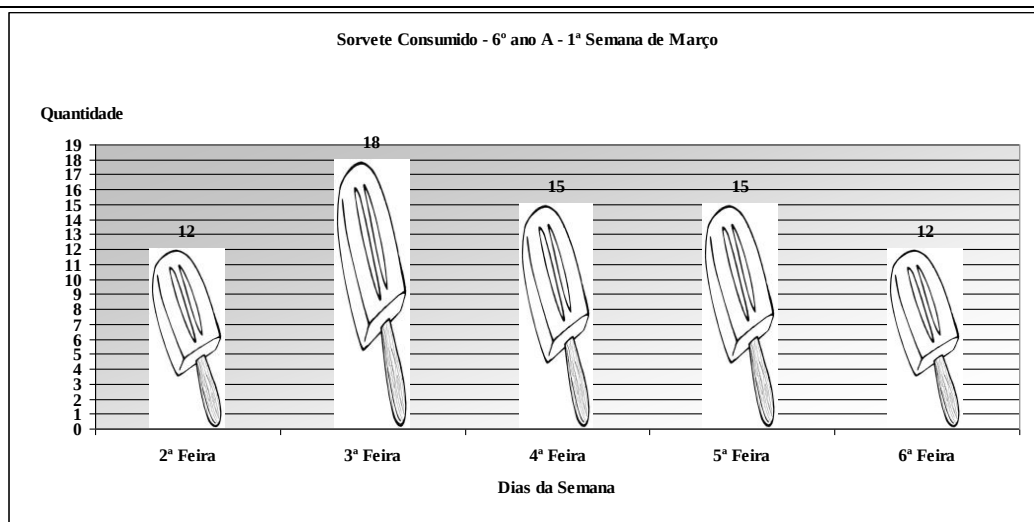
[As participantes, ao responderem a questão 1 “A partir do Cartograma apresentado, o que é possível concluir em relação ao Salário Médio Mensal da população do estado de São Paulo?”, compreenderam que a maioria das cidades do estado de São Paulo apresenta um ‘Salário Médio Mensal’ no intervalo de 2,11 a 2,90 e que ‘pouquíssimas’ cidades possuem um ‘Salário Médio Mensal’ elevado (4,71 a 26,30). O Pesquisador/Participante pontuou, neste momento, a possibilidade de representar outras variáveis por meio deste Cartograma, tais como densidade populacional, nível de escolaridade; sendo possível um trabalho interdisciplinar.]

[Torna-se oportuno ressaltar que as participantes acharam o Cartograma ‘muito interessante’, ficando curiosas em saber o nome das cidades que apresentavam os maiores valores de ‘Salário Médio Mensal’. Algumas, inclusive, disseram que pretendiam mudar para tais cidades, o que provocou riso geral.]

[Finalizando, P-5 fez a leitura do item 6.2.1.5 – esboçado a seguir.]

6.2.1.5 Pictograma

O Pictograma representa um tipo de gráfico ‘ilustrado’, ou seja, a variável é transformada em desenho no intuito de chamar a atenção do leitor. Como exemplo, observe o gráfico construído pelos alunos da professora Sueli ao apresentar/organizar os sorvetes consumidos na 1ª semana de aula do mês de março:



Pictograma – Sorvete Consumido na 1ª Semana de Março pelos alunos do 6º ano A

1. Você acredita que tal tipo de gráfico seria interessante de ser abordado nos anos iniciais do Ensino Fundamental? Em caso afirmativo, ou negativo, argumente sobre.

[Após a leitura, o Pesquisador/Participante pontuou que a criança conseguiria interpretar mais facilmente o gráfico se tivessem sido ‘empilhadas’ as doze representações de sorvetes que foram consumidos na 2.ª feira, e assim por diante. P-2 disse que P-4 havia dito exatamente a mesma coisa. No entanto, apenas por uma questão estética que o Pictograma havia sido elaborado desta maneira. P-5 questionou se dos dois modos estaria correto, em resposta o Pesquisador/Participante disse “Sim.”. Em seguida, foi denotado o seguinte.]

228. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, o Pictograma é um interessante começo para a construção do gráfico pelo aluno dos anos iniciais. Por exemplo, foi realizada uma pesquisa sobre os animais de estimação. Cada aluno pode desenhar o seu animal e depois o professor pode auxiliá-los a ‘empilhar’ todos os cachorros e todos os gatos obtidos. No entanto, para poder fazer uma comparação entre as ‘alturas’/frequências das colunas destes dois tipos de animais, seria interessante o professor trazer modelos destes animais de igual tamanho e dar para cada aluno o animal que o mesmo possui. Após cada aluno colorir o desenho representando seu animal de estimação, colocando o seu nome como meio de identificação, seriam feitas tais colunas... [P-4 interrompeu e perguntou.]

229. **P-4:** Poderia também ser aquele outro assim... [Gestualmente indicou o Gráfico de Barras.]

230. **Pesquisador/Participante:** Isso, poderia! Muito bem!

231. **P-9:** Os alunos poderiam fazer um gráfico em que os alunos fossem completando diariamente?

232. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro!

233. **P-5:** O Pró-Letramento traz uma atividade de gráfico com caixinhas de fósforos... O aluno vai empilhando...

234. **P-8:** *Ah, eu vi!*

235. **P-5:** *E daí dá pro aluno visualizar...*

236. **Pesquisador/Participante:** Excelente, isso mesmo! Percebam que estamos tratando uma informação por meio de uma representação e que pode ser ‘palpável’. Ou então pode colar simplesmente o palito que sobrou do sorvete consumido...

237. **P-8:** *Ah, que legal!*

238. **Pesquisador/Participante:** Na 2.^a feira a classe construiu uma ‘torre’ empilhando 12 palitos de sorvete. Na 3.^a feira 10; na 4.^a 15... e depois dá para comparar as frequências, e assim por diante. Está dando pra perceber como a Matemática pode ser “viva”?

239. **P-2:** *Sim, e atrativa!*

240. **Pesquisador/Participante:** Isso... e atrativa! É claro, sem deixar de lado sua sistematização!

241. **P-2:** *Imagina como isso seria interessante para as crianças...* **[Referiu-se à construção do Pictograma utilizando os palitos de sorvete consumidos.]**

242. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, é interessante pontuar que, por meio de um meio concreto podemos auxiliar o aluno a estabelecer as relações lógicas e representar isso por meio de um gráfico ou de uma tabela. Unir o lúdico com a Matemática é interessante para ‘chamar a atenção’ do nosso aluno. **[Todas as participantes indicaram concordar com o exposto. Mediante a discussão realizada, a questão denotada após o Pictograma não precisou ser comentada.]**

[Por último, cada participante elaborou o ‘Momento de Síntese’.]

APÊNDICE K – TRANSCRIÇÃO DO 7.º ENCONTRO

Data: 12/04/2012

Tempo de Duração: 3 horas e 20 minutos.

[Todas as participantes – P-1, P-2, P-4, P-5, P-7, P-8 e P-9 – estavam presentes no Grupo de Estudo. Essa foi a primeira vez que tal fato ocorreu. Após a fala inicial do Pesquisador/Participante, cada participante realizou a leitura da síntese referente ao encontro anterior.]

1. **Pesquisador/Participante**: Pessoal, hoje nós vamos dar continuidade na abordagem da Estatística. Até agora trabalhamos com a maneira de apresentar e de organizar os dados de tal modo que fique compreensível. Todo mundo concorda? **[Todas as participantes presentes neste momento inicial (P-2, P-4, P-5 e P-7) concordaram com a questão.]** Nós ainda vamos retomar dois tipos de representações gráficas, e lembrando que os tipos que abordamos não são os únicos existentes já que possuem outros ainda mais complexos. No entanto, não é necessário estudarmos aqui. Por gentileza, eu gostaria que cada uma fizesse a leitura da síntese referente ao encontro anterior como estamos fazendo... Então P-5, leia pra gente, por favor!

2. **P-5**: *Após aprendermos sobre a classificação e como o indivíduo aprende a classificar, no encontro de hoje aprofundamos nosso conhecimento sobre os gráficos. Em minha experiência como aluna, trabalhei bastante com gráficos, mesmo assim o encontro de hoje foi fundamental para relembrar alguns conceitos e aprender coisas novas, alguns detalhes que eu ainda não conhecia e pensar na minha futura prática como professora ensinando tais conceitos.*

3. **Pesquisador/Participante**: É interessante a gente poder ver, né P-5, que a sua preocupação além de aprender o conceito matemático reside em como utilizar este conceito da melhor maneira pra poder fazer uma prática docente que dê significado ao seu aluno. É neste sentido?

4. **P-5**: *Sim!*

5. **Pesquisador/Participante**: Sobre isso, nos anos iniciais, com venho pontuando, não são todos estes conteúdos que iremos construir que serão ensinados aos alunos. Só que, novamente, afirmo que a construção aprofundada destas questões vai lhes dar uma maior segurança, maior mobilidade para que vocês, aliada a uma teoria educacional, produzam práticas que melhor possibilitem a aprendizagem dos conteúdos matemáticos pelos alunos. Você achou interessante o fato de que, para cada tipo de variável há gráficos que melhor se adequam?

6. **P-5**: *Sim!*

7. **Pesquisador/Participante**: Ok! P-4...

8. **P-4**: *Nesse encontro eu achei o conteúdo mais fácil de entender e consegui e consegui fazer mais relações e estabelecer mais hipóteses adorei os gráficos e consegui entender super bem. Achei super interessante os graus. Percebi como é importante mostrar para as crianças*

as diferenças e semelhanças dos diferentes tipos de gráficos e que cada um mostra melhor um tipo de variável. A atividade de V e F foi muito legal e interessante para trabalhar com os alunos. E o mais interessante para mostrar e trabalhar com as crianças é o pictograma.

9. **Pesquisador/Participante:** É interessante na sua fala que, na maioria das vezes, vamos falar do professor de Matemática, certo... Este professor chega à lousa e coloca os conceitos e os procedimentos, no entanto ele não ajuda o aluno a compreender que um conteúdo possui ligação com outro. O estudante ‘vê’ vários tipos de gráficos, no entanto ele não para pra perceber que um é diferente do outro e que um serve mais pra um tipo de variável que o outro. E estas questões também devem ser pontuadas pelo professor para que o aluno vá estabelecendo estas relações. Você concorda?

10. **P-4:** *Sim!*

11. **Pesquisador/Participante:** No Ensino Médio, certamente, os alunos até veem vários tipos de gráficos. Mas daí, nem sempre, os mesmos realizam tais relações. Vocês concordam? **[Todas as participantes, agora com a chegada de P-9, responderam afirmativamente.]** P-2, faça a leitura pra gente...

12. **P-2:** *Foi possível compreender melhor alguns tipos de gráficos, fazendo mais leituras e respondendo alguns questionamentos. É interessante responder as questões colocadas e fazer trocas das maneiras como cada um tenta solucioná-las. Adorei a ideia de poder construir o gráfico efetivamente com as crianças, considero que será algo bastante significativo.*

13. **Pesquisador/Participante:** Tá dando pra compreender que mesmo com os alunos dos anos iniciais é possível a construção de gráficos. No entanto, precisamos observar alguns critérios, por exemplo, 1.º 2.º e 3.º ano a construção de um gráfico deve ser mediada pelo professor... Dispor os valores num gráfico de colunas de modo correto, ou seja, usando os eixos ortogonais, se o professor não auxiliar o aluno ele não vai conseguir fazer. Mas percebiam que os estudantes já têm condições de começar a organizar as informações, lembrando que o objetivo principal do ‘Bloco’ de Conteúdo do Tratamento da Informação é ‘tratar’ a informação de modo a possibilitar uma melhor ‘visualização’ destes valores e concomitantemente uma interpretação dos mesmos. Tudo bem, pessoal? **[Como as participantes indicaram ter compreendido a exposição feita pelo Pesquisador/Participante, P-7 leu a sua síntese.]**

14. **P-7:** *Nesse encontro pude ter mais contato com vários tipos de gráficos podendo compreender como e para que deve ser utilizado cada um desses tipos. Também vimos como construir um gráfico de setor aprendendo a calcular os setores, tanto em porcentagem como em graus. Além disso, vimos também formas de trabalhar esses gráficos com as crianças.*

15. **Pesquisador/Participante:** Você havia estudado esta questão dos setores no Ensino Fundamental ou Médio?

16. **P-7:** *Não!*

17. **Pesquisador/Participante:** Então a abordagem aconteceu aqui? **[Referiu-se ao Grupo de Estudo.]**

18. **P-7:** *Sim!*
19. **Pesquisador/Participante:** E a compreensão foi possível?
20. **P-7:** *Sim!*
21. **Pesquisador/Participante:** Você aprendeu como construir os setores, sem problema?
22. **P-7:** *Sim!*
23. **Pesquisador/Participante:** Ok! [Neste momento P-9 chegou e, após alguns instantes, voltou-se à leitura das sínteses. P-8 deu prosseguimento.]
24. **P-8:** *Vimos diferentes tipos de gráficos e como apresentá-los para os alunos, Também abordamos outros tipos de gráficos. Aprendemos que a mudança de gráficos traz ao aluno o pensamento de mobilidade e que o gráfico pictograma é interessante apresentar as crianças devido à sua ludicidade.*
25. **Pesquisador/Participante:** Foi interessante você pontuar que, permitir ao aluno compreender que, de um gráfico eu posso transformar em outro, refere-se, sim, a esta questão do reversível (ir e vir). Inclusive, esta “reversibilidade” é auxiliada quando eu coloquei na lousa as diferentes maneiras que vocês utilizaram para responder aquele item do problema de verdadeiro e falso... Vocês estão recordando? A P-9 fez de uma maneira, você **[P-8]** fez de outro...
26. **P-8:** *E todas estavam certo!*
27. **Pesquisador/Participante:** E isso permite que o aluno compreenda diferentes maneiras de fazer algo, indo e vindo em seu ‘pensamento’ numa situação problema.
28. **P-8:** *É... porque o aluno pode pensar de um jeito e fazer de um jeito, mas outro faz do outro jeito só que chega no mesmo resultado!*
29. **Pesquisador/Participante:** Sim! Um dos equívocos cometidos é que o caráter ‘exato’ (da exatidão) da Matemática parece implicar que há apenas uma maneira ‘exata’ para resolver um problema... O caráter ‘exato’ da Matemática, embora devemos tomar cuidado com tal afirmação, não significa que no momento de solucionar um problema não hajam diversos caminhos para a solução. Só que parece que a Matemática é apenas daquela maneira que o professor faz na lousa e você tem que copiar todos aqueles ‘passos’... **[Todas as participantes, por meio de expressão facial, concordaram que tal ideia/fato, no geral, ocorre.]** Só que a Matemática não é isso! A Matemática é sim, uma maneira de pensar ‘formalizada’, onde há o estabelecimento de relações lógicas, mas em momento algum este processo é ‘preso’, ‘engessado’... Tudo bem!? O ensino de Matemática pode vir a se tornar assim, e isso prejudica a aprendizagem dos alunos, mas não significa que a própria construção da Matemática seja assim. Porque se formos estudar a história do desenvolvimento dos conceitos da Matemática, pessoal, os matemáticos erravam durante a solução de um problema e faziam caminhos diversos até conseguir elaborar um procedimento “bonito” ‘esteticamente’, mas não é nada ‘fixo’ ou ‘rígido’! P-9 leia pra gente, por favor.

30. **P-9:** *Foi possível compreender melhor para nossa prática docente os caminhos para a utilização dos métodos relacionando o que temos que saber como professores e o que devemos trabalhar com eles para auxiliá-los à transição para o Ensino Fundamental II e a complexidade de conceitos dessas representações posteriormente. Porque, eu entendi assim, se a gente passar só uma opção ou, um caminho só, quando a gente chegar no ensino maior ele não vai conseguir [Referiu-se ao aluno durante o sua trajetória na Educação Básica.], mesmo se tiver um professor que não siga este único caminho, ele não vai conseguir ter um olhar diferente. Então a gente tem que mostrar pras crianças desde cedo que há varias possibilidades, mesmo que tenha mostra uma só ali ela mesma tem que ser crítica pra compreender várias maneiras: “Ah, professor, mas tem só desse jeito?” [Referiu-se a um questionamento feito pelo aluno ‘crítico’.]*

31. **Pesquisador/Participante:** Entendi! Compreendam, pessoal, que a construção da criticidade que está presente na maioria dos ideários pedagógicos, depende da efetiva ‘aquisição’ dos conhecimentos disciplinares que são (ou deveriam ser) abordados por meio da escola. Sem a Língua Portuguesa, Física, Química, Biologia, Educação Física, etc., esse sujeito não vai se tornar crítico. Até porque existem os ‘pseudo-críticos’ que julgam por julgar e tem os ‘verdadeiros’ críticos que, apoiados num conhecimento ‘profundo’ de mundo dizem as coisas de modo coerente e com pertinência.

32. **P-9:** *Sim, concordo!*

33. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, a partir da transcrição dos nossos encontros estive pensando acerca da ocorrência de uma das hipóteses, proposta por mim, referente ao fato de que os saberes experienciais, se não forem confrontados, irão produzir práticas tradicionais caso tais saberes venham de um ensino tradicional. Vocês estão conseguindo fazer este confronto? Por exemplo, como vocês mesmas disseram: “Eu aprendi gráficos e tabelas assim, do modo tradicional”. Vocês estão percebendo que é possível ensinar isso de maneira diferente? Está sendo possível isso? **[Todas as participantes responderam afirmativamente.]** Vamos supor que vocês não participassem do Grupo de Estudo e estes conteúdos não fossem questionados. Será que, a chance de vocês reproduzirem o ensino da mesma maneira com a qual vocês aprenderam seria grande? **[Todas as participantes concordaram, P-8 argumentou.]**

34. **P-8:** *Inclusive assim, a gente tem que ficar o tempo inteiro se questionando se você está fazendo igual ao que você aprendeu, né!? A gente traz, a gente leva bastante disso, né!? Mas é bom ter este tipo de questionamento pra você se alertar, né!... “Olha, eu vou fazer diferente, eu posso mudar!”*

35. **Pesquisador/Participante:** O interessante, pessoal, é que um renomado pesquisador sobre Formação de Professores chamado Maurice Tardif dedicou muitos anos a investigar a influência destes saberes da experiência quando o aluno da Licenciatura vira realmente um professor. Ele e outros estudiosos verificaram que, na maioria das vezes, as Licenciaturas, ou seja, a Formação Inicial não permitem esta modificação dos saberes que em grande parte estão calcados naquela racionalidade técnica tradicional de que professor fala, aluno escuta e acabou. Está dando pra perceber que não estou usando esta lógica aqui? **[Todas as participantes responderam “Sim.”]** É claro que eu falo...

36. **P-8:** *É, você tem que se posicionar!*

37. **Pesquisador/Participante:** Mas eu falo ‘com’ vocês sobre o assunto. Eu não falo ‘para’ vocês do assunto! Este com no sentido de colaboração, coletividade, conjunto... E isso também tem que ser realizado com os alunos independentemente da idade deles.

38. **P-2:** *Eu acho assim, importantíssimo do Grupo de Estudos é você poder participar, porque durante o nosso curso, pelo menos até agora no 4.º ano a gente não vê muito isso... Ah, tá, não se deve reproduzir o modo tradicional, mas então como se faz? Não tem essa resposta. Eu fico no vazio! Ah, o aluno é ativo, ele tem que ser participativo. Em que sentido? Como seria dentro de um conteúdo específico? E o Grupo de Estudo está oportunizando isso, do como fazer até, com os assuntos reais, na prática, o que seria no dia-a-dia. Ah, tudo bem, aqui é um grupo reduzido e talvez isso facilite? Sim! Mas o que estão sendo passados é possível de se fazer numa sala de 30, 40 alunos...*

39. **Pesquisador/Participante:** Concordo que é possível!

40. **P-2:** *E isso, assim, pra mim está sendo fundamental, é uma das coisas que estou mais gostando de vir aqui.*

41. **Pesquisador/Participante:** Vocês percebem que participar significa agir. **[Todas as participantes responderam “Sim.”]** E a gente retorna na teoria de Piaget, ou de Vigotski, ou de Wallon, ou Saviani, tanto faz... Cada teoria tem a sua especificidade, mas o cerne de todas, após eu ter estudado um pouco de cada, vejo que sobre isso não há incoerência. Todas visam à necessidade do agir do sujeito sobre o objeto do conhecimento, seja Matemática, Física, Química, Língua Portuguesa... Eu até brinquei com as professoras em uma palestra dada sobre o fato de que, infelizmente, o papel não tem senso crítico, ele aceita tudo o que você escreve, assim como o discurso proferido. No entanto, como diz o grande Paulo Freire, você se mostra mais nas ações do que no discurso, porque muitas vezes o seu discurso é vazio. O discurso possui uma ideologia necessária, mas a ideologia não concretizada não consegue transformar uma realidade. E este discurso, muito bonito, mas não concretizado, ajuda a manter a nossa sociedade que é muito desigual. Vocês concordam?

42. **P-9:** *Sem dúvida! [Ideia compartilhada entre as demais participantes.]*

43. **Pesquisador/Participante:** O fato de nós estarmos aqui, numa Universidade Pública, enquanto, chutando vai, uns 80% dos pedagogos não estão numa Universidade Pública, já demonstra uma situação desigual. Por mais problemas que as Universidades Públicas possuam, vocês estão no que há de melhor no ensino do nosso estado. E ainda tem problemas, ok!? Imagina, porque no Brasil a maioria dos professores que compõe os quadros do magistério vieram do Ensino Privado, em grande parte dos Institutos isolados ou Faculdades, sem menosprezá-las. Mas nestes locais, em grande parte, não há pesquisa ou extensão, apenas um sistema de ‘apostilamento’ do Ensino Superior, a grosso modo. Então nós já estamos numa situação privilegiada que implica numa desigualdade de formação gigantesca. Só que a escola é um coletivo, e geralmente você serão um dos que terá esta ‘boa’ formação ainda que deficitária em alguns pontos. Como fazer um bom trabalho, então?

44. **P-8:** *É isso o que nós perguntamos... [Fala compartilhada por P-2 e de comum acordo entre as demais participantes.] Eu e a P-2 perguntamos isso direto “Como fazer?”, e, assim, a gente aprende aprende aprende, mas daí você tá assim, igual numa sala de aula, e aí, como fazer? E, realmente, discutindo aqui com você esses assuntos, esta parte da*

Matemática estou achando muito importante por causa disso, porque a gente tem oportunidade de ver como fazer... a própria discussão entre a gente dá outras visões.

45. **P-2:** *E não é a ‘receita de bolo’! Como a gente ouve de vários professores que a gente quer ‘receita de bolo’. Só que isso não é ‘receita de bolo’!* [Referiu-se ao Grupo de Estudo.]

46. **Pesquisador/Participante:** Não, claro que não! Uma coisa é você exigir do seu formador os ‘200’ passos que você vai ter que tomar quando pisar na sala de aula... Isso é impossível e incoerente. Outra coisa é não propiciar a esta pessoa em formação as várias possibilidades de atuação. Porque, ao dizer que deve-se permitir ao aluno que seja ativo, você, enquanto formador tem que permitir esta ação do seu futuro aluno-professor. Ah, eu sei que a realidade da sala de aula é complicada, tem a questão do número de alunos, e etc. Só que, se formos ficar justificando o não fazer por todas as mazelas da Educação não vai ter transformação alguma, vocês concordam? [Todas as participantes, através de gesto facial, sinalizaram afirmativamente.] E se os alunos do Ensino Fundamental não começarem a ser melhor formados, quando alguns deles resolverem se tornar professores, continuará este ciclo vicioso...

47. **P-2:** *E outra coisa, se você chega pra atuar na escola, se você não sabe o que tem que fazer, mesmo àqueles que tiveram uma formação privilegiada, você vai acabar pedindo auxílio pra quem já tá lá. Se você não tem um jeito de fazer diferente, por mais que você tenha conteúdo, tenha teoria no teórico que você quiser, se você não souber fazer você vai repetir o que tá lá, faça como o que está lá!* [Referiu-se às práticas pedagógicas utilizadas pelos professores experientes.]

48. **Pesquisador/Participante:** E a gente retornou à questão dos saberes da experiência que, quando não confrontados durante a graduação, a chance de reproduzi-lo é muito grande, né!?

49. **P-2:** *É enorme!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes, inclusive por P-1 que acabara de chegar.]

50. **Pesquisador/Participante:** Inclusive, pessoal, Tardif coloca que a pressão nos anos iniciais da docência é tanta que vai (e pode) causar um ‘desequilíbrio’ muito grande no professor. Daí ele vai recorrer àquilo que aprendeu enquanto aluno já que está ‘muito’ forte, até o ponto de negar aquilo que supostamente ele aprendeu na faculdade. Deu pra compreender o que eu falei? [Ninguém fez objeção.] O professor nega: “Ah, meu Deus, o que eu aprendi não serve pra resolver nada!”, “Ah, como a minha professora da 2.^a série me ensinou adição?... Ah, tá, então ela dizia da casinha da unidade que tinha que passar pra casinha da dezena...”, e isso vai se reproduzindo. E turma, é impressionante que, na minha dissertação de Mestrado, uma professora da 2.^a série que estava dando aula há menos de 1 ano me disse exatamente isso! Ela reproduziu o que ela aprendeu na 2.^a série do Ensino Fundamental.

51. **P-2:** *Foi o que serviu!*

52. **Pesquisador/Participante:** E ela me disse que, no momento da necessidade, era aquilo que ela tinha ‘em mãos’, quando eu a questionei. E, em muitos trechos da dissertação

ficam evidentes as teses de Tardif, ao passo de alguns professores até negarem aquilo que aprenderam na faculdade...

[Como nenhuma participante quis acrescentar algum comentário-reflexão, deu-se continuidade nas atividades. As participantes acharam melhor o Pesquisador/Participante realizar a leitura do item 6.2.1.6 – denotado abaixo – fazendo as discussões necessárias.]

6.2.1.6 Histograma e polígono de frequência

O Histograma é uma representação gráfica adequada para a apresentação/organização das variáveis quantitativas contínuas, ou seja, quando a variável tem seus valores indicados por classes (intervalos) de frequência.

PROBLEMATIZANDO...

Ao perceber que a abordagem realizada com as turmas dos 6.º anos ‘facilitava’ a aprendizagem dos conteúdos referentes ao Tratamento da Informação, a professora de Matemática Sueli resolveu também utilizá-la com seus alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental. Concomitantemente ao estudo das ‘Grandezas e Medidas’, mais especificamente as Medidas de Comprimento (metro), a professora Sueli mediu, com o auxílio de uma trena, a altura de todos os alunos do 8.º ano C. Enquanto media, a aluna Bianca ia anotando os valores aproximados⁴⁹ na lousa:

<u>Ana Laura</u> 131 cm	<u>Andressa</u> 153 cm	<u>Antônio</u> 161 cm	<u>Antônio José</u> 158 cm	<u>Augusto</u> 147 cm
<u>Beatriz</u> 145 cm	<u>Bianca</u> 133 cm	<u>Brian</u> 147 cm	<u>Camila</u> 150 cm	<u>Carlos</u> 130 cm
<u>Danilo</u> 132 cm	<u>Diego</u> 153 cm	<u>Edir</u> 141 cm	<u>Eduarda</u> 171 cm	<u>Fábio</u> 159 cm
<u>Felipe</u> 130 cm	<u>Fernanda</u> 144 cm	<u>Flávio</u> 177 cm	<u>Gabriel</u> 162 cm	<u>Geisa</u> 152 cm
<u>Gustavo</u> 160 cm	<u>Hugo</u> 150 cm	<u>Igor</u> 133 cm	<u>Juliana</u> 145 cm	<u>Júlio</u> 151 cm
<u>Mário</u> 137 cm	<u>Neide</u> 142 cm	<u>Paulo</u> 152 cm	<u>Thiago</u> 143 cm	<u>Vitor</u> 130 cm

Após tal registro, a professora Sueli pediu aos alunos que organizassem os dados em ordem crescente. Decorrido certo tempo, o aluno Paulo foi à lousa e escreveu tais dados na referida ordem, colocando, inclusive, números repetidos caso existissem. Observe:

130, 130, 130, 131, 132, 133, 133, 137, 141, 142, 143, 144, 145, 145, 147, 147, 150, 150, 151, 152, 152, 153, 153, 158, 159, 160, 161, 162, 171, 177

Enquanto Paulo anotava na lousa, os demais alunos e a professora foram conferindo a resposta. Em seguida, a professora Sueli propôs aos estudantes que organizassem os dados por meio de uma tabela. No entanto, tal tabela deveria possuir, exatamente, 11 linhas e 2 colunas, considerando as denominações de cada coluna. Como sugestão, a professora falou que os dados teriam que serem agrupados em classes (intervalos).

1. Em duplas, como vocês organizariam a tabela seguindo a orientação dada pela professora Sueli? Para facilitar, utilizem a tabela abaixo:

⁴⁹ Os valores denotados na lousa, por representarem uma unidade de medida – no caso, o metro – foram arredondados com o intuito de facilitar o registro. Como fora utilizado um instrumento de medida – a trena – é oportuno chamar a atenção do aluno para o fato de que os valores ‘medidos’ apresentam uma aproximação do valor real que representa a altura do estudante.

[Durante a leitura o Pesquisador/Participante observou as seguintes questões: 1.^a – O significado de classe de intervalo; 2.^a – A obtenção de valores aproximados e não ‘totalmente’ exatos quando da operação de medição; 3.^a – A importância da abordagem de um conteúdo mediante uma contextualização.]

[Em seguida, foram disponibilizados 10 minutos para que as participantes resolvessem a situação problema 1 – exposta há pouco. Decorrido este tempo, foi retomada a discussão das respostas obtidas.]

[Ao ser questionada, P-2 respondeu ter construído intervalos fechados de 6 em 6, no entanto, até ‘chegar’ a esta conclusão quanto à amplitude de cada intervalo houve a necessidade de intervenção do Pesquisador/Participante, já que inicialmente afirmou ter construído intervalos de 5 em 5. A participante ressaltou que sua tabela não ‘deu’ o número de linhas proposto pela professora de Matemática Sueli, dizendo até ter colocado na ‘última’ linha o item ‘TOTAL’ visando completá-la. Entretanto, o Pesquisador/Participante salientou que os intervalos construídos estavam corretos e, talvez, representassem melhor a distribuição das frequências em comparação ao solicitado.]

[P-1, P-4, P-5 e P-9 construíram intervalos semi-abertos ou semi-fechados de 5 em 5, do mesmo modo como o proposto pelo Pesquisador/Participante ‘obedecendo’ o solicitado pela professora de Matemática Sueli. No entanto, P-9 (e também P-5) ficaram em dúvida quanto à notação dos intervalos. Deste modo, o Pesquisador/Participante foi à lousa e denotou as maneiras possíveis de fazer tal notação. Observe-as.]

$(130, 135)$	$)130, 135($	$(130, 135($	$)130, 135)$
$[130, 135]$	$]130, 135[$	$[130, 135[$	$]130, 135]$
130 — 135	130 — 135	130 — 135	130 — 135
Intervalo Fechado	Intervalo Aberto	Semi-Aberto à Direita Semi-Fechado à Esquerda	Semi-Aberto à Esquerda Semi-Fechado à Direita

[Durante a anotação de tais representações, P-4 realizou o seguinte questionamento.]

53. **P-4:** *E se eu tenho um número com vírgula, como eu faço?*

54. **Pesquisador/Participante:** Você separa os números por meio do ponto e vírgula.

55. **P-8:** *Ah, eu punha um tracinho.*

56. **Pesquisador/Participante:** Mas você concorda que ao colocar um tracinho você pode confundir com esta notação? [Referiu-se à terceira notação para o intervalo aberto.]

57. **P-8:** *É verdade! É mesmo!*

[Enquanto as participantes registraram as notações referentes aos diferentes tipos de intervalos, o Pesquisador/Participante dirigiu-se à P-9 para observar como havia construído as classes de intervalos. Mesmo não sabendo como escrever tais

intervalos, a participante havia considerado intervalos semi-abertos à direita com amplitude 5. Neste momento, P-2 realizou o seguinte questionamento.]

58. **P-2:** *Se eu ponho o primeiro intervalo, por exemplo, aberto e fechado, os outros têm que ser igual?*

59. **Pesquisador/Participante:** Sim! É necessário manter uma constância para que os intervalos construídos sejam iguais. Pode acontecer, em alguns casos, das amplitudes serem diferentes. No entanto, quando possível, aconselha-se a construção de classes de intervalos com igual amplitude para facilitar a obtenção de algumas medidas da distribuição das frequências...

[Quando questionada P-7 disse ter construído intervalos semi-abertos à direita com amplitude 7. Faz-se interessante pontuar que o Pesquisador/Participante pediu à P-7 (e também à P-2) que dissessem os intervalos formados no intuito de compartilhar tais respostas com as demais, além de verificar se as mesmas haviam feito corretamente. Abaixo constam as tabelas elaboradas pelas referidas participantes.]

P-2		P-7	
Altura (cm) – Intervalos	Frequência	Altura (cm) – Intervalos	Frequência
[130, 135]	7	[130, 137[	7
[136, 141]	2	[137, 144[	4
[142, 147]	7	[144, 151[	7
[148, 153]	7	[151, 158[	5
[154, 159]	2	[158, 165[	5
[160, 165]	3	[165, 172[	1
[166, 171]	1	[172, 179[	1
[172, 177]	1	TOTAL	30
TOTAL	30		

[Após tal compartilhamento, o Pesquisador/Participante chamou a atenção ao fato de que, tanto o Histograma quanto o Polígono de Frequência representando as tabelas elaboradas por P-2 e P-7 serão diferentes do elaborado pelo Pesquisador/Participante visando ‘cumprir’ o solicitado pela professora de Matemática Sueli. No entanto, tais representações gráficas diferentes estarão também corretas.]

[Por fim, P-8 disse ter construído intervalos fechados de 5 em 5. Ao lê-los, a participante percebeu que seu primeiro intervalo possuía amplitude 6, pois considerou [130, 135]; [136,140]; [141, 145]; [146, 150]... Ao invés de realizar um cálculo mental para descobrir a amplitude da primeira classe, a participante ‘contou nos dedos’ de 1 em 1, iniciando no número 130 até ‘chegar’ no 135. Deste modo, P-8 resolveu utilizar os intervalos elaborados por P-1, P-4, P-5 e P-9. No intuito de concluir a discussão referente à construção das classes de intervalos, o Pesquisador/Participante pontuou o seguinte.]

60. **Pesquisador/Participante:** É interessante ver, né pessoal, como fizeram, identificar os erros para poder corrigi-los, porque não há problema nenhum em realizar tal correção, e isso numa sala de aula ‘normal’ vai enriquecer o aluno. Vocês concordam?

61. **P-2:** *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

62. **Pesquisador/Participante:** Esse bate-papo, a troca de ideias...

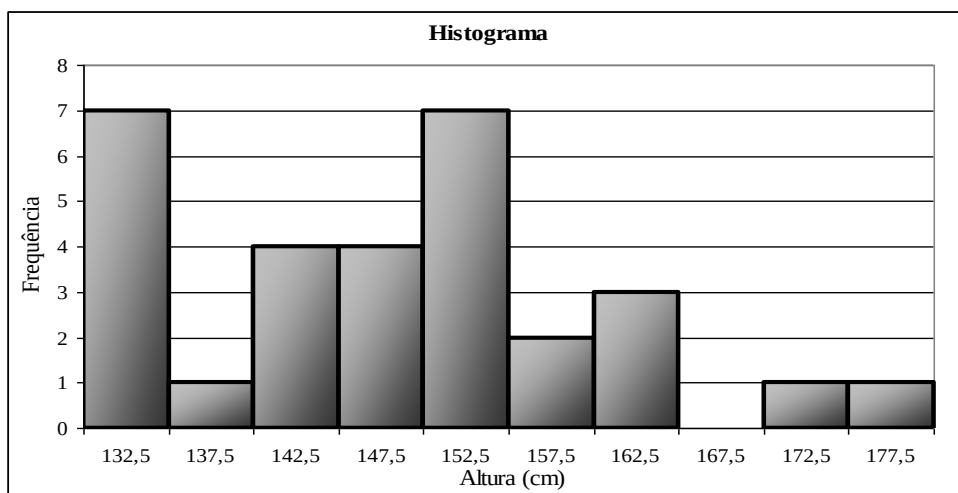
63. **P-2:** *Isso é interessante, né, porque, não é consenso!*

64. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo! Vocês concordam que numa sala, se todo mundo tem a mesma resposta, certamente isto significa que eles ‘colaram’ um do outro... **[Risos entre todos.]** E que este ‘um’ – provavelmente – ou já havia estudado em outro momento ou copiou do livro-resposta do professor porque a gente sabe que isso acontece! **[O Pesquisador/Participante projetou o restante do texto pertencente ao item 6.2.6, denotando o Histograma e o Polígono de Frequência referente à tabela que ‘obedecia’ a solicitação da professora de Matemática Sueli. Observe abaixo.]**

Uma possível tabela a ser elaborada levando em consideração as sugestões da professora Sueli é denotada abaixo:

Altura (cm) – Intervalos	Frequência
[130, 135[	7
[135, 140[	1
[140, 145[	4
[145, 150[	4
[150, 155[	7
[155, 160[	2
[160, 165[	3
[165, 170[	0
[170, 175[	1
[175, 180[	1

Com a tabela já pronta e, em se tratando de uma variável quantitativa contínua, faz-se possível uma representação gráfica da mesma por meio de um Histograma, conforme abaixo:



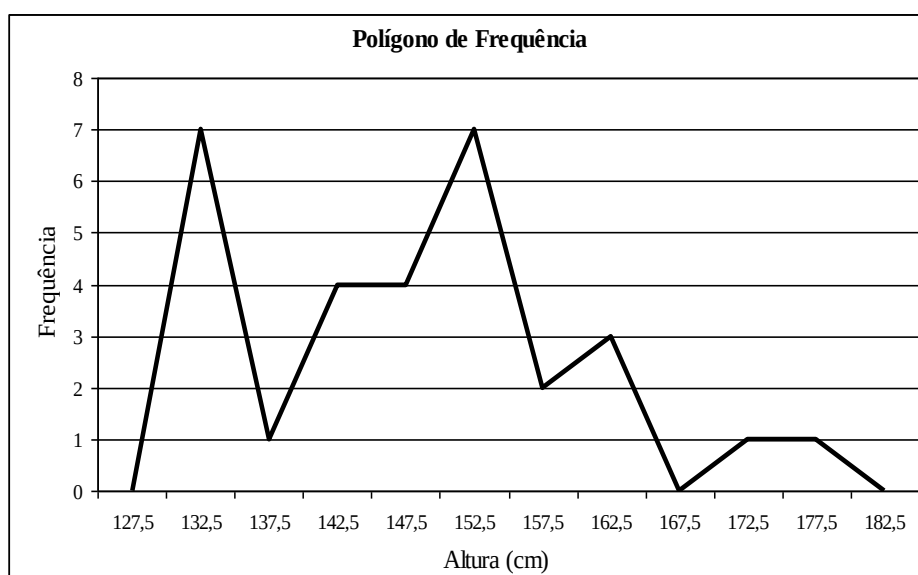
Histograma – Frequência das classes (intervalos) referentes à altura dos alunos do 8.º ano C

Como o Histograma ‘apresenta/organiza’ variáveis quantitativas contínuas, então, as frequências estão associadas a intervalos de variação da variável e não a valores individuais. Conforme denotado acima, as classes de frequência – neste caso a altura – foram representadas pelos seus pontos médios⁵⁰.

Além do Histograma é possível apresentar/organizar as variáveis quantitativas contínuas por meio do

⁵⁰ Tomando como exemplo a primeira classe (intervalo) – [130, 135[– o ponto médio, assim como os demais, foi obtido por meio da seguinte operação: $\frac{(130+135)}{2} = \frac{265}{2} = 132,5$. Ou seja, o ponto médio corresponde à metade soma dos dois ‘extremos’ que limitam o intervalo.

Polígono de Frequência. No entanto, para completar a figura – exposta a seguir – consideram-se duas classes laterais com frequência nula. No exemplo considerado, as tais classes laterais serão $[125, 130[$ e $[180, 185[$ e suas frequências serão 0.



Polígono de Frequência – Frequência das classes (intervalos) referentes à altura dos alunos do 8.º ano C

[Durante a apresentação do Histograma, o Pesquisador/Participante salientou ser necessário achar o ponto médio de cada classe, já que a frequência de cada intervalo será ‘distribuída’ no gráfico em ‘torno’ de tal ponto médio. Ressaltou que o ponto médio representa o ‘centro’ em torno do qual estão os valores constituintes de cada classe de intervalo, não se esquecendo que a variável abordada é do tipo quantitativa contínua. Neste momento, P-8 fez o seguinte questionamento ao observar o referido Histograma projetado na tela.]

65. **P-8:** *Eu fiquei em dúvida para saber quanto que tem que ser esse tamanho? [Referiu-se à amplitude de cada classe de intervalo e que, no Histograma é representado por meio da largura de cada ‘barra’ vertical (retângulo).]*

66. **Pesquisador/Participante:** Ah, tá! No caso deste Histograma, embora não esteja mostrado, esta classe vai do 130 até o 135 [Apontou à ‘primeira coluna’ do gráfico.] e daí eu encontrei o ponto médio que foi 132,5 e marquei a frequência desta classe que foi 7. Tudo bem, P-8?

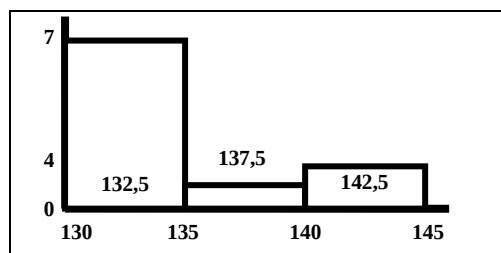
67. **P-8:** *Ah, tá, era isso que eu queria saber!*

68. **P-2:** *Mas lá [Apontou para o Histograma projetado.] não poderia por 130 e 135?*

69. **Pesquisador/Participante:** Deveria... até para facilitar a leitura. Só que quando fui fazer o Histograma, os números ficaram muitos ‘espremidos’ e o ponto médio quase nem aparecia...

70. **P-2:** *Mas eu poderia colocar 130, 132,5 e 135?*

71. **Pesquisador/Participante:** Sim, inclusive se você for construir na ‘mão’ este gráfico poderia fazer assim... [Desenhou na lousa o esquema denotado a seguir.]



72. **P-2:** *Ah tá!*

73. **P-8:** *Desculpa, Pesquisador/Participante, mas aí [Referiu-se ao número 130 do esquema anterior.] você começa do 130 e o zero?*

74. **Pesquisador/Participante:** Não tem problema. Porque este zero [Apontou para o Histograma projetado na lousa] é em relação ao eixo vertical (geralmente chamado por y) e não do eixo horizontal (do x)... Certo?

75. **P-8:** *Ah, tá! Olha, a coisa que a gente tem ‘gravado’ e que não é bem assim. [Risos pela participante.]*

76. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, percebam oh, que aqui [Apontou para o esquema desenhado há pouco.] eu tenho o ponto médio (132,5) e a frequência vai até o 7. Em seguida nós temos o 137,5 e foi até 1. Depois, a frequência do 142,5 vai até o 4. Eu fiz uma ‘barra’ grudada na outra justamente para indicar a questão da variável contínua, da continuidade... E por que eu pego o ponto médio? Porque estou pegando os valores na ‘média’ da distribuição dentro de cada intervalo... Entendam que nesta coluna aqui [Apontou para a primeira coluna do referido esquema.] não significa que eu tenho 7 valores no 130 ou 7 no 135, mas sim que possuo valores distribuídos dentre deste intervalo. Lembrem que ao medir os alunos, a professora coletou os valores 130, 130, 130, 131, etc., então eu pego o ponto médio do intervalo que os contém. Tudo bem, pessoal? [Ninguém apresentou dúvida quanto ao exposto.]

[Em continuidade, durante a leitura e discussão do Polígono de Frequência, o Pesquisador/Participante observou a necessidade de considerar uma classe de intervalo anterior e uma posterior em relação às construídas com frequência nula no momento da elaboração do referido gráfico. Ressaltou que isso é necessário para que o figura ‘feche’, constituindo assim um polígono. Como desfecho, o Pesquisador/Participante atentou o seguinte.]

77. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, percebam que para a variável quantitativa contínua há representações gráficas específicas – Histograma e Polígono de Frequência – que permitem uma melhor e correta apresentação/organização dos dados coletados. Alguém possui alguma dúvida? [Como não houveram dúvidas, o Pesquisador/Participantes pediu a realização individual da situação problema denotada abaixo.]

6.3 Desafio para casa – atividade individual

Considerando o problema proposto pela professora de Matemática Sueli (relativo às alturas dos alunos do 8.º ano C) como você iria proceder para obter a Média Aritmética de tais valores? Após escrever **como** você procedeu, registre a Média Aritmética encontrada.

[Transcorrido o tempo de 10 minutos, o Pesquisador/Participante perguntou se as participantes haviam conseguido calcular a Média Aritmética. Todas levantaram a mão indicando terem calculado a referida média, inclusive o resultado obtido foi o mesmo – 147,3. Apenas para verificar como as participantes procederam, foi solicitado a P-2 que explicasse como obteve a média e para as demais observarem se haviam feito do mesmo modo. Como resposta observou-se o seguinte.]

78. **P-8:** *Eu fui somando cada uma das alturas e no final eu somei por 30.*

79. **Pesquisador/Participante:** Ok! Quem fez assim? [Todas indicaram terem feito o mesmo procedimento que P-2. No entanto, o Pesquisador/Participante achou necessário questionar cada participante verificando o modo para a obtenção da Média Aritmética. A resposta de P-4 encontra-se exposto abaixo.]

80. **P-4:** *Então, eu pensei em fazer assim: pegar o 130 e somar com o 131, não todos, porque o primeiro tem três 130. Eu achei que não precisava somar todos os três 130...*

81. **Pesquisador/Participante:** Então você achou que para calcular a Média Aritmética não precisava somar todas as medidas das alturas coletadas?

82. **P-4:** *É!*

83. **Pesquisador/Participante:** Você percebe que se fizer isso irá diminuir o número de valores medidos.

84. **P-4:** *É, eu mesma peguei e dividi por 22, mas não é, é por 30. [A participante, ao não considerar os valores repetidos, acabou dividindo o total (da soma) pelo número 22 que é referente aos valores considerados.]*

85. **Pesquisador/Participante:** Você calculou uma média, mas não de todos os alunos do 8.º ano C referente às medidas. Deu pra compreender?

86. **P-4:** *Sim!* [A participante apagou a solução realizada, corrigindo-a.]

[Após questionar as demais participantes as respostas obtidas foram análogas à de P-2. Deste modo, em continuidade às atividades propostas, P-2 realizou a leitura do item 7.1 – denotado a seguir.]

7.1 Retomando a atividade individual ‘para casa’

A partir de uma pesquisa organizada pela professora de Matemática Sueli foi possível coletar as medidas aproximadas (alturas em cm) dos seus alunos do 8.º ano C. Por se tratar de uma variável quantitativa contínua, chegou-se a conclusão da necessidade da utilização do Histograma e do Polígono de Frequência para a apresentação/organização dos dados obtidos. Uma característica ‘peculiar’ foi a elaboração de uma tabela mostrando a frequência dos intervalos da variável e não a frequência da variável ‘absoluta’.

Dando continuidade, foi solicitado o cálculo da Média Aritmética de tais valores. As respostas obtidas por cada uma de vocês, participantes, nos permitem concluir o *quê* em relação ao modo (ao **como**) utilizado para tal obtenção?

A Média, neste caso Aritmética, indica uma **Medida de Posição** da distribuição das frequências da variável em questão. Além da Média que compõe tais **medidas**, observamos a Mediana e a Moda.

[Em relação ao questionamento acerca da conclusão do **como** utilizado para a obtenção da Média Aritmética, P-4 respondeu o seguinte:]

87. **P-4:** *Soma tudo e divide pelo total!*

88. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo, P-4! Está correto. Deve ser feita a soma de todos os valores coletados/observados e o resultado dividido pelo número de dados coletados/observados. **[As participantes registraram em suas folhas o exposto.]**

[Como não houve dúvidas em relação ao item lido, P-2 prosseguiu com a leitura do item seguinte – 7.2, exposto abaixo.]

7.2 Estatística Descritiva: medidas de posição

Além da apresentação/organização dos dados por meio de gráficos e tabelas, a Estatística Descritiva preocupa-se em estabelecer certas **quantidades (medidas)** que possibilitam caracterizar a distribuição das frequências. Dentre algumas **medidas** encontram-se as **Medidas de Posição** que “servem para localizar a distribuição de frequências sobre o eixo da variação da variável em questão” (COSTA NETO, 2002, p. 20). Observem a seguir os três tipos de **Medidas de Posição**: Média, Mediana e Moda.

[Após a conclusão da leitura por P-2, o Pesquisador/Participante fez o seguinte questionamento.]

89. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, a Média, Mediana e Moda são chamadas de Medidas de Posição. Segundo o autor, as Medidas de Posição servem para localizar a distribuição de frequências sobre o eixo da variação da variável em questão. O que significa isso? **[Após um minuto, P-9 pontuou o exposto abaixo.]**

90. **P-9:** *A partir desta Moda você consegue enxergar onde os dados estão colocados.*

91. **Pesquisador/Participante:** Como assim?

92. **P-9:** *Bom... na distribuição das frequências, quando você alcança essa Moda, o valor que deu, ela explica isso...*

93. **Pesquisador/Participante:** Ela explica como está ocorrendo esta distribuição?

94. **P-9:** *Então... eu acho que sim, é uma suposição do que está colocado aqui em duas linhas. [Referiu-se ao texto lido.] Eu entendi isso!*

95. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-9, é por aí mesmo! Alguém mais quer falar?

96. **P-2:** *Eu acho que em relação... são medidas que vão atingir as frequências e dentro daquela frequência você vai saber qual é a... o intervalo, quais são as classes... Tipo, assim, você vai conseguir saber dentro do intervalo qual é a maior frequência, por exemplo.*

97. **Pesquisador/Participante:** É mais ou menos isso! Alguém mais quer expor? **[Como ninguém se pronunciou deu-se continuidade à exposição.]** Quanto a gente tem a média de um conjunto de valores estamos tentando investigar em que ‘momento’ aqueles valores estão mais agrupados, digamos assim, onde eles estão mais ‘concentrados’ naquela distribuição. Vamos supor que tem 1000 alunos e que a Média Aritmética de idade seja 19 anos. O que significa isso?

98. **Pesquisador/Participante:** Que o intervalo próximo aos 19 é onde tem o maior número de alunos. Tipo, assim, sei lá, 17-18-19-20-21 anos...

99. **Pesquisador/Participante:** Ou seja, que a quantidade de alunos está próximo deste entorno dos 19 anos do que, por exemplo, dos 30. É por isso que são Medidas de Posição, posição no intuito de localizar como ocorre a distribuição dos valores que eu coletei.

100. **P-2:** *Mas daí eu fico pensando assim, igual a média mesmo... Se, de repente eu tenho um valor lá no fim com a frequência muito alta, mas daí somando os outros daria... fica meio fora, não fica?* [A participante referiu-se a um conjunto de dados no qual a maioria possui um valor quantitativo ‘baixo’ e outro dado apresenta um valor muito ‘elevado’. Tal ‘valor elevado’, ao ser utilizado para a obtenção da Média Aritmética, implicaria numa medida não tão representativa do conjunto total dos dados.]

101. **Pesquisador/Participante:** Neste caso a Média Aritmética não é suficiente e daí ‘entra’ a Mediana para poder resolver. Nós vamos estudá-la adiante, mas foi muito bem pensado! É por isso que a Média Aritmética, como iremos ver aqui, nem sempre é suficiente para mostrar o centro da distribuição de frequência dos dados coletados. Tudo bem, pessoal?

102. **P-5:** *Eu e a P-9 ainda comentamos isso, mas brincando... Na questão do salário, por exemplo, em alguns lugares são poucos que ganham muito e daí quando faz esta média eleva bastante...*

103. **Pesquisador/Participante:** E isso não mostra a realidade, né!

104. **P-5 e P-9:** É, nós até comentamos.

105. **Pesquisador/Participante:** É interessante porque estamos já comentando uma problematização que será colocada daqui há pouco. Neste caso a Mediana é mais indicada... Tudo bem, pessoal? [Como não houveram outras colocações, P-5 iniciou a leitura do item 7.2.1. O trecho lido encontra-se abaixo.]

7.2.1 Média aritmética

A Média Aritmética representa uma *medida (quantidade)* que caracteriza o *centro* da distribuição de frequências. No caso da pesquisa realizada pela professora de Matemática Sueli, a Média Aritmética referente à altura dos 30 alunos do 8.º ano C foi 147,3. Para tal cálculo realizou-se a soma de todos os valores coletados e tal resultado foi dividido pelo total de alunos ($n = 30$).

1. Em relação aos valores obtidos a partir da ‘medição’ dos alunos do 8.º ano C, o que significa esta medida 147,3 denominada Média Aritmética?

[Decorridos 5 minutos, deu-se início à discussão referente à questão acima. Torna-se importante salientar que cada participante respondeu individualmente tal pergunta.]

106. **Pesquisador/Participante:** P-8, leia pra gente o que você escreveu!

107. **P-8:** *Eu não sei exatamente o que você perguntou.*

108. **Pesquisador/Participante:** O que você respondeu?

109. **P-8:** *Assim, é meio sem lógica essa sua pergunta... Eu respondi que é a média da altura dos alunos.*

110. **Pesquisador/Participante:** Não era bem isso! Eu perguntei o que significa este valor ser a Média Aritmética?
111. **P-8:** *O que significa este valor ser a média?*
112. **Pesquisador/Participante:** Sim, mas talvez esta pergunta não foi bem formulada, pode ser!
113. **P-8:** *Eu não sei, pode passar!* [Risos entre as participantes.]
114. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, não tem problema! P-7, o que você respondeu?
115. **P-7:** *Coloquei que significa que a maioria dos alunos possui mais ou menos essa medida, que a altura deles está próximo deste valor.*
116. **Pesquisador/Participante:** É mais ou menos por este caminho, P-7. E você, P-2...
117. **P-2:** *Eu coloquei mais ou menos igual. Seria onde se encontra concentrada a maioria da altura da turma, ou seja, em torno de 147,3 centímetros.*
118. **Pesquisador/Participante:** E esse ‘em torno’ pode ser um pouco além de 146,3 como um pouco abaixo. Era mais ou menos essa ideia... P-4?
119. **P-4:** *São mais alunos com aproximadamente 147,3 centímetros.*
120. **P-5:** *Eu coloquei: considerando o menor valor e o maior valor dessa medição, a média é o número que se aproxima, ao mesmo tempo, deste menor e deste maior...*
121. **Pesquisador/Participante:** Eu entendi o que você quis dizer. O que vocês acham, pessoal? [Como ninguém respondeu, P-5 salientou.]
122. **P-5:** *Assim, ao mesmo tempo, o 147 se aproxima do maior e do menor... Não sei, fiquei um pouco confusa...* [Risos entre todas as participantes.]
123. **Pesquisador/Participante:** Depende deste menor valor e do maior...
124. **P-1:** *E da quantidade...*
125. **Pesquisador/Participante:** Também, isso influencia!
126. **P-2:** *Por exemplo, do 130 pro 147 tem uma diferença de 17 centímetros... Agora, do 147 pro 177 tem uma diferença maior...*
127. **Pesquisador/Participante:** Você entendeu? [Referiu-se à P-5 após a fala de P-2.] Perceba que do 130, o menor valor medido para a Média Aritmética que é 147,3 há uma diferença de quase 17 centímetros. Agora, do 147,3 para o 177 – que foi o maior valor – a diferença é de quase 30. Dá pra ver que o 147,3 não está no meio, ou seja, localizado no meio entre o menor e o maior valor.
128. **P-5:** *Entendi!*

129. **P-2:** *Porque influencia a frequência de cada altura!*
130. **P-5:** *Ah, sim, entendi! É que eu fiquei com dúvida com o que a gente acabou de comentar. Que, às vezes, a maioria não tá ali, nele [Referiu-se à média.], o valor é tão alto que não chega nele...*
131. **Pesquisador/Participante:** Lembrando que a média é uma Medida de Posição que mostra uma tendência, não é um valor em si, ou seja, necessariamente o valor coletado... É uma tendência, é uma possibilidade... não é o valor real! Essa é uma outra diferença... P-9, leia pra gente, por favor!
132. **P-9:** *A Média Aritmética indica o número que a altura dos alunos fica concentrada em 147 centímetros. Então, o ‘centro’ das alturas é 147, tendo a frequência das alturas em torno disso.*
133. **Pesquisador/Participante:** Sim! P-8, deu pra compreender o intuito desta questão? Nós queríamos entender o significado de Média. Tudo bem, P-1? **[A participante indicou estar compreendendo a discussão realizada.]**
134. **P-2:** *Mas como seria a resposta mais adequada?*
- [Visando ‘desequilibrar’ as participantes o Pesquisador/Participante denotou uma definição que não fosse tão ‘de encontro’ com a discussão que estava sendo realizada.]**
135. **Pesquisador/Participante:** Poderia ser: este valor indica a ‘maior’ concentração dos valores concentrados na pesquisa.
136. **P-2:** *O certo não seria ‘tende a indicar’? Porque nem sempre indica!*
137. **Pesquisador/Participante:** É, está certo, porque nem sempre ela indica, como estamos discutindo. Muito bem colocado! Acrescentem isso! Lembrando que a Média, Mediana e Moda são medidas de tendências, é interessante ficar isso bem claro.
138. **P-5:** *É interessante ver que não é uma verdade absoluta.*
139. **P-8:** *Então, eu tenho essa dificuldade, por isso eu não consegui enxergar isso!*
140. **Pesquisador/Participante:** É interessante observarmos isso, né!?
141. **P-2:** *É, porque não é exato...*
142. **P-8:** *É!*
143. **Pesquisador/Participante:** É, porque até então vocês pensavam que era exato...
144. **P-8:** *É, estou espantada até agora com a questão da régua porque eu achava que ao medir algo usando eu tinha o valor real... nunca pensei que este valor é uma aproximação... Me causou um ‘desequilíbrio’ psicológico, porque eu aprendi assim, não tinha essa discussão...*

145. **Pesquisador/Participante:** Entendi!

146. **P-2:** *É que nem média, mesmo. Média é o meio e ponto!* [Referiu-se ao modo com a qual ocorreu a abordagem deste assunto na Educação Básica.]

147. **Pesquisador/Participante:** A Média indica uma medida de tendência, pois, bem sempre esta medida vai coincidir com o valor de algum dado coletado. Reparem que nos valores coletados pela professora de Matemática Sueli não foi anotado na lousa este valor (147,3)!

148. **P-2:** *A resposta que a P-5 deu é a mais óbvia! Porque a gente pensa, ora, é o meio... Mas com a discussão vimos que não é bem assim.* [P-5 fala conjuntamente justificando ter pensado desta maneira.

149. **Pesquisador/Participante:** Ou seja, tende a mostrar o centro dos valores...

150. **P-2:** *Mas às vezes não...*

151. **Pesquisador/Participante:** Isso!

152. **P-2:** *Eu comecei a viajar...* [Risos entre todos.]

[Em continuidade, P-1 fez a leitura do seguinte trecho pertencente ao item 7.1.1.]

É possível definir a Média Aritmética ($\bar{x}$) em ‘termos’ matemáticos. Considerando x_i ($i= 1, 2, 3, \dots, n$) o conjunto dos dados, a Média Aritmética é definida por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad (1.)$$

Tal expressão (1.) permite o cálculo da Média Aritmética quando os valores coletados ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$) estão presentes. No entanto, como fazer para calcular a Média Aritmética a partir apenas da tabela?

[Terminada a leitura, o Pesquisador/Participante realizou o seguinte comentário.]

153. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, percebam que até agora calculamos a Média Aritmética a partir de um conjunto de dados. Neste momento será pedido o cálculo da média usando apenas a Tabela que representa os dados coletados. Agora eu peço pra que vocês tentem calcular a Média Aritmética usando apenas esta Tabela do problema 2 e depois usando a Tabela do problema 3. [Neste momento, o Pesquisador/Participante projetou os enunciados dos problemas 2 e 3 bem como suas referidas tabelas.]

2. Considerando a tabela representando a frequência dos intervalos das ‘alturas’ dos alunos do 8.º ano C, calcule a Média Aritmética. Lembre-se de que os valores obtidos por meio da medição de cada um dos estudantes não podem ser utilizados para tal cálculo.

Tabela – Distribuição da Frequência dos Intervalos referentes à altura dos alunos do 8.º ano C

Altura (cm) – Intervalos	Frequência
[130, 135[	7
[135, 140[	1
[140, 145[	4
[145, 150[	4
[150, 155[	7
[155, 160[	2
[160, 165[	3
[165, 170[	0
[170, 175[	1
[175, 180[	1
TOTAL	30

3. A tabela do problema anterior denota uma variável quantitativa contínua. No caso de uma tabela representando uma variável quantitativa discreta, o cálculo da Média Aritmética seria feito do mesmo modo? Pense a respeito considerando a seguinte tabela que apresenta o número de irmãos pesquisados pelos alunos do 6.º ano B da professora de Matemática Sueli.

N.º (Irmãos)	Frequência
0	4
1	4
2	6
3	5
4	1
TOTAL	20

[Enquanto salientou que para o cálculo das Médias Aritméticas só poderia ser utilizada a Tabela, P-9 perguntou o exposto abaixo.]

154. **P-9:** *Mas, Pesquisador/Participante, como eu vou saber no intervalo 130 a 135 quantos foram 130 ou 131?*

155. **P-2:** *Não dá! Então você vai ter que tirar a média do intervalo!...* [Após tal fala percebeu-se que P-2 ficou ‘sem jeito’ já que havia dado a resposta à questão de P-9 sem ter disponibilizado ‘tempo’ para que as demais participantes também pensassem a respeito do mesmo.]

156. **Pesquisador/Participante:** *Pensem, pessoal, em como fazer...*

157. **P-9:** *Ah, eu entendi... tem que fazer em dois passos. Eu tenho que fazer a partir de cada passo desse e depois eu faço a soma... Ah, tá, entendi...*

[O Pesquisador/Participante disponibilizou 15 minutos para que as participantes, individualmente, em duplas ou trios resolvessem o 2.º problema. As participantes decidiram fazer individualmente o problema proposto e como auxílio usaram a calculadora, entretanto no decorrer observaram-se diálogos (troca de ideias) entre as mesmas. Como P-1 indicou não estar compreendendo o que deveria se feito, o Pesquisador/Participante dirigiu-se até sua mesa e lhe explicou novamente, dizendo o seguinte: “Finja que você não sabe quanto mede cada um dos alunos da professora Sueli. Você tem apenas esta tabela e é pedido que você ache a Média Aritmética

referente à altura dos alunos.” Após tal explicação, P-1 disse ter entendido e que iria pensar sobre o 2.º problema.]

[P-4 mostrou para P-2 o que havia feito, ou seja, o cálculo da média (ponto médio) do 1.º intervalo [130, 135[. P-2 disse que estava certo, embora ela devesse calcular os pontos médios dos demais intervalos.]

[P-8 e P-1 foram trocando ideias. Neste instante, P-8 perguntou ao Pesquisador/Participante como seria possível saber que números estavam dentro do intervalo [130, 135[. Novamente o Pesquisador/Participante salientou que apenas com a Tabela a única informação possível é a frequência 7 deste intervalo e nada mais além disso.]

[Após efetuarem alguns cálculos, P-5 e P-9 verificaram se os resultados estavam iguais. P-1 perguntou à P-8 o que fazer após descobrir os pontos médios de cada intervalo. P-2, visando ajudá-las, disse que era preciso multiplicar cada ponto médio encontrado pela frequência do referido intervalo e, deste modo, descobririam o total. Entretanto, após dizer isso, P-2 salientou que achava que deveria ser feito assim, mas que não tinha certeza.]

[P-8 demonstrou certa ansiedade pedindo ao Pesquisador/Participante que dissesse como seria a solução. No entanto, o Pesquisador/Participante pediu que a mesma pensasse como resolver o 2.º problema, não importando se ao final tal solução não fosse correta. Observou-se que P-8 recorreu ao texto anterior para descobrir os números que compunham o intervalo [130, 135[. A partir disso o Pesquisador/Participante lhe disse que seria necessário ‘esquecer’ tais valores ‘individuais’ e que a única informação que possuíam era a representada pela Tabela. Após tal esclarecimento, P-1 disse ao Pesquisador/Participante que estavam olhando no Histograma – discutido há pouco – pois no mesmo já haviam os pontos médios calculados. Salientou também que iriam somar os pontos médios encontrados e dividir o total por 30. Por pretender que as participantes pensassem sozinhas acerca do desafio, mesmo sabendo que estavam cometendo um erro, o Pesquisador/Participante não as corrigiu.]

[P-5 foi a primeira a terminar seguida por P-9. Enquanto isso, P-2, P-4 e P-7 conferiam seus cálculos. P-2 questionou se não daria exatamente igual à outra média, ou seja, a referente ao cálculo utilizando o conjunto dos valores, e o Pesquisador/Participante respondeu que realmente não daria igual. A dupla P-1 e P-8 estava em dúvida sobre qual número utilizar para dividir o total, sendo este total a somatório dos pontos médios de cada classe de intervalo. P-2 respondeu que deveria ser dividido por 30, questionando-as se haviam multiplicado o ponto médio de cada classe de intervalo por sua respectiva frequência. P-1 e P-8, após responderem “Não.”, mostraram-se desanimadas em prosseguir com os cálculos para a obtenção da Média Aritmética, entretanto foram realizando os cálculos necessários.]

[Decorrido o tempo disponibilizado deu-se início à discussão. O Pesquisador/Participante leu novamente o enunciado do 2.º problema. P-9 foi a primeira a apresentar sua solução, conforme exposto a seguir.]

158. **P-9:** *Eu comecei assim, primeiro, o que eu socializei: “Como eu vou achar entre 130 e 135 um número que eu posso multiplicar pela frequência?”. Eu lembrei como adquirir essa média... é somar 130 com 135 e dividir por 2. Então eu fiz isso com todos, nos intervalos, e depois eu multipliquei pela frequência que aparecia...*

159. **Pesquisador/Participante:** Que estava do lado? [Referiu-se à coluna que denotava as frequências de cada classe de intervalo.]

160. **P-9:** *Isso! A primeira de 130 a 135 deu 132,5 e eu multipliquei por 7 que era a frequência que aparecia. E daí eu fiz isso com todas as outras. Então, todos os valores que deram, o total deu 4445. E daí eu peguei o total das médias com a frequência e dividi por 30 para obter a Média Aritmética que deu 148,16. A Média Aritmética dos alunos...*

161. **Pesquisador/Participante:** Ok! Quem fez assim? [Ergueram as mãos P-2, P-4, P-5 e P-7. **O Pesquisador/Participante, durante o tempo disponibilizado, já havia observado as soluções destas participantes que estavam iguais a ressaltada por P-9.**] Pessoal era assim mesmo! Lembrem-se que como estamos representando os dados em classes de intervalos não dá pra saber quais números estão ali dentro, assim eu pego o ponto médio deste intervalo. E, multiplico pela frequência, somo todos estes valores e divido por 30 que é o total de pesquisados. A própria tabela mostra o total embora seja possível calcular este total. P-1 e P-8 como vocês fizeram?

162. **P-1:** *Então, a gente ficou quebrando a cabeça. A gente ficou vendo a discussão com o pessoal. Então, a gente tava fazendo a média do intervalo mas não estava multiplicando pela frequência.*

163. **Pesquisador/Participante:** Vocês perceberam que não consideraram as 7 pessoas que ‘estavam’ no ponto médio do primeiro intervalo?

164. **P-1:** *É!*

165. **Pesquisador/Participante:** Deu pra compreender?

166. **P-1:** *Sim, deu!*

167. **Pesquisador/Participante:** Quando vocês calcularam a Média Aritmética com os valores individuais deu um número. Agora deu outro, não deu? [As participantes sinalizaram concordar com o questionamento.] Mas estes dois números estão bem próximos... Vocês concordam? O primeiro número foi 147,3; agora foi 148,17 ou 148,16... Percebam que a diferença é pouca... [Neste momento P-1 interrompeu dizendo que a Média Aritmética obtida por ela e P-8 foi 142, 2... Rapidamente P-8 disse a sua parceira que haviam cometido alguma confusão em alguma parte do cálculo, tendo em vista que haviam demorado em compreender como fazer o problema. P-5 salientou não ser necessário multiplicar o ponto médio caso a frequência da referida classe de intervalo seja 0; fato observado pelo Pesquisador/Participante logo em seguida.] Vocês acharam interessante? [Todas as participantes responderam afirmativamente.] Observem que mesmo não tendo os valores reais – individuais – coletados, com uma tabela é possível calcular a Média Aritmética... Agora, turma, no problema número 3 eu peço para que vocês calculem a Média Aritmética de uma variável quantitativa discreta. Lembrem da pesquisa dos alunos do 6.º ano B onde pesquisaram o número de irmãos que cada um possuía? [Após ler a tabela apresentada no 3.º problema, o Pesquisador/Participante disponibilizou 10 minutos às participantes para que o resolvessem. O referido problema foi projetado na tela.]

[Ao perceber que P-4 não começou a fazer indicando não haver compreendido ‘por onde’ iniciar a solução, o Pesquisador/Participante interveio ressaltando o seguinte: “Olha, 4 alunos não têm irmãos, 4 alunos têm 1 irmão, 6 alunos têm 2 irmãos, 5 alunos têm 3 irmãos e 1 aluno tem 4 irmãos. Eu quero a média do número de irmãos dos alunos

do 6.º ano B.” Após tal auxílio, P-4 ficou olhando para a folha na qual estava registrado o problema por alguns instantes, em seguida iniciou os cálculos.]

[P-2 foi a primeira a terminar. P-5 e P-9 conferiram os resultados encontrados. P-1 e P-8 pensarem sobre o problema conjuntamente e P-7 realizou a solução de modo individual.]

[Enquanto aguardava P-4 concluir sua solução, o Pesquisador/Participante chamou a atenção ao fato de que no referido Grupo de Estudo a calculadora estava sendo utilizada de modo ‘construtivo’, ou seja, no intuito de auxiliar a construção do conceito de Média Aritmética. Salientou que, na maioria das vezes, a calculadora vem sendo utilizada de modo indevido, chegando ao ponto de muitos professores não permitirem seu uso em sala de aula. As participantes, em resposta, ressaltaram também terem sido impedidas de utilizar um lápis ‘de escrever’ que trazia em sua ‘superfície’ a tabuada. Durante tal diálogo, P-2 deu umas dicas à P-4 no intuito de auxiliá-la quanto à solução do referido problema.]

[Transcorrido o tempo disponibilizado, o Pesquisador/Participante solicitou à P-4 que compartilhasse a solução encontrada. Faz-se oportuno ressaltar que a participante durante a sua resposta riu.]

168. **P-4:** *Então, depois que você falou eu pensei...* [Risos entre todas as participantes.]

169. **Pesquisador/Participante:** Mas o que foi que eu falei que te fez pensar?

170. **P-4:** *Não... eu não sei, eu olhei e pensei... no primeiro tinha que tirar a média do intervalo, nesse não precisa.* [Referiu-se ao problema anterior – 2.]

171. **Pesquisador/Participante:** Ok, isso mesmo.

172. **P-4:** *Aí eu fiz igual o outro. Por exemplo, 0 vezes 4, 1 vezes 4, ... Você entendeu?*

173. **Pesquisador/Participante:** Sim, eu entendi!

174. **P-4:** *Daí eu somei tudo e deu 35. Depois eu dividi por 20 que é o total de aluno. Deu 1,75.*

175. **Pesquisador/Participante:** Quem fez igual a P-4? [As demais participantes levantaram a mão indicando terem realizado igual procedimento.] Ok! Está correto, é assim mesmo. Se eu te perguntasse o porquê você fez assim, P-9, o que você responderia?

176. **P-9:** *Bom, eu responderia que, primeiro a hipótese que eu formulei foi essa: primeiro eu olhei para a parte que seria da quantitativa contínua... e a diferença dessa que é contínua pra essa que não seria é exatamente isso, já tem um número que é concreto, e por isso eu não preciso chegar numa média... [Referiu-se ao ponto médio calculado para cada classe de intervalo.] É por isso que eu já posso calcular os alunos pelo tanto que seria aquilo... tem 4 alunos com 1 irmão, então depois disso tem 4 mais 12 mais 15 mais 4 que seriam 35 dentro desse total, daí é só dividir pelo total dos alunos da classe que seriam 20...*

177. **Pesquisador/Participante:** Dos 20 alunos que trouxeram a resposta?

178. **P-9:** *Sim! E daí o número foi 1,75.*

179. **Pesquisador/Participante**: Ok! P-5 você pensou assim?
180. **P-5**: *Sim!*
181. **Pesquisador/Participante**: Ok! P-2?
182. **P-2**: *Sim, eu quero só colocar que na verdade a gente voltou nas alturas nas frequências... Aqui a gente tem 4 vezes o 0 [Referiu-se ao fato de que, por meio da Tabela mostrada no 3.º problema, é possível saber os valores coletados pelos alunos da professora Sueli referente ao número de irmãos.], 4 vezes o 1...*
183. **Pesquisador/Participante**: É isso mesmo! A Tabela mostra que 4 alunos responderam nenhum, 4 alunos responderam 1 irmão, 6 alunos responderam 2 irmãos... **[Neste momento P-9 ergueu a mão e pontuou o seguinte.]**
184. **P-9**: *Eu e a P-5 estávamos conversando, trocando figurinhas, “Ah, será que é esse 1,75?”, “Talvez não fosse!”... Mas, se a gente for observar dentro dessa tabela, a gente vai poder ver que de 4 e 6 [Referentes às frequências para o número de 1 e 2 irmãos, respectivamente.] é a maioria que está ali, ou seja, é a metade, então dá pra gente ver que entre 1 e 2, no 1,75 está a maior concentração de alunos...*
185. **Pesquisador/Participante**: Muito bem colocado, é isso mesmo!
186. **P-9**: *Então dá pra você comprovar se olhar na tabela!*
187. **P-2**: *Mas, no caso assim, por ser pessoas – no caso irmãos – mesmo assim eu deixo essa média 1,75?*
188. **Pesquisador/Participante**: Pode deixar porque é uma tendência.
189. **P-7**: *Mas vamos supor, igual fosse uma questão de vestibular...*
190. **Pesquisador/Participante**: Depende da pessoa que está formulando a questão. Se a pessoa deixa claro que está se procurando a Média Aritmética enquanto uma medida de tendência, a resposta seria 1,75. Agora, se é pedido um valor que represente a quantidade de irmãos, então há a necessidade de considerar como resultado o número 2.
191. **P-2**: *Isso é um problema até nas provinhas com as crianças...*
192. **Pesquisador/Participante**: Como assim? Eu não fiquei sabendo...
193. **P-2**: *Ah, se é o número de pessoas, como eu posso ter 1,75? São pessoas...*
194. **Pesquisador/Participante**: Eu concordo que se formos fazer um estudo com alunos do 5.º ano, não visando à abordagem do conceito de Média Aritmética, mas sim um início, seria indicado a resposta ser apresentada na unidade de medida do problema. No caso, como a unidade de medida é ‘irmão’, então, só podemos considerar números naturais, números ‘inteiros’ positivos. Até porque é até complicado o aluno deste ano compreender o que é uma Tendência. Nós, pelo contrário, já conseguimos compreender, ok! **[Todas as participantes indicaram concordar com o exposto.]**

195. **P-2:** *É que o professor N. comentou com a gente que deu vários problemas sobre isso numa prova governamental aplicada...*

196. **Pesquisador/Participante:** Com crianças pequenas vejo ser necessário fazer um arredondamento para que a resposta represente algo real... 1,75 irmão não existe no mundo ‘físico’/real... Existe na Matemática dentro da Estatística quando representa uma medida de tendência...

197. **P-2:** *Então, tipo assim, por exemplo, esse exercício na sala realmente deveria-se lembrar sobre isso.*

198. **Pesquisador/Participante:** O que, por ser 2?

199. **P-2:** *Não, não que tem que ser 2. Mas, olha, prestem atenção, por ser pessoas não teria 1,75...* [Referiu-se a uma fala ‘chamada de atenção’ do professor aos seus alunos.]

200. **Pesquisador/Participante:** Que tem que chamar este fato para o aluno? Sim, com certeza! Sendo o aluno pequeno ou maior ele tem que interpretar o significado da resposta. Porque uma resposta no ‘mundo físico’ 1,75 referindo-se à pessoa não existe. Na Estatística sim, perfeitamente para mostrar a tendência da distribuição, ou seja, o ‘centro’ daquele conjunto de dados.

201. **P-4:** *Então, neste exemplo que o professor N. deu ele pediu pra gente chamar a atenção com as crianças pra elas mesmas escreverem a resposta. Ou seja, ao responder a criança teria a impressão de que seria preciso arredondar.*

202. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo! Uma coisa que estudaremos quando vocês estiverem planejando sequências de ensino refere-se ao fato de ‘obrigar’ – no bom sentido – o aluno a montarem a resposta para que eles vejam se aquela resposta tem sentido dentro do problema inicialmente proposto. Ah, vamos supor que seriam precisos 2,57 ônibus para levarem os alunos ao zoológico. Não teria como, onde seriam necessários 3 ônibus, sendo que um deles ficaria com lugares de passageiros sobrando... E isso passa a ser significativo e importante ao aluno, até porque o afobamento para fazer os cálculos é tão grande que muitas vezes o aluno nem confere-avalia o resultado encontrado no contexto do problema. Tudo bem, pessoal? Podemos prosseguir? Deu pra ampliar que a Média Aritmética também se faz possível a partir de uma tabela dada? [Todas as participantes indicaram afirmativamente.]

[Em continuidade, o Pesquisador/Participante realizou a leitura do seguinte trecho pertencente ao item 7.2.1. O mesmo foi sendo projetado na tela.]

A expressão que permite calcular a Média Aritmética a partir de uma tabela que apresenta os intervalos de classes de uma variável quantitativa contínua é definida abaixo:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{n} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \dots + x_n \cdot f_n}{n} \quad (2.)$$

, onde x_i representa o ponto médio de cada intervalo e f_i a frequência deste intervalo.

Para calcular a Média Aritmética solicitada no 2.º problema, faz-se necessário primeiramente o estabelecimento dos pontos médios das classes de intervalos. Observe a tabela abaixo:

Tabela – Cálculo da Média Aritmética

Altura (cm) – Intervalos	Frequência (f_i)	Ponto Médio (x_i)	$x_i \cdot f_i$
[130, 135[	7	132,5	927,5
[135, 140[	1	137,5	137,5
[140, 145[	4	142,5	570
[145, 150[	4	147,5	590
[150, 155[	7	152,5	1067,5
[155, 160[	2	157,5	315
[160, 165[	3	162,5	487,5
[165, 170[	0	167,5	0
[170, 175[	1	172,5	172,5
[175, 180[	1	177,5	177,5
TOTAL	30		4445

Por meio dos dados obtidos, temos que: $\bar{x} = \frac{4445}{30} \cong 148,17$. Esse é o valor da Média Aritmética calculada a partir da tabela utilizada.

[Durante a leitura, o Pesquisador/Participante explicou o significado de cada termo-símbolo contido na expressão (2.). Perguntou a P-4 se a referida expressão, após a discussão realizada, ‘passou’ a ter sentido; em resposta a participante disse “Sim.”. Complementando, o Pesquisador/Participante questionou se no Ensino Médio tal expressão teria significado para a participante; ela respondeu “Não.”.]

[Enquanto P-2 conversava com P-4 visando auxiliá-la na compreensão da Tabela denotada acima, P-8 realizou o seguinte comentário.]

203. P-8: *É interessante, assim, num grupo pequeno, uma ajudar a outra. Porque uma pega o conteúdo mais fácil, cada uma tem uma visão diferente... Isso que é legal!*

204. Pesquisador/Participante: E isso na teoria de Piaget poderia ser interpretado como sendo a ‘aproximação’ das estruturas de assimilação de vocês. A minha estrutura de assimilação, geralmente a do professor, está distanciada dos alunos, por isso que, talvez, ele não consegue estabelecer esse diálogo com o seu aluno. Tem professor que, por saber tanto, ele acha que o aluno está quase num mesmo patamar, então este professor fala, fala, fala mas o aluno não consegue assimilar aquilo. É por isso que é importante a interação aluno-aluno para o professor também possa perceber qual é o nível do diálogo que ele tem que estabelecer para que haja realmente uma efetiva comunicação. É interessante isso, não é? O professor pode e deve saber bem o conteúdo. No entanto, a sua assimilação se dá de maneira tão “rápida” que ele acha que o aluno também conseguirá esta assimilação rapidamente.

205. P-8: *É, quando o professor fala assim: “Mas isso é tão fácil!”.*

206. **Pesquisador/Participante:** É verdade, comentários do tipo: “Eu não acredito que você conseguiu errar isso!”, “Como que na prova você me tira 0,1 nesta questão!?”.

207. **P-8:** *É, ou “Todo mundo entendeu e você tira nota baixa na prova!”*

208. **P-2:** *Depois o aluno fica até com vergonha, né!*

209. **Pesquisador/Participante:** Isso! A pessoa fica com vergonha e a auto-estima desce até o pé!

210. **P-9:** *Mas até hoje tem resquício disso. Quando o professor pergunta: “Alguém tem alguma dúvida?”... A maioria tem dificuldade em perguntar por causa disso, porque parece que é errado perguntar... Porque vai que ele errou...*

211. **Pesquisador/Participante:** Sobre isso, nós, enquanto professores, não queremos que o aluno persista no erro. Mas o erro mostra uma construção, porque se ele errou quer dizer que ele tentou fazer e agiu sobre. Este erro tem que ser corrigido para o aluno superar esta dúvida...

212. **P-8:** *Nossa, se fosse assim, igual você fez agora. Eu não consegui fazer, eu não entendi... [Referiu-se à primeira pergunta do item 7.2.1.] Daí você falou “Talvez eu não tenha colocado legal a pergunta.!”*, e daí ouvindo outras pessoas eu compreendi... pois teve a troca né... Então seria muito melhor...

213. **Pesquisador/Participante:** Até porque, pessoal, o professor tem que parar com a ideia de que nunca vai errar. Como assim!? Mesmo que o professor tenha se doutorado numa área do conhecimento, então esta pessoa não vai errar? E, quando você está sendo professor, você vai estar errando... Vocês concordam comigo? **[Todas as participantes indicaram, por meio de expressão facial, concordar.]**

214. **P-8:** *Parece que quando você erra é feio...*

215. **Pesquisador/Participante:** É, infelizmente tem essa cultura... Porque o professor, por representar o saber acadêmico não vai errar! Infelizmente temos colegas professores que agem assim...

216. **P-2:** *Ih, tá cheio!*

217. **Pesquisador/Participante:** Infelizmente eu tive um professor de Cálculo que, por não assumir um erro, gastou um mês com vários procedimentos auxiliares para poder nos convencer de que não havia errado. Eu, muito ‘abelhudo’, peguei um software chamado Winplot e fiz o traçado das equações do problema que estávamos resolvendo. Mesmo levando o desenho feito por este programa, o professor persistiu dizendo que o computador havia errado. **[Risos entre todas as participantes.]** Mesmo trazendo impresso numa cartolina ele não admitiu o erro. Isso nos mostra como o meu professor lidava com o erro, ou seja, não o admitia, embora fosse um excelente professor em termos didático-metodológicos. **[Risos entre todas as participantes.]**

[Dando prosseguimento, o Pesquisador/Participante fez a leitura do 4.º problema, explicando conjuntamente. Tal problema encontra-se denotado abaixo.]

4. É possível perceber que os valores das Médias Aritméticas obtidas a partir das expressões (1.) e (2.) são praticamente iguais. O que isso significa? Em alguma situação tais valores poderão diferir consideravelmente? Pense a respeito.

[Para facilitar a compreensão do problema, o Pesquisador/Participante ressaltou o seguinte exemplo: Imagine que ao fazer uma pesquisa você tenha coletado alguns valores referentes a uma variável quantitativa contínua. Usando a expressão 1. você obteve como Média Aritmética 50,1. Em seguida você organizou os dados em uma tabela em classes de intervalo. Usando a expressão 2. você encontrou uma nova Média Aritmética que foi 51,3. As duas médias são bem próximas. Eu estou perguntando o que esse fato de serem ‘tão próximas’ significa e, também, se existirá algum exemplo no qual tais valores serão bem diferentes.]

218. **P-4:** *Eu não sei se pode acontecer de podermos obter dois valores diferentes, mas não deveria.*

219. **P-2:** *Eu acho que pode, pois, por exemplo, talvez dentro do intervalo tenha mais, é... como eu vou explicar...*

220. **P-8:** *Mais frequência?*

221. **P-2:** *Tenha mais frequência num determinado valor e daí não vai dar a média... Ah, eu não tô sabendo explicar!*

222. **Pesquisador/Participante:** Alguém mais? **[Ninguém se pronunciou.]** Deixa eu ver se eu consigo interpretar a sua fala P-2. Talvez esta tabela não tenha sido bem elaborada e estes intervalos considerados não são muito apropriados...

223. **P-2:** *Isso, apropriados...*

224. **Pesquisador/Participante:** Era mais ou menos isso, P-2?

225. **P-2:** *Era isso. Por exemplo... é que aqui vai dar certo [Olhou para a tabela representando as classes de intervalos das alturas dos alunos da professora de Matemática Sueli.] Sei lá, até um intervalo maior onde teriam apenas 2 alunos do primeiro... mas do resto não tem nada, só vai ficar o 2 lá... e daí na hora que eu fizer a média vai dar essa diferença.*

226. **Pesquisador/Participante:** Vamos supor que, ao invés de montar 10 classes de intervalos eu construa 20. Assim teremos muitos intervalos que terão apenas 1 ou 2 elementos como frequência... Sim, P-2, era neste sentido. Quem conseguiu ‘acompanhar’ o raciocínio de P-2? Você conseguiu P-9?

227. **P-9:** *Eu acho que sim. [Com a mão direita imitou o sinal “+ ou –”.] Teria um exemplo mais concreto, assim?*

228. **P-8:** *É, um exemplo...*

229. **P-4:** *É só você pegar esse exercício aqui oh [Referiu-se à Tabela referente às medidas (alturas) dos alunos do 8.º ano C.] que era de 5 em 5 [Referiu-se à amplitude de*

cada classe de intervalo considerada.] e daí, ao invés de pegarmos de 5 em 5 pegássemos de 10 em 10, daí muito mais classes iriam dar 0 e outros ficariam com 1!

230. **Pesquisador/Participante:** Perceba, P-4, se você considerar intervalos de maior amplitude mais elementos estarão contidos neles. Isso o que você disse acontece caso considere intervalos pequenos... A gente teria que calcular para ver se daria mesmo esta grande diferença. Como estamos considerando, neste caso das alturas dos alunos, valores que não variam muito entre si, acredito que a diferença não seria tão grande, embora houvesse. Deu pra acompanhar, P-9?

231. **P-9:** *Agora eu entendi!*

232. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, pessoal? **[As demais participantes indicaram haver compreendido o exemplo dado.]** E construir um número de classes de intervalos apropriado que é a questão, né!

233. **P-9:** *Mas daí teria no caso?*

234. **Pesquisador/Participante:** Sim, tem! Tem como saber!

235. **P-9:** *Então o número de intervalos é conforme o número de dados eu tenho? Das classes de intervalos?*

236. **Pesquisador/Participante:** Sim!

237. **P-2:** *Dá até pra calcular até qual seria a amplitude, né!?*

238. **Pesquisador/Participante:** Sim, dá para calcular. No entanto, teríamos que considerar algumas regras e estudar um pouco mais algumas questões ligadas à Estatística.

239. **P-8:** *Como assim, eu não estou entendendo o que vocês estão falando...*

240. **P-2:** *O intervalo. Por exemplo, você fez de 5 em 5, tem um jeito, que eu não lembro mais, mas a professora M. explicou. Que você tem como saber qual seria mais próximo de um número significativo esse intervalo, esta amplitude.*

241. **Pesquisador/Participante:** De quanto até quanto seria...

242. **P-8:** *Ah, tá!*

243. **P-2:** *E qual seria a resposta deste, então? [Ou seja, referente ao 4.º problema.]*

244. **Pesquisador/Participante:** Alguém poderia elaborar pra gente? P-7, P-2?

245. **P-7:** *Eu não sei explicar!*

246. **Pesquisador/Participante:** Como você colocaria P-7?

247. **P-7:** *Ah... [Risos.]*

248. **P-2:** *O que isso significa? [A participante estava lendo o enunciado do 4.º problema para si.] Significa que são os mesmos dados, eu diria.*

249. **P-4:** *E de que a tabela está feita de modo correto!*

250. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo, P-4! Isso porque ela diz que a auto-estima dela com relação à Matemática está baixa!?

251. **P-8:** *É... imagine se estivesse alta! [Risos entre todos.] Você é dez em Matemática P-4!*

252. **P-4:** *Eu!?*

253. **Pesquisador/Participante:** Eu não tenho dúvidas quanto a isso!

254. **P-8:** *Nem eu! Você sabe das coisas P-4! [Neste momento as participantes estavam anotando a resposta referente ao 4.º problema. Para tanto, P-2 falou sua resposta em voz alta e leu a segunda parte do problema.]*

255. **P-2:** *Significa que a tabela está feita de modo correto. “Em algumas situações estes valores poderão diferir consideravelmente?”. Sim! Era só essa a resposta, não pedi pra explicar!*

256. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo! Eu não pedi! [Risos.]

257. **P-2:** *Você mandou pensar e não justificar...*

258. **P-8:** *É, porque esse justifique é duro!*

259. **P-2:** *Sim, porque se os intervalos das classes foram muito grandes ou muito restritos isso gerará alterações na média.*

260. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo! Apenas complementa que, caso os valores variem muito, o cálculo da média por meio de uma tabela não tão bem elaborada irá acarretar em considerável diferença quanto ao valor da mesma se comparado ao cálculo considerando os valores reais – individualmente coletados. Tudo bem pessoal? [As participantes anotaram o proposto por P-2 complementando a explicação dada pelo Pesquisador/Participante.]

[Dando prosseguimento, o Pesquisador/Participante realizou a leitura do seguinte trecho.]

De maneira análoga, a expressão que possibilita calcular a Média Aritmética de uma tabela que denota uma variável quantitativa discreta é definida abaixo:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_c \cdot f_c}{n} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \dots + x_n \cdot f_n}{n} \quad (3.)$$

, onde x_c representa o valor de cada classe e f_c a sua frequência.

Utilizando tal expressão (3.) é possível obter a Média Aritmética do 3.º problema. Observe o cálculo abaixo:

$$\bar{x} = \frac{0.4 + 1.4 + 2.6 + 3.5 + 4.1}{20} = \frac{35}{20} = 1,75$$

Embora 1,75 ‘irmãos’ não existam, este valor é aceitável, pois representa uma **medida de posição** (tendência central) referente ao número de irmãos dos alunos do 6.º ano B.

5. Utilizando a expressão (1.) é possível encontrar a Média Aritmética referente ao número de irmãos dos alunos do 6.º ano B usando a tabela do problema 3.? Caso sim, este valor obtido é igual ao calculado por meio da expressão (3.)? Pense a respeito.

[Durante a discussão, o Pesquisador/Participante explicou os significados dos termos-símbolos da expressão (3.). Nenhuma participante indicou não estar compreendendo tal notação. Por fim, foi feita a leitura do problema 5. sendo solicitada a sua solução. Como as participantes não compreenderam a questão, o Pesquisador/Participante mudou a maneira da pergunta para: “Usando a tabela do problema 3 dá pra saber quantos alunos tem 0 irmão, quantos têm 1 irmão, etc., e, a partir disso, dá pra calcular a Média Aritmética usando estes valores na expressão 1.?”. Após tal modificação, P-2 compreendeu que seria preciso transformar a tabela nos dados individuais. Neste momento, o Pesquisador/Participante denotou o exposto abaixo.]

261. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo, P-2, você tem que ‘voltar’ aos valores individuais por meio da tabela. Isso é possível porque temos uma tabela representando uma variável quantitativa discreta. Agora, não seria possível fazer isso com uma tabela de uma variável quantitativa contínua. Todo mundo compreende isso? [As participantes disseram haver compreendido. P-2 disse o seguinte.]

262. **P-2:** *Você gosta de fazer pegadinhas, né!*

263. **Pesquisador/Participante:** Sim! O meu intuito é fazerem vocês pensarem sobre estas idas e vindas ‘dentro’ de uma situação problema. E o valor que vocês vão obter vai ser igual ao que eu acabei de ler no texto? [Rapidamente, sem dar tempo para que as demais participantes respondessem (pensassem sobre), P-2 falou: “Sim!”.]

264. **Pesquisador/Participante:** Ok! Olhem aqui, pessoal. Nós voltaríamos a ter os seguintes dados: 4 alunos com 0 irmão, 4 alunos com 1 irmão, 6 alunos com 2 irmãos, 5 alunos com 3 irmãos e 1 aluno com 4 irmãos. [O Pesquisador/Participante registrou na lousa os seguintes valores.]

0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

265. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, pessoal? Perceberam que eu voltei nos valores a partir da tabela... Agora eu posso aplicar a expressão 1. [À medida que escrevia na lousa falou conjuntamente as operações aritméticas realizadas.]

$\bar{x} = \frac{0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4}{20} = \frac{35}{20} = 1,75$

266. **Pesquisador/Participante:** Percebam que era isso que eu queria que vocês percebessem, que chegaríamos no mesmo valor de Média Aritmética, tanto usando a expressão 1. quanto a expressão 3.

267. **P-2:** *Desnecessário...* [Risos entre P-2 e P-4.] *Isso aqui virou pegadinha! [Tal fala pode indicar que, para a referida participante, tal conclusão fosse óbvia.]*

268. **Pesquisador/Participante:** Eu queria que vocês percebessem que, quando estou numa variável quantitativa discreta, a minha Média Aritmética calculada não vai variar mesmo usando a tabela ou o conjunto dos valores individuais.

269. **P-8:** *Espera, eu não entendi... O que é discreta mesmo?*

270. **Pesquisador/Participante:** É o tipo de valores que estamos considerando aqui, ou seja, o número de irmãos!

271. **P-8:** *Ah, tá!*

272. **Pesquisador/Participante:** Quando estamos trabalhando com a variável quantitativa discreta, tanto faz usarmos a expressão 1. utilizando os valores individualmente coletados ou a expressão 3. usando a tabela. O resultado será igual. [O Pesquisador/Participante perguntou a cada participante se havia entendido o exposto. Todas disseram “Sim.”.] Agora, na variável contínua vimos que isso não acontece já que a média muda. A Média Aritmética calculada pelo conjunto dos valores individuais é diferente em relação ao da tabela.

273. **P-8:** *Qual que é a contínua?*

274. **Pesquisador/Participante:** É a referente às medidas, aos intervalos...

275. **P-8:** *Ah, tá! Mas repete pra mim de novo! [Foi realizado o solicitado pela participante.]*

[Como o tempo estava ‘acabando’, foi deixado para o próximo encontro a discussão acerca da Mediana e Moda. As participantes pediram para fazer ‘em casa’ o Momento Síntese já que estavam cansadas. O Pesquisador/Participante solicitou que as mesmas resolvessem três problemas, retirados de ‘vestibulares’, envolvendo os conceitos de representação gráfica e Média Aritmética.]

APÊNDICE L – TRANSCRIÇÃO DO 8.º ENCONTRO

Data: 19/04/2012

Tempo de Duração: 3 horas.

[Estavam presentes no início do encontro P-2, P-7 e P-8. P-8 realizou a leitura da síntese referente ao encontro anterior.]

1. **P-8:** *Nós recordamos primeiramente a Média Aritmética. Fizemos primeiramente os cálculos com a soma dos valores e esse total foi dividido pelo número de membros. Seguida pela tabela vimos que é possível também encontrar a média, juntamente com a confecção do gráfico histograma. Eu fiz isso, eu lembrei que foi isso que nós fizemos.*

2. **Pesquisador/Participante:** Foi isso mesmo! Quando você fez o estudo destes conteúdos, você fez Economia, não é!? E também no Ensino Fundamental, a abordagem foi parecida ou esta abordagem está sendo diferente?

3. **P-8:** *Está sendo diferente, porque era mais... é... imposto, você não pensava a respeito.*

4. **Pesquisador/Participante:** Não tinha este momento de pensar sobre o conceito e também de refletir sobre os procedimentos para obter os valores, no caso a Média Aritmética?

5. **P-8:** *É... No caso da média que era pegar os membros e somar e dividir pelo número de membros. Era isso, era a fórmula, você tinha que usar aquela fórmula. E eu não lembro de ter aprendido ao contrário, de pela tabela achar também.*

6. **Pesquisador/Participante:** E que você verificou que é possível?

7. **P-8:** *Sim!*

8. **Pesquisador/Participante:** Nós discutimos isso! Ok! P-7, faça a leitura pra gente.

9. **P-7:** *A partir desse encontro pude compreender que a Média Aritmética é uma Medida de Posição que tende a indicar a maior concentração de um valor coletado em uma pesquisa. Também aprendi que a Média Aritmética é calculada pela soma dos valores e divide-se esse total pela quantidade de números coletados. Para mim está um pouco confuso as notações matemáticas para calcular as Médias Aritméticas.*

10. **Pesquisador/Participante:** É a questão das simbologias usadas nas expressões?

11. **P-7:** *É!*

12. **Pesquisador/Participante:** Nós vamos fazer uma retomada disso hoje, tá bom!? Até para que haja uma ‘maior’ compreensão daquela questão da ‘somatória’, dos x_1 e f_1 utilizados...

13. **P-7:** *É isso mesmo!*

14. **Pesquisador/Participante:** Mas a confusão está na notação e não no conceito em si!?

15. **P-7:** *Não... isso, é na notação apenas.*

16. **Pesquisador/Participante:** Interessante! P-2, por favor!

17. **P-2:** *Achei muito válido nossa discussão sobre a práxis educativa, pois tem sido possível vivenciar uma postura do professor mediador da aprendizagem, que facilita a compreensão e apropriação do conhecimento através da interação e exposição das dúvidas, questionamentos e compreensões.*

Foi muito satisfatório compreender mais claramente a construção do Polígono de Frequência e do Histograma, como também a construção de uma tabela com variável quantitativa contínua organizada em classes e também conseguir encontrar uma medida de tendência central que é a média.

Vivenciar a construção do conhecimento embasado em uma teoria e as trocas interpessoais tem sido bastante significativo e satisfatório, principalmente por poder compartilhar as diferentes maneiras de pensar e resolver uma situação dada e assim tenho tentado quebrar vários paradigmas dos meus anos escolares, principalmente o fato de muitos conteúdos terem sido transmitidos como algo exato e é dessa maneira que se faz como sendo uma maneira única.

18. **Pesquisador/Participante:** Eu percebi, no Grupo de Estudo anterior, que a compreensão de que a média não representa um valor real, mas sim um valor que tende a algo foi um fato que desequilibrou vocês, não foi?

19. **P-8:** *Sim, verdade! [Ideia compartilhada por P-2 e P-7.]*

20. **Pesquisador/Participante:** Porque parecia que era um valor real, embora possa acontecer da Média Aritmética coincidir com um dos valores coletados, só que não necessariamente. Ok!? E também da questão que a P-8 colocou que, até então acreditava na exatidão da medição...

21. **P-8:** *Sim, pra mim foi derrubado porque nós aprendemos que era aquilo lá, né! [Referiu-se a ideia de que, por meio da medição utilizando a régua é possível obter o valor real de um objeto sem nenhum erro de aproximação.] Você não podia duvidar daquilo!*

22. **P-2:** *Foi assim que nós aprendemos...*

23. **Pesquisador/Participante:** Embora, com um bom grau de precisão que tem uma régua... a escolar nem tanto, mas as utilizadas por profissionais da área da engenharia, arquitetura, etc., sim. No entanto, tem um grau de erro, tudo bem? Qualquer objeto físico (instrumento) que se presta a medir um valor real, 'ele' vai errar... É por isso que são realizadas as correções das medições realizadas para minimizar tal erro, mas sempre um percentual de 0,0001% vai apresentar erro.

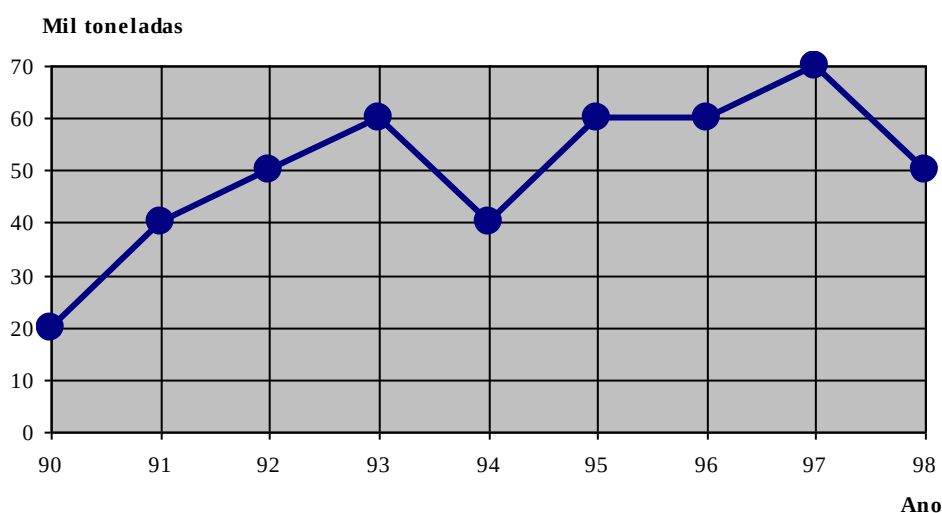
[Antes de iniciar a discussão acerca dos desafios deixados 'para casa' retirados de exames de vestibular, o Pesquisador/Participante ressaltou os assuntos a serem tratados no Grupo de Estudo, tais como: Mediana, Moda, Medidas de Dispersão (Amplitude, Variância e Desvio Padrão). Como as participantes já haviam estudado tais conteúdos em um disciplina durante a graduação, o Pesquisador/Participante perguntou-lhes o que as mesmas entendiam por Variância e Desvio Padrão. A resposta de P-2 foi: "Pra mim

não tem significado nenhum, a gente aprendeu a fazer os cálculos, mas eu não sei o que significam.”. Tal resposta foi compartilhada por P-7 e P-8. P-8, como já havia cursado Economia, não precisou ‘fazer’ a referida disciplina, entretanto também não se lembrou acerca do significado de Variância e Desvio Padrão. O Pesquisador/Participante, não querendo se ‘alongar’, disse que tais conceitos auxiliam a uma melhor interpretação da Média Aritmética. Finalizando, o Pesquisador/Participante ressaltou que, conforme vem ocorrendo, nem sempre ‘dá tempo’ de abordar todos os assuntos propostos no Grupo de Estudo. A justificativa reside no processo de assimilação-acomodação do novo conteúdo, sendo esperada a ‘demora’ para a ocorrência da aprendizagem, na qual se observam diferentes ‘tempos de aprendizagem’ em cada participante pelo fato de possuírem diferentes estruturas de assimilação (saberes experienciais).]

[Foi solicitado a P-7 que compartilhasse o modo utilizado para resolver o 1.º desafio. Para tanto, tal desafio foi projetado na tela para que as participantes acompanhassem a leitura realizada pelo Pesquisador/Participante. Observe-o abaixo.]

7.3 Desafio para casa

1. (Vunesp) O gráfico representa, em milhares de toneladas, a produção do estado de São Paulo de um determinado produto agrícola entre os anos de 1990 a 1998.



Analisando o gráfico, observa-se que a produção:

- foi crescente entre 1992 e 1995.
- teve média de 40 mil toneladas ao ano.
- em 1993 teve acréscimo de 30% em relação ao ano anterior.
- a partir de 1995 foi decrescente.
- teve média de 50 mil toneladas ao ano.

[Antes da exposição de P-7, todas responderam que marcaram como alternativa correta a letra e), portanto, acertaram o desafio. Além disso, concordaram com o Pesquisador/Participante que tal desafio, em relação aos demais, era o de menor nível de dificuldade. Apresentar-se-á, a seguir, a discussão realizada entre P-7 e o Pesquisador/Participante acerca da solução do desafio.]

24. **Pesquisador/Participante:** P-7, a partir do gráfico, porque a letra a) está errada?

25. **P-7:** Porque de 93 para 94 ele caiu, não foi só crescente de 92 a 95.

26. **Pesquisador/Participante:** Então não foi só crescente de 92 a 95. Todo mundo argumento desta maneira? **[P-2 e P-8 indicaram terem pensado do mesmo modo.]** Alguém chegou a escrever a justificativa?

27. **P-8:** *Eu aprendi na Matemática que a gente tem, até eu escrevo tudo... porque eu gosto de montar em cima do que estava escrito...*

28. **Pesquisador/Participante:** E você, como respondeu?

29. **P-8:** *Eu escrevi que houve um decréscimo de 93 a 94.*

30. **Pesquisador/Participante:** Ok! **[Quando questionadas se haviam escrito a justificativa, P-2 e P-7 disseram “Não!”.]** Em relação ao item b) que afirma a média ter sido 40 mil toneladas ao ano, o que está errado?

31. **P-7:** *Porque foi 50.*

32. **Pesquisador/Participante:** Você fez o cálculo?

33. **P-7:** *Sim!* **[Resposta compartilhada por P-2. P-8 disse que a sua média havia dado 53 mil toneladas ao ano, no entanto, corrigiu-se logo após verificar ter esquecido de somar o valor referente a 1990 e por ter dividido a somatório por 8, ao invés por 9.]**

34. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, P-7? Para a obtenção da Média Aritmética somamos todos os valores de 1990 a 1998 e dividimos o total por 9. **[Neste momento registrou na lousa o seguinte.]**

$$\bar{x} = \frac{20 + 40 + 50 + 60 + 40 + 60 + 60 + 70 + 50}{9} = \frac{450}{9} = 50 \text{ mil toneladas ao ano}$$

E daí a gente recai na alternativa e), né!?

35. **P-7:** *Na verdade eu nem tinha olhado... Eu fui fazendo item por item.* **[Resposta compartilhada por P-2.]**

36. **Pesquisador/Participante:** Ok! E na letra c), afirmando que no ano de 93 teve um acréscimo de 30% em relação ao ano anterior. Por que está errado?

37. **P-7:** *Ah, eu apaguei a conta, mas não dava 30%.* **[P-2, quando questionada, respondeu a mesma coisa.]**

38. **Pesquisador/Participante:** E você, P-8, fez a operação?

39. **P-8:** *Sim!*

40. **Pesquisador/Participante:** E quanto deu?

41. **P-8:** *Então, é 120, né, dá 1,2. Eu peguei o 60 e dividi por 50. [A participante calculou a razão entre 60 e 50 obtendo 1,2. Este número, ao ser multiplicado por 100, resulta em 120, indicando ter havido um acréscimo de 20% em relação ao total (100%).]*

No entanto, a participante, quando questionada, não soube responder porque fez deste modo, apenas que a afirmação estava errada. O Pesquisador/Participante ressaltou denotar em momento posterior a justificativa, mas que todas as participantes haviam acertado.]

[Acerca do item d) todos concordaram ser possível verificar que a alternativa está incorreta a partir da leitura do gráfico. Neste momento, o Pesquisador/Participante realizou a seguinte pergunta.]

42. **Pesquisador/Participante:** Resolver este item parece ser relativamente fácil. Entretanto, não podemos esquecer que estamos fazendo um estudo contínuo acerca do tratamento da informação, realizando a coleta e a construção de tabelas e gráficos, sendo que começamos inicialmente com gráficos de barras e colunas e depois de linha, onde nesse verifica-se o crescimento e decrescimento de uma variável. Eu não sei se dá pra responder isso agora, mas supondo que vocês tivessem que resolver um problema desse no vestibular sem a participação em nosso Grupo de Estudo, vocês conseguiriam fazer com sucesso? **[P-8 e P-2 disseram que conseguiriam fazer, embora P-2 complementou que tentaria. P-7 afirmou não acreditar que conseguiria resolver o desafio sem a participação no Grupo de Estudo. Faz-se oportuno denotar a fala de P-2.]**

43. **P-2:** *Então, eu tentaria fazer, não sei se daria a resposta exata... Aquela parte do crescente e decrescente com certeza eu conseguiria fazer só olhando o gráfico.*

44. **P-7:** *Ah, sem a participação no Grupo de Estudo eu acho que não conseguiria resolver o problema como eu consegui fazer agora.*

45. **Pesquisador/Participante:** P-7, esta fala pra mim é algo muito importante.

46. **P-7:** *Até eu fiquei feliz quando fui fazer em casa. “Mas, não é possível!”, eu achei relativamente fácil. [A participante surpreendeu-se ao ter conseguido resolver o problema sem dificuldade.] Porque quando falava que era de vestibular eu nunca conseguia fazer.*

47. **Pesquisador/Participante:** Que bom! Até porque, o objetivo principal do nosso Grupo... – estava até conversando com uma colega outro dia – claro, estou coletando os dados da minha tese! Só que, o objetivo principal do nosso Grupo é a (re)significação dos saberes de vocês, é o que eu pretendo... Eu fico preocupado quando não dá tempo de fazer a discussão porque acontece alguma coisa... porque o objetivo é mesmo fazer com que a Matemática passe a ser considerada de uma outra maneira, que o como ensiná-la passe a ser diferente do modo tradicional e, inclusive, ampliar a compreensão dos conceitos matemáticos por vocês. E essa sua fala, P-7, é um ‘forte’ indicativo de que isso está acontecendo... Não é!? **[A participante, por meio de expressão facial, indicou concordar.]** Mesmos vocês, P-2 e P-8, que afirmaram conseguir fazer o problema sem ter participado do Grupo de Estudo, eu fico feliz por isso, porque é um sinal que a Educação Básica de vocês contribuiu para isso. Mas, ainda assim, a participação no Grupo de Estudo está colaborando para a (re)significação de vocês?

48. **P-8:** *Sim! Estou vendo um outro modo de fazer também.!*

49. **P-2:** *Então, o que eu acho legal, igual eu disse antes, eu tentaria fazer... mas eu ia ficar mais voltada, por exemplo, quando eu lesse média eu ia tentar lembrar a fórmula... Aí*

eu vi que dessa vez não, eu fui item por item, lendo e anotando e acompanhando pra ver sim ou não...

50. **Pesquisador/Participante:** E perceba que sua fala já indica que você não precisou decorar a fórmula porque houve a compreensão do que é uma Média Aritmética. E, pessoal, no Ensino Fundamental – anos finais – e Ensino Médio a fórmula acaba ganhando um ‘peso’ tão grande que o aluno acaba não conseguindo pensar os conceitos matemáticos...

51. **P-2:** *Exatamente isso!* [Resposta compartilhada pelas demais participantes.] O aluno ao ler ali a média ele trava porque daí ele não sabe fazer. [A participante referiu-se ao aluno que, por haver apenas decorado a fórmula à obtenção da Média Aritmética, ao se deparar com um problema na qual tal conceito é abordado, caso o aluno não se recorde da expressão acarretará na não solução do referido problema.]

52. **Pesquisador/Participante:** Daí o aluno vai tentar fazer o problema por tentativa e erro, no caso de possuir itens de possíveis respostas. Mas no caso do desafio 1, por exemplo, percebam que duas alternativas envolve média, então se ele não souber o que é fica difícil.

53. **P-7:** *Esse era um dos motivos que eu pulava as questões, porque eu não sei a fórmula, então pula.* [A participante compartilhou uma atitude adotada por ela ao não se lembrar da fórmula para resolver um determinado problema.]

54. **Pesquisador/Participante:** Então, P-7, como você disse anteriormente que está com dificuldades na fórmula, expressão. Vamos, a partir deste desafio, pensar sobre a expressão. O valor de 90 é x_1 , o valor de 91 é x_2 , o de 92 é x_3 , o de 93 é x_4 , até o de 98 que é x_9 . Eu apenas escrevi em notação matemática o seguinte: para obter a Média Aritmética eu preciso somar os elementos do conjunto e estes elementos variam, neste caso, de 1 até 9. Esse ‘i’ indica o índice do elemento, ou seja, ‘quem’ ele é... se é o primeiro, ou o segundo, ou o terceiro deste conjunto total. [Enquanto explicava, o Pesquisador/Participante apontou para a expressão projetada na tela.]

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Este ‘n’ daqui [Referiu-se ao colocado acima da somatória.] é o mesmo ‘n’ daqui [Referiu-se ao colocado no denominador.] Este ‘n’ representa o total de elementos do conjunto, ou seja, o valor de 90, de 91, de 92, de 93, de 94 até 98. Então o meu elemento variou deste primeiro (90) até este último (98). Percebam que deste lado do sinal de igual eu mostro os elementos que foram somados e o total foi dividido pelo total de elementos pesquisados... Tudo bem? Está ‘melhorando’ esta notação, P-7?

55. **P-7:** *Sim!*

56. **Pesquisador/Participante:** Eu sei, P-7, que não vai ser de um dia pro outro que você vai passar a compreender a notação matemática, pois isso demanda um ‘tempo’ de construção pra você se desprender do “pensamento concreto”, digamos assim, ficando apenas ao nível hipotético. No entanto, acredito que com nossas discussões futuramente, haverá este desprendimento... Então os x_i mostram os valores coletados a cada ano... Tudo bem?

57. **P-7:** *Sim!*

58. **Pesquisador/Participante:** E depois tem aquela expressão referente ao cálculo da Média Aritmética a partir da Tabela. Como na Tabela você tem a frequência, então muda um pouco a fórmula, a expressão. **[O Pesquisador/Participante utilizou outro exemplo para explicar o significado de x_i , inclusive porque P-8 indicou sempre ter confundido tais notações durante a Educação Básica, deste modo afirmou nunca ficar se preocupando em decorá-las, tentando compreender o modo de fazer.]** Vamos supor que 50 alunos ganhem 50 reais. **[O Pesquisador/Participante anotou o seguinte esquema na lousa.]**

Valor (R\$)	Frequência (Alunos)
50,00	50
70,00	10
...	...
TOTAL	110

O valor foi 50 reais e a frequência são os 50 alunos que ganham 50 reais. Percebiam que eu não preciso somar 50 reais 50 vezes, basta eu multiplicar o 50 reais, que é meu x_1 , pela frequência f_1 que são 50. Para não ficar escrevendo ‘alucinadamente’ 50 reais adicionando 50 vezes eu apenas escrevi que a classe dos 50 reais é multiplicado por 50 que é a sua frequência. **[O Pesquisador/Participante anotou na lousa o seguinte.]**

$$x_1 \cdot f_1 = 50 \times 50$$

Tudo bem pessoal desta notação? **[Ninguém se pronunciou indicando estar acompanhando o exposto.]** Agora 10 alunos ganham 70 reais. **[Anotou tais valores na tabela acima.]** Ao invés de eu somar o 70 que é a classe x_2 10 vezes eu faço a multiplicação $x_2 \cdot f_2$, ou seja, do meu elemento x_2 que apareceu 10 vezes. E eu vou fazendo isso de modo parecido com os outros valores. Só que eu vou dividir isto aqui **[Referiu-se a seguinte expressão indicando o total da soma de $x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n$, denotada abaixo.]** pelo n , ou seja, pelo total de valores que eu coletei aqui. **[Apontou para a tabela registrada na lousa.]** Só que para saber isso eu tenho que ir no final da minha tabela e somar todas as frequências, inclusive já fizemos em Grupos de Estudo anteriores.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{n}$$

Suponhamos que tenha dado 110. **[Registrou tal valor na tabela acima.]** Então foi esse a quantidade de valores ‘ n ’ coletada e denotada na tabela. Você acha, P-7, que começou a melhorar a compreensão?

59. **P-7:** *Sim! Bem melhor!*

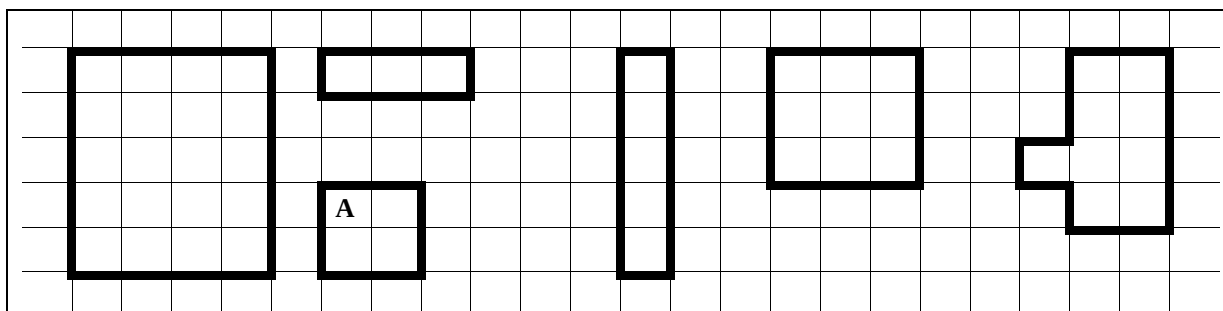
60. **Pesquisador/Participante:** Mas lembrando, pessoal, antes de compreender a expressão que é necessária você deve compreender o conceito! A fórmula, a expressão matemática, por representar um pensamento formalizado e digamos, ‘sintetizado’, demanda certo tempo para sua compreensão. Ela representa algo generalizado que podemos até dizer que se ‘desprende’ do concreto... Vocês concordam comigo?

61. **P-8:** *Sim, realmente! Porque uma letra representa um número!*

62. **Pesquisador/Participante:** Não é! Eu estou ‘substituindo’ a Aritmética pela Álgebra, fazendo uso da letra que pode representar algo que varia, uma variável. O x_1 , o x_2 representa uma variável, ou seja, valores que variam.

63. **P-8:** *No Fundamental é explicado este tipo de coisa?*

64. **Pesquisador/Participante:** No Ensino Fundamental, segundo ciclo, os professores de 7.^a e 8.^a série deveriam introduzir o pensamento algébrico, que como estamos discutindo representa um desprendimento do mundo ‘real’/concreto. Só que por vários motivos temos observado que a introdução neste tipo de pensamento acaba ficando apenas na memorização de técnicas em detrimento da compreensão dos conceitos. Inclusive, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, digamos mais lá pra 3.^a e 4.^a séries, podemos dar atividades que permitam com o que o aluno gradativamente vá compreendendo este processo de generalização a partir de alguns resultados obtidos em cálculos envolvendo o estudo de algum conceito. Como assim? Na 4.^a série é esperado que o aluno calcule o perímetro de algumas figuras, por meio de malha quadriculada. **[Neste momento o Pesquisador/Participante registrou o seguinte esquema na lousa.]**



Vamos supor que o professor está trabalhando com o conceito de superfície e também com o de área. Por meio da malha quadriculada é possível calcular, por exemplo, o perímetro do quadrado (A) pedindo pro aluno contar quantos centímetros tem o contorno desta figura que é constituída por 4 quadrados que possui 1 cm de lado. A partir de vários problemas análogos o estudante pode chegar a compreender (generalizar) que o cálculo do perímetro de um quadrado é sempre a multiplicação de um dos seus lados por 4.

65. **P-8:** *Sabe o que a professora fez? [Referiu-se à aula de uma professora na qual está realizando estágio.]*

66. **Pesquisador/Participante:** Não, o que foi?

67. **P-8:** *Ela pediu pros alunos trazerem barbante, ela mediu quanto valia o barbante com uma régua, daí eles mediram a sala. Eles foram medindo com aquele barbante, cada um ia colocando... [A participante indicou que os alunos, da referida professora do estágio, realizaram a medição do perímetro da sala de aula por meio da justaposição dos barbantes que cada estudante possuía.]*

68. **Pesquisador/Participante:** Muito interessante, P-8. Como eu falei, a partir de várias atividades como essa, o aluno, mediado pelo professor, pode chegar a descobrir a regra para o cálculo do perímetro. O estudante vai te falar assim, todo entusiasmado porque eles adoram

descobrir os ‘segredos’ dos desafios: “Olha professor, eu descobri que eu não preciso ficar contando, eu vejo quanto mede este lado aqui **[Referiu-se ao lado do quadrado A denotado acima.]** e já multiplico por 4!”. Percebam, pessoal, que está sendo feito um trabalho no sentido do aluno começar a generalizar os resultados obtidos. Deu pra compreender, pessoal? Ou seja, nós também teremos que introduzir nossos alunos nisso, embora em menor profundidade... Quando formos estudar Probabilidade e Combinatória veremos que é um processo de generalização também... mas só o faremos depois. **[Visando finalizar as discussões referentes ao desafio 1. o Pesquisador/Participante projetou a solução denotada no texto entregue às participantes, realizando alguns comentários.]**

DESAFIO (1):

Torna-se válido pontuar que os ‘dados’ do problema estão representados no gráfico de Linha denotando a produção de um determinado produto agrícola no estado de São Paulo entre os anos de 1990 a 1998. O problema solicita a escolha do item que apresenta a afirmação verdadeira a partir da interpretação do referido gráfico. Para tanto, faz-se necessário excluir os itens que apresentam as afirmações falsas. Observe as justificativas dos itens falsos e da afirmação verdadeira.

a) É falso, pois de 1993 a 1995 a produção foi decrescente.

b) É falso, pois a Média Aritmética foi de 50 mil toneladas. Observe o cálculo realizado:

$$\bar{x} = \frac{20 + 40 + 50 + 60 + 40 + 60 + 60 + 70 + 50}{9} = \frac{450}{9} = 50 \text{ mil toneladas}$$

c) É falso, pois conforme o gráfico a produção de 1993 (60000 t.) apresenta um aumento de 10 mil toneladas com relação à produção de 1992 (50000 t.). Assim, houve um acréscimo de 1/5, ou seja, de 20%.

d) É falso, pois de 1996 a 1997 a produção foi crescente.

e) É verdadeiro, conforme o item b).

[Dando continuidade, foi abordado o 2.º desafio. O Pesquisador/Participante fez a leitura do mesmo, projetando-o na tela. Observe-o abaixo.]

2.(UFRN) Uma prova foi aplicada em duas turmas distintas. Na primeira, com 30 alunos, a média aritmética das notas foi de 6,40. Na segunda, com 50 alunos, foi 5,20. A média aritmética das notas dos 80 alunos foi:

a) 5,65

b) 5,70

c) 5,75

d) 5,80

[Ao questionar P-7 sobre a solução encontrada obteve-se o seguinte.]

69. **P-7:** *Eu coloquei a letra d) 5,80.*

70. **Pesquisador/Participante:** E a sua, P-2?

71. **P-2:** *Eu coloquei a letra a) e a d). Eu fiquei em dúvida.*

72. **Pesquisador/Participante:** Você marcou 5,65 e 5,80.

73. **P-2:** *Sim, porque são duas formas de resolver.*

74. **Pesquisador/Participante:** E você, P-8?

75. **P-8:** *Eu achei exatos 5,65.*

76. **Pesquisador/Participante:** Ok! Como você fez, explique pra gente, por favor.

77. **P-8:** *Ai, deve estar errado!*

78. **Pesquisador/Participante:** Não, não, não! Não é isso não!

79. **P-8:** Olha, foi como eu falei pra você, eu gosto de escrever. Eu coloquei 30 alunos a média deu 6,40. E 50 alunos deu 5,20. E 80 alunos é a média que eu não sei.

80. **Pesquisador/Participante:** Isso!

81. **P-8:** Então, né... se a gente fosse fazer a Média Aritmética em cima ficaria a incógnita dividido por 30 e que seria igual a 6,40. O segundo fica igual e o último fica a incógnita dividido por 80. Daí o que eu pensei foi... **[Como a participante não estava conseguindo expressar o procedimento matemático realizado, o Pesquisador/Participante interveio, anotando na lousa os cálculos indicados por ela.]**

82. **Pesquisador/Participante:** Então você fez assim, veja se é o que eu compreendi. Você pegou o 6,40 e colocou como sendo igual a incógnita 'x' dividido por 30.

$6,40 = \frac{x}{30}$ $x = 6,40 \times 30 = 192$ 1.º 'Momento'	$5,20 = \frac{x}{50}$ $x = 5,20 \times 50 = 260$ 2.º 'Momento'	$\frac{192 + 260}{80} = 5,65$ 3.º 'Momento'
---	---	--

83. **P-8:** Isso mesmo, daí eu fiz multiplicação em cruz. **[Referiu-se ao 1.º 'Momento' registrado na lousa.]** E daí deu 6.40.

84. **P-2:** 6,40? Não é 192?

85. **P-8:** Ah, é desculpa, eu falei a média. Deu 192. **[Referiu-se ao resultado da multiplicação de 6,40 por 30.]**

86. **Pesquisador/Participante:** Daí depois você colocou 5,20 igual a x dividido por 50? **[Referiu-se ao 2.º 'Momento' registrado na lousa.]**

87. **P-8:** Isso! E deu 260. **[Referiu-se ao resultado da multiplicação de 5,20 por 50.]**

88. **Pesquisador/Participante:** Ok!

89. **P-8:** Aí eu raciocinei o seguinte. Se no primeiro que tinha 30 alunos deu 6,40. No outro tinha 50 alunos e deu 5,20. E no outro 80, tá!? Então, eu peguei, de 50 pra 80 dá uma diferença de 30 alunos.

90. **Pesquisador/Participante:** Então você pegou 80 – 50 e deu a diferença de 30 alunos.

91. **P-8:** Isso! Aí eu peguei, eh... **[A participante estava olhando para a folha na qual registrou seus cálculos.]** Pera aí!

92. **P-2:** Você não somou 192 com o 260?

93. **P-8:** Isso!

94. **Pesquisador/Participante:** Então você somou 192 com 260 e... **[Referiu-se ao 3.º 'Momento'.]**

95. **P-8:** *Dividi por 80.*
96. **Pesquisador/Participante:** Que era o total de alunos das duas turmas!
97. **P-8:** *Isso!*
98. **Pesquisador/Participante:** E deu?
99. **P-8:** *5,65.*
100. **Pesquisador/Participante:** Ok! É o valor correto.
101. **P-8:** *Eu peguei o que deu no primeiro e somei com o que deu no segundo...*
102. **Pesquisador/Participante:** Você percebeu que usou o conceito de média, né! Você pegou o total da soma e dividiu pelo total de alunos das duas turmas.
103. **P-8:** *Isso!*
104. **Pesquisador/Participante:** P-7, como você fez?
105. **P-7:** *Eu somei 6,40 somei 5,20 e dividi por 2. [O Pesquisador/Participante anotou na lousa a operação indicada pela participante.]*

$$\frac{6,40 + 5,20}{2} = \frac{11,60}{2} = 5,8$$

Eu até fiquei na dúvida, mas foi o jeito que eu pensei pra obter a resposta.

106. **Pesquisador/Participante:** Você tirou a média dos números...
107. **P-7:** *É!*
108. **Pesquisador/Participante:** Você obteve uma média, mas foi a média das médias colocadas no enunciado. Você não obteve a média das notas da prova aplicada nas duas turmas referente aos 80 alunos. Dá pra perceber o que eu falei?
109. **P-7:** *Sim!*
110. **Pesquisador/Participante:** De modo proposital o vestibular acaba colocando uma alternativa com tal resposta, pois muitos alunos cometem tal engano. Os estudantes não se atentaram que o problema pede a Média Aritmética das notas tiradas pelos 80 alunos... E dá, sim, pra confundir o aluno, né pessoal!? **[As participantes concordaram com o Pesquisador/Participante.]** Lembra que eu já comentei da necessidade da leitura atenta quando for resolver um problema, inclusive é até uma dica para nós mesmos quando formos aplicar um problema com nossos alunos... P-2 você havia pensado deste jeito?
111. **P-2:** *Então, na verdade foi esse o meu problema. Porque eu fiz assim, primeiro, [Referiu-se à solução realizada por P-7.] aí a hora que eu vi tinha resposta. Mas daí eu fiquei pensando, “Tá, mas não entrou as frequências...”, porque teria a frequência dos 30*

alunos que deu a média de 6,4 e de 50 alunos que deu 5,20. Daí eu tentei fazer do outro jeito, pegar a média e multiplicar pela frequência, somar e dividir por 80. E daí você descobre que a outra resposta também tem. Aí eu fiquei na dúvida!

112. Pesquisador/Participante: O problema aí é a interpretação do enunciado. “A média aritmética das notas dos 80 alunos foi:” **[O Pesquisador/Participante realizou novamente a leitura do enunciado do desafio.]** P-7 você compreendeu como a P-8 fez?

113. P-7: Sim!

114. Pesquisador/Participante: Percebam que é impossível descobrir a nota de cada um dos alunos, mas a somatória das notas é. Que foi isso daqui, né... **[Apontou para os valores 192 e 260 escritos na lousa.]** O total das notas dos 30 alunos foi 192, eu não quero saber quem tirou mais ou quem tirou menos... não é que eu não quero, não dá pra saber. E o total da outra turma foi 260. Tendo os dois totais eu os somo porque este total é referente às notas tiradas pelos 80 alunos. Com este total, pra saber a Média Aritmética basta eu pegar este total (192+260) e dividir por 80 que é o número de alunos. **[Enquanto falava P-7 foi anotando em sua folha corrigindo a sua solução.]** Pessoal, eu fiz uma representação matemática da solução...

115. P-8: Ai socorro!

116. Pesquisador/Participante: Calma, fique tranquila!

117. P-8: Ai, isso aí é construção que eu não tive. Eu gosto de achar, de descobrir, de fazer... se você me der eu faço a tarde inteira, mas colocar nisso aí... Ai meu Deus do céu! Eu tenho dificuldade! **[A participante referiu-se ao fato de gostar de resolver problemas matemáticos, no entanto, não gosta de representar os procedimentos e conceitos em linguagem matemática formal.]**

118. Pesquisador/Participante: Eu entendo, compreendo... Mas vamos tentar compreender. **[Neste momento o Pesquisador/Participante projetou as seguintes representações na lousa, falando conjuntamente.]**

<u>1.^a TURMA</u>	<u>2.^a TURMA</u>
$\bar{x}_{1^{a}TURMA} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$	$\bar{x}_{2^{a}TURMA} = \frac{\sum_{j=1}^{50} x_j}{50}$
$6,40 = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$	$5,20 = \frac{\sum_{j=1}^{50} x_j}{50}$
$\sum_{i=1}^{30} x_i = 6,40 \times 30 = 192$	$\sum_{j=1}^{50} x_j = 5,20 \times 50 = 260$

Na primeira turma eu representei que a média é igual a somatória dividida por 30 alunos. Daí é só fazer a multiplicação em cruz e obtemos o 192.

119. P-8: Eu fiz tudo, oh, só não coloquei deste jeito.

120. Pesquisador/Participante: Sim, realmente você fez, apenas não representou em linguagem ‘formalizada’. Tudo bem esta representação aqui, pessoal? **[Apontou para o esquema projetado referente à 1.^a Turma.]** Eu até chamo de x_i a primeira prova corrigida até a de número 30. A 2.^a Turma, só pra diferenciar, eu chamei de x_j , mas não importa se for i , j , p , k ..., pra dizer que agora eu tenho os alunos da 2.^a Turma, que foi da primeira prova até a 50. Certo!? É o mesmo procedimento: $5,4 \times 50$ que deu 260. E eu fiz a representação matemática do todo... **[Após tal fala P-2 e P-7 deram risada, indicando esperar alguma ‘surpresa’. O Pesquisador/Participante projetou, em seguida, a representação abaixo.]**

$$\begin{aligned}\bar{X}_{(1^a+2^aTURMA)} &= \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i + \sum_{j=1}^{50} x_j}{(30 + 50)} \\ \bar{X}_{(1^a+2^aTURMA)} &= \frac{(6,40 \times 30) + (5,20 \times 50)}{(30 + 50)} \\ \bar{X}_{(1^a+2^aTURMA)} &= \frac{192 + 260}{80} = \frac{452}{80} = 5,65\end{aligned}$$

Lembrando que estamos utilizando como notação de Média Aritmética o traço em cima do x . Eu quero a média da 1.^a + 2.^a Turma, então é a somatória do x_i do 1 até o 30 mais a somatória do x_j do 1 até o 50 e tudo isso eu divido por $30 + 50$ que são os valores dos ‘ n ’. Tudo bem, pessoal? A somatória do x_i é apenas este valor aqui, oh, 192, mais o valor da somatória do x_j que é 260. Daí eu tenho 452 dividido por 80 que me resulta em 5,65. Eu apenas representei em linguagem matemática...

121. P-2: *Ainda bem que a P-4 não está aqui!*

122. Pesquisador/Participante: E daí, pessoal, o que vocês acham desta representação?

123. P-8: *Assim ficou fácil!*

124. Pesquisador/Participante: Não fica difícil fazendo assim?

125. P-8: *Não!* **[Resposta compartilhada por P-2 e P-7.]**

126. Pesquisador/Participante: Vamos ao 3.^o desafio. **[O Pesquisador/Participante realizou a leitura do enunciado, projetando-o na tela. Observe-o abaixo.]**

3. (UFAL) Considere 8 números cuja média aritmética é 4,5. Retirando-se um desses números, a média aritmética dos restantes é 4,2. O número retirado é				
a) 0,3	b) 3,3	c) 5,4	d) 6,6	e) 8

[Quando questionadas, todas responderam a alternativa d) como a resposta encontrada. Após afirmar que a resposta estava correta, o Pesquisador/Participante perguntou para P-7 se achava ser este desafio mais fácil que o anterior. A resposta dada pela participante apresenta-se a seguir.]

127. P-7: *Não sei mais fácil!*

128. Pesquisador/Participante: Então vamos lá, P-7, explique pra gente como você fez!

129. **P-7:** *Então, o exercício fala que tem 8 números, então eu representei por 8 letras: A, B, C... até H. E tudo isso eu dividi por 8. E daí daria 4,5. [Visando auxiliá-la, o Pesquisador/Participante foi à lousa e representou o exposto pela participante.]*

$$\frac{A+B+C+D+E+F+G+H}{8} = 4,5$$

$$\frac{A+B+C+D+E+F+G}{7} = 4,2$$

130. **Pesquisador/Participante:** Assim, P-7? [Neste momento P-2 e P-8 disserem terem ‘feito direto’, ou seja, não tiveram a necessidade de representar do modo feito por P-7.]

131. **P-7:** *Isso! E daí eu fiz igual com o outro, só que daí eu fui até o G. E daí eu dividi por 7 e deu 4,2. [Abaixo da última expressão, o Pesquisador/Participante anotou o exposto pela participante. Observe no quadro acima.]*

132. **Pesquisador/Participante:** Assim?

133. **P-7:** *Isso! Só que daí eu não sei que conta eu fiz! [A participante, ao observar a sua folha, não conseguiu compreender o procedimento que lhe permitiu encontrar a resposta do desafio. Deste modo, o Pesquisador/Participante dirigiu-se à participante e observou o registro que a mesma fez em sua folha. Após, o Pesquisador/Participante disse-lhe que havia feito uma multiplicação em cruz. Observe a fala abaixo.]*

134. **Pesquisador/Participante:** P-7 você fez uma multiplicação em cruz e obteve a somatória dos 8 números que foi 36. Não é isso?

135. **P-7:** *É!*

136. **Pesquisador/Participante:** E depois você fez 4,2 vezes 7 que dá 29,4.

137. **P-7:** *Isso! E daí eu subtraí!*

138. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo! Você descobriu o número que retirado do primeiro dá a média do segundo.

139. **P-7:** *Isso!*

140. **Pesquisador/Participante:** E você acredita que conseguiria fazer tal desafio antes das discussões em nosso Grupo de Estudo?

141. **P-7:** *Eu acho que não!*

142. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você P-2?

143. **P-2:** *Eu fiz a mesma coisa, só que eu não fico escrevendo... eu já fui direto: 8 vezes 4,5 igual a 36; 7 vezes 4,2 igual a 29,4. Tira um com o outro e deu 6,6.*

144. **Pesquisador/Participante:** Você não teve a necessidade de representar?

145. **P-2:** Não!

146. **Pesquisador/Participante:** Você compreendeu que a primeira multiplicação te dava a somatória dos 8 números e que a segunda te dava a somatória dos 7 números. Daí você fez a diferença para ver qual número foi retirado?

147. **P-2:** Isso!

148. **Pesquisador/Participante:** Ok!

149. **P-8:** Eu não, eu já preciso escrever! [O Pesquisador/Participante observou que a participante havia resolvido o desafio da seguinte maneira, conforme exposto abaixo.]

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8} = 4,5$$

$$\frac{x}{8} = 4,5 \quad x = 34$$

$$\frac{36 - x}{7} = 4,2 \quad 36 - x = 4,2 \times 7$$

$$36 - x = 29,4$$

$$-x = 29,4 - 36$$

$$x = 6,6$$

Então, eu tenho que escrever, eu não sei fazer igual a P-2.

150. **P-2:** Mas eu acho que assim é melhor!

151. **Pesquisador/Participante:** Mas você conseguiu fazer!

152. **P-8:** Sim!

153. **Pesquisador/Participante:** Então está bom! Cada uma fez de uma maneira e todas conseguiram. De uma maneira geral vocês acharam interessante os desafios?

154. **P-8:** Sim, eu adorei os desafios.

[Dando continuidade, P-7 realizou a leitura da situação problema denotada abaixo. Tal situação visa o estudo posterior do conceito de Mediana.]

PROBLEMATIZANDO...

Dando continuidade ao estudo da Estatística, a professora de Matemática Sueli pediu a um grupo de alunos dos 9.º anos que frequentavam aulas de reforço (recuperação) que trouxessem a renda mensal de suas famílias. Os valores obtidos foram anotados na lousa pela aluna Priscila, conforme mostrado abaixo:

457, 490, 525, 554, 689, 700, 722, 5.000

Após solicitar aos alunos o cálculo da Média Aritmética da renda mensal, João foi à lousa e registrou o seguinte:

$$\bar{x} = \frac{457 + 490 + 525 + 554 + 689 + 700 + 722 + 5000}{8} = \frac{9137}{8} = 1142,125$$

A professora Sueli disse aos alunos para utilizarem como valor aproximado o número 1142 reais. Em

seguida, colocou na lousa o seguinte questionamento:

A Média Aritmética que mostra a renda mensal das famílias de vocês é um ‘bom’ valor (representativo) para indicar o **centro** da distribuição de frequências?

[Terminada a leitura, o Pesquisador/Participante pediu às participantes que pensassem acerca do seguinte questionamento.]

6. Em sua opinião, quais argumentos os alunos da professora Sueli utilizariam para justificar se a Média Aritmética obtida era (ou não) um ‘bom’ valor representativo? Pense a respeito.

[Como as participantes disseram ser possível responder ao questionamento sem a necessidade de disponibilizar alguns minutos, deu-se início à discussão. P-8 foi a primeira a expor sua resposta.]

155. **P-8:** *Porque... os valores têm baixos e alto, então a média não tem como... daí não fica nem no baixo e nem no alto, então... o que foi que você perguntou? [A participante realizou novamente a leitura referente à questão.] Daí não é um bom valor representativo, porque ele não está representando o centro da distribuição.*

156. **Pesquisador/Participante:** Mesmo sendo a média!?

157. **P-8:** *Isso!*

158. **Pesquisador/Participante:** E você, P-7?

159. **P-7:** *Eu acho que não é porque tem esse valor de 5000 que está muito a mais dos outros, e o valor da média que é 1142 sendo que recebem 500, 600... Eu acho que esse valor de 5000 que acabou interferindo...*

160. **Pesquisador/Participante:** P-2?

161. **P-2:** *Eu acho que é isso mesmo! São valores muito discrepantes, de 400 e pouco à 5000! Muito diferente, então não dá pra representar...*

162. **Pesquisador/Participante:** Embora seja a Média Aritmética que representa o ‘centro’... se a gente pega o 457 até o 722 eles estão distantes do 1142, ou seja, a média não está ‘concentrada’ próxima aos valores reais coletados! E também está distante do 5000, porque quem ganha 5000 está ‘longe’ de estar próximo de 1142 reais. Ou seja, nem sempre a média é suficiente, dá pra visualizar isso, pessoal? **[Todas responderam afirmativamente.]** Tendo em vista isso, a Estatística Descritiva, ‘dentro’ das Medidas de Posição, inserem a Mediana.

[Para a abordagem do conceito de Mediana, P-8 realizou a leitura do item 7.2.2 – denotado a seguir.]

7.2.2 Mediana

Além da Média Aritmética, a Mediana é outra **medida (quantidade)** que caracteriza o **centro** da distribuição de frequências. No entanto, seu cálculo é feito de modo diferente em relação ao da Média Aritmética já que considera a ordem dos valores que constituem o conjunto dos dados. Faz-se interessante observar a definição proposta por Costa Neto (2002) acerca da Mediana:

Definimos a mediana de um conjunto de n valores ordenados, sendo n ímpar, como igual ao valor de ordem $(n+1)/2$ desse conjunto. Se n for par, a mediana poderia ser definida como qualquer valor situado entre o de ordem $n/2$ e o de ordem $(n/2) + 1$. Por simplificação, para n par, consideraremos a mediana como o valor médio entre os valores de ordem $n/2$ e $(n/2) + 1$ do conjunto de dados. Vemos que a idéia ligada ao conceito de mediana é dividir o conjunto ordenado de valores em duas partes com igual número de elementos. (p. 22)

[Enquanto o Pesquisador/Participante fazia a leitura da situação problema referente à Mediana, P-8 disse não ter compreendido como calculá-la, pois a explicação dada por Costa Neto (2002) não foi suficiente para que a mesma compreendesse, pedindo um exemplo ‘mais prático’. O Pesquisador/Participante disponibilizou alguns minutos para que as participantes relessem a definição proposta por Costa Neto (2002). P-8, após a (re)leitura, afirmou ainda não estar entendendo; P-2 e P-7 afirmaram ‘achar’ haver compreendido. Deste modo foi solicitado à P-2 que expusesse o seu entendimento.

163. **P-2:** *Eu entendi que você vê o número de elementos dos valores lá, e a quantidade deles. No caso do conjunto são 8 [Referiu-se aos valores referentes à renda mensal familiar dos alunos dos 9.º anos.] , então seria par. Então quando é par você pegaria e dividiria por 2 e daria 4, então você achou o meio entre eles, 4 valores de um lado e 4 valores do outro. [Como a participante não deu continuidade em sua explicação, o Pesquisador/Participante interveio.]*

164. **Pesquisador/Participante:** Então você disse assim, oh... Você tem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 valores coletados. [Enquanto falava registrou na lousa o exposto abaixo.]



No caso o 8 é o n . Para ter a metade eu pego esse n e divido por 2. Você fez isso daqui, não foi? 4 deste lado [Indicou os 4 círculos desenhados à direita.] e 4 deste? [Indicou os 4 círculos desenhados à esquerda.]

165. **P-2:** Isso, foi!

166. **Pesquisador/Participante:** E para calcular a Mediana, como se faz?

167. **P-2:** *E depois desse daí [Referiu-se ao $n/2$ que no caso é o 4.º elemento.] vem o $(n/2)+1$ que seria o próximo elemento. Que no caso seria o 5.*

168. **Pesquisador/Participante:** É, seria este elemento que é o 5.º, e para calcular a Mediana precisamos deste elemento que é o 4.º. [Neste momento, as participantes mostraram-se surpresas, e P-2 ‘rapidamente’ perguntou.]

169. **P-2:** *E faz a média aí? [Referiu-se ao 4.º e 5.º elementos.]*

170. **Pesquisador/Participante:** Isso! Eu somo estes dois elementos [Apontou para os 4.º e 5.º círculos desenhados na lousa.] e divido por 2. É este valor resultante da Média Aritmética que vai me dar o valor da Mediana. Se você considerar o 4.º e 5.º elemento, daqui

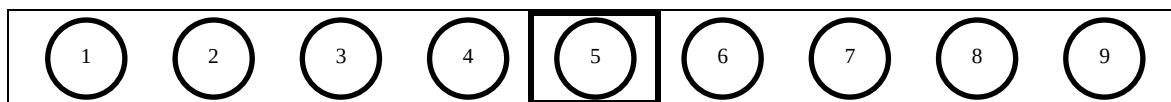
pra cá eu tenho 3 [Indicou o 1.º, 2.º e 3.º círculos.] e daqui pra cá eu tenho 3 [Indicou o 6.º, 7.º e 8.º círculos.], ou seja, eles dividem o total de valores ao meio.

171. **P-2:** *E você tem que considerar na ordem crescente?*

172. **Pesquisador/Participante:** Sim, sempre tem que estar ordenado! Se não estão ordenados não é possível calcular a Mediana.

173. **P-8:** *É porque se não tiver ordenado você pode pegar um valor muito alto ali e muito baixo ali* [Apontou para os círculos representando os elementos desenhados na lousa.]

174. **Pesquisador/Participante:** Vamos supor se eu ponho o 5000 aqui! [Apontou para o 5.º círculo.] Percebam que já vou alterar o valor e não obterei a Mediana! [As participantes demonstraram estar acompanhando o exposto sinalizando afirmativamente por meio de gesto facial.] E agora se for ímpar? Vamos supor que tenham 9, tudo bem? [O Pesquisador/Participante fez um novo registro na lousa. Observe.]



Para achar o meio, como eu faço?

175. **P-2 e P-8:** *Você soma mais 1, 10 e daí divide por 2 que dá 5.*

176. **Pesquisador/Participante:** Isso! A gente pega o 5.º [Apontou para o 5.º círculo desenhado há pouco.], esse é o valor da Mediana. É mais fácil, né. [Todas as participantes concordaram.] Daqui pra cá nós temos 4 [Referiu-se ao 1.º, 2.º, 3.º e 4.º círculos.] e daqui pra cá eu tenho também 4! [Referiu-se ao 6.º, 7.º, 8.º e 9.º círculos.] Então este valor [Apontou para o 5.º círculo.] divide exatamente ao meio o total de elemento ordenados. Melhorou P-8?

177. **P-8:** *Sim! Mas e quando é valores bem ‘grandes’?*

178. **P-2:** *Você tem que ver o número de elementos...*

179. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro. Mas no caso de 100 coletas, há a necessidade de colocá-los em ordem... Mas daí trabalhar isso na tabela pode facilitar, e veremos isso daqui há pouco. P-7, a exemplificação facilitou a compreensão da definição proposta por Costa Neto (2002)?

180. **P-7:** *Sim, ajudou bastante!*

[Visando auxiliar na sistematização do conceito de Mediana, o Pesquisador/Participante projetou uma explicação-exemplificação acerca da sua obtenção para um número de elementos ‘n’ par ou ímpar. Observe.]

MEDIANA:
Para um conjunto **PAR** de dados ordenados:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
			$\overbrace{x_4 \ x_5}$				
			$Me = \frac{x_4 + x_5}{2}$				
Para um conjunto ÍMPAR de dados ordenados:							
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
			$\underbrace{x_4}$				
			Me				

[Durante a discussão P-4 chegou e P-7 realizou o seguinte questionamento sobre a obtenção da Mediana para ‘n’ ímpar.]

181. **P-7:** Então nesse caso o valor da Mediana coincide com o x_4 ?

182. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo! Vamos supor que estes elementos fossem 0, 0, 1, 2, 2, 4 e 5. [O Pesquisador/Participante escreveu tais números na lousa dispondo-os em uma ‘linha’ horizontal.] Neste caso a Mediana seria esse aqui. [Apontou para o número 2 que ocupa a 4.^a posição.]

[P-7 anotou a discussão-explicação realizada.]

[Em conversa com P-4, como a mesma não havia feito os desafios discutidos no início do Grupo de Estudo, o Pesquisador/Participante pediu que tentasse resolvê-los para o próximo encontro. Foi disponibilizado um tempo para que a participante fizesse a leitura da situação referente ao cálculo da Média Aritmética referente às rendas mensais das famílias dos alunos dos 9.^{os} anos. Quando questionado se o valor (Média Aritmética) é um ‘bom’ valor representativo para indicar o centro da distribuição de frequências, P-4 apresentou dificuldade em responder. Observe a sua resposta.]

183. **P-4:** Ah, não sei... O que os alunos fariam?

184. **Pesquisador/Participante:** E se fosse você?

185. **P-4:** Ah, eu acho que mostra... mostra o tanto de alunos que tem aquela média, assim... Uns pra mais e outros pra menos...

186. **Pesquisador/Participante:** O valor encontrado, 1142 reais, está próximo dos valores reais que foram coletados pelos alunos? Porque nós tivemos 457, 490, 525, 554, até 722. O valor da média está no centro destes valores aqui? [Referiu-se aos valores coletados.]

187. **P-4:** É, se aproxima mais, né!?

188. **Pesquisador/Participante:** Mas ele representa os valores reais?

189. **P-4:** O centro certinho não, né!

190. **Pesquisador/Participante:** Então você consegue compreender isso?

191. **P-4:** Sim!

192. **Pesquisador/Participante:** E em relação ao 5000 acontece a mesma coisa?

193. **P-4:** Sim!

194. **Pesquisador/Participante:** Vamos supor que você não sabe os valores coletados, apenas a média. O que as pessoas pensariam sobre as rendas mensais apenas considerando o valor da média? **[Como a participante não respondeu, o Pesquisador/Participante pontuou.]** As pessoas pensariam que os valores coletados estariam entre 900 a 1400, mais ou menos?

195. **P-4:** *É! Pois assim estaria mais ou menos no centro disso!*

196. **Pesquisador/Participante:** Mas como sabemos os valores coletados podemos afirmar que não é isso, né!?

197. **P-4:** *É verdade. E tem esse valor de 5000 que atrapalha...*

198. **Pesquisador/Participante:** É, tem este valor muito elevado...

199. **P-4:** *E que dá discrepância entre os dois.*

200. **Pesquisador/Participante:** E isso faz com que a média não fique “boa”, você concorda?

201. **P-4:** *Ahã!*

202. **Pesquisador/Participante:** Então, tendo em vista isso, a Estatística ‘viu’ a necessidade de utilizar a Mediana. **[O Pesquisador/Participante pediu que P-4 realizasse a leitura do item 7.1.2. Após a leitura, houve a necessidade de intervenção, pois a participante disse não haver compreendido a definição proposta por Costa Neto (2002). Para tanto, o Pesquisador/Participante utilizou o explicação-exemplificação – denotada anteriormente – estabelecendo comparação com o problema das rendas mensais. Mediante tal auxílio, P-4 salientou estar compreendendo como obter a Mediana, e que a discussão com o Pesquisador/Participante foi importante.]**

[Dando continuidade, foi solicitado às participantes que pensassem sobre os seguintes problemas referentes à Mediana.]

1. Utilizando a definição exposta por Costa Neto (2002) calcule a Mediana da renda mensal familiar dos alunos da professora Sueli. Em seguida, compare tal valor com o da Média Aritmética, verificando qual deles melhor representa o **centro** da distribuição de frequências.

2. É possível calcular a Mediana utilizando apenas as tabelas denotadas nos problemas 2 e 3 do item anterior (7.2.1 Média Aritmética)? Em caso afirmativo, calcule. Em caso negativo, justifique. Pense a respeito em grupo.

3. Em qual situação a Mediana é a mais indicada para caracterizar o **centro** da distribuição de frequências? Pense a respeito a partir das discussões realizadas.

[Enquanto as participantes tentavam resolver os problemas, P-2, utilizando os esquemas desenhados na lousa referentes aos círculos representando um conjunto de elementos ordenados par e ímpar, explicou para P-4 como fazer para calcular a Mediana nos dois casos. Tal fato indica que P-4, embora tivesse afirmado ao Pesquisador/Participante ter compreendido o procedimento à obtenção da Mediana, ainda possuía dúvidas. Durante a discussão entre P-2 e P-4 observou-se que P-4 estava confundido o valor da Mediana com a posição ocupada pelo dado ordenado, ou seja, acreditava ser 5 o valor da Mediana que foi obtido por meio da expressão $(n+1)/2$, no caso de um conjunto ímpar formado por 9 elementos. Deste modo, P-2 ‘chamou’ a sua

atenção ressaltando que a Mediana era o valor ocupado pelo 5.º elemento que foi ordenado, e não o número 5. Após tal auxílio, deu-se início ao compartilhamento das respostas encontradas pelas participantes. P-4 foi a primeira a ressaltar como resolveu o 1.º problema, observe abaixo.]

203. **P-4:** São 8 elementos!

204. **Pesquisador/Participante:** Ok! São 8 rendas mensais!

205. **P-4:** Então eu peguei o 8 e dividi por 2 que deu 4.

206. **Pesquisador/Participante:** Certo!

207. **P-4:** Daí eu fui lá e é o 554, que é o 4.º elemento. Daí você pega o próximo, que é o 689. Então eu peguei esses dois, somei e dividi por 2. E deu 621.

208. **Pesquisador/Participante:** Deu 621 vírgula...

209. **P-2:** Cinco!

210. **Pesquisador/Participante:** Ok!

211. **P-4:** Então, como eu fiz na mão... [Risos entre todos quando a participante indicou não ter obtido o valor exato 621,5, pois, como não utilizou a calculadora encontrou um valor aproximado.]

212. **P-2:** Porque não tem meio dedo! [Risos entre todos quando P-2 disse isso à P-4.]

213. **Pesquisador/Participante:** Todo mundo fez assim o primeiro problema? [As demais participantes responderam afirmativamente.] A Média Aritmética era 1142 e a Mediana deu 621, arredondados. Qual é a melhor pra representar a maioria das rendas mensais coletadas? [Todas responderam ‘rapidamente’ ser a Mediana. Em seguida deu-se início à discussão do 2.º problema. Para auxílio, o Pesquisador/Participante projetou as tabelas denotadas no Grupo de Estudo. Observe-as.]

Tabela – Distribuição da Frequência dos Intervalos referentes à altura dos alunos do 8.º ano C

Altura (cm) – Intervalos	Frequência
[130, 135[	7
[135, 140[	1
[140, 145[	4
[145, 150[	4
[150, 155[	7
[155, 160[	2
[160, 165[	3
[165, 170[	0
[170, 175[	1
[175, 180[	1
TOTAL	30

1.º ‘Momento’

N.º (Irmãos)	Frequência
0	4
1	4
2	6
3	5
4	1
TOTAL	20

2.º ‘Momento’

[Como o Pesquisador/Participante havia observado o modo como as participantes fizeram para calcular a Mediana a partir das tabelas, intencionalmente expôs o seguinte.]

214. **Pesquisador/Participante:** *Pessoal, quantos alunos foram medidos? [Referiu-se ao 1.º ‘Momento’.]*

215. **P-2:** *30! [As demais participantes compartilharam tal resposta.]*

216. **Pesquisador/Participante:** *Então eu vou ter que achar a metade do 30!*

217. **P-2:** *Vixe!*

218. **P-8:** *Está tudo errado o que nós fizemos! [Todas as participantes riram neste momento.]*

219. **Pesquisador/Participante:** *Então me expliquem, como vocês fizeram? Fale P-2! [Antes de responder, P-2 disse para P-8 que havia falado sobre as 30 alturas, mas que P-8 falou ser necessário observar as classes de intervalos.]*

220. **P-2:** *Nós pegamos os intervalos. Não tem 10 intervalos!? [A participante respondeu rindo.]*

221. **P-8:** *A gente pegou o intervalo 5 e 6. [Tal fato indica que as participantes encontraram os intervalos que dividem o total de classes de intervalo ao meio, ou seja, o 5.º e o 6.º. Para tanto utilizaram o procedimento para a obtenção de Mediana quando há um conjunto par de dados ordenados. Deste modo, as participantes calcularam a Média Aritmética dos pontos médios das referidas classes, obtendo o valor 155.]*

222. **P-2:** *Daí a gente fez a média...! [Risos entre todas as participantes.]*

223. **Pesquisador/Participante:** *Olha, vamos retomar a definição de Mediana.*

224. **P-7:** *Bem que eu percebi que estava errado!*

225. **P-2:** *Mas a discussão foi boa!*

226. **Pesquisador/Participante:** *Pessoal, mas isso acontece! É sinal que vocês agiram sobre o problema, tentaram fazer.*

227. **P-2:** *E ainda nós discutimos... “Olha, deu 155!” Mas como está grande a diferença em comparação à média! Por que será, né!?*

228. **P-8:** *Então tá errado!?*

229. **P-2:** *Sim, né! Então eu entendi. 30 é par!*

230. **P-8:** *Tá!*

231. **P-2:** *Então na sequência... Eu não entendi!*

232. **Pesquisador/Participante:** Olha, pessoal, a Mediana representa o centro dos valores ordenados. No caso que são 30, então nós pegamos o elemento que se encontra na metade, o 15.º e o seguinte que é o 16.º. Daí tiramos a média destes dois valores que ocupam tais posições.

233. **P-2:** *Ah, P-4, tem que somar 7+1+...* [Referiu-se às frequências das classes de intervalos a partir da 1.ª classe de intervalo.]

234. **Pesquisador/Participante:** Então vocês terão que localizar onde está o 15.º e o 16.º elementos. [O Pesquisador/Participantes pensou em disponibilizar alguns minutos para que as participantes refizessem o problema, no entanto, P-2 salientou o seguinte no intuito de auxiliar às demais e a si mesma para a solução do problema.]

235. **P-2:** *Olha, os dados já estão ordenados na tabela!* [Apontou para a projeção com o dedo indicador esquerdo.] *Tem 7 elementos na classe 130-135...*

236. **P-8:** *Ah, tá, ordenados por lá!* [Referiu-se à coluna das frequências.]

237. **P-2:** *Ah tá! Então lá 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16.* [A participante realizou a soma das 4 primeiras frequências que eram 7, 1, 4 e 4.] *Ah, então está no intervalo 145-150. Então esta é a classe mediana.*

238. **P-8:** *Era o que você tinha feito, P-7?*

239. **P-7:** *Não!*

240. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, todo mundo compreendeu que na classe 145-150 se encontram o 15.º e 16.º elementos? [Todas as participantes responderam afirmativamente.] Então é esta classe. [Apontou para o intervalo [145, 150[.] Só que esta classe, por ser um intervalo, dá pra saber qual elemento é só pela tabela?

241. **P-2:** *Não!*

242. **Pesquisador/Participante:** Só pela tabela não dá pra gente saber quais valores ocupam a posição 15.º e 16.º. Assim, o que nós fizemos para resolver quando estamos em classes de intervalos? Tivemos que achar o quê? [P-2 e P-7 responderam ser o ponto médio.] Então quer dizer que o 15.º e o 16.º elementos possuem o valor do ponto médio, que no caso foi 147,5. Conseguiram acompanhar o raciocínio? [Todas as participantes responderam afirmativamente.] Se eu somar os dois e dividir por dois vai dar o próprio 147,5; que no caso é a Mediana. Qual foi a Média Aritmética deste problema?

243. **P-2:** 148,17.

244. **Pesquisador/Participante:** Percebam que está bem próximo!

245. **P-8:** *Espera aí que eu preciso pensar!*

246. **Pesquisador/Participante:** Ok! Vamos lá!

247. **Pesquisador/Participante:** *Deixa eu pensar! Eu vou pegar os valores dos pontos médios, somar e... ah tá, dá 147,5? Só isso?*

248. **Pesquisador/Participante:** Sim! Tudo bem, P-4?

249. **P-4:** *Não, tudo bem!*

250. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, existe uma expressão que permite o cálculo da Mediana em uma tabela de frequência com mais ‘precisão’. Mas acredito não ser necessário realizar tal abordagem. **[O Pesquisador/Participante apresentou às participantes tal expressão, denotada abaixo.]**

$$Me = L_i + \frac{(n/2) - F_a}{f_{md}} h_{md}, \text{ onde}$$

L_i = limite inferior da classe que contém a Mediana;

n = número de elementos do conjunto de dados coletados/observados;

F_a = soma das frequências das classes anteriores à que contém a Mediana;

f_{md} = frequência da classe que contém a Mediana; e

h_{md} = amplitude da classe que contém a Mediana.

[Enquanto corrigiam o valor da Mediana referente à tabela das alturas dos alunos – 1.º ‘Momento’ – P-7 chamou a atenção ao fato de que, mesmo confundindo o modo para calcular a Mediana, haviam acertado na tabela referente o número de irmãos – 2.º ‘Momento’. P-8 disse que se todos os professores tivessem a postura do Pesquisador/Participante ao incentivá-las a corrigirem o erro e não as culpando, o ensino de Matemática e sua aprendizagem seriam diferentes e ‘bem’ melhores.]

[Para a discussão do cálculo da Mediana por meio da 2.ª tabela, o Pesquisador/Participante escreveu na lousa os valores ordenados referentes aos números de irmãos coletados pelos alunos do 6.º ano B.]

0,	0,	0,	0,	1,	1,	1,	1,	2,	2,	2,	2,	2,	2,	3,	3,	3,	3,	3,	4
										$\bar{x} = \frac{2+2}{2} = 2$									

[O Pesquisador/Participante pediu que P-7 explicasse como resolveu o problema referente ao cálculo da Mediana a partir da tabela contendo o número de irmãos após a correção.]

251. **P-7:** *Nós fomos na frequência e vimos que o número de irmãos era 20. Daí dividimos por 2 e daí deu 10. Esse 10 estaria dentro do 6. [Referiu-se à frequência apresentada na 2.ª coluna.] E daria seria 2 irmãos a Mediana. [A participante omitiu que havia considerado o 10.º e 11.º elemento e que havia tirado a Média Aritmética entre os valores que ocupavam tais posições, que no caso era 2 (irmãos). É possível afirmar isso pois foi acompanhado o desenvolvimento da solução realizado pelas participantes.]*

252. **Pesquisador/Participante:** Todo mundo pensou assim? [As demais participantes responderam afirmativamente.] Eu escrevi de novo os valores coletados. [Apontou para o último registro feito na lousa.] Então nós temos 4 alunos que não tem irmão, 4 alunos que possuem 1 irmão, 6 alunos que têm 2 irmãos, 5 alunos que possuem 3 irmãos e apenas 1 aluno com 4 irmãos. Eu coloquei os valores ordenados. Para o cálculo da Mediana temos que localizar o 10.º e 11.º elementos. A média destes dois [Apontou para os números ‘2’ que

ocupam a 10.^a e 11.^a posição.] vai me resultar em 2. [Anotou na lousa abaixo do registro denotado acima.]. E neste caso a Média Aritmética foi quanto?

253. **P-2:** 1,75.

254. **Pesquisador/Participante:** A Mediana, neste caso, coincidiu com um dos valores coletados. Lembra que nós até havíamos ficado na discussão sobre o valor da média aritmética e de não haver 1,75 irmãos.

255. **P-8:** Ah, é, é verdade!

256. **Pesquisador/Participante:** E estes valores são bem próximos! Tudo bem a questão dos cálculos? [Como ninguém se pronunciou salientando dúvidas, deu-se prosseguimento à discussão do 3.º problema. O Pesquisador/Participante realizou a leitura de tal problema] Em qual situação a Mediana é a mais indicada para caracterizar o *centro* da distribuição de frequências? Pense a respeito a partir das discussões realizadas. Quando a Mediana é melhor?

257. **P-8:** Quando tem valores muito distintos.

258. **Pesquisador/Participante:** É quando um valor é muito diferente do outro?

259. **P-8:** Isso! [Resposta compartilhada pelas demais participantes.]

260. **Pesquisador/Participante:** Vocês pensarem isso a partir do exemplo das rendas mensais? [Todas as participantes responderam afirmativamente.] Vocês perceberam que em relação às alturas dos alunos a Mediana e a Média Aritmética foram muito parecidas! Por que isso aconteceu?

261. **P-2:** Porque são contínuas!

262. **Pesquisador/Participante:** Se for em relação ao tipo de grandeza, não! Em que sentido você falou ‘contínuas’?

263. **P-2:** No sentido assim, que... contínuas... porque vai... “Como eu posso explicar isso?”

264. **P-7:** É porque não salta de um valor pro outro!

265. **Pesquisador/Participante:** Você quis dizer isso, P-2?

266. **P-2:** Sim!

267. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo! Não temos um valor 0,5 cm e depois 500 cm. Vai aumentando pouco a pouco... Não há grandes ‘saltos’. Agora, se você medisse uma formiga e uma pessoa adulta de estatura alta, percebam que a Média Aritmética não seria interessante.

268. **P-2:** Não! [Resposta compartilhada pelas demais participantes.]

269. Pesquisador/Participante: A Mediana neste caso já seria mais pertinente! Compreendido a necessidade da Mediana enquanto uma segunda Medida de Posição para caracterizar o centro da distribuição de frequências. Só que, ainda assim, a Média Aritmética é a mais utilizada, e veremos daqui há pouco como melhor interpretar estes valores de médias que não representam tão bem a realidade.

[P-4 fez a leitura do próximo item – 7.2.3 – exposto a seguir.]

7.2.3 Moda

Afirmar que o acesso a rede social ‘Facebook’ ‘*está em moda*’ é sinônimo de que muitas pessoas estão ‘frequentando’ tal página virtual. De modo análogo, a Moda de um conjunto de valores é o valor (ou valores) que possui a máxima frequência.

[Como nenhuma participante apresentou dúvida quanto à definição de Moda, o Pesquisador/Participante pediu que fizessem os dois problemas denotados abaixo.]

1. Do conjunto de dados coletados pela professora Sueli acerca do comprimento (altura) de seus alunos do 8.º ano C encontre a Moda. Em seguida, obtenha a Moda referente ao número de irmãos do 6.º ano B.
2. É correto afirmar que sempre será possível obter a Moda de um conjunto de valores? Para facilitar dê um exemplo caso não seja possível.

[Ao analisar as tabelas visando solucionar o 1.º problema, P-2 fez o seguinte questionamento.]

270. P-2: *Pode ter 2 valores?*

271. Pesquisador/Participante: Sim!

272. P-2: *É, porque no caso das alturas são dois valores!*

273. Pesquisador/Participante: É isso mesmo. Olhando a tabela – 1.º ‘Momento’ – identificamos duas classes de intervalo com a máxima frequência (7). Então temos dois valores de Moda: o ponto médio do primeiro intervalo que nós já calculamos e que é 132,5; e a outra é do intervalo do 150-155 que tem como ponto médio 152,5. Tudo bem, pessoal? **[Todas as participantes responderam afirmativamente.]** Então esta distribuição de frequências é chamada de bimodal, porque tem duas modas. P-4 tudo bem?

274. P-4: *Sim!*

275. Pesquisador/Participante: E você, P-8, ‘acompanhou’ o raciocínio?

276. P-8: *Eu não acompanhei, espera aí!*

277. Pesquisador/Participante: Ok!

[P-8 fez novamente a leitura do item 7.2.3. Tal fato indica que a participante não apresentou dúvidas durante a leitura do texto. Entretanto, quando ‘desequilibrada’ por meio de um problema, sente a necessidade de ‘rever’ a parte textual para tentar compreender o conceito/procedimento e, assim, ‘aplicá-lo’ à solução do problema. Após alguns minutos a participante disse haver compreendido porque o 132,5 e o 152,5 representam as Modas em relação à distribuição das alturas dos alunos.]

278. **Pesquisador/Participante**: E você, P-7, tudo bem?
279. **P-7**: *Sim, entendi!*
280. **Pesquisador/Participante**: E a Moda em relação à tabela que mostra o número de irmãos? A frequência máxima foi quanto P-4?
281. **P-4**: *É o 6!*
282. **Pesquisador/Participante**: Que representa qual classe?
283. **P-4**: *Dos 2 irmãos.*
284. **Pesquisador/Participante**: Ou seja, no caso do número de irmãos a Moda é 2 e coincidiu com a Mediana! **[Todas as participantes concordaram.]**
285. **P-8**: *Então a Moda seriam estes valores mesmo? [Referiu-se aos valores 132,5 e 152,5. Tal dúvida ocorre, pois, a participante acha ‘estranho’ dois valores indicarem o centro da distribuição de frequência. Deste modo, o Pesquisador/Participante interveio.]*
286. **Pesquisador/Participante**: Sim, são estes dois valores. No entanto, a Moda não vai mostrar o centro da distribuição de frequências. Ela mostra onde ocorreu a maior frequência. É diferente da Mediana e da Média Aritmética, tudo bem?
287. **P-8**: *Tá!*
288. **Pesquisador/Participante**: A Média Aritmética e a Mediana mostram o centro da distribuição de frequências. A Moda não tem este objetivo. **[Em seguida, o Pesquisador/Participante fez a leitura do 2.º problema. P-4 respondeu sempre ser possível obter a Moda. Neste momento P-2 salientou o seguinte.]**
289. **P-2**: *E se todos tivessem uma frequência igual? Por exemplo, no número de irmãos, se todas as frequências fosse 2. Qual seria a Moda?*
290. **Pesquisador/Participante**: O que vocês acham, pessoal?
291. **P-8**: *Não teria, porque é tudo igual.*
292. **Pesquisador/Participante**: É isso mesmo! Compreendeu, P-4? **[A participante indicou, por meio de expressão facial, haver compreendido.]** Então, pessoal, nem sempre é possível obter a Moda. Depende da frequência. E você, P-2, já deu até um exemplo, né!?
293. **P-2**: *Eu sou adiantada, né!? Você deve me odiar porque eu falo tudo antes! [Risos entre todas as participantes.]*
294. **Pesquisador/Participante**: Alguém conseguiria dar um outro exemplo de quando não ocorre a Moda?
295. **P-7**: *O dos salários!*

296. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo! Na pesquisa das rendas mensais não tem um valor que possui a máxima frequência, já que são todos diferentes.

297. **P-2:** *Foi o que eu falei, né!?*

298. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo! Existem distribuições que possuem 3 Modas, 4, 5... Dependem dos valores coletados/observados. Ok! Pessoal, vocês conseguiram compreender as 3 Medidas de Posição – Mediana, Moda e Média Aritmética?

299. **P-2:** *Você tem que dar mais exercício de Mediana! [Acredita-se que tal fala deve-se ao fato das mesmas não terem acertado, num primeiro momento, o cálculo da Mediana a partir das tabelas de distribuição de frequências.]*

300. **P-7:** *Ai, podia ser fácil igual a Moda! [Risos entre P-2 e P-7.]*

301. **Pesquisador/Participante:** Não briguem comigo, mas eu vou dar outros problemas, durante o nosso Grupo de Estudo, para que vocês pensem sobre tais conteúdos, neste movimento de ‘retomada’.

302. **P-2:** *Eu acho que pra fixar um pouco melhor!*

303. **Pesquisador/Participante:** Sim, podemos pensar assim! Inclusive, vou dar situações problemas nas quais será necessário relacionar tais conceitos...

[Foi solicitado à P-4 que realizasse a leitura referente à síntese do Grupo de Estudo anterior. Observe.]

304. **P-4:** *Nesse encontro percebi que tinha feito errado a atividade da página 44. Como haviam alguns número iguais pensei que não precisava somar todos, mas percebi que se não somasse todos não daria a quantidade total de alunos 30, e daria 22. Somente após a explicação é que pude entender e corrigir meu erro. Com isso aprendi corretamente a média aritmética, tanto com intervalos quanto com número reais. Com todas as explicações até as fórmulas matemáticas ficaram mais fáceis de entender, a fórmula 1 quanto a 2. Aprendemos também que, quando a variável é discreta, a média não muda independente da fórmula usada. Quando a variável é contínua tem maiores chances da média mudar consideravelmente.*

305. **Pesquisador/Participante:** Interessante, P-4. Você fez uma excelente síntese já que contemplou os assuntos que abordamos no encontro anterior. A questão da fórmula você salientou que está compreendendo mais os ‘x’ e ‘y’ ‘da vida’, digamos assim! **[A participante, por meio de gesto facial, indicou concordar.]** Está vendo como você é capaz!?

[Dando continuidade, foram disponibilizados 10 minutos para a leitura (individual ou em grupo) do item 8.1 – denotado abaixo.]

8.1 Retomando uma dúvida

No encontro anterior, durante a discussão-construção da tabela denotando as classes de intervalos das medidas (alturas) dos 30 alunos do 8.º ano C, ocorreu o seguinte questionamento: “*Como e quantas classes de intervalos é preciso construir?*”. Spiegel (1974, p. 45-46) nos fornece algumas regras para o estabelecimento de tais intervalos. Observe-as abaixo:

1.ª Regra: Dentre os dados coletados/observados determinam-se o *maior* e o *menor* números. Em seguida, calcula-se a *amplitude total* do rol, ou seja, a *diferença* entre o *maior* e o *menor* número.

2.ª Regra: Divide-se a referida *amplitude total* em um número conveniente de classes de intervalos que tenham a mesma amplitude. Como nem sempre isso é possível, em alguns casos usam-se classes de intervalos de amplitudes diferentes. Dependendo dos dados, o número de classes de intervalos é normalmente entre 5 e 20.

3.ª Regra: Na tentativa de diminuir erros, aconselha-se que as classes de intervalos, quando possível, sejam escolhidas de modo que seus pontos médios coincidam com dados coletados/observados.

4.ª Regra: Calcula-se a frequência de cada classe de intervalo.

Aplicando tais regras na pesquisa realizada pelos alunos do 8.º ano C temos o seguinte:

1.ª Regra: O menor e o maior número coletado foram 130 e 177, respectivamente. Logo, a amplitude total do rol é $177 - 130 = 47$.

2.ª Regra: No caso da situação considerada, optou-se pela construção de 10 classes de intervalos. Assim, para determinar a amplitude de cada classe, realiza-se a operação $47 \div 10 = 4,7 \approx 5$. Desta maneira, foram construídas 10 classes de intervalos semiabertas (ou semifechadas) com amplitude 5. Entretanto, como a classe [165, 170[teve frequência nula, seria pertinente pensar em outra quantidade de classes de intervalos. Tal proposta foi dada por uma das participantes ao sugerir a construção de 8 classes de intervalos cuja amplitude foi 6. Para obter esse valor procede-se de modo análogo por meio do seguinte cálculo: $47 \div 8 = 5,875 \approx 6$.

3.ª Regra: Embora, entre as 10 classes de intervalos, observa-se uma frequência nula em [165, 170[, é possível constatar que os dados coletados, em sua maioria, ‘giram’ em torno dos pontos médios das referidas classes. Tal fato também é observado para as duas outras situações nas quais foram construídas 8 ou 7 classes de intervalos.

4.ª Regra: ‘Contam-se’ os valores compreendidos nas classes de intervalos constituídas. Para números de classes diferentes observa-se alteração na frequência das mesmas já que suas amplitudes são diferentes.

Para auxiliar na decisão do número de classes a construir, Costa Neto (2002, p. 16) denota um diagrama no qual é possível determinar tal número ‘aproximado’. Na situação considerada (sendo 30 o total de dados coletados), conforme o referido diagrama, um número ‘apropriado’ de classes de intervalos seria 6. Tal fato, porém, não significa que o número de classes construídas (10, 8 ou 7) esteja errado. Apenas, por questão de *precisão* (ou *rigor*) aconselhar-se-ia um número de classes próximo a 6.

[Transcorrido o tempo, P-4 realizou a leitura do referido item a todos. Terminada a leitura, o Pesquisador/Participante perguntou se o texto havia sido ‘objetivo’. P-8 disse que “Com o exemplo sim!”, o que indica a necessidade dos exemplos para a compreensão do ‘texto’/ definição matemática. O Pesquisador/Participante mostrou às participantes um diagrama elaborado por Costa Neto (2002, p. 16) no qual é possível saber o número de classes necessárias a construir conforme o número de dados coletados/observados.]

[Em seguida, deu-se início à discussão referente às Medidas de Dispersão. As participantes acharam melhor realizar a leitura deste item (8.3) conjuntamente. Antes da leitura realizada pelo Pesquisador/Participante, o mesmo chamou a atenção das participantes fazendo uma ‘retomada’ dos assuntos até o momento abordados: Gráficos, Tabelas e Medidas de Posição (Média Aritmética, Moda e Mediana). Observe o referido item.]

8.3 Estatística Descritiva: medidas de dispersão

Durante o estudo das Medidas de Posição (Média, Mediana e Moda) foi possível perceber que nem sempre a Média Aritmética representa uma ‘boa’ *quantidade* para denotar o *centro* da distribuição de frequências. Como exemplo pode-se citar a Média Aritmética da renda mensal das famílias dos alunos do 9.º ano da professora de Matemática Sueli. Após algumas discussões, concluiu-se que a tal *medida* não representava a ‘realidade’ da maioria das famílias estudadas em relação à renda mensal. Relembrando o cálculo da Média Aritmética nesse caso, temos o seguinte:

$$\bar{x} = \frac{457 + 490 + 525 + 554 + 689 + 700 + 722 + 5000}{8} = \frac{9137}{8} = 1142,125$$

Fazendo uma comparação entre a Média Aritmética obtida (R\$ 1142,125) e os valores que denotam as

rendas mensais observam-se ‘grandes’ variações. Por exemplo, a diferença entre a menor renda (R\$ 457,00) e a Média Aritmética é de R\$ 685,125.

Assim, a Estatística Descritiva – visando indicar o quanto os dados se encontram dispersos em torno da região central – ‘elaborou’ as **Medidas de Dispersão**, ou seja, **quantidades (medidas)** que mostram a variação existente no conjunto de valores. Costa Neto (2002, p. 24) ressalta que tais medidas servem como complementação (*qualificação*) das informações fornecidas pelas **Medidas de Posição** (Média Aritmética). Para tanto, far-se-ão discussões acerca de três **Medidas de Dispersão**: Amplitude, Variância e Desvio Padrão.

[Como as participantes disseram que as ideias contidas neste item ‘introdutório’ estavam bem compreendidas, o Pesquisador/Participante continuou com a leitura do item seguinte – 8.3.1.]

8.3.1 Amplitude

A Amplitude (**A**), já definida no item 8, é a *diferença* entre o *maior* e o *menor* valores do conjunto de dados coletados/observados. Pode ser representada por meio da seguinte expressão:

$$A = x_{\max} - x_{\min} \quad (4.)$$

Por meio de tal expressão (4.) é possível calcular a amplitude referente ao conjunto das rendas mensais coletadas. Observe:

$$A = 5000 - 457 = 4543$$

A amplitude encontrada (4543) indica que há ‘grande’ dispersão (variação) entre as rendas mensais coletadas. No entanto, como a sua obtenção depende apenas de dois valores (‘*extremos*’) do conjunto dos dados, salvo alguns casos, a amplitude não é muito utilizada como **Medida de Dispersão**. Desse modo, faz-se o uso da Variância.

[Concluída a leitura, P-2 colocou a seguinte questão.]

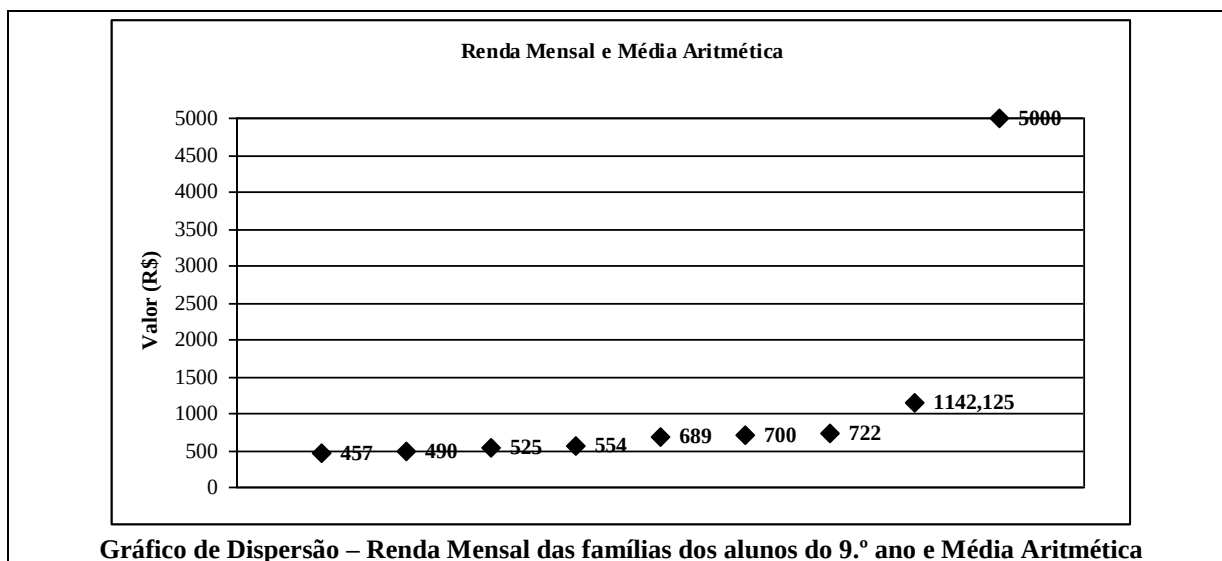
306. **P-2:** *Existe essas coisas porque as pessoas foram tentando fazer?*

307. **Pesquisador/Participante:** Sim! Na tentativa de aprimoramentos e para responder a problemas que surgiam. É isso mesmo! E existem conceitos/procedimentos mais avançados, mas que não nos interessa. Lembram daquele Cartograma que nós estudamos? Para a sua construção faz-se necessário a organização e interpretação dos dados, e para tanto é imprescindível o uso do instrumental estatístico ‘avançado’.

[Esclarecida a dúvida e como não surgiu nenhuma outra, o Pesquisador/Participante realizou a leitura do item 8.3.2, denotado abaixo.]

8.3.2 Variância

No item 8.3 observou-se uma considerável variação entre a menor renda mensal e a Média Aritmética. No gráfico de Dispersão estão representadas as rendas mensais coletadas, bem como a Média Aritmética das mesmas. Por meio desse gráfico é possível perceber como dispersos estão os valores entre si e em relação à própria média.



[Para o estudo do referido Gráfico de Dispersão, o Pesquisador/Participante projetou-o na tela realizando uma animação elaborada por meio do programa da Microsoft Office PowerPoint. Em tal animação é denotada a diferença entre o valor 5000 e a Média Aritmética e entre o valor 722 e a referida média. As participantes acharam interessante a representação dos valores coletados e da Média Aritmética por meio do Gráfico de Dispersão, sendo possível visualizar a variação existente entre tais valores.]

[Em prosseguimento, o Pesquisador/Participante solicitou a realização do seguinte problema, fazendo a leitura-explicação do mesmo]

1. Tomando como ‘ponto’ central a Média Aritmética (1142,125), calcule a diferença entre cada uma das rendas mensais x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 8$) e a média ($\bar{x}$). Tal operação pode ser indicada por $(x_i - \bar{x})$. Em seguida some todas as diferenças encontradas e obtenha a Média Aritmética das mesmas.

Rendas Mensais x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 8$)	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
457		
490		
525		
554		
689		
700		
722		
5000		
$\Sigma =$	$\Sigma =$	$\Sigma =$
Média Aritmética =	Média Aritmética =	Média Aritmética =

[Durante o diálogo estabelecido com as participantes à explicitação da situação problema, P-2 disse que o resultado de $457 - 1142,125$ daria um valor negativo e se não teria um ‘problema’ quanto a isso. O Pesquisador/Participante respondeu-lhe não haver nenhum problema. Contra-argumentando, P-2 disse o seguinte.]

308. **P-2:** Porque não pode fazer o contrário: a média menos o x_i ?

309. **Pesquisador/Participante:** Você pode fazer do jeito que você propôs, pois ao final não vai dar alteração. Não tem problema. Mas, por favor, faça desta maneira. Eu apenas trouxe a expressão utilizada pela maioria dos livros de Estatística. E dá pra perceber que, fazendo do seu modo, a última diferença ($1142,125 - 5000$) vai dar um valor negativo?

310. **P-2:** *Sim!*

311. **Pesquisador/Participante:** Então, de qualquer maneira, um valor ou outro dará negativo!

312. **P-2:** *Então foi por isso que você fez assim?*

313. **Pesquisador/Participante:** Não, tanto faz, como já falei.

[Foram disponibilizados 10 minutos para as participantes completarem a 2.^a coluna da tabela. Para a realização dos cálculos fizeram uso da calculadora. Durante este tempo, P-4 perguntou se os resultados das diferenças encontrados não poderiam ser arredondados; em resposta o Pesquisador/Participante denotou que neste caso não poderia ser feito o arredondamento já que interferiria no resultado ‘final’. P-2 surpreendeu-se ao perceber que teria de somar todos os resultados das diferenças, exclamando o seguinte: “Eu vou ter que somar tudo isso!?”. Ao concluir a somatória, P-2 falou em ‘tom’ irônico.]

314. **P-2:** *Eu vou matar o Pesquisador/Participante! Ah, pessoal, não precisa somar, porque vai dar 0. A professora Sueli é muito chata!* [Risos entre todas as participantes.]

315. **P-7:** *Então a somatória vai dar 0?*

316. **P-2:** *Sim!*

317. **P-8:** *Dá 0 mesmo, P-2?*

318. **P-2:** *Sim! Olha, eu somei sem tirar o último e é o mesmo valor. [Ao somar as diferenças até o penúltimo valor, a participante obteve ($-3857,875$). Como a diferença do último valor deu $3857,875$ P-2 não precisou somá-los para compreender que o resultado seria 0.]*

319. **P-2:** *Tem que fazer as médias?*

320. **Pesquisador/Participante:** Sim, façam as médias de cada coluna. Como você acabou de encontrar o resultado 0, então na 2.^a coluna a média será 0.

321. **P-2:** *Certo!*

322. **Pesquisador/Participante:** O fato de não ter deixado P-4 arredondar os resultados foi esse, pois não daria uma somatória 0.

323. **P-2:** *Ah, tá!*

324. **Pesquisador/Participante:** Entendeu P-4?

325. **P-4:** *Sim, entendi.*

[Como os valores da 2.^a coluna elevados ao quadrado resultavam em números elevados, as participantes pediram para copiar os valores já calculados pelo Pesquisador/Participante. Deste modo, foi projetada a tabela completa, inclusive com os cálculos das somatórias e médias já realizadas. Observe abaixo.]

Rendas Mensais x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 8$)	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
457	- 685,125	469396,265625
490	- 652,125	425267,015625
525	- 617,125	380843,265625
554	- 588,125	345891,015625
689	- 453,125	205322,265625
700	- 442,125	195474,515625
722	- 420,125	176505,015625
5000	3857,875	14883199,515625
$\Sigma = 9137$	$\Sigma = 0$	$\Sigma = 17081898,875$
Média Aritmética = 1142,125	Média Aritmética = 0	Média Aritmética = 2135237,359375

[Como P-4 ainda não havia iniciado os cálculos pela falta de calculadora, não quis copiar os resultados da 2.^a tabela. Deste modo, utilizando a calculadora de P-2 começou a fazer as diferenças. Enquanto copiava os valores da tabela projetada, P-8 fez o seguinte questionamento ao Pesquisador/Participante.]

326. **P-8:** *O Pesquisador/Participante, o pessoal que entra na Matemática não entra 'cru' assim também? Ou o pessoal é um pouco mais inteligente?*

327. **P-2:** *Ai que horrível!* [Risos entre todas as participantes.]

328. **Pesquisador/Participante:** Acha, P-8. É do mesmo modo que qualquer um!

329. **P-8:** *Então eles também estão, assim como você falou, no nível operatório concreto?*

330. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-8. A grande maioria ainda está em fase de transição para o operatório-formal e enfrentam muitas dificuldades durante o estudo da Matemática 'avançada' na qual o pensamento formal é essencial para a sua compreensão. Um ou outro aluno que ingressa na faculdade com o pensamento formal já construído e dá continuidade e aprofundamento neste estágio.

331. **P-2:** *O Pesquisador/Participante é o 'outro'!*

332. **Pesquisador/Participante:** Não, P-2, que isso! Eu mesmo, no início, tive grandes dificuldades em disciplinas que exigiam de mim o pensamento formal. Para o vestibular eu sabia as fórmulas só que todas decoradas...

333. **P-2:** *Eu não acredito!*

334. **Pesquisador/Participante:** É verdade!

335. **P-2:** *Eu não acredito, ninguém vai me fazer acreditar nisso!*

336. **Pesquisador/Participante**: Mas é verdade! Eu não havia construído o pensamento formal.

337. **P-2**: *Então você deu um ‘salto’ grande, não!?*

338. **Pesquisador/Participante**: Podemos dizer que sim! No entanto, não foi num ‘salto’ e sim uma construção gradativa alicerçando-se em construções anteriores.

339. **P-7**: *Ah, então eu tenho esta possibilidade ainda, mesmo nesta idade?*

340. **Pesquisador/Participante**: Claro que sim! Para fazer a prova do vestibular eu memorizei os gráficos que representavam as funções logarítmicas, exponenciais, senos... Pra vocês verem como ingressei na faculdade como a grande maioria...

341. **P-2**: *Eu estou me sentindo melhor... Eu vou embora feliz! A gente ainda tem chances P-8! Ainda tem salvação!*

342. **Pesquisador/Participante**: Um dos objetivos do nosso Grupo de Estudo é contribuir para isso! Eu já identifiquei tal evolução, digamos assim, na P-7. Você concorda?

343. **P-7**: *Ah, eu melhorei, mas ainda falta bastante!*

344. **Pesquisador/Participante**: Na P-4, por exemplo, eu já percebi também, embora ela não acredite!

345. **P-2**: *É verdade, a gente já percebeu isso! Ela que não acredita. Inclusive ela identificou que tinha que elevar ao quadrado os resultados antes da gente!*

346. **P-8**: *É verdade, ela que ainda não acredita em si!*

347. **P-7**: *Tem coisas que ela entende muito mais rápido que a gente!*

348. **Pesquisador/Participante**: É que tal ideia foi ‘posto’ nela! Mas vamos esperar que o Grupo possa contribuir para que tal sentimento de ‘incapacidade’ seja superado.

349. **P-8**: *Depois desta parte da Estatística nós vamos direto para a Probabilidade?*

350. **Pesquisador/Participante**: Infelizmente não vai dar tempo hoje de finalizarmos o estudo de Variância e Desvio Padrão! Mas, sim, após tal estudo iremos discutir questões referentes à Probabilidade. No entanto, antes, faremos discussões de algumas questões da teoria de Piaget e também acerca do tratamento didático-metodológico relativo ao ensino de Estatística do 1.º ao 5.º ano do Ensino Fundamental. Como a P-7 ressaltou nos primeiros encontros, é necessário pensarmos sobre quais atividades utilizar com nossos alunos de modo a possibilitar-lhes a construção da Estatística. Iremos discutir a questão do desequilíbrio, do processo de Tomada de Consciência, da realização das experiências física e lógico-matemática...

[Enquanto P-4 concluía os cálculos, o Pesquisador/Participante pediu que as participantes pensassem acerca do 2.º problema – exposto abaixo.]

2. O que foi possível descobrir a partir da somatória (Σ) dos resultados provenientes de $(x_i - \bar{x})$? Por que o valor encontrado foi esse? Para auxiliar na justificativa é possível utilizar o gráfico denotado há pouco.

[Após realizar a leitura do enunciado, o Pesquisador/Participante ressaltou ser oportuno utilizar o Gráfico de Dispersão para pensar em tal por que. Como as participantes já haviam completado a 3.^a coluna da tabela, o Pesquisador/Participante leu o 3.^o problema.]

3. Complete a tabela acima calculando o quadrado dos valores das diferenças das rendas mensais em relação à sua própria média. Tal operação pode ser representada por $(x_i - \bar{x})^2$. Em seguida some todos os valores encontrados e obtenha a Média Aritmética das mesmas.

[P-2 e P-7, ao discutirem sobre o 2.^o problema, chegaram à conclusão de que a somatória 0 deve-se ao fato das diferenças serem relativas à Média Aritmética e por ser essa o centro da distribuição de frequências. P-7 utilizando as duas mãos imitou o movimento observado por uma balança quando encontra-se em equilíbrio, representando de um lado ‘da balança’ a somatória dos valores negativos e da outra a dos valores positivos. Neste momento, P-2 fez a seguinte questão ao Pesquisador/Participante.]

351. **P-2:** *Deixa eu te fazer uma pergunta, eu acho que até sei a resposta, mas queria ouvir. Em relação aos estádios de Piaget, você pode estar em Língua Portuguesa acima do que você está em Matemática? É isso mesmo?*

352. **Pesquisador/Participante:** Sim. Acredito que sim. Na palestra que fomos sobre os gêneros do discurso. A palestrante, por exemplo, está há ‘anos luz’ avançada em Linguística em relação a mim. E como ela mesma ressaltou a dificuldade em Matemática, eu estou ‘ano luz’ avançado em relação a ela. Percebam que ela construiu um pensamento hipotético-dedutivo na área da Linguagem. Tudo bem, pessoal? **[Ninguém se manifestou, indicando não haver dúvidas quanto ao exposto.]**

353. **P-2:** *Eu não sei escrever a resposta do 2.^o problema!* **[Ressaltou isso em conversa com P-8.]**

[O Pesquisador/Participante observou os cálculos realizados por P-4 e os mesmos estavam todos corretos. Em seguida, a participante começou a somar os valores negativos e o positivo para verificar que o resultado seria 0. P-4 fez questão de calcular o resultado, embora o mesmo tenha sido apresentado na tabela projetada.]

[Visando auxiliar P-7 em relação ao 2.^o problema, a participante leu a resposta que elaborou. Observe-a.]

354. **P-2:** *O valor encontrado é 0, pois a média é a medida central entre os valores.*

[P-4 não conseguiu obter o resultado 0 pois confundiu-se ao somar os valores negativos na calculadora. Assim, o Pesquisador/Participante foi auxiliá-la.]

[Como o tempo estava ‘acabando’, o Pesquisador/Participante deixou a discussão-finalização da Variância e do Desvio Padrão para o próximo encontro. Em solicitação das participantes, a elaboração da síntese foi deixada, também, para o próximo encontro.]

APÊNDICE M – TRANSCRIÇÃO DO 9.º ENCONTRO

Data: 26/04/2012

Tempo de Duração: 3 horas e 20 minutos.

[No início do Grupo de Estudo estavam presentes P-2, P-4, P-5, P-7 e P-8. Foi solicitado à P-5 que fizesse a leitura de sua síntese referente ao 7.º encontro já que a mesma não pudera participar do encontro anterior.]

1. **Pesquisador/Participante:** P-5, por favor, faça a leitura da síntese referente ao 7.º Grupo de Estudo.
2. **P-5:** *Eu coloquei que “No encontro aprendemos sobre as medidas de posição, principalmente a média aritmética, que na minha opinião a sua definição pareceu fácil, mas quando fui questionada mais a fundo complicou um pouco.”. Era assim, foi o que eu mais lembrava. Eu deixei pra fazer depois, então eu já tava... eu lembro que trabalhou a média pra depois trabalhar a mediana e a moda.*
3. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo!
4. **P-5:** *Foi o que eu achei. Porque quando fala da média e da definição eu achei “Ai que fácil!”, mas daí na hora de fazer os problemas a gente precisou uma das outras e daí complicou. Mas eu acho que foi construído.*
5. **Pesquisador/Participante:** Então antes você tinha uma ideia de que fazer a média era fácil, não é isso!?
6. **P-5:** *É!*
7. **Pesquisador/Participante:** Ou a definição você achava que era fácil?
8. **P-5:** *Não, fazendo mesmo que é igual somar e dividir.*
9. **Pesquisador/Participante:** Então fazer era fácil. O complicado era o conceito?
10. **P-5:** *Não. [A participante indicou estar em dúvida por meio de expressão facial.] Não sei se eu vou lembrar de alguma. É assim, oh, quando fala “Faz a média tomando todos os dados.”, isso é fácil, eu sei fazer a média, você soma e divide. Mas depois quando vem os problemas com os números de tal a tal...*
11. **Pesquisador/Participante:** E usando a tabela você achou difícil?
12. **P-5:** *Não!*
13. **Pesquisador/Participante:** Então é quando tem um problema e um dos valores está faltando e é preciso calcular o outro? É isso?
14. **P-5:** *É... ou muda o jeito de perguntar, ou está faltando alguma coisa! É quando exige um pouco a mais.*

15. **Pesquisador/Participante:** Que nem aqueles desafios que eu coloquei do vestibular?
16. **P-5:** *Isso! Foi isso que eu pensei, nos desafios. Quando você tá fazendo você fala “Eu sei média, eu sei moda e sei mediana!”, você sabe fazer calcular tudo certinho. Quando complica um pouco mais ou inclui um dado ou não tinha... daí me confundiu.*
17. **Pesquisador/Participante:** Então quando você transferiu este conhecimento em uma situação problema que é diferente de um modelo você achou um pouco de dificuldades. É isso?
18. **P-5:** *Sim!* [Tal resposta veio acompanhada de certa dúvida percebida por meio de expressão facial.]
19. **Pesquisador/Participante:** Ok! Pessoal, vocês, estavam nas aulas de Matemática dos professores do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. O professor ia à lousa, explicava, dava aquele exemplo, parecia fácil. A coisa complica quando vai ser resolvido um problema? É isso mesmo? O que você acham a esse respeito? Você, P-4...
20. **P-4:** *É, então, porque na escola você aprende aquela fórmula, né! Então, por exemplo, a gente tá aprendendo adição, vamos supor. Daí o professor dá a continha de adição. E daí ele faz uma prova e só dá na prova continha de adição. Entendeu!? Agora, por exemplo, assim, no vestibular que junta tudo que você não sabe lá... aplique este conceito ou faça a continha... daí complica né! Porque você não sabe o que vai fazer!* [Riu conjuntamente à fala.]
21. **Pesquisador/Participante:** Então, pelo que você me disse, há a dificuldade em estabelecer relação dentre os conceitos de tal modo a isso se transformar numa ferramenta para você resolver o problema?
22. **P-4:** *Sim!*
23. **Pesquisador/Participante:** Ok! Você concorda P-2? Já vivenciou isso?
24. **P-2:** *Então, eu acho que eu aprendi bem do jeito que a P-4 falou mesmo, né, eram coisas bem estanques. Aí a gente até tinha alguns problemas, mas já sabia qual era a fórmula, qual era o modo de resolver porque tava... continuação mesmo... você aprendeu a fazer isolado e agora aplica no problema. E aqui não* [Referiu-se aos desafios propostos.], *aqui exigiu que você tivesse compreendido muito bem o conceito do que era a média.*
25. **Pesquisador/Participante:** Pra poder resolver os desafios?
26. **P-2:** *Isso, pra resolver os desafios. E, assim, quando eu estudei, eu nem sei se hoje é assim e a coisa esteja diferente... Eu não era desafiada deste jeito.*
27. **Pesquisador/Participante:** Também não era desafiada?
28. **P-2:** *Não. Não tinha!*
29. **Pesquisador/Participante:** Vocês sentiram um grande desafio no vestibular, digamos assim, é isso?

30. **P-2:** *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

31. **Pesquisador/Participante:** É claro que possamos ter tido, um professor ou outro que nos aguçava a curiosidade, que nos colocavam questões que realmente nos deixavam em “desequilíbrio”, mas foi no vestibular que a coisa pega?

32. **P-2:** *Vestibular e concursos, né!* [Quando questionada, P-7 disse ter a mesma opinião. P-8 complementou com o seguinte.]

33. **P-8:** *Concordo! A gente tinha aquelas listas de exercícios, né, com só a soma, só... então não era... Quando tinha problemas a gente tinha dificuldades na época pra saber o que era a soma ou a subtração.*

34. **Pesquisador/Participante:** Ou seja, qual operação utilizar!

35. **P-8:** *É! E, realmente, assim, eu comecei a pensar um pouco melhor quando fui fazer vestibular e fui fazer concurso. Porque daí você tem que usar tudo o que você tinha, né, em todos aqueles problemas difíceis de resolver. Aí começa a melhora, assim, sua linha de raciocínio pra poder juntar tudo, né!*

36. **Pesquisador/Participante:** E é interessante pontuar isso, pessoal, porque o objetivo principal da escola é formar alunos que sejam bom pensadores, tudo bem!? Todo o restante, entre aspas, é balela, digamos assim. E bons pensadores implicam em bons solucionadores de problemas, e pra isso, além da aprendizagem do conceito e do procedimento matemático é necessário que o professor auxilie os alunos a estabelecerem relações durante a solução das situações problemas propostas. Melhor dizendo, por meio da solução das situações problemas é que os alunos devem ser desafiados a pensar sobre os conceitos e os procedimentos, estabelecendo diversas relações. Vocês acham que as situações problemas que estamos trabalhando estão sendo realmente desafiadoras? [Todas as participantes, por meio de expressão facial, indicaram afirmativamente.]

[Retomando o encontro anterior, o Pesquisador/Participante perguntou à P-4 e P-5 como haviam resolvido os desafios 1, 2, e 3 – já denotados na Transcrição do 8.º encontro. P-4 e P-5 disserem ter acertado apenas a resposta do 1.º desafio, embora tivessem tentado resolver os demais. Durante a discussão, denotada a seguir, foi projetado o Desafio 1.]

37. **Pesquisador/Participante:** Na letra b) do desafio vocês calcularam a Média Aritmética?

38. **P-4:** *Então, eu fui direto para a média.* [A participante riu, indicando não ter verificado cada um dos itens para escolher o correto, apenas calculou a média aritmética retirando os valores do gráfico apresentado e marcou a alternativa correta.]

39. **Pesquisador/Participante:** Então você não verificou as outras alternativas? Foi isso? [A participante indicou afirmativamente por meio de expressão facial.] O que te fez ir direto pra média?

40. **P-4:** *Ah, eu acho que é porque a gente tava... eu até dei uma lida, mas daí eu olhei aí que a b) e a e) pediam a média, então eu pensei: “Ah, eu vou tentar calcular!”, aí deu os 50*

[Referiu-se ao valor da média encontrada.] e eu falei “É essa!”. [Referiu-se à alternativa correta do desafio.]

41. **Pesquisador/Participante:** Então como estávamos estudando a Média Aritmética você pensou assim: “Ah, eu vou economizar meu tempo! Então vamos direto pra média!”, e você não se preocupou, a partir do momento que o resultado encontrado coincidia com a alternativa e) em justificar as outras?

42. **P-4:** Não!

43. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você, P-5, chegou a fazer as justificativas?

44. **P-5:** Não, eu olhei as outras... eu olhei a b) e a e) e fiz uma conta só pra ver se dava 40 ou 50, ou nenhuma das duas... Aí eu reparei que não era crescente porque de 93 a 94 era decrescente [Referiu-se à alternativa a).], então eu pensei “Acho que não pode falar que é crescente porque pelo desenhinho [Referiu-se ao Gráfico de Linha denotado no desafio.] dava pra ver que tava decaindo!” e na d) porque a partir de 95 teve decrescente, igual ao outro, porque de 97 a 98 decresceu bastante, e de 95 a 96 ficou estável. E daí eu calculei uma vez só a média e deu 50.

45. **Pesquisador/Participante:** Você chegou a justificar porque a letra c) estava errada? [Após ler, por alguns instantes, a afirmação referente à alternativa c), a participante respondeu.]

46. **P-5:** Não!

47. **Pesquisador/Participante:** Ok! Eu vou apresentar a solução feita na folha de vocês. É bom para todas até para lembrarem. Lá na página 53 eu coloquei o seguinte. [O Pesquisador/Participante leu o item 8.2 no qual estava denota a solução do Desafio 1.] Depois nós vamos discutir a solução dos Desafios 2 e 3. [Durante a leitura, o Pesquisador/Participante projetou na tela tal item.]

8.2 Retomando o desafio

Durante o 7.º encontro realizaram-se discussões acerca da Média Aritmética, seu significado e algumas maneiras de calculá-la. Visando ‘desencadear’ um ‘pensar sobre’ os conteúdos matemáticos tratados até o momento, foi solicitada a solução de 3 problemas-desafio. A seguir far-se-ão comentários denotando a solução de tais problemas. Neste ponto é interessante o ‘confronto’ entre as 3 soluções seguintes e as elaboradas por vocês (participantes).

DESAFIO (1):

Torna-se válido pontuar que os ‘dados’ do problema estão representados no gráfico de Linha denotando a produção de um determinado produto agrícola no estado de São Paulo entre os anos de 1990 a 1998. O problema solicita a escolha do item que apresenta a afirmação verdadeira a partir da interpretação do referido gráfico. Para tanto, faz-se necessário excluir os itens que apresentam as afirmações falsas. Observe as justificativas dos itens falsos e da afirmação verdadeira.

a) É falso, pois de 1993 a 1995 a produção foi decrescente.

b) É falso, pois a Média Aritmética foi de 50 mil toneladas. Observe o cálculo realizado:

$$\bar{x} = \frac{20 + 40 + 50 + 60 + 40 + 60 + 60 + 70 + 50}{9} = \frac{450}{9} = 50 \text{ mil toneladas}$$

c) É falso, pois conforme o gráfico a produção de 1993 (60000 t.) apresenta um aumento de 10 mil toneladas com relação à produção de 1992 (50000 t.). Assim, houve um acréscimo de 1/5, ou seja, de 20%.

d) É falso, pois de 1996 a 1997 a produção foi crescente.

e) É verdadeiro, conforme o item b).

[Como não houveram dúvidas em relação à solução do Desafio 1, o Pesquisador/Participante perguntou à P-4 e à P-5 se haviam tentado resolver o 2.º desafio. P-5 disse que não conseguiu ‘fazer nada’; já P-4 respondeu o seguinte.]

48. **P-4:** *Então, eu fiz, mas sei que está errado. É porque depois eu vi a solução do problema.*

49. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, sem problemas. Mas diga pra gente o que você fez, por favor.

50. **P-4:** *Na verdade, quando eu li o exercício, eu ignorei o número de alunos. Então, quanta tava aqui, a média 6,40 e 5,20, o que eu fiz... eu somei as duas e dividi por 2.*

51. **Pesquisador/Participante:** Você achou uma média, ok! Mas não era a pedida!

52. **P-4:** *Sim, e daí a resposta era a d). [No desafio proposto, a alternativa d) possuía o número encontrado pela P-4 ao calcular a média dos dois valores dados no enunciado por meio da expressão $(6,40 + 5,20)/2$.] Mas depois eu vi a solução e vi que a resposta certa era a letra a). Eu entendi depois...*

53. **Pesquisador/Participante:** Você entendeu mesmo a solução denotada?

54. **P-4:** *Sim, entendi! Eu entendi mesmo! Depois que eu li a solução eu pensei “Ele não ia ter dado o número dos alunos à toa no problema!” [Referiu-se ao elaborador do desafio.], então se ele deu é pra usar! Depois que eu cheguei a essa conclusão.*

55. **Pesquisador/Participante:** Então você compreendeu que fez a média das notas e não em relação aos 80 alunos!

56. **P-4:** *Ahã!*

57. **Pesquisador/Participante:** Você entendeu o que a P-4 falou P-5?

58. **P-5:** *Sim, entendi! Aí foi a minha dificuldade também... Eu pensei, se fossem o mesmo número de alunos, eu acho que até tentaria mais... Mas eu pensei isso que a P-4 falou também, de somar e dividir por 2. Daí quando eu vi 30 e 50 [Referiu-se ao número de alunos de cada turma.] eu falei “Nossa, não é assim!”, mas daí eu não consegui pensar em outra maneira de fazer!*

59. **Pesquisador/Participante:** Você chegou a ler a solução, P-5?

60. **P-5:** *Eu olhei, mas não li, assim, atentamente pra entender!*

[Deste modo, o Pesquisador/Participante realizou a leitura referente à solução do 2.º desafio. Novamente projetou o texto na tela, observe-o.]

DESAFIO (2):

Para a solução deste 2.º problema faz-se necessária a utilização da ideia de Média Aritmética, bem como da expressão que permite o seu cálculo. O enunciado evidencia informações sobre a Média Aritmética das notas de uma prova que foi aplicada em duas turmas diferentes, conforme exposto abaixo:

	1.^a TURMA Média Aritmética ($\bar{x}_{1^{\text{a}}\text{TURMA}}$) = 6,40 Total de Alunos (n) = 30	2.^a TURMA Média Aritmética ($\bar{x}_{2^{\text{a}}\text{TURMA}}$) = 5,20 Total de Alunos (n) = 50	
‘Aplicando’ o conceito de Média Aritmética é possível saber as somatórias das notas obtidas pelos 30 alunos da 1.^a TURMA e pelos 50 alunos da 2.^a TURMA. Observe tais somatórias:			
	1.^a TURMA $\bar{x}_{1^{\text{a}}\text{TURMA}} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$ $6,40 = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$ $\sum_{i=1}^{30} x_i = 6,40 \times 30 = 192$	2.^a TURMA $\bar{x}_{2^{\text{a}}\text{TURMA}} = \frac{\sum_{j=1}^{50} x_j}{50}$ $5,20 = \frac{\sum_{j=1}^{50} x_j}{50}$ $\sum_{j=1}^{50} x_j = 5,20 \times 50 = 260$	
Para descobrir a Média Aritmética dos alunos das duas turmas, basta somar os dois valores encontrados e dividi-los por 80 (total de alunos).			
$\bar{x}_{(1^{\text{a}}+2^{\text{a}}\text{TURMA})} = \frac{192 + 260}{80} = \frac{452}{80} = 5,65$			
Logo, a Média Aritmética das notas obtidas pelos alunos das duas turmas é 5,65; e o item correto é o a).			

[Durante a discussão, o Pesquisador/Participante salientou a importância de/em traduzir as informações do enunciado em linguagem matemática. Ressaltou, também, que neste problema o procedimento é diferente daqueles já abordados, pois, ao invés de calcular a média por meio dos valores ‘individuais’, dá-se o valor da média e o total ‘n’ e é necessário obter a somatória dos valores. Neste sentido, falou o seguinte.]

61. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, dá pra compreender que neste caso é necessário fazer o caminho ‘inverso’?
62. **P-4:** *Eu percebi isso!*
63. **Pesquisador/Participante:** Você chegou a pensar sobre isso?
64. **P-4:** *Sim!*
65. **Pesquisador/Participante:** Se você tivesse persistido neste pensamento você teria conseguido resolver o problema.
66. **P-4:** *Mas eu percebi depois que eu li o resultado! [Riu conjuntamente.]*
67. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem! Mas você percebeu que eu fiz um caminho ‘inverso’?
68. **P-4:** *Ahã!*
69. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, P-5, como nos obtivemos o 192 e o 260?

70. **P-5:** *Eu pensei mais ou menos isso também! Só que 192 não é um número exato, porque aí... eu acho que é nisso que eu... É isso que eu preciso entender. Porque eu pensei “A média não vai dar um número exato!”, porque é uma média!*

71. **Pesquisador/Participante:** Mas olha, eu não calculei a média, e sim a somatória!

72. **P-5:** *Mas... oh, deixa eu pensar um pouquinho! A média das notas foi 6,40. Se eu multiplicar 6,40 por 40 não vai dar um número que realmente foi. [A participante está confundido o valor da somatória- 192 – com os valores tirados por cada um dos alunos da 1.ª turma.] Porque não é 6,40, tinha 4, tinha 9, por ser uma média. [Nesta última frase indicou as possíveis notas tiradas pelos alunos na prova aplicada.]*

73. **Pesquisador/Participante:** Pense comigo, oh! Você não achou os valores individuais das notas... Achou... [A participante interrompeu e falou.]

74. **P-5:** *O total!*

75. **Pesquisador/Participante:** Entendeu?

76. **P-5:** *Ainda não! Desculpa, mas eu... eu não entendi o que estou falando...*

77. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, sem problema. Vamos discutir, estamos aqui para isso! Alguém poderia me ajudar, por favor!?

78. **P-4:** *Então, eu pensei nisso depois que eu fiz, não, na verdade não depois que eu fiz e sim depois que eu vi a resposta do exercício 3. [Referiu-se ao 3.º desafio.]*

79. **P-2:** *P-5, oh, eu acho que eu entendi o que você está querendo colocar! O 6,40 é a média da turma toda. Entre eles, tudo bem, pode ser 3, pode ser 4, 5... [Referiu-se às notas das provas tiradas pelos alunos.] Esquece agora a média! Qual foi o total somando todas as notas individualmente? Esse 3, esse 4, esse 5, esse 6? O 192! Agora dá pra entender?*

80. **P-5:** *Ah, entendi!*

81. **P-2:** *Agora se você pegar o 192 e dividir por 30 você vai achar a média que é 6,40. Independente se teve nota 1, nota 5, nota 4...*

82. **P-5:** *Entendi! Porque um compensa o outro!*

83. **Pesquisador/Participante:** Muito obrigado P-2! Percebam que a sua maneira de explicar foi melhor que a minha. Só pra ilustrar, pensem comigo! Imagine que em cima de sua mesa tem 30 provas corrigidas. E vocês, quando começarem a trabalhar terão isso e muito mais pra corrigir! [Risos entre todos.] [O Pesquisador/Participante desenhou na lousa 30 círculos, sendo que cada um representava a nota dos 30 alunos da 1.ª turma. Observe o registro realizado.]

O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O

$$6,40 = \frac{\sum_{i=1}^{30}}{30}$$

Não dá pra saber a nota individual de cada prova. Eu sei que o total é 30. Se eu somo todas estas provas, lembra do ‘i’ indo do 1 até o 30? **[Neste momento escreveu na lousa a expressão denotada acima.]** Eu apenas sei que a média é 6,4. Se eu fizer o caminho inverso, eu vou fazer o que a P-2 te falou, ou seja, vou obter o total das notas somadas e não a nota individual de cada prova. A sua dificuldade foi qual, P-5, você confundiu o quê?

84. **P-5:** *Eu achava que o número encontrado [192] não representava uma verdade!*

85. **P-4:** *Que ia ser um valor aproximado! Eu pensei nisso também! [Ambas as participantes confundiram a ideia de média enquanto uma tendência com o valor exato da somatória.]*

86. **Pesquisador/Participante:** Só que o número 192 é um valor exato! Percebam?

87. **P-5:** *Sim! E eu achei que por ser, a média, por dar a média na multiplicação não daria um valor exato que eu poderia considerar verdade. Mas agora eu entendi o porquê.*

[O Pesquisador/Participante discutiu o restante da solução e P-5 respondeu “Agora ficou bem claro!”. P-4, conforme já ressaltado, havia compreendido a solução durante a leitura em sua casa. Em seguida foi denotado o seguinte.]

88. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, dá pra compreender que a dificuldade em resolver este desafio reside na dificuldade em realizar a ‘reversibilidade’ do pensamento? Tá dando pra visualizar isso? **[Todas as participante, por meio de expressão facial, indicaram concordar.]** Aquele ‘ir e vir’ do pensamento, de tal modo a compreender que multiplicando a média pelo total de elementos obteremos a somatória destes elementos. E tal reversibilidade é característica do pensamento operatório.

89. **P-2:** *Mas eu acho mesmo, nesse caso, o que dificulta mesmo é acreditar se aquele valor obtido é representativo ou não!*

90. **Pesquisador/Participante:** Isso também é uma questão que dificulta. Concordo!

91. **P-2:** *Sabe, a gente... porque desestabilizou esta questão de você ter falado de que as coisas não são exatas, que nem a régua que não é totalmente exata... Aí, de repente gerou certa insegurança, eu tive as mesmas dificuldades que vocês, eu fiz primeiro igual a P-4 fez, depois eu pensei “Então tá, onde está as frequências?”. Daí eu tentei fazer do outro jeito, e a tristeza é que tem os dois resultados, **[Referiu-se às alternativas do desafio.]** tanto do jeito errado quanto do jeito certo. Só que, você se desestabiliza, porque você diz “Pera aí, mas é uma média, como que o 192 vai ser o total?”. Daí você tem que voltar no conceito de média pra saber que as coisas não são exatas, porque realmente é uma média, ali **[Apontou para o desenho feito na lousa.]** não está representando todos os valores, não são todos que são 6,4, eles se alteram... Eu entendo que isso foi uma grande dificuldade!*

92. **Pesquisador/Participante:** Ok! Tudo bem, agora?
93. **P-5:** *Agora sim!*
94. **Pesquisador/Participante:** E o 3.º desafio, você pensou sobre ele P-4?
95. **P-4:** *Então, eu tentei pensar!*
96. **Pesquisador/Participante:** Como você fez? Fale pra gente, por favor!
97. **P-4:** *Eu pensei assim, não deve ser um número tão grande! Então eu olhei a diferença dos dois, 4,2 pra 4,5 tá faltando 0,3. Daí tinha a resposta aqui e falei “Deve ser essa!”... Mas, assim, eu pensei que nem a P-5, tanto que eu fui só atrás pra ver essa questão da reversibilidade, da operação inversa, tanto que vezes é a inversa da divisão depois que eu vi a resposta. [Referiu-se à solução referente ao Desafio 3 entregue às participantes.] Então eu pensei assim, não é um valor real, mas aproximadamente, foi a primeira coisa que eu pensei... E daí eu pensei nesse daqui que não deve ser um número muito grande, daí eu logo chutei nessa [Referiu-se à alternativa a).], mas eu nem fiz conta nada!*
98. **Pesquisador/Participante:** Veja que você fez o que grande parte dos alunos fazem. A falta de vivência em situações problema faz com que o estudante leia o enunciado, retire apenas os números e fazem a primeira operação que lhes veem à cabeça! **[Todas as participantes indicaram concordar!]** Foi isso, né P-4!?
99. **P-4:** *Foi, oh! E ainda tinha a resposta e eu pensei “Oh, acertei!” [Risos entre todos.]*
[Neste momento P-9 chegou.]
100. **Pesquisador/Participante:** E após ler a solução você entendeu?
101. **P-4:** *Sim, entendi! Daí pra confirmar eu até fiz os cálculos. [A participante disse ter ‘testado’ o procedimento utilizado para resolver o 3.º desafio no problema referente às rendas mensais das famílias dos alunos dos 9.º anos. Como neste problema também haviam 8 elementos, P-4 achou que ‘daria’ certo fazer a mesma ‘coisa’.]*
102. **Pesquisador/Participante:** Interessante! Você transferiu em outro problema... No entanto, pessoal, é importante discutirmos uma questão. A média que nós obtemos é um número exato. Não podemos confundir o fato da média, por representar uma tendência, não ser um valor exato. O fato de não representar, necessariamente, um dos valores coletados/observados, não significa que não seja exato. Analisando os Grupos de Estudos anteriores acredito que tal ideia possa ter ficado confusa, inclusive por culpa minha. **[As participantes ouviram tal colocação.]** Tudo bem, pessoal? **[Ninguém se pronunciou, indicando que estavam pensando sobre o exposto. Visando dar ‘mais um tempo’ para a assimilação, o Pesquisador/Participante prosseguiu com a discussão acerca do 3.º desafio.]** E você, P-5, como pensou o 3.º desafio?
103. **P-5:** *Inicialmente eu pensei a mesma coisa, 4,5 vezes 8. Como no outro a gente tinha considerado que multiplicar só a média pelo número de quantidade não daria certo, não iria representar uma verdade, eu tinha confundido, eu tinha pensado isso, então se não deu certo ali não daria aqui.*

104. **Pesquisador/Participante:** Você ‘percebeu’ que esse era o caminho, mas, por dúvida não o seguiu?

105. **P-5:** *É!*

106. **Pesquisador/Participante:** Você chegou a ler a solução do 3.º desafio?

107. **P-5:** *Não! Mas agora fica mais claro porque eu já entendi o outro e aquilo que você acabou de falar! Eu acho que, se eu fosse tentar agora, eu acho que talvez até conseguiria! A não, a não ser até chegar ao número retirado! [Ressaltou isso ao perceber que o 3.º desafio é diferente do 2.º desafio.]*

[O Pesquisador/Participante fez a leitura-discussão da solução apresentada a seguir. Novamente a mesma foi projetada.]

DESAFIO (3):

Do mesmo modo que o segundo, o 3.º desafio faz referência à ideia de Média Aritmética. No entanto, o problema proposto diferencia-se, pois é feita uma ‘comparação’ entre duas Médias Aritméticas ao ocorrer a retirada de um elemento do conjunto inicial. Em seguida, solicita-se a descoberta deste número retirado. Vamos considerar os 8 números como sendo representados pela seguinte notação:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$$

Sabe-se que a Média Aritmética destes 8 números é 4,5. Retirando-se um destes elementos a ‘nova’ Média Aritmética (dos 7 números restantes) é 4,2. Por meio das expressões abaixo é possível calcular as somatórias dos 8 números e também dos 7 números restantes:

<u>SITUAÇÃO INICIAL</u>	<u>RETIRADA de UM NÚMERO</u>
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$
$4,5 = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$	$4,2 = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$
$\sum_{i=1}^8 x_i = 4,5 \times 8$	$\sum_{i=1}^7 x_i = 4,2 \times 7$
$\sum_{i=1}^8 x_i = 36$	$\sum_{i=1}^7 x_i = 29,4$

Para descobrir o número retirado basta fazer a diferença entre o resultado da somatória da ‘Situação Inicial’ e o resultado da somatória da ‘Retirada de Um Número’. Isso, pois a diferença entre as mesmas foi devido à retirada do número em questão.

$$x_{\text{RETIRADO}} = \sum_{i=1}^8 x_i - \sum_{i=1}^7 x_i$$

$$x_{\text{RETIRADO}} = 36 - 29,4 = 6,6$$

Desse modo, o número retirado foi o 6,6 e o item correto é o **d**).

[No início da leitura P-1 e P-9 chegaram e o Pesquisador/Participante pediu para as mesmas acomodarem-se e aguardarem um pouco.]

108. **Pesquisador/Participante:** Ajudou P-5?

109. **P-5:** *Nossa, muito! Ficou até gostoso agora de fazer já que a gente entende!*

110. **Pesquisador/Participante:** P-9 você fez a síntese do 7.º encontro?

111. **P-9:** *Então, eu fiz a síntese e sobre isso que vocês estavam falando, eu percebi onde vocês estavam! Eu também tive muita dificuldade, assim, pra fazer!*

112. **Pesquisador/Participante:** O primeiro desafio você teve muita dificuldade?

113. **P-9:** *Não, foi o que eu menos tive! Eu consegui, pelas informações, tatear... assim, até por eliminação chegar no verdadeiro. Que nem, a primeira fala sobre crescente, e não é crescente, é decrescente! [Referiu-se à afirmação apresentada na alternativa a) do Desafio 1.] Então, eu fui por ordem de erro e cheguei no resultado!*

114. **Pesquisador/Participante:** E você chegou a observar a solução que estava na folha?

115. **P-9:** *Sim! Quando as meninas me entregaram o material da aula passada eu li e vi que tinha as soluções da 2 e da 3 que eu não consegui resolver sozinha.*

116. **Pesquisador/Participante:** Então os desafios 2 e 3 você não conseguiu fazer sozinha?

117. **P-9:** *Então, eu pensei vários modos de fazer, mas eu fiquei em dúvida já que eu faltei e vocês devem ter falado sobre isso! Aí eu entendi mais ou menos! Mas, agora, a última parte que eu ouvi da 3 foi a melhor que eu entendi, do subtrair, que eu não tinha entendido muito bem essa parte sozinha só lendo.*

118. **Pesquisador/Participante:** Ok! Nós já vamos retomar os desafios. [Quando questionada, P-1 disse não ter feito os desafios e nem a síntese referente ao 7.º encontro. Em relação aos desafios estava tentando fazê-los naquele momento.]

[Novamente o Pesquisador/Participante realizou a discussão referente à solução do 2.º desafio. Além da solução proposta, utilizou o registro feito na lousa representando as 30 provas (notas) individuais. Faz-se interessante observar uma parte do diálogo entre o Pesquisador/Participante e P-9.]

119. **Pesquisador/Participante:** Você chegou a calcular esse número aqui, o 192 referente à somatória das notas obtidas pelos 30 alunos da 1.ª turma?

120. **P-9:** *Sim, mas daí eu pensei assim “Será que é certo eu poder somar já que eu não tenho essa parte das notas?”, “Será que vai confrontar isso com a maneira certa?”... Eu fiquei eu dúvidas, assim...*

121. **Pesquisador/Participante:** E foi o mesmo problema que vocês tiveram! [Referiu-se à P-4 e P-5.]

122. **P-5:** *É verdade!*

[Concluída a discussão, P-9 disse “Agora sim entendi a solução!”. Em seguida o Pesquisador/Participante pontuou.]

123. **Pesquisador/Participante:** É impressionante como as dúvidas são parecidas! E numa sala de aula isso é normal ocorrer! Mesmo com alunos heterogêneos, teremos respostas semelhantes e diferentes, seja na facilidade em responder quanto nas dificuldades... E também nos ‘truques’ que as pessoas usam pra resolver de modo rápido o problema. Que nem a P-4

que pegou os números, os subtraiu, viu que tinha uma resposta correspondente e pensou “Beleza, acabei!”. **[Referiu-se à solução feita pela participante no 3.º desafio.]** E o 3.º desafio, P-9, você conseguiu acompanhar o raciocínio enquanto estávamos discutindo quando você chegou?

124. **P-9:** *Sim! E ainda eu pensei, nossa, se a gente soubesse isso antes teria ficado mais fácil.*

125. **P-5:** *Eu também pensei assim!*

126. **P-9:** *E isso é uma coisa que a gente não esquece mais!*

[O Pesquisador/Participante perguntou à P-1 se a mesma estava conseguindo compreender as discussões realizadas acerca do 2.º desafio. Como respondeu afirmativamente, foi lhe perguntado se gostaria de resolver o Desafio 3 em casa e, no próximo encontro, realizar a discussão. P-1 disse achar melhor o Pesquisador/Participante discutir-apresentar a solução referente a este desafio, pois assim facilitaria a sua compreensão. Deste modo, foi realizada – novamente – a discussão referente ao 3.º desafio.]

[Durante a discussão realizada de modo análogo à anterior, P-5 questionou o seguinte.]

127. **P-5:** *Como a gente chegou neste número 4,2?*

128. **Pesquisador/Participante:** Este número já foi dado no enunciado!

129. **P-5:** *Ah, é verdade!*

130. **Pesquisador/Participante:** Uma coisa é interessante pontuar. Sem o número total de elementos e a média é impossível calcular a somatória. Para obter a média (que é um valor) eu relaciono um valor **[Referiu-se à somatória (Σ).]** e outro valor. **[Referiu-se a ‘n’ – o total de elementos.]** **[Registrou na lousa o seguinte.]**

$$\bar{x} = \frac{\Sigma}{n}$$

Pra resolver qualquer problema envolvendo a média eu preciso sempre de dois valores destes 3, né!? Se eu não tenho 2 valores de 3, se eu tenho só a somatória, eu não ‘saio’ ‘do lugar’! Se eu tenho só a média não dá pra saber, se não for falado, qual foi a somatória e o total de elementos. Vamos supor que num outro conteúdo envolvam, na expressão, 4 variáveis. Tudo bem esta palavra ‘variável’? **[Todas as participantes indicaram, por meio de expressão facial, de modo afirmativo.]** Num problema, se eu não tenho 3 destas variáveis pra descobrir a 4.^a eu não consigo resolvê-lo. Tudo bem?

131. **P-5:** *Se neste problema a gente tivesse que 8 números é 4,5 e quisesse descobrir com 7 dava?*

132. **Pesquisador/Participante:** Não dá pra saber qual foi retirado se você não sabe para quanto foi a ‘nova’ média.

133. **P-5:** *É! Entendi!*

[Dando continuidade, P-9 leu a síntese referente ao 7.º encontro.]

134. **P-9:** *Eu coloquei assim: “Conseguimos compreender a utilização da média aritmética em tabelas diferentes (contínuas e discretas), eu coloquei entre parênteses, assim como calcular a média das frequências e percebemos o resultado para definir a média aritmética e assim conceituarmos os conceitos de Medidas de Posição – média aritmética, moda e mediana.”.*

[Em prosseguimento, o Pesquisador/Participante retomou a discussão da situação problema referente ao cálculo da Média Aritmética das rendas mensais das famílias dos alunos do 9.º ano da professora de Matemática Sueli. Foi salientado que tal situação foi posta para a compreensão de que nem sempre a Média Aritmética é suficiente para representar o centro da distribuição de frequências. Deste modo faz-se necessária a utilização da Mediana.]

[Após a leitura-discussão de tal situação problema pelo Pesquisador/Participante, P-1, P-5 e P-9 foram questionadas se o valor encontrado – a média 1142,125 – representava um ‘bom’ valor. ‘Rapidamente’ as participantes indicaram, por meio de gesto facial “Não.”. P-9 salientou o denotado abaixo]

135. **P-9:** *Claro que nem porque este valor não representa nem a metade dos valores que a maioria das famílias ganham. Isso é por causa do 5000, né, que somado dá este número de média elevado! [Resposta compartilhada por P-5.]*

136. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo! E você, P-1, o que acha?

137. **P-1:** *Não levou em consideração as pessoas...*

138. **Pesquisador/Participante:** É que, neste caso, P-1, só pela média não dá pra ‘achar’ um bom valor... Compreenderam isso? Embora o cálculo esteja correto e 1142,125 é o valor da Média Aritmética, ele não é suficiente para caracterizar a realidade das famílias dos alunos dos 9.º anos. [As participantes indicaram concordar com a afirmação.] Deste modo, fizemos o estudo da Mediana no encontro anterior.

[O Pesquisador/Participante realizou a leitura-discussão do texto – item 7.1.2 – referente à Mediana. Como P-1, P-5 e P-9 não compreenderam o conceito de Mediana por meio da definição proposta por Costa Neto (2002), o Pesquisador/Participante exemplificou do mesmo modo ao realizado no Grupo de Estudo anterior. Durante a exemplificação para um número par de elementos, P-9 disse os valores da pesquisa das rendas mensais que seriam utilizados para o cálculo da Mediana; P-5 salientou já saber calcular para um número ímpar de elementos, apenas possuía dúvidas quando era par.]

[Em relação ao primeiro problema referente ao cálculo da Mediana das rendas mensais, P-1, P-5 e P-9 não apresentaram dificuldades e concordaram que tal valor (621,50) representa melhor a realidade das rendas mensais dos alunos dos 9.º anos. Como já salientado por P-9, o Pesquisador/Participante conclui que a Média Aritmética é uma importante Medida de Posição, no entanto, quando há elementos com grande variação entre si, a média não se torna um ‘bom’ valor representativo. Deste modo, a Mediana é a mais indicada, pois, em seu cálculo tais valores extremos não serão utilizados e, por conseguinte, não influenciarão no resultado.]

[Sobre o 2.º problema acerca do cálculo da Mediana a partir das tabelas de frequência (altura dos alunos e número de irmãos), P-1, P-5 e P-9 afirmaram ter pensado, em suas casas, em fazer do mesmo modo que P-2, P-4, P-7 e P-8 propuseram no Grupo de Estudo anterior, ou seja, encontrar o ‘meio’ das linhas da tabela para o cálculo da Mediana e não o ‘meio’ dos elementos ordenados. Quando o Pesquisador/Participante ressaltou que suas colegas haviam pensado de modo ‘igual’, P-2 mostrou-se desconfortável, indicando ‘ter vergonha’ do erro cometido, utilizando a palavra ‘equivoco’ ao invés de erro. P-5 salientou que, além de encontrar o ‘meio’ das linhas da tabela referente à altura dos alunos, escolheu o 5.º intervalo de classe [150, 155] pelo fato do mesmo possuir uma elevada frequência comparado aos demais. De modo análogo ao encontro anterior, o Pesquisador/Participante auxiliou as participantes a calcularem as Medianas por meio das tabelas.]

[Após a obtenção do valor da Mediana, P-1 percebeu que tal valor era próximo da Média Aritmética já calculada. Aproveitando tal comentário, o Pesquisador/Participante chamou a atenção ao fato de que, tais valores próximos indicam que o conjunto dos dados coletados/observados não possui grandes variações entre si. Também não foi observado dificuldade ao cálculo da Mediana a partir da tabela referente ao número de irmãos.]

[A respeito da 3.ª questão – “Em qual situação a Mediana é a mais indicada para representar o centro da distribuição de frequências?” – P-5 e P-9 conseguiram ‘rapidamente’ responder o exposto abaixo.]

139. **P-5:** *Foi o que a gente falou, quando um número menor está muito distante do maior!*
[Resposta compartilhada por P-9.]

140. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo! Quando um conjunto tem uma grande dispersão, uma grande variação onde os extremos são muito diferentes, a Mediana é a mais indicada!

[Em continuidade, foi realizada a leitura-discussão do item 7.2.3 – Moda. Tal abordagem foi feita de modo análogo ao encontro anterior e as participantes (P-1, P-5 e P-9) não apresentaram dificuldades na realização dos problemas referentes a tal item. Após, o Pesquisador/Participante fez a leitura do item 8 – Retomando uma Dúvida – na qual discutiu-se a questão “Como e quantas classes de intervalos é preciso construir?”. Como P-1 esquecera seu texto em casa, todo o texto foi projetado de modo a permitir-lhe acompanhar a discussão.]

[Em seguida o Pesquisador/Participante realizou a leitura dos itens 8.3 (Estatística Descritiva – Medidas de Posição) e 8.3.1 (Amplitude). Tais itens já foram denotados na transcrição do encontro anterior. Em conversa com as participantes, observou-se que as mesmas estavam ‘acompanhando’ as ideias discutidas nos itens. Após a leitura do primeiro parágrafo do item 8.3.2 (Variância) foi projetado o Gráfico de Dispersão – rever na transcrição anterior – de modo a identificar a ‘grande’ dispersão entre os valores (rendas mensais) e entre a média.]

[Visando discutir o cálculo da Variância, foi solicitado às participantes (P-1, P-5 e P-9) que completassem a tabela denotada no 1.º problema. Na 2.ª coluna da tabela era necessário realizar a diferença entre cada renda mensal e a Média Aritmética – indicado pela expressão $(x_i - \bar{x})$. Já, na 3.ª coluna, dever-se-ia elevar ao quadrado o resultado de tal diferença $(x_i - \bar{x})^2$. Como as participantes não tinham trazido calculadora, as mesmas acharam não haver problema projetar tais valores já que compreenderam o que era

para ser feito. Deste modo, o Pesquisador/Participante projetou tais valores disponibilizando alguns minutos para o registro. Concluído o registro, foi retomada a discussão acerca do 2.º problema com todas as participantes.]

141. **Pesquisador/Participante**: Pessoal, já que no encontro anterior paramos nesta questão, peço para que todos pensem a respeito da mesma. Vamos lê-la: “O que foi possível descobrir a partir da somatória (Σ) dos resultados provenientes de $(x_i - \bar{x})$? Por que o valor encontrado foi esse? Para auxiliar na justificativa é possível utilizar o gráfico denotado há pouco.” Porque o valor 0 foi encontrado? P-2 havia começado a dizer o porquê, né!?

142. **P-2**: *Eu acho que eu cheguei a dizer! A gente só ficou em dúvida sobre como escrever!*

143. **Pesquisador/Participante**: Eu peço pra que vocês pensam sobre isso! E vejam que na 3.ª coluna da tabela a somatória não deu 0! Ok? Por que será que quando eu pego o resultados das diferenças do elemento a sua média e somo tais resultados vai dar sempre 0? Por que eu afirmo isso?

144. **P-8**: *Porque que fica 0?*

145. **Pesquisador/Participante**: É isso mesmo!

146. **P-8**: *Ah, eu não tenho ideia. Porque eu pensei que aqui dava isso porque era número grande!*

147. **Pesquisador/Participante**: Não, sempre vai dar 0.

148. **P-1**: *Não é uma maneira de tirar uma prova deste estudo que a gente fez aqui?*

149. **Pesquisador/Participante**: Uma prova!? Se não der 0 quer dizer que você errou?

150. **P-1**: *É!*

151. **Pesquisador/Participante**: Sim, é uma maneira de tirarmos a prova real! Só pra você compreender que o ‘tamanho’ – valor do número não influencia. Vamos considerar poucos valores: 2, 4, 5 e 9. A Média Aritmética é 2 mais 4 que dá 6 mais 5 que dá 11 e mais 9 que dá 20, dividi isso por 4 que dá 5. Então vamos fazer cada elemento menos a média. **[Enquanto falava o Pesquisador/Participante registrou na lousa o denotado abaixo.]**

2, 4, 5, 9
$\frac{20}{4} = 5$
$ \begin{array}{r} 2 - 5 = -3 \\ 4 - 5 = -1 \\ 5 - 5 = 0 \\ 9 - 5 = 4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 2 - 5 = -3 \\ 4 - 5 = -1 \\ 5 - 5 = 0 \\ 9 - 5 = 4 \end{array}} \right\} + 0 $

Vejam, pessoal, que mesmo com valores ‘pequenos’ a somatória da diferenças deu 0. Vocês achavam que dava 0 porque os valores encontrados eram ‘grandes’?

152. **P-2:** *É! Eu entendi que era assim!* [Resposta compartilhada por P-8.]
153. **Pesquisador/Participante:** Mas não é! Toda a vez que eu somo as diferenças entre o elemento e sua média obterei 0. Por que será que isso acontece?
154. **P-5:** *Deixa eu pensar... Ai será!?*
155. **Pesquisador/Participante:** Fique tranquila, diga o que você está pensando!
156. **P-5:** *Ai, como eu posso explicar... Porque o valor da média, tem uns que estão acima e outros que estão abaixo. E se a média for bem calculada esses números vão ser mais ou menos a mesma coisa. Então na hora de comprovar os dois vai dar 0. [A participante ressaltou que a somatória das diferenças dos elementos menores que a média é igual à somatória das diferenças dos elementos maiores que a média.]*
157. **Pesquisador/Participante:** Você quis dizer que esses números vão se equilibrar?
158. **P-5:** *Se equilibrar!*
159. **Pesquisador/Participante:** Foi com este sentido que você quis dizer?
160. **P-5:** *Não! Mas agora eu acho que é a palavra correta!* [Risos entre todos.]
161. **P-8:** *Ué, tá certo né, ela foi sincera!*
162. **P-5:** *Foi o que eu imagino... Como a média tá no meio, no centro, o que está pra cá e o que está pra lá [Com os dois braços erguidos imitou representando os ‘pratos’ de uma balança em equilíbrio.] vai equilibrar.*
163. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo! P-2, como você tinha falado?
164. **P-5:** *É mais bonito, eu imagino!* [A participante indicou que o modo de explicar de P-2 seria ‘melhor’ que o utilizado por ela.]
165. **P-2:** *Não, imagina! Eu disse que a média... eu achei muito mais fácil resolver por meio do Gráfico de Dispersão, põe o gráfico lá pra gente... [O Pesquisador/Participante projetou novamente o Gráfico de Dispersão. Olhando para o gráfico, a participante continuou.] A média é a medida de tendência central. Se somarmos os valores que está antes da média e tirar a diferença vai dar o mesmo valor da média até o 5000. [A participante pensou em somar os valores (rendas mensais) menores que a Média Aritmética, ou seja, $457 + 490 + 525 + 554 + 689 + 700 + 722 = 4137$. Em seguida subtrair este valor (4137) da média (1142,125) que resultava em 2994,875. Ela acreditava que este último valor era igual a diferença entre o 5000 – 1142,125, o que não era. Torna-se válido pontuar que a princípio o Pesquisador/Participante acreditou que a proposta dada por P-2 estava correta, deste modo foi testá-la perante todas. Após verificar que estava errada, o Pesquisador/Participante salientou que ao somar todos os valores menores que a média, a média deveria ser modificada pois haviam agora apenas dois valores, o 4137 obtido por meio da soma o 5000, e não mais as 8 rendas mensais. Após P-9 fez o seguinte questionamento.]*

166. **P-9:** *Por que foram estudar a variância?*

167. **Pesquisador/Participante:** A Variância, assim como qualquer outro conceito da Ciência veio para responder um problema. A Variância foi desenvolvida para poder determinar o quanto de variação observa-se entre os elementos de um conjunto de dados. Tudo bem, P-9?

168. **P-9:** *Sim!*

169. **Pesquisador/Participante:** Então, pessoal, as distâncias de cada número para a média, quando somadas vai dar 0. Foi o que a P-5 disse, ou seja, deve-se ao fato da Média Aritmética estar no centro da distribuição. Tudo bem, pessoal? Ficou claro o que nós discutimos? **[Todas as participantes indicaram afirmativamente.]**

170. **P-9:** *E qual a origem da Estatística?*

171. **Pesquisador/Participante:** A Estatística surgiu para ajudar o homem na tomada de decisões, sejam sobre fatores relacionados à densidade demográfica ou à economia, entre outras. A P-8 que já cursou Economia utilizou muita Estatística, não foi?

172. **P-9:** *E surgiu, mais ou menos, a partir de quando, historicamente?*

173. **Pesquisador/Participante:** Mais ou menos entre os séculos XVII e XVIII!

174. **P-9:** *Ah, tá obrigado!*

175. **P-2:** *Você pode, por favor, sistematizar uma resposta do 2.º problema pra gente? Porque não tem resposta no final do livro!* **[Risos entre as participantes.]**

176. **Pesquisador/Participante:** É verdade, não tem mesmo! Então tá bom! Então poderíamos dizer assim: os resultados das diferenças entre o valor e sua Média Aritmética é 0, pois tal média representa o centro da distribuição destes valores. Ficou compreensível, o que eu ditei? Leia pra mim, P-2 pra gente melhorar... **[Após a leitura, o Pesquisador/Participante trocou o termo ‘os resultados’ por ‘a somatória’.]** Deste modo, ao perceber que sempre dará 0, os matemáticos utilizaram um recurso aritmético e elevaram ao quadrado o resultado de cada diferença. Assim, a explicação do porquê elevar os valores ao quadrado é devido a isso! Tudo bem, pessoal!? É apenas um recurso aritmético utilizado pelos estatísticos. Percebam que agora **[Apontou para a 3.ª coluna da tabela contendo os valores obtidos por meio da expressão $(x_i - \bar{x})^2$.]** a somatória não é zero! **[P-8 ergueu a mão e disse que não estava entendendo. Deste modo, o Pesquisador/Participante explicou-lhe novamente o porquê do valor elevado ao quadrado.]** Daí pessoal dá essa somatória ‘gigantesca’ – 17081898, 875 e eu peço pra tirar a média, assim divido este valor por 8. E daí eu obtendo como média 2135237,36. E este valor é a própria Variância. Ficou bem grande este valor, não é!?

177. **P-8:** *É!*

178. **Pesquisador/Participante:** E este valor fica grande porque nós elevamos ao quadrado a unidade de medida do problema. Aqui oh **[Apontou para a 2.ª coluna da tabela na qual**

estavam os valores da diferença $(x_i - \bar{x})$.] estavam os valores na mesma unidade de medida, ou seja, em reais. Ao elevar ao quadrado eu vou ter um valor absurdo como esse.

179. **P-8:** *E a aplicação disso?*

180. **Pesquisador/Participante:** Esse valor me diz que a variação entre os dados coletados é 'enorme'. E realmente nós sabemos que a variação entre as rendas mensais é grande... no entanto ficou um número 'absurdo'! **[Referiu-se ao valor da Variância.]** Pra resolver isso, ou seja, 'voltar' este valor na unidade de medida do problema, ou seja, o real (dinheiro)... se eu elevo ao quadrado agora eu 'tiro' a raiz quadrada!

181. **P-8:** *Ai, não creio!*

182. **Pesquisador/Participante:** Eu faço o caminho de volta, pessoal! Daí eu obtenho o Desvio Padrão. É simples, P-8, não é complicado!

183. **P-8:** *É simples quando você tem a calculadora certa!*

184. **Pesquisador/Participante:** Ah, sim, concordo! Assim, o Desvio Padrão é obtido por meio da raiz quadrada positiva da Variância! Tudo bem esta expressão, pessoal? **[Projetou a seguinte expressão.]**

$$DP = +\sqrt{V}$$

O seu cálculo é obtido a partir da Variância. E, quando eu extraio a raiz do valor que encontramos (2135237,36) nós encontramos o número, aproximado, 1461,25. Este valor voltou à unidade de medida do problema. E como este valor de Desvio Padrão ficou grande podemos afirmar que o conjunto dos dados (rendas mensais) é muito heterogêneo (diferente). Quando o Desvio Padrão dá um valor pequeno isso indica que o conjunto dos dados é homogêneo, não há muita variação entre os elementos. Eu falei muito... Vamos às dúvidas, podem perguntar! **[Quando questionada, P-9 disse ter compreendido. P-2 colocou a seguinte questão.]**

185. **P-2:** *Esse número enorme da Variância, são, como se fosse a variação de todos os valores?*

186. **Pesquisador/Participante:** Sim, só que P-2 este valor, por ter sido elevado ao quadrado não está na mesma unidade de medida do problema. Daí é necessário extrair a raiz quadrada...

187. **P-2:** *Mas vamos voltar lá na Variância! Este valor indica a variação entre todos os elementos?*

188. **Pesquisador/Participante:** Sim, podemos dizer isso! **[Quando questionadas, as demais participantes indicaram ter compreendido a explicação realizada. Entretanto, P-5 questionou o seguinte.]**

189. **P-5:** *Eu entendi o processo, mas eu uso isso quando eu quero o quê?*

190. **Pesquisador/Participante**: Quando você quer investigar se os valores coletados apresentam grande variação – dispersão entre si, se estão muito dispersos... Por isso que é uma Medida de Dispersão.

191. **P-5**: *Certo! Ah tá!*

192. **Pesquisador/Participante**: Quando você quer ver se a Média Aritmética é mesmo suficiente para caracterizar o centro da distribuição de frequências... Percebam que nesta situação, das rendas mensais, a Média Aritmética não foi suficiente... e o Desvio Padrão e a Variância mostram isso. Ela não vai ser suficiente porque... **[P-9 interrompeu e disse.]**

193. **P-9**: *Matematicamente você vai justificar isso!*

194. **Pesquisador/Participante**: Isso! Tudo bem?

195. **P-5**: *Sim, tá tranquilo!*

196. **Pesquisador/Participante**: Muito interessante a sua pergunta, P-5. Está tudo bem mesmo, pessoal?

197. **P-8**: *Mais ou menos!*

198. **Pesquisador/Participante**: Mais ou menos? Qual é o problema!

199. **P-8**: *Ah, não... de usar isso! É que é muita conta, né!*

200. **Pesquisador/Participante**: É, as contas são um pouco trabalhosas...

201. **P-2**: *Então a Mediana não dá conta?*

202. **Pesquisador/Participante**: A Mediana dá conta! Lembrem que a Variância e o Desvio Padrão vão auxiliar a compreender a Média Aritmética. Elas foram inventadas para qualificar (complementar) a Medida de Posição, no caso a Média Aritmética.

203. **P-2**: *Qual foi o valor da Mediana, mesmo?*

204. **Pesquisador/Participante**: Nós pegamos o 554 mais o 689 e dividimos por 2 obtendo 621,5. O 1461,25 mostra que há grande variância entre as rendas mensais coletadas. Então este número mostra que o conjunto das rendas mensais não é homogêneo, ou seja, que há uma grande ‘distância’ entre os valores. **[As participantes anotaram a discussão em suas folhas.]** Quando nós calculamos o Desvio Padrão e o valor é pequeno, isso nos garante que a Média Aritmética é um bom valor representativo do centro da distribuição. Agora, quando o Desvio Padrão é elevado isso significa que a Média Aritmética não vai ‘mostrar’ muita coisa, digamos assim. Sim, não... Estou percebendo alguma dúvida em seu olhar?

205. **P-2**: *Ai, não está claro ainda!*

206. **Pesquisador/Participante**: Em qual parte?

207. **P-2:** *Ah, eu não sei explicar... Eu entendi o que faz o cálculo. Mas eu acho que está abstrato demais, na verdade!*

208. **Pesquisador/Participante:** É!?

209. **P-2:** *Não é! É, ficou meio assim... Eu já tinha um recurso, que era a Mediana, e ela por si já tava me dando essa consideração. Tudo bem, daí eu comecei a pensar porque aí eu tava vendo todos, né, um grupo menor. [Referiu-se aos dados coletados.] Ah, então talvez pra grupos maiores eu precisaria disso aí!*

210. **Pesquisador/Participante:** Eu entendo a sua dúvida. No exemplo que consideramos das rendas mensais, por serem poucos valores nem seria tão necessário fazer tais cálculos já que é possível comparar as rendas mensais entre si e identificar a grande dispersão existente entre as mesmas. Vamos supor uma planilha com 10000 valores, tudo bem?

211. **P-5:** *Ixi!*

212. **Pesquisador/Participante:** Tá dando pra melhorar? Sim, mesmo? **[P-2, por meio de expressão facial, indicou afirmativamente.]** É claro que eu não traria um problema com tantos dados. Eu só quis discutir a ideia central por trás disso! A ideia central foi, então, compreendida, pessoal? **[Todas as participantes sinalizaram afirmativamente através de gesto facial.]** Então quando falarmos de Variância iremos pensar num modo de determinar se num conjunto de dados há grande variação dos valores entre si, ou seja, se o conjunto é ou não heterogêneo, e o Desvio Padrão nos permite visualizar a variação na unidade de medida utilizada na pesquisa. E percebam que eu obtenho a Variância e o Desvio Padrão eu relação à Média Aritmética. Ok!? Não envolve nem Moda e nem Mediana!

213. **P-9:** *Então vamos ver outro exemplo, então, por uma coisa mais concreta! Estaríamos, sei lá, numa reunião do IBGE, então os pesquisadores-matemáticos foi feito uma pesquisa sobre renda familiar. Chegou-se numa Média Aritmética, tal... Então eles podem tirar uma prova, ou qualificar isso e vão buscar a Variância e vão chegar no... Bom, pra mim tá certo essa renda do estado de São Paulo, então eu posso ver se o valor da média é exato...*

214. **Pesquisador/Participante:** Interessante o seu exemplo. Podemos dizer o seguinte: os estatísticos do IBGE chegam à conclusão de que a média da renda mensal da população de São Paulo é 2000 reais. Ao calcular o Desvio Padrão supomos que deu 2000 reais. Isso indica que a Média Aritmética não representa a realidade da população do estado de São Paulo, porque os valores ali estão muito dispersos. Tem gente ganhando 500 e gente ganhando 6000. Tudo bem, pessoal. **[As demais indicaram afirmativamente.]** Lembrando que a Variância e Desvio Padrão iremos utilizar, mesmo, quando formos fazer uma pesquisa e vamos analisar os resultados por meio da Estatística. Eu as trouxe aqui para que vocês ampliassem essa compreensão! Ajudou ou não!

215. **P-9:** *Sim!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**

216. **Pesquisador/Participante:** Concorde, P-2, é ‘perda’ de tempo num conjunto com poucos valores...

[Dando continuidade, o Pesquisador/Participante solicitou que o Desafio Para Casa – item 8.4 – fosse feito ‘em casa’ a ser discutido no próximo Grupo de Estudo. Observe o desafio abaixo.]

8.4 Desafio para casa

O professor de Educação Física Pedro foi encarregado de organizar atividades de lazer para 3 grupos de 6 pessoas cada e recebeu a informação de que a Média Aritmética de idade de cada grupo é 20 anos. Apenas esta informação é suficiente para o planejamento das atividades a serem realizadas? Justifique sua resposta.

[Em seguida, cada participante elaborou a síntese referente às Medidas de Dispersão – conforme combinado no encontro anterior. Decorrido o tempo disponibilizado, deu-se início à leitura das sínteses elaboradas. A primeira a ler foi P-9, conforme denotado abaixo.]

217. **P-9:** *Eu coloquei assim: “Foi possível concluir que não é somente com as medidas de posição (média, moda e mediana) que conseguimos representar uma boa quantidade e o resultado que se espera em tabelas e gráficos estatísticos. Aprendemos sobre as medidas de dispersão, sobre maneiras de calcular que antes não tínhamos conhecimento, e que assim podemos justificar e qualificar, por exemplo, as próprias médias de posição.”.*

218. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-5 faça a leitura pra gente, por favor!

219. **P-5:** *Eu coloquei que: “Quanto às medidas de dispersão, conversamos sobre as maneiras de certificar se a média aritmética obtida reflete um número coerente com a realidade.”. Foi o que ficou mais forte pra mim!*

220. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-4...

221. **P-4:** *Então, eu escrevi sobre o desafio, podia?*

222. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro!

223. **P-4:** *Eu coloquei assim: “O desafio feito, depois da explicação, eu consegui entender as operações inversas. Se a somatória dividida pelo total resulta na média aritmética, a média vezes o total dá a somatória!”.*

224. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-2, por favor.

225. **P-2:** *Compreendi as medidas de dispersão que incidem sobre a média que são a variância e o desvio padrão, e que sua utilização é para um número significativo de dados, ou seja, são utilizados em pesquisas com quantidades elevadas de participantes, com o objetivo de verificar se a média é representativa, ou se há bastante discrepância entre os dados coletados.*

226. **Pesquisador/Participante:** Ok! Isso mesmo! P-7, leia pra gente.

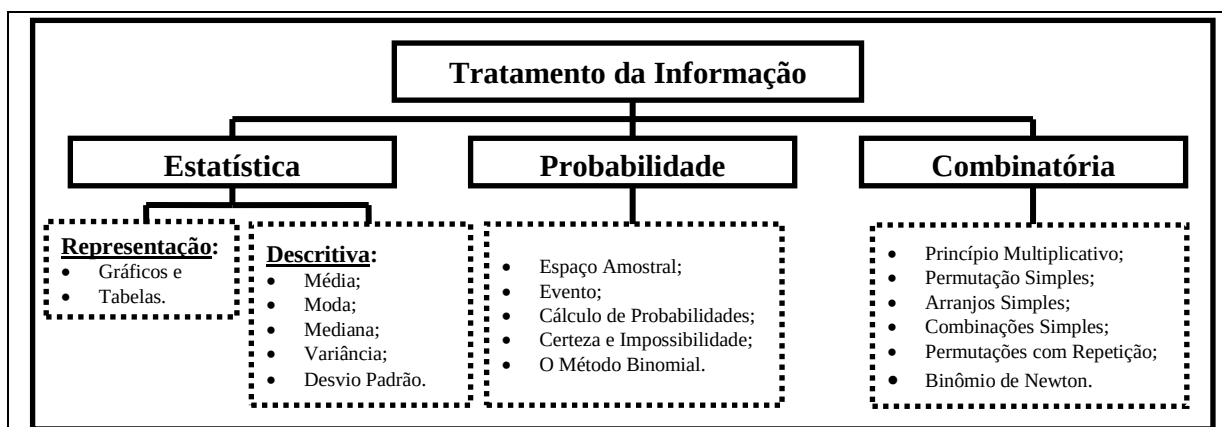
227. **P-7:** *A partir das discussões no grupo aprendi como calcular a variância e o desvio padrão. Compreendi que o valor encontrado da variância não está na mesma unidade de medida da variável, sendo assim necessário calcular o desvio padrão, e que essas medidas*

são utilizadas para saber se a variação no conjunto é muito grande ou não, ou se esses números são muito diferentes entre si.

228. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-8, por favor.

229. **P-8:** Quanto às medidas de dispersão eu entendi os conceitos e os cálculos. Vi que o conjunto de valores distantes entre si mostra que o conjunto não é homogêneo, mas achei um pouco abstrato. Abstrato no sentido de ter mais exemplos, né!

230. **Pesquisador/Participante:** Compreendi. Iremos, no decorrer do Grupo de Estudo fazer mais problemas sobre tais conceitos. Hoje, como nós já terminamos a parte da Estatística, lá na página 14 eu trouxe naquele organograma o que era constituída o Tratamento da Informação. [O Pesquisador/Participante projetou o seguinte organograma já discutido no 2.º encontro.]



É possível afirmar que hoje, tais questões da Estatística foram, de certo modo, aprofundadas por vocês?

231. **P-9:** Sim! [Resposta compartilhada pelas demais participantes.] Com certeza!

232. **Pesquisador/Participante:** Ao vocês lerem, tanto o conteúdo da parte da Representação (Gráficos e Tabelas) e o da parte Descritiva (Medidas de Posição e de Dispersão), tais assuntos passaram a ter mais significado?

233. **P-2:** Sim! [Resposta compartilhada pelas demais participantes.]

234. **Pesquisador/Participante:** Vocês acham que foi possível, entre aspas, um movimento de (re)significação destes conceitos? Pra você houve isso, P-4?

235. **P-9:** É, o meu caso não foi nem só (re)significação, mas conhecimento, a maior parte das coisas, por exemplo, eu conhecia a nomenclatura de alguns tipos de gráficos e tabelas, o que que é! Mas coisas, por exemplo, tipo o que aprofundou sobre medidas de posição, medidas de dispersão que eu não lembro de ter aprofundado em nenhum momento no Ensino Médio. Na verdade eu entendo como um conhecimento que eu adquiri também!

236. **Pesquisador/Participante:** Então não foi nem (re)significação, mas sim construção ‘nova’?

237. **P-9:** *Sim! Eu (re)signifiquei no sentido de que sabíamos parte ou pouco e nós aprofundamos... Nesse sentido é (re)significação. Mas também construção de novos conhecimentos.*

238. **Pesquisador/Participante:** Quem compartilha da resposta da P-9? **[P-4 ergueu a mão esquerda.]** Você P-4?

239. **P-4:** *Sim!*

240. **Pesquisador/Participante:** Então você já tinha ouvido sobre o conceito de gráficos e tabelas mas não tinha ido tão profundo?

241. **P-4:** *Não tinha ido nem superficial mesmo!*

242. **Pesquisador/Participante:** Alguns conceitos daqui você poderia dizer que foram construídos?

243. **P-4:** *Então, esta parte de média e mediana a gente tinha visto com a professora M. já. [Referiu-se a uma disciplina cursada na graduação.] Só que, eu penso assim, mesmo vendo com ela não foi da mesma forma que aqui! Porque foi mais, assim, sei lá, do mesmo jeito que a gente tinha visto na escola, mesmo... deu o conceito, é assim que calcula e tal! Agora, você trouxe pra gente a (re)significação mesmo, o sentido, como a gente usa, entende!?*

244. **Pesquisador/Participante:** Legal, interessante!

245. **P-4:** *Como a gente vai usar mesmo, o porquê!*

246. **Pesquisador/Participante:** Nós discutimos o conceito, o procedimento dentro dum problema e o porquê disso! Ok! E você, P-2?

247. **P-2:** *Pra mim foi bastante que (re)significou mesmo... Eu acho que coisas que já até estavam consolidadas, de maneira até incorreta, deu pra repensar e reformular.*

248. **Pesquisador/Participante:** Como a questão da média? **[A participante indicou, por meio de expressão facial, afirmativamente.]** P-5...

249. **P-5:** *Eu acho que sim, né! Tudo que a gente tinha ouvido falar, mas aqui foi mais profundo. E também porque foi feito de diferentes maneiras. Com a professora M. a gente já tinha visto média, mas foi daquele jeito soma tudo e divide. Mas e daí, quando é do outro lado, como foi no desafio, faltando outro... eu nunca tinha pensado assim! [Referiu-se aos desafios nos quais, por meio do valor da média e do total de elementos obteve-se a somatória dos mesmos.] Eu acho que foi assim, um aprofundamento e alguns conceitos novos também!*

250. **P-2:** *Mas eu acho que assim, antes nós fomos apresentados... mas não teve aquela construção no sentido, assim, de você fazer e discutir. Por exemplo, lá [Referiu-se à disciplina cursada.] eu fiz e ela disse: “O correto é x!”. Ou seja, não teve uma discussão. [Neste momento P-9 interrompeu e falou.]*

251. **P-9:** *Quando eu falei da parte que eu não tinha visto eu isolei a parte da graduação. Eu pensei, assim, enquanto aluno do Ensino Médio...*

252. **P-2:** *Mas eu aprendi, por exemplo, quando eu fiz o curso profissionalizante eu tive Estatística. Eu tinha visto todos os conteúdos, mas mesmo aqui, na hora de fazer o exercício ficou muito claro que eu ainda não tinha construído, porque igual lá, é claro que eu já tinha visto a questão da frequência, mas foi automático do outro lado contar as variáveis e achar a do meio... [Referiu-se ao engano cometido durante o calculo da Mediana a partir da tabela de frequência.] Se eu já tivesse construído isso jamais teria feito assim! Então, tipo assim, vi, vi! Já tinha tido contato? Já! Mas aqui, foi tipo assim, além de você tentar fazer, a gente discutiu, a gente trocou, porque fazer de um jeito, porque fazer do outro... E fora as possibilidades de maneiras diferentes de se resolver, isso é fantástico!*

253. **Pesquisador/Participante:** Ok!

254. **P-2:** *Porque eu sinto muito isso, na educação que eu tive “Não, era uma maneira única!” [Referiu-se à ideia construída quanto à solução dos exercícios ou problemas matemáticos.] Ou você fazia daquele jeito e chegava no valor x ou tava errado!*

255. **P-8:** *É isso que eu achei legal, também! Deu pra perceber aqui que cada um tem uma linha de pensamento. Aí eu achava assim, como eu fazia muito detalhado [Referiu-se ao modo utilizado para solucionar o problema.] eu perdia tempo e o pessoal respondia rápido. Eu sempre tive essa preocupação e “Então, não tô fazendo certo!” Aqui, do modo que a gente discuti, dá pra ver que eu não tô fazendo errado, está certo! Só que é um modo de eu fazer, de eu entender, de eu compreender a sequência do exercício... Então eu achei muito legal isso! E é, realmente, igual vocês tinham falado e eu vou confirmar. A gente aprendeu o mecânico, sem o questionamento. E aqui a gente viu, com os exercícios e mesmo com a nossa discussão que a gente faz aqui... quando tá o grupo pequeno é gostoso e a gente vê que cada um tem uma linha de pensamento, mas chegar num lugar comum!*

256. **Pesquisador/Participante:** Claro!

257. **P-9:** *E isso não tá somente em Piaget! A gente relaciona ao Vigotski que fala exatamente disso, né, da zona de desenvolvimento, quando você socializa com os outros a gente entra num novo patamar de conhecimento!*

258. **Pesquisador/Participante:** Os psicólogos denominados nesta vertente construtivista, interacionista ou sócio-construtivista...

259. **P-9:** *E é isso que dá tanto debate, né!*

260. **Pesquisador/Participante:** A meu ver, a grosso modo, podemos considerar tais estudiosos como construtivistas (interacionistas, sócio-históricos) no sentido de defenderem a construção realizada pelo sujeito, no qual este sujeito é um sujeito ativo. E realmente poderíamos citar vários estudiosos que advogam neste sentido... E pra você, P-7?

261. **P-7:** *Ah, eu acho que é tudo isso que o pessoal falou! Eu acho que pra mim, boa parte foi até construída porque eu não tive muito nem isso... Eu vi boa parte mesmo na aula da professora M., mas também foi como eles falaram. Foi colocada “A média é assim e*

calcule!”, tanto que eu tive várias dificuldades na aula e a P-2 me ajudava porque eu fiz, assim, calculava mas sem entender aquilo!

262. Pesquisador/Participante: Você aplica o procedimento mas sem compreensão? Eu posso afirmar isso, P-7?

263. P-7: *Sim, é! Tanto que quando saía errado eu não entendia o porque tinha errado. Eu não compreendia. E aqui não, aqui foi diferente. Foi dando uma continuidade e eu fui entendendo o porque fazer aquilo! Igual, hoje mesmo, a gente viu desvio padrão e não vi por ver. Eu vi que ele dá uma sequência na variância pra você chegar naquele valor. Não é do nada como é colocado que é a raiz da variância e ponto!*

264. Pesquisador/Participante: Eu acredito que, mesmo passando certo tempo, tais conceitos construídos poderão ser acessados quando vocês tiverem necessidade... P-8, quero ouvir sua opinião, e como você fez o curso de Estatística a sua opinião pode ser diferente das outras... Como está sendo esta (re)significação?

265. P-8: *Você quer saber aqui do curso e do curso de Economia?*

266. Pesquisador/Participante: É, porque você já teve uma vivência no Ensino Superior sobre este assunto!

267. P-8: *Sim!*

268. Pesquisador/Participante: Você sabe (sabia) fazer!

269. P-8: *Sim!*

270. Pesquisador/Participante: Mas você havia parado pra pensar sobre o porquê destes conceitos?

271. P-8: *Lá [Referiu-se ao curso de Economia.] a gente tinha isso e tinha que calcular... igual foi falado dos salários... a gente fazia os cálculos... eram bem grandes. A gente pegava coisas de empresas pra fazer cálculo, então eu tinha isso aí! Só que faz tempo... se você não usa, você perde né, o fazer tudo... E aqui é gostoso porque realmente tem significação, igual você deu exemplo, você mostrou, a gente fez junto, você explicou... deu pra ‘gravar’ melhor agora! Eu recordei e agora tá gravado... Eu tinha visto e recordei...*

272. Pesquisador/Participante: Ok! E você, P-1?

273. P-1: *Então, eu já tinha tido esta parte de gráfico e não tive muita dificuldade. Mas nesta parte de Estatística da mediana e da média eu só tive aqui na faculdade e não tava bem...*

274. Pesquisador/Participante: Então você pode dizer que aqui possibilitou, ou está possibilitando uma construção?

275. P-1: *Sim!*

276. Pesquisador/Participante: Eu concordo com a P-8 que tem que haver outros exemplos/problemas porque um conceito não é construído rapidamente. Eu vou trazê-los no caminhar do nosso Grupo de Estudo. Até porque, até setembro teremos vários meses pra isso! Então, pessoal, vamos iniciar o que está proposto pra hoje. Nós vamos estudar o Ensino desta Estatística só que nos anos que vocês darão aula (de 1.º ao 5.º ano). **[Como solicitado pelas participantes, foi realizada a leitura do item 9.1 – denotado abaixo. P-9 realizou a leitura.]**

9.1 Ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Até o momento foram abordados alguns conteúdos pertencentes à Estatística, sendo essa uma das áreas que constituem o ‘bloco’ de conteúdo denominado Tratamento da Informação. Por meio de algumas situações problemas denotou-se a possibilidade da apresentação/organização dos dados coletados/observados por meio de tabelas e representações gráficas. Após, fez-se um estudo acerca de algumas medidas (*Média Aritmética* e *Mediana*) que permitem identificar o **centro** da distribuição de frequências e, desse modo, possibilitam uma ‘primeira’ interpretação dos dados coletados/observados. Foi ressaltada a necessidade de outras medidas (*Amplitude*, *Variância* e *Desvio Padrão*) para a determinação do ‘grau’ de variação existente dos tais dados permitindo, por conseguinte, uma ‘melhor’ interpretação da informação obtida por meio da Média Aritmética.

Após tal abordagem faz-se interessante os seguintes questionamentos tendo em vista a preocupação quanto à Formação Inicial do (futuro) professor de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental: “*Quais conteúdos necessitam ser abordados referentes à Estatística nesse nível de ensino?*”; “*Como realizar a abordagem de tais conteúdos?*”.

Visando auxiliar ao ‘pensar sobre’ os questionamentos, denota-se abaixo o rol⁵¹ de conteúdos conceituais e procedimentais em relação ao Tratamento da Informação proposto pelo PCN para o 1.º ciclo (1.ª e 2.ª séries) e para o 2.º ciclo (3.ª a 4.ª séries).

- Leitura e interpretação de informações contidas em imagens.
 - Coleta e organização de informações.
 - Criação de registros pessoais para comunicação das informações coletadas.
 - Exploração da função do número como código na organização de informações (linhas de ônibus, telefones, placas de carros, registros de identidade, bibliotecas, roupas, calçados).
 - Interpretação e elaboração de listas, tabelas simples, de dupla entrada e gráficos de barra para comunicar a informação obtida.
 - Produção de textos escritos a partir da interpretação de gráficos e tabelas. (BRASIL, 1997, p. 52)
-
- - Coleta, organização e descrição de dados.
 - Leitura e interpretação de dados apresentados de maneira organizada (por meio de listas, tabelas, diagramas e gráficos) e construção dessas representações.
 - Interpretação de dados apresentados por meio de tabelas e gráficos, para identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos.
 - Produção de textos escritos, a partir da interpretação de gráficos e tabelas, construção de gráficos e tabelas com base em informações contidas em textos jornalísticos, científicos ou outros.
 - Obtenção e interpretação de média aritmética.
 - Exploração da idéia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de “sorte”.
 - Utilização de informações dadas para avaliar probabilidades.
 - Identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais. (BRASIL, 1997, p. 61)

⁵¹ Faz-se oportuno ressaltar que tal documento (PCN) contempla o que ‘deveria’ ser ensinado da 1ª a 4ª série do Ensino Fundamental em relação à Matemática, assim, não contempla os conteúdos a serem abordados no 1º ano do Ensino Fundamental. A inclusão deste primeiro ‘ano’ deve-se às Leis nº. 11.114, de 16/05/2005 e nº. 11.274, de 6/2/2006, na qual o Ensino Fundamental passa a ser constituído por 9 anos de estudo, recebendo alunos com 6 anos de idade (ou a completar). Estabelecendo uma comparação com as séries ‘atuais’, o 1º ano equivale à Pré-escola da Educação Infantil, o 2º ano à 1ª série do Ensino Fundamental, e assim por diante.

[O Pesquisador ‘chama’ a atenção das participantes sobre o fato dos PCNs não abordarem o 1.º ano do Ensino Fundamental. Tal fato deve-se, pois, no momento de sua elaboração, o Ensino de 9 anos ainda não havia sido implementado.]

[Dando continuidade, P-9 leu os seguintes quadros.]

Outro material – de autoria própria – apresenta a distribuição dos conteúdos referentes ao Tratamento da Informação (Estatística) a serem ensinados do 1.º ao 5.º ano do Ensino Fundamental. Observe os quadros nos quais tais conteúdos encontram-se distribuídos por ano/bimestre.

1.º Ano do Ensino Fundamental – Tratamento da Informação (Estatística)			
1.º Bimestre	2.º Bimestre	3.º Bimestre	4.º Bimestre
Tabelas Simples – registro de observações diárias.	- Tabelas Simples – registro de observações diárias. - Apresentação de informações pesquisadas de modo pessoal.	Apresentação de informações pesquisadas de modo pessoal.	Apresentação de informações pesquisadas de modo pessoal.

2.º Ano do Ensino Fundamental – Tratamento da Informação (Estatística)			
1.º Bimestre	2.º Bimestre	3.º Bimestre	4.º Bimestre
Tabelas simples – leitura e interpretação.	Gráfico de Colunas – leitura e interpretação.	Tabelas simples – organização de informações coletadas.	Gráficos de Colunas – organização de informações coletadas.

3.º Ano do Ensino Fundamental – Tratamento da Informação (Estatística)			
1.º Bimestre	2.º Bimestre	3.º Bimestre	4.º Bimestre
Registro (pessoal) de informações coletadas.	Registro (pessoal) de informações coletadas.	Tabelas Simples – leitura, interpretação e descrição oral da situação apresentada.	Gráficos de Barras e Colunas – leitura, interpretação e descrição oral da situação apresentada.

4.º Ano do Ensino Fundamental – Tratamento da Informação (Estatística)			
1.º Bimestre	2.º Bimestre	3.º Bimestre	4.º Bimestre
Tabelas e Gráficos – leitura e interpretação de dados organizados.	Tabelas e Gráficos (situações problemas) – solução por meio de dados organizados.	Tabelas e Gráficos – descrição (por escrito) da situação apresentada.	- Tabela Simples e de Dupla Entrada – interpretação dos dados organizados. - Gráficos de Barras, Colunas e Linhas – interpretação dos dados organizados.

5.º Ano do Ensino Fundamental – Tratamento da Informação (Estatística)			
1.º Bimestre	2.º Bimestre	3.º Bimestre	4.º Bimestre
Tabelas Simples e de Dupla Entrada (situações problemas) – solução a partir dos dados apresentados.	- Gráficos de Barras e de Colunas (situações problemas) – solução a partir dos dados apresentados. - Gráfico de Linhas – leitura dos dados apresentados.	Tabelas e Gráficos – construção a partir de dados coletados.	- Gráfico de Setor – leitura dos dados apresentados. - Tabelas e Gráficos – construção a partir de dados coletados.

[A pedido das participantes, o Pesquisador/Participante fez a leitura-explicação de cada quadro separadamente. Para tanto, projetou cada quadro na tela.]

Durante a leitura, as participantes realizaram alguns comentários e ou questionamentos. Observe o exposto por P-2 no momento da discussão referente ao 1.º quadro – 1.º ano do Ensino Fundamental observou-se o seguinte.]

277. **P-2:** *Eu estava comentando com P-7 e não sei fazer essa divisão em bimestres.*

278. **Pesquisador/Participante:** Então você acha interessante realizarmos este estudo?

279. **P-2:** *Sim, eu acho fantástico!*

280. **P-8:** *É isso que acho que falta pra gente!*

281. **P-2:** *É, com certeza! [Resposta compartilhada pelas demais participantes.] Então quer dizer que no primeiro ano a gente pede a opinião do aluno mas é a gente que registra!*

282. **Pesquisador/Participante:** Sim! Os alunos até conseguem registrar desde que, por exemplo, a tabela esteja ‘pronta’ e eles consigam entender o que estão fazendo. E eu trouxe até uma atividade pra gente discutir sobre!

283. **P-9:** *Ah, por exemplo, uma atividade de painel. Então cada aluno pode ir à lousa e colar o seu animal, fazendo assim um painel!*

284. **Pesquisador/Participante:** Sim, é um tipo de registro e organização feito em conjunto com o professor.

285. **P-8:** *Aqui, naquela escola A, que é excelente, eles têm a linha do tempo... então todo dia eles saem pra fora e registram, com desenhinhos de pintar... Aí depois ela pegou de montar as colunas... [Referiu-se a uma atividade desenvolvida pela professora da referida escola.]*

286. **Pesquisador/Participante:** Inclusive, uma das atividades que iremos analisar é sobre a condição do tempo... É bem semelhante...

287. **P-2:** *E o currículo está sendo feito com todas as disciplinas?*

288. **Pesquisador/Participante:** Sim! Cada professor especialista de uma área fica responsável pela elaboração conjuntamente com os professores em exercício da rede municipal de ensino.

[Finalizada a abordagem dos quadros, o Pesquisador/Participante projetou os conteúdos conceituais e procedimentais propostos pelo PCN comentando-os. Em seguida, solicitou às participantes que pensassem acerca do seguinte questionamento.]

1. Com exceção dos conteúdos referentes à Probabilidade e Combinatória denotados no PCN, faça uma comparação entre os conteúdos propostos por esse documento e os ressaltados nos quadros de nossa autoria. Registre as semelhanças e as diferenças.

[Para a discussão as participantes reuniram-se do seguinte modo: P-1 e P-8; P-2, P-4 e P-7; P-5 e P-9. P-2 explicou para suas colegas a diferença entre tabela simples e de dupla entrada. Para auxiliá-la, o Pesquisador/Participante disse que um exemplo de tabela de dupla aparece no 5.º problema – Atividade 4. As participantes acharam

melhor identificar apenas as diferenças, pois julgaram haver muita semelhança entre os quadros e o PCN.]

[P-2 questionou acerca do significado de diagrama. O Pesquisador/Participante lhe disse que diagrama é um tipo de esquema, uma representação visual que denota uma ideia ou conceito, sendo geralmente feito por meio de palavras (símbolos) interligadas por setas indicando diferentes relações. Salientou, ainda, que alguns autores consideram diagramas como sendo gráficos, no entanto, para o PCN os mesmos são distintos. Em continuidade, foi ressaltado o significado de lista como sendo a apresentação/organização dos dados coletados de uma mesma variável em linhas (verticais ou horizontais). Quando P-8 perguntou acerca da diferença entre diagrama e lista, P-4 lhe explicou indicando haver compreendido tal diferença.]

[Em conversa com P-4 ela ressaltou o seguinte.]

289. **P-4:** *Pela primeira vez, quando eu fui fazer um concurso no sábado, eu tentei fazer a parte da Matemática, coisa que antes eu não conseguia. No vestibular, mesmo, eu nem fiquei vendo as questões, apenas escolhi uma alternativa igual para todas as questões e coloquei!*

[Tal fato denota que, de certo modo, a participação no Grupo de Estudo está possibilitando à P-4 um novo ‘olhar’ em relação à Matemática, a ponto da mesma ter o interesse em pensar sobre um problema matemático.]

[Decorrido o tempo disponibilizado (20 minutos) deu-se início ao compartilhamento das respostas elaboradas.]

290. **Pesquisador/Participante:** P-4, por favor, leia pra gente o que vocês concluíram sobre o problema.

291. **P-4:** *A gente colocou as diferenças...*

292. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, leia pra gente!

293. **P-4:** *No PCN do 1.º ciclo a gente colocou que a diferença do PCN para o seu esquema era a tabela de dupla entrada que não tem no 1.º ciclo e os texto escritos...*

294. **Pesquisador/Participante:** *É isso mesmo!*

295. **P-4:** *No seu documento tem os gráficos de coluna e a descrição oral que não tem no PCN. [Resposta falada conjuntamente por P-2 e P-7.]*

296. **Pesquisador/Participante:** Ok!

297. **P-4:** *Depois, no 2.º ciclo há diferenças também do PCN pro seu. Então, no seu não tem os textos escritos e a obtenção e interpretação da média aritmética.*

298. **Pesquisador/Participante:** Ok! A Média Aritmética realmente não tem. Mas, os textos escritos eu os coloquei nos quadros dos 4.º e 5.º anos...

299. **P-2:** *Ah, é verdade, a gente não viu, nos desculpe.*

300. **Pesquisador/Participante:** Sem problema nenhum! Mas a Média Aritmética realmente não foi inserida em conversa com os professores durante a elaboração do currículo. Quais outras diferenças vocês encontraram?
301. **P-2:** Não, a gente achou só essas! [Resposta compartilhada por P-4 e P-7.]
302. **P-8:** Eu e a P-1 colocamos que no seu plano você faz a diferença entre os gráficos de barras e de colunas. E no PCN só gráficos de barras.
303. **Pesquisador/Participante:** O PCN não diferencia barras de colunas.
304. **P-1:** Ah, entendi. [Resposta compartilhada por P-8.]
305. **Pesquisador/Participante:** O PCN entende por barras como sendo na horizontal ou vertical. Depende da referência utilizada.
306. **P-9:** Ah, desculpe, eu acabei me dispersando e não sei se vocês falaram ou não! Que no 2.º ciclo, por exemplo, no 1.º item – Coleta e organização de dados - ... então, aqui nos PCN aparecem para o 2.º ciclo, só que no seu – Currículo Comum – aparece já no 2.º ano no 3.º e 4.º bimestre já que eu entendo por tabela simples a organização das informações coletadas, então já entra a organização e descrição dos dados!
307. **Pesquisador/Participante:** Entendi a sua colocação. Só que, lá no 1.º ciclo do PCN já tem a ‘Coleta e organização dos dados’. [Neste momento foi interrompido pela participante.]
308. **P-9:** Ah, tá, então eu vou fazer um questionamento. A questão da descrição dos dados, você entende pelos alunos socializando os dados, então eles estão colocado neste enfoque, né!? Então, como você falou, as crianças são diferentes, então podem chegar crianças na sala e já descrever corretamente num primeiro momento “Ah, eu tava em casa e...”, então isso já seria uma descrição de dados?
309. **Pesquisador/Participante:** Sim, só que neste caso há a necessidade do aluno realizar a descrição organizada dos dados, a organização indica este tratamento da informação e não informações todas misturadas... Qual outra diferença você encontrou?
310. **P-9:** Deixa eu ver... eu fiz um esquema... Eu escrevi assim: “Há vários elementos semelhantes como leitura e interpretação, coleta e descrição de informações e elementos diferentes de transformação, como interpretação e produção de textos que nos PCNs aparecem no ciclo 1 e no Currículo Comum são deslocados para o ciclo 2.”
311. **Pesquisador/Participante:** Isso!
312. **P-9:** No PCN ciclo 2 há itens que não aparecem no Currículo Comum como a média aritmética e a descrição objetiva da probabilidade.
313. **Pesquisador/Participante:** Só que, como pontuei, a Probabilidade não estaria mesmo no quadro já que só foram ressaltados conteúdos da Estatística...
314. **P-9:** Sim, claro! Eu acho que é só isso! O que eu coloquei as outras já haviam falado!

315. **Pesquisador/Participante**: Pessoal, vocês acham interessante esse movimento de confronto entre uma proposta oficial e uma mais local? Como vocês já disseram que acharam interessante essa distribuição por bimestre lembrando que é uma possibilidade, entre outras possíveis. Pela fala de vocês durante a graduação vocês no tiveram momentos como esse?

316. **P-2**: *Não! Nunca! Infelizmente não!* [Resposta compartilhada pelas demais participantes.]

317. **Pesquisador/Participante**: Concordo com você no uso do infelizmente!

[Devido ao tempo quase ‘encerrando’, foi solicitado às participantes que pensassem acerca dos demais problemas do referido item (Ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental) em suas casas, ficando para o próximo encontro a socialização-discussão das respostas. Além dos problemas, a síntese deste encontro também deverá ser elaborada para a leitura no início do próximo encontro.]

[Nos minutos finais, como as participantes demonstraram interesse em ‘observar’ a distribuição dos conteúdos por ano/bimestre, o Pesquisador/Participante projetou (rapidamente) os conteúdos referentes aos demais blocos de conteúdos.]

APÊNDICE N – TRANSCRIÇÃO DO 10.º ENCONTRO

Data: 10/05/2012

Tempo de Duração: 3 horas e 20 minutos.

[Com exceção de P-9, as demais participantes estavam presentes no começo do Grupo de Estudo. Deu-se início ao compartilhamento das respostas obtidas pelas participantes acerca do Desafio Para Casa (item 8.4). Para tanto, o Pesquisador/Participante realizou a leitura do referido desafio, denotado abaixo.]

8.4 Desafio para casa

1. O professor de Educação Física Pedro foi encarregado de organizar atividades de lazer para 3 grupos de 6 pessoas cada e recebeu a informação de que a Média Aritmética de idade de cada grupo é 20 anos. Apenas esta informação é suficiente para o planejamento das atividades a serem realizadas? Justifique sua resposta.

[O Pesquisador/Participante pediu à P-8 que realizasse a leitura de sua resposta.]

1. **P-8:** *Eu pus não, porque podem haver idades distantes entre si, desde crianças até velhos. Então não tem como planejar, fazer um planejamento geral sem saber a idade de cada um. Só com a média aritmética não dá!*
2. **Pesquisador/Participante:** Obrigado. Por favor, P-2, leia a sua.
3. **P-2:** *Eu acredito que não, pois não representa a idade real de cada participante, podendo existir uma grande variação entre elas.*
4. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-5...
5. **P-5:** *Eu coloquei que não, também! Eu pensei nisso mesmo que a gente já tinha até conversado aqui, porque pode ter uma pessoa muito nova e outra muita velha, daí a média mão seria... não estaria em torno de 20.*
6. **Pesquisador/Participante:** Obrigado. P-7 leia pra gente.
7. **P-7:** *Eu coloquei que não. Apenas com as informações não é possível saber a idade dos alunos. Conseguimos somente a somatória destas idades que é 120, ou a média mesmo.*
8. **Pesquisador/Participante:** Ótimo. Você compreendeu que a somatória é 120! P-4...
9. **P-4:** *Pode ler?*
10. **Pesquisador/Participante:** Claro!
11. **P-4:** *Não, pois percebemos que a média aritmética nem sempre está próxima do número de valores, que no caso tem 20 anos, no exemplo. Teríamos que calcular a amplitude, a variância e o desvio padrão para ter certeza se as medidas realmente ficassem próximas da média aritmética... mas também não dá pra calcular porque também não tem todas as idades dos alunos. Se as idades dos alunos forem próximas a 20 anos, o professor pode planejar a atividade, mas se tiverem alunos muito mais novos e muitos mais velhos a média aritmética*

não vai ser fiel à quantidade de alunos igual a 20 anos. [Enquanto lia, as demais participantes mostraram-se surpresas com a ‘completa’ justificativa dada por P-4. Ao término da leitura, todas parabenizaram-na, batendo palmas em seguida.]

12. **Pesquisador/Participante:** Parabéns P-4, você utilizou os conceitos que nós estudamos para justificar sua resposta. P-1, por favor, leia a sua.

13. **P-1:** *Então, eu também acho que não porque a média aritmética não alcança a maior idade e nem a menor...*

14. **Pesquisador/Participante:** Ok! As respostas de vocês estão corretas, pessoal. Vejam que aquilo que estudamos na Estatística Descritiva nos permite pensar numa situação como essa. E o que a P-4 falou é coerente, lógico e matematicamente correto. Se além da nota da Média Aritmética fosse dado o valor do Desvio Padrão de 2 anos, daí daria para compreender que o grupo é homogêneo! Tudo bem, pessoal? Deu pra acompanhar este raciocínio? **[Todas as participantes sinalizaram, por meio de expressão facial, haver compreendido o exposto.]** Agora, se o problema traz que no 1.º grupo de 6 pessoas o Desvio Padrão é de 15 anos, então, percebam que este grupo já não é homogêneo, e sim heterogêneo, pois há um considerável valor de anos que está variando ali! Tudo bem, pessoal? **[Observou-se o mesmo comportamento denotado anteriormente.]** E P-4, eu fiquei muito satisfeito com a sua fala, porque você havia falado no começo do nosso Grupo do não gostar em pensar em Matemática... Você acha que está havendo alguma modificação em relação a isso?

15. **P-4:** *Ah, eu to pensando muito mais! Eu fiquei um tempão pra fazer isso daqui!... [Risos.]*

16. **Pesquisador/Participante:** Mas você fez!

17. **P-4:** *Sim! E eu fui pensando...*

18. **Pesquisador/Participante:** E você justificou! E nesta justificativa você utilizou toda a teoria Estatística que a gente estudou!

19. **P-4:** *Sim!*

[Dando continuidade, o Pesquisador/Participante disponibilizou 20 minutos para que as participantes resolvessem os problemas referentes ao item 9.1 – Ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Embora tais problemas tenham sido deixados como ‘tarefa’, apenas P-2 e P-7 os haviam feito. Quando questionada se havia realizado os problemas, P-4 disse “Meus esforços foram todos no desafio!”. Tal fala desencadeou riso entre todos.]

[Enquanto as demais participantes, individualmente, resolviam os problemas, P-2 e P-7 compararam as respostas elaboradas. Pela fala de P-2, as respostas estavam um pouco diferentes. P-8 disse ao Pesquisador/Participante não estar conseguindo se concentrar. Intervindo, o Pesquisador/Participante pediu que a mesma tentasse ‘mais um pouco’. Decorrido o tempo, o Pesquisador/Participante realizou a leitura do 2.º problema, apresentado abaixo.]

2. Qual(s) diferença(s) é(são) possível(s) observar entre os quadros do 1.º e 2.º anos do Ensino Fundamental? Pense a respeito do porquê de tal(s) diferença(s).

20. **Pesquisador/Participante:** P-1, diga pra gente a sua resposta!
21. **P-1:** *É... no 1.º ano a tabela simples é usada no cotidiano do aluno com registro diário e observação. Já no 2.º ano os alunos passam a interpretar essas tabelas... a lê-las... No 2.º ano os alunos começam a utilizar gráficos de colunas e no 1.º não utiliza estes gráficos!*
22. **Pesquisador/Participante:** Então essas foram as diferenças! E por que você acha que têm estas diferenças?
23. **P-1:** *Porque...no 1.º ano eles estão montando a rotina, e tem que estar muito ligado com o concreto. Já no 2.º, como eles já fizeram... já é rotina pra eles, não desequilibra mais, eles podem tirar outras conclusões destas tabelas*
24. **Pesquisador/Participante:** Então se no 1.º ano já pedem pro aluno fazer a leitura e interpretação o desequilíbrio seria muito grande? É isso que você quis dizer?
25. **P-1:** *É, porque eles não... não sabem o que é aquilo! Eles vão construindo, por exemplo, assim, num dia eles põem nuvem, no outro dia está chovendo, outro dia está o sol. [Referiu-se ao registro climático realizado diariamente pelos alunos.] No 2.º ano eles vão fazer isso mas vão falar: “Quantos dias fez sol?”, “Quantos dias choveu?”, daí no mês eles vão tirando... é... se choveu mais, se não choveu, e daí pode trabalhar as questões do ano...*
26. **Pesquisador/Participante:** Mas ainda no 2.º ano situações de vivência são importantes?
27. **P-1:** *Sim, são importantes!*
28. **Pesquisador/Participante:** Ok! Entendi! Pessoal, observem as falas umas das outras para que depois possamos confrontá-las caso necessário! P-4...
29. **P-4:** *É, eu coloquei mais que nem a P-1 mesmo! Que nem a tabela de dupla entrada e nos textos escritos que fala do 2.º e 3.º ano... as diferenças, né!?*
30. **Pesquisador/Participante:** Você fez qual diferença?
31. **Pesquisador/Participante:** Então, eu coloquei assim, fazer textos escritos, né... é por isso que você não coloca isso no 2.º e 3.º ano...
32. **P-1:** *Mas aí pedia do 1.º e 2.º ano!*
33. **P-5:** *A gente tá na 2! [P-4 leu, em sua folha, novamente o 2.º problema.]*
34. **Pesquisador/Participante:** Entendeu, P-4? Era pra você analisar só os dois primeiros quadros! Então você fez a análise... você pegou a tabela de dupla entrada? É isso?
35. **P-4:** *É, eu peguei do 1.º...*
36. **P-1:** *Ela pegou o 1.º e 2.º ciclo, e não 1.º e 2.º ano... [As participantes auxiliaram P-4 a perceber que havia entendido de modo equivocado a referida questão, confundindo 1.º e 2.º anos com 1.º e 2.º ciclos.]*

37. **Pesquisador/Participante**: Eu entendi! Você confundiu os ciclos com os anos!
38. **P-4**: *Sim!*
39. **Pesquisador/Participante**: Tudo bem! Você pode pensar depois sobre esta questão ou analisar as respostas de suas colegas. P-7, leia pra gente, por favor.
40. **P-7**: *No 1.º ano é proposto o registro de observações diárias e apresentação de informação pesquisadas de modo pessoal, enquanto que no 2.º já tem a leitura e interpretação de tabelas e gráficos de colunas e organização de informações coletadas de tabelas e gráficos. Eu coloquei que essa diferença ocorre porque os 1.º anos recebem crianças de 6 anos e elas estariam na pré-escola.*
41. **Pesquisador/Participante**: Então a diferença de enfoque ou profundidade deve-se à idade por elas estarem num período que nós vamos estudar daqui pra frente...
42. **P-7**: *Sim!* [Neste momento chegou P-9. Após explicar-lhe o que estava ocorrendo, deu-se prosseguimento ao compartilhamento das respostas referentes ao 2.º problema.]
43. **Pesquisador/Participante**: P-9, como eu vi que você já fez, faça a leitura da sua resposta, por favor!
44. **P-9**: *Elas seguem o desenvolvimento lógico do processo de alfabetização da 1.ª faixa do ciclo 1. No 1.º ano há a apresentação de informações, e no 2.º ano há de forma mais organizada das informações coletadas, por exemplo. No 1.º ano há registro de informações e no 2.º há leitura...*
45. **Pesquisador/Participante**: Então você justifica os porquês acompanhando a alfabetização? É isso que eu entendi, P-9?
46. **P-9**: *Sim, alguns itens principalmente. Por exemplo, a leitura não poderia ser no 1.º ano já que os alunos estão em processo de alfabetização. Então é pedido mais pro 2.º... não que não possa haver outras formas de leituras significativos [Referiu-se ao 1.º ano.] como os símbolos, essas coisas são importantes...*
47. **P-1**: *Eu entendi a leitura como se fosse ler a tabela, interpretação. [Considera a leitura, denotada na proposta curricular, como não referente à leitura de textos, apenas de gráficos e tabelas.]*
48. **P-9**: *Sim!*
49. **Pesquisador/Participante**: A leitura também entra na Língua Portuguesa, já que a tabela tem títulos, as categorias das colunas...
50. **P-1**: *Ah, tá!*
51. **Pesquisador/Participante**: P-5...

52. **P-5:** *Eu coloquei que no 1.º ano enfoca bastante o registra e o apresentar relacionando ao cotidiano da criança, e inicia-se as tabelas simples. E no 2.º ano fala de ler e interpretar e iniciam-se os gráficos para organizar as informações.*

53. **Pesquisador/Participante:** Ok! Primeiro é feita a abordagem das tabelas... Lembrem –se que eu falei que mesmo que você não faça uma tabela é necessário pensar nas frequências para poder montar o gráfico? **[Todas as participantes responderam afirmativamente.]** Então, no 1.º ano, está ocorrendo a construção de algumas estruturas – nós veremos isso de modo mais aprofundado – e depois é abordado uma outra estrutura, digamos assim, em forma de gráfico. P-5, você citou o cotidiano!

54. **P-5:** *Sim!*

55. **Pesquisador/Participante:** Assim como a P-1 também falou da vivência! Vocês duas citaram o cotidiano. Ok! Eu afirmo que o cotidiano, ele é sim o ponto de partida para se propor atividades nos anos iniciais. Ok! Você, conseguiria fazer uma justificativa psicológica ‘profunda’, não do senso comum, do porque este cotidiano favorecer a construção da Matemática ‘mais’ formalizada?

56. **P-5:** *Não!*

57. **P-1:** *Ah, do concreto!*

58. **Pesquisador/Participante:** Mas, por que o concreto se faz necessário? Vamos falar agora da questão psicológica! Tudo bem!?

59. **P-2:** *Porque ela [Referiu-se à criança.] não consegue fazer a abstração sem os materiais concretos, já que é o que ele experiencia, vivencia!*

60. **P-9:** *Por exemplo, no meu referencial teórico [Referiu-se à Teoria Histórico-Crítica.] ele cita que as crianças estão num processo de objetivação/apropriação, seria mais ou menos o mesmo tipo de abordagem...*

61. **Pesquisador/Participante:** Daria pra fazer uma analogia!

62. **P-9:** *Sim! Porque a objetivação do que está acontecendo, o processo de ampliação do que ele [Referiu-se à criança.] está fazendo... então ele precisa estar em constante contato com isso pra saber o que está fazendo pra formação do gênero humano, pra ele contextualizar e conseguir observando isso, então tem que ser feito de uma forma contínua, pra ele entender isso!*

63. **Pesquisador/Participante:** Ok! Nos estudos de Leontiev, Luria, Vigotski, como eles tratam o cotidiano?

64. **P-9:** *O cotidiano é visto como uma forma que vem desenvolvendo o gênero humano, dentro deste processo de formação da individualidade. Então o cotidiano é visto como um elemento valorativo, que tem que ser sim, analisado e trabalhado, é visto como ma forma importante ao processo de socialização do que vai acontecer, principalmente no processo de se educar. Até porque, por exemplo, se a criança vai tendo contatos diferentes, não consegue ter uma organização do processo, não que seja não só da rotina, então a criança não*

consegue, às vezes, conseguir... ela fica perdida se for feito de formas muito diferenciadas... Por exemplo, até uma coisa importante, significativa, ele consegue significar na turma que ele está, porque ele consegue se ver, dentro daquelas pessoas, nele mesmo... por exemplo, se você trocar a criança você vai prejudicá-la muito, é neste tipo de coisa. O cotidiano, a valorização das pessoas que estão... a escola acaba sendo uma visualização do que é representativo pra ele, porque é o que ele se apropria pra desenvolver que ele vai entendendo...

65. Pesquisador/Participante: Ok! **[Como o Pesquisador/Participante percebeu que a P-9 ficou um pouco confusa, não prosseguiu com a análise feita pela mesma.]** P-2, você falou de abstração, sendo o concreto necessário para que o processo de abstração tenha um ‘início’...

66. P-2: *Porque, eu acho assim, como você vai desequilibrar se ele [Referiu-se à criança.] ainda não tem uma base construída pra ele fazer uma reflexão em cima de algo pra ele poder estabilizar e poder ir... vamos dizer, aprendendo e evoluindo no desenvolvimento...*

67. Pesquisador/Participante: Então vamos voltar nas primeiras horas após o nascimento do bebê. Não tem base construída ali, certo!? Todo mundo concorda, pessoal? **[Todas as participantes concordaram.]** Então como se dá este processo de construção?

68. P-2: *É na interação com o meio! Conforme ele vai se desenvolvendo... Ele [Referiu-se ao recém-nascido.] traz algumas coisas... como... tipo sucção, visão que são...*

69. Pesquisador/Participante: Um ‘montagem’ hereditária!?

70. P-2: *Sim, hereditária! Mas, no comecinho ele ainda não sabe e tem a dificuldade até se desvencilhar da mãe, ele não sabe ainda que é um novo ser que vai interagir no mundo pra ele construir...*

71. P-9: *Sim, é, exatamente! É o tipo de contato, o contato social...*

72. Pesquisador/Participante: Para o recém-nascido ainda não é um contato social, do ponto de vista dele!

73. P-9: *Não, tudo bem, mas tipo...*

74. Pesquisador/Participante: Você entende essa minha colocação?

75. P-9: *Sim, eu entendo! Porque isso vem da fundamentação, do desenvolvimento biológico, e da parte social a partir do momento que ele vai tendo contato com a mãe...*

76. Pesquisador/Participante: É claro que o recém-nascido está imerso no social. Só que pra ele ainda não há compreensão disso.

77. P-9: *Sim, tá! O social no sentido dele estar significando e compreendendo. Mas é um processo que vai ocorrendo... tem bebês que vão se desenvolver mais rápido... mas sobre isso aí tudo bem!*

78. Pesquisador/Participante: Ok!

79. **P-8:** *No começo é ele e a mãe, e ele não se sente sozinho, né! Eu tô lembrando quando ele começa a se distanciar...*

80. **Pesquisador/Participante:** Isso também depende do contato que ele tem com a mãe, porque ele pode ter contato com a avó, a babá... Concordam?

81. **P-8:** *Então com outros que não sejam a mãe ele vai se...*

82. **Pesquisador/Participante:** Porque assim, oh, o bebê não nasce com sentimento para com ninguém.

83. **P-8:** *Ele tem instintos...*

84. **Pesquisador/Participante:** Isso! E o bebê necessita do outro... É impressionante como nós, que conseguimos o maior nível de desenvolvimento intelectual, somos os mais frágeis ao nascer! Tudo bem?

85. **P-9:** *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

86. **Pesquisador/Participante:** Então nós precisamos do outro ao nascer. Este sentimento ainda não é de amor, e sim de necessidade, de subsistência, digamos assim. E nós vamos estudar em nosso Grupo que a inteligência nada mais é do que uma adaptação em continuidade à adaptação biológica. Mas iremos ‘ver’ com calma a palavra adaptação... porque a teoria de Piaget, infelizmente, foi apropriada por muitos sem o devido cuidado, então eles acham que adaptar-se é apenas moldar-se à sociedade aceitando a política capitalista... E isso não é o significado atribuído por Piaget a este termo que ele ‘empresta’ da biologia... Infelizmente, pessoal, Piaget foi mal interpretado por muitos, sejam os pertencentes a sua corrente teórica ou os contrários...

87. **P-9:** *O Pesquisador/Participante, acho que isso entra muito o que estávamos falando com o professor C. O que nós temos aqui talvez seja 10% da obra do que seja Piaget, então começa por aí... A pessoa vai da síntese, da síntese e vai colocando como se fosse isso!*

88. **Pesquisador/Participante:** É, infelizmente acontece isso! Por exemplo, P-9, pra fazer minha Iniciação Científica eu não consegui ler Piaget na ‘fonte’, então eu fiz leituras de teses da UNICAMP porque eu sabia da procedência, mas eu sabia que mesmo assim alguma coisa poderia fugir do autor, inclusive pela minha própria interpretação... Durante o Mestrado eu fui ler Piaget, mas não com um nível de profundidade que faço hoje, embora ainda a minha profundidade considero superficial.

89. **P-9:** *Você viu que tem mais coisas dele, agora, né!?*

90. **Pesquisador/Participante:** Sim! Ouvi falar que foram descobertos vários rascunhos podendo conter aspectos originais da teoria de Piaget. [Neste momento as participantes ficaram surpresas pelo fato de ainda existir a possibilidade de mais estudos desenvolvidos por Piaget.] E sobre a abstração, P-2, nós ainda iremos estudá-la, pois, além da abstração se subdividir, porque não existe um só tipo de abstração, nós iremos abordá-la em atividades a serem realizadas com seus (futuros) alunos... Voltando às respostas do 2.º problema, P-2 leia pra gente, por favor!

91. **P-2:** *No 1.º ano faz-se observação e registro de dados pessoais. Já no 2.º, leitura, interpretação e organização das informações coletadas de gráficos de colunas. No 2.º ano a ênfase é mais no processo de alfabetização, possibilitando maior possibilidade para leitura e interpretação.*

92. **Pesquisador/Participante:** Sim, você se referiu a um trabalho contínuo e o que você falou está parecido com o que disse a P-9. Ok. P-8...

93. **P-8:** *Eu coloquei assim... No 1.º ano é dentro da rotina, né!... é a construção do processo de modo pessoal. Eles pegam... a gente tava vendo, né, do sol, das nuvens [Referiu-se a uma atividade destinada ao ensino de Estatística ao 1.º ano do Ensino Fundamental a ser analisada no Grupo de Estudo.] Depois no 2.º ano eu pus que há uma interpretação e uso dos gráficos de colunas, porque daí já vai interpretar e ler os dados, e interpretar com os gráficos.*

94. **Pesquisador/Participante:** Ok! A sua fala evidencia que houve um ‘salto’, um aprofundamento... É isso?

95. **P-8:** *Isso! No começo foi com a rotina, do modo pessoal que eles conhecem...*

96. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, entendi! Quando formos estudar alguns tópicos de Piaget – a fundo – iremos retomar tais questões... Fiz questão de colocar trechos ‘enormes’ do próprio Piaget, não desmerecendo outros autores que escreveram sobre ele, mas acho importante interpretarmos os seus escritos, embora sejam traduzidos...

[Dando continuidade, o Pesquisador/Participante realizou a leitura do 3.º problema, exposto abaixo.]

3. No início do texto foi colocado o seguinte questionamento: “*Como realizar a abordagem de tais conteúdos?*”. A partir dos trechos retirados do PCN e dos quadros apresentados é possível respondê-lo? Pense a respeito.

97. **Pesquisador/Participante:** O que você pensou a respeito desta questão, P-9?

98. **P-9:** *Deixa eu ver... Eu coloquei que sim, planejando conforme as etapas necessárias para desenvolver os conteúdos de tratamento da informação e adaptando conforme o desenvolver do processo pedagógico ao contexto da realidade da turma e dos processos que foram desenvolvidos e a interdisciplinaridade entre os conteúdos.*

99. **Pesquisador/Participante:** Ok! O que você leu está correto! Acompanhar o nível de desenvolvimento da criança, adequar, fazer um trabalho interdisciplinar... Ok! Por favor, P-1!

100. **P-1:** *Eu acho que eu fugi um pouco!*

101. **Pesquisador/Participante:** Leia pra gente.

102. **P-1:** *Sim, o PCN apresenta conteúdos que devem ser trabalhados na sala de aula e, a partir deles o professor se baseia.*

103. **Pesquisador/Participante:** E como deve ser trabalhado? Você conseguiu enxergar, por meio da leitura, entender este como?

104. **P-1**: *É isso que eu não consegui.*
105. **Pesquisador/Participante**: *Você não conseguiu formular-sintetizar isso?*
106. **P-1**: *É! Como eu posso explicar?... O PCN traz conteúdos...*
107. **Pesquisador/Participante**: *E também traz alguns indicativos...*
108. **P-1**: *Então, e a partir deles o professor se baseia pra montar a aula!*
109. **Pesquisador/Participante**: *Você está com uma dificuldade de poder expressar? Estou correto?*
110. **P-1**: *Sim!*
111. **Pesquisador/Participante**: *Tudo bem! P-4...*
112. **P-4**: *Eu coloquei que sim, também, que o professor precisar utilizar exemplos práticos tentando fazer com que os alunos pensem a respeito, ajam sobre os conteúdos para realmente aprenderem...*
113. **Pesquisador/Participante**: *Ok! Pensar e agir sobre... Correto! P-7, leia pra gente, por favor.*
114. **P-7**: *Quando eu li a questão eu não me atentei aos quadros, e só nos PCNs. E pelos PCNs eu respondi que não dava pra saber como realizar esse como, essa abordagem. Eu até justifiquei que o professor iniciante ele não sabe que conteúdo dar por ciclo, não saberia que conteúdo dar no 1.º ano, no 2.º, ou colocar no quadro no 1.º Bimestre... Então eu justifiquei que não, e só me atentei ao PCN.*
115. **Pesquisador/Participante**: *Sem problema! P-5...*
116. **P-5**: *Eu acho que eu fiz ao contrário, eu me atentei mais aos quadros... Não sei se é correto, mas eu pensei, assim, no como realizar, eu acho que ele falou bastante da ação dos alunos, eu não percebi só a explicação do professor... que nem quando vai fazer, anotar o tempo, essas coisas... é o aluno que faz... Eu acho que sim, que pede um pouquinho da ação...*
117. **Pesquisador/Participante**: *Você percebeu que esta abordagem considera o aluno enquanto um sujeito ativo?*
118. **P-5**: *Eu acho que sim! Que o como realizar valorizaria o aluno!*
119. **Pesquisador/Participante**: *Ok! E você, P-2?*
120. **P-2**: *Eu não sei se eu respondi a pergunta!*
121. **Pesquisador/Participante**: *Não tem problema, vamos lá!*
122. **P-2**: *Acredito que sim! A questão da construção de tabelas e gráficos, compreendendo seus significados e conseguindo interpretar seus dados torna-se, conforme os quadros, um*

processo contínuo, partindo de conceitos mais concretos, cotidianos nos 1.º e 2.º anos até chegar em conhecimentos mais abstratos, nos 3.º 4.º e 5.º anos.

123. Pesquisador/Participante: Você também apoia a questão do aluno construir... Ok! E você, P-8?

124. P-8: *Então, eu não consegui pensar muito porque a gente tava conversando, inclusive. [Referiu-se ao fato de haver se dispersado durante a realização de tais problemas.] Eu pus que sim, e a partir de registros pessoas, inclusive tem o telefone, as placas dos carros que eles [Referiu-se às crianças.] vão começar a conhecer os números, a conhecer os... a colocar os registros e começar a construção...*

125. Pesquisador/Participante: Eu percebo na fala de vocês, pessoal, que vocês defendem uma abordagem na qual o aluno é um ser ativo. Ele tem que agir sobre o meio, sobre o objeto do conhecimento para poder aprender. E realmente era essa mesma a resposta na sua essência. **[Enquanto falava, as participantes anotaram suas folhas.]** O único termo que eu esperava que vocês explicitassem era a abordagem via solução de problemas. Concordam, pessoal?

126. P-9: *Concordo! As atividades que a gente planeja é uma das principais coisas que tem dentro das tendências, porque é problematizar, partir daquilo que ele vai entrar no conflito, é, nem sei se seria a palavra conflito...*

127. Pesquisador/Participante: É conflito mesmo!

128. P-9: *Que ele vai poder falar mesmo: “É isso mesmo!”. E vai criar hipótese a partir disso e vai chegar à solução. E que nem sempre é só uma, como a gente está vendo aqui!*

129. P-1: *Eu não havia entendido a pergunta...*

130. Pesquisador/Participante: Deu pra entender agora?

131. P-1: *Sim! Eu estava pensando na ação do professor...*

132. Pesquisador/Participante: Sim, é a ação do professor ao propor problemas. É a abordagem.

133. P-1: *Ah, mas assim, eu to confusa!*

134. P-5: *Ah, mas eu acho que a gente respondeu também o que os quadros trazem e não o que a gente achava...*

135. Pesquisador/Participante: Sim, eu estava perguntando em relação ao que traz o PCN e a minha proposta, nos quadros mostrados. Por exemplo, oh, vamos voltar ao quadros, quando eu coloco lá no 4.º ano 2.º Bimestre “Tabelas e Gráficos por meio de situações problemas – solução por meio de dados organizados”. Eu não sei se ficou explícito no quadro isso, da solução de problemas... E que, junto com o quadro do currículo que estou elaborando, haverá informações textuais complementando as ideias dos quadros. Ou seja, será enfatizada a solução de problemas enquanto perspectiva metodológica a ser adotada. Mesmo aqui, oh, no 1.º ano do 1.º Bimestre, quando se faz “Registro das observações diárias” o professor tem que jogar um problema pros alunos: “Como será que fica o céu a noite, ou de dia, todo o dia?”. O

professor não questionou este aluno? Tudo bem? **[Por meio de expressão facial, todas as participantes indicaram compreender o exposto.]** Assim os alunos vão fazer um registro diário para sanar uma dúvida que lhes causou um certo desequilíbrio. Que nem a P-4 disse, para o aluno agir sobre, pensar sobre, ele tem que estar motivado, não tem? Ele tem que ser questionado! Dá pra perceber, pessoal, não é em todo o momento de nosso Grupo de Estudo, mas em boa parte eu não estou questionando vocês? **[Todas as participantes indicaram concordam por meio de expressão facial.]** Quando a gente vai fazer a leitura de um livro, eu avalio se um livro é bom, ou não, quando ele me faz refletir sobre o que está sendo escrito ali. Se o autor me coloca questões, me faz refletir. Por exemplo, se você lê apenas por ler, e não age sobre o seu objeto de leitura, eu acho que ali não vai haver tanta construção. Eu, quando vou ler Piaget, falo comigo mesmo!

136. **P-9:** *Eu também fico conversando!*

137. **Pesquisador/Participante:** Eu me coloco questionamentos, para que eu possa ser o sujeito ativo deste processo de construção de conhecimento. Quando eu falo que a expressão que denota a abordagem é a solução de problemas, vocês concordam? **[Todas as participantes responderam “Sim”.]** Então vamos à 4.^a questão. **[O Pesquisador/Participante realizou a leitura do 4.º problema exposto abaixo.]**

4. Se na 1.^a ‘etapa’ do Ensino Fundamental ainda não é o momento para a formalização do pensamento matemático de modo a ser expresso por meio de uma ‘fórmula’, como deve ser realizada a abordagem do conceito de Média Aritmética para os alunos do 2.º ciclo? Pense a respeito.

138. **Pesquisador/Participante:** Por favor, P-9, diga o que você colocou pra gente.

139. **P-9:** *Então, eu to tentando lembrar e entender o que eu coloquei. Deve ser abordado de forma a fortalecer o desenvolvimento acerca das crianças trabalhando tabelas, por exemplo. Eu dei um exemplo de uma situação: “Se 20, é... a gente faz uma tabela de uma pesquisa sobre os cachorros, tem 20 alunos e a gente quer saber quantos tem cachorro. E daí, por exemplo, eu criei uma situação hipótese: 15 tem dois cachorros, 4 tem um e 1 aluno não tem.” Então você vai trabalhar com ele, por exemplo, não perguntar qual que é a média disso pro aluno do 4.º e 5.º ano, não, você vai começar propor pra ele processos de reflexão pra ele entender... “Aqui na maioria da sala, quantos cachorros? Quem tem mais, é 1 aluno? É um cachorro?” Desculpa. **[A participante riu ao confundir cachorro por aluno.]** Dois cachorros... a maioria... “Então, qual que seria o que a maioria tem?” Coisas assim, entendeu? Pra quando ele chegar na fase de entender uma formulação ele vai entendendo estas etapas, desde os processos mais simples pra ele entender isso. Daí eu fui colocando assim: “Isto está contido no PCN como identificação as possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção, etc.”, então são passos pra desenvolver até essa abstração do nível complexo.*

140. **Pesquisador/Participante:** Vamos supor, P-9, que o total de alunos seja 20 e que todos tenham cachorro e que o total de cachorros seja 40. Você acha possível o professor auxiliar os alunos a calcularem esta média?

141. **P-9:** *Então, não... No caso, o que eu acho possível é eles entenderem conceitos assim. “A maioria das crianças aqui tem 1 ou 2 cachorros?”. Eles **[Referiu-se aos supostos alunos.]** sabem que a maioria deles respondeu 2, e não só 1. Isto são conceitos que você já consegue ir trabalhando... Não de maneira complexa!*

142. **Pesquisador/Participante:** Então, você trabalharia que no geral haviam, mais ou menos, 2 cachorros por aluno?
143. **P-9:** *Sim!*
144. **Pesquisador/Participante:** Sem chegar ao cálculo mesmo?
145. **P-9:** *Sim, mas não nomeando com eles, ..., então “Isso é a média!”... Nada destes conceitos que eles vão aprender mais pra frente.*
146. **Pesquisador/Participante:** Então, nem utilizar a expressão média aritmética? Ou você acha que daria pra ser utilizada?
147. **P-9:** *A expressão média aritmética?*
148. **Pesquisador/Participante:** Sim, o professor nomear pros alunos que aquilo ‘é’ uma média aritmética.
149. **P-9:** *Eu acho que se exemplificando com outras coisas, e não colocando como complexo. [Referiu-se ao fato de abordar a ideia de Média Aritmética através de situações reais, e não por meio da definição Matemática denotada durante o Grupo de Estudo.]*
150. **Pesquisador/Participante:** Não, eu concordo que do jeito que nós fizemos, definindo formalmente a Média Aritmética e por meio da expressão com todo o rigor matemático, eu concordo que não deve ser feito!
151. **P-9:** *Isso trabalharia quando eles forem maior, mas agora é pra trabalhar com o cotidiano, o que eles estão dentro da idade que eles tem!*
152. **Pesquisador/Participante:** Entendi!
153. **P-1:** *Mas eu acho que caberia demonstrar o cálculo feito, falar que isso é uma Média Aritmética...*
154. **P-9:** *Eu acho que não!*
155. **Pesquisador/Participante:** Você já acha que o cálculo caberia, P-1?
156. **P-1:** *Caberia eles aprender a fazer o cálculo e você mostrar pra eles como chegou nisso, “Ah, nós temos uma média de 2 alunos por pessoa!”, e daí demonstrar pra ele, pra ver como faz, falar que isso se chama Média Aritmética, que na verdade não é que cada aluno tem 2 cachorros, mas é que uns podem ter 3 e outros podem ter 1...*
157. **Pesquisador/Participante:** E se a gente remeter isso à divisão?
158. **P-9:** *É, eu acho que depende do modo que você vai usar...*
159. **Pesquisador/Participante:** Por que a média não é um ‘tipo’ de divisão a partir de um certo total?

160. **P-9:** *Sim, é como você falou, colocar na lousa essa ideia de divisão e pode trabalhar com os alunos isso!*
161. **Pesquisador/Participante:** Ok! Algo mais sobre esta questão P-1?
162. **P-1:** *Não!*
163. **Pesquisador/Participante:** P-4, o que você respondeu?
164. **P-4:** *Eu respondi mais ou menos igual a elas. Eu coloquei assim que tem que explicar a média através de exemplos práticos, para que os alunos pensem a respeito da importância da Média Aritmética, fazendo com que eles entendam que a média nem sempre está próxima do centro, como naquele exemplo que a gente fez das rendas.*
165. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-7...
166. **P-7:** *Eu não sei, eu acho que eu não entendi certo, mas eu coloquei que pra mim não, porque eu acho que esse conceito ainda não devia ser trabalhado, porque daí olhando pro próprio quadro que está sendo o currículo que está sendo formulado este conceito não entra! Se os próprios professores não colocaram é porque ainda não é o momento de ser trabalhado...*
167. **Pesquisador/Participante:** Ainda não é o momento?
168. **P-7:** *É!*
169. **Pesquisador/Participante:** P-5, por favor, leia pra gente.
170. **P-5:** *Eu coloquei, assim, que deveria ser trabalhado, assim, algo mais espontâneo... Eu coloquei em relação ao mais ou menos que é uma palavra que eles usam mesmo... E não deixa, assim, de representar uma média, eu pensei, assim, coisas na sala... eu pensei, assim, em iniciar a média com dois números! Não sei se está correto, entendeu? Eles acharam mais ou menos o meio entre dois números... Daí talvez ficaria mais fácil depois. Mas não formalizando, assim, só pensando numa festinha: “Ah, fulano come 5 salgados, outro come 8. Quantos vocês acham que a gente devia pra ficar mais ou menos no meio, pra ficar igual a todo mundo?”, tipo assim, mais espontâneo, relacionado à média mas com esse mais ou menos... Pros alunos entenderem que a média não é uma coisa nem outra, que ela está no meio, que ela representa uma ou outra... [Interrompendo, P-1 falou.]*
171. **P-1:** *Mas, é por isso que eu acho importante dar nome, “Isso é Média Aritmética!”. Eu acho que na frente [Referiu-se aos anos escolares seguintes.] o aluno vai ouvir uma coisa e vai achar “Nossa, é difícil!”, e é uma coisa que ele já sabe... Eu acho que não dando o nome eu acho que você vai estar travando o desenvolvimento... [As participantes falaram ao mesmo tempo, denotando opiniões diversas e ou contrárias. Em seguida, P-5 retoma a sua fala.]*
172. **P-5:** *Eu acho que pode iniciar falando mais ou menos. Aí, depois, quando você perceber que os alunos estão entendendo o que a professora está falando, começar a usar a palavra média, mas sem falar, isso é Média Aritmética... Assim, trocar a palavra, é isso...*

173. Pesquisador/Participante: Por exemplo, pessoal, o PCN traz que não se deve fazer a formalização, ou seja, não é o momento de falar que a Média Aritmética é igual a somatória dos elementos observados divididos pelo total de elementos... Só que o PCN traz, pessoal, que abordar e falar que aquilo se chama Média Aritmética é aceitável. “Aquilo se chama Média Aritmética!”, assim como “Aquilo da pirâmide de chama vértice!”... não está mandando você formalizar conceitualmente e com o rigor matemático o que é... Este exemplo que você deu, P-5, é extremamente pertinente...

174. P-5: Ah, que bom! E é certo, por exemplo, iniciar com dois números?

175. Pesquisador/Participante: Sim, claro! Pensa bem, se a gente, logo de cara, ‘bombardeia’ o aluno com 30 dados coletados, não é!? A coisa vai complicar!

176. P-8: Quantos você pensou, P-5?

177. P-5: Eu pensei de começar com dois números... Por exemplo, entre 5 e 10.

178. P-8: Ah, tá!

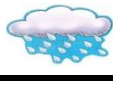
179. Pesquisador/Participante: E isso vai aumentando gradativamente, tudo bem? P-2, o que você colocou?

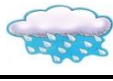
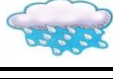
180. P-2: Eu coloquei assim: “Acredito que não seja necessário a construção de uma fórmula, mas que seja possível expor aos alunos, através de questionamentos se seria possível encontrar um valor que representasse o meio, o centro dos dados coletados.”.

181. Pesquisador/Participante: Dependendo da contextualização é possível sim! Lembrem, pessoal, eu falei de contextualização no sentido de que aquilo tem que ter sentido e significado pra esse grupo de alunos. Ok? E nós vamos estudar, na teoria de Piaget, o que significa esta tal de necessidade, sentido... Resumindo, pessoal, o PCN traz e eu concordo com esta postura. O termo ‘Média Aritmética’ pode ser citado, os alunos podem fazer cálculos simples pra que eles entendam esta noção geral, “intuitiva” deste ponto meio de alguma coisa. Ok? **[Enquanto falava, as participantes, com exceção de P-1 e P-9, anotaram em suas folhas o denotado pelo Pesquisador/Participante.]** Vamos, então, analisar as atividades.

[O Pesquisador/Participante projetou a Atividade 1 – 5.º problema, realizando algumas explicações da mesma. Observe tal atividade a seguir.]

5. Analise as atividades abaixo e identifique qual conteúdo foi abordado por meio das mesmas. Como referência utilize os conteúdos apresentados nos quadros esboçados há pouco.

ATIVIDADE 1: COMO ESTÁ O TEMPO?			
Você vai registrar, durante 5 dias seguidos como estava o céu: ensolarado, nublado ou chuvoso. Registre a data e circule no quadro abaixo a condição do tempo.			
DATA	CONDIÇÃO DO TEMPO		
			
			

			
			
			
Conteúdo abordado:			

[Durante a explicação, o Pesquisador/Participante ressaltou ser possível trabalhar a ideia de ordenação/seriação. Quando questionadas sobre o ‘Conteúdo abordado’ na Atividade 1, P-2 e P-9 disseram, quase ao mesmo tempo: “Tabelas Simples – registro de observações diárias”. P-9 ressaltou, ainda, que tal atividade é destinada ao 1.º ano. Além das duas participantes, P-7 disse ter colocado a mesma resposta.]

[Já P-8 ressaltou ter escrito como resposta “Registro da Informação”, sendo considerado correto pelo Pesquisador/Participante, embora o mesmo lhe se tratar de um tipo de registro – no caso a tabela. As demais participantes (P-1, P-4 e P-5) não haviam resolvido o problema. P-8 achou interessante compartilhar uma experiência observada em seu estágio acerca de uma atividade semelhante à proposta.]

182. **P-8:** *Então, lá na escola X eles usavam... iam lá na lousa e pegavam um papel colorido e iam colocando, e mandava pintar depois pra ver que dia tinha dado mais sol... [Referiu-se a uma atividade desenvolvida na escola de Educação Infantil na qual a professora auxiliava os alunos a registrarem a condição climática diariamente.] mas eu vi que não foi muito significativo pra eles não. Eu acho que da caixa de fósforo [Referiu-se a uma atividade contida num livro paradidático que aborda a construção de gráficos de colunas.] que o professor N. deu pra gente foi mais significativo porque os alunos vão colocando e veem a coluna crescendo...*

183. **Pesquisador/Participante:** Talvez, P-8, pros alunos desta escola entenderem que a cartolina recortada com a cor indicava aquela situação do tempo... percebam, os alunos não conseguiam utilizar um outro significante para interpretar um significado...

184. **P-8:** *É, eu percebia que as crianças não entendiam, pintavam de qualquer jeito...*

185. **Pesquisador/Participante:** Porque, assim, oh, o significante é aquilo que você compreende para obter um significado. Talvez o significante (cartolina colorida) não tinham significado para estas crianças.

186. **P-8:** *E foi mesmo!*

187. **Pesquisador/Participante:** Foi algo muito além das possibilidades de assimilação-acomodação destes sujeitos. Ok?

188. **P-5:** *Até que série vai essa escola X?*

189. **P-8:** *Antes eles iam até os 6 anos, mas agora como tem o 1.º ano com 6 anos as crianças estão saindo com 5, mas eles ficam lá um período ainda... eles vão pra outra escola e vão pra lá no outro período.*

190. **P-5:** *E esta atividade era pra alunos de quantos anos?*

191. **P-8:** *5 anos!*

192. **P-5:** *Então, isso dá pra fazer com alunos de 5 anos?*

193. **Pesquisador/Participante:** Com 5 anos, esta apropriação daquilo que foi coletado/registrado e passar para um pedaço de cartolina para o aluno relacionar, como mesmo a P-8 disse, é algo que vai além da possibilidade de assimilação dos alunos, são poucos alunos que conseguem.

194. **P-8:** *Deixa eu só falar, isso começa com os alunos desde os 2 anos, mesmo que eles não entendam, eles fazem este tipo de registro todos os dias. Eles saem pra fora pra ver se está sol, a professora explica... se está chovendo, se tem nuvem... Daí tem... você vê que a criança não tem... daí com 4 anos já pinta a nuvem, o solzinho... Agora fazer a tabela com 5 anos, do jeito que a professora deu... então eles tem uma sequencia de atividade...*

195. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro, há um projeto pedagógico, é uma escola com profissionais competentes. Só que, por exemplo, no início, o intuito principal não é nem o estudo das relações quantitativas pra ver quantos dias fizeram sol, e sim da criança construir a noção da realidade.

196. **P-8:** *Isso! [Resposta compartilhada por P-2.]*

197. **Pesquisador/Participante:** E iremos abordar como se dá esta construção por meio da teoria de Piaget.

[Em prosseguimento, o Pesquisador/Participante projetou a Atividade 2 – exposta abaixo.]

ATIVIDADE 2: QUAL FOI O GASTO?	
A mãe de Lucas anotou quanto gastou durante uma semana ao fazer compras no mercado perto de sua casa.	
DIA DA SEMANA	GASTOS
SEGUNDA-FEIRA	32 REAIS
QUARTA-FEIRA	27 REAIS
SEXTA-FEIRA	52 REAIS
Leia a Tabela e responda:	
a) Em que dia da semana ela gastou menos?	
b) Quanto ela gastou na quarta-feira?	
c) Quanto ela gastou numa semana?	
Conteúdo abordado:	

[Quando questionadas, P-9 respondeu, embora salientasse não saber se estava correta a resposta: “Tabelas Simples (situações problemas) – solução a partir dos dados apresentados”. Além disso, denotou que tal atividade destinava-se ao 1.º Bimestre do 5.º ano. Já P-2 colocou “Tabelas Simples – leitura e interpretação”. Em seguida, P-7 referiu-se ao conteúdo proposto no quadro referente ao 2.º Bimestre – 4.º ano “Tabelas e

Gráficos (situações problemas) – solução por meio de dados organizados”. Como nenhuma outra participante havia respondida a questão, o Pesquisador/Participante ressaltou que as respostas estavam corretas.]

[As demais participantes anotaram o ‘Conteúdo abordado’ na referida atividade, além de ‘enquadrá-la’ no 2.º Bimestre do 4.º ano. O Pesquisador/Participante chamou a atenção ao fato de, caso a atividade fosse composta apenas pelas alternativas a) e b) a mesma trataria do conteúdo “Tabelas simples – leitura e interpretação”, sendo pertencente ao 1.º Bimestre do 2.º ano.]

[Em continuidade o Pesquisador/Participante realizou a leitura da Atividade 3. Observe-a.]

ATIVIDADE 3: OS TIPOS DE GRÁFICOS

O professor de Paulo lhe disse que os dados podem ser representados por meio de diversos tipos de gráficos.

Comida Preferida

Tipo de Comida	Número de Pessoas
Arroz e Feijão	38
Feijoada	25
Lasanha	20
Macarronada	18

Comida Preferida

Tipo de Comida	Número de Pessoas
Macarronada	18
Lasanha	20
Feijoada	25
Arroz e Feijão	38

1. Que dados você observa em cada gráfico na linha horizontal?
 PRIMEIRO GRÁFICO: _____
 SEGUNDO GRÁFICO: _____

2. Que dados você observa em cada gráfico na linha vertical?
 PRIMEIRO GRÁFICO: _____
 SEGUNDO GRÁFICO: _____

3. O que podemos dizer sobre os dois gráficos?
 R: _____

Conteúdo abordado: _____

[P-8 foi a primeira a dizer o ‘Conteúdo abordado’, embora ressaltou estar em dúvida. A sua resposta foi “Leitura e Interpretação de Gráficos”, e o Pesquisador/Participante lhe disse estar correta. Em seguida P-2, ao ser questionada, respondeu “Gráfico de Barras e de Colunas”. Já P-9 falou “Tabelas e Gráficos – descrição por escrito da situação apresentada”.]

[Ao ser questionado por P-1 em relação à distribuição de tal atividade, o Pesquisador/Participante disse que a mesma ‘enquadra-se’ no 4.º Bimestre do 3.º ano – Gráficos de Barras e Colunas – leitura, interpretação e descrição oral da situação apresentada – sendo necessário acrescentar a ‘descrição por escrito’. As participantes, com exceção de P-9 anotaram (ou corrigiram) a resposta denotada. Neste momento o Pesquisador/Participante, após perguntar a cada participante se estavam compreendendo as discussões realizadas, indagou:]

198. Pesquisador/Participante: Vocês estão achando interessante, pessoal? Analisar as atividades, observando o nível de profundidade e sua adequação por Bimestre/ano? [Todas as participantes responderam “Sim”.]

[Dando prosseguimento, o Pesquisador/Participante realizou a leitura da Atividade 4, projetando-a conjuntamente.]

ATIVIDADE 4: INTERPRETANDO UMA TABELA		
Eduarda encontrou em uma página da internet a seguinte tabela mostrando o horário em que um tipo de flor abre e fecha durante o dia. Observe os dados na tabela abaixo.		
Data	‘Abertura’ da Flor	‘Fechamento’ da Flor
02/03	5h45min	18h01min
03/03	5h46min	18h01min
04/03	5h46min	18h02min
05/03	5h46min	18h02min
06/03	5h47min	18h03min
07/03	5h47min	18h03min
08/03	5h48min	18h04min
09/03	5h48min	18h04min
10/03	5h48min	18h05min
1. Por meio da Tabela responda:		
a) O que é possível concluir em relação à variação da ‘Abertura’ da Flor, dia após dia?		
R: _____		
b) O que é possível concluir em relação à variação do ‘Fechamento’ da Flor, dia após dia?		
R: _____		
c) Podemos afirmar que esta flor fica mais aberta ou mais fechada? Por quê?		
R: _____		

Conteúdo abordado: _____		

[Quando questionadas pelo Pesquisador/Participante, P-9 respondeu “Tabelas Simples e de Dupla Entrada (situações problemas) – solução a partir dos dados apresentados”. O Pesquisador/Participante complementou que tal conteúdo está previsto para o 1.º Bimestre do 5.º ano. Em seguida, P-2 indagou ter colocado “Tabela de Dupla Entrada – interpretação dos dados”, sendo a mesma resposta dada por P-7.]

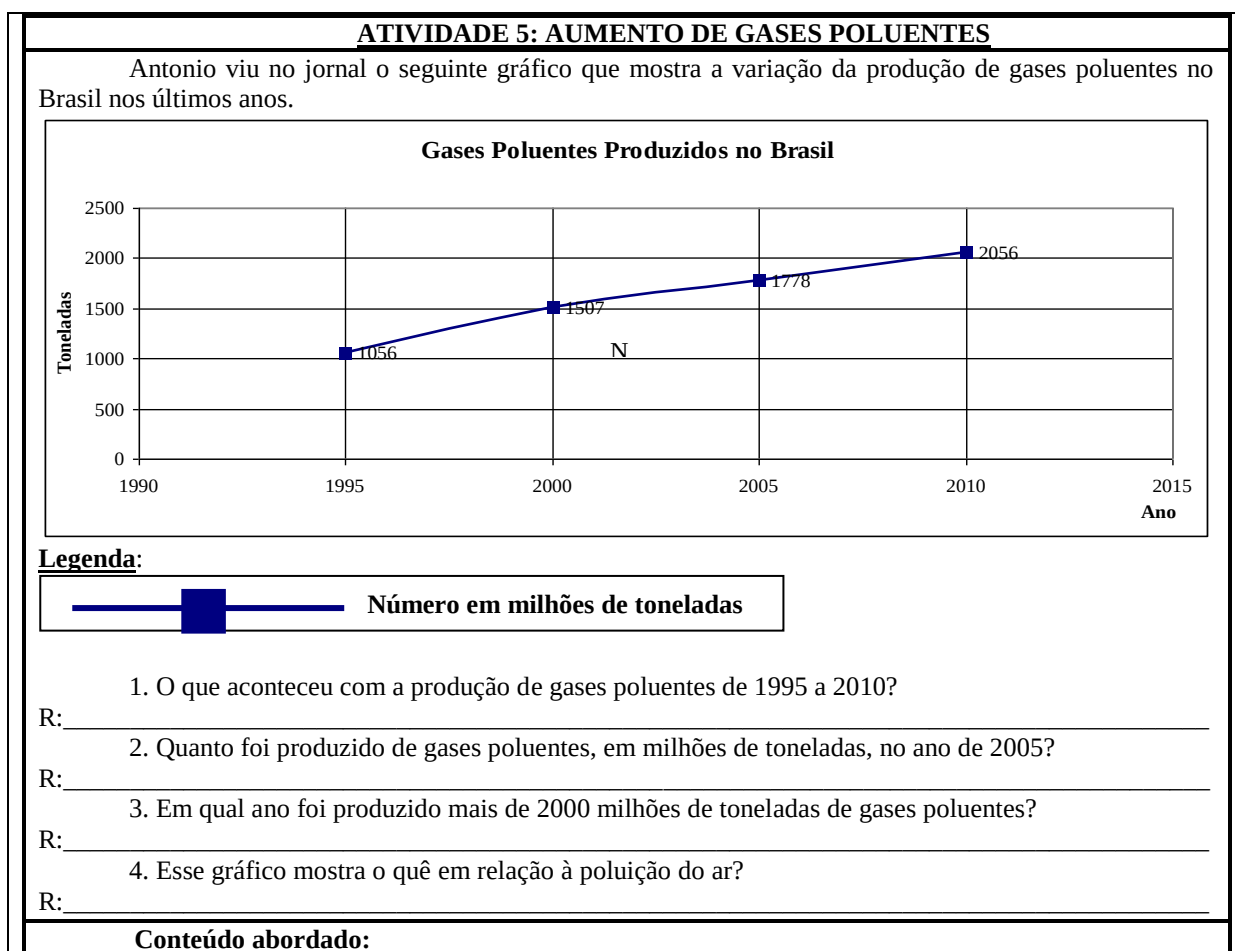
[Como P-8 colocou “Registro de informações coletadas”, o Pesquisador/Participante salientou não ser esse o conteúdo abordado. Rapidamente a participante ‘compreendeu’ que ocorreu apenas a interpretação dos dados já organizados, corrigindo sua resposta. Neste momento foi chamada a atenção quanto à diferença entre o registro dos dados e a interpretação de dados já coletados e organizados. Após tal comentário, P-2 pediu ao Pesquisador/Participante que respondesse as alternativas a), b) e c). Observe a discussão realizada.]

199. P-2: Você poderia responder as perguntinhas?

200. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro! Vamos lá! “O que é possível concluir em relação à variação da ‘Abertura’ da Flor, dia após dia?” O que vocês responderam?
201. **P-2:** *Eu respondi que com o passar dos dias ela vai se abrindo cada dia mais tarde.*
202. **Pesquisador/Participante:** Era isso mesmo!
203. **P-2:** *Ah, mas eu não achei simples!*
204. **Pesquisador/Participante:** Não é simples mesmo! Percebam, pessoal, que a abordagem de tal conteúdo/atividade se faz no 5.º ano, conforme o quadro no 1.º Bimestre. A criança terá que compreender a variação de um dia pro outro como crescente, matematicamente falando foi de incremento 1, ou seja, de unidade 1. E é a mesma coisa em relação ao ‘fechamento’ da flor. E devemos nos atentar de que não é fácil o aluno compreender isso, é necessário que o mesmo venha fazendo um estudo desde o 1.º ano destas ideias de Gráficos e Tabelas, e, além disso, não envolve apenas um valor numérico, e sim horas que é uma unidade de medida. E em relação à alternativa c) “Podemos afirmar que esta flor fica mais aberta ou mais fechada? Por quê?”, o que vocês colocaram?
205. **P-9:** *Ah, na verdade eu vou ter que ver tudo de novo!*
206. **P-2:** *Eu coloquei que era igual!*
207. **Pesquisador/Participante:** Quem colocou que era igual? [Ninguém respondeu. P-5 salientou, tentando responder a questão naquele momento.]
208. **P-5:** *Eu acho que fica mais fechada...* [Como não houveram outras respostas, o Pesquisador/Participante denotou o seguinte.]
209. **Pesquisador/Participante:** Olha, se a flor abrisse às 6 horas da manhã e fechasse às 6 horas da noite, seria igual porque daí ficaria 12 horas aberta e 12 horas fechada. [Quase que imediatamente a sua fala, P-1 e P-5 responderam.]
210. **P1 e P-5:** *Ah, então ficaria mais aberta!*
211. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo! A flor fica mais horas aberta do que fechada. Enquanto ela fica 12 horas e 15 ou 16 minutos aberta, fechada ela fica 11 horas e 40 e poucos minutos... Difícil também, não é?
212. **P-4:** *É questão de vestibular! [Risos entre todos.]*
213. **Pesquisador/Participante:** Perceba aí, P-4, que não está envolvendo só o Tratamento da Informação, mas também a Unidade de Medida do Tempo! Tudo bem, pessoal, a letra c)? [As participantes anotaram a resposta em suas folhas, dizendo que estar tudo bem. O Pesquisador/Participante ressaltou a diferença entre a ‘abertura’ e o ‘fechamento’ da flor observada em cada dia; ao final P-2 denotou:]
214. **P-2:** *É difícil! Eu fico imaginando pra explicar pras crianças...*

215. Pesquisador/Participante: Veja, P-2, se os alunos não construíram a Unidade de Medida Tempo, tal questão não vai ser assimilada pelos alunos... Os alunos precisarão pensar que o dia possui 12 horas de ‘cada lado’, e como ficou mais de 12 horas aberta, então ficou mais aberta do que fechada.

[Por fim, o Pesquisador/Participante projetou e leu a Atividade 5 – esboçada abaixo.]



[P-2 foi a primeira a socializar sua resposta que foi a seguinte: “Gráfico de Linha – interpretação dos dados organizados”. P-7 colocou “Gráfico de Linha – leitura dos dados apresentados”. Já P-8 respondeu “Representação dos dados”. Quando questionada pelo Pesquisador/Participante, P-9 denotou o exposto abaixo:]

216. P-9: Então, eu pus diferente.

217. Pesquisador/Participante: Leia pra gente!

218. P-9: Eu coloquei sendo como 5.º ano e pra ser trabalhado entre o 3.º e 4.º Bimestre. Eu não fiquei vendo só em um... que eu entendi também que entra neste exercício que a gente poderia trabalhar com os alunos a construção a partir dos dados coletados também, assim... eu acabei vendo um pouquinho a mais. Além pra eles poderem entenderem um pouco melhor, talvez dependendo o nível da turma, poderia ser dado um exemplo com outras formas também pra eles com isso... Apesar de eles também ter solucionado a problemática colocada aqui, poderiam resolver de outras formas também.

219. **Pesquisador/Participante:** Mas, olha, pensa comigo, a construção de um gráfico de linha, ela exige o pensamento simultâneo do sistema ortogonal dos eixos horizontal e vertical; talvez pedir a construção seja... **[Neste momento P-9 interrompeu.]**

220. **P-9:** *Mas não, eu não me refiro a essa forma complexa, porque os alunos não têm um aprofundamento!*

221. **Pesquisador/Participante:** Então, no caso seria o professor auxiliar os alunos a realizarem esta construção?

222. **P-9:** *Sim, não é eles desenharem...*

223. **Pesquisador/Participante:** Ah, sim! Mas se fez interessante o professor auxiliar os alunos neste processo.

[Como não haviam pensado sobre o problema, P-1, P-4 e P-5 anotaram a resposta socializada pelas suas colegas. Em seguida, o Pesquisador/Participante solicitou a elaboração do Momento Síntese referente ao 9.º encontro. Decorridos 15 minutos, foi iniciado o compartilhamento das sínteses, começando por P-8.]

224. **P-8:** *Vimos os conteúdos do PCN para o 1.º e 2.º ciclos e comparamos com os conteúdos que estão sendo elaborados para a prefeitura de Bauru. Vimos as diferenças e as semelhanças. Através dos exercícios, fizemos interpretações do que aplicar com os alunos nos ciclos iniciais. Vimos que as crianças necessitam de materiais concretos para a abstração e, para haver desequilíbrio tem que haver uma base construída, como por exemplo, exemplos do dia a dia, registros pessoais, telefones, placas para a construção. A abordagem tem que ser por via de solução de problemas.*

225. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-2, por favor...

226. **P-2:** *Considerarei importantíssimo e bastante significativo a distribuição dos conteúdos referentes ao Tratamento da Informação a serem ensinados do 1.º ao 5.º ano, pois eu não possuía nenhuma noção desta divisão. Também é revigorante verificar as possibilidades de aplicação destes conteúdos nas atividades.*

227. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-5...

228. **P-5:** *Eu coloquei: “Este encontro foi muito bom, pois nos proporcionou, além de novas aprendizagens, pensar em nossa futura prática, analisando os PCNs e os documentos do Pesquisador/Participante. Podemos pensar sobre a nossa prática, pensar em estratégias de utilização de certos conceitos, e observar em atividades já prontas como utilizá-las em sala de aula.”.*

229. **Pesquisador/Participante:** Ok!

230. **P-5:** *E só uma coisa... Como aqui é um grupo pra futuros professores, eu acho que essas atividades, quando a gente pensa pra nossa prática mesmo é muito importante. Pra mim o encontro foi muito bom!*

231. **Pesquisador/Participante:** É ótimo ouvir isso! P-7, realize a leitura de sua síntese, por favor!

232. **P-7:** *Eu achei as discussões deste encontro muito importantes, pois nos mostrou como aplicar tudo o que vimos anteriormente, fazendo assim vivências práticas que usaremos no dia a dia na escola.*

233. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-4...

234. **P-4:** *Nesse encontro discutimos uma proposta de conteúdos para os alunos do 1.º ao 5.º anos sobre o Tratamento da Informação. Eu achei muito pertinente, pois essas propostas de quais conteúdos a trabalhar faltou muito em nossa graduação. Percebemos que o conteúdo deve ser gradual, ou seja, se o aluno ainda não é alfabetizado, não podemos exigir um registro por escrito logo no 1.º ano. Tal proposta aborda que é preciso utilizar exemplos práticos tentando fazer com que os alunos pensem a respeito, ajam sobre os conteúdos para que realmente aprendam significativamente, abordando questões problemas que sempre possível questionando os alunos.*

235. **Pesquisador/Participante:** Interessante! P-1, leia pra gente.

236. **P-1:** *Discutir as atividades dos PCNs e dos quadros foram muito importantes para a minha formação, pois não sabia por em prática o que a teoria diz, mas agora está muito mais claro com maior embasamento prático.*

237. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-9, leia sua síntese, por gentileza.

238. **P-9:** *Eu coloquei assim: “Analisamos os conteúdos dos ciclos 1 e 2 do Ensino Fundamental, donde se denota o Tratamento da Informação proposto pela Plano Curricular Nacional, assim como também o Currículo Comum de Matemática que será implementado em breve no sistema municipal de Bauru. Foi possível discutir sobre os conteúdos que aprofundamos, como a Formação de Professores sobre o Tratamento da Informação e como deve ser passado no ciclo 1 e 2 do Ensino Fundamental.” É, isso aí a gente apropriou e desenvolveu e foi relacionando. “E concluímos na 2.ª etapa com o ensino de Estatística.”*

239. **Pesquisador/Participante:** Ok! Pessoal, dá pra perceber que, durante estes 9-10 Grupos de Estudo, nós discutimos os saberes da experiência de vocês, concordam? **[Todas as participantes indicaram concordar.]** Os saberes do conteúdo específico – Estatística – e o saber curricular. Tudo bem, pessoal? **[Resposta análoga à anterior.]** Porque segundo Tardif, estes saberes, mais os saberes da formação profissional (Ciências da Educação) irão constituir um todo que irá auxiliar o professor à constituição de sua prática pedagógica. E parece que a nossa proposta, o Grupo de Estudo, por meio das falas de vocês, está indo de encontro neste sentido. Nos vamos estudar agora os saberes da Educação, e no caso iremos estudar um pouco a teoria de Piaget que deu suporte a uma teoria educacional, o construtivismo piagetiano. Entretanto, vou tentar possibilitar o estabelecimento de uma relação entre esta teoria e a futura prática docente de Matemática de vocês.

[Em comum acordo, decidiu-se a realização da leitura conjunta acerca do texto – itens 10.1 e 10.2– feita pelo Pesquisador/Participante. Tal texto apresenta-se abaixo.]

10 Um movimento de retomada (síntese)

No 9.º encontro foram realizadas algumas discussões referentes ao Ensino de Estatística nos anos iniciais (1.º ao 5.º) do Ensino Fundamental. Além de citar os conteúdos a serem ensinados, foi denotada uma

possível distribuição dos mesmos em cada bimestre (1.º ao 4.º) de cada ano (1.º ao 5.º). Durante a discussão do questionamento “*Como realizar a abordagem de tais conteúdos?*” chegou-se à conclusão da adoção da solução de problemas enquanto estratégia didático-metodológica.

Sem desconsiderar outros fatores (filosóficos, socioeconômicos, históricos, morais, entre outros) que influenciam a constituição de uma proposta curricular, devido ao objetivo do Grupo de Estudo, dentre tantos outros, dar-se-á atenção aos aspectos psicológicos intervenientes em tal constituição, sendo utilizado como referencial teórico a Epistemologia Genética.

10.2 Epistemologia Genética: algumas considerações

Ao utilizar a solução de problemas como estratégia didático-metodológica à ‘execução’ da proposta curricular, faz-se oportuno o seguinte questionamento: “*Por que propor problemas aos alunos colabora ao processo de aprendizagem?*”. Ao tentar solucionar um problema o estudante está agindo sobre o objeto de conhecimento em questão. Mas, “*Qual a importância do agir (atividade/ação) do sujeito ao processo de construção de conhecimento?*”. Visando refletir sobre tal questão, torna-se válido a análise das ideias de Jean Piaget a respeito da atividade do sujeito.

[Durante a leitura do item 10.1, o Pesquisador/Participante denotou a diferença entre um ‘verdadeiro’ problema e um ‘simples’ exercício de ‘memória’, valendo-se da definição proposta por Sternberg. Alertou-se que tal ideia não significa a retirada de exercícios de aplicação – algoritmos – do currículo. Além de tais exercícios – necessários ao processo de construção do conhecimento matemático – deve ser feito um trabalho conjunto propiciando aos alunos pensarem sobre ‘verdadeiros’ problemas de modo a possibilitar-lhes o entendimento do significado do conteúdo estudado.]

[Ao realizar a leitura do item 10.2, o Pesquisador/Participante denotou o seguinte comentário/questionamento.]

240. Pesquisador/Participante: Vamos supor que a mãe da sua aluna Joana chega na escola e te faz as seguintes perguntas: “Professora, porque o caderno da minha filha não tá ‘cheio’? Por que você fica colocando um monte de problema difícil pra minha filha resolver? E cadê as continhas de mais, de menos pra ela treinar bastante?...” Dá pra perceber, pessoal, que é necessário sabermos justificar teoricamente as estratégias didático-metodológicas que adotamos em nossa prática docente. É claro que devemos justificar às mães interessadas pela aprendizagem de seus filhos, mas devemos fazer isso com ‘propriedade’ e autonomia intelectual. **[As participantes indicaram, por meio de expressão facial, concordar com o exposto.]**

[Visando responder o questionamento ressaltado ao final do primeiro parágrafo do item 10.2, o Pesquisador/Participante realizou a leitura do texto – A actividade do sujeito. Observe-o abaixo.]

A ACTIVIDADE DO SUJEITO

Um dos temas que permanecem constantes, ao longo dos escritos pedagógicos de Piaget, é o da actividade do sujeito. Este tema é frequentemente associado a outras temáticas, como o papel do professor, os métodos pedagógicos, a autonomia da criança. E é sempre contraposto ao verbalismo.

A actividade do sujeito faz sempre alusão à tomada em consideração da individualização do ensino. No entanto, Piaget especifica, pouco a pouco, este conceito, colocando a tónica já não na importância de experimentar uma realidade para a poder compreender, mas na actividade como uma característica do pensamento da criança.

Nos seus primeiros escritos, Piaget fala, com efeito, da actividade em termos de experiência e de descoberta. A actividade é associada ao facto de que a educação deve responder a uma necessidade. Ora, esta última deve ser experimentada pela criança, isto é, deve corresponder a uma «realidade vivida». Tomemos, por exemplo, o domínio da educação internacional. Seria possível, como o fazia o ensino tradicional, explicar à criança, de forma verbal, no que ela consiste. Mas os resultados seriam decepcionantes, porque a criança aceitaria muito simplesmente conhecimentos definitivos, impostos do exterior, sem os interiorizar. Para que os possa assimilar, é necessário que a criança seja colocada numa situação em que ela própria exerça uma certa actividade, como os intercâmbios interescolares, as viagens, etc.

A partir dos anos 40, a actividade é associada à ideia de actividade operatória ou instrumental, funcionando por ocasião de manipulações ou de experiências. A necessidade de experiência torna-se necessidade de experimentação. A actividade torna-se actividade construtiva do pensamento. É a acção que permitirá a construção das operações intelectuais. (...) Pela sua actividade, a criança constrói, assim, os seus próprios instrumentos operatórios para compreender o mundo. Vemos que a ideia de experimentação, se bem que sempre presente, passa progressivamente para segundo plano, depois da construção operatória. Falando de actividade no domínio da educação, Piaget refere-se, cada vez mais, à actividade operatória, isto é, lógica, em conformidade com os seus interesses em psicologia.

[Ao término da leitura, o Pesquisador/Participante chamou a atenção ao fato de Piaget também ter se preocupado com a Pedagogia, embora não dedicasse a maior parte de seu tempo sobre esta temática. Em seguida, é denotada a seguinte situação problema, visando com que as participantes pensem sobre o texto lido.]

1. Durante uma reunião pedagógica em sua escola, a professora de Matemática Sueli e seus demais colegas professores ficaram encarregados da leitura-análise do texto denotado no quadro acima. No entanto, algumas discordâncias ocorreram quanto ao significado de dois trechos: “(1.º Parágrafo) *E é sempre contraposto ao verbalismo.*”; “(3.º Parágrafo) [...] *a educação deve responder a uma necessidade. Ora, esta última deve ser experimentada pela criança, isto é, deve corresponder a uma <<realidade vivida>>*”. Tente descobrir quais foram os diferentes significados advindos da interpretação desses trechos e que causaram discordâncias entre os professores.

[Foi disponibilizado 10 minutos para ‘pensar sobre’ o questionamento. Com exceção de P-9 que respondeu individualmente, as demais participantes realizaram uma discussão conjunta acerca do problema, sendo esclarecido à P-8 o significado da palavra contraposto pelo Pesquisador/Participante. Durante a discussão, P-2 e P-7 compartilharam uma situação vivenciada no estágio numa escola de Educação Infantil na qual a professora responsável deixava os alunos ‘sozinhos’ realizarem a manipulação de objetos manipuláveis. Como justificativa, a referida professora disse-lhes que sozinhas as crianças construiriam o conhecimento, não interferindo sequer quando as mesmas começavam a brigar. Indignada, P-7 falou, enfaticamente:]

241. **P-7:** *E ela ainda se dizia construtivista e que estava utilizando a teoria de Piaget.*

242. **P-5:** *Não, mas talvez ela estava querendo construir a autonomia nas crianças. [Risos entre as participantes.]*

243. **P-7:** *Mas eu acho que uma criança de 6 anos não tem autonomia para isso! A professora deve auxiliá-la a ir construindo essa autonomia... [Risos entre as participantes.]*

244. **P-5:** *Não... concordo! Essa professora com certeza não entendeu a teoria! [Risos entre as participantes.]*

[Decorrido o tempo, deu-se início ao compartilhamento das respostas elaboradas. P-4 foi a primeira a socializar sua resposta.]

245. **P-4:** *A parte que eu fiz foi sobre o contraposto ao verbalismo e à realidade vivida. Em relação ao contraposto, o professor pode dizer que não precisa falar nada, a criança aprende de manipular o concreto, ou, no sentido do professor ficar falando muito, o tempo todo... ele deve explicar-mediador, mas o concreto é muito importante. E depois o outro, da realidade vivida... O professor deve levar em conta somente situações vividas, experienciadas pelos alunos e ficar só nisso, ou, partir da realidade vivida dos alunos mas não ficar só aí, ir cada vez mais ampliando a visão dos alunos.*

246. **Pesquisador/Participante:** Vocês também colocaram isso, pessoal? **[As demais participantes ressaltaram ter colocado resposta análoga a exposta por P-4.]** Vocês acham, pessoal, que uma leitura deste texto pode trazer discordâncias?

247. **P-2:** *Sim!* **[Resposta compartilhada pelas demais participantes.]**

248. **Pesquisador/Participante:** Ok! Vamos analisar o texto... alguma parte dele que possa causar discordância, fora estas duas, vocês anotaram? **[As participantes folhearam a página na qual estava o referido texto.]** Vocês acham que alguma parte mostra algum equívoco? Ou que Piaget escreveu pouco sobre algum tema...

249. **P-9:** *Não, eu só fiz algumas considerações, talvez... Quando ele fala: “A actividade é associada ao facto de que a educação deve responder a uma necessidade.”. Eu me lembro do que a gente tinha falado anteriormente sobre a situação problema... porque a partir de quando você aplica a problematização pro aluno, no contexto da sala, aí ele vai ter uma necessidade de saber aquilo, então talvez seria neste contexto também... Porque você **[Referiu-se ao professor.]** aplica, você media com o aluno, então o aluno tem uma necessidade, e ele vai aplicar, vai agir sobre aquilo, em função daquilo.*

250. **Pesquisador/Participante:** Talvez, P-9, ao realizar uma leitura ‘corrida’ desta parte o leitor ache que Piaget está defendendo o ensino enquanto exclusivo à coisa prático-utilitária...

251. **P-9:** *É, foi isso que eu coloquei nesta parte aqui **[Apontou para o trecho do referido texto.]**, que talvez o pessoa possa confundir isso... Tipo, a professora pode pensar colocando noções pras crianças fazerem, aí, respondendo ao contexto em que está acontecendo, ela vai falando, daí ela tem necessidade de uma coisa que está acontecendo ali...*

252. **Pesquisador/Participante:** Ok! Eu fiz questão de colocar este trecho porque uma das incompreensões da teoria de Piaget foi o fato de muitos acharem que ele defendia o ensino de conteúdos exclusivo da necessidade prático-utilitária do aluno, não sendo necessário abordar assuntos complexos, ou, que o professor não poderia intervir ao processo de ensino já que o aluno sozinho iria construir o conhecimento. Estas más interpretações advieram de uma leitura equivocada/superficial da teoria educacional construtivista alicerçada na Epistemologia Genética. Tudo bem?

253. **P-9:** *Sim!*

254. **Pesquisador/Participante:** Alguém mais, pessoal?

255. **P-2:** *Então, nós estamos comentando aqui **[Referiu-se à conversa realizada com P-5 e P-8.]**, não que causou dúvida, mas uma parte que remete às pessoas que chamam Piaget de burguês...*

256. **Pesquisador/Participante:** Qual parte?

257. **P-2:** *No exemplo dele, por exemplo, no nosso país é inviável de que as crianças façam intercâmbios interestaduais, as viagens tal... Chega a ser meio utópico até...*

258. **P-8:** *É que na Europa isso é comum...*

259. **P-2:** *Sim, é muito!*

260. **Pesquisador/Participante:** Sim, verdade!

261. **P-8:** *Lá mesmo onde minha filha está estudando [A filha da participante está cursando uma pós-graduação em uma Universidade na Espanha.], os estudantes vêm de outro país, da Alemanha, da Itália e vem estudar... É uma outra realidade, então, assim, eles vêm estudar... Aqui no Brasil tem um pouco disso, mas lá é muitos...*

262. **Pesquisador/Participante:** Aqui no Brasil tem muito pouco...

263. **P-2:** *Imagino isso aqui no Ensino Fundamental, então? Acho que nem existe estes intercâmbios... [Neste momento, P-9 interrompe dizendo não poder ficar até o término do Grupo de Estudo devido a um compromisso.]*

264. **Pesquisador/Participante:** Alguma outra parte, pessoal? Acharam interessante este escrito piagetiano?

265. **P-8:** *Pra mim Piaget tem que ler 2 vezes!*

266. **P-7:** *Olha, eu também!*

267. **P-5:** *Nossa, então vocês estão bem porque eu...*

268. **P-8:** *Até algumas palavras eu deixo o dicionário do Google ligado... Aí eu vou colocando pra ver os significados pra mim... igual você falou pra mim de contraposto... Você lê você entende, mas eu quero saber o que significa...*

269. **P-5:** *E o que significa pra ele [Referiu-se à Piaget.] também, né!? Às vezes quando você não conhece os estudos do autor, você pode pegar as palavras experiência... que pode ter assim um outro significado...*

270. **Pesquisador/Participante:** Sim, você está certo... Um termo para Piaget pode não ter o mesmo significado para outro estudioso... Nós vamos estudar o que Piaget entende por experiência, e daí ele divide em 2 tipos: a experiência física e a experiência lógico-matemática; e ao dividir em 2 tipos remete a 3 tipos de abstrações... Você entendeu? Iremos analisar isso posteriormente.

[Como não houveram outros questionamentos, deu-se prosseguimento à leitura – pelo Pesquisador/Participante – do seguinte trecho.]

Em sua ‘tríade’ Jean Piaget verifica que o conhecimento não é inato, ou seja, não está pré-formado nas estruturas cognitivas do indivíduo ao nascer, e nem resulta da pressão exercida pelo meio sobre o sujeito. Para este autor o conhecimento advém de uma interação-ação entre o sujeito e o meio (objeto), no qual, ao organizar o mundo ao seu redor a criança organiza a si mesma. Por exemplo, na “ATIVIDADE 1: COMO ESTÁ O TEMPO?” – 5.º problema do item 9.1 – ao ‘organizar o mundo’ verificando a condição climática a criança ‘organiza a si mesma’ construindo inúmeras operações mentais (classificação, ordenação/seriação, quantificação).

Ao propor a Epistemologia Genética – também denominada Construtivismo Sequencial Probabilístico – Piaget ‘supera’ duas antigas correntes epistemológicas: o Racionalismo e o Empirismo. No quadro abaixo são denotadas as ideias centrais de tais correntes bem como seus idealizadores iniciais.

	Idealizador	Ideias Centrais
RACIONALISMO	Platão	IDÉIA 1 – O sujeito nasce com conhecimentos. IDÉIA 2 – O sujeito necessita de estímulos para despertar os conhecimentos. IDÉIA 3 – O sujeito é a base fundamental dos conhecimentos.
EMPIRISMO	Aristóteles	IDÉIA 1 – O sujeito nasce ignorante “TÁBULA RASA”. IDÉIA 2 – O sujeito conhece somente pela experiência de seus 5 sentidos, não há conhecimento sem experiência. IDÉIA 3 – O objeto é a base fundamental dos conhecimentos.

[Durante a discussão do Racionalismo, P-2 questionou se o Inatismo e o Apriorismo entrariam nesta corrente epistemológica. O Pesquisador/Participante disse afirmativamente, ressaltando haver algumas diferenças entre as mesmas. Ao apresentar as ideias do Empirismo, foi chamada a atenção ao fato do mesmo embasar a ‘Escola Tradicional’, ou seja, àquela que considera o aluno um sujeito passivo frente as informações ‘repassadas’ verbalmente pelo professor. Outra pergunta realizada por P-2 foi a seguinte:]

271. **P-2:** *O Racionalismo é a base do Behaviorismo já que fala de estímulos?*

272. **Pesquisador/Participante:** Não, P-2, a base do Behaviorismo foi o Empirismo. Isso se deve, pois, como no Empirismo o objeto é a base fundamental do conhecimento, então o mesmo vai agir como o principal a causar uma resposta no sujeito, ou seja, o estímulo do ‘famoso’ esquema ESTÍMULO→RESPOSTA.

273. **P-2:** *Ah, tá, entendi!*

274. **Pesquisador/Participante:** E é interessante falar que as “atuais” correntes psicológicas/epistemológicas não existiriam se não fossem os estudos desenvolvidos pelos racionalistas e pelos empiristas. Por exemplo, Piaget elaborou a sua teoria negando as outras 2. E se as mesmas não existissem, o que Piaget iria negar? Tudo bem, pessoal? **[Todas as participantes indicaram, por meio de expressão facialmente, compreender.]** Tudo bem, pessoal, em relação ao Racionalismo e ao Empirismo? Eu acho que o curso trabalhou bem esta questão...

275. **P-8:** *Que curso?*

276. **Pesquisador/Participante:** O de Pedagogia!

277. **P-8:** *Ah, tá, eu pensei que fosse o nosso! Hoje eu não tô boa! [Risos entre todos.]*

278. **P-5:** *Então, eu lembro mais de ter estudado isso na sua aula.*

279. **Pesquisador/Participante:** Você se lembra da disciplina que eu ministrei pra vocês?

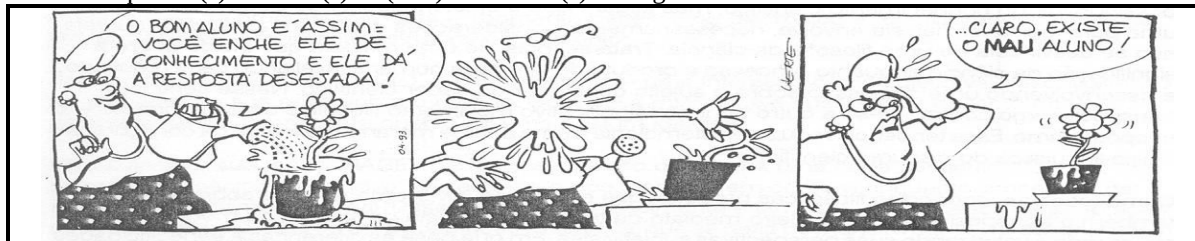
280. **P-5:** *Então, eu lembro até da apresentação em PowerPoint marrom que você deu pra gente!*

281. **Pesquisador/Participante:** Legal! Podemos pensar, só pra finalizar, a respeito de duas situações problemas? Vocês acham que dá devido ao tempo que está se esgotando?

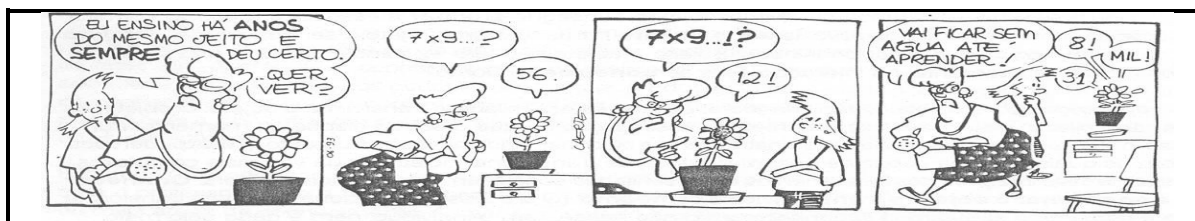
282. **P-2:** *Sim!* [Resposta compartilhada pelas demais participantes.]

[Deste modo, o Pesquisador/Participante solicitou às participantes pensarem sobre as seguintes situações problemas.]

2. Identifique qual(s) corrente(s) epistemológica(s) está(ão) implícita(s) nas tiras abaixo que representam as atitudes de uma professora de Matemática. Em seguida, tente se lembrar de alguma experiência escolar na qual tal(s) corrente(s) foi(ram) observada(s) e a registre.



Fonte: (BORJA, 1993, p. 15)



Fonte: (BORJA, 1993, p. 87)

3. Durante a sua experiência escolar, tente se recordar de alguma fala ou postura de seu professor na qual fica explícita, ou implícita, uma ideia condizente ao racionalismo. Caso consiga, anote-a para posterior discussão.

[Durante o tempo disponibilizado para a solução das 2 situações problemas, as participantes discutiram conjuntamente. Ao analisar as 2 tiras, P-8 compartilhou o seguinte em relação a uma experiência escolar vivenciada.]

283. **P-8:** *Eu lembro de experiência... Mas assim, eu lembro, de uma coisa que marcou... eu tinha maior medo... A gente tinha chamada oral de tabuada, aí o professor pegava a lista e ele ia assim, oh: [Imitou o seu 'antigo' professor de Matemática ao sortear um aluno – da lista de presença – para recitar determinada tabuada.] “Número tal, fale a tabuada do número 7!”. Tinha que falar a tabuada inteira, tinha que levantar e falar. E eu morria de medo de esquecer a tabuada, eu ficava nervosa...*

284. **P-2:** *E se você errasse, o que acontecia?*

285. **P-8:** *Baixava ponto!*

286. **P-2:** *Então é uma experiência!*

287. **Pesquisador/Participante:** *Sim, é uma experiência!*

288. **P-8:** *E é uma experiência de Matemática!*

289. **P-2:** *Eu não fui torturada!*

290. **P-8:** *Ah, eu fui! Eu morria de medo...*
291. **Pesquisador/Participante:** Então, aqui, a ‘torturada’ foi a P-8, a P-4 e quem mais?
292. **P-7:** *Eu!*
293. **Pesquisador/Participante:** Você não, né P-5?
294. **P-5:** *Não!*
295. **Pesquisador/Participante:** E você também não, né P-1?
296. **P-1:** *Não!*
297. **P-7:** *Tinha chamada oral e eu morria de medo! E era assim, você errou, tirava ponto...*
298. **P-8:** *E daí se você errava as crianças começavam a gozar da sua cara!*
299. **P-4:** *Vocês acreditam que eu não tenho recordação de nada! É verdade! Eu sei que eu sofri, que eu fui torturada, que me dava alergia falar de Matemática, mas não sei como foi. Além daquele fato que eu já falei do professor me falar que eu não conseguia aprender mesmo, que eu era burra!*
300. **P-7:** *Até a minha Educação Física era assim!*
301. **P-4:** *Parece, Pesquisador/Participante, que essa parte, assim, apagou da minha mente. [Referiu-se às aulas de Matemática vivenciadas na Educação Básica.]*
302. **Pesquisador/Participante:** Você, P-4, bloqueou...
303. **P-4:** *Eu não lembro de nada. [Risos.]*
304. **Pesquisador/Participante:** O nosso cérebro é tão ‘inteligente’ que ele ‘bloqueia’ situações negativas que a gente vive, em muitos casos...
305. **P-8:** *Mas é mesmo!*
306. **P-4:** *Todo mundo me pergunta: “Por que você não gosta da Matemática?”. E eu respondo: “Eu não sei o porquê!”. Eu não gosto, mas..., sabe, não tem um porquê, assim, do que aconteceu!*
307. **P-2:** *Eu, nas aulas de Matemática, era bem quietinha!*
308. **P-7:** *Eu, então, nem olhava pro lado!*
309. **P-5:** *Ah, eu não! Eu era representante de classe, do conselho...*
310. **P-2:** *Nossa, eu não era nada!*

311. **P-5:** *E eu lembro que algumas coisas eu bagunçava, mas eu nunca desrespeitei meus professores. Eu tinha medo, assim, respeito... Se falasse pra minha mãe, então...*
312. **P-8:** *Eu participava de tudo, também!*
313. **P-2:** *Nossa, eu era quietíssima! No meu caso era bom dia, e ponto!*
314. **P-7:** *E olha lá, ainda!*
315. **P-8:** *Então, é isso que você quer que fala?*
316. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo, identificar a corrente epistemológica e situações vivenciadas que sejam embasadas nas mesmas! Caso você não consiga recordar ou não tenha vivenciado, tudo bem!
317. **P-8:** *Então, eu tive 2 experiências! Pode falar?*
318. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro!
319. **P-8:** *Eu tinha uma professora de Matemática que colocava exercício na lousa. Quem terminava ela dava uma bala! E eu, imagina, fazia rápido e ganhava bala, então é essa parte aqui, oh [Apontou para as tiras denotadas no 2.º problema.]*
320. **Pesquisador/Participante:** Então vamos discutir a 2.ª questão! Qual a corrente epistemológica que vocês identificaram? [Todas responderam “Empirismo.”] Todo mundo concorda que é o Empirismo. É interessante a flor cuspir a água, né!?
321. **P-2:** *Eu achei ótimo!*
322. **P-8:** *E na tira de baixo ela errando! [Referiu-se à 2.ª tira do problema 2.]*
323. **Pesquisador/Participante:** Nesse caso, P-8, havia uma pressão externa que era ganhar o prêmio. Daí você fazia correndo pra poder ganhar!
324. **P-8:** *É!*
325. **Pesquisador/Participante:** Você, P-2, me disse que não lembra uma situação passada com você!
326. **P-2:** *É, então, eu nunca tive na sala questão de estímulo! Mas eu lembro falas, assim, da professora que não eram nem pra mim!*
327. **Pesquisador/Participante:** Fale pra gente!
328. **P-2:** *Mas eu lembro de crianças que acontecia... tipo, ela dava uma lista de exercícios. Daí você fazia... e daí tinha umas que ela falava: “Eu já ensinei!, Você não consegue fazer!” [A participante imitou a fala de sua ‘antiga’ professora ressaltando a mesma estar brava pelo fato do aluno ter errado ou não saber resolver o exercício presente na lista de exercícios.]... Sabe, não era pra mim, mas...*

329. **Pesquisador/Participante**: Sim, ok, também pode ser! “Eu ensinei e você não sabe fazer, então o burro é você!” É isso, indiretamente?
330. **P-2**: *Sim, indiretamente! Tinha passagens assim!*
331. **Pesquisador/Participante**: Ok! E você, P-5?
332. **P-5**: *Nossa, igualzinho o que a P-2 falou! Não era comigo, mas ela [Referiu-se a sua ‘antiga’ professora de Matemática.] falava: “Eu já ensinei e você não aprendeu!, Eu ensino, é ele que não aprende!”*
333. **Pesquisador/Participante**: Ou seja, esse professor pensa assim: “Eu fiz o meu papel, exerci minha pressão externa sobre você, aluno... Se você não aprendeu é porque você não se esforçou...” Não tem estas justificativas, pessoal?
334. **P-5**: *Sim, tem!* [Resposta compartilhada pelas demais participantes.]
335. **Pesquisador/Participante**: P-7...
336. **P-7**: *Ah, é tudo o que elas já falaram! Não tinha muito esse negócio de ganhar, mas de tirar, de sempre tirar ponto... De tanto tirar você ficava com 0.*
337. **Pesquisador/Participante**: Ok! P-4...
338. **P-4**: *Ah, eu sempre ficava devendo... [Risos entre todos.] Eu ficava com saldo negativo!*
339. **P-7**: *Mas eu nunca perdia nota! Eu fazia de tudo pra não perder!*
340. **Pesquisador/Participante**: Mas você, P-7, ficava sempre naquela pressão!
341. **P-7**: *Sim, e era aquele medo... eu não olha pro lado, imagina!*
342. **Pesquisador/Participante**: Então aprender Matemática pra vocês nunca foi gostoso?
343. **P-7**: *Não!*
344. **Pesquisador/Participante**: E pra você, P-4?
345. **P-4**: *Não!*
346. **Pesquisador/Participante**: Pra você foi, né P-8?
347. **P-8**: *Sim!*
348. **Pesquisador/Participante**: E pra você P-2?
349. **P-2**: *Foi gostoso, mas não sei se foi significativo...*
350. **Pesquisador/Participante**: Tá! E pra você, P-5?

351. **P-5:** *De novo, vão achar que eu tô copiando, mas foi o que a P-2 falou! Sim, inclusive várias vezes eu relato de ter visto isso, foi legal, aprendi... [Referiu-se aos conteúdos matemáticos referentes aos gráficos e tabelas.] Mas muita coisa eu não lembro, eu não sei se eu construí bem, e depois eu não sei... Mas eu acho que...*
352. **P-2:** *Mas se você tinha aprendido e se você rever você não lembraria?*
353. **P-5:** *Então, eu não sei! Aí que está o problema!*
354. **Pesquisador/Participante:** Vocês acham que daqui alguns anos, ao vocês estudarem alguma coisa referente à Moda, Média, Dispersão, vai ser diferente?
355. **P-1:** *Vai! [Resposta compartilhada pelas demais participantes.]*
356. **P-2:** *Eu acho que houve uma compreensão [referiu-se aos conteúdos abordados no Grupo de Estudo] e não uma memorização [ocorrida nas aulas de Matemática da Educação Básica]... eu vejo muito isso, assim, no meu ensino dos anos atrás...*
357. **Pesquisador/Participante:** Ok! Nós iremos estudar em nosso Grupo de Estudo o processo de Tomada de Consciência... acho que irá também nos auxiliar nesta discussão. Eu já venho fazendo uma análise do desenrolar dos nossos encontros... e, quando vocês me falam que daqui há alguns anos conseguirão relembrar os conteúdos construídos, isso é um forte indício de que vocês estão ‘tomando’ consciência destes conteúdos, ou seja, estão refletindo sobre os mesmos. É por isso, também, que eu trouxe novos desafios acerca dos conteúdos da Estatística Descritiva para que vocês se ‘desequilibrem’ novamente, para vermos até que ponto os conteúdos estão bem apropriados por vocês.
358. **P-2:** *Ah, tá!*
359. **Pesquisador/Participante:** E você, P-1, aprender Matemática foi “gostoso”?
360. **P-1:** *Do Ensino Fundamental eu não me lembro! Mas eu lembro que na 7.^a e 8.^a série eu gostava bastante!*
361. **Pesquisador/Participante:** E você teve uma experiência próxima ao Empirismo? Ou você ouviu o professor falar...
362. **P-1:** *Ah, esse negócio de ponto positivo e negativo sempre teve.*
363. **Pesquisador/Participante:** Quando o professor diz: “Eu não acredito que você tirou isso na prova!”. Você já presenciou isso?
364. **P-5:** *Já!*
365. **Pesquisador/Participante:** Ou então esta fala: “Eu faço tudo direitinho, mas você não aprende!”.
366. **P-1:** *Essa não!*

367. **Pesquisador/Participante**: Quem já ouviu essa fala do professor de Matemática, seja pra você ou pra algum colega?
368. **P-7**: *Eu já!*
369. **P-5**: *O duro é que a gente ainda ouve isso aqui, na graduação. [Referiu-se às falas e às atitudes de alguns professores da graduação que se aproximam da concepção epistemológica empirista.]*
370. **P-7**: *E é recente!*
371. **P-2**: *É sim!*
372. **Pesquisador/Participante**: Então, segundo a perspectiva e vivência de vocês, algumas falas e ações dos seus professores se aproximam da concepção epistemologia empirista?
373. **P-2**: *Ah, sim, vivenciamos! E bem recentemente, por sinal!*
374. **Pesquisador/Participante**: Compartilha pra gente, por favor, sem citar o nome, pois devemos preservar o nome de quem a fez em respeito à ética profissional.
375. **P-2**: *Ah, eu acho assim, a partir do momento que você acha que deu um texto e você explicou algo, e você tem o direito de cobrar numa avaliação palavras do texto... pra mim isso é algo empirista.*
376. **P-4**: *E sem explicar nada! E ele acredita que enfiou o texto em nossa 'goela' abaixo.*
377. **Pesquisador/Participante**: Concordo com vocês!
378. **P-7**: *E é bem recente!*
379. **Pesquisador/Participante**: E uma ação/fala próxima de uma concepção apriorista? Vocês já vivenciaram aqui no curso? Como, por exemplo, de achar que o sujeito já nasce pronto, só falta desabrochar, ou que ele nasceu burro mesmo...
380. **P-2**: *Você quer a discussão que teve em nossa sala?*
381. **Pesquisador/Participante**: Por favor, pode falar!
382. **P-2**: *Então, foi com um professor, na verdade, aliás, o professor deveria ter tido a postura de reverter a discussão... Teve uma discussão em uma das aulas e... foi sobre jogos, sobre o desempenho das pessoas em jogos... e todo mundo, quer dizer, a maioria da sala, 60 ou 70% da sala disse que era porque já vinha com o dom.*
383. **P-7**: *Até o exemplo que usaram, o jogador Neymar, ele nasceu pronto pra jogar, foi mais ou menos por aí que caminhou a discussão.*
384. **Pesquisador/Participante**: Então, segundo esta postura, Piaget nasceu assim, também!

385. **P-2:** *Nasceu!* [Resposta compartilhada pelas demais participantes, seguido de risos por todos.]

386. **Pesquisador/Participante:** Então ele estava pré-destinado a elaborar uma das ‘grandes’ teorias em Epistemologia e Psicologia...

387. **P-2:** *Sim!*

388. **Pesquisador/Participante:** Assim como foi com Vigotski, Wallon, Freinet, Paulo Freire... Ok! Pessoal, e antes de ingressar na Universidade, vocês acreditavam que as pessoas aprendiam por dom ou vocação? **[Todas as participantes ergueram o braço indicando acreditar em tal hipótese racionalista.]** Vocês acreditavam serem as responsáveis de terem ido mal na prova, mesmo tendo se dedicado? **[Todas as participantes responderam afirmativamente.]** Porque eu sei da dedicação de vocês, seja aqui em nosso Grupo de Estudo ou quando eu fui professor de vocês na graduação. Então mesmo assim vocês se culpavam, achando que não davam pra aquilo (visão racionalista) ou que não tinha estudado o suficiente, não tinham treinado exaustivamente as listas de exercício (visão empirista)?

389. **P-8:** *Sim!* [Resposta compartilhada pelas demais participantes.]

390. **P-7:** *Eu falava, eu fui mal porque eu não estudei direito!*

391. **P-8:** *Isso é muito forte na gente!*

392. **P-5:** *Eu acho que depende. Tem horas que eu fico assim...*

393. **Pesquisador/Participante:** É, tem horas que falta a nossa dedicação, a nossa ação, o pensar sobre aquele conteúdo... até porque estudar não é fácil e muito menos não cansativo...

394. **P-5:** *É, tem horas que eu acho que é falta de minha dedicação, mas tem outras que eu fiquei lá, estudando bastante e mesmo assim não consegui responder alguma coisa, eu não fico me culpando!*

395. **P-2:** *Só que aí eu acho que entra um pouco de personalidade, porque eu sempre fui de me cobrar muito, e é horrível!*

396. **P-7:** *Eu também!*

397. **P-8:** *Eu penso que eu devia ter feito diferente, ter falado diferente...*

398. **P-2:** *Então, um pouco talvez é nosso isso, é meu...*

399. **Pesquisador/Participante:** Então, pessoal, antes da Universidade vocês tinham essas visões: que só o professor falar era suficiente, sem a preocupação em ‘desequilibrar’ vocês; de que vocês eram as culpadas por não aprender mesmo se esforçando... Estas ideias foram sendo modificadas ao longo do curso de Pedagogia? **[As participantes indicaram tal modificação, até que P-8 denota o seguinte questionamento.]**

400. **P-8:** *Será que modificou?*

401. **Pesquisador/Participante**: Será mesmo que modificou?
402. **P-2**: *Ah, eu só fui entender isso aqui, no nosso curso de Pedagogia. Eu só fui entender o desenvolvimento de uma criança aqui!*
403. **Pesquisador/Participante**: Agora, de experimentar situações análogas das quais você terá que fazer com os seu futuros alunos foi só aqui?
404. **P-2**: *Só aqui no grupo! [Resposta compartilhada pelas demais participantes.] E continua sendo só no Grupo de Estudo!*
405. **P-8**: *Ah, na disciplina que você deu você deu bastante exemplos de como usar...*
406. **Pesquisador/Participante**: Sim!
407. **P-2**: *E o que me preocupa muito, e sem citar nomes, também, é que o Departamento de Educação dá uma visão de que você precisar saber apenas da teoria! Eles acham desnecessário trazer a parte prática...*
408. **Pesquisador/Participante**: E confrontá-la com a teoria?
409. **P-2**: *Sim! Infelizmente!*
410. **P-8**: *A gente devia ter laboratório prático, né!? Tem até um falando disso lá no Estadão [Referiu-se a uma matéria jornalística publicada no referido jornal.], que igual ao médico que tem que ter residência, o professor também deveria ter.*
411. **Pesquisador/Participante**: P-5, desculpe interromper a conversa com a P-2, mas aplicar a teoria na prática, são poucos que sabem e se predispõe a fazer!
412. **P-5**: *Então, era isso que eu estava falando, porque talvez os nossos professores não saibam fazer! Eles não tem essa visão!*
413. **Pesquisador/Participante**: Até porque, pessoal, planejar o nosso Grupo de Estudo, pra mim está sendo bem difícil... Pra chegar nestas páginas que eu trago pra vocês eu relaciono (tento, pelo menos) tantas variáveis que não é só teoria... tem a parte dos saberes da experiência de vocês, atividades práticas, questões afetivas, morais, da realidade da sala de aula. Porque eu acho que está ficando claro, aqui, em nosso Grupo de Estudo a realidade de uma futura atuação, não é? **[Todas as participantes concordaram.]** Uma coisa é estudar só a teoria, e é claro que tem seus méritos, sua importância e também é muito difícil. Outra coisa é fazer só a prática, que também é difícil. Agora, unir as duas, como eu estou tentando mais ou menos fazer aqui, porque deve ter vários defeitos, é difícil também... Até porque eu nunca organizei um Grupo de Estudo como o nosso.
414. **P-5**: *Mas, por mais que seja pouco, eu vejo muita diferença dos professores que já deram aula numa escola dos que não deram.*
415. **Pesquisador/Participante**: Você se refere ao professores da Universidade que, antes do Ensino Superior, foram professores da Educação Básica?

416. **P-5:** *Sim! Eu acho assim, que é você e mais 2 professores que fizeram diferente, porque eu acho que estabelecer esta ponte entre teoria e prática fica mais fácil.*

417. **Pesquisador/Participante:** Isso o que eu vou falar é uma visão minha, uma crítica minha. Eu acredito que todo Mestre ou Doutor em Educação deveria ‘passar’, ter uma vivência numa escola real, com todos os problemas que sabemos que existem, antes ou durante o curso de Pós-Graduação. Só que infelizmente essa não é uma exigência dos órgãos regulamentadores. Eu não vou ser hipócrita e dizer pra vocês que nos dois primeiros anos enquanto professor dos anos iniciais eu tive uma postura construtivista... pelo contrário, pela própria formação que eu tive era mais próxima do Empirismo (Behaviorismo)... Só que, a constante reflexão sobre a minha prática, alicerçada nos estudos de Piaget, foi transformando a minha prática. Eu estudei numa escola de Ensino Fundamental que era, assim, um estilo militar... Então, hoje eu vejo que muitas das coisas ali eu tinha memorizado, não compreendido. Eu até já cheguei a comentar com vocês que no vestibular eu havia memorizado a função e o desenho do gráfico correspondente, não significava que eu havia compreendido! E uma coisa triste, eu passei a compreender isso durante o curso de Matemática, mas foi mais sozinho, porque posso afirmar que foram poucos os professores da graduação que contribuíram isso...

418. **P-5:** *Que bom que você, ainda, mesmo com as dificuldades foi além! Mas eu fico pensando que a maioria não vai!*

419. **P-2:** *E daí fica só na prática!*

420. **Pesquisador/Participante:** É, infelizmente! E a proposição deste grupo, em grande parte é sobre isso... para que o Empirismo e o Racionalismo não seja passado adiante por vocês! Para que a concepção de que o sujeito é ativo, seja realmente incorporado-assimilado por vocês, e não só na fala, mas também nas ações...

[Devido ao tempo já ‘esgotado’, foi solicitado às participantes que realizassem a leitura, em suas casas, da parte final do item 10.2 e do 10.2.1 – A teoria da assimilação.]

APÊNDICE O – TRANSCRIÇÃO DO 11.º ENCONTRO

Data: <u>17/05/2012</u>
Tempo de Duração: <u>3</u> horas e <u>10</u> minutos.

[No 11.º encontro estavam presentes P-2, P-4, P-5 e P-7. Quando questionadas pelo Pesquisador/Participante sobre o que acharam do item 10.2.1 – A teoria de assimilação – as participantes disseram ser uma leitura difícil, tendo dificuldades em interpretar as definições propostas por Piaget. Neste momento, o Pesquisador/Participante ressaltou o seguinte:]

1. **Pesquisador/Participante:** A gente pode até utilizar a teoria da assimilação para a própria compreensão da mesma, ou seja, da teoria de Piaget. Como assim? Vocês têm estruturas de pensamento (assimiladoras), então estas estruturas vão servir como uma espécie de ‘leitora’ para a compreensão da teoria de Piaget que está elaborada de modo formal (hipotético-dedutivo). Assim, cada uma de vocês irá utilizar as suas estruturas, que possuem um nível de explicação. Vocês terão que ‘incorporar’ uma “nova” explicação – a de Piaget – e esta incorporação irá demandar um tempo até as suas estruturas de pensamento se acomodarem a esta explicação mais ‘profunda’ proposta por Piaget. Deu pra compreender, pessoal? **[Todas as participantes, por meio de expressão facial, indicaram afirmativamente.]** Hoje, pessoal, caso dê tempo, nós vamos estudar o início do início, ou seja, desde o recém-nascido. Porque eu acho que uma das perguntas que sempre fica é: “Ah, tá bom, Piaget é construtivista! Então tem o conhecimento anterior que vai servir de base ao conhecimento posterior, sendo este anterior uma estrutura ou um esquema de assimilação para assimilar o novo. Ok! E no recém-nascido, como funciona isso? Se Piaget defende que não há estrutura de pensamento já formada ao nascer, em qual estrutura o bebê vai se apoiar para construir o novo?” Vocês já pararam para pensar sobre isso, alguma vez?

2. **P-2:** *Acho que não!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**

3. **Pesquisador/Participante:** Em alguma disciplina que tratou da Psicologia do Desenvolvimento e da Aprendizagem? Chegou-se tão afundo nesta questão? **[Como ninguém respondeu, lançou-se outro questionamento.]** O que eu falei tem sentido, pessoal?

4. **P-5:** *Sim!* **[Resposta compartilhada por P-4 e P-7.]**

5. **P-2:** *Sim, total! E isso são as linhas tracejadas da teoria do Becker que ele explicou... [Referiu-se a uma palestra ocorrida em sua Universidade na qual o Prof. Dr. Fernando Becker fez uma apresentação acerca do processo de abstração reflexionante.] Até no dia que ele falou eu parei nas linhas tracejadinhas e perguntei pra mim: “E começou por onde?”*

6. **Pesquisador/Participante:** Interessante o seu questionamento... Iremos começar a estudar isso hoje! E por que é importante estudarmos isso? Porque daí iremos ficar menos tentados em aceitar ou a posição Racionalista ou o Empirismo, vocês concordam comigo?

7. **P-2:** *Sim!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**

8. **P-2:** *Porque é mais fácil!*

9. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro. Estas 2 tendências, podemos dizer, do senso comum...
10. **P-2:** *Mas não é porque é também mais visível? [Referiu-se ao fato do Empirismo e do Racionalismo serem mais visíveis quando comparadas à teoria de Piaget.]*
11. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-2, até porque a percepção é também ilusória.
12. **P-2:** *É mais fácil perceber.*
13. **Pesquisador/Participante:** Por serem de mais fácil percepção, estas 2 tendências são as mais utilizadas pelos professores. Conforme a palestra que presenciamos, inclusive entre professores universitários tais tendências se fazem presentes, muitas vezes como uma mescla das 2. Talvez, professores que estudam este processo de construção do conhecimento, do desenvolvimento do sujeito e sua aprendizagem tenham superado tais tendências, não importando se é o teórico X, Y ou Z.
14. **P-2:** *Não sei, será que na prática?*
15. **Pesquisador/Participante:** Por quê?
16. **P-2:** *Porque eu tive uma professora... eu adoro ela... mas ela não traduz na prática a teoria que ela acredita...*
17. **Pesquisador/Participante:** Você está se referindo entre a dissonância do fazer e do falar?
18. **P-2:** *É! Por exemplo o aprofundamento da teoria, que não é piagetiana e sim vigotskiana... propaga ser... mas a postura dentro da sala de aula não é!*
19. **Pesquisador/Participante:** É uma postura, assim, digamos ‘tradicional’?
20. **P-2:** *Sim! Eu acho que, além de ser tradicional, que dizem que este termo também é errado porque a gente se refere a sempre coisas negativas e talvez alguns dos tradicionais não sejam tão negativos assim, a aula desta professora exige muita memorização, e isso não é sinal de aprendizado e nem do que Vigotski diz!*
21. **Pesquisador/Participante:** Memorização é diferente de automatização... E do pouco que sei de Vigotski, defende-se o compartilhamento, via social, dos significados de modo a instrumentalizar o sujeito para que ele possa se compreender e compreender o estabelecimento das relações sociais... É mais ou menos isso que Vigotski trata... A memorização se faz importante em alguma parte...
22. **P-2:** *Sim, mas não só, né!*
23. **Pesquisador/Participante:** Concordo! Parar na memorização faz com que o aprender perca um certo interesse, necessidade, e nós iremos analisar esta questão do interesse/necessidade hoje. Eu quero ouvir de cada uma... A P-2 disse que ler o item 10.1 é uma coisa e entender é outra! Não é, P-2?

24. **P-2:** *Pra mim foi!*
25. **Pesquisador/Participante:** P-4, você teve essa mesma dificuldade?
26. **P-4:** *Sim, muito! [Tanto P-5 quanto P-7, ao serem questionadas, responderam de modo análogo.]*
27. **Pesquisador/Participante:** E vocês possuem dificuldade apenas na leitura de uma teoria psicológica-epistemológica, no caso de Piaget, ou de outras áreas como da sociologia, filosofia...
28. **P-2:** *E a gente lê? [Risos entre todas as participantes.]*
29. **Pesquisador/Participante:** Sim, podem falar, sem problema algum... Você está se referindo a um estudo um pouco mais profundo?
30. **P-2:** *Então, eu não me lembro de algo tão a fundo... Mesmo quando eles trouxeram os teóricos, por assim dizer, foram partes mesmo... geralmente eram exposições...*
31. **Pesquisador/Participante:** E fico mais na superficialidade, digamos assim?
32. **P-2:** *Sim! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*
33. **Pesquisador/Participante:** Foram esboçados os pontos principais das teorias, mas não se adentraram aos ‘porém’(s), sendo esses que vão dar segurança pra você poder afirmar que construiu esta teoria ‘explicativa’? Seja na filosofia, seja na sociologia ou na psicologia...
34. **P-2:** *Então, tipo assim, oh, filosofia a gente foi até, lemos alguns teóricos... [Respondeu observando as demais participantes no intuito das mesmas auxiliarem-na.]... Kant, Platão, Hume... a gente até foi na ‘fonte’ [Referiu-se às obras ‘originais’ elaboradas por tais autores, mesmo que em versão traduzida.]... Sim, há dificuldades também em compreendê-los... Gramsci também foi um pouco complicado, a gente leu um texto dele e também não achei tão simples. O que mais a gente leu? Eu acho que a gente leu uma parte de Comenius...*
35. **Pesquisador/Participante:** Da Didática Magna, foi esse livro?
36. **P-2:** *Isso! E lemos uma parte do Emílio, de Rousseau!*
37. **Pesquisador/Participante:** Ah, tá!
38. **P-2:** *E, sim, eu tenho uma certa dificuldade. E às vezes acontece bem o que você falou aqui, você lê um trecho e talvez você tenha equívocos na compreensão, se você não tem um embasamento...*
39. **Pesquisador/Participante:** Foi daquela parte ao ler o texto do Piaget – A actividade do sujeito?
40. **P-2:** *Isso!*

41. Pesquisador/Participante: Ok! E, pessoal, para o sujeito avançar ao estágio operatório formal é necessário situações na qual isso seja exigido do sujeito. Concordam? **[Todas as participantes responderam “Sim”.]** É por isso que o último estágio nem sempre é alcançado (construído) por todos, e somente daquelas que ‘passaram’ por experiências educativas que lhe fez desequilíbrios, a ponto do sujeito, ao buscar uma superação, ele compensa esse desequilíbrio e forma uma explicação mais ‘ampla’ (maior). E nós também iremos ver este processo da Equilibração, de modo a estudar como se dá a passagem de um conhecimento “menor” para um conhecimento “maior”.

[Após relembrar os últimos problemas abordados no Grupo de Estudo anterior – referentes às situações vivenciadas na escola condizentes ao Empirismo e ao Racionalismo – o Pesquisador/Participante projetou o seguinte esquema visando resumir-representar as 3 correntes epistemológicas. Observe-o abaixo.]

De modo geral, é possível representar tais correntes epistemológicas na figura abaixo:

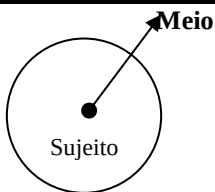
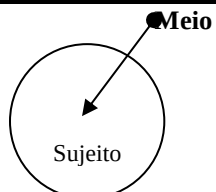
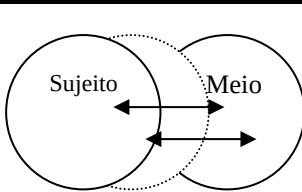
			
Epistemologia:	1) Predominância do sujeito Tendência para o Racionalismo Idealismo	2) Predominância do meio (objeto) Tendência para o Empirismo Materialismo	3) Interação entre o sujeito e o meio (objeto) Tendência para o Estruturalismo Construtivismo
Psicologia:	Teorias Inatistas:	Teorias Condutistas (Learning)	Teorias Interacionistas:
Representantes:	Teoria das <<faculdades mentais>>	Behavio-rismo americano Reflexo-logia soviética	Gestaltismo (sem progressão genética) Construti-vismo seqüencial (J. Piaget)
Autores:		Skinner Pavlov	K. Lewin Jean Piaget

Figura – Três clássicas teorias do conhecimento. (LIMA, 1973, p. 352)

[Como auxílio, o Pesquisador/Participante ressaltou as correntes epistemológicas denotadas em cada coluna, o Racionalismo (2.ª coluna), o Empirismo (3.ª coluna) e o Construtivismo/Estruturalismo (3.ª coluna). Também foi discutido o significado das setas representadas nas figuras. A seta do Racionalismo indica que o conhecimento vêm de dentro do sujeito para o meio; já a do Empirismo indica que o conhecimento vêm de fora, ou seja, do meio para o sujeito e, por fim, a seta do Construtivismo indica que o conhecimento advém de uma interação entre o sujeito e o meio. Durante a discussão dos representantes das teorias racionalistas e empiristas, P-2 fez o seguinte questionamento após o Pesquisador/Participante perguntar se as participantes estavam compreendendo.]

42. P-2: *Eu posso fazer uma pergunta?*

43. Pesquisador/Participante: Sim, claro!

44. **P-2:** *Eu fico pensando... lá os simbolozinhos que geralmente a gente vê pelo S e o O [Referiu-se às figuras denotando a relação entre o sujeito e o meio nas 3 correntes epistemológicas.] e a questão da seta não seria assim, mas tá, eu entendi. [A participante referiu-se ao fato de que, geralmente tais relações aparecem nos textos do seguinte modo: $S \rightarrow O$, $S \leftarrow O$ e $S \leftrightarrow O$.] Quando diz, assim, que o conhecimento parte do sujeito é porque é o sujeito que vai interferir nesse meio? É isso?*

45. **Pesquisador/Participante:** Sim, o sujeito vai interferir no meio e o conhecimento já está nele. É como se fosse necessário o desabrochar, despertar deste conhecimento...

46. **P-2:** *E o contrário?*

47. **Pesquisador/Participante:** No contrário é o meio que vai exercer pressão sobre o sujeito, porque o sujeito é uma ‘tabula rasa’. Sem o meio, nesta relação, não existe conhecimento [Apontou para a figura denotada na 3.^a coluna – Empirismo.]

48. **P-2:** *Ah, tá, então, aí no 1.^o [Referiu-se à 2.^a coluna – Racionalismo.] o sujeito não age, então?*

49. **Pesquisador/Participante:** Digamos que, no 1.^o, P-2, quem “age” é o sujeito, pois é dele que vem o conhecimento... É por isso que a seta é do sujeito implicando no meio; no entanto, o sujeito é passivo, pois não depende bem da ação dele, já que o conhecimento está pré-formado em seu interior.

50. **P-2:** *Então o sujeito interfere no meio?*

51. **Pesquisador/Participante:** Sim! Por estar no meio, os conhecimentos são desabrochados pelo ‘simples’ fato de viver... Há racionalistas que dizem que o conhecimento – no caso matemático – para ser desabrochado há a necessidade de uma reflexão profunda do sujeito, um grande empenho... Mas no Racionalismo do senso comum, de modo geral, o conhecimento já está no sujeito e falta o ‘desabrochar’. O sujeito vai interferir no meio, sim, isso é inegável! Mas nas duas correntes – do empirismo e racionalismo – o sujeito acaba sendo um ser passivo, pois não depende diretamente de sua ação para o conhecimento, digamos desse modo bem superficial.

52. **P-2:** *É, porque eu fico pensando, assim, não precisaria ter nada, se o conhecimento já está no sujeito... [Referiu-se ao fato da não necessidade do meio ao Racionalismo.]*

53. **Pesquisador/Participante:** Eu entendi a sua colocação-dúvida... Deve ficar claro que em cada uma das correntes é necessário a presença do sujeito e do meio, o que muda é a relação estabelecida entre eles...

54. **P-2:** *É por isso que eu falei que interage-age...*

55. **Pesquisador/Participante:** A interação, entre ações, é a relação da última corrente – Construtivismo.

56. **P-2:** *Então como eu posso falar?*

57. **Pesquisador/Participante:** Você pode pensar assim: no 1.º o sujeito “age” sobre o meio para que o conhecimento seja desabrochado, no 2.º o meio age sobre o sujeito para que o conhecimento seja impresso na mente deste sujeito, é por isso que aqui, oh **[Apontou para a 3.ª coluna – Empirismo.]** os 5 sentidos são fundamentais...
58. **P-2:** *É pra receber...*
59. **Pesquisador/Participante:** Isso! É como recepção!
60. **P-2:** *E se a gente traduzisse isso aí numa relação aluno-professor, ficaria...*
61. **Pesquisador/Participante:** Aqui **[Apontou para a 2.ª coluna – Racionalismo.]** ficaria Aluno implica Professor, o conhecimento já está no aluno...
62. **P-2:** *Então depende do posicionamento do aluno...*
63. **Pesquisador/Participante:** Isso... Aqui **[Apontou para a 2.ª coluna – Racionalismo.]** a culpa não é do professor, e sim do aluno já que ele não nasceu com o conhecimento; e aqui **[Apontou para a 2.ª coluna – Empirismo.]** a culpa também não é do professor, já que o aluno não se esforçou para captar-receber o conhecimento. Percebam, pessoal? Nestas 2 relações aqui **[Referiu-se ao Racionalismo e ao Empirismo.]** a culpa da não aprendizagem é sempre do aluno, ou porque ele não nasceu com o conhecimento necessário para tal, ou porque ele, por ‘vagabundice’ (desculpe a expressão) não se esforçou o suficiente para aprender-receber passivamente o que o professor falou!
64. **P-2:** *Eu acho que eu vou me aprofundar nestas teorias!*
65. **Pesquisador/Participante:** Por que P-2?
66. **P-2:** *Porque daí você se isenta de toda a responsabilidade... [Riu conjuntamente a própria fala.]*
67. **Pesquisador/Participante:** Sim, sim! Eu, infelizmente, até aqui na graduação tive professores com estas posturas... Em uma disciplina, quando o professor via o monte de zero falava assim: “Nossa, eu fiz tanto por vocês! Eu dei tudo certinho o conteúdo...”, ou “Não tem jeito mesmo, não vai conseguir!”. Observe que aí há falas empiristas e racionalistas. A culpa nunca é do professor, nestes 2 pontos de vista. Vocês percebem, pessoal, que esta relação aqui oh, do Empirismo, perdura no mundo até hoje, a da Escola Tradicional, onde o professor fez o seu papel, caso o aluno não aprenda é porque ele não se esforçou suficientemente. Eu não estou dizendo que nesta relação aqui **[Referiu-se à 4.ª coluna – Construtivismo.]** não há que tem o esforço. Sim, e muito, porque nessa defende a ação do sujeito, mas agora sujeito e objeto se implicam mutuamente, um existe em função do outro, sendo que no início dos anos de vida não há diferenciação entre sujeito e meio (objeto) já que é um todo caótico! E, tanto o sujeito quanto o objeto só passam a existir graças à ação do sujeito, é por isso que Piaget defende a relação dialética entre eles (sujeito e meio).
68. **P-2:** *Mas o fato da criança... bebê observar o seu redor já não é uma ação?*
69. **Pesquisador/Participante:** Já!

70. **P-2:** *E é uma interação!*
71. **Pesquisador/Participante:** Ao observar... mesmo sem ainda ter consciência dessa interação.
72. **P-2:** *E é muito novo isso!*
73. **Pesquisador/Participante:** Ao observar, o bebê está organizando as suas percepções, logo ele está assimilando e acomodando quadros perceptivos...
74. **P-2:** *Então ele vai ter os embasamentos!*
75. **Pesquisador/Participante:** Sim, o bebê começa nos reflexos, e nós iremos ver qual é a origem de tudo: os reflexos. E os reflexos remetem à necessidade de subsistência do sujeito, a fisiológica, a nutrição, sendo o primeiro da sucção. O bebê, na 1.^a mamada chamada colostro, ele toma de um jeito, após algum tempo (horas ou dias) ele já mudou a maneira de mamar, ou seja, ‘acomodou’ uma nova maneira de se relacionar com o meio, que no caso é o seio da mãe, embora ele nem saiba ainda que aquilo é um meio.
76. **P-2:** *E as crianças que não mamam fazem isso em relação à mamadeira?*
77. **Pesquisador/Participante:** Sim! Eu e meu irmão, como nascemos prematuros, mamamos só na mamadeira... mas nós também fomos ‘acomodando’ esta mamadeira, digamos assim... Tudo bem, pessoal? **[Como nenhuma participante denotou outra dúvida, deu-se prosseguimento à apresentação do esquema abordando a 4.^a coluna – Construtivismo/Estruturalismo. Ao serem questionadas se havia(m) dúvida(s), P-2 salientou o seguinte:]**
78. **P-2:** *Eu sou chata, eu vou ter que perguntar de novo!*
79. **Pesquisador/Participante:** Vamos lá, fique à vontade!
80. **P-2:** *Diga pra gente, de novo, assim, o que seria a Gestalt mesmo? Ela é chamada de teoria da Forma!*
81. **Pesquisador/Participante:** Sim! A Gestalt defende que o indivíduo forma estruturas, por isso do Estruturalismo. Só que para a Gestalt não há um histórico destas estruturas, ou seja, não leva em conta a experiência anterior – a sua gênese. Piaget, ao contrário considera que cada estrutura é produto de uma história resultando da organização da experiência vivida pelo sujeito. Piaget investiga a transição de uma estrutura para outra ao investigar do sensorio-motor ao operatório formal, analisando a história de tal evolução – a sua gênese.
82. **P-2:** *Então que dizer que os gestaltistas usam estruturas também?*
83. **Pesquisador/Participante:** Sim! Dizem que a Gestalt é uma estrutura sem gênese, sem origem, sem história. O Construtivismo não, é uma estrutura com gênese.
84. **P-2:** *E eles acreditam na existências das mesmas estruturas?*
85. **Pesquisador/Participante:** Em partes, P-2, mas não saberia lhe dizer ao certo!

86. **P-2:** *Ausubel está aí? [Referiu-se à Gestalt.]*

87. **Pesquisador/Participante:** Não, podemos dizer – a grosso modo – que Ausubel está em Piaget. Ausubel acredita na explicação feita por Piaget do nascimento até o final do pré-operatório. Dos 7-8 anos para frente Ausubel fez outras explicações. Então, quer dizer que Ausubel não se preocupou com a gênese do conhecimento, com a origem. Ele aceita Piaget, só que ele traz algumas informações diferentes para explicar a ocorrência das aprendizagens significativas ao nível da parte operatória. Ele não discute a parte dos reflexos, dos primeiros hábitos adquiridos, da inteligência prática, do simbolismo (intuição)...

88. **P-2:** *Ele faz um recorte!?*

89. **Pesquisador/Participante:** Isso, podemos dizer que sim! Ele aceita o que Piaget falou até o pré-operatório, daí ele faz modificações visando uma teoria da aprendizagem visando um aplicação ao ensino. E Novak desenvolve, a partir (e com) ele, os mapas conceituais.

90. **P-2:** *Ok!*

[Como não houve outro questionamento, o Pesquisador/Participante continuou com a leitura do texto. Observe-o a seguir.]

Neste ponto cabe um terceiro questionamento: “*Se o conhecimento advém de uma interação-ação entre o sujeito e o objeto, o que permite ao sujeito interagir-agir com o objeto?*”. Para tal explicação faz-se necessário recorrer à teoria da assimilação, denotada no próximo tópico.

[Após a leitura, o Pesquisador/Participante salientou:]

91. **Pesquisador/Participante:** Uma coisa que eu acho interessante é que Piaget desenvolveu (e comprovou) a teoria da assimilação por meio da análise de seus 3 filhos, desde o primeiro dia de vida. Apenas a análise de seus 3 filhos, Piaget conseguiu elaborar tal explicação, ou seja, como o sujeito parte de uma anomia total, não sabendo o que é ele e o que é o outro até as hipóteses do operatório formal. **[Dando continuidade, as participantes acharam melhor o Pesquisador/Participante realizar a leitura do próximo item – denotado abaixo.]**

10.2.1 A teoria da assimilação: o processo de assimilação e acomodação

O que permite ao sujeito interagir-agir com o meio (objeto) são duas funções herdadas geneticamente: a *organização* e a *adaptação*. A *adaptação*, por sua vez, é constituída por duas invariantes funcionais: a *assimilação* e a *acomodação*. Como auxílio ao entendimento de tais conceitos, faz-se oportuno o exposto por Piaget (1987):

O organismo é um ciclo de processos físico-químicos e cinéticos que, em relação constante com o meio, engendram-se mutuamente. Sejam *a*, *b*, *c* etc. os elementos dessa totalidade organizada e *x*, *y*, *z* etc. os elementos correspondentes do meio ambiente. O esquema da organização é, pois, o seguinte:

- 1) $a + x \rightarrow b$;
- 2) $b + y \rightarrow c$;
- 3) $c + z \rightarrow a$ etc.

Os processos 1), 2) etc. Tanto podem consistir em reações químicas (quando o organismo ingere substâncias *x* que ele transformará em substância *b* que fazem parte da sua estrutura), como em transformações físicas quaisquer ou, enfim, de um modo particular, em comportamentos sensório-motores (quando um ciclo de

movimentos corporais a combinados com os movimentos exteriores x chega a um resultado b que participa igualmente no ciclo da organização). A relação que une os elementos organizadores a, b, c etc. aos elementos do meio x, y, z etc. constitui, portanto, uma relação de *assimilação*, quer dizer, o funcionamento do organismo não destrói, mas conserva o ciclo de organização e coordena os dados do meio de modo a incorporá-los nesse ciclo. Suponhamos, pois, que se produz no meio uma variação que transforma x em x' . Ou o organismo não se adapta e há uma ruptura do ciclo, ou há adaptação, o que significa que o ciclo organizado se modificou ao fechar-se sobre si mesmo.

- 1) $a + x' \rightarrow b'$;
- 2) $b' + y \rightarrow c$;
- 3) $c + z \rightarrow a$ etc.

Se denominarmos *acomodação* esse resultado das pressões exercidas pelo meio (transformação de b em b'), poderemos dizer, portanto, que a *adaptação é um equilíbrio entre a assimilação e a acomodação*. (PIAGET, 1987, p. 16-17, grifos do autor)

[Após a leitura do 1.º parágrafo, o Pesquisador/Participante salientou que Piaget utiliza um modelo biológico – referente à adaptação biológica do ser vivo ao meio – para a explicação psicológica, na qual a inteligência é considerada um tipo de adaptação biológica do sujeito ao meio, sendo necessário considerar uma continuidade entre o ‘lado’ biológico e o ‘lado’ psicológico do ser humano. Neste ponto, P-2 ressaltou o seguinte:]

92. **P-2:** *Mas eu acho, assim, faz todo o sentido, porque tudo compõe o ser humano!*

93. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro! Foi com este pensamento que Piaget propôs sua teoria, ou seja, de não negar ou ‘deixar’ de lado o biológico, mas de entendê-lo enquanto uma continuidade com o psicológico. Até porque, sendo o ser humano um ser vivo, não tem como separar o lado biológico do psicológico, tudo bem? **[Todas as participantes indicaram, por meio de expressão facial, afirmativamente.]** A evolução demanda uma continuidade progressiva. Vai chegar um certo momento que o desenvolvimento biológico, após atingir um ápice vai regredir, não vai?

94. **P-2:** *Sim!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**

95. **Pesquisador/Participante:** Quando a gente chega na velhice, a nossa parte biológica regride! Já, a nossa parte mental não, ela pode progredir infinitamente, a não ser, infelizmente, se a pessoa for acometida de alguma docência degenerativa neurológica. Caso contrário, não...

96. **P-2:** *Mesmo que não seja tem um limite também!*

97. **Pesquisador/Participante:** Como?

98. **P-2:** *Ah, sei lá, eu convivi com pessoas com mais de 100 anos e existe um limite também...*

99. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro, todos temos limites. Mas eu digo no sentido de que, caso o ser humano continue estudando, se interessando por coisas novas que amplie seu ‘poder explicativo’, não há limites para este desenvolvimento...

100. **P-2:** *Mas eu digo de coisas biológicas que acabam influenciando e desanimam...*

101. **Pesquisador/Participante:** Sim, concordo. E também podemos pensar que, se o adulto parar de estudar há um estacionamento, agora, sujeitos ativos, como o professor B., por exemplo, a mente daquele sujeito é fantástica embora a sua idade. O Oscar Niemeyer, por exemplo, mesmo com mais de 100 anos ele continua projetando belíssimas construções arquitetônicas... Percebam que ele não ‘parou’! É igual quando você parou muito tempo de estudar e resolve retomar. No começo você vai ter um pouco de dificuldade...

102. **P-2:** *Mas isso interfere na plasticidade cerebral?*

103. **Pesquisador/Participante:** Sim! Querendo ou não, Piaget ‘demonstra’ que nosso cérebro é plástico, mesmo antes de estudos neurológicos atuais que verificaram isso! Ou seja, há certa maleabilidade de nosso cérebro para as múltiplas sinapses...

104. **P-2:** *E a nossa já está no limite... É brincadeira essa parte!* [Risos entre as participantes.]

105. **Pesquisador/Participante:** E, dependendo da interação do sujeito com o meio, pode sim haver este ‘estacionamento’. O sujeito fica numa zona de conforto na qual não se fazem mais necessárias ‘grandes’ acomodações, digamos assim, porque os ‘grandes’ desequilíbrios param de acontecer!

106. **P-2:** *Então a gente comete um crime com nossos idosos!*

107. **Pesquisador/Participante:** Em certo sentido, sim! Quando não há um programa nacional de Educação para a velhice, muitos idosos ficam estacionados. Com exceção daqueles que mantêm uma vida ativa, em clubes, associações, discutindo as mais diversas questões. Diferente de alguns países na Europa na qual eles são respeitados, reconhecidos, são pontos de referência. Um dos únicos meios em que as pessoas com mais idade são referenciadas é no meio acadêmico! Concordam comigo, pessoal?

108. **P-4:** *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

109. **Pesquisador/Participante:** Aquele ‘grande’ pesquisador que está há anos na ‘batalha’ investigando, ele vive sendo homenageado... Tirando esse meio acadêmico, pessoal, parece que a pessoa aposentada ‘acabou’, e ela fica no esquecimento na maioria das vezes.

[Para a explicação da citação retirada de Piaget (1987), o Pesquisador/Participante ressaltou alguns exemplos para auxiliar no entendimento das relações 1) $a + x \rightarrow b$; 2) $b + y \rightarrow c$; 3) $c + z \rightarrow a$ etc. Ao término, P-7 diz o seguinte.]

110. **P-7:** *Então é um ciclo?*

111. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo, P-7, a partir da exemplificação você compreendeu que é um ciclo?

112. **P-7:** *Sim!*

[Mesmo com os exemplos fornecidos pelo Pesquisador/Participante a fim de auxiliar o entendimento das participantes acerca da definição de assimilação e acomodação, percebeu-se que as mesmas ‘enfrentaram’ dificuldades nesta assimilação. Talvez, um dos motivos deveu-se a utilização das relações lógicas 1) $a + x \rightarrow b$; 2) $b + y \rightarrow c$; 3) $c + z \rightarrow a$ etc. e, 1) $a + x' \rightarrow b'$; 2) $b' + y \rightarrow c$; 3) $c + z \rightarrow a$ etc. Neste sentido, P-2 questionou:]

113. **P-2:** *Eu só não entendi uma coisa?*

114. **Pesquisador/Participante:** O quê? Fale!

115. **P-2:** *Eu só não entendi assim, oh, aquele a, lá do começo, e esse a final são os mesmos?*

116. **Pesquisador/Participante:** Isso, pra manter o ciclo organizado P-2!

117. **P-4:** *Então, mas se o sujeito desenvolveu, ele não saiu de um lugar e foi pro mesmo lugar!*

118. **Pesquisador/Participante:** É que, sair de um lugar e ir pra outro lugar não tem a ver com diferentes conhecimentos ou capacidades, tem a ver com a mesma função... A função – assimilar-acomodar não muda, o que muda é o conteúdo... **[Pela expressão facial das participantes percebeu-se que as mesmas não compreenderam muito bem a explicação dada pelo Pesquisador/Participante.]**

119. **P-2:** *Então o a [Referiu-se à relação lógica.] nunca vai mudar?*

120. **Pesquisador/Participante:** Se mudar o a não mantém a organização interna! E eu sei, pessoal, que no começo é complicado entender esta explicação... **[P-2 indicou ainda possuir dúvida, deste modo P-7 interviu dizendo:]**

121. **P-7:** *Eu acho que aquela analogia que você estava fazendo com o estômago era melhor, porque o sistema digestório não vai mudar! [Referiu-se a um exemplo dado pelo Pesquisador/Participante visando esboçar as tais relações lógicas.]*

122. **P-2:** *Ah, tá, na questão biológica eu entendi. Mas tenta passar isso pra parte psicológica!*

123. **P-4:** *É, é isso que eu também estou pensando e não conseguindo...*

124. **Pesquisador/Participante:** Ok! Pessoal, não podemos esquecer que nesta citação Piaget explica o processo de adaptação do ponto de vista formal, sendo o mesmo utilizado inicialmente para a explicação biológica!

125. **P-2:** *Sim! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*

126. **Pesquisador/Participante:** Agora, na parte psicológica, podemos pensar a mesma função só que agora mais complexa por ter engendrado ‘conteúdos’ mais abrangentes!

127. **P-2:** *Ah, sim, agora melhorou! Agora sim!* [Expressando um certo alívio, todas as participantes compartilham da mesma resposta, rindo concomitantemente.] *A gente tava em dúvida e a gente oh* [Indicou, com as mãos, estarem prosseguindo e, de certo modo, haverem superado tal dúvida.]

128. **P-7:** *É!*

129. **Pesquisador/Participante:** Não tem problema, pessoal! Estamos aqui para discutir o quanto for necessário! A 1.^a vez que eu li esta parte, há um certo tempo, eu tive as mesmas dificuldades... tive que reler tudo de novo... Mas, agora, está dando pra compreender, pessoal?

130. **P-2:** *Agora deu! A estrutura é a mesma, mas ela pode ir se aprimorando...* [Referiu-se ao elemento do sujeito a denotado nas relações lógicas esboçadas na citação de Piaget (1987).]

131. **Pesquisador/Participante:** Sim!

[Dando continuidade, o Pesquisador/Participante abordou o ‘final’ da referida citação, denotando a relação lógica que esboça a acomodação. Como exemplo, citou o fato de, no início, o bebê cuspir alimentos sólidos colocados em sua boca, pois o mesmo não conseguiu se ‘acomodar’ a uma modificação do meio. No entanto, após uma modificação interna, o bebê consegue acomodar o ‘novo’ (o alimento). P-2 concordou com o exemplo explicitado pelo Pesquisador/Participante por ter vivenciado tal fato com as suas sobrinhas durante esta fase. Após, outro exemplo foi dado, tal como a acomodação pelos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental em relação ao conjunto dos Números Inteiros, conhecimento esse não acomodado nos anos iniciais. Em seguida, o Pesquisador/Participante conclui o seguinte:]

132. **Pesquisador/Participante:** Então, pessoal, há assimilação quando o sujeito interpreta ou incorpora o objeto, a partir dos seus esquemas ou pensamentos, e há acomodação quando ele é obrigado a modificar esses esquemas para poder se relacionar com esse objeto. É mais ou menos isso que estava escrito aqui, oh. [Referiu-se à citação retirada de Piaget (1987).] Se o nosso corpo e nossa mente não funcionasse em ciclo, grandes modificações fariam nosso corpo ‘desmontar’, digamos assim, porque nós teríamos uma desestabilidade muito profunda... Nós precisamos manter a nossa organização interna para que gradativamente a gente vá se acomodando às novidades. Vamos ler, pessoal, no parágrafo seguinte em que eu coloco de um outro modo o significado da assimilação e da acomodação. [O Pesquisador/Participante realizou a leitura do seguinte trecho, em continuidade ao item 10.1.]

Logo, assimilar significa incorporar os elementos do meio aos esquemas (ou às estruturas de pensamento) do sujeito. Entretanto, quando tais esquemas são modificados possibilitando a incorporação de ‘novos’ elementos observa-se, assim, a ocorrência da acomodação. Acerca da relação de interdependência entre estas duas invariantes, Piaget denota o seguinte:

A assimilação nunca pode ser pura, visto que, ao incorporar os novos elementos os esquemas anteriores, a inteligência modifica incessantemente os últimos para ajustá-los aos novos dados. Mas, inversamente, as coisas nunca são conhecidas em si mesmas, porquanto esse trabalho de acomodação só é possível em função do processo inverso de assimilação. (PIAGET, 1987, p. 18)

[Antes da leitura da citação de Piaget (1987) denotando a interdependência entre a assimilação e a acomodação, o Pesquisador/Participante ressaltou o seguinte:]

133. **Pesquisador/Participante**: Vocês, agora, pessoal, a partir das estruturas do pensamento de cada uma, estão tentando assimilar as discussões que estamos realizando. Vocês concordam comigo?

134. **P-5**: *Sim!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**

135. **Pesquisador/Participante**: A acomodação desta explicação vai demandar um certo tempo, maiores explicações, exemplificações, maior interação comigo e propriamente com o texto. Quando vocês compreenderem, ou quando vocês tomarem consciência, ou melhor, quando vocês souberem explicar para si mesmas e para o outro este processo, é porque houve uma acomodação desta teoria explicativa. Em relação à Estatística Descritiva, vocês não tiveram que se modificar, seja ampliando os conceitos já aprendidos?

136. **P-7**: *Sim!* **[Reposta compartilhada entre as demais participantes.]**

137. **Pesquisador/Participante**: Então é mais ou menos neste sentido! E, no meu caso, posso dizer que é mais fácil a interação com vocês porque vocês já construíram várias estruturas de assimilação. Qual é a principal estrutura de assimilação, a minha e a de vocês que permite esta interação, ou seja, a principal ‘ferramenta’ de assimilação?

138. **P-4**: *O pensamento!?* **[Falou em tom baixo.]**

139. **Pesquisador/Participante**: Sim, P-4, mas ele se manifesta através do quê?

140. **P-2**: *Das discussões?*

141. **Pesquisador/Participante**: Sim! Através da linguagem! Pra gente, a nossa maior ferramenta de assimilação das teorias é a linguagem. Tudo bem? Sim? Não?

142. **P-2**: *Tô confusa!*

143. **Pesquisador/Participante**: Fale!

144. **P-2**: *Eu não sei, não sei verbalizar!*

145. **Pesquisador/Participante**: Vamos continuar, então! Depois eu vou trazer um exemplo ali!

146. **P-2**: *Ótimo!*

147. **Pesquisador/Participante**: A discussão que a gente fez deu pra ajudar um pouco, pessoal, pelo menos uns 30%?

148. **P-2**: *Deu pra ‘desequilibrar’ bem!* **[Risos entre as participantes.]** *Agora, equilibrar eu já não sei, mas desequilibrar é uma beleza!* **[Risos entre todos.]**

149. Pesquisador/Participante: Só que, nunca vai existir uma acomodação pura e nem uma assimilação pura. Porque antes de acomodar algo tem que ser assimilado, e, assimilando alguma modificação vai ocorrer, mesmo que não tão profunda. Dá pra compreender esta fala, pessoal? **[Todas as participantes indicaram afirmativamente.]** Separa-se apenas para estudar, mas, na realidade, não existe esta separação entre estes processos funcionais de assimilação e de acomodação. **[Neste momento, o Pesquisador/Participante realizou a leitura do trecho retirado de Piaget (1987) – denotado há pouco.]**

[Após, visando dar continuidade ao texto o Pesquisador/Participante leu o seguinte:]

No mesmo sentido, entre a adaptação e a organização há uma indissociabilidade, pois, “é adaptando-se às coisas que o pensamento se organiza e é organizando-se que estrutura as coisas” (PIAGET, 1987, p. 19). Assim, a atividade-ação do sujeito sobre o objeto e sobre si mesmo explica a organização intelectual e o desenvolvimento de esquemas (ou estruturas de pensamento) cada vez mais complexas. Para findar a discussão, citemos Piaget (1987):

[...] as relações entre o sujeito e o seu meio consistem numa interação radical, de modo tal que a consciência não começa pelo conhecimento dos objetos nem pelo da atividade do sujeito, mas por um estado indiferenciado; e é desse estado que derivam dois movimentos complementares, um da incorporação das coisas ao sujeito, o outro de acomodação às próprias coisas. (p. 386)

[Durante a leitura do 1.º parágrafo (1.ª frase), P-2 interrompeu perguntando o exposto abaixo:]

150. P-2: *Mas existe uma ordem!*

151. Pesquisador/Participante: Como assim?

152. P-2: *Primeiro se assimila para depois acomodar, ou não existe essa ordem?*

153. Pesquisador/Participante: No início, P-2, não existe esta diferenciação entre assimilação e acomodação. Mesmo diferenciando-se, essas duas funções são indissociáveis. Ou seja, elas se confundem. Certo?

154. P-2: *Por que ele não tem ainda algo a acomodar!?*

155. Pesquisador/Participante: Alguma estrutura, ou melhor, um esquema?

156. P-2: *É, então é por isso que é indissociável!*

157. Pesquisador/Participante: E as acomodações, neste início, são em maior número do que as próprias assimilações, digamos assim.

158. P-2: *Sim!*

159. Pesquisador/Participante: É por isso que no 1.º estágio é muito rápida a aquisição de novas construções, para dar embasamento aos estágios posteriores. Tudo bem? Assim como no início da vida o sujeito não diferencia o seu eu do outro, também não há diferenciação entre assimilação e acomodação.

160. P-2: *Então, mas a acomodação não ocorre em cima de uma assimilação?*

161. Pesquisador/Participante: No caso do primeiro dia de vida, no início, o esquema assimilador que o sujeito já traz hereditariamente é a sucção. A partir dele vão ocorrendo acomodações gradativas, modificando este esquema.

162. P-2: *Então, Pesquisador/Participante, eu tô... A acomodação ocorre em cima de uma acomodação e pode... a tá!*

163. Pesquisador/Participante: Fala pra gente o que você pensou porque eu acho interessante compartilhar!

164. P-2: *Então, eu estou estruturando, ainda... Calma! [Risos entre as participantes.]*

165. Pesquisador/Participante: Tudo bem, sem problema nenhum! P-7, e daí? Mais ou menos?

166. P-7: *Então... eu não sei... eu entendo muito assim, a gente assimila porque tem uma necessidade...*

167. Pesquisador/Participante: A gente assimila sempre suprindo uma necessidade. Nós só nos modificamos pela necessidade, se não há necessidade não há ação. Não havendo ação não há nem assimilação e nem acomodação! Mesmo o aluno considerado passivo, ele está assimilando-acomodando algumas coisas, concordam comigo pessoal?

168. P-2: *Sim! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*

169. Pesquisador/Participante: Porque não existe um sujeito 100% passivo! Não tem como! Mas vai depender do nível da atividade que o sujeito vai estar estabelecendo com este objeto. E é isso que vai determinar, no futuro, bons pensadores ou não! É o nível de ação do sujeito... no ensino tradicional, como o professor manter o aluno ‘calado’, aquele nível fica bem baixo. Ao copiar alguma coisa da lousa o aluno está assimilando... Vocês concordam comigo, pessoal? **[Todas as participantes indicaram, por meio de expressão facial, afirmativamente.]** Mesmo que, pela memorização, o aluno consegue aprender mecanicamente algumas coisas... este aluno até consegue, numa prova, tirar a nota A!

[Em prosseguimento, o Pesquisador/Participante finalizou a leitura do texto esboçado anteriormente.]

170. Pesquisador/Participante: Assim, pessoal, no início não é possível esta diferenciação entre a assimilação e a acomodação, lembrando que uma é interdependente da outra. Com o desenvolvimento do sujeito, as duas se diferenciam, e é possível ver por meio de um exemplo. Nos anos iniciais, o aluno vai utilizar as estruturas aditivas para a assimilação das estruturas multiplicativas, que no caso é o ‘novo’ a ser acomodado, formando, assim, um conhecimento mais complexo! Agora, como diz no texto, no início, é um estado indiferenciado, não dá pra dizer onde é a assimilação e onde é a acomodação, as duas se implicam mutuamente... Então, por meio da sucção que é o esquema hereditário, o bebê vai poder assimilar o seio da mãe e, por meio da interação com ele, irá fazer modificações neste esquema, podendo mudar a maneira de sugar, a posição que é a melhor, etc. Imaginem como foi difícil Piaget chegar a esta conclusão!? Foi por isso que ele teve que observar, em detalhes, coisas rotineiras, por exemplo: num primeiro momento a criança errou ao direcionar-se ao seio materno, então a mãe teve que ajudar. Depois, o bebê se habitua que de um lado do seio produz mais leite,

então ela o procura para facilitar a sua amamentação. E tudo isso o bebê faz por meio de uma busca, de uma atividade para poder suprir uma necessidade biológica. E todo o restante vai sendo produzida por meio de assimilações e acomodações progressivas e contínuas onde o sujeito, a cada vez que ele vai mamar, nunca vai ser igual, então sempre vai haver um elemento diferente que ele vai ter que diferenciar este elemento para integrar uma nova maneira de mamar. Isso ocorre com as coisas que a criança começa a ver, a pegar, a sacudir, a encontrar... E aí, pessoal? **[Pel as expressões faciais e comentários como “Nossa!” (P-5); “Então, né!” (P-2) percebeu-se que as participantes estavam num processo de assimilação dos assuntos discutidos. P-2 falou em tom alto:]**

171. **P-2:** *Nós não estamos nem assimilando e nem acomodando...* **[Ris os entre todas as participantes.]**

172. **P-7:** *Ele tá aproveitando que agora os encontros vão começar a cada 15 dias para deixar a gente bem desequilibrada!*

173. **P-2:** *Bem desequilibrada!* **[Ris os.]**

[Visando auxiliar ao entendimento, o Pesquisador/Participante projeta a seguinte figura, perguntando o que as participantes acham que é.]



[Infelizmente, por descuido, foi projetada a última figura, permitindo às participantes descobrirem que tais objetos são tipos de abridores de lata. No entanto, o Pesquisador/Participante perguntou o seguinte:]

174. **Pesquisador/Participante:** Se eu não tivesse projetado a figura do abridor de latas que conhecemos, alguma de vocês saberia me dizer?

175. **P-2:** *Eu sabia que o 3.º era um abridor!*

176. **P-7:** *Eu não saberia!* **[Resposta compartilhada por P-4 e P-5.]**

177. **Pesquisador/Participante:** Então a P-2 já havia construído uma estrutura de pensamento que lhe permitiu interpretar os objetos, ou seja, uma assimilação. Já vocês 3 **[Referiu-se à P-4, P-5 e P-7.]** não haviam, ainda, acomodado, um exemplar de cada tipo de abridor! Deu pra compreender esta fala, pessoal? **[Neste momento, P-2 mostrou-se nervosa/incomodada.]** A P-2 está nervosa!

178. **P-2:** *Eu tô! Eu fico tensa com esse negócio. Eu vou voltar de novo, eu tô separando muito as coisas, ainda, eu não consigo juntar a assimilação e a acomodação.*

179. **Pesquisador/Participante:** Vamos lá, pergunte!

180. **P-2:** *Eu ainda não entendi, como você pode acomodar sem assimilar!*

181. **Pesquisador/Participante:** Não existe!

182. **P-2:** *Mas você disse que sim! Que não era a assimilação primeiro.*

183. **Pesquisador/Participante:** Talvez eu tenha me expressado mal ou até mesmo me confundido. Eu disse que no início da vida o número de aquisições (acomodações) são em maior número, mas que o esquema reflexo de sucção funciona como o esquema assimilador para as acomodações e modificações deste esquema.

184. **Pesquisador/Participante:** *Agora clareou! [A participante não havia entendido, ainda, este comentário esboçado anteriormente pelo Pesquisador/Participante.] Então sempre haverá uma assimilação para depois uma acomodação, mas no bebê isso acontece muito...*

185. **Pesquisador/Participante:** Não é diferenciado!

186. **P-2:** *Agora sim! [A participante falou esboçando sorriso.]*

187. **Pesquisador/Participante:** Gente, ela estava até agora desequilibrada por minha culpa! **[Risos entre todos.]** Tudo bem a pergunta da P-2, pessoal?

188. **P-5:** *Sim!*

189. **Pesquisador/Participante:** Este mecanismo está mais ou menos, ou não?

190. **P-7:** *Sim!*

191. **P-2:** *Que nem, oh, a gente assimila ao entrar em contato com as coisas, porque agora elas **[Referiu-se às demais participantes.]** vão saber que aquilo é um abridor!*

192. **Pesquisador/Participante:** Percebam que vocês não só entraram em contato, mas vocês construíram ampliando a classe dos abridores. Esta construção se deu por uma acomodação que foi rápida porque vocês já haviam construído a classe dos abridores, o que ele significa. Se vocês não tivessem construído o que significa o abridor, demoraria mais esta construção. Por exemplo, o bebê não sabe que isso é um abridor, né!

193. **P-7:** *É!*

194. **P-2:** *Mas é muito rápida essa construção na criança.*

195. **Pesquisador/Participante:** É muito rápido!

196. **P-2:** *Você está falando e eu estou lembrando da minha sobrinha!*

197. **Pesquisador/Participante:** Não é!?

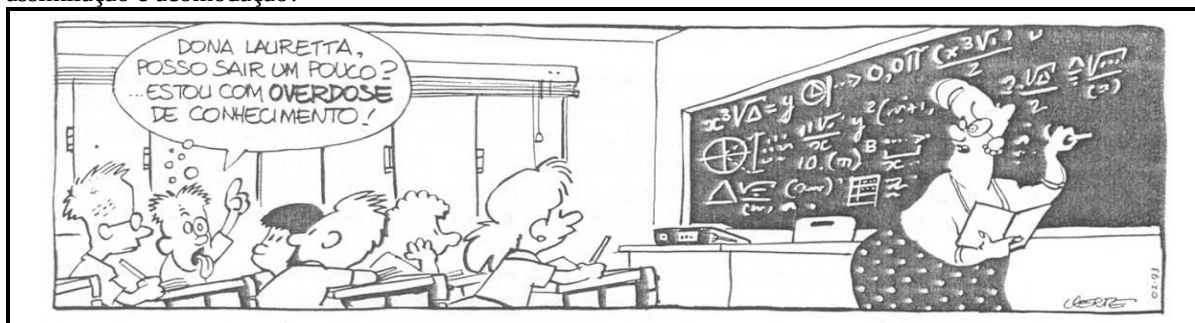
198. **P-2:** *E ela vai fazer um mês ainda, e é muito rápido! É tão rápido que...*

199. **Pesquisador/Participante:** E veja que a sua sobrinha está fazendo assimilações-acomodações a todo o tempo, constantemente. E o bebê nem tem consciência das organizações que está realizando.

200. **P-2:** *Sem nós termos consciência disso! [Risos entre todas as participantes.]*

[Em prosseguimento, o Pesquisador/Participou solicitou a solução dos seguintes problemas.]

1. O que a representação da sala da professora de Matemática Laureta indica em relação ao processo de assimilação e acomodação?



Fonte: (BORJA, 1993, p. 31)

2. O ocorrido com o aluno da professora de Matemática Laureta também foi vivenciado por você durante a Educação Básica nas aulas de Matemática? Tente se recordar de situações caso isso tenha ocorrido, registrando-as.

[Decorridos 10 minutos, as participantes escolheram P-4 para responder o que haviam discutido acerca do 1.º problema.]

201. **P-4:** *É o que eu falei, porque as crianças estão, tá, assimilaram pelo menos o começo que ela [Referiu-se à professora Laureta.] colocou na lousa. Aí, pra haver acomodação, tem que ter um tempo pros alunos agirem sobre aquilo... eu acho que a professora tinha que... explicar mais, dar mais exemplos, outras atividades, entendeu...uma coisa só! E não colocar todos os conhecimentos juntos... sabe vários...*

202. **Pesquisador/Participante:** Então o tempo e a ação do sujeito são necessários?

203. **P-4:** *Acredito que sim! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*

204. **Pesquisador/Participante:** Acredite, são! É tão necessário que é só analisar quanto tempo demora pro sujeito sair de um estado de anomia até alcançar a autonomia, quando consegue. E a ação do sujeito se faz imprescindível a tal desenvolvimento!

205. **P-2:** *E daí eu fiquei pensando numa coisa, agora, vendo a cena! Então é muito importante você deixar os alunos verbalizarem!*

206. **Pesquisador/Participante:** É importante!

207. **P-2:** *Porque, realmente, eles podem fazer a atividade, mas simplesmente não estarem compreendendo nada!*

208. **Pesquisador/Participante:** Eu poderia aplicar uma prova pra vocês em cima deste texto, como muitos fazem! **[Referiu-se ao texto em discussão – A teoria da assimilação.]**

209. **P-2:** *Sim!*

210. **Pesquisador/Participante:** A dúvida seria grande, não seria?

211. **P-2:** *Seria enorme!*

212. **Pesquisador/Participante:** Eu sei que ainda vocês devem estar com dúvidas, e isso é normal! Seria contrassenso acreditar que todo mundo aqui acomodou rapidamente esta teoria explicativa acerca da construção do conhecimento no indivíduo. Nós vamos voltar neste processo em muitos momentos até o termino do nosso Grupo de Estudo, até porque esta teoria ajuda a explicar inúmeras atividades que iremos desenvolver, inclusive podemos utilizar esta teoria para subsidiar parte da ação pedagógica de vocês! Mas, a nossa discussão não foi importante?

213. **P-2:** *Foi fundamental!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**

214. **Pesquisador/Participante:** Responder as dúvidas de vocês, sendo que algumas vezes eu nem conseguia fazer isso, pois pode acontecer também... Até porque, às vezes, eu nem consigo interpretar a pergunta de vocês! Só que eu acredito que houve um progresso em nosso diálogo!

215. **P-2:** *Sim!*

216. **Pesquisador/Participante:** Se somos adultos e a linguagem representa uma importante ferramenta ao nosso pensar, então, nós temos que discutir. Ok? **[Todas as participantes indicaram, através de gesto facial, afirmativamente.]** Estas crianças aqui do 2.º problema, suponho eu que elas estão na faixa dos 12-13 anos, elas estão num período de transição do operatório concreto ao operatório formal e, talvez, pessoal, todas estas expressões matemáticas não tenham sentido para esses alunos. **[Por meio de expressão facial, as participantes sinalizaram concordar com o exposto.]** Ou seja, para elas isso não é assimilável! **[Neste momento, P-2 e P-7 falaram em tom baixo, rindo em seguida. Deste modo, o Pesquisador/Participante as questionou:]** O que foi pessoal?

217. **P-7:** *Eu acho que aquela aluna da 1.ª carteira está entendendo...* **[Referiu-se à aluna desenhada na tira do 1.º problema, que está na 1.ª fila sentada na 1.ª carteira e que indica estar copiando atentamente o registrado pela professora Laureta.]**

218. **P-2:** *Eu acho que ela é a única, porque nós aqui do grupo não estamos entendendo nada!* **[Risos entre todas as participantes.]**

219. **Pesquisador/Participante:** Talvez, pessoal, esses alunos aqui **[Apontou para a tira projetada na qual estão representadas as 2 alunas desenhadas nas 1^{as} carteiras e que indicam estar copiando o denotado na lousa.]** estão conseguindo assimilar o exposto pela professora Laureta, ou, por medo, fazem caladas para não serem repreendidas.

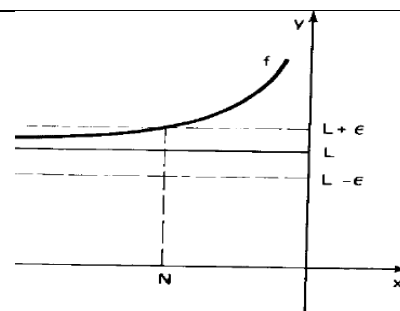
220. **P-2:** *É, mas elas estão com cara de que estão copiando só!*
221. **P-7:** *Só!*
222. **Pesquisador/Participante:** Agora, este daqui oh [**Referiu-se ao aluno da tira que indica estar passando mal devido à aula da professora Laureta.**], está até com tontura... ele está tendo uma overdose...
223. **P-2:** *Estes somos nós! [Risos entre todas as participantes.]*
224. **P-5:** *Estamos até passando mal! [Novamente risos entre todas as participantes.]*
225. **Pesquisador/Participante:** Por favor, hein, não vão desmaiar aqui! [**Risos entre todos.**]
226. **P-5:** *E eu acho que, na 1.^a vez que a gente tava discutindo, acho que você [Referiu-se ao Pesquisador/Participante.] falou também que também tem que ter uma noção, tem que ter algo construído para partir disso e ir para o outro. Às vezes [Apontou para a tira projetada.] isso veio tão do nada este conteúdo que eles não tinham algo construído antes, daí fica mais difícil!*
227. **Pesquisador/Participante:** É claro! Se nós estamos numa escola onde as coisas deveriam ser um ciclo, uma continuidade, vocês concordam comigo, pessoal!? Uma das grandes justificativas da progressão continuada é esta continuidade na construção, mas se não há continuidade, os alunos não conseguem estabelecer essa ‘ponte’, como o aluno vai prosseguir? Ele não vai conseguir! Concordam... como você vai assimilar? Não vai! [**Antes de prosseguir ao 2.^o problema, P-4 ditou para as colegas a resposta elaborada acerca da 1.^a questão. Observe o exposto pela participante.**]
228. **P-4:** *Eu coloquei assim: Para haver acomodação...*
229. **P-2:** *E o que mais?*
230. **P-7:** *Ela tá acomodando ainda.... [Risos entre todos!]*
231. **P-2:** *É, mas é verdade!*
232. **P-4:** *Eu vou colocar que é preciso tempo, então!*
233. **Pesquisador/Participante:** Sim e, além do tempo, de estruturas de assimilação... É isso mesmo! Que permitam compreender o que a professora Laureta está expondo!... Vamos supor, pessoal, se eu faço isso com vocês: [**O Pesquisador/Participante projetou a seguinte definição retirada de Iezzi (1983, p. 72):**]

70. Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto $]-\infty, a[$. Dizemos que, quando x decresce ilimitadamente, $f(x)$ aproxima-se de L e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

se, para qualquer número $\epsilon > 0$, existir $N < 0$ tal que se $x < N$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.



Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists N < 0 \mid x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$$

[Após 1 minuto, o Pesquisador/Participante perguntou:]

234. Pesquisador/Participante: Dá pra perceber a analogia com o 2.º problema, pessoal? **[Nenhuma das participantes se pronunciou.]** Vocês, certamente, não construíram estruturas de assimilação que as permita entender isso aqui para, assim, poderem acomodar uma nova teoria explicativa. É a mesma coisa, o que esses sujeitos da tira estão sendo massacrados, oh, em muitas aulas de Matemática, Física, Química... na Universidade, muitos alunos também são!

235. P-2: *E da Pedagogia, também não!?*

236. Pesquisador/Participante: Sim, e de Pedagogia também! E é muito triste evidenciar isso, né!

237. P-2: *Eu acho que o mais triste, que eu acho, não é só vivenciar isso, é que eu vejo que as pessoas [Referiu-se aos seus problemas (alguns) da Pedagogia atualmente cursada.] não refletem sobre suas ações...*

238. Pesquisador/Participante: Nem um pouco!

239. P-2: *Eu acho que o mais triste de tudo é isso! E o pior é você ouvir assim: “Mas eu dei uma prova tão fácil!”.*

240. Pesquisador/Participante: Você está me dizendo que, em uma certa prova, todo mundo foi mal e o professor disse isso?

241. P-2: *Independente... talvez, eu não sei ainda, mas eu posso ter tirado acima de 5, e segundo esse professor é uma nota boa, mas... se você me pedir assimilação e acomodação eu vou...*

242. Pesquisador/Participante: Se eu te pedir o modelo explicativo da teoria exigida nesta prova você vai titubear bastante?

243. P-2: *Muito! [Falou enfaticamente.]*

244. P-7: *Nem precisa ser algo tão difícil assim!*

245. P-2: *Acho que se você me perguntar “Por que você escolheu esta alternativa?” eu teria dificuldade em te explicar o porquê!*

246. **Pesquisador/Participante:** Compreendo!

247. **P-2:** *E essa parte eu acho mais triste, ainda! Não só o ato em si, mas a pessoa não reflete sobre...*

248. **Pesquisador/Participante:** Porque, pessoal, eu defendo o seguinte: Você só se faz professor quando você consegue fazer-se no aluno, ou seja, quando você propicia um meio no qual o aluno consegue apropriar-se daquilo que você pretendeu no início e que você possui. Não estou dizendo aqui que o aluno vai construir todo o conhecimento que o professor possui, mas aquilo destinado para aquela disciplina, curso. É claro que depende da ação deste aluno e de outros fatores, mas, eu acredito que um processo de ensino que possibilite aprendizagem deve partir deste pensamento.

249. **P-2:** *Mas, eu acho assim, essa postura que você está verbalizando, ela é muito complicada, porque o professor ainda tem a visão de que ele tem que saber muito mais que o aluno. Muitos pensam que o aluno não deve se igualar ao professor... e eu sinto muito isso. E até eu já vi pessoas da própria turma [Referiu-se a algumas de suas colegas do curso de Pedagogia.] durante os seminários dar a entender isso... que o professor sempre tem que ter o conhecimento acima... não que pra se ensinar você não tem que ter um conhecimento... não é isso que eu estou querendo dizer, mas ele não vê que deveria chegar a um ponto que deveria ser igualado, né!*

250. **P-7:** *Mas eu acho que não só essa relação, né!? Mas o pessoal demonstra, é... vamos supor, se você vai pro estágio você sabe mais que o seu aluno, o seu aluno tem que saber menos!*

251. **Pesquisador/Participante:** Tudo isso que vocês estão falando, pessoal, tem a ver com a formação destes sujeitos, concordam!? E que devem ter um pé naquelas 2 tendências que abordamos ali, o Racionalismo e o Empirismo! Esta questão de superioridade remete ao Empirismo ou ao Racionalismo. “Eu sou superior porque eu já nasci inteligente!” ou “Eu sou superior porque eu me esforcei bastante e você é incompetente!”. Tudo bem?

252. **P-2:** *Ou, “Porque você é mais novo do que eu, você não pode ter esse conhecimento!”*

253. **Pesquisador/Participante:** E eu acho que num curso de Pedagogia coisas como essas não deveriam acontecer! Porque se os pedagogos, que são os especialistas em Educação, não são?

254. **P-2:** *São? [Risos entre todas as participantes.] Eu sempre achei isso, mas agora, depois de umas falas de um professor eu fiquei em dúvida! [Novamente risos entre todas as participantes.]*

255. **Pesquisador/Participante:** Não, vocês são sim! Mas, infelizmente, na própria Pedagogia, e estou falando a nível geral, nós nem podemos tirar tantos bons exemplos do que é o educar e o aprender! Vocês concordam comigo? **[Todas as participantes responderam “Sim.”.]**

256. **P-2:** *Antes eu acreditava que os doutores em Educação deveriam ser o modelo! Mas agora eu vejo que não!*

257. **Pesquisador/Participante:** Infelizmente, o modelo de Doutorado no país, não exige uma reflexão concomitante ao ensino, e sim, apenas na pesquisa. Só que, não necessariamente, um bom pesquisador é um bom professor. Porque, pessoal, para ser um bom professor é necessário o enfrentamento na prática a partir da teoria, ou seja, um constante pensar sobre as ações adotadas na sala de aula.

[Dando continuidade, o Pesquisador/Participante realizou a leitura do 2.º problema – referente a alguma vivência das participantes acerca da aulas de Matemática na qual as mesmas sentiram-se em ‘estado de overdose de conhecimento’.]

258. **P-2:** *Eu acho que ocorreram várias vezes!*

259. **Pesquisador/Participante:** Você se lembra de uma que marcou bastante ou todas marcaram bastante?

260. **P-2:** *Eu vejo cenas, assim, eu tinha professores que chegava, lotava a lousa, já tinha as listas de exercícios, daí você copia e resolve os exercícios... Um monte de vezes!*

261. **Pesquisador/Participante:** Você tentava 1.º se situar, né: “Onde eu estou?”

262. **P-2:** *Sim!*

263. **Pesquisador/Participante:** Agora, “O que eu tenho que fazer? Como?”. Daí você ia ver o modelo. Daí pensava assim: “Vou treinar bastante porque daí eu vou saber!”. Você pensava assim?

264. **P-2:** *Sim, daí eu ia saber!*

265. **P-7:** *E daí gerava sempre um problema quando o professor não passava o modelo. A 1.ª pergunta era: “Mas, cadê o modelo?”* [Referiu-se ao questionamento feito pelos seus antigos colegas da Educação Básica, inclusive por ela mesma.]

266. **P-2:** *É, cadê o modelo!?* [Risos entre P-2 e P-4.]

267. **P-7:** *Cadê os passos, tipo: “Faz um pra gente ver como faz!”.*

268. **Pesquisador/Participante:** O modelo não é ruim! Só, que, dependendo da maneira que o professor o utiliza pode ‘engessar’ a capacidade de solução de problema no aluno!

269. **P-2:** *Assim como a lista só com base naquilo que eu dei hoje, por exemplo, só com divisão.* [Referiu-se à queixa das participantes referentes aos seus antigos professores pedirem listas de exercícios acerca de um só conteúdo, e não relacionando outros da mesma disciplina, de modo a permitir que os alunos solucionem problemas relacionando variados conceitos.]

270. **Pesquisador/Participante:** Eu me lembro que num encontro a P-4 falou isso muito bem! Analisando semanalmente as nossas discussões, a P-4 falou assim: “Ah, na prova é fácil, só cai adição. Daí chega no vestibular e cai tudo!” Como que o aluno vai relacionar os variados conteúdos para solucionar os problemas? Fica difícil!... Você, P-4, lembra-se de momentos de ‘overdose’ ou os ‘desligou’ da sua mente?

271. **P-4**: *Eu acho que eu desliguei!* [Risos entre todas as participantes.]
272. **Pesquisador/Participante**: E você já disse isso também!
273. **P-4**: *É! É incrível, Pesquisador/Participante, mas é verdade... eu faço força pra lembrar, mas sabe quando não vem nada!?*
274. **Pesquisador/Participante**: Vamos tentar entender isso na teoria de Piaget! Estes desequilíbrios causavam tanto ‘desconforto’ na P-4, que a mente dela os bloqueou, os negou, e a mente dela nem tentava mais acomodar este novo, já que o mesmo estava sendo negado. Podemos até dizer que, de certo modo, nem no âmbito da assimilação, ela apenas ‘olhava’ pra aquilo, memorizava geralmente o algoritmo, sabia que teria de cuspi-lo na prova e pronto! É mais ou menos isso, P-4?
275. **P-4**: *Sim!*
276. **Pesquisador/Participante**: Não ocorreu o processo de assimilação e de acomodação porque você não se predispôs a se acomodar a um desequilíbrio lançado na lousa. Mesmo que aquilo, em alguns momentos fosse interessante, porque você construiu uma ‘barreira’ em torno do ‘não aprender Matemática’! É isso mesmo?
277. **P-4**: *Sim!*
278. **Pesquisador/Participante**: Só que isso não nasceu com você! Foi algo vivenciado e construído no qual você, muito provavelmente, ficou exposta em várias situações na sala onde você foi ridicularizada ou ‘deixada’ de lado! Muito provavelmente, embora talvez nem tenha sido isso! Alguma fala de seus professores: “Ah, não, você não consegue mesmo!”... Eu tive um aluno, enquanto fui professor dos anos iniciais, que dizia a todo o tempo: “Ah, professor, eu não vou conseguir, me falaram que eu sou burro mesmo!” Em conversa com este aluno da 4.^a série, que já havia repetido um ano escolar, ele me disse que desde ‘pequeninho’ as professoras diziam que ele era burro que nem o do pasto. Olha que situação triste! Eu pedia pra ele resolver um problema que tinha um nível de dificuldade ‘baixo’, ou seja, eu tinha a quase certeza que ele conseguiria fazer. No entanto, este aluno nem tentava resolver. Ele negava porque o fator afetivo deste aluno, sendo a afetividade a energia à cognição, nem era mais ‘ativada’ – digamos assim. Então, P-4, depois disso tudo que falei, eu suponho que isso tenha acontecido com você!
279. **P-4**: *É!*
280. **Pesquisador/Participante**: E você, P-5?
281. **P-5**: *Eu não me lembro, assim, de alguma coisa em especial.*
282. **Pesquisador/Participante**: Que você teve uma overdose?
283. **P-5**: *Sim, de ter. Mas eu lembro, comentando com minhas amigas: “Nossa, a professora tá falando grego?”...*
284. **Pesquisador/Participante**: Pronto, é outra fala!

285. **P-5:** *E essa fala, então, se encaixaria nisso, né! Mas eu não lembro, assim, do que era, do assunto que era...*

286. **Pesquisador/Participante:** Mas você já viveu situações na escola onde este processo de assimilação e acomodação não ocorreu, ou, se ocorreu, foi aquela assimilação bem superficial – embora em nem poderia estar dizendo este termo –, e daí você memorizou, cuspiu aquilo na prova e depois se foi?

287. **P-5:** *Sim!*

288. **P-4:** *Eu lembro, Pesquisador/Participante, que quando eu fazia o 3.º colegial, assim, e eu fiz em escola particular. O professor, assim, achava que a classe inteira sabia toda a base da Matemática... e daí ele ia explicar e eu nem sei que assunto lá... [Risos da participante.] Mas, vamos supor, ele ia explicar e acreditava que a classe inteira já tinha construído toda a base da Matemática...*

289. **Pesquisador/Participante:** E o duro é que ele acredita mesmo, na maioria das vezes!

290. **P-4:** *E daí ele achava que só precisava explicar aquele conceito daí pra frente!*

291. **Pesquisador/Participante:** Ok!

292. **P-4:** *Então, por exemplo, sei lá, ele começava a falar, ele até remetia alguma coisa: “Lembra disso? Então, é assim! E vamos pra frente!”... Então, sabe, eu começava... Ah, imagina! Pra mim era tudo grego!*

293. **Pesquisador/Participante:** Então parecia uma outra língua, embora seja uma outra língua que é a Matemática!

294. **P-4:** *É, e eu não entendia nada! As aulas de Matemática pra mim, assim, eu ficava olhando pras contas, passava os resultados [Risos da participante.] entendeu!? E eu percebia que a classe estava acompanhando o que ele estava ensinando, mas eu acredito que tenham também alguns alunos, né, que não acompanhavam que nem eu!*

295. **Pesquisador/Participante:** Claro, acho que com certeza! [Risos entre todos.]

296. **P-4:** *Sabe assim, ele perguntava e os outros respondiam! Ele corrigia na lousa e todo o mundo tinha feito... Agora eu, mas nem... [Fez um gestos com as mãos indicando não estar compreendendo ‘nada’ referente aos conteúdos abordados nas aulas do professor de Matemática.] Nem nada, assim!*

297. **Pesquisador/Participante:** Então você vivenciou momentos...

298. **P-4:** *Então, mas eu lembro assim depois desta parte, da 6.ª, 7.ª série, só bem depois...*

299. **Pesquisador/Participante:** Então, parece que da Educação Infantil até a 6.ª-7.ª série você não se recorda?

300. **P-4:** *É, eu não lembro de nada! Assim, porque eu acho que, na 5.ª-6.ª série eu mudei de escola. Aí, sei lá, eu acho que eu comecei a lembrar... porque até na 5.ª série eu estudava*

numa escola, depois da... da metade da 5.ª série eu mudei de escola... Daí eu lembro de alguma coisa, assim, daí pra cá! Antes disso eu não lembro nada, assim!

301. **Pesquisador/Participante:** Entendi!

302. **P-4:** *Disso eu não lembro nada!*

303. **P-2:** *Mas é só da Matemática?*

304. **P-4:** *Então... sim... ah, do resto!? Ah, eu me lembro na parte do Português, eu lembro que eu tinha uma professora que ela sempre me elogiava, sabe, que eu fazia boas redações... E eu era pequena, acredito que estava na alfabetização ainda! Então eu me lembro até duma redação que eu fiz...*

305. **Pesquisador/Participante:** Então, disso você se recorda, mas da Matemática não!

306. **P-4:** *É, e é impressionante!*

307. **Pesquisador/Participante:** E das Ciências, você se recorda?

308. **P-4:** *Ah, eu acho que sim, mas eu nunca parei pra pensar! Mas, principalmente na parte do Português eu lembro! Mas da parte da Matemática eu não lembro, e é incrível isso!*

309. **Pesquisador/Participante:** Ok! E certamente, ou melhor, dá pra supor que foram fatores emocionais (afetivos) que desencadearam isso, o não lembrar da Matemática. Ok, obrigado P-4! P-7, eu estava recordando agora e quando você fez a Disciplina de Estatística na graduação você nos falou que ao calcular a média, caso trocasse os números você ficava perdida. Depois você falou que aqui, em nosso Grupo, a ‘coisa’ começou a ter sentido, a ter compreensão. Dá pra perceber que aqui você passou a assimilar e acomodar! Dá pra perceber este movimento?

310. **P-7:** *Sim!*

311. **Pesquisador/Participante:** Está melhorando, pessoal, por meio dos exemplos, sobre este processo de assimilação e de acomodação? **[Todas as participantes indicaram, através de expressão facial, afirmativamente.]** Então, pessoal, vamos ler a síntese deste item: **[O Pesquisador/Participante realizou a leitura do último parágrafo do item 10.1. Observe-o abaixo:]**

Em síntese, ao propor situações problemas supõe-se que o professor acredita na necessidade da ação do aluno sobre o objeto de conhecimento para a ocorrência da aprendizagem (acomodação). Por meio da teoria de Piaget foi possível justificar – mesmo que brevemente – a importância do agir do sujeito sobre o objeto e sobre si mesmo, identificando os mecanismos funcionais que possibilitam tal inter(ação).

[Ao término da leitura, o Pesquisador/Participante fez um breve resumo do desenvolvimento do Grupo de Estudo até o presente momento. Neste resumo, salientou-se o seguinte:]

312. **Pesquisador/Participante:** Desde o 1.º encontro nós identificamos que a dificuldade residia no Tratamento da Informação. Fomos fazendo estudos paralelos à Matemática, ao ensino de Matemática sobre este assunto. Houve o estabelecimento do Currículo donde se

chegou à conclusão de que uma estratégia importante seria a resolução de problemas. O que subsidia a resolução de problemas? Daí nós utilizamos a teoria de Piaget, por conceber o sujeito enquanto um ser ativo, sendo esta atividade importante à construção do conhecimento. Mas, como se dá a construção do conhecimento? Estamos estudando isso agora! Tudo bem? Quando a P-5 e a P-8 me disseram que se faz importante justificar teoricamente a prática do professor, tá dando pra entender que estas explicações têm o intuito de subsídio teórico?

313. **P-5:** *Sim!*

314. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem as demais? [Por meio de gesto facial, as demais participantes indicaram afirmativamente.]

315. **P-5:** *Porque esse conhecimento novo não vem contra o que a gente pensa, não é uma coisa “Ai, eu não sabia que era assim!”, ele vem é, realmente, dar esse subsídio teórico para o que a gente já imaginava o que era assim, eu acho! [Referiu-se aos procedimentos didático-metodológicos considerados como corretos e que vêm de encontro à teoria estudada.] Certo meninas? Vocês concordam?*

316. **P-4:** *É... a gente não sabia explicar...*

317. **Pesquisador/Participante:** Vocês não sabiam explicar o porquê? É isso?

318. **P-5:** *É... você não sabe, assim, como ocorre certinho ‘dentro’ da criança...*

319. **P-2:** *E nem dar nomes. [Referiu-se aos termos científicos que denotam os processos de construção do conhecimento.]*

320. **P-5:** *É! Muitas vezes você não está errada, muitas vezes! Só precisa realmente conhecer mais pra justificar! Eu acho que é bem isso mesmo!*

[A pedido das participantes, o ‘Momento Síntese’ referente ao 10.º Grupo de Estudo ficou para ser feito como ‘tarefa’ para casa, já que as mesmas acharam necessário mais tempo para a compreensão do assunto abordado, assim como uma ‘nova’ leitura do texto.]

[Em prosseguimento, as participantes acharam melhor dar continuidade à leitura coletiva do texto. Deste modo, P-4 iniciou a leitura do próximo item – 11.1.]

11.1 Um movimento de retomada (síntese)

A análise da proposta curricular de Matemática referente à abordagem dos conteúdos de Estatística ‘nos levou’ a pensar sobre o porquê da adoção da solução de problemas enquanto estratégia didático-metodológica. Como resposta chegou-se à conclusão da importância do agir do sujeito (aluno) ao processo de construção de conhecimento. Para tanto, foram evidenciadas as funções herdadas geneticamente (*organização* e *adaptação*) que propiciam tal inter(ação) entre o sujeito e o meio (objeto), fazendo-se breve discussão quanto a duas funções invariantes (*assimilação* e *acomodação*) que, quando em equilíbrio, permitem a adaptação/organização do sujeito ao real e a si mesmo.

Durante a discussão da importância da atividade do sujeito ressaltou-se que “a educação deve responder a uma necessidade”, ideia essa que causou algumas incompreensões da teoria de Piaget quando utilizada no meio educacional. Nesse sentido, no item abaixo, far-se-á uma breve abordagem acerca de tal assunto.

[Como nenhuma participante apresentou dúvidas em relação ao item lido, deu-se início à leitura do próximo tópico – 11.2. Antes de iniciar a leitura, aguardou-se o

retorno de P-5 já que a mesma teve de se ausentar por alguns minutos. Durante o tempo de espera, as participantes salientaram não haverem realizado na disciplina de Psicologia uma discussão tão ‘profunda’ acerca da teoria de Piaget. P-7 reclamou da distribuição das disciplinas ao longo do curso de Pedagogia, justificando que ‘boa’ parte das disciplinas ‘teóricas’ estão ‘concentradas’ no 1.º ano do curso. Segundo ela, no 1.º ano é ‘tudo muito novo’ e não dá tempo de ‘acompanhar’ tudo. Já P-2, após salientar que para ela nem foi este o problema devido à sua idade e por já ter cursado outro curso a nível Superior, a principal crítica reside no fato dos professores das disciplinas deixarem as discussões teóricas sob a responsabilidade dos próprios alunos separados em grupos para a apresentação em forma de Seminários. Abaixo consta a fala de P-2 acerca disso:]

321. **P-2:** *Então, a gente não tinha até mesmo maturidade pra compreender que aquilo era importante, ou seja, que a gente deveria fazer uma leitura profunda de todos os assuntos e não somente daquele que a gente ia apresentar em forma de Seminário. A P-8 mesmo disse não saber nada da teoria de Ausubel porque ela ficou responsável por apresentar outro teórico, a gente [Referiu-se à P-4 e P-7.] só sabe bem a teoria de Ausubel porque fomos nós que ficamos responsáveis por apresentar esse Seminário.*

322. **Pesquisador/Participante:** Entendi!

323. **P-2:** *Uma coisa, assim, que é até elogio mesmo, nos seus Seminários, você distribuía os textos dos outros grupos.*

324. **Pesquisador/Participante:** Sim, durante a disciplina que eu ministrei pra vocês eu possibilitei o acesso de todos os textos discutidos.

325. **P-2:** *Nestas disciplinas que eu estou dizendo, não... Eu não tive acesso aos textos dos outros Seminários. O que os outros pesquisaram, o que os outros... a gente só assistiu a apresentação! E isso está ocorrendo agora, novamente, no 4.º ano. A gente vai saber o que a gente está estudando para apresentar, e, além disso, os outros grupos, querendo ou não é ridículo o que eu vou falar... É falta de maturidade até... mas as pessoas não prestam atenção! Se é um aluno que está lá na frente explicando... É absurdo o que eu estou dizendo... eu sei que é! Mas, é a verdade! Na aula de ontem a gente presenciou totalmente isso. Enquanto estava um grupo lá na frente falando, você poderia olhar para onde quisesse, as pessoas estavam de cabeça baixa dormindo ou conversando. Até mesmo o nosso grupo!*

326. **P-7:** *Ou estavam no computador, ou no celular fazendo outra coisa! E quem não levou até comentou: “Ai, eu devia ter trazido até um texto para ler!” [Tal comentário remete à falta de interesse aos assuntos abordados no Seminário apresentado.]*

327. **P-2:** *Foi exatamente isso! Então, assim, fica difícil...*

328. **P-7:** *Eu vejo um outro porém, ainda, que a gente comentou do Seminário do Ausubel... a gente foi buscar pra apresentar, mas muita coisa do que eu apresentei até hoje eu não sei... Nós fomos procurar os livros e nós fomos explicar ali o que a gente entendeu, e também não sei se tudo aquilo ali era certo, ou não!?*

329. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro!

330. **P-2:** *Por isso que eu questionei, até, algumas coisas... Sim, ouvi falar, mas eu não sei se eu sei – assimilei-acomodei – está certo! [Referiu-se a um questionamento feito aos integrantes do Seminário apresentado no dia anterior.]*
331. **P-7:** *Sim, a gente leu, mas não sei se a gente entendeu!*
332. **Pesquisador/Participante:** E o questionamento do aluno é um importante indício de que ele está tentando realizar este processo de assimilação e de acomodação.
333. **P-2:** *E quando o professor diz: “Entenderam?” e a gente responde: “Não!”, daí ele fala: “Perfeito!”.*
334. **P-7:** *“Perfeito! Era isso mesmo!”.* [Repetiu a fala de um dos seus professores da graduação que toma esta atitude perante às dúvidas demonstradas pelos alunos referentes ao assunto abordado.]
335. **P-2:** *“Era isso mesmo!”.* [Ou seja, para o referido professor é ‘normal’ os alunos não entenderem ‘nada’ e continuarem assim.]
336. **P-4:** *“Porque eu sei mais que vocês e vocês não vão chegar no meu nível de conhecimento.”* [A participante está reforçando a fala do professor em questão.]
337. **Pesquisador/Participante:** Eu acho que aqui em nosso Grupo de Estudo estamos discutindo ‘a fundo’ estas questões!
338. **P-2:** *Mas, além disso Pesquisador/Participante, aqui eu tenho permissão para perguntar, eu me sinto segura! Eu sei que você jamais vai me dar uma resposta grosseira, ou que você vai me ‘cortar’, ou que você vai olhar pra mim e dizer: “Perfeito!”.*
339. **P-7:** *Mas eu acho que esse professor não tem noção!*
340. **P-2:** *Eu também nem acho que é por maldade...*
341. **Pesquisador/Participante:** Sim, concordo! Pode ser sim!
342. **P-2:** *Mas eu não pergunto mais pra esse professor! [Neste momento P-5 retornou à sala.]*
343. **Pesquisador/Participante:** E isso pode implicar que este professor pode formar outros professores que vão agir assim na sala de aula, concordam? Porque os colegas de vocês, se não refletirem estes saberes da experiência construídos na graduação, é muito provável que eles vão ‘passar’ esta postura pra frente! Digo isso porque colegas meus da Licenciatura ‘passaram’ pra frente a metodologia de lousa-exposição-duzentas listas de exercício e memorização do começo ao fim.
344. **P-2:** *É, a maioria faz assim! Pode não ser a grande maioria, como disse a P-5, mas boa parte ainda faz assim!*
345. **P-7:** *Então, eu, quando cheguei na faculdade, vim com uma ideia tão diferente do que era isso aqui, mas daí você vê que é igual o que a gente tinha antes. [A participante*

compara os procedimentos didático-metodológicos e as posturas de seus professores do Ensino Superior como sendo iguais aos dos seus professores da Educação Básica.] Então, o que o pessoal do curso pensa? Ah, é assim mesmo, eu vou fazer igual!

346. **P-2:** *Isso aqui você fala Universidade?*

347. **P-7:** *É!*

348. **Pesquisador/Participante:** *Concordo com você P-7!*

349. **P-7:** *A gente pensa que a Universidade é diferente, mas acaba sendo igual a escola!*

350. **P-2:** *Eu acho assim, o meu 1.º ano aqui, eu tive uma visão diferente! Eu achei que era esse mundo diferente... No meu 1.º ano sim, porque eu vim de uma formação no Ensino Superior diferente também. [Referiu-se ao fato de já ter cursado Comunicação Social – Publicidade e Propaganda.] Era muito mercado de trabalho, mão de obra literalmente! E você estando dentro, você não tem consciência disso... E quando eu entrei aqui a visão era diferente... Dava-se a entender que o enfoque era diferente, como assim, o desenvolvimento do aluno, a capacitação do aluno, até se formar um cidadão mais autônomo, mais ativo e tal. Só que você chega no 4.º ano e descobre que não! E eu acho que aquilo foi uma grande ilusão.*

351. **P-7:** *Eu acho que até no discurso podia haver assim, mas na prática mesmo repetia tudo, e agora [Referiu-se ao último ano do curso de Pedagogia.] tá piorando...*

352. **P-2:** *Tá pior! Ou a gente está mais crítica?*

353. **Pesquisador/Participante:** *Pode ser!*

354. **P-7:** *Pode ser também!*

355. **Pesquisador/Participante:** *Quanto ‘maior’ a sua capacidade de explicação/reflexão, é mais difícil o outro te iludir. Vocês passam a não aceitar qualquer coisa que estão te ‘oferecendo’, porque vocês têm um ‘maior’ conhecimento que faz com que você tenha mais consciência das ações do seu professor, por exemplo.*

356. **P-2:** *Ah, tudo bem! Mas eu vejo que mesmo no 4.º ano, os alunos ainda caem na conversa do professor. E eu vejo assim, na sala, quem tem o discurso mais bonito ganha! Se você tem um discurso bonito e que convence...*

357. **Pesquisador/Participante:** *Mas que é vazio? É isso?*

358. **P-2:** *Sim, que é vazio! Mas se você tem um discurso bonito que convence e que te remete de que realmente a sociedade é assim mesmo e que você tem que olhar as diferenças, e parará... parará... você ganhou!*

359. **P-7:** *Mas você lembra do moço que questionou na palestra do Becker? Acho que foi a última pergunta. “Ai, quando a gente ouve uma palestra do Piaget a gente se torna piagetiano!”, “Se a gente escuta de Vigotski se torna vigotskiano!”, e aí, é assim! Ele ouviu um discurso e era mais bonito e daí ele muda pra aquele!*

360. Pesquisador/Participante: É... Nós precisamos nos apropriar de modo profundo dos referenciais teóricos de modo a subsidiar a nossa fala e a nossa prática. Tudo bem, pessoal? Podemos dar continuidade?

361. P-7: *Mas oh, rapidinho! Eu acho que muitas vezes, aqueles colegas que concordam com tudo o que o professor fala, eles podem até ter outra opinião, mas na hora é melhor concordar com o professor porque daí ele vai ficar feliz. É o que acontece nas aulas de..., pois tem gente que repete com as mesmas palavras o que o professor falou.*

362. Pesquisador/Participante: E isso, pessoal, nos remete ao Empirismo... E é uma pena isso acontecer aqui, na Universidade. É triste ver que os saberes construídos por vocês, durante a Educação Básica, estão sendo reforçados aqui! Lembra do nosso 1.º Grupo de Estudo quando eu falei da importância da Formação Inicial questionar vocês de modo a permitir uma reflexão sobre estes saberes? Pelo que vocês estão me dizendo, isso não está acontecendo aqui!

[Decorridos alguns minutos na qual as participantes discutiram um assunto ‘polêmico’ envolvendo a postura de um professor do curso de Pedagogia – que não nos interessa enquanto objeto de estudo – deu-se prosseguimento à leitura do item 11.2. O Pesquisador/Participante chamou a atenção ao fato de que a necessidade foi uma das ‘partes’ da teoria de Piaget que causou ‘grandes’ más compreensões.]

11.2 ‘A Educação deve responder a uma necessidade’

Ao se referir “a uma necessidade”, de modo algum Piaget reduz o processo educativo ao ensino dos ‘conteúdos’ prático-utilitários de uso exclusivo da esfera cotidiana. Caso o tivesse feito, o seu estudo-investigação acerca das estruturas formais do pensamento que permitem ao sujeito ‘ultrapassar’ o real teria sido desnecessário. É certo que na Educação Primária (anos iniciais do Ensino Fundamental) o ensino deve (deveria) partir da realidade vivida pelo aluno. Tal fato ocorre, pois, esse é o período no qual o pensamento do sujeito, por não ter se ‘desprendido’ do real, ainda necessita operar sobre o concreto.

Acerca da necessidade Piaget (2001) expõe o seguinte:

Em todos os níveis, a ação supõe sempre um interesse que a desencadeia, podendo-se tratar de uma necessidade fisiológica, afetiva ou intelectual (a necessidade apresenta-se neste último caso sob a forma de uma pergunta ou de um problema). Em todos os níveis, a inteligência procura compreender, explicar etc.; só que se as funções de interesse, da explicação etc. são comuns a todos os estágios, isto é, “invariáveis” como funções, não é menos verdade – que os “interesses” (em oposição ao “interesse”) variam consideravelmente, de um nível mental a outro, e que as explicações particulares (em oposição à função de explicar) assumem formas muito diferentes de acordo com o grau de desenvolvimento intelectual. Ao lado das funções – constantes, é preciso distinguir as estruturas variáveis, e é precisamente a análise dessas estruturas progressivas ou formas sucessivas de equilíbrio que marca as diferenças ou oposições de um nível de conduta para outro, desde os comportamentos elementares do lactente até à adolescência. (p. 14-15)

Da citação conclui-se que em cada nível de desenvolvimento mental (estádios) serão observados interesses diferentes, cuja principal função do interesse é desencadear no sujeito a sua ação. Por exemplo, no estágio sensório-motor o interesse/necessidade residirá na organização do espaço ‘prático’, inicialmente o espaço próximo ao recém-nascido. É por isso que nos primeiros meses de vida o bebê organiza/ ‘classifica’ – por meio da manipulação – tudo o que é para sugar, o que é para olhar, o que é para pegar, o que é para sacudir, etc.

Mais adiante, Piaget ressalta:

A criança, como o adulto, só executa alguma ação exterior ou mesmo inteiramente interior quando impulsionada por um motivo e este se traduz sempre sob a forma de uma necessidade (uma necessidade elementar ou um interesse, uma pergunta, etc.).

Ora, como já bem demonstrou Claparède, uma necessidade é sempre a manifestação de um desequilíbrio. Ela existe quando qualquer coisa, fora de nós ou em nós (no nosso organismo físico ou mental) se modificou, tratando-se, então, de um reajustamento de conduta em função desta mudança. Por exemplo, a fome ou a fadiga provocarão a procura do alimento ou do repouso. O encontro do objeto exterior desencadeará a necessidade de manipulá-lo; sua utilização para fins práticos suscitará uma pergunta ou um problema teórico. Uma palavra de alguém exercitará a necessidade de imitar, de simpatizar ou levará a reserva e oposição quando entra em conflito com as nossas tendências. Inversamente, a ação se finda desde que haja satisfação das necessidades, isto é, logo que o equilíbrio – entre o fato novo, que desencadeou a necessidade, e a nossa organização mental, tal como se apresentava anteriormente – é reestabelecido. (PIAGET, 2001, p. 15-16)

O exposto evidencia – brevemente – o processo de *Equilibração*, sendo esse imprescindível ao desenvolvimento (fisiológico, afetivo e cognitivo) do indivíduo. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, quando o aluno não é ‘desequilibrado’ a agir sobre o objeto de conhecimento, provavelmente, o aprender perderá interesse (sentido). Tal fato decorre, em grande parte, do verbalismo do professor por acreditar que o seu falar-expor será suficiente para a assimilação-acomodação do conhecimento. De modo algum nega-se a importância da *interação social* (relações interindividuais) ao processo de aprendizagem, bem como ao desenvolvimento em geral do indivíduo. A *interação social*, a *maturação orgânica* e as *experiências física e lógico-matemáticas*, coordenadas pelo processo de *equilibração*, constituem os quatro fatores responsáveis pelo desenvolvimento do sujeito. No próximo item serão abordados tais fatores.

[Durante a leitura, o Pesquisador/Participante foi questionando as participantes se as mesmas estavam compreendendo o denotado no texto. Destacou-se a diferença existente entre o ‘interesse’ (função geral) e os interesses específicos a cada nível de desenvolvimento do sujeito. No decorrer da leitura da 2.ª citação retirada de Piaget (2001), o Pesquisador/Participante chamou a atenção ao fato de que sempre agimos por um interesse. Observe a colocação denotada:]

363. **Pesquisador/Participante**: Pessoal, vocês estão aqui por um interesse? É isso?

364. **P-2**: *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

365. **Pesquisador/Participante**: Eu também estou aqui por um. Nós nunca iremos agir sem um interesse!

366. **P-2**: *É por isso que em algumas aulas não entra nada em nossa mente! Porque a gente fica sem interesse!* [Risos entre P-2 e P-7.]

367. **Pesquisador/Participante**: Perfeitamente P-2, porque você não está agindo sobre aquilo que está acontecendo, porque aquilo não está te desequilibrando, digamos assim!

[Terminada a leitura do referido item, o Pesquisador/Participante perguntou se alguma participante possuía dúvidas em relação a alguma parte do texto. Como não surgiram dúvidas, o Pesquisador/Participante questionou se as mesmas já haviam estudado os 4 fatores do desenvolvimento. Antes de iniciar a leitura do próximo tópico, P-2 comentou:]

368. **P-2**: *Tem textos de Piaget que é mais fácil de entender!* [Referiu-se aos dois trechos retirados de Piaget (2001).]

369. **Pesquisador/Participante**: É que, P-2, estes trechos foram retirados de um livro no qual Piaget apresenta o geral de sua teoria, então está de modo mais sintetizado, e eu acho que

é mais fácil também! Aquele trecho que falava das ‘relações lógicas’ da assimilação e da acomodação foi retirado do livro “O nascimento da inteligência na criança” e, realmente, a sua linguagem é um pouco mais difícil!

370. **P-2:** *Então esse eu não quero, eu nunca vou ler!* [**Percebeu-se certo tom irônico.**]

371. **P-7:** *Mas você acha mais tranquilo porque você tem mais leitura de Piaget! Mas eu não acho mais fácil... é mais fácil que a outra!* [**Referiu-se à citação retirada do livro “O nascimento da inteligência na criança” – discutido no item 10.2.] É visível... mas eu não acho fácil, mesmo assim!**

372. **Pesquisador/Participante:** Então ainda é complicado!?

373. **P-7:** *É bem complicado!* [**Resposta compartilhada por P-5.**]

374. **P-5:** *Pesquisador/Participante, explique, assim, nas suas palavras, o que é o interesse...*

375. **Pesquisador/Participante:** O interesse é aquilo que vai levar a pessoa a agir! Seja qual for o tipo de interesse...

376. **P-2:** *Pode ser pra conhecer, pra descobrir, pode ser pra... de repente, igual aos abridores mesmos... Você olhou aquilo e não sabe o que é, o Pesquisador/Participante não teria dito que é um abridor. Você ia ficar com aquilo na cabeça, tipo: “O que será que é?”. Isso é uma necessidade, de você conhecer, de você descobrir...*

377. **Pesquisador/Participante:** Por exemplo, oh, no 1.º estágio o interesse é no plano prático, no 2.º o interesse remete ao plano simbólico da intuição, no 3.º interesse é o de operar concretamente e, no final, o interesse é no estabelecimento de sistemas e de teorias!

378. **P-2:** *A gente tá no outro, ainda!* [**Referiu-se ao fato de considerar o seu interesse como pertencente ao 3.º estágio.**]

379. **P-5:** *Então, o que nós falamos aqui, que você tem que dar atividade pra criança pra ela tentar agir sobre aquilo, daí que vai gerar interesse porque ela vai tentar agir e, às vezes, vai conseguir ou não! É aí que vai estar o interesse, então o professor primeiro propõe e depois gera o interesse!*

380. **Pesquisador/Participante:** O professor tem que propor uma atividade que seja interessante, ou seja, que desequilibre aquelas estruturas que o sujeito possui no momento.

381. **P-5:** *Mas ela se torna interessante... o que é uma matéria interessante?*

382. **Pesquisador/Participante:** É uma matéria que você se predispõe a agir sobre ela!

383. **P-5:** *Que nem, por exemplo...*

384. **P-2:** *Porque o interesse não é igual pra todo mundo! Eu entendo assim!*

385. **Pesquisador/Participante:** Porque as pessoas são diferentes...

386. **P-2:** *São diferentes!*
387. **P-5:** *É, então, por isso que eu pensei que fosse...*
388. **P-2:** *Eu entendi! Como você faz isso numa sala com 30 crianças para despertar o interesse!?*
389. **P-5:** *Por exemplo, como você vai se interessar por um conteúdo que, às vezes, que você vai dar e que é difícil? De 1.º o aluno não vai se interessar! Só se ele for desafiado o que acontece com a gente também... É aí que ele vai ter curiosidade em saber como faz... eu acho que ela [Referiu-se ao interesse, à curiosidade.] vem depois.*
390. **Pesquisador/Participante:** *Ela não vem depois... ela vem no momento que o sujeito perceber que aquilo tem sentido pra ela! Como assim? Ah, se eu chego no 1.º ano do Ensino Fundamental e ‘boto’ uma tabuada na lousa, aquilo nunca vai ter sentido pra aqueles alunos...*
391. **P-2:** *Mas a escrita tem, porque ela já vê no social dela... Porque eu vejo a minha sobrinha de 3 anos e ela já tem interesse já, pela escrita!*
392. **Pesquisador/Participante:** *Perceba que é porque isso causa um desequilíbrio nela!*
393. **P-2:** *Causa!*
394. **Pesquisador/Participante:** *Porque ela percebe que isso é uma maneira dela se comunicar!*
395. **P-2:** *E agora é assim... não que eu ensino, porque eu não ensino, neste sentido, assim, “Ah, porque ela tem que ser alfabetizada!”. Mas agora ela me vê e fala assim: “Tia P-2, como escreve tia?”, daí você tem que ditando palavrinha por palavrinha, sabe!? Mas se você dar ela não entende que tá escrito tia, lá ainda, mas ela tem interesse...*
396. **Pesquisador/Participante:** *E é assim que começa a alfabetização!*
397. **P-5:** *Então, mas daí a sua sobrinha que tem este interesse...*
398. **Pesquisador/Participante:** *É de onde surgiu isso?*
399. **P-5:** *Não! Pra ela [Referiu-se à sobrinha da P-2.] você vai dar um conteúdo de alfabetização e ela vai agir sobre aquilo... Mas, e aquele que não tem o interesse? Como vai gerar?*
400. **P-2:** *Mas a gente tem que ‘despertar’, né P-5! Por isso que a gente via muito aquilo das leituras, das histórias, de ter sentido... é a função do gênero!*
401. **P-5:** *Então é por isso que eu disse que o interesse vem depois, que o professor age pelo interesse do aluno. Se não a criança não tem interesse em aprender!*
402. **P-2:** *Eu entendi! Eu entendi que você quer dizer assim, que o professor tem que despertar o interesse!*

403. **Pesquisador/Participante**: Sim, claro, você tem que ‘desequilibrar’ o sujeito!
404. **P-5**: *Ah, entendi!*
405. **Pesquisador/Participante**: Se aquilo não for interessante, a criança vai ficar apática, não tem sentido ela agir. Porque em toda ação a pessoa gasta muita energia! Concordam? Estar aqui cansam vocês, não cansa?
406. **P-2**: *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]
407. **Pesquisador/Participante**: Se não fosse assim, seria um forte indicio de que vocês não estavam sendo desequilibradas a todo o momento... Embora até uma aula que não ‘desequilibra’ cansa, mas daí é de tédio... [Risos entre todos.] Elaborar o material que eu trago pra vocês em cada Grupo de Estudo causa em mim grandes desequilíbrios!
408. **P-5**: *Eu imagino!*
409. **P-2**: *E deve ser pior ainda, 3 vezes pior!*
410. **P-4**: *É!* [Risos entre as participantes.]
411. **Pesquisador/Participante**: Porque eu preciso observar o que vocês construíram anteriormente para estabelecer uma ponte, por isso que eu fico questionando, retomando a discussão... Trago situações hipotéticas, mas que indicam situações reais de sala de aula para que vocês reflitam sobre o ensino de Matemática, ainda vou trazer partes da minha Dissertação de Mestrado onde a professora investigada fala, fala, fala e fala e depois o aluno diz: “Eu não entendi o começo!”. [Risos entre as participantes.]
412. **P-2**: *Então quer dizer que ele não entendeu nada! E daí você, enquanto professor vira e diz: “Perfeito!”.* [As participantes demonstraram-se descontentes com uma postura de um professor da graduação ao ignorar as dúvidas apresentadas por elas em sala de aula. Deste modo, usam em tom irônico a expressão “Perfeito!” falada pelo referido professor.]
413. **Pesquisador/Participante**: Tudo bem, P-5?
414. **P-5**: *Tudo bem! Eu acho...*
415. **P-2**: *Eu acho difícilimo o que você está dizendo! Eu não saberia como despertar o interesse da criança pra ele querer entender o teorema de Pitágoras, dando um exemplo bem assim...*
416. **Pesquisador/Participante**: Ok!
417. **P-2**: *Eu acho difícilimo isso!*
418. **P-5**: *E eu acho que, nessa minha fala reside a maior distorção da teoria!*
419. **P-2**: *Sim!*

420. **P-5:** *Que o interesse não vem só da criança. “Ah, então eu quero aprender Português, mas não Matemática!”*

421. **Pesquisador/Participante:** Oh, naquele trecho ali: “a ação supõe sempre um interesse que a desencadeia”, então, na escola, que tem que desencadear este interesse, essa coisa interessante é o professor! É o papel dele desequilibrar o aluno!

422. **P-5:** *O interesse desencadeou uma ação, mas antes tem uma ação que desencadeia o interesse! Eu acho que é nisso... é a ação do professor!*

423. **Pesquisador/Participante:** Sim, perfeitamente!

424. **P-5:** *E eu acho que essa frase que falta pras pessoas entender ele! [Referiu-se à posição de Piaget quanto ao interesse.]*

425. **Pesquisador/Participante:** É por isso que o professor precisa conhecer bem a matéria que ele está ensinando, no caso a Matemática... e saber os momentos psicológicos quando algum conteúdo já é possível de ser construído, ou não! Lembra quando eu propus o currículo lá da Estatística!?

426. **P-2:** *Sim!*

427. **Pesquisador/Participante:** Não foi ordenado, eu fui explicando os níveis de dificuldade... Por quê? Se eu já chego, no 1.º ano, e vou trabalhar um gráfico de setor, psicologicamente aquilo nunca vai ser interessante, porque a criança, ainda, nem organizou, informalmente as informações! Como que você quer que ela analise formalmente já por meio dos graus de cada setor, da porcentagem!? Tudo bem, pessoal?

428. **P-2:** *E eu quero abrir um parênteses! A criança, é interessante você saber as etapas do desenvolvimento dela também porque isso te dá uma grande base porque a criança, por si só, não tem capacidade de saber o interesse que ela tem!*

429. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo, P-2!

430. **P-2:** *Ela ainda não tem! Ela não tem isso, ela não consegue!*

431. **Pesquisador/Participante:** Um exemplo: Se eu abordar, numa 5.^a série, uma demonstração formal de um teorema matemático. Certamente aquilo não vai interessar os alunos porque, psicologicamente, eles ainda não tem condições de assimilar e acomodar tal assunto. Esses alunos estão em transição do concreto ao formal, e uma demonstração enquadra-se no pensamento formal. Eu vou desequilibrar tanto estes alunos que eles não conseguirão ‘sair’ do lugar e, certamente, eles vão negar isso que eu estou propondo.

432. **P-7:** *Mas eu não sei se eu entendi direito, mas, não seria só a criança que não tem, mas o professor chegou na aula e falou: “Vocês querem aprender sobre este conteúdo?”. Mas, como assim?*

433. **Pesquisador/Participante:** Esta é uma outra distorção da teoria! Ninguém está dizendo que deve-se ignorar o aluno, não é isso! Mas é o professor que deve saber o que vai

causar o interesse que causa a ação do aluno para que ele possa se apropriar do ‘novo’ conteúdo.

434. **P-5:** *A maioria dos professores não sabe o que é isso!*

435. **P-2:** *Não sabe! Todo mundo fala!*

436. **P-5:** *Mas é uma coisa tão simples, assim, quando eu for explicar isso, quando a gente for explicar isso pras pessoas, é só incluir que tem este antes, que agora parece tão fácil... Mas até há muito tempo... hoje, pra mim... Nossa, eu já imaginava que era assim, mas a gente formalizando, eu... descobri a América!*

437. **Pesquisador/Participante:** *Está melhorando?*

438. **P-5:** *Muito! Eu sempre ficava com dúvida! Tem que partir do interesse do aluno... aí, depois, tem que ensinar os conhecimentos historicamente construídos... Daí eu ficava: “Gente, mas como se parte do interesse do aluno? O aluno não vai se interessar por uma coisa de conteúdo de aula! Se perguntar pro aluno o que ele se interessa, ele vai responder de videogame, de bola... ele não vai responder, por exemplo...”*

439. **P-2:** *Por isso que tem que despertar!*

440. **P-5:** *E daí é por isso que muitos dizem que a teoria de Piaget não serve!*

441. **P-2:** *Mas, P-5, é o que eu acabei de falar... A criança, ainda, não tem condições de...*

442. **Pesquisador/Participante:** *A criança, ainda, não tem autonomia para se guiar naquilo que é importante para que ela progrida psicologicamente (cognitivo, afetivo, moral)!*

443. **P-2:** *Eu verbalizei isso aqui! Se com a idade que eu tenho, eu não sabia que, o que eu aprendi no 1.º ano do curso de Pedagogia era fundamental, imagina uma criança!*

444. **Pesquisador/Participante:** *Inclusive, pessoal, o aluno dos anos iniciais só vai passar a ter consciência daquilo que ele está aprendendo bem depois... Caso consiga, é lá pros anos finais do Ensino Fundamental ou no Ensino Médio! Com esses atrasos no desenvolvimento do aluno, causados, sim, por essas influências do meio social e escolar, porque o próprio Piaget alerta que as influências sociais podem sim, até inclusive, provocar atraso nas médias das idades! Se o sujeito não conseguir realizar as interações necessárias ao seu desenvolvimento, é claro que ocorrerão alguns atrasos!*

445. **P-2:** *Desculpa interromper um pouquinho... Mas eu e meu colega da graduação estávamos conversando, porque ele está analisando, no TCC dele, a estrutura e as interações que ocorrem numa creche. E aí, ele chegou a comentar que ele estava super em conflito por causa disso, porque ele foi vivenciar um momento de alimentação das crianças. E as professoras, assim, por exemplo, pedem até de uma forma impositiva para elas comerem com a boca fechada, não fiquem conversando de boca cheia e tal. E ele foi comentar e disseram, assim, que era extremamente tradicional... e ele veio cheio de conflitos... Aí ele veio conversar comigo e falou: “Olha o que eu entendi, qual é o momento, então, que vai se ensinar a criança a fazer isso, então, se não é ali na creche?”, daí eu falei: “Mas, pera aí, então está tendo uma distorção, realmente!”, daí eu até fui buscar no livro do próprio Piaget,*

no Juízo Moral tem, e daí eu falei que tava no livro e que ele podia pegar, se basear, por um teórico afirmando que não, que a criança tem que ser ensinada! [Ou seja, o fato de ensinar à criança os costumes e hábitos da ‘boa’ Educação – tais como lavar as mãos antes das refeições, comer com a boca fechada, pedir ‘por favor’, esperar a sua vez em uma fila, etc. – não significa que o professor está adotando uma postura tradicional.]

446. **Pesquisador/Participante:** A criança tem que ser guiada, ser levada a pensar! Ser guiada é diferente de limitar o seu pensamento! É diferente, tudo bem?

447. **P-2:** E na hora eu lembrei disso! E foi tão engraçado que ele estava falando e eu lembrei disso e falei: “Não, isso o que essas professores da creche disseram está equivocado!”, porque eu li, eu tenho certeza!

448. **P-5:** Quem falou que não seria o momento, ou ele próprio se questionou?

449. **P-2:** Foi na própria creche que comentaram: “Olha, a atuação da professora tal...”, entendeu? E aqui já ouvi algumas coisas assim...

450. **P-5:** Eu não entendi P-2?

451. **P-2:** É que uma professora questionou a postura da outra professora, e falou que ela foi super tradicional ao exigir do aluno que coma com a boca fechada, e que o que ela estava fazendo era um crime da humanidade! E o nosso colega está analisando estas 2 professoras que são super opostas. E daí ele entrou em conflito, porque se ele colocar isso, muitos vão ter essa visão, que muitos professores falam que tudo tá errado, que você não pode... E daí eu fico nessa, então: “Então não vai ensinar!?”. Quem vai guiar essas crianças? Elas não aprendem por si só! Que daí foi a hora que ele comentou e eu falei “Pera aí, eu acho que tem uma distorção aí!”. E tem sim um momento de ser ensinado, tem sim um momento de ficar quieto e comer com a boca fechada!

452. **Pesquisador/Participante:** É necessário o aluno adquirir o hábito!

453. **P-7:** Antes se ensinava isso em casa, mas hoje não se ensina em casa, muitas vezes a criança nem fica. Então, se não aprender lá na escola, vai aprender aonde?

454. **P-5:** Ah, nossa! Então toda a vez que a gente for falar do interesse é nessa parte só do aluno. Se você falar só de um professor, o professor sabe o que é melhor pro aluno, daí muda esta questão da imposição. Daí juntar os 2 que é essencial, porque é difícil de enxergar! [Referiu-se ao juntar o interesse que irá desencadear no sujeito a sua ação ao interesse a ser produzido pelo professor.]

455. **Pesquisador/Participante:** Alguns até julgaram a teoria de Piaget como não-diretivist.

456. **P-2:** É, já ouvi isso!

457. **Pesquisador/Participante:** Mas não! ‘Aplicando’, digamos assim, a teoria de Piaget à Educação, ela será uma pedagogia diretivista, mas sem tirar a liberdade do aluno pensar sobre aquilo que ele está fazendo! De ele agir sobre o conhecimento!

458. **P-2:** *A teoria dele dá um baita de um embasamento no sentido da necessidade de se ter um educador!*

459. **Pesquisador/Participante:** Sim, com certeza!

460. **P-2:** *E todo mundo diz o oposto!*

461. **Pesquisador/Participante:** Devido a uma leitura superficial, equivocada! Discutir seriamente Piaget, como qualquer outro grande teórico, são poucos hoje, a meu ver, que o fazem com profundidade.

462. **P-5:** *Mas olha, só pra completar, porque eu fiquei tão feliz, porque ontem, no meu Seminário, não sei se vocês [Referiu-se às participantes.] lembram, mas a minha parte eu falei, eu li isso, eu coloquei, inclusive eu fiquei pensando “Não tá completo!”, porque falava que o professor tem que trabalhar a partir do interesse do aluno... a minha parte falava isso! E eu fiquei pensando no como, e eu não sabia como explicar, então eu parei nisso lá! [Referiu-se ao Seminário apresentado.] Se fosse amanhã o Seminário eu já ia explicar isso, que o professor gera o interesse no aluno, por isso tem o interesse do aluno, não é o interesse que o aluno quer!*

463. **P-2:** *Você vai ter até que falar essa parte de novo do trabalho a semana que vem!*
[Risos entre P-2 P-7.]

464. **Pesquisador/Participante:** Infelizmente, muitos fazem a leitura da teoria de Piaget de modo rápido e pegam as palavras chaves. E usam estas palavras chaves com o sentido do senso comum, e não com aquilo definido por Piaget!

465. **P-5:** *Exatamente!*

466. **Pesquisador/Participante:** *Daí eles acham que interessam é o prático-utilitário, e não é isso!*

[Neste momento, as participante começaram a discutir sobre o Seminário apresentado pelas suas colegas em uma disciplina no dia anterior. P-2 salientou que uma das integrantes do grupo disse uma fala sobre a cor marrom, afirmando que, geneticamente, a criança já traz este conhecimento. Assim, na escola, não seria preciso ensinar sobre a cor marrom! Deste modo, o Pesquisador/Participante pontuou que, provavelmente, o texto na qual as mesmas utilizaram para a elaboração do Seminário não trazia tal informação, no entanto, a fala da referida aluna evidenciava uma postura Racionalista. Como esclarecimento, o Pesquisador/Participante salientou que o processo (mecanismo) do conhecer é genético, citando as invariantes funcionais da assimilação e acomodação que compõe a adaptação e que, por sua vez, estabelece uma relação de interdependência com a organização. Finalizando, P-2 pontua, pedindo desculpa anteriormente, que seria o papel do professor responsável pela sala em mediar a fala desta aluna para que tal informação ‘errada’ não fosse passada adiante.]

[Em continuidade, o Pesquisador/Participante fez a leitura da parte inicial do item 11.3 – esboçado a seguir.]

11.3 Os fatores do desenvolvimento

A maturação orgânica consiste-se no desenvolvimento fisiológico do indivíduo, representando uma condição necessária ao crescente desenvolvimento mental do homem. No entanto, não é uma condição

suficiente à evolução cognitiva, já que tal evolução só se faz possível mediante as interações (experiências) do sujeito com o meio (objeto), propiciando/desencadeando a ação e ou operação. Ao discutir a gênese-construção das estruturas lógicas elementares (classificação e seriação), Piaget analisa alguns fatores intervenientes em tal construção, ressaltando o seguinte em relação à maturação:

Portanto, somos obrigados, por medida de prudência, a reservar uma parte **[da explicação referente à gênese-construção das estruturas lógicas]** à maturação, supondo, por exemplo, que o momento culminante dos 7 aos 8 anos, tão notável sob múltiplos aspectos para o desenvolvimento das estruturas operantes nas nossas sociedades ditas civilizadas (onde êsse período coincide com o início da instrução escolar do primeiro grau etc.), corresponde, sem dúvida, a alguma transformação das estruturas nervosas.

Mas, de fato, não sabemos e não conhecemos, sobretudo, qualquer estrutura cognitiva que se possa demonstrar ser resultante, exclusivamente, de fatores endógenos ligados à maturação. A noção de maturação parece um pouco mais clara do ponto de vista negativo, no sentido em que atribuir à falta de aparelhos nervosos suficientes a ausência de um comportamento (por exemplo, a ausência entre os 2 e 4 anos de todo e qualquer raciocínio hipotético-dedutivo) parece comportar um significado. Sob o seu aspecto positivo, a maturação do sistema nervoso limita-se, pelo contrário, a ampliar incessantemente o campo das possibilidades acessíveis ao sujeito; mas, entre a possibilidade de um comportamento e sua atualização, é preciso contar ainda com a intervenção ativa do meio físico (exercício e experiência adquirida) e, além dessa aprendizagem, com todas as influências educativas do meio social. (PIAGET, 1971, p. 16-17, [comentário nosso])

[Após a leitura da citação retirada de Piaget (1971), o Pesquisador/Participante pontua o seguinte:]

467. Pesquisador/Participante: Ou seja, o fato do sujeito estar apto organicamente/neurologicamente/psicologicamente para o pensar hipotético-dedutivo não significa que o sujeito o faça. Porque é necessário o sujeito experientia e este meio social e educacional possibilitando isso. É isso que Piaget está se referindo ao aspecto positivo, já a parte negativa acho que ficou bem explicado! Tudo bem, pessoal? **[Como nenhuma participante apresentou dúvida, deu-se prosseguimento à leitura pelo Pesquisador/Participante.]**

Ao abordar a questão da maturação, Piaget ressalta os outros fatores do desenvolvimento ao citar a necessidade da intervenção ativa do meio físico (exercício e experiência) e das influências educativas do meio social (interação social).

Em relação à experiência, Piaget a entende não como uma recepção (contato, ou seja, pressão exercida pelo meio sobre o sujeito), mas sim como ação e construção progressivas. É experimentando a realidade que o indivíduo a constrói – inicialmente no plano prático e depois no mental. Acerca do significado da experiência, Piaget esboça uma interessante conclusão:

Em conclusão, não só a experiência é tanto mais ativa e mais compreensiva quanto mais a inteligência amadurece, mas também as “coisas” sobre as quais ela se desenvolve nunca poderão ser concebidas independentemente da atividade do sujeito. Essa segunda constatação vem reforçar, pois, a primeira e indicar que, se a experiência é necessária ao desenvolvimento intelectual, não poderá ser interpretada, implicitamente, como as teorias empiristas querem, isto é, como auto-suficientes. É verdade que quanto mais ativa for a experiência, tanto mais a realidade sobre que ela incide se torna independente do eu e, por conseguinte, mais “objetiva”. [...] Com efeito, é na medida em que o sujeito é ativo que a experiência se objetiva; portanto, a objetividade não significa independência em relação à atividade assimiladora da inteligência, mas, simplesmente, dissociação em relação ao eu e à sua subjetividade egocêntrica. A objetividade da experiência é uma conquista da acomodação e da assimilação combinadas, isto é, da atividade intelectual do sujeito e não um dado primordial que se lhe impõe de fora. [...] O caráter cada vez mais complementar dessas duas funções [assimilação e

acomodação] permite-nos, assim, concluir que a experiência, longe de emancipar-se da atividade intelectual, só progride na medida em que é organizada e animada pela própria inteligência. (PIAGET, 1987, p. 344, [comentário nosso]).

[Durante a leitura do 2.º parágrafo, antes da citação retirada de Piaget (1987), o Pesquisador/Participante chamou a atenção sobre a experiência, dizendo que a mesma não deve ser vista como uma recepção do sujeito aos objetos do meio, mas sim enquanto uma ação na qual este sujeito vai construindo, de modo progressivo, inúmeros esquemas e ou estruturas do pensamento. Se a experiência fosse considerada uma ‘pura’ e simples recepção, então recair-se-ia no Empirismo. Após a leitura da referida citação, na qual o Pesquisador/Participante foi citando alguns exemplos em algumas partes, P-2 fez o seguinte questionamento:]

468. P-2: *A nossa colega, lá da sala, está acompanhando um menino de 10 anos. E essa criança, ela é brasileira, porém ela foi para o Japão quando tinha 1 ano e ela foi alfabetizada lá, tudo lá! E ela veio pro Brasil, agora, e está fazendo 2 meses que chegou! Tema a ver com os esquemas de assimilação sim, por exemplo, o fato de você dizer vaca e ela, pra ela, não tem significado nenhum. Ela consegue quando você mostra uma imagem, mas daí ela não fala vaca e sim reproduz em japonês. Por que ela não assimilou-acomodou em Português, ainda?*

469. Pesquisador/Participante: Sim! A aquisição da linguagem é uma construção específica àquela localidade, àquela cultura.

470. P-2: *E que vêm das relações sociais!*

471. Pesquisador/Participante: Sim, claro, é uma das responsáveis. Esta criança já construiu estruturas de assimilação referentes à língua japonesa que é adequada àquela realidade! Aqui, no Brasil, ela vai ter que construir um novo sistema de linguagem, ou seja, novas estruturas de assimilação referentes à língua portuguesa.

472. P-2: *Então ela vai começar do 0, assim, teoricamente!*

473. Pesquisador/Participante: Em relação à Língua Portuguesa acredito que sim! A parte lógica, não, porque ela já classifica, seria, corresponde, distribui, etc. Mas a questão linguística referente ao português, sim! E, embora possível, é claro, não vai ser fácil no começo! A gente aprende a falar imitando inicialmente os sons interessantes. Depois, a criança começa a ‘ligar’ o som ao objeto ou ser vivo e assim vai constituindo com significado a língua materna.

474. P-2: *E outra coisa, a criança ouve muito os pais ou os outros falarem a todo o tempo: “Olha, isso é um passarinho!”. É muito interessante a minha sobrinha, por exemplo, que a gente fala uma coisa pra ela e ela pede pra gente repetir o que a gente falou só pra ela poder ouvir de novo a palavra e repeti-la!*

475. Pesquisador/Participante: Sim, claro! Não podemos esquecer que o exercício e a repetição são necessárias, inclusive a questão da repetição foi outra parte da teoria de Piaget não compreendida. Em seu livro “O nascimento da Inteligência na criança” Piaget cita que no estágio sensório-motor o bebê sente a necessidade de repetir (exercitar) os seus esquemas, e neste processo, quando algo se modifica, os esquemas vão se acomodando para se adaptar à novidade.

[Neste momento P-5 compartilhou um fato ocorrido em sua casa com o seu sobrinho de 1 ano e meio. Enquanto saía de casa, o seu sobrinho olhou para o pé de P-5 e falou: “Tira mamãe!”, referindo-se ao sapato que a mesma estava usando e que era igual ao da sua mãe. A participante ficou surpresa ao observar a fala de seu sobrinho e chegou a conclusão de que isso foi proveniente das experiências vivenciadas por ele durante o banho onde a mãe ou a avó dizem: “Agora vamos tirar a blusa!”, “Agora vamos tirar a calça!”. Assim, segundo ela, o sobrinho utilizou o ‘tirar’ a roupa ao ‘tirar’ o sapato que o mesmo associou como pertencente a sua mãe.]

476. **Pesquisador/Participante:** É muito interessante isso P-5! Dá até pra gente pensar que Piaget jamais nega a ação do sujeito e a importância do meio, ele apenas redimensiona, afirmando que só há conhecimento nesta interação (sujeito e meio). Não é só o estímulo, mas sim a pessoa tem que estar agindo sobre aquilo para que o mesmo conheça. Se tivéssemos que definir a palavra central da teoria de Piaget é a ação, ou seja, a atividade do sujeito.

477. **P-2:** *Nossa, e eu me lembrei uma coisa, assim, que... dizem que nas grandes cidades as crianças desconhecem o que é galinha, o que é vaca... não que elas não sabem falar vaca, galinha, mas elas desconhecem, não teve a interação com o meio!*

478. **Pesquisador/Participante:** Sim, elas não tiveram uma experiência ativa sobre o meio!

[P-2 e P-5 comentaram um pouco mais sobre os seus respectivos sobrinhos, salientando ser impressionante observar as atitudes que eles apresentam. P-2 disse comparar as suas 2 sobrinhas, a mais velha de 3 anos e a mais nova de 2 meses, observando várias diferenças entre os primeiros meses de vida da primeira em relação à segunda. Como justificativa para tal diferença, o Pesquisador/Participante afirmou acerca da impossibilidade de 2 sujeitos vivenciarem de modo igual a mesma experiência, referindo-se até ao qualificador da teoria de Piaget como sendo um construtivismo sequencial probabilístico, ou seja, probabilisticamente é impossível 2 sujeitos serem exatamente iguais no aspecto psicológico. Uma fala interessante de P-5 é denotada abaixo:]

479. **P-5:** *Então, dá pra gente ver bem, assim, essa questão que a gente discute em Piaget. Tem as idades, certinho, não que ele não possa fazer uma coisa que está um pouco além, mas, também, de maneira alguma ele vai formar um frase ou deixa de fazer...*

480. **P-2:** *Isso que eu pensei, deixa de fazer...*

481. **Pesquisador/Participante:** Isso é o principal, pessoal. Quando Piaget identificou a evolução e as médias das idades, isso não significa que com 6 anos nunca haverá uma criança que irá ‘operar’ no concreto, só que este sujeito teve que percorrer antes a parte simbólica da intuição. Porque, se não, ele não irá ter as ferramentas necessárias para a reversibilidade do pensamento, que é uma característica das operações. E nós só não vamos discutir os estádios hoje por causa do tempo, né, pessoal!

482. **P-2:** *Não, mas também é muita coisa, né, vamos devagar!*

483. **Pesquisador/Participante:** É verdade!

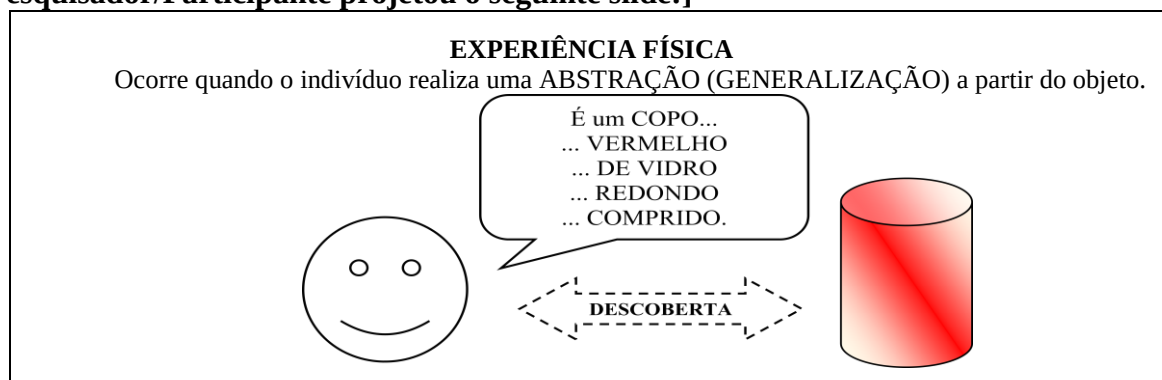
484. **P-2:** *É, muita calma nessa hora!*

485. Pesquisador/Participante: Os outros fatores dá pra terminar? **[Como as participantes concordaram, deu-se prosseguimento à leitura – feita pelo Pesquisador/Participante – do item 11.3. Observe-o]**

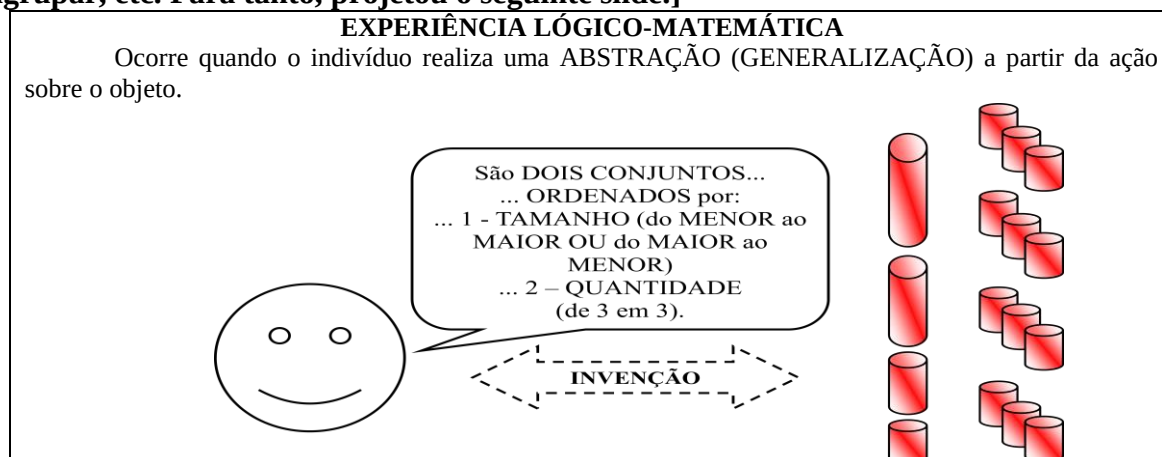
Desse modo, a experiência só existe graças à ação do sujeito ao assimilar-acomodar a realidade. Em seus estudos, Piaget classifica a experiência em dois tipos: a *Experiência Física* e a *Experiência Lógico-Matemática*. A primeira ocorre quando o indivíduo extrai as propriedades do objeto ao agir sobre ele. Por exemplo, ao manipular e observar um objeto o indivíduo extrai suas propriedades, tais como sua cor, seu formato, sua superfície, etc. Já a *Experiência Lógico-Matemática* decorre quando o sujeito extrai a propriedade da coordenação das ações realizadas sobre o objeto. Tomemos como exemplo a classificação na qual o indivíduo coordena as ações referentes à união dos objetos que apresentam uma característica (propriedade) em comum. No entanto, observa-se uma indissociabilidade entre estes dois tipos de experiências. Conforme Becker (2010):

[Durante a leitura do 1.º parágrafo, o Pesquisador/Participante perguntou se as mesmas estavam compreendendo um pouco melhor acerca da assimilação e da acomodação. Todas as participantes responderam “Sim!”. P-2 disse “Está equilibrando!”, em complementação P-5 falou “Tá assim, oh!” indicando uma balança – por meio do braço esquerdo – em posição ainda de desequilíbrio tendendo a se equilibrar.]

[Para auxiliar o entendimento a respeito da experiência física, o Pesquisador/Participante projetou o seguinte slide:]



[O Pesquisador/Participante salientou que na experiência física o sujeito retira as propriedades do objeto, tais como o seu formato, a sua cor, sua composição, etc. Em contrapartida, durante uma experiência lógico-matemático, o sujeito retira a propriedade das ações realizadas sobre os objetos, como seriar/ordenar, classificar, agrupar, etc. Para tanto, projetou o seguinte slide.]



[Em seguida, o Pesquisador/Participação fez a leitura do trecho – denotado abaixo – retirado de Becker (2010) que evidencia a indissociabilidade entre estes 2 tipos de experiência (física e lógico-matemática).]

Esses dois componentes do processo de desenvolvimento não devem ser concebidos como estanques, mas como aspectos indissociáveis, e sempre presentes, de toda a experiência. “Está claro, efetivamente, que não existe experiência física, por mais elementar que seja, sem relacionamentos ou correspondências, sem classificação, seriação ou medida etc., portanto sem um quadro concernente à experiência lógico-matemática. Reciprocamente, uma experiência de segundo tipo apoia-se sobre os objetos extraindo da ação o essencial de suas abstrações: ora, na medida em que os objetos se prestam a essas ações ou operações (em que são coordenáveis, classificáveis, enumeráveis etc.), ajunta-se ao componente lógico-matemático, que permanece essencial, um segundo plano de experiência física, uma vez que o sujeito aprende ao menos que os objetos submetem-se a suas manipulações e são, portanto, logicizáveis e matematizáveis” (LCS, p. 387). (p. 217)

[Terminada a leitura-discussão do referido trecho na qual o Pesquisador/Participante exemplificou acerca da impossibilidade de realizar uma experiência física sem remeter ao lógico-matemático e vice-versa, P-2 fez o seguinte questionamento:]

486. **P-2:** *Eu posso fazer uma pergunta?*

487. **Pesquisador/Participante:** Sim, deve!

488. **P-2:** *Por que lógico-matemática? Porque a Matemática ele está dentro da Lógica! Ou não?*

489. **Pesquisador/Participante:** Não!

490. **P-2:** *Então são coisas distintas?*

491. **Pesquisador/Participante:** São interdependentes. O número é um conteúdo matemático! Só que a sua constituição depende das estruturas lógicas da classificação, comparação e ordenação. É por isso que utiliza este termo lógico-matemática, porque uma é dependente da outra.

492. **P-2:** *Então ela inclui a Matemática à parte porque tem as suas especificidades...*

493. **Pesquisador/Participante:** Sim, porque cada uma tem suas especificidades. Tudo bem, P-2?

494. **P-2:** *Sim!*

[Para finalizar, deu-se prosseguimento à leitura – pelo Pesquisador/Participante dos outros fatores do desenvolvimento. Observe o texto abaixo.]

Sobre a ‘Interação Social’, Piaget defende a importância das trocas interindividuais ao processo de construção de conhecimento. Ao interagir com o outro, o sujeito pode vir a questionar seu ponto de vista, ‘desequilibrando-se’. Caso ocorra um ‘novo’ equilíbrio (reequilíbrio) o indivíduo pode ampliar o ‘poder’ explicativo de suas estruturas de pensamento. Nesse sentido, a escola pode desempenhar um importante papel já

que a mesma constitui, por excelência, um espaço propício às trocas entre professor e alunos e entre os próprios alunos.

Por fim, a *Equilibração*, coordenando os três fatores precedentes, é concebida “como compensação das perturbações exteriores por meio das atividades do sujeito, que serão as respostas a essas perturbações.” (PIAGET, 2001, p. 97).

[Após a leitura acerca da Interação Social, o Pesquisador/Participante chamou a atenção sobre a difícil ocorrência da interação aluno-aluno em sala de aula, e, até mesmo, do efetivo diálogo estabelecido entre aluno-professor. Pontuou que a única interação aluno-aluno, na maioria das vezes ocorre no recreio. Neste momento P-5 falou:]

495. **P-5:** *Nem no recreio, mais, porque agora tem o recreio dirigido.*

496. **P-2:** *É, o recreio dirigido!*

497. **P-5:** *É, nem no recreio mais pode!*

498. **Pesquisador/Participante:** Ou seja, pessoal, se na escola que é um espaço por excelência para a ocorrência da interação social não está ocorrendo... se na Universidade, na maioria das vezes não acontece isso, né, pessoal... Ainda continua com o professor com aquela verdade inquestionável como vocês deram a entender, ou seja, eu falo e vocês escutam, numa relação unidirecional, sem questionamentos...

[Concluída a leitura, o Pesquisador/Participante pediu para as mesmas pensarem a respeito de 2 situações problemas referentes ao item estudado. Como as participantes estavam ‘cansadas’ devido à quantidade dos assuntos abordados, o Pesquisador/Participante achou melhor realizar a discussão referente aos estádios e o processo de Equilibração no próximo encontro. A fala final de P-2 “Estamos com overdose!” – compartilhada entre as demais – evidência a tentativa à assimilação dos conteúdos visando uma possível e futura acomodação.]

APÊNDICE P – TRANSCRIÇÃO DO 12.º ENCONTRO

Data: 31/05/2012

Tempo de Duração: 3 horas e 20 minutos.

[No início do Grupo de Estudo estavam presentes P-2, P-4, P-5, P-7 e P-8. Foi retomada, brevemente, a discussão ocorrida no encontro anterior acerca da assimilação e da acomodação. Para tanto, o Pesquisador/Participante relembrou a dúvida posta por P-2 acerca do que ‘vinha’ primeiro, se era a assimilação ou a acomodação e do desequilíbrio que lhe foi causado mediante tal discussão. Dando continuidade, foi solicitada a leitura da Síntese referente ao 10.º encontro. P-8 foi a primeira a compartilhar a sua síntese.]

1. **P-8:** *Então, eu coloquei assim, oh... eu li e precisei reler, e vou ler pra você o que ficou... Eu pus assim: Eu estou igual o aluno da professora Laureta, tive overdose de conhecimento, não consegui acomodar e vou precisar de mais leituras e explicações a respeito, com mais exemplos da matéria para poder entender melhor.*

2. **Pesquisador/Participante:** Ok!

3. **P-8:** *Porque essa parte da assimilação, da acomodação eu achei que, tem aqui [Referiu-se à explicação do texto.] mas é que pra mim, você sabe que eu preciso de mais exemplo, então, sabe... eu achei esse aluninho [Referiu-se ao aluno da professora Laureta representado na tira.] aqui um máximo... ele não conseguiu sair daquilo! [Risos pela participante.]*

4. **Pesquisador/Participante:** Ok! Isso é compreensível e esperado!

5. **P-8:** *Ah, então tá bom!*

6. **Pesquisador/Participante:** Claro!

7. **P-8:** *Ah, que bom, eu achei que era eu...*

8. **Pesquisador/Participante:** Eu também tive uma overdose, há uns 8 anos quando eu comecei a estudar Piaget. No começo esta overdose foi tão grande – eu estava na graduação ainda – que eu parei de ler por um tempo. E nós vamos chegar lá, porque, dependendo da perturbação, se ela for muito intensa e ‘profunda’ o sujeito pode negar, deixá-la de lado! Certo!?

9. **P-8:** *Ah, mas é mesmo! Quando você não consegue você vai... Por isso é muito importante você estar ajudando, porque daí você consegue sair e indo devagar... [Referiu-se ao fato de que, com a mediação do Pesquisador/Participante ser possível ‘vencer’ gradativamente tais perturbações.]*

10. **Pesquisador/Participante:** É por isso que as nossas relações interindividuais, colocando questionamento em vocês e buscando exemplificações, como nós fizemos no outro encontro, pode auxiliar nesta nova construção! Ok?

11. **P-8**: *Sim!*
12. **Pesquisador/Participante**: P-7, leia pra gente!
13. **P-7**: *Então, eu também tive muita dificuldade mesmo ouvindo tudo! [Referiu-se à discussão acerca do assunto realizada no encontro anterior.] Eu não sei se o que eu escrevi está correto, eu até comentei com a P-2 que eu acho que precisava que alguém colocasse a definição e que não fosse a do Piaget... [Risos entre todas as participantes.] porque é muito complicado!*
14. **Pesquisador/Participante**: Ok!
15. **P-7**: *A assimilação é a incorporação de novos elementos em esquemas mentais já existentes, e a acomodação é quando modificamos um esquema mental já construído.*
16. **Pesquisador/Participante**: A sua definição está correta! A sua dificuldade é em visualizar isso, P-7?
17. **P-7**: *Também!*
18. **Pesquisador/Participante**: Porque no plano da definição é isso mesmo! Você me disse, com suas palavras o que você compreendeu daquele texto mais complexo! Qual é a sua dificuldade, então, além do exemplo?
19. **P-7**: *Não sei... se você pedisse pra eu explicar, agora, aqui o que eu escrevi até... mas para explicar eu acho que não conseguiria!*
20. **Pesquisador/Participante**: Tá! Ok! P-2...
21. **P-2**: *Sem dúvida, esse foi o encontro que maior desequilíbrio que me causou, o que me deixa claro que se leva tempo para assimilar e acomodar as informações. Compreendi, após várias explicações e uma tremenda inquietação cognitiva que assimilar é a interação do sujeito com o meio, seria o entrar em contato, ou seja, observando, ouvindo, tocando e até mesmo refletindo. Trata-se da primeira percepção que o sujeito faz do objeto e este pode ser concreto ou abstrato no sentido de algo físico observável ou apenas verbal teórico. Depois dessa assimilação, onde o sujeito busca incorporar os objetos a ele, ou seja, procura esquemas mentais já existentes para modificá-los ou para mantê-los que seria o processo de acomodação. Acredito que assimilamos e acomodamos constantemente desde o nascimento, porém o bebê (recém-nascido) ainda não possui uma vasta gama de informações acomodadas, sendo que a assimilação e a acomodação ocorrem quase que simultaneamente. Sendo assim fica evidente a necessidade a ação do sujeito com o objeto/meio.*
- [Neste momento, P-9 chegou e lhe foi entregue o material a ser objeto de estudo.]
22. **Pesquisador/Participante**: Ok! Você me deu uma explicação bem ‘profunda’, concorda? **[Por meio de gesto facial P-2 indicou concordar.]** Você compreendeu que estamos a todo o momento neste processo, que é este processo, tanto a nível orgânico/fisiológico quanto mental que nos mantém vivos. O nosso corpo precisa ficar neste equilíbrio fisiológico porque quando não está nós adoecemos. Eu até já cheguei a citar sobre isso! E, mentalmente, este processo também é análogo.

[Durante a fala do Pesquisador/Participante P-1 chegou, sendo-lhe entregue o texto a ser discutido. Quando questionados se haviam elaborado a Síntese, P-9 respondeu “Sim!” e P-1 disse não haver conseguido escrevê-la. Além disso, as participantes não haviam feito os desafios – item 10.4 – sobre a Estatística Descritiva por falta de tempo, mas que os entregariam no próximo encontro.]

23. **Pesquisador/Participante:** P-4, leia a sua síntese, por favor!

24. **P-4:** *Para Piaget o conhecimento acontece através da interação-ação entre o sujeito e o objeto, por meio da adaptação que já nasce com o sujeito ele é capaz de fazer assimilações e acomodações, ou seja, entrar em contato com o meio e entendê-lo, fazer com que esse meio faça sentido pra ele. Assim, depois de um certo tempo com várias interações-ações acontece a acomodação, a construção efetiva deste conhecimento. A assimilação e a acomodação é como um ciclo, mas ao final do processo se vê que desenvolveu mais que no começo, como se fosse uma espiral.*

25. **Pesquisador/Participante:** Ok! É isso mesmo! Assimilar e acomodar só se faz possível porque nós nascemos com essas duas funções, sendo que as mesmas constituem a adaptação e essa relaciona-se com a organização deste sujeito.

26. **P-4:** *Mas está certo o que eu coloquei?*

27. **Pesquisador/Participante:** Está! E a acomodação, sim, é a construção de uma nova estrutura, é uma modificação. Toda vez que nos modificamos, nós estamos aprendendo coisas novas... Alguns estudiosos até utilizam a aprendizagem como sendo a acomodação, porque, a aprendizagem não é a modificação de uma conduta, ou de um pensamento!? Então você acomodou um novo modelo explicativo ou uma nova maneira de agir no caso da criança de 0 a 2 anos. Lembrando que neste período, nós vamos estudar daqui há pouco os estádios, ocorre a inteligência prática que está no plano das ações e não, ainda, no dos conceitos e representações. É claro que esta criança vai construindo significações, mas sem remeter, ainda, ao pensamento. E você, P-5?

28. **P-5:** *Eu esqueci de trazer a folha... Mas, eu posso falar se você quiser, porque eu lembro da resposta.*

29. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro! Sem problemas!

30. **P-5:** *Eu coloquei, não sobre a assimilação e a acomodação mas que não é fácil ensinar, porque a gente tem que entender tudo isso, e é de difícil compreensão, mas que a gente está compreendendo e que precisa de mais estudos.*

31. **Pesquisador/Participante:** Ok! Entendi! P-9, como foi a leitura do item referente à teoria da Assimilação?

32. **P-9:** *Bom, pra mim foi tranquilo, até porque foi a primeira pincelada, né! Eu acho muito importante estes conceitos, até porque é muito semelhante o que eu sigo em relação à interação, tirando estas nomenclaturas que na histórico-social que nós chamamos de objetivação e apropriação entra nesse caminho de assimilação e de acomodação que é muito importante. Eu achei o texto muito interessante, muito produtivo... Eu resolvi também a*

questão 2 e vou ler a síntese mas é só o primeiro momento meu, eu acho legal ouvir as suas palavras que tem mais aprofundamento na teoria... Então posso ler a síntese?

33. Pesquisador/Participante: Por favor!

34. P-9: *Eu coloquei assim: Foi possível estudarmos praticamente, no primeiro momento, o processo de assimilação e de acomodação (a teoria da Assimilação de Piaget) relacionando à prática docente. A interação é importante ao modo como o sujeito age sobre o meio, mas também não podemos esquecer que é de suma importância o modo como o professor realiza a sua prática já que é, por isso, que haverá esta interação e aprendizagem do aluno. E para concluir eu coloquei: Este processo de interação é imprescindível ao processo escolar.*

35. Pesquisador/Participante: Sim, ok! No processo escolar, P-9, nós temos que remeter a interação às relações interindividuais, certo?

36. P-9: *Sim, exatamente, eu pensei também no contexto geral. Falta também este processo de assimilação e acomodação, tipo, também entre o processo de gestão... às vezes a diretora tá falando com a coordenadora e os professores não tá acontecendo... Você compreende?*

37. Pesquisador/Participante: Sim, compreendo o que você quis dizer, que é a falta da interação entre a própria equipe escolar.

38. P-9: *Então não está havendo o processo, até coletivo de entendimento pra entender como é o projeto político pedagógico, pode estar sendo passado aquilo, mas será que estão entendendo?*

39. Pesquisador/Participante: Sim, muitas vezes falta o estabelecimento efetivo destas relações interindividuais, ou seja, entre professor e aluno, professor e professor e seus 'superiores'.

40. P-9: *Sim!*

41. Pesquisador/Participante: Até porque, pessoal, Piaget coloca que seja na organização biológica, mental/psicológica ou social esta teoria é aplicável, inclusive nas relações entre os grupos que constituem a nossa sociedade em que nós temos grupos que se desequilibram com outros e, na tentativa de um 'novo' equilíbrio surgem novas discussões, acordos. **[Quando questionada sobre a realização da leitura do texto – item 10.2.1 'A teoria da assimilação' – P-1 disse não ter conseguido fazer. Deste modo, o Pesquisador/Participante perguntou se a mesma recordava-se acerca da assimilação e da acomodação abordados durante a graduação, obtendo como resposta o seguinte:]**

42. P-1: *Ah... a acomodação e a assimilação estão em conjunto, assim, tem que ocorrer o desequilíbrio pra aí a... criança... com o desequilíbrio ela vai assimilar um conteúdo novo e vai acomodar... então quer dizer que aquele conteúdo assimilado vai fazer... como eu posso dizer?... meio que parte dela, até haver um novo desequilíbrio e acontecer a assimilação de outro conteúdo. É um processo contínuo.*

43. Pesquisador/Participante: É sim um processo contínuo, a cada desequilíbrio vai exigir novas acomodações e o sujeito só entende a ocorrência deste desequilíbrio graças aos esquemas de assimilação. Isso vai gerar um movimento contínuo permitindo ao sujeito a construção gradativa do conhecimento. E, como P-2 disse, o tempo, durante este processo é necessário, porque se não o fosse todo mundo aqui teria acomodado num primeiro momento a teoria de Piaget que possui especificidades e, digamos assim, certa dificuldade inicial de compreensão. É claro que o tempo não é a condição suficiente, pois também vai depender da ação do sujeito sobre o objeto do conhecimento.

[Visando ‘situar’ as participantes ausentes no Grupo de Estudo anterior (P-1, P-8 e P-9), o Pesquisador/Participante retomou a discussão referente aos assuntos já abordados. Inicialmente discutiu-se o item 11.2 ‘A Educação deve responder a uma necessidade’ no qual frisou-se que a necessidade, na teoria de Piaget, ao contrário do senso comum não remete ao prático-utilitário, mas que a mesma é todo desafio posto ao sujeito auxiliando-o a progredir. Neste momento, o Pesquisador/Participante solicitou a P-5 que discorre-se sobre tal assunto, observe.]

44. P-5: *Eu comentei com o pessoal que quando tinha que partir da necessidade do aluno eu ficava pensando “Nossa, não é só isso!”, porque o interesse... quando fala do interesse do aluno, o aluno está interessado não nas coisas difíceis de aprender, mas está interessado em outras coisas que é normal. Só que daí lendo e a gente foi conversando eu fui percebendo que cabe ao professor instigar o aluno pra ele ter esse interesse... então o trabalho do professor não é só o depois que ele [Referiu-se ao aluno.] tem o interesse pra ele trabalhar, é antes do interesse e depois também! Foi esse clique... “Nossa, o professor trabalha antes e depois que faltava!” que as pessoas falavam.*

45. P-1: *Como assim?*

46. P-5: *Tipo, assim, eu sou o professor e tenho que despertar o interesse no aluno... primeiro o professor desperta e depois pra ele saber o professor vai trabalhar este tema, que é o antes e o depois. Eu até comentei que falta explicar isso quando vão explicar aquela parte do interesse do aluno, porque ninguém tinha falado isso pra mim! Falam que tem que partir do interesse do aluno, toda a hora, e ninguém explica o antes que o professor tem que despertar este interesse e só o depois. [Enquanto falava, P-2, P-4 e P-8 sinalizaram concordar com P-5.]*

47. P-8: *É igual a gente na aula mesmo! Se é um assunto que interessa, que me desperta... agora se não a gente nem liga!*

48. P-9: *É, a gente tem uma disciplina na graduação atualmente e é exatamente isso, por esse caminho. Ninguém sente a necessidade, a importância do que está relacionado à disciplina... Então o professor coloca tal coisa, tal conteúdo lá... mas, em nenhum momento, particularmente eu vi o professor relacionar isso na nossa prática... Uma vez só eu vi ele relacionar para o nosso interesse, que eu vejo que é necessário já que vamos nos formar professores. Não adianta só entender a teoria se não vai ter um diferencial por parte da gente.*

49. P-5: *E parece óbvio quando você fala que é lógico que o professor tem que despertar o interesse do aluno... eu também achava isso antes, mas é por entender que a teoria de Piaget falava isso que me deixou feliz!*

50. **P-8:** *Ah, tá, entendi!*

51. **P-5:** *Que ela fala isso, e a gente conseguiu entender. E é assim que deve ser falado pras pessoas... quando vocês forem explicar o interesse pras pessoas, por favor, falem que tem o antes também. [Risos entre as participantes.]*

52. **Pesquisador/Participante:** E a P-9 acabou de dizer que é complexo este processo! E realmente é mesmo, pois para que você saiba qual é o interesse adequado àqueles alunos você tem que saber os conteúdos possíveis de serem assimilados e acomodados, as metodologias possíveis de serem utilizadas com aqueles alunos, os recursos, os materiais que vão facilitar a ação do sujeito... No entanto, P-9, o significado de interesse para a Epistemologia Genética difere do significado do senso comum que foi sinalizado em sua fala. O interesse, sendo uma resultante da necessidade, constitui o aspecto dinâmico da assimilação. Percebam, pessoal, que é um todo complexo! Identificar o interesse (a necessidade) para uma determinada faixa etária de alunos e para um determinado campo de conhecimento exige conhecimento em Didática, Metodologia, do conteúdo específico, Psicologia, Filosofia, Sociologia, e por aí vai. É por isso, pessoal, que eu defendo que ser professor não é para qualquer um no sentido de que uma formação ruim basta.

53. **P-9:** *Com certeza!*

54. **Pesquisador/Participante:** Cada licenciatura tem a sua especificidade, inclusive a Pedagogia. Nós havíamos feito uma discussão de um possível mal entendimento de que a Pedagogia não possuía a sua especificidade, mas é óbvio que ela possui. Vocês, pedagogas, são as representantes da ciência ‘Pedagogia’ responsáveis por pensar sobre o que significa, de modo geral, o ensinar e o aprender. Cada licenciatura apropriou-se disso adequando a sua especificidade (Matemática, Física, Química, etc.).

[Após discussão acerca da importância da apropriação ‘profunda’ dos conhecimentos necessários à docência, o Pesquisador/Participante salientou o seguinte:]

55. **Pesquisador/Participante:** Então, pessoal, poderíamos dizer que nós, seres humanos, somos ‘interesseiros’ no bom sentido! Ninguém age se não há um interesse, vocês concordam? **[Todas as participantes indicaram, por meio de expressão facial, concordar.]** Por exemplo, nós fazemos caminhadas porque temos interesse em manter uma boa saúde, para eliminar o stress, para ficar bonito... não é isso?

56. **P-5:** *É! [Risos.]*

57. **Pesquisador/Participante:** Nós viemos à Universidade porque temos o interesse em aprender, que a meu ver deveria ser o primeiro motivo. Segundo, formar-se um profissional, ganhar dinheiro e estabelecer-se profissionalmente. **[Risos por parte de P-2.]** Só que parece que a ordem está errada, P-2?

58. **P-2:** *É, a ordem está totalmente errada pelo que a gente vê hoje na maioria das pessoas.*

59. **Pesquisador/Participante:** Infelizmente, né! Vocês estão aqui, no nosso Grupo de Estudo, por um interesse. Qual era o seu interesse no início do nosso grupo, P-1?

60. **P-1:** *Ah, aprender mais como ensinar Matemática!*
61. **Pesquisador/Participante:** E você, P-8?
62. **P-8:** *Ah, entender Piaget melhor!*
63. **Pesquisador/Participante:** E você, P-7?
64. **P-8:** *Ah, é entender um pouco dos dois, tanto Piaget quanto Matemática!*
65. **Pesquisador/Participante:** E você, P-2?
66. **P-2:** *Também! As duas coisas... entender melhor como ensinar Matemática e conhecer mais a fundo a teoria de Piaget.*
67. **Pesquisador/Participante:** P-4?
68. **P-4:** *Perder o meu medo da Matemática...* **[Risos entre as participantes.]**
69. **Pesquisador/Participante:** É o interesse dela! É algo que está impulsionando-a a prosseguir, a compensar as perturbações que estou colocando nela, e neste ponto já estou ressaltando a teoria da Equilibração que é quando o sujeito tenta compensar algo que lhe desequilibrou. É por isso que hoje eu trouxe um texto mais ‘enxuto’ hoje porque eu não quero que vocês atinjam um grande desequilíbrio e não retornem no próximo Grupo de Estudo. **[Risos entre todos.]** E você, P-5?
70. **P-5:** *Aprender a ensinar Matemática!*
71. **Pesquisador/Participante:** E você, P-9, qual o seu interesse?
72. **P-9:** *Bom, no primeiro momento me chamou a atenção o e-mail. Eu achei interessante a sua proposta de trabalho com os alunos e seu trabalho de doutorado... e foi uma área que tenho interesse pela Matemática. Então eu achei interessante por isso num primeiro momento. E, em segundo, por conhecer mais profundamente o trabalho de Jean Piaget, independente da parte que eu siga não ser ele eu não sou extremista, então eu acho importante conhecer pra aplicar os conhecimentos.*
73. **Pesquisador/Participante:** O fato de você dizer não ser extremista significa que o seu pensamento não está ‘engessado’, concorda? **[A participante indicou concordar.]** Você tem mobilidade, uma plasticidade, e você está utilizando o que será útil para a sua prática docente...
74. **P-9:** *Até porque eu valorizo muito Piaget, independente de teorias ou não! Eu acho que os trabalhos que esses pensadores fizeram são indispensáveis e excepcionais!*
75. **Pesquisador/Participante:** Concordo! E as expectativas de vocês, pessoal, estão sendo alcançadas?
76. **P-9:** *Sim!*

77. **P-5:** *Eu acho que, até mais, porque eu estou aprendendo muito mais do que só ensinar Matemática, têm umas coisas relacionadas a mim também... eu estou aprendendo mais pra mim, também, não só pra ensinar..., que vai ajudar a ensinar também!*

78. **Pesquisador/Participante:** Você está aprendendo mais questões teóricas para você, também?

79. **P-5:** *Sim, mais do que eu imaginava!*

80. **P-2:** *É, porque tem coisas que não são aplicáveis à Matemática. São aplicáveis à vida!*

81. **Pesquisador/Participante:** Ok!

82. **P-9:** *Ah, eu tenho só uma observação. Eu achei muito legal, também, os momentos que a gente não tem em classe, tipo, grupos em números menores. Eu sinto falta a semana que a gente não tem o Grupo de Estudo, porque tem diferença entre a discussão que a gente faz aqui, com um número pequeno de pessoas e com o que acontece na sala de aula que nem dá tempo de falar direito com o pessoal. No nosso Grupo a gente vivencia muito melhor, entende muito mais os conteúdos, e eu acho, essa é minha opinião, que num curso pra formar professores é um absurdo ter tantos alunos em sala.*

83. **Pesquisador/Participante:** Então você entende que, com um número menor, a apropriação do conhecimento seria melhor?

84. **P-9:** *Sim, com certeza, até porque o professores poderiam conhecer mais profundamente cada aluno. É o que acontece na escola pública... é muito número de alunos, como você vai conhecer, como você vai despertar o interesse de pessoas tão diferentes em um número tão grande?*

85. **Pesquisador/Participante:** Compreendo! Por ter convivido, uma das principais queixas de colegas alfabetizadoras era em relação ao número de alunos no 1.º e no 2.º ano... Não poderia passar de 15 a 20 alunos, e, infelizmente, temos grande parte das salas acima de 25...

86. **P-2:** *Respondendo a sua pergunta, os conhecimentos que estão sendo discutidos aqui são os conhecimentos do ser humano como um todo, mesmo a questão da assimilação e da acomodação acontece em todas as áreas... É isso que eu quis dizer, são conhecimentos pra vida!*

87. **Pesquisador/Participante:** Ok! Claro!

88. **P-2:** *Não é só pra vida profissional, é pra vida como um todo! Se você se conhecer melhor, se conhecer uma criança melhor, interagir melhor até com aquela criança, independente se é seu aluno ou não, você vai ter condições de analisar o desenvolvimento dela. Eu acho que os 4 anos de faculdade não te davam isso, aqui está sendo aprofundado sim, aqui está sendo especificado, sim! Agora, durante uma aula com 50 alunos você vê bem pincelado, você sabe que existe sim o desenvolvimento, tem as etapas, mas nada tão profundo. É igual assimilação e acomodação, a gente ouviu falar, a gente leu, mas a hora*

que pediu pra colocar no papel o que você definiria é difícil. E eu penso, assim, se você tem dificuldade pra colocar no papel é porque aquilo não está acomodado!

89. **Pesquisador/Participante:** Porque você não tomou consciência disso...

90. **P-2:** Não!

91. **Pesquisador/Participante:** Ok! Pessoal, a própria visão que vocês tinham antes, do que é a Matemática, e do que ela passa a ser agora pra vocês, começou a ter algumas modificações? **[Todas as participantes mostraram-se pensativas em relação ao questionamento.]**

92. **P-9:** *Modificação em relação ao conteúdo, ou modificação como eu vejo a Matemática?*

93. **Pesquisador/Participante:** É como você vê, porque o conteúdo estão havendo modificações, né?

94. **P-9:** Sim!

95. **Pesquisador/Participante:** É mais no sentido de conceber o que é a Matemática.

96. **P-9:** *Ah, pra mim não mudou neste sentido, não, até porque eu sempre gostei muito de Matemática, então pra mim foi só um aprofundamento melhor, assim!*

97. **Pesquisador/Participante:** Entendi! E você, P-5?

98. **P-5:** *Assim, eu não tinha esse pensamento ruim com a Matemática, mas eu acho que aprofundar sempre faz você abrir a sua mente... Mas, com certeza, os conteúdos que eu achava antes agora ficou com um leque maior, mais conteúdos, a visão do que é a Matemática.*

99. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você, P-4?

100. **P-4:** *Então, é interessante isso porque na faculdade, na sua matéria e a do professor N. me trouxe a Matemática como história, mesmo, que aconteceu a Matemática pela necessidade do ser humano, e eu acho que eu tinha uma visão de que a Matemática era muito prática, eu utilizo Matemática pra isso, se eu não vou utilizar por que eu vou aprender? Entendeu? Então eu acho que mudou muito a minha visão na Universidade, principalmente na sua disciplina. E também da importância da Matemática, o quanto é importante pras crianças aprenderem, porque se eu aprendesse deste jeito eu acho que eu ia gostar muito mais do que eu gosto, assim.*

101. **Pesquisador/Participante:** Compreendi! Veja se eu estou assimilando a sua fala! A Matemática não é apenas pra eu utilizar no dia-a-dia, mas pra você se desenvolver enquanto um sujeito ‘integral’! É neste sentido que você se referiu?

102. **P-4:** *Sim! E também nos alunos, mesmo, como eles aprendem, porque eu, acredito assim, que aprendi a Matemática muito prática, então se não fizesse sentido eu passava, nem parava pra pensar, eu acho que não deveria ensinar... E a minha visão mudou depois disso,*

que os alunos deveriam aprender a Matemática sim, sabe, contextualizada, que eles soubessem que a Matemática é uma necessidade do ser humano. Entendeu? Que isso é um processo histórico.

103. Pesquisador/Participante: Inclusive começa a perceber que aprender Matemática não é apenas ‘cuspindo’ aquilo que o professor falou pra você no papel, digamos assim ‘cuspindo’! Que há a necessidade sim, de um certo automatização, até porque nunca falei que não é necessário, mas esta automatização deve remeter a uma significação representando a compreensão do que o sujeito está fazendo.

104. P-4: *Os alunos têm que entender aquilo, né! Pra depois, sim, automatizar, pra que ele ‘grave’...*

105. Pesquisador/Participante: Até porque é necessário isso...

106. P-4: *Mas primeiro ele tem que entender.*

107. Pesquisador/Participante: E você, P-2?

108. P-2: *Não sei, estou pensando aqui... A pergunta já me causa um desequilíbrio, tipo “O que é a Matemática?”. Eu me lembro que no primeiro encontro você fez exatamente esta pergunta, e já não tinha sido muito fácil responder, e eu me remeti a coisas mais de exercícios mesmos, lembro muito isso, listas de exercícios. E com o Grupo eu tenho entendido que é uma coisa muito mais lógica, pede muito mais lógica, um posicionamento mais lógico no sentido, até o que a P-4 falou, de ter uma sequência, do porquê de cada etapa, porque foi as construções históricas até pra se chegar o que se tem hoje. E eu acho que eu não vi isso no meu contato na Educação Básica.*

109. Pesquisador/Participante: Ok! P-7...

110. P-7: *Eu também acho bem difícil definir. Eu sempre via ela como importante, a Matemática, mas eu nunca soube explicar o porquê! E eu também achava que era só aquela visão prática, mesmo, de lista de exercício, e também que era saber aquelas continhas básicos, tipo as continhas de adição e de subtração na vida, assim, como se o resto não fosse importante! Só que eu vi que hoje, acho que muita coisa já mudou, que nem aquele dia a gente falou da régua, pra mim era tudo muito preciso, tipo... muita coisa vem mudando a concepção.*

111. Pesquisador/Participante: Ok! A P-8 já fez Economia então ela teve um contato mais aprofundado com cálculo...

112. P-8: *Então, só que o meu contato foi mais técnico, então... eu tinha uma visão da Matemática, tipo assim, igual você mesmo falou da régua... pra mim régua era aquela medida que estava lá, parece que aquilo que a gente aprendia não tinha questionamento...*

113. Pesquisador/Participante: Era como se fosse uma verdade absoluta?

114. P-8: *Isso!*

115. Pesquisador/Participante: E o nosso Grupo está melhorando essa visão?

116. **P-8:** *Ah, está humanizando a Matemática!*
117. **Pesquisador/Participante:** Compreendi!
118. **P-8:** *Você está vendo... entender aquele assunto, não só repetição, você tem que entender...*
119. **Pesquisador/Participante:** Não é só a técnica, o algoritmo!?
120. **P-8:** *Isso! Então é neste sentido, a gente tinha bastante técnica e agora vem a outra parte humana, de como ensinar essa parte pra criança, né! Então... é do dia-a-dia, do cotidiano, coisas que na Universidade eu não vi isso aí, que era algo mais técnico.*
121. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você, P-1?
122. **P-1:** *Ah, eu ainda não consigo definir, eu sei que é algo maior do que eu coloquei, mas... eu ainda não sei... dizer o que é a Matemática.*
123. **Pesquisador/Participante:** Você ainda não sabe defini-la?
124. **P-1:** *É! [Comentários entre as demais participantes indicando que as mesmas também não conseguem ainda definir a Matemática.]*
125. **P-9:** *Eu acho que vou até escrever um artigo sobre isso, do como é legal estar num Grupo de Estudo de Matemática, o quanto é importante!*
126. **Pesquisador/Participante:** Que bom! Então eu trouxe o que vocês colocaram há alguns meses. **[Todas as participantes mostraram-se surpresas, exclamando: “Ah!”.]**
[O Pesquisador/Participante foi projetando cada uma das respostas, questionando as participantes a respeito das mesmas.]
127. **Pesquisador/Participante:** Você respondeu, P-1, que a Matemática “É uma linguagem numérica.”. É só isso?
128. **P-1:** *Não! Tem muito mais... lógica... ah é... uma maneira de pensar mesmo.*
129. **Pesquisador/Participante:** Ah tá! A P-2 colocou que “Para mim Matemática é uma ciência considerada exata que envolve informações e dados geralmente números com o objetivo de calcular, expor resultados, informações de pesquisa e auxiliar a resolução de problemas diários.”.
130. **P-2:** *É bem mais do que isso! [Risos pela participante.]*
131. **Pesquisador/Participante:** E esse seu ‘mais’ é proveniente de nossas discussões?
132. **P-2:** *Ah, sim, com certeza!... Eu já coloquei a lógica que comentei antes!*
133. **Pesquisador/Participante:** Ok! A P-4 escreveu “Algo terrível de que tenho medo.”.
[Risos entre as participantes.]

134. **P-2:** *Agora é menos terrível, né P-4?* **[Risos entre as participantes.]**

135. **P-4:** *Então, antes eu tinha mais [medo da Matemática]! Agora parece que está mais acessível... antes eu tinha uma visão de que a Matemática era uma coisa que eu não conseguia alcançar, [Neste momento ergueu os braços imitando tentar pegar ‘algo’.] que era muito alto, que eu não chegava mesmo! E parece que é uma outra visão, né!? De que parece que ela está bem mais acessível do que eu imaginava.*

136. **Pesquisador/Participante:** O fato de você ter resolvido todos os desafios significa que você está uma certa escada e que você está alcançando! **[Risos de P-2.]** Você concorda comigo?

137. **P-2:** *É! É verdade! Oh, se antes ela era muito agora você está no meio do caminho!*

138. **P-4:** *É!*

139. **Pesquisador/Participante:** A P-5 nos colocou assim “É uma área do conhecimento que desenvolve o raciocínio lógico, que estimula a nossa mente, e que trata dos fenômenos relacionados a números.”.

140. **P-5:** *Eu olhando não sei o que são fenômenos com números!* **[Risos pela participante e dos demais.]**

141. **Pesquisador/Participante:** Mas é só número, P-5?

142. **P-5:** *Não!*

143. **Pesquisador/Participante:** Uma classificação, que nós estudamos, envolve número? Lembra da criança ao montar objetos coletivos, complexos... A classificação é necessária à síntese do número, a sua construção, mas ao classificar não é número ainda... Ok?

144. **P-5:** *Sim!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**

145. **Pesquisador/Participante:** A P-9 colocou o seguinte “Na minha opinião a Matemática é a somatória das necessidades de busca e aperfeiçoamento do Homem através dos tempos para melhor desenvolver a sua vida individual e coletiva. Assim sendo, ela é por si blocos de conteúdos e saberes que fazem a sistematização da vida do Homem.”.

146. **P-9:** *Pra mim continua sendo isso, em relação a esse desenvolvimento, e daí dá pra ver como a gente adapta – essas assimilações e acomodações – que são as necessidades e os interesses que tem em cada etapa do homem! Então o meu olhar foi de entendimento disso, de onde surgiu a Matemática?... foi das necessidades e de como foi se desenvolvendo. Por exemplo, a classificação, as tabelas... tudo foi surgimento conforme o desenvolvimento e as necessidades que o homem foi se adaptando... E... eu coloquei sobre os conteúdos que se tornam blocos de conteúdos que são específicos e...*

147. **Pesquisador/Participante:** E nós estamos estudando o Tratamento da Informação que constitui um destes Blocos de Conteúdos... Ok! A P-7 colocou “Uma disciplina em que abrange as questões utilizadas todos os dias em nosso cotidiano para fazer contas, medir coisas é algo muito amplo.”. Você acrescentaria mais alguma coisa?

148. **P-7:** *Eu sei que é mais que isso, mas não saberia dizer!*
149. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem! Por fim, a P-8 escreveu “Entender os números – resolver problemas.” E daí, é mais amplo?
150. **P-8:** *Sim, claro! Tudo que a gente falou como a lógica, a classificação...*
151. **Pesquisador/Participante:** Ok! Alguém quer acrescentar alguma coisa? [Como ninguém se pronunciou, deu-se continuidade ao estudo do texto visando lembrar os assuntos discutidos no encontro anterior tendo em vista que P-1, P-8 e P-9 não estiveram presentes. Para tanto, o Pesquisador/Participante ressaltou os fatores do desenvolvimento cognitivo proposto por Piaget – maturação orgânica, interação social, experiência física e lógico-matemática e equilíbrio. Ao questionar as participantes se as mesmas se recordavam dos dois tipos de experiências percebeu que havia a necessidade de abordá-las. Para a explicação da experiência física e lógico-matemática, o Pesquisador/Participante projetou os dois exemplos utilizados no encontro anterior. Concluída tal explanação, P-9 denotou o seguinte:]
152. **P-9:** *Então seria a experiência física e a experiência lógico-matemática indissociáveis no processo?*
153. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo, P-9, eu já iria falar!
154. **P-8:** *Fala de novo!*
155. **P-9:** *É que a experiência física e a experiência lógico-matemática seriam indissociáveis no processo, já que se você olha aquela câmera, o que você vai fazer com ela depois você vai olhar pra ela e dizer é uma câmera moderna, preta, de tal marca... eu vejo como impossível você olhar pra ela sem os dois. [A participante utilizou como exemplo a câmera filmadora, ressaltando ser impossível retirar-lhe as propriedades sem ambas experiências física e lógico-matemática.]*
156. **Pesquisador/Participante:** É impossível mesmo, porque não existe dissociação entre estas duas experiências na mente do sujeito. Porque, para ‘retirar’, por meio da experiência física que o copo é vermelho, o sujeito tem que classificar como não sendo verde ou não sendo azul ou não amarelo, então ele teve que realizar uma operação lógica de classificação anteriormente e, para poder juntar copos vermelhos de 3 em 3 o sujeito teve que abstrair as características físicas que é a propriedade comum ser um copo de vidro vermelho. Tudo bem, pessoal? [Todas as participantes indicaram, por meio de gesto facial, afirmativamente.] Então não existe uma experiência sem a outra, nós separamos apenas por questão de estudo.

[Dando continuidade, foi retomado brevemente o último fator – equilíbrio – já que o mesmo será alvo de discussão no próximo encontro. Neste momento, P-8 ficou em dúvida acerca de um trecho do texto no qual afirma que o bebê organiza/classifica, questionando-se se o bebê já sabe classificar. Auxiliado por P-4, o Pesquisador/Participante explicou à P-8 de que o bebê organiza/classifica ‘puramente’ no plano prático sensório-motor quando organiza/classifica tudo o que é para sacudir, para chupar, para jogar, para morder, etc. Complementando, foi ressaltado que a classificação do tipo realizada por nós só é possível com a aquisição da linguagem, sendo

o pensamento uma linguagem interiorizada referente à uma ação vivenciada-experimentada. Após tal discussão, P-5 realizou o seguinte questionamento:]

157. **P-5:** *Eu coloquei que a equilibração coordena a maturação orgânica, a experiência física e lógico-matemática e a...?*

158. **Pesquisador/Participante:** É a interação social.

159. **P-5:** *Ah, tá!*

160. **Pesquisador/Participante:** Não podemos dizer que a equilibração é a mais importante, não é isso. Ela é a responsável por estes três fatores “juntarem” dialeticamente.

161. **P-5:** *Sim!*

[Em prosseguimento, foram discutidas as respostas elaboradas pelas participantes acerca de duas situações problemas referentes ao assunto em pauta. Observe-as abaixo:]

1. No 5.º problema (item 9.1 “Ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental”) identifique nas atividades propostas a ocorrência da experiência física e lógico-matemática. Qual a importância do conhecimento acerca de tal assunto para a sua futura atuação enquanto professora de Matemática? Pense a respeito!

2. Para a abordagem da classificação, de que modo o professor pode utilizar o conhecimento a respeito da experiência (física e lógico-matemática) em sua prática docente?

[Antes da discussão, P-1 e P-9 disseram não terem resolvido tais problemas. P-8 salientou o seguinte:]

162. **P-8:** *Olha, eu até fiz mas eu não sei se está certo. E outra coisa, assim, que eu achei difícil e que a gente não faz no curso muito, é essa pergunta aqui “Qual a importância do conhecimento acerca de tal assunto para a futura atuação enquanto professora de Matemática?”. Então, quando você vai pensar como você vai agir na hora da... a gente tem muito questionamento a respeito disso né... que na hora que você vai aplicar o assunto como você vai fazer!? A gente só teve a teoria...*

163. **Pesquisador/Participante:** Você está se referindo ao como ‘ver’ a teoria na prática, P-8?

164. **P-8:** *Isso!*

165. **Pesquisador/Participante:** Ok!

166. **P-8:** *Daí vai dar uma dificuldade, “E agora, como é que eu faço?”. Vocês também tiveram esta dificuldade? [As demais participantes, por meio de expressão facial, indicaram dificuldade análoga.]*

[Como P-5 e P-2 também não haviam pensado a respeito de tais problemas, o Pesquisador/Participante disponibilizou cerca de 15 minutos para que todas elaborassem suas respostas. Decorrido o tempo, deu-se início à discussão da 1.ª situação problema por P-8.]

167. **P-8:** *Eu pus assim: É experimentando a realidade que o sujeito constrói, inicialmente no plano prático e depois no mental. A evolução só se faz possível mediante as interações e experiências do sujeito com o meio/objeto propiciando/desencadeando a ação/operação. Daí nos exercícios lá que tinha na página 61 [Referiu-se ao 5.º problema – item 9.1.] a experiência física eu achei que a física está na atividade do tempo [Referiu-se à Atividade 1 – Como está o tempo?] porque vai sentir o sol, a chuva, a nuvem, aí, naquela... eu não sei se é isso..., daí eu separei lógico-matemática, mas daí juntou [Referiu-se à fala anterior de P-9 ao ressaltar a indissociabilidade entre as duas experiências.], a lógico-matemática eu já coloquei nas outras atividades que tem conta/número...*
168. **P-2:** *Eu também coloquei física junto!*
169. **P-8:** *Você colocou?*
170. **P-2:** *Eu coloquei!*
171. **Pesquisador/Participante:** *Fala pra gente, P-2!*
172. **P-2:** *Bem, a primeira eu fiz isso que ela falou, [Referiu-se à Atividade 1 – Como está o tempo? como um exemplo de experiência física.] só como física.*
173. **Pesquisador/Participante:** *Entre aspas só como física, tudo bem?*
174. **P-2:** *Então, todas ficam esse entre aspas...*
175. **Pesquisador/Participante:** *Não é! Já que é indissociável... e que tem umas que ficam mais em evidência, mas eu estou entendendo o que vocês estão falando.*
176. **P-8:** *Você viu que eu estava na dúvida? Na hora da explicação eu vi que estavam juntas. E daí eu falei “E agora?”. Eu tinha colocado separado... E, realmente, agora pensando... Fala P-2!*
177. **Pesquisador/Participante:** *Desculpa por interromper P-2!*
178. **P-2:** *Não, imagina. Aí, depois, nas outras [Referiu-se às demais Atividades presentes no 5.º problema.], eu já coloquei que precisaria das duas experiências. Porque se você não tiver, a interação com a tabela, por exemplo e tirar as características de lá, como você vai responder as questões?*
179. **P-4:** *Mas até a primeira atividade!*
180. **P-2:** *Então, e daí volta pra primeira!*
181. **P-7:** *É indissociável...*
182. **P-2:** *Só que daria para separar no sentido de colocar que na atividade 2 é mais lógico-matemática e na atividade 3 é mais física, e depois nas outras eu coloquei que é mais lógico-matemática.*

183. Pesquisador/Participante: Eu compreendo o que vocês colocaram. Devido a esta indissociabilidade, o que podemos fazer é ver em qual há mais ‘predominância’, digamos assim. Por exemplo, na Atividade 3 – Os tipos de Gráficos, propriedade física de um prato de arroz e feijão é abstrair que é feito de arroz e feijão, só que foram agrupados por frequência para a construção da tabela e daí é lógico-matemática. Vejam que os dois tipos de experiências estão aí, no qual se agruparam as classes pelas características em comum – ser só macarronada, só feijoada, só lasanha. Então podemos dizer que abstraiu ‘fisicamente’ um prato – que é um tipo de comida – e agrupou-se, neste caso, mais de 17 alunos estão nesta classe macarronada como comida preferida.

184. P-2: *Então, mas aí eu continuei com a dúvida. A gente responde que é os dois, ou a gente responde o que aparece mais?*

185. Pesquisador/Participante: Você pode falar que na mente do sujeito não tem como separar!

186. P-2: *Ah, sim, isso eu entendi. Mas e aqui, especificamente pra esse exercício?*

187. Pesquisador/Participante: Você pode dizer que, em algumas atividades evidenciam mais do que a outra **[Relativo aos tipos de experiências.]** mas não significa que a outra não exista. Por exemplo, na Atividade 1 o sujeito vai abstrair, por meio da experiência física, como está o tempo, só que para isso ele teve que classificar que o dia com sol é o dia com não chuva ou não nublado.

188. P-4: *Ah! E ele teve que fazer a correspondência entre, por exemplo, o sol lá do tempo e o desenho do sol.*

189. Pesquisador/Participante: Então, a correspondência é um pensamento lógico-matemático! Isso mesmo, P-4! Ok? **[O Pesquisador/Participante perguntou a cada uma das participantes se haviam compreendido tal situação problema.]** É interessante isso... vocês já haviam pensado que numa atividade de Matemática havia essa conjugação de dois tipos de experiência?

190. P-4: *Eu fiquei pensando isso hoje um tempão!*

191. Pesquisador/Participante: Por exemplo, olha que interessante a Atividade 4 – Interpretando uma Tabela – referente à abertura e fechamento da flor. Abrir e fechar é um tipo de experiência física, concordam comigo? **[Todas as participantes sinalizaram, por meio de gesto facial, afirmativamente.]** Você vai observar a propriedade física daquela flor, só que depois você vai anotar o tempo de duração e daí você representa! Pra que você possa colocar esse tempo num intervalo dá pra perceber que você agiu sobre sua ação de ver abrir e fechar a flor? Daí vem o lógico-matemático também. Então a física do abrir e fechar estava apoiando a lógico-matemática. Está ficando melhor, pessoal, ver no exemplo esta indissociabilidade entre os dois tipos de experiência?

192. P-8: *Sim, e é muito importante. Eu preciso destes exemplos para entender.*

193. P-1: *É!*

194. **Pesquisador/Participante:** Na Atividade 5 – Aumento de Gases Poluentes – não dá pra ‘enxergar’ muito uma experiência física, o que está mais evidente aqui é a lógico-matemática quando contabilizou-se, por ano, a quantidade de emissão de gases poluentes. Tudo bem, pessoal? **[Como ninguém se pronunciou, o Pesquisador/Participante questionou a importância de tais experiências – física e lógico-matemática – na futura prática pedagógica.]**

195. **P-4:** *Essa foi uma pergunta difícil!*

196. **P-2:** *Eu coloquei que a principal importância é saber reconhecer que tipo de experiência o aluno está vivenciando para poder intervir, estimular e proporcionar novos tipos de experiências.*

197. **Pesquisador/Participante:** Ok! Alguém mais respondeu? **[Ninguém mais respondeu.]** Vocês concordam com o que a P-2 falou? **[Por meio de expressão facial indicaram concordar com a resposta lida por P-2.]** É isso mesmo! Se você sabe os tipos de experiências necessárias e interessantes a este sujeito será possível mediar tal interação para que o sujeito vivencie e aja sobre a experiência, lembrando da indissociabilidade de ambas.

198. **P-5:** *E saber que não há dissociação é importante também porque a criança está fazendo uma experiência, por exemplo, a gente observa só a física, “Ah, ela tá só pegando, ela tá só mexendo!”, então ver que isso tem a importância é bom também pra você não menosprezar essas atitudes.*

199. **Pesquisador/Participante:** É excelente o que você falou, P-5! Perceba que se você não mediar que junto com este pegar “venha” uma classificação, venha entre aspas, vai representar aquele ensino que deixa o aluno por deixar, não diretivo, e não é isso que estamos falando. Muito pertinente o que a P-5 falou! Tudo bem o que ela falou, pessoal?

200. **P-8:** *Eu não entendi!*

201. **Pesquisador/Participante:** A P-8 não entendeu, P-5. Fale de novo, por favor!

202. **P-5:** *Eu falei que é importante também falar que não dá pra dissociar a física da lógico-matemática, e da importância da física, se não fica assim, né, “Ah, ela só tá pegando!, Ela só tá mexendo!” e não dá importância...*

203. **P-4:** *É, e é desse pegar, desse manipular que vai sair a lógico-matemática, né!?*

204. **Pesquisador/Participante:** Sim! Porque num primeiro contato o que mais predomina é a experiência física, como é a superfície, se é lisa ou rugosa, se é leve ou pesado, o formato... só que, pra daí classificar isso ‘entra’ a lógico-matemática. E eu acredito que já discutimos a segunda questão: “Para a abordagem da classificação, de que modo o professor pode utilizar o conhecimento a respeito da experiência (física e lógico-matemática) em sua prática docente?”. Quem poderia sintetizar a resposta pra gente? Você já fez P-2?

205. **P-2:** *Eu já tinha escrito, mas não sei se ficou muito claro!*

206. **Pesquisador/Participante:** Compartilha pra gente!

207. **P-2:** *Acredito que de acordo ao tipo de classificação realizada pela criança é possível identificar qual o tipo de experiência ela realizou, cabendo ao educador compreender os processos de classificação e experiências e propor problemas que auxiliem no desenvolvimento pleno da criança.*

208. **Pesquisador/Participante:** Percebam que durante o desenvolvimento da classificação estes dois tipos de experiências precisam ocorrer até para a finalização desta classificação. Por que lá nos alinhamentos sem critério não há classificação? Porque o sujeito se interessa apenas pela experiência física do último objeto da ‘fila’ e não mantém o mesmo critério. Caso a criança mantivesse o mesmo critério significaria que ela estava classificando todos os objetos alinhados como tendo a mesma característica e isso, além da física, exige a lógico-matemática. Então quer dizer que a construção da classificação e de uma inclusão hierárquica depende das duas, sendo “ativadas” pelo sujeito ao mesmo tempo. Lembra quando fizemos a classificação dos seres vivos e dos objetos? Para incluir uma classe em outra e para constituir cada classe vocês precisaram da experiência física, por exemplo, para identificar a classe dos patos e da lógico-matemática para concebê-lo como um não avestruz, por exemplo. Ficou clara a minha fala, pessoal, da importância destas duas experiências? **[Todas as participantes, através de expressão facial, sinalizaram afirmativamente.]**

209. **P-8:** *A resposta desta segunda questão eu não peguei. Como ficou? Eu tinha colocado assim: As experiências da criança com o objeto e com as trocas, eu tinha visto a parte da interação social... Você já tinha lido a parte da interação social que é o professor com o aluno e o aluno com o aluno?*

210. **Pesquisador/Participante:** Sim, no Grupo de Estudo anterior havíamos discutido tal fator.

211. **P-8:** *Daí eu pus que isso era importante, mas não é isso, né!? O que a P-2 colocou?*

212. **Pesquisador/Participante:** Faça a leitura, P-2, por favor!

213. **P-2:** *Eu vou fazer, mas não tenho certeza!*

214. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem!

215. **P-2:** *Para que ocorra a classificação e a hierarquização dos objetos são necessárias dois tipos de experiências, tanto física quanto lógico-matemática. Por exemplo, reconhecer as características físicas e as relações entre os objetos.*

216. **P-8:** *Ah, tá, agora sim!*

217. **Pesquisador/Participante:** Está certo! Vocês podem colocar assim que é análogo ao que a P-2 falou: Para a abordagem da classificação fazem-se necessárias os dois tipos de experiência. A primeira do tipo física, retirando as propriedades físicas deste objeto e, conjuntamente a lógico-matemática que permite classificar estes objetos diferenciando-os dos demais. **[Com exceção de P-9, as demais participantes registraram a resposta falada pelo Pesquisador/Participante.]** Tudo bem, pessoal?

218. **P-2:** *Sim! Não sei, pelo menos é a minha dificuldade. Eu começo a achar tudo tão junto que eu não estou mais conseguindo separar, quando é só física e quando é a ação sobre.*

219. **Pesquisador/Participante:** Mas é isso mesmo, P-2! É difícil tal separação, e a mesma se faz por questão didática, de organização mesmo. É claro que numa criança bem pequeno vai prevalecer a do tipo física, concordam comigo, pessoal? Nós até já investigamos os caminhos da classificação.

220. **Pesquisador/Participante:** *Só retomando a classificação...* [O Pesquisador/Participante auxiliou a participante a relembrar os agrupamentos característicos até a classificação – coleções figurais, coleções não figurais e classes.]

[Em continuidade, foi realizada a leitura-discussão conjunta do item 11.4 – Estádios do Desenvolvimento. P-9 realizou a leitura de tal item, esboçado abaixo:]

11.4 Estádios de desenvolvimento

Cada estágio caracteriza-se por determinada forma de comportamento (conduta) utilizada pelo sujeito para explicar/compreender/agir sobre o meio, sendo que o estágio anterior torna-se condição necessária à construção do posterior. Aqui, um questionamento faz-se oportuno: “*Se a ‘nova’ conduta é construída a partir de condutas anteriores que lhe serviram de base, como explicar o início de tal construção, ou seja, no recém-nascido?*”. Para responder tal questionamento, no próximo item serão realizadas algumas discussões.

[Como não houveram dúvidas referente a tal parágrafo, P-9 prosseguiu a leitura do item 11.4.1 denotado a seguir.]

11.4.1 Estádio sensório-motor (o recém-nascido e o lactente)

O recém-nascido vale-se dos reflexos herdados hereditariamente às interações realizadas com o meio, não havendo ainda diferenciação entre este meio e o seu eu. Através do exercício de tais reflexos, observam-se a construção das primeiras adaptações adquiridas (novos hábitos) e a organização das percepções. Acerca do início da vida mental no recém-nascido, Piaget ressalta o seguinte:

No recém-nascido, a vida mental se reduz ao exercício de aparelhos reflexos, isto é, às coordenações sensoriais e motoras de fundo hereditário, que correspondem a tendências instintivas, como a nutrição. [...] Desde o início, os reflexos da sucção melhoram com o exercício: um recém-nascido mama melhor depois de uma ou duas semanas que nos primeiros dias. (PIAGET, 2001, p. 18)

Mas, “*Como explicar a construção dos novos hábitos e a organização das percepções por meio do exercício dos reflexos herdados hereditariamente?*”. Segundo Piaget:

Um ciclo reflexo é sempre, no ponto de partida, mais um ciclo cujo exercício, em lugar de se repetir, incorpora novos elementos, constituindo com eles totalidades organizadas mais amplas, por diferenciações progressivas; a seguir, basta que os movimentos do lactente, quaisquer que sejam, atinjam um resultado interessante – interessante porque os movimentos são assimiláveis a um esquema anterior – para que o sujeito reproduza logo esses novos movimentos. Esta “reação circular”, como a chamaram, desempenha papel essencial no desenvolvimento senso-motor e representa a forma mais evoluída de assimilação. (PIAGET, 2001, p. 19)

Percebe-se que graças às duas invariantes funcionais (assimilação e acomodação), o lactente consegue modificar os reflexos – por diferenciação e integração progressivas – transformando-os em novos hábitos e organizando as suas percepções.

Situada entre o nascimento até aproximadamente os 24 meses de vida, neste estágio observa-se a *inteligência prática*, isto é, as soluções dos problemas – provenientes da interação sujeito e objeto (meio) – devem-se exclusivamente à *ação* realizada através da *percepção* e do *movimento físico*, decorrendo daí a

denominação sensório-motora. Nessa etapa as aquisições (construção das estruturas) são mais rápidas e mais numerosas.

Como ainda está na fase pré-verbal, para agir sobre o mundo o sujeito utiliza a percepção e os movimentos organizados em *esquemas de ação*, ou seja, o bebê incorpora um ‘novo’ objeto utilizando esses esquemas, como por exemplo, sacudir, esfregar, balançar. Assim, a compreensão desse ‘novo’ objeto deu-se pelo *exclusivo* uso/manipulação.

No decorrer dos 24 meses, e por meio da ação física sobre os objetos, a criança constrói algumas noções fundamentais para o desenvolvimento ao estágio seguinte, tais como a noção de *objeto permanente* e de *causalidade*. Ao final de tal estágio observa-se a diferenciação entre a criança (o seu eu) e os demais objetos contidos no meio, elaborando, assim, o espaço físico. Com o aparecimento da linguagem, a criança torna-se capaz de reconstituir suas ações em narrativas, antecipando suas ações futuras pela representação verbal. Daí faz-se possível um ‘novo’ conjunto de comportamentos (condutas), caracterizando o estágio seguinte.

[Durante a leitura, o Pesquisador/Participante diferenciou recém-nascido de lactente a pedido de P-2. Faz-se oportuno ressaltar que a cada assunto abordado, o Pesquisador/Participante perguntava se as participantes estavam compreendendo o exposto no texto. Concluída a leitura do 5.º parágrafo, questionou-se se as participantes haviam compreendido o trecho retirado de Piaget (2001, p. 19). P-2 sinalizou negativamente por meio de expressão facial e P-8 disse: “Eu não entendi, tenho que ler umas 2 ou 3 vezes.”. P-9, visando colaborar ressaltou o seu entendimento:]

221. P-9: *Talvez, assim, não sei, por exemplo, o bebê vai fazer a sucção do seio da mãe, então ele vai sempre criar esse ciclo, e quanto mais vezes ele vai assimilando isso, o reflexo circular do que ele está fazendo vai criando uma acomodação que ele vai criando novos meios que são melhores, e é assim que começa.*

222. Pesquisador/Participante: É no exercício que, como nunca vai ser igual ao anterior, o bebê vai diferenciando e integrando novas maneiras de agir no seio da mãe.

223. P-9: *É, o bebê vai até experimentando, às vezes ele morde e a mãe tem que tirar... é, tem umas coisas assim. E no final o bebê já pegou toda a ‘manha’ da sucção.*

224. Pesquisador/Participante: Ok, P-9. Tudo bem sobre a reação circular, pessoal? [Como as participantes compreenderam a referida citação (PIAGET, 2001, p. 19), P-9 prosseguiu a leitura dos 2 últimos parágrafos do item 11.4.1. Concluída a leitura, o Pesquisador/Participante frisou o fato do sujeito, deste estágio, valer-se de esquemas de ação, e não ainda conceitos, para agir sobre o meio. Após, apresentou o seguinte esquema-síntese – projetado na lousa – referente ao estágio sensório-motor. Observe-o a seguir:]

SENSÓRIO-MOTOR:

Período compreendido entre o nascimento até a aquisição da linguagem (0 – 2 anos, aproximadamente).

Características principais:

- ☐ REVOLUÇÃO COPÉRNICA: conquista do UNIVERSO PRÁTICO.
- ☐ PENSAMENTO MANIFESTADO POR ATOS.
- ☐ 1.ª - FASE DOS REFLEXOS.
- ☐ 2.ª - FASE DA ORGANIZAÇÃO DAS PERCEPÇÕES E COSTUMES.
- ☐ IDÉIA DE OBJETO PERMANENTE.
- ☐ IDÉIA DE CAUSALIDADE.

[Apoiado em tal esquema, o Pesquisador/Participante citou a evolução exponencial do sujeito a partir de seu nascimento, ressaltando que no início, para o bebê, não há sujeito nem meio (estado de total anomia) até à conquista do Universo. Por

fim, salientou a importância da linguagem, sendo a mesma importante ao estágio seguinte]

[Em seguida, P-2 iniciou a leitura do item seguinte – 11.4.2 – esboçado abaixo.]

11.4.2 Estádio pré-operatório (a primeira infância)

Nesse estágio, compreendendo (em média) a faixa etária dos 2 aos 7-8 anos, observa-se o rápido desenvolvimento da linguagem e da função simbólica. A linguagem, conforme expõe Furth (1997), representa:

O sistema natural dos símbolos falados (e ouvidos), forma de comunicação típica de uma sociedade. Uma das manifestações do funcionamento simbólico. A linguagem é adquirida e utilizada como outro comportamento simbólico e influencia a inteligência indiretamente, através do impacto social e educativo da sociedade. (p. 229, grifo nosso)

Decorre dessa afirmação que a linguagem é um dos comportamentos simbólicos, uma das manifestações da função simbólica, então, para compreender melhor a linguagem, torna-se oportuno esclarecer a função simbólica. Observe o seguinte exemplo (de nossa autoria): “*Quando brinca, a criança pode, por exemplo, usar dois pedaços de madeira para representar duas pessoas. Ao representar dois pedaços de madeira como sendo duas pessoas, pode-se dizer que a criança está pensando simbolicamente*”. Segundo Lima (2000):

No nível simbólico (intuição) a criança não distingue ainda a diferença entre a aparência e a realidade (metáfora, ilusão, duplo sentido). Isso só ocorre na adolescência. As crianças não percebem o sentido satírico das caricaturas (como ocorre com muitos adultos retardados no desenvolvimento). (p. 229)

A função simbólica consiste na capacidade de se construir ou produzir um símbolo de modo a representar aquilo que se conhece, mas que não está presente no momento atual. Assim, no exemplo anterior, a criança representou duas pessoas (*aquilo que ela conhece*) só que sem as suas presenças; o fez por meio dos pedaços de madeira que serviram de símbolo à sua ação. Concomitantemente ao desenvolvimento destas estruturas de pensamento, o indivíduo começa a classificar e a ordenar os objetos, bem como a contar. Como salienta Piaget, ao substituir a ação pela representação, ou seja, ao se servir de símbolos, a criança inicia o seu pensamento.

Neste estágio observa-se o que Piaget denomina de *jogo simbólico*, ou seja, uma vassoura ou uma caixa de fósforos, por exemplo, perde o seu significado objetivo, simbolizando aquilo que a criança deseja. Esse período coincide com o começo da aquisição da linguagem. A linguagem abre um ‘novo’ mundo para a criança, já que as palavras (substitutas dos acontecimentos e dos objetos) ampliam o rol de relações da criança com o meio. Assim, as ações passam a ser representadas, onde os esquemas de ação (característicos do estágio sensorio-motor) ‘abrem espaço’ para os da representação.

A relação entre a linguagem e este ‘início’ do pensamento (representativo) é exposto por Piaget (2001):

A linguagem, permitindo ao sujeito contar suas ações, fornece de uma só vez a capacidade de reconstituir o passado, portanto, de evocá-lo na ausência de objetos sobre os quais se referiram as condutas anteriores, de antecipar as ações futuras, ainda não executadas, e até substituí-las, às vezes, pela palavra isolada, sem nunca realizá-las. Este é o ponto de partida do pensamento. (p. 27)

O uso da linguagem propicia também à criança uma troca de informações com os outros. Devido ao *egocentrismo* (ou seja, o indivíduo ainda ‘não se coloca’ no lugar do outro), o diálogo é praticamente inexistente. Mesmo quando brinca em conjunto com outras crianças, verifica-se que cada criança fala para si sem se interessar com as respostas dos outros. A este fato deve-se denominar de *monólogo coletivo* em vez de conversa ou diálogo.

Nesse período a criança manifesta grande curiosidade por aquilo que a circunda. A todo o momento faz perguntas do tipo: “*O que é?*”; “*Por quê?*” Este “*por que*” não exige apenas uma resposta causal, mas também final, na medida em que ela entende que tudo é orientado para um fim. Mesmo para as coisas que acontecem por acaso, como por exemplo existir montanhas num lugar e não existir noutro, a criança pretende uma justificação final.

Os estudos desenvolvidos por Piaget revelam que a representação do mundo feita por uma criança difere da do adulto. Nos primeiros anos do estágio pré-operatório a criança não entenderá a *Noção de Conservação*. Para investigar a questão da conservação, por exemplo, pode-se utilizar a seguinte situação:

Dispõe-se na mesa, sob o olhar da criança, duas fileiras (A e B) contendo o mesmo número de elementos (fichas vermelhas), conforme apresentado na figura abaixo:

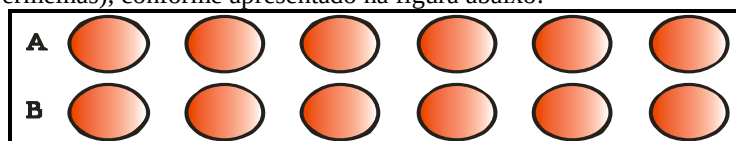


Figura 1 – Noção de Conservação: correspondência um a um (perceptiva).

Após essa primeira visualização, pergunta-se à criança se o número de elementos de ambas as fileiras são iguais. Tendo-se como resposta a afirmação da criança (ou seja, $A = B$), em sua frente, uma das fileiras é alterada, como mostrado a seguir:

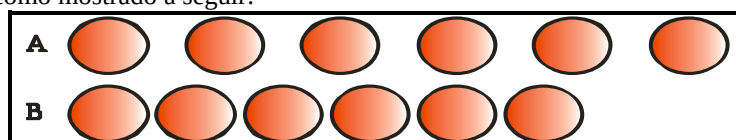


Figura 2 – Noção de Conservação: correspondência um a um (não perceptiva).

Em seguida, pergunta-se à criança se o número de fichas do conjunto A é igual ao do conjunto B.

Quadro – Prova da Noção de Conservação (quantidade). (CARRAHER, 1998)

Conforme Piaget, a criança ainda não ‘conserva a quantidade descontínua/discreta’, pois, em seu raciocínio a reversibilidade ainda não foi construída. O fato das crianças ainda não conservarem quantidades ocorre pela imposição da percepção, de suas experiências pessoais sobre o seu raciocínio, que ainda é pré-operatório (egocêntrico). Ao agir pela intuição, a criança não estabelece o ‘ir e vir’ mental, não conseguindo, por exemplo, reconstituir mentalmente a fila B. Como o ‘tamanho’ dessa é menor, então, a mesma conclui que contém menos elementos.

A partir dessa reversibilidade (‘ir e vir’ mental) será possível a construção das operações. Tais operações caracterizam o comportamento (condutas) do próximo estágio, a ser denotado no item seguinte.

[Durante a leitura referente ao monólogo coletivo, as participantes salientaram observar tal fato no estágio realizado nas escolas de Educação Infantil. Terminada a leitura, o Pesquisador/Participante perguntou se as participantes estavam conseguindo visualizar a evolução de um estágio a outro. Após resumir tal ‘evolução’, P-2 realizou o seguinte questionamento:]

225. P-2: *Deixa eu perguntar uma coisa aqui! O que é a questão da fala interior? É aí que começa o surgimento da linguagem!?*

226. Pesquisador/Participante: O estágio pré-operatório ou simbólico ou intuitivo só é possível graças à linguagem; e a linguagem propicia o pensamento já que o mesmo é uma linguagem que se interiorizou. No início a criança fala por falar, como se ela estivesse exercitando algo prático, ela não joga as coisas por jogar, no início? Então, no início, ela imita por imitar porque ela está exercitando...

227. P-2: *É, a criança chega até a falar o que ela está fazendo, na verdade!*

228. Pesquisador/Participante: Isso! Piaget utiliza até o termo assimilação ‘pura’. Mesmo interiorizando a linguagem em forma de pensamento, a criança ainda não tem consciência de tal ação, prendendo-se na transformação final de um fenômeno. É por isso que no pré-operatório, a criança, por ainda não ter essa mobilidade no pensamento, tomando consciência do mesmo, não consegue retornar ao ponto de partida. Durante a explanação das características deste estágio vocês conseguiram visualizar as experiências que vocês tiveram no estágio na Educação Infantil? **[Todas as participantes, por meio de expressão facial,**

indicaram afirmativamente, salientando terem observado o monólogo coletivo, os porquês, o jogo simbólico.]

[De modo análogo ao estágio anterior, o Pesquisador/Participante projetou o seguinte esquema-síntese do presente estágio.]

PRÉ-OPERATÓRIO:

Período compreendido entre o início da linguagem até a estruturação da operação (2 a 7-8 anos, aproximadamente).

Características principais:

- ☐ PENSAMENTO EGOCÊNTRICO.
- ☐ JOGO SIMBÓLICO.
- ☐ IMITAÇÃO DE CONDUTAS (com a ausência de modelos).
- ☐ AUSÊNCIA DE DIÁLOGO (MONÓLOGO COLETIVO).
- ☐ REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS.
- ☐ PENSAMENTO 'IRREVERSÍVEL'.
- ☐ IDADE DOS POR QUÊS?

[Durante a discussão do item – Imitação de Condutas (com ausência de modelos), P-2 faz o seguinte questionamento:]

229. **P-2:** *É no estágio anterior, sensório-motor, que a criança não consegue desenhar aquilo que está ausente?*

230. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-2. Antes da conservação do objeto, o sujeito, por não conseguir retomar – imaginar mentalmente – algo que já se foi, ele não consegue representá-lo por meio do desenho. A conquista do objeto permanente e da causalidade são importantes para a criança iniciar o próximo estágio, que é o que estamos discutindo agora.

[Visando discutir acerca da Noção de Conservação, o Pesquisador/Participante apresentou o seguinte exemplo projetado na lousa:]

A NOÇÃO DE CONSERVAÇÃO:

Um dia eu vi uma menina de 9 anos dividindo um tablete de chicletes de bola para si e seu irmão. O irmãozinho de 5 anos, reclamou: <<O seu é maior, você tem mais>>. A menina pegou o pedaço dele, espichou bem até ficar mais comprido que o dela. <<Olhe agora>>. E o menino, todo contente, foi embora: <<É, o meu é maior>>. A menina havia descoberto um modo de receber e dar o maior pedaço a cada um. (CARRAHER, 1998, p. 63)



[As participantes acharam interessante o referido exemplo. O Pesquisador/Participante ressaltou que o irmão – da menina – por ainda ter um pensamento centrado (intuitivo) foi facilmente enganado por sua irmã que já havia construído a noção da conservação.]

231. **Pesquisador/Participante:** Dá pra perceber, pessoal, que de um estágio ao outro está havendo uma evolução sobre o precedente? [Todas as participantes sinalizaram, por meio de expressão facial, afirmativamente.]

232. **P-2:** *E é necessário até, porque se não for construído não tem como avançar.*

233. Pesquisador/Participante: Isso mesmo, P-2, não tem como. P-7, leia pra gente o próximo estágio que é o que iremos estudar de modo mais aprofundado em nosso Grupo de Estudo.

[P-7 realizou a leitura do item 11.4.3 – esboçado a seguir:]

11.4.3 Estádio operatório concreto (a segunda infância)

O primeiro estágio das operações são as concretas. Tal pensamento operatório deve-se ao desenvolvimento progressivo (o equilíbrio) dos estádios anteriores, nos quais a criança construiu a capacidade de reversibilidade, em oposição à irreversibilidade/centração/intuição. Cronologicamente corresponde (em média) à faixa etária dos 7-8 aos 11-12 anos; intervalo esse correspondente à grande parte dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Como mesmo denota Piaget (2001):

A idade média de sete anos, que coincide com o começo da escolaridade da criança, propriamente dita, marca uma modificação decisiva no desenvolvimento mental. Em cada um dos aspectos complexos da vida psíquica, quer se trate da inteligência ou da vida afetiva, das relações sociais ou da atividade propriamente individual, observa-se o aparecimento de formas de organizações novas, que completam as construções esboçadas no decorrer do período precedente, assegurando-lhes um equilíbrio mais estável e que também inaugura uma série ininterrupta de novas construções. (p. 40)

Dessa afirmação decorre a importância dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao pleno desenvolvimento das operações concretas. É justamente neste estágio que se inicia a construção das estruturas lógico-matemáticas. O mesmo autor, sobre a constituição da lógica nas crianças, explicita:

Aos 7-8 anos, em média (mas, repetimos, estas idades dependem dos meios sociais e escolares), a criança chega, depois de interessantes fases de transição, cujos detalhes não poderíamos abordar aqui, à constituição de uma lógica e de estruturas operatórias que chamaremos “concretas”. Este caráter “concreto”, por oposição ao formal, é particularmente instrutivo para a psicologia das operações lógicas em geral. Significa que neste nível, que é o dos primórdios de uma lógica propriamente dita, as operações ainda não repousam sobre proposição de enunciados verbais, mas sobre os próprios objetos que elas se limitam a classificar, a seriar, a colocar em correspondência etc. Em outras palavras, a operação nascente ainda está ligada à ação sobre os objetos e à manipulação efetiva, ou simplesmente mentalizada. Contudo, por estarem próximas da ação, estas “operações concretas” já se organizam em estruturas reversíveis, apresentando suas leis de totalidade (por exemplo, as classificações). (PIAGET, 2001, p. 105-106, grifo nosso)

As palavras sublinhadas denotam as necessárias ações a serem realizadas pelas crianças sobre o meio concreto. Classificar, seriar, colocar em correspondência de um para um, de um para muitos, devem se constituir as ações a serem interiorizadas pelas crianças sob a ‘ótica’ da reversibilidade. A experiência (ou seja, a ação direta – e mental – sobre o objeto concreto) necessita fazer parte deste estágio de desenvolvimento mental.

Mais uma vez defende-se a importância da experiência, permitindo à criança construir estruturas de pensamento mais complexas, como a formal (hipotético-dedutiva). Para delimitar/caracterizar as diferenças entre as operações concretas e as formais, Piaget utiliza as noções de *grupo* algébrico. Esse autor verifica que no estágio operatório concreto, a criança, ao ‘operar mentalmente’, ainda não utiliza todas as propriedades do grupo; a estas estruturas cognitivas denomina *agrupamento*. É oportuno esclarecer que as ideias de “grupo” e “agrupamento” relacionam-se com as ações interiorizadas (as operações) que são manipuladas mentalmente pelas crianças. Assim, como as ações (antes de serem interiorizadas/ representadas) foram ‘praticadas inicialmente’ no sensorio-motor, então, por transitividade, obtém-se que as operações formais (caracterizadas pelas propriedades do “grupo”) são derivadas do primeiro estágio do desenvolvimento mental. O esboço a seguir salienta a não construção (ainda) de todas as estruturas cognitivas que permitem as realizações das operações de “grupo”.

Mesmo antes de se encontrar no estágio operatório concreto, a criança já é capaz de ordenar uma série de objetos por tamanhos e de comparar dois objetos indicando qual o maior (capacidade de comparação e classificação). No entanto, ainda não é capaz de compreender a propriedade transitiva. Ou seja, se o objeto A é

maior que o objeto **B** e, se **B** é maior que o objeto **C**, a criança ainda não está apta para concluir que **A** é maior que **C** (isto se deve à falta das estruturas cognitivas características do “agrupamento”, no qual a reversibilidade ainda é ausente neste estágio – do pré-operatório). Nessa etapa, o indivíduo só conclui que **A** é maior que **C** se ambos os objetos são apresentados à criança ‘um ao lado do outro’.

Em contrapartida, no início do estágio das operações concretas, a criança já é capaz de compreender a propriedade transitiva (graças à reversibilidade). Porém, a capacidade de compreensão da propriedade transitiva só ocorre se aplicada a objetos concretos que a criança tenha visto (*concretamente*). Por exemplo, utilizemos o objeto **A** (uma galinha), o objeto **B** (um avestruz) e o objeto **C** (um elefante). Tomando como elementos **A**, **B** e **C**, a criança desta fase consegue compreender a relação: “*se A é menor que B, e se B é menor que C, então A é menor que C*”. Como a criança construiu ‘concretamente’ tais objetos em sua mente (já que os vivenciou, interiorizando a ação – de conhecer – ao nível das operações reversíveis), então ela consegue compreender a transitividade.

No entanto, o indivíduo ‘operatório concreto’ ainda é incapaz de compreender a propriedade transitiva quando aplicada a objetos hipotéticos. Por exemplo, se colocar à criança o problema da seguinte forma: **A** é maior que **B**, e **B** é maior que **C**; qual é maior: **A** ou **C**? Somente quando construir as estruturas cognitivas de “grupo”, a criança conseguirá solucionar esse problema hipotético. Ao conseguir realizar a solução de tal problema hipotético, dá-se ‘início’ ao estágio seguinte, o das operações formais.

[Após a leitura da 2.^a citação de Piaget (2001, p. 105-106), o Pesquisador/Participante perguntou se as participantes estavam compreendendo as ideias abordadas, e do porquê do termo operações concretas. P-2 questionou se havia (ou não) relação entre estruturas lógico-matemáticas e experiência lógico-matemática. Como resposta, o Pesquisador/Participante salientou que as estruturas lógico-matemáticas ‘provém’ das experiências lógico-matemáticas vivenciadas pelo sujeito.]

[Ao terminar a leitura da explicação contida no rodapé referente ao grupo algébrico, todas as participantes riram indicando não haver entendido a definição proposta por Piaget (1976, p. 85-86). Observe o comentário feito por P-2:]

234. **P-2:** *Cadê a legenda pra entender isso?* [Risos entre as participantes, exceto P-9.]

235. **Pesquisador/Participante:** Essa questão de Grupo, pessoal, não se desequilibrem tanto agora porque iremos retomá-la em momento posterior. Piaget utiliza uma estrutura da Matemática para diferenciar o pensamento da criança do adolescente/adulto.

236. **P-2:** *Eu não cheguei na fase da adolescência, ainda!* [Risos entre as participantes, exceto P-9.]

237. **Pesquisador/Participante:** Não se preocupem com esta questão no momento! Continue a leitura, por favor P-7.

[Concluída a leitura a respeito da definição de Agrupamento, o Pesquisador/Participante exemplificou no intuito de auxiliar o entendimento das participantes.]

[Após realizar a leitura do 6.^o parágrafo no qual é apresentado um exemplo de ordenação realizada pelo sujeito no estágio pré-operatório, o Pesquisador/Participante questionou se as participantes haviam compreendido tal exemplo. P-2 denotou o seguinte:]

238. **P-2:** *Colocam-se os três objetos na frente dela juntos!?*

239. **Pesquisador/Participante:** Sim!

240. **P-2:** *Só que ela só faz comparações de dois em dois.*

241. **Pesquisador/Participante**: Isso, de dois em dois. A criança não consegue voltar na comparação anterior.

242. **P-8**: *Como assim?*

243. **P-2**: *Colocam-se os três objetos juntos [Neste momento P-2 dispôs sobre a mesa três canetas enfileiradas.] mas ela só vai comparar estes dois [Pegou as duas canetas ‘seguidas’ do ‘canto’ esquerdo.] e depois esses dois. [Pegou as duas canetas ‘seguidas’ do ‘canto’ direito, sendo que a caneta central esteve presente nos dois momentos da comparação.] A criança não consegue comparar esse com esse! [Pegou as duas canetas localizadas nos ‘extremos’ da fila.]*

244. **P-8**: *Ah, tá! Assim é melhor do que esse A, B C... [Referiu-se à terminologia utilizada no 6.º parágrafo.]*

[Ao término da leitura do 7.º parágrafo, o Pesquisador/Participante realizou a seguinte intervenção:]

245. **Pesquisador/Participante**: Pessoal, a criança consegue entender a transitividade porque ela vivenciou o que é uma galinha, um avestruz e um elefante. Se você apenas fala pra criança: “ Se A é menor que B e se B é menor que C, então A é menor que C”, apenas neste plano linguístico ela não entende nada!

246. **P-8**: *E nem a gente!*

247. **P-2**: *Mesmo se trazer a imagem dos animais do mesmo tamanho também não!?*

248. **Pesquisador/Participante**: Também não!

249. **P-8**: *Assim, como você está relacionando algo aos animais fica mais fácil!*

250. **Pesquisador/Participante**: Se eu não tivesse citado os animais teria dificuldade, P-8?

251. **P-8**: *Se for A, B e C tem que pensar!*

252. **Pesquisador/Participante**: Você também acha isso, P-1?

253. **P-1**: *Sim!*

254. **Pesquisador/Participante**: Quem mais?

255. **P-8**: Só se pôr números aí... [Indicou substituir as letras A, B e C por números na relação transitiva.]

256. **Pesquisador/Participante**: Você teria dificuldade só com as letras P-4?

257. **P-4**: *Sim!*

258. **Pesquisador/Participante**: E você P-5?

259. **P-5:** *Acho que sim!*
260. **Pesquisador/Participante:** E você P-9?
261. **P-9:** *Sim!*
262. **Pesquisador/Participante:** E você P-2?
263. **P-2:** *Acho que não!*
264. **Pesquisador/Participante:** E a P-7?
265. **P-7:** *Eu acho que só com três elementos não, mas se fosse com mais acho que seria mais difícil!*
266. **Pesquisador/Participante:** Ok, compreendi!
- [Finalizada a leitura do último parágrafo (8.º), P-8 fez o seguinte comentário:]
267. **P-8:** *Ah, é por isso que você falou que a gente ainda não está no operatório formal!?*
[Risos entre as participantes.]
268. **Pesquisador/Participante:** *Eu falei que vocês estão, digamos assim, numa transição.*
269. **P-2:** *Ah, na Matemática não!*
270. **Pesquisador/Participante:** Algumas partes da Matemática vocês estão numa transição. Agora, na Linguagem vocês já estão no pensamento formal.
271. **P-2:** *Ah, sim! Eu acho que em algumas partes a gente tá no sensório-motor!* [Risos entre as participantes.]
272. **Pesquisador/Participante:** Não diga isso! [Riso geral.] Vocês concordam com a minha fala a partir da exposição do texto? [Todas as participantes indicaram, por meio de gesto facial, afirmativamente.] Quando nos desprendemos do Real e conseguimos pensar puramente no plano hipotético, daí hipotético-dedutivo, nós nos situamos no pensamento operatório formal. E toda Ciência está pautada nesta lógica do pensamento formalizado.
273. **P-2:** *É por isso que a gente não entende!*
274. **P-8:** *Ah é!*
275. **Pesquisador/Participante:** É por isso, pessoal, que em alguns textos do Piaget em que esta formalização, digamos assim é ‘extrema’, fica difícil a compreensão. Mas eu os trago porque quero que vocês superem esta dificuldade, e pra superar...
276. **P-2:** *É pra maltratar mesmo!* [Risos entre as participantes.]
277. **P-9:** *Na verdade estes pensadores estão num estágio pós-formal. É por isso que fica difícil.*

278. **Pesquisador/Participante**: A gente até pode pensar, assim, por ser um pensamento alicerçado em outro pensamento e de outro pensamento já desprendido do Real (concreto). Abusando da linguagem, poderia até falar que é uma metacognição, ou melhor, uma metaoperação, ou seja, uma operação em cima de outra operação. Tudo bem?... Tudo bem P-8?

279. **P-8**: *Ah, então, pra eu chegar num ponto desse eu preciso nascer de novo...* [Risos entre todas as participantes.] *Eu posso até chegar, mas num ponto antes desse!*

280. **Pesquisador/Participante**: Não, pessoal, todo mundo tem condições de chegar neste estádio.

281. **P-2**: *É, um dia...*

282. **Pesquisador/Participante**: Pessoal, em algumas áreas vocês já estão no operatório formal, porque se não o fosse vocês não estariam fazendo Pedagogia. Sim, em algumas áreas faltam ainda a construção de algumas estruturas...

283. **P-9**: *É verdade! Com certeza sim!*

284. **P-8**: *A P-9 é positiva.*

285. **P-2**: *A P-9 é!*

286. **Pesquisador/Participante**: Mas ela está certa, pessoal!

287. **P-2**: *A gente tá tirando sarro, né! É brincadeira!*

288. **P-9**: *É brincadeira!*

289. **P-5**: *Mas naquela 1.^a atividade [Referiu-se ao desafio Torre de Hanói.] precisava do concreto, né!*

290. **Pesquisador/Participante**: Foi o que eu falei, em algumas situações sim!

291. **P-2**: *Mas em Matemática eu me sinto mesmo, de verdade, eu me sinto mesmo, eu não acho que estou no operatório formal. De verdade, não acho mesmo! Agora, não em todas!*

292. **Pesquisador/Participante**: Ah, sim!

293. **P-8**: *Então, se você não está imagine nós... Onde nós estamos?*

294. **P-5**: *No sensório-motor!*

295. **P-8**: *Se a P-2 que é a que mais entende aqui não está, você imagina nós! [Riso geral.]*

296. **P-7**: *Tem hora que eu estou igual um aluno da P-4 porque eu estou lendo mas não dá pra saber o que está escrito! Eu só estou lendo mas não sei...*

297. **P-4:** *Eu estou lendo, mas... eu não estou prestando atenção no que estou lendo... Se ele está lendo não está interpretando...* [Referiu-se a seu aluno do Ensino Fundamental já que a mesma atua como professora de Língua Portuguesa por ser essa sua primeira formação na graduação.]
298. **P-8:** *Se eu leio o texto aqui eu não entendo na hora, eu preciso reler.*
299. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro! Vocês, ainda, durante as disciplinas passam por situações assim?
300. **P-2:** *Sim!*
301. **Pesquisador/Participante:** Eu também, claro!
302. **P-8:** *Ah, eu em quase todos os momentos... Eu ‘viajo’ bastante...* [Risos entre as participantes.]
303. **P-2:** *Daí você diz pro seu professor que o texto é difícil e daí ele fala: “Difícil!?”*
304. **P-8:** *É por isso que eu nem pergunto!*
305. **P-2:** *E tem alguns que ainda dizem “Perfeito!”, ou seja, não é pra gente entender nada mesmo!*
306. **Pesquisador/Participante:** Como a P-9 disse no começo do nosso Grupo de Estudo estão faltando professores para despertarem o interesse em vocês. Sem este interesse você não vai ter motivos pra agir sobre o objeto do conhecimento, e daí muitos irão ‘ler por ler’. Vocês concordam?
307. **P-2:** *Sim, com certeza! Eu até tento entender o texto, mas não consigo.*
308. **P-1:** *Eu também não consigo entender!*
309. **P-2:** *É igual os textos da professora R., se ela não falar alguma coisa você fica olhando pro texto e...*
310. **P-8:** *É igual esse seu aqui, se você não explicar...*
311. **P-2:** *Tem coisa que não sai!*
312. **Pesquisador/Participante:** Então a nossa interação e discussão é imprescindível?
313. **P-2:** *Sim!*
314. **P-8:** *E como é!*
315. **P-4:** *É indispensável.*
316. **P-8:** *Eu até pego alguma coisa na internet, mas é difícil sem você, não sai...*

317. **P-9:** *E daí vem a importância da mediação do professor neste processo de interação social. Você pode até estar tentando, ter o interesse em entender tudo, mas se não tiver esse processo a gente não consegue.*
318. **Pesquisador/Participante:** Sim, concordo com você P-9.
319. **P-8:** *Tem gente que é autodidata! Eu já não sou!*
320. **P-2:** *Mas mesmo o autodidata, ele não é em tudo!*
321. **P-8:** *Não?*
322. **P-2:** *Não consegue! Tem coisa que ele não consegue!*
323. **Pesquisador/Participante:** É pessoal, precisa do outro. Lembrem que a interação social, enquanto um dos fatores ao desenvolvimento do sujeito, é imprescindível para o estabelecimento das relações sociais entre os indivíduos. E a escola é o local, por excelência, para a efetiva ocorrência desta interação.
324. **P-2:** *Quando aprende com o tempo, qual é a epistemologia?*
325. **Pesquisador/Participante:** Quando o conhecimento desperta, desabrocha?
326. **P-2:** *É!*
327. **Pesquisador/Participante:** É o inatismo/racionali. O conhecimento já está em você, falta apenas desabrochar. Tem professores que acreditam que tem crianças que não nascem com ‘aquela’ semente, então serão burras!
328. **P-8:** *Ai!*
329. **Pesquisador/Participante:** Eu acabei de pronunciar uma fala inatista! Tudo bem, P-8?
330. **P-2:** *A minha não germinou! [Risos entre as participantes.]*
331. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, eu ouvi tanto essa fala durante a minha atuação enquanto PEB I no estado! Olha o que eu ouvia: “Tem gente que não nasceu pra isso, meu filho! Então não gaste velho com defunto ‘já’ morto!”. **[Risos entre todas as participantes.]** Você já ouviu essa fala, P-5?
332. **P-5:** *Eu já ouvi!*
333. **P-8:** *Que judiação da criança!*
334. **Pesquisador/Participante:** E eu, como sempre, fui falar pra professora que ela estava errada... Nossa, a coisa ficou feia...
335. **P-8:** *E o que você faz num situação dessa?*

336. **P-2:** *Não faz, o silêncio é a melhor resposta. Depois que a pessoa sai você vai lá e cuida do aluno.*

337. **Pesquisador/Participante:** Em algumas situações, por experiência própria, percebo que é melhor não falar mesmo.

338. **P-8:** *Isso parece que é construído dentro da escola!*

339. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro, está presente na cultura escolar. E ideias como essa são propagadas, digamos assim, por irradiação.

340. **P-8:** *É, daí aquele professor que não quer ter trabalho acaba aceitando isso! Ele não quer ter o trabalho de estimular aquele aluno... então ele pega o que o outro professor falou e vai...*

341. **Pesquisador/Participante:** Nós chegamos à conclusão de que tanto no empirismo quanto no inatismo, se o ensino não der certo a culpa é só do aluno. No empirismo porque ele não se esforçou em ouvir atentamente o que o professor explicou; no inatismo é porque ele não nasceu pra isso já que é ‘burro’. Em ambas posturas epistemológicas o professor está tranquilo, digamos assim a grosso modo. No construtivismo não! A partir do momento que há uma interação entre você e seu aluno, se o aluno não aprendeu a responsabilidade também é sua, não só sua pois depende do estudante também. Vamos supor que o professor propôs situações interessantes adequadas àquele aluno, e mesmo assim não funcionou, então provavelmente tem outro fator que está impedindo tal aprendizagem, daí já foge de sua alçada.

342. **P-8:** *Ah, tá, eu já achei que teria que achar outra coisa pra despertar!*

343. **Pesquisador/Participante:** O professor tentou várias situações interessantes. Se não deu certo, mesmo você tentando várias, daí já não é seu o problema, porque com certeza deve haver outros fatores interferindo, como família, fatores psicológicos, etc.

344. **P-5:** *Deixa eu comentar uma coisa?*

345. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro!

346. **P-5:** *É dos professores que entram ficarem iguais aos professores que já estão atuando. Eu trabalho num projeto com uma professora e ela se formou recentemente, aqui na UNESP. E observando essa professora...*

347. **Pesquisador/Participante:** Quanto tempo ela ingressou no magistério?

348. **P-5:** *Ah, deixa eu ver... acho que uns dois anos...*

349. **Pesquisador/Participante:** Até 5 anos é considerado um professor iniciante.

350. **P-5:** *Mas não foi em Pedagogia, foi em Artes.*

351. **Pesquisador/Participante:** Ok!

352. **P-5:** *E eu observando a prática dela eu pensei “Nossa!”... eu não quero julgar porque eu não sou professora pra saber, mas é tão diferente assim, né!? Como é que a pessoa pode aprender tanta coisa aqui [Referiu-se à graduação realizada na UNESP.] e na escola fazer diferente? Eu ficava pensando nisso... E daí eu conheci uma outra professora da escola e já faz muito tempo que ela está lá! Essa professora tem um comportamento que eu não concordo, mesmo com as dificuldades que o professor tem eu não concordo! E eu sempre comento com minha amiga dessa professora, e daí um dia, por coincidência, essa professora iniciante comentou assim: “Ai, como é bom a experiência, porque eu aprendo muito com a professora tal. Eu me espelho muito nela!”. Engraçado, na hora que ela falou eu não consegui olhar pra minha amiga porque a gente ia rir. Daí eu pensei: “Tá explicado porque essa professora nova age assim!”.*

353. **P-9:** *Mas isso é um grave problema que está na grade curricular dos cursos de Licenciatura, eu vejo. No caso dela, o contato pedagógico, como é a escola... querendo ou não, mal ou pouco, a gente está sempre discutindo isso... E esse pessoal, o Pesquisador/Participante pode falar melhor do que eu, eles vem tudo muito pincelado...*

354. **Pesquisador/Participante:** É verdade. Este é um problema de boa parte dos cursos de Licenciatura. Eu posso falar por experiência que o curso que eu fiz, de Matemática, vem tentando resolver este problema inserindo, desde o 1.º semestre do 1.º ano a discussão em torno da Educação. E daí, pessoal, se durante a Formação Inicial – graduação/licenciatura – o estudante não refletir sobre o que viveu enquanto aluno da Educação Básica, muito provavelmente enquanto professor você irá propagar... Concordam comigo?

355. **P-9:** *Vai! [Resposta compartilhada pelas demais participantes.]*

356. **Pesquisador/Participante:** Essa questão é um dos principais assuntos da minha pesquisa de doutorado, ou seja, da necessidade desta reflexão sobre os saberes...

357. **P-5:** *Eu até pensei em você! Em alguns momentos, por conta do desespero, tudo bem! Mas por isso é importante refletir sobre a sua ação. Mas não, a ainda essa professora nova falou que aprende muito com aquela professora ‘antiga’. Tem muitos professores bom por aí, não é por causa da idade.*

358. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro!

359. **P-5:** *Mas é exceção!*

360. **P-2:** *Às vezes a pessoa que a recebeu foi ela, que lhe deu apoio.*

361. **Pesquisador/Participante:** É verdade, talvez esta professora ‘antiga’ foi a única que lhe dei apoio no início da carreira.

362. **P-2:** *O que acontece é que, se você não sabe o que fazer, se você está se sentindo perdida, P-5, o primeiro que te jogar a tábua você vai se segurar.*

363. **Pesquisador/Participante:** Maurice Tardif nos fala que nos anos iniciais da docência o professor tem o choque com a realidade. Se você não tiver um apoio de um professor experiente e que sabe realmente o seu papel enquanto professor, certamente você vai se apoiar naquilo que você sabe bem, porque muitas das licenciaturas não garantem que você modifique

as suas ideias empiristas ou inatistas construídas enquanto aluno da Educação Básica. Eu, por exemplo, ao ingressar na licenciatura em Matemática eu achava que tinha sorte por ir bem em Matemática. Esta sorte, ‘inconscientemente’ me levava a acreditar que eu tinha nascido pra isso!

364. P-9: *Mas é o principal discurso: “Por que você está fazendo esse curso? Ah, porque eu vejo que tenho esse dom!”.*

365. Pesquisador/Participante: É isso mesmo, P-9. E eu tive que desconstruir essa minha ideia. Eu fui, aos poucos, me desvencilhando do discurso e das ações empiristas e inatistas quando me tornei professor no estado. No primeiro ano de atuação, quando me senti perdido em sala de aula a primeira coisa que eu fiz foi ‘tacar’ cópia na criançada, porque eu em apoiei naquilo que estava mais ‘forte’ em mim, ou seja, o que tinha vivenciado em todo meu Ensino Fundamental que foi ‘extremamente tradicional. Uma oportunidade para a mudança iniciou quando realizei a minha Iniciação Científica, e comecei a perceber que meus alunos estavam apenas reproduzindo e não agindo sobre a Matemática. Ao investigar a construção das estruturas multiplicativas, a partir das aditivas, comecei a questionar a minha postura enquanto professor, mas eu ainda estava preso nesta questão do treino e memorização. Inclusive, pessoal, em nosso Grupo de Estudo eu me polio o tempo todo para que realmente ocorram discussões entre nós, para que não fique uma exposição só minha sem a ação de vocês. E eu acredito que os nossos encontros são oportunos porque discutimos a nossa posição enquanto professor, sobre o conhecimento matemático, como se dá a construção desse conhecimento pedindo para que vocês reflitam sobre a utilização da teoria de Piaget numa futura prática pedagógica.

[Antes da leitura do item 11.4.4, o Pesquisador/Participante combinou com as participantes que as mesmas respondessem duas questões referentes ao assunto discutido e elaborassem a Síntese em casa para compartilhamento no próximo encontro Além disso, foi solicitada a leitura dos itens 12.1 e 12.2 – O Mecanismo de Equilibração – para o próximo encontro.]

[Para finalizar, P-8 realizou a leitura do item 11.4.4, denotado abaixo:]

11.4.4 Estádio operatório formal (a adolescência)

Como argumentado anteriormente, no estágio operatório formal, devido à progressiva construção das estruturas cognitivas de classificação, seriação, ordenação, entre outras, o adolescente consegue compor as propriedades operatórias do “grupo”. Em média, essa fase compreende a faixa etária dos 11-12 anos em diante.

A capacidade (construída) do “*ir e vir*” mental desprende-se da recorrência ao concreto, adquirindo a denominada característica lógica-formal. Assim, o adolescente aprende a solucionar problemas estabelecendo um leque de alternativas (*hipóteses*) a serem confrontadas com a realidade (*dedução*), construindo um modo de pensamento semelhante aos adultos que atingiram já tal nível. Neste estágio a linguagem representa a ferramenta mais importante ao indivíduo.

Como mostra Piaget (2001):

Ora, após os 11 ou 12 anos, o pensamento formal torna-se possível, isto é, as operações lógicas começam a ser transpostas do plano da manipulação concreta para o das idéias, expressas em linguagem qualquer (a linguagem das palavras ou dos símbolos matemáticos etc.), mas sem o apoio da percepção, da experiência, nem mesmo da crença. O pensamento formal, é portanto, “hipotético-dedutivo”, isto é, capaz de deduzir as conclusões de puras hipóteses e não somente de uma observação real. (p. 59, grifo noso)

Convém notar que tal estágio de desenvolvimento depende em grande parte do grau de formação (Educação) que à pessoa foi oportunizado. Muitos adultos, segundo Piaget, nunca chegam a fazer raciocínios formais. Nas sociedades em que não existem escolas formais, nenhum dos seus membros é capaz de raciocinar

formalmente pelo fato deste estágio ‘ser’ o fruto das complexas produções intelectuais construídas pelo homem (as Ciências, a Filosofia, a Arte, a Moral etc.).

Em suma, Piaget conclui o seguinte a respeito do desenvolvimento mental:

Como conclusão, pode-se constatar a unidade profunda dos processos que, da construção do universo prático, devido à inteligência sensório-motora do lactente, chega à reconstrução do mundo pelo pensamento hipotético-dedutivo do adolescente, passando pelo conhecimento do universo concreto devido ao sistema de operações da segunda infância. Viu-se como estas construções sucessivas consistem em descentralizações do ponto de vista, imediato e egocêntrico, para situá-lo em coordenações mais ampla de relações e noções, de maneira que cada novo agrupamento terminal integre a atividade própria, adaptando-a a uma realidade mais global. (PIAGET, 2001, p. 65)

[Durante a leitura, o Pesquisador/Participante foi questionando se as participantes estavam compreendendo o exposto. Como reflexão final, o Pesquisador/Participante pontuou:]

366. Pesquisador/Participante: Pessoal, na última citação, Piaget refere-se do nascimento até o adulto, onde de um mundo caótico e egocêntrico caracterizado pela anomia o sujeito pode vir, não é garantia, a ‘chegar’ num mundo organizado, reversível e autônomo. E, pra isso, a família, o meio social e a Educação se fazem imprescindíveis. Ok!

APÊNDICE Q – TRANSCRIÇÃO DO 13.º ENCONTRO

Data: 14/06/2012

Tempo de Duração: 3 horas e 20 minutos.

[Participaram deste encontro P-2, P-4, P-5, P-7 e P-8. Inicialmente, houve o compartilhamento das respostas referentes aos problemas 1 e 2 que haviam ficado como ‘tarefa’ para casa. Observe-os abaixo:]

- | |
|---|
| <p>1. De que modo o conhecimento dos estádios do desenvolvimento propostos por Piaget pode auxiliar a sua prática pedagógica (de Matemática)? Pense a respeito elaborando um exemplo.</p> <p>2. Conhecer o processo de construção do conhecimento pelo indivíduo colabora à superação das teses empiristas e racionalistas? Pense a respeito.</p> |
|---|

[Após a leitura do 1.º problema pelo Pesquisador/Participante, P-8 socializou sua resposta.]

1. **P-8:** *Então, vamos ver se eu entendi o que você propôs.*
2. **Pesquisador/Participante:** *Ok!*
3. **P-8:** *Eu coloquei assim: Com os bebês, eu coloquei... dando objetos diferentes para eles sacudirem, pegar, balançar, jogar e lamber, pois a compreensão se dá pelo exclusivo uso/manipulação. É isso?*
4. **Pesquisador/Participante:** *Sim, perfeitamente!*
5. **P-8:** *Aí eu coloquei... porque eu fui lendo e reli tudo o que você tinha posto. Até eu coloquei isso na síntese, porque eu tive que relembrar tudo. Depois... no pré-operatório... O que eu coloquei?... Ah, a vassoura, que a criança..., a vassoura e a caixa de fósforo perde seu significado, seu objetivo, né, e simboliza àquilo que a criança deseja, né... então ela pensa numa vassoura como se fosse um cavalo, né, que ela põe **[Neste momento imitou, por meio de movimentos ‘suaves’, a criança cavalgando no cabo da vassoura.]** e fala que é um cavalinho. Então, é, eu pus isso, do pré-operatório. Depois no operatório concreto, contrai significados no que ele está aprendendo relacionando aos assuntos já vistos... pera lá, deixa eu ver o que já coloquei... Ah, é aquele exemplo que você já tinha colocado da galinha, do avestruz e do elefante que eles não conseguem..., quando tem o objeto eles entendem que um é maior que o outro, agora colocando A B ou B C eles já não conseguem entender que B é maior que A e que... A é menor que B e B é menor que C... eles não conseguem. Daí, o que eu coloquei de exemplo, deixa eu ver... resolução de problemas... ah, velocidade média que eu achei, fui procurar, carrinho como modelo, então o pessoal pega carrinhos pequenos e com o cronômetro vai medindo as velocidades com os carrinhos pra ver... então foi o que eu achei do operatório concreto, que é como eles vão entender a reversibilidade com os objetos.*
6. **Pesquisador/Participante:** *Ok, tá!*
7. **P-8:** *Depois você explica! E o operatório formal... deixa eu ver o que eu coloquei... Ah, tá! Eu coloquei que aí com a leitura e a interpretação de gráficos que... a linguagem representa a ferramenta mais importante do indivíduo, então ele vai conseguir ler e interpretar, então ele vai entender, falar aquilo que ele interpretou. Foi isso que eu coloquei!*

8. **Pesquisador/Participante**: Ok! Então, quando você fala no sensório-motor da inteligência ser prática isso auxilia no desenvolvimento da Matemática porque inconscientemente o sujeito vai começar a classificação sem saber que o está fazendo!
9. **P-8**: *Do pegar, jogar, né!?*
10. **Pesquisador/Participante**: Sim, e isso vai ser o início para que no futuro as classificações e as seriações sejam possíveis.
11. **P-8**: *Ah, legal, então está certo!*
12. **Pesquisador/Participante**: Na parte da intuição, para que a criança passe da intuição/irreversível para o pensamento operatório/reversível ela precisa do jogo simbólico. Então isso é um auxílio à constituição da Matemática futuramente. No operatório concreto, pelo o que eu compreendi, você disse da importância do plano concreto apoiar o pensamento operatório deste indivíduo...
13. **P-8**: *Isso, eu até escrevi isso... eu escrevi um monte* [Neste momento a participante mostrou a sua folha com a reposta às demais.]
14. **Pesquisador/Participante**: Está correto, P-8, só que no operatório concreto a criança também lê e interpreta a linguagem, apenas esse contexto tem que se referir a algo vivenciado, ainda, no concreto. O que diferencia dos adolescentes e dos adultos escolarizados é a possibilidade de se desprender progressivamente do Real, constituindo assim as teorias, tais como a Ciência, por exemplo. Tudo bem?
15. **P-8**: *Sim!*
16. **Pesquisador/Participante**: E você, P-7, sobre a primeira questão?
17. **P-7**: *Eu não coloquei exemplos, mas eu coloquei que o conhecimento dos estádios nos auxilia, pois, ao saber em qual estágio a criança está sabemos qual o seu interesse em determinado assunto, e isso auxilia a nossa prática.*
18. **Pesquisador/Participante**: Eu entendi o que você falou... por exemplo, conforme exposto por P-8, se o interesse do pensamento pré-operatório ainda é o intuitivo, do jogo simbólico, nós temos que disponibilizar experimentos a essa criança para que isso vá sendo ‘exercitado’ e gradativamente o sujeito vai construindo a mobilidade do seu pensamento.
19. **P-7**: *Sim!*
20. **Pesquisador/Participante**: E você, P-4?
21. **P-4**: *Eu fiquei pensando naquele exemplo que você deu das fichas lá, quando espacia...*
22. **Pesquisador/Participante**: Ah, tá, da noção de conservação.
23. **P-4**: *A criança fala que é maior, e daí a gente não pode ensinar pra criança o número antes desta noção da conservação?*

24. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo, P-4. Para a criança aprender o que é o número há a necessidade da conservação da ordem e da relação de inclusão. Por exemplo, se ele não conserva que antes do 2 vem o 1, então ele não compreende a quantidade e a posição do 2. Deu pra compreender esta fala?
25. **P-4:** *Sim!*
26. **Pesquisador/Participante:** Então, este desenvolvimento numérico, iniciado lá no estágio pré-operatório, ocorre quando o sujeito sente a necessidade em contar diferentes objetos de diferentes maneiras em diversas situações. O aluno vai construindo os diferentes significados do número, seja como posição ou como quantidade e também enquanto código. Por exemplo, o número de telefone é um código, e não tem relação nem com a ordinalidade e a cardinalidade. O mesmo ocorre com os números das placas dos carros. E sem a construção do número é impossível a construção de qualquer operação aritmética básica, tudo bem? E, para compreender o número, a criança precisa entender o sistema de numeração decimal, sendo o mesmo posicional e de base dez. Sem tal entendimento a criança não consegue compreender os algoritmos convencionais da adição, subtração, multiplicação e divisão.
27. **P-4:** *Ah, tá!*
28. **Pesquisador/Participante:** Mais algum comentário, P-4?
29. **P-4:** *Não!*
30. **Pesquisador/Participante:** E você, P-2?
31. **Pesquisador/Participante:** *Então, eu também não dei exemplos. Eu escrevi: Somente conhecendo as características dos estádios é possível entender as capacidades de compreensão dos conteúdos a serem ensinados, ou seja, se a criança possui a estrutura de assimilação e de acomodação para compreendê-lo. Por exemplo, se a criança está no estágio pré-operatório e ela ainda não possui a noção de conservação não será possível que ela compreenda a classificação.*
32. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-5, te vem algum exemplo?
33. **P-5:** *Exemplo não, eu só pensei nisso, mais ou menos do que a P-7 falou, e da P-2 também. E é importante você conhecer o estágio até pra pensar na atividade que você vai propor. Se você sabe pra aquele estágio que a criança está ainda não consegue fazer tal coisa, você não vai propor uma atividade assim. É lógico que você vai propor atividades possíveis pra que ela vá gradativamente...*
34. **Pesquisador/Participante:** Para que ela vá avançando gradativamente.
35. **P-5:** *Isso! Eu pensei neste sentido!*
36. **Pesquisador/Participante:** Ok!
37. **P-5:** *Mas de exemplo eu não pensei nada, eu tenho que reler de novo pra poder fazer!*

38. **Pesquisador/Participante:** Lembra do currículo que a professora T. pediu para eu apresentar a vocês?

39. **P-5:** *Sim! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*

40. **Pesquisador/Participante:** Eu lembro que eu falei pra vocês, na palestra, que no 1.º ano as formalizações não são indicadas porque os alunos não têm interesse ainda nisso. E, para dizer aquilo e no momento de propor o rol de conteúdos eu me vali deste conhecimento dos estádios. Então é mais ou menos assim que eu coloquei em prática as contribuições dos estudos psicológicos de Piaget. Vocês acham que estudar, durante o nosso Grupo, as características, mesmo sendo rápido, destes estádios colaborou neste sentido?

41. **P-8:** *Sim, claro! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.] Como a gente está num menor grupo, e você está disponível para explicar, é mais fácil!*

42. **Pesquisador/Participante:** Ok! E a segunda questão: “Conhecer o processo de construção do conhecimento pelo indivíduo colabora à superação das teses empiristas e racionalistas? Pense a respeito.” P-4, por favor, leia pra gente a sua resposta.

43. **P-4:** *Sim, claro! Como a construção do conhecimento é um processo, ou seja, o indivíduo não nasce com o conhecimento, mas através de interações/ações sobre o meio/objeto ele vai construindo e internalizando este conhecimento.*

44. **Pesquisador/Participante:** Então, quer dizer que o fato de conhecer a teoria de Piaget nos garante que as teses empiristas e racionalistas são falsas?

45. **P-4:** *Sim!*

46. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você, P-7?

47. **P-7:** *Eu coloquei que sim, pois ao conhecer como se dá este processo de construção do conhecimento já é possível perceber que não nascemos com o conhecimento, ou só vamos aprender com o tempo e com a experiência.*

48. **Pesquisador/Participante:** Entendi, P-7, ótimo! E você, P-8?

49. **P-8:** *Eu coloquei isso também! No Racionalismo o sujeito nasce com os conhecimentos, mas para Piaget o conhecimento não é inato, ou seja, não está pré-formado nas estruturas cognitivas do indivíduo ao nascer e nem resulta da pressão do meio sobre o sujeito. O conhecimento advém de uma interação/ação sujeito e meio/objeto. Eu pesquisei isso!*

50. **Pesquisador/Participante:** Ok! Leia pra gente, P-2, por favor!

51. **P-2:** *Sim, pois se não há compreensão sobre o processo de construção do conhecimento pode ocorrer de se tentar ensinar conteúdos que vão além da possibilidade de assimilação e de acomodação da criança naquele momento, o que gera a questão sobre a criança ainda não estar pronta para aprender, madura ou burrinha mesmo e não ter nascido para isso!*

52. **Pesquisador/Participante**: Ok! E o seu, P-5, ficaria mais ou menos assim?
53. **P-5**: *Sim, eu até havia comentado com as meninas!*
54. **Pesquisador/Participante**: Pessoal, então quer dizer que vocês, no plano do discurso, superaram estas duas teses (empiristas e racionalistas). Agora vamos imaginar no plano da prática docente. Como vocês, fazendo uma autoanálise, se veem como futuras professoras de Matemática não propagando estas duas teses?
55. **P-2**: *É difícil!*
56. **P-5**: *Como assim?*
57. **P-2**: *Você tem que propagar a teoria piagetiana, e não as outras duas!*
58. **P-5**: *Ah, tá!*
59. **Pesquisador/Participante**: Porque no plano do discurso, teórico, vocês responderam que foi possível, através da teoria de Piaget, superar o Racionalismo e o Empirismo. Por meio dos estudos Piaget comprovou que nós não nascemos com o conhecimento pronto, e sim com uma função hereditária que é a assimilação e a acomodação, sendo os reflexos o esquema inicial de assimilação que permite a atividade do sujeito. E agora no plano da prática?
60. **P-8**: *Mas eu acho, assim, conforme você vai vendo e vai lendo, a gente já tinha visto, eu acho que a gente já entende como funciona, né!*
61. **P-2**: *Teoricamente!*
62. **P-8**: *Teoricamente sim!*
63. **P-2**: *Eu tenho muita dúvida no sentido assim, oh... Como eu faço, no primeiro momento ao chegar na sala, eu tenho que aplicar algo para saber em que nível estas crianças estão!*
64. **Pesquisador/Participante**: Isso mesmo! Por exemplo, oh, eu vou fazer isso com vocês hoje. Eu trouxe na página 87 até a 88 cinco problemas envolvendo Probabilidade e Combinatória.
65. **P-8**: *Ah, combinatória eu sou péssima!*
66. **Pesquisador/Participante**: Por que eu fiz isso? Porque eu preciso investigar os conhecimentos prévios de vocês, ou os saberes da experiência já adquiridos durante a Educação Básica para, a partir daí, e nos próximos Grupos de Estudo, montar uma sequência de ensino alicerçado no referencial que eu utilizo de tal modo a problematizar e dar o apoio necessário pra vocês. Isto para que, os conteúdos que eu identificar como ainda não construídos, eu possa intervir e auxiliá-las a construir. Então o que eu faço no nosso Grupo é um ‘movimento’ parecido, análogo ao que vocês deveriam (deverão) fazer enquanto futuras professoras. Tudo bem?... Lembra que eu trago como exemplo as atitudes da professora de Matemática Sueli? Ela não nos dá várias situações de ensino? Percebam que a professora hipotética Sueli concebe o aluno enquanto um sujeito ativo, não concebe? **[Todas as**

participantes indicaram, por meio de gesto facial, afirmativamente.] A professora Sueli propõe problemas, observa o que inicialmente o aluno já sabe e vai, gradativamente tentando com que o mesmo realize uma formalização, já que com os estudantes de 7.^a e 8.^a séries tal formalização já se faz possível. Então, do mesmo modo que a professora Sueli eu preciso investigar o que de início vocês sabem acerca da Combinatória e da Probabilidade para que, assim, eu possa dar continuidade destes assuntos. Se eu considero a construção de conhecimento de vocês enquanto contínua, então, eu não posso desconsiderar o que vocês sabem, pensam e sabem fazer sobre Probabilidade e Combinatória. Eu respondi, P-2?

67. **P-2:** *Sim, mas, por exemplo, numa sala de 30 alunos!*

68. **Pesquisador/Participante:** Você quer que eu dê um exemplo numa sala ‘real’?

69. **P-2:** *Então, eu entendi o exemplo que tem que aplicar pra entender em que nível estas crianças estão. Mas vai ser diferente... elas não estarão no mesmo nível?*

70. **Pesquisador/Participante:** Nunca você terá crianças exatamente no mesmo nível.

71. **P-2:** *Nunca! Então a gente se baseia no nível mais inferior, mais baixo?*

72. **Pesquisador/Participante:** Não! Infelizmente... O que é esperado... O ideal é... geralmente você encontra uns três níveis de ‘alunos’ numa sala. Os que estão abaixo do esperado para aquele ano de escolaridade, os que estão no esperado e os que estão acima. O ideal seria propor situações de ensino parecidas, ou não, dependendo da distância entre os estudantes, para cada grupo. E tentar estabelecer conversação com toda a sala, inclusive, quando possível em atividades comuns, para que você não tenha três salas numa única. Deu pra entender o que eu falei, pessoal? **[Todas as participantes sinalizaram, por meio de expressão facial, afirmativamente.]** Cobrar mais de um aluno e menos de outro, este menos no sentido de que aquele aluno ainda não possui condições de atingir tal compreensão!

73. **P-2:** *Mas daí, neste caso, não é interessante fazer duplas mesmo?*

74. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro! Mas daí para a constituição desta dupla é necessário outro cuidado, já que é importante agrupar alunos que estejam em níveis próximos. Se você colocar sujeitos distantes não vai dar certo!

75. **P-8:** *Como assim distantes?*

76. **Pesquisador/Participante:** De nível de conhecimento!

77. **P-4:** *Se você colocar um ‘inferior’ e um ‘superior’!*

78. **P-8:** *Ah tá!*

79. **Pesquisador/Participante:** Por exemplo, vamos supor que na sua sala 10 alunos estejam no nível avançado, 15 no intermediário e 10 no ‘inferior’. Então você pode juntar o inferior com o intermediário e os que sobraem do intermediário você junta com os superiores e os que sobraem dos superiores você forma duplas.

80. **P-4:** *E sempre trocando as duplas, né!?*

81. **Pesquisador/Participante**: Sim, fazer rodízio é interessante, mas não a todo o momento, porque tem um tempo até as duplas se entrosarem.
82. **P-8**: *Ah, sim!*
83. **Pesquisador/Participante**: Eu, com os meus alunos dos anos iniciais, fazia trocas a cada dois meses.
84. **P-8**: *Então as carteirinhas eram de dois em dois?*
85. **Pesquisador/Participante**: Sim! E mesmo quando as carteiras eram individuais os alunos juntavam as mesas.
86. **P-2**: *E essa checagem?*
87. **Pesquisador/Participante**: Eu demorava, P-2, uns 15 dias para checar os alunos. Por ser polivalente como vocês eu tinha que checar tudo: Matemática, História, Geografia, Ciência e Português. Eu aplicava provas, e eu nem falava que era prova porque os estudantes já vinham na 3.^a e 4.^a séries com aquele medo da prova... Eu falava assim: “Oh, pessoal, eu quero saber o que vocês já sabem, então escreva no papel!”. Eu pegava o currículo esperado para o ano anterior, elencava todos os conteúdos que eles teriam que já ter construído e montava situações problemas. Eu analisava se eles sabiam interpretar problemas matemáticos, o significado da adição, da subtração, as formas geométricas tridimensionais (aspectos gerais). Também verificava, no caso da Matemática, se compreendiam a organização dos elementos em listas, a questão do acaso e da aleatoriedade, o significado da medida não convencional. Então eu investigava a cada dia um Bloco de Conteúdo da Matemática, por exemplo.
88. **P-2**: *Nossa, dá trabalho!*
89. **Pesquisador/Participante**: Dava muito trabalho, pessoal! Só que eu percebo que, a partir dali eu tinha um ponto de partida seguro para que eu pudesse propor situações problemas possíveis e que realmente fossem desafiadoras. Mas, infelizmente, eu não agi assim no meu primeiro ano de atuação...
90. **P-8**: *Mas você tem que fazer isso com Português...?*
91. **Pesquisador/Participante**: Sim, com todas as disciplinas.
92. **P-8**: *Com todas as matérias!*
93. **Pesquisador/Participante**: É claro que no 2.^o e 3.^o ano, no início, você prioriza Português e Matemática. Depois, com o avanço nos anos você vai investigar Ciências, Geografia...
94. **P-8**: *Mas você não sabia também, desculpa, eu interrompi...*
95. **Pesquisador/Participante**: Não, tudo bem! Quando eu comecei a dar aulas... eu sabia um pouco de Piaget no discurso, certo!?

96. **P-8:** *É igual a gente!*

97. **Pesquisador/Participante:** Só que a minha prática era ainda empirista. Eu achava que o simples explicar seria suficiente, e nem dava tempo pro aluno agir. Foi mais ou menos assim que eu agi no meu primeiro ano de magistério... A gente montou o plano curricular anual e listamos todos os conteúdos a serem ensinados. Daí, no primeiro dia de aula, com aquela lista de conteúdos em mãos eu ‘enchi’ a lousa de conteúdos...

98. **P-8:** *Tadinhos!*

99. **P-2:** *A overdose...*

100. **Pesquisador/Participante:** A minha sorte naquele ano é que esta sala era composta em seus 90% por alunos muito bons, então eles já tinham uma capacidade de leitura, escrita e interpretação excelentes, conheciam mecanicamente os algoritmos, mas já os conheciam... Assim, mesmo com essa minha postura, deu pra salvar, digamos assim... No ano seguinte, e eu estava com esta postura ainda, embora eu tivesse acabado de iniciar o mestrado, as ideias ainda estavam muito soltas... sabe!? Eu peguei uma sala muito “fraca”, e daí no 1.º bimestre foi um fracasso total. A incidência de notas 0, sem brincadeira, foi em mais ou menos 80% da sala.

101. **P-8:** *Ai! Nossa, que desespero!*

102. **Pesquisador/Participante:** E foi esse resultado em todas as áreas!

103. **P-2:** *Nossa, e agora!?*

104. **P-8:** *Ai, eu não sei o que eu faço! [As demais participantes mostraram-se aflitas com a situação exposta pelo Pesquisador/Participante.] Eu já tenho tanta crise quando eu vou explicar e não dá certo... imagina se eu explico, explico, explico e no final os alunos tiram zero!?*

105. **Pesquisador/Participante:** O que eu fiz com uma colega que estava na mesma situação!? Porque esses alunos vieram de uma “besteira” pedagógica feita pela escola, já que nós pegamos duas turmas compostas de alunos que tinham dificuldades, sejam de ensino e de comportamento, ou seja, haviam agrupado estudantes com todos os tipos de problemas. Desse modo, os nossos alunos tinham muita dificuldade, às vezes até de conteúdos da 1.ª série, e eles já estavam na 3.ª série. Como eu falei pra vocês, eu e minha amiga bombardeamos os alunos de conteúdos, e eles já estavam tão acostumados com o autoritarismo que a maioria “fazia”, ou melhor, reproduzia o que a gente colocava na lousa. Nós éramos autoritários, ainda... e hoje eu vejo que não ser autoritário depende de um exercício de reflexão diária que o professor deve fazer... Vocês concordam comigo, pessoal?

106. **P-8:** *Sim!*

107. **Pesquisador/Participante:** Porque uma colocação sua pode calar o aluno na hora! E, por mais atenção que nós dois tínhamos com os alunos, carinho, porque você tem que demonstrar afeto, ainda mais com alunos pequenos...

108. **P-8:** *Sim!*

109. Pesquisador/Participante: Os estudantes gostavam da gente mas não tinham liberdade de questionar!

110. P-8: *Nossa, e como isso é difícil! Na aula da professora T. eu não tive coragem de questionar! Eu gosto da professora T., a gente tem amizade mas eu não tive coragem, eu não tive coragem!*

111. P-2: *É difícil!*

112. Pesquisador/Participante: E daí, pessoal, o que eu fiz? Eu estava começando a estudar a fundo Piaget por causa do mestrado... Na Iniciação Científica eu estudei Piaget mais na questão das estruturas aditivas e multiplicativas, assim eu não investiguei a minha postura epistemológica. Já no mestrado, como eu investiguei a postura pedagógica das professores eu precisei pensar sobre esta postura, e daí investiguei inclusive a minha...

113. P-8: *Daí você investigou a sua!*

114. Pesquisador/Participante: É. Teve um momento, neste segundo ano de atuação que eu pensei assim: Nossa, eu falo que sigo uma teoria, mas na verdade eu não sigo nada!

115. P-8: *Era aquilo que você já tinha, né, que você aprendeu...*

116. Pesquisador/Participante: Como eu já havia falado, embora no meu Ensino Fundamental tive muitos professores dedicados, o meu ensino foi extremamente tradicional, com ideias empiristas e racionalistas. Então, quando eu tive o choque da realidade no início da carreira, eu utilizei na sala de aula aquilo que estava mais ‘forte’ em mim, que era: Professor fala, aluno copia, resolve o modelo e, em seguida, corrige. E, com esta postura, naquela turma o fracasso foi total. Daí nós utilizamos muitos jogos, exploramos muito o oral para que as crianças desenvolvessem a capacidade de se expressar, para depois passar desta expressão oral para a escrita, já que nós tínhamos que alfabetizar também! Então, por meio dos jogos trabalhamos interdisciplinarmente, onde os alunos tinham que ler problemas, resolver, registrar a seu modo.

117. P-8: *Nossa, que difícil! Eu fiz estágio num escola da Educação Infantil e os alunos já tem várias noções...*

118. Pesquisador/Participante: É, porque nesta escola tem esta intencionalidade. E daí, pessoal, com esta turma eu consegui dar conta dos alunos que estavam no nível intermediário, os que estavam muito abaixo eu não dei conta, e os que estavam muito acima eu tive que ‘abandonar’. Certo!? Mesmo tendo consciência disso, porque eu não conseguia... era novo na profissão, e eu não conseguia montar diferentes situações de ensino e mediar para cada nível.

119. P-8: *Nossa, a gente leu uns textos em que a professora conseguia... Você lembra que a gente leu um texto em que a professora... [P-2 indicou, por meio de expressão facial, lembrar-se do referido texto.] preparava aulas diferentes...*

120. Pesquisador/Participante: Eu até preparava aulas diferentes com minha amiga, só que eu não conseguia mediar. Nós trazíamos atividades de alfabetização para um grupo, para os intermediários e para os avançados...

121. **P-8:** *Nossa, mas é difícil dar conta... Até porque você fica num grupo e não dá tempo dos outros...*

122. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo! Quando eu estava dando atenção aos iniciantes, os que já sabiam acabavam rapidamente a atividade e começava a indisciplina... Eu não conseguia administrar estes diferentes ritmos de aprendizagem. Nós até montamos no fundo da sala o Canto da Leitura, da Informação... só que não dava pra entreter tanto o estudante que terminava suas atividades... E daí a criança sem desafio vai bagunçar mesmo! E o que estou contando pra vocês foi uma realidade que eu vivi!

123. **P-8:** *E como é que resolveu?*

124. **P-2:** *Ele deu conta do intermediário!*

125. **Pesquisador/Participante:** Sim, dos alunos que estavam neste nível.

126. **P-8:** *Ah, tá, entendi!*

127. **Pesquisador/Participante:** No ano seguinte que eu peguei uma turma difícil, também, consegui dar conta dos iniciantes e dos intermediários...

128. **P-8:** *É, você já tinha uma experiência de como trabalhar!*

129. **Pesquisador/Participante:** É, porque nós aprendemos a ser professores sendo professores e pensando – refletindo – sobre nossa prática!

130. **P-2:** *Nossa, mas então até o jeito de se formar as salas de aulas nossa está errado!*

131. **Pesquisador/Participante:** Aqui na Pedagogia, P-2?

132. **P-2:** *Não, nas escolas! Porque então tinha que ter a sala dos mais “fracos”, dos intermediários e dos fortes.*

133. **P-8:** *Mas não pode, você não vê no planejamento...*

134. **Pesquisador/Participante:** Não pode, P-2, porque isso é uma tentativa de homogeneizar e até um tipo de discriminação... O problema é que estão havendo distâncias muito grandes entre alunos numa mesma turma que não dá tempo... Numa sala que vem de um ensino bom, digamos assim, irá ter diferenças entre os alunos, mas são diferenças possíveis de estabelecer relação de um grupo com o outro. Tudo bem o que eu falei, pessoal?

135. **P-2:** *Tudo! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*

136. **P-8:** *O colégio S. era assim, minha filha estudava lá. Fazia uma prova, daí tinha a classe A que eram os melhores, tiravam notas mais boas... era separação mesmo! E aí ia... dependendo das notas ia ficando. Então aquela classe sempre ia pra frente porque eles prestavam atenção, faziam exercícios...*

137. **Pesquisador/Participante:** Olha, eu não sou favorável à homogeneizar. Mas, do jeito que está, eu fico pensando na questão prática da sala de aula, porque se a gente não consegue dar conta de grupos tão diferentes... eu fico com muitas dúvidas...
138. **P-8:** *É, porque alguém vai sair prejudicado, tanto o que sabe mais como o que não sabe!*
139. **P-4:** *Eu acho que mesmo se separar as três, deixar um só no fraco, o outro mais ou menos e o outro no forte, o professor, assim, não vai... é... por exemplo, se preocupar com os fracos, porque o professor pensa assim: Ah, eu não vou me esforçar porque eles não vão mesmo!...*
140. **Pesquisador/Participante:** É por isso que eu sou contrário a essa homogeneização.
141. **P-5:** *Eu lembro em uma aula, em algum texto que a gente leu e é exatamente isso que você falou [Referiu-se à P-4], eu me recordo!*
142. **P-2:** *Mas é porque rotula, também!*
143. **P-4:** *Exatamente... Eu, óbvio, não vou fazer isso! Mas, pega um professor que diz: Ah!, daí você já vai com aquela visão porque todo o mundo fala mal daqueles alunos...*
144. **P-2:** *Ah, a gente vive isso aqui, porque todo mundo fala que a nossa sala é péssima!*
145. **P-8:** *É, a nossa sala!*
146. **P-7:** *Eles já vem desmotivados! [Referiu-se aos professores que ministram aulas na turma de Pedagogia.]*
147. **P-5:** *E mesmo os alunos! Eu não ia gostar de saber que estou na sala D! [Referiu-se ao alunos enquadrados nas salas consideradas ‘ruins’, fracas em aprendizagem.] E que tem A!*
148. **P-7:** *Eu já estudei em sala assim, e me senti desmotivada! Porque era assim...*
149. **Pesquisador/Participante:** Perceba, P-2, que também esta tentativa de homogeneização não dá certo!
150. **P-2:** *Não mesmo! Então não tem solução, gente!*
151. **Pesquisador/Participante:** Tem sim! A solução existe... Pesquisadores em Formação de Professores, em relação à prática docente afirmam que, uma possível solução é o professor ficar em período oposto às aulas, na escola, pensando sobre os seus alunos...
152. **P-2:** *Ah, quer dizer que pode ter uma solução a longo prazo!*
153. **Pesquisador/Participante:** Sim!
154. **P-2:** *Ah, mas eu quero saber do agora!*

155. **Pesquisador/Participante**: Concordo com você! Eu vejo que é necessário mudar a carreira docente e a estrutura.

156. **P-2**: *E daí acontece o que apareceu no jornal hoje, né, que os alunos egressos do Ensino Médio escrevem estagiário com 'j'!*

157. **Pesquisador/Participante**: Uma outra solução que eu vejo é garantir, desde a Educação Infantil, que os alunos não tenham estas distâncias de 'abismo'!

158. **P-2**: *Sim!*

159. **Pesquisador/Participante**: Porque distâncias vão ter, já que são pessoas diferentes! Só que não podem haver, numa mesma sala, distâncias de 'abismos' que impedem com que as pontes sejam interligadas entre alunos de diferentes níveis. Tudo bem esta analogia!? E acho que isso deve começar já nos anos iniciais, porque o aluno que chega no 4.º e 5.º ano assim, olha, a coisa fica 'feia'! Quem vivenciou isso, como é o meu caso por quase 6 anos, sabe que a situação não está fácil, não é brincadeira. E daí, o que fazer numa situação dessa? Lúdico, jogo, mediação, deixar o aluno se expressar, só que você não vai conseguir dar conta de todos os conteúdos esperados para aquele ano de escolaridade, infelizmente, já que você está resgatando conteúdos que, em hipótese, já deveriam ter sido construídos.

160. **P-2**: *Por isso é muito frustrante.*

161. **P-8**: *Nossa, você tá montando o currículo de Matemática pra prefeitura de Bauru, então pra você é muito frustrante isso!*

162. **Pesquisador/Participante**: Sim, claro!

163. **P-7**: *E daí você faz de tudo, mas se no outro ano o professor não tiver nem aí vai perder tudo...*

164. **Pesquisador/Participante**: Isso que você falou, P-7, pode ocorrer sim. Se no ano seguinte o professor não der continuidade, a chance em 'perder', digamos assim, ocorre. Como a gente vem discutindo, durante a construção do conhecimento o sujeito possui avanços, mas também há momentos de dúvidas. Se este novo conhecimento não for consolidado, estabilizado, pode sim haver 'retrocessos', digamos assim.

165. **P-8**: *Nós mesmas fomos numa escola, nós quatro [Referiu-se à P-2, P-4 e P-7.] e acompanhamos uma professora... Ela era excelente, as crianças tinham um ritmo com ela, agora eu fui lá esses dias e mudou a professora, então já mudou tudo, eu percebi que aquele ritmo que eles tinham já frouxo, a criançada tá mais assim mais largada... mais... Então, realmente, se tem uma sequência...*

166. **Pesquisador/Participante**: Entendi! Lembra, P-5, que você falou que o professor tem que desencadear o interesse no aluno?

167. **P-5**: *Sim!*

168. **Pesquisador/Participante**: Foi isso o que a P-8 acabou de falar referente àquela professora que mantinha nos estudantes àquela ritmo. Nós somos os motivadores à

aprendizagem dos nossos alunos. Se não desencadearmos este interesse, a criança não vai ter interesse em agir sobre aquilo.

169. **P-8:** *Você percebe isso... olha...*

170. **Pesquisador/Participante:** E perde o ritmo, como você mesma disse! Tudo bem esta questão, P-8!?

171. **P-8:** *Sim!*

172. **Pesquisador/Participante:** Tem solução sim, só que demanda um trabalho coletivo envolvendo direção e coordenação, porque se o professor abraçar isso sozinho, vai acabar, na maior parte das vezes, desenvolvendo uma síndrome, ficando com depressão, entre outras doenças.

173. **P-2:** *É neste sentido que eu falo, não tem solução! É muito triste. A gente até leu um texto que comentava de um projeto de Formação de Professores realizado em Portugal onde, em cada escola, haveria um apoio para os professores em exercício discutirem seus problemas reais. Só que a gente ficou sabendo que este projeto, embora eu ache muito bom, não deu certo, e não sei o porquê. Agora, eu fico pensando aqui nós, no nosso Grupo de Estudo. Tira você, a sua figura e junta nós! [Referiu-se às participantes.] Como sair do lugar sendo que a formação foi a mesma e a gente não tem articulação, eu sei contar as minhas experiências do estágio, mas fica ‘patinando’ naquilo! Não sai! Então eu acho que teria que ter, realmente, alguém pra mediar tudo isso!*

174. **Pesquisador/Participante:** Pra mediar tudo isso! Como estava escrito no texto referente ao projeto em Portugal?

175. **P-2:** *Isso! Mas como estava escrito lá não dava pra entender isso, porque falou que deu autonomia pros professores se autoformarem... eu entendi que era por eles mesmos, só que troca experiências entre as escolas também... Não tô falando que eu não acho válido, eu acho válido!*

176. **Pesquisador/Participante:** Eu entendi!

177. **P-8:** *É que não deu certo, e foi isso que eu fiquei mais decepcionada!*

178. **P-2:** *P-8, esta troca de experiências é o que a Diretoria de Ensino já faz!*

179. **P-4:** *E a gente já assistiu isso nos HTPCs.*

180. **P-7:** *E nesse HTPC, o que era pra coordenadora mediar, ela ficou quieta e todo mundo batendo boca.*

181. **P-2:** *E não saiu do lugar!*

182. **P-7:** *Imagina se toda a semana tiver uma reunião dessa! Quem vai querer ir? Eles não chegam em lugar nenhum!*

183. **P-4:** *Não, mas é toda semana isso! [Risos entre todos.]*

184. **P-8:** *Mas eu li recentemente um artigo de Nóvoa e ele falou que teria que implantar um projeto que tem que ser parecido com a medicina!*
185. **Pesquisador/Participante:** Sim!
186. **P-8:** *Residência! Daí você vai acompanhar um professor que é experiente!*
187. **Pesquisador/Participante:** E eu acho que deve ser assim!
188. **P-2:** *Desde que este experiente seja um bom professor!*
189. **Pesquisador/Participante:** Claro!
190. **P-7:** *Daí você tem que ter sorte pra chegar numa escola e ter um bom professor como esse!*
191. **Pesquisador/Participante:** Até porque, pessoal, anos de docência não implica eficiência!
192. **P-2:** *Não!*
193. **Pesquisador/Participante:** Para ser um bom professor é necessária uma constante reflexão acerca de sua prática, alguns autores em Formação de Professores citam o professor reflexivo.
194. **P-5:** *A proposta do PIBID é isso, que ele é um Programa de Bolsa de Iniciação à Docência, então você acompanha o professor... só que não funciona!*
195. **P-2:** *Não!?*
196. **P-8:** *Não!?*
197. **P-5:** *O meu projeto funciona!*
198. **Pesquisador/Participante:** É decepcionante!
199. **P-5:** *O meu projeto funciona! Eu acho ele bom e lindo! Mas...*
200. **P-8:** *Qual é o seu projeto?*
201. **P-5:** *Então... tem inúmeras dificuldades... o nosso projeto... a gente vai na aula... a proposta era essa, de residência, mas ninguém fala essa palavra... mas a proposta era mais ou menos essa! Há mais de um ano que funciona, a gente tá com um projeto paralelo que é bom e funciona, mas não é esse caráter. E é complicado, porque... você não quer, você vai entrar na sala de aula e ficar horas ali igual o professor e vai ganhar uma bolsa!? Você vira mão de obra barata, tem isso também! Segundo, tem muita coisa, tem muito professor que tá aprendendo, o que faz o que... os seus professores já fizeram, então você tem suas lembranças, você não precisa estar ali! [Referiu-se ao fato de que alguns professores participantes deste projeto possuem práticas docentes análogas as de seus antigos professores da Educação Básica.] Tem muita coisa envolvida que eu acho complicado!*

202. **Pesquisador/Participante**: Eu já falei isso pra vocês...Para a ocorrência de cada Grupo de Estudo eu vivo um desequilíbrio muito grande para que eu possa trazer o material pra vocês, porque eu tenho que estar constantemente refletindo nas minhas ações anteriores e nas de vocês! É através disso que eu tenho elaborar as melhores ações no sentido de dar prosseguimento ao processo de construção de conhecimento (de vocês)... Como vocês mesmas falaram a nossa proposta é diferenciada, tudo bem?

203. **P-2**: *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

204. **Pesquisador/Participante**: Só que, para ‘conseguir’ este diferenciado, isso exige de mim grande esforço, e é claro, de vocês também! Eu me sinto responsável, e sou, pela proposição das atividades do nosso Grupo...

205. **P-8**: *Mas é você que está provocando essa discussão!*

206. **Pesquisador/Participante**: Fazendo uma análise dos dois meses e meio de Grupo eu percebo que, em muitos momentos, faço o papel de professor!

207. **P-8**: *Claro!*

208. **Pesquisador/Participante**: No início eu pretendia não ter esse papel, mas sim um Grupo de Pesquisa-Ação. Mas eu percebi que, mediante o contexto, não seria o mais adequado, foi por isso que eu propus um grupo colaborativo em que tem o pesquisador (o meu caso), os participantes (vocês) e nós estamos interagindo para solucionar um problema em comum, ou seja, a prática docente de Matemática. E isso exige de mim muita reflexão, toda a semana eu releio o material já coletado para identificar pontos de conexão com o próxima ação e reflito acerca da parte teórica que utilizo para alicerçar o nosso Grupo de Estudo. Àqueles objetivos que a gente analisou em nosso primeiro encontro, eu acho que dá pra vocês perceberem, eu tento efetivá-los a cada Grupo de Estudo, seja um deles, ou dois, ou três por semana. Desse modo, o que estou querendo dizer pra vocês é que eu faço movimentos de retomadas constantes, para ver se àquilo que eu me propus inicialmente está sendo realizado, porque pode acontecer de me perder no meio do caminho.

209. **P-8**: *É verdade!*

210. **Pesquisador/Participante**: É por isso que eu falo da necessidade da constante ação, reflexão e ação...

211. **P-5**: *Certo!*

212. **Pesquisador/Participante**: É isso que cada professor deve (deveria) fazer. No entanto, temos que analisar se as atuais condições permite ao docente realizar isso.

213. **P-2**: *É verdade!*

214. **Pesquisador/Participante**: Por ter trabalho no estado um bom tempo, eu vejo que os professores têm dificuldade para fazer estas constantes reflexões sobre a prática docente por vários motivos, entre elas a falta de tempo e de apoio. É claro que grande parte dos professores realiza reflexões sobre o que está fazendo, mas constantes e de modo profundo... vejo que não!

215. **P-8:** *Você trabalhava um período só?*

216. **Pesquisador/Participante:** Sim! Só que com o envolvimento na graduação ou na pós-graduação, eu não tinha tanto tempo de me dedicar em período contrário para tal reflexão. É claro que o fato de fazer uma dissertação em Educação Matemática me ajudava bastante a refletir sobre minha própria prática. Mas, eu fico pensando, se eu não estivesse envolvido na pós-graduação, certamente eu trabalharia nos outros períodos porque economicamente fica complicado viver só com o salário de um período. A maioria das minhas amigas fazia isso e acumulavam cargo na prefeitura. E mesmo com o pouco tempo, elas eram muito comprometidas em sala de aula, mas, infelizmente, não tinham tanto tempo para esta reflexão. De tudo isso dá pra gente ver que a questão da Formação do Professor é séria, e um apoio deve ser dado ao professor em início de carreira para que ele vá refletindo constantemente sobre sua prática.

[Após comentar sobre a estrutura dada ao professor pelo Sistema de Ensino de Bauru no qual o docente, após alguns anos, tem a possibilidade de ficar na escola em período contrário às aulas para a preparação de atividades, P-5 resolveu explicar novamente o projeto do qual faz parte pois percebeu que a sua exposição anterior não havia ficado compreensível.]

[Em continuidade, o Pesquisador/Participante solicitou a leitura do Momento Síntese referente ao encontro anterior. P-8 foi a primeira a compartilhar sua produção.]

217. **P-8:** *Foi muito bom relembrar todas as fases do desenvolvimento proposto por Piaget e também pensar na prática educativa. Porque eu fui pesquisar, né, como eu havia falado. Foi proposto ao grupo leituras, estudos, discussões e foi mais fácil a aprendizagem. Daí vem a importância do professor em acompanhar, corrigir, levantar novas hipóteses, provocar situações. Igual o que você faz! A gente discute, vê o lado bom, o lado ruim, então isso é que eu achei muito importante.*

218. **Pesquisador/Participante:** Ok! Excelente! E você, P-7?

219. **P-7:** *Eu consegui compreender realmente o que as pessoas querem dizer quando falam que temos que partir do interesse dos alunos, ou seja, o professor não pode ficar esperando que o aluno diga o que ele quer aprender ou não, mas é o professor que tem que despertar no aluno esse real interesse e isso não é uma tarefa fácil. Também compreendi que cada estágio corresponde a um momento psicológico que a criança está vivenciando, caracterizando cada um pelo comportamento que está sendo utilizado pelo sujeito. Assim, as idades propostas não são fixas e nem determinadas, pois dependem dos meios sociais em que as crianças vivem.*

220. **Pesquisador/Participante:** Ok! Ótimo! Leia pra gente, P-4!

221. **P-4:** *Então, eu coloquei só do estágio sensório-motor!*

222. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem!

223. **P-4:** *Não deu tempo de fazer o resto! [Risos entre as participantes.] Desculpa!*

224. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, vamos lá!

225. **P-4:** *O estágio sensório-motor vai desde o nascimento aproximadamente os dois anos de idade. Neste estágio a criança utiliza os reflexos hereditários para, assim, começar as assimilações e, a partir dessas assimilações a criança vai acomodando e assimilando.*

226. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você, P-2?

227. **P-2:** *Nesse encontro discuti sobre a importância de despertar a necessidade, ou seja, os interesses para obter ações do sujeito. Na Educação o professor desperta este interesse nas crianças para que essas desejem aprender através de situações de desequilíbrio. Em seguida tratamos dos estádios do desenvolvimento que inicia-se com o sensório-motor, reflexos, inteligência prática, o agir do sujeito sobre o objeto baseado na manipulação culminando com as noções de objeto permanente e de causalidade e com o aparecimento da linguagem indicando a passagem para o estágio pré-operatório em que a linguagem possibilita comportamentos simbólicos. Neste estágio são evidentes o egocentrismo e os monólogos coletivos, ainda não se tem noção da conservação. No estágio operatório concreto já é possível realizar a reversibilidade do pensamento, a propriedade transitiva realizada com objetos concretos não necessariamente presentes no local, mas necessariamente elementos com os quais a criança já manteve contato físico. E, por fim, o estágio operatório formal em que o pensamento é hipotético-dedutivo, ou seja, é possível o trabalho apenas com hipóteses desapegando-se totalmente do concreto.*

228. **Pesquisador/Participante:** Ok! Excelente. P-5...

229. **P-5:** *Eu coloquei que: Eu já havia tido um contato com os estádios propostos por Piaget e já conhecia as nomenclaturas, mas só com o nosso encontro que eu pude conhecer mais a fundo cada estágio, ouvi exemplos de atividades a serem realizadas em cada nível de desenvolvimento... E coloquei também que é muito importante que o professor conheça tais estágios para propor atividades que sejam condizentes com a capacidade de cada criança.*

230. **Pesquisador/Participante:** Ok!

231. **P-5:** *Só uma pergunta!*

232. **Pesquisador/Participante:** Pois não!

233. **P-5:** *É certo falar capacidade de cada criança, ou não?*

234. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro! Pessoal, pra hoje nós temos o texto da Equilibração. P-2, realiza a leitura pra gente, por favor!

[A referida participante fez a leitura do item 12.1 – denotado abaixo:]

12.1 Um movimento de retomada

No encontro anterior abordou-se a questão do interesse (necessidade) enquanto desencadeador da ação do sujeito sobre o objeto permitindo-lhe o desenvolvimento (cognitivo e afetivo/moral.). Por meio das discussões realizadas, chegou-se à conclusão de que, em sala de aula, o professor deve ‘despertar’ o interesse do aluno à assimilação-acomodação dos conteúdos escolares por meio de situações ‘desequilibradoras’. Também foram denotados os fatores responsáveis pelo desenvolvimento do sujeito, no qual o processo (mecanismo) de *Equilibração*, além de constituir um dos fatores, é o responsável pela coordenação ‘harmônica’ dos demais (maturação orgânica, interação social e experiência física e lógico-matemática).

Visando a uma ‘melhor’ compreensão acerca do processo (mecanismo) de Equilibração, no próximo item far-se-á uma breve análise.

[Concluída a leitura, o Pesquisador/Participante fez o seguinte questionamento:]

235. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, vocês perceberam que estou sempre retomando os assuntos abordados? Por que será que eu faço isso?

236. **P-2:** *Pra fixação?* **[Risos entre todas as participantes.]** *É brincadeira! Acho que é pra isso mesmo, a gente rememorar no sentido de pensar a respeito... “Será que eu realmente compreendi aquilo?”.*

237. **P-8:** *É igual eu fiz! Eu li esse movimento e retornei às leituras, pra ver se tudo o que você tinha falado aqui [Referiu-se ao item 12.] eu tinha realmente aprendido... porque eu sou mais lerda, assim..., eu tenho que ler, tenho que ver o exercícios... [Riso iniciado pela participante e seguido pelas demais.]* *Aí realmente eu peguei, foi isso que o Pesquisador/Participante quis me passar!*

238. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem essa parte, então, pessoal? **[Como não houveram dúvidas, P-8 iniciou a leitura do próximo item – 12.2. Observe-o abaixo:]**

12.2 O Mecanismo de Equilibração

Inicialmente, faz-se relevante pontuar que o equilíbrio psicológico – na teoria piagetiana – não é concebido “como um balanceamento de forças em estado de repouso”, mas sim como “compensação proveniente das atividades do sujeito em resposta às perturbações exteriores.” (PIAGET, 2001, p. 88). Mais uma vez, Piaget destaca a imprescindibilidade da ação do sujeito, pois, “ao *maximum* de equilíbrio corresponderá, então, não um estado de repouso, mas um *maximum* de atividades do sujeito que compensarão, de um lado, as perturbações atuais, e, por outro lado, as perturbações virtuais.” (PIAGET, 2001, p. 88).

[Após a leitura, o Pesquisador/Participante chamou a atenção ao fato da Equilibração ser um movimento constante, um agir sobre realizado pelo sujeito para manter-se ‘equilibrado’, não podendo ser entendido como uma balança em repouso. Quando questionado por P-8 se tal movimento ocorre durante a vida toda, o Pesquisador/Participante respondeu afirmativamente, ressaltando haver episódios em que são observados equilíbrios mais estáveis. Como exemplo, foi citado o equilíbrio orgânico necessário à manutenção da saúde física e mental. Outro exemplo abordado referiu-se à atual crise econômica mundial, no qual o Pesquisador/Participante salientou ser um exemplo de desequilíbrio a nível social.]

[P-4 deu continuidade à leitura do texto, esboçado a seguir:]

Neste ponto torna-se oportuno o questionamento: “O que constitui uma perturbação?” Uma perturbação é todo obstáculo que não permite ao sujeito assimilar o meio (objeto), ou seja, decorre da não possibilidade de incorporar o meio aos esquemas de ação ou às estruturas de pensamento já construídas. Dependendo do nível dessa perturbação, o sujeito pode ignorá-la ou agir sobre a mesma compensando-a. Piaget (1995) denota 2 situações observadas nos níveis elementares em relação a tal compensação:

Nos níveis elementares, as compensações podem consistir, apenas, em eliminar o obstáculo, negligenciando-o ou deformando a representação, e isto já constitui um início de construção, visto que uma reação negativa é um esboço de negação. Ou então, ao contrário, a compensação consiste em modificar o esquema de assimilação e é, então, construtiva, no sentido de uma diferenciação, exigindo esta, em seguida, novas integrações. (PIAGET, 1995, p. 284-285)

239. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, vamos tentar visualizar isso!

240. **P-8:** *É verdade, eu preciso de exemplo!*

241. **Pesquisador/Participante:** Por exemplo na questão da conservação da bolinha de argila. A bolinha está na forma de uma esfera, e o experimentador faz ela ficar alongada, parecendo uma salsicha. Em seguida, é posto uma perturbação na criança quando ela é questionada se mudou a quantidade de argila ao passar da bolinha para a ‘salsicha’. No momento do estágio pré-operatório, o sujeito vai deformar essa realidade dizendo que tem mais ou que tem menos argila, ou seja, ele não vai conservar e mostra uma reação negativa à pergunta do experimentador. Ajudou a compreender, P-8?

242. **P-8:** *Sim!*

243. **Pesquisador/Participante:** Agora, quando o sujeito já conserva, ele modifica o seu esquema para que seja reversível, então podemos dizer que houve uma diferenciação.

244. **P-8:** *Ah, tá!*

245. **Pesquisador/Participante:** Melhorou com o exemplo?

246. **P-8:** *Sim!*

247. **Pesquisador/Participante:** Mas não é sempre que nós, perturbados, vamos conseguir integrar um novo conhecimento acomodando. Se àquilo for demais, a gente deforma a realidade, se engana, digamos assim, ou então abandona/ignora. É o que está posto no texto! Tudo bem, pessoal?... Quando a gente pega um texto pra ler, de qualquer área, e não entende os três primeiros parágrafos, a gente ‘finge’ que entendeu...

248. **P-8:** *É verdade!*

249. **Pesquisador/Participante:** Ou, nós ignoramos e vamos ao Facebook! **[Risos entre todos.]** Vocês concordam, comigo, pessoal?

250. **P-8:** *Mas essa daqui vai até o fim!* **[Apontou para P-2.]**

251. **P-2:** *Ah, é verdade, eu vou até o fim!*

252. **Pesquisador/Participante:** Então este é um tipo de perturbação. Você pode compensar deformando ou você não compensa quando ignora. Ou você compensa integrando, e aquele novo vai fazer parte de suas estruturas de pensamento. E quando se dá uma compensação e sua estrutura de pensamento melhora nós observamos uma Equilibração Majorante. Tudo bem, pessoal? **[Como ninguém se pronunciou, indicando haverem compreendido o exposto, P-5 deu prosseguimento à leitura.]**

É possível observar, novamente, o papel da assimilação e da acomodação ao desenvolvimento do sujeito, pois, uma compensação construtiva implica em modificação do esquema de assimilação, ou seja, em acomodação. Conforme Piaget (2001):

Levando-se em conta, então, a interação fundamental entre fatores internos e externos, toda conduta é uma *assimilação* do dado a esquemas anteriores (assimilações a esquemas hereditários em graus diversos de profundidade) e toda conduta é, ao mesmo tempo, *acomodação* destes esquemas à situação atual. Daí resulta que a teoria do desenvolvimento apela, necessariamente, para a noção de equilíbrio, pois toda conduta tende a assegurar equilíbrio entre fatores internos e externos ou, mais em geral, entre assimilação e a acomodação. (PIAGET, 2001, p.

89)

Um ponto importante a destacar acerca deste processo (mecanismo) de Equilibração é que a sua ocorrência (efetivação) não conduzirá ao ‘equilíbrio anterior’, mas a um estado melhor daquela ao qual se partiu, construindo ‘formas’ melhores de equilíbrio, denominado por Piaget (1976) como **Equilibração Majorante**. Sobre tal ideia, o autor observa o seguinte:

O conceito central que nos parece impor-se na explicação do desenvolvimento cognitivo [...] é, pois, o de um melhoramento das formas de equilíbrio, ou seja, de uma “equilibração majorante”. Nosso esforço consistiu em procurar-lhes os mecanismos constituindo o problema em explicar suas duas dimensões inseparáveis: a compensação das perturbações responsáveis pelo desequilíbrio motivador da pesquisa e a construção das novidades que caracterizam a majoração. (PIAGET, 1976, p. 156)

[Como não houveram dúvidas provenientes desta parte do texto lida, P-2 continuou a leitura. Observe o trecho:]

Assim, todo desequilíbrio representa uma possibilidade ao desenvolvimento do sujeito por ‘impulsioná-lo’ a ultrapassar o seu estágio atual por meio de uma reequilibração. Neste aspecto podemos remeter a discussão à questão do interesse (necessidade), já salientado em item anterior. Conforme Piaget (1976), a fecundidade do desequilíbrio,

[...] se mede pela possibilidade de superá-los – quer dizer, sair deles. É, pois, evidente que a fonte do progresso deve ser procurada na reequilibração, naturalmente, no sentido, não de um retorno à forma anterior de equilíbrio, cuja insuficiência é responsável pelo conflito ao qual esta equilibração provisória chegou, mas de um melhoramento dessa forma precedente. (p. 19)

253. **Pesquisador/Participante**: Vamos remeter essa discussão às aulas de Matemática que vocês tiveram! P-4, embora você não se recorde devido àquele bloqueio que, suponho eu, seja grave a nível psicológico. Você passou a não ser mais desafiada nas aulas de Matemática, não foi isso?

254. **P-4**: Sim!

255. **Pesquisador/Participante**: Então você fingia que aprendia para que isso não lhe causasse constrangimento!?

256. **P-4**: Sim!

257. **Pesquisador/Participante**: Copiava do colega, não por má fé, não é isso, mas era para que você não fosse prejudgada pelo professor.

258. **P-4**: Eu lembro, assim, do 3.º colegial, posso falar?

259. **Pesquisador/Participante**: Sim!

260. **P-4**: O professor do cursinho... ele era do cursinho e dava aula pra gente. E daí era aquela sala enorme, eu acho que tinha 60 alunos na sala. E daí ele passava o exercício da apostila e falava pra gente fazer! Eu olhava aquilo e pra mim era tudo grego! **[Risos da participante.]** Eu não sabia nem por onde começar!

261. **P-8**: Não tinha explicação?

262. **P-4:** *Ele partia do pressuposto que a gente já tinha toda aquela base, né... e eu, imagina! Então ele... até no começo eu fazia esforço e pensava “To entendendo!”*, daí ele já... por exemplo, ele ia fazer o exercício na lousa! Aí ele começava a fazer e não ia passo a passo, sabe... certinho, assim! Então ele começava a fazer e eu até acompanhava, mas daí ele pulava uns pedaços, porque ele já sabia se todo mundo já entendeu, então ele já dava o resultado final... porque todo mundo entendeu o processo que chega ali. E eu... **[Indicou, gestualmente, não haver compreendido a explicação do referido professor de Matemática.]**

263. **Pesquisador/Participante:** A P-4, no início, tentou manter a atividade ao máximo, só que a perturbação foi tão grande, o desequilíbrio – que é o sinônimo – foi tão grande que não deu pra ela compensar isso, para que pudesse acomodar esse novo. Então ela teve que ignorar, ela foi obrigada a ignorar...

264. **P-4:** *É, eu copiava lá do jeito que ele colocou a explicação na lousa, não entendia...*

265. **Pesquisador/Participante:** Quando eu digo ignorar é no sentido de você não conseguir aprender! Não é que ela ignorou o professor... ela o acompanhou, mas ignorar no sentido daquilo não estar significando nada!

266. **P-8:** *Mas eu, tipo assim, se eu vejo se eu cheguei no resultado e não vi... eu ia procurar ver como chegava com os colegas, não ia perguntar pro professor. Eu não ia levantar a mão no meio da sala e perguntar, mas eu ia perguntar “Gente como chegou neste número!?”* **[Referiu-se aos seus colegas de sala.]** *Eu faço isso até hoje com as meninas!* **[Referiu-se às participantes.]**

267. **P-7:** *Mas eu, mesma, ficava quieta!*

268. **Pesquisador/Participante:** O problema é que a P-4...

269. **P-4:** *Eu tinha vergonha!*

270. **Pesquisador/Participante:** Suponho que a P-4 já venha de um histórico que seja de humilhação, porque o fato dela ter esquecido como foi o seu ensino de Matemática, acredito que algo sério aconteceu.

271. **P-4:** *Porque, assim a P-8 perguntou porque eu não perguntava pro colega... Então, eu percebi que todo o mundo estava entendendo... até, às vezes, o professor ia fazer certinho sem pular nenhuma parte, mas daí o povo falava: “Ah não, pode pular, todo mundo já sabe isso!”*. **[Risos pela participante.]**

272. **P-5:** *Claro que é assim!* **[Em tal fala, a participante indicou ter vivenciado situação análoga, fazendo um gesto com o polegar esquerdo indicando “Ok”.]**

273. **P-4:** *Eu olhava em volta e estava todo mundo fazendo, então eu...*

274. **P-7:** *Eu já passei por situação assim! E eu não ia perguntar!*

275. **P-4:** *Daí eu pensava “O problema sou eu, né!?”*, e daí deixa quieto, vamos embora!

276. **P-7:** *É que hoje é mais fácil, né, dá pra procurar na internet, mas antes não!*
277. **Pesquisador/Participante:** Não é interessante pessoal visualizar esta parte da teoria de Piaget com a gente? **[Todas as participantes sinalizaram, através de gesto facial, afirmativamente.]** Nós estamos nos ‘enxergando’, nos ‘analizando’ a partir desta teoria psicológica, e eu acho que assim vocês poderão ‘enxergar’ na prática os alunos de vocês, não vão? Vocês acham que colabora discussões como essa?
278. **P-8:** *Sim, igual o que você está falando das turmas diferentes! Você vê aquela criançadinha, eu fico imaginando ela no meio da criançadinha ali e ela ali “Ai meu Deus, eu não sei fazer?”, “Eu não vou perguntar...””, ela ali, mas tem os outros que já fizeram. [Supôs ser essa a atitude tomada por P-4 durante as aulas de Matemática.] E daí recai no que você falou: tem os mais adiantados, os que sabem mais ou menos e os que tem dificuldade...*
279. **Pesquisador/Participante:** Tirando a questão da falta de Educação Moral (familiar) para os alunos tidos como bagunceiros, sem educação, os outros são desatentos, na maior parte, porque não está tendo este desequilíbrio na sala. Aluno não perturbado, no bom sentido, não desafiado pelo professor e não desequilibrado de modo possível vai dormir, bagunçar ou fingir que está tudo bem!
280. **P-7:** *Você dormia, P-4?*
281. **P-4:** *Não!*
282. **Pesquisador/Participante:** Ou como falei, fica apático, quietinho!
283. **P-2:** *E como você passou de ano?*
284. **P-8:** *É verdade!*
285. **P-4:** *Boa pergunta! Eu não sei!*
286. **P-8:** *Como ela passou no vestibular?*
287. **Pesquisador/Participante:** No vestibular, infelizmente, pela maneira que ele é organizado, você consegue ser aprovado sem saber porque você pode ‘chutar’! Acredito que a P-4 passou porque ela deve ter memorizado os procedimentos algorítmicos e os ‘cuspia’ na prova!
288. **P-2:** *Como era? Você tirava boas notas?*
289. **P-4:** *Não! Eu passava, assim, na risca! O professor ajudava e dava até meio ponto pra eu passar! “Vai, né!” [Referiu-se ao possível pensamento tido pelos seus ‘antigos’ professores de Matemática.] Eu ia muito mal em Matemática!*
290. **Pesquisador/Participante:** Isso não significa que ela não tenha conhecimentos em Matemática! Ela tem, alguns conhecimentos... e como a maioria das provas exige apenas memorização, embora não esteja dizendo que memorizar seja fácil, mas é mais fácil do que compreender! Então o aluno vai ‘cuspindo’... Mas, passado um tempo cai no esquecimento. Eu até brinco, a hora que o aluno sai da prova, se ‘bate’ um vento e balança a cabeça já cai no

esquecimento... isso porque conhecimentos que estão ‘soltos’ em nossas estruturas são fáceis de serem esquecidos, porque os mesmos não foram integrados, relacionados em rede. Daí, você vai ter que aprender novamente!

291. **P-8:** *É verdade, não dá para ir buscar lá na ‘gavetinha’!* [Referiu-se à mente.]

292. **P-4:** *E também, P-2, eu pensava muito assim “Ai, eu não vou conseguir aprender mesmo! Eu não vou ficar perguntando porque daí a pessoa vai falar: Nossa, mas ela não sabe nem isso!?”*, e daí eu deixava quieto!

293. **P-8:** *Eu acho que é da pessoa!*

294. **P-4:** *Esse era meu perfil!*

295. **P-2:** *É, pode ser!*

296. **Pesquisador/Participante:** Daí a gente pode recair na questão da afetividade enquanto impulsionadora da busca pelo conhecimento!

297. **P-4:** *Daí eu ficava assim “Matemática... ficar pensando...”*.

298. **P-8:** *Na sala de aula você tem que ver isso, tem que ver que tipo de dificuldades o aluno tem?*

299. **Pesquisador/Participante:** O bom professor, sim! Eu estou falando do bom!

300. **P-8:** *Gente, mas é muito difícil! Como é que você ‘leva’ a P-4?* [Apontou para P-2 no sentido de questioná-la sobre o que fazer em sala de aula com uma aluna que apresenta comportamento análogo ao de P-4, ou seja, que não expõe as dúvidas.] *E eu não estou falando da P-4 só de Matemática, mas no geral, de todas as matérias.*

301. **P-4:** *É, eu não ia nem com bomba! Imagina!*

302. **P-2:** *Mas nas outras matérias sim?*

303. **P-4:** *Ah, sim. Nas outras eu gostava de todas as matérias, só de Matemática.*

304. **Pesquisador/Participante:** E de Física?

305. **P-4:** *Ah, é... essas aí... Física, Química, Matemática...* [Risos entre todas as participantes.]

306. **P-2:** *Se no texto de Português começasse com o número 1 ela já parava!* [Risos entre todas as participantes.]

307. **P-8:** *Nossa, Pesquisador/Participante, você me perturbou mais, agora! Porque eu achava que era difícil, que tem as... mas pensando, agora, com a P-4 eu fico mais preocupada ainda, porque você não consegue tirar o aluno daquele ‘lugar’!*

308. **P-2:** *A gente tenta com ela, aqui, na faculdade e...*

309. **P-8:** *Não tira! [P-2 e P-8 referiram-se ao comportamento de P-4 que mesmo na faculdade – em alguns momentos – ainda é conforme o exposto.]*
310. **P-2:** *Tem algumas aulas que não desestabiliza a P-4. Você pode sentar do lado, falar, dar bronca, fazer junto... você pode fazer o que você quiser. No dia seguinte ela está exatamente do mesmo jeito!*
311. **P-8:** *Ela não sai do lugar!*
312. **Pesquisador/Participante:** Mas em que sentido ela não ‘sai do lugar’? Porque no nosso Grupo de Estudo não é assim!
313. **P-2:** *É, mas pergunta como é nas aulas? Chega 21 horas, ela abaixa a cabeça e dorme!*
314. **P-8:** *Ela não assiste a aula!*
315. **Pesquisador/Participante:** Então o seu comportamento aqui é um e lá é outro?
316. **P-2:** *É!*
317. **P-8:** *Por isso que a gente questionou se ela dormia na aula!*
318. **P-2:** *É! Nós estamos mentindo no que estamos falando? [Rindo, P-4 concordou!]*
319. **Pesquisador/Participante:** Vejam se estou certo! No nosso Grupo de Estudo, o desenvolvimento dela está sendo enorme! Você consegue ver isso, P-4?
320. **P-4:** *Sim!*
321. **Pesquisador/Participante:** Você resolveu os desafios de Estatística Descritiva que, daqui há pouco iremos analisar, de modo correto! Você os resolveu, e não se tratava de problemas de memorização, tinha que pensar ‘mesmo’, digamos assim, pra fazer. Então quer dizer que no nosso Grupo você avançou! Talvez, a noite nas aulas tem lhe faltado o interesse? É isso? **[P-4 não disse nada!]**
322. **P-5:** *Talvez não lhe provocou!*
323. **P-2:** *Nossa, ela me estressa! Pra fazer Seminário é irritante porque ela não dá um ‘A’, não propõe nada, ela só concorda com tudo e se está pronto, ótimo! Eu na aguento isso! Ah, não dá, eu tenho chocalhar... “ E aí, P-4, o que você acha? Qual parte do texto você quer fazer?”, e ela responde: “Tanto faz!, Tá bom!, Quando tem que entregar?”... Não dá gente! É muita desmotivação!*
324. **P-8:** *Então não tem isso o que a P-5 falou. O professor, na faculdade, talvez não lhe provocou, não conseguiu...*
325. **P-7:** *Mas também não é só o professor, porque tem o que a P-2 falou... Você senta do lado e você tenta, mas não sai...*

326. **Pesquisador/Participante:** Até porque, pessoal, lembrando também que durante o processo de ensino e de aprendizagem não é só o papel do professor, mas do aluno também!
327. **P-8:** *É, então!*
328. **Pesquisador/Participante:** Precisa de uma predisposição do sujeito!
329. **P-8:** *Ai, graças a Deus!* [A participante ergueu as mãos indicando agradecimento e certo alívio pelo fato de não ser a ‘única’ culpada pela não aprendizagem do estudante.]
330. **Pesquisador/Participante:** Eu tinha alunos, quando eu comecei a modificar a minha postura para ‘mais’ construtivista, que não iam ‘nem com bomba’! Porque ele não tinha predisposição para aprender, já que aprender é o movimento intelectual profundo já que o sujeito vai se modificar. E isso demanda, além do tempo, cansaço, dedicação e muita ‘dor de cabeça’, digamos assim. [Risos entre todos.]
331. **P-2:** *É por isso que você desiste antes!?*
332. **P-4:** *Sim!* [Risos entre todos.]
333. **P-8:** *Mas a P-4 é inteligente!*
334. **P-2:** *É super inteligente!*
335. **P-8:** *Quando ela quer ela faz as coisas... ela pega, ela faz!*
336. **P-2:** *Mas, de verdade, eu acho que ela precisa de um tratamento psicológico para autoestima!*
337. **P-8:** *É!*
338. **P-2:** *Autoestima! Porque ela não tem!*
339. **Pesquisador/Participante:** E é verdade, porque isso, no futuro, pode lhe desencadear depressão, por exemplo. Isso pelo fato de você não se dar valor e achar subjulgada pelas outras pessoas. Inclusive pode incidir enquanto o seu ser professora, porque tudo tem relação!... Percebam, pessoal, que ao estudarmos o texto da Equilibração, eu estou desequilibrando vocês!
340. **P-8:** *Sim, bastante!*
341. **Pesquisador/Participante:** Eu pretendo que vocês se percebam neste movimento constantemente...
342. **P-8:** *É... A gente não está conseguindo equilibrar nada!*
343. **P-2:** *A gente está só se desequilibrando e se desmotivando depois de ver tantos problemas educacionais...*
344. **P-8:** *A P-5 está quieta...*

345. **P-2:** *Ela nem fala nada! Você já está equilibrando?*
346. **P-5:** *Não, imagina! [Risos entre todos!]*
347. **P-8:** *Nós estamos discutindo tudo, agora!*
348. **Pesquisador/Participante:** Isso é muito bom, porque acho que nosso Grupo tem este objetivo!
349. **P-8:** *Ah, é bom!?*
350. **Pesquisador/Participante:** Lembrem que é um Grupo de Estudo sobre a atuação do professor de Matemática dos anos iniciais... E pra ser um professor de Matemática não basta saber só o conteúdo, tem vários outros fatores e acho que estamos tentando analisá-los...
351. **P-8:** *Então vamos lá!*

[Dando prosseguimento, P-4 leu a seguinte parte do texto:]

Vale destacar, ainda, duas diferentes formas de equilíbrio existentes, sendo a primeira referente às formas inferiores de equilíbrio na qual a compensação será em resposta às perturbações atuais. Já, a segunda, diz respeito às estruturas superiores ou operatórias donde a compensação será em resposta às perturbações virtuais. Nesse sentido, Piaget (2001) destaca:

No caso das formas inferiores de equilíbrio, sem estabilidade (formas senso-motoras e perceptivas), as perturbações consistem em modificações reais e atuais do meio, às quais as atividades compensatórias do sujeito respondem, então, como podem, sem sistema permanente [...].

No caso das estruturas superiores ou operatórias, por outro lado, as perturbações, às quais o sujeito responde, podem consistir em modificações virtuais, isto é, nos casos *optimum* podem ser imaginadas e antecipadas pelo sujeito sob forma de operações diretas de um sistema (operações exprimindo transformações em sentido inicial qualquer); neste caso, as atividades compensatórias consistirão, igualmente, em imaginar e antecipar as transformações, mas no sentido inverso (operações recíprocas ou inversas de um sistema de operações reversíveis). (p. 97)

[O Pesquisador/Participante auxiliou em relação ao entendimento das perturbações reais e virtuais, fornecendo alguns exemplos. Ao questioná-las se o referido texto estava mais ‘simples’, P-8 respondeu:]

352. **P-8:** *Ah, lendo sozinha não!*
353. **Pesquisador/Participante:** Mas, e agora, com a mediação facilitou?
354. **P-8:** *Agora sim!*

[Por fim, o Pesquisador/Participante leu o trecho restante do texto. Observe-o:]

Um exemplo desta ‘passagem’ das formas inferiores de equilíbrio às estruturas superiores ou operatórias é citado por Piaget (2001):

Um exemplo análogo de equilíbrio cognitivo será o do processo que chega às noções de conservação (tal como a conservação da matéria no caso da transformação de uma bolinha de argila em salsicha). A estratégia mais provável no

início é a centralização (representativa e não perceptiva) sobre apenas uma das características transformadas; por exemplo, a quantidade aumenta porque o objeto se alonga. Alcançando este resultado, a estratégia que se torna, portanto, a mais provável, consiste em observar a segunda característica transformada, e em supor que a quantidade diminua porque a salsicha se adelgaça. Este estado atinge uma nova estratégia, que se torna a mais provável em função das duas precedentes (a segunda, podendo ser muito rapidamente superada). Esta estratégia consiste em oscilar entre as duas dimensões e em observar a solidariedade (sem proporções exatas) do alongamento da salsicha e de seu adelgaçamento. Esta terceira reação leva a uma acentuação, nas transformações, em oposição às configurações estáticas, que eram as únicas consideradas no início. Segue-se, neste caso, uma quarta estratégia, através da descoberta das compensações entre as transformações e através da aceitação da conservação. (p. 96-97)

Em suma, o processo (mecanismo) de equilibração é a tentativa do sujeito em reequilibrar-se, compensando as perturbações postas pelo meio através da sua constante atividade.

[Após a leitura do exemplo retirado de Piaget (2001, p. 96-97) P-8 indagou:]

355. **P-8:** *Isso foi Piaget que escreveu, né?*

356. **Pesquisador/Participante:** Sim!

357. **P-8:** *Por isso que está complicado!* **[Pelo fato de tal fala evidenciar a não compreensão do exemplo dado por Piaget, o Pesquisador/Participante foi à lousa para representar as transformações da bolinha de argila em salsicha. Finalizando, o Pesquisador/Participante pontuou o seguinte:]**

358. **Pesquisador/Participante:** É interessante notar que este processo de Equilibração se dá pela ação do sujeito no meio ao lidar com experimentações ativas no qual ele vai sendo questionado e se questionando. No caso da conservação, por exemplo, se o sujeito não for questionado a pensar sobre esta situação, ele vai demorar mais pra construir isso...

359. **P-2:** *É por isso, P-4, que no próximo semestre você vai fazer todos os trabalhos, porque daí você vai pensar bastante!*

360. **P-4:** *Aí eu não faço o TCC!* **[Risos pela participante.]**

361. **Pesquisador/Participante:** Percebam que o sujeito tem que ser ativo...E é por isso, P-4, que acredito ser necessário você ‘agir’ mais, porque, querendo ou não, isso vai auxiliá-la a se tornar uma professora melhor. Pelo menos, aqui, eu vejo essa sua ação!

362. **P-4:** *É verdade!*

363. **Pesquisador/Participante:** Eu não vou desconsiderar que a relação afetiva estabelecida com esse professor interfira neste interesse, neste agir sobre. No entanto, como você está prestes a se formar professora, mesmo que o relacionamento com este professor não seja tão bom por considerá-lo ruim em termos didáticos, acredito que é necessária a construção deste conhecimento. Pense a respeito sobre isso! Ok!

364. **P-4:** *Ok!*

365. **P-5:** *Só uma pergunta!*

366. **Pesquisador/Participante:** Pois não! [Neste momento, o Pesquisador/Participante retomou a explicação referente à transformação da bola de argila em ‘salsicha’. Esclareceu quando às formas inferiores e superiores de equilíbrio, salientando acerca das perturbações atuais (‘presentes’ nas formas inferiores) e das atuais (‘pertencentes’ às formas superiores).]

[Devido ao tempo, o Pesquisador/Participante solicitou a elaboração da seguinte situação problema ‘para casa’, bem como o registro do Momento Síntese.]

1. É possível remeter a discussão a respeito do processo (mecanismo) de Equilibração em sala de aula? Como auxílio, pense em possíveis exemplos.

[Em continuidade, o Pesquisador/Participante pediu que as participantes resolvessem alguns desafios envolvendo a Combinatória e a Probabilidade. No entanto, antes da solução, foi feita a leitura do item 13 – Um Movimento de Síntese da Epistemologia Genética. Antes da leitura, P-8, preocupada com os desafios a serem feitos, perguntou o seguinte:]

367. **P-8:** *Tem fórmula isso aqui? Eu não lembro da fórmula! Meu Deus do céu!*

368. **Pesquisador/Participante:** Você já me deu um ótimo indicativo de que, talvez, a compreensão não se deu! [Risos entre todas as participantes.]

369. **P-8:** *Não..., verdade!*

370. **P-4:** *É, eu sabia que tinha fórmula, mas hoje...* [Referiu-se ao fato de que, com o passar do tempo não se recorda mais das fórmulas.]

371. **Pesquisador/Participante:** Podemos prosseguir, pessoal?

372. **P-8:** *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

[P-2 fez a leitura do referido item – 13.1, denotado abaixo:]

13.1 Um movimento de retomada da Epistemologia Genética

Nos 4 últimos encontros foram discutidos os aspectos centrais da Epistemologia Genética. Partiu-se da importância da proposição de situações problemas ao aluno de modo a desencadear a sua ação sobre o objeto do conhecimento. Ao defender/comprovar a importância da atividade do sujeito à construção do conhecimento, Jean Piaget superou as correntes epistemológicas empiristas e racionalistas que eram (são) contrárias a essa ideia. Isso, pois para essas duas correntes epistemológicas o sujeito é considerado um ser passivo no qual o conhecimento irá depender da pressão exercida pelo meio sobre o sujeito (Empirismo) ou do ‘desabrochar’ do conhecimento pré-formado no sujeito (Racionalismo).

Para subsidiar a hipótese acerca da importância da atividade do sujeito, sendo tal atividade desencadeada por uma necessidade (desequilíbrio), Piaget elaborou a teoria da assimilação. Segundo tal teoria o que permite ao sujeito agir-interagir com o meio são duas funções indissociáveis herdadas geneticamente: a organização e a adaptação. Essa última advém do equilíbrio entre a assimilação (incorporação dos elementos do meio aos esquemas ou às estruturas de pensamento do sujeito já construídas) e acomodação (modificação dos esquemas que possibilita a incorporação de ‘novos’ elementos), sendo ambas complementares.

Dando continuidade, abordou-se a questão da escola responder a uma necessidade (interesse) na qual se discutiu que, em cada momento da vida do sujeito, há interesses diferentes cuja principal função (invariável) do interesse é desencadear no sujeito a sua ação. Para estudar os diferentes interesses, fez-se uma breve análise acerca das principais condutas observadas desde o nascimento até a adolescência, separando-as em estádios. Em cada estágio, observou-se um tipo de inteligência e ou pensamento, a saber: inteligência prática (estádio sensório-motor), pensamento intuitivo – centrado/irreversível (estádio pré-operatório), pensamento operatório – reversível ‘apoiado’ no plano concreto (estádio operatório concreto) e pensamento operatório formal –

reversível ‘apoiado’ no plano hipotético-dedutivo (estádio operatório formal).

Visando ‘complementar’ a ideia acerca do equilíbrio entre a assimilação e acomodação, ressaltou-se o mecanismo de equilibração. Para tanto, definiu-se o equilíbrio – enquanto processo – como uma compensação proveniente das atividades do sujeito em resposta às perturbações, ou seja, ao ser desequilibrado o sujeito pode vir a compensar tal conflito, modificando os seus esquemas de assimilação. Utiliza-se o termo ‘pode vir’, pois dependendo do nível do desequilíbrio o sujeito pode ignorá-lo, não ‘entrando/concluindo’ esse movimento compensatório. Por fim, discutiu-se também que o mecanismo de equilibração, além de constituir um dos fatores responsáveis pelo desenvolvimento do indivíduo, também coordena harmonicamente os outros três (fatores): a maturação orgânica, a interação social e as experiências (física e lógico-matemática).

373. Pesquisador/Participante: É interessante percebermos que os vários assuntos estudados por Piaget estão interligados, intrinsecamente. É importante estabelecermos as relações possíveis entre os assuntos que estudamos pois, assim, o conhecimento fica mais ‘fortalecido’, digamos assim. Tudo bem, pessoal? **[Todas as participantes responderam afirmativamente.]** Antes de vocês resolverem os desafios, eu preciso que vocês escrevam o que entendem por Combinatória e Probabilidade.

374. P-4: *Mas não é a mesma coisa?* **[Risos entre todas as participantes.]**

375. P-2: *Por que duas vezes a mesma coisa, né!* **[Continuaram os risos.]**

376. P-7: *Pode pesquisar no Google?* **[Comentário análogo ao anterior.]**

377. P-8: *Por que você não falou que a gente ia estudar isso? A gente tinha dado uma estudada...*

378. Pesquisador/Participante: Eu peço para que vocês tentem se recordar daquilo que vocês vivenciaram durante a Educação Básica!

379. P-8: *Ih... eu sempre me ferrei nisso!*

380. Pesquisador/Participante: E daí, pessoal, após vocês escreverem têm 5 desafios de Combinatória e Probabilidade que não são complexos.

[Para ‘introduzir’ os desafios envolvendo a Combinatória e a Probabilidade, foi feita a leitura do item 13.3:]

13.3 Retomando o Tratamento da Informação

Como já esboçado anteriormente, além da Estatística, constituem o bloco ‘Tratamento da Informação’ a Probabilidade e a Combinatória. No entanto, antes da abordagem dos conceitos pertinentes a tais áreas, faz-se oportuno uma discussão acerca do entendimento das participantes sobre as mesmas. Desse modo, tente se recordar dos saberes experienciais – vivenciados por você durante a Educação Básica – registrando, nos quadros abaixo, o que você entende por Probabilidade e Combinatória.

Probabilidade: _____

Combinatória: _____

[Em seguida, disponibilizou-se 60 minutos para a solução dos referidos desafios de modo individual. Para responder acerca do entendimento de Probabilidade e Combinatória, P-7 releu o esquema denotado na página 14 na qual foram elencados os conteúdos constituintes das ‘áreas’ que formam o Bloco de Conteúdo ‘Tratamento da Informação’. No entanto, a participante disse o seguinte:]

381. **P-7:** *Acho que não resolveu de nada porque eu não lembro de nenhum destes conteúdos que aparecem.*
382. **P-2:** *Mas o que é Binômio de Newton?* **[Risos entre as participantes.]**
383. **P-7:** *Pior que eu acho que é uma das únicas coisas que eu me lembro de ter visto!*
384. **P-4:** *Você se lembra?*
385. **P-7:** *Não, assim, o nome eu me lembro!*
386. **P-4:** *Eu lembro do nome!*
387. **P-2:** *Tipo, assim, Permutações, Combinações eu me lembro, mas Binômio de Newton? Sinto muito...*
388. **P-7:** *O Binômio de Newton é o que dá... o que gera essa linguagem do computador... Não é!?*
389. **P-8:** *Ah tá, eu acho que é isso!*
390. **P-2:** *É a linguagem do Newton...*
391. **P-8:** *Ah, tá, do código binário!*
392. **P-4:** *Pra mim vocês estão falando tudo grego!*
393. **P-5:** *Pra mim também!*
394. **P-7:** *Não sei...*
395. **P-2:** *Não sei se chama isso, mas a linguagem do computador é o código binário, aquele 1 e 0.*
396. **P-4:** *É... 1 e 0.*
397. **P-7:** *Eu me lembro da professora passar isso na lousa e das combinações dos números, mas eu não sei...*
398. **P-2:** *Gente, e Combinatória? Eu não tenho nem noção!*

[Ao escrever o que entende por Combinatória e Probabilidade, P-8 disse que fez uma resposta “Bem básica”, e aquilo que ela lembrava não foi aprendido durante a Educação Básica, mas nos vários concursos aos quais prestou. Decorridos 30 minutos, P-5 e P-8 já haviam terminado. P-8, deste modo, aproveitou o tempo para ler as soluções comentadas referentes aos Desafios de Estatística Descritiva resolvidos há algumas semanas. P-2, após 50 minutos concluiu os desafios. Dez minutos após P-2 a P-7 terminou, sendo P-4 a última a entregar após 65 minutos.]

[P-8 foi embora devido a um compromisso, mas já havia lido a parte a ser tratada. Em seguida, o Pesquisador/Participante iniciou a discussão acerca dos Desafios

de Estatística Descritiva. Foi feita a leitura da introdução do referido item (13.2) apresentado abaixo:]

13.2 Retomando os ‘Desafios para casa: Estatística Descritiva’

No 10.º encontro foi solicitada a solução acerca de alguns desafios versando sobre a Estatística Descritiva. Mediante a análise das respostas elaboradas pelas participantes, faz-se necessário apresentar as soluções dos desafios 1, 2, 3 e 4, pois os mesmos não foram realizados por algumas das participantes e/ou foram realizados de modo incorreto. Além disso, em relação à alternativa b) do 2.º desafio, as participantes, embora tenham dado uma resposta correta, não utilizaram uma ‘justificativa’ matemática valendo-se do Desvio Padrão.

[Cada um dos desafios com suas respectivas soluções comentadas foram projetadas na lousa, sendo o primeiro denotado a seguir:]

DESAFIO (1): Um candidato tirou as seguintes notas em um concurso público prestado: 7,3; 6,5; 9,1; 8,2; 7,3; 6,4 e 9. A Média Aritmética, a Mediana e a Moda referente às notas desse candidato são, respectivamente:

Solução: Para o cálculo da Média Aritmética utiliza-se a seguinte expressão:

$$\bar{x} = \frac{6,4 + 6,5 + 7,3 + 7,3 + 8,2 + 9 + 9,1}{7} \cong 7,68 \cong 7,7$$

Em relação à obtenção da Mediana, como o número de elementos é ímpar ($n = 7$), então, para localizar o elemento central ordenado que divide a distribuição ao meio basta adicionar uma unidade ao número de elementos ($n = 7$), dividindo o total por 2.

$$\frac{7 + 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Assim, o 4.º elemento ordenado (7,3) – que divide a distribuição ao meio – representa a Mediana.

Por fim, para a obtenção da Moda é necessário observar se há elementos que se repetem na distribuição. Como o elemento 7,3 foi o único a se repetir duas vezes, então esse representa a Moda.

Assim, a alternativa correta corresponde à letra c) 7,7; 7,3; 7,3.

[Após fazer a leitura do enunciado, o Pesquisador/Participante comentou a solução elaborada. Durante tal comentário citou-se o acerto (ou não) acerca do referido desafio. Apenas P-4 não acertou completamente, ficando em dúvida sobre o valor da Mediana ser 8,2. Auxiliada por P-2, P-4 percebeu que não havia colocado as notas em ordem crescente, por isso considerou a nota 8,2 como sendo a Mediana pelo fato da mesma aparecer no enunciado na 4.ª posição. Ao dizer que não sabia da necessidade de colocar os valores em ordem crescente, P-2 disse que tal assunto foi estudado no Grupo de Estudo, sendo apoiada por P-7.]

[O Pesquisador/Participante leu o registro feito da solução apresentada por P-4, no intuito de conferir se o mesmo correspondia ao realizado pela participante. Observe-o a seguir:]

A participante circulou no enunciado do problema o número 7,3, escrevendo acima deste a palavra Moda. Em seguida, circulou os números 8,2 e 7,3, escrevendo acima destes a palavra Mediana. Registrou o seguinte:

$$7 + 1 = \frac{8}{2} = 4 \text{ mediana} \quad \frac{6,4+6,5+7,3+7,3+8,2+9+9,1}{7} = \quad ?$$

Na alternativa (c) circulou o número 7,7, traçou uma seta e na sua ‘ponta’ escreveu a palavra média aritmética. Após, nas alternativas (c), (d) e (e) circulou o número 7,3 e escreveu ao lado dos mesmos a palavra moda.

Do lado esquerdo em relação às alternativas e fora do espaço delimitado para a solução do desafio a participante escreveu o número 7,6 ...

[As participantes acharam interessante os registros referentes às soluções dos desafios. Ao final, P-4 verificou o erro, ou seja, não ter ordenado crescentemente os valores, embora houvesse calculado o número 4 como representando o 4.º elemento que correspondia à Mediana. Em seguida o Pesquisador/Participante pontuou:]

399. Pesquisador/Participante: Pessoal, vejam como é interessante discutir o erro com a pessoa! Porque se eu simplesmente entrego pra vocês e dou um errado, vai colaborar em alguma coisa?

400. P-2: Não!

401. Pesquisador/Participante: Agora, com a discussão pode vir a desencadear uma reflexão sobre... Tudo bem?

[Dando continuidade, o Pesquisador/Participante abordou o segundo desafio, denotado abaixo:]

DESAFIO (2): Em um treinamento de salto em altura, os atletas realizaram 4 saltos cada um. Observe as marcas obtidas por três atletas e responda as questões.

Atleta A: 148 cm, 170 cm, 155 cm e 131 cm.

Atleta B: 145 cm, 151 cm, 150 cm e 152 cm.

Atleta C: 146 cm, 151 cm, 143 cm e 160 cm.

- a) Qual deles obteve a melhor Média Aritmética?
 b) Para auxiliar os atletas a melhorarem seus desempenhos, faz-se necessário investigar o quão regular encontram-se os resultados obtidos por eles. Nesse sentido, qual dos atletas acima apresentou melhor regularidade, ou seja, melhor homogeneidade? E qual deles apresentou a ‘pior’ regularidade?

Solução: a) Inicialmente faz-se necessário o cálculo das Médias Aritméticas obtidas pelos 3 atletas:

$$\text{Atleta A: } \bar{x}_A = \frac{148+170+155+131}{4} = \frac{604}{4} = 151 \text{ cm}$$

$$\text{Atleta B: } \bar{x}_B = \frac{145+151+150+152}{4} = \frac{598}{4} = 149,5 \text{ cm}$$

$$\text{Atleta C: } \bar{x}_C = \frac{146+151+143+160}{4} = \frac{600}{4} = 150 \text{ cm}$$

Analisando as marcas (de salto) obtidas pelos atletas e suas respectivas Médias Aritméticas, conclui-se que a melhor Média Aritmética foi obtida pelo atleta B, já que o valor (149,5 cm) melhor representa o centro da distribuição dos saltos.

b) Embora as participantes respondessem corretamente, salientando que o atleta B foi o que apresentou melhor regularidade e o atleta A a pior, não justificaram matematicamente suas respostas utilizando o Desvio Padrão. Assim, será apresentado o cálculo do Desvio Padrão para cada uma das distribuições:

$$\text{Atleta A: } V_A = \frac{(148-151)^2 + (170-151)^2 + (155-151)^2 + (131-151)^2}{4} = \frac{9+361+16+400}{4} = \frac{786}{4} = 196,5$$

$$DP = \sqrt{196,5} \approx 14 \text{ cm}$$

$$\text{Atleta B: } V_B = \frac{(145-149,5)^2 + (151-149,5)^2 + (150-149,5)^2 + (152-149,5)^2}{4} = \frac{20,25+2,25+0,25+6,25}{4} = \frac{29}{4} = 7,25$$

$$DP = \sqrt{7,25} \approx 2,7 \text{ cm}$$

$$\text{Atleta C: } V_C = \frac{(146-150)^2 + (151-150)^2 + (143-150)^2 + (160-150)^2}{4} = \frac{16+1+49+100}{4} = \frac{166}{4} = 41,5$$

$$DP = \sqrt{41,5} \approx 6,4 \text{ cm}$$

Como o menor valor de Desvio Padrão foi obtido na distribuição do atleta B, então esse apresentou a melhor regularidade (homogeneidade). Em contrapartida, o maior valor foi obtido na distribuição do atleta A, indicando a ‘pior’ regularidade (heterogeneidade).

[O Pesquisador/Participante comentou que todas as participantes calcularam corretamente as Médias Aritméticas, no entanto, P-5 respondeu que o atleta A teve a melhor média, sendo que a melhor foi observada pelo atleta B. Deste modo, P-5 foi questionada sobre a referida resposta. Observe sua resposta:]

402. P-5: Porque o número era maior e eu achei que... maior... não sei!

403. **P-7:** *A gente chegou a discutir o que era o melhor... Aí a gente pensou que era o mais próximo de todos!*

404. **Pesquisador/Participante:** Isso!

405. **P-4:** *O que fica no meio, né!*

[Para explicar o porquê da Média Aritmética do atleta B ser a melhor, o Pesquisador/Participante observou que a diferença entre tal média e o menor e maior valores coletados era pouca. Em contrapartida, as diferenças, quando considerada a média do atleta A, eram grandes. Durante a explicação P-5 respondeu “Entendi!”. Visando justificar a resposta dada, P-5 falou:]

406. **Pesquisador/Participante:** *Eu já sei o que eu pensei. Eu pensei em melhor pontuação, não em melhor média.*

407. **Pesquisador/Participante:** Ah, pode ser!

408. **P-5:** *É, foi o que eu pensei... maior pontuação... Agora eu tô lembrando!*

409. **Pesquisador/Participante:** Agora, pessoal, na alternativa b) todas responderam corretamente, ou seja, o atleta que teve melhor regularidade foi o B e o pior o atleta A. Mas ninguém justificou matematicamente!

410. **P-2:** *Não pediu!? A gente é assim, não pede a gente não faz!* [Risos entre as participantes.]

411. **Pesquisador/Participante:** Pode ter sido uma falha minha mesmo!

412. **P-2:** *Pois é, eu nem pensei na possibilidade de ter que...*

413. **Pesquisador/Participante:** Mas o importante é que vocês conseguiram compreender esse significado de homogeneidade. Apenas não utilizaram um conceito matemático para mostrar por meio de um número (medida) para justificar matematicamente a resposta de vocês. Mas a análise está correta! [Em seguida, o Pesquisador/Participante apresentou os cálculos para a obtenção da Variância e do Desvio Padrão, chamando a atenção para possíveis aplicações destes conceitos em diferentes áreas/atividades. Como não houveram dúvidas, foi discutido o terceiro desafio. Observe a sua solução:]

DESAFIO (3): Considere sete números cuja Média Aritmética é 6. Adicionando um número a esse conjunto, a ‘nova’ Média Aritmética é 5,5. O número adicionado é:

Solução: No referido problema é feita uma ‘comparação’ entre duas Médias Aritméticas ao ocorrer o acréscimo de um elemento no conjunto inicial. Em seguida, solicita-se a descoberta desse número acrescentado. Vamos considerar os 7 números do conjunto inicial como sendo representados pela seguinte notação:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$$

Sabe-se que a Média Aritmética destes 7 números é 6. Acrescentando-se um elemento (x_8) ao conjunto inicial, obtém-se a ‘nova’ Média Aritmética (5,5). Por meio das expressões abaixo é possível calcular as somatórias dos 7 números (do conjunto inicial) e também dos 8 números (após o acréscimo do elemento x_8):

SITUAÇÃO INICIAL

ACRÉSCIMO de UM NÚMERO

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$ $6 = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$ $\sum_{i=1}^7 x_i = 6 \times 7$ $\sum_{i=1}^7 x_i = 42$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$ $5,5 = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$ $\sum_{i=1}^8 x_i = 5,5 \times 8$ $\sum_{i=1}^8 x_i = 44$
Para descobrir o número adicionado (x_8) basta fazer a diferença entre os resultados das somatórias encontradas. Isso, pois a diferença entre as mesmas foi devido ao acréscimo do número em questão. $x_8 = \sum_{i=1}^8 x_i - \sum_{i=1}^7 x_i$ $x_8 = 44 - 42 = 2$ Logo, o número acrescentado (x_8) equivale a 2 e o item correto é o d).	

[Durante a apresentação da solução, o Pesquisador/Participante foi questionando P-5 já que a mesma não conseguiu resolver tal desafio. Ao final, P-4 disse o seguinte.]

414. **P-4:** *Nossa, eu consegui!*

415. **Pesquisador/Participante:** Está vendo, P-4! Isso confirma o que eu falei sobre o progresso que está tendo em nosso Grupo de Estudo. Por meio das análises que eu venho fazendo, posso afirmar o ‘grande’ desenvolvimento que está alcançando, mesmo com o tempo reduzido que nós temos. Pensa bem... Quantos anos você ficou na escola “aprendendo” Matemática?

416. **P-4:** *Bastante!*

417. **P-2:** *Desaprendendo, na verdade! [Risos entre todas as participantes.]*

418. **P-4:** *É verdade!*

419. **Pesquisador/Participante:** Agora, em nosso Grupo de Estudo, que é uma contribuição, mas ela é pouca se compararmos com o tempo que estamos aqui ao tempo que passou durante toda a Educação Básica, é muito pouco!

420. **P-2:** *Mas aqui é mais significativo! E não por causa do tempo!*

421. **Pesquisador/Participante:** Sim! Qual foi a sua dúvida, P-5, para podermos compreender!

422. **P-5:** *Foi a mesma que eu já tinha tido. Agora que você explicou... isso eu não vou errar mais... É aquilo... eu pensei nisso só que eu falei 6 não é o número que dá porque... não sei explicar! É aquilo que a gente já tinha...*

423. **P-2:** *Você acha que tem que representar os elementos? É isso que você quis dizer?*

424. **P-5:** *Eu pensei, não tem como achar os elementos porque não é 6! Um é 5, o outro é 7... [Referiu-se aos valores ‘individuais’ de x_1 , x_2 , x_3 , etc.]*

425. **Pesquisador/Participante:** Você confunde a tendência, que é a Média Aritmética com o valor individual de cada dado do conjunto?

426. **P-5:** *Isso! Exato!*

427. **P-2:** *Ela sabe que é representativo e pode variar muito, daí...*

428. **P-5:** *É, da outra vez foi o mesmo erro! [Referiu-se a uma situação anterior na qual foram solicitados alguns desafios envolvendo tal temática.] Aí eu não consegui enxergar. Agora, eu falei: “Ah, o mesmo erro daquela, então dá, é certo, pode por o 6!”. Vendo na lousa eu já lembrei, e da próxima vez eu não vou errar, mas foi o mesmo erro.*

429. **Pesquisador/Participante:** Ok!

430. **P-5:** *Em não acreditar que o 6 é representativo!*

431. **Pesquisador/Participante:** Eu venho analisando isso na tese, e quero saber se confere com o que você acha. Na sua mente a Matemática foi concebida como sendo algo determinístico, tão exato, que quando nós estudamos as medidas de tendência (Média Aritmética, Mediana), parece que isso causou um conflito nesta concepção do que pra você seja Matemática!

432. **P-5:** *Pode ser... talvez eu nem tenha consciência disso que eu acho que é tão exato... Mas deve ser isso sim!*

433. **Pesquisador/Participante:** Lembra da questão da régua que nós discutimos antes?

434. **P-5:** *Sim!*

435. **Pesquisador/Participante:** A maioria de nós foi educado para ter uma visão determinística da Matemática, ou seja, do certo ou do errado. No entanto, o Tratamento da Informação é a Matemática do talvez e, nos próximos encontros, ao estudarmos a Probabilidade e a Combinatória isso vai ficar bem evidente. E eu acredito que isso pode causar uma ‘quebra’ de paradigma em vocês, que até então foram ensinadas, pelo menos é isso que dá pra supor a partir dos nossos encontros, de que a Matemática é certo ou errado! Talvez seja esse o problema!

436. **P-5:** *Eu acredito que sim! Mas agora está tudo certo porque duas vezes errando e resignificando... não é possível, né!*

437. **Pesquisador/Participante:** E para fazer o quarto desafio, com certeza você P-5 não o fez porque era um procedimento (pensamento) análogo. **[Neste momento, o Pesquisador/Participante discutiu a solução do quarto desafio – esboçado abaixo:]**

DESAFIO (4): No desafio anterior, qual número deve ser adicionado ao conjunto inicial (dos sete números) para que a Média Aritmética permaneça a mesma, ou seja, igual a 6?

Solução: Utilizando o raciocínio de modo análogo ao desafio anterior, tem-se agora a seguinte situação:

SITUAÇÃO INICIAL	ACRÉSCIMO de UM NÚMERO DE MODO A PERMANECER A MESMA MÉDIA ARITMÉTICA
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$ $6 = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}$ $\sum_{i=1}^7 x_i = 6 \times 7$ $\sum_{i=1}^7 x_i = 42$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$ $6 = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8}$ $\sum_{i=1}^8 x_i = 6 \times 8$ $\sum_{i=1}^8 x_i = 48$
Para descobrir o número adicionado (x_8) basta fazer a diferença entre os resultados das somatórias encontradas. Isso, pois a diferença entre as mesmas foi devido ao acréscimo do número em questão. $x_8 = \sum_{i=1}^8 x_i - \sum_{i=1}^7 x_i$ $x_8 = 48 - 42 = 6$ Portanto, o número acrescentado (x_8) equivale a 6 e o item correto é o c).	

[Ao término, observou-se o seguinte diálogo entre P-2 e P-5:]

438. **P-2:** *Observa que ali a média não mudou com 7 ou 8 elemento!*
439. **P-5:** *É!*
440. **P-2:** *Então o que muda é o valor de cada elemento!*
441. **P-5:** *Sim... Acrescentei um mas a média é...*
442. **P-2:** *A mesma!*
443. **P-5:** *A mesma!*
444. **P-2:** *Mas não é também porque dividiu P-5. É porque independe os valores de cada um. Pode ser que lá onde tinha só 7 elementos, os valores... somando dividido pelo 7 daria média 6, e ali somando o total de elementos e dividido por 8 vai dar média 6 também! Porque muda os valores... pode ter 1, 2, 3... muda os valores! Entendeu? Independe do valor da média!*
445. **P-5:** *Entendi sim!*
446. **P-2:** *Porque eu sinto muito isso, parece que você quer que a média represente os valores individuais...*
447. **P-5:** *É! Porque se a média é 6 vai ter 6, 6, 6, 6... [Referiu-se aos valores dos elementos x_1, x_2, x_3, x_4 , etc.]*
448. **Pesquisador/Participante:** *Sim!*
449. **P-5:** *Eu consigo... Eu aqui pensar que não é, todos os números não são 6, que tem 4, tem 2, tem 5... mas na hora de resolver...*

450. **Pesquisador/Participante**: Você entra em conflito, em alguma dúvida na hora de resolver?

451. **P-5**: *Não... quando eu tô... que nem agora, aqui, eu vi... se eu fosse resolver agora eu consigo entender e acreditar! Mas eu acho que é aquilo que eu acho fica tão forte que fica lá! E daí, na hora de eu resolver eu caio nisso!*

452. **Pesquisador/Participante**: Compreendi!

453. **P-5**: *Mas agora que eu sei, quando você erra você vai refletindo... Eu acredito que consigo!*

454. **Pesquisador/Participante**: Ok! Pessoal, o último desafio [**Referiu-se ao quinto desafio.**] que tinha aquele gráfico, eu nem coloquei no texto porque, além de todas acertarem, o nível de dificuldade, suponho eu, não era muito!

455. **P-2**: *É!*

[O Pesquisador/Participante retornou ao texto e comentou acerca do quinto desafio. Quando questionadas sobre qual desafio consideraram mais difícil, P-5 respondeu que foi àqueles não resolvidos, ou seja, o terceiro e o quarto. A resposta de P-2 foi análoga, mesmo tendo conseguido solucioná-los. Já P-4 disse ser mais difícil o primeiro desafio pelo fato de não ter conseguido ‘chegar’ na resposta certa. Por fim, P-7 achou mais difícil o desafio 2a) por ter ficado em dúvida sobre a questão da melhor Média Aritmética, embora o tenha realizado corretamente. Além disso, P-7 salientou que não considerou o terceiro e o quarto desafios difíceis, respondendo o seguinte:]

456. **P-7**: *Eu não achei difícil porque eu lembrei que no outro eu tinha feito errado! [Referiu-se a desafios anteriormente solucionados.] Daí você explicou muito bem, e para mim marcou aquilo, que os números não representam aquilo, que não dá pra saber qual é o valor de cada...*

457. **Pesquisador/Participante**: Então você superou este obstáculo?

458. **P-5**: *Sim, porque eu achei fácil, mas é porque teve um anterior. Se não tivesse eu não saberia resolver de novo!*

459. **P-4**: *É, realmente!*

[Como não houveram outras dúvidas, o Pesquisador/Participante finalizou o encontro salientando a importância das retomadas, em sala de aula, dos conteúdos abordados para oportunizar ao aluno constantes reflexões.]

APÊNDICE R – TRANSCRIÇÃO DO 14.º ENCONTRO

Data: 21/06/2012

Tempo de Duração: 3 horas e 10 minutos.

[Participaram deste encontro P-2, P-4, P-5, P-7 e P-8. Inicialmente, as participantes expuseram as respostas acerca da situação problema referente ao mecanismo de Equilibração. Observe, novamente, a referida questão:]

1. É possível remeter a discussão a respeito do processo (mecanismo) de Equilibração em sala de aula? Como auxílio, pense em possíveis exemplos.

[Quando solicitada a responder, P-8 disse:]

1. **P-5:** *Ah, eu acho melhor você começar com a P-2!... Ah, eu tô brincando... Eu até pensei nisso, Pesquisador/Participante, que eu estava vendo, até porque... inclusive nesta parte de Equilibração... né... porque aí, na hora que eu fui ler os negócios aqui [Referiu-se ao texto.] é igual aquilo que eu estava discutindo aquele dia aqui com a P-4... Quando você não entende uma coisa você deleta ele, ou melhor, você viaja...*

2. **Pesquisador/Participante:** Sim!

3. **P-8:** *Você pega aquilo que você entendeu, só!*

4. **Pesquisador/Participante:** Sim!

5. **P-8:** *Daí eu fui lendo os negócios aqui... [Referiu-se ao texto.] “Ai meu Deus, não tô entendendo!, Como ele chegou nisso?”. Daí eu fui pegar e fui procurar... procurar [A participante buscou em outras fontes explicações acerca do mecanismo de Equilibração.] e eu achei e entendi... Ai, me deu até calor, tá vendo!? Eu fiquei nervosa! Deixa eu ver o que eu escrevi!*

6. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem!

7. **P-8:** *Aí o que eu achei legal é que foi assim é... é... bem explicando pra mim entender. Eu pus assim: A aprendizagem depende dos conhecimentos anteriores de cada um e de suas experiências. Era o que a gente tinha discutido. Para ampliá-la, além de propor situações que desestabilizem os conhecimentos estabelecidos é preciso que eles se sintam motivados a realizar um esforço cognitivo para superar o problema.*

8. **Pesquisador/Participante:** Isso!

9. **P-8:** *E foi o que a P-5 falou, que o professor tem que despertar o interesse do aluno. Daí pro aluno avançar... eu acho na internet... tem que propor situações que o levem a investigar, discutir, refletir, porque aí vai... porque os próprios alunos têm que formular hipóteses que... com isso aí eles vão ter uma postura ativa e com isso eles vão ter o conhecimento.*

10. **Pesquisador/Participante:** Ok!

11. **P-5**: *Tá certo?*
12. **Pesquisador/Participante**: Sim!
13. **P-2**: *Essa é a síntese!*
14. **Pesquisador/Participante**: Por favor, P-7, leia a sua resposta!
15. **P-7**: *Eu não fiz essa!*
16. **Pesquisador/Participante**: Ok! P-2...
17. **P-2**: *Eu fiz super básico! Sim, pois o processo de Equilibração acontece nas situações de ensino e aprendizagem quando tentamos nos apropriar dos conteúdos que estão sendo ensinados. Por exemplo, quando lemos um livro ou um texto, quando tentamos compreender uma teoria, quando pensamos ou resignificamos conteúdos já vistos, exemplo: a questão da régua. Descobrimos que ela não é uma medida exata.*
18. **Pesquisador/Participante**: Ok! Isso mesmo! P-4...
19. **P-4**: *Então, eu tenho que pedir desculpa, Pesquisador/Participante, porque o relatório de estágio tomou todo o meu tempo.*
20. **Pesquisador/Participante**: Ok! E você, P-5?
21. **P-5**: *Idem!*
22. **Pesquisador/Participante**: E o Momento Síntese, vocês conseguiram fazer?
23. **P-4**: *Eu escrevi só um pedacinho!*
24. **Pesquisador/Participante**: Tudo bem, pode começar P-4!
25. **P-4**: *Eu coloquei assim: O mecanismo de Equilibração, diferente do que eu pensava, não é concebido como um balanceamento de forças em estado de repouso, mas sim ao máximo de atividade do sujeito em resposta às perturbações exteriores.*
26. **Pesquisador/Participante**: Ok! E essa parte ficou compreendida?
27. **P-4**: *Eu acho que sim!*
28. **Pesquisador/Participante**: P-5?
29. **P-5**: *Eu não fiz, não porque eu não compreendi, é que não deu tempo mesmo! Posso fazer daqui a pouco, não sei!*
30. **Pesquisador/Participante**: Pode ser! Quando tiver um tempinho, só pra gente fechar...
31. **P-5**: *Não, tá ótimo!*

32. **Pesquisador/Participante:** P-2, leia pra gente, por favor!

33. **P-2:** *O processo de Equilibração é uma constante na vida do sujeito. Não representa repouso, mas sim atividade de agir sobre o meio tentando assimilá-lo e/ou acomodá-lo. Ao entrar em desequilíbrio, ou seja, ser perturbado, o sujeito tenta compensar tal conflito tentando compreendê-lo, porém se o desequilíbrio for muito grande o sujeito pode simplesmente ignorá-lo. A Equilibração é a responsável pelo desenvolvimento do sujeito, pois na busca de reequilibrar-se são incorporadas modificações nas estruturas de pensamento.*

34. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-7, por favor.

35. **P-7:** *O mecanismo de Equilibração é a tentativa do sujeito de se reequilibrar para compensar as suas perturbações e ela se dá com a constante atividade do sujeito, ou seja, ela está sempre em processo. A perturbação é um obstáculo que não nos permite assimilar coisas novas, dependendo da sua intensidade podemos ignorá-la ou agir sobre ela para compensar. E que quanto a essa ação ela é construtiva e há, assim, uma assimilação-acomodação. Quando o processo de Equilibração se efetiva, ele está no estado superior ao que ele partiu, assim há a construção de uma forma melhor de equilíbrio chamado de Equilibração Majorante. Há duas formas de equilíbrio. As formas inferiores quando há uma compensação em resposta das perturbações atuais e ela não tem um sistema permanente, são modificações atuais e reais no meio. E tem as estruturas superiores ou operatórias, que a compensação ocorre é a partir das perturbações virtuais, ou seja, quando há conservação do pensamento, as operações reversíveis. E o desequilíbrio é uma fonte de progresso.*

36. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você, P-8?

37. **P-8:** *Então, eu vi que tinha que fazer uma síntese, então eu coloquei assimilação e acomodação e não coloquei Equilibração. Eu coloquei assimilação... eu procurei por um jeito que eu entendesse se eu fosse ler depois pra entender!*

38. **Pesquisador/Participante:** Claro!

39. **P-8:** *Eu pus assim: A assimilação é a interação com o meio, que é uma ação externa, não é? Me ajuda a entender?*

40. **Pesquisador/Participante:** A assimilação...

41. **P-8:** *Como forma de entender um novo conteúdo...*

42. **Pesquisador/Participante:** A assimilação é a forma de compreender um novo conteúdo, mas não é externa!

43. **P-8:** *Não!?*

44. **Pesquisador/Participante:** A assimilação e a acomodação estão inerentes ao sujeito!

45. **P-8:** *É interna! Então eu já vou apagar, porque eu achei isso aí... E a acomodação... eu pus assim, que é a respeito a construção de novas estruturas cognitivas, e com isso, com base no que você já tinha preexistente e essa vai ampliar. E isso permite assimilar novidades que chega num novo estado, né! Eu não coloquei... como eu tinha escrito um monte de coisa*

de Equilíbrio aqui em cima [Referiu-se a resposta da situação problema exposta há pouco.] eu não pus aqui embaixo.

46. **Pesquisador/Participante:** Ok! Nós podemos entender a teoria de Piaget da seguinte maneira: O ser humano, ao nascer, é posto no mundo. Só que no início ele não tem consciência de que estabelece uma relação no mundo com as outras pessoas. Então, internamente, ele vai equilibrar condutas de tal modo que possa, gradativamente, ir estabelecendo melhor interação com o meio. Lembra que no início a única interação é a criança com ela mesma, porque ainda não existe o pai ou a mãe (para ela). Ao construir várias maneiras de pensar, seja por meio do tempo, do espaço, da causalidade e, construindo um objeto permanente, a criança começa a fazer experimentos no dia a dia. Por isso a criança coloca o dedo na tomada, se corta em objetos cortantes, etc. Então, tudo isso vai sendo assimilado e acomodado por este sujeito. O que é uma acomodação? É quando você muda a maneira de agir e ou pensar. E o que é uma assimilação? É quando você usa os conhecimentos já construídos para poder interpretar/‘ler’ o exterior. Então, talvez, tenha sido nesta parte que o texto que você se apoiou confundiu.

47. **P-8:** *É!*

48. **Pesquisador/Participante:** Quando cita a assimilação como algo exterior. Não! A assimilação e a acomodação são dois processos internos, de qualquer ser humano, e a assimilação serve para interpretar o exterior, a experiência, o experimento com a qual a pessoa vai interagir. Tudo bem?

49. **P-8:** *Sim!*

50. **Pesquisador/Participante:** E o que é que tem haver o equilíbrio nisso tudo? É quando o sujeito tenta manter uma certa estabilidade daquilo que está sendo assimilado para aquilo que vai ser acomodado. Quando uma pessoa está diante de uma dúvida muito grande, ela pode se sentir impossibilitada, então pode desistir de uma acomodação ou então pode acomodar de modo deformado esta realidade. É interessante, pessoal, que Piaget ao propor esta teoria quis investigar o conhecimento no ser humano, este foi o principal objetivo. No entanto, ele percebeu que a maneira de compreender o conhecimento era analisando a sua construção inicial, por isso ele considera desde o recém-nascido até a fase do adolescente e seguindo para o adulto. Tudo bem?

51. **P-8:** *E a gente vê até com a gente hoje em dia isso, porque tem coisa que você não assimila e você deixa pra lá!*

52. **Pesquisador/Participante:** Claro!

53. **P-8:** *Você não entende! Então... eu lembro que com as crianças a gente não tinha noção disso, né... Quando você vê... Lembra sua sobrinha? [Apontou para P-2] Você fala assim... não, coloca aquela coisa lá, o líquido..., realmente eles passam por tudo aquilo... [Referiu-se às condutas observadas nos estádios.] Isso que eu acho legal a teoria de Piaget, você vê que até hoje tudo que ele viu aí tá real.*

54. **Pesquisador/Participante:** Sim! Um dos grandes feitos de Piaget, a meu ver, foi ele ter elaborado a teoria do nascimento na inteligência a partir da observação/análise de apenas três sujeitos, que no caso foram seus filhos Lucienne, Jaqueline e Laurent.

55. **P-8:** *É, então!*

56. **Pesquisador/Participante:** Alguma outra colocação, pessoal? [Como não houveram comentários, o Pesquisador/Participante perguntou à P-8 se a mesma havia compreendido a síntese – item 13.1 “Um movimento de retomada da Epistemologia Genética” já que, no encontro anterior, durante a leitura a participante tinha ido embora. Em seguida, foram ‘relembradas’ as soluções comentadas dos desafios de Estatística Descritiva. Neste momento, o Pesquisador/Participante questionou P-5 quanto à dúvida discutida no encontro anterior que a impossibilitou de realizar o terceiro e o quarto desafios. Como P-5 não possuía dúvidas, o Pesquisador/Participante devolveu as folhas (recolhidas para registro e análise) nas quais as participantes haviam resolvido os desafios envolvendo Combinatória e Probabilidade. A seguir serão apresentadas as respostas das participantes sobre o que entendem por Combinatória e Probabilidade, bem como soluções comentadas dos referidos desafios.]

57. **Pesquisador/Participante:** Hoje, pessoal, nós vamos estudar algumas ideias envolvendo Combinatória e Probabilidade. Nós vamos observar as respostas de vocês e discutir possíveis soluções dos desafios. P-2 começa a ler pra gente o item 14, e depois peço para que cada uma leia a sua resposta que eu registrei no quadro! [Observe tal item denotado abaixo e projetado na lousa.]

14.1 Um movimento de retomada

No encontro anterior, além da discussão referente à solução dos desafios envolvendo a Estatística Descritiva, deu-se início à investigação a respeito do entendimento das participantes acerca da Combinatória e da Probabilidade, sendo as mesmas pertencentes e constituintes do bloco ‘Tratamento da Informação’. Num primeiro momento, as participantes escreveram sobre o que entendiam por Combinatória e Probabilidade. As respostas obtidas apresentam-se no quadro abaixo:

Entendimento acerca da Probabilidade e da Combinatória construído durante a Educação Básica.	
PARTICIPANTE	RESPOSTA
P-2	Probabilidade: Identificar a quantidade de vezes que algo pode ou não ocorrer. <i>Por exemplo: - chance de ganhar na mega-sena - de dar cara ou coroa ao lançar uma moeda.</i> Combinatória: São as possibilidades de combinar elementos <i>Por exemplo: Roupas; comidas.</i>
P-4	Probabilidade: São chances de algo acontecer ou não hipóteses Combinatória: São combinações, permutações: exemplo eu tenho uma saia azul e uma rosa e tenho 3 blusas de cores diferentes quantas vezes eu vou conseguir usar uma saia e uma blusa diferente, acho que seria isso
P-5	Probabilidade: Se refere a chance de que algo aconteça. Referente a um elemento dentro de inúmeros elementos <i>Por exemplo: a probabilidade de chover amanhã é de 50% pois pode chover ou não chover.</i> Combinatória: Refere-se a quantidade de combinações que podem ser realizadas com um número x de elemento.
P-7	Probabilidade: Me recordo muito pouco de ter estudado sobre isso. Mas acredito que seja a possibilidade ou chance de uma determinada coisa acontecer ou ocorrer, como por exemplo um jogo de loteria. Combinatória: Também não consigo me recordar de quando eu estudei sobre esse assunto. A combinatória é por exemplo, quando temos mais de uma blusa e podemos combinar com uma calça.
P-8	Probabilidade: Qual a chance (quantidade) de sair ou pegar certo objeto. Combinatória: Quantas combinações são possíveis de realizar com determinados objetos.

[Durante a leitura, cada participante, caso quisesse, poderia complementar a resposta. P-4, após ler o início de sua resposta, falou:]

58. **P-4:** *Eu não sei o que é isso!* [Referiu-se aos termos utilizados na resposta “combinações e permutações”. Em seguida todas riram.]

59. **Pesquisador/Participante:** Você lembra só do nome, é isso?

60. **P-4:** *É!*

61. **P-2:** *Eu já tava até ficando orgulhosa... Nossa, ela sabe!* [Risos entre as participantes.]

62. **P-4:** *Eu coloquei isso aí, porque depois eu não consegui sair daí!* [Após a leitura do exemplo dado pela participante, o Pesquisador/Participante pontuou que o mesmo não se tratava de um Permutação e nem de Combinação. Observe o exposto:]

63. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, nós vamos estudar alguns tipos de agrupamentos da Combinatória que são maneiras de fazer determinadas ‘combinações’. Iremos estudar cada exemplar, cada tipo de situação. Então, tem situações que são chamadas de Permutações, onde nós combinamos, entre si, todos os elementos de um conjunto. Há situações chamadas de Arranjos...

64. **P-4:** *Eu escutei esta palavra, também!*

65. **Pesquisador/Participante:** ... onde nós agrupamos os elementos, seja com reposição, quando retorna, por exemplo, o elemento que foi retirado de uma urna, ou sem repetição... É quando, dum conjunto de elementos a gente não combina todos, mas pegamos pares, ou trios ou quádruplas, etc., para poder fazer esta combinação. Mas fiquem tranquilas, pessoal, calma, calma! [P-2 e P-4 riram, sendo que P-2 expressou-se surpresa por meio de gesto facial.] E tem a Combinação que representa um tipo de caso especial da Permutação... mas eu não vou insistir nisso agora porque o desequilíbrio pode ser muito elevado e daí provavelmente não será assimilado...

66. **P-2:** *É, e daí a gente vai ignorar!*

67. **Pesquisador/Participante:** Sim! Tudo bem, pessoal? [Todas as participantes indicaram, por meio de expressão facial, afirmativamente.] Nós iremos buscar, investigar, não a fórmula da Permutação ou do Arranjo, embora a mesma seja importante, mas somente após a compreensão do que significa tal conceito. Eu faço este estudo investigativo para obter os conhecimentos prévios de vocês para saber de onde devo partir e, qual o nível de desequilíbrio possível eu posso desencadear em vocês. Percebam que, além de estudar a teoria de Piaget a estou utilizando para o desenvolvimento do nosso Grupo de Estudo, tudo bem?

68. **P-5:** *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

[Antes de P-8 ler a sua resposta, o Pesquisador/Participante questionou o seguinte:]

69. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, as respostas dadas por vocês indicam que, talvez, esses assuntos não foram estudados de modo profundo por vocês. É isso mesmo?

70. **P-2:** *Talvez não, não foram estudados!*

[Após a leitura por P-8, o Pesquisador/Participante perguntou, mediante as respostas, se o conhecimento acerca de Combinatória e Probabilidade era geral. P-4 respondeu:]

71. **P-4:** *É bem vago, né!*

72. **Pesquisador/Participante:** É bem vago?

73. **P-2:** *A minha é!*

74. **P-7:** *Bem geral, né!*

75. **P-8:** *Mais ou menos!*

[Dando continuidade, foi proposta a seguinte atividade:]

1. O que é possível concluir por meio do referido quadro? Registre abaixo a sua resposta para posterior discussão.

[Como resposta, P-2 disse que as respostas eram parecidas, inclusive, no geral, as participantes haviam utilizado algumas palavras iguais. P-4 falou que os exemplos eram semelhantes, sendo sua fala complementada por P-8 ao dizer que os professores utilizavam tais exemplos para ensinar. P-5 pontuou que o lançamento do dado era um exemplo “super típico” e P-4 recordou-se do “lançamento da moeda”. P-8 lembrou do exemplo referente à retirada de bolas da urna. Deste modo, todas acharam pertinente realizar a leitura do parágrafo final do presente item. Observe-o, sendo que tal leitura foi feita por P-2.]

Visando dar continuidade à referida investigação, foi solicitada a solução de alguns desafios envolvendo a Combinatória e a Probabilidade. Observe no próximo item uma possível solução para alguns desses desafios e realize um ‘confronto’ entre tais soluções e as elaboradas por você.

[Em seguida, P-2 leu no próximo item (14.2) o enunciado do 1.º desafio. Abaixo consta o referido item bem como a solução comentado do desafio:]

14.2 Retomando alguns desafios envolvendo Combinatória e Probabilidade

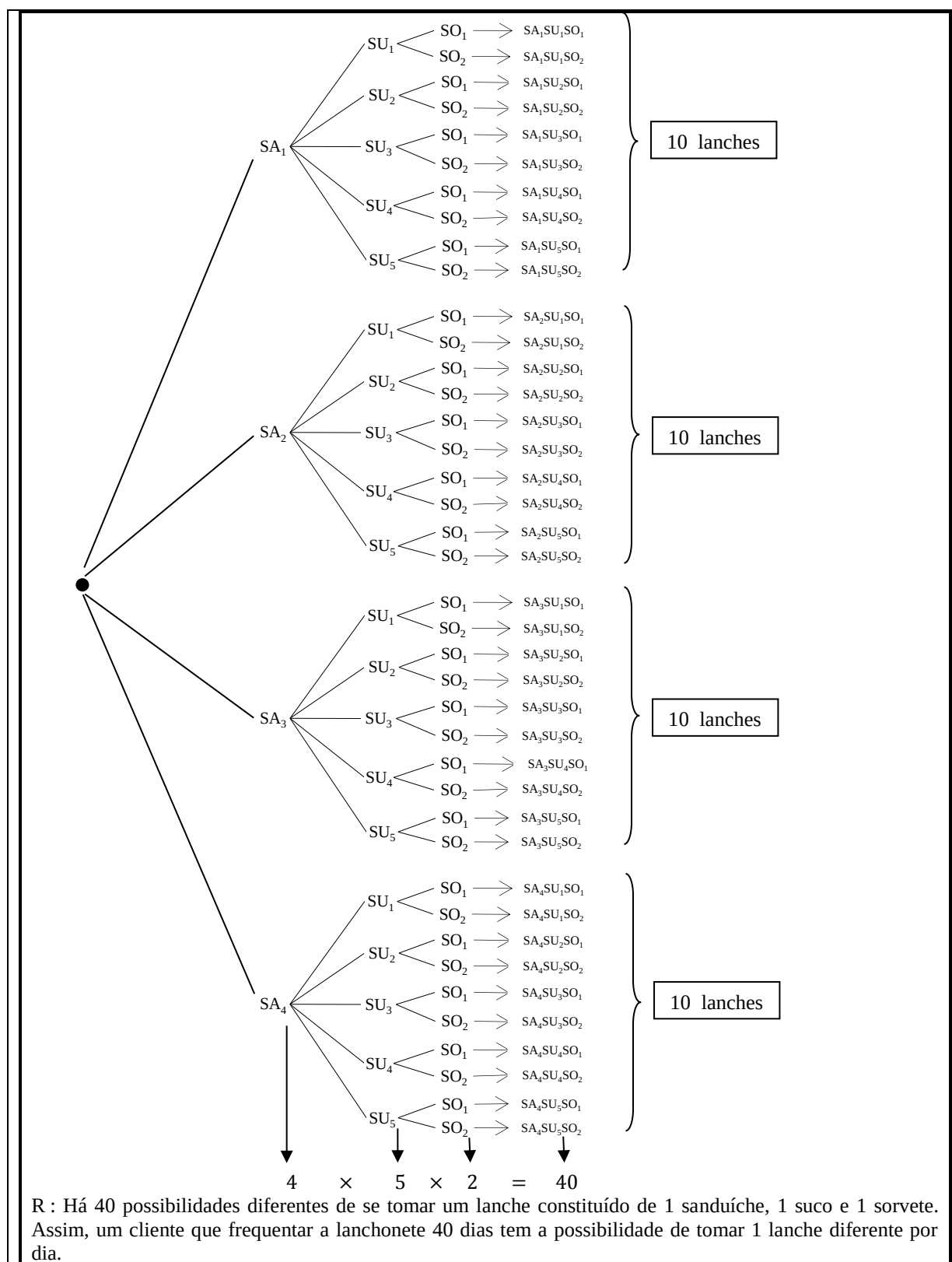
DESAFIO (1): Numa lanchonete há 4 tipos de sanduíches, 5 tipos de sucos e 2 tipos de sorvetes. De quantas maneiras diferentes podemos tomar um lanche composto de 1 sanduíche, 1 suco e 1 sorvete?

Solução: O problema solicita todas as maneiras possíveis para se formar um lanche composto de 1 sanduíche, 1 suco e 1 sorvete. Para tanto, a lanchonete disponibiliza 4 tipos de sanduíches, 5 tipos de sucos e 2 tipos de sorvetes.

Consideremos:

- SA como representando o conjunto dos sanduíches: $SA = \{SA_1, SA_2, SA_3, SA_4\}$;
- SU como representando o conjunto dos sucos: $SU = \{SU_1, SU_2, SU_3, SU_4, SU_5\}$;
- SO como representando o conjunto dos sorvetes: $SO = \{SO_1, SO_2\}$.

No Diagrama de Árvore (ou Árvore de Possibilidades) denotado abaixo é possível visualizar todas as maneiras possíveis à constituição do referido lanche:



[Antes de discutir a solução, o Pesquisador/Participante perguntou quais participantes haviam chegado na resposta correta. P-5, P-2 e P-7 ergueram a mão indicando terem ‘achado’ a solução correta. P-8 disse ter se confundido, mas que tinha sido por ‘bobeira’. Rindo, P-5 respondeu ter obtido ‘5 vezes’. Neste momento, P-2 lhe perguntou:]

- 5 vezes

- [O Pesquisador/Participante compartilhou com as demais o referido registro denotado acima. Quando questionada, P-4 confirmou que traços desenhados na vertical indicavam os tipos de sanduíches (4), de sucos (5) e de sorvetes (2). No entanto, a participante não soube responder sobre o porquê da resposta ‘5 vezes’, dizendo o seguinte:]

85. P-4: É isso mesmo, P-4!

- $$\begin{array}{l}
 \boxed{A} \\
 \boxed{B} \\
 \boxed{C} \\
 \boxed{D}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \boxed{1} \\
 \boxed{2} \\
 \boxed{3} \\
 \boxed{4} \\
 \boxed{5}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \boxed{x} \\
 \boxed{y}
 \end{array}$$
- $$\begin{array}{l}
 a1x \quad a1y \quad \underline{b1x} \quad \underline{b1y} \quad | \quad c1x \quad | \quad d1x \\
 a2x \quad a2y \\
 a3x \quad a3y \\
 a4x \quad a4y \\
 a5x \quad a5y
 \end{array}
 \Rightarrow \text{DE 30 maneiras}$$
- Observação:** A participante sublinhou, no enunciado, a expressão “2 tipos de sorvetes” e circuleu “De quantas maneiras”.

87. **P-8:** *É, foi mesmo por descuido! [A participante, em conversa com o Pesquisador/Participante verificou que havia esquecido de somar as 10 últimas ‘combinações’. Em seguida, foi apresentada a resposta dada por P-2:]*

$$4 \times 5 \times 2 = 40 \text{ maneiras.}$$

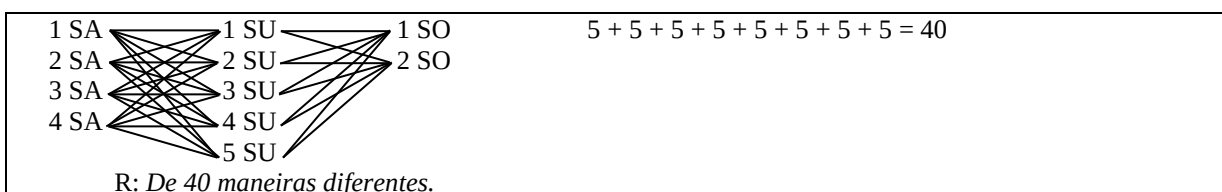
88. **Pesquisador/Participante:** Porque você colocou diretamente, P-2, 4 vezes 5 vezes 2?

89. **P-2:** *Porque eu pensei assim, pode repetir, então eu posso usar os 5 tipos de sucos, os 4 tipos de sanduiches e os 2 tipos de sorvete!*

90. **Pesquisador/Participante:** Então você utilizou o Princípio Fundamental da Contagem! Sabia?

91. **P-2:** *Ah, é!?... É bom saber!*

92. **Pesquisador/Participante:** Nós iremos estudá-lo porque esse princípio, pessoal, é imprescindível à construção da Combinatória. Inclusive do pensamento probabilístico que necessita da construção do Espaço Amostral, e eu nem sei se vocês se recordam o que significa isso!... O Espaço Amostral são todos as possibilidades de um fenômeno, quando, por exemplo, ao jogar o dado você tem os seguintes pontos do Espaço Amostral: face 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Mas nós iremos estudar isso posteriormente. A P-5 fez por meio de ‘cruzamentos’: **[O Pesquisador/Participante projetou o esquema feito pela participante.]**



93. **Pesquisador/Participante:** Eu acho que eu fiz todos os cruzamentos P-5!

94. **P-5:** *Nossa, é mesmo, deve ter dado trabalho!*

95. **Pesquisador/Participante:** E você fez por tentativas e por contagem aditiva 1 a 1, foi isso mesmo?

96. **P-5:** *Acho que sim... foi!*

97. **Pesquisador/Participante:** Você foi fazendo cada um dos ‘traços’ e foi contando um a um!

98. **P-5:** *Foi!*

99. **Pesquisador/Participante:** Você não fez o princípio multiplicativo, mas sim o aditivo!

100. **P-5:** *É!*

101. **Pesquisador/Participante:** É é possível resolver desta maneira, embora seja mais difícil e demorado, mas é possível.

102. **P-5:** *Eu até pensei, deu pra fazer porque são menos... mas tem um jeito de fazer com mais, porque, pensou!? Como eu vou ficar combinando 100?*

103. **Pesquisador/Participante:** É, se você vai lá na Subway e tem não sei quantos tipos de pães. [Subway é uma rede de lanchonetes no qual o cliente ‘monta’ ‘na hora’ o próprio lanche escolhendo dentre vários tipos de pães com diversos recheios, molhos, saladas e acompanhamentos.]

104. **P-5:** *E tem mesmo!*

105. **Pesquisador/Participante:** São possíveis milhares de combinações!

106. **P-2:** *É mesmo!*

107. **Pesquisador/Participante:** A P-7 tinha certeza ou mais ou menos que eram 40? [O Pesquisador/Participante projetou a sua resposta:]

Não sei como chegar ao cálculo, mas acho que dá para formar 40 tipos de lanches.

108. **P-2:** *Ela colou! É brincadeira! [Risos da participante.]*

109. **P-7:** *É que, na verdade, eu comecei a fazer do jeito que a P-5 fez, eu coloquei todos e ia combinando um por um. Aí, assim, tava ficando muito rabiscado, muita coisa, daí eu pensei: “Nossa, mas isso aqui é um valor pequeno, se fosse um grande!?”... não é assim que calcula, é claro! Daí eu já escrevi que não sabia calcular, só que daí eu combinei primeiro os 5 tipos de sucos e os 4 sanduíches... daí eu acho que dava... 20!*

110. **Pesquisador/Participante:** Isso!

111. **P-7:** *Daí eu multipliquei por 2 dos sorvetes!*

112. **Pesquisador/Participante:** Percebe que você acabou de falar o que a P-2 fez?

113. **P-7:** *É por isso que eu coloquei “eu acho”... Eu ia deixar em branco, mas depois eu falei vou responder alguma coisa!*

114. **Pesquisador/Participante:** Você valeu-se do Princípio Multiplicativo utilizado pela P-2 de modo, digamos assim e entre aspas, “inconsciente”. Concorde?

115. **P-7:** *Sim!*

116. **Pesquisador/Participante:** Você o fez, porque certamente deve ter vivenciado situação análoga na Educação Básica, mas isso não foi tão bem estabilizado! Então você ficou em dúvida! Foi mais ou menos isso, P-7?

117. **P-7:** *Eu ia fazer até o jeito que a P-5 fez, 1 por 1. Mas daí eu comecei a olhar, mas se até aqui eu já tenho 10 o resto vai ficar se repetindo de tudo isso que eu já fiz. Daí eu pensei, ah...*

118. **Pesquisador/Participante:** O modo que a P-5 fez está correto, as crianças utilizam este caminho no início da construção, só que a chance de errar é grande, não é P-5?

119. **P-5:** *É!*

120. **Pesquisador/Participante:** Eu mesmo para reproduzir o esquema feito por P-5 demorei!

121. **P-5:** *Sabe porque, também, quando você vai partir do outro ele pode repetir, quando você começa a ligar do outro pode repetir!*

122. **P-7:** *Foi por isso que eu desisti de fazer assim!*

123. **P-5:** *É! Mas como eu não lembrava da conta eu fiz assim!*

124. **Pesquisador/Participante:** Ok! [Neste momento, o Pesquisador/Participante projetou a solução comentada do referido desafio. Ao questionar as participantes sobre o conhecimento acerca do Diagrama de Árvore (ou Árvore de Possibilidades) todas responderam nunca o terem estudado. P-4 fez a leitura da solução e o Pesquisador/Participante chamou a atenção à necessidade da classificação para a constituição dos conjuntos dos tipos de sanduíches (SA), sucos (SU) e sorvetes (SO). Ao visualizarem o Diagrama de Árvore, P-7 falou:]

125. **P-7:** *Eu acho que era isso o que eu e a P-5 queríamos fazer! [P-5 riu.]*

126. **P-2:** *É!*

127. **P-7:** *Só que o da gente ficou mais complicado!*

128. **Pesquisador/Participante:** Sim! É que da maneira que eu apresentei [Referiu-se ao Diagrama de Árvore.] está melhor sistematizada.

129. **P-7:** *Assim não erra, não perde!*

130. **P-5:** *É!*

[O Pesquisador/Participante explicou como foi elaborado o Diagrama de Árvore utilizado à solução do primeiro desafio. Foi chamada a atenção acerca do porquê da multiplicação $4 \times 5 \times 2 = 40$ denotada abaixo do Diagrama de Árvore, bem como da possibilidade do aluno somar 4 ‘grupos’ de 10, sendo cada grupo constituído pelas combinações de cada um dos 4 tipos de sanduíches. Após citar tal solução – 4 grupos de 10 – o Pesquisador/Participante indagou ter sido este o procedimento utilizado por P-8. A participante, em resposta, concordou.]

[Ao questioná-las novamente sobre a abordagem durante a Educação Básica acerca do Diagrama de Árvore, apenas P-8 falou:]

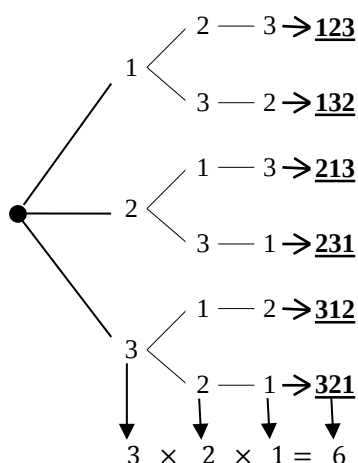
131. **P-8:** *Eu acho que sim, mas faz tempo! E o que eu achei interessante é que o cliente pode ir 40 dias e cada dia pode comer um sanduíche diferente, tomar um suco e um sorvete!*
132. **Pesquisador/Participante:** *É interessante, não é!?*
133. **P-8:** *Então não precisa ter tanta variedade! [Referiu-se aos tipos de sanduíches, sucos e sorvetes.]*
134. **Pesquisador/Participante:** *Não!*
135. **P-8:** *Ter isso aqui já é suficiente.*
136. **Pesquisador/Participante:** *Tudo bem, pessoal? Eu quero ouvir você, P-4, o que achou? Você entendeu?*
137. **P-4:** *Sim, eu entendi, mas é difícil!*
138. **Pesquisador/Participante:** *Em qual parte você achou difícil?*
139. **P-4:** *Tudo, né! [A participante ri!]*
140. **P-8:** *Então você não entendeu!*
141. **P-4:** *Não, mas...!*
142. **P-2:** *Fala o que você não entendeu como chegou na resposta!*
143. **P-4:** *Eu entendi!*
144. **Pesquisador/Participante:** *Tudo bem, P-4? Pela sua expressão eu acho que não está tudo bem!*
145. **P-4:** *É que no começo, eu pensei, que eu falei das 5 possibilidades, eu achei que não podia repetir!*
146. **P-8:** *Como assim repetir?*
147. **P-4:** *Por exemplo, se você tem 1 lanche só, um suco só, um sorvete só! [O ‘lanche’ falado referia-se ao sanduíche.]*
148. **P-8:** *Mas você tá vendo que são 4 sanduíches!*
149. **P-2:** *Mas, mesmo assim, dariam mais que 5.*
150. **P-4:** *Então, mas eu parti desse princípio.*
151. **Pesquisador/Participante:** *Mas, por esse pensamento, não tem 5 sanduíches e sim 4. Mas daí tem 5 sucos!*
152. **P-7:** *É!*

153. **Pesquisador/Participante**: Só que, mesmo assim, não dariam 5 lanches!
154. **P-2**: *Falta 1!*
155. **Pesquisador/Participante**: E também faltaria sorvete, né?
156. **P-2**: *É!*
157. **Pesquisador/Participante**: Compreende, P-4?
158. **P-4**: *É!*
159. **Pesquisador/Participante**: Veja se estou entendendo... você achava que tinha 4 sanduíches, 5 sucos e 2 sorvetes. E se usasse o primeiro sanduíche acabava?
160. **P-4**: *É!*
161. **Pesquisador/Participante**: Eu não poderia utilizá-lo para outra combinação, era isso!?
162. **P-4**: *Sim!*
163. **Pesquisador/Participante**: Foi assim que você pensou, P-4?
164. **P-4**: *Sim!*
165. **Pesquisador/Participante**: Vocês entenderam o que eu falei, pessoal?
166. **P-8**: *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

[Dando continuidade, P-5 leu o segundo desafio – esboçado abaixo:]

DESAFIO (2): Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?

Solução: O problema solicita a formação de números de 3 algarismos, ou seja, que ‘ocupem’ a posição da centena, dezena e unidade. Novamente faz-se possível valer-se do Diagrama de Árvore para facilitar a solução:



Consideremos o conjunto formado pelos três algarismos {1, 2 e 3}. Sabe-se que no número a ser

constituído não é permitida a repetição dos algarismos. Assim, na ordem das centenas é possível o algarismo 1, 2 ou 3, sendo observadas 3 possibilidades. Já, para a ordem das dezenas só é possível a utilização de dois algarismos, pois, um dentre os três do conjunto já foi usado na ordem da centena. Por exemplo, caso a centena seja ocupada pelo algarismo 1, então, restam 2 possibilidades – os algarismos 2 e 3. Por fim, para a ordem da unidade resta apenas 1 algarismo, pois os outros dois foram utilizados na ordem da centena e da dezena. No exemplo anterior, considerando a centena ocupada pelo algarismo 1 e a dezena pelo algarismo 2 resta apenas 1 possibilidade, ou seja, a unidade deverá ser constituída pelo algarismo 3.

R: É possível formar 6 números diferentes de três algarismos com os algarismos 1, 2 e 3.

[Após a apresentação do Diagrama de Árvore, o Pesquisador/Participante perguntou quais haviam obtido a resposta correta. Com exceção de P-4 que se pronunciou dizendo não ter descoberto todas as combinações, as demais responderam corretamente. P-2 ajudou P-4 a verificar qual combinação P-4 havia esquecido de formar ao utilizar o método por tentativas. Observe a explicação dada por P-4 quando questionada por P-2 acerca do procedimento que a mesma utilizou:]

167. **P-4:** *Eu fiz assim, oh, primeiro eu peguei o 1 e coloquei na frente, no meio e atrás. Depois eu peguei o 2 e pus na frente, no meio e depois atrás. Depois o 3, o 3 na frente, o 3 no meio e o 3 atrás. [A participante referiu-se aos diferentes posicionamentos efetuados com os algarismos 1, 2 e 3, sendo que a expressão ‘na frente’ refere-se à centena, ‘no meio’ diz respeito à dezena e ‘atrás’ indica a unidade. P-2, deste modo, conferiu os números formados por P-4 com os que havia constituído, dizendo:]*

168. **P-2:** *Olha, tem o 123, 213, 321... está faltando o 321!*

169. **P-4:** *É!*

170. **Pesquisador/Participante:** Perceba, P-4, que cada um dos algarismo irão ficar 2 vezes ‘na frente’, 2 vezes ‘no meio’ e 2 vezes ‘atrás’!

171. **P-4:** *Sim!*

[Em seguida, o Pesquisador/Participante detalhou o procedimento utilizado para a elaboração do Diagrama de Árvore, discutindo o porquê de haver o número 3 abaixo da ordem das centenas, o 2 das dezenas e o 1 da unidade de modo a possibilitar a solução por meio do Princípio Fundamental da Contagem (ou Princípio Multiplicativo). Além disso, chamou a atenção ao fato do referido desafio ser classificado como Permutação já que o mesmo ‘combina’ todos os elementos do conjunto entre si. Novamente, ao serem questionadas, as participantes disseram apenas se lembrar das fórmulas ‘dadas’ pelos professores para resolverem os diferentes problemas de Combinatória (Arranjo, Combinação e Permutação), não compreendendo o porquê de tais expressões. Visando ‘desequilibrá-las’ o Pesquisador/Participante fez a seguinte pergunta:]

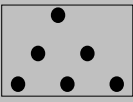
172. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, percebam que com poucos elementos a maioria dos alunos consegue fazer por contagem direta. E se eu tivesse, por exemplo, colocado o conjunto dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6? Quem conseguiria fazer pela contagem direta? Ficaria mais difícil, né! [Para concluir, o Pesquisador/Participante leu a explicação denotada abaixo do Diagrama de Árvore.] E se eu tivesse colocado no enunciado que o algarismo poderia ser repetido num mesmo número? Seria só estas 6 combinações?

173. **P-5:** *Não!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

174. **Pesquisador/Participante:** Quanto que daria?
175. **P-2:** 27 números!
176. **Pesquisador/Participante:** Como você chegou nisso, P-2?
177. **P-2:** *Eu fiz $3 \times 3 \times 3$! Porque daí você teria 3 possibilidades, igual, lá mesmo [Apontou para o Diagrama de Árvore projetado na lousa.] tem 3 [Referiu-se à ordem da centena.] só que daí do lado você poderia colocar 1, 2 e 3 [Referiu-se à ordem da dezena.] e depois o mesmo ali! [Referiu-se à ordem da unidade.] [No mesmo momento, P-8 perguntou à P-5 rindo:]*
178. **P-8:** *Você pensou tão rápido assim?*
179. **P-5:** Não!
180. **P-8:** *Eu ia ter que ir escrevendo, e a P-2 já pensou rápido! Você é ótima nisso, eu tenho que escrever, tenho que olhar!*
181. **Pesquisador/Participante:** Vá à lousa, P-2, e represente por meio do Diagrama o que você pensou e falou pra gente! **[P-2 foi à lousa e registrou o Diagrama, explicando às demais como constituir os 27 números a partir dos algarismos 1, 2 e 3 com a possibilidade de repetição do algarismo no mesmo número. As participantes concordaram com o Pesquisador/Participante ser provável, ao não ser feito o uso do Diagrama, o esquecimento de alguns dos 27 números possíveis de serem formados. P-8 indagou:]**
182. **P-8:** *Mas em concurso que a gente tinha eles dão vários números [Referiu-se aos algarismos a serem ‘combinados’.] e daí tinha que ter a fórmula!?*
183. **Pesquisador/Participante:** Num concurso, P-8, se você não conhece o Princípio Multiplicativo para saber que tem que multiplicar uma possibilidade por outra e por outra, realmente não dá tempo de calcular!
184. **P-8:** *É!*
185. **P-2:** *É, porque eu parei prá pensar pra ver se tinha feito todos os números... então perde tempo!*
186. **P-7:** *É verdade, gasta tempo!*
187. **Pesquisador/Participante:** O problema não é a fórmula, ela é importante também, mas é que grande parte dos professores não permitem aos alunos a compreensão daquela expressão. Com isso os estudantes acabam aplicando as fórmulas sem compreender os significados dos conceitos envolvidos nos problemas e muito menos dos procedimentos empregados na solução. Por meio da fórmula, desde que compreendida, o sujeito ‘economiza’ tempo e isso é necessário também! Alguma outra questão, pessoal? **[Como não houveram dúvidas, passou-se à discussão do terceiro desafio – exposto a seguir:]**

Solução: Consideremos um dado em cujas faces estão representadas os seguintes números: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Assim, o conjunto de todos os resultados possíveis ao se jogar o dado é $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Para que saia um número maior que 3, então, faz-se necessária a ‘saída’ das faces 4, 5 ou 6. Logo, há 3 possibilidades em 6 (do total do conjunto dos resultados possíveis).
R: A probabilidade de sair um número maior do que 3 é $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$ ou 50%.

[Após a leitura do desafio por P-7, o Pesquisador/Participante projetou as respostas das participantes. Observe-as:]

ALGUNS DESAFIOS ENVOLVENDO COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE	
3. Ao jogarmos um dado, qual é a probabilidade de sair um número maior do que 3?	
PARTICIPANTE	RESPOSTA
P-2	6 lados maiores que $3 \rightarrow 4, 5, 6$. A probabilidade é 50%.
P-4	3 possibilidades em 6 chances = 3 4, 5 e 6
P-5	$1 - 2 - 3 - \boxed{4} - \boxed{5} - \boxed{6}$ Maiores que 3 = 4, 5, 6. R: Probabilidade de 3 em 6.
P-7	Probabilidade de 50%
P-8	DADO  $\boxed{50\%}$ probabilidades

[Ao discutir a solução apresentada por P-4 perguntou-se o porquê do número 3 após o sinal de igual (=). Rindo, a participante respondeu não saber, dizendo:]

188. **P-4:** Não sei, podia colocar 3 possibilidades, 3 chances?

189. **Pesquisador/Participante:** Sim, são 3 chances, só que matematicamente você pode representar por $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$ ou 50%.

190. **P-4:** É, então, eu acho que foi isso porque eu falei, vou deixar escrito, não é assim! [A participante achou ‘estranho’ não utilizar números na resposta do desafio.]

191. **Pesquisador/Participante:** Olha que interessante, pessoal, a P-4 tem a concepção de que para responder algo em Matemática tem que ser em números! É isso P-4?

192. **P-4:** É!

193. **Pesquisador/Participante:** Isso está implícito na concepção dela... mas nem sempre é assim P-4! Se você coloca 3 possibilidades em 6 chances é uma representação matemática também!

[Durante a discussão com P-7 sobre sua resposta, a participante disse ter feito ‘direto’ o desafio, não realizando rascunho. Após compartilhar a solução feita por P-8, a participante indagou:]

194. **P-8:** Tá vendo, oh, como minha cabeça funciona... o cérebro pensa de um jeito!

195. **Pesquisador/Participante:** É interessante, pessoal, o nosso compartilhamento já que amplia as possibilidades de resoluções possíveis ao desafio. Em sala de aula quando digo que o professor necessita avaliar constantemente o aluno recai no docente saber como analisar aquilo que o estudante devolve para você, ou seja, nas respostas que apresente frente aos problemas. Tudo bem?

196. **P-5:** *Pesquisador/Participante?*

197. **Pesquisador/Participante:** Pois não!

198. **P-5:** *Isso que a gente faz, [Apontou para a lousa na qual estavam projetadas as respostas apresentadas há pouco.] que nem eu vejo que faço muito... eu já sabia de cabeça, mas eu colocar o número e circular ou desenhar é uma necessidade do concreto?*

199. **Pesquisador/Participante:** Podemos dizer que, de certo modo, sim!

200. **P-4:** *Eu tenho essa mesma necessidade!*

201. **P-8:** *Eu bastante, muito!*

202. **P-2:** *Todas nós...*

203. **Pesquisador/Participante:** Não precisa mais, em alguns casos, ser o concreto ‘pegando’, mas sim do concreto “figurativo”/desenhando!

204. **P-8:** *Isso! Não fica só aqui [Apontou para a cabeça significando mente/pensamento] você tem que por, enxergar! [Apontou para o papel no qual havia a representação das faces do dado denotada acima.] Eu pra mim estudar eu tenho que escrever pra eu lembrar! Porque eu tenho a visual!*

205. **Pesquisador/Participante:** Entendi P-8! Ficar na memória para apoiar a reversibilidade (do ir e vir mental) ainda tem que ter um apoio no papel! Certo?... Mas, não é errado este apoio...

206. **P-7:** *Pode ser insegurança!*

207. **P-2:** *Eu também acho!*

208. **Pesquisador/Participante:** Eu também, pessoal, em alguns momentos utilizo isso como recurso, então não dá pra dizer que o fato de usar a representação no papel não possa ser um pensamento do nível formal. Os meus alunos da graduação também fazem rabiscos como um apoio ao pensamento em disciplinas de Matemática Pura e Aplicada!

209. **P-7:** *É, a gente vê nas carteiras os rabiscos! [Risos entre as participantes.]*

[Em continuidade, P-8 leu o quarto desafio. O Pesquisador/Participante projetou na lousa conforme apresentado a seguir:]

DESAFIO (4): Numa caixa opaca estão 7 bolas, cada uma delas numeradas com um número de 1 a 7. Podemos representá-las conforme denotado abaixo:

1	2	3	4	5	6	7
a) Tirou-se uma bola ao acaso. O que é mais provável sair, uma bola com um número par ou com um número ímpar? Qual é o número que indica a probabilidade de sair um número par? E a probabilidade de sair um número ímpar? b) Se colocarmos na caixa uma bola com o número 8, qual será a ‘nova’ resposta em relação à questão anterior?						
Solução: a) A caixa opaca é constituída pelo seguinte conjunto (TOTAL) de 7 bolas numeradas: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. É possível separar tal conjunto nos subconjuntos abaixo: NÚMERO PAR: {2, 4, 6} NÚMERO ÍMPAR: {1, 3, 5, 7} A chance de sair, ao acaso, uma bola par é de 3 possibilidades em 7. Já, no caso de uma bola ímpar, a chance é de 4 possibilidades em 7. R: É mais provável que seja tirada uma bola ímpar, sendo a sua probabilidade de $\frac{4}{7}$ ou ~ 57,14%. Já, a probabilidade de sair uma bola par é de $\frac{3}{7}$ ou ~ 42,86%. Percebe-se que, mesmo sendo menos provável a retirada de uma bola par, não é impossível a sua ocorrência. b) Com a colocação da bola número 8 o conjunto (TOTAL) de bolas numeradas aumenta para um total de 8, sendo observado o seguinte conjunto: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Desse modo, o subconjunto dos números pares passa a ser constituído por 4 elementos (bolas numeradas): {2, 4, 6, 8}; ficando igual ao subconjunto dos números ímpares. Nesta ‘nova’ situação, a chance de sair, ao acaso, uma bola par ou ímpar é igual, já que em ambos os casos há 4 possibilidades em 8. R: A probabilidade de sair uma bola par ou ímpar é de $\frac{4}{8}$ ou $\frac{1}{2}$ ou 50%. Assim, as chances são as mesmas.						

[Durante a leitura do enunciado, P-8 indagou se recordar de problemas deste tipo enquanto aluna da Educação Básica. A participante ressaltou não gostar de tais problemas pelo fato de ter que ficar imaginando as bolas a serem tirados, ao acaso, da urna. O Pesquisador/Participante, antes da discussão da solução, projetou as respostas dadas pelas participantes para socialização. Observe-as:]

PARTICIPANTE	RESPOSTA
P-2	a) É mais provável sair uma bola com número ímpar. O número que indica a probabilidade de sair número par é 3 em 7. Probabilidade de sair número ímpar é 4 em 7. b) A probabilidade de sair número par ou ímpar se igualou → 50% para cada. Sair número par é 4 em 8. Sair número ímpar é 4 em 8.
P-4	a) É mais provável ímpar par: 3 possibilidades em 7 chances = 4 ímpar: 4 possibilidades em 7 chances = 3 b) A probabilidade se iguala pois tem o mesmo número de bolas ímpares e pares. par: 4 possibilidades em 8 chances = 4 ímpar: 4 possibilidades em 8 chances = 4
P-5	a) → Número ímpar → 3. → 4. Observação: A participação registrou acima da bola número 7 o seguinte: 4 ímpares 3 pares b) → Não se sabe, temos 50% de chance de sair uma bola par e 50% chance de sair bola ímpar. → 4. → 4
P-7	a) Uma bola com o n.º ímpar, pois tem mais n.ºs ímpares. A probabilidade de cair um n.º par é de aproximadamente 43% e de cair um n.º

	ímpar é de aproximadamente 57% A participante apagou as operações aritméticas que realizou à obtenção de tal resposta. b) A probabilidade de sair uma bola par ou ímpar é igual, sendo de 50% para cada.
P-8	a) par – 2 – 4 – 6 ímpar – 1 – 3 – 5 – 7 - ímpar – maior qtdade - par – três chances - ímpar – quatro chances b) 50% de sair par 50% de sair ímpar

[Foi chamada a atenção de P-5 não ter representado probabilisticamente a resposta no item a), ou seja, escrever 3 possibilidades em 7, por exemplo. Na alternativa b) questionou-se o motivo da expressão “Não se sabe” colocada no início da resposta. A participante indagou:]

210. **P-5:** Nossa, eu que não sei! [Riso geral.] Ah, não, eu acho que eu entendi a pergunta era: “Qual bola que vai sair, será!?”... [A participante começou a ler o enunciado do item b). Neste momento, P-2 interrompeu e disse:]

211. **P-2:** Eu acho que você quis dizer: Não se sabe qual bola vai sair, pode ser 50% par ou 50% ímpar!

212. **P-5:** Acho que é!

213. **Pesquisador/Participante:** Então a expressão “Não se sabe” é porque não dá pra saber se vai sair par ou ímpar?

214. **P-5:** É!

215. **Pesquisador/Participante:** Entendi!

[O Pesquisador/Participante comentou que P-7 calculou as porcentagens referente à chance de sair bola par ou ímpar – item a). Para complementar, a participante disse ter utilizado a regra de três para o cálculo. Por fim, o Pesquisador/Participante ressaltou que na resposta dada por P-8 – no item a) – faltou complementar que seriam 3 chances em 7 (ou $\frac{3}{7}$) no caso de bola par e 4 chances em 7 (ou $\frac{4}{7}$) para bola ímpar.]

[Em seguida, o Pesquisador/Participante leu a solução dos itens a) e b) do quarto desafio – já denotado. Durante a explicação do item a), a pedido de P-8, esclareceu-se o procedimento utilizado à obtenção dos valores percentuais (57,14% e 42,86%). Observe o registro feito na lousa visando tal esclarecimento:]

$\frac{4}{7} = 4 \div 7 \cong 0,5714(\times 100) \cong 57,14\%$	$\frac{3}{7} = 3 \div 7 \cong 0,4286(\times 100) \cong 42,86\%$
---	---

[Após tal explicação, P-8 indagou ser possível também fazer o cálculo por meio de regra de três. Em outro ‘canto’ da lousa, o Pesquisador/Participante registrou o cálculo por meio da regra de três. Observe:]

$ \begin{array}{l} 7 \text{ bolas} \xrightarrow{\text{equivalem}} 100\% \\ 4 \text{ bolas} \xrightarrow{\text{equivalem}} x\% \\ 7x = 4 \times 100 \\ 7x = 400 \\ x = \frac{400}{7} \cong 57,14\% \end{array} $	$ \begin{array}{l} 7 \text{ bolas} \xrightarrow{\text{equivalem}} 100\% \\ 3 \text{ bolas} \xrightarrow{\text{equivalem}} x\% \\ 7x = 3 \times 100 \\ 7x = 300 \\ x = \frac{300}{7} \cong 42,86\% \end{array} $
---	---

[P-4, após expressar facialmente dúvida com relação ao primeiro procedimento, falou:]

216. **P-4:** *Eu acho mais fácil por meio de regra de três!*

217. **Pesquisador/Participante:** Então você acha mais fácil calcular por meio de regra de três?

218. **P-4:** *Sim, e porque, também, ali [Apontou para a lousa onde estava registrado o primeiro procedimento.] vai usar dízima periódica!*

219. **P-2:** Mas ali também vai, P-4! [Apontou para a lousa onde estava registrado o segundo procedimento (regra de três).]

220. **Pesquisador/Participante:** Nas duas dão dízimas periódicas! É que eu arredondei!

221. **P-4:** *Mas eu acho que aí é porque você escreve 7 bolas igual a 100%!*

222. **Pesquisador/Participante:** Aqui está mais ‘contextualizado’? [Apontou para a regra de três.]

223. **P-4:** *Isso!*

224. **Pesquisador/Participante:** Ali tá mais ‘enxuto’? [Apontou para o primeiro procedimento.]

225. **P-4:** *É!*

226. **Pesquisador/Participante:** Ok! Percebam, pessoal, que são duas maneiras possíveis para o cálculo da porcentagem! A primeira é mais ‘rápida’ e por meio de regra de três pode ter mais significado...

227. **P-4:** *Pra mim tem!*

[Enquanto registrava os procedimentos denotados na lousa – assim como as demais – P-4 fez o seguinte comentário:]

228. **P-4:** *Eu não sabia que quando é 3 possibilidades em 7 se escreve $\frac{3}{7}$, e nem que na de baixo [Referiu-se ao item b)] seria de 50%! Eu não consegui fazer essa relação!*

229. **Pesquisador/Participante:** Você está conseguindo estabelecer esta relação agora com a nossa discussão?

230. **P-4:** *Então, antes eu nem pensei!*

231. **Pesquisador/Participante:** Então você não sabia que a probabilidade é representada por meio de uma proporção, proporção em forma de uma fração?

232. **P-4:** *Eu acho que eu pensei só deste jeito mesmo, [Referiu-se a sua resposta.] eu nem pensei nisso! Porque é difícil fazer, pelo menos para mim é, essa transformação. Você olha e você fala: “Não, é lógico que é metade!”, só que na hora que eu fui fazer eu nem pensei!*

233. **Pesquisador/Participante:** Mas agora começou a ter sentido por meio das nossas discussões?

234. **P-4:** *Claro!*

235. **Pesquisador/Participante:** Isso é um bom sinal, porque você está fazendo assimilações que, eu espero, desencadeiem acomodações constituindo uma nova maneira de pensar! Tudo bem?

236. **P-4:** *Sim!*

237. **Pesquisador/Participante:** Turma, numa sala de aula – 4.^a série – 5.^o ano, as discussões que nós fizemos não é o essencial de acontecer?

238. **P-8:** *Sim, tinha que ser assim!*

239. **Pesquisador/Participante:** As crianças resolvem e acredito ser possível os mesmos exporem as respostas, inclusive registrar e depois explicarem os seus procedimentos, já que isso contribuirá para o comunicar matematicamente. Quando eu dava aulas, me recordo que os estudantes adoravam fazer isso. É claro que sempre tem um ou outro que conversa, ou não participa, alguns caçoam porque o outro errou e daí você tem que discutir com relação ao erro... é todo um ‘jogo de cintura’... Quando eu comparava aquela aula mais ‘fechada’, embora os alunos pudessem questionar, com essa aqui onde os estudantes discutiam as suas soluções, eu observava um melhor desempenho nas atividades e inclusive nas avaliações. Infelizmente, devido a vários fatores nem sempre eu tinha tempo hábil para as discussões, mas percebia que o ‘pensar sobre’ dos estudantes com esta discussão, com esta relação professor-aluno e aluno-aluno era muito mais ‘ampliada’/melhorada. E, pela vivência, parece que nem na Universidade acontece isso, né pessoal? Não deveria ocorrer isso só na Matemática, mas em qualquer área, não é?

240. **P-8:** *Sim! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*

241. **Pesquisador/Participante:** Acho que posso dizer que recaímos, em grande medida, na má Formação de Professores, pois muito não utilizam tal estratégia por não terem sido formados, na Formação Inicial para isso! Falo da Formação Inicial porque a maioria diz o que o estudante (futuro professor) deve fazer quando entrar numa sala de aula, mas este aluno não vivencia isso na Universidade. É fácil dizer que vocês devem propiciar aos alunos da Educação Infantil situações nos quais os mesmos ‘pensem sobre’ a Arte, Ciência, Linguagem, etc. Mas, será que eu, professor formador de professores permito em minha disciplina que meu estudante (graduando) ‘pense sobre’ os assuntos abordados? E, devido à elaboração da tese, vou compartilhar isso com vocês, há muita coisa errada na Formação Inicial de qualquer

tipo de licenciatura. Tem horas que fico até bravo pelo seguinte motivo: uma coisa é dizer-se construtivista ou histórica-crítica..., outra coisa é fazer-se em ação mostrando uma prática fundamentada teoricamente proferida no discurso. É ver-se na prática o que o seu discurso fala sobre a teoria educacional.

242. **P-8:** *Então, é aquilo que a gente já discutiu bastante! Acho que falta a prática porque a gente só tem teoria, né! A teoria, teoria... daí você tem que aplicar isso aí! Daí você vai aplicar, só que na real, só que não hora que você cai realmente você vai estar sozinha!*

243. **Pesquisador/Participante:** Isso, você vai estar ‘sozinha’ na sala de aula!

244. **P-2:** *Mas eu acho que é isso que acontece com os professores universitários!*

245. **P-4:** *Também!*

246. **P-2:** *É a mesma coisa!*

247. **Pesquisador/Participante:** Ok! Podemos retomar discussões como essa em outros momentos já que também são interessantes! Pessoal, vamos discutir o último desafio. **[O Pesquisador/Participante projetou o quinto desafio apresentado abaixo:]**

DESAFIO (5): No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos, qual é a probabilidade de não sair soma 5?							
Solução: Antes de pensar a respeito da probabilidade de não sair soma 5, é necessário obter todos os possíveis pares constituídos pelas faces dos dois dados perfeitos lançados simultaneamente. No Diagrama denotado abaixo observam-se todos os 36 possíveis pares:							
2.º DADO (lançado)	6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
	5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
	4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
	3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
	2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
	1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	Face	1	2	3	4	5	6
1.º DADO (lançado)							
O problema solicita a probabilidade de não sair soma 5 no lançamento simultâneo de dois dados, então, inicialmente, faz-se importante contar os pares cuja soma resulta em 5. Os mesmos encontram-se no subconjunto abaixo: SOMA 5: {(4, 1); (3, 2); (2, 3); (1, 4)} Logo, há 4 possibilidades em 36 de sair soma 5. Por outro lado, os demais pares não pertencentes ao subconjunto ‘Soma 5’ constituem as outras possibilidades de não sair soma 5. Como há 36 possíveis pares, então, o subconjunto formado pelos pares cuja soma não é 5 possui $36 - 4 = 32$ pares. R: A probabilidade de não sair soma 5 é de $\frac{32}{36}$ ou $\frac{8}{9}$ ou $\sim 89\%$. Embora a chance de obter um par cuja soma seja 5 é pequena não significa que a mesma é impossível.							

[Antes da discussão da solução do referido desafio, o Pesquisador/Participante indagou que apenas P-4 havia se ‘aproximado’ da resposta. Neste momento, foram projetadas as respostas elaboradas, conforme denotado a seguir:]

PARTICIPANTE	RESPOSTA				
P-2	$4 + 1 = 5$	$1 + 1 = 2$	$1 + 3 = 4$	$5 + 1 = 6$	$6 + 4 = 10$
	$3 + 2 = 5$	$2 + 2 = 4$	$2 + 1 = 3$	$5 + 2 = 7$	$6 + 5 = 11$

	$1 + 4 = 5$ $2 + 3 = 5$	$3 + 3 = 6$ $4 + 4 = 8$ $5 + 5 = 10$ $6 + 6 = 12$ $1 + 2 = 3$	$3 + 1 = 4$ $4 + 2 = 6$ $4 + 3 = 7$ $4 + 5 = 9$ $4 + 6 = 10$	$5 + 3 = 8$ $5 + 6 = 11$ $6 + 1 = 7$ $6 + 2 = 8$ $6 + 3 = 9$	$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
P-4	$2 + 3, 1 + 4, 3 + 2, 4 + 1$ $1 + 1, 1 + 2, 1 + 3, 2 + 1, 2 + 2, 3 + 1, 1 + 5, 1 + 6, 2 + 4, 2 + 5, 2 + 6, 3 + 3, 3 + 4,$ $3 + 5, 3 + 6, 4 + 2, 4 + 3, 4 + 4, 4 + 5, 4 + 6, 5 + 1, 5 + 2, 5 + 3, 5 + 4, 5 + 5, 5 + 6,$ $6 + 1, 6 + 2, 6 + 3, 6 + 4, 6 + 5, 6 + 6$ 32 possibilidades em 36 chances = 4				
P-5	$1 - 1$ $2 - 2$ $3 - 3$ $4 - 4$ $5 - 5$ $6 - 6$ $1 - 2$ $2 - 3$ $3 - 4$ $4 - 5$ $5 - 6$ $1 - 3$ $2 - 4$ $3 - 5$ $4 - 6$ $1 - 4$ $2 - 5$ $3 - 6$ $1 - 5$ $2 - 6$ $1 - 6$ R: A probabilidade é de 19 em 21.				
P-7	A probabilidade de não cair soma 5 é de aproximadamente 66%. Observação: A participante apagou as operações aritméticas que realizou à obtenção de tal resposta.				
P-8	Soma 5 – 3 e 2 – 4 e 1 – 20% Observação: A participante sublinhou, no enunciado, a palavra “probabilidade” e circulou a expressão “de não”.				

[P-2 disse ter se perdido durante a solução. As demais participantes ficaram contentes ao visualizar a resolução feita por P-4, no entanto o Pesquisador/Participante indagou:]

248. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, a P-4 solucionou o desafio. No entanto, eu não sei porque ela colocou igual (=) a 4!

249. **P-2:** Porque ela fez 36 menos 32!

250. **Pesquisador/Participante:** Então este 4 eram os pares que resultavam soma 5, P-4?

251. **P-4:** Ah, não sei!

252. **Pesquisador/Participante:** Tenta pensar porque deu 4!

253. **P-8:** Vai P-4 pensa aí!

254. **P-4:** Eu acho que foi pelo o que a P-2 falou mesmo: 36 menos 32 que dá 4! [P-2 falou conjuntamente a operação $36 - 32 = 4$.] Eu não ia fazer uma relação tão complexa assim! [Referiu-se ao questionamento feito pelo Pesquisador/Participante.]

255. **P-8:** Como não P-4!?

256. **P-2:** Você acabou de resolver o desafio!

257. **P-5:** Você foi a única que fez!

258. **P-7:** É verdade!

259. **P-4:** *Mas eu fiz um por um!*
260. **P-2:** *Mas e daí, P-4, é a solução! Eu mesma desisti!*
261. **P-7:** *Mas isso que ela colocou não era a relação!? Essas 4 eram as 4 possibilidades!*
262. **Pesquisador/Participante:** Não! A probabilidade de não sair soma 5 é de 32 em 36, já a de sair soma 5 é de 4 em 36. **[P-2 falou conjuntamente as duas probabilidades.]** Uma tem relação com a outra, mas não na mesma resposta.
263. **P-7:** *Tá!*
264. **P-4:** *Mas eu coloquei aqui em cima Pesquisador/Participante! [Mostrou a sua folha na qual no ‘início’ da solução havia escrito os 4 pares cuja soma resulta em 5.] Tá vendo oh: 2+3, 1+4, 3+2 e 4+1.*
265. **Pesquisador/Participante:** Você separou das demais, né!?
266. **P-4:** *É, são as 4 possibilidades.*
267. **Pesquisador/Participante:** De sair soma 5!?
268. **P-4:** *É!*
269. **Pesquisador/Participante:** Mas o desafio pede a probabilidade de não sair soma 5!
270. **P-4:** *É!*
271. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem?
272. **P-4:** *Sim!*
273. **Pesquisador/Participante:** Eu entendi o que você falou, P-4! Ela colocou ali, pessoal **[Apontou para a projeção na lousa.]** todas as possibilidades de sair soma 5 com o lançamento simultâneo de dois dados. E a P-4 teve que ter muita atenção e pensar bastante pois o risco de esquecer um par ou outro é fácil!
274. **P-8:** *É verdade! [Resposta compartilhada entre P-2, P-5 e P-7.]*
275. **Pesquisador/Participante:** A P-5 colocou a probabilidade de 19 em 21... Ela, pessoal, achou 21 pares, daí viu que dois deles davam soma 5, o 2 – 3 e 1 – 4. Em seguida, tirou de 21 estes 2 pares! Foi isso que você pensou, P-5? **[Após alguns instantes, P-5 respondeu:]**
276. **P-5:** *É, eu fiz isso!*
277. **Pesquisador/Participante:** Percebam, pessoal, que a P-5 pensou de modo correto! Apenas faltaram alguns pares! O 3 – 2 e 4 – 1 e os que não davam soma 5. Eu não sei, mas acho que você não considerou o inverso, ou seja, se tem o par 4 – 5, pode inverter e ter o 5 – 4.

278. **P-5:** *Entendi! E daí eu tinha que considerar!*

279. **Pesquisador/Participante:** E por isso ficaram faltando pares até o total 36!

280. **P-5:** *É, eu lembro bem disso! [Olhou para a sua folha e falou:] 2 – 3... eu pensei que não pudesse inverter esse 2, eu pensei que era a mesma coisa. [A participante achou não ser possível o par 3 – 2, já que tinha escrito o 2 – 3.]*

281. **Pesquisador/Participante:** Pode, pois como tem o lançamento simultâneo de dois dados pode variar.

282. **P-5:** *Eu até pensei que podia acontecer, mas na hora de contar eu achei que não precisava!*

283. **Pesquisador/Participante:** Entendi o que você pensou!

284. **P-5:** *É, foi isso!*

[P-4 salientou que no 3.º colegial não teria conseguido resolver tal desafio. As demais participantes disseram que ela não poderia se menosprezar já que havia conseguido ‘construir’ a solução. Neste momento, o Pesquisador/Participante entrevistou:]

285. **Pesquisador/Participante:** P-4, se você não tivesse entendido o que seria probabilisticamente isso, não teria nem feito as combinações! Certo!? Percebam que este tipo de problema envolve Probabilidade e Combinatória, dá pra perceber?

286. **P-8:** *Sabe o que eu to vendo, assim, da P-4, aquele primeiro exercício do sanduíche, assim, ela não teve essa visão! E do número, você está vendo, [Referiu-se ao Pesquisador/Participante.] do número aqui que é mais complexo, eu acho que é mais do sanduíche de combinar, ela conseguiu enxergar!*

287. **Pesquisador/Participante:** Eu suponho que ela tenha se valido de problema análogo realizado no Ensino Médio! E também porque vivenciou tais jogadas de dados...

288. **P-8:** *É fantástico, P-4, porque eu sou mais no visual... eu fico imaginando os sanduíches, eu até coloquei 1, 2, 3, 4... Agora este desafio aqui eu já errei! Eu coloquei 20%! [Ao final a participante riu.]*

289. **Pesquisador/Participante:** A P-7 colocou que a probabilidade de não sair soma 5 é de aproximadamente 66%, só que também ela apagou os cálculos...

290. **P-7:** *Na verdade essa também eu já comecei errando porque eu pensei nisso que a P-5 tinha acabado de falar! Eu só tinha pensando na soma 5, 1 – 4 e 3 – 2, pra mim o resto daria na mesma! [Referiu-se aos pares ‘invertido’ 4 – 1 e 2 – 3.]*

291. **Pesquisador/Participante:** Compreendi! Você achava que não importava a ordem!

292. **P-7:** *É!*

293. **Pesquisador/Participante:** E a P-8 falou que era 20%!

294. **P-8:** *É! Eu falei tira os dois e fica...*

295. **Pesquisador/Participante:** Só que, para resolver este desafio, nós temos que pensar inicialmente combinatoriamente. Isso é um exemplo da relação entre as áreas do Tratamento da Informação – Estatística, Probabilidade e Combinatória, mas no texto seguinte iremos discutir um pouco sobre isso! **[Em seguida, o Pesquisador/Participante discutiu a solução do quinto desafio, sendo que P-4 fez a leitura da mesma. As participantes acharam interessante a representação por meio da tabela na qual foram combinados 36 pares compostos pelas ‘saídas’ das faces dos dois dados lançados simultaneamente. P-4 salientou ter achado os pares, apenas não os organizou como mostrado na tabela. Após tal discussão, P-8 questionou:]**

296. **P-8:** *Pesquisador/Participante, esse negócio do dado perfeito...*

297. **Pesquisador/Participante:** Sim...

298. **P-8:** *Todos os problemas você tem que pensar que o dado é perfeito, que vai cair... Mas tem a possibilidade de não ser perfeito?*

299. **Pesquisador/Participante:** Sim, tem possibilidade, só que daí não estaremos tratando de elementos equiprováveis, ou seja, que tem a mesma chance de acontecer.

300. **P-8:** *Mas aí... e quando perguntam uma... uma questão direta tem que estar o dado perfeito!?*

301. **Pesquisador/Participante:** Se é considerado como sendo a mesma chance de cada uma das faces cair, considera como perfeito. Dá para calcular se não for perfeito? Sim, só que daí irão mudar os números.

302. **P-8:** *Vai dar os números?*

303. **Pesquisador/Participante:** Sim, porque daí, talvez, a chance de sair face 5 num dado não é mais de $\frac{1}{6}$, por exemplo. Tudo bem?

304. **P-8:** *Sim!*

305. **Pesquisador/Participante:** Pode ser $\frac{2}{6}$, porque daí esta chance tem mais chance de sair. Só que, assim, irá mudar toda a conjuntura. Tudo bem?

306. **P-8:** *Sim! É que eu já vi problema com isso!*

[Quando questionadas sobre dúvidas decorrentes dos desafios e suas soluções, ninguém se pronunciou. Apenas P-8 disse também não ter pensado na possibilidade dos pares ‘inversos’, ou seja, que o par 1 – 4 é diferente de 4 – 1. Observe sua fala:]

307. **P-8:** *Assim como a P-5 e a P-7 eu também não pensei que pode sair 3 – 2 mas também 2 – 3!*

308. **P-7:** *Eu até pensei, mas fiquei muito na dúvida! Daí eu falei: “Acho que não!”.*

311. P-7: *Ficou uma dúvida... E eu achei que nem!*

312. Pesquisador/Participante: Ok! Então, pessoal, eu peço o seguinte desafio para vocês:
[O Pesquisador/Participante leu o seguinte desafio:]

1. Em relação ao Desafio (5), é possível obter todos os possíveis pares advindos do lançamento simultâneo de dois dados perfeitos por meio do Diagrama de Árvore (Árvore de Possibilidades)? Em caso afirmativo, construa-o abaixo:

[Ao término da leitura, P-7 questionou:]

313. P-7: *Então nós teremos que formar os 36 pares?*

314. Pesquisador/Participante: Isso mesmo, P-7!

315. P-8: *Nossa, Pesquisador/Participante, vou ter que pensar, agora!*

316. Pesquisador/Participante: Esse é o objetivo.

317. P-8: *A gente pode comentar, ou tem que fazer sozinho?*

318. Pesquisador/Participante: Não, vocês podem discutir, trocas ideias, o objetivo do nosso Grupo é esse!

[P-7 conversou com P-8 e P-2, dizendo ser necessário colocar os números de 1 a 6 e, para cada número, seria preciso colocar de 1 a 6. Tal ideia foi aceita por P-8, e as participantes começaram a elaborar o Diagrama de Árvore. Enquanto fazia, P-8 indagou:]

319. P-8: *Pesquisador/Participante, essas aulas do Grupo pra mim estão sendo excelentes! Eu acho, assim, tanto psicologicamente porque a gente discute até as coisas das nossas aulas com a... nossa... eu sinto meio igual a P-4... “Será que tô fazendo certo?”, porque você sabe fazer também, mas tem horas que fica enrolado!*

320. Pesquisador/Participante: É uma espécie de insegurança...

321. P-8: *Sim... sim... pra mim foi... eu achei a Pedagogia muita teoria e eu não tenho tanta facilidade assim de, na hora de tirar uma... ler o texto na hora e...* **[Referiu-se ao fato de retirar ideias ‘rapidamente’ do texto e ‘enxergá-las’ no plano prático.]**

322. **Pesquisador/Participante:** Perceba que em nosso Grupo também tentamos analisar a parte prática!

323. **P-8:** *Então, realmente, eu vejo que agora não sou só eu com essa dificuldade... No curso quase inteiro eu achava isso, e estava até quase desistindo... É, mas é vivendo e aprendendo! Eu quando fiz Economia era muito diferente! E sempre a gente está aprendendo!*

324. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro!

[Durante a conversa entre P-8 e o Pesquisador/Participante, P-2 explicou à P-4 como estava elaborando o Diagrama de Árvore. Decorridos 10 minutos, todas as participantes haviam elaborado corretamente o Diagrama de Árvore. O Pesquisador/Participante salientou a necessidade de apresentar tal diagrama ao aluno pois, conforme estudos da Educação Matemática, é muito difícil o estudante elaborá-lo sozinho.]

[Em continuidade, P-5 iniciou a leitura do próximo item – 14.3 – exposto a seguir:]

14.3 Uma breve reflexão sobre a Combinatória e a Probabilidade e seu ensino

Conforme já ressaltado, constituem o bloco ‘Tratamento da Informação’ a Estatística, a Combinatória e a Probabilidade. Para Lopes (2003):

A Combinatória, a Probabilidade e a Estatística inter-relacionam-se, proporcionando uma filosofia do azar de grande alcance para a compreensão do mundo atual e capacitam pessoas a enfrentarem tomada de decisões, quando somente dispõem de dados afetados pela incerteza, situações comuns em nosso cotidiano. (p. 53)

Ao se referir à ‘filosofia do azar’, a autora faz referência a outra possibilidade de ‘significar’ a Matemática, ou seja, como uma Matemática do ‘Talvez’, do ‘Possível’ (MUNIZ e GONÇALVES, 2006). Tal filosofia vem rebater a ideia de que a Matemática caracteriza-se apenas pela ‘Certeza’, pelo ‘Determinismo’. Por exemplo, durante o lançamento de um dado perfeito ‘Talvez’ saia a face 5, não sendo plausível afirmar com ‘Certeza’ a saída de tal face. Segundo Rodrigues (2011) essas, entre outras concepções equivocadas, tornam-se uma barreira ao ensino da Probabilidade, sendo necessário desde os anos iniciais da Educação Básica o professor ‘chamar’ a atenção do aluno para a noção do ‘Acaso’, da ‘Incerteza’.

[Concluída a leitura deste trecho, o Pesquisador/Participante fez o seguinte questionamento:]

325. **Pesquisador/Participante:** Turma, quem aqui achava que a Matemática era só do ‘certo’ e de algo ‘determinado’?

326. **P-8:** *Nós achávamos, inclusive da régua foi uma coisa assim...*

327. **P-2:** *Um choque!*

328. **P-8:** *Realmente! Mesmo que eu tenha feito Matemática [Referiu aos assuntos matemáticos estudados em seu curso de Economia.] eu ainda tinha aquela visão, assim, de que a Matemática era exata!*

329. **P-5:** *Até eu que achava que não achava... naqueles exercícios de Estatística eu percebi que acho sim!*

330. **Pesquisador/Participante:** Da média, né P-5!

331. **P-5:** *Isso, da média que eu não consegui fazer!*

332. **Pesquisador/Participante:** Vocês acham, pessoal, que a dificuldade em combinar todas as faces do dado pode ser porque isso significa o ‘talvez’ sair, que não é ‘certeza’ de? **[P-8 balançou a cabeça indicando concordar com o exposto.]** Porque me parece que os professores de vocês não trabalharam estas questões do pensamento estatístico, combinatório e probabilístico! Seja porque quase nunca dá tempo de chegar ao final do livro didático que é onde, geralmente, se encontram estas três áreas, ou, porque a maioria não sabe abordar estes assuntos ou nem sabem estes assuntos! Não posso generalizar, mas boa parte dos professores de Matemática, embora tenha feito um curso de Matemática, não sabem resolver um problema de Arranjo, por exemplo, sem a utilização da fórmula normalmente decorada e sem compreensão.

333. **P-8:** *Ah, sim, é verdade, não sabe explicar!*

334. **Pesquisador/Participante:** Ou possuem dificuldade para diferenciar um Arranjo de uma Permutação com repetição, ou uma Combinação de um Arranjo simples, ou uma Permutação com repetição de uma Permutação sem repetição. Essas que eu citei são tipos de agrupamentos que implicam possibilidades de ‘combinações’ dos elementos, só que cada possui certas especificidades que as diferenciam. Então, pessoal, como mostram as pesquisas que eu denoto no texto, considerável parte dos docentes não ensinam a Matemática do ‘Talvez’, do ‘Possível’ sob a perspectiva da ‘filosofia do azar’ por esses motivos. E se a gente ‘passar’ isso pros anos iniciais, a coisa complica um pouco mais. Vocês concordam? **[Todas as participantes indicaram, por meio de expressão facial, afirmativamente.]** É por isso, pessoal, que estamos em nosso Grupo fazendo resignificações da Matemática e de outras questões também! E eu espero que vocês construam uma outra visão da Matemática, conforme estamos discutindo. Agora, vamos supor que os alunos da Pedagogia não tenham chance de discutir sobre esta questão. Vocês acreditam que a chance dos mesmos propagarem uma visão determinística da Matemática é grande?

335. **P-2:** *Eu acredito!*

336. **Pesquisador/Participante:** Vocês acreditam que sem estes momentos de resignificações vocês também ‘passariam’ para os seus alunos que a Matemática é determinística?

337. **P-8:** *Sim, porque foi assim que nós aprendemos! Não tem como fazer diferente, e a própria Pedagogia não dá isso pra gente!*

338. **Pesquisador/Participante:** Não deu esse subsídio, estabelecendo uma ponte teórica-prática?

339. **P-8:** *Não!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**

340. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, pessoal, quando o autor se refere à ‘filosofia do azar’? Embora eu não tenha colocado no texto, a Probabilidade foi um dos ramos da Matemática que mais demorou para se sistematizar por preconceitos dos sábios/matemáticos/intelectuais da época... Como se tratava dos jogos de azar, a igreja católica colocava impedimentos porque ‘matematizar’ o acaso era ‘pecado’ porque cabia apenas à Deus determinar as possibilidades e não ao homem!

341. **P-8:** *A igreja prejudicou muito a Ciência... até hoje eu vejo isso! Eu vejo colegas da gente que fez Biologia e não acredita no Darwin... [Referiu-se à teoria evolucionista elaborada por Charles Darwin.] Então é por causa da igreja, então desde àquela época até agora!*

342. **Pesquisador/Participante:** Sim! E tem tudo a ver com o que eu falei! Eu só não entrei nestes pormenores no texto para não ‘alongar’ muito! Como ia dizendo, a Probabilidade sofreu preconceito para se sistematizar, para ser aceita como um ramo da Matemática! Isso aconteceu também com as barreiras enfrentadas pela teoria evolucionista darwiniana até sua aceitação.

[P-5 prosseguiu com a leitura do texto denotado abaixo:]

Inúmeras pesquisas – (CARVALHO, 2004; CARVALHO, 2005; COSTA, 2004; COUTINHO e GONÇALVES, 2003; ESTEVES, 2001; LOPES, 2006a; LOPES, 2006; MIGUEL e MAGINA, 2003; PAMPLONA, 2006; RODRIGUES, 2006; entre outras) – apontam que a construção/desenvolvimento dos conceitos acerca da Combinatória e da Probabilidade dá-se mediante a proposição de situações problemas nas quais o aluno sinta-se desafiado a ‘descobrir’ as possibilidades de ocorrência de um determinado ‘Evento Aleatório’ bem como as maneiras de ‘Combinar’ e ‘Ordenar’ diferentes elementos.

Nesse contexto torna-se pertinente destacar a necessidade da AÇÃO-ATIVIDADE do sujeito sobre o objeto à construção do conhecimento, nos remetendo – novamente – à teoria de Piaget. Em sala de aula, o estudante deve ser desafiado a pensar sobre diferentes maneiras de **CONTAGEM** já que isso lhe oportunizará o desenvolvimento do pensamento combinatório, bem como ser desafiado a pensar sobre a **POSSIBILIDADE** da ocorrência de fenômenos naturais e produzidos pelo homem o que corroborará ao desenvolvimento do pensamento probabilístico.

Complementando o já exposto, Lopes (2003) destaca o seguinte a respeito da abordagem da Combinatória:

A Combinatória requer uma abordagem centrada na resolução de problemas, com origens diversificadas. Algumas propostas devem envolver a possibilidade de se obter a solução diretamente pela contagem. Outras, devem possibilitar aos alunos identificação de categorias nas quais a situação-problema pode-se classificar adequadamente. (p. 63)

As categorias denotadas se referem aos tipos de agrupamentos a serem feitos pelo estudante, tais como os arranjos, as combinações e as permutações. Ainda sobre o raciocínio combinatório, a autora pontua:

O raciocínio combinatório refere-se ao pensar sobre operações combinatórias que se definem frente às situações aleatórias e à enumeração do espaço amostral de todo experimento composto. A combinatória desempenha um papel relevante no desenvolvimento das capacidades lógicas do sujeito.

Batanero et al (1994) destacam Piaget, quando este considera que a compreensão do azar passa pelas operações combinatórias – fundamentais para o pensamento formal. Esses autores citam Stanley (1946), ao afirmar que a Combinatória não deve ser considerada somente um ramo das ciências matemáticas, pois está relacionada à quase todas as formas de conhecimentos úteis que a mente humana pode empregar ou desenvolver.

A diversidade de fenômenos presente na natureza, por intervenção humana ou não, dá origem a um grande número de causas produzidas por um acontecimento que poderá ser difícil de enumerar. A Combinatória auxilia-nos a elencar todos os diferentes modos de ordenar ou combinar as possibilidades de um evento. A partir dessa visão é que podemos perceber as amplas relações que o raciocínio combinatório pode estabelecer com a Física, a Química, a Biologia, a Economia e muitas outras.

A arte combinatória nos servirá como instrumento para confeccionarmos as combinações dos possíveis. Assim, poderemos calcular as Probabilidades das hipóteses relativas aos dados disponíveis, estabelecendo uma estreita conexão entre

[Durante a leitura as participantes foram questionadas sobre o significado de evento aleatório. P-4 deu como exemplo a retirada das bolas de uma caixa; já P-5 citou a possibilidade de chuva (ou não). Após a leitura da citação de Lopes (2003, p. 67), P-8 questionou sobre as relações entre a Probabilidade e a Física, Química, etc. O Pesquisador/Participante justificou tal relação nos experimentos realizados, na observação e análise dos fenômenos investigados por tais Ciências. P-4 citou lembrar-se bem da relação com a Biologia na abordagem dos assuntos relacionados à Genética. Observe a sua fala:]

343. **P-4:** *Eu adorava esta parte dos genes! Eu só não fiz Biologia porque tinha Matemática! [As demais participantes riram.] Mas é verdade, nesta parte da Probabilidade eu adorava fazer os exercícios... nossa, eu fazia um monte!*

344. **P-8:** *Por isso que ela conseguiu fazer legal! [Referiu-se ao quinto desafio na qual a participante foi a única a solucionar.]*

345. **P-4:** *E é tudo assim, né, igual! [Apontou para a folha na qual estavam as respostas dos desafios.]*

346. **Pesquisador/Participante:** Sim, porque tinha que fazer as combinações entre os tipos sanguíneos, os fatores...

347. **P-4:** *Nossa, eu adorava esta parte! Eu sempre adorei Biologia, e eu acho que eu aprendi aí, porque eu acho que foi um outro enfoque, não só da Matemática!*

348. **Pesquisador/Participante:** Seria porque você via uma utilização com significado daquilo que você estava fazendo?

349. **P-4:** *É!*

350. **P-8:** *Aí, oh! [Apontou para P-4.]*

351. **Pesquisador/Participante:** Foi um estudo significativo e contextualizado...

352. **P-8:** *Por isso que ela gostava!*

353. **Pesquisador/Participante:** Até porque o afeto é o ‘motor’ à cognição!

354. **P-8:** *Se o professor de Matemática tivesse feito esta ligação da Matemática com a Biologia a P-4 teria feito melhor a Matemática!*

355. **P-4:** *E até eu lembro que estava no 3.º colegial, na parte de Biologia eu sempre gabaritava, mesmo se tinha Matemática ou não tinha eu sempre ia bem em Biologia. Agora, mesmo essa parte de Combinatória e Probabilidade na Matemática eu não conseguia, não ia!*

356. **P-8:** *Não tinha significado pra ela!*

357. **Pesquisador/Participante:** Sim, a falta de significado, de uma estrutura assimiladora propiciando a acomodação do ‘novo’!

358. **P-4:** *Podia ser o mesmo conteúdo na Biologia e na Matemática, mas na Matemática não ia!*

359. **P-8:** *Eu e a P-2 estávamos conversando o como é difícil, numa sala, perceber isso aí... Você pode dar um exemplo, pegar 1, 2, 3, mas infelizmente fica... [Referiu-se aos alunos que não conseguem ser ‘atendidos’ de modo satisfatório pelo professor acarretando na não aprendizagem da Matemática ou de outra matéria escolar.]*

360. **Pesquisador/Participante:** Infelizmente, pessoal, fica sim, eu não vou mentir pra vocês! Mesmo fazendo aquilo que eu disse pra vocês no encontro anterior, ou seja, avaliar aquilo que o estudante já sabe para propor situações de ensino possíveis e desafiadoras... infelizmente, pelo menos eu não conseguia atingir a todos.

361. **P-2:** *Eu não entendi a frase lá: “A arte combinatória nos servirá como instrumento para confeccionarmos as combinações dos possíveis.”. É o que poderia acontecer?*

362. **Pesquisador/Participante:** Isso! O que pode vir a acontecer, e não o que acontecerá! Cabe aqui aquele quinto desafio em que, antes de calcularmos a probabilidade houve a necessidade de calcular todas as possibilidades para formar o Espaço Amostral. Pensando nos anos iniciais, os estudos indicam, pessoal, que geralmente as crianças combinam apenas aquilo que são de interesse dela.

363. **P-8:** *Fala de novo, eu não peguei!* [Após repetir o exposto, o Pesquisador/Participante citou um exemplo:]

364. **Pesquisador/Participante:** Ele vai combinar só os sorvetes de morango porque ele gosta mais de morango... [Risos entre as participantes.] Só que para entender o pensamento combinatório, ele tem que fazer a combinação de todos os possíveis, que a gente viu por meio do Diagrama de Árvore.

365. **P-8:** *Ele faz?*

366. **Pesquisador/Participante:** Sim!

367. **P-8:** *Porque ele pode falar: Eu não gosto de chocolate...* [Referiu-se ao sabor do sorvete.]

368. **Pesquisador/Participante:** Por isso a necessidade do professor intervir, mediar e questionar esse aluno, que é o que eu venho fazendo isso com vocês. Ao apresentar a Árvore de Possibilidades, eu pretendo que vocês se apropriem deste instrumento para que pensem todas as possibilidades não esquecendo de nenhum! Podemos continuar, pessoal? [Como não houveram outros questionamentos, o Pesquisador/Participante prosseguiu com a leitura do texto apresentado a seguir:]

Além de observar a estreita conexão entre a Combinatória e a Probabilidade, a autora destaca o seguinte acerca do pensamento probabilístico:

As investigações a respeito do pensamento probabilístico permitem que se façam

recomendações sobre a prática educativa desse tema. Têm-se discutido sobre a necessidade de se realizar experimentos de simulação – nos quais apareçam seqüências aleatórias –, de se dar importância à utilização de vocabulário adequado para descrever e quantificar situações relacionadas ao azar e de se confeccionar tabelas de freqüências e gráficos para representação do comportamento de fenômenos aleatórios. Batanero e Serrano (1995) afirmam que a introdução gradual dos conceitos e da notação probabilística servirá para explicar, matematicamente, as regularidades observadas nos dados recolhidos.

O desenvolvimento do pensamento probabilístico requer o reconhecimento de situações de acaso na vida cotidiana e no conhecimento científico, bem como, a formulação e comprovação de conjecturas sobre o comportamento de fenômenos aleatórios simples e a planificação e realização de experiências nas quais se estude o comportamento de fatos que abarquem o azar. A partir dessas considerações, pode-se organizar situações didáticas que envolvam a observação de experimentos, com seus respectivos registros e análises, possibilitando a integração entre a Probabilidade e a Estatística. Nessa conjunção é que se terá o desenvolvimento do raciocínio estocástico. (LOPES, 2003, p. 64-65)

A referida citação denota a relação existente entre a Estatística e a Probabilidade, caracterizando o raciocínio estocástico como proveniente da ‘junção’ entre essas duas áreas.

Em suma, a construção da Estatística, Probabilidade e Combinatória mostra-se necessária à compreensão da realidade, pois o sujeito terá ‘ferramentas’ para interpretar os fenômenos ocorridos na natureza ou causados pelo homem.

[Novamente o Pesquisador/Participante questionou se as participantes compreendiam a relação entre a Combinatória e a Probabilidade. Utilizou-se como exemplo o quinto desafio no qual tal relação evidenciou-se. Neste momento, P-8 indagou:]

369. P-8: *Mas a gente estuda separado, né!?*

370. Pesquisador/Participante: Infelizmente, esse é outro problema! O ‘correto’, digamos assim, seria estabelecer as relações que estou fazendo aqui. E Probabilidade e Estatística também possuem uma estreita conexão. Por exemplo, se você repete um experimento várias vezes, a melhor maneira de tratar os dados obtidos é estatisticamente, produzindo gráficos e tabelas. Daí, a partir da análise dos dados organizados, você pode inferir qual o resultado se mostra mais frequente, ou seja, o que tem mais chance de ocorrer. Suponhamos que um dado seja jogado 100 vezes. Em seguida, anota-se numa tabela quantas vezes saiu a face 1, a face 2, a face 3, 4, 5, e 6. Nós vamos obter que, estatisticamente, a chance vai chegar quase perto de $\frac{1}{6}$, que é o valor ideal da Probabilidade. Então, por meio de experimentos que a criança vai realizar exaustivamente, é possível estabelecer esta ponte entre a Estatística e a Probabilidade. Em Economia mesmo, não tem as projeções Estatísticas?

371. P-8: *Sim!*

372. Pesquisador/Participante: O economista prevê que daqui há 6 meses o mercado vai estar possivelmente assim... A partir da Mediana, Média e Moda, e outros cálculos muito mais complexos, é possível prever como estará a conjuntura econômica daqui 6 meses! Então é uma possibilidade, podendo ter uma alteração para mais ou para menos, mas fica naquele intervalo! Tudo bem esta relação, pessoal? **[Todas as participantes sinalizaram, por meio de expressão facial, afirmativamente.]**

[Finalizada a leitura-discussão do texto, o Pesquisador/Participante ressaltou se tratar apenas de uma breve reflexão desta temática. Isso, pois, ainda serão abordadas situações problemas investigando a questão do acaso, da aleatoriedade, da maior (ou

menor) chance de ocorrer determinado fenômeno, das maneiras possíveis de combinar e ordenar os elementos. Para concluir, o Pesquisador/Participante observou:]

373. **Pesquisador/Participante**: Todo este estudo acerca da Combinatória, Estatística e Probabilidade propiciando construções, resignificações visam com que vocês compreendam a Matemática do ‘talvez’, do ‘possível’, sob a perspectiva da ‘filosofia do azar’. Considero isso importante para que vocês não tenham a visão da Matemática do determinismo, do certo/errado...

374. **P-5**: *Eu não gosto deste tipo de Matemática, eu prefiro a da outra!* [Risos da participante.]

375. **Pesquisador/Participante**: Você prefere a Matemática do determinismo?

376. **P-8**: *É! Esse talvez, do acaso, do pode acontecer, não sei...*

377. **P-4**: *Eu prefiro mais a Matemática do acaso!*

378. **Pesquisador/Participante**: Olha, pessoal, a P-4 prefere mais a Matemática do acaso! A P-8 gosta mais da Matemática ‘exata’!

379. **P-8**: *É, do certo!*

380. **Pesquisador/Participante**: E você, P-7?

381. **P-7**: *Ah, não sei... eu acho que eu sou mais igual a P-8! Dá a impressão que você está mais certa!*

382. **P-8**: *É, mais ‘pé no chão’!*

383. **P-7**: *É o jeito, né, que a gente já construiu!*

384. **P-8**: *É!*

385. **P-7**: *Que é exato!*

386. **P-8**: *É!*

387. **Pesquisador/Participante**: E você, P-2?

388. **P-2**: *Ah, não sei!*

389. **P-8**: *Pra mim soa, assim... quando fala acaso...*

390. **P-2**: *Mas a vida é o acaso!*

391. **P-8**: *Ah, eu sei!*

392. **P-7**: *Mas é estranho! Já basta a vida ser tudo incerto, a Matemática também!* [Risos entre todos.]

393. **P-8:** *A Matemática tinha que ser exato!*
394. **P-7:** *É muita coisa!*
395. **P-5:** *Nossa, essa foi demais... Pode pensar: “De incerto já basta a vida! Deixa a Matemática exata!”.*
396. **Pesquisador/Participante:** Tudo o que vocês colocam, pessoal, é sério, porque essas concepções que vocês já construíram causam uma barreira para a plena compreensão destas áreas.
397. **P-8:** *Mas é! Você está lendo isso, eu estou pensando e questionando: “Meu Deus, é estranho! Como que estudaram isso!? Como que chegaram nisso!? Por quê?”* **[Referiu-se à construção/desenvolvimento da Combinatória e Probabilidade.]**
398. **Pesquisador/Participante:** E isso tudo, pessoal, inicialmente decorreu do cotidiano. Jogos de azar, por exemplo, qual é a chance do dono da banca ganhar? Envolve dinheiro... O mundo envolve dinheiro!
399. **P-8:** *É mesmo!*
400. **Pesquisador/Participante:** A Bolsa de Valores, por exemplo, é uma grande ‘aposta’ cautelosa, por muitos, que a pessoa faz!
401. **P-7:** *Foi mais difícil essa constituição?* **[Referiu-se à construção/desenvolvimento da Combinatória e Probabilidade.]**
402. **Pesquisador/Participante:** Sim! A constituição da ‘filosofia do azar’ sofreu preconceito! Como eu já falei, por a vida ser incerta cabe somente à Deus! Então, como que um matemático vai querer também dominar a incerteza!? Era isso que os estudiosos da época enfrentaram como obstáculo.
403. **P-8:** *É!*
404. **Pesquisador/Participante:** Quem o fizesse era tratado como herege. E daí é impressionante vermos as relações entre a sociedade da época e o desenvolvimento da Matemática. A própria Matemática do determinismo, do absolutismo, digamos assim, teve apoio da igreja, pois a mesma era considerada à melhor (mais adequada) já que seria um sacrilégio pensar sobre o acaso, o incerto que cabia apenas à Deus! Assim, até o ensino é o reflexo de toda uma cultura de um determinado contexto, não é a toa que ainda hoje a Matemática mais difundida, digamos assim, é a do determinismo!
405. **P-8:** *É verdade! Nossa, que interessante, olha quanta coisa a gente questionou!*
406. **P-7:** *É!* **[Resposta compartilhada entre P-2, P-4 e P-5.]**

[Dando prosseguimento, o Pesquisador/Participante solicitou que as participantes – individualmente – resolvessem dois desafios envolvendo a Combinatória. P-5 realizou a leitura do exposto abaixo:]

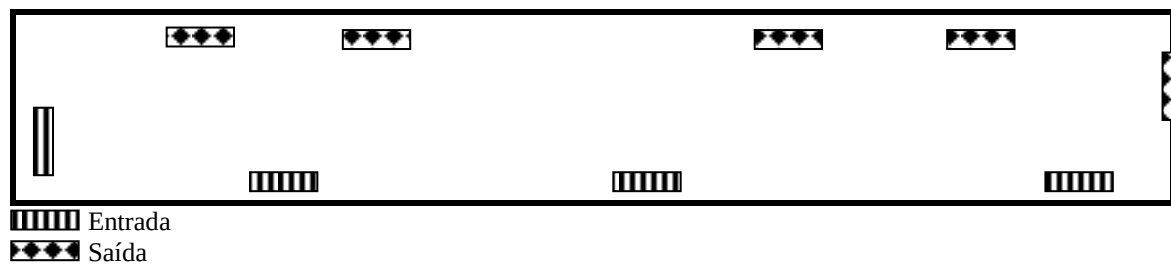
14.4 Problematisando: Combinatória

Leia atentamente a seguinte situação problema:

A professora de Matemática Sueli, visando abordar noções envolvendo o pensamento combinatório solicitou aos seus alunos do 9.º ano do Ensino Fundamental que pensassem acerca do seguinte problema:

Eduarda e sua família foram a um parque de diversões. No parque havia 4 entradas e 5 saídas. De quantos modos diferentes ela pode entrar e sair desse parque?

Em seguida, a professora Sueli colocou na lousa a seguinte representação no intuito de auxiliar os alunos a pensarem sobre o referido problema:



1. De que modo você acredita que os alunos da professora Sueli resolveriam tal desafio?

2. Após discutir as soluções encontradas pelos seus alunos, a professora Sueli pediu aos mesmos que pensassem sobre tal situação modificando o número de entradas para 20 e o número de saídas para 25. Qual seria a ‘nova’ resposta a ser dada pelos estudantes? Há algum princípio matemático que permite a solução de desafios deste tipo? Pense a respeito.

[Ao término da leitura, P-8 questionou:]

407. **Pesquisador/Participante:** *A gente tem que pensar igual os alunos? Como eles fariam?*

408. **P-4 e P-7:** *É, eu já penso igual!*

409. **P-2:** *Ai que maldade!* [A participante disse rindo.]

410. **Pesquisador/Participante:** Sim, como você acha que os alunos da professora Sueli fariam, e é claro, você pode pensar de um modo mais complexo! Tudo bem, P-8?

411. **P-8:** *Sim!... Mesmo a gente tendo vistos essas árvores* [Referiu-se ao Diagrama de Árvore abordado.] *a gente pode pensar diferente?*

412. **Pesquisador/Participante:** Claro! Claro que sim! [Decorridos alguns minutos, P-8 indagou:]

413. **P-8:** *Ai, você ‘quebra’ a cabeça da gente!* [Risos da participante.]

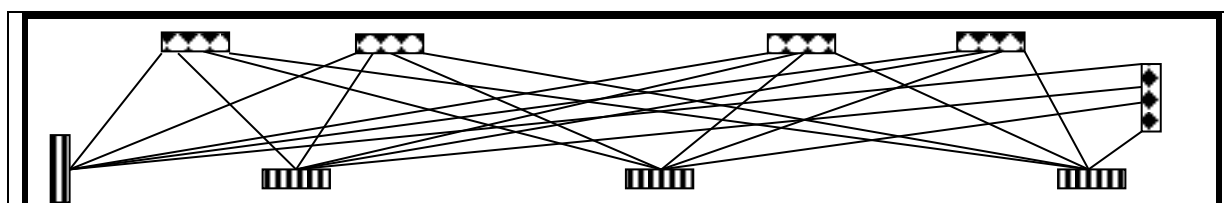
[Após 10 minutos, P-4 foi a primeira a compartilhar as respostas elaboradas dos referidos desafios.]

414. **Pesquisador/Participante:** P-4, como você acha que os alunos fariam ou que você faria?

415. **P-4:** *Então, no caso se fossem os alunos eu acho que eles iam combinar, mesmo, por exemplo, eles iam pegar a primeira entrada e iam cruzando, mesmo! Que nem a P-5 fez oh, assim, pra lá...* [A participante referiu-se ao desafio 1 – discutido anteriormente – no qual P-5 esquematizou por meio de traços as combinações entre sanduíches, sucos e sorvetes.]

416. **Pesquisador/Participante:** Ah, então você pegou a primeira entrada e ‘ligou’ cruzando com as 5 saídas?

417. **P-4:** *Sim!* [O Pesquisador/Participante dirigiu-se à mesa de P-4 e observou o modo como realizou a solução do desafio. Observe um esquema análogo ao utilizado pela participante.] *Daí eu fiz a mesma coisa com as outras entradas, e daí contava tudo!*



418. **Pesquisador/Participante:** Entendi!

419. **P-4:** *Agora, no caso da gente que já viu o negócio da árvore lá* [Referiu-se ao Diagrama de Árvore] *aí eu fiz assim, mas não sei se está certo.* [O Pesquisador/Participante observou o esquema registrado pela participante denotado abaixo.] *Eu coloquei Saída 1, 2, 3, 4, e 5, e daí para cada eu pus 4 entradas.*



420. **Pesquisador/Participante:** Então você colocou a saída primeiro?

421. **P-4:** *Sim!*

422. **P-2:** *Primeiro ela sai e depois ela entra! Tadinha!* [Risos entre todos!]

423. **P-4:** *Porque fica mais fácil assim!*

424. **P-8:** *Ah, P-4, você sempre me surpreende!*

425. **P-4:** *Porque é mais fácil, Pesquisador/Participante, o 4 do que o 5!*

426. **P-8:** *Ah meu Deus!*

427. **P-4:** *Porque senão eu tinha que fazer 4 entrada e depois 5, e é mais fácil contar 4! [A participante inverteu a entrada e a saída ao esquematizar o Diagrama de Árvore porque julgou mais fácil a contagem de 4 em 4.]*
428. **P-2:** *Eu fiz ao contrário... entrada e saída!*
429. **P-4:** *Foi por isso que eu fiz ao contrário!*
430. **Pesquisador/Participante:** *E daí deram 20?*
431. **P-4:** *Sim!*
432. **Pesquisador/Participante:** *Ok! E o segundo problema, como você pensou P-4?*
433. **P-4:** *Então, a segunda eu pensei assim, do 20 ao 25, tem que colocar tudo, né, os 25 itens assim, né... [Gestualmente a participante indicou a ‘colocação’ em vertical das 25 saídas.] vezes 20.*
434. **Pesquisador/Participante:** *Ah, então nesse você já fez diretamente a multiplicação 25×20 ?*
435. **P-4:** *É! Eu fiz, mas não sei se está certo!*
436. **Pesquisador/Participante:** *Não, está certo sim!*
437. **P-8:** *Está certíssimo P-4, você evoluiu bastante!*
438. **Pesquisador/Participante:** *P-5, como você fez?*
439. **P-5:** *Na um eu coloquei que eu acho que os alunos iam fazer o desenho também, igual o que a P-4 falou, interligando cada entrada com a saídas. Aí, na dois, eu coloquei que acho que inicialmente, quando mudasse para 20 e 25, os alunos tentariam desenhar, daí ao perceberem que ficaria muito difícil eu acho que eles tentariam alguma soma... foi como eu fiz aquele outro.*
440. **P-4:** *Os alunos iam tentar fazer uma relação, né!*
441. **P-5:** *É! Foi o que eu pensei! Mas não sei se eles chegariam, necessariamente, na multiplicação! Daí na pergunta: “Há algum princípio matemático...?” eu pus a multiplicação.*
442. **Pesquisador/Participante:** *É este mesmo, P-5, o Princípio Fundamental da Contagem ou também conhecido como Princípio Multiplicativo. [As demais participantes registraram o nome do referido princípio.] E você, P-2, como fez?*
443. **P-2:** *Eu pensei a mesma coisa que elas já falaram, mesmo! Que os alunos da professora Sueli iam pegar o desenho e fazer a relação, ou seja, a entrada 1 com as suas saídas, depois a entrada 2 e tal. Mas eu acho que depois eles iam contar literalmente os risquinhos mesmo...*

444. **Pesquisador/Participante**: Até chegar em 20!
445. **P-2**: *É! Eu acho que, a princípio seria isso!*
446. **Pesquisador/Participante**: Eles não iriam pensar em 4×5 ?
447. **P-2**: *Eu acho que a princípio não!*
448. **Pesquisador/Participante**: Ok! E o segundo desafio você falou o mesmo que a P-5?
449. **P-2**: *Sim, a mesma coisa! A gente até comentou, aqui, que não lembrava o nome certinho do princípio!*
450. **Pesquisador/Participante**: Ok! P-7...
451. **P-7**: *Eu coloquei, também, eu pensei igual, que os alunos da professora Sueli iam contando um por um. E, na segunda, eu coloquei que a hora que eles vissem esse número grande eles já entrariam em desequilíbrio, porque não conseguiriam ir contando 1 por 1 como tinham feito no anterior!*
452. **Pesquisador/Participante**: É, porque ia ficar complicado!
453. **P-7**: *E daí eu coloquei que pode ser que eles utilizassem o diagrama, mas se não fez no anterior não usaria nesse!*
454. **Pesquisador/Participante**: E mesmo no Diagrama de Árvore seria um pouco complicado!
455. **P-2**: *Seria difícil!*
456. **P-7**: *É! E no caso seria o princípio da multiplicação!*
457. **Pesquisador/Participante**: E no caso do segundo desafio, pessoal, dariam 500 possibilidades!
458. **P-8**: *É! 20×25 !*
459. **Pesquisador/Participante**: Imaginem 500 maneiras diferentes de entrar e sair! E, se a gente pensar nos grandes parques de diversões, como o Playcenter e o Hopi Hari talvez tenham até um número maior do que consideramos! **[Todas as participantes concordaram.]** E você, P-8?
460. **P-8**: *Eu acho também, o que eu questiono, eu pensei, que você tinha discutido antes, a professora Sueli não deveria ter colocado este diagrama, né!*
461. **Pesquisador/Participante**: O desenho?
462. **P-8**: *Sim! Porque este desenho induz realmente a gente a ir, a ligar...*
463. **P-2**: *É, a ligar...*

464. **P-8:** *Se ela tivesse a explicar... eu até fiz as entradas e as saídas igual o Diagrama de Árvore, explicando assim eu acho que seria mais fácil pro aluno entender!*
465. **P-2:** *Você ouviu o que a P-4 falou? [Referiu-se à P-8.] Que se não tivesse visto o desenho ela não teria saído do lugar! Ela não conseguiria por si só pensar isso!*
466. **Pesquisador/Participante:** *Você entendeu, P-8?*
467. **P-8:** *Ah!*
468. **Pesquisador/Participante:** *E isso o que a P-4 falou consta nas pesquisas que eu peguei para elaborar as nossas atividades! E alguns autores propõe este apoio – por meio do desenho, por exemplo – ao pensar combinatório dos estudantes num primeiro momento.*
469. **P-8:** *Então o desenho é importante?*
470. **Pesquisador/Participante:** *Como um apoio inicial para poder esquematizar o pensar sobre as várias possibilidades.*
471. **P-8:** *Daí em cima do que eles resolverem você explica desse jeito [Referiu-se ao Diagrama de Árvore.] que seria mais fácil!*
472. **Pesquisador/Participante:** *Sim, como um mediador!*
473. **P-8:** *Aí, resolvendo assim, e você explicando, o segundo desafio eles já fariam 20×25 , porque daí eles fizeram 4×5 que deu 20! Eu pensando assim eu entendo!*
474. **P-2:** *Então, eu acho assim, teria que ter tido mais discussão antes de partir para o segundo desafio! [Ideia compartilhada por P-7.]*
475. **P-7:** *Eu acho que eles não iam chegar! [Referiu-se à solução do segundo desafio.]*
476. **Pesquisador/Participante:** *Sim, concordo plenamente com vocês! A professora Sueli, no caso, iria discutir as respostas, as diferentes estratégias, teria que propor outros problemas análogos em que os alunos possam perceber que sempre terá que multiplicar... até ocorrer uma generalização! Tudo bem? Eu faço ‘direto’ aqui por causa do tempo e nós já estamos com um pensamento mais desenvolvido! Mas com alunos é interessante e pertinente o que vocês colocaram! Nunca a solução de um problema só vai ser suficiente para a construção de um conceito/procedimento ‘novo’!*
477. **P-8:** *Que ano mesmo que a professora Sueli propôs?*
478. **Pesquisador/Participante:** *Para o 9.º ano!*
479. **P-4:** *E antes disso não dá pra trabalhar Combinatória com eles?*
480. **Pesquisador/Participante:** *Dá sim, P-4! Você trabalha combinações desde os anos iniciais! Inclusive, pessoal, do mesmo jeito que eu fiz com a Estatística, eu trago exemplos de atividades envolvendo Combinatória e Probabilidade possíveis de serem aplicadas com alunos de 3.ª e 4.ª séries, e até de 2.ª dependendo da atividade! [O Pesquisador/Participante*

projetou as referidas atividades a serem alvo de discussão em momento posterior.]

Enfim, são vários tipos de atividades para que, desde pequenos, os estudantes vão construindo esta Matemática do ‘talvez’, do ‘possível’. Caso contrário, pode acontecer o que alguns de vocês falaram, ou seja, de preferir a Matemática da ‘certeza’, do determinismo.

481. P-5: A aula passou rápido, hoje, foi gostoso, foi mais rápido!

482. P-8: *Ai, foi mais leve! Sei lá, acho que não tinha tanto Piaget!* **[Todas as participantes riram.]**

[Como não houveram outros comentários, solicitou-se a elaboração do Momento Síntese a ser compartilhado no próximo encontro.]

APÊNDICE S – TRANSCRIÇÃO DO 15.º ENCONTRO

Data: 28/06/2012
Tempo de Duração: 3 horas e 30 minutos.

[Participaram deste Grupo de Estudo P-2, P-4, P-7 e P-8. Inicialmente foram compartilhadas as síntese elaboradas pelas participantes a respeito do encontro anterior.]

1. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, após realizarmos a socialização das sínteses de vocês iremos estudar alguns tipos de agrupamentos constituintes da Combinatória. Estes tipos de agrupamentos denominam-se pelas ‘famosas’ nomenclaturas que vocês sabem o nome, mas não sabem muito bem o que representam. São eles: Permutação, Combinação e Arranjo. Mas daqui a pouco iremos abordá-los, observando o que diferencia um do outro por meio de alguns problemas. Por favor, P-4, leia pra gente!

2. **P-4:** *Se eu falar que não fiz você vai brigar comigo?*

3. **Pesquisador/Participante:** Claro que não! Você fez P-8?

4. **P-8:** *Sim!*

5. **Pesquisador/Participante:** Então leia pra gente, por favor!

6. **P-8:** *Eu pus assim: O que foi mais significativo foi o Diagrama de Árvore, onde o professor deverá apresentar desde o 4.º ano, para o aluno, para que fique significativo, porque senão, dificilmente ele irá aplicar no próximo exercício. Eu pus assim como... como experiência própria... É... eu não conhecia esse Diagrama de Árvore, então eu... ou fazia por fórmula, só que eu não lembrava a fórmula ou aquele... igual nós fizemos... destrinchar um por um. Aí quando é grande o exercício não dá pra ser feito. E agora, com o Diagrama de Árvore eu achei legal, e eu vi que você coloca e as crianças vai por tentativa, **[Referiu-se ao desafio do encontro anterior referente às entradas e saídas do parque.]** aí depois explicando esse Diagrama ela vai desenvolver legal!*

7. **Pesquisador/Participante:** Você achou o Diagrama de Árvore interessante?

8. **P-8:** *Sim, por isso que eu gostei!*

9. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-2, por favor leia pra gente!

10. **P-2:** *O mais significativo deste encontro foi compreender a elaboração do Diagrama de Árvore, e a relação que existe entre Combinação e Probabilidade, pois em alguns casos é necessário combinar, ordenar antes de saber a Probabilidade.*

11. **Pesquisador/Participante:** Legal! P-7...

12. **P-7:** *Achei interessante a retomada dos desafios podendo ver, mais uma vez, as várias maneiras de resolver um mesmo exercício. Também gostei de aprender o Diagrama de Árvore e o Princípio Fundamental da Contagem que é a multiplicação, aprendendo assim*

como resolver os desafios anteriores que, em alguns, eu até cheguei a por a resposta mas não sabia como fazer na verdade.

13. **Pesquisador/Participante**: Então passou a ter um pouco mais de significado?

14. **P-7**: Sim!

15. **Pesquisador/Participante**: Ok! Então parece que o Diagrama de Árvore foi o protagonista do encontro anterior?

16. **P-8**: Foi! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

17. **Pesquisador/Participante**: E as pesquisas mostram, pessoal, se este método de resolução não for ensinado pelo professor intuitivamente o aluno não vai conseguir fazê-lo. Eu acho que isso é comprovado por vocês, né, pois vocês passaram por toda a etapa da escolaridade, só que a organização das combinações possíveis por meio deste diagrama nenhuma de vocês haviam utilizado nas soluções dos desafios.

18. **P-2**: Eu tenho dúvidas!

19. **Pesquisador/Participante**: Ok! Pode falar!

20. **P-2**: Assim, oh, eu queria entender uma coisinha! Quando eu resignifico algo que eu já sabia, aí a gente passa por todo o processo de novo, de assimilação, de acomodação e atinge a equilíbrio.

21. **Pesquisador/Participante**: Isso!

22. **P-2**: É isso mesmo?

23. **Pesquisador/Participante**: Sim, porque você não precisa só ‘desconstruir’, você pode ampliar! Só que para ampliar você assimila com aquilo que você já sabe aumentando a capacidade explicativa de sua estrutura mental, então você atinge um novo equilíbrio que implica numa melhor estrutura. Só que depende da pessoa... e é ‘quase’ imperceptível este processo! Foi respondido P-2?

24. **P-2**: Sim! Agora eu tenho uma outra dúvida!

25. **Pesquisador/Participante**: Vamos lá!

26. **P-2**: Quando eu aprendo algo novo, eu compreendo mas eu não concordo com o que foi exposto, o que ocorre cognitivamente? Eu lembro muito no exemplo que a P-8 deu, com o nosso colega, por exemplo... ele aprendeu a teoria de Darwin, mas, na verdade, não é que ele não compreendeu, ele compreendeu, mas ele nega aquilo... O que acontece?

27. **Pesquisador/Participante**: Neste caso, P-2, entra os fatores afetivos, das crenças construídas pela pessoa. Então, cognitivamente foi compreendido, só que afetivamente, embora o conhecimento ampliou-se é negado. Um importante pesquisador brasileiro Mortimer, não sei se vocês já ouviram, desenvolveu a teoria dos perfis conceituais. Para esta teoria, dependendo de onde o sujeito está, para se encaixar socialmente ele utiliza uma

estrutura de pensamento, e no outro lugar ele até chegar a negar essa e vale-se de outra. Por exemplo, na prova o colega de vocês “aceitava” a teoria evolucionista. Na igreja ele a nega e aceita a teoria criacionista.

28. **P-2:** *Mas cognitivamente ele assimilou e acomodou ambas?*

29. **Pesquisador/Participante:** Sim, ambas. Só que a criacionista não possui justificativa científica, então ela não precisa ser lógica!

30. **P-2:** *E nem é!*

31. **Pesquisador/Participante:** A evolucionista sim! E é interessante porque outros pesquisadores – Posner e Driver – foram um dos primeiros a ‘cantar’ esta bola. Tais autores observaram que a teoria de Piaget estava ‘legal’, mas um Físico que logicamente não deve aceitar a Deus vai à igreja e o aceita!? Como fica isso na mente deste sujeito? Então, uma alternativa foi o desenvolvimento desta teoria dos perfis conceituais. E Eduardo Mortimer foi (é) um dos grandes difusores disso no Brasil, mais especificamente no Ensino de Ciências. Ficou compreendido P-2?

32. **P-2:** *Sim!*

33. **P-8:** *Posso fazer uma pergunta?*

34. **Pesquisador/Participante:** Claro!

35. **P-8:** *Então, você falou que a pessoa, ela... se ela adquiriu aquele conhecimento...*

36. **Pesquisador/Participante:** Isso!

37. **P-8:** *Daí você vai aprender alguma coisa em cima daquilo que ele já tinha aprendido e vai melhorando...*

38. **Pesquisador/Participante:** Isso!

39. **P-8:** *E se àquilo que ele aprendeu foi... assim.... não foi suficiente, assim... vago? Aí ele pegou... ele teve uma outra coisa em cima, e daí ele vai continuar aquela coisa, assim, sem ser 100%!*

40. **Pesquisador/Participante:** Eu entendi o que você falou!

41. **P-8:** *Continua assim!*

42. **Pesquisador/Participante:** Ficam lacunas!

43. **P-8:** *Ficam, né!?*

44. **Pesquisador/Participante:** Sim, ficam lacunas! Daí, talvez esta pessoa saiba aplicar este conhecimento para alguns casos, mas não consegue generalizar e pensar de modo ‘integral’, relacionando com outros conhecimentos... Deu pra entender?

45. **P-8:** *Sim, eu entendi! Não é 100%?*
46. **Pesquisador/Participante:** Não!
47. **P-8:** *O cérebro não conseguiu!*
48. **Pesquisador/Participante:** Não houve uma Equilibração Majorante ‘estável’, digamos assim.
49. **P-8:** *E isso daí é um problema da pessoa, de... de entender... algum problema de genética, no cérebro!?*
50. **Pesquisador/Participante:** Depende! Tem algumas causas fisiológicas, sim! E tem algumas causas devido à intensidade da experiência que este sujeito teve com aquele objeto!
51. **P-8:** *Ah, tá!*
52. **Pesquisador/Participante:** É interessante a gente ficar pensando estes assuntos! Até porque, tudo isso, a gente vai enfrentar com nossos alunos! Eu mesmo vivi isso! Para alunos do 5.º ano eu abordei a questão dos seres vivos com as crianças. Nesta sala, mais da metade eram evangélicos de uma vertente bem rigorosa. Na prova, muitos deles escreveram que não era assim que funcionava na natureza, porque foi Deus quem criou!
53. **P-2:** *Ah!*
54. **P-8:** *E como é que você considera?*
55. **Pesquisador/Participante:** Eu não podia dar errado! Eu tive que fazer uma chamada oral pra saber se àquele conhecimento científico o aluno tinha entendido... É claro que eu não exigi profundidade já que se tratavam de alunos do 4.º ano... Mas, na minha compreensão, não dei 0 porque eu estava querendo que eles desconstruíssem algo que pra eles era tudo na vida! Porque o que o pastor diz, para muitos, é lei! Vocês concordam comigo?
56. **P-8:** *Sim! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.] É, igual o nosso colega! Ele é hiperinteligente. A gente o conhece desses quatro anos e ele é muito inteligente. Quando ele fala isso, eu penso... Ah, meu Deus, ele é muito inteligente, como ele fala isso?*
57. **P-4:** *Ele não descobriu ainda! [Risos da participante.]*
58. **P-8:** *Ele sabe, de tudo, né! Mas, mesmo assim a igreja é a vida dele!*
59. **P-2:** *Na verdade, P-4, ele já descobriu!*
60. **Pesquisador/Participante:** E como eu o conheço eu sei que ele se formou em Biologia! E eu imagino o quanto foi difícil pra ele fazer o curso, porque a Biologia, em sua teoria nega a Deus. Tirando o acaso, tudo é explicado pela evolução biológica, ou seja, por meio do pensamento científico.
61. **P-2:** *Eu acho que ele deve ter tido muitos conflitos!*

62. **Pesquisador/Participante**: Acredito que ele sofreu bastante! Porque daí entra em choque o lado cognitivo e o afetivo/moral, que no caso este último foi o mais forte pra ele!
63. **P-8**: *Entendemos!*
64. **P-2**: *Eu cheguei em casa e fiquei pensando sobre isso! Por isso que eu fui lá na dúvida e coloquei!*
65. **Pesquisador/Participante**: E você fez muito bem!
66. **P-8**: *Então, esse tipo de discussão, isso que eu acho gostoso! Então, você está na sua aula, mas... como surgiu até aumenta a...* **[Referiu-se ao fato da discussão realizada, mesmo não se tratando da Combinatória e Probabilidade – assuntos previstos para o Grupo de Estudo – ‘enriquecerem’ os conhecimentos construídos.]**
67. **Pesquisador/Participante**: Mas tem que ser assim!
68. **P-8**: *Por isso é bom, porque é algo diferente!*
69. **Pesquisador/Participante**: Já que estamos discutindo esta questão do conhecimento, gostaria de compartilhar um fato que aconteceu comigo. Eu ministro aulas pra Pedagogia, e outro dia algumas me questionaram se as ações que utilizo em sala de aula eram construtivistas. O que as levou a questionar isso foi devido à exigência, daí eu lhes questioneei: “Vocês acham que uma teoria educacional derivada do construtivismo tem que deixar o aluno ‘solto’? Para aprender, então, não deve haver esforço por parte de vocês?”. Com isso eu fiquei espantado... Como alunas de Pedagogia do 2.º ano já têm estas pré-concepções errôneas?
70. **P-2**: *Muitas já dão aulas desta turma?*
71. **Pesquisador/Participante**: Sim, algumas!
72. **P-2**: *Ah, então dever ser por isso!*
73. **P-8**: *É!*
74. **Pesquisador/Participante**: Tem um livro célebre em Psicologia que discute a aprendizagem. Em suas 600 páginas, envolvendo discussões complexas sobre o que é aprender, chega-se à conclusão de que não há uma única explicação para a aprendizagem. E, aprender, pessoal, é algo que exige muito do sujeito. Pensa bem! Vocês irão construir uma nova maneira de pensar-agir... algumas vezes será necessário desconstruir uma verdade já considerada, então imagine o esforço intelectual que o sujeito realiza!? É claro que tem diferença entre aprender algo gostando e ou detestando. Eu acredito que, em nosso Grupo de Estudo, vocês estão aprendendo algo gostando, mas mesmo assim vocês não tem que se esforçar?
75. **P-2**: *Sim, e muito!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**
76. **Pesquisador/Participante**: Hoje, por exemplo, vocês vão se esforçar novamente.

77. **P-8:** *A gente sai daqui cansada! Outro dia eu estava até discutindo isso com P-2. Além da gente discutir, a gente faz os exercícios... você exige da gente mental, é mental, e o tempo inteiro a gente está resolvendo, né!*

78. **Pesquisador/Participante:** Eu acho muito interessante o que a P-5 falou àquele dia! Eu me imaginei na fala dela, porque eu preciso propor problemas que sejam interessantes pra ‘ativar’ o interesse de vocês em ‘agir sobre’ o que estamos aprendendo. Ou seja, há necessidade de uma intencionalidade da minha parte muito grande. E, infelizmente, muitos pensam que o construtivismo é uma teoria do ‘oba oba’!

79. **P-2:** *Mas eu acho que o grande problema, eu vejo, não sei, está nos cursos de Formação por não darem Piaget para as pessoas lerem. Porque, o que a gente tem muito aqui? [Referiu-se ao curso de Pedagogia.] Visões dos outros! Se eu não tivesse lido algumas coisas de Piaget, eu também teria me deixado influenciar, eu tenho consciência disso! Pelas posturas que os profissionais têm de o negarem [Referiu-se à teoria de Piaget.] e de não compreenderem a sua teoria. E tem textos de Piaget que são, sim, fáceis e mais acessíveis. E que traz, sucintamente, a teoria dele e o que ele realmente disse. Esse livro que eu acabei de ler agora “Psicologia e Pedagogia” é fantástico e é super acessível! Não tem nada lá que não dá pra entender.*

80. **P-7:** *É verdade, o livro é claro!*

81. **P-2:** *Ele é claro!*

82. **P-8:** *Gente, aquele livro é fantástico! O que o livro fala, eu até comentei com a P-2: “Poxa!”*

83. **Pesquisador/Participante:** Piaget foi um visionário, ele enxergava além do seu tempo!

84. **P-8:** *A P-8 publica alguns trechos do livro no face e parece que foi escrito hoje!*

85. **P-7:** *Eu acho que esse livro deveria ser leitura obrigatória no curso!*

86. **Pesquisador/Participante:** Quando Fernando Becker fala com aquela paixão sobre a teoria de Piaget, dá pra entender!?

87. **P-2:** *Sim! Perfeitamente! Mas, se eu não tivesse lido coisas antes... nossa, eu teria caído nessa conversa errônea sobre a teoria dele.*

88. **Pesquisador/Participante:** Eu, por exemplo, durante o Magistério eu aprendi, ou melhor ‘ouvi falar’ em Piaget, Wallon e Vigotski.

89. **P-2:** *Igual a gente! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*

90. **Pesquisador/Participante:** Daí, pessoal, eu tive um professor de Cálculo muito bom! Só que ele considerava-se marxista, propagador da teoria histórico-crítica. E ele abominava Piaget. Não estou dizendo que ‘a culpa’ é da teoria histórico-crítica! Eu cheguei, em algum momento a acreditar que Piaget era ‘oba oba’! Devido à Iniciação Científica que realizei no último ano do curso no qual o único teórico que respondia ao meu problema de pesquisa era

Piaget, retomei as leituras sobre ele e percebi que aquilo que eu pensava estava equivocado. Após as leituras ‘a fundo’ da teoria de Piaget eu pensei: “Nossa, estava até agora sendo enganado por três ou quatro professores!”.

91. **P-8:** *E tem gente que se diz piagetiano e não tem conhecimento nenhum da teoria dele!*

92. **P-2:** *É, nenhum!*

93. **P-8:** *Eu acho que essas pessoas veem a teoria por cima! E daí vai ‘empurrando’ com a ‘barriga’!*

94. **P-2:** *Oh, vamos inverter aqui! Põe Vigotski! O que você sabe?*

95. **P-8:** *Não sei, não sei!* [Resposta compartilhada por P-4 e P-7.]

96. **P-2:** *Sabe o que eu sei? Da zona do desenvolvimento proximal!*

97. **P-8:** *É!*

98. **Pesquisador/Participante:** E isso é algo pouco, digamos assim, de toda a teoria dele! Por exemplo, você tem que compreender, inicialmente, questões biológicas acerca da embriogenia, filogenia e ontogenia.

99. **P-8:** *Ai, é!*

100. **P-2:** *Ele fala bastante disso!*

101. **P-8:** *Eu nem sei isso!*

102. **Pesquisador/Participante:** E isso relaciona-se à psique. Depois você tem que compreender a parte da mediação, que daí implica numa interação, e, à grosso modo, daí que você começa a investigar a zona de desenvolvimento!

103. **P-2:** *E o pessoal só fala das ‘zonas’!*

104. **Pesquisador/Participante:** Só que também é necessário o entendimento das funções psicológicas inferiores, que daí implica na automatização e aí você passa ao estudo das funções psicológicas superiores que implica no processo de conscientização. Infelizmente, pelo o que vocês estão dizendo, a teoria de Vigotski ficou na superficialidade?

105. **P-2:** *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

106. **Pesquisador/Participante:** Eu também passei por isso durante minha graduação. Eu fui estudar Vigotski ‘a fundo’ em uma disciplina que fiz no mestrado, até porque eu nunca quis só compreender o construtivismo. Nesta disciplina, cuja abordagem era acerca da Pedagogia Histórico-Crítica, tivemos que nos remeter às contribuições da teoria vigotskiana... Como estou fazendo um doutorado em Educação, penso que é minha obrigação compreender as principais teorias educacionais. Pra entender a histórico-crítica eu precisei recorrer à teoria marxista, vigotskiana e acerca do cotidiano com Agnes Heller.

107. **P-2:** *E a gente nem ouviu falar nisso!*

108. **P-8:** *É!*

109. **Pesquisador/Participante:** Eu não sou especialista em Vigotski, mas acredito compreender as principais discussões. Só que, infelizmente, acaba ficando na superficialidade como vocês falaram.

110. **P-8:** *E num curso como o nosso, Pedagogia, a gente teria a obrigação de entender as principais teorias da Educação, já que a gente só fala disso, né!*

111. **Pesquisador/Participante:** É que nem na teoria de Piaget! Geralmente o que mais e aborda são as fases do desenvolvimento... e nós estamos estudando que esta parte, digamos assim, é a ponta do iceberg...

112. **P-7:** *Parecem que pegam as duas partes: as fases do Piaget e as zonas do Vigotski. Daí as pessoas ouvem essas duas e começam a criticar sem saber!*

113. **Pesquisador/Participante:** Sim, concordo! Antes de abordarmos os estádios, nós estudamos a organização e a adaptação, a assimilação e a acomodação, os fatores do desenvolvimento... daí que a gente estudou os estádios, exemplificando este processo de construção. Em seguida abordamos a Equilibração, que poderia ter sido investigada até antes das fases... e ainda ‘falta’ estudarmos a Tomada de Consciência. Ou seja, Piaget não são só os estádios! Só que, infelizmente, na maioria das vezes acaba ficando na superficialidade. E a situação é pior ainda no caso da Pedagogia, pois, se vocês serão as licenciadas em questões envolvendo o aprender e o ensinar, acho que não deveria ser assim!

114. **P-2:** *Isso é muito triste.*

115. **P-8:** *E ainda nós estamos na UNESP, né!*

116. **Pesquisador/Participante:** Sim, e olha que a UNESP é considerada uma das melhores Universidades do Brasil e atualmente em franca ascensão à nível internacional.

117. **P-7:** *Uma coisa que eu acho horrível é que tem gente se formando, igual a gente, e sai falando que é construtivista, que é histórico-crítica... Poxa, a gente conhece tão pouco que não dá pra dizer: “Eu sou construtivista!”... Eu estou vendo a teoria de Piaget mais agora no nosso Grupo!*

118. **Pesquisador/Participante:** Eu, pessoal, não me intitulo um piagetiano. É claro que eu utilizo em nosso Grupo muito da teoria dele, até porque este é um dos objetivos da minha pesquisa, além de corroborar com as ideias desenvolvidas por este grande teórico. No entanto, eu me intitulo um professor que vale-se das teorias psicológicas para pensar sobre a minha ação e reflexão em sala de aula!

119. **P-8:** *Ai, que bom você falar isso, porque tem hora que parece que a gente tem que dizer de qual linha é e tem que ser só aquilo! Isso me deixava em crise, porque a pessoa pergunta qual a linha você segue, e eu como não sei profundamente as duas ficava me perguntando: “E agora? Como é que você vai fazer! Logo você vai estar numa sala dando aula!”.*

120. Pesquisador/Participante: Eu sou contra, pessoal, de posturas extremas. O fato de Piaget me responder vários problemas não implica que as contribuições de Vigotski, Wallon, Freinet, Paulo Freire são inúteis. É claro que não estou falando de uma mistura destas teorias pois há pontos de concordância, mas também algumas discordâncias. No entanto, como nosso aluno é um ser complexo, eu procuro me valer das várias contribuições teóricas para tentar ser o ‘melhor’ professor.

121. P-2: *E o que é mais fantástico neste livro, [Referiu-se ao “Psicologia e Pedagogia” – J. Piaget.] P-8, é que ele vem falando o quanto se teve que caminhar, quantas pessoas passaram pra se chegar ao que se tem hoje! Piaget mesmo traz Rousseau, Bovet, traz um monte de gente... coisa que ele concordava, que ele discordava, coisa que até hoje é válido... É fantástico! As fases, mesmo, que ele desenvolveu é de Rousseau! Rousseau já dizia que se passava por fases!*

122. P-8: *Ah, tá!*

123. Pesquisador/Participante: Naquela questão dos ciclos reflexos, reações circulares, Piaget valeu-se de outro autor!

124. P-2: *Então, eu penso assim, se Piaget fez isso porque que não pode!?*

125. Pesquisador/Participante: É verdade! Para que Piaget superasse o Inatismo e o Empirismo ele teve que estudar, a fundo, os principais teóricos destas teorias. Só assim ele poderia analisar os pontos discordantes e, neste movimento de superação, elaborou a Epistemologia Genética. Então quer dizer que ele não partiu do zero e muito menos nega várias contribuições de outros autores.

126. P-7: *Só que eu acho que, parece que pra gente é passado como se fosse inadmissível isso acontecer! É tudo assim, tão... se você segue essa linha, você tem que seguir e ponto!*

127. Pesquisador/Participante: Você seria um ‘traidor’ se utilizasse outra teoria?

128. P-7: *Isso! Não pode! Se numa sala de aula você tem que utilizar a contribuição de outro teórico diferente daquele que você segue parece que você traiu a teoria!*

129. Pesquisador/Participante: É como eu já falei, não podemos ‘misturar’ as teorias produzindo algo incoerente. Só que, se você tem certeza da pertinência daquela contribuição teórica no momento, e se isso for ajudar o seu aluno, por que não!? O professor que se fecha, no meu ponto de vista, ou seja, que passa a enxergar apenas uma possibilidade acaba engessando o seu pensamento. Isso implica em não possibilidade de diálogo com o outro, já que você sempre está certo o que gera a não reversibilidade do pensamento. Daí surgem as posições extremistas, radicais que não levam a nada!

130. P-7: *E a gente vê muito isso! [Risos entre as participantes.]*

131. Pesquisador/Participante: O que gera o preconceito! O preconceito nada mais é do que uma verdade que você impõe, e tudo àquilo que for contrário será visto como algo abominável.

132. **P-8:** *Sabe o que eu vejo, também, tem gente que aprendeu aquilo ali, só que quando ela teve a aprendizagem ela não conseguiu ultrapassar aquele limite... chegou naquele ponto! Não to falando nem pobre e nem rico, mas tem gente que chega até um ponto, assim, de aprendizagem!*

133. **Pesquisador/Participante:** Ok!

134. **P-8:** *Quando você apresenta alguma coisa diferente, tipo novo, além daquilo que ela viu ela não consegue enxergar Pesquisador/Participante.*

135. **Pesquisador/Participante:** Sim, é difícil! Lembra que eu já falei, entre aspas, que a mente ‘engessa’!

136. **P-8:** *Ele não vai mais, ela não consegue dar um passo e ver que... mais um passinho ela ia melhorar, ia fazer diferente. Mas não, a pessoa para naquele ponto e não consegue enxergar!*

137. **Pesquisador/Participante:** E não é nem culpa da pessoa!

138. **P-8:** *Não, não é!*

139. **Pesquisador/Participante:** Lembra que eu falei que o sujeito tende a manter-se em equilíbrio? Então, a pessoa ficou muito tempo naquela ‘zona de conforto’! Caso queira progredir, ela terá que desacreditar em tanta coisa que achava ser o certo até o fim da vida, então esta pessoa o nega!

140. **P-8:** *É isso mesmo!*

141. **Pesquisador/Participante:** Por exemplo, pessoal, e nada contra nenhuma religião! Tenta conversar com uma pessoa idosa extremamente religiosa, ‘fervorosa’, de que a sua religião não é bem assim? Acho que podemos imaginar a resposta que iríamos levar! Penso ser este um ótimo exemplo! Se o sujeito parar de pensar sobre outras possibilidades e aceitar como verdade somente a sua, o pensamento se engessa! Piaget já havia comentado que o nosso cérebro é plástico, e a neurociência demonstra isso hoje!

142. **P-7:** *Mas isso não é relacionado com a idade?*

143. **P-8:** *É, não é com a idade!*

144. **Pesquisador/Participante:** Não, não é com a idade, você está certa! A tendência é que, se você parar no mundo, digamos assim, sim! Mas tem pessoas com 20 anos que também já tem seu pensamento engessado!

145. **P-7:** *É!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

146. **Pesquisador/Participante:** São as experiências e a maneira com a qual o sujeito interagiu em seu meio social que influenciou o seu desenvolvimento cognitivo, afetivo, moral. Só que não podemos pensar que não há possibilidade de mudar! Todos podem, independentemente da idade, mas é difícil! É necessário um desequilíbrio ‘grande’ para que, talvez, a pessoa passe a refletir sobre tudo aquilo que ela acredita... É por isso que eu falo,

pessoal, da importância do nosso papel enquanto formadores de mentes pensantes e que considerem outras possibilidades, diferentes caminhos de pensar sobre si e o mundo!

147. **P-8:** *Foram interessantes as nossas discussões hoje!*

148. **Pesquisador/Participante:** Sim! Também achei!

[Dando prosseguimento, P-2 fez a leitura do primeiro item – 15.1 – a ser abordado no presente Grupo de Estudo. Observe-o abaixo:]

15.1 Um movimento de retomada

No encontro anterior houve a discussão a respeito dos desafios envolvendo a Combinatória e a Probabilidade. Para tanto, as participantes compararam / ‘confrontaram’ as suas respostas com as soluções propostas pelo Pesquisador/Participante. Após a apresentação do Diagrama de Árvore (ou Árvore de Possibilidades) utilizado na solução dos desafios 1 e 2, as participantes julgaram interessante esse procedimento para a solução de alguns problemas combinatórios, salientando ainda não terem estudado tal método. Além deste episódio, durante a discussão dos desafios 3 e 4 algumas participantes disseram não terem aprendido que a relação ‘3 possibilidades em 6 chances’ – referente à probabilidade de sair um número maior do que 3 ao se jogar um dado perfeito – poderia ser expresso sob a forma fracionária $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$ ou 50%.

Dando prosseguimento, foram apresentadas algumas ideias a respeito da Combinatória e da Probabilidade, sendo ressaltado – pelo Pesquisador/Participante – que tais ‘ramos’ da Matemática, juntamente com a Estatística, constituem uma espécie de ‘filosofia do azar’ caracterizada pela incerteza, possibilidade. Nesse momento, algumas participantes mostraram-se surpresas ao perceberem que a Matemática não é ‘a’ Ciência do determinismo, da certeza como acreditavam ser.

Por fim, foi abordado um problema utilizado pela professora de Matemática Sueli aos alunos do 9.º ano visando o estudo do Princípio Multiplicativo, sendo o mesmo importante à solução de parte de problemas pertencentes à Combinatória. Dando continuidade, no próximo item far-se-á uma discussão a respeito de tal princípio, denominado também de Princípio Fundamental da Contagem.

[Como não houveram dúvidas e ou comentários a respeito do texto, P-5 leu o próximo item – esboçado a seguir:]

15.2 Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem (PFC)

Inicialmente, observemos a definição dada por Dante (2004) a respeito de tal princípio:

Se um evento é composto por duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na primeira etapa é **m** e o número de possibilidades na segunda etapa é **n**, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado por **mn**. (p. 360, grifos do autor)

Exemplificando, no problema proposto pela professora Sueli o evento a ser realizado por Eduarda era composto de duas etapas sucessivas e independentes: entrar e sair do parque. Como na etapa ‘*entrar*’ haviam 4 possibilidades (**m** = 4) e na etapa sucessiva ‘*sair*’ haviam 5 possibilidades (**n** = 5), então, o total de possibilidades de realizar o evento ‘*entrar e sair*’ era de $m \times n = 4 \times 5 = 20$. Veja que essas duas etapas são independentes, pois uma não depende da outra a sua ocorrência, ou seja, ‘*entrar*’ é independente de ‘*sair*’.

[Ao serem questionadas sobre possíveis dúvidas referente ao princípio multiplicativo, as participantes salientaram que o exemplo colaborou na compreensão. Deste modo, o Pesquisador/Participante propôs a seguinte situação problema:]

1. Você acha que tal princípio é válido apenas para um evento composto por **duas** etapas sucessivas e independentes ou pode haver **mais** etapas sucessivas e independentes? Discorra sobre e, em caso afirmativo, dê um exemplo.

[Imediatamente após a proposição do problema, as participantes expuseram:]

149. **P-4:** *Que há, há, mas, e o exemplo?*
150. **P-7:** *E o exemplo?* [Risos entre P-4 e P-7.]
151. **P-8:** *Porque aqui é duas entradas, entrada e saída!*
152. **Pesquisador/Participante:** Pode ser outro tipo de situação!
153. **P-8:** *Não... eu tô pensando!*
154. **Pesquisador/Participante:** Todo mundo acha que é possível, pessoal, ter mais de 2? [Todas as participantes responderam “Sim!”.]
155. **P-8:** *É, porque se elas são independentes, né, pode...*
156. **Pesquisador/Participante:** Tentem achar um exemplo, e pode ser em grupo!
157. **P-8:** *A gente já fez, será!* [A participante foi procurar nas atividades já realizadas. Após alguns instantes indagou:] *Ah, aquela lá do lanche, porque é independente o suco, o sorvete e o sanduíche!*
158. **Pesquisador/Participante:** Uma das minhas hipóteses era a de que vocês achassem este exemplo mesmo! [Risos entre todas as participantes.] Até porque eu queria verificar se vocês conseguiam encontrar, em outro problema já estudado, este princípio! Então, pessoal, pode ser este exemplo sim!
159. **P-8:** *Ah, que bom!*
160. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, pessoal, o que a P-8 falou? [As demais participantes indicaram afirmativamente.]
[Em continuidade, as participantes fizeram a leitura do item seguinte – 15.2 ‘Conversando sobre o Ensino de Combinatória’. Por se tratar de um diálogo hipotético observado entre três professoras de Matemática, o Pesquisador/Participante solicitou que as participantes lessem as falas de cada uma das três ‘personagens’. Deste modo, P-8 leu as falas da professora Sueli, P-4 da professora Márcia e P-7 da professora Cláudia. Após o Pesquisador/Participante ler a introdução do referido item, deu-se início ao diálogo lido pelas participantes. Observe tal item abaixo:]

15.3 Conversando sobre o ensino de Combinatória

Durante uma reunião pedagógica na escola da professora de Matemática Sueli, a coordenadora pediu que os docentes se reunissem por disciplina e conversassem sobre o assunto que estavam trabalhando. Desse modo, a professora Sueli agrupou-se com as professoras de Matemática Márcia e Cláudia. Observe o diálogo decorrente de tal discussão:

Então, eu estou trabalhando com meus alunos do 9.º ano alguns problemas envolvendo a Combinatória. Eu comecei com problemas em que os estudantes têm que resolver inicialmente de modo intuitivo, ou seja, por meio da contagem direta das possibilidades. E vocês, Márcia e Cláudia, também estão nesse assunto?

Professora Sueli

Eu também estou abordando a Combinatória com meus alunos do Ensino Médio. Mas eu já parti direto pras definições. Dei um exemplo do Princípio Multiplicativo e já parti pras fórmulas necessárias para o cálculo da Permutação, Fatorial, Arranjo e Combinação. Acho que não precisamos perder tempo com estas contagens diretas, porque isso o aluno já tem que saber!

Professora Márcia

Eu ainda não comecei. Como é o 2.º ano que eu me efetivei, ainda fico um pouco perdida em relação ao quando começar um assunto novo. É até bom a gente conversar porque iria perguntar isso pra vocês!

Professora Cláudia

Pare de se preocupar, Cláudia! Começa de uma vez, o aluno tem que correr atrás da matéria. Daqui alguns anos você vai ver que o importante é você fazer a sua parte, dê a matéria direitinho. Se o estudante não estiver afim é problema dele!

Professora Márcia

Márcia eu concordo que o aluno precisa agir sobre os conteúdos que estamos trabalhando. Mas, e se naquele momento o conteúdo abordado for muito além da sua capacidade de compreensão?

Professora Sueli

Ah, Sueli, mas se a gente tiver que se preocupar com os alunos que ainda não tem o necessário a gente vai ficar sempre no mesmo lugar. Sempre tem aquele estudante que não se dá bem com a Matemática, então, por mais que você faça nunca vai adiantar!

Professora Márcia

Nossa... Agora vocês duas me deixaram em dúvida! Sueli, como você faz para saber se o conteúdo 'novo' é possível de ser compreendido pelo aluno?

Professora Cláudia

Antes de um conteúdo 'novo' eu vejo o que o aluno já sabe acerca dos conteúdos que serão necessários. Por exemplo, para a abordagem da Combinatória, eu tenho que me certificar se os estudantes conseguem resolver problemas envolvendo a contagem direta das combinações (de modo aditivo) ou se já o fazem por meio do Princípio Multiplicativo.

Professora Sueli

Mas você concorda que com isso você vai gastar tempo, Sueli? E daí, talvez, você não consiga dar conta de todo o conteúdo anual?

Professora Márcia

Não que eu não queira 'cumprir' todo o conteúdo, mas eu prefiro que o aluno realmente aprenda e não apenas os memorize. Embora eu saiba, Márcia, das inúmeras cobranças que nós sofremos dos nossos 'superiores'...

Professora Sueli

E se você avaliar seu aluno, Sueli, e ver que ele ainda tem dificuldade em resolver os problemas por meio da contagem direta via modo aditivo?

Professora Cláudia

Se eu observo isso eu tenho que trabalhar inúmeras situações problemas para que o estudante compreenda bem quando utilizar a contagem direta.

Professora Sueli

Veja se eu estou entendendo! Depois que o estudante tiver solucionado vários problemas pela contagem direta você apresenta desafios para que, aos poucos, ele vá generalizando e sinta necessidade do Princípio Multiplicativo? Professora Cláudia	Isso mesmo Cláudia! À medida que os alunos vão avançando eu vou propondo problemas para que eles percebam que a contagem direta não é suficiente para a solução de certos desafios. Chego até a questionar: “<i>Será que não tem uma maneira mais fácil de resolver ao invés de ir contando uma a uma as combinações possíveis?</i>”. Professora Sueli
Então você acha, Sueli, que ensinar as fórmulas é errado? Professora Márcia	Não, Márcia! O ensino das fórmulas é necessário, pois além de representar um ‘pensamento formalizado sintético’, as mesmas facilitam a ‘vida’ do aluno. No entanto, acho que antes de aprender as fórmulas os estudantes devem aprender a <u>pensar sobre</u> as situações problemas envolvendo os conteúdos matemáticos. Assim, as fórmulas passarão a ter significado! Professora Sueli
Após me certificar, Cláudia, que meus alunos compreenderam o Princípio Multiplicativo, eu vou propondo inúmeros problemas envolvendo diferentes tipos de agrupamentos para que eles percebam quando a <u>ordem</u> dos elementos de um conjunto a combinar é importante ou não. Professora Sueli	Ah, daí você vai trabalhando gradativamente com os problemas de Permutação, Arranjo e Combinação? E, como são alunos do 9.º ano, você ainda não introduz as fórmulas, né? Professora Cláudia
É isso mesmo, Cláudia! Vou trabalhando gradativamente para que os alunos vão diferenciando estes três tipos de agrupamentos (Permutação, Arranjo e Combinação). E sobre as fórmulas, não vejo a necessidade de abordá-las no Ensino Fundamental, deixando-as para o Ensino Médio. Professora Sueli	Ah, Sueli, agradeço as suas dicas. Com certeza irá me auxiliar a pensar sobre a minha prática docente! Professora Cláudia

161. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem o diálogo, pessoal? Acharam interessante esta simulação?

162. **P-8:** *Só você mesmo!*

163. **P-2:** *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

164. **P-8:** *Mas é bem mesmo o que a professora Márcia fala, né... “Ai, eu deixo pra lá!”.* Você escuta isso quando nós estivemos nas escolas participando das reuniões dos professores no estágio. É este mesmo papinho!

165. **P-7:** *É igualzinho!* [Resposta compartilhada por P-2.]

166. **P-8:** *É que você conhece também a realidade!*

167. **Pesquisador/Participante:** E muito! [O Pesquisador/Participante solicitou que as participantes pensassem sobre a seguinte atividade durante o período de férias:]

1. Durante o seu período de ‘férias’, analise a conversa denotada acima observando as concepções epistemológicas implícitas nas falas das professoras e identifique nos trechos ideias condizentes aos assuntos estudados da teoria de Piaget.

[Em seguida, o Pesquisador/Participante iniciou a abordagem de situações problemas envolvendo o pensamento combinatório. Ao folhear e visualizar as inúmeras situações problemas, P-8 falou: “Nossa, hoje o meu cérebro vai fundir!”. Imediatamente o Pesquisador/Participante acalmou a participante, salientando que as mesmas resolveriam os problemas sem pressa. Deste modo, deu-se início à leitura, pelo Pesquisador/Participante do item 15.4 – exposto abaixo:]

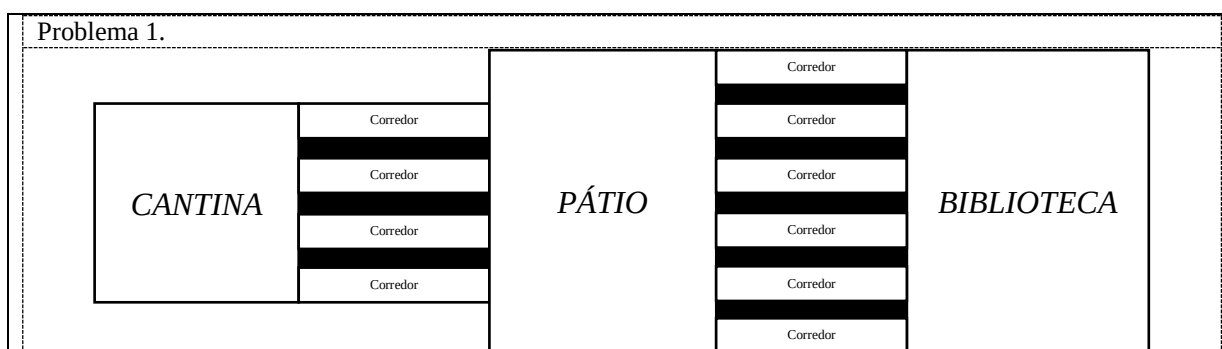
15.4 Alguns tipos de problemas envolvendo a Combinatória

Terminada a reunião pedagógica, a professora Cláudia procurou a professora Sueli e lhe pediu que mostrasse as atividades que havia preparado para os alunos do 9.º ano acerca da Combinatória. No entanto, antes de compartilhar as situações problemas, a professora Sueli disse ser importante, num primeiro momento, os estudantes terem um meio concreto como ‘apoio’ ao pensamento matemático. Além disso, salientou ser interessante propor situações problemas próximas ao contexto dos estudantes em que os mesmos sintam-se interessados em agir sobre o conteúdo matemático.

A seguir consta a sequência das atividades trabalhadas pela professora Sueli. Além de solucionar tais problemas, reflita acerca dos questionamentos denotados.

[Após esclarecer sobre a ‘origem’ da sequência de atividades visando o ensino dos diferentes tipos de agrupamentos da Combinatória, o Pesquisador/Participante leu o primeiro problema. No entanto, antes da leitura foi entregue a cada participante um folha constando ‘materiais’ ‘concretos’ (esquemas) para ‘apoiar’ o ‘pensar sobre’ as referidas situações problemas. Abaixo de cada questão será denotado tal material de ‘apoio’.]

1. Em nossa escola há 4 corredores que ligam a cantina com o pátio e 6 corredores que ligam o pátio com a biblioteca. Partindo da cantina e passando pelo pátio de quantas formas diferentes podemos chegar na biblioteca?



[Durante o tempo disponibilizado à solução, P-8, num primeiro momento, tentou achar uma atividade – já realizada – e que fosse análoga ao presente problema. P-4, de início, ficou feliz por possuir o material de ‘apoio’, embora também procurou uma

atividade análoga. Após alguns minutos, P-2 e P-7 chegaram à conclusão de que tal desafio era parecido ao referente às entradas e saídas do parque de diversão. Observe o diálogo realizado:]

168. **P-2:** *Olha, tem 4 corredores e depois tem mais 6 corredores! Eu acho que seria a mesma coisa que a gente fez no parque de diversões!*

169. **P-7:** *Eu acho que é a mesma coisa!*

170. **P-2:** *Aqui se for 1, 2, 3 e 4. [A participante enumerou, no material de ‘apoio’ entregue, os corredores que ‘partem’ da Cantina.] Então você tem 1 com 1, 1 com 2, 1 com 3, 1 com 4, 1 com 5 e 1 com 6. [A participante indicou as combinações do 1.º corredor que ‘parte’ da Cantina com os 6 corredores que ‘chegam’ na Biblioteca.] Depois tem 2 com 1, 2 com 2... Não é?*

171. **P-7:** *É, exatamente!*

172. **P-4:** *É, vai dar na mesma!*

173. **P-2:** *Então é isso mesmo que vai dar: 4×6 !*

174. **P-8:** *Olha lá, a P-2 já achou! [Neste momento, P-8 ‘ligou’ os corredores desenhados no material de ‘apoio’, dizendo em seguida ao erguer o referido material:] Eu preciso disso Pesquisador/Participante. Eu sou muito de ver e escrever!*

175. **Pesquisador/Participante:** *Você concorda com elas P-4!*

176. **P-4:** *Sim!*

177. **P-8:** *É, é isso mesmo! Mesmo que ele tivesse chance de procurar a saída, ele tinha aquelas saídas só 1, 2, 3 4... [A participante interpretou a solução fazendo uso do pensamento utilizado no desafio referente ao parque de diversões.]*

178. **P-2:** *Só as 6!*

179. **P-8:** *É 4×6 !*

[Após o término da solução do primeiro desafio por todas, deu-se início à discussão. Torna-se importante salientar que todas as participantes ‘rabiscaram’ o material de ‘apoio’ entregue.]

180. **Pesquisador/Participante:** *Então de quantas formas são possíveis? [Todas as participantes responderam: “24!”.] Todas aplicaram o princípio multiplicativo?*

181. **P-2:** *Sim! [Resposta compartilhada por P-7.]*

182. **P-8:** *Não, eu olhei no desenho, né, você sabe!*

183. **Pesquisador/Participante:** *Você olhou no desenho e pensou sobre o desenho!*

184. **P-4:** *Claro! E eu vi a Árvore de Possibilidades!*

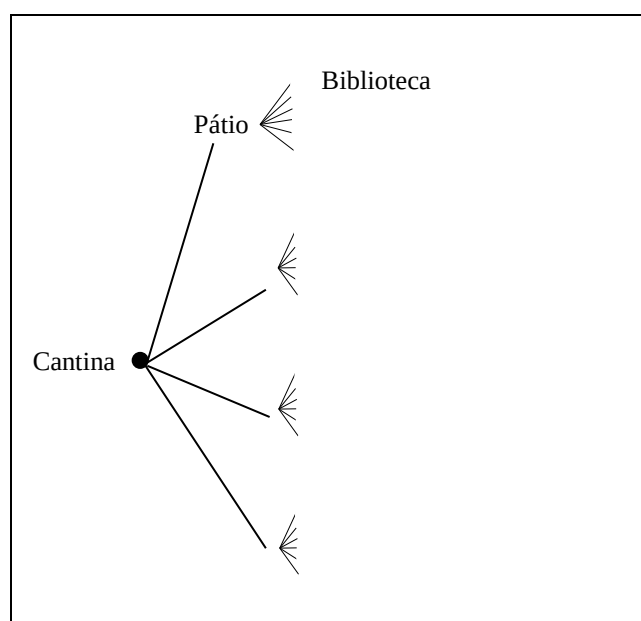
185. **Pesquisador/Participante:** Você também olhou no desenho ou não precisou P-7?

186. **P-7:** *Ah... eu acho que... usei!*

187. **Pesquisador/Participante:** E você P-2?

188. **P-2:** *Sim, eu fiz aqui, tentei fazer!*

189. **Pesquisador/Participante:** Perfeitamente pessoal, é isso mesmo! É um problema parecido com aquele do parque de diversões. E a P-4 falou muito bem pois, pela Árvore de Possibilidades... **[O Pesquisador/Participante registrou na lousa o seguinte esquema referente a Árvore de Possibilidades:]** cada corredor que sai da Cantina para o Pátio é possível combinar com cada um dos 6 corredores que ligam o Pátio à Biblioteca. Daí, pessoal, fazendo isso nos outros corredores que saem da Cantina, dariam 24 possibilidades. Vocês acham que os alunos da professora Sueli, após fazerem aquele desafio do parque de diversões, conseguiriam pensar neste desafio de modo direto pelo Princípio Multiplicativo ou alguns alunos iriam ficar rabiscando o desenho e contando 1, 2, 3, 4, ... até o 24?



190. **P-8:** *Alguns iam contar 1 por 1.*

191. **P-7:** *Sempre tem, né!*

192. **P-2:** *Eu acho que sim, porque foi a primeira coisa que a gente fez, né!*

193. **P-8:** *É!*

194. **P-2:** *Eu acho que sim!*

195. **Pesquisador/Participante:** Sim!

196. **P-2:** *Foi a primeira coisa que a gente fez foi pegar o lápis e começar a ligar!*

197. Pesquisador/Participante: O professor ao ensinar Combinatória não pode se esquecer de que, antes de pensar multiplicativamente, o estudante pensa aditivamente. Então não pode ‘pular’ esta etapa porque, caso o contrário, o sujeito nem entende o porquê da multiplicação. Multiplica pois há uma constância das possibilidades em cada um dos eventos, ou seja, há 4 possibilidades para ir da Cantina ao Pátio e 6 para ir do Pátio à Cantina! **[Como não houveram dúvidas, o Pesquisador/Participante leu o segundo desafio apresentado a seguir:]**

2. Durante a semana da Educação Física, a escola está realizando uma competição entre as 8 turmas do Ensino Médio. Quantas são as possibilidades para o 1.º e 2.º lugares dentre as turmas participantes?

[Após 2 minutos, as participantes começaram a discutir sobre o problema.]

- 198. P-8:** *Tem 8 turmas! Ah, tá!*
- 199. P-2:** *Na competição inteira tem 1.º e 2.º lugares, não é isso?*
- 200. P-8:** *Então vai ter 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8! Daí fica em 1.º lugar e 2.º lugar!*
- 201. Pesquisador/Participante:** Ou a turma fica em 1.º lugar ou em 2.º!
- 202. P-2:** *Dentre todos os 8!?*
- 203. Pesquisador/Participante:** Isso!
- 204. P-2:** *Então, se uma turma, por exemplo, a turma número 8 já está em 1.º lugar, pras outras 7 turmas sobrou só o 2.º lugar!*
- 205. P-8:** *Ah, tá!*
- 206. Pesquisador/Participante:** Não tem mais colocações, é 1.º ou 2.º lugares.
- 207. P-8:** *Ah, tá, eu achei que tinha 8 em cada!*
- 208. Pesquisador/Participante:** Quais são as possibilidades de ter estas duas colocações entre as 8 turmas?
- 209. P-8:** *No 1.º lugar são os 8 que podem ficar! Mas, depois, no outro [Referiu-se ao 2.º lugar.] não!*
- 210. Pesquisador/Participante:** No outro não...
- 211. P-2 e P-7:** *São 7!*
- 212. P-8:** *É, são 7!*
- 213. Pesquisador/Participante:** Tudo bem este pensamento, P-4?
- 214. P-4:** *Sim!*

[Falando em voz alta, P-8 registrou a resposta do referido desafio:]

215. **P-8:** *No 1.º lugar todos podem ficar, já no 2.º lugar só 7 podem ficar!*
216. **P-2:** *Por que é isso, né!? Se os 8 podem ficar no 1.º lugar, no 2.º só podem ficar os 7 restantes. Não é isso!?*
217. **Pesquisador/Participante:** *É isso mesmo, pessoal! E quantas possibilidades dão?*
218. **P-8:** *Vão ficar 6!... Não, por que 6?*
219. **P-2:** *Não! Quantas são as possibilidades para o 1.º e 2.º lugares? Quantas possibilidades...*
220. **P-8:** *Ah!*
221. **P-2:** *Eu não sei responder isso! Quantas possibilidades... Para o 1.º lugar são 8 possibilidades, porque tem 8 turmas!*
222. **P-8:** *Tá!*
223. **P-2:** *Para o 2.º lugar são 7 possibilidades!*
224. **Pesquisador/Participante:** *O pensamento de vocês está correto! Todo mundo entendeu esta parte? [Todas as participantes responderam “Sim!”.] Então, como eu faço pra calcular o total?*
225. **P-2:** *Não sei!*
226. **Pesquisador/Participante:** *Vocês não tem nenhuma ideia? [Como ninguém se pronunciou, o Pesquisador/Participante indagou:] Vamos ver se isso que eu vou fazer na lousa ajuda! [Enquanto desenhava na lousa o 1.º ‘Momento’ do esquema abaixo, o Pesquisador/Participante perguntou qual a preferência para identificar as salas, ou seja, por números ou por letras. P-2 respondeu que preferia números. No entanto, o Pesquisador/Participante salientou que iria denotar as salas ordinalmente para não confundir, já que poder-se-ia interpretar como se 2 salas tivessem ficado em 1.º lugar.]*

SALAS – ENSINO MÉDIO	1.º	2.º	SALAS – ENSINO MÉDIO	1.º	2.º	SALAS – ENSINO MÉDIO	1.º	2.º
	Lugar	Lugar		Lugar	Lugar		Lugar	Lugar
	1. ^a			1. ^a	☞		1. ^a	☞
	2. ^a			2. ^a	☞		2. ^a	☞
	3. ^a			3. ^a	☞		3. ^a	☞
	4. ^a			4. ^a	☞		4. ^a	☞
	5. ^a			5. ^a	☞		5. ^a	☞
	6. ^a			6. ^a	☞		6. ^a	☞
	7. ^a			7. ^a	☞		7. ^a	☞

8 ^a 1.º ‘Momento’	8 ^a 2.º ‘Momento’	8 ^a  3.º ‘Momento’
---------------------------------	---------------------------------	---

227. **Pesquisador/Participante:** Olhem aqui! [Apontou para o referido esquema.] Se a 1.^a sala ficou em 1.º lugar, então, ela pode ficar em 2.º lugar?
228. **P-2 e P-8:** Não!
229. **Pesquisador/Participante:** Então, em 2.º lugar podem ficar quais salas?
230. **P-4:** Todas! [Referiu-se às salas restantes.]
231. **P-2:** A 2.^a, 3.^a, 4.^a, 5.^a, 6.^a, 7.^a e 8.^a!
232. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, pessoal? [Todas as participante responderam “Sim!”. O Pesquisador/Participante fez a seguinte representação no referido esquema – 2.º ‘Momento’.]
233. **P-2:** Mas se não foi ela que ficou [Referiu-se à 1.^a sala.] pode ficar a 2.^a sala! Daí fica tudo de novo: 1.^a, 3.^a, 4.^a, 5.^a, 6.^a, 7.^a e 8.^a. [Referiu-se ao 2.º lugar.]
234. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem o que a P-2 falou, pessoal? [As demais participantes sinalizaram afirmativamente. Deste modo, o Pesquisador/Participante completou o esquema – 3.º ‘Momento’.] Então nós vamos fazer o mesmo com a 2.^a, a 3.^a, até a 8.^a sala! Tentem calcular a partir disso... veja se vocês conseguem!
235. **P-8:** É 7×8 !
236. **Pesquisador/Participante:** A P-8 falou que fica 7×8 !?
237. **P-8:** Porque sempre... se tem 8 e você tira 1 de cada 1... é!
238. **Pesquisador/Participante:** A P-4 e a P-8 disseram que tem que fazer 7×8 ou 8×7 !
239. **P-8:** Espera, deixa eu ver primeiro!
240. **P-2:** 8 vezes 7 possibilidades! [A participante ficou olhando para o esquema feito na lousa.]
241. **P-8:** Porque todas vão sair 1! Se eu tenho 8... 8 salas...
242. **P-2:** Mas ali, oh [Apontou para o referido esquema.] vão ficar 7 de 7!?
243. **P-7:** Então...
244. **P-2:** Ou 8 de 7?
245. **P-8:** 7 porque cada um vai ter 7, mas tem 8 salas!
246. **P-2:** 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

247. **Pesquisador/Participante**: Cada sala que fica em 1.º lugar, as demais só podem ficar em 2.º.
248. **P-2**: *Então são 8 vezes 7 mesmo!*
249. **P-7**: *É!*
250. **P-8**: *Isso!*
251. **Pesquisador/Participante**: A gente ‘cai’ de novo aonde?
252. **P-8**: *No princípio multiplicativo! [Neste momento P-4 riu!]*
253. **Pesquisador/Participante**: Tudo bem P-4?
254. **P-4**: *Sim!*
255. **Pesquisador/Participante**: E você P-8?
256. **P-8**: *Sim!*
257. **Pesquisador/Participante**: P-7...
258. **P-7**: *Tudo!*
259. **Pesquisador/Participante**: E você, P-2?
260. **P-2**: *Então, mas esse é o meu problema! Eu até entendo o problema, consigo raciocinar e tudo, mas não consigo pensar no cálculo!*
261. **P-8**: *Eu já pensei no cálculo! Eu já vi!*
262. **P-4**: *É, mas porque tinha o desenho! [Referiu-se ao esquema feito na lousa.]*
263. **P-2**: *Agora, né!*
264. **P-8**: *É, sem o desenho não! É, sem o desenho eu não tinha pensado que todos estes números [Referiu-se às 8 salas.] tinha essa possibilidade! Mas é falta de treino!*
265. **Pesquisador/Participante**: Também, uma certa ‘manha’ em como fazer problemas deste tipo, mas não só isso! Deu pra perceber, pessoal, que a Árvore de Possibilidades é um importante instrumento?
266. **P-4**: *Muito!*
267. **Pesquisador/Participante**: Até para pensar sobre o problema! [Todas as participantes registraram o referido esquema. Dando prosseguimento, o Pesquisador/Participante leu o desafio 2.1 – esboçado abaixo:]

2.1. Entre 27 de julho a 12 de agosto deste ano (2012) serão realizados os Jogos Olímpicos em Londres com a participação de 192 países. Quais são as possibilidades para as medalhas de ouro, prata e bronze?

[Imediatamente após a leitura, P-2 falou:]

268. **P-2:** *É a mesma coisa: $192 \times 191 \times 190$!*
269. **P-7:** *É!*
270. **Pesquisador/Participante:** Não sei, o que vocês acham?
271. **P-2:** *Porque são 3, são 3, medalha de ouro, prata e bronze!*
272. **P-8:** *Ah, aqui é 1.º e 2.º! [Referiu-se ao desafio 2.] Aqui vão ter 3! [Referiu-se ao desafio 2.1.]*
273. **P-2:** *Vai diminuir um, 8×7 ... Vai diminuir 1!*
274. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem o que a P-2 falou? [As demais participantes responderam “Sim!”. Utilizando a calculadora as participantes obtiveram como resposta 6967680 possibilidades.]
275. **P-2:** *Nossa, dá 6967680 possibilidades!*
276. **P-7:** *A sorte que era semelhante ao desafio anterior, porque senão não saia! [Risos da participante.]*
277. **P-2:** *É interessante!*
278. **Pesquisador/Participante:** É interessante poder ver como a Combinatória nos ajuda a fazer estas ‘previsões’. Dá pra perceber que pela contagem direta não seria possível tal resposta!
279. **P-2:** *Pelo amor de Deus! Quantos dias eu vou levar pra fazer isso? [Risos entre todas as participantes.]*
280. **P-7:** *É inviável!*
281. **Pesquisador/Participante:** Sim, com certeza! É necessário, pessoal, que no 4.º e 5.º ano, mais especificamente, vocês comecem pelo modo aditivo, pela contagem direta...
282. **P-2:** *E começa com os números pequenos!*
283. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro! Somente após o aditivo, é que eles começam a generalizar para o princípio multiplicativo, até porque, em muitas situações, sem o princípio multiplicativo é quase impossível (ou impossível) solucionar o problema!
284. **P-2:** *Eu vou deixar os alunos fazendo! [Risos entre todos!]*
285. **Pesquisador/Participante:** Tá dando pra acompanhar, pessoal?
286. **P-2:** *Existe princípio de tudo, tipo, princípio aditivo, tem o multiplicativo,...*

287. **Pesquisador/Participante:** Boa pergunta, P-2! O Princípio Multiplicativo estamos estudando agora. Acho que o Princípio Aditivo, caso se chame assim, é quando se acrescenta 1 unidade. Agora, se há Princípio da Subtração e da Divisão eu nunca ouvi, mas vou procurar!

[Em continuidade, o Pesquisador/Participante leu o 3.º desafio – exposto a seguir:]

3. Usando somente os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, e 6:
a) Quantos números de 2 algarismos podemos formar?
b) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?
c) Quantos números de 3 algarismos iniciados com o 1 na ordem da centena podemos formar?

Problema 3.					
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6

[O Pesquisador/Participante esclareceu, mediante questionamento feito por P-2, que os algarismos poderiam se repetir no mesmo número já que no enunciado não havia a especificação ‘algarismos distintos’. P-8 achou interessante este fato, salientando ter feito exercício similar. Além de P-8, as demais participantes não sabiam o significado da palavra distinto em situações problemas deste tipo. Antes de utilizarem os algarismos recortados como ‘apoio’ ao pensamento à realização das combinações possíveis, P-7 disse que haviam 36 números de 2 algarismos. No entanto, P-2 achou melhor verificar ‘no concreto’ primeiro. Após uns 3 minutos, o Pesquisador/Participante indagou:]

288. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, se vocês acharem pertinente podem usar o Diagrama de Árvore, além ou juntamente ao material concreto que lhes entreguei.

289. **P-2:** A P-7 já fez pelo Diagrama!

290. **P-7:** Só que eu só fiz metade! [Dirigindo-se à participante, observou-se o seguinte esquema que a mesma havia elaborado:]

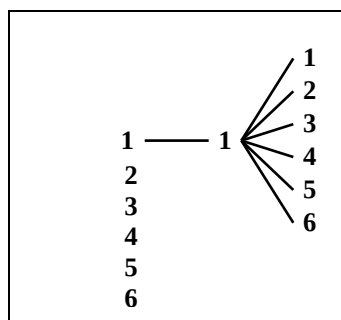
	1		1	
	2		2	
	3		3	
1	4	2	4	
	5		5	
	6		6	

291. **Pesquisador/Participante:** Ah, então ela pegou o 1 e combinou com o 1, 2, 3, 4, 5 e 6!

292. **P-2:** Isso!

293. **P-8:** *Isso que a gente tá recortando é o manual! [Referiu-se aos Algarismos contidos no material de ‘apoio’.]*
294. **P-4:** *É! E se a gente fizer com eles não vamos fazer no modo aditivo.*
295. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo P-4!
- [Após colocar os Algarismos dispostos na mesa, P-2 falou:]
296. **P-2:** *É isso mesmo, oh, eu coloco o 1 [Referiu-se à posição da dezena.] e daí eu ponho o 1, 2, 3, 4, 5, e 6. [Referiu-se à posição da unidade.] 6×6 , tá certo, é 36 mesmo! [Neste momento, P-4 pegou o Algarismo 2 e colocou-o na posição da dezena que estava anteriormente ocupada pelo Algarismo 1 na mesa de P-2.]*
297. **P-4:** *Depois você pega o 2 e...*
298. **P-2:** *Isso mesmo, e põe no lugar do 1.*
299. **P-4:** *Isso!*
300. **P-8:** *Pera aí, deixa eu entender! Deixa eu escrever aqui!*
301. **P-2:** *Você entendeu o que nós fizemos P-8? [P-8 olhou para os Algarismos dispostos na mesa de P-2.] Você põe o 1, [Referiu-se à posição da dezena.] e o 1 pode ser com 1, com 2, com 3, com 4, com 5 e com 6. Então ele tem 6 possibilidades.*
302. **P-8:** *Ãh!*
303. **P-2:** *Se você por o 2... [A participante trocou o Algarismo 1 que ocupava a posição da dezena pelo Algarismo 2.] pode ser com 1, com 2, 3, 4, 5, e 6.*
304. **P-8:** *Ãh!*
305. **Pesquisador/Participante:** Mas vocês estão muito rápidas! Que bom! Vocês já tinham construído mais pensamento combinatório do que imaginavam! [As participantes disseram não acreditar em tal fala.]
306. **P-8:** *É, se não pudesse repetir o Algarismo daí tiraria 1!*
307. **P-2:** *É, daí ficaria 5. [Referiu-se às possibilidades para o Algarismo da unidade.] Daí ficaria 5×6 ! Daí ficaria 30!*
308. **P-8:** *Ah, entendi!*
309. **P-7:** *No primeiro exercício [Referiu-se aos desafios aplicados no 13.º Grupo de Estudo.] a gente não sabia a árvore, e se nós tivéssemos esse papelzinho...*
310. **P-2:** *Fazia!*
311. **P-7:** *Será que a gente fazia?*

312. **P-2:** *Fazia!*
313. **P-7:** *Sim, porque a gente começou a riscar a folha e foi se perdendo... a gente não sabia fazer a árvore! Eu acho que iria ajudar!*
314. **P-2:** *A resposta da letra a) fica: Podemos formar 36 números de dois algarismos. É isso? [As demais participantes responderam “Sim!” e registraram a resposta em suas folhas.]*
315. **Pesquisador/Participante:** *Agora, pessoal, pensem no item b) para três algarismos!*
316. **P-2:** *E agora de 3 algarismos...?*
317. **P-8:** *Com estes numerinhos aqui? [Referiu-se aos algarismos do enunciado recortados do material de ‘apoio’.]*
318. **Pesquisador/Participante:** *Sim, P-8, você pode usar os algarismos recortados.*
319. **P-2:** *E pode ser 111?*
320. **Pesquisador/Participante:** *Sim, porque não tem a especificação distintos!*
321. **P-2:** *Vamos na árvore de novo! [P-2 falou para P-7.] Então, mas aí vai dar problema!*
322. **P-7:** *Daria 6 no primeiro [Referiu-se aos algarismos posicionados na centena.], depois daria mais 6 pra cada um porque pode repetir... [Referiu-se aos algarismo posicionados na dezena.]*
323. **P-8:** *Mas o que você coloca aqui de início? Vai ter que colocar o 1... [Referiu-se ao algarismo 1 ocupar a posição da centena.]*
324. **P-2:** *E daí vai com 1, com 2, com 3, com 4, com 5 e com 6. [Referiu-se aos algarismo posicionados na dezena após o 1 colocado na centena.]*
325. **P-7:** *Não seria... não pode ser com 111?*
326. **Pesquisador/Participante:** *Pode!*
327. **P-7:** *Então, vai dar bem mais números!*
328. **P-8:** *Pera aí... vai dar 111?*
329. **P-4:** *Sim!*
330. **P-2:** *Então aqui [Apontou para a folha na qual P-7 estava registrando o seguinte esquema – Árvore de Possibilidades.] vai repetir tudo de novo! [Referiu-se aos algarismos posicionados na unidade.]*



331. **P-7:** *Sim, tudo de novo! E daí vai colocar tudo de novo!* [Referiu-se à necessidade de repetir o mesmo processo.]

332. **P-2:** *Então vai ficar $6 \times 6 \times 6$?*

333. **P-7:** *É!*

334. **P-2:** *É, porque tem 6 números...* [Apontou para os algarismos posicionados na centena.] *e 6* [Referiu-se aos 6 algarismos a ocuparem a dezena, sendo que tal processo repetir-se-á para cada um dos algarismos posicionadas na centena.] *e 6!* [Referiu-se aos 6 algarismos a ocuparem a unidade, sendo que tal processo repetir-se-á para cada um dos algarismos posicionados na dezena.] *Daí fica $6 \times 6 \times 6$!*

335. **P-7:** *É mesmo!*

[P-2, utilizando os algarismos recortados do material de ‘apoio’, explicou para P-4 como havia solucionado o desafio juntamente com P-7. P-8 observou a explicação e P-4 indagou:]

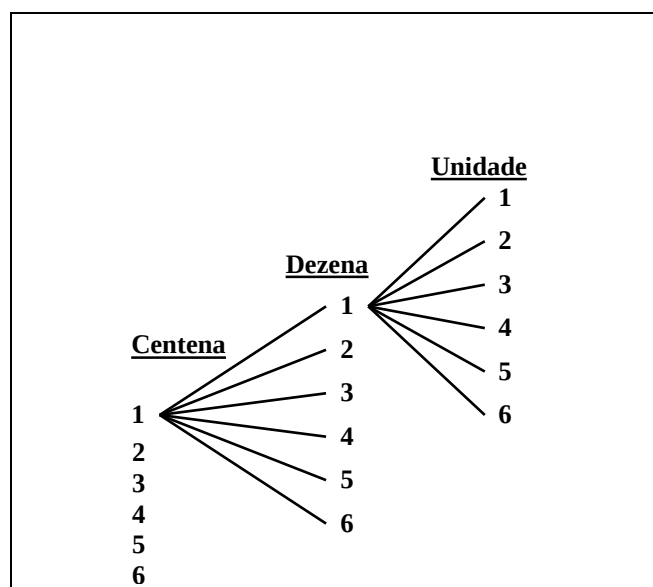
336. **P-4:** *Ah, tá, mas é difícil!*

337. **P-2:** *Mas você entendeu?*

338. **P-4:** *Sim!*

339. **Pesquisador/Participante:** Entendeu P-4?

340. **P-4:** *Sim!* [O Pesquisador/Participante foi à lousa e enquanto registrava o exposto abaixo falou:]



341. **Pesquisador/Participante:** Olha, nós temos 6 possibilidades na posição da centena. Daí, para cada algarismo da centena nós temos novamente 6 possibilidades na posição da dezena. E isso se repete para cada um dos algarismos da dezena! Então quer dizer que o Diagrama vai ficar ‘enorme’, e nem dá para desenhar direito na lousa. Você está conseguindo acompanhar o raciocínio que utilizei!

342. **P-4:** *Sim!*

343. **Pesquisador/Participante:** Assim, em cada ordem nós teremos 6 possibilidades!

344. **P-4:** *Daí fica $6 \times 6 \times 6$!* [Enquanto P-4 e P-8 registravam a resposta referente à alternativa b), P-2 e P-7 estavam discutindo a solução do item c). Neste item (c) era solicitada a constituição de números com 3 algarismos, sendo a centena iniciada por 1. Observe a fala entre P-2 e P-7 a respeito deste item após a leitura do enunciado:]

345. **P-2:** *Na ordem da centena só pode ser 1, mas depois da dezena é 6 e da unidade é 6!*

346. **P-7:** *É!*

347. **P-2:** *Então fica $1 \times 6 \times 6$!*

348. **P-8:** *É isso aí mesmo, P-2!*

349. **Pesquisador/Participante:** Vocês estão na c) já, pessoal? [Todas as participantes responderam “Já!”.] Quantas possibilidades deu na b)?

350. **P-2:** *216!*

351. **Pesquisador/Participante:** Ok! Daria pra fazer ‘na mão’, aditivamente 1 a 1? [P-8 riu e P-2 indicou gestualmente negativamente.] Ficaria difícil, né! Com certeza mais da metade dos números a gente ia esquecer!

352. **P-2:** *É, ia pular tudo!*

353. **Pesquisador/Participante:** Agora o item c)! Este item pede para ser 3 algarismos, só que comece com 1 na ordem da centena!... [Após uns 2 minutos, P-7 falou com P-2 e P-8:]

354. **P-7:** Então vai ficar 1 na centena...

355. **P-8:** E depois 6 e 6.

356. **P-2:** É, 6 e 6!

357. **P-8:** E vai dar 36!

[O Pesquisador/Participante dirigiu-se às participantes e verificou que todas haviam solucionado corretamente o item c). Deste modo, após ‘resumir’ a solução, o Pesquisador/Participante fez o seguinte questionamento:]

358. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, vocês acham que se não tivessem estudado o Diagrama de Árvore e o Princípio Multiplicativo teriam conseguido solucionar rapidamente este problema?

359. **P-2:** Não! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

360. **P-8:** Sem ver como fazer não! Lembra que no começo você deu pra gente resolver e eu perguntei se não tinha uma fórmula? [Referiu-se aos desafios aplicados no 13.º Grupo de Estudo.] Eu lembrava que tinha uma fórmula, mas eu não sabia como fazer! Agora... vendo é mais fácil!

361. **Pesquisador/Participante:** E não tem nenhuma fórmula ‘complicada’ ainda, né!

362. **P-2:** Mas não é uma fórmula!

363. **P-8:** É um meio de resolver.

364. **Pesquisador/Participante:** O Princípio Multiplicativo é uma ‘ajuda’, mas uma fórmula, fórmula... é um tipo de raciocínio utilizado para resolver problemas de contagem.

[Dando prosseguimento, o Pesquisador/Participante leu o quarto desafio apresentado abaixo:]

4. O mundo ‘informatizado’ traz muitas facilidades e também alguns perigos. Frequentemente os noticiários mostram ações de hackers que, ao descobrirem as senhas de clientes bancários, causam inúmeros transtornos a todos. Nesse sentido, a Combinatória pode ajudar no processo de elaboração das senhas de tal modo a dificultar a ação desses criminosos. Suponha que você seja o gerente de um banco e tenha que decidir, dentre várias propostas, qual seria a melhor. Observe algumas possíveis propostas:

- 1.^a Proposta: Senha formada com 4 algarismos distintos.
- 2.^a Proposta: Senha formada com 4 algarismos.
- 3.^a Proposta: Senha formada com 2 algarismos distintos e 2 letras distintas.
- 4.^a Proposta: Senha formada com 2 algarismos e 2 letras.
- 5.^a Proposta: Senha formada com 4 letras distintas.
- 6.^a Proposta: Senha formada com 4 letras.

Qual seria a melhor proposta? Justifique.

Problema 4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
U	V	X	W	Y	Z				

[Durante a leitura, o Pesquisador/Participante discutiu o ‘significado’ de cada uma das 6 propostas. Em seguida questionou:]

365. **Pesquisador/Participante**: Então, pessoal, qual destas seria a melhor proposta?

366. **P-4**: *É aquele que tem mais possibilidades!*

367. **Pesquisador/Participante**: Isso mesmo, P-4! E qual seria destas aí?

368. **P-4**: *É a que tem as letras!*

369. **Pesquisador/Participante**: Qual delas? [Todas as participantes ‘voltaram’ a ler cada uma das propostas, indagando que o termo ‘distinto’ implica em não repetição. Após uns 5 minutos, P-2 falou que]

370. **P-2**: *A primeira proposta dá 40! Não é?* [Ao invés de multiplicar $10 \times 9 \times 8 \times 7$, a participante confundiu-se e fez $10 + 10 + 10 + 10$. Deste modo, o Pesquisador/Participante entrevistou:]

371. **Pesquisador/Participante**: Observem, pessoal, que a senha tem que ocupar 4 espaços! [Registrou-se na lousa o seguinte:]

--	--	--	--

372. **P-2**: *É, mas na primeira proposta não pode repetir!*

373. **Pesquisador/Participante**: Como eu desenhei aqui na lousa, a senha vai ocupar 4 dígitos quando a pessoa colocar no banco.

374. **P-2**: *Então, se não pode repetir, ficariam 10, 9, 8 e 7!* [A participante apontou para os ‘espaços’ desenhados na lousa.]

375. **Pesquisador/Participante**: Você está falando no caso dos algarismos distintos?

376. **P-2**: *É!*

377. **Pesquisador/Participante**: A P-2 está falando, pessoal, a primeira proposta em que só podem ser usados os algarismos! O que você falou, P-2?

378. **Pesquisador/Participante:** *Que a primeira ‘casinha’ teriam 10 possibilidades: o 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou o 0.*

379. **Pesquisador/Participante:** Então no primeiro espaço seriam 10 possibilidades! Tudo bem, pessoal? **[As demais participantes indicaram por meio de expressão facial, afirmativamente.]**

380. **Pesquisador/Participante:** Aí, como não pode repetir, então o que já foi aí **[Referiu-se ao 1.º espaço.]** teria que ser um a menos... 9! Aí o que já foi nos dois **[Referiu-se ao algarismos distintos já considerados nos dois primeiros espaços.]** não pode... 8! Aí o que já foi nos três não pode... 7! **[O Pesquisador/Participante completou os referidos espaços com os números 10, 9, 8 e 7 que indicam as possibilidades para cada um dos dígitos a constituírem a senha na primeira proposta.]**

381. **Pesquisador/Participante:** Daí o que temos que fazer com estes números, P-2?

382. **P-2:** *Multiplica!*

383. **Pesquisador/Participante:** Então, na primeira proposta ficaria $10 \times 9 \times 8 \times 7$! Conforme a P-2 falou, pessoal, no primeiro dígito teriam 10 possibilidades, ou seja, do 1 ao 0. No segundo dígito, supondo que o 1 já foi, então teríamos do 2 até o 0, ou seja, 9 possibilidades. No terceiro teríamos do 3 ao 0, então diminuiu para 8 possibilidades. E no último fica do 4 ao 0 ficando com 7 possibilidades. **[O Pesquisador/Participante completou o esquema anterior conforme foi comentando a solução. Observe-o:]**

10	9	8	7
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7
5	6	7	8
6	7	8	9
7	8	9	0
8	9	0	
9	0		
0			

384. **P-2:** *E o outro é o contrário! [Referiu-se à segunda proposta.] É 10, 10, 10 e 10!*

385. **P-8:** *É isso que eu ia falar!*

386. **P-4:** *É, porque não pode repetir!*

387. **Pesquisador/Participante:** Eu acho interessante vocês calcularem cada uma das propostas e depois compararem qual delas deu o maior número de possibilidades. **[Antes de calcular todas as propostas, P-4 salientou que a melhor seria a quarta “Senha formada com 2 algarismos e 2 letras”. Após tal fala o Pesquisador/Participante salientou:]**

388. **Pesquisador/Participante:** Vai calculando pra você ver!

389. **P-4:** *Ah, tá, mas daí são dois Algarismos e duas letras! É, mas as letras é mais, né! Vai ter que calcular, não tem jeito!*

[P-2 foi a primeira a concluir todos os cálculos e chegou à conclusão de que a melhor proposta era a sexta “Senha formada com 4 letras”. A próxima participante a terminar foi P-7, seguida de P-4 e, por fim a P-8. O Pesquisador/Participante conferiu as respostas encontradas, salientando que o gerente do banco deveria escolher a sexta proposta pelo fato da mesma possuir o maior número de combinações. Logo em seguida, P-7 ressaltou:]

390. **P-7:** *É engraçado porque, igual a P-8 falou, a maioria dos bancos só usa números!*

391. **P-8:** *É número e letra!*

392. **P-7:** *Hoje tem misturado, mas antes era só número!*

393. **P-8:** *O cartão de crédito meu é só número!*

394. **P-7:** *Mas a senha só com letra é difícil encontrar!*

395. **P-2:** *É!*

396. **P-8:** *No Banco X agora tem!*

397. **P-7:** *É, mas só que tem o número primeiro e depois tem a letra!*

398. **P-8:** *Agora no Banco Y é só número!*

399. **Pesquisador/Participante:** O Banco, então, devia colocar só letras, né!

400. **P-7:** *Eu acho que eles não fizeram a conta!*

401. **P-2:** *Vamos informá-los! [Risos entre todos.]*

402. **Pesquisador/Participante:** O duro que é verdade, né, pessoal!

403. **P-2:** *Eu vou mandar um e-mail a todos os gerentes!*

404. **Pesquisador/Participante:** Quando a senha possui 6 dígitos e é formada pelos algarismos, podendo repetir, aumenta o número de possibilidades!

405. **P-2:** *É, aumenta bastante!*

406. **Pesquisador/Participante:** Ficaria $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ que daria 1000000! Confirmam aí pra mim na calculadora! [P-2 realizou o cálculo com o auxílio da calculadora.]

407. **P-2:** *É, dá 1000000 mesmo!*

408. **P-4:** *Nossa!*

409. Pesquisador/Participante: Agora, imaginem se fossem 6 letras podendo repetir! Ficaria $26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26$! [Como a calculadora de P-2 era do tipo ‘escolar’/comum, o Pesquisador/Participante utilizou uma calculadora científica para obter o valor.] O resultado é 308915776 possibilidades!

410. P-8: *Só com as letras!?*

411. Pesquisador/Participante: Sim, com 6 letras podendo repetir!

412. P-7: *Então deveria ser só com letras!*

413. Pesquisador/Participante: É verdade, pessoal, porque a chance – probabilisticamente – do ladrão descobrir seria bem menor! E é interessante a gente pensar sobre isso por meio da Combinatória! [Como não houveram outras dúvidas, realizou-se a leitura do quinto desafio – denotado abaixo:]

5. Na competição realizada durante a semana da Educação Física classificaram-se para a final o 1.º ano A e o 2.º ano B, ambas do Ensino Médio. Será vencedora a sala que ganhar duas competições seguidas ou vencer três competições alternadas. O professor Laércio, organizador dessa semana, pediu a ajuda da professora Sueli para calcular o número máximo de competições que poderão ser realizadas para que haja uma sala vencedora. Faz-se necessária tal ‘previsão’ para que o professor Laércio organize as atividades desenvolvidas ao término da semana da Educação Física. Além de calcular o número máximo de competições, registre quais seriam esses resultados.

[Durante a leitura, as participantes salientaram as possíveis partidas até o vencedor. P-2, percebendo que seriam várias as possibilidades exclamou: “Ai, são muitas possibilidades.” Em seguida, P-2 e P-7 discutiram sobre ser limitada (ou não) o número de competições. Após intervenção do Pesquisador/Participante, ambas as participantes chegaram à conclusão de que havia um número máximo de competições até o vencedor. Sugeriu-se o uso do Diagrama de Árvore à solução do desafio. Durante 20 minutos, todas as participantes fizeram parte do Diagrama de Árvore, no entanto, apresentaram dificuldades a sua conclusão. Algumas falas observadas foram:]

414. P-7: *Ah, eu me perdi!*

415. P-2: *Ficou complicado, não dá pra saber se já é pra parar, se já deu o vencedor... Ficou muita coisa!*

[P-2 e P-7 continuaram trocando ideias acerca da solução. P-4 ‘desistiu’ de pensar sobre o Diagrama e observou a discussão entre P-2 e P-7. Após algumas tentativas, P-8 falou:]

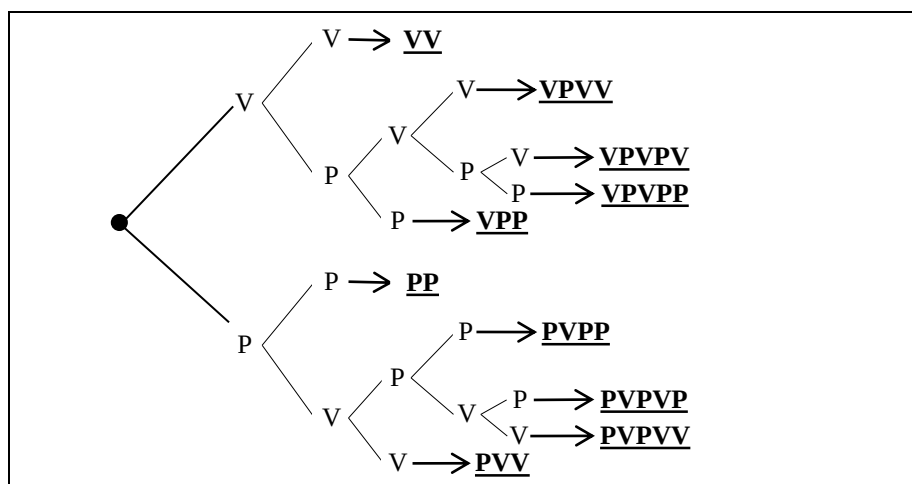
416. P-8: *Ah, Pesquisador/Participante, eu estou com preguiça de pensar! Pode!? Eu vou até tomar uma água... estou com preguiça de pensar!*

417. Pesquisador/Participante: Vai lá! [Após a saída de P-8, P-2 questionou:]

418. P-2: *São só 3 tipos?*

419. **Pesquisador/Participante:** 3 possibilidades? Como assim, 3 tipos? [P-2 citou as possibilidades, no entanto ainda faltavam algumas. Diante disso P-7 indagou “Eu desisto!”. P-2 continuou a elaborar o Diagrama, sendo auxiliada por P-4.]

[Visando auxiliá-las, o Pesquisador/Participante foi à lousa e, conversando com as participantes elaborou o seguinte Diagrama de Árvore:]



[Uma das dificuldades observadas foi o fato de que, ao chegarem no resultado VV (venceu, venceu), as participantes não acharam necessário computar o resultado PP (perdeu, perdeu), já que logicamente um exclui o outro.]

[Ao questioná-las se haviam achado o desafio interessante, rapidamente P-2 respondeu: “Não!”. Para finalizar, as participantes concluíram que no máximo seriam necessárias 5 competições até o vencedor. O Pesquisador/Participante ressaltou a importância deste pensamento na organização dos eventos, realizando o seguinte questionamento:]

420. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, este desafio causou muito desequilíbrio em vocês?

421. **P-4:** Nossa, esse causou, hein!

422. **P-2:** Não gostei desse desafio!

423. **Pesquisador/Participante:** Mas você entendeu?

424. **P-2:** Sim! Mas eu não gostei!

425. **Pesquisador/Participante:** Eu trouxe este problema...

426. **P-2:** Para desestabilizar a gente! [Risos entre as participantes.]

427. **Pesquisador/Participante:** Além disso é importante vocês saberem que nem sempre o Princípio Multiplicativo é utilizado na solução de problemas combinatórios. É importante trazer este fato porque é muito comum o aluno generalizar e aplicar este princípio em todo problema combinatório. É por isso que o estudante tem que entender o que ‘pede’ o problema, interpretando-o e verificando as suas especificidades. Vocês já haviam feito algum problema parecido?

428. **P-2:** *Não!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]
429. **P-4:** *Eu tentei fazer mas não consegui!*
430. **Pesquisador/Participante:** Sem problema, o importante é que você pensou várias possibilidades de solução!
431. **P-7:** *Eu prefiro todos os problemas que dá para fazer igualmente.*
432. **Pesquisador/Participante:** Você prefere fazer os problemas iguais, ou seja, que você sabe o que tem que ser feito?
433. **P-7:** *Sim, porque é mais fácil!*
434. **Pesquisador/Participante:** Quando o futuro aluno de vocês disser isso pra vocês, o que vocês irão responder?
435. **P-7:** *É... boa pergunta!*
436. **P-2:** *Dizer que nem tudo o que a gente quer é possível!* [Risos entre P-2, P-4 e P-7.]
437. **Pesquisador/Participante:** Ou então... que você tem que fazer o aluno pensar mesmo sobre aquilo!?
438. **P-2:** *Eu acho que o estudante vai ficar com raiva!*
439. **Pesquisador/Participante:** Depende do seu posicionamento... Alguns, num primeiro momento podem até ficar, mas acredito que depois ele vá tomando consciência do quanto é importante tais aprendizagens.
440. **P-7:** *A maioria dos alunos não desiste?*
441. **Pesquisador/Participante:** Ah, se não tiver um professor mediador, acredito que sim! Acredito que o papel do professor, ao perceber que a atividade proposta está muito além, há a necessidade de auxiliar o estudante a pensar sobre o problema! É claro, pessoal, que não basta abordar somente um problema no qual o Princípio Multiplicativo não é suficiente... outros devem ser trabalhados! O professor poderia considerar que seria vencedor o time que obtivesse 3 vitórias consecutivas ou 4 vitórias alternadas. Percebam que ‘complicaria’ o que nós acabamos de fazer!
442. **P-2:** *Não traga esse pra gente!* [Risos entre todos.]

[Como não houveram outros questionamentos, o Pesquisador/Participante realizou a leitura do sexto desafio. Torna-se importante salientar que P-8 já estava solucionado tal desafio antes da solicitação pelo Pesquisador/Participante. Observe-o abaixo:]

6. Anagrama é um tipo de ‘jogo’ realizado com as letras de uma palavra. Por exemplo, com a palavra PE podemos formar dois anagramas: (PÉ) e (ÉP). Assim, calcule quantos são os Anagramas das seguintes palavras:
a) COR

- b) DOR
c) AMOR
d) ANA
e) COCO

Para resolver todos os itens foi utilizado o mesmo procedimento? Discorra sobre.

Problema 6.							
C	O	R	D	O	R		
A	N	A					
A	M	O	R	C	O	C	O

[Enquanto explicava o exemplo, P-7 – visando auxiliá-lo – citou alguns anagramas que já havia formado a partir da palavra COR: CRO, ROC]

[Em relação à alternativa a), P-2 disse para P-7 que haviam 3 anagramas. P-7 respondeu afirmando haver mais do que 3. P-8 falou para ambas (P-2 e P-7) que conseguiu formar 5 anagramas, dando o seguinte conselho:]

443. **P-7:** *Vão intercalando o R e o O!*

444. **Pesquisador/Participante:** Se vocês quiserem utilizar a Árvore de Possibilidades também é uma maneira! E o Princípio Multiplicativo também!

[P-4 concluiu que o número de anagramas dos itens a) e b) seriam iguais pelo fato das palavras COR e DOR terem o mesmo número de letras. Após alguns minutos, P-8 disse achar que a palavra AMOR era a que possibilitaria o maior número de anagramas. As participantes tiveram dificuldades em relação a tal palavra. P-7, por exemplo, confundiu-se ao registrar os anagramas possíveis da palavra AMOR, apagando algumas vezes a folha (resposta). Observe o diálogo realizado entre as participantes a respeito de tal palavra:]

445. **P-8:** *O de AMOR deu 9 anagramas!*

446. **P-2:** *O meu também! Só que, pra fazer o anagrama não tem que fazer a árvore?*

447. **P-7:** *Mas eu achei difícil!*

448. **P-4:** *Mas a árvore não é o princípio multiplicativo?*

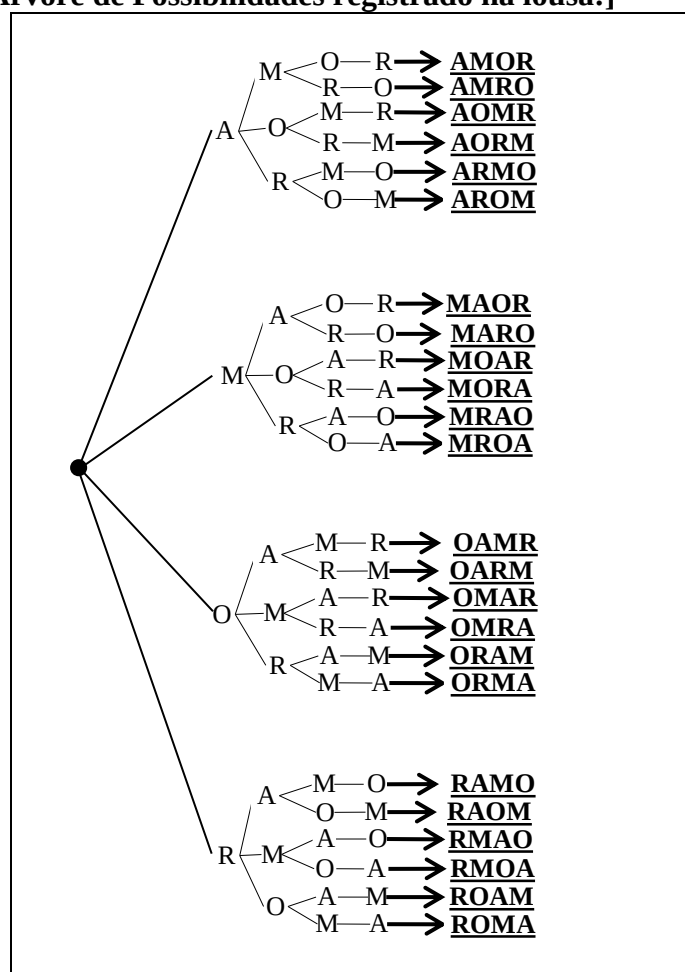
449. **P-2:** *Mas pra fazer o princípio multiplicativo você tem que por na árvore!*

450. **P-7:** *Na árvore!*

451. **P-4:** *Mas se você fizer assim, oh... [A participante escreveu na folha de P-2 o a multiplicação $4 \times 3 \times 2 \times 1$.] 4 possibilidades, aí aqui é 4, aqui é 3, aqui é 2 e aqui é 1. Agora você multiplica tudo, não é assim?*

452. **P-2:** *Eu acho que é isso mesmo!*

453. **P-7:** *E para escrever na Árvore de Possibilidades?*
454. **P-2:** *Nossa, então tem muitas, e a gente só conseguiu achar quase nada! [A participante utilizando a calculadora obteve como resultado 24.]*
455. **P-8:** *Nossa, mas não dá!*
456. **P-7:** *O Pesquisador/Participante falou que era bastante!*
457. **P-8:** *Ah, é!?*
458. **Pesquisador/Participante:** O problema está sendo na palavra AMOR?
459. **P-8:** *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]
460. **Pesquisador/Participante:** Nas palavras COR e DOR tudo bem? [Todas as participantes responderam afirmativamente. Neste momento, P-2 foi à lousa para representar a Árvore de Possibilidades da palavra AMOR, sendo auxiliada pelas demais participantes. Durante a elaboração do Diagrama, P-4 novamente falou que é possível aplicar o Princípio Multiplicativo. O Pesquisador/Participante esclareceu algumas dúvidas de P-7 em relação à elaboração do Diagrama, em específico sobre a variação das letras. Observe a Árvore de Possibilidades registrado na lousa:]



[Durante a elaboração do Diagrama, o Pesquisador/Participante fez a seguinte consideração:]

461. **Pesquisador/Participante:** Percebam, pessoal, que na 1.^a posição há 4 possibilidades. Em seguida, na 2.^a sempre há 3 possibilidades, depois 2 e por último 1. Daí fica o que a P-4 falou, ou seja, do Princípio Multiplicativo $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$!

462. **P-4:** *Na hora que você falou que dava pra fazer pelo Princípio Multiplicativo eu já fiz! Porque eu fui pensar... são 4 letras, então na 1.^a você tem 4 possibilidades, na 2.^a são 3 porque não pode repetir as letras, daí depois fica 2 e por último 1.*

463. **P-8:** *Nossa, dá 24 palavras mesmo!*

464. **Pesquisador/Participante:** Sim!

465. **P-8:** *É grande fazer a Árvore de Possibilidades, né!*

466. **Pesquisador/Participante:** É por isso que fica mais fácil para calcular, neste caso, usar o Princípio Multiplicativo. Só se pedem as palavras possíveis, daí o melhor é utilizar o Diagrama de Árvore! E o bom é que, com a Árvore, as chances de se perder são pequenas!

[P-2, após finalizar o esquema na lousa indagou:]

467. **P-2:** *Pronto, terminamos! Pelo menos nós fizemos!*

468. **Pesquisador/Participante:** E o interessante, pessoal, é os alunos compreenderem que vão ‘chegar’ alguns problemas em que o ‘melhor’, em termos de rapidez, é aplicar diretamente o Princípio Multiplicativo. O Diagrama de Árvore é ótimo, só que algumas vezes fica muito trabalhoso! [Terminado o registro do diagrama feito na lousa, P-7 questionou:]

469. **P-7:** *Eu estou com dúvida na e)!*

470. **Pesquisador/Participante:** Na palavra COCO?

471. **P-7:** *É, porque se for pensar no mesmo princípio, não teria que ter a mesma quantidade de letras que teve...? Ou é por causa que elas repetem? [A participante ficou em dúvida pelo fato de que, mesmo a palavra COCO tendo o mesmo número de letras de AMOR, por haverem letras repetidas o número de anagramas diminuiria.]*

472. **Pesquisador/Participante:** No caso da palavra COCO, com as letras repetidas?

473. **P-7:** *Isso!*

474. **Pesquisador/Participante:** Por serem repetidas você concorda que diminuirá o número de anagramas?

475. **P-7:** *Sim! E como ficaria o Princípio Multiplicativo?*

476. **Pesquisador/Participante:** Neste caso, P-7, seria indicado utilizar o Diagrama de Árvore para você observar os anagramas que se repetem pelo fato de haverem letras repetidas. Apenas por meio do Princípio Multiplicativo não é possível, a não ser que utilize a fórmula da Permutação com Repetição. E como ‘chegar’ nesta fórmula iremos discutir em momento posterior. Eu dei esta palavra – COCO – de propósito para, novamente, desequilibrá-las!

477. **P-7:** *Só que daí eu fiquei na dúvida das possibilidades que eu achei, se eu tinha feito certo!*
478. **Pesquisador/Participante:** Entendi!
479. **P-2:** *Nossa, não sei!*
480. **P-7:** *O quê?*
481. **P-2:** *A palavra ANA! [A participante estava ‘pensando sobre’ os anagramas da palavra ANA.]*
482. **P-7:** *É o mesmo do COCO porque se repete a letra A! E daí muda as possibilidades!*
483. **P-2:** *E daí não dá para fazer?*
484. **P-8:** *Quando repete o que faz?*
485. **P-7:** *É isso que eu acabei de perguntar!*
486. **Pesquisador/Participante:** Dá pra fazer sim, pessoal! Neste caso, como são poucas letras o jeito é fazer por meio da Árvore de Possibilidades!
487. **P-2:** *Não dá pra usar a multiplicação?*
488. **Pesquisador/Participante:** Não dá pra resolver só pelo Princípio Multiplicativo porque há letras repetidas! Tudo bem?
489. **P-2:** *Ah!*
490. **Pesquisador/Participante:** Você fez $3 \times 2 \times 1$?
491. **P-2:** *É!*
492. **Pesquisador/Participante:** Resultam 6 anagramas, só que por haverem letras repetidas, no caso da palavra ANA é a letra A, pelo Diagrama você verá que são menos!
493. **P-2:** *Bom, mas teoricamente dá, porque tem o A_1 e o A_2 ! [Risos entre as participantes.]*
494. **Pesquisador/Participante:** Não, não dá! [Risos entre todos!] Gostei desta solução!
495. **P-7:** *Quantas você achou?*
496. **P-2:** *Eu achei só 3! [Referiu-se aos anagramas da palavra COCO.]*
497. **P-8:** *Eu achei 4! [Referiu-se aos anagramas da palavra COCO.]*
498. **Pesquisador/Participante:** Da palavra ANA, P-2?

499. **P-2:** *Não, desta eu só achei 2 anagramas!*

500. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, vamos conferir os resultados que vocês encontraram! Para a palavra COR haviam os anagramas: COR, CRO, OCO, ORC, RCO e ROC. **[Todas as participantes haviam obtido tais anagramas, no entanto não utilizaram o Diagrama de Árvore.]** Quem pensou em fazer $3 \times 2 \times 1$?

501. **P-4 e P-8:** *Eu não pensei!*

502. **P-2:** *Eu pensei!*

503. **P-7:** *Eu pensei depois, só que eu comecei a contar e entrei em dúvida a do COCO!*

504. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem P-7! E da DOR, todo mundo compreendeu que eram 6 anagramas também?

505. **P-2, P-7 e P-8:** *Sim!*

506. **P-4:** *Eu nem fiz!*

507. **Pesquisador/Participante:** Você não fez P-4 porque você utilizou o mesmo resultado de COR?

508. **P-4:** *Sim!*

509. **Pesquisador/Participante:** Confirmam aí! Seriam: DOR, DRO, ODR, ORD, RDO e ROD. **[P-2, P-7 e P-8 conferiram suas respostas.]** E a palavra AMOR, como já falamos, não daria pra fazer pelo Princípio Multiplicativo... se o aplicássemos dariam 24 anagramas, mas não é este o número!

510. **P-2:** *É, ficou complicado!*

511. **Pesquisador/Participante:** Então vocês pensaram em utilizar o Princípio Multiplicativo para a palavra AMOR? Até então, por serem poucas letras, vocês conseguiram fazer mudando a posição das letras? **[Todas as participantes responderam afirmativamente.]**

512. **P-7:** *E era gostoso de fazer com poucas letras! [Risos entre as demais participantes.]*

513. **Pesquisador/Participante:** E a palavra ANA quantas vocês acharam?

514. **P-2, P-7 e P-8:** *2!*

515. **Pesquisador/Participante:** São 3! Com a palavra ANA!

516. **P-7:** *Ah, a gente sempre esquece de contar a palavra! Então dão 3! [Resposta compartilhada entre P-2, P-4 e P-8.]*

517. **Pesquisador/Participante:** Na palavra ANA há duas letras repetidas A! Se eu fosse aplicar o princípio multiplicativo ficaria como?

518. **P-2:** *Ficaria 2×1 !*

519. **Pesquisador/Participante:** Não entendi!

520. **P-2:** *Ficaria o N e o A!*

521. **Pesquisador/Participante:** Não!

522. **P-2:** *Você falou que ficaria $3 \times 2 \times 1$!*

523. **Pesquisador/Participante:** Isso!

524. **P-2:** *Mas como o A são iguais seria 2×1 !*

525. **P-8:** *Seria 3×1 !*

526. **P-2:** *É, o normal seria fazer $3 \times 2 \times 1$!*

527. **Pesquisador/Participante:** Se não repetissem letras, pessoal, bastaria fazermos $3 \times 2 \times 1$ que dá 6! Só que, como há 2 letras repetidas, temos que dividir este resultado pela Permutação de 2 letras, as A que se repetem. Colocando na fórmula que eu havia comentado com vocês ficaria: **[O Pesquisador/Participante foi à lousa e registrou o exposto:]**

$$\frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

528. **P-4:** *Ah!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**

529. **Pesquisador/Participante:** E daí dão 3 que vocês já tinham achado aí!

530. **P-7:** A gente não pode se esquecer de contar a palavra ANA!

531. **P-2:** *É!*

532. **P-8:** *Ah, tá era isso que eu estudava quando fazia os concursos!* **[Disse a participante ao copiar o registrado na lousa.]**

533. **Pesquisador/Participante:** Você entendeu P-4 porque dividiu por 2 aqui? **[Apontou para a lousa.]**

534. **P-4:** *Porque 2 letras se repetem!*

535. **Pesquisador/Participante:** Por 2 letras se repetirem você tem que ver o número de Permutações possíveis, por isso eu uso 2 fatorial!

536. **P-2:** *Isso é uma Permutação...?*

537. **Pesquisador/Participante:** É uma Permutação com Repetição!
538. **P-2:** *Não basta ser uma Permutação! Tem que ser uma Permutação com Repetição!*
539. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, não se preocupem agora com essas denominações! Iremos abordá-las mais adiante!
540. **P-7:** *E o COCO... vai dividir como se as duas letras se repetem?*
541. **Pesquisador/Participante:** No caso do COCO, eu tenho $4 \times 3 \times 2 \times 1$... Só, o que acontece agora?
542. **P-7:** *Então, eu não sei!*
543. **Pesquisador/Participante:** Eu tenho 2 letras C que eu posso combinar e tenho mais letras O que eu posso combinar! **[O Pesquisador/Participante registrou o seguinte na lousa:]**

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2!} = \frac{12}{2} = 6$$

544. **P-8:** *Ixiii, nós achamos só 3, 4 possibilidades!*
545. **P-7:** *Eu achei as 6!*
546. **Pesquisador/Participante:** A P-7 achou pessoal! **[P-2 conferiu os anagramas encontrados com P-7.]** P-7, fale pra gente que eu vou anotar na lousa para compartilharmos! A primeira foi COCO! **[Em seguida, a participante ditou os seguintes anagramas: COOC, CCOO, OOC, OCCO, OCOC. As demais participantes copiaram as respostas completando com as já feitas.]** Do jeito que a P-7 fez, pessoal, sem usar a Árvore de Possibilidades corre-se o risco de esquecer algum anagrama! Na discussão hipotética entre as professoras de Matemática podemos ver o papel da fórmula, desde que o aluno compreenda o porquê daquela expressão que coloquei na lousa!

[Finalizando, o Pesquisador/Participante disse que os desafios restantes serão feitos no próximo encontro, bem como a Síntese referente a este encontro.]

APÊNDICE T – TRANSCRIÇÃO DO 16.º ENCONTRO

Data: <u>16/08/2012</u>
Tempo de Duração: <u>3</u> horas e <u>10</u> minutos.

[Com exceção de P-1 e P-9, as demais participantes estavam presentes no Grupo de Estudo. Inicialmente, o Pesquisador/Participante ressaltou à P-5 os assuntos discutidos no encontro anterior pelo fato da mesma ter faltado. Em seguida, as participantes fizeram novamente a leitura do item – 15.3 ‘Conversando sobre o Ensino de Combinatória’. Por se tratar de um diálogo hipotético observado entre três professoras de Matemática, o Pesquisador/Participante solicitou que as participantes lessem as falas de cada uma das três ‘personagens’. Deste modo, P-4 ficou encarregada de ler as falas da professora Sueli, P-5 da professora Márcia e P-2 da professora Cláudia. Antes da leitura, P-8 e P-4 expressaram seus ‘sentimentos’ para com o Grupo de Estudo. Observe:]

1. **P-8:** *Olha Pesquisador/Participante, eu quero te agradecer bastante pelo nosso Grupo de Estudo porque eu precisei colocar algumas coisas no meu TCC... eu quero ver agora, né, o que minha orientadora vai falar a respeito... Mas eu precisava de Piaget e achei tudo no nosso Grupo!*

2. **P-4:** *Eu também!*

3. **Pesquisador/Participante:** Que bom, fico feliz em saber que as nossas discussões estão colaborando!

4. **P-4:** *E muito!*

[Concluída a leitura do diálogo hipotético, as participantes compartilharam as respostas acerca do questionamento deixado como ‘tarefa’. Relembrando-o:]

1. Durante o seu período de ‘férias’, analise a conversa denotada acima observando as concepções epistemológicas implícitas nas falas das professoras e identifique nos trechos ideias condizentes aos assuntos estudados da teoria de Piaget.
--

5. **Pesquisador/Participante:** P-2, leia a sua resposta por favor!

6. **P-2:** *Então, eu não escrevi aqui, no lugarzinho, eu fui escrevendo na frente das falas! [Referiu-se às falas denotadas no diálogo hipotético.] Eu achei mais fácil assim!*

7. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem!

8. **P-2:** *Eu coloquei lá, 1.ª fala da Márcia... eu coloquei como racionalista. Depois... na 2.ª fala dela... eu coloquei como empirismo.*

9. **Pesquisador/Participante:** Na 1.ª fala você falou que era racionalismo por causa de qual parte?

10. **P-2:** *Naquela parte em que ela fala não perder tempo porque os alunos já tem que saber!*

11. **Pesquisador/Participante**: Será que este ‘já tem que saber’ implica que os alunos já tem que ter aprendido ou que eles tinham que nascer com este conhecimento?
12. **P-4**: *É, eu também pensei isso!*
13. **P-8**: *É, tinha que nascer com isso!*
14. **P-2**: *Eu achei que era porque depois, aqui debaixo [Referiu-se à fala posterior da professora Márcia.] ela fala sobre a questão de que os alunos ... “Sempre tem aquele estudante que não se dá bem com a Matemática, então, por mais que você faça nunca vai adiantar!”*
15. **Pesquisador/Participante**: Então você utilizou esta fala para poder complementar o que ficou em dúvida na 1.^a?
16. **P-2**: *É!*
17. **Pesquisador/Participante**: Vocês entenderam o que a P-2 falou, pessoal? **[Por meio de gesto facial as demais participantes indicaram afirmativamente.]**
18. **P-2**: *Aí depois, aqui, a outra parte que... é da Márcia, ela fala: “Começa de uma vez, o aluno tem que correr atrás da matéria.” aí eu coloquei que é empirismo.*
19. **Pesquisador/Participante**: Tá!
20. **P-2**: *Ela fala: “Daqui alguns anos você vai ver que o importante é você fazer a sua parte, dê a matéria direitinho.”, tipo, assim, ela ‘lavou as mãos’ dela!*
21. **Pesquisador/Participante**: Este dar parece indicar que a professora Márcia está depositando algo no aluno!
22. **P-2**: *Sim!*
23. **Pesquisador/Participante**: Tá bom!
24. **P-2**: *Depois aqui... a outra que é da Sueli, quando ela fala sobre... a questão do conteúdo abordado naquele momento estar além da capacidade de compreensão...*
25. **Pesquisador/Participante**: Ok!, Encontrei esta parte do diálogo!
26. **P-2**: *Eu coloquei que é construtivismo!*
27. **Pesquisador/Participante**: Isso!
28. **P-8**: Onde está P-2?
29. **P-2**: *Está no 3.º aqui! [Mostrou para P-8 em qual parte do texto estava a referida fala da professora Sueli.] Depois, na parte que é da Sueli também, que ela fala assim: “Antes de um conteúdo novo eu vejo o que os alunos já sabem acerca dos conteúdos que*

serão necessários.”, daí eu escrevi que é tipo fazer uma sondagem, identificar os estágios dos alunos... então eu coloquei como construtivismo também!

30. **Pesquisador/Participante:** Ok! A professora Sueli está identificando os conceitos que servirão de alicerce (prévios) para outros.

31. **P-2:** *Depois, lá embaixo, o último ‘quadradinho’ da Sueli ela coloca: “Se eu observo isso eu tenho que trabalhar inúmeras situações problemas para que o estudante compreenda bem quando utilizar a contagem direta.”, que complementa na fala anterior sobre, de repente dar um problema e o aluno ter dificuldade... que eu até escrevi aqui do lado da questão da situação problema e isso é construtivismo também!*

32. **Pesquisador/Participante:** Certo!

33. **P-2:** *Depois na outra folha ela fala sobre propor desafios e do lado sobre fazer questionamentos [Referiu-se às falas da professora Cláudia e Sueli.] eu pus que faz parte do construtivismo!*

34. **Pesquisador/Participante:** Ok!

35. **P-2:** *Nos diálogos abaixo quando fala da questão das fórmulas e tal... eu liguei com a questão sobre partir do conhecimento mais concreto pra chegar num conhecimento mais científico, mais abstrato, mas com significado para o aluno, que eu falei também que faz parte do construtivismo.*

36. **Pesquisador/Participante:** Certo!

37. **P-2:** *Daí debaixo da professora Sueli, de novo, que ela fala “... trabalhando gradativamente as diferenças...” e também sobre a não necessidade das fórmulas no final do Ensino Fundamental... eu coloquei que faz parte do construtivismo!*

38. **Pesquisador/Participante:** Ok!

39. **P-2:** *E eu acho que foi só!*

40. **Pesquisador/Participante:** P-8 compartilhe com a gente, por favor!

41. **P-8:** *Eu... eu não entendi como a P-2... até eu separei e achei que depois eu ia fazer e esqueci! Mas eu pensei, assim, essa parte Piaget que era para colocar a parte de equilíbrio, assimilação e acomodação!*

42. **Pesquisador/Participante:** Também!

43. **P-8:** *Era?*

44. **Pesquisador/Participante:** Claro!

45. **P-8:** *Eu anotei, assim, as frases do diálogo que estava dentro do construtivismo... por exemplo, o que os alunos já sabem... Daí a outra perguntou quando começar um assunto novo... [Referiu-se ao questionamento feito pela professora Cláudia para a professora*

Sueli.] *Aí, aquilo que o aluno já sabe, a partir do momento que... do conhecimento já construído, né!?*

46. **Pesquisador/Participante:** Sim!

47. **P-8:** *Já tem... eu coloquei como uma assimilação, e vai ter um assunto novo e vai assimilar! Eu fiz mais complicado... [P-2 indicou afirmativamente por meio de expressão facial e todas as participantes riram.] Eu não entendi a pergunta... Mas daí eu pus assim, fala de situações problemas para que o aluno compreenda bem o assunto, daí modificar para a incorporação de novos elementos que é a acomodação!*

48. **Pesquisador/Participante:** Isso, P-8, está correto!

49. **P-8:** *Com o avanço dos alunos propõem-se problemas para avançar... é também isso!... Antes das fórmulas os alunos devem aprender a pensar sobre... pra ter significado, né, e a professora Sueli vai trabalhando gradativamente, né!*

50. **Pesquisador/Participante:** Sim!

51. **P-8:** *Eu pus que gradativamente é... é assimilação e acomodação! Ele vai aprender a fórmula, vai ter significado e daí ela [Referiu-se à professora Sueli.] vai por mais... gradativamente ela vai pondo mais outras fórmulas, né... Como ela fala que não é pra trabalhar no Ensino Fundamental no Ensino Médio ela vai dar as fórmulas... Então antes eles [Referiu-se aos alunos.] vão aprender, né, sem as fórmulas e, depois, no Ensino Médio ela dá as fórmulas.*

52. **Pesquisador/Participante:** Sim, porque, em tese o poder de sintetização formal, digamos assim, no Ensino Médio já deveria estar mais desenvolvida!

53. **P-8:** *Foi isso que eu fiz!*

54. **Pesquisador/Participante:** Está certo! Apenas complementando salientando que a postura da professora Márcia traz ‘fortes’ indício do Empirismo e do Racionalismo!

55. **P-8:** *Tá bom!*

56. **Pesquisador/Participante:** P-7...

57. **P-7:** *Esse daí eu acho que eu entendi de outro jeito... que era pra pegar as três professoras, falar qual era a postura epistemológica de cada uma e dar exemplo com uma frase das falas!*

58. **Pesquisador/Participante:** Vamos ver como você fez!

59. **P-4:** *Eu fiz que nem a P-7!*

60. **P-8:** *Olha, cada uma fez de um jeito!*

61. **P-2:** *Pois é!*

62. **P-7:** *Eu coloquei que a professora Sueli tem uma postura construtivista como mostra em suas falas ao dizer que o aluno tem que agir sobre os conteúdos e trabalhar gradativamente os conteúdos!*
63. **Pesquisador/Participante:** Ok!
64. **P-7:** *E a professora Márcia tem uma postura empirista ao dizer que o importante é fazer a sua parte, e que tem alguns alunos que, por mais que você faça não vai adiantar!*
65. **Pesquisador/Participante:** Só que esta parte ‘por mais que você faça não vai adiantar’ tem um ‘tom’ racionalista... você compreende?
66. **P-7:** *Sim! Então, na verdade eu fiz isso já faz um tempo e, conversando com a P-2 eu me prendi e achei que a professora poderia ter só uma [Referiu-se à postura epistemológica.] aí, até conversando com a P-2 eu vi que poderia ter mais de uma postura.*
67. **Pesquisador/Participante:** Isso! Inclusive, dependendo do momento, da situação, o professor pode oscilar entre ‘resquícios’ do Construtivismo, parte do Racionalismo ou do Empirismo.
68. **P-7:** *Só que quando eu fui fazer eu me prendi que o professor só tinha uma postura. Daí, até conversando com a P-2 depois eu pensei!... E eu também não consegui definir qual a postura da Cláudia!*
69. **Pesquisador/Participante:** A Cláudia está ‘perdida’ ainda!
70. **P-2:** *A Cláudia está confusa ainda, tadinha!*
71. **P-8:** *Ela está como a gente, perdidíssima!*
72. **P-2:** *É! [Risos entre todas as participantes.]*
73. **Pesquisador/Participante:** A professora Cláudia tem uma grande dúvida e é o que a gente vem discutindo em nosso Grupo! A chance dela recorrer aos saberes da experiência já construídos durante a Educação Básica é muito grande! Percebam que ela está perdida? Não está?
74. **P-2:** *Sim! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*
75. **Pesquisador/Participante:** Ela vai ‘correndo’ atrás da professora Sueli, que é uma professora experiente – não que a Márcia não seja – porque ela não tem noção do quê abordar, de que modo, com qual intensidade e qual o tipo de postura a ser adotada. Agora, na professora Márcia já estão bem cristalizadas as suas concepções... e os estudos indicam que professores deste tipo, embora seja possível haver modificação, é muito mais complicado! Porque os saberes da experiência da Educação Básica ou os construído no exercício da docência já estão bem consolidados! Agora, a Cláudia dá pra ‘salvar’ ainda, não que a Márcia não dê! Vamos ouvir a P-4!
76. **P-4:** *Eu coloquei assim: “A professora Sueli utiliza a teoria de Piaget!”, aí eu coloquei algumas partes do texto, né, “inicialmente resolução de modo intuitivo; conteúdo*

além da capacidade do aluno; conhecimento prévio do aluno; se o aluno realmente aprende; situações problemas; questionamentos; o aluno pensar sobre”.

77. Pesquisador/Participante: Ok!

78. P-4: *Daí a professora Márcia utiliza o Empirismo e o Racionalismo misturados, não há nenhum pouco Piaget! Aí eu coloquei aqui, oh... Aí nesta parte do 1.º quadrinho da Márcia, nesta parte aqui “já tem que sabe” eu fiquei em dúvida que nem a P-2, só que daí eu deixei em branco, eu não coloquei nada!*

79. Pesquisador/Participante: Ok!

80. P-4: *Daí, no 2.º quadrinho, eu coloquei que “é problema dele né, o professor dá a matéria e se o aluno aprende ou não é problema dele!”. E daí eu coloquei que é Empirismo! E no quadrinho de baixo eu... “Sempre tem aquele estudante que não se dá bem com a Matemática...”, que é o Racionalismo, que o estudante é burro mesmo, nasceu assim!*

81. Pesquisador/Participante: Isso, indica que ele nasceu assim!

82. P-4: *E depois da professora.... Qual é a professora? Ah, a professora Cláudia... ela é iniciante, ainda está perdida quanto à teoria, aí eu peguei um pedaço do texto “...quando começar um assunto novo.”, ela não sabe! Aí ela precisa de auxílio das professoras mais “experientes” para conseguir definir sua teoria e colocar em prática!*

83. Pesquisador/Participante: Ok, P-4! Percebam, pessoal, que numa mesma pergunta houveram maneiras de responder de modo diferente, certo!? Parecido, sim, mas diferente! Imaginem numa sala com 30 alunos... Porque uma coisa é o questionamento que eu coloco, certo!? Vamos utilizar a teoria de Piaget para entender o ocorrido! O professor coloca o questionamento e cada aluno, um ser único, possui estruturas de assimilação diferentes, não é isso!? Ou seja, esquemas de interpretação diferentes, então, pra cada um a pergunta possui um significado o que implica uma maneira diferente de lidar com o problema. Deu pra compreender, P-5, como elas fizeram?

84. P-5: *Sim, deu pra acompanhar!*

[Dando continuidade, o Pesquisador/Participante solicitou a leitura conjunta do item 16.1 – Um movimento de retomada ‘geral’. Deste modo, P-2, a pedido do Pesquisador/Participante leu o exposto abaixo:]

16.1 Um movimento de retomada ‘geral’

Conforme já salientado, o presente Grupo de Estudo representa uma proposta metodológica que pretende contribuir com a Formação Inicial do professor de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Visando auxiliar o ‘Movimento de Retomada’, no quadro abaixo serão denotados os ‘principais’ assuntos já abordados até o momento:

GRUPO DE ESTUDO (encontro)	ASSUNTO ABORDADO
1.º	1. ‘Apresentação’ da proposta metodológica (Grupo de Estudo) a ser desenvolvida: Questões de Pesquisa, Objetivos (Geral e Específicos) e Justificativa.
2.º	1. Tratamento da Informação – Discussão Geral: Significado e Constituição.
3.º	1. Tratamento da Informação – Estatística: Gráficos e Tabelas (Definição); ‘Termos’ da Pesquisa Estatística (População, Amostra, Indivíduo ou Objeto,

	Variável – Quantitativa e Qualitativa).
4.º	1. Tratamento da Informação – Estatística: Tabelas (Classificação). 2. Epistemologia Genética – Gênese-Construção das Classificações: Coleções Figurais (Fase I); Coleções Não-Figurais (Fase II); Classes (Fase III).
5.º	1. Epistemologia Genética – Classificação.
6.º	1. Tratamento da Informação – Estatística: Gráficos (Barras, Colunas, Setor Circular ‘Pizza’, Linhas, Cartograma, Pictograma, Histograma e Polígono de Frequência).
7.º	1. Tratamento da Informação – Estatística Descritiva: Medidas de Posição (Média Aritmética, Mediana e Moda).
8.º	1. Tratamento da Informação – Estatística: Histograma e Polígono de Frequência (Classes de Intervalos). 2. Tratamento da Informação – Estatística Descritiva: Medidas de Dispersão (Amplitude, Variância e Desvio Padrão).
9.º	1. Ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental: Rol de conteúdos (1º ao 5º ano) e Atividades (Exemplos).
10.º	1. Epistemologia Genética – Considerações ‘Gerais’: Atividade do Sujeito; Posturas Epistemológicas (Empirismo e Racionalismo); Teoria da Assimilação (Organização, Adaptação, Assimilação e Acomodação).
11.º	1. Epistemologia Genética: Educação deve responder a uma Necessidade; Fatores do Desenvolvimento (Maturação Orgânica, Interação Social, Experiência Física e Lógico-Matemática e Equilíbrio); Estádios do Desenvolvimento (Sensorio-Motor, Pré-Operatório, Operatório Concreto e Operatório Formal).
12.º	1. Epistemologia Genética: Mecanismo de Equilíbrio.
13.º	1. Epistemologia Genética – Síntese dos assuntos discutidos. 2. Tratamento da Informação – Combinatória e Probabilidade.
14.º	1. Ensino de Combinatória e Probabilidade.
15.º	1. Tratamento da Informação – Combinatória: Princípio Fundamental da Contagem; Diferentes Tipos de Agrupamentos em Situações Problemas (Arranjo, Combinação e Permutação). 2. Ensino de Combinatória – Diálogo hipotético entre professores de Matemática.

[Após a leitura do referido quadro, o Pesquisador/Participante salientou:]

85. **Pesquisador/Participante:** A gente estudou pouca coisa, né pessoal!?

86. **P-2:** *Nem parece!*

87. **P-4:** *Passou tão rápido e já foram 15 encontros.*

88. **Pesquisador/Participante:** Enquanto a P-2 ia lendo vocês conseguiram acompanhar, ou melhor, ir relembando os vários assuntos? **[Por meio de expressão facial todas as participantes indicaram afirmativamente.]** Estudamos a questão da ‘necessidade’, do interesse, do fatores do desenvolvimento, a assimilação, acomodação e equilíbrio... começamos no início com a classificação e o desenvolvimento conceitual da Estatística, agora da Combinatória e, daqui há pouco, da Probabilidade! **[Em seguida, P-2 leu a parte final do item. Observe-o:]**

No decorrer dos referidos assuntos estudados houve a preocupação em ‘pensar sobre’ a (futura) prática docente de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, no qual os saberes experienciais (de cada participante) vêm sendo constantemente ‘alvo’ de reflexões de modo a oportunizar possíveis (re)significações.

Em continuidade à construção dos conteúdos matemáticos, no próximo item serão denotadas possíveis soluções dos problemas propostos no encontro anterior envolvendo a Combinatória. Além de analisar tais soluções, confronte-as com as elaboradas por você

[Como não houveram dúvidas em relação ao item abordado, as participantes acharam interessante dar continuidade na leitura conjunta do próximo tópico. Neste item serão apresentadas soluções e alguns comentários referentes aos problemas – envolvendo a Combinatória – estudados no encontro anterior. O Pesquisador/Participante pediu à P-5 que ‘acompanhasse’ as soluções e que tentasse fazer os problemas em sua casa já que no encontro anterior não havia vindo.]

[P-2 fez a leitura do 1.º problema exposto a seguir:]

16.2 Retomando alguns tipos de problemas envolvendo a Combinatória

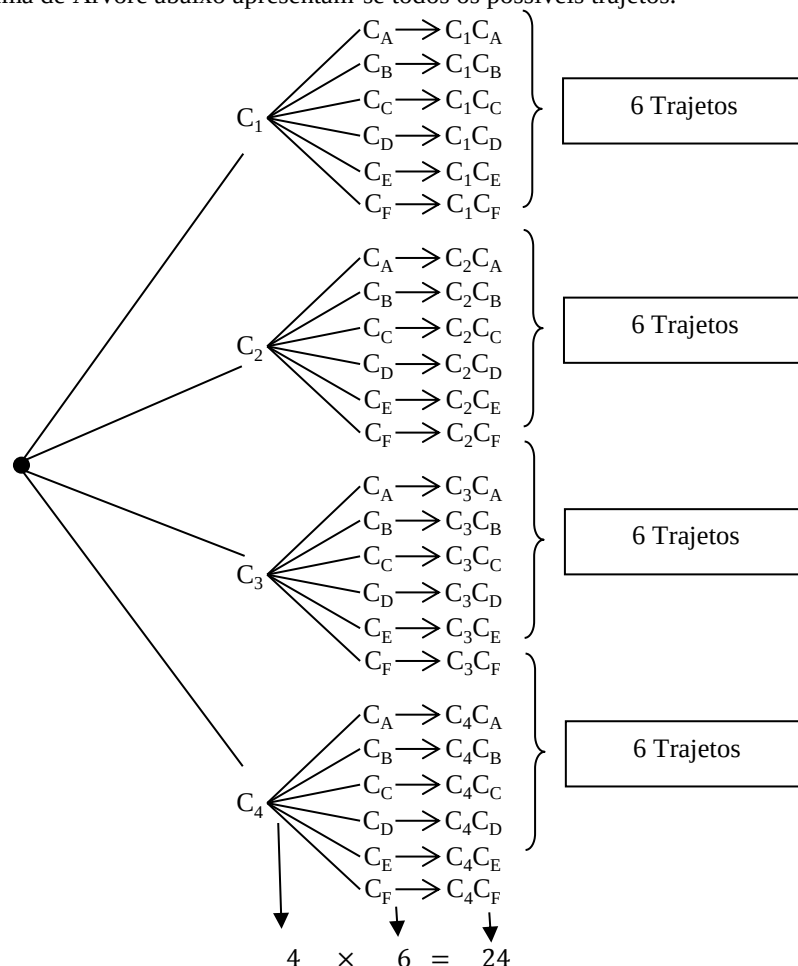
PROBLEMA (1): Em nossa escola há 4 corredores que ligam a cantina com o pátio e 6 corredores que ligam o pátio com a biblioteca. Partindo da cantina e passando pelo pátio de quantas formas diferentes podemos chegar na biblioteca?

Solução: Conforme o enunciado há 4 corredores que ligam a cantina ao pátio e 6 corredores que ligam o pátio à biblioteca. Para ir da cantina à biblioteca deve-se passar pelo pátio. É possível calcular os diferentes trajetos por meio do Diagrama de Árvore ou pelo Princípio Fundamental da Contagem (ou Princípio Multiplicativo). Consideremos:

– C_1, C_2, C_3 e C_4 como representando os 4 corredores que ligam a cantina ao pátio.

– C_A, C_B, C_C, C_D, C_E e C_F como representando os 6 corredores que ligam o pátio à biblioteca.

No Diagrama de Árvore abaixo apresentam-se todos os possíveis trajetos.



A referida multiplicação – também denominada Princípio Fundamental da Contagem – é outra maneira de obter o número de trajetos possíveis. Os números 4 e 6 indicam as duas etapas sucessivas e independentes que constituem o evento ‘partir da cantina à biblioteca passando pelo pátio’. Como indicado acima o número 4 representa as 4 possibilidades da etapa ‘ida da cantina ao pátio’; já o número 6 denota as 6 possibilidades da etapa ‘ida do pátio à biblioteca’. Para calcular os possíveis trajetos basta multiplicar ambos os números.

R: Há 24 formas diferentes de chegar à biblioteca partindo da cantina e passando pelo pátio.

[Durante a discussão do Diagrama de Árvore e do Princípio Fundamental da Contagem utilizados na referida solução, o Pesquisador/Participante perguntou às participantes se haviam dúvidas em relação aos mesmos. Além de não serem observadas dúvidas, P-2, P-4, P-7 e P-8 – ao comparem a resposta proposta com as suas – disseram terem feito ‘direto’, ou seja, resolvido o problema por meio Princípio Fundamental da Contagem. As participantes justificaram o uso do modo ‘direto’ lembrando o problema anterior referente às entradas e saídas do parque de diversão no qual tal princípio foi utilizado.]

[Em continuidade P-4 leu o 2.º problema denotado abaixo:]

PROBLEMA (2): Durante a semana da Educação Física, a escola está realizando uma competição entre as 8 turmas do Ensino Médio. Quantas são as possibilidades para o 1.º e 2.º lugares dentre as turmas participantes?
Solução: Consideremos: – A, B, C, D, E, F, G e H como representando as 8 turmas do Ensino Médio. Na competição só há vencedor para o 1.º e 2.º lugares; logo é necessário arranjar as 8 turmas 2 a 2. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $8 \times 7 = 56$ No 1.º lugar temos 8 possibilidades, ou seja, uma dentre as 8 turmas do Ensino Médio. Para o 2.º lugar há 7 possibilidades, pois uma dentre as 8 turmas do Ensino Médio já conquistou o 1.º lugar. Exemplificando, supondo que a turma A ficou em 1.º lugar, então o 2.º lugar pode ser ocupado pelas 7 turmas restantes (B, C, D, E, F, G e H). Além do Princípio Fundamental da Contagem é possível construir o Diagrama de Árvore. No entanto, por questão de ‘praticidade’ não há necessidade de fazê-lo. R: Há 56 possibilidades para o 1.º e 2.º lugares dentre as turmas participantes.

[Concluída a leitura, o Pesquisador/Participante indagou:]

89. **Pesquisador/Participante:** Todo mundo entendeu o porquê da explicação sobre a multiplicação 8×7 ?

90. **P-4:** *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

91. **Pesquisador/Participante:** Antes de ‘mostrar’ a multiplicação eu dou indicativos de como se denomina o tipo de agrupamento abordado neste problema, que no caso é um Arranjo Simples. Eu até escrevo lá: “Na competição só há vencedor para o 1.º e 2.º lugares, deste modo é necessário arranjar as 8 turmas 2 a 2”. O que seria um Arranjo?... Um arranjo é quando eu tenho um conjunto de elementos combinados 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4, e assim por diante. O que diferencia um Arranjo Simples de uma Permutação é que na Permutação Simples há um agrupamento ordenado entre todos os elementos do conjunto. Por exemplo, na Permutação Simples, se há 5 elementos, para descobrir o total de possibilidades você faz $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ pois todos os elementos serão combinados todos entre si.

92. **P-8:** *Então, quando tem vários problemas como é que diferencia quando eu faço Arranjo e quando eu faço Combinação? Essa é a minha dúvida!*

93. **P-2:** *Quando pode repetir você faz Permutação! Quando não pode é Arranjo, não é isso!?*

94. **Pesquisador/Participante:** Como assim, repetir?

95. **P-2:** *Por exemplo, se você for fazer, aqui oh, você não vai poder repetir o 8... o A nos dois lugares!* [Referiu-se ao problema em discussão.]
96. **Pesquisador/Participante:** É que daí, quando pode repetir, nesse aqui tem que ser distintos...
97. **P-2:** *É!*
98. **Pesquisador/Participante:** Porque a turma que fica em 1.º lugar não pode ficar em 2.º lugar!
99. **P-2:** *Isso!*
100. **Pesquisador/Participante:** Mas tem problemas que pode repetir!
101. **P-2:** *E daí é o quê? É Arranjo mesmo?*
102. **Pesquisador/Participante:** É um Arranjo com Repetição. [Neste momento todas as participantes riram e P-2 sinalizou dúvida através de expressão facial.]
103. **P-2:** *Então eu também não entendi como faz!*
104. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, mas fiquem tranquilas porque iremos abordar nos outros problemas o que diferencia um agrupamento de outro.
105. **P-2:** *Repete... Na Permutação combina todos os elementos...*
106. **Pesquisador/Participante:** Na Permutação Simples são misturados todos os elementos entre si, ou seja, todos serão usados em cada agrupamento.
107. **P-2:** *Tá!*
108. **Pesquisador/Participante:** No Arranjo Simples os elementos são tomados, só que não todos entre si, e sim de 2 em 2, 3 em 3, 4 em 4... No problema da formação das senhas do banco que iremos estudar daqui há pouco, lembram que haviam 10 algarismos? Na formação da senha, no entanto, não seriam digitados todos os algarismos, e sim, por exemplo, numa das propostas os algarismos deveriam ser agrupados de 4 em 4. Falando diferente... se eu fosse formar uma senha que ocupasse 10 espaços (dígitos), ou seja, em cada ‘combinação’ eu tivesse que usar todos os algarismos, daí chamaria Permutação. Mas, pessoal, não se preocupem, iremos chegar até lá!
109. **P-2:** *Como chama o problema de cima, então?*
110. **Pesquisador/Participante:** O 1.º problema é denominado um problema de contagem ou de agrupamento. Ele não possui a denominação Arranjo, Combinação ou Permutação. [Enquanto falava, as participantes anotavam o ‘tipo’ do problema em suas folhas.]
111. **P-2:** *E o que é Combinatória?*
112. **Pesquisador/Participante:** Combinação?

113. **P-2:** *Isso, desculpa!*

114. **Pesquisador/Participante:** Na Combinação Simples os elementos tomados 2 a 2, 3 a 3, etc forma subconjuntos no qual a ordem dos elementos não importa. **[Pela expressão facial de P-2 há fortes indícios de que a ‘definição’ ficou confusa.]** Vocês não entenderam muito bem, não é?

115. **P-2:** *É!*

116. **P-8:** *Dá um exemplo pra gente!*

117. **Pesquisador/Participante:** Vocês ainda não fizeram um problema de Combinação! Vamos aguardar um pouco porque daí vocês entenderão esta questão da ordem!

118. **P-2:** *E na Combinação pode haver repetição!*

119. **Pesquisador/Participante:** Sim, pode haver! Mas nós não iremos abordá-la por questão de tempo e pelo fato de que os assuntos que estudaremos já possibilitaram, eu acho, uma boa compreensão da Combinatória.

120. **P-2:** *E é só na Permutação com Repetição eu divide pelo número embaixo ou de qualquer Permutação?*

121. **Pesquisador/Participante:** É só na Permutação com Repetição!

122. **P-8:** *É só na Permutação? Porque eu tentei fazer os exercícios lá [Referiu-se aos problemas 7 e 8 não abordados no Grupo de Estudo anterior.] e daí eu fiquei na dúvida pra saber o que é, quando eu ia usar! [Referiu-se aos diferentes tipos de agrupamentos – Arranjo, Combinação e Permutação – e suas respectivas fórmulas.]*

123. **P-2:** *Eu fiz também [Referiu-se aos problemas 7 e 8.] mas eu não tentei ‘formulinha’ não!*

124. **P-8:** *Eu fui fazendo e fui pensando: “Será que tá certo?”.*

125. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, vamos continuar analisando os problemas pois, assim, vocês irão diferenciando os vários tipos de agrupamentos. Porque eu acredito que sem os exemplos é um pouco difícil de entendê-los!

126. **P-2:** *É, não ficou claro mesmo!*

127. **Pesquisador/Participante:** P-5 eu fico um pouco preocupado com você já que não esteve no encontro anterior! Você entendeu o 2.º problema?

128. **P-5:** *O 2.º problema sim! Eu só não entendi esta parte do Arranjo, Permutação...*

129. **P-2:** *Ah, mas isso a gente também não! Fique tranquila!*

130. **P-5:** *Eu entendi porque é 8 e porque é 7!*

[Prosseguindo, P-4 leu o problema 2.1. Observe-o abaixo:]

PROBLEMA (2.1): Entre 27 de julho a 12 de agosto deste ano (2012) serão realizados os Jogos Olímpicos em Londres com a participação de 192 países. Quais são as possibilidades para as medalhas de ouro, prata e bronze?
Solução: Utilizando o pensamento análogo do problema anterior, pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $192 \times 191 \times 190 = 6967680$ Os números 192, 191 e 190 indicam as possibilidades para as medalhas de ouro, prata e bronze, respectivamente. Assim, os 192 países foram arranjados 3 a 3. R: Há 6967680 possibilidades para as medalhas de ouro, prata e bronze dentre os 192 países participantes das Olimpíadas em Londres.

[Ao chegar no resultado 6967680 P-4 falou: “Eu não sei ler!”. Deste modo, o Pesquisador/Participante fez a leitura deste número. Após, as demais participantes pediram para P-4 ‘pelo menos’ ler repetindo o referido número e P-2 falou para a mesma ‘por os pontinhos’ visando separar a ordem das unidades dos milhares e dos milhões. Seguindo o conselho de P-2 P-4 separou o número através dos ‘pontinhos’ e realizou a leitura do mesmo.]

[Em seguida o Pesquisador/Participante perguntou:]

131. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, P-5?
132. **P-5:** *Eles foram arranjados 3 a 3 porque teve 1.º, 2.º e 3.º lugares?*
133. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo, P-5!
134. **P-2:** *Eu sei que não é pra discutir isso agora... mas é mais forte que eu!*
135. **Pesquisador/Participante:** Fale!
136. **P-2:** *Viraria Permutação se fosse $192 \times 192 \times 192$?*
137. **Pesquisador/Participante:** Não!
138. **P-2:** *Viraria o quê?*
139. **Pesquisador/Participante:** Seria um Arranjo com Repetição!
140. **P-2:** *Ai! Senhor da glória...! Eu não entendi mesmo!*
141. **Pesquisador/Participante:** Permutação Simples seria se você fizesse $192 \times 191 \times 190$ até $\times 1$!
142. **P-2:** *Aí é...*
143. **Pesquisador/Participante:** Permutação Simples!
144. **P-2:** *Permutação!*

145. **P-7:** *É melhor fazer Arranjo! [Referiu-se à dificuldade para calcular a ‘última’ multiplicação indicada acima.]*
146. **P-2:** *É, é melhor fazer Arranjo! Eu não consegui entender!*
147. **Pesquisador/Participante:** É como se todos os países fossem ficar até a última posição, ou seja, a 192.º lugar!
148. **P-8:** *1.º, 2.º, 3.º, 4.º, 5.º, até...*
149. **Pesquisador/Participante:** Isso, P-8, até 192.º!
150. **P-8:** *Seria...?*
151. **Pesquisador/Participante:** 192 até ‘chegar’ no 1, seria uma Permutação! Eu combinei todos os países entre si usando todos em cada agrupamento! Agora, no problema que estamos abordando eu só ‘arranjei’ os 3 primeiros lugares! Fique calma, P-2!
152. **P-2:** *Eu estou calma, só que eu não entendi!*
153. **Pesquisador/Participante:** Não tem problema, iremos analisar outros desafios...
154. **P-2:** *Ahhhh... parece que agora ‘caiu a ficha’! Porque teria que os elementos ter o seu lugarzinho, todos eles!*
155. **Pesquisador/Participante:** Isso, P-2, daí seria uma Permutação!
156. **P-2:** *E daí se for $192 \times 192 \times 192$ não vai ter um lugarzinho pra todos!*
157. **Pesquisador/Participante:** Isso, não vai ter um lugarzinho pra todos de uma única vez que formos agrupar, misturar todos os elementos. No problema que estamos analisando é impossível ser $192 \times 192 \times 192$, pois, se já ganhou em 1.º lugar, em 2.º diminui uma possibilidade.
158. **P-2:** *Sim!*
159. **Pesquisador/Participante:** Olha que interessante, pessoal! Nós começamos com problemas e estamos conversando e (re)discutindo o encontro anterior. E eu pretendo, como venho fazendo, partir do desafio até chegar na ‘diferenciação’ e na sistematização, e isso já é difícil! Agora, imagine aquele professor que já chega e ‘bota’ a definição na lousa...
160. **P-2:** *A gente memoriza!*
161. **Pesquisador/Participante:** Memoriza e...?
162. **P-2:** *Usa na prova e depois vai embora e não entende nada!*
163. **P-4:** *E depois da prova esquece tudo...*
164. **P-2:** *E não lembra nem fazer!*

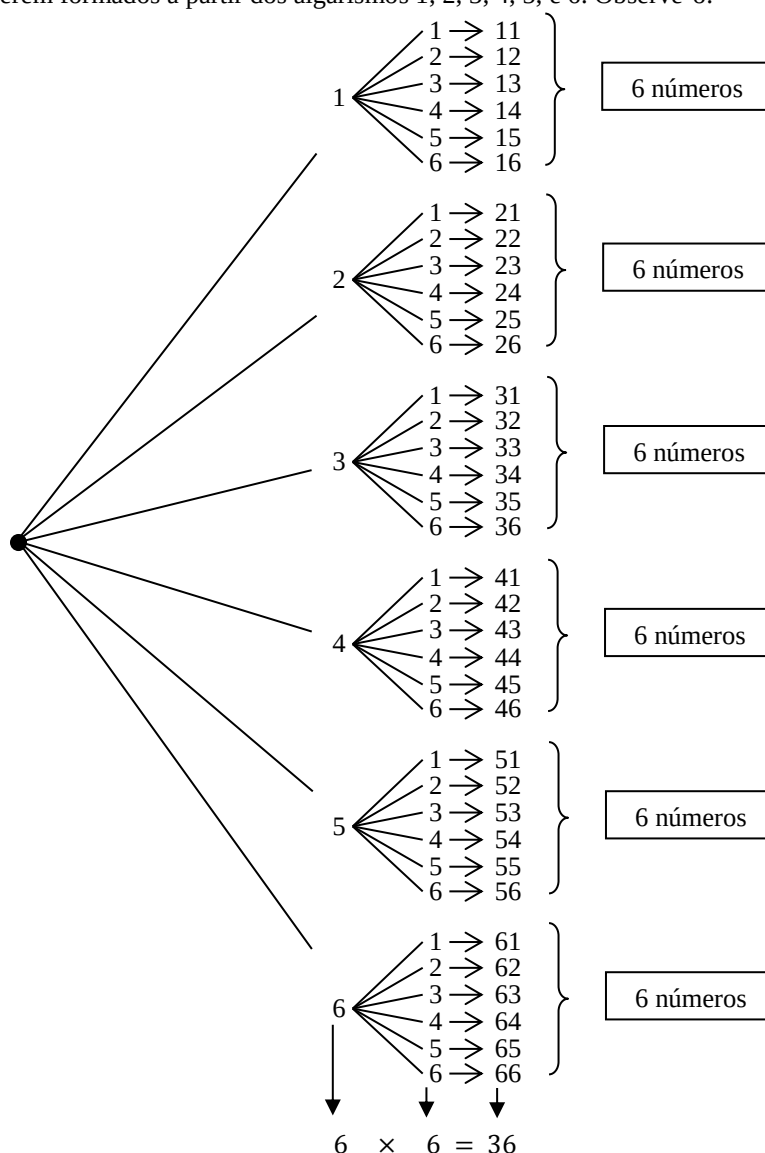
165. **P-7: É!**

166. **Pesquisador/Participante:** Está dando pra perceber, pessoal, que estou tomando um ‘movimento’ contrário, ou seja, parto de problemas para que vocês vão compreendendo a definição. [Como não houveram outros comentários/dúvidas, P-5 realizou a leitura do problema 3 exposto abaixo:]

PROBLEMA (3): Usando somente os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, e 6:

- a) Quantos números de 2 algarismos podemos formar?
 b) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?
 c) Quantos números de 3 algarismos iniciados com o 1 na ordem da centena podemos formar?

Solução: a) Por meio do Diagrama de Árvore pode-se obter todos os números de 2 algarismos possíveis de serem formados a partir dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, e 6. Observe-o:



$$6 \times 6 = 36$$

Como denotado há 6 possibilidades para a ordem das dezenas – algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 – e 6 possibilidades para a ordem das unidades – algarismos 1, 2, 3, 4, 5, e 6. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, basta multiplicar ambos os números (6 e 6) para obter o resultado. Pode-se ainda afirmar que os 6 algarismos foram arranjados 2 a 2 não necessariamente distintos.

R: Há 36 números de 2 algarismos possíveis de serem formados utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

b) De modo análogo, aplicando o Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

R: Há 216 números de 3 algarismos possíveis de serem formados utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

c) Neste problema, a ordem das centenas só pode ser iniciada pelo algarismo 1. Assim, há apenas 1 possibilidade para a centena, 6 possibilidades para a dezena e 6 possibilidades para a unidade. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$1 \times 6 \times 6 = 36$$

R: Há 36 números – de 3 algarismos iniciados com o 1 na ordem da centena – possíveis de serem formados utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

[Após a leitura dos números expressos no Diagrama de Árvore – item a) – P-2 perguntou:]

167. **P-2:** *É um Arranjo com Repetição?*

168. **Pesquisador/Participante:** Isso!

[Ainda, no item a), o Pesquisador/Participante salientou que a frase “Pode-se ainda afirmar que os 6 algarismos foram arranjados 2 a 2 não necessariamente distintos.” indica um problema de contagem do tipo Arranjo com Repetição. Em relação ao item b) não houveram comentários/dúvidas, no entanto, ao término da leitura do item c) P-2 questionou:]

169. **P-2:** *E nesse caso é só Arranjo mas não com Repetição? É semi repetido?... [Risos da participante.]*

170. **Pesquisador/Participante:** É um Arranjo com Repetição, a única diferença é que neste caso foi fixado o 1 na ordem das centenas, então nós arranjamos os algarismos para as dezenas e as unidades.

171. **P-2:** *Ah, tá!*

172. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, pessoal, o porquê do $1 \times 6 \times 6$? [Nenhuma participante se pronunciou.] Neste item eu até poderia ter feito o Diagrama de Árvore por serem poucos números. Dá pra pegar o Diagrama do item a) e acrescentar o 1 na ordem da centena, já que ele é fixo mesmo!

[Em seguida, P-7 leu o 4.º problema. Observe-o abaixo:]

PROBLEMA (4): O mundo ‘informatizado’ traz muitas facilidades e também alguns perigos. Frequentemente os noticiários mostram ações de hackers que, ao descobrirem as senhas de clientes bancários, causam inúmeros transtornos a todos. Nesse sentido, a Combinatória pode ajudar no processo de elaboração das senhas de tal modo a dificultar a ação desses criminosos. Suponha que você seja o gerente de um banco e tenha que decidir, dentre várias propostas, qual seria a melhor. Observe algumas possíveis propostas:

1.^a Proposta: Senha formada com 4 algarismos distintos.

2.^a Proposta: Senha formada com 4 algarismos.

3.^a Proposta: Senha formada com 2 algarismos distintos e 2 letras distintas.

4.^a Proposta: Senha formada com 2 algarismos e 2 letras.

5.^a Proposta: Senha formada com 4 letras distintas.

6.^a Proposta: Senha formada com 4 letras.

Qual seria a melhor proposta? Justifique.

Solução: Para o gerente escolher a melhor proposta faz-se necessário descobrir o número de senhas possíveis a serem formadas em cada uma das propostas. Inicialmente consideremos:

– **A** como representando o conjunto dos algarismos: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \text{ e } 9\}$ totalizando 10

elementos.

– **L** como representando o conjunto das letras: $L = \{A, B, C, D, E, F, \dots, Y \text{ e } Z\}$ totalizando 26 elementos.

A senha a ser constituída possui 4 dígitos como esboçado na figura abaixo:

1.º Dígito	2.º Dígito	3.º Dígito	4.º Dígito

Utilizando o Princípio Fundamental da Contagem calcula-se o número de senhas possíveis em cada uma das propostas. Observe:

1.ª Proposta: Senha formada com 4 algarismos distintos.

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040 \text{ possibilidades}$$

Na 1.ª proposta os 10 algarismos foram arranjados 4 a 4. Por serem distintos os algarismos não podem ser repetidos, logo de um dígito a outro diminui-se 1 possibilidade.

2.ª Proposta: Senha formada com 4 algarismos.

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000 \text{ possibilidades}$$

Na 2.ª proposta como os algarismos não são distintos, ou seja, podem ser repetidos não há diminuição de possibilidade de um dígito a outro. Deste modo, os 10 algarismos foram arranjados 4 a 4 não necessariamente distintos.

3.ª Proposta: Senha formada com 2 algarismos distintos e 2 letras distintas.

$$10 \times 9 \times 26 \times 25 = 58500 \text{ possibilidades}$$

Na 3.ª proposta os 10 algarismos foram arranjados 2 a 2 e as 26 letras foram arranjadas 2 a 2. Por serem distintos o algarismo utilizado no 1.º dígito não pode ser repetido no 2.º implicando na diminuição de 1 possibilidade. De modo análogo, a letra usada no 3.º dígito não pode ser repetida no 4.º dígito; assim diminui-se 1 possibilidade.

4.ª Proposta: Senha formada com 2 algarismos e 2 letras.

$$10 \times 10 \times 26 \times 26 = 67600 \text{ possibilidades}$$

5.ª Proposta: Senha formada com 4 letras distintas.

$$26 \times 25 \times 24 \times 23 = 358800 \text{ possibilidades}$$

Na 5.ª proposta as 26 letras foram arranjadas 4 a 4. Por serem distintas as letras não podem ser repetidas, logo de um dígito a outro diminui-se 1 possibilidade.

6.ª Proposta: Senha formada com 4 letras.

$$26 \times 26 \times 26 \times 26 = 456976 \text{ possibilidades}$$

Na 6.ª proposta como as letras não são distintas, isto é, podem ser repetidas não há diminuição de possibilidade de um dígito a outro. Assim, as 26 letras foram arranjadas 4 a 4 não necessariamente distintas.

R: A melhor proposta a ser escolhida pelo gerente é a 6.ª pelo fato de ‘possuir’ o maior número de possibilidades de senhas a serem constituídas. Quanto maior o número de senhas menor será a chance de atuação do hacker.

[Após a leitura da 4.ª proposta P-2 perguntou:]

173. **P-2:** *Eu posso dizer que esse é um Arranjo com Repetição?*

174. **Pesquisador/Participante:** Isso! É um Arranjo com Repetição feito 2 vezes. Primeiro foram arranjados os 10 algarismos 2 a 2 não necessariamente distintos, por isso multiplicou 10×10 . Depois foram arranjadas as 26 letras 2 a 2 não necessariamente distintos resultando em 26×26 . Por último multiplica-se estes 2 Arranjos com Repetição.

175. **P-2:** *Tá!* [Todas as participantes anotaram em suas folhas a explicação dada pelo Pesquisador/Participante.]

176. **Pesquisador/Participante:** P-5, você está conseguindo ‘acompanha’ a discussão?

177. **P-5:** *Sim!*

178. **Pesquisador/Participante:** Ok! Por favor, P-7, leia a 5.^a proposta! **[Concluída a leitura, salientou-se:]** Pessoal, neste problema todos são exemplos de Arranjo, sejam 4 a 4 ou 2 a 2. Agora, considerando os 10 algarismos e supondo que a senha possua 10 dígitos já não será um problema de Arranjo e sim de... **[Interrompendo, P-2 falou:]**

179. **P-2:** *Permutação!*

180. **Pesquisador/Participante:** Isso, P-2! Porque cada um dos algarismos, em cada um dos agrupamentos / ‘combinações’ para a formação de cada senha terá o seu ‘lugar’ para ser ocupado.

181. **P-2:** *Vai ter a sua ‘casinha’!*

182. **Pesquisador/Participante:** Isso! A P-2, como diria um professor empirista, começou a ‘pegar’... **[Risos entre todos.]** Mas não se apavorem, aos poucos iremos diferenciando e compreendendo os vários tipos de agrupamentos.

183. **P-5:** *Nossa, eu estava lembrando e acho que ontem fiz um exercício desse sem saber!*

184. **Pesquisador/Participante:** O que foi?

185. **P-5:** *Ontem, na escola, a gente estava fazendo cartelas para um bingo. Tinham 10 palavras e a gente fez 6 casinhas, e a gente queria ver quantas combinações iam dar, a gente não usou essa palavra, e sim quantos jeitos iam dar pra gente fazer e levar lá na escola.*

186. **Pesquisador/Participante:** E você conseguiu fazer? Como você fez?

187. **P-5:** *Eu fiz assim... assim... eu acho que já sabia alguma coisa disso! Sei lá, você vai ver daqui há pouco.*

188. **Pesquisador/Participante:** Fala de novo! Eram 10 palavras?

189. **P-5:** *Sim, eram 10 palavras pra por em 6 casinhas.*

190. **Pesquisador/Participante:** Venha à lousa representar o que você está falando! **[P-5 dirigiu-se à lousa e falou enquanto registrou o esquema abaixo:]**

1.º Espaço	2.º Espaço	3.º Espaço
4.º Espaço	5.º Espaço	6.º Espaço

191. **P-5:** *Hoje eu vou descobrir se eu errei, porque aí, no final, tinha mais possibilidades do que o número de crianças, então a gente não fez até o fim!*

192. **P-8:** *Como é que você fez? Eu ainda não entendi!*

193. **P-5:** *Primeiro a gente pegou as 10 palavras e fizemos cartelas com 6 casinhas. E daí a gente pensou que aqui **[Apontou para o 1.º espaço no registrado acima.]** poderiam ser 10*

palavras. [Escreveu o número 10 no referido espaço.] *Aqui podia ser 9 porque não podia repetir. [Referiu-se ao 2.º espaço e escreveu o número 9. De modo análogo, completou, em ordem crescente, os demais espaços com os números 7, 6 e 5.]*

194. **Pesquisador/Participante**: Deixe eu só te interromper. Após colocarem estes números nos espaços vocês pensaram em somá-los ou multiplicá-los?

195. **P-5**: *Então, a gente ficou nesta dúvida, só que daí a gente pensou que somando ia dar muito pouco... parece que, pelo tanto de palavras dá pra dar mais... daí que a gente multiplicou. Só que daí a gente viu que deu um número bastante e pensou: Ah, dá pra fazer, não tem problema! E foi fazendo... Mas só de ter vindo até aqui... eu tô vendo que combinou!*

196. **Pesquisador/Participante**: Vocês utilizaram, de modo intuitivo, o Princípio Fundamental da Contagem sem ‘tomarem’ consciência do mesmo!

197. **P-5**: *É! Sem saber!*

198. **Pesquisador/Participante**: Então, neste caso, vocês possuíam 10 elementos (palavras) para serem arranjadas 6 a 6. Isso é um exemplo de Arranjo... **[P-2 completou:]**

199. **P-2**: *Sem Repetição!*

200. **Pesquisador/Participante**: Dá um número ‘grande’! Vamos calcular $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$. Você, P-5, pode falar agora pras suas amigas como que faz e que o resultado é 151200 possibilidades de cartelas diferentes.

201. **P-5**: *Nossa, eram para 30 crianças só!*

202. **Pesquisador/Participante**: A Loteria Federal, pessoal, só existe graças à Combinatória e à Probabilidade que utilizam de pensamento análogo na elaboração dos vários tipos de prêmios. Relembrando o histórico, a Combinatória e a Probabilidade sofreram preconceito e dificuldades em sua sistematização/consolidação pelo fato de estarem vinculadas à filosofia do azar, já que nasceram do jogo de azar!

203. **P-8**: *É mesmo!*

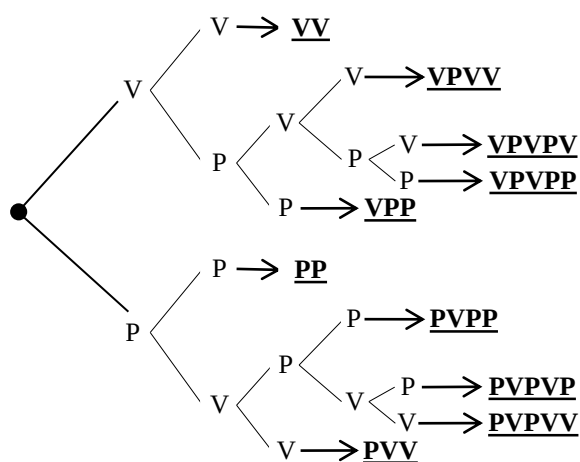
204. **P-5**: *E é legal a gente ver, tá vendo que não é só pra ensinar pro aluno, pra montar, às vezes, uma outra atividade ter esse conhecimento é importante! Ali eram 6 casinhas, eram bastante, se fosse menos teria que fazer a conta para ver “Será que vai dar pra todo mundo?”... Legal.*

205. **P-8**: *Vamos continuar!*

206. **Pesquisador/Participante**: Então, P-5, o 5.º problema causou em todos nós certo desequilíbrio. **[As demais participantes, por meio de expressão facial, sinalizaram afirmativamente.]** Ele é um problema de Combinatória no qual é necessário fazer agrupamentos, só que não é possível aplicar o Princípio Fundamental da Contagem. Para resolvê-lo é necessário contar 1 a 1 cada possibilidade. P-8, por favor, faça a leitura pra gente! **[P-8 leu o problema denotado a seguir:]**

PROBLEMA (5): Na competição realizada durante a semana da Educação Física classificaram-se para a final o 1.º ano A e o 2.º ano B, ambas do Ensino Médio. Será vencedora a sala que ganhar duas competições seguidas ou vencer três competições alternadas. O professor Laércio, organizador dessa semana, pediu a ajuda da professora Sueli para calcular o número máximo de competições que poderão ser realizadas para que haja uma sala vencedora. Faz-se necessária tal ‘previsão’ para que o professor Laércio organize as atividades desenvolvidas ao término da semana da Educação Física. Além de calcular o número máximo de competições, registre quais seriam esses resultados.

Solução: No Diagrama de Árvore – apresentado a seguir – a letra V indica ‘venceu’ e P significa ‘perdeu’.



Como representado, há 10 possíveis resultados considerando a regra da competição, ou seja, vencer duas competições seguidas ou vencer três competições alternadas. O ‘maior’ resultado ocorre em PVPVP ou VPVPP, assim o número máximo de competições será 5.

R: O professor Laércio terá que organizar a semana da Educação Física de modo a permitir a ocorrência de até 5 competições para que uma das turmas classificadas na final vença. Os possíveis resultados serão: VV, VPVV, VPVPP, VPVPP, VPP, PP, PVPP, PVPVP, PVPVV e PVV.

[Como P-8 disse não conseguir explicar os vários resultados obtidos no Diagrama de Árvore, P-2 o fez. O Pesquisador/Participante salientou a importância da abordagem de problemas deste tipo para mostrar ao estudante que nem todos os problemas combinatórios são resolvidos por meio do Princípio Fundamental da Contagem. Em seguida P-2 comentou:]

207. P-2: Acho que eu não vou dar um exercício desse pro meu aluno! [Risos da participante.]

208. P-8: Ah, é mesmo... se nem eu estou entendendo... Tem que ser de outro tipo, mais fácil!

209. P-2: Tem que ser um mais simples!

210. Pesquisador/Participante: Tem sim!

211. P-8: Ah, bom!

212. Pesquisador/Participante: Se der tempo vou até trazer pra gente! Eu compreendo, pois, se até eu que estudo Combinatória há certo tempo fiquei em dúvida em alguns momentos, imagine o aluno!

213. P-2 e P-8: É... então!

214. **P-5:** *Mas talvez os alunos, se resolverem por Combinatória, assim, faz mais fácil!*
215. **P-2:** *Mais fácil!*
216. **Pesquisador/Participante:** Talvez isso ocorra!
217. **P-5:** *Porque os alunos brincam mesmo de competição!*
218. **P-2:** *É verdade, P-5, os alunos sabem!*
219. **P-5:** *Eles já vão saber sem usar Combinatória.*
220. **P-8:** *Porque o professor pra levar um exercício desse pra sala tem que treinar muito pra saber!*
221. **P-2:** *É! Aliás, pessoal, eu fiquei pensando ontem e como é difícil ser professor!*
222. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, pessoal? **[Como não houveram dúvidas, iniciou-se a discussão do problema 6. Cada participante leu um item, a começar por P-2. Observe tal problema abaixo:]**

PROBLEMA (6): Anagrama é um tipo de ‘jogo’ realizado com as letras de uma palavra. Por exemplo, com a palavra PÉ podemos formar dois anagramas: (PÉ) e (ÉP). Assim, calcule quantos são os Anagramas das seguintes palavras:

a) COR b) DOR c) AMOR d) ANA e) COCO

Para resolver todos os itens foi utilizado o mesmo procedimento? Discorra sobre.

Solução: a) As letras que constituem a palavra COR devem ser misturadas de modo a formar os seguintes anagramas denotados no Diagrama de Árvore:

```

graph LR
    Root(( )) --- C
    Root --- O
    Root --- R
    C --- C1[O - R]
    C --- C2[R - O]
    O --- O1[C - R]
    O --- O2[R - C]
    R --- R1[C - O]
    R --- R2[O - C]
    C1 --> COR[<u>COR</u>]
    C2 --> CRO[<u>CRO</u>]
    O1 --> OCR[<u>OCR</u>]
    O2 --> ORC[<u>ORC</u>]
    R1 --> RCO[<u>RCO</u>]
    R2 --> ROC[<u>ROC</u>]
  
```

3 × 2 × 1 = 6

Além do Diagrama, pode-se utilizar o Princípio Fundamental da Contagem conforme registrado acima.

R: Com a palavra COR formam-se 6 anagramas.

[Terminada a leitura do item a) P-2 falou:]

223. **P-2:** *É uma Permutação!*
224. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-2, é uma Permutação Simples! Explique pro pessoal porque é uma Permutação.
225. **P-2:** *Porque cada letrinha vai ter a sua casinha!*

226. **Pesquisador/Participante:** As 3 letras serão misturadas entre si e todas de uma vez em cada um dos anagramas.

227. **P-2:** *Eu não sei falar bonito assim!... Elas vão ter uma casinha, oh... o C vai ter uma casinha, o O na outra e o R na outra. Mas mesmo se voe inverter eles vão continuar tendo suas casinhas!*

228. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo! Alguma dúvida, pessoal?... E só um detalhe, pessoal, geralmente a palavra misturar, que apareceu na solução, possui o sinônimo de permutar. P-4 leia pra gente o item b), por favor! **[P-4 fez a leitura do exposto a seguir:]**

b) R: Analogamente ao item a), é possível constituir 6 anagramas com a palavra DOR, tais como: DOR, DRO, ODR, ORD, RDO e ROD.

[Após a leitura por P-4 P-2 falou:]

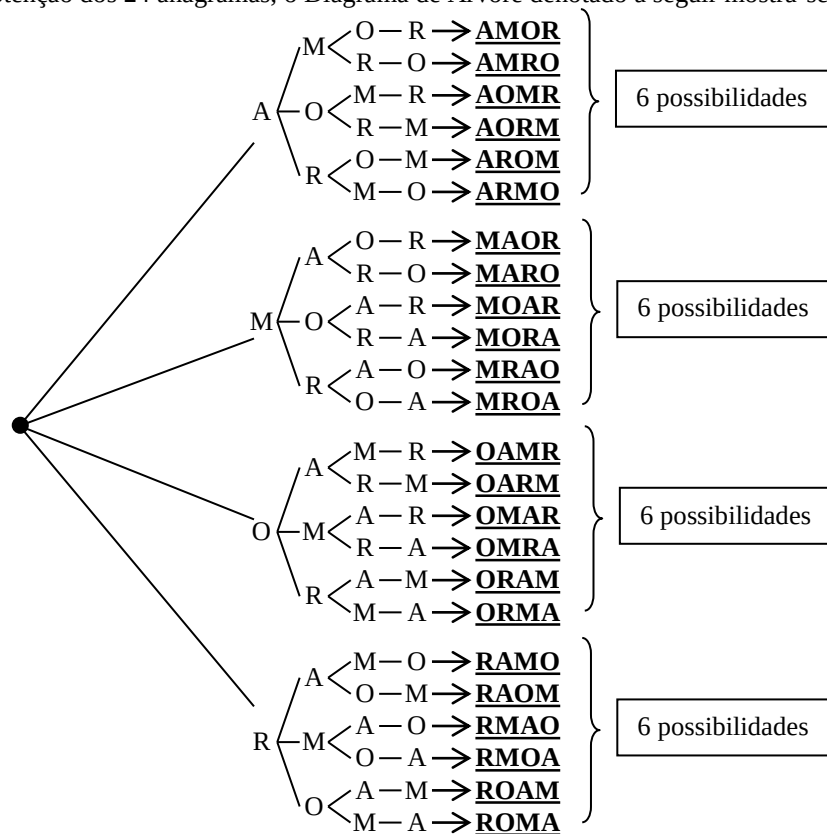
229. **P-2:** *Também é Permutação, porque todas as letras foram misturadas e cada uma vai ter a sua casinha!*

230. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo, P-2! P-5, leia pra gente o próximo item! **[Observe o item a seguir:]**

c) De modo análogo aos itens anteriores, por meio do Princípio Fundamental da Contagem calcula-se a quantidade de anagramas da palavra AMOR. Observe tal cálculo:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

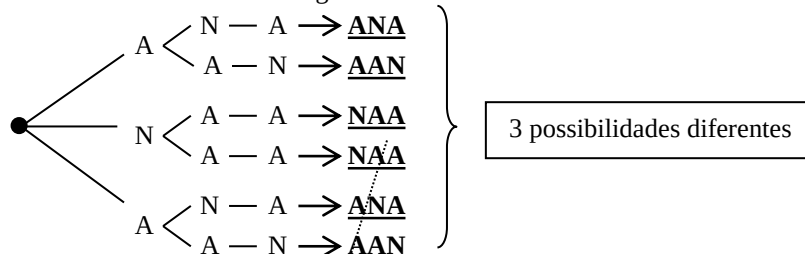
Para a obtenção dos 24 anagramas, o Diagrama de Árvore denotado a seguir mostra-se pertinente:



R: Faz-se possível construir 24 anagramas a partir da palavra AMOR.

[Como não houveram comentários/dúvidas em relação à palavra AMOR, P-8 leu a solução da palavra ANA (item c):]

d) A palavra ANA possui o mesmo número de letras das palavras COR e DOR. No entanto, por possuir 2 letras repetidas 'A' o cálculo da quantidade de anagramas não se dá por meio do Princípio Fundamental da Contagem. Observemos inicialmente o Diagrama de Árvore:



Conforme o Diagrama, há 3 anagramas a serem constituídos a partir da palavra ANA, tais como: ANA, AAN e NAA. Como há 2 letras 'A', para obter a quantidade de anagramas pode-se fazer a seguinte divisão:

$$\frac{\text{Quantidade de Possibilidades a partir de 3 elementos – letras A, N, A}}{\text{Quantidade de Possibilidades a partir dos 2 elementos repetidos – letras A, A}} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

R: A partir da palavra ANA constroem-se 3 anagramas.

[Após a leitura do Diagrama de Árvore da palavra ANA, P-2 ressaltou:]

231. **P-2:** *Este aqui é só um problema de contagem, né!?*

232. **Pesquisador/Participante:** Não, P-2! É sim um problema de contagem, mas do tipo Permutação com Repetição!

233. **P-8:** *É, a letra A se repetiu!*

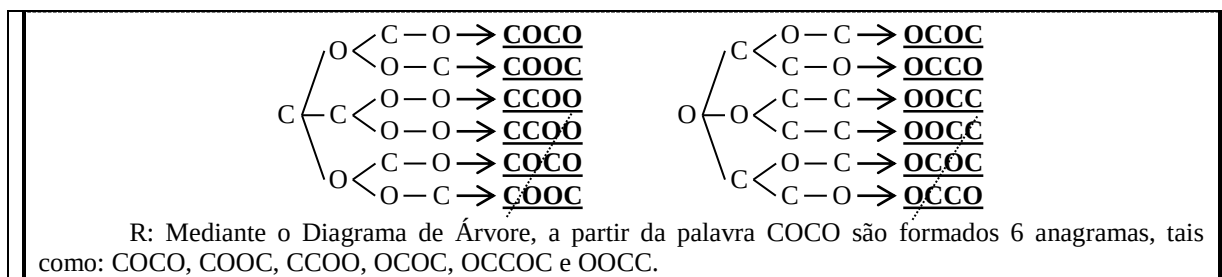
234. **Pesquisador/Participante:** No Diagrama, pessoal, eu 'risquei' as palavras que se repetiram. Pode terminar a leitura P-8, por favor! **[Concluída a leitura, o Pesquisador/Participante questionou:]** Vocês entendem, pessoal, porque eu fiz esta divisão? **[Todas as participantes sinalizaram, por meio de expressão facial, afirmativamente.]** No numerador eu pus o resultado da Permutação das 3 letras A, N, A. Já, no denominador eu pus o resultado da Permutação das 2 letras repetidas A, A. Dividindo eu excluo os anagramas repetidos, obtendo o resultado 3 que confere com o Diagrama de Árvore.

[Dando continuidade, P-7 leu o último item (e) denotado abaixo:]

e) Analogamente à divisão realizada no item anterior temos:

$$\frac{\text{Quantidade de Possibilidades a partir de 4 elementos – letras C, O, C, O}}{\text{Quantidade de Possibilidades a partir dos 2 'Grupos' de elementos repetidos – letras C, C e O, O}} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{24}{4} = 6$$

Para comprovar, observe parte do Diagrama de Árvore abaixo:



235. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, agora, eu peço para que vocês pensem sobre os problemas 7, 7.1, 8, 8.1 e 9. [O Pesquisador/Participante disponibilizou 30 minutos para que as participantes resolvessem os referidos problemas. A pedido de P-8, as soluções foram feitas conjuntamente.]

[P-2, por já ter feito os problemas em casa, compartilhou as soluções elaboradas. Em relação ao desafio 7 as demais participantes denotaram concordar com a solução proposta. P-8 ficou em dúvida acerca do 7.1 o que levou P-2 a explicar-lhe novamente o procedimento utilizado. Sanada a dúvida, P-2 socializou a solução do problema 8 que coincidiu com a resposta feita por P-8. Observe o diálogo realizado entre as participantes:]

236. **P-8:** *Como você fez?*

237. **P-2:** *Eu fui fazendo A₁, A₂, A₃ e A₄, e fui fazendo.*

238. **P-8:** *É, eu fiz assim também!*

239. **P-2:** *E o seu deu 6 duplas?*

240. **P-8:** *É!*

241. **Pesquisador/Participante:** *Aí, eu fiquei em dúvida de como faz, mas eu acho que seria $3 \times 2 \times 1$, porque 3... porque pra formar uma dupla já vai precisar de 2 alunos, então você não pode por 4, tem que por 3!*

242. **P-8:** *3... 4... pra mim deu 12!*

243. **P-2:** *Por que 12?*

244. **P-8:** *Porque eu pus assim... é... 4 turmas: Turma A, Turma B, Turma C e Turma D.*

245. **P-2:** *Mas é um aluno de cada turma!*

246. **P-7:** *É! [Em dúvida, P-2 olhou na folha de P-8 e falou:]*

247. **P-2:** *Mas se você inverter continua a mesma dupla! [Referiu-se ao fato de que a ‘combinação’ formando a dupla (Turma A, Turma B) é igual à dupla (Turma B, Turma A).]*

248. **P-8:** *Ah, entendi!*

249. **P-2:** *Esse tem a divisão que você falou!* [Referiu-se à fala denotada pela participante durante a discussão do problema 7.1.]
250. **P-8:** *Ah, tá!*
251. **P-2:** *Esse tem!*
252. **P-8:** *É verdade!* [Ambas as participantes sabiam que a solução deste 8.º problema de Combinação necessitava de uma divisão para o cálculo ‘direto’, ou seja, sem recorrer à contagem 1 a 1, no entanto não sabiam como fazê-la.]
253. **Pesquisador/Participante:** *Vocês entenderam, ou não!?*
254. **P-5:** *Ah, eu entendi!*
255. **P-4:** *Eu não!* [Neste momento P-2 explicou a solução realizada para P-4. Em seguida P-7 questionou:]
256. **P-7:** *Quanto deu mesmo?*
257. **P-2:** *A minha deram 6 duplas, mas eu não sei fazer a conta!*
258. **P-7:** *Ah tá!*
259. **P-8:** *E se for fazer $4 \times 3 \times 2 \times 1$ e dividir por 2 vai dar 12!*
260. **P-2:** *Mas, e como que faz embaixo?* [Referiu-se ao número a ser colocado no denominador.]
261. **P-7:** *Ah, nesse aqui tem repetição!* [Referiu-se às duplas que se repetiram. A participante observou no problema dos anagramas o item no qual observou-se repetição visando estabelecer uma analogia entre a solução elaborada com a procurada.] *Ele coloca embaixo o que se repete!*
262. **P-2:** *Mas neste aqui qual que se repete?* [Referiu-se ao problema em discussão.] *Será 2? Quanto que dá $4 \times 3 \times 2 \times 1$?*
263. **P-8:** *Dá 24!*
264. **P-2:** *24 dividido por 6 dá 4!*
265. **P-7:** *É por 4!* [Referiu-se ao número a dividir 24 de modo a resultar nas 6 duplas encontradas por meio da contagem direta.]
266. **P-8:** *Vai ser por 4, 2 vezes 2 dá 4!*
267. **P-2:** *Eu achei, mas como faz a conta eu não sei!*
268. **Pesquisador/Participante:** *É por 4, aqui embaixo, porque os 4 participantes se repetem!*

269. **P-8:** *Daí seria 4!?*
270. **P-7:** *Porque 24 dividido por 4 dá 6!*
271. **P-8:** *É!*
272. **P-2:** *Por que você dividiu por 4?*
273. **P-7:** *Eu fui na lógica desse aqui do COCO, era 2×1 porque o C repetia 2 vezes e o O também! E daí eu coloquei com alunos, tipo assim, são 4 alunos. Eu fiz assim, mas não sei se está certo!*
274. **P-2:** *Tá, mas como você faz pra descobrir que teria que por o 4?*
275. **P-7:** *Porque são 4 alunos!*
276. **P-4:** *São 2 duplas... assim?*
277. **P-2:** *Mas você não pode fazer Permutação assim só 4×1 ! Vai dar no mesmo, vai dar errado! Lá na do COCO fez Permutação embaixo, porque tinha 2 letras repetidas e fez 2×1 , agora se fossem 3 faria $3 \times 2 \times 1$!*
278. **P-7:** *Ah, então eu não sei fazer! Eu quero entender o número que repete!*
279. **P-4:** *Mas são 2 duplas que se repetem...*
280. **P-2:** *Não, no exercício querem formar 1 dupla só!*
281. **P-7:** *Ah, então eu não entendi!*
282. **P-8:** *Nem eu!*

[Mesmo não encontrando uma explicação lógica para a divisão que possibilitasse encontrar o número de duplas a serem combinadas, as participantes começaram a pensar sobre o problema 8.1. P-2 auxiliou P-4 a resolver o problema dizendo-lhe para utilizar a mesma lógica do problema anterior. P-2 e P-7 conferiram suas respostas coincidindo em 4 trios de alunos. Após observar a segunda explicação que P-2 ‘fez’ para P-4, P-5 falou:]

283. **P-5:** *Então, eu acho que deve ter um jeito de fazer sem ser assim montando cada trio!*
284. **P-8:** *É, com certeza tem!*
285. **P-2:** *Mas eu não sei fazer!*

[Todas as participantes discutiram visando compreender a lógica da divisão utilizada para o cálculo das combinações. Novamente valeram-se da lógica e do procedimento usados no anagrama da palavra COCO, no entanto não chegaram a nenhuma conclusão. P-2 chegou a dizer o seguinte:]

286. **P-2:** *Eu acho que a gente está fazendo uma coisa errada, porque não seria Permutação isso! Porque está selecionando duplas, e se está tirando do todo para 2 lugarzinhos não é Permutação! Porque na Permutação todos teriam que ter seu lugarzinho! Então está errado, aqui! [A participante apagou a divisão $(4 \times 3 \times 2 \times 1)/4 \times 1$.]*
287. **P-5:** *É!*
288. **P-4:** *Está errado você fazer a divisão!*
289. **P-2:** *É..., a conta! Então seria um Arranjo, porque você tira do todo e põe em 2 lugares! Então como é aquele do Arranjo com Repetição, lá? [Referiu-se ao 4.º problema referente às senhas do banco. Após retomá-lo indagou:] Ah... mas não é assim!*
290. **P-8:** *Ai, Pesquisador/Participante, a gente não está conseguindo!*
291. **Pesquisador/Participante:** *É sobre o problema da dupla e do trio?*
292. **P-8:** *Sim!*
293. **P-2:** *Olha, nós até chegamos num resultado... mas a gente não sabe fazer as continhas!*
294. **Pesquisador/Participante:** *O 7.º problema tudo bem? [Todas as participantes responderam “Tudo!”.] E o 8.º?*
295. **P-2:** *A gente fez, só que a gente não conseguiu por na formulinha!*
296. **Pesquisador/Participante:** *O 8 e o 8.1 vocês fizeram contando 1 a 1, foi isso? [Todas as participantes responderam “Sim!”.]*
297. **P-2:** *Você esperava que a gente fizesse com a formulinha?*
298. **Pesquisador/Participante:** *Não pessoal, até porque como estes são problemas de Combinação a gente nem discutiu ainda! Podemos começar a discutir as soluções dos problemas?*
299. **P-5:** *Eu acho melhor a gente começar a discutir porque a gente não vai conseguir chegar na fórmula sozinhas!*
300. **Pesquisador/Participante:** *Ok! Vocês já fizeram o problema número 9?*
301. **P-8:** *Ah, é... tem esse, eu nem vi!*
302. **P-2:** *Eu falei que não era igual por causa da repetição!*
303. **P-7:** *O duro é justificar porque os problemas 7 e 8 não são iguais!*
304. **P-2:** *Eu coloquei assim: [A participante leu a resposta para P-7.] Não, pois no problema 8 não se pode apenas mudar os alunos de posição pois continuará a mesma dupla ou trio, ou seja, repetição.*

305. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, vamos discutir estes problemas. No problema 7 quem poderia dizer pra mim como vocês pensaram? Fale pra mim P-5, por favor!

306. **P-5:** *Nos pensamos assim, que ela [Refeiru-se à professora Sueli.] tinha 4 possibilidades de restaurante para o almoço, porque ela pode ir no Acarajé ou no Alta Maré ou no Luna ou no Ostra!*

307. **Pesquisador/Participante:** Isso!

308. **P-5:** *Já no da janta ela tem só 3 possibilidades, porque onde ela foi almoçar não pode ir na janta!*

309. **Pesquisador/Participante:** Isso!

310. **P-5:** *Então a gente fez $4 \times 3 = 12$!*

311. **Pesquisador/Participante:** Pronto, esse foi resolvido rapidamente!

312. **P-4:** *Esse foi fácil!*

313. **P-2:** *Esse nós gostamos!*

314. **Pesquisador/Participante:** Vocês identificaram como sendo de qual tipo, pessoal?

315. **P-2:** *Ah, tinha que identificar?*

316. **Pesquisador/Participante:** Não, não precisava...

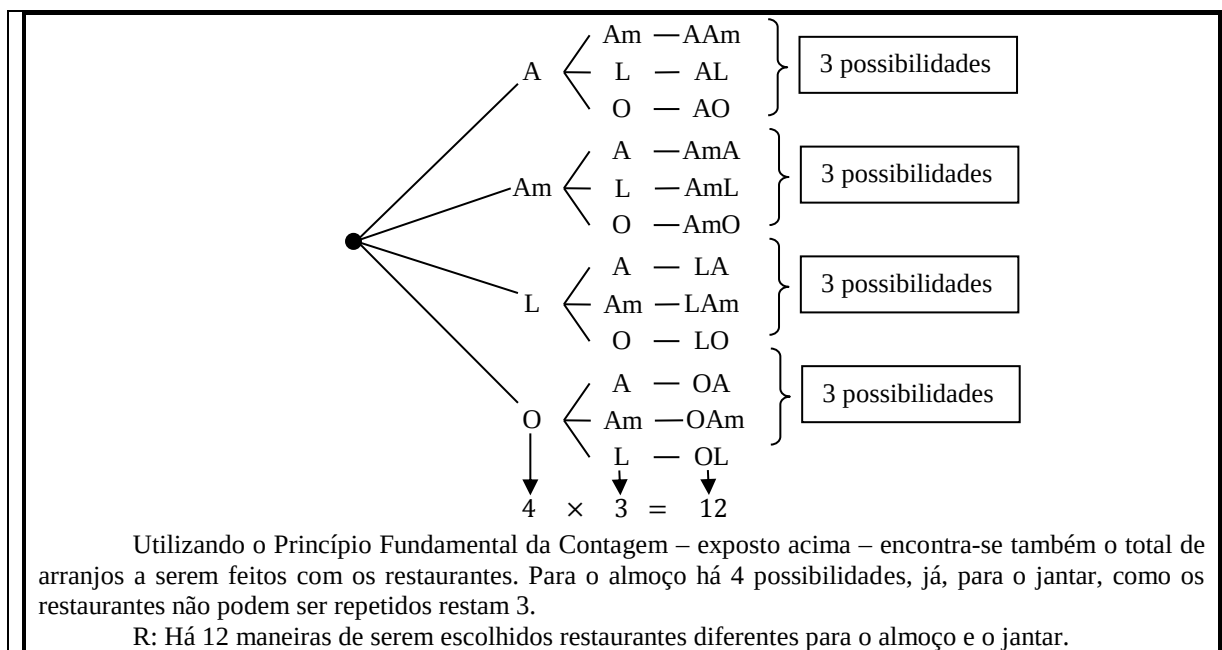
317. **P-2:** *Ah, é uma Permutação! Não... deixa eu pensar... É um Arranjo porque não vai por em todas as suas casinhas. [Risos entre as participantes devido ao pronunciamento da palavra casinha indicando o local das refeições para o almoço e para o jantar.]*

318. **Pesquisador/Participante:** P-5, leia pra gente a solução que eu entreguei deste problema, o 7.º, só pra gente sintetizar as ideias. **[P-7 realizou a leitura do referido problema. Observe-o abaixo:]**

PROBLEMA (7): No final do ano, como parte da comemoração referente à formatura, a professora Sueli e seus alunos do 3.º ano B do Ensino Médio viajaram para Salvador – Bahia. Eles se hospedaram na pousada Beira Mar. Na avenida onde se localizava tal pousada havia 4 restaurantes: ACARAJÉ, ALTA MARÉ, LUNA e OSTRAS. Para receber desconto na pousada, a professora Sueli teve que escolher um dos restaurantes para o almoço e outro (diferente) para o jantar. No primeiro dia da estadia em Salvador, de quantas maneiras a professora Sueli pode escolher os restaurantes para o almoço e o jantar?

Solução: A professora Sueli possui 4 opções de restaurantes a serem arranjados 2 a 2 já que devem ser escolhidos 2 restaurantes, um para o almoço e outro (diferente) para o jantar. Denotemos os restaurantes pelas seguintes siglas: **A** = Acarajé; **AM** = Alta Maré; **L** = Luna e **O** = Ostras.

O Diagrama de Árvore abaixo denota todos os possíveis arranjos:



[Como não houveram dúvidas a respeito deste problema, P-2 explicou como fizeram o 7.1:]

319. **P-2:** A gente pensou assim: pro café da manhã a professora Sueli tem 4 opções de restaurantes, só que, como não pode repetir, quando chegar no almoço só vai ter 3 opções e quando chegar no jantar só vai ter 2! Daí a gente fez $4 \times 3 \times 2$ que dá 24!

320. **Pesquisador/Participante:** E é exatamente o que está escrito aqui, pessoal, vejam! [As participantes leram, em silêncio, a solução do desafio 7.1 apresentado a seguir:]

PROBLEMA (7.1): Suponha, agora, que a professora Sueli teria que escolher também um restaurante diferente para o café da manhã. Qual seria o ‘novo’ resultado?
Solução: Analogamente ao problema anterior, aplicando o Princípio Fundamental da Contagem temos:
$4 \times 3 \times 2 = 24$
R: Há 24 maneiras de serem escolhidos restaurantes diferentes para o café da manhã, o almoço e o jantar.

321. **Pesquisador/Participante:** Agora, continuem no 7.1. Se tivessem o café da manhã, o almoço, o café da tarde e o jantar, como ficaria a multiplicação? [Rapidamente P-2 respondeu:]

322. **P-2:** $4 \times 3 \times 2 \times 1$!

323. **Pesquisador/Participante:** Todo mundo acompanhou este raciocínio? [As demais participantes sinalizaram afirmativamente.]

324. **P-2:** E é uma Permutação!

325. **Pesquisador/Participante:** Todo mundo entende porque da fala da P-2 dizendo ser um problema de Permutação, que neste caso é uma Permutação Simples?

326. **P-5:** *Eu entendo mais ou menos!*

327. **P-8:** *Ai, eu preciso de calma, eu preciso ler de novo em casa! Fique sossegado, eu preciso de tempo!*

328. **Pesquisador/Participante:** Não tem problema P-8. Pode ter calma! Fique tranquila! Vamos fazer assim, P-8, esta semana você reveja e no próximo Grupo de Estudo a gente discute!

329. **P-8:** *Sim!*

330. **Pesquisador/Participante:** Vamos ao 8.º problema! Eu vi que vocês pensaram juntas! P-4, por favor, faça a leitura do enunciado pra gente se situar. **[P-4 leu o enunciado do 8.º problema conforme apresentado a seguir:]**

PROBLEMA (8): No mês de novembro, a diretora da escola da professora Sueli recebeu um convite para enviar uma dupla formada por alunos dos 9.º anos na Olimpíada de Matemática. Assim, ela pediu para a professora Sueli selecionar, em cada uma das quatro turmas de 9.º ano, um aluno que obteve o melhor desempenho. Com os 4 alunos selecionados, de quantas maneiras a diretora pode formar a dupla para enviar na Olimpíada?

331. **Pesquisador/Participante:** Como vocês fizeram? Depois a gente discute a solução que eu trouxe, confrontando com a de vocês! Como vocês pensaram?

332. **P-4:** *Então, como tinham 4 alunos a gente foi, tipo o A...*

333. **P-2:** *A gente fez mesmo!*

334. **Pesquisador/Participante:** Vocês foram contando 1 a 1?

335. **P-4:** *É! Nós fizemos A_1 , A_2 , A_3 e A_4 . [Referiu-se aos 4 alunos selecionados pela professora Sueli.] Daí o A_1 podia ser com o A_2 , A_1 com A_3 e A_1 com A_4 . Depois o A_2 , que ia ser o A_2 com o A_3 e o A_2 com o A_4 . E, por último, só sobrava o A_3 com o A_4 .*

336. **Pesquisador/Participante:** Vocês perceberam que não podiam repetir?

337. **P-2:** *Sim, que não podia repetir!*

338. **Pesquisador/Participante:** Todo mundo percebeu, pessoal, que a ordem não era importante, já que seria a mesma dupla?

339. **P-2:** *Sim! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*

340. **P-8:** *Sabe qual foi a minha dúvida?*

341. **Pesquisador/Participante:** Fale!

342. **P-8:** *Esse negocio do ‘pontinho’! [Referiu-se ao número fatorial – $n!$ – indicando-o gestualmente.] Então, eu achava assim, como não podia repetir a dupla eu achava que tinha que dividir por 2. Mas daí, agora, na lógica, vendo, fazendo, eu vi que estava errado.*

343. **Pesquisador/Participante:** Entendi P-8! Então todas vocês chegaram a 6 possibilidades? [Todas as participantes responderam “Sim!”.] Observem, agora, como eu fiz a solução! [P-2 falou para P-4:]

344. **P-2:** P-4, você colocou $4 \times 3 \times 2 \times 1$, mas daí a gente já viu que não dá certo!

345. **P-4:** Ah, então eu não sei fazer a continha! [A participante apagou o cálculo feito em sua folha.]

346. **Pesquisador/Participante:** Qual é a dúvida P-2?

347. **P-2:** É que a P-4 fez $4 \times 3 \times 2 \times 1$, mas a gente ficou discutindo e não conseguimos entender!

348. **Pesquisador/Participante:** Seria $4 \times 3 \times 2 \times 1$ se fosse uma Permutação Simples. Mas, neste caso, por serem duplas nós temos que inicialmente pensar num Arranjo Simples 2 a 2. E tem, sim, a divisão que a P-8 estava tentando fazer, envolvendo, inclusive, o número fatorial como ela indicou. Mas, na solução que eu trouxe ainda não utilizei o fatorial, eu fiz de outra maneira! Eu acredito que a P-8 tentou se recordar do que ela havia estudado anteriormente...

349. **P-8:** É isso mesmo!

350. **Pesquisador/Participante:** Então, P-4, faça a leitura da solução, por favor!

Solução: A professora Sueli escolheu o seguinte conjunto de alunos:

– Alunos = {Beto (**B**), Carla (**C**), Danilo (**D**), Eduarda (**E**)}.

Desse conjunto devem ser formados subconjuntos com apenas 2 elementos, ou seja, 2 alunos. A ordem em que os elementos (alunos) aparecem nesses subconjuntos não importa, pois Beto-Carla {**B**, **C**}, por exemplo, é a mesma dupla que Carla-Beto {**C**, **B**}. Assim, os subconjuntos de 2 elementos (duplas) obtidos por meio de contagem direta são:

{B, C}, {B, D}, {B, E}, {C, D}, {C, E}, {D, E}

Além da contagem direta, pode-se utilizar o seguinte raciocínio (procedimento):

1.º - Inicialmente calcula-se os 4 elementos (alunos) arranjados 2 a 2:

$$4 \times 3 = 12$$

2.º - Em seguida, calcula-se todas as ‘misturas’ possíveis de serem formadas com 2 elementos (alunos) já que pretende-se formar duplas. Tal cálculo é realizado para determinar o múltiplo de subconjuntos que irá se repetir.

$$2 \times 1 = 2$$

3.º - Para descobrir o total de combinações, ou seja, duplas a serem constituídas, divide-se o total dos 4 elementos arranjados 2 a 2 pelo total de ‘misturas’ formadas com 2 elementos:

$$\frac{12}{2} = 6$$

R: A diretora poderá formar 6 duplas combinando os 4 alunos escolhidos pela professora Sueli.

[Ao ler a 1.ª etapa do procedimento, o Pesquisador/Participante questionou:]

351. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, todo mundo entendeu porque inicialmente eu arranjei 2 a 2 os 4 alunos?

352. **P2, P-5, P-7 e P-8:** Sim!

353. **P-4:** Eu não entendi!

354. **P-2:** *P-4, fez arranjo de 2 a 2 porque queria ver todas as duplas. Põe o 4 porque tem 4 alunos na 1.^a possibilidade da dupla, e depois o 3 porque já foi 1 antes. Daí multiplica. Foi isso que ele fez pra formar a dupla, $4 \times 3 = 12$!*

355. **P-4:** *Então ele foi fazendo esse e esse! [Indicou as ‘combinações’ para a formação das 12 duplas.]*

356. **Pesquisador/Participante:** Só que aí, P-4, as duplas são repetidas!

357. **P-2:** *Isso!*

358. **P-4:** *Sim!*

359. **Pesquisador/Participante:** Não se esqueça que é a 1.^a etapa do procedimento. [Dando continuidade P-4 leu a 2.^a e 3.^a etapas. Concluída a leitura, P-2 questionou:]

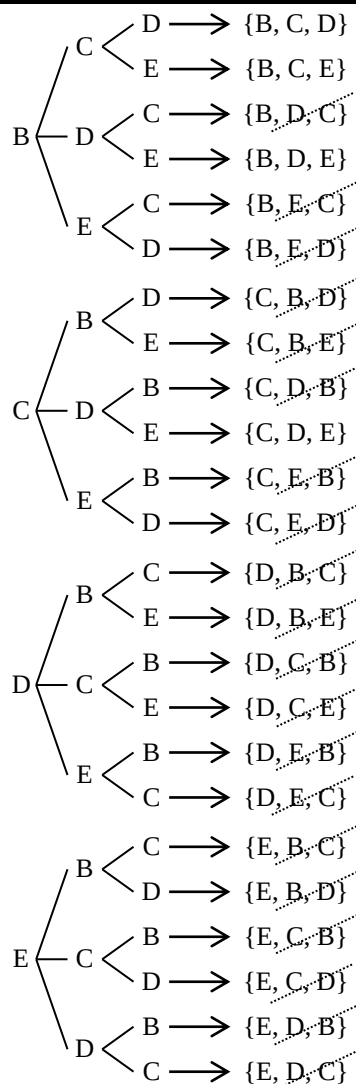
360. **P-2:** *Eu não entendi isso aqui, o passo 2! [O motivo do não entendimento decorreu do descuido/erro do Pesquisador/Participante ao escrever “Tal cálculo é realizado para determinar a quantia de subconjuntos que irá se repetir.”. Como denotado no quadro acima, ao invés da expressão sublinhada ‘a quantia’ o correto é ‘o múltiplo’. Faz-se oportuno ressaltar que P-2 mostrou-se inquieta/‘desequilibrada’ devido ao não entendimento. Apenas P-7 também questionou a referida dúvida, as demais participantes nada disseram. Ao perceber o erro, o Pesquisador/Participante corrigiu-o possibilitando o entendimento da 2.^a etapa. Após analisar o referido procedimento, P-8 falou:]*

361. **P-8:** *Era isso que eu estava tentando lembrar!*

362. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo, P-8, era esta divisão!

[Dando prosseguimento, abordou-se o último problema (8.1). Quando questionadas, as participantes disseram terem elaborado 4 trios. P-7, a pedido do Pesquisador/Participante, leu o referido problema e sua solução. Observe-o abaixo:]

PROBLEMA (8.1): Suponha, agora, que a diretora tenha que enviar um trio. Qual seria o ‘novo’ resultado?
Solução: Utilizando o raciocínio (procedimento) análogo temos: 1.^o - Calcula-se os 4 elementos (alunos) arranjados 3 a 3. $4 \times 3 \times 2 = 24$ 2.^o - Calcula-se todas as ‘misturas’ possíveis de serem constituídas com 3 elementos (alunos) já que pretende-se formar trios. Tal cálculo é realizado para determinar o múltiplo de subconjuntos que irá se repetir. $3 \times 2 \times 1 = 6$ 3.^o - Para descobrir o total de combinações, ou seja, trios a serem formados, divide-se o total dos 4 elementos arranjados 3 a 3 pelo total de ‘misturas’ formadas com 3 elementos: $\frac{24}{6} = 4$ Para ‘comprovar’ e visualizar tal resultado observe no Diagrama de Árvore, abaixo, todos os subconjuntos possíveis de serem formados com 3 elementos cada, inclusive os repetidos:



No referido Diagrama os subconjuntos diferentes são: {B, C, D} Beto-Carla-Danilo, {B, C, E} Beto-Carla-Eduarda, {B, D, E} Beto-Danilo-Eduarda e {C, D, E} Carla-Danilo-Eduarda, o que 'comprova' serem 4 combinações possíveis.

R: A diretora poderá formar 4 trios combinando os 4 alunos escolhidos pela professora Sueli.

[Concluída a leitura, o Pesquisador/Participante salientou:]

363. Pesquisador/Participante: É oportuno e interessante o erro que eu cometi porque isso pode acontecer em sala de aula!

364. P-8: *E quando você está insegura, a respeito do que você não lembra direito, você confunde mais ainda!*

365. Pesquisador/Participante: Concordo com você, P-8! O professor, inicialmente deve possuir uma 'certeza' científica, ou seja, conhecer bem, e a fundo, o objeto de conhecimento específico a ser ensinado. No meu caso, eu estudei a Combinatória 'a fundo' para poder elaborar as ações, e mesmo assim cometi este erro, que a meu ver é normal ocorrer. Agora, imaginem quem vai ensinar sem saber se quer o conteúdo específico?

366. P-2: *É por isso que a maioria dos professores não dá, eles pulam!*

367. **P-7:** *Literalmente!*

368. **P-2:** *Ou então os professores ‘passam’ na lousa e falam: “Oh, a matéria tá lá, se virem!”*

369. **Pesquisador/Participante:** Acho que vocês estão compreendendo que não é simples ensinar Combinatória.

370. **P-4:** *A maioria dos professores fala assim: “A minha parte eu fiz, tá aí oh!”*

371. **P-8:** *É a professora Márcia que fala isso, né! [Referiu-se à professora de Matemática do diálogo hipotético.]*

372. **Pesquisador/Participante:** É por isso, pessoal, que a maioria dos professores que nós tivemos faz isso! No meu caso, nunca nenhum professor me ensinou Combinatória e Probabilidade na Educação Básica. Probabilidade, a meu ver, pelo menos a ensinada no Ensino Fundamental e Médio é mais fácil que Combinatória. E olhem outro absurdo! Nem na faculdade me ensinaram Combinatória... os professores que eu tive supunham que a gente já sabia toda esta parte de Combinatória, então eu estudei sozinho!

373. **P-2:** *Será que os professores que você teve na faculdade sabiam mesmo?*

374. **Pesquisador/Participante:** Ah, P-2, suponho que sim, já que eles tinham feito estudos profundos em suas teses a respeito desta área. Eles sabiam para eles, agora não sei se sabiam ensinar!

375. **P-7:** *Esse eu acho que é o grande problema da faculdade. O professor passar um conteúdo achando que o aluno já tem o anterior!*

376. **P-4:** *Já tem ‘base’!*

377. **P-7:** *Não é porque eu passei no vestibular que eu sei tudo!*

378. **Pesquisador/Participante:** E a solução foi nós estudarmos – eu e duas amigas – ‘toda’ a Combinatória sozinhos. Fizemos isso porque tínhamos que fazer provas e tínhamos que nos virar!

379. **P-7:** *Ai, eu sempre tive essa ideia... Não sei se é porque eu já... desde pequena era assim, se o professor passou e você não sabe, você estuda em casa! Então, se ele passou aqui, supondo que eu já sei, ele tá certo – o professor – eu que estou errada, eu que tenho que correr/buscar!*

380. **Pesquisador/Participante:** Veja, P-7, que essa foi uma visão construída em você! E que está alicerçada no Empirismo!

381. **P-8:** *Mas, nossa, eu também sou assim! Eu sempre vou buscar*

382. **P-7:** *É, você até falou agora pouco: “Ah, não precisa explicar Pesquisador/Participante, eu vou estudar em casa!”.*

383. **P-2:** *É!*
384. **P-8:** *Não... porque eu preciso de tempo... é verdade!*
385. **Pesquisador/Participante:** Eu concordo P-8 que você precisa de tempo sim!
386. **P-2 e P-7:** *Sim!*
387. **Pesquisador/Participante:** E de que, também, o aluno precisa pensar e agir sobre... sim!
388. **P-2:** *Mas eu fico pensando, igual no caso aqui! [Referiu-se aos problemas 8 e 8.1 nos quais não conseguiu resolvê-los de modo ‘direto’, ou seja, sem fazer uso da contagem direta 1 a 1.] Se eu fosse pra casa sem ter compreendido eu não teria conseguido entender sozinha!*
389. **Pesquisador/Participante:** Não consegue mesmo!
390. **P-2:** *Eu ia ficar lendo, lendo... ia ficar ali e não ai sair do lugar!*
391. **P-8:** *Mas agora que a gente já viu, já discutiu, agora eu ‘pego’ fácil! [‘Pego’ no sentido de construir este ‘novo’ conhecimento.]*
392. **P-2:** *Então... mas teve a explicação!*
393. **P-8:** *Ah sim, ah sim! Você buscar sozinha esse tipo de...*
394. **P-2:** *Não dá!*
395. **Pesquisador/Participante:** Eu chego à conclusão, que venho formando-a desde o tempo que ‘virei’ professor, de que o papel do professor jamais será substituída por nenhuma máquina. É impossível!
396. **P-2:** *É impossível!*
397. **Pesquisador/Participante:** Eu não sei como estará a robótica daqui alguns anos, mas vejo ser muito complexo um computador ‘atender’ as necessidades ‘locais’ do aluno como faz um bom professor. Há muitas variáveis que envolvem a relação professor e aluno...
398. **P-8:** *É... você tirou a dúvida da P-2 vendo como ela pensou, como ela fez. E o computador não vai fazer isso! E a P-2 não vai saber se expressar pro computador entender a sua dúvida.*
399. **P-4:** *O computador não pensa, né!*
400. **P-8:** *É, ainda não! Quem sabe com a inteligência artificial, mas mesmo assim eu acho difícil!*
401. **Pesquisador/Participante:** É por isso que eu defendo que os professores devem ser valorizados, pois a profissão mais complexa que existe para formar um ser humano é a nossa!

402. **P-2:** *Então, mas daí eu penso assim, oh... Concordo plenamente com o que você falou! Mas se a gente (professor) não tem essa segurança, é por isso que os professores só se apegam nas críticas em relação ao salário... porque ele nem sabe falar qual é realmente a importância dele, qual realmente é o papel dele!*

403. **Pesquisador/Participante:** Concordo!

404. **P-2:** *E se, de repente, você o questiona... não vai sair! Se você não sabe!*

405. **Pesquisador/Participante:** Vamos pensar na situação atual com a greve dos professores do Ensino Superior da esfera federal. É claro que há fortes motivos para a paralisação, no entanto, qual o percentual do total de professores em greve que tem consciência do seu papel enquanto professor universitário? Não estou falando da compreensão enquanto o seu papel como pesquisador, e sim como professor! Porque, pessoal, um doutorado, embora seja um mérito da pessoa, não implica em boa docência. Se assim o fosse, eu não teria enfrentado problemas com meus professores doutores na graduação e nem vocês estariam enfrentando agora!

406. **P-2:** *E isso é tristíssimo! Se eles não sabem ensinar o professor a como ser professor... e aí? Fica a situação que está mesmo! E não vai sair dessa 'bola de neve' nunca!*

407. **Pesquisador/Participante:** No meu caso, pessoal, eu fui, por conta própria, estudar a fundo para poder abordar...

408. **P-2:** *Olha, não estou menosprezando quem fez Matemática, não é isso!*

409. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem!

410. **P-2:** *Mas no seu caso você foi a fundo na Matemática. Mas, e nós que temos que ensinar Português, Matemática, História, Geografia e Ciências.... nós não vamos nos aprofundar em tudo... não dá!*

411. **Pesquisador/Participante:** É por isso, pessoal, que em um evento que eu fui a palestrante falou de uma proposta arquivada na USP que propõe a formação de pedagogos especialistas. Assim, o professor dos anos iniciais teria uma habilitação específica, ou seja, teria estudos aprofundados só pra alfabetizar/letrar, ou só pra ensinar Matemática, ou só pra ensinar as Ciências Humanas, etc. E esta proposta vem da evidente dificuldade que os cursos de Pedagogia enfrentam na tentativa de formar um professor polivalente.

412. **P-2:** *E é por isso que, eu acho um cúmulo, mas ninguém vê! Quando chega lá na escola eles [Referiu-se ao corpo gestor.] falam isso abertamente: “Não, deixa ela com alfabetização porque ela é alfabetizadora!”. Se ela é alfabetizadora ela não vai ensinar as outras áreas!*

413. **Pesquisador/Participante:** Na maioria das vezes é assim mesmo!

414. **P-7:** *E isso é explícito!*

415. **Pesquisador/Participante:** E esta professora, na maioria das vezes, alfabetiza bem, mas ‘só’ isso!

416. **P-2:** *É, ela só vai alfabetizar... eles nem veem as outras coisas! A verdade é essa, o que eu vi no estágio. Realmente, a professora que eu acompanhei é uma excelente alfabetizadora, ela contextualiza tudo certinho... mas é só aquilo!*

417. **Pesquisador/Participante:** Ou então a direção já fala: “Aquele serve pra 4.^a série!”.

418. **P-2:** *É verdade!*

419. **Pesquisador/Participante:** E se esta proposta fosse implantada, penso que daria tempo, vamos supor, nos últimos 2 anos de curso, para o professor se aperfeiçoar em determinada área. Supondo o nosso Grupo de Estudo, querendo ou não ele equivale a um semestre de disciplina e nós estamos abordando um dos Blocos de Conteúdos. Em 2 anos são 4 semestres. Se, em cada semestre for aprofundado cada um dos Blocos, dá tempo de formar esse professor especialista nos anos iniciais. É claro que as disciplinas tem que ser bem planejadas, estruturadas.

420. **P-5:** *É verdade!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

421. **Pesquisador/Participante:** Eu pretendo, pessoal, ‘mostrar’ aos professores da Banca (da Tese) a possibilidade de uma proposta metodológica a ser realizada nos cursos de Pedagogia como equivalendo uma disciplina do curso.

422. **P-7:** *E o mais triste é que essas boas ideias ficam arquivadas!*

423. **P-2:** *Porque foram barradas!*

424. **P-7:** *Sim, mas é uma pena!*

425. **Pesquisador/Participante:** E, pessoal, as pesquisas em Educação Matemática apontam que as dificuldades conceituais que o professor tem serão repassadas aos seus alunos que poderão se tornar futuros professores e ‘passarão’ suas dificuldades aos seus ‘futuros’ alunos...

426. **P-5:** *É, então, daí vira uma roda e vai ficando uma ‘bola de neve’! É difícil sair dessa roda!*

427. **P-2:** *Mas, Pesquisador/Participante, pra gente é difícil sair dessa roda! O Grupo de Estudos pra gente está sendo, eu digo pra gente porque a gente conversa, está sendo fundamental e enriquecedor, mas é a quebra de muitos paradigmas! É a quebra de muitos conceitos...*

428. **P-8:** *É! Além de estudar Matemática, a gente estuda Psicologia também... porque esse tipo de discussões, que a gente tá tendo, teve, a gente não tem em sala de aula!*

429. **P-2:** *É, a gente não tem!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

430. **P-7:** *E quando o professor tenta não dá pra discutir!*

431. **Pesquisador/Participante:** Isso ocorre, pessoal, porque uma discussão não pode ser livre, ou seja, o professor enquanto o mediador tem que gerenciar os vários pontos de vista, focar constantemente no tema discutido...

432. **P-2:** *Então, mas discussão é o que você faz! Você deixa a gente falar, e mesmo quando você não concorda, que já aconteceu várias vezes, você se coloca! Outra coisa é você já chega com o seu ponto de vista, já coloca e já quer discutir! Daí é difícil, você vai discutir o quê!? Isso pra mim não é discussão!*

433. **Pesquisador/Participante:** No quadro que abordei no início, P-8, eu coloquei os vários assuntos estudados no qual fui tentando ‘conectá-los’/relacioná-los e, também, visando a quebra de alguns paradigmas.

434. **P-2:** *Que é uma constante desconstrução!*

435. **Pesquisador/Participante:** Por mim seria interessante termos mais um ano para que eu pudesse acompanhá-las no estágio. Mas, mediante o nosso tempo não será possível!

436. **P-8:** *Então, eu queria propor pra você, assim... quando a gente estiver na prática, a gente poder discutir com você... mandar um e-mail perguntando as nossas dúvidas!*

437. **Pesquisador/Participante:** Claro! Fiquem à vontade!

[Finalizando, o Pesquisador/Participante solicitou às participantes como ‘tarefa’ a análise de exemplos de atividades de Combinatória a serem utilizadas com os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Além disso, combinou-se a elaboração do ‘Momento Síntese’ a ser socializado no próximo encontro.]

APÊNDICE U – TRANSCRIÇÃO DO 17.º ENCONTRO

Data: 23/08/2012

Tempo de Duração: 3 horas e 20 minutos.

[Participaram deste Grupo de Estudo P-2, P-4, P-5, P-7 e P-8. Inicialmente fez-se a socialização das sínteses elaboradas pelas participantes referentes aos dois encontros anteriores. P-5 foi a primeira a realizar a leitura. Observe a seguir:]

1. **P-5:** *Eu coloquei que “Combinatória é um conteúdo que parece fácil, mas que é preciso prestar muita atenção nas peculiaridades de cada exercício, pois não há uma única fórmula para resolver todos, sendo que é muito importante trabalhar esse conteúdo com as crianças, pois ele pode também ser facilmente empregado em seu cotidiano.!”*
2. **Pesquisador/Participante:** É interessante a sua colocação!
3. **P-5:** *E em dúvidas eu coloquei que ainda tô com um pouco de confusão pra identificar o que é Permutação, o que é Arranjo... eu coloquei isso nas dúvidas!*
4. **Pesquisador/Participante:** No Grupo de hoje, pessoal, iremos fazer uma análise bem profunda de cada um destes tipos, e eu trouxe o exemplo que nós fizemos pra que fique mais ‘clara’ a definição.
5. **P-8:** *Ai que bom!*
6. **Pesquisador/Participante:** E quando você coloca, P-5, que não tem uma única maneira de resolver, é porque não tem mesmo! Os problemas que envolvem o pensamento combinatório possuem diferenças entre si!
7. **P-5:** *Sim!*
8. **Pesquisador/Participante:** P-4, leia pra gente!
9. **P-4:** *Eu coloquei que “Existem vários tipos de Combinatória, com agrupamentos, problemas de contagem Arranjo, Grupo, Permutação, Combinação Simples, e tudo isso com Repetição e sem Repetição. Vale lembrar que não são todos resolvidos da mesma forma, portanto é preciso pensar sobre o que se pede em cada problema primeiro para conseguir resolver corretamente. É preciso também entender cada tipo de Combinatória para facilitar o como fazer em cada problema.”.*
10. **Pesquisador/Participante:** Muito legal P-4! Nessa sua fala é possível perceber que isso vai acontecer com os alunos de vocês, também!? Por exemplo, os problemas aritméticos do campo aditivo envolvem a ideia de juntar, retirar, acrescentar, completar, comparar, tudo isso valendo-se das operações de adição e subtração. Mesmo pertencendo ao campo aditivo, existem diferentes maneiras de pensar e resolver tais problemas, e isso é o mesmo que acontece com a Combinatória. Por isso, pessoal, lá no diálogo hipotético quando a professora Sueli fala que antes de aplicar as fórmulas é necessário entender os vários tipos de agrupamentos... acho que é neste sentido que ela falou isso! P-2, por favor!

11. **P-2:** *Foi possível concluir que algumas resoluções são facilmente efetuadas através do Diagrama de Árvore, entretanto algumas exigem a resolução através de multiplicação, porém todos não exigiram as fórmulas, mas sim que se pensasse sobre as situações apresentadas. Acredito que ainda preciso de mais tempo para identificar quando trata-se de Arranjo, Permutação e Combinação.*

12. **Pesquisador/Participante:** Ok! Você precisa de mais ‘tempo’ pra poder diferenciar, né P-2?

13. **P-2:** *Sim!*

14. **Pesquisador/Participante:** E dá pra perceber, pessoal, que não há a necessidade de fórmula! Em Matemática, quando há compreensão, não que não demore mais, mas não há necessidade de decorar fórmulas. Na graduação, por exemplo, não via a necessidade das mesmas porque o meu interesse estava em compreender o conceito e o modo de resolver problemas relacionados a tal conceito. É claro que a automatização das fórmulas, com significado, agiliza a solução. E você, P-7?

15. **P-7:** *Eu acabei falando mais de mim do que da Combinatória em si até... Mas eu coloquei assim: “Eu pude perceber que ainda tenho dificuldades para realizar os exercícios, me apegando sempre ao concreto. Acredito que isso pode ocorrer devido ao pouco contato que eu tive com esses tipos de problemas e também pela má interpretação do enunciado do exercício.”. Eu tenho muita dificuldade de ler um exercício e ver o que ele está pedindo, o que é pra se fazer... até a maioria dos exercícios quando eu li eu ficava em dúvida “Mas é isso que eu tenho que fazer...?”... eu sempre conversava com a P-2... Aí acaba tendo mais ideia, mas eu sempre fico perdida “O que eu faço aqui?”, acho que eu não consigo ter muita compreensão do que pede!*

16. **Pesquisador/Participante:** Então você acredita não está nem em entender o conceito matemático, mas sim em retirar as informações do problema pra pensar sobre ele?

17. **P-7:** *Sim, porque eu acho que eu aprendi muito assim... hoje a gente está estudando é Permutação, a fórmula é essa, então era só exercício daquilo... então não tinha o que pensar, só pegava os números e fazia na fórmula ali e pronto. [Referiu-se às ações didático-metodológicas de grande parte de seus professores de Matemática.]*

18. **Pesquisador/Participante:** Você não tinha a necessidade em interpretar o enunciado pra saber o que estava pedindo?

19. **P-7:** *Sim!*

20. **Pesquisador/Participante:** Acabava se tornando algo ‘automático’, mecânico?

21. **P-7:** *Sim!*

22. **Pesquisador/Participante:** Então o professor punha exercícios do 1 ao 10, e como ele já falava o que era você sabia que iria usar a fórmula da Permutação para resolvê-los...

23. **P-7:** *Então, comigo esse conteúdo eu nem lembro de ter estudado, mas dos outros conteúdos eu lembro que a professora ensinava ‘hoje’ na sala e dava aquela lista gigante do ‘a ao z’ pra fazer em casa e era tudo igual mesmo!*

24. **P-2:** *Comigo era assim também!*

25. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, acredito que vocês já perceberam isso. Eu optei por não começar pela definição, e sim pelo desafio/problema e ir ‘caminho’ rumo à definição. Lembra que nós fizemos isso com a Média Aritmética, Mediana, Variância e Desvio Padrão? **[Todas as participantes responderam afirmativamente.]** Vocês acham que este ‘caminho’ é mais interessante? **[Comentário análogo ao anterior.]** Fazendo a análise da abordagem da Estatística eu supus que houve construção significativa dos conceitos. Vocês concordam?

26. **P-2:** *Sim!*

27. **P-4:** *Com certeza!*

28. **Pesquisador/Participante:** Por meio daqueles desafios que vocês resolveram sozinhas, isso me dá um forte indício de que entenderam o significado da Média Aritmética, ou Moda... ou o porquê da Variância! É claro que se vocês ficarem muito tempo sem estudar tais assuntos, algum detalhe ou outro será esquecido! No entanto, como houve compreensão do conceito, ou melhor, pelo fato de ter havido uma acomodação desta nova estrutura por meio de uma Equilibração, acredito que será mais fácil acessar tais conceitos quando vocês se deparem com problemas análogos. É por isso mesmo, P-7, que hoje eu trouxe as definições destes tipos de agrupamentos (Arranjo, Permutação e Combinação) recorrendo a todo o momento aos problemas que nós estamos discutindo há 2 encontros. Eu acredito que o aluno tem que pensar sobre o problema, ir pra casa, voltar, repensar pra daí ir “tomando consciência” daquilo que ele fez. Porque em um único dia de abordagem o conceito não vai ser acomodado, não é assim! O que vocês acham?

29. **P-4:** *É verdade, não dá mesmo!*

30. **Pesquisador/Participante:** Se fosse assim, eu estaria sendo contrário à teoria de Piaget, certo?

31. **P-8:** *Você tem que retomar sempre!*

32. **Pesquisador/Participante:** Retomar e ir aprofundando garantindo o estabelecimento de cada vez mais relações entre os diversos conceitos.

33. **P-8:** *E sempre colocar o problema... o exercício... você vai em outros assuntos, mas depois voltar, retomar o assunto, dar um exercício...*

34. **Pesquisador/Participante:** Por exemplo, P-8, daqui há pouco faremos uma relação entre Estatística, Combinatória e Probabilidade. Ao possibilitar a ampliação do conhecimento no sujeito está sendo retomado o já estudado! Porque a Matemática, pessoal, se o professor souber dá pra relacionar os diversos conceitos de diferentes ‘áreas’. Só que isso depende de um bom conhecimento do que é Matemática e saber ‘dialogar’ isso didático-metodologicamente. E por isso, conforme falei no Grupo de Estudo anterior, acredito que vocês terão um conhecimento mais aprofundado sobre o Bloco ‘Tratamento da Informação’

se comparado ao restante. Além de fazermos um estudo do conteúdo específico (Matemática)... como eu falei pra vocês não basta só saber Matemática para ensiná-la, mas é preciso sabê-la muito bem para que tenham uma ‘segurança’ ‘científica’, e daí vir a propor atividades para os alunos! P-8, por gentileza, faça a leitura de sua síntese.

35. **P-8:** *Então, olha... o que a P-7 tava falando eu tenho dúvida a respeito disso! Eu tenho dificuldade na identificação dos dados, igual lá atrás quando você pediu os exercícios que nós fizemos [Referiu-se às atividades do item 16.3 – Atividade para Casa – a ser esboçado adiante.], quando tem o desenho eu acho mais fácil... eu acho que eu tô naquela fase do...[Risos da participantes.]*

36. **P-2 e P-4:** *Na fase do concreto!*

37. **P-8:** *...do concreto! Então, eu tenho... eu preciso estudar melhor, fazer mais exercícios pra poder ensinar... até porque eu preciso disso! Eu entendi, assim, mas eu tenho a dificuldade igual a P-2 de colocar na casinha, o que é Arranjo, o que não é... eu tenho que ler tudo de novo... pra fazer esses exercícios eu tive que rever! Então, pra mim, o entendimento não foi tão fácil... Não é que você não entende, pra ensinar você tem que ter um conhecimento mais aprofundado do assunto...*

38. **P-2:** *Mais domínio!*

39. **P-8:** *E não pode ser na superficialidade.*

40. **Pesquisador/Participante:** *Sim, concordo!*

41. **P-8:** *Eu sempre tive esse conhecimento [Referiu-se à Combinatória.], mas eu nunca gostei deste assunto. Então sempre ficou na superfície. Então na hora que eu peguei o exercício eu pus assim: “O assunto pra mim, pra melhor entendimento, eu vou precisar de mais estudo pra fixação.” Mais exercícios! Foi isso que eu coloquei!*

42. **Pesquisador/Participante:** *Ok! Daí, pessoal, no final do nosso encontro anterior, eu havia pedido para que vocês pensassem no Desafio Para Casa, item 16.3. E, do mesmo modo que fiz na Estatística, eu coloquei exemplos de atividades aplicáveis em alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Primeiramente, vocês acharam interessantes os problemas? [Todas as participantes sinalizaram, por meio de expressão facial, afirmativamente.]*

43. **P-8:** *Mas eu tive uma dificuldade...*

44. **P-2:** *Todas nós tivemos! [Risos entre todas as participantes.]*

45. **P-8:** *...de saber em que ano dar! A gente não sabe! Eu até fui procurar no Google... mas daí eu pensei que elas iam ficar bravas comigo!*

46. **P-2:** *Não, desta vez eu não fiquei!*

47. **P-8:** *Porque eu não sabia que idade é!*

48. **P-2 e P-7:** *A gente conversou, até...*

49. **P-8:** *A gente ficou na dúvida, assim, colocar no menorzinho, um pouquinho mais...*
50. **Pesquisador/Participante:** Ok! Entendi as dúvidas! Vocês fizeram em conjunto? [P-2, P-7 e P-8 fizeram o ‘Desafio para Casa’ juntas; já P-4 e P-5 resolveram individualmente.]
51. **P-5:** *Eu até consegui fazer, mas não consegui determinar o ano!*
52. **Pesquisador/Participante:** O conteúdo você conseguiu identificar, P-5?
53. **P-5:** *Não! Daí que eu vi que eu estava com dúvida, daí eu coloquei lá na dúvida da síntese.*
54. **P-2:** *Não é tudo Combinatória?* [Referiu-se aos conteúdos matemáticos a serem identificados nas atividades.]
55. **P-5:** *Então, eu também pensei nisso, mas daí fiquei em dúvida!*
56. **P-8:** *Porque você* [Referiu-se ao Pesquisador/Participante.] *pôs tudo combinando!*
57. **P-4:** *É, eu coloquei o Princípio Multiplicativo!*
58. **Pesquisador/Participante:** Então você colocou em todos o Princípio Multiplicativo? [Rindo P-4 respondeu:]
59. **P-4:** *Sim!*
60. **Pesquisador/Participante:** Você não colocou nada, P-5?
61. **P-5:** *Não!*
62. **Pesquisador/Participante:** E vocês [Referiu-se à P-2, P-7 e P-8.] três colocaram tudo Combinatória?
63. **P-2, P-7 e P-8:** *Isso!*
64. **Pesquisador/Participante:** E em relação ao ano de escolaridade, o que vocês colocaram na Atividade 1?
65. **P-4:** *Eu achei que estava por ordem! A 1.ª Atividade era do 1.º ano, a 2.ª Atividade era do 2.º ano... fui fazendo até o 5.º ano.*
66. **Pesquisador/Participante:** Mas só tinham 4 Atividades P-4!
67. **P-4:** *A Atividade 1 eu pus que era do 1.º ano. A Atividade 2 eu pus que era do 2.º e 3.º ano. A Atividade 3 eu coloquei 3.º e 4.º ano. E a Atividade 4 eu coloquei que era no 4.º e 5.º ano.*
68. **Pesquisador/Participante:** Entendi!

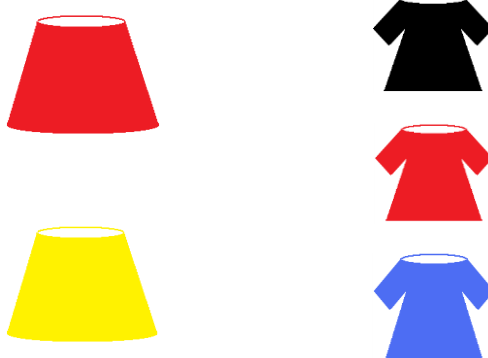
[Observe, a seguir, as Atividades que compuseram o Desafio para Casa – item 16.3:]

16.3 Desafio para casa

1. Identifique nas seguintes atividades o conteúdo matemático abordado e o ano a qual se destinam:

ATIVIDADE 1: COMBINANDO AS ROUPAS

Joana tem no seu guarda-roupa 2 saias, uma vermelha e a outra amarela. Ela também possui 3 blusas, sendo uma preta, a outra vermelha e a outra azul. Quantas são as combinações possíveis que Joana pode fazer usando uma saia e uma blusa?



Conteúdo abordado:

Ano:

ATIVIDADE 2: A IDA À FESTA

1. Luciana foi a uma festa com sua família. No jantar foram servidos 3 tipos de saladas e 3 tipos de massas: macarrão, lasanha e ravióli. Quantos pratos diferentes eram possíveis montar combinando as saladas e os tipos de massas? Faça um esquema para auxiliar.

Atividade adaptada de: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Guia de Matemática para o Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 2012.

2. Após o jantar foram servidos alguns tipos de brigadeiros. Os 3 tipos de brigadeiros feitos eram de chocolate branco, chocolate meio amargo e chocolate ao leite. Além dos brigadeiros haviam 3 tipos de cobertura: coco ralado, castanha picada e granulado de chocolate. Faça as combinações possíveis e descubra quantas opções de brigadeiros tinham na festa.

Atividade adaptada de: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Guia de Matemática para o Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 2012.

Conteúdo abordado:

Ano:

ATIVIDADE 3: DIVERSAS COMBINAÇÕES

1. Após o passeio ao zoológico, a turma de Joana parou para comer em uma lanchonete. Nessa lanchonete cada um podia montar o próprio lanche e todos ficaram animados. As crianças podiam escolher entre 3 tipos de pães (pão francês, pão de hambúrguer e pão de forma) e 5 tipos de recheios (frango, mortadela, presunto, queijo e salame). Quantos sanduíches diferentes os alunos poderiam montar com um tipo de pão e um tipo de recheio?



2. Amanda disse para sua mãe que tem 15 opções diferentes para combinar suas blusas com 5 saias. Quantas blusas Amanda têm?

Conteúdo abordado:

Ano:

ATIVIDADE 4: PARTIDAS DE FUTEBOL

No campeonato de futebol da escola foram formados 4 grupos (A, B, C, e D) com 3 times cada. O jogos foram organizados da seguinte forma:

- Na primeira fase cada time do grupo A jogará contra todos os tipos do grupo B, e cada time do grupo C jogará contra todos do grupo D.
 - No final do campeonato, o vencedor dos grupos A versus B jogará com o vencedor dos grupos C versus D, conforme o esquema abaixo.
- Quantas partidas precisarão ser previstas?

R: _____

PRIMEIRA FASE

GRUPO A	versus	GRUPO B		GRUPO C	versus	GRUPO D
e		h		k		n
f		i		l		o
g		j		m		p

FINAL

Vencedor de A versus B	versus	Vencedor de C versus D
------------------------	--------	------------------------

Conteúdo abordado:

Ano:

69. **Pesquisador/Participante:** E vocês, P-2, P-7 e P-8, o que colocaram a respeito do ano de escolaridade?

70. **P-7:** Na verdade a gente foi conversando, não fez junto, então não ficou muito parecido!

[O Pesquisador/Participante foi questionando P-2, P-7 e P-8 para saber a resposta acerca do ‘Conteúdo abordado’ e ‘Ano de escolaridade’ nas referidas Atividades. O Quadro abaixo apresenta tais respostas de modo mais sistemático e ‘prático’:]

PARTICIPANTE	CONTEÚDO MATEMÁTICO	ANO DE ESCOLARIDADE
P-2	Atividade 1: Combinatória.	Atividade 1: 3.º e 4.º anos.
	Atividade 2: Combinatória.	Atividade 2: 4.º e 5.º anos.
	Atividade 3: Combinatória.	Atividade 3: 4.º e 5.º anos.
	Atividade 4: Combinatória.	Atividade 4: 5.º ano.
P-7	Atividade 1: Combinatória.	Atividade 1: 2.º e 3.º anos.
	Atividade 2: Combinatória.	Atividade 2: 3.º e 4.º anos.
	Atividade 3: Combinatória.	Atividade 3: 3.º e 4.º anos.
	Atividade 4: Combinatória.	Atividade 4: 5.º ano.
P-8	Atividade 1: Combinatória.	Atividade 1: 2.º e 3.º anos.

	Atividade 2: Combinatória.	Atividade 2: 3.º e 4.º anos.
	Atividade 3: Combinatória.	Atividade 3: -----
	Atividade 4: -----	Atividade 4: -----

71. **Pesquisador/Participante:** *E as perguntas, pessoal, vocês conseguiram fazer?*
[Referiu-se a três questionamentos denotados a seguir:]

Em sua opinião, qual das atividades acima apresenta o maior nível de dificuldade? Por quê?

E o menor nível de dificuldade? Por quê?

Qual postura o professor deveria adotar ao abordar tais atividades?

72. **Pesquisador/Participante:** Em relação ao maior nível de dificuldade você colocou o quê, P-5?

73. **P-5:** *Eu coloquei Atividade 4!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

74. **Pesquisador/Participante:** E por que você considera a Atividade 4 como sendo a mais difícil?

75. **P-5:** *Eu coloquei porque ele envolve duas combinações, seria o Grupo A com o B e depois o C com o D, e depois somar esses dois. Eu acho que esse pode ter mais dificuldade, porque o aluno pode fazer só o A com o B e esquecer dos outros dois e não somar... tem mais 'passos'... foi o que eu pensei!*

76. **Pesquisador/Participante:** E você, P-4?

77. **P-4:** *Eu também coloquei que a Atividade 4 era mais difícil! Eu escrevi assim: “O último, porque o enunciado tem mais detalhes, e se a criança não prestar atenção ao interpretar não vai conseguir chegar ao resultado correto.”*

78. **P-2:** *Eu pus: “A Atividade que apresenta o maior nível de dificuldade é a quarta por trabalhar com um número grande de informações de dados e ser necessário o esquema para auxiliar na compreensão. Porém, o exercício 2 da Atividade 3 exige a capacidade de inversão no cálculo, ou seja, é necessário o domínio da maneira de como se faz as combinações.”*

79. **Pesquisador/Participante:** Ok!

80. **P-4:** *Ah, é!?* [Risos da participante.]

81. **Pesquisador/Participante:** Depois a gente vai discutir tudo isso! E você, P-7?

82. **P-7:** *Eu também coloquei que era a Atividade 4, mas eu respondi mais em relação a minha dificuldade de fazer, porque eu tentei fazer e fiquei ‘presa’ tentando achar quem era o vencedor... aí eu não cheguei em lugar nenhum. Aí eu fui conversar com a P-2 e daí ela falou de combinar os grupos e eu falei que “Até aí eu fiz!”. Daí ela falou que eu tinha que somar a quantia de combinações dos grupos com a final, daí eu, tipo: “Ah, tá!”. Eu não sei se eu fiquei pensando do outro desafio [Referiu-se ao problema 5 do item 15.3.] e... se o time (e) joga com o (h) e quem ganha ou perde?*

83. **P-2:** *Ela queria fazer isso e eu falei: “Pelo amor, não!”.*
84. **P-7:** *E daí eu justifiquei desta forma... eu justifiquei por mim!*
85. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem! E você, P-8?
86. **P-8:** *Eu coloquei que o mais difícil era o 4 e eu também pus porque eu achei que... eu pus assim que tive dificuldade pra organizar tudo isso aqui... [Referiu-se às informações presentes no enunciado.] Eu tenho preguiça de ler..., é igual aquele negócio do Diagrama de Árvore, me dá uma preguiça fazer... [Risos entre todas as participantes.] Eu sei que não pode ser assim, eu prometo que vou mudar!*
87. **Pesquisador/Participante:** Entendi! Depois nós vamos fazer uma síntese de tudo! E a atividade de menor nível de dificuldade, o que você colocou P-5?
88. **P-5:** *Eu coloquei quer era a Atividade 1 porque ela tem um número pequeno de combinações que pode ser observada apenas observando o desenho. Se você olha, na sua cabeça, assim, você já faz! [Referiu-se ao fato das saias e blusas desenhadas após o enunciado auxiliarem na solução do problema.]*
89. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você, P-4?
90. **P-4:** *Eu coloquei na Atividade 1 também porque tem o “concreto”, o desenho das saias e da blusas para auxiliar a criança na resolução.*
91. **Pesquisador/Participante:** E você, P-2?
92. **P-2:** *As atividades de menor nível de dificuldade foram a primeira e a segunda sendo facilmente resolvidas apenas através do Diagrama de Árvore.*
93. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-7 você respondeu qual?
94. **P-7:** *Eu pus Atividade 1 porque possui um número menor de objetos para se combinar e já há os desenhos no esquema.*
95. **Pesquisador/Participante:** Ok! E você, P-8?
96. **P-8:** *Eu coloquei Atividade 1 pela visualidade dos objetos.*
97. **Pesquisador/Participante:** E o último questionamento pessoal, ou seja, a postura que o professor deveria adotar para abordar estas atividades? Comece P-5, por gentileza.
98. **P-5:** *Essa é o de maior nível de dificuldade! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*
99. **P-2:** *A de maior dificuldade é responder à última! [Risos entre as participantes.]*
100. **P-5:** *Eu coloquei assim, né, o que a gente fala aqui, não sei se... Eu coloquei de primeiramente deixar os alunos tentar resolver a atividade como quiser, por meio traço, desenho, contagem... Mas depois mostrar a eles que há uma forma mais fácil de realizar, a*

multiplicação, [Referiu-se ao Princípio Fundamental da Contagem.] porque se forem muitas combinações é inviável fazer o desenho ou o esquema. Eu acho que tinha que tentar resolver, mas o professor tinha que dar um problema que fosse muito... que não tivesse como resolver pelo digrama, ou que demorasse muito, que daí os alunos iam perceber que tem necessidade de resolver por outra maneira.

101. Pesquisador/Participante: Para introduzir o Princípio Multiplicativo.

102. P-5: *Isso, do Princípio Multiplicativo!*

103. Pesquisador/Participante: Isso é igual àquele ‘Diálogo Hipotético’ que nós analisamos da professora Sueli! Ou seja, se o aluno ainda não sabe fazer a contagem de modo aditivo, começa por aí. Mas, depois que ele ‘consolidou’ o aditivo, daí ‘parte-se’ para o multiplicativo para novos desafios. Leia a sua resposta P-4, por favor!

104. P-4: *O professor deve verificar se a criança realmente consegue fazer o problema mais fácil, que seria o concreto! [Referiu-se à Atividade 1.] Para que só então proponha exercícios gradativamente mais complexos, e assim, gradativamente, a criança vai evoluindo na aprendizagem.*

105. Pesquisador/Participante: Ok! Você seguiu, na lógica construtivista, a construção gradual! P-2?

106. P-2: *Primeiro ler o enunciado da atividade com os alunos e deixar que eles reflitam e tentem resolver como conseguirem, trocando informações entre si. Depois solicitar que falem como chegaram no resultado questionando-os sempre. Caso as resoluções encontradas sejam todas encontradas através do Diagrama de Árvore, ou de outro modo, faz-se necessário a exposição e explicação da possibilidade do cálculo, porém sempre sem uso de fórmulas.*

107. Pesquisador/Participante: Entendi! Ok! E você, P-7?

108. P-7: *Eu até pensei o que a P-5 falou, mas eu não consegui desenvolver a resposta. Eu coloquei só deixar os alunos tentar fazer sozinhos, mas com o professor sempre mediando, mas daí eu não consegui desenvolver mais a resposta.*

109. Pesquisador/Participante: Sobre como seria esta mediação?

110. P-7: *É! E depois disso também!*

111. Pesquisador/Participante: Sim, e o depois!

112. P-7: *Sim, e depois, o que fazer...*

113. Pesquisador/Participante: Tá!

114. P-7: *Eu pus, assim, de começar com os exercícios mais fáceis, tipo o exercício 1 que visualiza os objetos, que vão combinar, porque daí os alunos podem até fazer com brincadeiras, e depois os mais detalhados. Eu não pensei, assim, igual as outras! Depois você vai aumentando o nível de dificuldade.*

115. Pesquisador/Participante: As respostas de vocês serão complementadas, acredito eu, com a proposta por mim. Vamos analisar o texto que trouxe pra hoje referente esta parte. **[A pedido do Professor/Participante, P-4 leu o item 17.1 denotado a seguir:]**

17.1 Retomando o desafio para casa

No encontro anterior solicitou-se a análise de algumas atividades envolvendo a Combinatória a serem utilizadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Observem, no quadro abaixo, os conteúdos matemáticos possíveis de serem trabalhados em cada uma das atividades, bem como o ano escolar ao qual se destinam:

ATIVIDADE	ANO (ESCOLARIDADE)	CONTEÚDO MATEMÁTICO
1 – Combinando as Roupas	2.º e 3.º	Adição (contagem direta 1 a 1) – 2.º ano. Multiplicação (ideia inicial de Combinatória) – 3.º ano.
2 – Ida à Festa (Problemas 1 e 2)	4.º e 5.º	Adição (contagem direta 1 a 1). Multiplicação (Princípio Fundamental da Contagem).
3 – Diversas Combinações (Problema 1)	4.º e 5.º	Multiplicação (Princípio Fundamental da Contagem).
3 – Diversas Combinações (Problema 2)	4.º e 5.º	Divisão (Princípio Fundamental da Contagem – operação inversa).
4 – Partidas de Futebol	4.º e 5.º	Adição. Multiplicação (Princípio Fundamental da Contagem).

116. Pesquisador/Participante: Pessoal, as Atividades 2, 3 e 4 destinam-se ao 4.º e 5.º anos do Ensino Fundamental porque, primeiro, não há uso de nada visual. Então, o aluno de 4.º e 5.º ano (3.ª e 4.ª série) já tem que interpretar bem o problema para poder retirar a informação matemática e fazer, assim, os esquemas e ou desenhos necessários para combinar. E, percebam que, em todos esses, com exceção da Atividade 2 que ainda dá pra fazer facilmente pela contagem direta (aditiva), há a necessidade de sistematização do Princípio Fundamental da Contagem via multiplicação. Ah, então o aluno que fizer 1 a 1, contando e colocando os ‘tracinhos’ vai estar errado!? Claro que não, ele está certo! No entanto, você tem que discutir e dialogar com ele aumentando o nível de dificuldade, pra que o aluno vá ‘sistematizando’ o princípio da Combinatória por meio da multiplicação. Deu pra entender, pessoal, porque eu dispus os conteúdos no quadro que a P-4 acabou de ler? **[Como não houveram comentários, o Pesquisador/Participante discutiu cada uma das atividades observando o modo que as participante utilizaram para resolvê-las. O Quadro abaixo expõe como as participantes pensaram para solucionar as referidas atividades:]**

PARTICIPANTE	ATIVIDADE	SOLUÇÃO PROPOSTA
P-2	1	Utilizou o Princípio Multiplicativo sem recorrer à contagem direta (1 a 1).
	2 (Problema 1)	Inicialmente utilizou o Princípio Multiplicativo e fez 3×3 . Em seguida, montou um esquema escrevendo salada 1, salada 2 e salada 3 numa ‘coluna’ e macarrão, ravióli e lasanha noutra. Após, ‘ligou’ tais elementos, valendo-se do Diagrama de Árvore.
	2 (Problema 2)	Utilizou o esquema – Diagrama de Árvore – análogo ao anterior (Problema 1).
	3 (Problema 1)	Inicialmente utilizou o Princípio Multiplicativo e fez 3×5 . Em seguida fez o Diagrama de Árvore para ‘combinar’ os pães (francês, hambúrguer e forma) com os recheios (frango, mortadela, presunto, queijo e salame).
	3 (Problema 2)	Utilizou o Princípio Multiplicativo pensando no número que vezes 5 resultava em 15, o que lhe permitiu encontrar a solução correta que era 3 blusas.

	4	Multiplicou o Grupo A com o Grupo B (3×3) resultando em 9 partidas. Fez o mesmo com o Grupo C e D. Ao final somou os dois primeiros resultados com a partida final ($9 + 9 + 1$) obtendo 19 partidas.
P-4	1	Ligou' combinando as saias e as blusas e contou o total de 'combinações'. Em seguida, utilizou o Princípio Multiplicativo para conferir o resultado, fazendo 2×3 .
	2 (Problema 1)	Fez 3 'bolinhas' representando as 3 saladas e 3 'bolinhas' representando as 3 massas. Em seguida 'ligou' as 'combinações' possíveis. Em seguida, utilizou o Princípio Multiplicativo e fez 3×3 obtendo como resultado 9 possíveis 'combinações'. A participante não viu necessidade em contar os 9 traços ligando os elementos.
	2 (Problema 2)	Análogo ao anterior (Problema 1).
	3 (Problema 1)	Desenhou 'bolinhas' representando os tipos de pães e recheios, ligando-as. Após realizou a multiplicação 3×5 . <u>Observação:</u> A participante afirmou ter feito, em todas as atividades, primeiramente a multiplicação. No entanto, visando 'pensar igual a criança' montou os esquemas – diagramas.
	3 (Problema 2)	Não soube explicar a solução realizada, além de ter calculado incorretamente o resultado do problema obtendo 15 blusas.
	4	Resposta análoga à P-2. Além de multiplicar 'ligou' os times das equipes, no entanto não contou as 'combinações' 1 a 1.
P-5	1	Valendo-se dos desenhos pensou em cada 'combinação' possível, no entanto não 'ligou' por meio de traços as ilustrações.
	2 (Problema 1)	Montou a 'coluna' da salada (1, 2 e 3) e, ao lado, a 'coluna' da massa (1, 2 e 3). Em seguida, ligou tais elementos contando o total de 'combinações', valendo-se do Diagrama de Árvore.
	2 (Problema 2)	Análogo ao anterior (Problema 1).
	3 (Problema 1)	Montou a 'coluna' do pão (1, 2 e 3) e, ao lado, a 'coluna' do recheio (1, 2, 3, 4 e 5). Em seguida, ligou tais elementos contando o total de 'combinações', valendo-se do Diagrama de Árvore.
	3 (Problema 2)	Resposta análoga à P-2.
	4	Resposta análoga à P-2.
P-7	1	'Ligou' combinando as saias e as blusas sem contar o total de combinações.
	2 (Problema 1)	Montou a 'coluna' da salada (1, 2 e 3) e, ao lado, a 'coluna' da massa (1, 2 e 3). Em seguida, ligou tais elementos contando o total de 'combinações', valendo-se do Diagrama de Árvore.
	2 (Problema 2)	Análogo ao anterior (Problema 1).
	3 (Problema 1)	Montou a 'coluna' do pão (1, 2 e 3) e, ao lado, a 'coluna' do recheio (1, 2, 3, 4 e 5). Em seguida, ligou tais elementos contando o total de 'combinações', valendo-se do Diagrama de Árvore.
	3 (Problema 2)	Resposta análoga à P-2, além de ter construído um esquema valendo-se do Diagrama de Árvore utilizado no Problema 1.
	4	Só realizou a solução após explicação por P-2, fazendo de modo análogo à P-2.
P-8	1	Valendo-se dos desenhos pensou em cada 'combinação' possível, no entanto não 'ligou' por meio de traços as ilustrações.
	2 (Problema 1)	Montou a 'coluna' da salada (1, 2 e 3) e, ao lado, a 'coluna' da massa (1, 2 e 3). Em seguida, ligou tais elementos contando o total de 'combinações', valendo-se do Diagrama de Árvore. Além disso, utilizou o Princípio Multiplicativo fazendo 3×3 .
	2 (Problema 2)	Análogo ao anterior (Problema 1).
	3	Fez um esquema – Diagrama de Árvore – para o 1.º pão e os 5 recheios

	(Problema 1)	para ‘visualizar’ a multiplicação a ser feita - 3×5 .
	3 (Problema 2)	Resposta análoga à P-2.
	4	Não solucionou o problema.

[Durante a discussão da Atividade 1 o Pesquisador/Participante chamou a atenção ao fato das ilustrações auxiliarem o pensamento dos alunos, sendo importante o professor propor situações problemas envolvendo Combinatória por meio de ‘temas’ ‘próximos’ aos estudantes. Neste momento, P-5 indagou:]

117. P-5: *Eu percebi, lendo as atividades, que os exemplos tem a ver com a vida dos alunos... que nem você combina roupa, às vezes você vai fazer uma festa e você pensa nessas combinações! Não é aquilo, aí “João foi à feira!”*, essas coisas que às vezes fica muito distante! E até pra nós fica mais legal pra gente que é adulto... imagine pra criança!? E daí eu pensei: “Olha, eu posso fazer essas atividades quando eu for professora!”. Por exemplo, da partida de futebol, quando tem campeonato na escola, os alunos mesmos podem fazer isso ao invés do professor.

118. Pesquisador/Participante: Claro! Eu acredito, pessoal, que as situações do cotidiano do sujeito são ricas desde que bem aproveitadas pelo professor. E que ele saiba utilizar isso como ponto inicial para desenvolver os conceitos científicos, que em nosso caso é a Matemática. O que falta, em minha opinião, é uma maior “visão” dos docentes em relacionar os conteúdos propostos com aquilo que o estudante vivencia pra poder estabelecer esta ‘ponte’.

[Após a apresentação das soluções referentes à Atividade 2, o Pesquisador/Participante indagou ser possível a obtenção da solução por meio da contagem direta. Por se tratar de um número pequeno de possibilidades, geralmente os estudantes não enfrentam muitas dificuldades ao valerm-se desta estratégia. Em seguida, P-2 questionou:]

119. P-2: *Quando você diz ‘adição – contagem direta’ é literalmente colocar salada 1 + macarrão, salada 1 + lasanha, salada 1 + ravióli?*

120. Pesquisador/Participante: É isso mesmo! É o modo ‘intuitivo’ de fazer.

[Ao apresentar a solução da Atividade 3 (Problema 2) P-8 disse ter utilizado o Problema 1 – da referida Atividade – como ‘modelo’. Observe sua fala abaixo:]

121. P-8: *O exercício de cima era parecido, tinha 3 tipos de pães e 5 tipos de recheios. Aí estava igual, nem tem dúvidas, se tem 5 [Referiu-se a quantidade de saias do Problema 2 – Atividade 3.] e deu 15 [Referiu-se ao total de opções.] então tem 3 [Referiu-se ao número de blusas].*

122. Pesquisador/Participante: Este Problema 2, pessoal, foi posto de modo proposital para que o aluno possa compreender a operação inversa, como a P-2 bem pontuou.

[Em relação à Atividade 4, todas as participantes disseram que o esquema dado no problema auxiliou na solução do mesmo. Observe a discussão realizada:]

123. **Pesquisador/Participante:** Então, pessoal, o esquema colocado na Atividade 4 foi um facilitador à solução?
124. **P-2:** *Sim, com certeza! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*
125. **P-5:** *Até pra quem usou o Princípio Multiplicativo eu acho que ele...*
126. **P-2:** *Ah sim, precisa do esquema.*
127. **P-5:** *Até pra eu pensar em como fazer eu usei o esquema!*
128. **P-2:** *Se tivesse só o enunciado eu não sei se chegaria a montar certinho como está no esquema!*
129. **P-4:** *Eu, com certeza, não ia conseguir resolver sem o esquema! Se não tivesse o desenho... [Risos da participante.]*
130. **Pesquisador/Participante:** Então sozinha você acha que não conseguiria retirar as informações do enunciado e esquematizá-las?
131. **P-4:** *É!*
132. **Pesquisador/Participante:** Será que você não conseguiria P-4?
133. **P-4:** *Ah, então, eu até entendi o que era pra fazer, mas eu acho que é porque eu olhei o desenho! [Referiu-se ao esquema] Porque eu acho que se não tivesse o desenho, mesmo com o desenho de primeira eu não entendi o que era pra fazer, e daí eu li de novo o exercício e vi que não era do jeito que eu tinha pensado inicialmente, porque eu achei que o time (e) só jogava com o (h). Depois que eu vi que tinha que combinar com todos os times.*
134. **Pesquisador/Participante:** Ok! Como você não fez a Atividade 4, P-8, você entendeu como as suas colegas o fizeram?
135. **P-8:** *Sim, entendi! Realmente com o quadrinho [Referiu-se ao esquema.] facilita!*
136. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, o quadro que eu coloquei no texto denotando os anos de escolaridade adequados a cada Atividade vocês concordam? Vejam que no 1.º ano não é proposto atividade que envolva o pensamento combinatório!
137. **P-2:** *Eu não sei, mas acho que até no 2.º ano é muito difícil isso pra criança!*
138. **Pesquisador/Participante:** No 2.º ano, P-2, os alunos conseguirão fazer ligando os elementos e contando!
139. **P-2:** *Mas eu acho assim, no estágio que eu fiz, que no 2.º ano teria que auxiliar bastante!*
140. **Pesquisador/Participante:** Ah, sim, concordo! Eu até pontuo isso no texto que iremos analisar daqui há pouco.

141. **P-2:** *Não que não é possível, eu acredito que sim! Mas pelo que eu senti no estágio...*

142. **Pesquisador/Participante:** As atividades que abordam o pensamento combinatório, por pertencer ao campo multiplicativo, eles são trabalhados com mais ‘intensidade’ no 4.º e 5.º anos. Começa no 2.º e 3.º, mas bem mais ‘ameno’, digamos assim. No 2.º ano há a predominância da contagem direta, pelo Princípio Aditivo. No 3.º ano vai começar a introduzir o Princípio Multiplicativo, mas ainda recorrendo inicialmente à contagem 1 a 1, sendo que alguns alunos não conseguem resolver os problemas.

[Em prosseguimento, P-2 fez a leitura da primeiro parágrafo presente após o quadro denotado acima no item 17.1:]

Em relação ao nível de dificuldade, supõe-se que a Atividade 1 seja a de menor nível por permitir ao estudante ‘ligar’ as possíveis combinações entre as saias e as blusas desenhadas. Por meio de tal estratégia – ‘ligar’ – os estudantes terão um apoio visual para resolver o problema contando diretamente cada ‘combinação’, não sendo necessário ‘pensar sobre’ o Princípio Fundamental da Contagem (multiplicativo). Em contrapartida, o problema 2) – Atividade 3 – representa o maior nível de dificuldade por exigir do aluno o pensamento inverso da multiplicação, ou seja, a divisão. Além de pensar combinatoriamente, o estudante precisará dividir o total de opções ($n = 15$) pela quantia de saias ($m = 5$) para obter a quantidade de blusas. Ao solucionar tal problema (o de maior dificuldade) o sujeito necessitará – em ‘termos’ psicológicos – da reversibilidade operatória, por isso a sua abordagem só se faz possível, na maioria das vezes, entre o 4.º e 5.º anos do Ensino Fundamental.

[Após a leitura deste parágrafo o Pesquisador/Participante pontuou:]

151. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, neste parágrafo foi observada a questão da reversibilidade operatória. É interessante ‘visualizar’ numa atividade estes conceitos, além disso, ao analisarmos os problemas a serem utilizados com nossos alunos teremos maior segurança durante sua abordagem. Alguma dúvida em relação a este parágrafo?

152. **P-2:** *Então, eu estive pensando que colocamos que a Atividade 4 era mais complicada pela nossa resolução, porque no outro aqui, na Atividade 3, já tinha a primeira parte [Referiu-se ao Problema 1.] que era praticamente a mesma coisa [Referiu-se ao Problema 2.], foi meio automático fazer.*

153. **P-7:** *Então, mas eu até justifiquei que pra mim a Atividade 4 era mais difícil pela minha dificuldade em resolvê-la.*

154. **Pesquisador/Participante:** Se a gente for pensar em termos psicológicos, pelo fato de exigir a reversibilidade, o Problema 2 da 3.ª Atividade é mais complexo!

155. **P-7:** *Concordo!*

156. **P-2 e P-4:** *É!*

157. **Pesquisador/Participante:** Só que a Atividade 4, conforme P-4 falou anteriormente também é difícil.

158. **P-2:** *Então, por isso até que na hora eu coloquei as duas coisas! [Referiu-se às Atividades 4 e 3 (Problema 2) como sendo os de maior nível de dificuldade.]*

159. **Pesquisador/Participante:** Concordo com você, P-2!

160. **P-7:** *É que na Atividade 3 foi ‘automático’ fazer o Problema 2 porque já tinha feito no Problema 1. Agora, se estivessem separados...*
161. **P-2:** *Ou se fossem diferentes os números...*
162. **P-7:** *É!*
163. **P-2:** *Daí teria dificuldade para se resolver o Problema 2 da Atividade 3!*
164. **Pesquisador/Participante:** Então, pessoal, seria interessante abordar estes dois Problemas da Atividade 3 separadamente. Isso para não ‘viciar’ o pensamento do estudante, e deste modo conseguiríamos observar se o mesmo consegue realizar tal pensamento reversível.
165. **P-2 e P-4:** *Isso!*
166. **P-8:** *Porque, por mim, eu acho que eu nem parei muito no Problema 2 [Referiu-se à Atividade 3.] pra ler o exercício, eu pensei nos números do exercício anterior e vi que era o contrário!*
167. **Pesquisador/Participante:** Entendi!
168. **P-5:** *Ah, eu nem sei! Eu nem vi que o outro era igual porque o 1.º Problema eu não fiz pelo multiplicativo, eu fiz pelo Diagrama de Árvore.*
169. **P-2:** *Ah, tá!*
170. **P-7:** *Mas o Diagrama de Árvore eu também fiz, tanto que a Árvore ficou ao contrário. [Referiu-se à solução do Problema 2 da Atividade 3.]*
171. **P-5:** *É, mas eu juro que nem me toquei no o Problema 2 era o contrário do Problema 1, ou seja, que tinham os mesmos números! Eu acho que se o aluno entender bem isso, ele faz sem ter o primeiro problema.*
172. **Pesquisador/Participante:** Entendi! Mas, pessoal, como falei a Atividade 4 também é difícil por exigir uma capacidade ‘grande’ de interpretação do problema pelo aluno. E se o professor não der os quadros indicando os times que formam as equipes A, B, C e D...
173. **P-2:** *Ah, daí ficaria difícil!*
174. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-2, aumentaria o nível de dificuldade.
175. **P-4:** *Aumentaria 1000 vezes!*
176. **P-2:** *E a chance de esquecer um dos times seria maior!*
177. **Pesquisador/Participante:** Vocês acharam interessante esta primeira discussão? [Todas as participantes responderam afirmativamente.]

[Dando continuidade, P-5 leu a parte final do item 17.1.]

Uma postura pedagógica condizente com os estudos desenvolvidos até o momento na/para a abordagem das atividades seria a metodologia da solução de problemas. Nesta metodologia cabe ao professor ‘despertar’ o interesse do aluno desafiando-o/‘desequilibrando-o’ a pensar sobre determinado objeto de conhecimento. Por se tratar de estudantes no início da escolaridade, em conformidade com os estádios do desenvolvimento cognitivo, as atividades iniciais devem ser próximas à realidade (convívio) do estudante. Tal ‘proximidade’ facilitará a interpretação da situação problema pelo sujeito já que o mesmo valer-se-á dos seus esquemas de assimilação.

Além da importância (necessidade) do desafio ‘podendo’ implicar na atividade do aluno sobre o objeto de conhecimento, deve ser garantido momentos de troca de ideias entre os estudantes. Ao observar/interagir-se do modo utilizado pelo ‘outro’, na solução de determinado problema, o aluno poderá rever a própria estratégia. Tal ‘movimento’ de/‘gerir’ diferentes pontos de vista corroborará ao processo de descentração que, por conseguinte, contribuirá à constituição da reversibilidade operatória (‘ir e vir mental’). Reversibilidade é muito importante à construção das estruturas lógico-matemáticas.

Outra questão pertinente refere-se ao ‘acompanhamento’ feito pelo professor durante a abordagem de tais atividades. Aconselha-se ‘acompanhar’ ‘mais de perto’ os alunos do 2.º ano (e em alguns casos do 3.º ano) pelo fato dos mesmos ainda não serem tão ‘independentes’ na solução dos problemas. Como se encontram em processo de alfabetização, uma boa alternativa é a discussão oral acerca do problema, sendo necessário o professor auxiliar o estudante durante/no registro das estratégias pessoais elaboradas. No entanto, independentemente do ano de escolaridade, o docente deve – intencionalmente – auxiliar os alunos, seja questionando algum erro observado e/ou chamando a atenção à necessidade da leitura e (re)leitura do enunciado de modo a permitir a sua compreensão e a ‘retirada’ da informação matemática a ser utilizada.

[Concluída a leitura do 2.º parágrafo, P-8 pontuou:]

178. P-8: *Nós mesmas, aqui em nosso Grupo trocamos ideias umas com as outras.*

179. Pesquisador/Participante: Até porque, pessoal, a postura do professor que eu denotei no texto que estamos discutindo é a mesma que venho tentando fazer com vocês. Lembra quando eu defendo que a Formação Inicial tem que ser análoga à formação que vocês deverão propiciar aos seus alunos? Eu estou tentando seguir isso ‘à risca’. Então, quando vocês trocam ideias, o pensamento de uma pode auxiliar a outra, ou faz com que reveja o que está fazendo, e isso é ‘gerir’ diferentes pontos de vista que implica na descentração do sujeito. E a descentração auxilia na reversibilidade pelo fato de ‘dar’ mais mobilidade ao seu pensamento, deste ‘ir e vir’ mental, acarretando e colaborando na construção das estruturas lógico-matemáticas.

180. P-8: *Ai, que bom saber disso! Tem hora que eu preciso disso pra poder... tem hora que eu leio mas não sai daquele lugar, mas daí a outra pessoa te fala uma coisa, “Poxa, porque eu não pensei nisso!”, né, daí você revê o que fez e entende o que tá pedindo.*

181. Pesquisador/Participante: Porque talvez, P-8, na sua estrutura de assimilação falta alguma coisa pra você poder partir de onde está pra continuar...

182. P-8: *Isso!*

183. Pesquisador/Participante: O ‘outro’ diz aquela coisa que estava faltando e daí você consegue “dar o gancho” e ir ‘embora’!

184. P-8: *É verdade! Isso é muito legal. Eu tinha preocupação de fazer isso porque parece que você precisa de um amparo, de alguém te ajudar!*

185. P-2: *Mas o ser humano precisa!*

186. P-8: *Mas a gente precisa, né!? Mas a gente acha que tem que fazer sozinho!*

187. **Pesquisador/Participante:** Concorda que isso é o que ‘colocaram’ na sua cabeça. Não estou dizendo aqui que a escola não deva formar alunos autônomos, no entanto é imprescindível as relações interindividuais. O Empirismo exige uma pessoa autossuficiente, e como nosso modelo de formação foi esse acabamos nos cobrando em demasia.

188. **P-8:** *Nossa, fiquei até feliz agora!*

189. **P-2:** *Na sala a gente chega com o material do Grupo e a gente troca ideias sobre os exercícios. [Resposta compartilhada por P-7 e P-8.]*

190. **Pesquisador/Participante:** Vocês vem dizendo, e até com certa frequência, que o interessante do nosso Grupo de Estudo é isso, ou seja, a possibilidade da real discussão que permita trocas efetivas das ideias visando a constante construção do conhecimento.

191. **P-8:** *Então, meu medo é depois, quando a gente estiver sozinho! Por isso que eu falei que você tem que nos amparar o ano que vem! [Risos entre todas as participantes.]*

192. **P-2:** *Você pode até dar consultoria!*

193. **P-8:** *É, consultorias de Matemática!*

194. **P-2:** Não tem que ser só de Matemática, tem que ser geral! [Risos entre todas as participantes.]

195. **P-4:** *É verdade, até de psicológico!*

[Concluída a leitura-discussão do texto acima, fez-se uma discussão – iniciada por P-2 – a respeito dos Cursos de Formação Continuada e da dificuldade dos mesmos em modificar os saberes experienciais dos professores. O Pesquisador/Participante observou-se que a literatura indica ocorrer, em grande parte dos Cursos de Licenciatura (Formação Inicial), uma ‘simples’ passagem do aluno durante o Curso não propiciando uma ‘(re)significação’ dos saberes experienciais comumente alicerçados no Empirismo e no Racionalismo. Após tal indicativo, P-2 falou:]

196. **P-2:** *Mas daí, eu fico pensando. No nosso Curso, com algumas exceções, tem excelentes professores e que fazem muito para que o aluno mude estas ideias que ele aprendeu lá atrás, na Educação Básica. Mas eu tô vendo que, mesmo após 4 anos de curso, tem gente que não mudou nada! Então quer dizer que não tem solução?*

197. **Pesquisador/Participante:** É que daí, P-2, quando a Formação Inicial está bem estruturada de modo a possibilitar tal (re)significação é importante olhar como este aluno se comporta mediante o Curso. Se for um aluno que não está nem aí, não lê os textos, não participa das discussões, e só quer ter um diploma a nível superior, então não há como ocorrer tal mudança. Daí temos que observar os valores morais, éticos e até filosóficos deste ser, e isso remonta desde o início de sua vida.

198. **P-8:** *Nossa, como é complexo isso!*

199. **Pesquisador/Participante:** Vocês concordam com o que eu expus?

200. **P-2:** *Sim, e muito! Então quer dizer que, pra esse povo não tem solução?*
201. **Pesquisador/Participante:** Para haver mudança, ou seja, uma nova Equilíbrio é necessário a atividade do sujeito sobre o objeto do conhecimento. Sem tal atividade, que envolve a afetividade em querer melhorar, vejo que se torna difícil o licenciando forma-se um bom professor.
202. **P-2:** *Por isso que é melhor formas as pessoas desde pequenininhas!*
203. **Pesquisador/Participante:** Sim! E voltando ao nosso texto, pessoal, é interessante concluirmos quanto conhecimento o professor precisa ter no momento de abordar as atividades envolvendo Combinatória que nós discutimos. E é por isso que eu defendo a urgente valorização dos bons professores, pois não é fácil gerir situações de ensino relacionando inúmeras variáveis que permitam a construção de conhecimento pelo aluno. Daí eu penso que se torna uma missão quase impossível, numa sala dos anos iniciais, promover um bom ensino com 35-40 alunos pelo fato de ser muito complexo esta relação entre professor e alunos. E não só dos anos iniciais, mas principalmente porque é o início da escolarização formal, mais sistemática.
204. **P-2:** *Não é quase impossível, chega a ser impossível!*
205. **Pesquisador/Participante:** Lembra que eu já comentei com vocês o como era difícil não conseguir atingir todos os meus antigos alunos quando eu era professor nos anos iniciais?
206. **P-7:** *Nossa, deve ser difícil viver isso!*
207. **Pesquisador/Participante:** Tem alguns que nem ligam, infelizmente. Mas eu, como prezo muito a minha profissão, isso causava em mim grande desconforto!
208. **P-7:** *Quando eu fui fazer estágio, numa sala do 1.º ano tinham 32 alunos!*
209. **Pesquisador/Participante:** Nossa, são muitos alunos!
210. **P-7:** *A professora não conseguia dar atenção pra todos!*
211. **Pesquisador/Participante:** E não dá mesmo, pelo menos na mesma aula! Imagina a dificuldade para alfabetizar/letrar 32 crianças? Dava pra montar 2 salas com 16 alunos cada, que a meu ver seria o ideal num 1.º ano!
212. **P-2:** *Só que daí entra outras coisas porque nesta escola não tinha nem sala! Não tinha espaço físico! E a sala era um aperto!*
213. **P-7:** *Um aperto!*
214. **Pesquisador/Participante:** Então o corpo gestor desta escola se viu obrigado a colocar 32 alunos numa mesma sala!
215. **P-2:** *É, não tinha jeito! A única coisa que daria pra fazer a meu ver, se o trabalho fosse bem desenvolvido, era colocar 2 professores na sala! Não só uma auxiliar, mas sim 2 professores mesmo!*

216. **Pesquisador/Participante:** Mas daí administrativamente não é permitido!
217. **P-2:** *É verdade!*
218. **P-8:** *Eu acho que é difícil ter 2 professores numa mesma sala!*
219. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-8, tem que haver um bom entrosamento caso fosse possível. [Como não houveram outras dúvidas/comentários, deu-se início à discussão das definições envolvendo os vários tipos de Agrupamento (Permutação Simples e Com Repetição, Arranjo Simples e Com Repetição e Combinação) a partir dos problemas feitos nos dois Grupos de Estudo anteriores. P-2 fez a leitura do itens 17.2 e 17.2.1, expostos abaixo:]

17.2 Análise Combinatória: alguns tipos de agrupamentos

Os problemas pertencentes à Combinatória – abordados nos três últimos encontros – denotaram diferentes tipos de agrupamentos que exigiram diferentes estratégias à solução. Nos itens seguintes far-se-á uma breve discussão acerca desses diferentes tipos de agrupamentos (Permutação, Arranjo e Combinação). Além disso, serão apresentadas algumas expressões (‘fórmulas’) visando ‘facilitar’ a solução dos referidos problemas.

17.2.1 Permutação simples e com repetição

Permutação Simples é definida como sendo o número de possibilidades de misturar/trocar/arrumar n elementos de um determinado conjunto em n posições de tal modo que cada possibilidade se diferencie pela **ordem** em que os elementos aparecem. Por exemplo, para obter os anagramas da palavra COR (6.º problema – item 15.4) permutaram-se os 3 elementos (letras C, O, R) em 3 posições. Na Permutação Simples cada um dos elementos terá ‘seu lugar’ em cada agrupamento ordenado, no caso do exemplo em cada anagrama feito.

A expressão abaixo possibilita calcular o número de Permutações Simples (P_n):

$$P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 \quad (1.)$$

, onde n indica o número de elementos do conjunto considerado.

Considerando a palavra COR, sendo $n = 3$ (total de elementos ‘letras’ do conjunto), ao utilizar a expressão (1.) encontra-se o total de anagramas a serem formados. Observe:

$$P_n = P_3 = 3 \times (3 - 1) \times (3 - 2) = 3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ possíveis anagramas}$$

O valor obtido em P_n também é denominado **FATORIAL** do número natural n , sendo indicado por $n!$ (lê-se “fatorial de n ou n fatorial”). Em expressão matemática temos:

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 \quad (2.)$$

, para $n \geq 1$.

Das expressões (1.) e (2.) obtém-se a expressão (3.):

$$P_n = n! \quad (3.)$$

Na Permutação Com Repetição há a ocorrência de elementos repetidos dentre os n elementos do conjunto a permutar. Ainda no 6.º problema (item 15.4), a partir da palavra ANA construíram-se os seguintes anagramas: ANA, AAN, NAA, NAA, ANA, AAN. É possível perceber que os 3 últimos anagramas são repetidos, fato esse devido à repetição da letra A no conjunto dos 3 elementos (letras A, N, A). Assim, o cálculo das permutações possíveis difere do cálculo da Permutação Simples na qual não há repetição dos elementos.

No encontro anterior utilizou-se a seguinte divisão para calcular o número de anagramas da palavra ANA excluindo-se os repetidos. Veja abaixo:

$$\frac{\text{Quantidade de Possibilidades a partir de 3 elementos – letras A, N, A}}{\text{Quantidade de Possibilidades a partir dos 2 elementos repetidos – letras A, A}} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

‘Traduzindo’ o exposto em linguagem matemática obtemos a seguinte expressão que permite calcular o número de Permutações Com Repetição (P_r):

$$P_r = P_n^\alpha = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{\alpha \times (\alpha-1) \times (\alpha-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{n!}{\alpha!} \quad (4.)$$

, onde n indica o número de elementos do conjunto considerado e α representa o número de determinado elemento que se repetiu.

Considerando a palavra ANA, sendo $n = 3$ e $\alpha = 2$ (as 2 letras repetidas ‘A’), ao utilizar a expressão (4.) encontra-se o total de anagramas a serem formados. Observe:

$$P_n^\alpha = P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3 \text{ possíveis anagramas}$$

‘Generalizando’ a expressão (4.) obtém-se:

$$P_r = P_n^{\alpha, \beta, \dots, \gamma} = \frac{n!}{\alpha! \times \beta! \times \dots \times \gamma!} \quad (5.)$$

, onde n indica o número de elementos do conjunto considerado e $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ representam os números de determinados elementos que se repetiram.

Aplicando a expressão (5.) calcula-se o número de anagramas da palavra COCO (6.º problema – item 15.4). Observe:

$$P_r = P_n^{\alpha, \beta} = \frac{n!}{\alpha! \times \beta!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1)} = \frac{24}{4} = 6 \text{ possíveis anagramas}$$

, onde n indica os 4 elementos ‘letras’ da palavra COCO (C, O, C, O), α representa as 2 letras repetidas ‘C’ e β indica as 2 letras repetidas ‘O’.

[O Pesquisador/Participante explicou à P-8 a expressão (1.) já que a mesma não entendeu a terminologia utilizada. Após a leitura do exemplo referente aos anagramas da palavra COR, o Pesquisador/Participante registrou na lousa o Diagrama de Árvore para evidenciar o porquê da multiplicação $3 \times 2 \times 1$. Quando questionadas sobre o número fatorial, apenas P-2 disse se recordar. Durante a discussão, todas as participantes disseram que os exemplos facilitaram a compreensão das expressões matemáticas denotadas simbolicamente. P-8 disse ser ‘essencial’ o exemplo para seu entendimento. A respeito disso, observe o diálogo realizado:]

220. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, com o exemplo fica mais fácil, né! Parece que através dele é possível ‘concretizar’ a expressão...

221. **P-2:** *É que vem mais pro real, né!*

222. **Pesquisador/Participante:** É!

223. **P-2:** *Ai, é horrível né, igual, você vai ler a expressão e eu nem sabia como ler!*

224. **P-8:** *É... com as fórmulas você vai lendo e fica difícil!*

225. **P-7:** *É!*

226. **P-2:** *Fica muito abstrato, então ter que ter os exemplos pra comparar!*

227. **P-8:** *Eu preciso de exemplo!*

228. **Pesquisador/Participante:** Então os exemplos foram importantes?

229. **P-4:** *Com certeza!*

230. **Pesquisador/Participante:** E os exemplos são importantes porque vocês vivenciaram tais problemas já que pensaram neles anteriormente. A sistematização deste conteúdo passou ‘inicialmente’ pela vivência de vocês ao tentarem solucionar os problemas. Agora, imaginem se no primeiro dia eu já tivesse exposto a definição?

231. **P-2:** *Eu iria embora!*

232. **P-4:** *Daí depois você pega a lista de exercício e pede pra fazer do a) ao z)! [Risos entre todas as participantes.]*

233. **P-7:** *Eu tenho uma dúvida!*

234. **Pesquisador/Participante:** Diga!

235. **P-7:** *Se tem um número muito grande, acontece de ter?*

236. **Pesquisador/Participante:** Como assim?

237. **P-7:** *Tipo, ali a gente fez com 4 letras! [Referiu-se à palavra COCO.] E se fossem 10 letras?*

238. **Pesquisador/Participante:** Vamos ver como ficaria se fosse a palavra Pindamonhangaba!

239. **P-7:** *Daí você teria que ir fazendo do mesmo jeito que o exemplo?*

240. **Pesquisador/Participante:** Sim! Teria que calcular, só que daria um número de anagramas bem elevado!

241. **P-2:** *Teria que usar a calculadora científica pra calcular!*

[O Pesquisador/Participante registrou na lousa e explicou o cálculo realizado para descobrir os anagramas possíveis da palavra PINDAMONHANGABA. Observe tal registro:]

P I N D A M O N H A N G A B A Total (n) = 15 letras Letra 'N' (α) = 3 letras Letra 'A' (β) = 4 letras $P_n^{\alpha,\beta} = P_{15}^{3,4} = \frac{15!}{3! \times 4!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} =$ $= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = \frac{54486432000}{6} = 9081072000$
--

[Após a explicação, P-7 falou:]

242. **P-7:** *Eu entendi! Então tem que multiplicar todos os números mesmos!*

243. **Pesquisador/Participante:** P-2, você, assim como as outras, disse que ainda encontram dificuldades pra saber quando é um agrupamento ou outro. Na Permutação o importante é saber que cada elemento vai ter o seu 'espaço' no agrupamento a ser feito.

244. **P-2:** *Ok!*

[Dando continuidade, P-2 realizou a leitura do item 17.2.2, apresentado a seguir:]

17.2.2 Arranjo simples e com repetição

Arranjo Simples é definido como sendo o número de possibilidades de misturar/trocar/arrumar n elementos de um determinado conjunto em m posições, com m ≤ n, de tal modo que cada possibilidade se

diferencie pela **ordem** em que os elementos aparecem. Pode-se ainda dizer que os $\underline{n}$ elementos foram tomados/arranjados $\underline{m}$ a $\underline{m}$. Exemplificando, no 2.º problema (item 15.4) as 8 turmas do Ensino Médio ($\underline{n}$) foram arranjadas 2 a 2 ($\underline{m}$ a $\underline{m}$) já que pretendia-se descobrir as possibilidades para o 1.º e 2.º lugares numa competição realizada entre as 8 turmas.

Por meio da seguinte expressão faz-se possível calcular o número de Arranjos Simples ($A_{n,m}$ ⁵²) para $\underline{n}$ elementos arranjados $\underline{m}$ a $\underline{m}$:

$$A_{n,m} = \underbrace{\left(\overset{1^{\text{a}} \text{ posição}}{\widetilde{n}} \right) \times \left(\overset{2^{\text{a}} \text{ posição}}{\widetilde{n-1}} \right) \times \left(\overset{3^{\text{a}} \text{ posição}}{\widetilde{n-2}} \right) \times \cdots \times \left[\overset{m\text{-ésima posição (última)}}{\widetilde{n-(m-1)}} \right]}_{m \text{ fatores}} \quad (6.)$$

, onde:

n indica as possibilidades na 1.ª posição por possuir n elementos disponíveis;

$(n-1)$ indica as possibilidades na 2.ª posição por possuir $n - 1$ elementos disponíveis;

$(n-2)$ indica as possibilidades na 3.ª posição por possuir $n - 2$ elementos disponíveis;

$(n-(m-1))$ indica as possibilidades na m -ésima ('última') posição por possuir $n - (m - 1)$ elementos disponíveis.

Utilizando a referida expressão (6.) no exemplo citado, sendo $\underline{n} = 8$ (8 turmas do Ensino Médio) e $\underline{m} = 2$ (1.º e 2.º lugares), obtém-se como resposta 56 possibilidades. Observe a seguir:

$$\begin{aligned} A_{n,m} = A_{8,2} &= \left(\overset{1^{\text{a}} \text{ posição}}{\widetilde{8}} \right) \times \left(\overset{2^{\text{a}} \text{ posição}}{\widetilde{8-1}} \right) = \\ &= 8 \times (8 - 1) = \\ &= 8 \times 7 = 56 \text{ possibilidades} \end{aligned}$$

Outro exemplo de Arranjo Simples encontra-se na 1.ª proposta do 4.º problema (item 15.4) visando o cálculo do número possível de senhas a serem formadas. Considerando $\underline{n} = 10$ (10 algarismos) e $\underline{m} = 4$ (4 dígitos 'posições' da senha), através da expressão (6.) calcula-se o número de senhas formadas nesta proposta. Observe abaixo:

$$\begin{aligned} A_{n,m} = A_{10,4} &= (n) \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times [n-(m-1)] = \\ &= \left(\overset{1^{\text{a}} \text{ posição}}{\widetilde{10}} \right) \times \left(\overset{2^{\text{a}} \text{ posição}}{\widetilde{10-1}} \right) \times \left(\overset{3^{\text{a}} \text{ posição}}{\widetilde{10-2}} \right) \times \left[\overset{m\text{-ésima posição (4ª)}}{\widetilde{10-(4-1)}} \right] = \\ &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040 \text{ possíveis senhas} \end{aligned}$$

No caso do Arranjo Com Repetição, o número de possibilidades não diminui de uma posição a outra já que o elemento considerado na 1.ª posição pode ser repetido na 2.ª posição, e assim por diante. A expressão seguinte permite calcular o número de Arranjos Com Repetição $[(AR)_{n,m}]$ para $\underline{n}$ elementos arranjados $\underline{m}$ a $\underline{m}$ não necessariamente distintos:

$$(AR)_{n,m} = \underbrace{\overset{1^{\text{a}} \text{ posição}}{\widetilde{n}} \times \overset{2^{\text{a}} \text{ posição}}{\widetilde{n}} \times \overset{3^{\text{a}} \text{ posição}}{\widetilde{n}} \times \cdots \times \overset{m\text{-ésima posição (última)}}{\widetilde{n}}}_{m \text{ fatores}} = n^m \quad (7.)$$

, onde n representa as possibilidades em cada uma das posições a serem 'ocupadas'.

Aplicando tal expressão (7.) é possível obter o número de senhas a serem formadas na 2.ª proposta (problema 4 – item 15.4):

$$\begin{aligned} (AR)_{n,m} = (AR)_{10,4} &= \underbrace{\overset{1^{\text{a}} \text{ posição}}{\widetilde{n}} \times \overset{2^{\text{a}} \text{ posição}}{\widetilde{n}} \times \overset{3^{\text{a}} \text{ posição}}{\widetilde{n}} \times \overset{m\text{-ésima posição (4ª)}}{\widetilde{n}}}_{m \text{ fatores (4 vezes)}} = \\ &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10000 \text{ possíveis senhas} \end{aligned}$$

, onde n indica os 10 elementos (algarismos) e m representa as 4 posições (dígitos) formados de algarismos não necessariamente distintos.

[Após a leitura da expressão (6.), P-4 e P-7 indicaram que o mesmo era muito difícil, sendo necessário um exemplo para esclarecimento. P-2 explicou à P-7 e P-8 o exemplo das 8 turmas do Ensino Médio, justificando porque na 1.ª posição 'aparece' o número 8 e na segunda posição coloca-se o número 7, sendo tais números multiplicados entre si. Concluída a leitura do exemplo referente a 1.ª proposta do 4.º problema, P-2 indagou:]

245. **P-2:** Eu prefiro resolver sem a fórmula! [Referiu-se a expressão (6.).]

⁵² $A_{n,m}$ – 'lê-se Arranjo de n elementos tomados m a m '.

246. **P-4:** *Eu também!*

247. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, não precisa se ‘apegar’ na notação científica, na fórmula!

248. **P-4:** *A gente não tinha nenhuma pretensão de nos apegarmos na fórmula! [Risos entre todas as participantes.] Eu, pelo menos...*

249. **P-2:** *Isso nem passou na minha cabeça!*

250. **P-4:** *Na minha não!*

251. **Pesquisador/Participante:** Eu as trago para que vocês possam ‘visualizar’ a sistematização/formalização e no ‘futuro’, quem sabe, passar a valer-se da linguagem simbólica.

252. **P-8:** *Ah, Pesquisador/Participante, eu aprendi só desse jeito!*

253. **P-2:** *Como assim?*

254. **P-8:** *Nas fórmulas, aplicando as fórmulas! Por isso que agora, aprender ao contrário pra mim é difícil! [A participante não está ‘acostumada’ a primeiro resolver situações problemas para, só depois, sistematizar os conteúdos. Durante a Educação Básica e no Curso Superior de Economia os seus professores apresentaram primeiro a fórmula/definição e, somente depois os exercícios correlatos.]*

255. **Pesquisador/Participante:** Você foi treinada!

256. **P-8:** *Sim, fui!*

257. **Pesquisador/Participante:** Percebam, pessoal, que a definição é a última coisa que estou fazendo!

258. **P-8:** *E com o exemplo, vendo o que a gente já fez a agora fica mais fácil de entender!*

[Ao término da leitura do referido item (17.1.2) P-7 falou:]

259. **P-7:** *Deixa eu só ver se eu entendi! No outro [Referiu-se à Permutação Simples.] tinha que fazer a conta até chegar no 1, tinha que ir diminuindo até chegar no 1. Esse aqui eu faço até só a quantia, vamos supor que eram 4 dígitos, então só faço até o quarto.*

260. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo, P-7. Quando temos um Arranjo vamos até a posição, no caso da senha ficou $10 \times 9 \times 8 \times 7$. Se for um Arranjo Com Repetição fazemos $10 \times 10 \times 10 \times 10$ já que não diminui de uma possibilidade para outra!

261. **P-7:** *Entendi!*

262. **Pesquisador/Participante:** E aí, P-5, você está começando a entender estas diferenciações?

263. **P-5:** *Sim, deu pra entender! Não sei se eu vou gravar, mas se eu ler e entender eu vou saber qual é! Dá pra entender sim!*
264. **P-7:** *Eu estava pensando na fórmula e se não tivesse feito os exercícios antes não dava nem pra entender!*
265. **P-2:** *A princípio você olha as fórmulas e é difícil entender!*
266. **P-4:** *Eu não ia nem tentar!*
267. **P-7:** *A gente, no começo, não sabe nem ler as fórmulas!*
268. **Pesquisador/Participante:** *E vocês viram que não é difícil compreender, né!?*
269. **P-2:** *Não é mesmo!*
270. **P-4:** *Eu sempre tive muito medo de tudo isso aí!*
271. **P-2:** *E daí volta na experiência que a gente teve disso! Que é como a gente foi tratada! Eu lembro disso, eu lembro que as professoras chegavam lá e colocavam a fórmula mesmo...*
272. **P-7:** *Não te ensinavam nem a ler as fórmulas!*
273. **P-2:** *Não mesmo!*
274. **P-7:** *Aquele do fatorial pra mim é o pior, porque eu tive problema de mudar muito de escola e eu lembro quando eu cheguei numa a professora colocava isso e eu perguntava “O que é isso, essa exclamação no número?”... E eu nunca entendi!*
275. **P-2:** *Era pra você ler assim: “Trêsssss!” [Risos entre todos.]*
276. **P-4:** *É pra dar ênfase no número!*
277. **P-7:** *Daí eu não entendia nada! A professora colocava aquilo na lousa do fatorial, daí o pessoal da sala resolvia e eu perguntava e ela não me explicava!*
278. **P-2:** *Nossa, que desespero!*
279. **P-7:** *A professora agia assim, tipo, se você não aprendeu se vira! E na época não tinha livros pra pegar e ‘correr atrás’ deste assunto, e daí eu empurrei com a barriga o semestre inteiro e fechei com nota péssima e só passei porque ganhei pontos de comportamento. Daí acabou o semestre e passou! Quando eu via essas questões no vestibular eu já pulava porque eu não tinha ideia do que era!*
280. **Pesquisador/Participante:** *Uma das maiores dificuldades quando o aluno ‘passa’ da Aritmética pra Álgebra é essa! Até então só se trabalhava com números, os professores não trabalham a questão da generalização, porque a letra enquanto representando uma incógnita ou uma variável representa só uma possibilidade de um número qualquer. Daí começa a*

misturar com as letras que eram de uso exclusivo da Língua Portuguesa, se isso não for bem trabalhado virá um nó na mente do aluno!

281. **P-4:** *Em mim dava desespero quando eu via as letras misturadas com os números na lousa!*

282. **P-2:** *Mas isso é uma ‘bola de neve’! Eu ficava pensando será que a professora sabia o que significava aquelas letras?*

283. **P-7:** *Então, mas é aí que está o problema! Se a gente não tiver... o meu medo é isso também aqui na faculdade a gente aprender tudo superficial! Daí se chega e o aluno te questiona! Você não sabe... se você sabe o mesmo ali que o aluno...*

284. **P-2:** *Daí você usa a estratégia do Pesquisador/Participante sendo sincero e diga: Não sei, vou pesquisar!*

285. **P-7:** *Só que a maioria dos professores que eu tive não foi assim. Eles me mandavam ficar quieta, ir lá sozinha e me virar pra fazer os exercícios! Daí eu ficava quieta com medo de perguntar até acabar a aula. Daí eu chegava em casa e perguntava pra minha irmã! Só que daí ela aprendeu de um jeito, e a professora ensinava de outra, daí não servia!*

286. **P-2:** *Que triste isso!*

287. **Pesquisador/Participante:** *Daí as aulas de Matemática viraram um martírio?*

288. **P-7:** *É, as aulas não acabavam!*

289. **Pesquisador/Participante:** *Eu comentei ontem em uma palestra que aprender sempre é difícil! Só que, quando você tem um lado afetivo favorável, o gostar, parece que fica tudo mais fácil! Até parece que o tempo passa mais rápido, embora isso não ocorra!*

290. **P-7:** *E eu tinha muita dificuldade de tentar resolver sozinha os exercícios! A minha mãe falava que não sabia e então não poderia me ajudar! Eu pegava o livro, mas sozinha não conseguia ‘sair’ do lugar!*

291. **Pesquisador/Participante:** *Lauro de Oliveira Lima disse uma vez que se fossemos ‘qualificar’ a maior contribuição de Piaget para a escola, seria o interacionismo, ou seja, as relações interindividuais entre os sujeitos são importantes. Vocês concordam, pessoal?*

292. **P-7:** *Aqui mesmo no nosso Grupo chegou num ponto que a gente leva os desafios pra casa e tenta fazer sozinhos! Mas, por mais que você fez sozinha, quando a gente se encontra a gente quer contar com as colegas, confirmar as nossas ideias.*

293. **P-2:** *É igual no começo da aula! [Referiu-se ao Grupo de Estudo.] Como a gente tem esse entrosamento, essa maturidade sabe que ninguém vai te ofender se você perguntar uma dúvida. Porque depende da sala que você está, você não abre a boca pra perguntar! Eu não faço isso em muitas aulas da faculdade! Eu não pergunto do jeito que eu pergunto aqui! Eu não sou assim!*

294. **P-8:** *Mesmo quando eu levo um pouco de dúvidas, mas depois eu pergunto!*

295. **Pesquisador/Participante:** É importante mesmo questionar!
296. **P-7:** *Aqui não é nem que você leva dúvida! Mas é que você está ‘digerindo’ os conceitos!*
297. **P-4:** *E daí depois que você vê que você tinha aquela dúvida!*
298. **Pesquisador/Participante:** Os ‘Momentos de Síntese’ servem para isso! Para vocês ‘tomarem consciência’ do que foi aprendido e do que está faltando! Até pra mim como uma maneira de avaliá-las constantemente.
299. **P-2:** *É pra avaliar! Não vou mais fazer! [Risos entre todas as participantes.] Eu tenho trauma de avaliação!*
300. **Pesquisador/Participante:** E muitos alunos, P-2, infelizmente tem trauma de avaliação. Numa certa disciplina da faculdade, por algum motivo eu comecei a ficar com medo de fazer avaliação daquela disciplina. Das outras matérias não! Por isso, quando me tornei professor nos anos iniciais sempre me políciei bastante para que meus alunos não desenvolvessem esse medo que eu vivi naquela disciplina!

[Em prosseguimento, P-2 fez a leitura do item 17.2.3 esboçado abaixo:]

17.2.3 Combinação simples

Até o momento a **ordem** dos elementos permutados e arranjados foi importante para diferenciar os agrupamentos ordenados. Assim, o anagrama COR diferiu de CRO, pois a ordem dos elementos (letras) deste segundo sofreu alteração quando comparado ao primeiro. No entanto, no caso da Combinação Simples a **ordem** dos elementos combinados não importa. Exemplificando, no 8.º problema (item 15.4) discutiu-se que as duplas Beto-Carla {**B**, **C**} e Carla-Beto {**C**, **B**} eram as mesmas, já que a ordem dos alunos não implicou em duplas diferentes.

Intuitivamente, o conceito de Combinação Simples associa-se à noção de escolher subconjuntos. No referido exemplo, a partir do conjunto dos alunos selecionados pela professora Sueli {Beto (**B**), Carla (**C**), Danilo (**D**), Eduarda (**E**)} formaram-se 6 possíveis subconjuntos (duplas):

{B, C}, {B, D}, {B, E}, {C, D}, {C, E}, {D, E}

Assim, define-se Combinação Simples como sendo o número de subconjuntos com exatamente **m** elementos, no qual os subconjuntos escolhidos advêm de **n** elementos de um conjunto tomados/arranjados **m** a **m**. Como a **ordem** dos elementos não importa já que se formam subconjuntos, o cálculo das Combinações Simples pode ser representado nas seguintes etapas:

1.ª – Calculam-se os **n** elementos do conjunto arranjados **m** a **m**, recaindo na expressão (6.):

$$A_{n,m} = \underbrace{\left(\overset{1^{\text{ª}} \text{ posição}}{\overbrace{n}} \right) \times \left(\overset{2^{\text{ª}} \text{ posição}}{\overbrace{n-1}} \right) \times \left(\overset{3^{\text{ª}} \text{ posição}}{\overbrace{n-2}} \right) \times \cdots \times \left(\overset{m\text{-ésima posição (última)}}{\overbrace{n-(m-1)}} \right)}_{m \text{ fatores}}$$

No caso do exemplo, para os 4 alunos arranjados 2 a 2 temos:

$$A_{n,m} = A_{4,2} = (n) \times (n-1) = \left(\overset{1^{\text{ª}} \text{ posição "da dupla"}}{\overbrace{4}} \right) \times \left(\overset{2^{\text{ª}} \text{ posição "da dupla"}}{\overbrace{4-1}} \right) = 4 \times 3 = 12$$

2.ª – Calculam-se as permutações possíveis de serem formadas com os **m** elementos do subconjunto. Tal cálculo determina o múltiplo de subconjuntos que irá se repetir. Por meio da expressão (1.) é possível realizar tal cálculo:

$$P_m = m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

No referido exemplo, permutam-se os 2 elementos (alunos) que formam os subconjuntos (duplas):

$$P_m = P_2 = m \times (m-1) = (2) \times (2-1) = 2 \times 1 = 2$$

3.ª – Para calcular o total de Combinações Simples ($C_{n,m}$), divide-se o total dos **n** elementos arranjados **m** a **m** pelo total das permutações formadas com os **m** elementos do subconjunto:

$$C_{n,m} = \frac{A_{n,m}}{P_m} = \frac{\overbrace{\left(\binom{n}{1} \right) \times \left(\binom{n-1}{1} \right) \times \left(\binom{n-2}{1} \right) \times \dots \times \left(\binom{n-(m-1)}{1} \right)}^{m \text{ fatores}}}{m \times (m-1) \times (m-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} \quad (8.)$$

Ao realizar tal divisão excluem-se os subconjuntos repetidos, no caso do exemplo as duplas repetidas. Aplicando tal expressão (8.) neste exemplo temos:

$$C_{4,2} = \frac{A_{4,2}}{P_2} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = \frac{12}{2} = 6 \text{ possíveis duplas}$$

A partir dos 3 tipos de agrupamentos (Arranjo, Combinação e Permutação) percebe-se que a solução da maioria dos problemas envolvendo a Combinatória depende da natureza dos mesmos, ou seja, será necessário analisar quando a ordem dos elementos importa ou não.

[Durante a leitura, o Pesquisador/Participante salientou que a ordem dos elementos não é importante nas Combinações Simples, fato esse que não ocorre nas Permutações e Arranjos. P-4 e P-5 acharam interessante compreender o significado do termo ‘n-ésima’, pois até então apenas escutavam tal expressão sem saber o significado. Em seguida, o Pesquisador/Participante indagou:]

301. Pesquisador/Participante: Pessoal, na Combinação nós temos que dividir o Arranjo dos n elementos tomados m a m pela Permutação dos m elementos do subconjunto!

302. P-2: *Deixa eu fazer uma pergunta! Na Combinação me dê um exemplo sem ser com pessoas!*

303. Pesquisador/Participante: Por exemplo, você pode montar cestas de frutas com 5 tipos diferentes. Supondo que você tenha 15 frutas. Em cada cesta a ser formada por 5 tipos não importa a ordem das frutas a serem colocadas em cada cesta.

304. P-2: *Ah, tá! E com números dá pra fazer isso?*

305. Pesquisador/Participante: Sim, também dá! Por exemplo, o subconjunto formado pelos número 1 e 2 é o mesmo subconjunto formado por 2 e 1. Porque aqui estamos falando de subconjunto, e não numa sequência ordenada de algarismos para formar um número! **[O Pesquisador/Participante registrou na lousa $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.]**

306. P-2: *Sim! Então quer dizer que nunca vai ter uma Combinação de 4 elementos tomadas 4 a 4?*

307. Pesquisador/Participante: É interessante a sua pergunta P-2!

308. P-2: *Eu não entendi o que a P-2 perguntou!*

309. P-7: *E nem eu!*

310. Pesquisador/Participante: A P-2 perguntou, por exemplo, se a diretora tivesse que formar um quarteto com os 4 alunos selecionados pela professora Sueli, ou seja, seria necessário Combinar os 4 elementos 4 a 4. Entenderam agora o que a P-2 perguntou?

311. P-4, P-5, P-7 e P-8: *Sim!*

312. Pesquisador/Participante: Então nós vamos fazer uma Combinação de 4 elementos tomados 4 a 4! Primeiro eu faço um Arranjo Simples de 4 elementos tomados 4 a 4. Depois

eu faço uma permutação do quarteto. Daí fica assim: **[O Pesquisador/Participante registrou na lousa o denotado abaixo:]**

$$\frac{A_{4,4}}{P_4} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1$$

Assim é possível combinar apenas 1 quarteto.

313. P-5: *Ah, como a ordem não influencia então tanto faz um aluno sendo o primeiro ou outro!*

314. Pesquisador/Participante: Isso mesmo, P-5. Naquele problema que nós discutimos eu havia considerados os alunos Beto, Carla, Danilo e Eduardo. Esses quatro alunos formam apenas 1 subconjunto (quarteto) possível para se enviar nas Olimpíadas de Matemática. Tudo bem, pessoal? **[Nenhuma participante se pronunciou acerca de possíveis dúvidas.]** Então, quando o número de elementos a combinar coincide com o número de elementos do subconjunto o resultado é 1.

315. P-8: Sim!

316. Pesquisador/Participante: E quando eu tenho um Arranjo onde o número de elementos coincide com o número de posições, recai numa Permutação. Vejam aqui na lousa: **[O Pesquisador/Participante registrou o seguinte enquanto falava:]**

$$\begin{aligned} A_{3,3} &= 3 \times 2 \times 1 = 6 \\ P_3 &= 3 \times 2 \times 1 = 6 \\ \text{logo, } A_{3,3} &= P_3 \end{aligned}$$

317. P-2: *Sim, porque todos os elementos vão ter a sua 'casinha'!*

318. Pesquisador/Participante: Isso mesmo, P-2! Se eu tenho 3 elementos a serem arranjados 3 a 3 serão ocupadas todas as casinhas, o que recai numa Permutação de 3 elementos. É por isso que alguns autores iniciam a abordagem de Combinatória com Permutação, passando para Arranjo. Embora há alguns que começam com Arranjo. Mas Combinação acaba sendo a última já que exige das outras duas (Permutação e Arranjo) para sua compreensão formal. **[Todas as participantes anotaram o registrado na lousa.]**

[Para finalizar tal item (17.2), o Pesquisador/Participante solicitou a seguinte atividade:]

1. Classifique, quando possível, os problemas abordados no 15.º encontro (item 15.3) considerando os 3 tipos de agrupamentos estudados:

PROBLEMA		CLASSIFICAÇÃO
1.		
2.		
2.1.		
3.	a)	
	b)	
	c)	

	4.	1. ^a proposta	
		2. ^a proposta	
		3. ^a proposta	
		4. ^a proposta	
		5. ^a proposta	
		6. ^a proposta	
	5.		
	6.	a)	
		b)	
		c)	
		d)	
		e)	
	7.		
	7.1.		
	8.		
	8.1.		

[As participante fizeram conjuntamente tal atividade. P-2 auxiliou suas colegas na classificação. Decorridos 15 minutos, o Pesquisador/Participante conferiu as classificações realizadas.]

[Para ‘casa’ solicitou-se a solução de 4 desafios envolvendo a Combinatória. Tais desafios serão analisados no próximo encontro.]

APÊNDICE V – TRANSCRIÇÃO DO 18.º ENCONTRO

Data: 30/08/2012

Tempo de Duração: 3 horas e 10 minutos.

[P-1 e P-9 ‘retornaram’ ao Grupo de Estudo já que não puderam participar dos 5 últimos encontros. No intuito de situá-las, o Pesquisador/Participante comentou brevemente as atividades desenvolvidas neste período e solicitou que realizassem a leitura dos textos discutidos e fizessem os desafios abordados até o momento. Por fim, combinou-se que no próximo encontro o Pesquisador/Participante ‘sanará’ as dúvidas decorrentes de tal ‘tarefa’ (leitura e realização dos desafios).]

[Inicialmente foi dada continuidade na discussão dos itens 17.3 ‘Uma possível relação entre Combinatória, Estatística e Probabilidade’ e 17.4 ‘Algumas considerações sobre a Probabilidade’ que não puderam ser abordadas por falta de tempo no encontro anterior.]

1. Pesquisador/Participante: Hoje, pessoal, nós vamos iniciar discutindo uma relação envolvendo Combinatória, Estatística e Probabilidade.

17.3 Uma possível relação entre Combinatória, Estatística e Probabilidade

Como já salientado, a Combinatória, a Estatística e a Probabilidade constituem o bloco denominado ‘Tratamento da Informação’. Além das especificidades de cada uma, faz-se possível o estabelecimento de relações entre as mesmas. No desafio 5 (item 13.3.1), por exemplo, antes de calcular a probabilidade de não sair soma 5 nas faces de dois dados perfeitos lançados simultaneamente, foi necessário denotar os 36 pares provenientes de tal lançamento. Assim, para solucionar um problema pertencente à Probabilidade utilizou-se da Combinatória e da Estatística.

Para o cálculo do número dos possíveis pares a serem formados com as faces dos dois dados lançados simultaneamente, recorre-se ao Princípio Fundamental da Contagem (Combinatória). A partir desse princípio temos:

$$N^{\circ}(\text{pares possíveis}) = \overset{\text{possibilidades do 1}^{\circ} \text{ dado}}{\widehat{6}} \times \overset{\text{possibilidades do 2}^{\circ} \text{ dado}}{\widehat{6}} = 36$$

, sendo que em cada lançamento de cada dado há 6 possibilidades de saída: {(FACE 1) ou (FACE 2) ou (FACE 3) ou (FACE 4) ou (FACE 5) ou (FACE 6)}.

Além de calcular o total de possíveis pares foi preciso obtê-los para saber, do total dos pares, quais não possuíam soma 5. Para a construção de tais pares utilizou-se da seguinte representação retangular por meio de uma Tabela (Estatística):

2.º DADO (lançado)	6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
	5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
	4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
	3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
	2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
	1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
Face		1	2	3	4	5	6
1.º DADO (lançado)							

A obtenção de tais pares também poderia advir do Diagrama de Árvore, ferramenta essa importante à Combinatória.

Por fim, sabendo que o total de pares provenientes do lançamento de dois dados simultâneos é 36 e o total de pares cuja soma não seja 5 é 32, calcula-se a Probabilidade por meio da seguinte divisão (razão):

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{número de pares cuja soma não é 5}}{\text{número total de pares}} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9} \cong 0,89$$

O valor encontrado ($\cong 0,89$) indica que há aproximadamente 89% de chance de não sair soma 5 a partir do lançamento simultâneo de dois dados perfeitos.

[Ao término da leitura as participantes foram questionadas se haviam dúvidas com relação ao texto. P-2 falou:]

2. **P-2:** *Por enquanto não!*
3. **P-8:** *Quero ver na hora dos exercícios!*
4. **P-2:** *É, vamos ver na hora do exercício!*

[Dando continuidade, P-7 leu o item 17.3. Observe-o a seguir.]

17.4 Algumas considerações sobre a Probabilidade

A Probabilidade representa uma das áreas da Matemática que “cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.” (DANTE, 2004, p. 379). Entende-se por experimentos aleatórios os fenômenos produzidos pelo homem, como por exemplo, o lançamento simultâneo de dois dados perfeitos – denotado no item anterior. Nos fenômenos aleatórios os resultados não são previsíveis, ou seja, não é possível determinar ‘com certeza’ o resultado a ser obtido.

Para calcular a Probabilidade, isto é, a chance de ocorrência de determinado **Evento Aleatório**, utiliza-se a seguinte razão:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \quad (9.)$$

, onde:

A representa o **Evento Aleatório**, ou seja, o conjunto dos elementos dos quais se espera a ocorrência;

Ω (Lê-se ‘Ômega’) indica o **Espaço Amostral**, isto é, o conjunto de todos os resultados possíveis advindos de um experimento ou fenômeno aleatório.

No exemplo utilizado anteriormente, o Evento Aleatório – não ocorrência de soma 5 – é constituído pelos seguintes pares:

A = {(1,6), (1,5), (1,3), (1, 2), (1, 1), (2, 6), (2, 5), (2, 4), (2, 2), (2, 1), (3, 6), (3, 5), (3, 4), (3, 3), (3, 1), (4, 6), (4, 5), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (5, 6), (5, 5), (5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1), (6, 6), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1)}, totalizando $n(A) = 32$.

Já o Espaço Amostral é composto por todos os possíveis pares advindos do experimento aleatório – lançamento simultâneo de dois dados perfeitos. Observe-o:

Ω = {(1,6), (1,5), (1, 4), (1,3), (1, 2), (1, 1), (2, 6), (2, 5), (2, 4), (2, 3), (2, 2), (2, 1), (3, 6), (3, 5), (3, 4), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (4, 6), (4, 5), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1), (5, 6), (5, 5), (5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1), (6, 6), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1)}, totalizando $n(\Omega) = 36$.

[Durante a leitura, o Pesquisador/Participante questionou:]

5. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, dá pra entender o que é um Evento Aleatório?
6. **P-2:** *É o acaso, não é? Você não tem certeza o que vai sair!*
7. **Pesquisador/Participante:** Você quer que aconteça algo a partir de um total de possibilidades. Este total de possibilidades recebe o nome de Espaço Amostral. No caso do lançamento simultâneo de dois dados o Espaço Amostral é composto pelos 36 pares. O Evento Aleatório, no caso, é que a soma não seja 5! Um outro tipo de evento poderia ser qual?
8. **P-4:** *Que a soma fosse 5!*
9. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo, P-4! Digam outro!
10. **P-2:** *O lançamento de uma moeda também é!*
11. **Pesquisador/Participante:** E outro tipo de Evento ‘dentro’ do nosso exemplo?

12. **P-2:** *Que a soma não seja 3!*

13. **Pesquisador/Participante:** Isso! Ou que a soma seja par, ímpar... Tudo bem, pessoal? São diferentes Eventos Aleatórios, ocorrências. Já o Espaço Amostral nunca vai mudar por representar o total de possibilidades, ok? **[Como não houveram dúvidas e ou comentários, o Pesquisador/Participante leu o seguinte problema:]**

1. No lançamento de um dado, defina o **Espaço Amostral** e os seguintes **Eventos Aleatórios**:
- a) A: ocorrência de face par.
 - b) B: ocorrência de face menor do que 3.
 - c) C: ocorrência de face ímpar.
 - d) D: ocorrência de face menor do que 1.
 - e) E: ocorrência de face menor do que 7.

[O Pesquisador/Participante entregou a cada participante um esquema na qual havia a representação das 6 faces do dado. No entanto, as participantes não viram necessidade de ‘manipular’ tais representações para solucionar o problema. Observe o esquema entregue:]

Problema 1. (Item 17.3)					
Face	Face	Face	Face	Face	Face
1	2	3	4	5	6

[Durante o tempo disponibilizado para a resolução do problema, P-2 auxiliou P-4. P-1 e P-8 pensaram acerca da solução conjuntamente. P-7 perguntou à P-2 se no item d) a probabilidade seria $\frac{0}{6}$. P-2 concordou com tal resposta e P-9 observou a discussão entre as participantes. O Pesquisador/Participante salientou que o problema não solicitava o cálculo da probabilidade, mas sim que fossem definidos os Eventos Aleatórios denotados nos itens a) a e).]

[Após verificação das respostas obtidas, a pedido das participantes o ‘Momento de Síntese’ fora deixado para ser compartilhado no próximo encontro. Em prosseguimento, deu-se início à discussão a respeito de 4 desafios envolvendo Combinatória que haviam ficado ‘para casa’ como ‘tarefa’. P-7 iniciou a leitura do item exposto abaixo:]

18.1 Retomando os ‘desafios para casa’ envolvendo Análise Combinatória

No encontro anterior foi solicitada a solução de quatro desafios (situações problemas) envolvendo a Combinatória. Observe as soluções comentadas de tais desafios a seguir:

DESAFIO (1): As placas dos automóveis são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Quantas placas podem ser criadas com as letras **A, B e C** e os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, podendo repetir a letra e não podendo repetir o algarismo?

Solução: As placas a serem formadas possuem a seguinte ‘configuração’:

1ª Letra	2ª Letra	3ª Letra	1º Algarismo	2º Algarismo	3º Algarismo	4º Algarismo
----------	----------	----------	--------------	--------------	--------------	--------------

7 DÍGITOS

As três primeiras posições são formadas de 3 letras. Como as letras disponíveis são 3 (A, B, C) e podem ser repetidas, pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$\underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3 \text{ DÍGITOS}} = 27 \text{ possibilidades para as 3 letras}$$

As quatro ‘últimas’ posições são formadas de 4 algarismos. Como os 7 algarismos disponíveis (0, 1,

2, 3, 4, 5, 6) não podem ser repetidos temos um Arranjo Simples ($A_{7,4}$):

$$A_{7,4} = \underbrace{7 \times 6 \times 5 \times 4}_{4 \text{ DÍGITOS}} = 840 \text{ possibilidades para os 7 algarismos}$$

Para calcular o total de placas possíveis multiplicam-se os dois resultados encontrados:

$$\text{Total de placas} = 27 \times 840 = 22680$$

R: Podem ser criadas 22680 placas diferentes.

[Ao serem questionadas acerca de possíveis dúvidas, nenhuma participante se pronunciou. Inclusive P-1 e P-9 que não participaram dos encontros anteriores disseram compreender os procedimentos adotados na solução. Deste modo, P-5 leu a solução do 2.º desafio denotada a seguir:]

DESAFIO (2): A diretoria de um clube é composto por 12 membros que podem ocupar a função de presidente, secretário ou tesoureiro. De quantas maneiras pode-se formar, com os 12 membros, chapas que contenham presidente, secretário e tesoureiro?

Solução: As chapas a serem formadas devem possuir presidente, secretário e tesoureiro. Como a ordem neste caso é importante, os 12 membros devem ser tomados/arranjados 3 a 3. Para o cálculo das chapas possíveis utiliza-se a expressão abaixo:

$$A_{12,3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \text{ FUNÇÕES – Presidente, Secretário e Tesoureiro}} = 1320 \text{ possibilidades}$$

R: É possível formar 1320 chapas diferentes.

[Concluída a leitura, o Pesquisador/Participante questionou:]

14. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, pessoal, o porque desta multiplicação $12 \times 11 \times 10$?

15. **P-9:** *Sim, né, é equivalente aos 3, não é isso?* [Referiu-se às 3 funções a serem ocupadas pelos membros na chapa – presidente, secretário e tesoureiro.]

16. **Pesquisador/Participante:** Isso! É equivalente às 3 funções a serem ocupadas na chapa.

17. **P-8:** *Eu coloquei! Então... eu achei que tinha 3... ah não, não podia ser presidente, secretário e tesoureiro? Mas aí não trocava, né...*

18. **P-4:** *É, se ele fosse presidente não podia ser secretário!*

19. **P-8:** *Agora sim, eu entendi! Ah, eu errei por distração!*

20. **Pesquisador/Participante:** A retomada que nós fazemos é para que vocês confrontem aquilo que fizeram. Por meio de nossas discussões, acredito eu, é possível um início de tomada de consciência do que foi feito! Infelizmente na escola, ou até mesmo na Universidade, momentos como esse não ocorrem, e o professor ‘passa’ rapidamente pelos conteúdos! Por favor P-8, leia pra gente a solução do 3.º desafio. [A participante leu o exposto abaixo:]

DESAFIO (3): Seis amigos foram ao parque de diversões ‘andar’ de montanha russa. Eles pretendem ir no mesmo carrinho, no entanto, no banco da frente – que ‘produz’ maior emoção – só cabem três pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem escolher o trio que irá no banco da frente?

Solução: Consideremos o conjunto dos amigos abaixo:

– Amigos = {Antônio (**A**), Beto (**B**), Camila (**C**), Daniele (**D**), Eduarda (**E**), Fábio (**F**)}

No banco da frente do carrinho da montanha russa só cabem três pessoas, assim, devem ser

formados trios entre os 6 amigos. Neste caso a ordem a ser ocupada por cada amigo em cada trio é irrelevante, pois o trio Antônio-Beto-Camila {A, B, C} é o mesmo que Beto-Antônio-Camila {B, A, C}. Desse modo faz-se necessário combinar os 6 amigos 3 a 3.

Para o cálculo das Combinações Simples $C_{6,3}$ realizam-se as seguintes etapas:

1.^a – Calculam-se os 6 amigos do conjunto arranjados 3 a 3:

$$A_{6,3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{\substack{3 \text{ OCUPAÇÕES NO BANCO} \\ \text{DA FRENTE DO CARRINHO}}} = 120 \text{ possibilidades de trios}$$

2.^a – Calculam-se as permutações possíveis de serem formadas com os 3 amigos do subconjunto (trio). Tal cálculo determina o múltiplo de subconjuntos (trios) que irão se repetir.

$$P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

3.^a – Para calcular o total de Combinações Simples ($C_{6,3}$), divide-se o total dos 6 amigos arranjados 3 a 3 pelo total das permutações formadas com os 3 elementos do subconjunto (trio):

$$C_{6,3} = \frac{A_{6,3}}{P_3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = \frac{120}{6} = 20 \text{ possíveis trios}$$

R: Há 20 maneiras diferentes de escolher os trios que irão no banco da frente do carrinho da montanha russa.

[Enquanto lia a solução, P-8 verificou a sua resposta. Terminada a leitura da 2.^a ‘etapa’, o Pesquisador/Participante perguntou:]

21. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, porque é necessário calcular a Permutação de 3?

22. **P-2:** *Para poder tirar os trios que se repetem já que aí não importa a ordem dos amigos.*

23. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo, P-2! É para sabermos o múltiplo de trios que irão se repetir.

[Concluída a leitura, P-8 indagou:]

24. **P-8:** *Ah, eu vi onde eu errei!*

25. **Pesquisador/Participante:** Vocês entenderam P-1 e P-9?

26. **P-1:** *Eu cheguei no 120 e daí eu não conseguia entender porque que não era esse resultado! Daí, lendo a pergunta agora que ‘caiu’ minha ficha! São tipos diferentes de trios e não o mesmo trio, porque trocando a posição continua o mesmo trio!*

27. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo, P-8! Neste caso, a ordem dos amigos ‘dentro’ de cada trio não importa, pois continua o mesmo trio.

28. **P-8:** *Sim, entendi!*

29. **Pesquisador/Participante:** P-9, você se recordava de Combinação no Ensino Médio?

30. **P-9:** *Então, essa parte eu não tava recordando não! Eu lembrava até aquela parte mais simples, agora essa parte de quando você utiliza, até a parte de repetições, não! Mas eu compreendi este problema!*

31. **Pesquisador/Participante:** Deu pra compreender pelo o que foi comentado aqui?

32. **P-9**: *Deu!*
33. **Pesquisador/Participante**: Ok! Eu já dei dando uma olhada nos desafios resolvidos que vocês me entregaram e a P-2 havia solucionado corretamente! Você também acertou P-7?
34. **P-7**: *Então, no início eu tinha feito só aquela parte!*
35. **Pesquisador/Participante**: Referente ao Arranjo dando 120 trios?
36. **P-7**: *Sim! Mas daí eu conversei com a P-2 e fiz a outra parte, mas eu fiquei em dúvida também!*
37. **Pesquisador/Participante**: E você, P-4?
38. **P-4**: *Ah, eu parei no 120 trios!*
39. **Pesquisador/Participante**: E você, P-5?
40. **P-5**: *Nem no 120 eu cheguei! Eu fiz 6...*
41. **Pesquisador/Participante**: Você permutou o número 6?
42. **P-5**: *Sim! Eu fiz $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, e acabou por aí!*
43. **Pesquisador/Participante**: Você conseguiria me dizer porque você pensou em permutar?
44. **P-5**: *Eu acho que eu... como eu já tinha feito o desafio 1, talvez eu pensei só nisso! Eu acho que eu não prestei atenção no problema direito!*
45. **Pesquisador/Participante**: Você não conseguiu compreender o problema direito?
46. **P-5**: *Não, não que eu não consegui compreender! É que eu não prestei atenção... Eu fiz meio rápido porque eu fiz aqui! Não tô dando desculpa por ter feito errado, daí eu olhei 6 e pensei: “É fácil, que nem a 1!”. E eu nem me atentei do trio... não sei?*
47. **Pesquisador/Participante**: E você, P-8, você fez o quê?
48. **P-8**: *Eu tô vendo o que eu pensei... Eu fiz... esse $3 \times 2 \times 1$ aqui [Referiu-se à multiplicação registrada em sua folha resposta.] não é do 6, é dos amigos! Eu esqueci de separar!*
49. **Pesquisador/Participante**: É referente à Permutação do trio!
50. **P-8**: *Daí eu pus $6 \times 5 \times 4$ que daí seria 3 [Referiu-se às 3 posições a serem ocupadas no banco da frente do carrinho de diversão.] Olha só!*
51. **Pesquisador/Participante**: Você fez primeiro um Arranjo Simples, né!?

52. **P-8:** *Isso! E daí eu fiz igual o 1.º desafio ($3 \times 2 \times 1$), como se não pudesse repetir nenhum dos dois lados. Nem o trio que não era pra repetir, e daí eu achei como nesse não tava repetindo, também não pode, daí eu pus $6 \times 5 \times 4$!*

53. **Pesquisador/Participante:** Entendi! Você misturou o Arranjo com a Permutação!

54. **P-8:** *É, eu fiz errado!*

55. **Pesquisador/Participante:** Deu pra compreender, pessoal, porque na Combinação a ordem dos elementos do subconjunto não importa! Porque o trio A-B-C é o mesmo que B-C-A ou B-A-C, etc. Assim, continua sendo o mesmo agrupamento de alunos. Tudo bem, pessoal?

56. **P-5:** *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

57. **Pesquisador/Participante:** P-9, leia a solução do Desafio 4, por favor! [A participante realizou a leitura da referida solução. Observe-a abaixo:]

DESAFIO (4): Quantos são os anagramas possíveis da palavra PAPAGAIO? Solução: Para o cálculo dos anagramas possíveis da palavra PAPAGAIO basta aplicar a expressão da Permutação Com Repetição já que as letras ‘A’ e ‘P’ se repetem. Considerando $n = 8$ como representando o número de letras da palavra PAPAGAIO, $\alpha = 3$ indicando as 3 letras ‘A’ repetidas e $\beta = 2$ referindo-se às 2 letras ‘P’ repetidas, temos: $P_n^{\alpha, \beta} = P_8^{3, 2} = \frac{8!}{3! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{6720}{2}$ $= 3360$ possíveis anagramas R: A partir da palavra PAPAGAIO é possível formar 3360 diferentes anagramas.
--

[Concluída a leitura, o Pesquisador/Participante questionou P-2, P-4, P-5, P-7 e P-8 se haviam acertado tal desafio. Todas responderam afirmativamente, sendo que P-8 indagou:]

58. **P-8:** *A P-1, por estar prestando vestibular, decorou todas as fórmulas e respondeu rapidinho.*

59. **P-2:** *Neste desafio a gente teve uma ‘colherzinha de chá’!*

60. **Pesquisador/Participante:** Foi devido à palavra que a gente discutiu no encontro anterior?

61. **P-2:** *Sim!*

62. **Pesquisador/Participante:** Qual foi a palavra mesmo?

63. **P-2, P-4 e P-7:** *Pindamonhangaba.*

64. **Pesquisador/Participante:** É mesmo! A Permutação com Repetição não é tão complexo o entendimento, né pessoal?

65. **P-2:** *É, não é!* [Resposta compartilhada entre P-4, P-5, P-7 e P-8.]

66. **Pesquisador/Participante:** Até porque você permuta o total de letras da palavra e divide pela permutação das letras repetidas. E, analisando as respostas dos desafios que vocês me entregaram eu percebi que a maioria não solucionou o desafio envolvendo a Combinação. Psicologicamente e matematicamente a Combinação é mais complexa de entender por exigir um pensamento duplo e simultâneo! Porque você tem que pensar, primeiro, no Arranjo Simples e depois vem a Permutação. Daí você tem que dividir o Arranjo pela Permutação para que se eliminem os subconjuntos repetidos.

67. **P-2:** *Então, eu e a P-7 estávamos conversando sobre o desafio 3 e ficou aquela dúvida, assim, tipo, se não seria Arranjo Com Repetição!*

68. **Pesquisador/Participante:** E não entendi, fale de novo!

69. **P-2:** *Então, na hora de calcular nós ficamos na dúvida se era Arranjo Com Repetição ou Combinação!*

70. **Pesquisador/Participante:** Se fosse Arranjo Com Repetição teríamos que fazer, com os 6 amigos, $6 \times 6 \times 6$!

71. **P-2:** $6 \times 6 \times 6$!

72. **Pesquisador/Participante:** Mas como que no primeiro ‘espaço’ do banco da frente vai ter 6 amigos, no segundo ‘espaço’ vai ter 6 e no terceiro vai ter 6?

73. **P-2:** *É!*

74. **Pesquisador/Participante:** Se no primeiro ‘espaço’ do carrinho for 6 possibilidades, no segundo só restam 5 já que 1 dos amigos está ocupando o primeiro ‘espaço’.

75. **P-2:** *É, então, a gente [Referiu-se à P-7.] pensou nisso e foi pra Combinação!*

76. **Pesquisador/Participante:** Daí vocês perceberam que...

77. **P-2:** *Não ia dar um Arranjo!*

78. **Pesquisador/Participante:** E que os trios seriam os mesmos e teria que eliminar os repetidos!

79. **P-2:** *Isso!*

80. **Pesquisador/Participante:** E não se preocupem, pessoal, pelo não acerto no desafio da Combinação porque nós tivemos um tempo relativamente pequeno para a abordagem da Combinatória. Então vocês ainda estão acomodando este novo conhecimento, por isso os momentos de confronto e discussão que fazemos tornam-se importantes neste movimento de construção.

81. **P-8:** *Faltam quantos Grupos de Estudo?*

82. **Pesquisador/Participante:** Apenas 2!

83. **P-8:** *Sério, só isso?*

84. **Pesquisador/Participante:** Nos reuniremos no dia 13 de setembro pra finalizar a discussão acerca da Probabilidade e de seu ensino e analisaremos brevemente o processo de Tomada de Consciência. Já, no dia 27, socializaremos as produções em trios e duplas acerca de uma Situação de Ensino que vocês irão elaborar e concluiremos o nosso Grupo de Estudo.

85. **P-8:** *Ah, tá!*

86. **Pesquisador/Participante:** Infelizmente, pessoal, a respeito da Probabilidade iremos estudar os conceitos principais e não teremos tempo de nos aprofundar em algumas partes. Mas eu acredito que os assuntos abordados darão suporte para que vocês pensem em situações de aprendizagem acerca da Probabilidade aos seus alunos dos anos iniciais.

[Em prosseguimento, o Pesquisador/Participante abordou o item 18.2 visando dar continuidade na discussão a respeito da Probabilidade Clássica. Tal item encontra-se exposto abaixo:]

18.2 Retomando a Probabilidade Clássica (Laplaciana)

No encontro anterior, no item 17.4, solicitou-se a ‘descoberta’ do **Espaço Amostral** proveniente do lançamento de um dado e alguns **Eventos Aleatórios** correlatos. Para o referido experimento aleatório – lançamento de um dado – observa-se o seguinte Espaço Amostral (Ω):

$\Omega = \{(\text{FACE } 1), (\text{FACE } 2), (\text{FACE } 3), (\text{FACE } 4), (\text{FACE } 5), (\text{FACE } 6)\}$, totalizando $n(\Omega) = 6$ possibilidades de saída das faces.

Cada uma das ‘FACES’ que compõe o Espaço Amostral recebe o nome de **Ponto Amostral**. Como tal experimento caracteriza-se pelo **Acaso/Incerteza**, então se faz possível apenas uma previsão (*probabilidade*) em relação à saída das faces.

Acerca dos Eventos Aleatórios correlatos ao lançamento do dado temos:

- Evento **A** (face par) = $\{(\text{FACE } 2), (\text{FACE } 4), (\text{FACE } 6)\}$, totalizando $n(A) = 3$.
- Evento **B** (face menor do que 3) = $\{(\text{FACE } 1), (\text{FACE } 2)\}$, totalizando $n(B) = 2$.
- Evento **C** (face ímpar) = $\{(\text{FACE } 1), (\text{FACE } 3), (\text{FACE } 5)\}$, totalizando $n(C) = 3$.
- Evento **D** (face menor do que 1) = $\emptyset$ (Lê-se ‘Vazio’), totalizando $n(D) = 0$.
- Evento **E** (face menor do que 7) = $\{(\text{FACE } 1), (\text{FACE } 2), (\text{FACE } 3), (\text{FACE } 4), (\text{FACE } 5), (\text{FACE } 6)\}$, totalizando $n(E) = 6$.

O Evento **D** por ser vazio é denominado **Evento Impossível**, ou seja, não ocorrerá. Já o Evento **E**, por coincidir com o Espaço Amostral (Ω), recebe o nome de **Evento Certo**, pois há a certeza de que o mesmo ocorrerá.

Utilizando a expressão (9.) definida no item 17.4 calcula-se a Probabilidade, isto é, a chance de ocorrência de cada um dos referidos eventos:

$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ ou } 50\%$
$p(B) = \frac{\text{número de elementos de } B}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,3333 \text{ ou } 33,33\%$
$p(C) = \frac{\text{número de elementos de } C}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ ou } 50\%$
$p(D) = \frac{\text{número de elementos de } D}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0$
$p(E) = \frac{\text{número de elementos de } E}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{6}{6} = 1 \text{ ou } 100\%$

Tais cálculos realizados ‘devem-se’ à definição Clássica de Probabilidade (ou Modelo Laplaciano) pelo fato do experimento aleatório em questão (lançamento de um dado) possuir um Espaço Amostral **Equiprovável**. Considera-se Equiprovável todo Espaço Amostral cujos elementos possuem a mesma chance

(probabilidade) de ocorrer. No caso do lançamento dos dados, cada uma das FACES possui a mesma chance de sair, ou seja, $\frac{1}{6}$.

[Durante a abordagem dos cálculos à obtenção da Probabilidade dos referidos eventos, o Pesquisador/Participante questionou:]

87. **Pesquisador/Participante**: Pessoal, no evento A vocês sabem como de 0,5 eu ‘cheguei’ em 50%?

88. **P-8**: *Multiplica por 100!*

89. **Pesquisador/Participante**: Você entendeu P-4, porque você havia sinalizado não saber!?

90. **P-4**: *Multiplicou o $\frac{1}{2}$ por 100?*

91. **Pesquisador/Participante**: Isso! Toda vez que você quiser transformar um número decimal em porcentagem você o multiplica por 100, pois você estará representando o ‘por cem – porcentagem’ daquele número.

92. **P-4**: *Entendi!*

[Terminada a discussão de tal item (18.2), P-4 achou interessante a palavra Equiprovável como representando ‘igual chance de ocorrer’. Em seguida, o Pesquisador/Participante perguntou:]

93. **Pesquisador/Participante**: Pessoal, vocês lembram de terem estudado isso no Ensino Fundamental ou Ensino Médio?

94. **P-2**: *Eu me lembro bem vagamente... tinha a parte do dado, das moedas, mas não lembrava, assim, com detalhes!*

95. **Pesquisador/Participante**: De calcular essa razão para obter o valor da Probabilidade, vocês se lembravam de terem feito? Você se lembrava, P-9?

96. **P-9**: *Eu me lembro vagamente.*

97. **Pesquisador/Participante**: E você, P-7?

98. **P-7**: *Não!*

99. **Pesquisador/Participante**: E você, P-4?

100. **P-4**: *Então, desta parte eu fiz bastante exercícios, mas na Genética. Na Matemática eu não lembro não!*

101. **Pesquisador/Participante**: E você, P-5?

102. **P-5**: *Eu lembro, assim, do nome, do assunto... Mas não lembro dos cálculos!*

103. **Pesquisador/Participante:** De dividir o Evento pelo Espaço Amostral você não se recorda?

104. **P-5:** *Não! Mas eu lembro de falar esta história da moeda, que é o exemplo que todo mundo usa. Mas eu não lembro o que foi feito depois.*

105. **Pesquisador/Participante:** Você se recorda, P-8?

106. **P-8:** *Não!*

107. **Pesquisador/Participante:** E você, P-1?

108. **P-1:** *Eu me recordo!*

109. **Pesquisador/Participante:** Ok! Então, pessoal, por favor resolvam os seguintes problemas:

1. Em grupo, investigue e registre outros tipos de experimentos aleatórios equiprováveis.
2. A partir dos cálculos realizados para encontrar a Probabilidade dos Eventos **A** à **E** é possível afirmar algo a respeito do conjunto dos valores obtidos? Discorra sobre.

[Concluída a leitura do 1.º problema, as participantes responderam rapidamente citando os seguintes experimentos aleatórios equiprováveis:]

110. **P-8:** *A gente acabou de ver com os dados, né!*

111. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-8, o lançamento dos dados é um experimento Equiprovável!

112. **P-8:** *As moedas também!*

113. **Pesquisador/Participante:** Ok, P-2.

114. **P-1:** *Tem o caso das caixas com as bolas dentro!*

115. **Pesquisador/Participante:** A caixa com as bolas dentro! Todo mundo conhece essa, pessoal?

116. **P-5:** *Se tiverem o mesmo número de bolinhas de uma cor e de outra, sim!*

117. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-5, você está certa!

118. **P-2:** *Um sorteio de bingo!*

119. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro!

120. **P-5:** *Se for um bingo honesto... [Risos entre P-2, P-4 e P-5.]*

121. **P-1:** *O que falou mesmo?*

122. **Pesquisador/Participante:** Do bingo!

123. **P-1:** *Ah, tá!*

124. **Pesquisador/Participante:** Retomando a questão da urna, é interessante o que a P-5 falou sobre a necessidade de serem iguais o número de bolas de cores diferentes.

125. **P-9:** *O sorteio, tipo assim, da Mega Sena é também, né!?*

126. **Pesquisador/Participante:** Sim, os concursos realizados pela Loteria Federal são equiprováveis.

127. **P-8:** *Eu sempre espero que tenha a mesma chance!*

128. **Pesquisador/Participante:** A saída dos números tem a mesma chance de saírem. No entanto, quanto mais apostas você fizer maiores serão as chances de ganhar!

129. **P-8:** *É!*

[Após registrarem a resposta da atividade 1, o Pesquisador/Participante leu o enunciado do 2.º problema. Ao perceber que as participantes não haviam entendido a questão, o Pesquisador/Participante entrevistou:]

130. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, nós calculamos os seguintes valores em relação aos eventos: 0,5; 0,33; 0,5; 0 e 1. Eu peço para que vocês reflitam a respeito destes valores, ou seja, o que é possível concluir acerca dos mesmos. É possível afirmar o quê a partir deste conjunto de valores encontrados?

131. **P-1:** *Que quanto mais números tiver de uma determinada característica é maior a Probabilidade dele sair!*

132. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-1, é uma das conclusões possíveis. Vocês entenderam o que a P-1 falou?

133. **P-9:** *Eu não ouvi!*

134. **Pesquisador/Participante:** Fale novamente P-1, por favor!

135. **P-1:** *Quanto mais elementos tiver de uma determinada característica, maior a Probabilidade dele sair.*

136. **Pesquisador/Participante:** *Se tiver uma caixa com mais bola vermelha do que preta...*

137. **P-1:** *É...*

138. **P-8:** *Vai sair mais vermelha do que preta. A Probabilidade de sair vermelha é maior do que sair bola preta.*

139. **P-1 e P-5:** *É!*

140. **Pesquisador/Participante:** Quanto mais elementos tiver no Evento relativo a um Espaço Amostral, maior é a Probabilidade de sua ocorrência! Isso é uma das conclusões, mas

há outra! Todo mundo entendeu o que a P-1 falou **[As demais participantes indicaram afirmativamente.]**

141. **P-2:** *São coisas meio elementares, ou não?*

142. **Pesquisador/Participante:** São conclusões simples. Não são complexas!

143. **P-2:** *Tipo, assim, se o elemento que você quiser tirar lá não tá lá, então é 0!*

144. **Pesquisador/Participante:** Sim, é por aí!

145. **P-2:** *Ou se você quer todos os que estão, tem uma grande Probabilidade, ou seja, 100% de chance!*

146. **Pesquisador/Participante:** Sim, é outra conclusão! Vocês entenderam o que P-2 falou, pessoal?

147. **P-4:** *Não!*

148. **Pesquisador/Participante:** Por favor, P-2, repita a sua fala!

149. **P-2:** *Por exemplo, aqui, no caso da Probabilidade 0 **[Referiu-se ao problema do lançamento do dado relativo ao evento D (face menor do que 1).]**, se os elementos que você procurar não estar lá, então a Probabilidade não existe. Ela é nula!*

150. **P-4:** *Nula!*

151. **P-2:** *Ou o oposto. Se a característica que você quer está em todos os elementos que estão lá na amostra, então é 100%.*

152. **Pesquisador/Participante:** Ótimo! E isso significa o quê, pessoal? Que o valor da Probabilidade possui qual intervalo de ocorrência?

153. **P-5:** 0 e 1?

154. **P-8:** 0 e 100%?

155. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo! De 0 a 1 ou de 0 até 100%! Então quer dizer que os valores de Probabilidade estão delimitados neste intervalo do 0, considerando o 0, até o 1 e considerando o 1. Esta é uma importante conclusão dos possíveis valores que a ‘Probabilidade’ pode assumir, digamos assim! Por exemplo, se você calcular a Probabilidade e der 1,5 significa o quê? **[Com exceção de P-9, as demais participantes responderam: “Está errado!”.]** Ou se tem um valor negativo, também estará errado!

156. **P-5:** *É, porque, se 1 é o total, não pode ter mais do que o total!*

157. **Pesquisador/Participante:** Era esta a conclusão principal, além do que a P-1 falou, que eu pretendia com este questionamento. E quanto maior o número de elementos do Espaço Amostral e menor o número de elementos do Evento Aleatório, menor será o valor da Probabilidade.

158. **P-8:** *Eu fiquei com uma dúvida sobre a urna e o fato de ser Equiprovável. Vamos supor que eu tenha mais bolas pretas do que vermelhas na urna. É Equiprovável?*

159. **Pesquisador/Participante:** Não, P-8, porque a chance de tirar bola preta é maior do que bola vermelha. Se nós temos um saco com 100 bolas pretas e 1 branca, a chance de sair bola preta é muito maior do que sair branca.

160. **P-8:** *Ah, tá, entendi!*

[Neste momento, P-5 perguntou a opinião do Pesquisador/Participante sobre uma proposta de ensino na qual as disciplinas seriam ensinadas ‘de modo concentrado’ em determinado período do ano letivo. Por exemplo, nos 3 primeiros meses do ano escolar seria ensinado só Matemática. Em seguida, somente História, e assim por diante. A dúvida era se tal proposta poderia contribuir na construção do conhecimento pelo estudante. Como resposta, o Pesquisador/Participante salientou que, talvez, mediante o trabalho desenvolvido, o aluno possa construir conhecimentos com significados. No entanto, tal proposta provavelmente ‘desgastará’ o estudante já que o mesmo poderá ‘enjoar’ em apenas estudar determinado conhecimento. As demais participantes concordaram com o exposto pelo Pesquisador/Participante. P-9 achou um absurdo tal proposta pois, assim, o conhecimento acumulado e sistematizado pela humanidade seria tratado de modo mais estanque ainda. Corroborando com P-9, o Pesquisador/Participante afirmou ser impossível desenvolver um trabalho interdisciplinar sob esta ótica, o que poderá dificultar na formação ‘integral’ e ‘global’ do estudante. Como exemplo de uma possível interdisciplinaridade, o Pesquisador/Participante citou que durante o estudo da ‘Filosofia de Azar’ é viável abordar – além de Estatística, Combinatória e Probabilidade – a História, Filosofia, Sociologia e Economia da época relacionando com o desenvolvimento de tais áreas da Matemática. Em seguida, P-9 indagou:]

161. **P-9:** *A minha irmã está no 8.º ano e ela me disse que odeia Matemática! Daí eu fui perguntar pra ela e ela me disse que é porque não vê sentido naquilo que o professor fica expondo na lousa. Ele não relaciona o conteúdo com nada, é como se a Matemática não fosse ligada com as outras coisas. Ele acha que os alunos tem que vir pra aula já sabendo aquilo, por isso não perde tempo em tirar a dúvida dos alunos.*

162. **Pesquisador/Participante:** Quando você diz ‘já sabendo aquilo’ significa que o professor da sua irmã acha que os alunos já tem que ter aprendido nos anos anteriores ou já nasceu sabendo aquilo?

163. **P-9:** *Já nasceu sabendo!*

164. **Pesquisador/Participante:** Esta postura deste professor da irmã da P-9 é Racionalista!

165. **P-2:** *Isso!*

166. **P-9:** *A Matemática está em tudo, e eu acho um absurdo os alunos do 8.º ano nunca terem ouvido isso! Olha quantos professores eles já tiveram! E não é só ela, minha irmã, mas todos os outros, um contexto!*

167. **Pesquisador/Participante:** Infelizmente, pessoal, são falas como a da P-9 que me levam a pensar que a Escola, de modo geral, parou no século XVIII. Tirando os recursos tecnológicos que parte dos professores acham que utilizam, o restante continua o mesmo!

168. **P-9:** *Não mudou nada, é o mesmo que acontecia no colégio dos jesuítas.*

169. **Pesquisador/Participante:** O Empirismo e o Racionalismo continuam sendo observados na postura de considerável parte de professores! Os professores falam e os alunos apenas escutam... momentos de discussões como nós temos aqui, em nosso Grupo de Estudo, não são frequentes, ou melhor, não acontecem nas escolas... Estou sendo muito radical nesta afirmação?

170. **P-8:** *Não! Nem aqui na Universidade isso ocorre!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**

171. **P-9:** *Daí a minha irmã e seus amigos não veem interesse em ficarem ali, sentados e sendo obrigados a engolir tudo aquilo! Que nem, eles tem acesso a este mundo da internet, então eles tem acesso ao conhecimento... Então a escola tem que se inserir neste contexto.*

172. **Pesquisador/Participante:** É, a internet ‘dá’ acesso à informação, mas a transformação desta informação em conhecimento não advém da internet.

173. **P-9:** *Mas eu acho que na escola deveria ter espaço pros alunos darem sugestões, mas não tem!*

174. **Pesquisador/Participante:** É verdade! Não tem! Disso tudo, pessoal, como venho fazendo a análise dos dados pra escrita da tese, estou chegando à conclusão que o importante de nosso Grupo de Estudo são as discussões que realizamos. Vocês acham que estou ‘indo’ no caminho certo? **[Todas as participantes sinalizaram, por meio de expressão facial, afirmativamente.]** O material que produzo a cada encontro a partir dos conhecimentos já construídos visando um aprofundamento dos mesmos é um apoio. No entanto, vejo que este material não é autossuficiente, a nossa interação é imprescindível. As relações interindividuais que estabelecemos são importantíssimas, vocês concordam?

175. **P-9:** *Sim!*

176. **P-8:** *Plenamente!*

177. **P-2, P-4, P-5 e P-7:** *Com certeza!*

178. **Pesquisador/Participante:** Agora, e se vocês pegam este material e tentam fazer sozinhas... é claro que será possível construções a partir desta ação de vocês. No entanto, acredito que a nossa interação propicia uma ‘maior’ construção!

179. **P-8:** *Com certeza!*

180. **Pesquisador/Participante:** Agora, pessoal, nós vamos abordar um outro tipo de Probabilidade, a Frequentista. Essa se difere do modelo Clássico ou Laplaciano. E este outro tipo nos permite ‘visualizar’ uma profunda relação entre Estatística e Probabilidade. Daí creio ser possível concluir que é impossível a construção do ‘Tratamento da Informação’ sem a

inter-relação entre os pensamentos combinatório, estatístico e probabilístico. P-1, por favor, faça a leitura do próximo item. **[A participante leu o item 18.3 – denotado a seguir:]**

18.3 Problematisando: Probabilidade Frequentista

A professora de Matemática Sueli pediu aos alunos do 9.º ano B que discutissem, em trios, o seguinte texto:

Estatística e Probabilidade

A estatística também é usada para estimar a probabilidade de ocorrência de um evento, principalmente quando ela não pode ser calculada teoricamente pela razão $P = \frac{\text{evento}}{\text{espaço amostral}}$. Quando se diz que a probabilidade de um avião cair é de uma em um milhão, é porque a frequência relativa de ocorrência de acidentes é de um acidente a cada um milhão de decolagens. Ao longo dos anos ocorrerão mais decolagens e essa probabilidade pode mudar. Dos anos 1960 para cá, a frequência relativa de acidentes aéreos no mundo diminuiu cerca de 15 vezes. Isso significa que a probabilidade de ocorrer um acidente nos anos 1960 era 15 vezes maior do que agora.

Quanto maior for a quantidade de experimentos, melhor será a estimativa da probabilidade usando-se a frequência relativa. Ao jogar uma moeda duas vezes, é possível que ocorra duas vezes cara. Seria absurdo afirmar que a probabilidade de ocorrer cara é de 100%, pois a quantidade de experimentos é muito pequena e não pode ser utilizada para tal afirmação. Entretanto, ao jogar uma moeda 200 vezes, é possível observar algo como 94 caras e 106 coroas; jogando 2000 vezes, 1034 caras e 966 coroas; 20000 vezes, 10091 caras e 9909 coroas.

Pela tabela abaixo, portanto, percebe-se que a frequência relativa tende ao valor teórico de 50% para a probabilidade de ocorrer cara e coroa. Isso é chamado de *lei dos grandes números*.

Número de jogadas	FA (cara)	FR (cara)
2	2	100%
200	94	47%
2000	1034	51,7%
20000	10091	50,45%

Previsões do tempo, resultados eleitorais, mortalidade causada por doenças, entre outras, são probabilidades calculadas usando-se frequências relativas de pesquisas estatísticas. Nesses casos, quanto maior for o histórico de dados a ser analisado, melhor será a previsão.

[Como não houveram dúvidas referente ao texto lido, P-1 deu continuidade a leitura do item. Observe-o abaixo:]

Ao término do tempo disponibilizado para a discussão, a professora Sueli registrou na lousa algumas atividades. Observe-as:

1. Na tabela presente no texto como foram calculados os valores da Frequência Relativa? Realize tais cálculos.

[Após a leitura do enunciado da atividade 1, o Pesquisador/Participante indagou:]

181. Pesquisador/Participante: Pessoal, na atividade 1 é pedido que vocês realizem os cálculos que permitiram a obtenção da frequência relativa denotada na tabela do texto que a P-1 acabou de ler. Vocês sabem como calcular a frequência relativa?

182. P-1: Tem que aplicar a regra de três?

183. **Pesquisador/Participante:** O que vocês acham? Como que obteve lá, na tabela, quando caiu 1034 vezes cara e o dado foi jogado 2000 vezes para calcular 51,7%?

184. **P-1:** *O 2000 é o 100%, o total!*

185. **Pesquisador/Participante:** Isso! O 2000 é o 100%, o total! Todo mundo entende isso?

186. **P-1:** *E o 1034 é o número de vezes que saiu cara!*

187. **Pesquisador/Participante:** Sim!

188. **P-1:** *Então dá 51,7% de cara!*

189. **Pesquisador/Participante:** Todo mundo entendeu o que a P-1 falou? **[Facialmente as demais participantes indicaram afirmativamente.]** Uma outra maneira de fazer utilizando, digamos assim, uma regra de três ‘direta’ é assim: você considera o total de vezes que saiu cara. Na tabela, por exemplo, vamos considerar o 2. Daí você pega este 2 e divide pelo total de vezes que o dado foi jogado, que também é 2. Ao dividir 2 por 2 temos 1 como resultado. Para obter a porcentagem, multiplica-se o 1 por 100. **[As participantes mostraram-se pensativas, deste modo o Pesquisador/Participante fez o cálculo quando o dado foi jogado 200 vezes, projetando na lousa tal cálculo realizado na calculadora ‘contida’ em um programa do computador.]** Quando o dado foi jogado 200 vezes saiu cara 94 vezes. Assim, pra calcular a frequência relativa dividimos 94 por 200 resultando 0,47. Este valor é multiplicado por 100 para obter a porcentagem ficando 47%.

190. **P-1:** *Que legal!*

191. **Pesquisador/Participante:** Por exemplo, P-4. Se dividimos 1034, que são as vezes que saiu cara, por 2000 – que foi o total de lançamento – temos 0,517. Daí basta multiplicar por 100 para obtermos o valor percentual (51,7%). Vocês sabiam desta maneira de calcular?

192. **P-8:** *Como que foi mesmo que você fez?* **[O Pesquisador/Participante explicou o procedimento novamente à P-8.]**

193. **Pesquisador/Participante:** A frequência relativa possui este nome porque indica o número de vezes que ocorreu em relação ao todo. Por isso este nome relativo, ou seja, em relação ao total coletado. Vocês sabiam calcular assim?

194. **Pesquisador/Participante:** *Não!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**

195. **P-8:** *Eu tô tão acostumada de fazer pela regra de três que na hora da prova eu tenho medo de fazer de outro jeito e errar!*

196. **Pesquisador/Participante:** Pelo modo que a P-1 falou, ou seja, pela regra de três simples também está correto!

197. **P-1:** *Eu também tenho medo de fazer assim e errar!*

198. Pesquisador/Participante: Por meio da regra de três simples ficaria: 2000 equivale ao 100% e 2034 equivale a 'x'. Em seguida é feita a multiplicação 'em cruz' até obter o valor do 'x'. **[Quando questionadas, as participantes disseram entender o procedimento utilizado no cálculo da frequência relativa. Dando continuidade, P-1 leu a atividade 2, exposta abaixo:]**

2. Um dado foi lançado 2400 vezes, obtendo-se o seguinte resultado:		
FACE	Número de Vezes (FA)	Frequência Relativa (FR)
1	356	14,83%
2	378	15,75%
3	305	12,71%
4	317	13,21%
5	556	23,17%
6	488	20,33%

a) Complete a coluna referente à Frequência Relativa (FR) expressando os valores em porcentagem.
b) Em sua opinião, o dado lançado pode ser considerado 'honesto'/'perfeito'? Justifique a sua resposta

[Durante a solução do item a) P-1 ajudou P-8 a compreender que o número 356 correspondente ao número de vezes que saiu a Face 1 deveria ser dividido pelo total de lançamento (2400 vezes). Após tal auxílio, P-8 falou: “Então tenho que dividir o número em relação ao todo!”. O Pesquisador/Participante explicou novamente à P-4 e P-5 já que as mesmas salientaram não estarem compreendendo. Para tanto, calculou a frequência relativa referente à Face 1. Decorridos 5 minutos, o Pesquisador/Participante projetou os valores na lousa para que as participantes conferissem os resultados encontrados. Logo em seguida, P-4 falou com P-2:]

199. P-4: *Mas esse valor não tinha que ser $\frac{1}{6}$?*

200. P-2: *Não, porque agora a gente tá calculando a frequência relativa, então tem que considerar o total de vezes que repetiu o lançamento do dado.*

201. Pesquisador/Participante: É isso mesmo, P-2! É $\frac{1}{6}$ quando consideramos o Modelo Clássico. Neste modelo o Espaço Amostral é Face 1, 2, 3, 4, 5 e 6, então a Probabilidade de saída de cada Face é $\frac{1}{6}$! Se eu pego o 1 e divido por 6 eu tenho 0,1667, daí ao multiplicar por 100 dá 16,67%. Assim, no Modelo Clássico, cada Face possui aproximadamente 16,67% de chance de sair, já que consideramos um Espaço Equiprovável. Nesta atividade nós estamos no Modelo Frequentista, no qual deram estas frequências relativas que acabamos de calcular. Tudo bem, P-4? **[Como a participante não respondeu, o Pesquisador/Participante a questionou:]** Acho que você ainda está com dúvida!

202. P-4: *Não, a letra a) eu entendi. Estou pensando na b)!*

203. Pesquisador/Participante: Ah, tá, então vamos ler o enunciado do item b). **[Após a leitura de tal item pelo Pesquisador/Participante, P-1 falou:]**

204. P-1: *Ah, mais ou menos, né!*

205. P-8: *Porque tem diferença de 23% aqui, e 20% aqui e vai até 14%! [Referiu-se às frequências relativas encontradas.]*

206. **P-1**: *É! Tá muito distante os valores.*
207. **Pesquisador/Participante**: Então pra vocês, P-1 e P-8, o dado não é perfeito/honesto?
208. **P-1 e P-8**: *Não!*
209. **P-2**: *Mas ao acaso pode sair mais vezes uma face do que outra!*
210. **P-5**: *É!*
211. **P-8**: *Mas...*
212. **Pesquisador/Participante**: Neste caso, P-2, como o número de lançamentos é significativo, os valores deveriam tender ao valor teórico 16,67%. Lá no texto que acabamos de analisar retirado de Dante (2004, p. 291) refere-se à lei dos grandes números. Quando você tem um número de experimentos significativos, por exemplo, se o dado for honesto/perfeito, o valor da frequência relativa tinha que se aproximar quando você faz pelo Modelo Clássico!
213. **P-4**: *Então, era essa a minha dúvida! Era isso que eu tava tentando falar!*
214. **Pesquisador/Participante**: Era isso, P-4?
215. **P-4**: *Se era 1 sobre 6 ($\frac{1}{6}$), a média tinha que ser mais ou menos perto dessa daí! [A palavra ‘média’ utilizada pela participante indicou o valor da frequência relativa próxima ao valor teórico $\frac{1}{6}$.]*
216. **Pesquisador/Participante**: Pessoal, a P-4 entrou em dúvida porque, na cabeça dela, quando há um número grande de lançamentos, as frequências deveriam ficar em torno de 16,67%!
217. **P-4**: *É, foi isso que eu pensei!*
218. **Pesquisador/Participante**: Assim, quais faces estão com mais chance de sair?
219. **P-5**: *A Face 5 e a 6!*
220. **Pesquisador/Participante**: Isso, estas duas Faces estão saindo mais vezes. Logo, este dado não foi bem confeccionado e, ao jogá-lo 2400 vezes, não tem a mesma chance, ou seja, não representa um Espaço Amostral Equiprovável.
221. **P-2**: *Então isso nunca vai acontecer se o dado for perfeito/honesto?*
222. **Pesquisador/Participante**: Se o dado for perfeito/honesto e o experimento ocorrer num ‘ambiente’ ideal, os valores da frequência relativa tenderão ao valor teórico. A lei dos grandes números garante isso!
223. **P-2**: *Não tô convencida!*
224. **Pesquisador/Participante**: Por quê?

225. **P-2:** *Porque daí você tira o acaso! Acabou o acaso!*

226. **Pesquisador/Participante:** Olha, nunca iremos obter o valor exato, será uma aproximação, tendendo a. No Modelo Clássico seria 16,67% para cada uma das Faces. No Modelo Frequentista este valor vai se aproximar, só que pra isso, no Modelo Frequentista tem que ocorrer um número muito grande de lançamentos do dado. E cada lançamento do dado tem que ser, digamos assim, lançado da mesma maneira, isto é, em condições ideais.

227. **P-2:** *É impossível!*

228. **Pesquisador/Participante:** O acaso não desaparece, já que em ambos os modelos você terá apenas uma possibilidade de saída, não a certeza. Mas eu compreendo o seu questionamento!

229. **P-2:** *Ali nos valores da frequência relativa na Face 3 deu 12%, então está distante do valor teórico. Só que na Face 2 deu 15%, então está mais próximo!*

230. **P-1:** *É, só que daí deu 23% na Face 5!*

231. **P-2:** *É, variou muito!*

232. **Pesquisador/Participante:** Isso indica, pessoal, que o dado não é honesto, ou seja, ele está ‘roubando’ nestas duas faces (5 e 6). Mas eu entendo a dúvida da P-2, pois o acaso, realmente, não pode ser determinado.

233. **P-2:** *Pra mim não dá!*

234. **Pesquisador/Participante:** E não dá mesmo! No entanto, a Estatística juntamente com a Probabilidade tentam fazer uma projeção, ou seja, se aproximar de um possível valor. Só que não dá pra garantir que no lançamento tal saia tal Face.

235. **P-9:** *É igual aquelas probabilidades de ganhar na Mega Sena! Eles fazem uma previsão!*

236. **Pesquisador/Participante:** Naquele texto inicial da Filosofia do Azar comentamos ser complexo o estudante construir esta ideia do acaso, da incerteza. Daí, entendo a dificuldade que a P-2 está sentido para compreender esta questão do acaso agora! Só que, mesmo no Modelo Frequentista não há determinação da saída da Face, mas apenas uma possibilidade.

237. **P-2:** *Mas pra mim, ainda, não me convenci, porque pode sair mais vezes a Face 1!*

238. **P-7:** *Você tem que jogar o dado na sua casa 2000 vezes!*

239. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo, P-2, jogue o dado 2000 vezes!

240. **P-2:** *Só que você tem que tomar cuidado para o dado não ser viciado! [Risos entre todos.]*

241. **Pesquisador/Participante:** Se você for realizar tal experimento, o dado deve ser lançado do mesmo modo, ou seja, tentando conseguir as mesmas condições em cada lançamento.

242. **P-2:** *Oh, mas você P-2 tem que lançar 2400 vezes!*

243. **Pesquisador/Participante:** Para que você não ‘interfira’ no acaso, você tem que lançar o dado da mesma altura, fazendo o mesmo ângulo, num ambiente com poucas interferências externas.

244. **P-2:** *Ah, não... eu já passei a acreditar, fui convencida! [Risos entre todos.]*

245. **P-8:** *Nossa, como faz isso?*

246. **Pesquisador/Participante:** Existem simuladores que fazem tais lançamentos para que o mínimo de interferência externa ocorra!

247. **P-2:** *Esquece, eu já me convenci, eu já acreditei!*

248. **P-1:** *Então, se você jogar o dado este grande número de vezes na mesma superfície, vai se aproximar?*

249. **Pesquisador/Participante:** Sim, se o dado for perfeito o valor da frequência relativa tende a se aproximar do valor teórico. Lá no texto do Dante que a gente estudou, o valor para 20000 lançamentos da moeda aproximou-se do valor teórico de 50% para a saída da Face ‘Cara’! Quando a moeda foi lançada 2 vezes só deu ‘Cara’, e no Modelo Clássico não é isso que ocorre já que tem 50% de chance de sair ‘Cara’ ou ‘Coroa’. Quando lançou 200 vezes melhorou bastante a frequência relativa já que começou a se aproximar do valor teórico. E, a cada aumento de lançamentos, a frequência relativa foi se aproximando mais do valor teórico de 50%. No entanto, não vai chegar a 50%. **[Após o registro da resposta do item b) pelas participantes, o Pesquisador/Participante solicitou a elaboração do seguinte questionamento:]**

3. Há alguma relação entre a Probabilidade Clássica e a Probabilidade Frequentista? Discorra sobre.

[Imediatamente à leitura do enunciado, P-1 indagou:]

250. **P-1:** *É que quando faz bastante lançamento chega perto, né!?*

251. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo, P-1. Acredito que nós já até acabamos discutindo isso aí! O que vocês acham, pessoal?

252. **P-2:** *Eu não entendi o que você falou, P-1!*

253. **Pesquisador/Participante:** Por favor, P-1, repita!

254. **P-1:** *A Clássica arredonda o que deu na Frequentista!*

255. **Pesquisador/Participante:** Vocês entenderam o que a P-1 quis dizer?

256. **P-2:** Não!

257. **P-4:** *É porque na Frequentista tem o acaso, na outra não tem!*

258. **Pesquisador/Participante:** Não, P-4, seja no Modelo Clássico ou no Frequentista sempre há o acaso!

259. **P-9:** *A relação é do processo, quando você faz a Probabilidade da Frequentista e a resposta determinante que você pode conseguir com a Clássica!*

260. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, nem sempre o valor obtido na Frequentista terá como aval o valor teórico da Clássica, pois, em alguns experimentos não há o Espaço Amostral Equiprovável. A relação que podemos estabelecer entre a Frequentista com a Clássica é quando, a partir de um número significativo de experimentos, pela lei dos grandes números, o valor obtido na Frequentista tende ao valor teórico advindo do Modelo Clássico. Tudo bem, pessoal? **[Todas as participantes registraram a resposta.]**

261. **P-5:** *A resposta é que a Frequentista se aproxima da Clássica quando há um grande número?*

262. **Pesquisador/Participante:** Sim, quando há um número significativo de experimentos realizados, lembrando que nem sempre é possível estabelecer tal relação, como por exemplo, a probabilidade de um avião cair só é possível de ser calculado pela Probabilidade Frequentista.

263. **P-5:** *Ah, tá!*

264. **Pesquisador/Participante:** Vocês sabiam acerca destes dois tipos de Probabilidade? **[Todas as participantes responderam “Não!”.]** P-4, por favor, faça a leitura da resposta da questão 3 pra gente!

265. **P-4:** *Eu coloquei: “Sim, quando são feitos um número muito grande de experimentos, número de 2000 vezes pra cima!”.*

266. **P-2:** *Precisa ser 2000 vezes?*

267. **Pesquisador/Participante:** A partir de 1000 vezes já temos um número significativo, na maioria das vezes.

268. **P-4:** *Tá!*

269. **Pesquisador/Participante:** Leia pra gente, P-5!

270. **P-5:** *Sim, a Frequentista se aproxima da Clássica quando há grande número de experimentos realizados! [As demais participantes ao serem questionadas pelo Pesquisador/Participante disseram que a resposta elaborada estava igual à lida por P-5.]*

271. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, deu pra entender este processo de generalização da Frequentista à Clássica?

272. **P-2:** *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

273. **Pesquisador/Participante:** Não podemos esquecer, pessoal, que a Frequentista é utilizada quando a Clássica não é adequada. Por exemplo, conforme já falei, na queda de um avião não há Espaço Equiprovável, assim para calcular a Probabilidade recorre-se à Frequentista.

274. **P-2:** *Mas eles também erram!*

275. **P-8:** *Ai, ai, ai, P-2!*

276. **Pesquisador/Participante:** Isso acontece por causa do acaso! Até porque uma previsão pode vir ou não a acontecer. Não há certeza! Então, pessoal, a Frequentista é utilizada quando a Clássica não dá conta. Por isso, não podemos pensar só nesta questão da generalização!

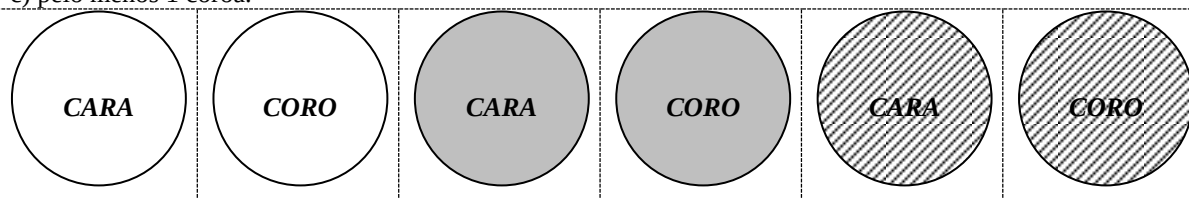
[Como não houveram dúvidas e ou comentários, o Pesquisador/Participante solicitou às participantes a resolução de 4 desafios. Para cada desafio foi entregue uma folha constando representações de modo a ‘auxiliar’ o pensamento durante a solução dos problemas. P-7 leu a ‘introdução’ do item 18.4 e o primeiro desafio. Observe abaixo:]

18.4 Alguns desafios envolvendo Probabilidade

Visando desafiar ainda mais seus alunos, a professora Sueli propôs alguns desafios. Além de envolver Probabilidade, os problemas utilizados ‘colaboraram’ à constante retomada/aprofundamento do pensamento combinatório. Solucione tais desafios compartilhando os resultados obtidos com o grupo.

1. Eduardo possui 3 moedas perfeitas distinguíveis. No lançamento simultâneo dessas 3 moedas, qual é a probabilidade de serem obtidas:

- a) pelo menos 2 coroas.
- b) exatamente 2 coroas.
- c) pelo menos 1 coroa.



[Após a leitura, P-8 falou:]

277. **P-8:** *E agora!?*

278. **P-5:** *É! Boa pergunta!*

279. **P-2:** *Vamos P-4, hoje você está inspirada!*

[Todas as participantes leram novamente o enunciado. O Pesquisador/Participante esclareceu à P-9 o significado da palavra distinguíveis. Em conversa, P-2 e P-8 chegaram à conclusão de que as 3 moedas distinguíveis seriam lançadas todas uma única vez. Observe tal diálogo:]

280. **P-2:** *As 3 moedas vão ser lançadas de uma vez?*
281. **P-1:** *Sim, de uma única vez!*
282. **P-8:** *E daí as 3 vão cair juntas!*
283. **P-1:** *Daí tem que ver qual é a chance de cair 2 coroas ou 3 coroas.*
284. **P-8:** *3 caras?*
285. **P-1:** *Não, 2 coroas! Pelo menos 2 coroas, então pode ser 2 coroas ou 3 coroas.*
286. **P-5:** *Ou 3 caras e 2 caras!*
287. **P-2:** *Porque pode ser 50%!*
288. **P-1:** *Não, gente, aqui ele tá pedindo coroa!*
289. **P-5:** *Então, quando lança as 3!*
290. **P-8:** *Mas tem cara e coroa!*
291. **P-1:** *Se cair cara, é..., por exemplo, se sair 2 caras sai uma coroa, e não é isso que o exercício quer!*
292. **P-5:** *Então, tô falando o total pra gente tirar o que a gente quer!*
293. **Pesquisador/Participante:** *Uma dica, pessoal, e acho que é isso que a P-5 está tentando dizer! Primeiro calculem todos os possíveis resultados advindos do lançamento simultâneo destas 3 moedas distinguíveis.*
294. **P-5:** *É, então!*
295. **Pesquisador/Participante:** *Para isso é necessário fazer uso da Combinatória!*
296. **P-1:** *Da Combinatória?*
297. **Pesquisador/Participante:** *Isso! Pra definir o Espaço Amostral, ou seja, todas as possíveis resultados, utiliza-se o pensamento combinatório.*
298. **P-1:** *Ah!*
299. **Pesquisador/Participante:** *Como eu calculo combinatoriamente todas as possibilidades de 3 moedas lançadas? Na primeira moeda que foi lançada, pessoal, pode dar o quê?*
300. **P-2:** *Cara ou coroa! [Resposta compartilhada por P-1, P-4, P-7 e P-9.]*
301. **Pesquisador/Participante:** *E na segunda moeda lançada juntamente?*

302. **P-2:** *Também! Cara ou coroa! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*

303. **Pesquisador/Participante:** E na terceira moeda? [Todas as participantes responderam “Também!”.] Então, tentem encontrar o Espaço Amostral combinatoriamente. E o Diagrama de Árvore seria muito útil.

304. **P-1:** *Então, Combinação de 3 elementos...*

305. **P-5:** *Não dariam 4 vezes?*

306. **Pesquisador/Participante:** *Como assim, 4 vezes?*

307. **P-5:** *Porque pode ser cara-cara-coroa, coroa-coroa-cara, ou cara-cara-cara ou coroa-coroa-coroa.*

308. **P-1:** *Então, só que... o jeito de você fazer isso... daí você conta e chega no resultado! Mas tenta fazer isso usando contas, sem fazer um a um! Você não sabe?*

309. **P-5:** *2 vezes 2!*

310. **P-8:** *2 vezes 3!*

311. **P-5:** *Dá 4!*

312. **P-8:** *É, porque é 3 moedas e cara e coroa! [A participante quis justificar a multiplicação 3×2 .]*

313. **Pesquisador/Participante:** Olha, pessoal, cada moeda ao cair tem quantas possibilidades?

314. **P-1:** *Seis!*

315. **Pesquisador/Participante:** Seis?

316. **P-1:** *Não, ao todo dá 6 possibilidades!*

317. **Pesquisador/Participante:** Não dão só 6 possibilidades!

318. **P-5:** *Não dá, porque, qual que vai ser voltando naquilo que eu falei de fazer um a um?*

319. **P-1:** *Ai, gente, dá 3 porque a ordem não importa!*

320. **P-9:** *Dá $\frac{2}{3}$!*

321. **Pesquisador/Participante:** A ordem importa, P-1! E não é $\frac{2}{3}$, P-9!

322. **P-9:** *Olha, tem 3 moedas. Cada uma pode cair cara ou cora! Então tem 6 possibilidades!*

323. **Pesquisador/Participante**: Não são 6 possibilidades!
324. **P-2**: *São 4!*
325. **Pesquisador/Participante**: Como assim, me explique!
326. **P-2**: *Porque pode sair cara-cara-cara, coroa-coroa-coroa, cara-coroa-coroa, cara-cara-coroa... vai mudando!*
327. **P-1**: *Mas se cair cara-cara-coroa e coroa-cara-cara é a mesma coisa!*
328. **Pesquisador/Participante**: Não, P-1, na se esqueça que a ordem é importante já que as 3 moedas são distinguíveis. Não se esqueçam disso, as moedas são diferentes.
329. **P-1**: *Ah, a ordem importa!*
330. **Pesquisador/Participante**: Não é uma Combinação como você estava pensando, P-1! Pensem, assim, por exemplo, como sendo 1 moeda de 1 centavo, 1 moeda de 5 centavos e 1 moeda de 10 centavos.
331. **P-1**: *Ah, tá!*
332. **P-9**: *E se elas não fossem distinguíveis?*
333. **Pesquisador/Participante**: Daí a ordem não importaria.
334. **P-5**: *Mas cara não é cara, independente de ser de 1 centavo ou de 5?*
335. **Pesquisador/Participante**: Mas é diferente! Se você tira cara pra 1 centavo, cara pra 5 centavos e coroa pra 10 centavos é diferente de cara pra 10 centavos, cara pra 5 centavos e coroa pra 1 centavo!
336. **P-5**: *Ah, é!*
337. **P-9**: *É, a interpretação influencia a Matemática!*
338. **Pesquisador/Participante**: Olha, pessoal, dá pra utilizar o Princípio Fundamental da Contagem... o Diagrama de Árvore...

[Neste momento, P-1, P-5 e P-8 esquematizaram as possibilidades considerando 1 moeda de 50 centavos e 1 moeda de 10 centavos. P-1 disse ser necessário usar Permutação, em seguida indicou a utilização do Fatorial. P-5 alertou às colegas dizendo que estava faltando mais uma moeda no referido esquema, já que eram 3.]

[P-2, P-4 e P-7 estavam também construindo o Diagrama de Árvore. A pedido de P-2, o Pesquisador/Participante auxiliou-a a construir o Diagrama de Árvore já que não se lembrava do mesmo. Após um ‘auxílio inicial’, P-2 ‘terminou’ a construção do diagrama obtendo os 8 possíveis resultados. A participante explicou à P-4 e P-7 tal diagrama. Em seguida, P-2 perguntou ao Pesquisador/Participante se tal problema tratava-se de Arranjo. Como resposta, o Pesquisador/Participante disse não ser possível classificar tal desafio em Arranjo ou Permutação, tratando-se de um problema de

contagem resolvido por meio do Princípio Fundamental da Contagem e ou Diagrama de Árvore.]

[P-5 observou o Diagrama de Árvore construído por P-2. O Pesquisador/Participante mostrou tal diagrama à P-1 e P-8 explicando o raciocínio utilizado em sua elaboração. P-1 questionou se não há um ‘modo’ de fazer direto o cálculo para saber o total de possibilidades. O Pesquisador/Participante respondeu ser possível por meio do Princípio Fundamental da Contagem, no entanto, para saber cada um dos possíveis resultados é necessário fazer ‘um a um’.]

[Após a construção do Diagrama de Árvore por ambos os trios (P-2, P-4 e P-7) e (P-1, P-5 e P-8), as participantes conseguiram resolver os itens a), b) e c). O Pesquisador/Participante apenas tirou dúvidas a respeito das expressões ‘pelo menos’ e ‘exatamente’ presentes nos itens.]

[No caso de P-9 que estava tentando resolver o desafio individualmente, a explicação dada por P-2 não foi suficiente. Deste modo, o Pesquisador/Participante ajudou-a a construir o Diagrama de Árvore. Faz-se oportuno salientar que a participante ‘encontrou’ dificuldades em/para compreender o diagrama.]

[Para ‘concluir’ tal desafio, o Pesquisador/Participante indagou:]

339. **Pesquisador/Participante:** Percebam, pessoal, que pra resolver este desafio é necessário encontrar primeiro o Espaço Amostral!

340. **P-5:** *É, e não tem fórmula!*

341. **Pesquisador/Participante:** Sim, nem sempre utilizaremos fórmulas. Neste caso, para encontrar todos os resultados e não correr o risco de esquecer algum a Árvore de Possibilidades é importante.

342. **P-4:** *Então tem que fazer o Diagrama de Árvore e contar as possibilidades?*

343. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-4! Pelo Princípio Fundamental da Contagem até dá pra calcular o total de possibilidades do Espaço Amostral, mas é necessário fazer um a um os resultados.

344. **P-5:** *É, sem o diagrama a gente vai acabar esquecendo algum resultado! Eu achei que o Diagrama de Árvore era só um começo pra gente entender... e depois ele ia ser substituído. Mas não, né!?*

345. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-5! O Diagrama de Árvore é importante em várias situações, e não apenas no início da abordagem da Combinatória. Sem ele a chance de você ‘se perder’ é grande!

346. **P-5:** *E você olha pro diagrama e fica bem ‘claro’!*

347. **Pesquisador/Participante:** Sim!

348. **P-5:** *Mas até que é gostoso fazer ele!*

[Dando continuidade, as participantes iniciaram a solução do 2.º desafio. Observe-o a seguir:]

2. Lucas colocou numa caixa opaca 7 bolas verdes e 5 bolas azuis. Qual é a probabilidade de, ao acaso, retirar: a) uma bola verde? b) uma bola azul? c) uma bola azul ou uma bola verde?					

[As participantes resolveram os itens a) e b) sem dificuldade. Apenas o item c) causou-lhes dúvida. P-1, a respeito deste item, fez o seguinte questionamento:]

349. **P-1:** *Pesquisador/Participante, na letra c), tem 2 bolas, você tira uma bola azul ou uma bola verde?*

350. **Pesquisador/Participante:** No item c) pede a chance de retirar, ao acaso, uma bola azul ou uma bola verde!

351. **P-1:** *Numa tirada só!*

352. **Pesquisador/Participante:** Sim!

353. **P-1:** *Então é 100%!*

354. **Pesquisador/Participante:** É?

355. **P-1:** Porque eu fiz as contas e daí deu 1! [A participante fez $\frac{7}{12} + \frac{5}{12} = \frac{12}{12} = 1$.]

356. **P-5:** Ou você tira uma bola azul ou uma bola verde!

357. **P-8:** *Ah, tá!*

358. **P-5:** *Nossa, este desafio aqui é gostoso de fazer!*

359. **P-1:** *E cai tanto em curso!*

360. **P-8:** *É!*

[Ainda a respeito do item c) – desafio 2 – o Pesquisador/Participante auxiliou P-2, P-4 e P-7 a compreenderem que a expressão ‘uma bola verde ou uma bola azul’ era diferente de ‘uma bola verde e uma bola azul’. Em seguida, P-2 falou:]

361. **P-2:** *Então vai ter que somar? [Referiu-se à soma $\frac{7}{12} + \frac{5}{12}$.]*

362. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-2, uma maneira de fazer é assim! Quando nós temos uma união representada pela palavra ‘ou’, em alguns casos nós somamos as probabilidades. Agora, quando temos uma intersecção indicada pela palavra ‘e’, em alguns casos, nós multiplicamos as probabilidades.

363. **P-1:** *Ah, agora eu tô lembrando!* [Referiu-se aos problemas resolvidos na aula de Genética durante o Ensino Médio.]

364. **P-2:** *Ah, tá, entendi! Assim, ou vai sair bola verde ou azul, uma ou outra, por isso dá 100%!*

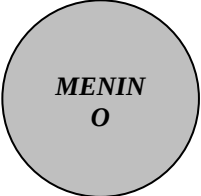
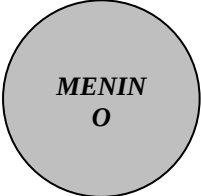
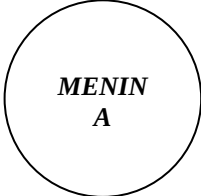
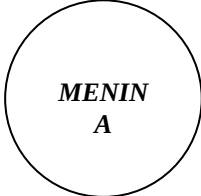
365. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, P-7?

366. **P-7:** *Sim, eu entendi!*

[Enquanto o trio (P-2, P-4 e P-7) estava concluindo a solução do 2.º desafio e P-9 estava terminando o 1.º desafio, P-1, P-5 e P-8 iniciaram a leitura do desafio 3, denotado a seguir:]

3. Um casal planeja ter exatamente 2 filhos. Qual é a probabilidade de:

- duas crianças serem meninas?
- duas crianças serem meninos?
- pelo menos uma criança ser menino?
- nenhuma criança ser menina?

			
--	--	---	--

[P-1 disse para P-5 e P-8 que o resultado do item a) dava $\frac{1}{4}$ ou 25%. Como a referida participante estava estudando para ‘prestar’ Vestibular, havia há pouco tempo estudado tal assunto e o resolveu não utilizando o Diagrama de Árvore. Para tanto, realizou a seguinte multiplicação $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. P-1 explicou que cada $\frac{1}{2}$ representava a chance de nascer menina em cada nascimento. Como devem ser 2 meninas, então, bastava multiplicar $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{2}$. P-5 e P-8 não compreenderam muito bem a explicação dada por P-1 já que a mesma exigia a compreensão do conceito de Eventos Independentes. Deste modo, o Pesquisador/Participante falou à P-5 e P-8 que seria interessante a construção do Diagrama de Árvore para a constituição do Espaço Amostral. P-8 construiu o diagrama com o auxílio de P-5 obtendo 4 possíveis resultados.]

[Novamente o Pesquisador/Participante auxiliou P-9 a resolver o 2.º desafio. A participante estava com dificuldades em compreender tal problema. A respeito do 3.º desafio, o Pesquisador/Participante ajudou na construção do Diagrama de Árvore de modo a possibilitar a obtenção do Espaço Amostral.]

[Como estavam ‘adiantadas’, o trio P-1,, P-5 e P-8 iniciaram a solução do 4.º desafio, exposto abaixo:]

4. Uma urna contém as letras A, A, A, N, N e D. Retira-se letra por letra. Qual a probabilidade de sair a palavra ANANDA?

					
---	---	---	---	---	---

[P-5 e P-8 pensaram em fazer uma Permutação Com Repetição para calcular o total de anagramas possíveis. P-1, no entanto, disse ser possível realizar a seguinte multiplicação: $\frac{3}{6}$ (possibilidade de sair a 1.^a letra ‘inicial’ A) $\times \frac{2}{5}$ (possibilidade de sair a 1.^a letra N) $\times \frac{2}{4}$ (possibilidade de sair a 2.^a letra A) $\times \frac{1}{3}$ (possibilidade de sair a 2.^a letra N) $\times \frac{1}{2}$ (possibilidade de sair a letra D) $\times \frac{1}{1}$ (possibilidade de sair a última letra A).]

[Ao término da leitura do enunciado do 4.^o desafio, P-2, P-4 e P-7 foram procurar em seus registros a Permutação Com Repetição realizada anteriormente para calcular os anagramas possíveis da palavra PAPAGAIO. P-7 falou:]

367. **P-7:** *Se a gente fizer a árvore... [Risos entre P-2 e P-4.]*

368. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, não façam o Diagrama de Árvore! Vai ficar complicado!

369. **P-4:** *A gente vai ficar até de noite fazendo a árvore!*

370. **P-2:** *Mas eu tenho que fazer igual a do PAPAGAIO pra saber o meu Espaço Amostral?*

371. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-2! Deste modo, você irá saber quantos elementos compõe o Espaço Amostral, que no caso são os anagramas possíveis. A P-2, pessoal, nos deu uma dica para resolver o desafio 4. É necessário, primeiro, saber o número de elementos do Espaço Amostral!

372. **P-1:** *Está certo do jeito que eu fiz? [A participante explicou ao Pesquisador/Participante a multiplicação denotada acima.]*

373. **Pesquisador/Participante:** Está certo sim! Você utilizou a intersecção, ou seja, a letra A e a letra N e a letra A e a letra N e a letra D e a letra A, uma seguida da outra até formar a palavra ANANDA!

374. **P-1:** *Isso! [Neste momento, a participante explicou novamente a multiplicação realizada para P-5 já que a mesma não havia entendido.]*

375. **Pesquisador/Participante:** Quanto que deu P-2?

376. **P-2:** *Deram 60 possíveis anagramas.*

377. **Pesquisador/Participante:** E agora pra saber a possibilidade de sair a palavra ANANDA?

378. **P-2:** *Oh, na primeira vez tem 3 chances de tirar a letra A da urna. É 3 sobre 60!*

379. **Pesquisador/Participante:** Não é 3 sobre 60! Há sim 3 chances de tirar a letra A da urna, só que de um total de 6 letras colocadas na urna. Olha, você pode formar 60 palavras, ou seja, 60 anagramas diferentes. Quando vai sair a palavra ANANDA?

380. **P-2:** *Só uma vez!*

381. **Pesquisador/Participante:** Então o que acontece?
382. **P-7:** *Há 1 chance em 60!*
383. **P-2:** *Ah, tá! Eu tava querendo fazer do modo mais difícil! [Risos entre P-4 e P-7.] É só isso?*
384. **Pesquisador/Participante:** Sim! A P-1 fez de um outro jeito bem interessante e que não precisa recorrer à Permutação Com Repetição!
385. **P-2:** *Era do jeito que eu estava pensando?*
386. **Pesquisador/Participante:** Sim, quando você vai retirando uma letra seguida da outra!
387. **P-2:** *Nossa, mas daí vai ter que fazer mais conta!*
388. **P-8:** *Não! [A participante mostrou ao trio (P-2, P-4 e P-7) a multiplicação $\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1}$. P-5 e P-8 explicaram ao trio o porquê das probabilidades (frações) multiplicadas. Em seguida, P-2 explicou à P-1 como solucionaram o problema utilizando, inicialmente, a Permutação Com Repetição para obter o número de possibilidades do Espaço Amostral.]*
389. **P-8:** *Eu estava pensando em fazer isso o que a P-2 mostrou pra gente porque eu pensei na palavra PAPAGAIO!*
390. **Pesquisador/Participante:** Isso, P-8, é outra maneira de fazer. Primeiro você calcula o total de anagramas da palavra ANANDA, ou seja, para saber quantos elementos constituem o Espaço Amostral. Como você quer que forme a palavra ANANDA, isto é, este é o Evento, basta fazer 1 sobre 60 pois dos 60 anagramas possíveis apenas 1 representa a palavra ANANDA.
391. **P-8:** *Ah, sim!*
392. **Pesquisador/Participante:** Mas o modo que a P-1 fez está correto também!

[Além de auxiliar na construção do Diagrama de Árvore referente ao 3.º desafio, o Pesquisador/Participante ajudou P-9 a compreender o solicitado nos itens a) à d).]

[Finalizando, o Pesquisador/Participante explicou o Desafio Final a ser apresentado no último Grupo de Estudo. Para tanto, foi feita a leitura do item apresentado a seguir:]

18.5 Um desafio final

Elabore uma Situação de Ensino, a ser apresentada no último encontro, visando à abordagem de um (ou mais) conteúdo(s) pertencente(s) ao bloco ‘Tratamento da Informação’. Denote, brevemente, os objetivos a serem alcançados, a metodologia a ser utilizada pelo professor, os recursos necessários e os instrumentos de avaliação. Fundamente tal proposta na Epistemologia Genética valendo-se dos assuntos abordados.

[A pedido das participantes, permitiu-se a elaboração do Desafio Final em 2 duplas e 1 trio.]

APÊNDICE W – TRANSCRIÇÃO DO 19.º ENCONTRO

Data: 13/09/2012

Tempo de Duração: 3 horas e 30 minutos.

[Com exceção de P-9, as demais participantes estiveram presentes neste encontro. Inicialmente foi feita a socialização dos Momentos Sínteses referentes aos 17.º e 18.º encontros.]

1. **Pesquisador/Participante**: Olá pessoal! Vamos iniciar com a exposição dos Momentos Sínteses referentes aos 17.º e 18.º encontros. No 17.º encontro estudamos a sistematização dos diferentes agrupamentos da Combinatória (Permutação, Arranjo e Combinação), uma possível relação entre Estatística, Combinatória e Probabilidade e alguns conceitos iniciais da Probabilidade. Então, vamos começar pela P-4, e eu peço pra que ela faça a leitura da síntese referente ao 17.º encontro.

2. **P-4**: *Como foi discutido todos os procedimentos de diferentes maneiras de resolver os problemas de Combinatória, quando entrei em contato com as fórmulas, todas devidamente explicadas e contextualizadas, foi muito fácil entender, e elas vieram apenas para facilitar o cálculo, pois na falta delas sei resolver Combinatória do meu jeito, fazendo minhas contas. Conclui que na Permutação e no Arranjo a ordem dos elementos é de fundamental importância para diferenciar os agrupamentos ordenados. Por exemplo, o anagrama COR é diferente do anagrama CRO. Já, na Combinação, a ordem dos elementos não importa, pois as duplas BC e CB continuam sendo as mesmas.*

3. **Pesquisador/Participante**: Interessante, P-4, obrigado!

4. **P-8**: Nossa, você fez um relatório!

5. **P-2**: Fez mesmo!

6. **Pesquisador/Participante**: Por favor, P-2, leia a sua síntese!

7. **P-2**: *Em relação às atividades propostas tive dificuldade para identificar em qual ano de escolaridade era mais viável sua aplicação. Em seguida, depois do desafio e o contato inicial com as atividades, tivemos a explanação sistematizada sobre Análise Combinatória: Arranjo Simples e com Repetição, Permutação Simples e com Repetição e Combinação Simples, apresentando as fórmulas. Entretanto, fica claro que a aprendizagem é mais significativa quando agimos sobre o conteúdo, tentando assimilá-lo/acomodá-lo com a mediação do professor, porém realizando nossas inferências. Sobre a relação entre Combinatória, Estatística e Probabilidade, o exemplo foi simples e compreendido, mesclando a Probabilidade de determinado Evento ocorrer (lançamento dos dados) no Espaço Amostral definido, combinando os pares e montando uma tabela de dupla entrada.*

8. **Pesquisador/Participante**: Ok! É interessante nós observarmos a possibilidade de relação/integração entre as diversas áreas da Matemática. No entanto, parece que na escola o professor não se dá conta destas relações, ou, mesmo sabendo que existam não há a promoção de um ensino de modo a permitir ao aluno tal integração. O aluno acaba achando que a

Geometria não tem nada haver com a Álgebra, que as Grandezas e Medidas não tem relação com a Aritmética...

9. **P-8:** *É verdade?*

10. **P-4:** *Mas tem?* [Risos entre a participante, P-2 e P-7.]

11. **P-8:** *A gente não consegue juntar tudo! O professor dá um monte de exercício e daí só faz aquele lá! Daí depois você só faz aquele lá! Daí você não aprende a juntar tudo!* [Referiu-se às abordagens estanques dos conteúdos matemáticos.]

12. **Pesquisador/Participante:** Isso ocorre mesmo, P-8. Há a dificuldade de integração por parte do professor e do aluno. Se o professor não souber integrar as diferentes áreas que compõem uma Ciência, obviamente, ou melhor, probabilisticamente o aluno também não o fará! É o que acontece nos vestibulares ou concursos em que, pra se resolver um situação problema são necessárias tais relações, a pessoa terá muitas dificuldades e talvez não consiga resolver.

13. **P-8:** *É verdade!*

14. **Pesquisador/Participante:** E mesmo as pessoas que frequentaram uma Licenciatura em Matemática, como é o meu caso, não pensem vocês que os meus professores salientavam pra gente tais relações/integrações. Pra poder compreender algumas das possíveis relações envolvendo as diversas áreas da Matemática eu tive que estudar – sozinho – pra poder ensinar. Por exemplo, quando eu estudei Probabilidade não foi chamada a atenção acerca da relação com a Combinatória; apenas em alguns problemas utilizava-se do pensamento combinatória para a definição do Espaço Amostral, mas não era abordado explicitamente tal relação. Acredito ser possível indicar que considerável parte dos professores de Matemática atuantes não tem consciência destas relações. Geralmente é seguida a sequência presente nos livros didáticos e ou apostilas.

15. **P-8:** *Eu sempre quis entender isso, né, porque eu não conseguia fazer! Aí... tem... eu queria saber com você que tem experiência na área, tem jeito, ainda, da gente entender um conjunto inteiro, na hora de fazer um exercício... eu e a P-2 estávamos discutindo de fazer pra concursos, e a parte de dificuldade... a gente erra bastante é em Matemática... mesmo você tendo conhecimento e sabendo alguma coisa... porque, tem isso! Embola tudo e a gente não sabe como fazer! Aí... se... se for possível... tem algum jeito de a gente... nem se for pra aprender sozinho, um meio de integrar tudo isso hoje, do jeito que nós aprendemos? Ou se essa integração, se não aprende do começo, lá, não vai mais....*

16. **Pesquisador/Participante:** Não, claro que há possibilidades de aprendizagem de tais relações!

17. **P-8:** *Há!?*

18. **Pesquisador/Participante:** O nosso Grupo de Estudo, por exemplo, é uma experiência neste sentido! Mas, como eu falei pra vocês, nós demos conta, pelos menos eu suponho, de um Bloco de Conteúdo! Ainda faltam 3: Espaço e Forma, com o estudo da Geometria; Grandezas e Medidas; Números e as Operações. E em cada Bloco há certas especificidades e assuntos a serem aprofundados. Por exemplo, se estivéssemos optado pela

abordagem dos Números e as Operações, teríamos que ter investigado a fundo, em alguns encontros, a construção do Número que é um assunto muito complexo que envolve a constituição da classificação e da seriação. Deste modo, pessoal, é possível a integração destes conteúdos de diversas áreas. **[Neste momento, P-1 chegou e lhe foi explicado a atividade que estava sendo realizada.]** E concluindo, P-8, é possível sim este movimento de integração. No entanto é necessário um trabalho no qual se discutam as especificidades do pensamento geométrico, aritmético, cálculo mental, estimativa, etc., e como relacionar isso em situações de ensino adequadas a cada ano escolar.

19. **P-2:** *Mas daí não entra a questão dos professores, mesmo os da graduação, eles também aprenderam estanque?*

20. **Pesquisador/Participante:** Sim!

21. **P-2:** *Então é muito difícil fazer a relação!*

22. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-2! Lembram daquele Currículo de Matemática que eu elaborei com minha colega a ser implementado na Rede de Ensino de Bauru? Quando eu fui discutir a didática específica do 1.º ao 5.º ano, fiz questão de chamar a atenção nesta questão da integração entre os diversos conteúdos dos vários Blocos. Assim, eu exemplificava pontos de intersecção entre Números e Operações com o Tratamento da Informação, e assim vai!

23. **P-2:** *Então teria que fazer isso na Formação Continuada?*

24. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-2, há a necessidade de se fazer isso! E não só em Matemática, mas em Biologia, Química, Física, Geografia, História, Língua Portuguesa, etc. No entanto, devido ao positivismo que acarretou na compartimentalização da Ciência, a abordagem de tais Ciências acabou seguindo o modelo da racionalidade técnica na qual a prática é considerada em segundo plano, priorizando o tratamento estanque das diversas áreas que compõem uma Ciência. Em tal modelo, há a ingenuidade de que o aluno, por conta própria, estabelecerá a relação entre teoria e prática neste movimento de integração, inclusive dentre as diversas áreas de determinado ramo do saber. Considerável, ou melhor dizendo, a quase totalidade das licenciaturas, a nível internacional, ainda estão alicerçados, mesmo que de forma mascarada, neste modelo!

25. **P-8:** *E este tipo de curso que a gente tá fazendo aqui no nosso Grupo de Estudo, não tem mais chance? Acabou?*

26. **Pesquisador/Participante:** Não! Claro que há chance de continuidade!

27. **P-8:** *Ai, que bom!* **[As demais participantes ficaram eufóricas.]**

28. **Pesquisador/Participante:** Por exemplo, P-8, a continuidade de encontros presenciais o ano que vem depende de onde eu estiver me efetivado, eu espero!

29. **P-2:** *Mas você pode responder e-mail?*

30. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro!

31. **Pesquisador/Participante:** Supondo que me efetive próximo daqui, poderíamos abordar o ano que vem o Bloco de Conteúdo Espaço e Forma.
32. **P-2:** *Mesmo que você esteja fora, eu acho que você poderia dar consultoria de Formação Continuada!*
33. **P-1:** *É verdade!* [Resposta compartilhada por P-4, P-7 e P-8.]
34. **Pesquisador/Participante:** Ou, caso vá pra longe, penso em montar um Grupo de Estudo para abordar o Espaço e Forma!
35. **P-2:** *A gente te segue e aí de você se não nos aceitar como aluno especial!* [Risos entre as participantes.]
36. **Pesquisador/Participante:** Com certeza! Pretendo, a partir das possibilidades da instituição, promover Formação Continuada aos professores em atuação e Formação Inicial aos alunos da graduação. Uma das conclusões da tese, e que nem é minha, refere-se à necessidade do conhecer bem o conteúdo matemático, para, assim, ser possível um pensar sobre o modo de ensiná-la. Não estou afirmando, aqui, que o conhecimento específico da Matemática é condição suficiente, mas é uma das condições necessárias, conjuntamente com o conhecimento didático, metodológico, psicológico, etc. Isso venho tentando fazer em nosso Grupo de Estudo quando relaciono questões didático-metodológicas, curriculares e psicológicas alicerçado na teoria de Piaget na proposição de situações de ensino de conteúdos matemáticos. De nada adianta conhecer a explicação geral do mecanismo que permite a construção do conhecimento se o professor não se apropriou do conhecimento específico que é o objeto de estudo a ser apreendido pelo aluno.
37. **P-2:** *Isso foi provado o tempo inteiro neste Grupo de Estudos! Se você não tem domínio do que você vai passar, você não vai nem entender a dúvida do seu aluno!*
38. **P-1:** *Verdade!* [Resposta compartilhada por P-4 e P-5.]
39. **Pesquisador/Participante:** Como eu estava falando, o próximo ‘passo’ seria a abordagem do Bloco Espaço e Forma, denotando a construção do pensamento geométrico. A meu ver esta parte é mais complicado que o Tratamento da Informação, de certo modo!
40. **P-8:** *Ah,é!? Eu achava essa parte* [Referiu-se ao Tratamento da Informação, em específico à Combinatória e Probabilidade.] *mais complicada!*
41. **Pesquisador/Participante:** Porque no Tratamento da Informação o sujeito lida com Números e Operações. Vocês concordam? [Todas as participantes indicaram, por meio de expressão facial, afirmativamente.] E, querendo ou não, Números e Operações é algo que está sendo trabalhado...
42. **P-4:** *... é mais concreto!*
43. **Pesquisador/Participante:** ... Há mais tempo. Em contrapartida, a Geometria, que envolve o pensamento geométrico, considerável parte dos alunos não chega a construir, e geralmente esta parte fica no final do livro didático e quase nunca dá tempo de ser abordado.

44. **P-2:** *Socorro! [Risos entre P-4 e P-7.]*
45. **P-8:** *Eu achava que era tão facilzinho, o quadradinho... [Risos.]*
46. **P-2:** *Mas tem coisa muito mais complexa do que isso!*
47. **P-1:** *É... e a gente fica só em decorar fórmulas, e não compreender!*
48. **P-2:** *É!*
49. **P-8:** *Realmente!*
50. **P-2:** *Eu tenho uma outra ideia! Se você for pra longe em outra Universidade, você faz curso à distância com webcam.*
51. **Pesquisador/Participante:** *É uma ótima ideia. Uma grande possibilidade, concordo! [As demais participantes indicaram concordar com a proposta de P-2.]*
52. **P-8:** *É, você passa por e-mail o material, a gente discute e depois compartilha no Grupo!*
53. **P-2:** *É! Nesse Ensino à Distância eu acredito sim!*
54. **P-8:** *Eu também acho... Agora que a gente já começou no Grupo, agora dá!*
55. **P-2:** *Agora, àqueles cursos onde a gente vai lá e só preenche papelzinho, eu não acredito não! Mas neste esquema funciona!*
56. **Pesquisador/Participante:** *Deu pra responder a sua questão, P-8?*
57. **P-8:** *Sim! Só que eu fico triste porque ainda está muito longe pra eu adquirir o conhecimento total!*
58. **Pesquisador/Participante:** *Mas temos que pensar que é um começo! P-7, leia a sua síntese, por favor!*
59. **P-7:** *Neste Grupo de Estudos nós vimos os três diferentes tipos de agrupamentos, a Permutação, o Arranjo e a Combinação. Também vimos que há uma relação entre a Combinatória, a Estatística e a Probabilidade, e aprendemos um pouco sobre a Probabilidade, o evento aleatório e o espaço amostral.*
60. **Pesquisador/Participante:** *Ok! P-5, por favor, leia pra gente!*
61. **P-5:** *Eu coloquei: “Neste Grupo de Estudo foi enfatizada a definição e a diferenciação de Arranjo, Permutação e Combinação. Em outros encontros o enfoque era mais em conseguir utilizar Arranjo, Permutação e Combinação para resolver os problemas, mas agora, além disso é importante saber qual desses conceitos se está usando. Acredito que consegui fazer as diferenciações necessárias, mas ainda necessito recorrer à definição escrita de cada uma para ter certeza.”.*

62. **Pesquisador/Participante:** Interessante, P-5. P-8!

63. **P-8:** *Então... hoje eu até liguei pra P-2 pra lembrar o que a gente viu porque eu preciso fazer a síntese na hora. Aí, a gente conversando, eu fui lembrando, através dos exercícios que você tinha dado, né! Aí eu pus: “Eu achei muito interessante fazer os exercícios, mas eu tive dificuldade em abordar o ano ao qual se destinam.”, mesmo procurando na web porque que procurei. “Aí depois a correção ficou mais fácil de entender e mais significativo.”. [Referiu-se às atividades a serem utilizadas com os alunos nos anos iniciais do Ensino Fundamental visando à abordagem da Combinatória.]*

64. **Pesquisador/Participante:** Ok! Você fez esse, P-1?

65. **P-1:** *Esse eu não fiz! Eu fiz o próximo, da semana passada!*

66. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem! Agora, pessoal, vamos à síntese do 18.º Grupo de Estudo, o item 18.5. P-1, comece a ler pra gente!

67. **P-1:** *Foi muito proveitoso, pois podemos aprender Probabilidade na maneira que o professor mostrou e também descobrir outras maneiras nas atividades em grupo.*

68. **Pesquisador/Participante:** Ah, então fazer as atividades em grupo foi interessante?

69. **P-1:** *É! Eu quis dizer que a gente aprende do jeito que você mostrou e depois nas atividades em grupo a gente pode descobrir novas caminhos.*

70. **Pesquisador/Participante:** Que bom! Por favor, P-4, compartilhe com a gente a sua síntese.

71. **P-4:** *A Probabilidade tenta sistematizar fenômenos aleatórios, mas não dá conta totalmente, pois os resultados não são previsíveis. Não é possível determinar com certeza o resultado a ser obtido. Por isso, o Espaço Amostral deve ser sempre Equiprovável, ou seja, os elementos devem possuir a mesma Probabilidade de ocorrer para que o aleatório fique “amenizado”. A Probabilidade Frequentista é usada para estimar um evento, principalmente quando ele não pode ser calculado teoricamente pela razão entre Evento e Espaço Amostral, ele é então calculado pela quantidade de experimentos. Quanto maior for a quantidade, maior será a estimativa. Para se calcular a frequência relativa do dado perfeito, por exemplo, é necessário pelo menos que esse dado seja lançado 1000 vezes e que todas as faces tenham a frequência relativa dentro de uma média e que sejam parecidas.*

72. **Pesquisador/Participante:** Interessante, P-4! Ótimo!

73. **P-8:** *A P-4 fez um resumo muito bom!*

74. **Pesquisador/Participante:** P-2, por favor, leia pra gente!

75. **P-2:** *Fiquei surpresa comigo mesma como me prenda às formulas, ficando evidente a solução dos desafios de Probabilidade que as resoluções podem ocorrer de diferentes maneiras, e que alguns problemas não possuem “fórmulas” para sua resolução. Fica evidente que é necessário efetuar um grande processo de (re)significação. Outro fator importante são as trocas que realizamos, pois os comentários das colegas fazem com que*

reflita sobre outro ponto de vista, como se abrisse o pensamento. Um exemplo marcante foi a outra resolução encontrada para o desafio 4.

76. **Pesquisador/Participante:** Você se referiu ao desafio de retirar da urna a palavra ANANDA?

77. **P-2:** Sim!

78. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-7!

79. **P-7:** Neste grupo estudamos a Probabilidade Clássica na qual considera que o evento aleatório possui Espaço Amostral equiprovável, ou seja, que tem a mesma chance de ocorrer entre os elementos, e a Probabilidade Frequentista na qual tem seu Espaço Amostral com valores aproximados, mas não iguais, mas que tende a se aproximar da Probabilidade Clássica quando há um grande número de experimentos realizados.

80. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-5!

81. **P-5:** Neste encontro falamos de Probabilidade e Evento, aonde Probabilidade relaciona-se com a frequência relativa de algo. De maneira prática e com exemplos próximos de nossa realidade, o que eu considero muito importante, diferenciamos Evento Aleatório, Espaço Amostral, Evento Certo, Impossível e realizamos exercícios sobre Probabilidade.

82. **Pesquisador/Participante:** Ok! Só retomando, a Probabilidade Frequentista se relaciona com a frequência relativa. Por favor, P-8, compartilhe sua síntese!

83. **P-8:** Eu pus assim: “Consegui fazer os exercícios de Probabilidade sem muita dificuldade, mas em conjunto com as meninas. Sozinha eu faria, só que ainda usando fórmulas.”.

84. **Pesquisador/Participante:** Ok!

85. **P-8:** É o jeito que a gente aprendeu a fazer!

86. **Pesquisador/Participante:** As falas me indicam ainda haver o ranço do modo que vocês aprenderam de que Matemática se resolve por fórmulas?

87. **P-8:** Essa parte aqui [**Referiu-se à Combinatória e Probabilidade.**] ainda é! A gente fez com a P-1 e nós conseguimos fazer! Agora, se eu fosse fazer sozinha eu ia usar a fórmula.

88. **P-2:** Sim! Mas pra mim não é só essa parte não!

89. **Pesquisador/Participante:** E percebam, pessoal, que não há necessidade da fórmula.

90. **P-2 e P-8:** Não!

91. **Pesquisador/Participante:** É claro que a fórmula – como a gente já discutiu, inclusive no diálogo hipotético entre as professoras de Matemática Sueli, Cláudia e Márcia – por representar um pensamento ‘sintetizador’ tem sua importância. No entanto, antes de usar a fórmula é imprescindível saber o que se está fazendo!

92. **P-2:** *Mas é que foi muito interessante, porque nos exercícios todo mundo perguntou: “Que fórmula usa?”. Uma olhava pra outra e pensava: “O que põe aqui?”. E no fim não era nada...*

93. **Pesquisador/Participante:** Percebam que, para resolver a maior parte dos desafios envolvendo Probabilidade o primeiro passo é a constituição do Espaço Amostral. Após, será analisado, dentre todas as possibilidades, qual a chance de determinado Evento ocorrer. Eu trouxe hoje, pessoal, as soluções comentadas dos desafios resolvidos por vocês. Acho interessante o professor chamar a atenção dos alunos na sistematização da solução, permitindo ao estudante confrontar com a sua solução. Nós vamos realizar a leitura conjunta do item 19 ‘Retomando alguns desafios envolvendo Probabilidade’ e vocês irão me dizendo se a solução de vocês foi parecida (ou não).

[A pedido do Pesquisador/Participante, P-1 fez a leitura do Desafio 1 – item 19.1 – exposto abaixo:]

19 Retomando alguns desafios envolvendo Probabilidade

No encontro anterior foram propostos quatro desafios envolvendo a Probabilidade, sendo que, em três deles, fez-se necessário a Combinatória para a determinação do Espaço Amostral. Observe as soluções comentadas de tais desafios e confronte com as elaboradas por você.

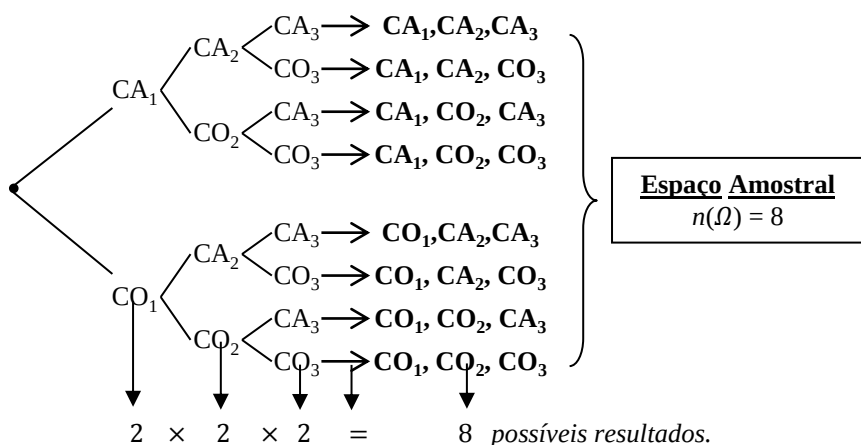
DESAFIO (1): Eduardo possui 3 moedas perfeitas distinguíveis. No lançamento simultâneo dessas 3 moedas, qual é a probabilidade de serem obtidas:

- pelo menos 2 coroas.
- exatamente 2 coroas.
- pelo menos 1 coroa.

Solução: Num primeiro momento faz-se necessário determinar o Espaço Amostral do experimento aleatório – lançamento de 3 moedas perfeitas distinguíveis. Consideremos as seguintes notações:

- CA₁ (Cara da Moeda 1) e CO₁ (Coroa da Moeda 1);
- CA₂ (Cara da Moeda 2) e CO₂ (Coroa da Moeda 2);
- CA₃ (Cara da Moeda 3) e CO₃ (Coroa da Moeda 3), sendo Moeda 1 ≠ Moeda 2 ≠ Moeda 3.

Por meio do Diagrama de Árvore obtém-se o Espaço Amostral, ou seja, todos os possíveis resultados provenientes do lançamento destas 3 moedas. Observe-o a seguir:



a) O Evento Aleatório – pelo menos 2 coroas – é composto pelas seguintes possibilidades:

$A = \{(CA_1, CO_2, CO_3), (CO_1, CA_2, CO_3), (CO_1, CO_2, CA_3), (CO_1, CO_2, CO_3)\}$, totalizando $n(A) = 4$.

Logo, há 4 possibilidades em 8 de ocorrer ‘pelo menos 2 coroas’. Utilizando a expressão (9.) temos:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ ou } 50\%$$

R: Há 50% de chance de ocorrer ‘pelo menos 2 coroas’ no lançamento de 3 moedas perfeitas distinguíveis.

b) O Evento Aleatório – exatamente 2 coroas – é composto pelas seguintes possibilidades:

$B = \{(CA_1, CO_2, CO_3), (CO_1, CA_2, CO_3), (CO_1, CO_2, CA_3)\}$, totalizando $n(B) = 3$. Logo, há 3 possibilidades em 8 de ocorrer ‘exatamente 2 coroas’. Utilizando a expressão (9.) temos: $p(B) = \frac{\text{número de elementos de } B}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8} = 0,375 \text{ ou } 37,50\%$ R: Há 37,50% de chance de ocorrer ‘exatamente 2 coroas’ no lançamento de 3 moedas perfeitas distinguíveis.
c) O Evento Aleatório – pelo menos 1 coroa – é composto pelas seguintes possibilidades: $C = \{(CA_1, CA_2, CO_3), (CA_1, CO_2, CA_3), (CA_1, CO_2, CO_3), (CO_1, CA_2, CA_3), (CO_1, CA_2, CO_3), (CO_1, CO_2, CA_3), (CO_1, CO_2, CO_3)\}$, totalizando $n(C) = 7$. Logo, há 7 possibilidades em 8 de ocorrer ‘pelo menos 1 coroa’. Utilizando a expressão (9.) temos: $p(C) = \frac{\text{número de elementos de } C}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{7}{8} = 0,875 \text{ ou } 87,50\%$ R: Há 87,50% de chance de ocorrer ‘pelo menos 1 coroa’ no lançamento de 3 moedas perfeitas distinguíveis.

[Durante a leitura, o Pesquisador/Participante salientou como foi elaborado o Diagrama de Árvore que possibilitou a obtenção do Espaço Amostral. Quando questionadas, todas as participantes responderam que a ‘maior’ dificuldade para a solução do desafio foi em definir o Espaço Amostral. Após tal comentário, P-8 falou:]

94. **P-8:** *A gente está fazendo exercício de Probabilidade mas que usa Combinatória!*
95. **Pesquisador/Participante:** Todo mundo consegue compreender isso o que a P-8 falou?
96. **P-5:** *É... se a gente não tivesse a noção de Combinatória, acho que não ia dar pra fazer esse aqui de Probabilidade!*
97. **P-8:** *É!*
98. **P-4:** *Eu acho que se o Pesquisador/Participante não tivesse nos ajudado pedindo pra gente primeiro montar o Diagrama de Árvore pra gente fazer essa relação, eu acho que não tinha conseguido chegar na resposta.*
99. **P-5:** *É... eu acho que a gente não tinha conseguido chegar na resposta.*
100. **P-7:** *É!*
101. **P-1:** *É... a gente não tinha ‘chegado’ na Árvore!*
102. **P-5:** *É verdade!*
103. **Pesquisador/Participante:** Eu até denoto na introdução do item 19 que, embora sejam desafios de Probabilidade há a necessidade do conhecimento combinatório. Tudo bem? **[Todas as participantes indicaram, por meio de expressão facial, afirmativamente.]** Até porque, se eu não obtenho o Espaço Amostral, você não ‘sai’ do lugar. E dependendo do Experimento Aleatório, se for muito complexo, pra não se ‘perder’ é necessário o Diagrama de Árvore que é um importante instrumento da Combinatória. Depois do meu auxílio na elaboração do Diagrama de Árvore, a solução do desafio ficou mais fácil?
104. **P-2:** *Sim! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*

105. Pesquisador/Participante: P-4, por favor, leia a solução do desafio 2! [A referida participante leu a seguinte solução:]

DESAFIO (2): Lucas colocou numa caixa opaca 7 bolas verdes e 5 bolas azuis. Qual é a probabilidade de, ao acaso, retirar: a) uma bola verde? b) uma bola azul? c) uma bola azul ou uma bola verde?
Solução: A caixa opaca na qual Lucas colocou 7 bolas verdes (BV) e 5 bolas azuis (BA) constitui o seguinte Espaço Amostral: $\Omega = \{BV_1, BV_2, BV_3, BV_4, BV_5, BV_6, BV_7, BA_1, BA_2, BA_3, BA_4, BA_5\}$, totalizando $n(\Omega) = 12$ bolas. a) O Evento Aleatório ‘uma bola verde’ é composto pelas seguintes possibilidades: $A = \{BV_1, BV_2, BV_3, BV_4, BV_5, BV_6, BV_7\}$, totalizando $n(A) = 7$. Como na caixa opaca há 7 bolas verdes, então há 7 possibilidades em 12 de retirar uma bola verde ao acaso. Utilizando a expressão (9.) temos: $p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7}{12} \cong 0,5833 \text{ ou } 58,33\%$ R: Há aproximadamente 58,33% de chance de retirar da caixa uma bola verde ao acaso.
b) O Evento Aleatório ‘uma bola azul’ é composto pelas seguintes possibilidades: $B = \{BA_1, BA_2, BA_3, BA_4, BA_5\}$, totalizando $n(B) = 5$. Como na caixa opaca há 5 bolas azuis, então há 5 possibilidades em 12 de retirar uma bola azul ao acaso. Utilizando a expressão (9.) temos: $p(B) = \frac{\text{número de elementos de } B}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{5}{12} \cong 0,4167 \text{ ou } 41,67\%$ R: Há aproximadamente 41,67% de chance de retirar da caixa uma bola azul ao acaso.
c) O Evento Aleatório ‘uma bola verde ou uma bola azul’ é composto pelas seguintes possibilidades: $C = \{BV_1, BV_2, BV_3, BV_4, BV_5, BV_6, BV_7, BA_1, BA_2, BA_3, BA_4, BA_5\}$, totalizando $n(C) = 12$. Como na caixa opaca há 7 bolas verdes e 5 bolas azuis, então há 12 possibilidades em 12 de retirar uma bola verde ou uma bola azul ao acaso. Utilizando a expressão (9.) temos: $p(C) = \frac{\text{número de elementos de } C}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{12}{12} = 1 \text{ ou } 100\%$ R: Há 100% de chance de retirar da caixa uma bola verde ou uma bola azul ao acaso. Logo, este evento denominado Evento Certo sempre ocorrerá.

[Após a leitura-discussão do item a), o Pesquisador/Participante perguntou:]

106. Pesquisador/Participante: Pessoal, eu lembro que este desafio vocês resolveram com facilidade. Por quê? O que vocês acham que fez com que tal desafio fosse resolvido mais facilmente?

107. P-1: Eu acho que é porque esse aqui resolve com fórmulas!

108. Pesquisador/Participante: Com fórmulas, P-1?

109. P-2: Eu acho que é porque o Espaço Amostral está mais fácil!

110. P-8: É, o Espaço Amostral está mais explícito!

111. Pesquisador/Participante: O Espaço Amostral está mais fácil de obter?

112. P-2: É! [Resposta compartilhada entre P-4, P-5, P-7 e P-8.]

113. Pesquisador/Participante: Dá pra compreender que eu não preciso de Combinatória neste desafio! Ou seja, não foi preciso utilizar o pensamento combinatório para a obtenção do Espaço Amostral, até porque os 12 possíveis resultados (bolas verdes e azuis) já tinham sido dados no enunciado.

114. P-8: Ainda bem, né!

[Concluída a leitura dos itens b) e c) e, por não haverem dúvidas e ou comentários, o Pesquisador/Participante solicitou à P-2 que lesse o 3.º desafio. Observe-o a seguir:]

DESAFIO (3): Um casal planeja ter exatamente 2 filhos. Qual é a probabilidade de: a) duas crianças serem meninas? b) duas crianças serem meninos? c) pelo menos uma criança ser menino? d) nenhuma criança ser menina?	Solução: Inicialmente faz-se necessário determinar o Espaço Amostral do ‘experimento aleatório’ – nascimento de 2 filhos. Por meio do Diagrama de Árvore obtém-se o referido Espaço Amostral: a) O Evento Aleatório ‘duas crianças serem meninas’ é composto pela seguinte possibilidade: $A = \{(Menina, Menina)\}$, totalizando $n(A) = 1$. Há 1 possibilidade em 4 de duas crianças serem meninas. Utilizando a expressão (9.) temos: $p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ ou } 25\%$ R: Há 25% de chance de duas crianças serem meninas. b) O Evento Aleatório ‘duas crianças serem meninos’ é composto pela seguinte possibilidade: $B = \{(Menino, Menino)\}$, totalizando $n(B) = 1$. Há 1 possibilidade em 4 de duas crianças serem meninos. Utilizando a expressão (9.) temos: $p(B) = \frac{\text{número de elementos de } B}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ ou } 25\%$ R: Há 25% de chance de duas crianças serem meninos. c) O Evento Aleatório ‘pelo menos uma criança ser menino’ é composto pelas seguintes possibilidades: $C = \{(Menino, Menino), (Menino, Menina), (Menina, Menino)\}$, totalizando $n(C) = 3$. Há 3 possibilidades em 4 de pelo menos uma criança ser menino. Utilizando a expressão (9.) temos: $p(C) = \frac{\text{número de elementos de } C}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ ou } 75\%$ R: Há 75% de chance de pelo menos uma criança ser menino. d) O Evento Aleatório ‘nenhuma criança ser menina’ é composto pela seguinte possibilidade: $D = \{(Menino, Menino)\}$, totalizando $n(D) = 1$. Há 1 possibilidade em 4 de nenhuma criança ser menina. Utilizando a expressão (9.) temos: $p(D) = \frac{\text{número de elementos de } D}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ ou } 25\%$ R: Há 25% de chance de nenhuma criança ser menina.
--	---

[Durante a leitura, P-2 explicou às demais o Diagrama de Árvore denotado. Ao término da leitura do item a), P-1 falou:]

115. **P-1:** *Eu fiz diferente!*

116. **Pesquisador/Participante:** Como você fez?

117. **P-1:** *Eu pus que a probabilidade de nascer menina é $\frac{1}{2}$. Como quer menina e menina, então eu fiz $\frac{1}{2}$ vezes $\frac{1}{2}$ que deu $\frac{1}{4}$.*

118. **Pesquisador/Participante:** Você, P-1, utilizou um conceito da Probabilidade denominado Evento Independente. Ou seja, primeiro acontece alguma ‘coisa’ e depois acontece outra ‘coisa’, sendo este ‘e’ um indicativo da intersecção que implica na multiplicação. A primeira possibilidade é $\frac{1}{2}$, pois esta é a Probabilidade de nascer menina. Igualmente, a segunda possibilidade é $\frac{1}{2}$, daí fazendo $\frac{1}{2}$ vezes $\frac{1}{2}$ resulta em $\frac{1}{4}$ chegando no mesmo resultado lido por P-2. Tudo bem? Eu optei por não discutir estes outros conceitos de Probabilidade devido à falta de tempo. Além disso, quis chamar a atenção de vocês ao fato de que, mesmo sem recorrer a tais conceitos, é possível resolver problemas envolvendo Probabilidade a partir da ideia de Espaço Amostral e Evento Aleatório valendo-se da definição clássica.

[Em prosseguimento, P-2 apresentou a solução dos itens b), c) e d). Novamente, o Pesquisador/Participante lembrou as participantes acerca do auxílio dado na solução do referido desafio ao sugerir a elaboração do Diagrama de Árvore à constituição do Espaço Amostral. Após, o Pesquisador/Participante indagou:]

119. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, no desafio 4 eu trouxe a solução elaborada pelo trio (P-2, P-4 e P-7) e a elaborada pelo outro trio (P-1, P-5 e P-8). Acho importante nós observarmos diferentes maneiras de resolver os problemas, e isso deveria ser feito pelo professor em sala de aula possibilitando a constante reversibilidade/gerenciamento de pontos de vistas pelos alunos. P-7, por favor, leia pra gente a solução feita pelo seu trio. Em seguida, P-5, faça a leitura da solução do seu trio. **[Inicialmente, P-7 expôs o seguinte solução:]**

DESAFIO (4): Uma urna contém as letras A, A, A, N, N e D. Retira-se letra por letra. Qual a probabilidade de sair a palavra ANANDA? Solução 1: Inicialmente calcula-se a quantidade dos possíveis anagramas a serem formados a partir das letras A, A, A, N, N e D. Este valor representa o total do Espaço Amostral ‘$n(\Omega)$’. Para tal cálculo basta aplicar a expressão da Permutação Com Repetição já que as letras ‘A’ e ‘N’ se repetem. Observe-a abaixo: $P_n^{\alpha, \beta} = P_6^{3, 2} = \frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{120}{2} = 60 \text{ possíveis anagramas diferentes}$, onde $n = 6$ representa o número de letras, $\alpha = 3$ indica as 3 letras ‘A’ repetidas e $\beta = 2$ refere-se às 2 letras ‘N’ repetidas. Logo $n(\Omega) = 60$. A probabilidade de sair a palavra ANANDA é de 1 possibilidade em 60 anagramas. Utilizando a expressão (9.) temos: $p(\text{ANANDA}) = \frac{n(\text{ANANDA})}{n(\Omega)} = \frac{1}{60} \cong 0,0167 \text{ ou } 1,67\%$ R: Há aproximadamente 1,67% de chance de sair a palavra ANANDA ao retirar letra por letra da urna.
--

[P-7 apresentou dificuldade ao ler a expressão referente ao cálculo da Permutação Com Repetição, embora tenha afirmado, assim como as demais, lembrar-se e compreender tal cálculo. Ao término da discussão da 1.ª solução, o Pesquisador/Participante perguntou ao trio (P-1, P-5 e P-8) se haviam compreendido tal

solução. Em resposta disseram haver compreendido a solução denotada. Em seguida, P-5 leu a 2.ª solução – denotada abaixo:]

DESAFIO (4): Uma urna contém as letras A, A, A, N, N e D. Retira-se letra por letra. Qual a probabilidade de sair a palavra ANANDA?

Solução 2: Para que seja formada a palavra ANANDA, as letras devem ser retiradas da urna, uma a uma, na seguinte ordem:

1ª Posição 2ª Posição 3ª Posição 4ª Posição 5ª Posição 6ª Posição
 $\boxed{\text{A}}$ e $\boxed{\text{N}}$ e $\boxed{\text{A}}$ e $\boxed{\text{N}}$ e $\boxed{\text{D}}$ e $\boxed{\text{A}}$

A cada posição, a chance de sair determinada letra modifica já que houve diminuição do Espaço Amostral. Por exemplo, na 1.ª posição, a Probabilidade de sair a letra 'A' é:

$$p(\underbrace{\text{saída da 1ª letra 'A'}}_{1^\text{ª Posição}}) = \frac{n(A)}{n(\Omega^i)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Na 2.ª posição, com a diminuição do Espaço Amostral devido à tirada da 1.ª letra 'A', a Probabilidade de retirar a letra 'N' é:

$$p(\underbrace{\text{saída da 1ª letra 'N'}}_{2^\text{ª Posição}}) = \frac{n(N)}{n(\Omega^{ii})} = \frac{2}{5}$$

Analogamente, para as demais letras temos:

$p(\underbrace{\text{saída da 2ª letra 'A'}}_{3^\text{ª Posição}}) = \frac{n(A)}{n(\Omega^{iii})} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
$p(\underbrace{\text{saída da 2ª letra 'N'}}_{4^\text{ª Posição}}) = \frac{n(N)}{n(\Omega^{iv})} = \frac{1}{3}$
$p(\underbrace{\text{saída da letra 'D'}}_{5^\text{ª Posição}}) = \frac{n(D)}{n(\Omega^v)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$p(\underbrace{\text{saída da 3ª letra 'A'}}_{6^\text{ª Posição}}) = \frac{n(A)}{n(\Omega^{vi})} = \frac{1}{1} = 1$

Para calcular a Probabilidade de sair a palavra ANANDA, multiplicam-se as Probabilidades referentes às sucessivas retiradas das letras:

$$p(ANANDA) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{2}{120} = \frac{1}{60} \cong 0,0167 \text{ ou } 1,67\%$$

[O Pesquisador/Participante auxiliou P-5 na explicação do procedimento utilizado na solução 2. Quando questionadas, P-2, P-4 e P-7 responderam haver compreendido tal solução.]

[Dando continuidade, iniciou-se a discussão do item 19.1 – ‘Ensino de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental’. No entanto, antes da leitura-discussão, o Pesquisador/Participante salientou:]

120. Pesquisador/Participante: Pessoal, nós iremos analisar algumas considerações referentes ao Ensino de Probabilidade nos anos iniciais. Como eu havia falado no início de nosso encontro sobre a necessidade de integração/relação entre as diferentes áreas de uma Ciência, agora, neste texto, é possível ‘visualizar’ a relação de diferentes ramos do saber à constituição da prática do professor. Isso, pois, para desenvolver uma situação de ensino que vise o ensino de determinado conteúdo, é necessário relacionar o conteúdo específico – no caso Probabilidade – com questões didáticas, metodológicas, psicológicas, filosóficas, etc. Se eu tivesse abordado este texto há algumas semanas, vocês acham que seria possível a satisfatória compreensão de todos os assuntos tratados envolvendo os conceitos específicos da Probabilidade?

121. P-2: *Não! Se a gente não tivesse visto os principais assuntos da Probabilidade, na hora de ler o texto acho que ficaríamos com dúvidas.*

122. Pesquisador/Participante: Volto a salientar que o conteúdo específico não é condição suficiente para a elaboração de situações de ensino, mas, sem o mesmo fica muito difícil propor tais situações. Vamos supor que eu vá ler um texto que trate do Ensino de Química Teórica. Como não possuo conhecimentos nesta área (Química Teórica) acredito – tenho quase certeza – que minha compreensão não será tão ‘profunda’. O mesmo acontece agora, ou seja, como abordamos os principais assuntos da Probabilidade, penso que alguns esquemas assimiladores já construídos permitirá a assimilação do proposto no texto. Tudo bem, pessoal?

123. P-5: *Sim!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

[A pedido do Pesquisador/Participante, P-8 leu a seguinte parte do item 19.2:]

19.2 Ensino de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental o professor deve oportunizar ao aluno a construção de algumas noções pertencentes à Probabilidade. Conforme o PCN (1.^a a 4.^a série):

Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1997, p. 40)

124. Pesquisador/Participante: O PCN traz este trecho que a P-8 acabou de ler. Há algumas semanas, vocês conseguiriam compreender do que se trata quando o texto cita aleatório, acaso, evento, espaço equiprovável?

125. P-4: *Não!* [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]

126. Pesquisador/Participante: Agora, com os nossos estudos, a compreensão ‘melhora’, né! É mais ou menos neste caminho que eu dei o exemplo da Química Teórica há pouco. Por favor, P-8, continue a leitura do próximo trecho!

Além de destacar a principal finalidade do ensino de Probabilidade nos anos iniciais, tal documento pontua os seguintes conteúdos conceituais e procedimentais a serem construídos pelo estudante no 2.^o ciclo (3.^a e 4.^a séries):

- Interpretação de dados apresentados por meio de tabelas e gráficos, para identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos.
- Exploração da idéia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de “sorte”.
- Utilização de informações dadas para avaliar probabilidades. (p. 61)

Visando propiciar a construção dos referidos conteúdos, o professor deve organizar situações de ensino pautadas em problemas/desafios ‘próximas’ à realidade do aluno, ou seja, possíveis de serem assimiladas/acomodadas pelo aprendiz. Devido ao ‘momento psicológico’ vivenciado pelo estudante nesta etapa da escolaridade, a abordagem das noções probabilísticas dar-se-á mais ‘intensamente’ no 4.^o e 5.^o ano. No entanto, inúmeras situações envolvendo o previsível e o imprevisível podem (devem) ser gradativamente trabalhadas desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, bem como na Educação Infantil.

Segundo Piaget e Inhelder (1951), antes dos 7-8 anos, aproximadamente, a criança ainda não consegue distinguir o possível do necessário, donde o pensamento oscila entre o previsível e o imprevisível. Essa não diferenciação entre o possível e o necessário deve-se à impossibilidade de compreender a ideia do acaso. Ao

serem questionadas sobre o porquê da saída de determinada face de um dado lançado aleatoriamente, a criança desse estágio (pré-operatório) justificará valendo-se do seu desejo, capricho ou fantasia. Com o início das operações ‘concretas’ (7-8 anos a 11-12 anos, aproximadamente), o sujeito consegue estabelecer certos tipos de comparações entre as probabilidades de determinados eventos. Isso se deve, pois o indivíduo diferencia as operações (associadas ao domínio do que é dedutível) do acaso (associado ao domínio do que é imprevisível).

[Ao término da leitura do último parágrafo no qual faz-se uma breve explanação do estudo de Piaget e Inhelder (1951) acerca da ideia do acaso, o Pesquisador/Participante pontuou:]

127. Pesquisador/Participante: Os estudos de Piaget e Inhelder nos mostraram que antes dos 7-8 anos, aproximadamente, a criança, que se encontra na pré-operação não consegue ainda compreender e diferenciar o previsível – daquilo que é dedutível via operações lógicas – do imprevisível no qual o acaso intervém. A criança neste estágio – pré-operatório – dirá que o dado caiu com a face 6 porque ela quis ou o dado quis.

128. P-8: *Elas falam isso mesmo!*

129. Pesquisador/Participante: Isso ocorre pela falta da operação enquanto ação internalizada e que estabelece diferentes relações. Falta-lhe ainda a reversibilidade para compreender e retornar no início, ou seja, há 6 faces no dado, logo, há 1 entre 6 possíveis resultados. Isso implica que, no 1.º ano, parte dos alunos acredita que os fenômenos acontecem por mágica, capricho ou se o objeto tivesse vida. Assim, dá para serem abordadas situações em que o professor vai questioná-las sobre a ocorrência de determinados fenômenos, mas ‘fica’ por aí.

130. P-8: *Pode falar que essa fase do concreto... ah, já tá falando no texto o que eu ia perguntar... A criança precisa do concreto pra compreender, ela precisa manipular...*

131. Pesquisador/Participante: Isso, P-8! O concreto apoia o pensamento do sujeito sobre o assunto em questão.

132. P-8: *Ah, tá, então tá certo! É dentro do meu TCC!*

133. Pesquisador/Participante: Podemos prosseguir, pessoal? **[Como não houveram dúvidas e ou comentários, P-8 prosseguiu com a leitura do trecho seguinte:]**

Corroborando na discussão a respeito do ensino de Probabilidade nos anos iniciais, Rodrigues (2006) pontua:

Quanto a estudos relativos a noções de Probabilidade especificamente nas séries iniciais da escolarização, foi possível identificar os seguintes objetivos: a) compreender noções básicas sobre resultados de acontecimentos (certo, possível, mais provável, mais freqüente); b) adquirir um vocabulário básico para falar a respeito desse conceito matemático e começar a situar as probabilidades de acontecimentos numa escala de 0 a 1; c) identificar características de acontecimentos previsíveis ou aleatórios a partir de situação-problema; d) contribuir para desenvolver a capacidade crítica e autonomia do aluno para que exerça plenamente a cidadania e; e) contribuir para a construção de um pensamento não determinístico. (p. 9)

134. Pesquisador/Participante: Deu pra compreender os objetivos que Rodrigues (2006) colocou?

135. **P-8:** *O que é mesmo esse 0 a 1?*

136. **Pesquisador/Participante:** Zero indica a não ocorrência do Evento, ou seja, Evento Impossível. Já o 1 indica o Evento Certo, isto é, o mesmo sempre ocorrerá. E o Evento provável de ocorrer ficará neste intervalo de 0 a 1.

137. **P-8:** *Ah, tá! Deixa eu anotar isso!* [P-5 também anotou tal explicação complementar em seu texto.]

138. **Pesquisador/Participante:** Rodrigues (2006) publicou este interessante artigo num evento da área de Educação Matemática no qual salienta já ser possível desenvolver tais objetivos até o término do 5.º ano. Inclusive, pessoal, é dada atenção à importância em possibilitar ao estudante a construção do pensamento não determinístico, ou seja, na construção da Matemática do talvez/possível, e não apenas na Matemática do absoluto/certeza que geralmente ocorre.

139. **P-8:** *É mesmo!*

140. **Pesquisador/Participante:** Por favor, P-8, termine a leitura do texto! [A participante conclui parte final do texto:]

Nesse nível de ensino, bem como nos demais, torna-se importante o estabelecimento de relações envolvendo a Probabilidade, a Combinatória e a Estatística. Além de tais áreas, a construção da Probabilidade necessita da construção das estruturas multiplicativas já que a ideia de Probabilidade envolve as noções de proporção, razão (parte/todo – fração).

Por fim, ao propiciar a construção das noções iniciais pertencentes à Probabilidade (e à Combinatória e Estatística) o docente colaborará à constituição de um pensamento matemático não determinístico ‘alicerçado’ na ‘filosofia do azar’. Pensamento esse importante à formação da criticidade que possibilite ao aluno uma ‘maior’ compreensão da realidade circundante.

[Ao término da leitura do 1.º parágrafo, o Pesquisador/Participante questionou:]

141. **Pesquisador/Participante:** Vocês sabiam que, além de ser interessante (e necessário) relacionar a Probabilidade, Combinatória e Estatística, a abordagem da Probabilidade também depende das estruturas multiplicativas? Até porque a Probabilidade é indicada por meio da razão parte (Evento) pelo todo (Espaço Amostral)!

142. **P-8:** *Nossa, é mesmo... é uma fração!*

143. **Pesquisador/Participante:** E com isso percebemos a integração entre as diversas áreas (Blocos) da Matemática. É por isso que a abordagem da Probabilidade se dá mais intensamente no 4.º e 5.º anos pois o aluno começa a compreender e estudar, digamos assim, mas sistematicamente as ideias de fração/proporção. Assim, para o aluno compreender o número probabilístico, sem o conhecimento de fração e proporção fica muito difícil. Daí Probabilidade também se relaciona com Números e Operações, sendo que em Números se faz o estudo do conjunto dos Número Racionais e nas Operações envolvendo as estruturas multiplicativas. É interessante pensar sobre isso, pessoal? [Como ninguém respondeu, o Pesquisador/Participante complementou:] Além de ser interessante, também é preocupante?

144. **P-7:** *Sim!* [Resposta compartilhada por P-4 e P-5.]

145. **P-2:** *É muito complexo o ensino!*

146. **P-8:** *Nossa, é muita responsabilidade!*

147. **P-2:** *Eu fico pensando nisso toda hora!*

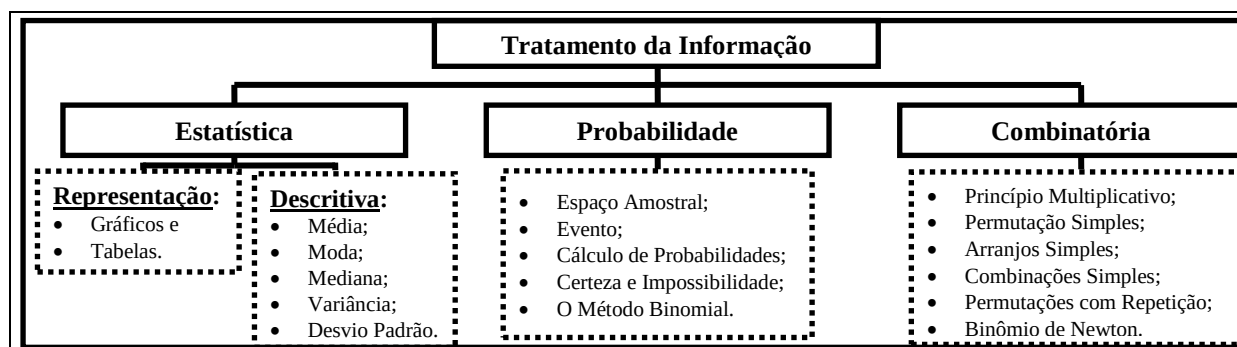
148. **Pesquisador/Participante:** Se tivéssemos tempo disponível, deveríamos estudar, aprofundadamente, inúmeras situações problemas envolvendo os vários significados acerca da estrutura multiplicativa. Além disso, seria interessante discutir a construção de tais estruturas pelo sujeito, o que nos remeteria à teoria de Piaget e alguns estudos de Vergnaud. Mas como eu falei, P-8, o meu objetivo é dar continuidade em nosso Grupo abordando os demais Blocos de Conteúdos. **[Para finalizar, P-8 leu o ‘último’ parágrafo denotado anteriormente. Ao término, P-8 salientou:]**

149. **P-8:** *Quando a gente lê ‘filosofia do azar’ ainda fica, parece, aquela dívida, né!*

150. **Pesquisador/Participante:** Mas tudo bem, P-8, quanto ao termo e significado da ‘filosofia do azar’?

151. **P-8:** *Sim, é que é meio estranho falar ‘filosofia do azar’.*

152. **Pesquisador/Participante:** Vocês acharam interessante este texto, pessoal? **[Todas as participantes responderam afirmativamente.]** Quando o aluno constrói os conteúdos pertencentes ao ‘Bloco’ Tratamento da Informação, isso vai auxiliá-lo a melhor compreender a realidade. Por exemplo, conseguirá ler e interpretar gráficos e tabelas que mostram vários temas sócio-econômico-ambiental-culturais, saberá analisar as medidas estatísticas, compreenderá as reais possibilidades ao efetuar jogos de azar, etc. Antes de darmos continuidade, observem o seguinte organograma que abordei no 2.º Grupo de Estudo! **[O Pesquisador/Participante projetou o seguinte esquema:]**



Olhem o organograma e analisem todos os conteúdos que abordamos das 3 áreas que compõem o Tratamento da Informação. Não se assustem porque dois conteúdos nós não estudamos, que foram ‘O Método Binomial’ da Probabilidade e o ‘Binômio de Newton’ da Combinatória.

153. **P-2:** *Ah, bom!*

154. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, pessoal?

155. **P-5:** *Sim!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**

156. **Pesquisador/Participante:** Vocês acham que foi possível a construção de tais conteúdos?

157. **P-5:** Nossa, olhando lá [Referiu-se ao organograma projetado.] a gente já passou por tanta coisa!

158. **Pesquisador/Participante:** E o mesmo caminho que nós percorremos por meio da solução de inúmeras situações problemas – conjuntamente às análises e discussões – vocês deverão oportunizar aos seus futuros alunos. Mas, vamos retornar ao item 19.1. Agora, eu peço para que vocês – em dupla, trio, individualmente, como quiserem – pensem sobre as seguintes atividades a serem utilizadas nos anos iniciais. Identifique, em cada atividade, os conteúdos matemáticos abordados e o ano ao qual se destinam. [O Pesquisador/Participante projetou as seguintes atividades:]

1. Identifique nas seguintes atividades o conteúdo matemático abordado e o ano a qual se destinam:

ATIVIDADE 1: AS POSSIBILIDADES DE “TIRAR” OS ANIMAIS DO ZOOLOGICO

Rogério, Eduardo e Pedro fizeram um dado de cartolina e colaram em cada uma das faces a figura dos animais que eles viram no zoológico. Observe as figuras abaixo:

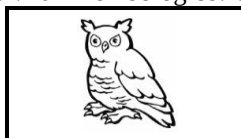
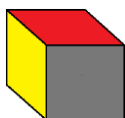


Figura 1

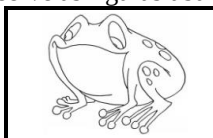


Figura 2



Figura 3

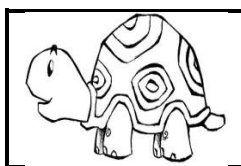


Figura 4



Figura 5



Figura 6

1. Se Rogério jogar o dado uma vez, qual a chance de sair a Figura 5? Explique como você pensou para responder essa questão.

R: _____

2. Se Eduardo jogar o dado mais uma vez, qual a chance de sair a Figura 3?

R: _____

3. Pedro escolheu a Figura 4 já que ele gosta muito de tartaruga. Se jogar o dado uma vez, qual a possibilidade de sair essa figura? Explique como você pensou para responder essa questão.

R: _____

4. Rogério escolheu as Figuras 1 e 3. Se jogar o dado uma vez, qual a possibilidade de sair uma dessas figuras? Justifique sua resposta.

R: _____

5. Eduardo escolheu a metade das figuras. Se jogar o dado uma vez, qual a possibilidade de sair uma dessas figuras? Explique como você pensou para responder essa questão.

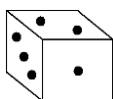
R: _____

Conteúdo abordado:

Ano:

ATIVIDADE 2: O JOGO DE DADOS

1. Com um grupo de 4 colegas, jogue o dado 6 vezes e complete o quadro com o número da face que caiu em cada jogada.



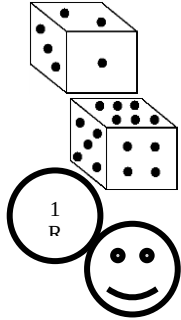
Número de Jogada	Número da Face que caiu na jogada
1	
2	
3	
4	
5	
6	

a) Qual número apareceu mais vezes? _____	b) Qual número apareceu menos vezes? _____	c) Durante o lançamento, algum número não apareceu? _____
2. O número de vezes que o dado é jogado influencia as respostas? Pense a respeito com os seus colegas. R: _____		
Conteúdo abordado: _____		Ano: _____

ATIVIDADE 3: É PROVÁVEL ACONTECER...

A probabilidade de sair determinado número ao jogar um dado é equiprovável, isto é, a possibilidade de sair o número 2, por exemplo, é igual à de sair o número 4. Na Matemática, a probabilidade é um número que indica a chance de ocorrência de um evento num experimento aleatório; e tal número pode ser expresso por meio de uma fração.

Consideremos uma moeda que possui duas faces: cara e coroa. Se jogarmos a moeda para o alto, a probabilidade de a moeda cair com a face coroa virada para cima é de $\frac{1}{2}$, pois existem duas possibilidades (igualmente possíveis) de a moeda cair com uma das faces viradas para cima (ou coroa ou cara). Assim, a probabilidade de cair a face cara ou a face coroa virada para cima é de 1 em 2.



1. Ao jogarmos um dado, qual a probabilidade de sair o número 5? Escreva a sua resposta utilizando fração.
 R: _____

2. Em uma caixa há 4 bolas azuis e 6 bolas verdes. Qual a chance de alguém tirar uma bola verde dessa caixa?
 R: _____

Conteúdo abordado: _____	Ano: _____
---------------------------------	-------------------

[Foram disponibilizados 20 minutos para a solução de tais atividades. As participantes discutiram conjuntamente, auxiliando-se mutuamente.]

[Em relação à Atividade 1 – As possibilidades de “tirar” os animais do zoológico – as participantes responderam as 5 questões. Apresentaram dificuldades para identificar o ano de escolaridade ao qual se destina a referida atividade.]

[Acerca da Atividade 2 – O jogo de dados – P-1 e P-4, inicialmente, apresentaram um pouco de dificuldade para decidir o número de vezes que o dado seria lançado em cada grupo de 4 alunos. P-2 auxiliou-as na compreensão do enunciado. Em seguida, P-8 solicitou o dado para completarem a tabela. Por descuido, o Pesquisador/Participante não o trouxe, salientando ser necessário o dado ao realizar a atividade com os alunos dos anos iniciais. Conjuntamente, completaram a tabela imaginando os possíveis números (faces) advindos dos 6 lançamentos do dado. Observe o diálogo realizado no momento em que completavam a tabela:]

159. **P-5:** Ah, eu vou falando os números que saíram. Na primeira jogada saiu o 4. Na segunda saiu o 1, e como a pessoa estava se sorte saiu o 1 de novo!

160. **P-4:** É verdade, sempre acontece isso comigo! Quando preciso tirar um número grande sai sempre 1!

161. **Pesquisador/Participante:** Daí depois sai o 5! Na quinta jogada sai o 3 e por último sai o 2!

162. **P-4:** *E o 6?*

163. **P-5:** *Ah, o 6 nunca sai! Pro seu oponente às vezes sai, mas pra você não! [Risos entre todas as participantes.]*

164. **P-2:** *É verdade, nunca sai!*

165. **P-8:** *Que número que é o último?*

166. **P-5:** *Dois!*

[Após completarem a tabela, as participantes responderam os itens a), b) e c) da questão 1 e a questão 2. Ao discutirem sobre o ano de escolaridade, as participantes ressaltaram que a questão 2 tornou a atividade complexa, por isso não poderia ser trabalhada no 3.º ano do Ensino Fundamental. Em consenso, consideraram a atividade como adequada ao 4.º e 5.º ano.]

[Acerca da Atividade 3 – É provável acontecer... – as participantes, após leitura do texto, responderam ‘rapidamente’ as duas questões.]

[Decorrido o tempo disponibilizado, o Pesquisador/Participante iniciou a discussão.]

167. **Pesquisador/Participante:** Pessoal, na Atividade 1 é necessário lembrar que os alunos realmente foram ao zoológico. Este estudo-passeio é possível de ser realizado, e, assim, os problemas decorrentes desta vivência são melhores assimiláveis pelos alunos propiciando a abordagem dos conteúdos matemáticos. Os estudantes, no caso, fizeram um cubo e colaram as 6 faces com as figuras dos animais do zoológico.

168. **P-2:** *É difícil a planificação!*

169. **Pesquisador/Participante:** Sim, é difícil! O professor tem que trazer a planificação pronta para o aluno montá-la. Isso não significa que o estudante não possa compreender porque a planificação é daquele jeito, mas pedir que eles a façam não dá muito certo.

170. **P-2:** *Nem os adultos não tem a habilidade de traçar a planificação!*

171. **Pesquisador/Participante:** Sim, concordo. Muitos adultos não sabem fazer uma planificação. Tudo bem essa primeira etapa, pessoal? Então quer dizer que o professor criou uma situação problema a partir de uma vivência/experiência. O que vocês colocaram na questão 1 ‘Se Rogério jogar o dado uma vez, qual a chance de sair a Figura 5? Explique como você pensou para responder esta questão.’

172. **P-2:** *Há 1 chance em 6!*

173. **Pesquisador/Participante:** Como vocês explicariam?

174. **P-1:** *Há 6 faces diferentes e, a cada jogada, só pode cair uma face.*

175. **Pesquisador/Participante:** Vocês acham que os alunos dos anos iniciais demorariam pra chegar na explicação que a P-1 falou?

176. **P-2:** *Ah, iria ter uma discussãozinha!*
177. **Pesquisador/Participante:** Então os alunos irão discutir sobre!
178. **P-2:** *Eu acho!*
179. **P-8:** *Teria que mostrar pros alunos, e não só falar!*
180. **P-1:** *Eu acho que os alunos iam ficar jogando o dado e anotar quantas vezes saiu a Figura 5.*
181. **P-5:** *Eu também pensei isso, P-1, que os alunos iam ficar tentando.*
182. **Pesquisador/Participante:** Os alunos irão fazer, agora, para depois de um certo tempo tentar refletir! Nós vamos analisar esta questão da Tomada de Consciência daqui há pouco! **[Após discutir a resposta da questão 2, o Pesquisador/Participante chamou a atenção na pergunta 3.]** Na questão 3, pessoal, ao afirmar que Pedro gosta muito de tartaruga, o que é possível trabalhar? **[Como ninguém respondeu, o Pesquisador/Participante salientou:]** Há possibilidade do aluno começar a compreender que independentemente de gostar da tartaruga (Figura 4) isso não vai alterar o resultado.
183. **P-2:** *É verdade, como estava no texto!*
184. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo, P-2! Como o acaso intervém, não importa o desejo, capricho, fantasia! Pode acontecer de algumas crianças responderem que cairá a tartaruga pelo fato da mesma gostar deste animal. Tem criança que chega a por o dado com a face da tartaruga virada para cima!
185. **P-5:** *Ah, eu conheço alguns adultos que fazem mais ou menos isso! [Risos entre todos.]*
186. **P-2:** *Nossa, eu não quero jogar com essas pessoas!*
187. **P-5:** *É triste, mas acontece!*
188. **Pesquisador/Participante:** Essas pessoas querem driblar o acaso, e forçam a previsibilidade! **[Ao discutirem a 4.^a questão, as participantes concluíram não ser fácil o estudante obter como resposta $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$. Analogamente observou-se o mesmo na 5.^a questão. Quando questionadas sobre o conteúdo matemático abordado na Atividade 1, o único conteúdo citado foi Probabilidade. Deste modo, o Pesquisador/Participante complementou:]**
189. **Pesquisador/Participante:** Além de ser abordado Probabilidade, o problema permite o trabalho envolvendo Espaço Amostral!
190. **P-5:** *Ah, é!?*
191. **Pesquisador/Participante:** Dá pra entender, P-5, porque é abordado Espaço Amostral de modo indireto? **[Após alguns segundos, P-5 respondeu:]**

192. **P-5:** *Ah, sim, porque tem que ver o total de faces.*
193. **Pesquisador/Participante:** Isso! Além de Espaço Amostral abordam-se diferentes Eventos Aleatórios, sendo que a ideia de Probabilidade Clássica decorre da relação de razão estabelecida entre o Evento e o Espaço Amostral. E, caso o aluno saiba representar fracionariamente, é trabalhado também a ideia de fração. E o ano?
194. **P-1:** *Eu coloquei que serve para o 4.º e 5.º ano!*
195. **P-2:** *Eu coloquei que serve para o 3.º e 4.º ano! [Resposta compartilhada pelas demais.]*
196. **Pesquisador/Participante:** Por causa das questões 4 e 5, pessoal, para um 3.º ano ainda seria complicado do aluno compreender plenamente. Na questão 4, por exemplo, o aluno teria que conservar a saída de 2 faces 1 e 3. Na questão 5, haveriam várias possibilidades de saírem a metade das faces, já que poderia ser as faces 1, 2, 3 ou 2, 3, 4 ou 3, 4, 5 ou 4, 5, 6 ou 1, 3, 4... Então o adequado seria de 4.º a 5.º ano! O que vocês acham da minha colocação?
197. **P-5:** *Acho que é isso mesmo!*
198. **P-1:** *Ensina primeiro fração pra depois ensinar Probabilidade?*
199. **Pesquisador/Participante:** Sim, P-1! Em primeiro se inicia a construção das estruturas multiplicativas, abordando a ideia de razão (parte/todo) e, em seguida, proporção. Porque a Probabilidade, como já falei, é uma relação entre o todo – Espaço Amostral – e a parte – Evento. Alguma dúvida?
200. **P-4:** *Não!*
201. **Pesquisador/Participante:** Vamos à Atividade 2! Nesta, probabilisticamente, caso na sala hajam 8 grupos de 4 alunos, haverão tabelas diferentes. É interessante os alunos irem comparando as respostas da questão 1 – itens a), b) e c) – para perceberem que são diferentes, e isso devido ao acaso.
202. **P-2:** *É interessante fazer uma discussão assim entre os alunos!*
203. **Pesquisador/Participante:** Isso, P-2! Em seguida temos a questão 2 “O número de vezes que o dado é jogado influencia as respostas?”. O que vocês colocaram nessa?
204. **P-8:** *Sim! Eu coloquei que realmente, porque se a gente jogasse mais vezes poderia sair o número 6 que ainda não tinha saído, né! Daí nós pegamos como estava escrito no texto: “Quanto maior for o número de lançamentos melhor será a estimativa da Probabilidade.”.*
205. **Pesquisador/Participante:** Nesta sua fala vocês se referem à lei dos grandes números, envolvendo a Probabilidade Frequentista?
206. **P-5:** *Sim!*

207. **Pesquisador/Participante**: Ok!
208. **P-4**: *Mas pra criança chegar nisso é difícil!*
209. **Pesquisador/Participante**: Isso, P-4! A criança desta idade não vai chegar na lei dos grandes números. Ainda é algo muito complexo para ela! Por que eu afirmo isso?
210. **P-8**: *Porque é muita abstração!*
211. **P-4**: *É!*
212. **P-1**: *É porque ela vai ter que imaginar mais vezes!*
213. **Pesquisador/Participante**: Isso, P-1! É porque ela vai ter que imaginar, deduzir, hipotetizar esta descoberta! Nesta etapa da escolaridade a resposta esperada é que o aluno compreenda que o aumento do número de jogadas influencia as respostas, no entanto, não é possível prever tal mudança já que o acaso intervém. E sobre os conteúdos matemáticos abordados nesta Atividade (2), o que vocês escreveram? **[Todas as participantes escreveram Probabilidade Frequentista.]** Alguém colocou outra resposta?
214. **P-2**: *Pensando agora, na nossa discussão, tem também tabela!*
215. **Pesquisador/Participante**: Isso, entra Estatística. E, assim como na Atividade 1 que eu não deixei explícito, aborda a ideia do acaso/aleatório. Nesta atividade como haverão diferentes resultados nos diferentes grupos ficará mais evidenciado a intervenção do acaso.
216. **P-8**: *Acaso e aleatório é a mesma coisa?*
217. **Pesquisador/Participante**: Sim, é o mesmo significado! E o ano de escolaridade, o que vocês colocaram?
218. **P-1**: *Eu coloquei 4.º ano!*
219. **P-4**: *Eu coloquei 5.º ano!*
220. **P-2**: *Coloquei 4.º e 5.º ano!* **[Resposta compartilhada por P-5, P-7 e P-8.]**
221. **Pesquisador/Participante**: Esta atividade poderia ser trabalhado com alunos do 4.º ao 5.º ano. No entanto, a questão 2, a meu ver, os alunos do 4.º ano teriam certa dificuldade para fazer!
222. **P-4**: *Foi isso que eu pensei, por isso eu coloquei 5.º ano.*
223. **Pesquisador/Participante**: Então seria mais indicado ao 4.º e 5.º ano, embora o aluno já comece a compreender a parte inicial – questão 1 – desde o 4.º ano, quem sabe já no final do 3.º ano.
224. **P-1**: *É, eu pensei isso, que na questão 1 os alunos do 3.º ano já podem começar a entender!*

225. **P-5:** *Aqui, no nosso Grupo, a gente discute esta questão de encaixar as atividades nos anos. Você sabe se nos currículos da prefeitura tem isso?*

226. **Pesquisador/Participante:** Ah, P-5, geralmente as prefeituras adotam materiais que trazem indicativos de quais anos são adequadas às atividades com algumas justificativas.

[Em relação à Atividade 3 – É provável acontecer... – as participantes, quando questionadas pelo Pesquisador/Participante, responderam ‘rapidamente’ as questões 1 e 2. Apenas P-2 simplificou a resposta da questão 2 indicando $\frac{3}{5}$, as demais colocaram $\frac{6}{10}$. Todas as participantes salientaram que os conteúdos abordados foram fração e Probabilidade. Acerca do ano de escolaridade, as participantes responderam 5.º ano. Após comentário do Pesquisador/Participante concordando com tal resposta, P-2 falou:]

227. **P-2:** *Nossa, pelo menos uma a gente acertou! A nossa Probabilidade de acertar esta questão do ano está péssima! [Risos entre as participantes.]*

228. **P-8:** *Eu estava conversando isso com a P-2 de como é difícil saber o ano adequado!*

229. **Pesquisador/Participante:** Eu sei, pessoal, que o número de atividades a serem utilizadas nos anos iniciais não foram tantas. Mas vocês acham que deu pra oportunizar uma breve reflexão acerca disso?

230. **P-2:** *Sim, claro! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*

231. **Pesquisador/Participante:** Só pra finalizar esta parte, é importante frisar que eu não trouxe uma possível distribuição dos conteúdos pertencentes à Probabilidade porque eu já indiquei textualmente que a mesma se dá no 4.º e 5.º ano de modo mais ‘intenso’. Na Estatística eu fiz isso ao trazer a distribuição por bimestre do 1.º ano 5.º ano, vocês se lembram?

232. **P-2:** *Sim! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*

233. **Pesquisador/Participante:** E outra coisa que eu esqueci de destacar quando discutimos o ensino de Combinatória. Com os seus alunos vocês precisarão trabalhar situações problemas que exijam as ideias de Arranjo, Permutação e Combinação. É claro que sem a recorrência às fórmulas e toda sua sistematização. Mas como já discutimos, há diferenças entre estes tipos de agrupamentos! Tudo bem, pessoal?

234. **P-4:** *Sim, tudo!*

235. **Pesquisador/Participante:** E, por fim, eu trouxe um último texto a ser discutido acerca da teoria de Piaget que trata da Tomada de Consciência. Antes da leitura-discussão, eu quero saber o que vocês acham que significa ‘tomar consciência’ de alguma coisa! O que é tomar consciência pra você, P-1?

236. **P-1:** *É de fazer alguma coisa?*

237. **Pesquisador/Participante:** Sim, o que significa tomar consciência de algo?

238. **P-1:** *É quando você faz essa coisa automático, você não pensa mais pra fazer!*

239. **Pesquisador/Participante**: Quando você faz automático? Que nem dirigir?
240. **P-1**: *É, no começo você dirige meio assim, você se preocupa em pisar na embreagem, em mudar a marcha... Com o tempo você faz automático.*
241. **P-4**: *Tem gente que vai engatar a marcha e vai com o corpo junto!* [Risos da participante.]
242. **Pesquisador/Participante**: Então, na sua explicação, por ter tomado consciência você automatizou o processo de dirigir?
243. **P-1**: *Já!*
244. **Pesquisador/Participante**: Ok! P-4, o que você responderia sobre a Tomada de Consciência?
245. **P-4**: *Ah... eu acho que é mais ou menos isso o que a P-1 falou!*
246. **Pesquisador/Participante**: Quando você toma consciência de um conteúdo, o que isso significa?
247. **P-4**: *Que você internalizou!*
248. **Pesquisador/Participante**: Internalizou?
249. **P-4**: *É... você aprendeu de verdade!*
250. **P-1**: *Tem relação quando você consegue explicar?*
251. **Pesquisador/Participante**: Sim! Quando você consegue explicar para si e para os outros.
252. **P-1**: *Para os outros!*
253. **Pesquisador/Participante**: O que você acha, P-2?
254. **P-2**: *Ah... não sei! É difícil essa pergunta! Mas eu acredito que seja quando aquilo passa a ter um grande significado para você, você até compreende melhor aquilo e consegue transmitir para outras pessoas. Então significa que realmente você internalizou, assimilou, acomodou e você é capaz de 'ir e vir' no pensamento com aquilo!*
255. **Pesquisador/Participante**: Entendi! Obrigado! E você, P-7?
256. **P-7**: *Ah... não sei... eu acho que é isso... um pouco o que o pessoal falou! Aprender algo, mas, assim, você toma consciência de algo quando você volta a refletir o que você fazia antes...*
257. **Pesquisador/Participante**: É pra entender o que fazia antes?
258. **P-7**: *É! Agora você volta antes, tipo o que a P-2 falou do 'ir e vir'.*

259. **Pesquisador/Participante**: Então no começo você faz a ação!
260. **P-7**: *É!*
261. **Pesquisador/Participante**: Daí você começa a significar melhor a sua ação para, a partir daí, compreendê-la melhor! É mais ou menos isso, P-7?
262. **P-7**: *É!*
263. **Pesquisador/Participante**: Ok! P-5!
264. **P-5**: *É mais ou menos isso que eu pensei! É quando você conhece uma coisa a ponto de saber o porquê, saber... aí...*
265. **Pesquisador/Participante**: Saber explicar o como, por exemplo?
266. **P-5**: *É saber aquilo, o porquê daquilo! É saber tudo sobre aquilo!*
267. **Pesquisador/Participante**: Tá! Entendi! E você, P-8?
268. **P-8**: *Ah, então, eu faço muito isso! Porque você pensa... você vê na hora que eu vou ler e falo “Ah, é assim! É mesmo! Eu não tinha pensado nisso!”, no meio da leitura! Eu entendi o assunto, mas daí tem um outro ponto que eu entendi uma coisa diferente dentro daquele assunto... daí eu retomo aquilo lá e entendo melhor! Eu tomei consciência!*
269. **Pesquisador/Participante**: Eu posso afirmar que vocês tomaram uma ‘maior’ consciência dos assuntos de Estatística que discutimos? **[Com exceção de P-1, as demais participantes responderam afirmativamente.]** Um fato que me chamou atenção e que se encaixa nesta discussão é a seguinte. Antes de abordarmos o conceito de Média Aritmética, P-7 me disse que, numa disciplina na graduação, ‘fazia por fazer’ os exercícios para calcular a Média. Com o caminhar no nosso Grupo você acredita ter tomado consciência deste assunto?
270. **P-7**: *Sim!*
271. **Pesquisador/Participante**: No começo você agia “automaticamente” por meio da fórmula.
272. **P-7**: *Sim!*
273. **Pesquisador/Participante**: Quando mudava alguma coisa ‘dentro’ do problema você não conseguia fazer?
274. **P-7**: *Sim, eu não sabia fazer e perguntava pra P-2!*
275. **Pesquisador/Participante**: Daí, gradativamente, você foi entendendo os porquês e o ‘como’ da Média Aritmética?
276. **P-7**: *Sim!*

277. **Pesquisador/Participante**: Isso o que ocorreu com a P-7 ilustra um processo de Tomada de Consciência.
278. **P-1**: *Eu acho que não tomei consciência!?*
279. **Pesquisador/Participante**: De qual parte?
280. **P-1**: *Da Média, Mediana, Mediatriz!*
281. **Pesquisador/Participante**: Você acha que não tomou consciência?
282. **P-4**: *Eu acho que se você der uma olhadinha no assunto...*
283. **P-1**: *Não, tem que dar uma olhadinha...*
284. **P-4**: *Você vai lembrar!*
285. **Pesquisador/Participante**: Se você der uma ‘olhadinha’ e o significado daquilo ‘retornar’, significa que você tomou consciência, apenas está guardado na memória de longo prazo.
286. **P-1**: *Ah, tá!*
287. **P-4**: *Agora, se você retomar sempre, você não vai esquecer!*
288. **P-1**: *É mesmo!*
289. **Pesquisador/Participante**: Mas talvez, P-1, você não tenha tomado consciência desta parte! O fato de não lembrar rapidamente não significa que você não tenha compreendido o como e os porquês.
290. **P-1**: *Ah, tá!*
291. **Pesquisador/Participante**: Aquilo que você acabou de estudar e acomodar está armazenado na memória de curto prazo e rapidamente é acessado! Se teve significado, se você compreendeu os porquês daquilo, pode demorar um pouco para acessar, relembrar, mas não significa que não tenha havido consciência daquilo.
292. **P-1**: *Entendi!*
293. **Pesquisador/Participante**: E, na escola, o professor tem que propiciar situações de ensino que permitam aos alunos tomarem consciências dos conhecimentos matemáticos, em nosso caso. Não basta saber somar, mas saber o significado desta operação, porque e em quais situações utiliza-se tal conceito. Não é só saber fazer o algoritmo da divisão, mas entender o processo utilizado, o significado do dividendo, divisor, quociente e o resto!
294. **P-8**: *E iguala aprender a ler?*

295. **Pesquisador/Participante**: Isso! Uma coisa é decodificar as letras formando as palavras e ler conjuntamente as palavras formando frases. Outra coisa é realmente entender o significado do lido.

296. **P-8**: *Isso!*

297. **P-2**: *E, infelizmente, é isso que acontece hoje. Os alunos não tem consciência do que estão lendo!*

298. **Pesquisador/Participante**: É o caso dos analfabetos funcionais! Uma coisa é você agir e decodificar a letra/sílaba. Outra coisa é interpretar, compreender, significar um texto lido.

299. **P-2**: *A P-4 tem uns alunos que quando ela pergunta se entendeu o texto eles falam que estavam só lendo!*

300. **P-4**: *É isso mesmo! Eles me falam isso!*

301. **P-7**: *Socorro!*

302. **P-8**: *Ai, pensando bem eu acho que tenho um pouco de falta de consciência quando eu leio!*

303. **Pesquisador/Participante**: Por quê?

304. **P-8**: *Se eu pego um texto, assim, se eu não tiver... eu preciso ler uma vez, ler outra vez... eu não tenho a facilidade como a P-2!*

305. **Pesquisador/Participante**: Mas isso não significa que você não tenha tomado consciência! Cada sujeito tem a sua particularidade de agir/refletir sobre o objeto do conhecimento.

306. **P-8**: *Ah, tá! Mas eu preciso pegar o texto e...*

307. **P-2**: *Mas você está fazendo a sua tomada de consciência! Cada um tem a sua maneira e o seu tempo pra fazer isso!*

308. **P-8**: *Ah, mas tem hora que parece que eu me enrolo um pouco nisso!*

309. **P-2**: *Eu acho que um pouco é cansaço, porque ultimamente eu ando assim!*

310. **Pesquisador/Participante**: Claro, fatores emocionais tais como cansaço, stress, fadiga prejudicam este processo.

311. **P-2**: *Com o final da faculdade eu acabo de ler e me pergunto: “O que o texto estava falando mesmo!?”.*

312. **P-8**: *Mas, por exemplo, se o professor pede, na hora, pra eu ler um texto e escrever o que entendeu trava na hora! Se eu assistir um filme eu falo pra você!*

313. **P-2:** *Pode ser falta de prática!*

314. **P-8:** *É verdade!*

315. **P-2:** *É falta de você, ao terminar de ler, falar pra você mesma: “O que eu acabei de ler?”, pra você mesma!*

316. **P-8:** *É, eu preciso fazer isso!*

317. **Pesquisador/Participante:** Concordo com vocês. E, tentando, bem ‘grosseiramente’ abordar este processo de Tomada de Consciência eu elaborei um pequeno texto alicerçando em algumas transcrições retiradas de Piaget (1977). E eu vou começar a leitura e a gente vai discutindo a cada parágrafo. **[O Pesquisador/Participante leu o seguinte texto, parágrafo por parágrafo, questionando as participantes. Observe o primeiro trecho discutido:]**

19.3 O processo de tomada de consciência

O que representa/significa a Tomada de Consciência? Diferentemente do senso comum que a considera como uma espécie de ‘iluminação’ da consciência, Piaget et al. (1977) a concebe um processo dinâmico e construtivo no qual um esquema de ação é transformado num conceito. Assim, a tomada de consciência equivale, essencialmente, numa conceituação.

318. **Pesquisador/Participante:** Deixa eu exemplificar esta parte! Uma coisa era a ação da P-7 ao somar os elementos de um conjunto e dividir pelo total de elementos para calcular a Média. Outra coisa é quando este procedimento é ‘transformado’ num conceito, ou seja, quando a P-7 passou a compreender o que é a Média Aritmética. Isso é uma conceituação. O exemplo ajudou?

319. **P-4:** *Sim!*

320. **Pesquisador/Participante:** Uma coisa é o agir! Outra coisa é o refletir sobre esse agir! Primeiro a criança junta elementos de dois conjuntos formando um conjunto maior. Outra coisa é compreender o conceito de adição, ou seja, compreender que um total pode ser somado de diversas maneiras.

321. **P-7:** *É mais difícil isso!*

322. **Pesquisador/Participante:** Sim, claro, a Tomada de Consciência é mais difícil! Ao conceituarmos nossas ações estamos, digamos assim, num momento bem avançado do pensamento. Primeiro a gente age! No começo fazemos as coisas sem tomar consciência daquilo.

323. **P-8:** *É mesmo!* **[Resposta compartilhada por P-2, P-4 e P-7.]**

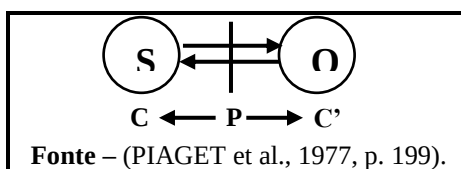
324. **Pesquisador/Participante:** A pessoa vê um animal se movendo e diz que aquilo tem vida. Sem ter consciência do conceito vida, o sujeito utiliza a expressão ‘vida’ para representar um ser vivo. É por isso que muitas crianças, antes de compreender e tomar consciência do significa de vida acham que a árvore – por manter-se imóvel – não possui vida.

325. **P-2:** *É mesmo, que legal!*

326. Pesquisador/Participante: Assim, tomar consciência não significa que algo se iluminou em sua mente. O conhecimento não estava lá, obscurecido. É um longo processo de reflexão ‘pensar sobre’ que permite tal consciência. O sujeito vai conceituando gradativamente ao significar aquilo. Daí, em seguida, eu trouxe o seguinte retirado de Becker (2010):

Acerca deste processo de tomada de consciência, Becker (2010) pontua:

A tomada de consciência [conforme diagrama abaixo] tem início com objetivos e resultados (periferia – P) de uma ação; só aos poucos o sujeito toma consciência dos fatores internos (C e C’) seja do sujeito (coordenação das ações), seja do objeto (causa e efeito, força, etc.). As “relações entre o sujeito e o seu meio consistem numa interação radical, de modo tal que a consciência não começa pelo conhecimento dos objetos nem pelo da atividade do sujeito, mas por um estado indiferenciado; e é desse estado que derivam dois movimentos complementares, um de incorporação das coisas ao sujeito, o outro de acomodação às próprias coisas” (NI, p. 389). (p. 164)



327. Pesquisador/Participante: Conforme o exposto, no início nos atentamos aos objetivos e resultados de uma ação. A P-7, por exemplo, precisava obter a Média (o seu objetivo) e seguia – mecanicamente – as ações de somar os elementos e dividir pelo total (resultado), sem compreender o porquê daquilo. Ou seja, a P-7 estava na periferia (P) de uma ação. Depois ela foi fazendo um movimento em rumo ao C, ou seja, os fatores internos do sujeito ao coordenar e compreender as ações que faziam sem compreensão. Pra melhorar a nossa compreensão, eu trouxe o seguinte exemplo de uma situação que vocês experienciaram. **[O Pesquisador/Participante fez a leitura dos seguintes parágrafos:]**

Exemplificando tal processo de movimento gradativo da periferia (P) ao Centro (C e C’) relembremos o desafio ‘A Torre de Hanói’. No primeiro encontro solicitou-se a solução desse desafio inicialmente no plano representativo, isto é, valendo-se de representações simbólicas (no papel) sem recorrência ao meio concreto (Torre de Hanói). Com exceção de 2 participantes que solucionaram o desafio para 2 e 3 discos, as demais não conseguiram fazê-lo valendo-se de representações simbólicas. Assim, não foi possível ‘tomar consciência’ do procedimento necessário a tal solução, ou seja, dos fatores internos (C e C’ – propriedade ‘transitiva’ ao utilizar a segunda haste como intermediária na passagem dos discos da primeira para a terceira haste.).

No segundo encontro, após verificar a dificuldade de grande parte das participantes, disponibilizou-se um meio concreto (Torre de Hanói) para ‘o pensar sobre’ o desafio. Como esperado – e corroborando aos estudos de Piaget et al. (1977) – as referidas participantes obtiveram êxito ‘imediato’ para a solução considerando 2 e 3 discos. Nesse caso, o concreto apoiou as ações visando um objetivo (passar os discos da primeira para a terceira haste) até obter-se o resultado (construção da ‘nova’ torre na terceira haste). Logo, solucionou-se o desafio partindo da periferia (P), embora as participantes ainda não tivessem ‘tomado consciência’ dos fatores internos (C e C’).

[Após a leitura-discussão de ambos parágrafos, o Pesquisador/Participante projetou o enunciado do Desafio A Torre de Hanói – exposto abaixo:]

RELEMBRANDO...

A Torre de Hanói é um jogo de origem oriental. O material é composto por uma base onde estão afixados três pequenos bastões em posição vertical denominadas torres A, B e C. Apresenta-se ao sujeito 2 ou mais discos de diâmetros decrescentes afixados em A e pede-se que se transporte tais discos para C, usando como intermediária a torre B. As regras são:

- 1 – Movimentar um só disco de cada vez.
 - 2 – Uma peça maior não pode ficar acima de uma menor.
 - 3 – Não é permitido movimentar uma peça que esteja abaixo da outra.
- Realize o desafio, inicialmente, para dois discos de diâmetros decrescentes denominados I e II, sendo $I > II$ (o diâmetro de I é maior que o diâmetro de II). Em seguida, tente para três discos, denominados I, II e III, sendo $I > II > III$.

[O pesquisador/Participante foi comentando os procedimentos utilizados – valendo-se de uma animação feita no Microsoft PowerPoint – para a solução do desafio considerando 2 e 3 discos. Após tal comentário, o Pesquisador/Participante ressaltou:]

328. Pesquisador/Participante: Eu me recordo que apenas 2 participantes conseguiram resolver o desafio para 2 e 3 discos no plano representativo. Isso indica que as mesmas conseguiram, mesmo ainda não sabendo explicitar e conceituar a propriedade ‘transitiva’, resolver o desafio. Assim, em comparação às demais, elas estavam num nível mais adiantado da ação, ou seja, não estavam mais na periferia P.

329. P-8: *Mas tem gente que não consegue fazer só imaginando? Eu consigo!*

330. Pesquisador/Participante: Sim, P-8, tiveram 4 participantes que só conseguiram realizar o desafio valendo-se do concreto como apoio ao pensamento.

331. P-1: *Eu lembro que eu só consegui fazer manipulando na torre que você trouxe no outro dia!*

332. Pesquisador/Participante: Quando me propus a abordar este tema – Tomada de Consciência – complexo, de modo proposital eu trouxe este exemplo já que o mesmo foi vivenciado por vocês!

333. P-4: *Isso é importante pra gente entender melhor!*

334. Pesquisador/Participante: Isso significa que antes da compreensão vem a ação! A parte que vamos ler, daqui há pouco, explica um pouco o que eu falei! Ajudou trazer o exemplo da Torre de Hanói?

335. P-5: *Ajudou!*

336. Pesquisador/Participante: No exemplo da Torre de Hanói ficou nítido que primeiro observamos o nível da ação, na periferia P. Gradativamente o sujeito vai conceituando as suas ações (C) e conceituando o objeto (C’). E vejam como é complexo o professor propiciar estes processos de conceituação em seus alunos.

337. P-2: *Nossa, como é difícil!*

338. Pesquisador/Participante: A todo momento, em nosso Grupo de Estudo, pretendi que vocês fossem, gradativamente, tomando consciência de partes da Estatística, da Combinatória, da Probabilidade, da própria teoria de Piaget... Por exemplo, na Combinatória, primeiro vocês agiram e resolver diversos problemas sem saber, ou melhor, sem conceituar o que era Arranjo, Combinação e Permutação. Depois, fomos discutindo e analisando vários desafios e auxiliei vocês a irem, gradativamente, sistematizando os diferentes agrupamentos. Quando o sujeito consegue explicar o que é, ele está lidando com conceitos, e isso é o indício do processo de

Tomada de Consciência. Com esses exemplos tá dando pra um início de assimilação deste assunto? **[As participantes indicaram afirmativamente.]** É um pouco complexo esta parte, né pessoal?

339. **P-2:** *Meio!? É muito complexo!*

340. **Pesquisador/Participante:** Concordo, P-2! Vamos ver se o próximo trecho colabora na compreensão:

Por meio desse exemplo, percebe-se que a ‘fonte’/início da tomada de consciência advém da ação do sujeito. Mediante sucessivas assimilações e acomodações provenientes de desequilíbrios/reequilíbrios, a ação vai sendo interiorizada em ‘forma’ de operações permitindo a construção gradativa do conceito (conceituação). No entanto, tal passagem da ação à operação (e conceituação) não se dá de modo direto, sendo observados alguns níveis esboçados por Piaget et al. (1977):

O primeiro desses níveis é o da ação material sem conceituação, mas cujo sistema dos esquemas já constitui um saber muito elaborado. Ora, se esse nível, cujas construções levam às estruturas operatórias mais fundamentais (em suas capacidades de coordenação, mas ainda escapam à consciência do sujeito), pode parecer ao psicólogo uma espécie de começo absoluto, isso não passa, no entanto, de uma ilusão de ponto de vista: ele está ligado por todos os intermediários às fontes orgânicas de que tira sua matéria. O segundo nível é o da conceituação, que tira seus elementos da ação em virtude de suas tomadas de consciência, mas a eles acrescenta tudo o que comporta de novo o conceito em relação ao esquema. Quanto ao terceiro nível, contemporâneo das operações formais que se constituem em torno de 11-12 anos, ele é o das “abstrações refletidas” no sentido definido acima. Seu mecanismo formador, que consiste em operações na segunda potência, portanto em operações novas mas realizadas sobre as operações anteriores, mostra suficientemente que se trata uma vez mais de abstrações a partir do nível precedente, mas compostas e enriquecidas segundo combinações não efetuadas até aquele momento. (p. 208)

[Para auxiliar na compreensão dos níveis da ação à operação (conceituação), novamente o Pesquisador/Participante valeu-se do exemplo da Torre de Hanói. P-2 perguntou se no primeiro nível da ação material sem conceituação entraria o caso da imitação. O Pesquisador/Participante respondeu-lhe afirmativamente. Ao término de tal explicação, o Pesquisador/Participante salientou:]

341. **Pesquisador/Participante:** Isso quer dizer, pessoal, que a explicação dada por P-1 sobre o que entendia acerca do processo de Tomada de Consciência não estava correta!

342. **P-1:** *É verdade!*

343. **Pesquisador/Participante:** O que ela falou é uma mecanização-automatização, e não ainda compreensão do conceito. Por exemplo, você pode saber dirigir mas não compreender como se dá o processo interno de combustão físico-química realizado pelo motor do veículo. **[Mediante o tempo que estava ‘esgotando’, o Pesquisador/Participante solicitou às participantes que concluíssem a leitura do texto sobre o processo de Tomada de Consciência em casa, além de pensarem sobre uma questão problema. Observe-os abaixo:]**

Em suma, Piaget et al. (1977) destaca:

[...] o mecanismo da tomada de consciência aparece em todos esses aspectos como

um processo de conceituação que reconstrói e depois ultrapassa, no plano da semiotização e da representação, o que era adquirido no plano dos esquemas de ação. Não há, portanto, diferença de natureza, numa tal perspectiva, entre a tomada de consciência da ação própria e o conhecimento das seqüências exteriores ao sujeito, comportando ambos uma elaboração gradativa de noções a partir de um dado, quer este consista em aspectos materiais da ação executada pelo sujeito, quer em aspectos materiais das ações que são realizadas entre os objetos. (p. 204)

[Além disso, solicitou-se a elaboração do Momento Síntese referente ao presente encontro.]

APÊNDICE X – TRANSCRIÇÃO DO 20.º ENCONTRO

Data: 27/09/2012

Tempo de Duração: 3 horas e 30 minutos.

[No início deste último encontro, com exceção de P-9, as demais participantes estavam presentes. Visando retomar o item 19.3 – O processo de tomada de consciência – o Pesquisador/Participante fez a leitura do mesmo. Em seguida, as participantes compartilharam as respostas acerca do seguinte questionamento correlato ao texto lido:]

1. De que modo essa ‘breve’ e inicial discussão a respeito do processo de tomada de consciência pode colaborar em sua atuação como professor de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental? Pense a respeito.

1. **P-8:** *Ah, eu fiz, mas não sei se está certo!*
2. **Pesquisador/Participante:** Não tem problema! Vamos observar aquilo que vocês elaboraram! Quem quer começar? [P-1, P-4 e P-5 disseram não terem respondido o questionamento. Deste modo, o Pesquisador/Participante solicitou à P-2, P-7 e P-8 que lessem suas respostas.]
3. **P-7:** *Eu coloquei que ela colabora em tudo, pois para que um professor possa atuar efetivamente, é necessário que ele tenha passado pelo processo de tomada de consciência para que ele tenha bem claro definido os conceitos e conteúdos a serem ensinados.*
4. **Pesquisador/Participante:** Então você se remeteu ao professor tomar consciência?
5. **P-7:** *Sim!*
6. **P-8:** *Legal, P-7!*
7. **Pesquisador/Participante:** Ok!
8. **P-2:** *A tomada de consciência é um processo complexo e constante na vida das pessoas, pois envolve desde o agir sobre os objetos/conhecimentos até conseguir pensar sobre o seu próprio pensamento. Sendo assim, é fundamental ter consciência sobre a sua importância para a atuação docente em que ao ensinar sabe-se que levará um tempo para que a criança tome consciência sobre os conteúdos conseguindo assimilá-los, acomodá-los e, principalmente, abstrair dos objetos concretos pensamentos reflexivos. Para se tomar consciência é necessário que se compreenda significativamente o que lhe foi ensinado e para isso, na aulas, é importante deixar que a criança fale com suas próprias palavras como ela compreendeu o conteúdo e o que pensa sobre a situação que se depara. Acredito também que seja somente assim, pela tomada de consciência, que se resignifique os saberes que trazemos conosco.*
9. **Pesquisador/Participante:** Ok! Só no início, P-2, que nem sempre a tomada de consciência é uma constante na vida das pessoas. Tudo bem?
10. **P-2:** *Sim tá certo! É verdade...*

11. **Pesquisador/Participante**: Mesmo quem não respondeu a questão gostaria de fazer algum comentário?
12. **P-4**: *Então, eu estava pensando numa coisa agora!*
13. **Pesquisador/Participante**: Ok! Diga pra gente!
14. **P-4**: *Esta semana eu estava corrigindo provas, fechando notas! [Como já denotado, a referida participante já possui a Licenciatura em Letras, por isso ministra aulas em escolas do Ensino Fundamental.] E agora, eu parei pra pensar, tipo assim, os exercícios que eu dei na prova, por exemplo, se você pegar a prova e der pra eles só, a prova, pra eles lerem, interpretarem e responderem, os alunos não sabem! Aí, o que eu tenho que fazer? Eu tenho que ler exercício por exercício, daí a criança, quer dizer, eles já são grandes, já... Os alunos perguntam: “Mas o que é essa palavra?”, por exemplo, identifique, relacione. Então você tem que explicar tudo certinho, passo a passo o que eles têm que fazer na prova.*
15. **Pesquisador/Participante**: E daí eles conseguem?
16. **P-4**: *Eles conseguem! E daí, então, pode ser que eu esteja pedindo pra eles um pensamento formal, e eles ainda não estão neste nível.*
17. **Pesquisador/Participante**: Pode ser, P-4!
18. **P-4**: *Porque é muito difícil, e eu tenho muita dificuldade nisso, assim... Você tem que pegar, nossa, passo a passo, porque, por exemplo, depois no final do ano eles vão fazer a prova do SARESP.*
19. **Pesquisador/Participante**: Ok!
20. **P-4**: *Então você tem que utilizar, tipo, identifique, relacione, que são os objetivos que está na proposta curricular do Estado de São Paulo. E você tem que cobrar dos alunos, porque na prova vai estar com estas palavras! E a gente, no dia do SARESP, não vai poder explicar o exercício pra eles.*
21. **P-2**: *Você não acha que teria de ter explicado o que significam as palavras pros alunos antes de dar a prova pra eles?*
22. **P-4**: *Então, agora tô pensando nisso!*
23. **P-2**: *Ou então, também, pode ser que eles estão te usando! Porque pode ser que eles já sabem que você vai acabar explicando passo a passo que, com certeza ajuda a resolver o exercício!*
24. **P-8**: *É!*
25. **P-2**: *Então você tem que colocar antes pros alunos, ou seja, o que vocês entendem por identifique, antes de dar a prova! O que pra vocês é relacionar? E dê exemplos, pede pros alunos falarem!*

26. **Pesquisador/Participante**: Isso que você falou, P-4, cabe muito naquilo que estamos discutindo em nosso Grupo de Estudo, porque identificar implica em classificar!
27. **P-2**: *Classificar!*
28. **Pesquisador/Participante**: E a classificação, como já estudamos, representa uma importante estrutura lógico-matemático cuja construção se dá com o apoio no concreto. Relacionar também é outra estrutura onde o sujeito deve estabelecer uma relação de correspondência entre as coisas. Então, talvez, pode ter esta hipótese que a P-2 dos alunos estarem te usando, mas também pode ser que os alunos não concluíram a construção de tais estruturas lógicas características do pensamento operatório concreto, tais como a classificação, seriação, correspondência, multiplicação lógica, transitividade... Em que ano eles estão?
29. **P-4**: *Então, essa prova que eu dei é pra 8.^a série (9.º ano).*
30. **Pesquisador/Participante**: Então, em hipótese, na 8.^a série já teria que ter havia a finalização deste operatório concreto!
31. **P-4**: *E eles são mais velhos ainda, porque a maioria da sala é repetente!*
32. **P-2**: *Você já conversou com outros professores?*
33. **P-4**: *É a mesma coisa com eles!*
34. **P-2**: *Ah, então eles não construíram mesmo!*
35. **Pesquisador/Participante**: Pessoal, e o exemplo que a P-4 deu é muito rico pra nossa discussão! Podemos nos questionar sobre o que aconteceu para que estes alunos não tenham ainda, ao longo de 8-9 anos, concluído a construção das estruturas lógico-matemáticas do pensamento operatório concreto. Identificação, classificação, seriação, correspondência um a um, um para muitos, multiplicação lógica, etc.
36. **P-4**: *Então, e até ontem eu estava pensando que eles estavam com preguiça de pensar! E, às vezes, não é isso!*
37. **Pesquisador/Participante**: Sim, certamente não é preguiça de pensar! Mas uma impossibilidade deste pensar apenas na lógica proposicional, ou seja, dos enunciados verbais!
38. **P-4**: *E é sério isso, porque eu estava subestimando...*
39. **P-2**: *E você dá exercícios como esse na sala de aula?*
40. **P-4**: *Sim, e é a mesma coisa! Por exemplo, eu dou exercícios quando não tem na apostila. E daí os alunos perguntam o que é pra fazer! E daí eu falo: “Mas pessoal, vocês não leram o que está escrito aqui?”!*
41. **Pesquisador/Participante**: Mas, para esses alunos, só o ler não é suficiente, pois para na parte da decodificação, e não atinge a compreensão.

42. **P-4:** *É nisso que eu estou pensando agora! Às vezes eles leem mas não entendem, daí você tem que explicar! E eu ficava pensando mal dos alunos...*
43. **Pesquisador/Participante:** Pode haver, sim, certa preguiça proveniente de diversos fatores, mas da dificuldade de operar no plano das hipóteses.
44. **P-2:** *Mas o que eles entendem por identifique?*
45. **P-4:** *Ah... eles perguntam, tipo...*
46. **P-2:** *Mas você nunca devolveu a pergunta pra sala?*
47. **P-4:** *Não! Eu explico o que é!*
48. **Pesquisador/Participante:** Mas parece que o seu explicar não é suficiente! Se eles ainda estão em fase de construção do pensamento operatório concreto, então, se na sua explicação não tiver uma relação muito próxima com algo concreto, vivenciado, vai ficar numa explicação num nível formal, das proposições – enunciados verbais. Daí eles não vão conseguir entender!
49. **P-4:** *É, e daí eles não vão conseguir compreender!*
50. **Pesquisador/Participante:** Isso!
51. **P-4:** *Nossa, mas como é difícil isso, Pesquisador/Participante!*
52. **P-8:** *Mas, P-4, até a gente, tem coisas que a gente fala assim: “Oh, agora entendi!”!*
53. **P-2:** *Ah, mas eu também!*
54. **P-4:** *Eu sou assim totalmente! [Risos da participante.]*
55. **Pesquisador/Participante:** Mas nós já temos estruturas de pensamento que nos permitam avançar. Os alunos da P-4 ainda não, suponho! Alguém mais tem alguma colocação? Vocês acharam interessante este item que trata da Tomada de Consciência?
56. **P-8:** *Eu tinha até anotado um monte de coisa que a gente já tinha discutido! Eu fui reler tudo, em casa, mas daí eu fui fazer correndo... Então eu não consegui responder essa pergunta!*
57. **Pesquisador/Participante:** Tudo bem, P-8! É interessante a colocação da P-7 porque nós, enquanto professores, temos que tomar consciência do que temos que fazer! Então, nós temos que conceituar as nossas ações, nosso papel. Nós não temos que saber apenas o que iremos fazer com nossos alunos, mas precisamos compreender os porquês deste fazer e o como. Assim, nós temos que tomar consciência do SER PROFESSOR, e que este processo é longo. No caso de vocês que serão responsáveis por estudantes nos anos iniciais, nesta faixa etária deverá ser dada atenção ao fato de que, os alunos estarão em duas etapas de transição. No 1.º e começo do 2.º ano os estudantes estarão em transição do pensamento centrado/intuitivo (pré-operatório) ao início do pensamento concreto. Ao final do 5.º ano, pelo menos em hipótese, os alunos deveriam estar em vias de conclusão do pensamento operatório-

concreto visando o início do pensamento formal. Deste modo, não é possível esperar de um aluno do 1.º e 2.º ano tal conceituação que discutimos devido ao momento psicológico vivido por eles. E, digamos assim, uma possível conceituação começa a ser efetivada ao final do 5.º ano, mas ainda com a necessidade da operação sobre o concreto, pois o sujeito não pensa ainda, exclusivamente, por meio de proposições (enunciados verbais).

58. **P-2:** *Nossa, como é complexo!*

59. **Pesquisador/Participante:** E é mesmo! Vocês vão pegar o estágio final do pré-operatório caracterizado pelo pensamento intuitivo, centrado, transdução, etc. – no 1.º e 2.º ano (aproximadamente) – todo o operatório concreto e caminhando ao operatório formal, não ainda ter ‘chegado’ nele.

60. **P-5:** *Nossa!*

61. **Pesquisador/Participante:** Isso implica a grande responsabilidade que representa os anos iniciais na vida do aluno. Porque se o sujeito não faz um bom Ciclo I, a possibilidade de fazer um ótimo Ciclo II é muito baixa.

62. **P-8:** *E eu acho que falta muita consciência das professoras, como ela vai passar isso pro aluno!?*

63. **Pesquisador/Participante:** Como o professor vai propiciar uma situação de aprendizagem que permitam tais passagens/construções.

64. **P-8:** *É isso mesmo! Se esse professor não tem consciência disso não há como!*

65. **Pesquisador/Participante:** Por exemplo, infelizmente, considerável parcela dos alfabetizadores acham que deve ser ensinado no 1.º ano só o ba-be-bi-bo-bu, embora nem seja realmente este o objetivo desta início do Ensino Fundamental. E a abordagem das outras ciências, como a Matemática, a Geografia, a História, a Ciência... E é por isso que nos países ‘conscientizados’ exige-se, no mínimo, um mestrado para que o professor esteja habilitado para atuar neste nível de ensino.

66. **P-8:** *Seria legal ter, igual a gente viu em Portugal...*

67. **Pesquisador/Participante:** Em Portugal, acho que na Espanha, e em demais países europeus, isso já vem ocorrendo!

68. **P-8:** *Isso! O professor faz um mestrado na área que vai atuar, seja na Educação Infantil, no Ensino Fundamental...*

69. **Pesquisador/Participante:** É! É como se fosse o nosso mestrado profissional, diferente do mestrado acadêmico que temos no Brasil. **[Como não houveram dúvidas/comentários, solicitou-se a leitura da síntese referente ao encontro anterior. A pedido das participantes, já que P-1, P-5 e P-8 não haviam elaborado a síntese, o Pesquisador/Participante retomou os assuntos discutidos nos itens 19 ‘Retomando Alguns Desafios envolvendo Probabilidade’ e 19.1 ‘Ensino de Probabilidade nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental’. Neste momento P-9 chegou e foi lhe falado as atividades em desenvolvimento e já ocorridas. A participante, quando questionada, disse**

não ter conseguido realizar a leitura do item 19.3 ‘O processo de tomada de consciência’ por falta de tempo. Deste modo, o Pesquisador/Participante colocou-se à disposição para auxiliá-la em momento posterior caso julgasse necessário. Decorridos 15 minutos, deu-se início à socialização das referidas sínteses.]

70. **Pesquisador/Participante:** P-1, por favor, leia pra gente a sua síntese!

71. **P-1:** *A atividade de identificar os conteúdos da atividade proposta e o ano de sua aplicação foi muito importante para aproximar a teoria da prática, pois quando estudamos e resolvemos os exercícios propostos é difícil imaginar a aplicação na sala de aula do Fundamental I, e mais difícil ainda saber especificamente para que turma trabalhar essas atividades. O texto que diz respeito à tomada de decisões foi muito importante porque eu não tinha consciência disso, e vai ser muito importante para minha futura atuação.*

72. **Pesquisador/Participante:** Ok! P-5?

73. **P-5:** *Eu coloquei: Nesse encontro eu achei muito importante os exercícios que resolvemos sobre Probabilidade, pois cada um deles exigia uma maneira diferente de resolução, obrigando-nos a ler e interpretar muito bem o enunciado e desconstruindo a nossa ideia de que para tudo tem uma fórmula pronta. A atividade de colocar em qual classe, qual faixa etária era destinada cada atividade, é muito importante pra nós, futuros professores, porque nós temos que conhecer psicologicamente quais as limitações e as potencialidades de cada faixa etária do aluno pra poder propor melhor as atividades em sala de aula.*

74. **Pesquisador/Participante:** Pra não propor algo que esteja muito além ou muito aquém do aluno?

75. **P-5:** *Isso!*

76. **Pesquisador/Participante:** Interessante! P-4?

77. **P-4:** *Eu coloquei mais ou menos o que a P-1 falou... a gente tem sempre que conversar com o aluno pra saber o que ele está pensando, porque, por exemplo, eu mesma, achei que os meus alunos já tinham capacidade para entender tudo o que eu estava explicando e eles, acredito eu que não tem ainda. E eu tenho que realmente questioná-los, mesmo, a todo o tempo pra saber mesmo o que eles sabem e o que eles não sabem. E, às vezes a gente pensa que eles sabem, mas na verdade eles não sabem! Então eu pus assim: Precisamos ficar atentos para saber o que os alunos sabem e pensam sobre aquilo que estamos abordando e se eles estão compreendendo, sendo importante conversar sempre com o aluno pra saber isso.*

78. **Pesquisador/Participante:** Tem que ver se o que está proposto não está muito além da capacidade de assimilação! P-2, por favor, compartilhe sua resposta.

79. **P-2:** *Foi interessante perceber que todo conteúdo deve ser trabalhado/introduzido desde os anos iniciais, sempre considerando as características e possibilidades de cada faixa etária, como é o caso da Probabilidade que pode aparecer nos 1.º e 2.º anos de maneira mais concreta, usando como aporte a imagem visando a construção da ideia de evento aleatório. O processo de tomada de consciência acompanha os seres humanos desde o nascimento, pois só compreendemos realmente o que é significativo aquilo que nos provoque desequilíbrio,*

gerando uma necessidade de agir sobre e finalmente assimilar/acomodar conseguindo transmitir tranquilamente o que foi aprendido, ou seja, conseguindo explicar os conteúdos com novas palavras, sendo capazes de resolver os desafios não de modo mecânico e memorizado, mas sim compreendendo o que se faz, sabendo descrever cada passagem, cada ação. Enfim, sem consciência do conceito de tomada de consciência, dificilmente a ação docente efetuará um trabalho satisfatório no processo de ensino-aprendizagem gerando re-significações, bem como nós mesmos passaremos pelos conteúdos sem realmente compreendê-los e interiorizá-los, lembrando-se das vantagens das situações problemas.

80. Pesquisador/Participante: Só retomando, a tomada de consciência não é possível desde o nascimento, já que o sujeito sequer tem consciência de si e do mundo ao seu redor. É claro que todas as conquistas deste período, conforme vimos no texto, auxiliará numa futura tomada de consciência, inicialmente das ações. Tudo bem, P-2?

81. P-2: *Sim! Entendi!*

82. Pesquisador/Participante: Ok! Por favor, P-7, leia pra gente!

83. P-7: *Apesar de achar que o ensino de Probabilidade só deveria ser feito nos anos finais do Ensino Fundamental, ou até mesmo no Ensino Médio, a partir deste encontro pude perceber que o professor não só pode, como deveria oferecer algumas noções de Probabilidade já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, pois, dessa forma o professor está colaborando para que os alunos desenvolvam um pensamento matemático não determinístico. E em relação ao processo de tomada de consciência considero um conceito ainda um pouco abstrato, e ainda tenho muita dificuldade em defini-lo, mas que a tomada de consciência é sempre um processo dinâmico e construtivo que se dá através de sucessivas assimilações e acomodações decorrentes de desequilíbrios e reequilíbrios, na qual permite gradativamente a construção de um conceito.*

84. Pesquisador/Participante: Ok! Como eu já salientei, mesmo com o término do nosso Grupo de Estudo hoje, fiquem a vontade para me questionar via e-mail acerca das dúvidas provenientes dos assuntos contidos no material que entreguei pra vocês. E você, P-8?

85. P-8: *Eu não fiz tão elaborado como as duas. Eu pus assim: Percebemos que o professor tem que propor situações do cotidiano do aluno a partir da Probabilidade e criar problemas a partir de uma vivência. A minha frustração é não conseguir colocar esses problemas, essas situações nas idades adequadas das crianças.*

86. Pesquisador/Participante: A dificuldade reside em adequar as atividades aos anos de escolaridade! Eu sei que deveríamos ter feito mais atividades como essa, mas o fator tempo foi o que nos impediu!

87. P-8: *Não, mas mesmo assim deu pra gente entender isso, é que eu ainda tenho dificuldades!*

88. Pesquisador/Participante: Ah, sim! E é normal, porque não é fácil mesmo pensar nesta adequação.

89. **P-8:** *E essa parte do processo de tomada de consciência eu anotei uma frase que eu tinha posto de que a aprendizagem é, por excelência, construção, ação e tomada de consciência.*

90. **Pesquisador/Participante:** É isso mesmo! De quem você tirou esta citação? Foi Piaget ou algum de seus discípulos?

91. **P-8:** *Então, eu não lembro!*

92. **Pesquisador/Participante:** Mas é uma pertinente colocação!

93. **P-8:** *É muito legal, né, e eu busco isso direto, pra mim, né!*

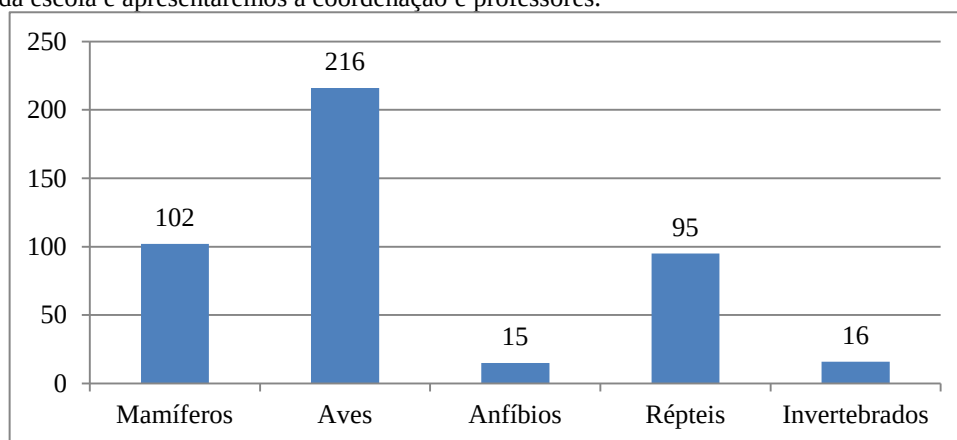
[Antes da abordagem dos assuntos previstos para o 20.º encontro, o Pesquisador/Participante solicitou às participantes que fizessem, novamente, a Escala de Atitudes (ver Anexo A) e respondessem ao Questionário Final (ver Apêndice D). Em relação ao Questionário Final, o Pesquisador/Participante realizou uma leitura conjunta das questões inicialmente.]

[Decorridos aproximadamente 2 horas, retornou-se à discussão do Desafio Final (item 18.5) na qual as participantes apresentaram Situações de Ensino elaboradas visando a abordagem de conteúdos matemáticos pertencentes ao Tratamento da Informação nos anos iniciais do Ensino Fundamental.]

[P-9 foi a primeira a compartilhar a sua proposta (Situação de Ensino), denotada abaixo:]

ELABORAÇÃO: P-9	
1. TÍTULO:	Trabalho sobre gráficos através de aula-passeio: Ciências e Matemática no Zoológico de Bauru.
2. OBJETIVOS:	- Saber diferenciar as espécies de animais no zoológico – trabalhados anteriormente na aula de Ciências (mamíferos, aves, anfíbios, répteis, invertebrados). - Ler, interpretar e identificar posteriormente a aula-passeio, as informações coletadas sobre as espécies dos animais através de um gráfico de barra na aula de Matemática.
3. CONTEÚDOS MATEMÁTICOS:	Tratamento da Informação: gráfico de barras.
4. METODOLOGIA:	É importante salientar que o início dessa atividade de desenvolvimento da construção do Gráfico de Barras e Colunas, inicia-se na construção anterior de tabelas simples que foram realizados em sala de aula, assim como em registros pessoais de informações coletadas em conteúdos anteriores, como também conteúdos de Ciência sobre as espécies de animais que aqui serão trabalhadas para esse conteúdo matemático. No primeiro momento, na socialização inicial realizada no dia da visita ao zoológico, retomaremos o assunto sobre as diferentes espécies de animais, com fotos que serão distribuídas pela turma em roda, onde na problematização questionaremos quais os tipos e se encontraremos esses animais no zoológico, assim como porque há os zoológicos e que cuida dos zoológicos. A partir da tomada dos conhecimentos prévios dos alunos, explicaremos que nossa aula passeio será feita com lápis e papeis onde observaremos os animais e quais espécies eles pertencem, coletivamente. Durante o trajeto até o zoológico, inicializaremos a instrumentalização onde ouviremos no ônibus algumas canções do compositor Chico Buarque e Vinicius de Moraes sobre os animais. Na chegada ao zoológico iniciaremos o passeio pela ordem cronológica do espaço dos animais, onde anotaremos quais são os animais e de que espécies pertencem. Na segunda etapa, de volta a escola para finalizar o dia comentaremos qual a opinião dos alunos, há mais invertebrados no zoológico? Mais mamíferos? Depois de instiga-los ainda mais, perguntaremos matematicamente como poderíamos comprovar isso? Explicarei que no dia seguinte, construiremos coletivamente um gráfico de colunas com nossos registros coletados no zoológico. No terceiro momento, na catarse dos alunos haverá a construção do gráfico de colunas, em grupos de 4 alunos, com mediação constante do professor, em cartolinas, onde inicialmente a lápis eles passarão as informações (importante salientar, que anteriormente ao passeio, eles já haviam iniciado as primeiras construções e noções de gráficos de colunas). A partir do término da construção, os alunos as apresentarão

para classe em grupos os resultados e farão a comparação entre os grupos, caso haja divergências o professor mediará até que todos cheguem em um consenso para a construção de um gráfico de colunas da turma, feito com quatro cartolinas coladas, em que todos construirão matematicamente e artisticamente para colocarmos no pátio da escola e apresentaremos a coordenação e professores.



Exemplo de gráfico de barras das espécies dos animais do zoológico de São Paulo

5. RECURSOS NECESSÁRIOS: Fotos das espécies de animais, música, cartolinas, canetas coloridas, lápis de cor.

6. AVALIAÇÃO: Como avaliação, a construção de cartazes e após a finalização do cartaz os alunos responderão perguntas como a) De que trata o nosso gráfico? Para escreverem duas informações sobre os animais que aprenderam através da leitura do gráfico e porque utilizamos os gráficos? Para finalização e socialização final sobre a aula envolvendo gráfico de Barras.

7. ANO DE ESCOLARIDADE: 3.º ano do Ensino Fundamental I (entre 3.º e 4.º Bimestre).

8. TEMPO PREVISTO: Uma semana (1 dia de aula para visita ao zoológico e 4 aulas de 50 minutos para desenvolvimento do conteúdo em tratamento da informação na mesma semana).

[Após a fala de P-9, o Pesquisador/Participante indagou:]

94. Pesquisador/Participante: Interessante a sua Situação de Ensino, parabéns! É importante observarmos, por exemplo, ao partir de uma vivência, você está utilizando alguns conhecimentos já construídos. Assim você utiliza os saberes prévios, como você citou, ou as estruturas de assimilação para ir constantemente questionando os alunos visando a acomodação de um conteúdo matemático. E a questão da socialização, que você bem pontuou, podemos pensar sobre a importância das relações interindividuais (Interação Social) – que representam um dos fatores propostos por Piaget ao desenvolvimento do sujeito – à descentração do pensamento, quando os alunos precisam analisar diferentes pontos de vistas/hipóteses/resultados advindos de um problema/questionamento.

95. P-9: *Sim! Foi isso que eu pensei!*

96. Pesquisador/Participante: Só uma coisa! Quando você destaca que o conteúdo matemático a ser trabalhado foi o Gráfico de Colunas, você consegue compreender que não foi o único?

97. P-9: *Ah... deixa eu ver!... É verdade, também o aluno precisa utilizar as operações básicas!*

98. Pesquisador/Participante: Em qual parte isso fica evidente?

99. P-9: *Quando eu pergunto se há mais invertebrados no zoológico!*

100. Pesquisador/Participante: E tem algum outro conteúdo matemático implícito na Situação de Ensino proposto pela P-9, pessoal?

101. P-2: *Ah, a classificação dos animais!*

102. Pesquisador/Participante: Isso mesmo, P-2! A classificação, embora não seja um conteúdo específico da Matemática, por se tratar de uma estrutura de pensamento geral, é imprescindível, como já vimos, ao pensar sobre gráficos e tabelas. Vejam como podem haver inúmeras possibilidades de relacionar diferentes conteúdos numa atividade. Alguém quer fazer outro comentário? **[Como ninguém se pronunciou, o Pesquisador/Participante pediu ao trio P-2, P-7 e P-8 que apresentassem a Situação de Ensino. Observe-a a seguir:]**

ELABORAÇÃO: P-2, P-7 e P-8																							
1. TÍTULO: Descobrindo informações.																							
2. OBJETIVOS: - Localizar, ler, selecionar e organizar informações contidas em diferentes portadores (notas fiscais e embalagens); - Montar tabela simples; - Combinar alguns elementos.																							
3. CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Tabelas Simples – coleta, registro e organização de informações, leitura e interpretação de dados; Adição (contagem direta 1 a 1); Princípio Multiplicativo; Pesos e Medidas.																							
4. METODOLOGIA: 1. ^a Etapa) Solicitar que as crianças tragam para a sala de aula embalagens vazias e limpas de diversos produtos e de diferentes tamanhos (pedir para irem trazendo uma semana antes da atividade). Divide-se as crianças em grupo (4 participantes por grupo) entregando 5 embalagens para cada grupo, solicitando que encontrem e circulem nas embalagens as informações numéricas. Em seguida, conversar com os alunos sobre as informações numéricas encontradas, sugerindo que comparem as diferentes anotações (data de validade, informações nutricionais, preço e capacidade (litros, gramas, etc.)). Pedir para que classifiquem os produtos conforme a unidade de medida utilizada pelo fabricante, questionando as semelhanças e diferenças, visando que as crianças percebam que alguns produtos embora sejam completamente diferentes, têm seu volume ou peso calculado pelo fabricante com a mesma unidade de medida. Fazer na lousa junto com os alunos uma Tabela Simples que contenha: <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th colspan="4">Quantidade de produtos</th> </tr> <tr> <th>Quilos (kg)</th> <th>Gramas (g)</th> <th>Litros (l)</th> <th>Mililitros (ml)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> </tbody> </table> <i>Epistemologia genética de Jean Piaget:</i> materiais concretos, crianças agirem sobre problema e o material, questionamentos, estímulo, necessidade de descoberta e trabalho com grupo.				Quantidade de produtos				Quilos (kg)	Gramas (g)	Litros (l)	Mililitros (ml)												
Quantidade de produtos																							
Quilos (kg)	Gramas (g)	Litros (l)	Mililitros (ml)																				
2. ^a Etapa) Com as crianças em duplas, distribuir 4 embalagens para cada dupla. Na lousa montar com o auxílio dos alunos a seguinte Tabela Simples: <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>Produtos</th> <th>Quantidade</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>Leite</td><td> </td></tr> <tr><td>Achocolatado</td><td> </td></tr> <tr><td>Bolacha</td><td> </td></tr> <tr><td>Arroz</td><td> </td></tr> <tr><td>Feijão</td><td> </td></tr> <tr><td>Macarrão</td><td> </td></tr> <tr><td>Óleo</td><td> </td></tr> <tr><td>Outros</td><td> </td></tr> <tr><td>TOTAL</td><td> </td></tr> </tbody> </table>				Produtos	Quantidade	Leite		Achocolatado		Bolacha		Arroz		Feijão		Macarrão		Óleo		Outros		TOTAL	
Produtos	Quantidade																						
Leite																							
Achocolatado																							
Bolacha																							
Arroz																							
Feijão																							
Macarrão																							
Óleo																							
Outros																							
TOTAL																							
Solicitar que as crianças transcrevam para seus cadernos a tabela colocando as quantidades das maiores para as menores. Propor os seguintes desafios: Considerando os “x” Leites e os “y” tipos de Bolachas, quantas são as																							

combinações possíveis de se fazer usando 1 leite e 1 bolacha? Agora considerando os “x” Leites, os “y” tipos de Bolachas e os “z” tipos de Achocolatado, quais seriam as combinações possíveis de se fazer usando 1 leite, 1 bolacha e 1 Achocolatado? Após discutir e verificar a maneira como as duplas resolveram os problemas apresentados, apresenta-se na lousa as possíveis maneiras de solução, ou seja, adição e multiplicação. Podendo até mesmo utilizar as próprias embalagens com barbantes coloridos e realizar as lições um a um. <i>Epistemologia genética de Jean Piaget:</i> materiais concretos, crianças agirem sobre o problema e o material, questionamentos, situação problema, estímulo, necessidade de descoberta, novidade, desequilíbrio e trabalho em duplas – trocas. 3.^a Etapa) Solicitar que as crianças tragam para a sala de aula cupons fiscais (pedir para irem trazendo uma semana antes da atividade). Novamente em grupos de 4 participantes, entrega-se 1 cupom para cada criança. Realiza-se uma brincadeira dizendo que cada conjunto de cupons estava dentro de uma carteira encontrada no setor de achados e perdidos. As crianças deverão investigar com base na leitura dos cupons toda a informação que puderem obter sobre o dono da carteira. Para auxiliar os o professor formula algumas perguntas, como: Em qual loja esteve? Em que rua ou local fica a loja? Em que dia fez a compra? Qual o horário da compra? Quanto gastou? Quanto dinheiro deu? Recebeu troco? De quanto? Em seguida, pede-se para que cada grupo apresente as informações localizadas, dando explicações de como conseguiram-na. <i>Epistemologia genética de Jean Piaget:</i> materiais concretos, crianças agirem sobre o problema e o material, questionamentos, estímulo, necessidade de descoberta e trabalho em grupo. 5. RECURSOS NECESSÁRIOS: Embalagens de produtos vazias e limpas (leite, achocolatado, óleo, arroz, etc.); Cupons fiscais (supermercados, farmácias, papelarias, etc.); Barbante colorido; Lousa e giz. 6. AVALIAÇÃO: A avaliação dar-se-á durante todo o desenvolvimento da atividade, considerando as discussões, envolvimento dos alunos e registros realizados. <i>Epistemologia genética de Jean Piaget:</i> considerar os avanços, desequilíbrios e construções realizadas pelas crianças. 7. ANO DE ESCOLARIDADE: 2.º e 3.º ano do Ensino Fundamental. 8. TEMPO PREVISTO: 15 dias – oito aulas de 50 minutos.
--

[Concluída a socialização, o Pesquisador/Participante pontuou:]

103. Pesquisador/Participante: É interessante observar, pessoal, a possibilidade de se trabalhar as várias áreas da Matemática em uma atividade. Vocês abordaram o Tratamento da Informação na Estatística e Combinatória, Grandezas e Medidas, e também Números e Operações! Dá pra perceber que foi trabalhado também este Bloco de Conteúdo?

104. P-8: Ah, é mesmo! Quando a gente questiona quanto veio de troco!

105. Pesquisador/Participante: Isso mesmo, P-8! Interdisciplinarmente é possível trabalhar Ciências!

106. P-2: É verdade! Pode ser mesmo!

107. Pesquisador/Participante: Além de poder estabelecer uma relação entre as várias áreas da Matemática, é possível relacionar a Matemática com a Ciência.

108. P-8: Até na parte que estou fazendo em meu TCC que é a parte de Educação Ambiental, de calcular o lixo...

109. P-2: Também dá!

110. **P-8:** *Dá pra discutir a questão da embalagem, de onde colocar esse lixo, como pode ser usado isso daí!*

111. **Pesquisador/Participante:** Só um detalhe! Vocês propuseram ao 2.º e 3.º anos do Ensino Fundamental. No entanto, nestes dois anos, penso que os alunos teriam dificuldades em resolver as combinações caso lhes fosse pedido que considerassem os ‘x’ Leites e ‘y’ Bolacha. É ótimo e achei muito criativo a possibilidade dos estudantes utilizarem barbantes para apoiarem o estabelecimento das combinações valendo-se das próprias embalagens. Mas a utilização desta linguagem, digamos assim, ‘pré-algébrica’ em ‘x’ e ‘y’ é algo ainda muito abstrato para o sujeito. O que vocês acham a respeito?

112. **P-7:** *É!... Pensando assim, acho que o aluno não ia utilizar esta linguagem, e sim fazer mesmo as ligações entre as embalagens para contar as combinações possíveis.*

113. **P-4:** *E também como tem alunos do 2.º ano, como a gente já discutiu, pode ser que alguns alunos só combinem com as bolachas que gostam!*

114. **Pesquisador/Participante:** Isso mesmo, P-4! O sujeito ainda não compreendeu o possível, valendo-se muitas vezes do imediato.

115. **P-2:** *Legal! Não havíamos pensando nisso!*

116. **P-8:** *E, de novo a gente não acertou o ano de escolaridade! [Risos entre as participantes.]*

117. **Pesquisador/Participante:** Por isso é importante a nossa discussão, a reflexão sobre as nossas proposições!

118. **P-8:** *É por isso que eu acho importante estas atividades práticas! A gente precisa disso!*

119. **Pesquisador/Participante:** Uma outra coisa que me deixou em dúvida foi quando vocês utilizaram a palavra estímulo como sendo um dos tópicos da teoria de Jean Piaget. O que vocês entendem por essa palavra?

120. **P-2:** *Ah... a gente pensou no estímulo como sendo uma atividade que estimule o aluno a agir sobre o conteúdo matemático!*

121. **Pesquisador/Participante:** Então é algo que vai desencadear/desequilibrar o estudante?

122. **P-2:** *Isso mesmo! Que vai fazê-lo se interessar por aquilo!*

123. **Pesquisador/Participante:** Entendi! Do geral, eu suponho que considerável parte dos professores atuantes, ou em Formação Inicial, apresentam dificuldade em elaborar Situações de Ensino que abordem o Tratamento da Informação como vocês estão apresentando pra gente! O que vocês acham?

124. **P-4:** *Sim, achamos isso! [Resposta compartilhada entre as demais participantes.]*

125. **P-9:** *Nem todas tiveram o Grupo de Estudo do Pesquisador/Participante! [Risos entre as participantes.]*

126. **P-2:** *Nenhuma teve, na verdade!*

127. **P-8:** *Será que o professor fica naquela rotina, rotina, rotina, daí o professor não teve um estudo como a gente fez aqui!?*

128. **P-9:** *É falta de formação!*

129. **Pesquisador/Participante:** Supondo que se o professor sequer aprendeu o conteúdo pertencente ao Tratamento da Informação, propor/elaborar Situações de Ensino de qualidade torna-se complicado!? Embora repita, mais uma vez, que saber Matemática (e bem), embora necessário não é suficiente para o ensino...

130. **P-1:** *Eu ia ter dificuldade pra fazer se não fosse o Grupo!*

131. **P-2:** *Eu também ia ter! Eu concordo plenamente! Porque eu nem imaginava aqueles conteúdos de Combinatória e Probabilidade!*

132. **P-4, P-5 e P-7:** *É verdade!*

133. **P-1:** *E a gente teve aula de Metodologia na faculdade, só que não foi suficiente!*

134. **P-8:** *A gente teve essa parte e foi só um semestre! É muito pouco!*

135. **Pesquisador/Participante:** Concordo com vocês que o tempo dificulta tal abordagem!

136. **P-8:** *E o que é exigido da gente... é muita coisa pra gente apresentar pras crianças, né, ensinar e fazer... em um semestre de Geografia, um de Ciências, um de História...*

137. **Pesquisador/Participante:** É verdade! Achei bem interessante a proposta de vocês (P-2, P-7 e P-8)! Alguém tem outro comentário? **[Já que não houveram comentários/questionamentos, o trio P-1, P-4 e P-5 expôs a Situação de Ensino, conforme esboçada abaixo:]**

ELABORAÇÃO: P-1, P-4 e P-5	
1. TÍTULO:	Mercadinho do 4.º ano.
2. OBJETIVOS:	Organizar as informações coletadas em gráficos e tabelas envolvendo conteúdos de estatística e realizar operações básicas.
3. CONTEÚDOS MATEMÁTICOS:	Operações básicas, tabelas e gráficos.
4. METODOLOGIA:	Primeiro será solicitado para que as crianças levem as embalagens que serão utilizadas no mercadinho, na próxima aula será feita a confecção do dinheiro, será confeccionado notas de 2 e 5 reais e moedas de 1 real. Os alunos farão a classificação dos setores do mercado, que poderão ser divididos em alimentos, higiene, brinquedos e bebidas. A professora responsável pela turma colocará o preço nos produtos e montará o mercadinho, faz-se necessário a montagem do cenário, pois existem alunos na turma que necessitam do concreto para realizar a atividade. No dia das compras cada aluno terá uma quantia em dinheiro para gastar, elas ficarão livres para escolher os produtos que quiserem e necessitarão das operações básicas para controlar os gastos. Na próxima aula a professora escreverá na lousa o nome de todos os alunos e os produtos que cada um comprou e proporá que aja alguma maneira de montar uma tabela menor mais objetiva. De acordo com a proposta dos alunos será montada uma nova tabela, nessa tabela deve constar o agrupamento de setores e a quantidade de alunos. Na próxima aula será retomado o conhecimento sobre gráficos e tabelas dos alunos, por meio de roda de conversa e a apresentação no multimídia. A partir da

retomada será solicitado pela professora que em seus cadernos eles montem gráficos utilizando as informações da tabela montada na aula anterior, nesse momento a professora observará quais são as dúvidas e as dificuldades dos alunos, a seguir a professora construirá o gráfico na lousa e cada aluno corrigirá o seu ou também poderá propor uma maneira diferente e também correta de montar o gráfico.
5. RECURSOS NECESSÁRIOS: Embalagens descartáveis, papel cartão, folha sulfite, tesoura, cola, giz, multimídia e imagens de gráficos.
6. AVALIAÇÃO: Será avaliado ao final da atividade, quando for solicitado para os alunos montarem seus próprios gráficos, assim o professor analisará como eles farão isso e ao final construirá na lousa com a ajuda dos alunos que já construíram o seu, assim os dados poderão ser confrontados.
7. ANO DE ESCOLARIDADE: 4.º Bimestre do 4.º ano.
8. TEMPO PREVISTO: Um Bimestre com duas aulas semanais com duração de cinquenta minutos cada.
Considerações Finais: Essa atividade também pode ser utilizada para abordar o tema alimentação saudável, censo crítico dos alunos abordando da onde vem o dinheiro, porque tem pessoas que tem mais dinheiro e outras menos, ainda nessa atividade pode-se trabalhar unidade de medidas, por que no mercado existem produtos vendidos em diferentes unidades (quilo, litro). Pode ser estendida a uma aula passeio a um mercado do bairro.

[Ao término, o Pesquisador/Participante salientou:]

138. Pesquisador/Participante: Pessoal, vocês conseguem perceber que as 3 Situações de Ensino implicam numa Matemática ‘viva’, dinâmica, em construção? **[Todas as participantes indicaram, por meio de expressão facial, afirmativamente.]** É o oposto da Matemática ‘morta’, estática, ‘presa’ num livro que o professor mal sabe utilizar! Quando você vivencia e pensa sobre aquilo, certamente o aprender vai parecer mais fácil! Sabe-se que aprender não é simples, já que demanda uma intensa atividade por parte do sujeito ao acomodar o ‘novo’. Só que quando a afetividade impulsiona a atividade do sujeito a fazer/pensar sobre algo, parece (apenas parece) que o tempo passa mais rápido!

139. P-9: *É mesmo!* **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]**

140. Pesquisador/Participante: Não é mesmo!? Embora a gente saiba que o tempo não depende de nossa vontade! **[Risos entre todos.]** Podemos supor que um ensino chato, desmotivador, digamos assim, possui maior chance de provocar uma aprendizagem sem sentido, chegando a ponto de torna-se mecânica, sem o estabelecimento de relações entre os conceitos/significados.

141. P-9: *Ah, com certeza!*

142. Pesquisador/Participante: Não podemos recair no discurso vazio de que deve ser ensinado só o que o aluno gosta! Isso, não! Deve ser ensinado o que é importante e possível para aquele momento escolar, no qual o professor deve despertar o interesse/necessidade/curiosidade em aprender de modo que o sujeito apreenda a sua realidade, ultrapassando o conhecimento do cotidiano em rumo ao científico. E podemos supor que este ensino com significado, vivo, dinâmico, que exija um aluno ativo, provavelmente possibilitará, ao final do Ensino Fundamental, a constituição do pensamento formal. No entanto, infelizmente, não é isso que estamos observando, como a P-4 mesma falou dos seus alunos. Quero dizer que adorei as Situações de Ensino de vocês, parabéns!

[Finalizando, o Pesquisador/Participante realizou a leitura conjunta do texto ‘síntese’ do Grupo de Estudo. Observe-o abaixo:]

20.1 (Re)significando os saberes da experiência acerca da Matemática

Durante seis meses o nosso Grupo de Estudo – alicerçado num trabalho colaborativo pautado na

confiança, diálogo/conversação profissional e negociação – oportunizou um ‘pensar sobre’ a ‘futura’ prática docente de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para tanto, diversos assuntos foram discutidos e inter-relacionados, tais como:

1 – O bloco de conteúdo ‘Tratamento da Informação’, seu significado, a importância de sua construção ao aluno e sua constituição (Estatística, Combinatória e Probabilidade):

1.1 – Estatística: Termos da Pesquisa Estatística (População, Amostra, Indivíduo ou Objeto, Variável Qualitativa e Quantitativa), Estatística Representativa (Gráficos e Tabelas) e Estatística Descritiva (Média Aritmética, Mediana, Moda, Variância e Desvio Padrão);

1.2 – Combinatória: Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo), Diagrama de Árvore, Permutação Simples e Com Repetição, Arranjo Simples e Com Repetição e Combinação;

1.3 – Probabilidade: Espaço Amostral; Espaço Amostral Equiprovável; Evento Aleatório (Certo, Provável, Impossível), Probabilidade (Clássica e Frequentista).

2 – O Ensino de Estatística, Combinatória e Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental: situações de ensino, a importância da proposição de problemas (desafios), rol de conteúdos e sua distribuição-abordagem nos anos iniciais.

3 – Tópicos da Teoria de Piaget (Epistemologia Genética):

3.1 – Gênese-construção da Classificação: Coleções Figurais (Fase I), Coleções Não-Figurais (Fase II) e Classes (Fase III);

3.2 – A Atividade do sujeito;

3.3 – A Teoria da Assimilação: Organização e Adaptação (Assimilação e Acomodação);

3.4 – A questão da ‘Necessidade’ na Educação;

3.5 – Os Fatores do desenvolvimento cognitivo: Maturação Orgânica, Interação Social; Experiência Física e Lógico-matemática e Equilibração;

3.6 – Os Estádios do desenvolvimento cognitivo: Sensório-Motor, Pré-Operatório, Operatório Concreto e Operatório Formal;

3.7 – O Mecanismo de Equilibração;

3.8 – O Processo de Tomada de Consciência.

4 – Teses Epistemológicas: Empirismo e Racionalismo.

Por meio de situações problemas (desafios) os referidos assuntos foram abordados visando à construção/(re)significação dos saberes experienciais acerca da Matemática e seu ensino e aprendizagem. Conforme denotado no primeiro encontro, a Formação Inicial deve oportunizar ao licenciando (futuro professor) uma reflexão a respeito desses saberes experienciais. Fiorentini et al. (1998), García (1999) e Pimenta (2008) apontam a necessidade das Licenciaturas propiciarem uma espécie de ‘reeducação’ de tais saberes. Caso contrário, respostas – como a denotada abaixo por uma professora da 2.ª série do Ensino Fundamental – continuarão a serem observados no universo escolar.

Pesquisador: Ao representar as operações aritméticas na lousa, você utilizou uma representação em forma de casas para indicar as classes decimais: unidade e dezena. Por que decidiu utilizar esta representação?

Professora – 2ª série: *Sinceridade, porque os livros trazem isso, eu aprendi assim (...); é bem assim mesmo, eu aprendi assim e eu sigo porque eles (os estudantes) também se confundem quando eu não faço essa divisão (ou seja, “casinha” da unidade, “casinha” da dezena). Então eles já confundem com a divisão, sem eu acho que seria um pouco mais difícil! Mas é porque é isso mesmo, os livros trazem assim, eu aprendi assim e a gente vai trabalhando da mesma forma!* (CAETANO, 2009, p. 282)

Os saberes construídos pela professora da 2.ª série enquanto aluna da Educação Básica foram ‘tão’ fortes que acabaram influenciando a sua prática docente. Acerca de tal influência, Tardif (2002) observa:

[...], uma boa parte do que os professores sabem sobre o ensino, sobre os papéis do professor e sobre como ensinar provém de sua própria história de vida, principalmente de sua socialização enquanto alunos. Os professores são trabalhadores que ficaram imersos em seu lugar de trabalho durante aproximadamente 16 anos (em torno de 15.000 horas), antes mesmo de começarem a trabalhar. *Essa imersão se expressa em toda uma bagagem de conhecimentos anteriores, de crenças, de representações e de certezas sobre a prática docente.* (TARDIF, 2002, p. 68, grifo nosso)

Em relação aos saberes experienciais referentes à Matemática, uma possível (re)significação – a ser feita pelo futuro professor – reside em compreendê-la enquanto uma Ciência proveniente de uma ‘longa’ construção e sistematização realizada pela humanidade historicamente. Ao contrário do que muitos propagam, a

Matemática não representa ‘apenas’ a Ciência da ‘Certeza’, mas, também, do ‘Talvez’. Além dos números e cálculos, a Matemática ocupa-se pela teorização do espaço, estudo e mensuração das formas e objetos, estimativa, análise e interpretação das informações (dados) via abordagem estatística, combinatória e probabilística, desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, dentre outras. Por se tratar de uma construção humana, tal ciência não deve ser (mais) encarada como ‘algo’ inacessível, um bicho de ‘sete cabeças’, mas sim um conhecimento possível de ser aprendido por todos.

Nesse processo de aprendizagem o professor possui um importante papel ao planejar/executar/avaliar situações de ensino que abordem os conteúdos matemáticos (conceituais, procedimentais e atitudinais). Espera-se que, ao longo do Grupo de Estudo, tenha havido uma possível (re)significação a respeito do ensino (e aprendizagem) de Matemática. Diferentemente do ensino vivenciado pelas participantes que fora calcado, ora no empirismo, ora no racionalismo, (re)significar o ensino de Matemática na perspectiva construtivista implica em concebê-lo um processo de constante ação/reflexão/‘nova’ ação/‘nova’ reflexão pelo professor propiciando a constante ação-operação/atividade pelo aluno. Atividades que promovam a memorização sem significado dos procedimentos (algoritmos) devem ser substituídas por aquelas que permitam a compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos. Nesse ‘novo’ contexto, o autoritarismo que induz à heteronomia deve dar espaço ao diálogo/troca de ideias entre aluno-aluno e aluno-professor.

Além do diálogo e das relações interindividuais que colaboram à gradativa constituição da autonomia, nos anos iniciais deve ser dada atenção à importância da manipulação/experimentação no concreto ao ‘pensar matemático’ do aluno. A manipulação, no entanto, não é concebida como um fim em si mesma, mas um apoio às soluções provisórias elaboradas mediante um desafio (desequilíbrio/necessidade). Por exemplo, antes de compreender (conceituar) uma classe hierárquica constituída pelas operações lógicas $A + A' = B$; $A = B - A'$ e $A' = B - A$, o aluno necessitou experimentar/vivenciar/construir inúmeras coleções (das figurais às não-figurais) valendo-se dos mais diferentes objetos.

Em suma, a reflexão de Furth (1997) torna-se pertinente já que o presente Grupo de Estudo representou uma possível tentativa de mudança na Formação Inicial de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental:

Sei que mudança é coisa difícil e que toda espécie de argumentos pode ser apresentada contra qualquer mudança; desses argumentos o não menos importante é aquele que afirma que qualquer coisa proposta como mudança ainda não foi tentada. E como não foi tentada, não sabemos se dará certo. Logo... nenhuma mudança. (FURTH, 1997, p. 220)

[Concluída a leitura, o Pesquisador/Participante complementou:]

143. Pesquisador/Participante: É claro, pessoal, que o nosso Grupo de Estudo apresentou limites em sua elaboração/execução. No entanto, conforme nos disse Furth (1997), o mesmo representou uma tentativa de Formação Inicial só possível com a efetiva participação de vocês. Acredito que, em vista disso, conseguimos cumprir nossa meta de um ‘pensar sobre’ a Matemática e seu ensino, seja conosco ou para nossos alunos nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Alguém que dizer algo?

144. P-9: *Eu acho que nós, também, só temos a agradecer! [As demais participantes sinalizaram, por meio de gesto facial, concordar com a fala de P-9.] Nós tivemos essa formação, e eu até brinquei que nem todos tiveram o Grupo de Estudo do Pesquisador/Participante. Com certeza, quando estivermos na prática isso vai ser extremamente útil!*

145. P-8: *Sim!*

146. P-9: *Por exemplo, até de compartilhar essa experiência...nós podemos colocar em prática!*

147. Pesquisador/Participante: Com certeza!

148. **P-9:** *Então, pra gente, só teve a acrescentar! Com certeza houveram re-significações! Se era essa a proposta, com certeza houve isso aqui!*

149. **P-8:** *Todas as coisas de Piaget que a gente estudou, assimilação, acomodação e adaptação! Nós tivemos tudo isso aqui, com a gente!*

150. **P-5:** *E tomada de consciência!*

151. **P-8:** *É verdade! E tomada de consciência!*

152. **P-2:** *Eu acho que o Grupo de Estudo foi essencial porque a gente viu um outro lado que durante os 4 anos de graduação a gente não viu! A gente ouviu muitas teorias, talvez não muito aprofundadas como foi possível sim aqui em pouco tempo, foi possível! Tanto que eu até escrevi em algumas das respostas **[Referiu-se ao Questionário Final.]** que algumas coisas não foi re-significação, foi construção de conhecimento! **[Neste momento, as demais participantes concordaram com a última fala de P-2.]** Porque não tinha onde embasar antes, já que não tinha sido construído ainda!*

153. **Pesquisador/Participante:** *Ok! Entendi!*

154. **P-2:** *E, além disso, foi o lado de ver o quanto é possível, o quanto uma teoria realmente embasa uma prática, ou enquanto uma prática tem que ser embasada numa teoria!*

155. **P-9:** *E como!*

156. **P-8:** *E tem a teoria que é importante, que nós tivemos aqui com o embasamento da teoria, junto com a prática. Você nos mostrou como fazer isso!*

157. **P-1:** *Não foi a teoria pela teoria!*

158. **P-2:** *Isso!*

159. **Pesquisador/Participante:** *Foi possível, digamos assim, ‘ver’ Piaget na prática?*

160. **P-8:** *Sim! **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]***

161. **Pesquisador/Participante:** *É claro que não abordamos/aplicamos apenas os estudos de Piaget.*

162. **P-2:** *Sim!*

163. **Pesquisador/Participante:** *Mas os tópicos que propus da teoria de Piaget foram possíveis de subsidiarem uma prática!*

164. **P-8:** *Sim!*

165. **Pesquisador/Participante:** *Então foi possível visualizar aquilo que Piaget elaborou a nível epistemológico sendo aplicado/interpretado em sala de aula!*

166. **P-5:** *Sim! **[Resposta compartilhada entre as demais participantes.]***

167. Pesquisador/Participante: Acredito que é isso que os responsáveis pelo ensino devem fazer! Saber ‘transferir’, e de modo sério e com propriedade, as teorias em efetivas ações no cotidiano escolar. O próprio Piaget observou que a ele competia a elaboração de uma teoria explicativa acerca do Conhecimento. Aos pedagogos/professores cabia o papel de utilização – mediante inúmeros ajustes – de sua teoria na escola. E isso, a meu ver, deve ser feito com outros e importantes teóricos, tais como Vigotsky, Saviani, Wallon, Freinet, Paulo Freire, etc. Enfim, devemos viver na prática uma teoria, estabelecendo uma relação dialética entre ambas, ou seja, a teoria ‘informando’ a prática e a prática ‘informando’ a teoria.

168. P-9: *Com certeza! É por isso que eu vim participar! Mesmo seguindo a teoria histórico-crítica, eu não tive preconceitos, porque eu sei que nenhum teórico é completo!*

169. Pesquisador/Participante: É muito bom essa sua postura de não emitir preconceito de algo que não conhece! Enfim, posso dizer que o ‘x’ da questão foi o nosso envolvimento, nossa cumplicidade, compartilhamento de ideias, possibilidade de aprender com o outro e gerir diferentes pontos de vista! Alguém quer complementar? **[Como ninguém se pronunciou, o Pesquisador/Participante encerrou agradecendo a colaboração de todas as participantes. A pedido das participantes, combinou-se a continuidade de trocas de e-mails entre todos acerca de dúvidas/auxílios na futura prática docente de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Inclusive cogitou-se a possibilidade de um próximo Grupo de Estudo visando a abordagem do Bloco de Conteúdo ‘Espaço e Forma’, o que foi bem aceito por todas.]**

APÊNDICE Y – QUESTIONÁRIO FINAL POSTERGADO

1) Na **SUA** opinião, o que é a Matemática?

R:

2) Na **SUA** opinião, como se aprende a Matemática?

R:

2.1) Qual o papel do aluno no processo de aprendizagem da Matemática? Justifique sua resposta.

R:

[illegible]

R:

[illegible]

R:

[illegible]