



**PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA**

**Ajuste de curvas de velocidade radial de órbitas
de exoplanetas com métodos numéricos**

Enio Akira Oishi

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO
2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Enio Akira Oishi

Ajuste de curvas de velocidade radial de órbitas de exoplanetas com métodos numéricos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora
Profa. Dra. Maria Helena Moreira Morais

**Rio Claro/SP
2024**

O39a

Oishi, Enio Akira

Ajuste de curvas de velocidade radial de órbitas de exoplanetas com métodos numéricos / Enio Akira Oishi. -- Rio Claro, 2024
90 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientadora: Maria Helena Moreira Morais

1. Métodos numéricos. 2. Ajuste de curvas. 3. Periodograma. 4. Mecânica celeste. 5. Programação. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Impacto potencial desta pesquisa

O desenvolvimento de um programa que aplica métodos numéricos traz um ponto de vista que esclarece a teoria, a prática, seus usos e possíveis adaptações. Neste trabalho, com um caráter multidisciplinar, buscamos pôr em prática métodos numéricos em situações reais, utilizando dados do catálogo da NASA, e resultou em uma aplicação funcional.

Potential impact of this research

The development of a program that applies numerical methods offers a perspective that clarifies the theory, practice, uses, and potential adaptations. In this multidisciplinary project, we aim to implement numerical methods in real-world situations using data from NASA's catalog, resulting in a functional application.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Enio Akira Oishi

AJUSTE DE CURVAS DE VELOCIDADE RADIAL DE ÓRBITAS DE
EXOPLANETAS COM MÉTODOS NUMÉRICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Maria Helena Moreira Morais -
orientadora
IGCE - UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Selene Maria Coelho Loibel
IGCE - UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Marcos Tadeu dos Santos
Secretaria de Educação do Estado de São Paulo/Rio
Claro

Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 23 de agosto de 2024

Dedico este trabalho à minha mãe. Seu apoio e força permitiram o meu avanço mesmo durante os momentos mais difíceis. Ao meu pai (in memoriam), que sempre esteve ao meu lado, que me viu entrar no mestrado daqui, mas que me vê mestre lá do céu.

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Neide, pelo apoio incondicional, e ao meu pai Tiharu, que em vida, acreditou no meu potencial.

Agradeço aos meus amigos pelo companheirismo e incentivo. Ao Fábio, que me apresentou este programa de mestrado, e as contribuições de Leonardo, Luís Fernando, Gilberto e Vidal.

Agradeço aos membros da banca pelos valiosos conhecimentos. Ao Marcos, que elevou a qualidade deste trabalho com seus apontamentos e observações e à Selene que trouxe luz aos assuntos que outrora me eram obscuros.

Agradeço à minha orientadora Maria Helena Moreira Morais pela paciência, compreensão e orientação, o que tornou possível este trabalho ser o que é.

A dúvida é o princípio da sabedoria.
Aristóteles

Resumo

Este trabalho aplica o periodograma de Lomb-Scargle para obter estimativas e o melhor ajuste de função a dados de velocidade radial de órbitas de planetas extrassolares. No processo, fazemos o melhor ajuste com função sinusoidal aos dados para obter estimativas iniciais de parâmetros para, posteriormente, usá-los no ajuste de curva de velocidade radial, assim obtendo melhores estimativas dos parâmetros orbitais. Estudamos estas funções à partir da mecânica celeste e escrevemos algoritmos que complementam os métodos numéricos usando a linguagem de programação Julia.

Palavras-chave: Métodos Matemáticos. Ajuste de Curvas. Astronomia. Mecânica Celeste. Programação.

Abstract

This work applies the Lomb-Scargle periodogram to estimate and best fit functions to radial velocity data of exoplanet orbits. In the process, we perform a sinusoidal fit to the data to obtain initial parameter estimates, which are then used in the radial velocity curve fitting to achieve better orbital parameter estimates. We study these functions through celestial mechanics and develop code that complements numerical methods using the Julia programming language.

Keywords: Mathematical Methods. Curve Fitting. Astronomy. Celestial Mechanics. Programming.

Lista de Figuras

2.1	Teoria geocêntrica	14
2.2	Sistema heliocêntrico	15
2.3	Teoria Tychônica	15
2.4	Forças de dois corpos	16
2.5	Geometria da órbita elíptica	19
2.6	Rotação Z-X-Z	21
2.7	(x, y, z) rotacionado em ω , I e Ω em (X, Y, Z)	22
2.8	Força de dois corpos com novo centro de massa	22
3.1	Plano orbital perpendicular à linha de visada.	29
3.2	Estrela se afasta do observador	29
3.3	Velocidade radial próxima de zero	29
3.4	Estrela se aproxima do observador	30
3.5	Função e dados de HD132406	33
4.1	Função senoidal na órbita	34
4.2	Potências das frequências de HD 10647b e HD 6434b	40
4.3	Distribuição Beta: p-value dado um $p(n)$	42
5.1	HD4313 no site	49
5.2	Velocidades radiais de HD4313	50
5.3	Potências das frequências de HD 4313b	53
5.4	Função $v_r(t)$ ajustado aos dados de HD 4313b	55
5.5	Potências das frequências de HD 6434b	57
5.6	Função $v_r(t)$ ajustado aos dados de HD 6434b	58
5.7	HD 6434 b por [13]	59
5.8	Função $v_r(t)$ ajustado aos dados de um período orbital de HD 6434b	60
5.9	Potências das frequências de HD 16175b	62
5.10	Função $v_r(t)$ ajustado aos dados de HD 16175 b	63
5.11	Gráfico de HD 16175 b, por [8]	64

Lista de Tabelas

3.1	Velocidades radiais de HD 132406 b. Fonte: [32]	32
3.2	Elementos orbitais de HD 132406 b. Fonte: [32]	33
5.1	Comparação com outros trabalhos de HD 4313b. Usamos os dados de [15]	55
5.2	Comparação com outros trabalhos de HD 6434b. Usamos os dados de [21] .	61
5.3	Comparação com outros trabalhos de HD 16175b. Usamos os dados de [26]	64

Sumário

1	Introdução	13
2	Contextualização	14
2.1	Resumo histórico	14
2.2	Leis de Kepler e leis de Newton	16
2.3	Mecânica celeste	20
2.3.1	Métodos numéricos iterativos	27
3	Velocidade radial	28
3.1	Equação da velocidade radial $v_r(t)$	28
3.2	Séries temporais de sinais de velocidade radial	32
4	Periodograma	34
4.1	Transformada Discreta de Fourier	34
4.2	Lomb-Scargle	36
4.2.1	Configurando o vetor de frequências	38
4.3	Probabilidade de falso alarme	39
4.4	Método dos mínimos quadrados	42
4.5	Expansões elípticas	45
4.6	Periodograma Kepleriano	47
5	Aplicação prática nos dados de velocidade radial	49
5.1	Metodologia e algoritmo	50
5.1.1	Comparação dos resultados	52
5.2	Planeta HD 4313 b	53
5.3	Planeta HD 6434 b	56
5.4	Planeta HD 16175 b	61
6	Conclusão	65
	Referências	67
A	Código fonte do programa	70
A.1	Programação principal	70
A.2	Programação de apoio	76
A.3	Exemplo de uso	81
B	Dados de velocidades radiais observadas	84

1 Introdução

O fato de a vasta maioria dos planetas não ser vista diretamente suas descobertas são feitas indiretamente, pois o que se observa é a estrela cujo comportamento aparente é analisado afim de inferir a existência e características de um possível planeta.

A intenção desta dissertação é apresentar um estudo da aplicação de métodos numéricos que possibilite a estimativa de características orbitais de planetas extrassolares à partir de observações feitas por telescópios e equipamentos de observatórios. Especificamente, usando o método de Velocidade Radial de detecção de exoplanetas, dados reais serão analisados para comparar nossos resultados com o de outros trabalhos, reforçar ou refutar modelos matemáticos. Desta forma, buscamos esclarecer matematicamente como atualmente têm-se obtido os valores dos elementos orbitais, com base na mecânica celeste, técnicas matemáticas e estatísticas e auxílio de linguagens de programação.

Desde o século XIX, Velocidade Radial tem sido um método importante para os desenvolvimentos e avanços na astrofísica [19]. No passado, astrônomos perceberam mudança de cor na observação de certa(s) estrela(s) e deduziram que tratava-se do fato de que a estrela se afastava/se aproximava do observador. O comprimento de onda diminui caso a estrela observada se aproxime do observador, e o espectro sofre deslocamento para o azul; caso contrário, o comprimento da onda aumenta, deslocando-se para o vermelho, indicando que a estrela se afasta do observador [6]. Assim, quando as observações manifestam movimento periódico, isto indica a existência de um planeta.

O capítulo 2 contextualiza a área da astronomia que iremos aplicar a matemática, a mecânica celeste e as leis de Kepler e de Newton.

No capítulo 3 vamos explicar sobre Velocidade Radial e apresentar os elementos orbitais que este método consegue obter.

No quarto capítulo iremos apresentar todos os métodos numéricos que utilizamos no trabalho, baseados no periodograma de Lomb-Scargle.

No quinto capítulo aplicamos na prática os métodos apresentados no capítulo anterior em dados reais do catálogo da NASA Exoplanet Archive e comparamos os resultados obtidos com o de outros trabalhos.

2 Contextualização

2.1 Resumo histórico

"A Astronomia é uma das disciplinas científicas mais antigas, que evoluiu desde os humildes começos de contar estrelas e traçar constelações a olho nu até a impressionante demonstração das capacidades tecnológicas da humanidade que vemos hoje" conforme [28]. Segundo [6], os astrônomos da Grécia antiga foram os primeiros a fazer medidas dos corpos celestes. Hiparco (180-125 a.C.) fez medias para mapear as estrelas, Eratóstenes (276-194 a.C.) estimou o raio da Terra e Aristarco (310-230 a.C.) estimou a distância relativa do Sol e da Lua. Apesar das limitações — como a precisão das observações — estes autores foram bem sucedidos em suas avaliações. Eratóstenes estimou o raio da Terra em $6247km$ (hoje consideramos $6370km$). Aristarco calculou que a distância Terra-Lua é 40 vezes o diâmetro da Terra; e que a distância Terra-Sol é 19 vezes a distância Terra-Lua.

[11] confirma que Ptolomeu (100-168 d.C.) propôs a teoria geocêntrica, apresentada em 150 d.C., em sua obra *Almagesto*. Neste trabalho a Terra era apontada como um planeta estático no centro do Universo e ao redor dela orbitavam todos os corpos celestes [25]", conforme a figura 2.1.



Figura 2.1: Teoria geocêntrica. Fonte: Wikipedia ¹

[25] cita que o geocentrismo foi aceito por 14 séculos, até ser contestado por Copérnico (1473-1543). Em "*De Revolutionibus Orbium Coelestium*" de 1530, Copérnico apresentou

¹Disponível em: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3a/Ptolemaicsystem-small.png>

sua visionária descoberta do heliocentrismo, considerado um sacrilégio pela Igreja Católica, ilustrada na figura 2.2.

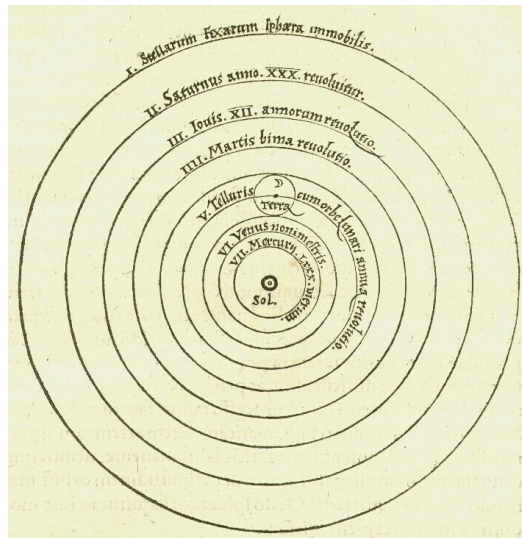


Figura 2.2: Sistema heliocêntrico: órbitas circulares. Fonte: InfoEscola ²

Posteriormente, Tycho Brahe (1546-1601) teorizou que o Sol e a Lua orbitavam a Terra e que os cinco planetas conhecidos na época orbitavam o Sol (figura 2.3), segundo [35].

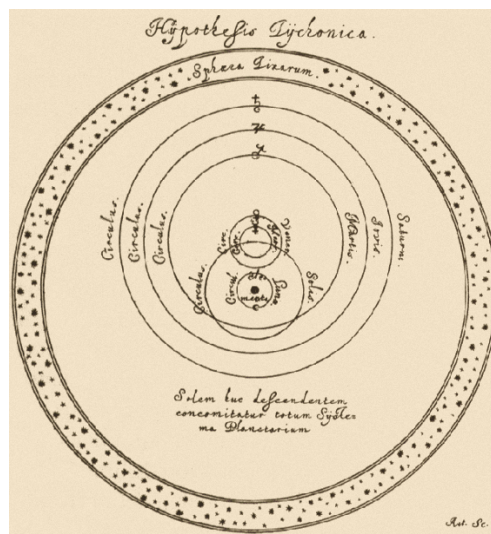


Figura 2.3: Sistema Tychônico. Fonte: Wikipedia ³

Apesar deste equívoco, sua contribuição científica se deu, conforme [6], pela sua prioridade no rigor de suas observações astronômicas, sendo conhecido por ser "o último grande astrônomo da era pré-telescópica [6]".

Em 1599, Johannes Kepler (1571-1630) torna-se assistente de Brahe, de quem "herdou" a precisão e rigor. Dois anos antes, Kepler publica "Mysterium Cosmographicum", que expõe suas inclinações heliocêntricas [29]. Este fato, atrelado ao aprendizado com Brahe, o leva a sua obra-prima "Astronomia Nova" em 1609. Neste livro, ele expõe que os

²Disponível em: <https://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2016/04/heliocentrismo.jpg>

³Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_Tychonico#/media/Ficheiro:Tychonian.png

planetas não se movem uniformemente, mas que a velocidade muda pela excentricidade de suas órbitas, de onde vem suas conhecidas primeira e segunda leis de Kepler. Dez anos depois, Kepler publica "Harmonices Mundi", que contém a formulação da sua terceira lei: "o quadrado do período orbital do planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior de sua órbita". Posteriormente, estas leis foram comprovadas pelas leis de Newton. Estas leis servirão de base para este trabalho, e são cientificamente aceitas até os dias de hoje.

2.2 Leis de Kepler e leis de Newton

As referências [22] e [23] foram utilizadas para explicar que as leis de Kepler são decorrências das leis de Newton.

As três leis de Kepler demonstraram alta precisão com as observações, e destacamos que, na verdade, são afirmações observacionais e deduções empíricas, enunciadas como:

1. Planetas orbitam o Sol em uma elipse, com o Sol em um dos focos;
2. Planetas varrem áreas iguais da elipse em intervalos iguais;
3. O quadrado do período orbital de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da elipse.

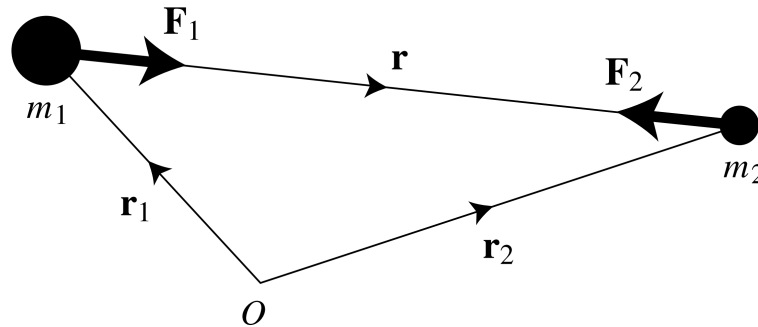


Figura 2.4: Ação das forças da massa da estrela m_1 e da massa do planeta m_2 . Fonte: [23]

A dedução matemática dessas leis é efetuada usando as leis de Newton e requer cálculos com vetores. De acordo com a Lei Universal da Gravitação de Newton, conforme a figura 2.4, a magnitude de força entre m_1 e m_2 separados por uma distância r é dada por:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

onde G é a constante gravitacional universal ($G = 6,67260 \times 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$).

O problema de dois corpos descreve a base do movimento de um planeta ao redor de uma estrela. Assim, seguindo o raciocínio da figura 2.4, considerando uma estrela de massa m_1 e um planeta de massa m_2 e vetores \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 referenciados a uma origem O fixada em um sistema de coordenadas inercial, a força gravitacional agindo na estrela é:

$$\mathbf{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.1)$$

e no planeta é:

$$\mathbf{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.2)$$

A segunda lei de Newton descreve como uma aceleração de um objeto é proporcional à força resultante aplicada nele. Nesta lei:

$$F = m\ddot{\mathbf{r}}$$

Aplicando em eq. 2.1 e eq. 2.2:

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.3)$$

e

$$\mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.4)$$

respectivamente.

Temos que $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ (vetor planeta-estrela) muda com o tempo, pois a órbita é elíptica. Se escrever $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1$, de eq. 2.3 e eq. 2.4, temos:

$$\ddot{\mathbf{r}} + G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (2.5)$$

Da eq. 2.5 temos $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$. Então podemos escrever:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}}_{\text{zero}} + \underbrace{\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}}_{\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0 \Rightarrow \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} \quad (2.6)$$

onde \mathbf{h} é um vetor constante e perpendicular tanto a \mathbf{r} quanto a $\dot{\mathbf{r}}$. Assim concluímos que o movimento do planeta com respeito à estrela está em um plano perpendicular à direção de \mathbf{h} , que é o momento angular. Também temos que os vetores de posição e velocidade estão em um mesmo plano, que chamamos de plano orbital. Portanto, o movimento de dois corpos sob ação da gravidade estão dentro de uma superfície plana. Escrevemos \mathbf{r} e $\dot{\mathbf{r}}$ em coordenadas polares:

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} \quad (2.7)$$

e

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.8)$$

Assim, a eq. 2.6 fica:

$$\mathbf{r} \times (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{h} \quad (2.9)$$

e eliminando os termos vetoriais de auto-produto:

$$\mathbf{r} \times (r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{h} \quad (2.10)$$

a seguir, agrupando todos os termos escalares juntos em um lado:

$$r\dot{\theta}\mathbf{r} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{h}. \quad (2.11)$$

Pela equação 2.11:

$$r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = h\hat{\mathbf{h}}. \quad (2.12)$$

$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}$ é um vetor perpendicular ao plano orbital formando uma tríade com $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. A magnitude deste vetor dá

$$h = r^2\dot{\theta}. \quad (2.13)$$

Considerando a Segunda Lei de Kepler, sobre as áreas que os planetas varrem

$$dA = \int_0^r r dr d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (2.14)$$

e dividindo os termos por dt

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} h. \quad (2.15)$$

Como h é uma constante, \dot{A} é constante. Assim, temos que os planetas varrem áreas iguais em intervalos iguais. Da equação 2.5:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G(m_1 + m_2) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (2.16)$$

usando coordenadas polares,

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \right] \hat{\theta}, \quad (2.17)$$

obtendo:

$$-G(m_1 + m_2) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \right] \hat{\theta}. \quad (2.18)$$

Equilibrando os componentes que multiplicam $\hat{\mathbf{r}}$ para a direção radial temos

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2}. \quad (2.19)$$

Tomando $u = \frac{1}{r}$, a primeira derivada:

$$\underbrace{\frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\theta}}_{\text{regra da cadeia}} = \frac{dr^{-1}}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -r^2 \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \underbrace{\frac{r^{-2}\dot{r}}{\dot{\theta}}}_{\dot{\theta} \text{ da equação 2.13}} = \frac{r^{-2}\dot{r}}{hr^{-2}}$$

e a segunda derivada:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d\left(\frac{du}{d\theta}\right)}{d\theta} = \underbrace{\frac{1}{h} \frac{d\dot{r}}{d\theta}}_{\text{regra da cadeia}} = \underbrace{\frac{1}{h} \frac{d\dot{r}}{dt} \frac{dt}{d\theta}}_{\dot{\theta} \text{ da equação 2.13}} = \frac{1}{h} \frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{1}{h} \frac{\ddot{r}}{hr^{-2}} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\ddot{r}}{h^2 r^{-2}}.$$

Assim podemos substituir o \ddot{r} da equação 2.19, bem como o $\dot{\theta}$ em termos de h da equação 2.13, obtendo

$$\begin{aligned} -h^2 r^{-2} \frac{d^2u}{d\theta^2} - r(hr^{-2})^2 &= -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \\ h^2 r^{-2} \frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{1}{r} h^2 r^{-2} &= -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= \frac{G(m_1 + m_2)}{h^2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Por conveniência, seja $\frac{1}{p} = \frac{G(m_1+m_2)}{h^2}$ onde $p = \frac{h^2}{G(m_1+m_2)}$, equação conhecida como equação de Binet, tem a solução

$$u(\theta) = \alpha \cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{p} \quad (2.21)$$

onde α é uma constante da integração neste ponto. É conveniente reescrever α em termos de p e tirar p como um denominador comum: $e = \alpha p$. Utilizando a notação histórica, seja $\theta_0 = \varpi$. Substituindo u de volta por $\frac{1}{r}$, chegamos na equação para a magnitude do vetor radial:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varpi)}. \quad (2.22)$$

Considerando a figura 2.5 como o plano orbital:

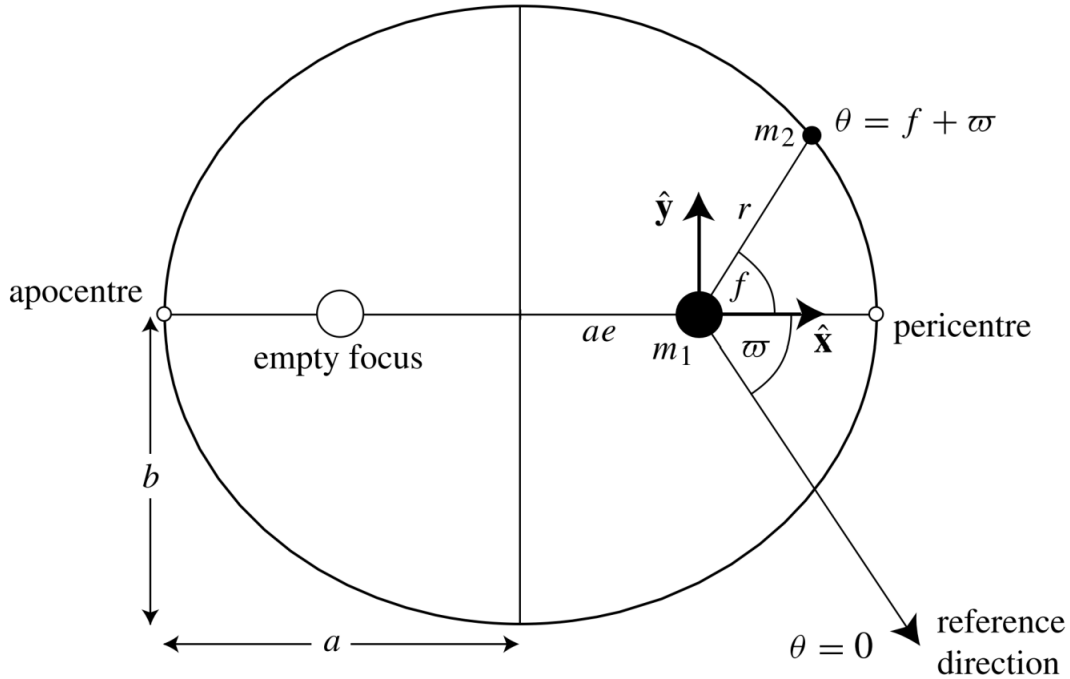


Figura 2.5: Geometria da órbita elíptica. Fonte: [22]

- a como o semieixo maior;
- b como semieixo menor;
- e como a excentricidade;
- f como a anomalia verdadeira;
- ϖ como a longitude do periastro.

A estrela ocupa um dos focos da elipse, o planeta orbita o perímetro; nomeia-se apoastro (ou apocentre) o ponto da elipse onde o planeta está mais distante da estrela e de periastro (ou apocentre) o ponto onde o planeta está mais próximo da estrela. O termo e é tipicamente chamado de **excentricidade orbital**, θ é conhecido como **longitude verdadeira** e ϖ refere-se ao ângulo conhecido como **longitude do periapse** (ou periastro). A equação 2.22 descreve a Primeira Lei de Kepler.

Definido $f = \theta - \varpi$, que é a longitude verdadeira menos a longitude referencial do periapse, f é chamado de **anomalia verdadeira**. Seja a o semieixo maior da elipse. Considerando a largura total da elipse – a distância da posição radial máxima até a mínima – temos $f = 0$ e $f = \pi$, e obtém-se da equação 2.22 que

$$r_{\max} \rightarrow r_{\min} = \frac{p}{1 + e} + \frac{p}{1 - e} = 2a$$

$$\begin{aligned}
 p &= a(1 + e)(1 - e) \\
 \therefore p &= a(1 - e^2).
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

Se substituirmos o p na fórmula 2.22, temos

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(f)},
 \tag{2.24}$$

uma equação mais convencional, relacionado a distância radial como uma função da anomalia verdadeira orbital.

Considerando a equação 2.22 onde $p = \frac{h^2}{G(m_1 + m_2)}$ (equação de Binet) e a equação 2.23, chegamos na equação

$$\frac{h^2}{G(m_1 + m_2)} = a(1 - e^2) \Rightarrow h = \sqrt{a(1 - e^2)G(m_1 + m_2)}.
 \tag{2.25}$$

Integrando a equação 2.15 por um período inteiro, temos

$$A = \frac{1}{2}hP$$

que é a área da elipse como a constante $\frac{1}{2}h$ multiplicado por P . Mas podemos escrever a área de uma elipse geometricamente como $A = \pi ab$ com b sendo o semieixo menor, que pode ser relacionado a a e e obtendo $b = a(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$ então

$$A = \frac{1}{2}hP = \pi ab = \pi a^2(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}.
 \tag{2.26}$$

Como as equações de área precisam ser iguais

$$a^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1 - e^2)G(m_1 + m_2)}P = 2\pi a^2\sqrt{1 - e^2} \Rightarrow \frac{P^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}
 \tag{2.27}$$

que é a Terceira Lei de Kepler descrita por Newton.

2.3 Mecânica celeste

[23] e [22] continuam sendo as referências para esta seção. Neste trabalho iremos nos delimitar no Problema de Dois Corpos, que é a dinâmica que consiste na "interação de duas massas pontuais movendo sob atração gravitacional mútua", segundo [23]. Sendo assim, trata-se de um assunto que pode negligenciar possíveis outros pontos de massa por não influenciarem significativamente o sistema. Um terceiro corpo interagindo com certa relevância nos levaria ao Problema de Três Corpos, e em comparação com o Problema de Dois Corpos, é muito mais complexo.

Observadores têm por referência o plano (X, Y) perpendicular à linha de visão e o eixo Z é orientado na direção do observador. Ao analisar uma órbita do ponto de vista heliocêntrico, usa-se como referência a estrela na origem (0, 0) por conveniência. Nas coordenadas cartesianas, a órbita está em um plano XY, com o X alinhado ao eixo maior da elipse. Supomos que um observador hipotético esteja sobre este plano segundo a direção do eixo Z. Então a estrela permanece na origem (0, 0, 0) e o observador em (0, 0, ∞). Usando como referência a figura 2.5, a posição do planeta segue $\mathbf{r}(f) = (r \cos f, r \sin f, 0)$.

O plano orbital estrela-planeta é o plano (X, Y) do observador e pode estar inclinado de forma que seja necessário rotacionar este plano para melhor visualizar o sistema. Para esta rotação, podemos usar o Teorema de Rotação de Euler, que compreendeu que não importa a orientação de um corpo rígido, pode-se obter a orientação desejada usando três transformações rotacionais. Há dois tipos de rotação de Euler:

1. ângulos de Euler próprios (Z-X-Z, X-Y-X, Y-Z-Y, Z-Y-Z, X-Z-X, Y-X-Y);
2. ângulos de Tait-Bryan (X-Y-Z, Y-Z-X, Z-X-Y, X-Z-Y, Z-Y-X, Y-X-Z)

A transformação utilizada em Mecânica Celeste por convenção é o Z-X-Z.

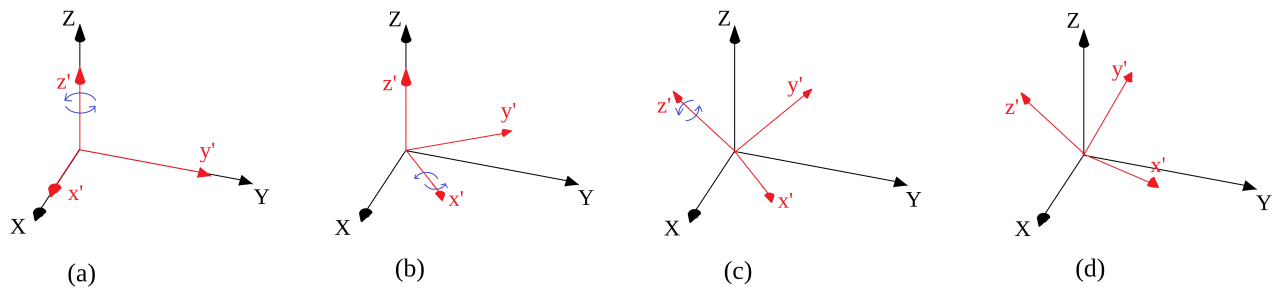


Figura 2.6: Rotação Z-X-Z: (a) (x', y', z') - o plano da órbita - inicia coincidindo com (X, Y, Z) - o plano observado - que é a referência; rotacionar o eixo z' resulta em (b). Ao rotacionar x' de (b) chega-se a (c). De (c), ao rotacionar z' novamente, tem-se o plano (x', y') perpendicular ao plano (X, Y) em (d).

Esta transformação pode ser representada por cálculo com matrizes. Seja ϕ o ângulo de rotação, $\mathbf{P}_x(\phi)$ a rotação feita no eixo x e $\mathbf{P}_z(\phi)$ a rotação feita em z :

$$\mathbf{P}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ 0 & \text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{P}_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 \\ \text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao observar a figura 2.7, as rotações Z-X-Z são representadas respectivamente por ω , I e Ω e

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{P}_z(\Omega)\mathbf{P}_x(I)\mathbf{P}_z(\omega) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad (2.28)$$

lembrando que multiplicação de matrizes não é comutativa e que $\mathbf{P}_x^{-1}(\phi)$ e $\mathbf{P}_z^{-1}(\phi)$ são matrizes inversas de $\mathbf{P}_x(\phi)$ e $\mathbf{P}_z(\phi)$ respectivamente, segue que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{P}_z^{-1}(\omega)\mathbf{P}_x^{-1}(I)\mathbf{P}_z^{-1}(\Omega) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

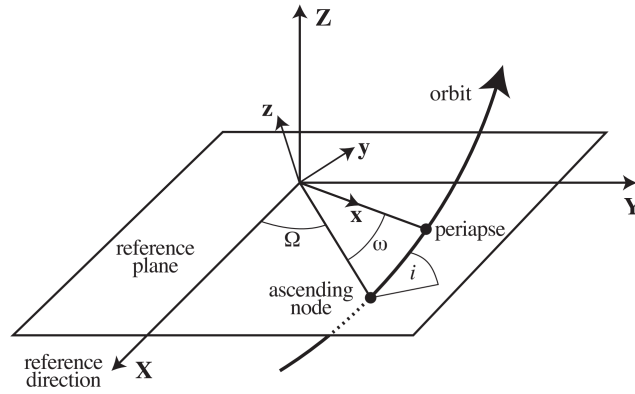


Figura 2.7: (x, y, z) rotacionado em ω , I e Ω em (X, Y, Z) . Fonte: [22]

ω é chamado de **argumento do periastro**, Ω é chamado de **longitude do nó ascendente** e I é a inclinação no alcance $0^\circ \leq I \leq 180^\circ$. Se restringir (x, y, z) ao plano orbital, então $x = r \cos f$, $y = r \sin f$, $z = 0$ e pela equação 2.28:

$$X = r(\cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I) \quad (2.29)$$

$$Y = r(\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I) \quad (2.30)$$

$$Z = r \sin(\omega + f) \sin I. \quad (2.31)$$

Mas esta abordagem é heliocêntrica (fazia sentido para Kepler colocar o Sol na origem — figura 2.4 segue este raciocínio) e as equações 2.29, 2.30 e 2.31 referem-se apenas à posição do planeta, então há a necessidade de compensar estas equações, pois o planeta também exerce uma força gravitacional na estrela (conforme visto na eq. 2.5 que corrige o fato de o Sol não ser inercial), então a estrela vai sofrer uma aceleração por $F = ma$, logo, torna-se um quadro não-inercial. Assim, o baricentro é definido como o quadro inercial, sendo a base da origem do sistema, o centro de massa. Agora seguindo a lógica da figura

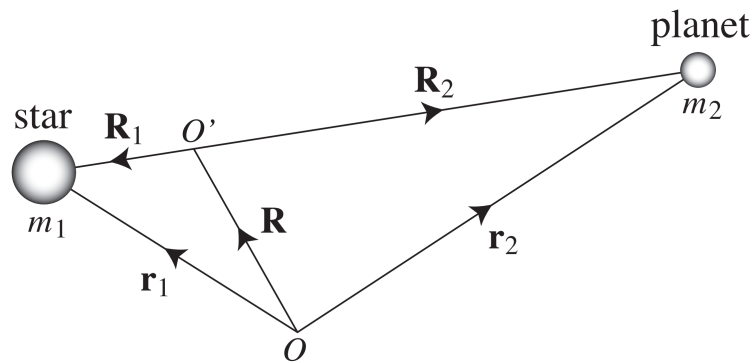


Figura 2.8: Com centro de massa O' , \mathbf{R} passa pelo baricentro. Fonte: [22]

2.8:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{\underbrace{m_1 + m_2}_{\text{posição média dos pesos (das massas)}}}.$$

A segunda lei de Newton aplicado à estrela ($\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1$) e ao planeta ($\mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2$) no sistema baricêntrico é

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0 \quad (2.32)$$

com o baricentro não sofrendo força. A definição da posição da estrela agora é $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ e a do planeta $\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$.

Podemos notar também da figura 2.8, como \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 permanecem sempre na direção oposta um do outro, e:

$$m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 = 0, \quad (2.33)$$

e de 2.33 podemos escrever

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = \mathbf{r}$$

onde \mathbf{r} é a separação de m_1 e m_2 (figura 2.4). Então $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{R}_2$. Substituindo \mathbf{R}_1 na equação 2.33:

$$m_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) + m_2 \mathbf{R}_2 = 0.$$

Agora, expandindo e rearranjando os termos:

$$m_1 \mathbf{r} - m_1 \mathbf{R}_2 + m_2 \mathbf{R}_2 = 0,$$

e agrupando os termos com \mathbf{R}_2 :

$$\mathbf{R}_2(m_2 - m_1) = m_1 \mathbf{r}$$

$$\mathbf{R}_2 = -\frac{m_1 \mathbf{r}}{m_2 + m_1}; \quad (2.34)$$

e para \mathbf{R}_1 :

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{R}_2,$$

substituindo na equação 2.33:

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{R}_1 &= -m_2 \mathbf{R}_2 \\ m_1 \mathbf{R}_1 &= -m_2 \left(-\frac{m_1 \mathbf{r}}{m_2 + m_1} \right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_1 = \frac{m_2 \mathbf{r}}{m_2 + m_1}. \quad (2.35)$$

Como as equações 2.29, 2.30 e 2.31 são heliocêntricas, os análogos para baricêntricas são:

$$X_1 = \frac{m_2}{m_2 + m_1} \mathbf{r} (\cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I) \quad (2.36)$$

$$Y_1 = \frac{m_2}{m_2 + m_1} \mathbf{r} (\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I) \quad (2.37)$$

$$Z_1 = \frac{m_2}{m_2 + m_1} \mathbf{r} \sin(\omega + f) \sin I. \quad (2.38)$$

$$X_2 = -\frac{m_1}{m_2 + m_1} \mathbf{r} (\cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I) \quad (2.39)$$

$$Y_2 = -\frac{m_1}{m_2 + m_1} \mathbf{r} (\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I) \quad (2.40)$$

$$Z_2 = -\frac{m_1}{m_2 + m_1} \mathbf{r} \sin(\omega + f) \sin I. \quad (2.41)$$

E desta forma temos cada corpo orbitando o centro de massa. E como ambas estão em movimento elíptico, o semieixo maior da elipse da estrela a_1 e o da elipse do planeta a_2 seguem análogas as equações 2.34 e 2.35:

$$a_1 = \frac{m_2}{m_2 + m_1} a \quad (2.42)$$

e

$$a_2 = \frac{m_1}{m_2 + m_1} a. \quad (2.43)$$

Até aqui, tratamos o movimento planetário em termos do ângulo f , a anomalia verdadeira. Isso pode ser um pouco abstrato, pensar em termos de tempo tende a ser mais intuitivo. Então cabe explorar a relação entre f e tempo t .

Pensar como f varia com o tempo pode ser definido como $\frac{df}{dt}$. Considerando a equação 2.13 com o h vindo da equação 2.25, o r da equação 2.24 e $f = \theta - \varpi$:

$$\begin{aligned} \underbrace{h = r^2 \dot{\theta}}_{\text{equação 2.13}} &\Rightarrow \sqrt{a(1-e^2)G(m_1+m_2)} = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1+e \cos f)^2} \dot{f} \\ \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a^3}} &= \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos f)^2} \underbrace{\dot{f}}_{\frac{df}{dt}} \\ \frac{dt}{df} &= \sqrt{\frac{a^3}{G(m_1+m_2)} \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos f)^2}} \\ &\quad \sqrt{\frac{P^2}{4\pi^2} \text{ da equação 2.27}} \\ \frac{dt}{df} &= \frac{P}{2\pi} \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos f)^2} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Podemos também derivar como a posição radial muda com o tempo ($\frac{dr}{dt}$), em outras palavras, a velocidade. Começando com a primeira lei de Kepler (equação 2.24), diferenciando:

$$r = \underbrace{\frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f}}_{\text{da eq. 2.24}} \Rightarrow \dot{r} = \frac{a(1-e^2)e \operatorname{sen} f}{(1+e \operatorname{sen} f)^2} \dot{f}, \quad (2.45)$$

e considerando o \dot{f} oriundo da equação 2.44:

$$\dot{r} = \frac{a(1-e^2)e \operatorname{sen} f}{(1+e \operatorname{sen} f)^2} \frac{2\pi}{P} \frac{(1+e \cos f)^2}{(1-e^2)^{3/2}}$$

O termo $\frac{2\pi}{P}$ é chamado de **movimento médio** n , então:

$$\dot{r} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} e \operatorname{sen} f. \quad (2.46)$$

É possível assumir algumas conclusões à partir da equação 2.45 da seguinte forma:

$$\dot{r} = \frac{a(1-e^2)e \operatorname{sen} f}{(1+e \operatorname{sen} f)^2} \dot{f} \Rightarrow \dot{r} = \frac{r \dot{f} e \operatorname{sen} f}{1+e \cos f} \Rightarrow r \dot{f} = \dot{r} \frac{1+e \cos f}{e \operatorname{sen} f},$$

e usando o \dot{r} da equação 2.46:

$$r \dot{f} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} e \cos f \frac{1+e \cos f}{e \operatorname{sen} f}$$

$$r\dot{f} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(1 + e \cos f). \quad (2.47)$$

Como velocidade v é \dot{r} , então

$$v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

Lembrando da expansão das coordenadas polares para \dot{r} (as equações 2.7 e 2.8):

$$v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2. \quad (2.48)$$

A equação 2.46 pode ser usada no termo \dot{r}^2 e a eq. 2.47 no termo $r^2 \dot{f}^2$:

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{n^2 a^2}{1-e^2} e^2 \sin^2 f + \frac{n^2 a^2}{1-e^2} (1 + e \cos f)^2 \\ &= \frac{n^2 a^2}{1-e^2} (e^2 \sin^2 f + 1 + e^2 \cos^2 f + 2e \cos f) \\ &= \frac{n^2 a^2}{1-e^2} (1 + e^2 \underbrace{(\sin^2 f + \cos^2 f)}_{= 1 \text{ (id. trigon.)}} + 2e \cos f) \\ &= \frac{n^2 a^2}{1-e^2} (\underbrace{1}_{= 2-1} + 2e \cos f + e^2) \\ &= \frac{n^2 a^2}{1-e^2} (2 + 2e \cos f - 1 + e^2) \end{aligned}$$

e aproveitando alguns termos da equação 2.24:

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{n^2 a^2}{1-e^2} \left(\frac{2a(1-e^2)}{r} - (1-e^2) \right) \\ &= n^2 a^2 \left(\frac{2a}{r} - 1 \right). \end{aligned}$$

Da terceira lei de Kepler (equação 2.27) temos que:

$$\frac{P^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{G(m_1 + m_2)} \Rightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}$$

então a velocidade planetária é:

$$v^2 = G(m_1 + m_2) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (2.49)$$

A descrição de um sistema de f para t pode-se dar à partir da equação 2.48. Se reescrevê-la usando as equações 2.47 e 2.49:

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2 \\ \dot{r}^2 &= \underbrace{v^2}_{\text{eq. 2.49}} + \underbrace{r^2 \dot{f}^2}_{\text{eq. 2.47}} \\ \dot{r}^2 &= G(m_1 + m_2) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{a^2 n^2}{1-e^2} (1 + e \cos f)^2. \end{aligned}$$

E como os termos $G(m_1 + m_2)$ e $1 + e \cos f$ estão também nas equações 2.27 e 2.24 temos respectivamente:

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= n^2 a^3 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{a^2 n^2}{1 - e^2} \left(\frac{a}{r} (1 - e^2) \right)^2 \\ &= n^2 a^3 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{n^2 a^4 (1 - e^2)}{r^2} \\ \dot{r} &= \frac{na}{r} \sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Seja $\cos E = \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f}$. Então:

$$\underbrace{r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}}_{\text{eq. 2.24}} \Rightarrow r = a(1 - e \cos E) \Rightarrow \dot{r} = \dot{E} a e \sin E$$

e usando-a na equação 2.50 obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{E} a e \sin E &= \frac{n a}{a(1 - e \cos E)} \sqrt{a^2 e^2 - a^2 (1 - e \cos E)^2} \\ &= \frac{n}{(1 - e \cos E)} \sqrt{a^2 e^2 - a^2 e^2 \cos^2 E} \\ &= \frac{n}{(1 - e \cos E)} \sqrt{a^2 e^2 \sin^2 E} \\ \dot{E} a e \sin E &= \frac{n}{(1 - e \cos E)} a e \sin E \\ \dot{E} &= \frac{n}{1 - e \cos E}. \end{aligned}$$

Se integrarmos com respeito ao tempo temos:

$$n(t - \tau) = E - e \sin E. \quad (2.51)$$

O termo $E - e \sin E$ é a **anomalia média** M , também conhecido como Equação de Kepler, que relaciona a anomalia média com a anomalia excêntrica.

A forma de tornar os tempos em anomalias excêntricas que tem sido usado é:

1. Obter M em $M = n(t - \tau)$;
2. Obter E em $M = E - e \sin E$:
 - (a) Uso de uma abordagem numérica iterativa em $g(E) = E - e \sin E - M$;
 - (b) Método de Newton:

$$E_{i+1} = E_i - \frac{g(E_i)}{\left. \frac{dg}{dE} \right|_{E = E_i}}$$

converge para todo $0 < e < 1$:

$$E_{i+1} = E_i - \frac{E_i - e \sin E_i - M_i}{1 - e \cos E_i}$$

3. Obter f em

$$\cos E = \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f}$$

rearranjado em:

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (2.52)$$

Neste trabalho, iremos nos delimitar a sistemas que possuem um planeta orbitando uma estrela, cujo plano orbital esteja inclinado em relação ao plano referência.

2.3.1 Métodos numéricos iterativos

Para [3], "o método de Newton-Raphson é um dos métodos numéricos mais poderosos e bem conhecidos para solução de problemas de encontrar raízes".

Suponha que g pertença à classe C^2 . Seja $E_0 \in [a, b]$ uma aproximação de E considerando $g'(E_0) \neq 0$ e $|E - E_0|$ seja "pequeno". Consideramos o primeiro polinômio de Taylor para $g(x)$ expandido em torno de E_0 e avaliado em $x = E$.

$$g(E) = g(E_0) + (E - E_0)g'(E_0) + \frac{(E - E_0)^2}{2}g''(\xi(E)),$$

onde $\xi(E)$ está entre E e E_0 . Como desejamos encontrar a raiz, $g(E) = 0$:

$$0 = g(E_0) + (E - E_0)g'(E_0) + \frac{(E - E_0)^2}{2}g''(\xi(E)).$$

Como $|E - E_0|$ é pequeno, $(E - E_0)^2$ é muito menor então

$$0 \approx g(E_0) + (E - E_0)g'(E_0).$$

A solução de E resulta

$$E \approx E_0 - \frac{g(E_0)}{g'(E_0)} \equiv E_1.$$

Isto prepara o terreno para o método de Newton, que começa com um chute inicial E_0 e gera a sequência $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ por

$$E_{i+1} = E_i - \frac{g(E_i)}{g'(E_i)}, \text{ para } i = 0, 1, \dots \quad (2.53)$$

onde $g'(E_i)$

$$\frac{dg}{dE_i} = 1 - e \cos E_i.$$

3 Velocidade radial

3.1 Equação da velocidade radial $v_r(t)$

[2] e [9] citam que atualmente detecta-se exoplanetas com os seguintes métodos:

- Trânsito: procura de sombras quando um planeta passa entre a estrela e a Terra (observador);
- Curvas de Velocidade Radial (Doppler): observa-se a oscilação da estrela causada pelo efeito Doppler;
- Microlenteamento gravitacional: a luz de uma estrela é desviada e focalizada pela gravidade quando um planeta passa entre a estrela e a Terra (observador);
- Interferometria estelar: imagem direta do planeta reduzindo-se o excesso de brilho da estrela quando um planeta passa entre a estrela e a Terra (observador);
- Astrometria: observa-se a oscilação da estrela em relação a estrelas próximas no céu.

A NASA confirma a existência de 5483 exoplanetas e 9770 candidatos a serem confirmados [9]. Trânsito é atualmente a técnica com mais descobertas, com 74,8% dos planetas; 19,1% dos planetas foram descobertos com velocidade radial; 3,7% por microlenteamento; 1,2% com imagem direta; 0,04% por astrometria; e ainda 1,16% por diferentes outros métodos [9]. Temos que a utilização de apenas uma técnica não gera todos os parâmetros desejados, então, mesmo que 74,8% dos planetas foram descobertos por trânsito, para obter outros parâmetros, é comum complementar o trabalho com velocidade radial.

Observe que os métodos trânsito, microlenteamento gravitacional e interferometria estelar dependem de um planeta passando na frente da estrela. O método astrometria é uma técnica que requer alta precisão e é possível que o plano da órbita coincida com o plano de referência da própria observação, o que não é o caso para velocidade radial, que depende do movimento periódico da estrela ao redor do centro de massa do sistema formado por esta estrela e seu hipotético planeta, portanto, para este método, é necessária a existência de inclinação entre os dois planos.

Seja a figura 3.1 uma representação de uma observação por telescópio de uma órbita com excentricidade próxima de zero, podendo estar em um plano XY e sem inclinação. Uma observação nestas condições não seria possível com o método velocidade radial (seria possível com astrometria). Este trabalho limitar-se-á a estudos de órbitas que tenham inclinação no plano orbital afim de aplicar métodos numéricos no modelo velocidade radial e não dependem de um evento (tal como a passagem de um planeta na linha de visada).

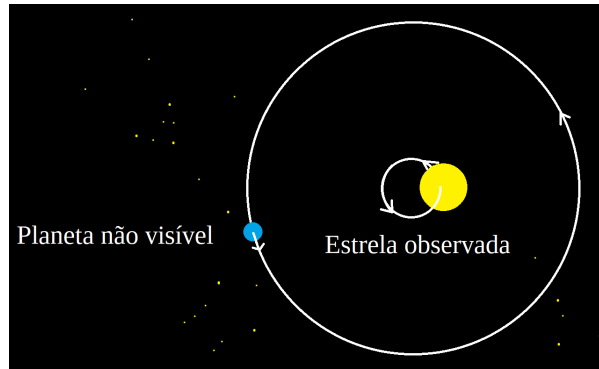


Figura 3.1: Plano orbital perpendicular à linha de visada.

Sendo assim, observando-se uma estrela com um telescópio, há a possibilidade de enxergá-la na cor vermelha, azul ou branca. Isto é devido ao efeito *Doppler*, que quando uma fonte de luz branca (tal como uma estrela) está a uma velocidade suficientemente alta se aproximando do observador, ele verá a luz desviar para o azul, e se, ao contrário, a luz estiver se afastando, irá desviar para o vermelho.

O comportamento da estrela pode revelar indício de que há um corpo que com ela interage, podendo ser um planeta orbitando-a. A gravidade do planeta causa o movimento da estrela, conforme deduzido no capítulo anterior.

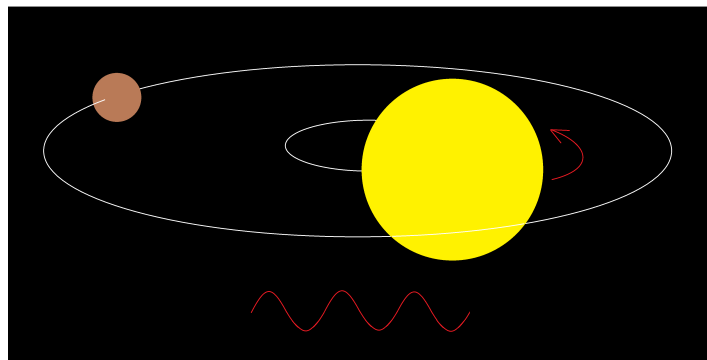


Figura 3.2: Estrela se afasta do observador

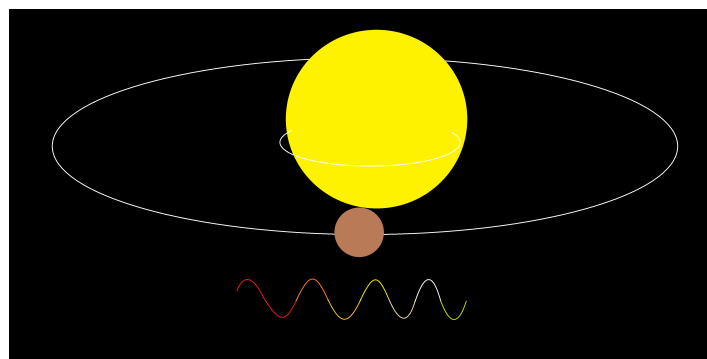


Figura 3.3: Velocidade radial próxima de zero

Levando em consideração as equações que descrevem as posições baricêntricas da estrela e do planeta (as eq. de 2.36 a 2.41), a que importa aqui é a equação 2.38, e há que se considerar as convenções à seguir:

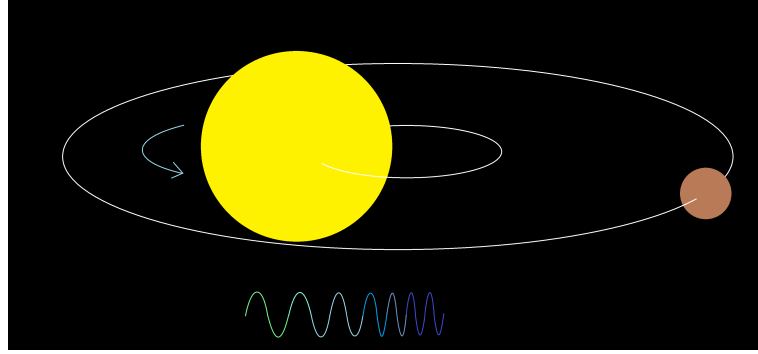


Figura 3.4: Estrela se aproxima do observador

- Velocidade radial é definida como $-\frac{dZ}{dt}$;
- Com um espectroscópio, é possível medir o comprimento de onda da luz, e a comunidade astronômica convencionou que quando o objeto está **se afastando** do observador, assume-se um valor de velocidade radial **positivo**, e quando **se aproxima**, será um valor **negativo** para a velocidade radial;
- γ é uma constante, a velocidade da estrela essencialmente vagando pela galáxia em

$$v_r(t) = \gamma - \frac{dZ_1}{dt}. \quad (3.1)$$

O termo r da equação 2.38 representa a separação planeta-estrela e foi determinada na equação 2.24 onde:

$$Z_1(f) = a(1 - e^2) \frac{m_2 \operatorname{sen} I \operatorname{sen}(\omega + f)}{m_1 + m_2 (1 + e \cos f)},$$

usando a regra da cadeia na eq. 3.1:

$$\begin{aligned} v_r(t) &= \gamma - \frac{dZ_1}{df} \underbrace{\frac{df}{dt}}_{\text{(eq. 2.44)}} \\ &= \gamma - \frac{dZ_1}{df} \frac{2\pi}{P} \frac{(1 + e \cos f)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

com:

$$\begin{aligned} \frac{dZ_1}{df} &= \frac{d}{df} \left[a(1 - e^2) \frac{m_2 \operatorname{sen} I \operatorname{sen}(\omega + f)}{m_1 + m_2 (1 + e \cos f)} \right] \\ &= \frac{(am_2 \operatorname{sen} I) \cos(\omega + f)(1 + e \cos f)^2 + e \operatorname{sen}(\omega + f) \operatorname{sen} f}{m_1 + m_2 (1 + e \cos f)^2} \end{aligned}$$

e de volta à função $v_r(t)$:

$$v_r(t) = \gamma + K(e \cos \omega + \cos(f(t) + \omega)) \quad (3.2)$$

onde, conforme [5]:

$$K = \frac{2\pi a m_2 \operatorname{sen} I}{P (m_1 + m_2)} (1 - e^2)^{-1/2}$$

e a definição de cada elemento é:

- $v_r(t)$ é a velocidade radial em um determinado tempo t ;
- γ é a constante que representa a velocidade da estrela vagando pelo espaço;
- K é a semi-amplitude;
- ω é o argumento do periastro;
- e é a excentricidade orbital;
- $f(t)$ é a anomalia verdadeira.

Usando a terceira lei de Kepler para relacionar a com P :

$$K = \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{1/3} \frac{m_2 \sin I}{(m_1 + m_2)^{2/3}} (1 - e^2)^{-1/2}$$

desta forma temos que G é conhecido e P e e podem ser obtidos pelo ajuste de curva de Velocidade Radial.

A constante γ vem da equação 3.1 e continua no modelo 3.2. Pode ser determinado pelo método dos mínimos quadrados e depende, por exemplo, do observatório que fez as medidas.

A semi-amplitude K é outro parâmetro do modelo da velocidade radial. Ela representa a metade da amplitude da variação da velocidade radial da estrela devido à presença do planeta. Em outras palavras, K é projetada segundo a linha de visão que a estrela atinge durante sua órbita em torno do centro de massa do sistema planetário. Assim como a velocidade radial média γ , a semi-amplitude K é um parâmetro que pode ser estimado a partir das velocidades radiais observadas e pode ser encontrado via ajuste de curvas. A sua estimativa depende não só da velocidade da estrela em relação ao observador, mas também da massa do planeta e da sua distância à estrela. Por essa razão, a semi-amplitude é uma quantidade muito sensível às propriedades do sistema planetário e, em particular, ao período orbital e à excentricidade da órbita.

O ângulo ω representa a posição do periastro como o ponto mais próximo da estrela em relação à direção de um ponto de referência no plano do céu. Portanto, ele pode variar de 0 a 360 graus, dependendo da orientação do plano orbital em relação à linha de visada da Terra.

A excentricidade orbital e é uma medida da forma da órbita de um corpo em torno de outro. Ela é definida como a razão entre a distância entre os focos da elipse (que descreve a órbita) e o comprimento do eixo maior da elipse. Assim, a excentricidade é um número entre 0 e 1, onde 0 indica uma órbita circular e 1 indica uma órbita parabólica.

A anomalia verdadeira f da eq. 3.2 é definida como o ângulo entre o periastro (ponto de menor distância) e a posição atual do objeto, medido a partir do foco da elipse, conforme o capítulo anterior. A função $f(t)$ pode ser obtida pela equação 2.52:

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \Rightarrow f(t) = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E(t)}{2} \right). \quad (3.3)$$

3.2 Séries temporais de sinais de velocidade radial

Os dados de velocidade radial utilizados neste trabalho foram retirados do catálogo astronômico da NASA Exoplanet Archive e são de domínio público. Os observadores

geralmente anotam data da observação em dias julianos, a velocidade e a incerteza em m/s . Os elementos orbitais são obtidos começando com uma estimativa inicial e com métodos numéricos aproximam os valores a fim de alcançar o valor real. À seguir um exemplo de dados analisados por [32]:

Tempo (dias julianos - 2400000)	Velocidade radial (km/s)	Incerteza (m/s)
53152.4773	-37.821	0.010
53154.4825	-37.837	0.08
53218.3605	-37.858	0.010
53520.4238	-37.928	0.013
53536.4140	-37.875	0.010
53576.3681	-37.859	0.012
53596.3805	-37.818	0.014
53807.6666	-37.727	0.025
53808.6537	-37.755	0.011
53809.6643	-37.742	0.011
53869.5117	-37.779	0.011
53870.4406	-37.771	0.007
53873.4386	-37.768	0.009
53895.4251	-37.757	0.009
53896.4387	-37.745	0.012
53899.4286	-37.743	0.019
53900.4376	-37.770	0.013
54080.7252	-37.718	0.003
54173.6848	-37.752	0.004
54187.6332	-37.770	0.004
54230.5803	-37.790	0.004

Tabela 3.1: Velocidades radiais de HD 132406 b. Fonte: [32]

Dias julianos, ou data juliana, é comumente usado por astrônomos. É uma forma de contar os dias sequencialmente para facilitar a determinação do número de dias ao invés de fazer conversões e rotinas que se tornam complexas devido ao agrupamento dos dias em meses ou ano bissexto do calendário gregoriano. A contagem dos dias julianos inicia em 1º de janeiro de 4713 a.C. 12:00. Outro fato comum é encontrar dia juliano $DJ - 2400000$ ou $DJ - 2450000$ nas tabelas, para fins de abreviação ou facilitar a geração de gráficos (como o gráfico 3.5). A tabela 3.1 mostra que as observações se iniciaram em 2453152.4773 (ou em 26/05/2004 às 23:27) e foi até 2454230.5803 (ou 09/05/2007 à 1:58).

O gráfico 3.5 nos mostra os dados coletados (os valores da tabela 3.1 representados nos pontos vermelhos e azuis) por [32] que chegaram nos valores dos elementos orbitais da tabela 3.2 utilizados para traçar a função que melhor se ajustou aos dados. É comum haver atualização de valores dos elementos orbitais em trabalhos posteriores. Este planeta também foi pesquisado por [34] e [37].

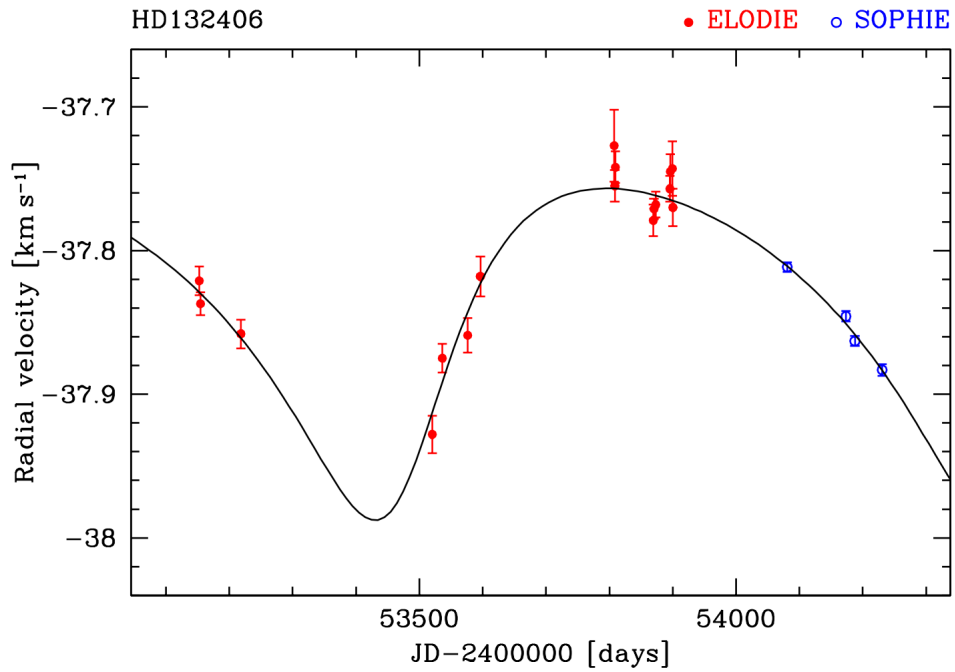


Figura 3.5: Função e dados da tabela 3.1. ELODIE e SOPHIE são os instrumentos utilizados para coleta de dados. Fonte: [32]

Elemento orbital	Valor	Un. de medida
P	974	[dias]
e	0.34	
γ	-37.84	$[\text{km s}^{-1}]$
ω	214	[graus]
K	115	$[\text{m s}^{-1}]$
τ	53474	$[\text{JD} - 2400000]$

Tabela 3.2: Elementos orbitais de HD 132406 b. Fonte: [32]

4 Periodograma

O método de detecção Velocidade radial faz uso da espectrometria e efeito Doppler. Neste método suas observações geram dados, que podemos chamar de sinais. Para [4], qualquer valor quantificável que varia no tempo ou espaço pode ser usado como sinal que compartilha mensagem entre observadores. Para nós é uma variável funcionalmente dependente do tempo, $y = y(t)$ de um sistema estelar, em que o exoplaneta "compartilha" sua órbita para nós, os observadores. O processamento destes sinais envolve estimação espectral do sinal, ou em outras palavras, o periodograma. Neste capítulo iremos discutir dois métodos numéricos para estimar a densidade espectral de potência: a transformada discreta de Fourier (TDF) e o método Lomb-Scargle, que é baseado na TDF e utilizado neste trabalho para estimar o período P das órbitas.

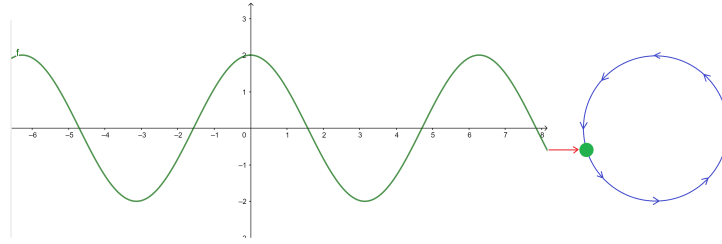


Figura 4.1: A órbita de um corpo gera sinal para um observador

Como não temos uma descrição completa, pois dispomos de um segmento finito de N_0 amostras (observações), podemos calcular apenas uma aproximação do espectro de potências. Temos que o sinal da velocidade radial $y(t)$ expressa o movimento periódico da órbita, e está representando em uma série temporal de dados. Ele passa por uma representação no domínio da frequência, o que nos permite analisar propriedades espectrais, entrando em cena o periodograma, isto é, um método que estima pela potência de cada frequência um sinal, que nos mostra picos no espectro de potências, aparecendo a frequência fundamental — o que nos leva ao período — e os harmônicos.

4.1 Transformada Discreta de Fourier

Velocidade radial de uma estrela pode ser representada por uma série de senos e cossenos, também chamada de série de Fourier. A figura 4.1 ilustra esta representação.

A série de Fourier representada na função $y(t)$ é uma série trigonométrica que assume a forma:

$$y(t) = \frac{c}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi t}{P}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi t}{P}\right) \right) \quad (4.1)$$

onde P é o período fundamental. Como as órbitas são periódicas, a função $y(t)$ com um período P é periódica, então:

$$y(t + P) = y(t)$$

para todo t .

A transformada discreta de Fourier é uma função matemática que converte um sinal do domínio do tempo para o domínio da frequência. Suponha um conjunto de N_0 dados $y(t_i), i = 1, 2, \dots, N_0$. [31] definiu a transformada como:

$$TDF_y(n) = \sum_{j=1}^{N_0} y(t_j) \exp\{-int_j\} \quad (4.2)$$

onde n é a frequência fundamental. Temos que $\exp\{-int\}$ pode ser representada de uma outra forma conforme a identidade de Euler que é dada por:

$$\exp\{iy\} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

e se substituirmos esta identidade na fórmula TDF (eq. 4.2) temos:

$$TDF_y(n) = \sum_{j=1}^{N_0} y(t_j) [\cos(nt_j) - i \operatorname{sen}(nt_j)]. \quad (4.3)$$

[31] relacionou a TDF ao periodograma pela equação 4.3 e propõe o seguinte:

$$\begin{aligned} TDF_y(n) &= \sum_{j=1}^{N_0} y(t_j) [\cos(nt_j) - i \operatorname{sen}(nt_j)] \\ &= \sum_{j=1}^{N_0} y(t_j) [A \cos(nt_j) + iB \operatorname{sen}(nt_j)] \end{aligned}$$

com os coeficientes A e B ainda não especificados, e chama de periodograma clássico:

$$p_y(n) = \frac{1}{N_0} [TDF_y(n)]^2$$

e assim o periodograma correspondente é:

$$p_y(n) = \frac{A}{N_0} \left[\left(\sum_{j=1}^{N_0} y(t_j) \cos(nt_j) \right)^2 \right] + \frac{B}{N_0} \left[\left(\sum_{j=1}^{N_0} y(t_j) \operatorname{sen}(nt_j) \right)^2 \right].$$

Se os coeficientes $A = B = (1/N_0)^{1/2}$ temos:

$$p_y(n) = A^2 \left[\sum_{j=1}^{N_0} y(t_j) \cos(nt_j) \right]^2 + B^2 \left[\sum_{j=1}^{N_0} y(t_j) \operatorname{sen}(nt_j) \right]^2.$$

Como A e B são arbitrários, supomos um $Q(n) = 1$ onde:

$$A(n) = Q(n) \left(\sum_{j=1}^{N_0} \cos^2(nt_j) \right)^{-1/2}$$

$$B(n) = Q(n) \left(\sum_{j=1}^{N_0} \text{sen}^2(nt_j) \right)^{-1/2}.$$

O resultado do periodograma seria:

$$p_y(n) = \left[\frac{\left(\sum_{j=1}^{N_0} y_j \cos(nt_j) \right)^2}{\sum_{j=1}^{N_0} \cos^2(nt_j)} + \frac{\left(\sum_{j=1}^{N_0} y_j \text{sen}(nt_j) \right)^2}{\sum_{j=1}^{N_0} \text{sen}^2(nt_j)} \right], \quad (4.4)$$

mas necessita que os momentos das observações sejam igualmente espaçados pois se trata de uma transformação linear. Seria suficiente para usos em fenômenos físicos como ondas sonoras, ondas eletromagnéticas, ou na eletrônica, processamento de sinais... onde é possível controlar o ambiente. Na astronomia via velocidade radial, obter observações em momentos igualmente espaçados é muito difícil, sendo necessário um modelo robusto a dados não equidistantes. Em vista disto, Nick R. Lomb e Jeffrey D. Scargle pesquisaram uma forma de se obter as frequências conforme a seção à seguir.

4.2 Lomb-Scargle

Na prática, muitos astrônomos utilizam o método Velocidade Radial. Mas geralmente há alguns desafios que os astrônomos enfrentam, como por exemplo:

- Só é possível observar as estrelas à noite;
- Dificuldades relacionadas às condições climáticas, como por exemplo, tempo nublado;
- "Poluição luminosa de grandes cidades faz estrelas 'desaparecerem' do céu e pesquisas minguarem", segundo [33];
- O tempo de observação em telescópios terrestres pode ser frequentemente disputado, com muitos pesquisadores competindo para obter tempo de observação em equipamentos de ponta.

Sendo assim, os dados são coletados em momentos não uniformemente espaçados, e deve-se levar isso em conta ao pensar formas matemáticas de se estimar as características orbitais. [18] e [31] citam o uso de análise de periodograma para obter estimativas do período, assim como de outros valores que são importantes para estimar alguns outros elementos orbitais, e com base no estudo deles, o algoritmo Lomb-Scargle é o mais conhecido para lidar com detecção e caracterização de sinais periódicos em séries temporais com amostragem espaçadas desigualmente.

Partindo da terceira lei de Kepler 2.27 para se obter o período P :

$$\frac{P^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{G(m_1 + m_2)} \Rightarrow P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}},$$

mas não temos a m_1 , m_2 e nem a (o semieixo maior). [18] e [31] fazem uso de teste de hipótese estatístico à partir da melhor probabilidade de uma frequência ν . Neste método, utilizamos um vetor de frequências que é construído a partir do intervalo de observação

e da resolução desejada. É necessário também definir uma resolução que determina a densidade de frequência desejada.

Um vetor de frequências é construído como uma série de frequências igualmente espaçadas, que variam de um mínimo definido pela resolução desejada até um máximo definido pelo período mínimo observado. Para obter o vetor de frequências precisamos delimitar uma janela e usamos os tempos \mathbf{t} com N observações:

$$\Delta t = t_N - t_1$$

onde t_N é o tempo da última observação e t_1 é o tempo da primeira observação. Uma vez construído \mathbf{f} — cujos detalhes estão na subseção 4.2.1 **Configurando o vetor de frequências** — não temos pista de qual das frequências é a fundamental, e o periodograma testa cada uma delas igualmente e não correlacionadas. Assim, dizemos que as frequências do grid são independentes e igualmente distribuídas (iid). Destas frequências, precisamos ver qual delas aproxima os dados ao modelo função da órbita, que por ora, utilizaremos a baseada na série de Fourier (eq. 4.1):

$$y(t) = a \cos(2\pi\nu t) + b \sin(2\pi\nu t) + c, \quad (4.5)$$

onde os coeficientes a , b e c são obtidos pelo método dos mínimos quadrados, que será detalhado no próximo capítulo, e para cada frequência do vetor de frequências, obtemos uma potência.

Na verdade, a frequência a ser selecionada é a que minimiza a diferença quadrática entre o dado y_i e a função $y(t)$ da equação 4.5, baseada no valor de potência conforme a seguinte equação:

$$p(n) = \frac{\chi_0^2 - \chi^2(n)}{\chi_0^2} \quad (4.6)$$

com $n = 2\pi\nu$. Do teste qui-quadrado temos:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_0} \frac{[y_i - y(t_i)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.7)$$

e

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{N_0} \frac{[y_i - \bar{y}]^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.8)$$

assumindo que as incertezas σ_i são gaussianas, ou seja, segue a distribuição normal. Para χ^2 , [38] propõe $W = \sum \frac{1}{\sigma_i^2}$, e temos a eq. 4.7 reescrito assim:

$$\chi^2 = W \sum_{i=1}^{N_0} w_i [y_i - y(t_i)]^2, \quad (4.9)$$

com:

$$w_i = \frac{1}{W} \frac{1}{\sigma_i^2},$$

pesos normalizados (logo, $\sum w_i = 1$). Considerando os somatórios abreviados:

$$Y = \sum_{i=1}^{N_0} w_i y_i,$$

$$Y\hat{Y} = \sum_{i=1}^{N_0} w_i y_i^2,$$

e

$$YY = Y\hat{Y} - Y \cdot Y$$

temos

$$\chi_0^2 = W \cdot YY \quad (4.10)$$

que é um qui-quadrado que [38] apresenta se baseando na soma ponderada dos quadrados dos desvios (σ_i^2) das médias ponderadas, ou seja, o χ_0^2 não considera nenhum modelo, apenas os erros σ_i da própria coleta. Em outras palavras, o χ_0^2 é uma referência para comparar com cada $\chi^2(n_j)$ oriundo do vetor de frequências \mathbf{f} ($n_j = 2\pi\nu_j$).

Assim, com o vetor de potências \mathbf{p} oriundo da equação 4.6, queremos a potência ótima $p_{ótima} = \max\{\mathbf{p}\}$, e assim obtemos uma frequência $\nu_{ótima}$, que servirá de referência para obtermos os coeficientes a , b e c na equação 4.5, que será melhor detalhado na seção 4.4.

4.2.1 Configurando o vetor de frequências

Se considerarmos dados igualmente espaçados, quanto menor for o espaçamento entre os dados melhores são as chances de identificar a frequência do sinal, pois com a alta resolução haverá um melhor ajuste revelando-a na transformada de Fourier. A configuração de \mathbf{f} tem base nesta situação mas a realidade de dados espaçados irregularmente invalida esta técnica, então ela foi se adaptando com o tempo.

Conceitualmente \mathbf{f} é contínuo, e para estimação prática do período fundamental P ($P = 1/\nu_{ótima}$) precisamos discretizá-lo com atenção. [36] cogita que estes valores são frequentemente ignorados nos papers por que são simples escolhas para o pesquisador, que está muito familiarizado com os dados. Sendo assim, iremos detalhar a construção e ajuste do vetor de frequências.

Período pode ser definido como:

$$P = \frac{\Delta t}{o}$$

com o sendo o número de oscilações. Como temos que P é o inverso da frequência:

$$\nu = \frac{o}{\Delta t}$$

então é adequado termos como frequência mínima um ciclo oscilatório completo ($o = 1$):

$$\nu_{\min} = \frac{1}{\Delta t}$$

e para a frequência máxima, uma regra prática é utilizar a frequência de Nyquist:

$$\nu_{\max} = \frac{N}{2\Delta t}$$

com resolução de frequência (o tamanho de passo entre as frequências):

$$\delta\nu = \nu_{\min}.$$

Temos que é possível recuperar o sinal original com teorema de Nyquist, que diz que a frequência de amostragem deve ser maior que duas vezes a frequência máxima do sinal a ser amostrado.

Teorema 4.1 (Teorema de Nyquist). *Admite-se que $x(t) \xrightarrow{TDF} X(jn)$ represente um sinal de faixa limitada, de forma que $X(jn) = 0$ para $|n| = n_m$. Se um $n_s > 2n_m$ em que $n_s = 2\pi/P_s$ e n_m é a frequência máxima presente no sinal, então $x(t)$ é unicamente determinado por suas amostras $x(qP_s)$, $-\infty < q < +\infty$.*

Assim, $\nu_m = n_m/2\pi$ e $\nu_s = 1/P_s > 2\nu_m$ satisfaz o teorema. Mas como no nosso caso o periodograma é espaçado desigualmente a amostragem de frequências deve ser muito maior que duas vezes, então, conforme [36], "(...) é prudente exceder amostragem (...)"(oversampling) ajustando o alcance e a resolução do vetor. Para termos a frequência máxima ajustada, temos o chamado fator de Nyquist η :

$$\nu_{\max} = \frac{\eta N}{2\Delta t}$$

e a resolução de frequência ajustada com o tamanho do passo com amostras por pico λ :

$$\delta\nu = \frac{1}{\lambda\Delta t}.$$

Assim, quanto maior for η , maior será a quantidade de frequências em \mathbf{f} , e quanto maior for λ , menor será o tamanho do passo $\delta\nu$, logo, alta resolução. Segundo [36], os valores mais comuns para ambos vão de 5 a 10 e o tamanho de \mathbf{f} tem alta variação a depender do conjunto de dados de entrada. A escolha destes valores depende da situação do usuário: se o conjunto de dados for muito grande, talvez seja interessante diminuir os valores (devido a recursos computacionais limitados/disponíveis), mas se diminuir demais os valores terão pouca precisão ou os resultados são afetados por flutuações; se o conjunto de dados gerar um periodograma com muito ruído, recomendamos aumentar os valores para aumentar a chance de encontrarmos a frequência com a maior potência. Passaremos por esta situação no capítulo 5 **Aplicação prática nos dados de velocidade radial**.

4.3 Probabilidade de falso alarme

Mesmo que o grid de frequências tenha sido configurado de forma a perder justamente o pico mais importante do periodograma, será informado uma potência de frequência de ruído. Logo, temos que avaliar se o periodograma p é um falso alarme, em outras palavras, indicar se um evento é considerado significativo quando, na verdade, não é — pela figura 4.2 podemos notar que há casos de picos locais que podem nos confundir.

Quando as observações geram um periodograma mais ruidoso precisamos verificar se $\nu_{ótima}$ é um falso alarme. Estatisticamente falando, podemos assumir duas hipóteses: a hipótese H_0 em que os dados são apenas ruídos, em outras palavras, as observações incorporam apenas erros gaussianos e não correlacionados de média zero; ou a hipótese H_1 em que existe sinal entre ruídos, e a frequência n_i no modelo representa uma significância. Pelo periodograma 4.6, fazemos teste de hipótese em cada frequência e interpretamos p da seguinte forma:

$$p(n_i) = \frac{\chi_{H_0}^2 - \chi_{H_1}^2(n_i)}{\chi_{H_0}^2}.$$

O ruído nos dados que produz flutuações no periodograma que apresenta picos locais, mas nem sempre estão relacionados às periodicidades reais. Há a necessidade de testá-los, calculando a probabilidade do $p(n)$ surgir de puro ruído. [31] cita que é desejável encontrar

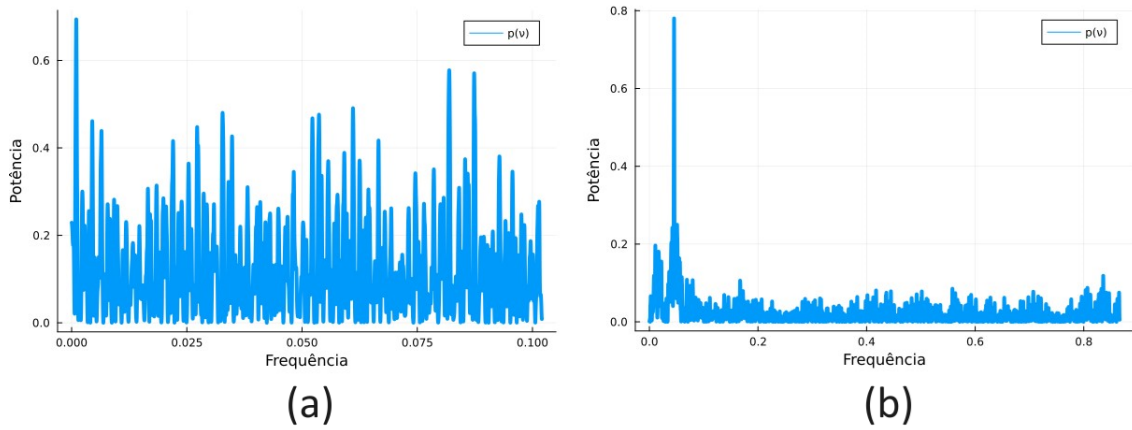


Figura 4.2: Comparação dos periodogramas de (a) HD 10647b e de (b) HD 6434b: $\nu_{ótima}$ de (b) HD 6434b está mais evidente se comparado com $\nu_{ótima}$ de (a) HD 10647b.

um nível de potência p_0 tal que se clamarmos a detecção de sinal só porque o periodograma $p(n)$ ultrapassou p_0 estaremos errados, pois fomos enganados pelas flutuações.

A técnica para probabilidade de falso alarme (FAP) se baseia em gerar várias amostras $z(n)$ que são periodogramas dos dados que utilizamos para obter $p(n_{ótima})$ porém embaralhados (portanto, ruidosos), e testamos a probabilidade de $z(n_{ótima})$ exceder um certo nível de potência p_0 . Na prática, podemos repetir a análise Lomb-Scargle um k grande número de vezes, mas com os sinais y e desvios σ embaralhados a cada repetição gerando $z_1(n), z_2(n), \dots, z_k(n)$; contamos quantas q vezes ocorreu de o maior pico simulado ter ultrapassado a potência p_0 e teremos $FAP = q/k$; esta técnica é conhecida como bootstrap. Bootstrapping é uma técnica considerada confiável mas consome muito tempo e recurso de processamento computacional. Então há autores que desenvolveram outros métodos para calcular FAP , sem ter que gerar amostras a serem processadas na análise.

Segundo [38], FAP é dado por:

$$FAP = 1 - [1 - Prob(z > p_0)]^M \tag{4.11}$$

onde $Prob(z > p_0)$ é a probabilidade que a potência de uma amostra z exceder o limiar específico p_0 que estamos testando e $M = \Delta\nu \cdot \Delta t$ é o número de frequências testadas em uma série temporal, onde $\Delta\nu = \nu_{\max} - \nu_{\min}$ e $\Delta t = t_N - t_1$. [1] (no §26.5) utiliza o teorema 4.2 para definir $Prob(z > p_0)$.

Teorema 4.2 (Teorema da relação qui-quadrado e função beta). *Seja X e Y variáveis aleatórias e independentes que seguem a distribuição qui-quadrado:*

$$X \sim \chi_{g_x}(n_x)$$

e

$$Y \sim \chi_{g_y}(n_y)$$

com graus de liberdade g_x e g_y respectivamente então $\frac{X^2}{X^2+Y^2}$ segue a distribuição Beta e tem a função de distribuição:

$$Prob\left(\frac{X^2}{X^2+Y^2} \leq p_0\right) = I_{p_0}\left(\frac{g_x}{2}, \frac{g_y}{2}\right)$$

onde $I_{p_0}(a, b)$ é a função Beta Incompleta.

A função Beta é definida por:

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$$

e a função Beta Incompleta:

$$I_{p_0}(a, b) = \int_0^{p_0} t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} Prob\left(\frac{X^2}{X^2 + Y^2} > p_0\right) &= 1 - Prob\left(\frac{X^2}{X^2 + Y^2} \leq p_0\right) \\ &= 1 - I_{p_0}\left(\frac{g_x}{2}, \frac{g_y}{2}\right) \end{aligned}$$

e a função Beta Incompleta possui a seguinte propriedade:

$$1 - I_{p_0}(a, b) = I_{1-p_0}(b, a) = (1-p_0)^{a+b-1} \sum_{i=0}^{a-1} \binom{a+b-1}{i} \left(\frac{p_0}{1-p_0}\right)^i, \quad a \in \mathbb{Z}.$$

Assim, para encontrarmos os graus de liberdade temos que satisfazer:

$$p(n) = \frac{\chi_{H_0}^2 - \chi_{H_1}^2(n)}{\chi_{H_0}^2} = \frac{X^2}{X^2 + Y^2}$$

temos:

$$\frac{\chi_{H_0}^2 - \chi_{H_1}^2(n)}{\underbrace{\chi_{H_0}^2 - \chi_{H_1}^2(n) + \chi_{H_1}^2(n)}_0} = \frac{X^2}{X^2 + Y^2}$$

então $X^2 = \chi_{H_0}^2 - \chi_{H_1}^2(n)$ e $Y^2 = \chi_{H_1}^2(n)$. Como $\chi_{H_0}^2$ possui $N-1$ graus de liberdade, com a restrição em \bar{y} , e $\chi_{H_1}^2(n)$ possui $N-3$ graus de liberdade com as restrições nos coeficientes a, b e c da função 4.5, então X e Y têm graus de liberdade $g_x = (N-1) - (N-3) = 2$ e $g_y = N-3$ respectivamente e são parâmetros na função Beta incompleta:

$$\begin{aligned} Prob(z > p_0) &= 1 - I_{p_0}\left(\frac{g_x}{2}, \frac{g_y}{2}\right) \\ &= 1 - I_{p_0}\left(\frac{2}{2}, \frac{N-3}{2}\right) \\ &= 1 - I_{p_0}\left(1, \frac{N-3}{2}\right) \\ &= (1-p_0)^{1+\frac{N-3}{2}} \sum_{i=0}^{1-1} \binom{1+\frac{N-3}{2}-1}{i} \left(\frac{p_0}{1-p_0}\right)^i \\ &= (1-p_0)^{\frac{N-3}{2}}. \end{aligned}$$

Para determinarmos a significância no resultado de um teste estatístico utilizamos o p-value, que é o valor de corte para rejeitar a hipótese nula H_0 . Publicações recentes, como o de [37] por exemplo, têm utilizado um p-value=0.01, assim, há a probabilidade de 1% de terem obtido seus resultados ao acaso. Se estivermos analisando o periodograma de

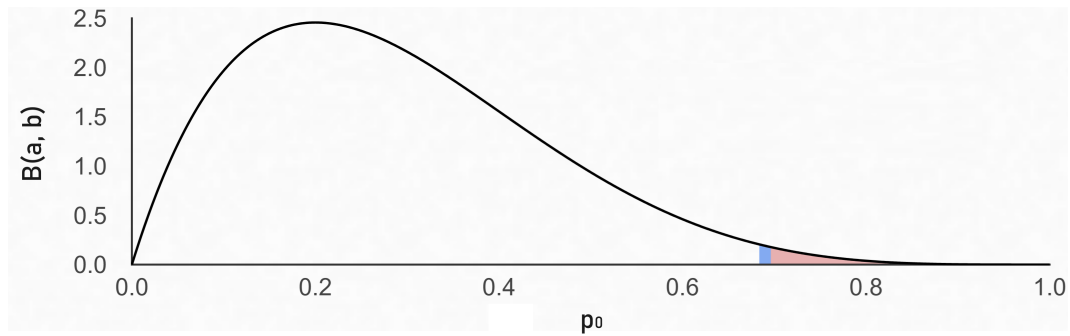


Figura 4.3: Distribuição Beta: a área em rosa é o p-value, dado um valor em azul.

HD 10647b, por exemplo, alguém poderia querer saber se há sinal nas observações com uma frequência cuja melhor potência é $p_0 = p_{ótima} = 0.69$. Temos:

$$\begin{aligned}
 FAP &= 1 - [1 - Prob(z > p_0)]^M \\
 &= 1 - [1 - Prob(z > 0.69)]^{2743 \cdot 0.025} \\
 &= 1 - [1 - (1 - 0.69)^{\frac{N-3}{2}}]^{69.8} \\
 &\approx 3.06 \cdot 10^{-5} < 0.01.
 \end{aligned}$$

A figura 4.3 nos ajuda a visualizar que, dado um $p_0 = 0.69$, temos $FAP < 1\%$ e rejeita-se H_0 .

4.4 Método dos mínimos quadrados

Velocidade radial é uma técnica de detecção em que não se observa diretamente o planeta, trata-se de descoberta "com base em medidas muito precisas de oscilações periódicas da velocidade de algumas estrelas"[6]. Se pensarmos no fato de estarmos lidando com distâncias extremas com as nossas possibilidades e limitações tecnológicas atuais, os valores dos elementos orbitais são com base em aproximações. Matematicamente, cabe falar da teoria da aproximação, que estuda processos para obter a funções que passem o mais próximo possível dos dados observados. Os dados que coletamos para análise possuem o tempo t_i , a velocidade radial y_i e a coluna de incertezas σ_i , tal como vimos na tabela 3.1, e são como pistas do real movimento planetário. Com as oscilações periódicas das velocidades das estrelas espera-se uma onda sinusoidal, e a curva para ajuste (que é a equação 4.5) nos ajuda a entender as pistas de forma a minimizar a diferença quadrática entre o dado coletado y_i e a função 4.5 conforme equação 4.6, dando-nos uma idéia de como ocorre o movimento, pois é a função que simula seu movimento.

Lembrando o que foi citado na seção 2.3, o movimento médio é:

$$n = \frac{2\pi}{P}, \quad (4.12)$$

e como, [18], [31] e [38] têm chamado $n = 2\pi\nu$ é claro que o período:

$$P = \frac{1}{\nu} \quad (4.13)$$

e podemos ter a curva 4.5 reescrita como:

$$y(t) = a \cos(nt) + b \sin(nt) + c. \quad (4.14)$$

A idéia básica é obter os valores dos coeficientes a , b e c e uma forma é utilizando a abordagem de [18] e [38]. Utilizando a função senoidal 4.14 para minimizar o quadrado da diferença do dado y_i com esta função — conforme χ^2 em 4.8 —, seguimos com as derivadas parciais:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 2W \sum w_i [y_i - y(t_i)] \cos(nt_i) = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 2W \sum w_i [y_i - y(t_i)] \sen(nt_i) = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial c} = 2W \sum w_i [y_i - y(t_i)] = 0.$$

Disto (lembrando que a eq. 4.14 é $y(t) = a \cos(nt) + b \sen(nt) + c$):

$$\sum w_i y_i \cos(nt_i) - \sum w_i a \cos^2(nt_i) - \sum w_i b \sen(nt_i) \cos(nt_i) - \sum w_i c \cos(nt_i) = 0$$

$$\sum w_i y_i \sen(nt_i) - \sum w_i a \cos(nt_i) \sen(nt_i) - \sum w_i b \sen^2(nt_i) - \sum w_i c \sen(nt_i) = 0$$

$$\sum w_i y_i - \sum w_i a \cos(nt_i) - \sum w_i b \sen(nt_i) - \sum w_i c = 0;$$

na seqüência:

$$\sum w_i y_i \cos(nt_i) = \sum w_i a \cos^2(nt_i) + \sum w_i b \cos(nt_i) \sen(nt_i) + \sum w_i c \cos(nt_i)$$

$$\sum w_i y_i \sen(nt_i) = \sum w_i a \cos(nt_i) \sen(nt_i) + \sum w_i b \sen^2(nt_i) + \sum w_i c \sen(nt_i)$$

$$\sum w_i y_i = \sum w_i a \cos(nt_i) + \sum w_i b \sen(nt_i) + \sum w_i c.$$

Utilizando as nomenclaturas para abreviação de [38]:

$$Y = \sum w_i y_i$$

$$C = \sum w_i \cos(nt_i)$$

$$S = \sum w_i \sen(nt_i)$$

$$\hat{Y}Y = \sum w_i y_i^2$$

$$\hat{Y}C = \sum w_i y_i \cos(nt_i)$$

$$\hat{Y}S = \sum w_i y_i \sen(nt_i)$$

$$\hat{C}C = \sum w_i \cos^2(nt_i)$$

$$\hat{S}S = \sum w_i \sen^2(nt_i)$$

$$\hat{C}S = \sum w_i \cos(nt_i) \sen(nt_i)$$

chegamos em três equações:

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}C \\ \hat{Y}S \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}C & \hat{C}S & C \\ \hat{C}S & \hat{S}S & S \\ C & S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Da última linha podemos obter

$$c = Y - aC - bS \tag{4.15}$$

e chegamos em:

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}C - Y \cdot C \\ \hat{Y}S - Y \cdot S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}C - C \cdot C & \hat{C}S - C \cdot S \\ \hat{C}S - C \cdot S & \hat{S}S - S \cdot S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Ainda utilizando as abreviações de [38]:

$$YC = \hat{Y}C - Y \cdot C$$

$$YS = \hat{Y}S - Y \cdot S$$

$$CC = \hat{C}C - C \cdot C$$

$$CS = \hat{C}S - C \cdot S$$

$$SS = \hat{S}S - S \cdot S$$

$$D = CC \cdot SS - CS^2$$

reescrevemos:

$$\begin{bmatrix} YC \\ YS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CC & CS \\ CS & SS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

e a solução para a e b é:

$$a = \frac{YC \cdot SS - YS \cdot CS}{D} \quad (4.16)$$

e

$$b = \frac{YS \cdot CC - YC \cdot CS}{D}. \quad (4.17)$$

Há um método alternativo para obtermos χ^2 que [38] utiliza. Das derivadas parciais podemos ter:

$$\sum w_i [y_i - y(t_i)] y(t_i) = a \sum w_i [y_i - y(t_i)] \cos(nt_i) + b \sum w_i [y_i - y(t_i)] \sin(nt_i) + c \sum w_i [y_i - y(t_i)] = 0$$

O χ^2 mínimo pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \frac{\chi^2}{W} &= \sum w_i [y_i - y(t_i)] y_i - \underbrace{\sum w_i [y_i - y(t_i)] y(t_i)}_{=0} \\ &= \sum w_i y_i^2 - a \sum w_i y_i \cos(nt) - b \sum w_i y_i \sin(nt) - c \sum w_i y_i \\ &= \hat{Y}Y - a\hat{Y}C - b\hat{Y}S - cY \\ &= Y\hat{Y} - Y \cdot Y - a(\hat{Y}C - Y \cdot C) - b(\hat{Y}S - Y \cdot S) \\ &= YY - aYC - bYS \end{aligned}$$

e substituindo a e b conforme 4.16 e 4.17:

$$\chi^2 = W \left[YY - \frac{SS \cdot YC^2}{D} - \frac{CC \cdot YS^2}{D} + 2 \frac{CS \cdot YC \cdot YS}{D} \right], \quad (4.18)$$

que pode ser usado no periodograma 4.6.

4.5 Expansões elípticas

[23] apresenta formas de aproximações para alcançarmos soluções práticas e uma delas são as expansões elípticas, que é uma forma de obter a solução da equação de Kepler (equação 2.51) usando a série de Fourier e a função de Bessel, que é uma série convergente.

O raciocínio é vermos que a eq. de Kepler $E - M = e \operatorname{sen}(E)$ é periódica, então pode ser expandido como uma série senoidal de Fourier:

$$e \operatorname{sen}(E) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s(e) \operatorname{sen}(sM)$$

onde $b_s(e)$:

$$b_s(e) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e \operatorname{sen}(E) \operatorname{sen}(sM) \operatorname{d}M$$

$$b_s(e) = \underbrace{-\frac{2}{s\pi} e \operatorname{sen}(E) \cos(sM) \Big|_0^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{s\pi} \int_0^{\pi} \cos(sM) \operatorname{d}(e \operatorname{sen}(E))$$

e escrevendo a equação de Kepler como $\operatorname{d}(e \operatorname{sen}(E)) = \operatorname{d}(E - M)$ temos:

$$b_s(e) = \underbrace{-\frac{2}{s\pi} \int_0^{\pi} \cos(sM) \operatorname{d}M}_{=0} + \frac{2}{s\pi} \int_0^{\pi} \cos(sM) \operatorname{d}E$$

podemos usar a equação de Kepler em M , obtendo:

$$b_s(e) = \frac{2}{s\pi} \int_0^{\pi} \cos(sE - se \operatorname{sen}(E)) \operatorname{d}E. \quad (4.19)$$

Na sequência, [23] escreve a eq. 4.19 como:

$$b_s(e) = \frac{2}{s} J_s(se)$$

e a função de Bessel de primeira espécie e ordem s é:

$$J_s(x) = \frac{1}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^{\beta} \frac{(x/2)^{2\beta+s}}{\beta!(s+1)(s+2)\dots(s+\beta)}. \quad (4.20)$$

Da função $v_r(t)$ podemos verificar o seguinte:

$$v_r(t) = \gamma + K[\cos(f + \omega) + e \cos(\omega)]$$

$$v_r(t) = \gamma + K[\cos(\omega) \cos(f) - \operatorname{sen}(\omega) \operatorname{sen}(f) + e \cos(\omega)] \quad (4.21)$$

e usando a função de Bessel 4.20 obtemos:

$$\cos(f) = -e + \frac{2(1 - e^2)}{e} \sum_{s=1}^{\infty} J_s(se) \cos(sM)$$

e

$$\operatorname{sen}(f) = 2\sqrt{1 - e^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \frac{\operatorname{d}}{\operatorname{d}e} J_s(se) \operatorname{sen}(sM)$$

sendo assim:

$$\cos(f) = -e + \cos(M) + e \cos(2M) + O(e^2) \quad (4.22)$$

e

$$\text{sen}(f) = \text{sen}(M) + e \text{sen}(2M) + O(e^2). \quad (4.23)$$

Apesar de esta série convergir rapidamente para valores pequenos de e , a série diverge para valores de $e > 0.6627434$. [23]

Quanto ao uso prático, podemos começar aplicando o periodograma de Lomb-Scargle (na seção 4.2) para detectar a frequência $\nu_{ótima}$. Depois, podemos utilizar as equações 4.22 e 4.23 das expansões elípticas na função $v_r(t)$. Partindo de $v_r(t)$ da versão 4.21:

$$v_r(t) = \gamma + K \cos(\omega) \cos(f) - K \text{sen}(\omega) \text{sen}(f) + Ke \cos(\omega)$$

temos:

$$\begin{aligned} v_r(t) &\simeq \gamma + K \cos(\omega) \underbrace{[-e + \cos(M) + e \cos(2M)]}_{eq.4.22} - K \text{sen}(\omega) \underbrace{[\text{sen}(M) + e \text{sen}(2M)]}_{eq.4.23} + Ke \cos(\omega) \\ &\simeq \gamma + K \cos(\omega) \cos(M) + Ke \cos(\omega) \cos(2M) - K \text{sen}(\omega) \text{sen}(M) - Ke \text{sen}(\omega) \text{sen}(2M) \end{aligned}$$

e como $M = nt - n\tau$, utilizando identidades trigonométricas $\cos(\theta + \phi) = \cos(\theta) \cos(\phi) - \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi)$ e $\text{sen}(\theta + \phi) = \text{sen}(\theta) \cos(\phi) + \text{sen}(\phi) \cos(\theta)$:

$$\begin{aligned} v_r(t) &\simeq \gamma + K \cos(-n\tau + \omega) \cos(nt) - K \text{sen}(-n\tau + \omega) \text{sen}(nt) \\ &\quad + Ke \cos(-2n\tau + \omega) \cos(2nt) - Ke \text{sen}(-2n\tau + \omega) \text{sen}(2nt) \end{aligned}$$

podemos criar alias para os coeficientes chamando:

$$\begin{aligned} a_1 &= K \cos(-n\tau + \omega), \\ b_1 &= -K \text{sen}(-n\tau + \omega), \\ c_1 &= \gamma, \\ a_2 &= Ke \cos(-2n\tau + \omega), \end{aligned}$$

e

$$b_2 = -Ke \text{sen}(-2n\tau + \omega)$$

e obtemos:

$$v_r(t) \simeq c_1 + a_1 \cos(nt) + b_1 \text{sen}(nt) + a_2 \cos(2nt) + b_2 \text{sen}(2nt).$$

onde $n = 2\pi\nu_{ótima}$. Os coeficientes a_1 , b_1 e c_1 obtemos pelo método dos mínimos quadrados ajustando pela função 4.14 utilizada no periodograma de Lomb-Scargle. Assim temos:

$$s_1(t_i) = a_1 \cos(nt_i) + b_1 \text{sen}(nt_i) + c_1$$

com teste qui-quadrado:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - s_1(t_i)]^2}{\sigma_i^2}.$$

Para obter os coeficientes a_2 e b_2 , precisamos obter os resíduos r_1 onde:

$$r_1(t_i) = y_i - s_1(t_i),$$

afim de ajustar pelo método dos mínimos quadrados a função:

$$s_2(t_i) = a_2 \cos(2nt_i) + b_2 \text{sen}(2nt_i) + c_2$$

com teste qui-quadrado:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[r_1(t_i) - s_2(t_i)]^2}{\sigma_i^2}.$$

Quanto aos outros parâmetros, note que:

$$\begin{aligned} \frac{-b_1}{a_1} &= \text{tg}(-n\tau + \omega) = \text{tg}(\alpha), \\ \frac{-b_2}{a_2} &= \text{tg}(-2n\tau + \omega) = \text{tg}(\beta). \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta = n\tau &\Rightarrow \tau = \frac{\alpha - \beta}{n}, \\ 2\alpha - \beta &= \omega. \end{aligned}$$

Pela identidade trigonométrica $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, temos:

$$K^2 = a_1^2 + b_1^2 \Rightarrow K = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (4.24)$$

e

$$a_2^2 + b_2^2 = K^2 e^2 \Rightarrow e = \sqrt{\frac{a_2^2 + b_2^2}{K^2}}.$$

Considere que os valores de τ obtidos por este meio expressa qual dia do período P é o momento de periastro, e não como o método do periodograma Kepleriano, cujo τ está em dias julianos.

4.6 Periodograma Kepleriano

Os procedimentos que utilizam a função senoidal $y(t)$ conforme eq. 4.14 é chamada por [38] de *generalised Lomb-Scargle* (GLS). Mas eles mesmos propuseram obter o periodograma via função clássica $v_r(t)$, a equação 3.2, e chamaram de periodograma Kepleriano:

$$p_{Kep}(n) = \frac{\chi_0^2 - \chi_{Kep}^2(n)}{\chi_0^2} \quad (4.25)$$

que utiliza $v_r(t)$ conforme já definido na seção 3.1. Para que o periodograma Kepleriano 4.25 funcione, temos que adaptar $v_r(t)$ de forma que fique similar ao GLS. Começando da eq. 3.2, temos:

$$\begin{aligned} v_r(t) &= \gamma + K[e \cos(\omega) + \cos(f(t) + \omega)] \\ &= \gamma + K[e \cos(\omega) + \cos(f(t)) \cos(\omega) - \sin(f(t)) \sin(\omega)] \\ &= \gamma + Ke \cos(\omega) + K \cos(\omega) \cos(f(t)) - K \sin(\omega) \sin(f(t)) \end{aligned}$$

e agora chamando de $c = \gamma + Ke \cos(\omega)$, $a = K \cos(\omega)$ e $b = -K \sin(\omega)$, [38] apresenta:

$$v_r(t) = c + a \cos f(t) + b \sin f(t) \quad (4.26)$$

com

$$K^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow K = \sqrt{a^2 + b^2}$$

similar a eq. 4.24. Para obtermos $f(t)$, conforme a eq. 3.3, note que dependemos da excentricidade e e do tempo do periastro τ . Como sabemos que $0 \leq e \leq 1$ e que $t_1 \leq \tau \leq t_1 + P$ ou $t_N - P \leq \tau \leq t_N$, podemos obter com recursos computacionais da seguinte forma:

- Como o limite inferior e superior de e e τ conhecidos, criamos um vetor \mathbf{e} e um vetor \mathbf{T} dividido em q partes iguais — deveriam ser tratadas como variáveis contínuas, mas para possibilitar execução em recursos computacionais serão discretas;
- Fazer uma varredura em cada valor dos vetores \mathbf{e} e \mathbf{T} de forma que, para cada e_j e cada τ_k , teremos uma anomalia excêntrica $E(t_i)$ que passou no método iterativo de Newton-Raphson 2.53 na função $g(E) = E - e_j \sin(E) - n(t_i - \tau_k)$;
- Para cada $E(t_i)$:

$$f(t_i) = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e_j}{1-e_j}} \operatorname{tg} \frac{E(t_i)}{2} \right)$$

que será usado em $v_r(t)$ da eq. 4.26. Considere em $g(E) = E - e_j \sin(E) - n(t_i - \tau_k)$ que já teremos n obtido pelo periodograma GLS, e que $q \in \mathbb{N}$ é de escolha do usuário(a) pesquisador(a), portanto, arbitrário.

Desta forma, temos:

$$\chi_{Kep}^2(n) = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - v_r(t_i)]^2}{\sigma_i^2} \quad (4.27)$$

para ser usado no periodograma Kepleriano 4.25. Se chamarmos o periodograma 4.7 de p_{GLS} , [38] cita que $\max\{\mathbf{p}_{GLS}\} \leq \max\{\mathbf{p}_{Kep}\}$. Verificaremos empiricamente isto no próximo capítulo.

5 Aplicação prática nos dados de velocidade radial

Dados reais podem apresentar situações imprevistas, mas também podem nos ajudar a entender os modelos matemáticos. Propomos apresentar neste capítulo medidas empíricas determinando cada um dos principais elementos orbitais de planetas utilizando os métodos citados anteriormente.

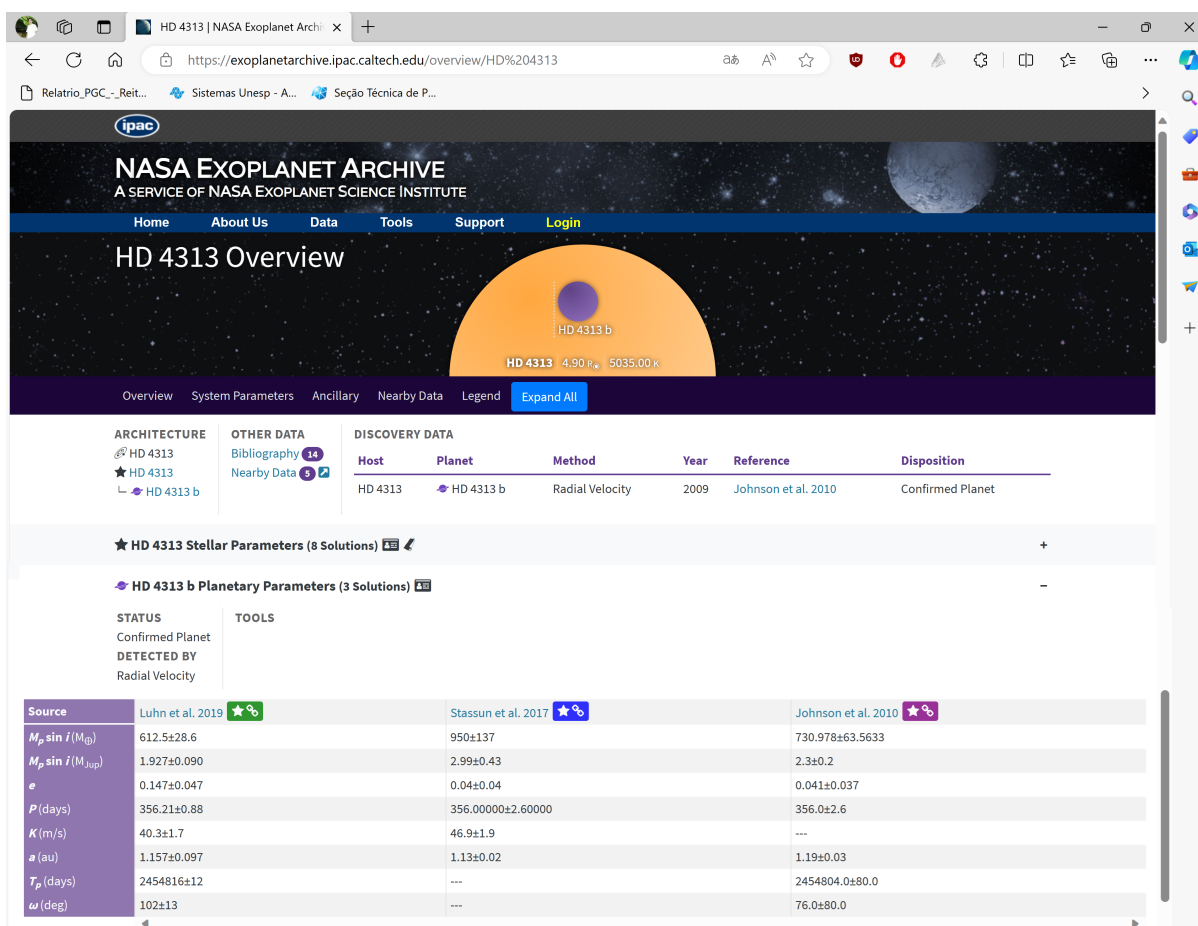


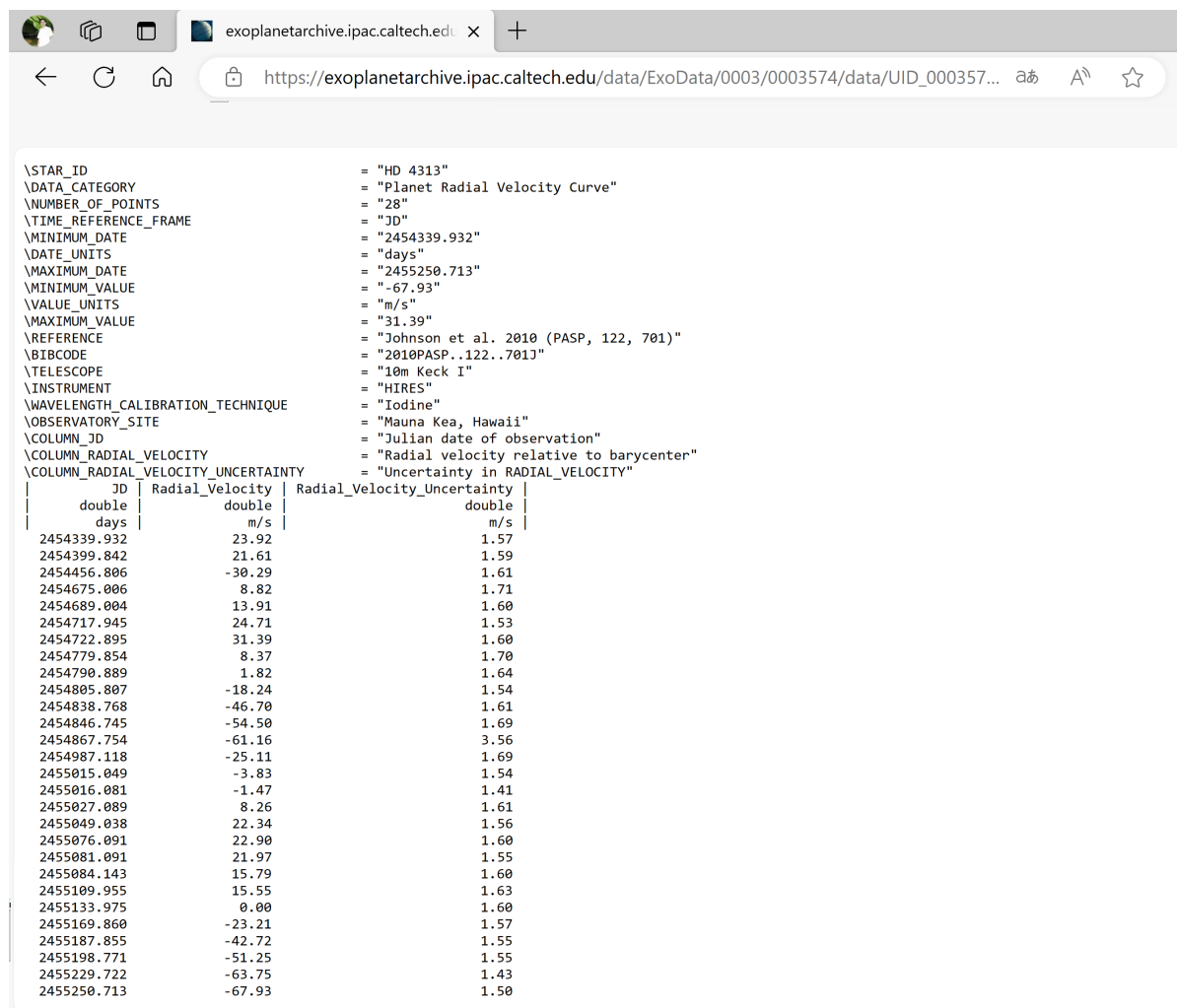
Figura 5.1: Três trabalhos sobre o planeta HD4313b. Fonte: [9]

5.1 Metodologia e algoritmo

O catálogo online de exoplanetas e estrelas de [9] possui comparações de valores com diferentes pesquisas sobre uma mesma estrela e planeta, conforme a fig. 5.1. Desta forma teremos várias fontes para comparar com os resultados deste trabalho.

Como recurso computacional, optamos por utilizar a linguagem de programação Julia, conhecida por ser projetada para processar altos valores numéricos de forma otimizada. É uma linguagem de alto nível com sintaxe similar ao Matlab, sendo um pouco mais familiar para a comunidade matemática.

Selecionamos no catálogo sistemas que possuam um planeta orbitando que tenham características do Problema de Dois Corpos com diferentes excentricidades e situações que exijam adaptações ao algoritmo, o que contribui para robustez do programa. Os dados observados podem ser acessados no próprio site ou ser baixado em um arquivo com extensão ".tbl" que pode ser visto na fig. 5.2.



```

\STAR_ID = "HD 4313"
\DATA_CATEGORY = "Planet Radial Velocity Curve"
\NUMBER_OF_POINTS = "28"
\TIME_REFERENCE_FRAME = "JD"
\MINIMUM_DATE = "2454339.932"
\DATE_UNITS = "days"
\MAXIMUM_DATE = "2455250.713"
\MINIMUM_VALUE = "-67.93"
\VALUE_UNITS = "m/s"
\MAXIMUM_VALUE = "31.39"
\REFERENCE = "Johnson et al. 2010 (PASP, 122, 701)"
\BIBCODE = "2010PASP..122..701J"
\TELESCOPE = "10m Keck I"
\INSTRUMENT = "HIRES"
\WAVELENGTH_CALIBRATION_TECHNIQUE = "Iodine"
\OBSERVATORY_SITE = "Mauna Kea, Hawaii"
\COLUMN_JD = "Julian date of observation"
\COLUMN_RADIAL_VELOCITY = "Radial velocity relative to barycenter"
\COLUMN_RADIAL_VELOCITY_UNCERTAINTY = "Uncertainty in RADIAL_VELOCITY"

```

JD	Radial_Velocity	Radial_Velocity_Uncertainty
double	double	double
days	m/s	m/s
2454339.932	23.92	1.57
2454399.842	21.61	1.59
2454456.806	-30.29	1.61
2454675.006	8.82	1.71
2454689.004	13.91	1.60
2454717.945	24.71	1.53
2454722.895	31.39	1.60
2454779.854	8.37	1.70
2454790.889	1.82	1.64
2454805.807	-18.24	1.54
2454838.768	-46.70	1.61
2454846.745	-54.50	1.69
2454867.754	-61.16	3.56
2454987.118	-25.11	1.69
2455015.049	-3.83	1.54
2455016.081	-1.47	1.41
2455027.089	8.26	1.61
2455049.038	22.34	1.56
2455076.091	22.90	1.60
2455081.091	21.97	1.55
2455084.143	15.79	1.60
2455109.955	15.55	1.63
2455133.975	0.00	1.60
2455169.860	-23.21	1.57
2455187.855	-42.72	1.55
2455198.771	-51.25	1.55
2455229.722	-63.75	1.43
2455250.713	-67.93	1.50

Figura 5.2: Exemplo de um arquivo com dados de velocidades radiais observadas. Fonte: [9]

Para obter os valores dos elementos orbitais, precisamos definir a ordem das ações. Utilizando $p_{Kep}(n)$, propomos a seguinte sequência:

1. **leitura dos dados:** guardamos os dados de observação de arquivos como a fig. 5.2

em vetores de tempo \mathbf{t} , de velocidade radial \mathbf{y} e de incerteza $\boldsymbol{\sigma}$;

2. **vetor de frequências:** guardamos no vetor \mathbf{f} de ν_1 até ν_{\max} com passo de tamanho $\delta\nu$ conforme detalhado na subseção 4.2.1 **Configurando o vetor de frequências;**
3. **vetor de potências:** para cada frequência ν_i do vetor \mathbf{f} temos $n_i = 2\pi\nu_i$ calculamos o periodograma (GLS) para cada $p_i = p(n_i)$ (eq. 4.6) no vetor \mathbf{p} ;
4. **max{p} de $\nu_{\text{ótima}}$:** identificamos o índice da maior potência em \mathbf{p} , para localizarmos um primeiro chute da frequência $\nu_{\text{ótima}}$ em \mathbf{f} ;
5. **periodograma Kepleriano:** criamos um vetor \mathbf{T} com candidatos a tempo do periastro τ e \mathbf{e} com candidatos a excentricidade e dividido em $q = 40$ por exemplo (arbitrário) onde cada e_i , T_j e t_k temos $M = n(t_k - T_j)$, colocamos a função $g(E) = E - e_i \sin(E) - M$ no método de Newton (equação iterativa 2.53), salvamos $E_k = g(E)$ para que em um vetor de anomalia verdadeira \mathbf{v} tenhamos:

$$v_k = 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1 + e_i}{1 - e_i}} \operatorname{tg} \frac{E_k}{2} \right)$$

afim de usarmos na função 3.2 (de onde podemos obter os coeficientes a , b e c) no periodograma Kepleriano 4.18;

6. **amplitude, argumento do periastro e velocidade radial média:** podemos obter amplitude K via eq. 4.24, assim, obtemos $\cos(\omega) = a/K$, $\gamma = -(Ke \cos(\omega) - c)$ e ω verificando $\omega = \arccos(a/K)$.

Depois de obtermos e , P , K , τ , γ e ω comparamos com o método das expansões elípticas. O algoritmo deste método será da seguinte forma:

1. **leitura de dados:** conforme o passo 1 do algoritmo anterior;
2. **coeficientes da primeira harmônica:** usamos o periodograma de Lomb-Scargle considerando:

$$s_1(t) = a_1 \cos(nt) + b_1 \sin(nt) + c_1$$

de maneira usual;

3. **coeficientes da segunda harmônica:** obtemos os resíduos:

$$r(t_i) = y_i - s_1(t_i)$$

e utilizamos o periodograma de Lomb-Scargle uma segunda vez com:

$$s_2(t) = a_2 \cos(2nt) + b_2 \sin(2nt) + c_2$$

em:

$$\chi^2 = W \sum_{i=1}^N w_i [r(t_i) - s_2(t_i)]^2$$

e:

$$\chi_0^2 = W \cdot YY$$

com:

$$YY = \sum w_i r(t_i)^2 - \sum w_i r(t_i) \cdot \sum w_i r(t_i);$$

4. **expansões elípticas:** considerando $v_r(t)$ (eq. 4.21) com $M = n(t - \tau)$ em $\cos(f)$ (eq. 4.22) e $\sin(f)$ (eq. 4.23) temos:

$$v_r(t) \simeq c_1 + a_1 \cos(nt) + b_1 \sin(nt) + a_2 \cos(2nt) + b_2 \sin(2nt)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_1 &= K \cos(-n\tau + \omega), \\ b_1 &= -K \sin(-n\tau + \omega), \\ a_2 &= Ke \cos(-2n\tau + \omega), \\ b_2 &= -Ke \sin(-2n\tau + \omega) \end{aligned}$$

e $c_1 = \gamma$;

amplitude e excentricidade: usando identidade trigonométrica $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ temos:

$$K^2 = a_1^2 + b_1^2 \Rightarrow K = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

e

$$K^2 e^2 = a_2^2 + b_2^2 \Rightarrow e = \sqrt{\frac{a_2^2 + b_2^2}{K^2}};$$

argumento e tempo do periastro: usando a identidade trigonométrica $\operatorname{tg}(\theta) = \sin(\theta)/\cos(\theta)$, seja $\alpha = -n\tau + \omega$ e $\beta = -2n\tau + \omega$, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b_1}{a_1} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left(-\frac{b_1}{a_1} \right)$$

e

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{b_2}{a_2} \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} \left(-\frac{b_2}{a_2} \right),$$

então $\alpha - \beta = n\tau$ e $2\alpha - \beta = \omega$.

5.1.1 Comparação dos resultados

Obtido os valores pelo periodograma Kepleriano e pelas expansões elípticas, comparamos também com os valores das pesquisas pelo catálogo de [9]. Incluímos o valor do rms (root mean square — a raiz do valor quadrático médio) onde:

$$rms = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y_i - x(t_i)]^2$$

para servir de referência avaliativa dos valores dos elementos orbitais. Quanto menor o valor de rms melhores são os valores dos elementos pois fez $x(t)$ estar próximo aos dados, e foram incluídos nas tabelas comparativas 5.1, 5.2 e 5.3 dos planetas HD 4313 b, HD 6434 b e HD 16175 b respectivamente. A função $x(t)$ é o modelo utilizado pelo respectivo autor — no nosso caso, podendo ser o periodograma Kepleriano ou as expansões elípticas.

5.2 Planeta HD 4313 b

Este planeta foi descoberto por [15], no observatório W. M. Keck, em Mauna Kea, Havaí em 2010, e eles anotaram as observações do tempo t , velocidade radial s e incerteza σ conforme tabela ???. [15] usaram Critério de Informação Bayesiano (BIC) e Markov Chain Monte Carlo (MCMC) para estimar os valores orbitais.

Selecionamos este planeta devido a relativamente baixa excentricidade, e ter supostamente boas estimativas pelo periodograma GLS, além de ter outras duas pesquisas para comparação com os resultados e com a abordagem deste trabalho.

As estimativas pelo periodograma Kepleriano ocorreram da seguinte forma:

1. **leitura dos dados:** considerando a tabela ?? (no apêndice), temos o vetor \mathbf{t} a coluna t do calendário juliano; vetor de velocidades radiais \mathbf{s} e de incertezas σ são suas correspondentes colunas;
2. **vetor de frequências:** utilizamos $\eta = \lambda = 20$ para formar o vetor de frequências \mathbf{f} ;
3. **vetor de potências:** utilizando \mathbf{f} obtivemos para o vetor de potências

$$\mathbf{p} = \{0.22568322060716192, 0.2100998373076442, \dots, 0.040684828112058036\};$$

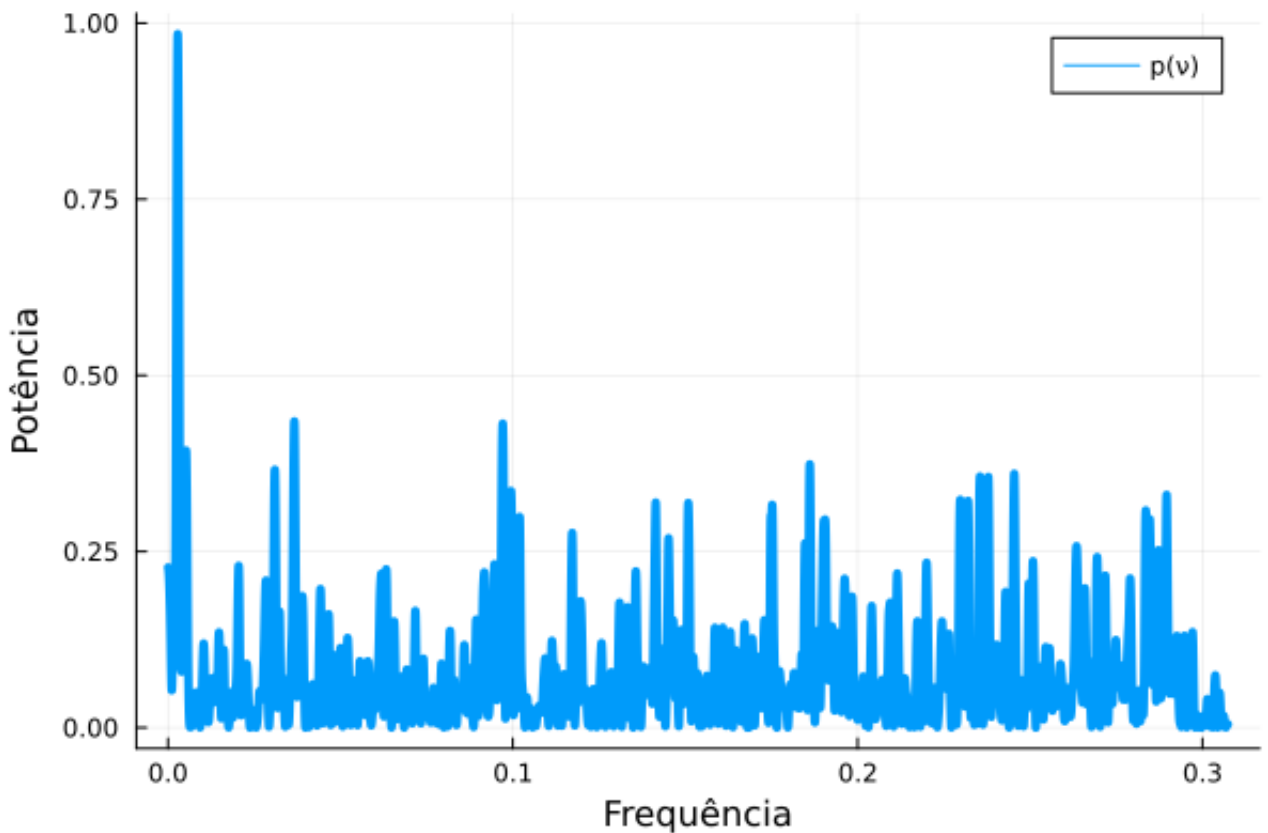


Figura 5.3: HD 4313 b: Potências das frequências via GLS

4. **max{p} de $\nu_{\acute{o}tima}$:** salvamos o índice *ótima* de max{p} com a função `function indice_do_maior_valor(vet, n)` (no apêndice A.2) e obtivemos $\nu_{\acute{o}tima} = 0.002745$ com $n = 2\pi\nu_{\acute{o}tima} = 0.017247$, potência $p(n) = 0.972399$ e $FAP(0.972399) = 0.0$;
5. **periodograma Kepleriano:** obtido n , temos $M = 0.017247(t_k - T_j)$ para ser usado em $g(E)$ e temos \mathbf{E} , \mathbf{v} para ser usado na função $v_r(t)$ que o periodograma Kepleriano usa e obtivemos e e τ conforme tabela 5.1 e os coeficientes $a = 12.624068$, $b = -45.22631$ e $c = -21.718783$ pelo método dos mínimos quadrados;
6. **amplitude, argumento do periastro e velocidade radial média:** temos amplitude:

$$K = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(12.624068)^2 + (-45.22631)^2} = 46.955151$$

velocidade radial média:

$$\cos(\omega) = \frac{a}{K} = \frac{12.624068}{46.955151} = 0.268854$$

$\gamma = -(Ke \cos(\omega) - c) = -(46.955151 \cdot 0.03 \cdot 0.268854 - (-21.718783)) = -22.100742$
e argumento do periastro:

$$\omega = \arccos \frac{a}{K} = \arccos \frac{12.624068}{46.955151} = 1.298593$$

em graus:

$$\omega = 1.298593 \cdot \frac{180}{\pi} = 74.40393^\circ.$$

Os parâmetros obtidos pelo algoritmo acima gerou o gráfico da figura 5.4. Para a velocidade do pericentro considera-se $f(t) = 0$, então a função 4.26 para o pericentro foi $v_r(t) = a + c$. Já a obtenção pelas expansões elípticas:

1. **leitura de dados:** valores na tabela ?? (no apêndice);
2. **coeficientes da primeira harmônica:** obtivemos $P = 1/0.002827 = 353.7$ e $n = 2\pi \cdot 0.002827 = 0.017763$ com $p_{GLS}(n) = 0.984515$ e função:

$$s_1(t) = 38.504841 \cos(nt) + 28.335206 \sin(nt) - 22.840156$$

3. **coeficientes da segunda harmônica:** utilizamos no periodograma de Lomb-Scargle os resíduos, $s_1(t)$ e a função:

$$s_2(t) = -0.346358 \cos(2nt) + 0.693616 \sin(2nt) + 0.123742$$

4. **expansões elípticas:** utilizando os valores dos coeficientes chegamos em:
amplitude e excentricidade:

$$K = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{38.504841^2 + 28.335206^2} = 47.8$$

e

$$e = \sqrt{\frac{a_2^2 + b_2^2}{K^2}} = \sqrt{\frac{(-0.346358)^2 + 0.693616^2}{47.8^2}} = 0.016217;$$

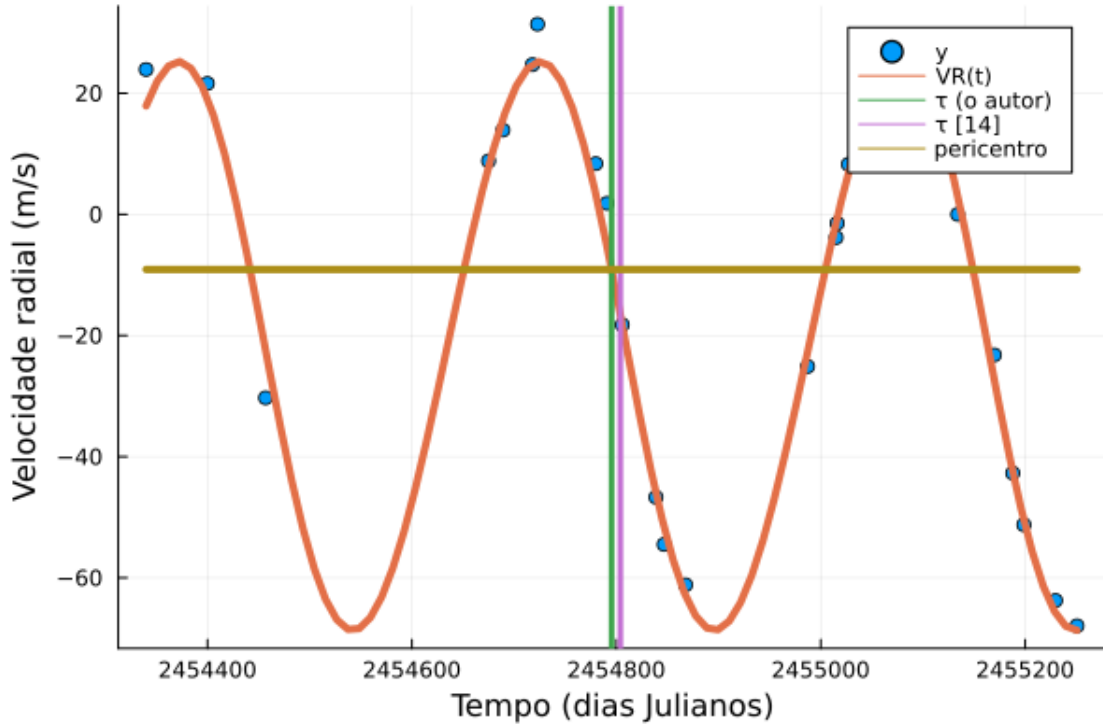


Figura 5.4: HD 4313 b: ajuste da função $v_r(t)$ aos dados y de [15]

argumento e tempo do periastro: com $\alpha = -0.634407$ e $\beta = -2.033925$:

$$\omega = 2\alpha - \beta = 2 \cdot (-0.634407) - (-2.033925) = 0.76511,$$

em graus $\omega = 0.76511 \cdot 180/\pi = 43.83758^\circ$, e

$$\tau = \frac{\alpha - \beta}{n} = \frac{(-0.634407) - (-2.033925)}{0.017763} = 78.783482,$$

nos dados temos $\tau = t_1 + 78.783482 = 2454418.715$.

Com os valores obtidos, temos a comparação conforme a tabela 5.1.

El. orbit.	o autor ($p_{Kep}(n)$)	o autor (Exp. Elip.)	[20]	[34]	[15]
e	0.03	0.016	0.147	0.04	0.041
P (dias)	353.7	353.7	356.21	356.0	356.0
K (m/s)	46.96	47.8	40.3	46.9	46.9
τ (dias)	2454795	2454419	2454816	-	2454804
ω (graus)	74.4	43.84	102.0	-	76.0
γ (m/s)	-22.1	-22.84	-13.6	-	-
rms	3.79	3.81	4.695	-	3.7

Tabela 5.1: Comparação com outros trabalhos de HD 4313b. Usamos os dados de [15]

HD 4313 b teve um $p_{GLS} = 0.972399$ e um $p_{Kep} = 0.976141$. A função $y(t)$ gera um gráfico muito próximo da figura 5.4 que foi feita com a função $v_r(t)$, portanto devem ser

parecidas. Por ter uma excentricidade e próxima de zero podemos conjecturar:

$$\lim_{e \rightarrow 0} \underbrace{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E(t)}{2} = \operatorname{tg} \frac{f(t)}{2}}_{\text{(eq. 3.3)}} \Rightarrow E(t) = f(t),$$

e como $E(t) = n(t - \tau)$ ficamos com a função Kepleriana:

$$v_r(t) = a \cos(n(t - \tau)) + b \operatorname{sen}(n(t - \tau)) + c \quad (5.1)$$

o que a torna senoidal, assim como $y(t)$. Testamos picos com potência $p_0 = 0.9$, $p_0 = 0.5$ e $p_0 = 0.3$ na FAP (equação 4.11), onde:

$$FAP = 1 - [1 - \operatorname{Prob}(p > 0.9)]^M = 0,$$

$$FAP = 1 - [1 - \operatorname{Prob}(p > 0.5)]^M \approx 0.047$$

e

$$FAP = 1 - [1 - \operatorname{Prob}(p > 0.3)]^M \approx 0.96.$$

Para fins de teste de comparação de performance e de valores, também utilizamos a função FAP embaralhando q vezes os tempos t , velocidades radiais y e incertezas σ afim de obtermos:

$$FAP = \frac{z}{q}$$

onde z é a quantidade de vezes que $p \geq p_0$. Com $q = 1000$, obtivemos:

$$FAP(0.9) = 0,$$

$$FAP(0.5) = 0.268$$

e

$$FAP(0.3) = 1.$$

Ambas as versões estão em Julia no apêndice A.2. Constatamos que esta forma leva um tempo muito maior, pois todo o processo do periodograma é realizado q vezes — que quanto maior for seu valor, mais realista é o teste — logo, recomendamos utilizar FAP conforme 4.11.

5.3 Planeta HD 6434 b

O catálogo de [9] indicou três pesquisas para este planeta que leva em torno de 22 dias para dar uma volta completa na estrela. O foco das pesquisas de [21], [13] e [34] não é o cálculo mas teremos valores da maioria dos parâmetros planetários possibilitando comparação com os valores calculados neste trabalho. A órbita deste planeta é um pouco mais excêntrica e houve uma diferença um pouco maior entre $p_{GLS}(n)$ e $p_{Kep}(n)$ se comparado com HD 4313 b, veremos os detalhes à seguir.

Pelo periodograma Kepleriano temos:

1. **leitura dos dados:** os dados conforme tabelas ??, ?? e ?? (no apêndice) foram coletados por [21], uma amostra $N = 130$, no observatório de La Silla, Chile.

2. **vetor de frequências:** com a coleta iniciada em 2451142.6802 (ou em 24/11/1998 às 04:19) e terminada em 2452643.5488 (ou em 04/01/2003 às 01:10) calculamos o vetor de frequências:

$$\mathbf{f} = \{6.662808e - 5, 0.0002, \dots, 0.216541\}$$

3. **vetor de potências:** análogo ao HD 4313 b, para cada frequência obtida no passo 2, temos uma potência. Assim:

$$\mathbf{p} = \{0.001237, 0.001235, \dots, 0.017503\};$$

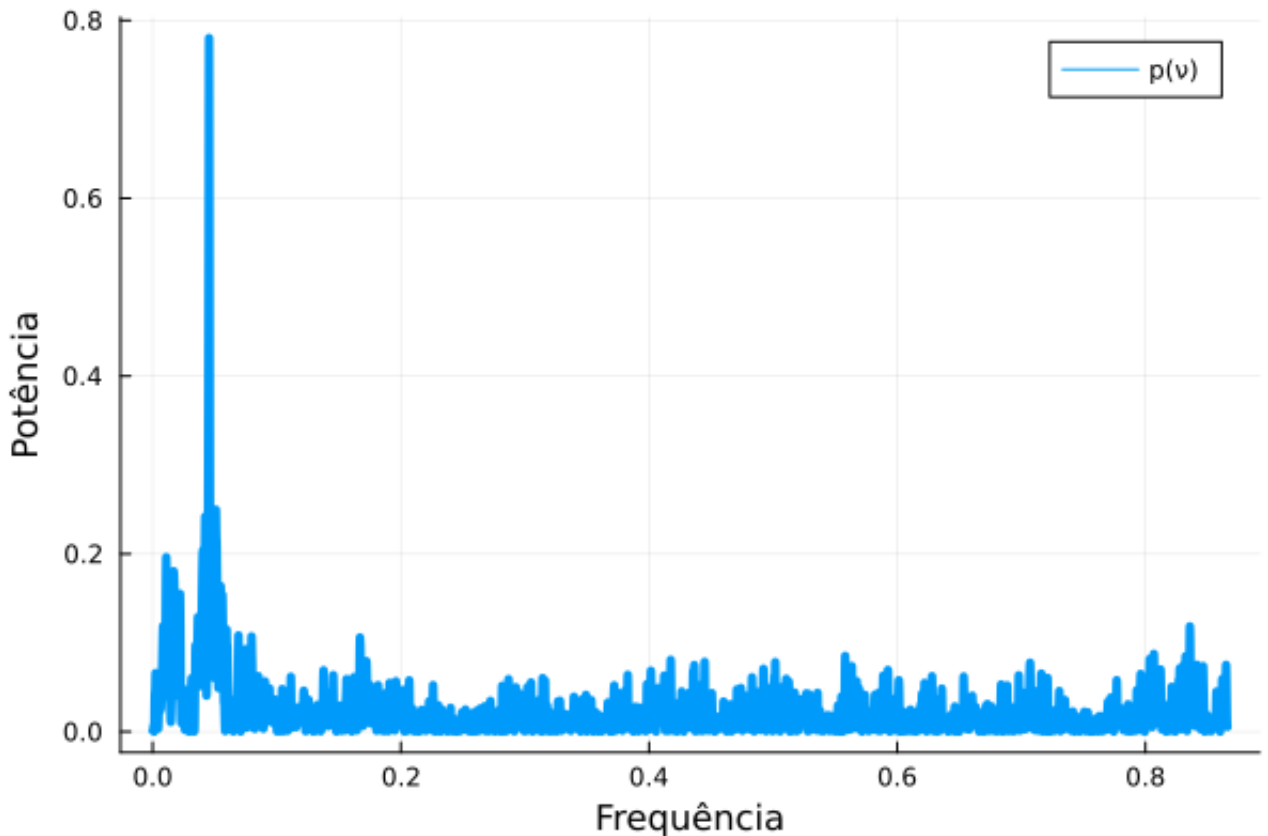


Figura 5.5: HD 6434 b: Potências das frequências via GLS

4. **maior potência e $\nu_{ótima}$:** utilizando o algoritmo `indice_do_maior_valor(vet, n)` do apêndice A.2, localizamos $p_{ótima} = 0.780148$ ($FAP(0.780148) = 0.0$), com $\nu_{ótima} = 0.045457$ e temos que $P = 1/\nu_{ótima} = 21.998807$;
5. **periodograma Kepleriano:** usamos $M = 0.285615(t_k - T_j)$ em $g(E)$; no periodograma Kepleriano obtivemos e e τ conforme tabela 5.2 e os coeficientes $a = -33.209284$, $b = -8.330798$ e $c = 23016.861428$ pelo método dos mínimos quadrados;
6. **amplitude, argumento do periastro e velocidade radial média:** temos amplitude:

$$K = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-33.209284)^2 + (-8.330798)^2} = 34.238264$$

velocidade radial média:

$$\cos(\omega) = \frac{a}{K} = \frac{-33.209284}{34.238264} = -0.969946$$

$$\gamma = -(Ke \cos(\omega) - c) = -(34.238264 \cdot 0.172051 \cdot (-0.969946) - 23016.861428) = 23022.575128$$

e argumento do periastro:

$$\omega = \arccos \frac{a}{K} = \arccos \frac{-33.209284}{34.238264} = 2.895807$$

em graus:

$$\omega = 2.895807 \cdot \frac{180}{\pi} = 165.917525^\circ.$$

Utilizando os resultados que obtivemos, ajustamos a função $v_r(t)$ aos dados de HD 6434 b conforme o gráfico 5.6.

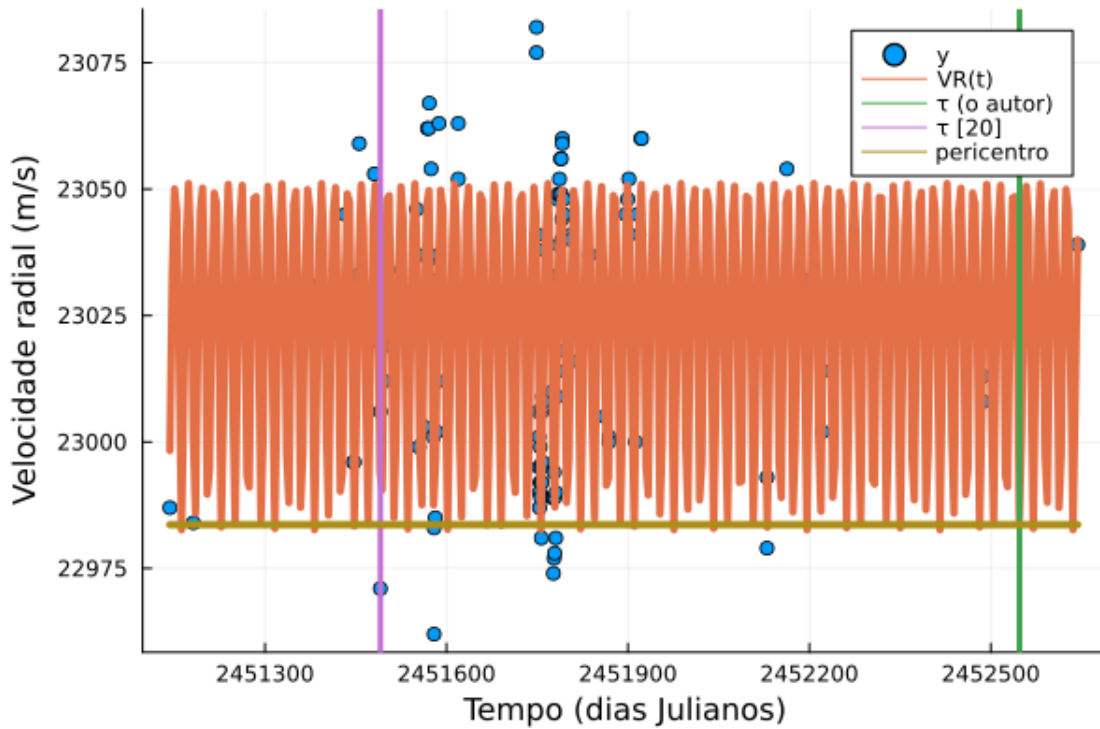


Figura 5.6: Ajuste da função $v_r(t)$ aos dados y de [21] de HD 6434 b

O aspecto do gráfico 5.6 de HD 6434 b, se compararmos com a situação de HD 4313 b, pareceu não muito esclarecedor. Dos outros trabalhos sobre HD 6434 b, apenas [13] apresentou um gráfico (conforme figura 5.7), e podemos comparar com o trabalho deles.

Ao observar o gráfico de cima na figura 5.7, podemos perceber que [13] acrescentou dados, então seu trabalho está mais atualizado — como pegamos de [21] (que é um pouco mais antigo), o nosso vai até 2003 (verificável na tabela ??), o de [13] vai até 2014. O gráfico de baixo na figura 5.7 é o melhor ajuste no modelo em uma fase orbital de HD 6434 b. Sendo assim, elaboramos o equivalente aos dados trabalhados aqui, conforme o gráfico 5.8.

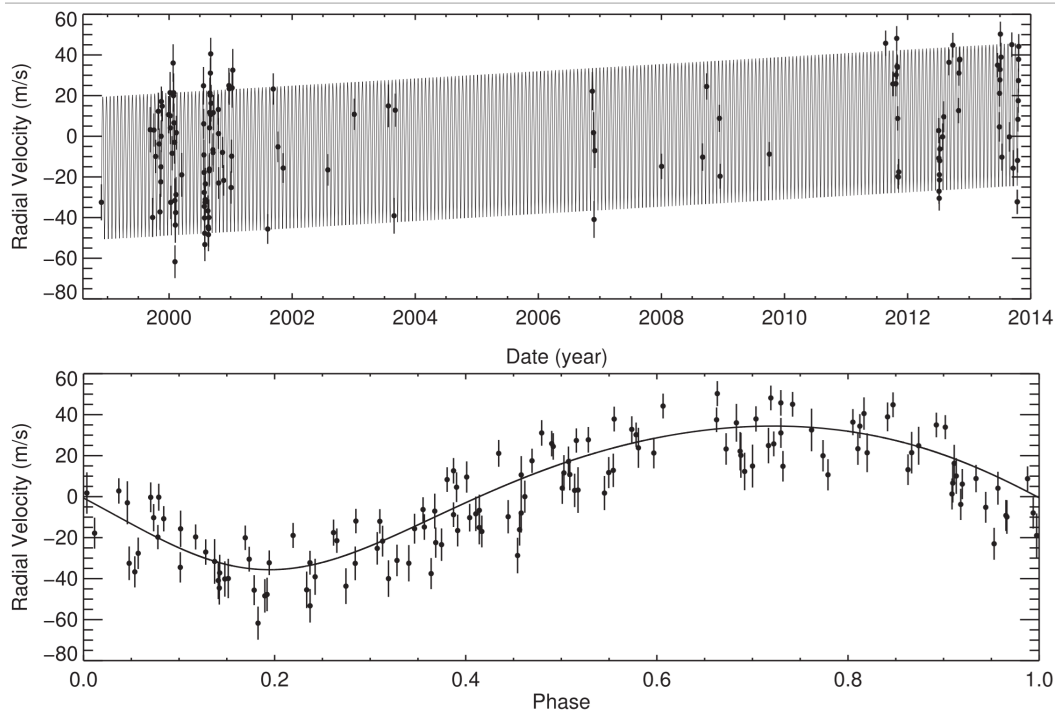


Figura 5.7: O gráfico de cima é a série temporal de velocidade radial e o gráfico de baixo é a representação em apenas uma fase (um período P). Fonte: [13].

Para construir o gráfico 5.8, como o eixo do tempo está num intervalo $(0, 1)$, cada ponto dos dados está ajustado no ponto:

$$\left(\frac{t_i}{P} \bmod 1, y_i \right). \quad (5.2)$$

Quanto à função utilizada, a modificação se deu na anomalia excêntrica — que é otimizada no método de Newton — ajustada como:

$$g(E) = E - e \sin E - n(t'P - \tau) \quad (5.3)$$

onde t' está no intervalo $(0, 1)$.

Utilizando as expansões elípticas temos o seguinte algoritmo:

1. **leitura de dados:** valores nas tabelas ??, ?? e ?? (no apêndice);
2. **coeficientes da primeira harmônica:** obtivemos $P = 1/0.045457 = 22$ e $n = 2\pi \cdot 0.045457 = 0.285615$ com $p_{GLS}(n) = 0.78$ e função:

$$s_1(t) = 33.184829 \cos(nt) + 1.715947 \sin(nt) + 23023.530213$$

3. **coeficientes da segunda harmônica:** utilizamos no periodograma de Lomb-Scargle os resíduos, $s_1(t)$ e a função:

$$s_2(t) = -6.135073 \cos(2nt) + 1.078452 \sin(2nt) - 1.086685$$

4. **expansões elípticas:** utilizando os valores dos coeficientes chegamos em:

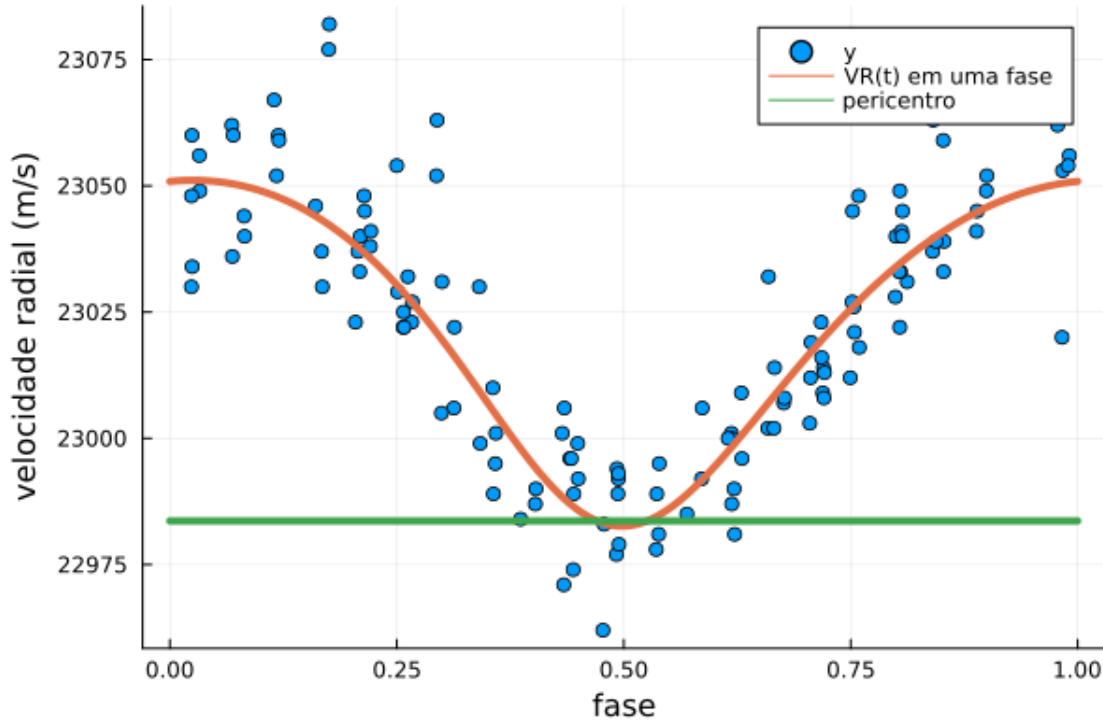


Figura 5.8: Ajuste da função $v_r(t)$ aos dados y de [21] de uma fase de HD 6434 b

amplitude e excentricidade:

$$K = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{33.184829^2 + 1.715947^2} = 33.229164$$

e

$$e = \sqrt{\frac{a_2^2 + b_2^2}{K^2}} = \sqrt{\frac{(-6.135073)^2 + 1.078452^2}{33.229164^2}} = 0.18746;$$

argumento e tempo do periastro: com $\alpha = -0.051663$ e $\beta = -2.96758$:

$$\omega = 2\alpha - \beta = 2 \cdot (-0.051663) - (-2.96758) = 2.86426,$$

em graus $\omega = 2.86426 \cdot 180/\pi = 164.11^\circ$, e

$$\tau = \frac{\alpha - \beta}{n} = \frac{(-0.051663) - (-2.96758)}{0.285615} = 10.209284,$$

nos dados $\tau = t_1 + 10.209284 = 2451152.889$.

Estimados os parâmetros, podemos comparar com outros valores na tabela 5.2. [13] e [21] citam que, assim como nós, utilizaram Lomb-Scargle para estimar o período orbital, mas os outros parâmetros foram encontrados utilizando softwares ou meios não detalhados em seus trabalhos.

Com a excentricidade e da órbita de HD 6434 b em 0.17 e uma certa diferença entre p_{GLS} e p_{Kep} (0.772698 e 0.806341 respectivamente) a equação 5.1 não se adequa bem para HD 6434 b. Notamos também que quando temos uma grande quantidade N de amostras coletadas fica conveniente ajustar os pontos conforme coordenadas 5.2 e a função $v_r(t)$ tem seu ajuste alterado em $g(E)$ como na eq. 5.3 com t no intervalo $(0, 1)$. A pouca semelhança nos gráficos 5.7 (a parte de baixo) e o 5.8 (feito por nós) pode ser devido à atualização que [13] fez nos dados coletados que revelou um comportamento diferente considerável em HD 6434 b em sua pesquisa.

El. orbit.	$(p_{Kep}(n))$	(Exp. Elip.)	[34]	[13]	[21]
e	0.17	0.19	0.17	0.146	0.17
P (dias)	22	22	21.998	22.017	21.998
K (m/s)	34.24	33.23	34.2	35.0	34.2
τ (dias)	2452547.339	2451152.889	-	2451909.308	2451490.8
ω (graus)	165.92	164.11	-	163.2	156
γ (m/s)	23022.57	23023.53	-	-	23023.0
rms	12.11	11.99	-	7.77	10.6

Tabela 5.2: Comparação com outros trabalhos de HD 6434b. Usamos os dados de [21]

5.4 Planeta HD 16175 b

O planeta HD 16175 b contrasta com HD 4313 b pela sua alta excentricidade. Há quatro pesquisas deste planeta no catálogo de [9], que disponibilizou os dados de [26].

1. **leitura dos dados:** [26] registraram $N = 44$ observações, no observatório Lick, na Califórnia, Estados Unidos, de 29/11/2004 a 14/03/2009, conforme tabela ??;
2. **vetor de frequências:** também utilizamos $\eta = \lambda = 20$ para formar o vetor \mathbf{f} ;
3. **vetor de potências:** análogo ao cálculo do vetor de potências de HD 4313 b, para cada valor de frequência \mathbf{f} , um valor de potência \mathbf{p} :

$$\mathbf{f} = \{6.3858673e - 5, 0.0001916, \dots, 0.0009579, \dots, 0.0055557\}$$

e

$$\mathbf{p} = \{0.3158851, 0.3298804, \dots, 0.7359635, \dots, 0.0383636\};$$

4. **maior potência e $\nu_{ótima}$:** lembrando que ainda estamos estimando pelo periodograma de Lomb-Scargle, obtivemos $\nu_{ótima} = 0.000973$ (então $n = 0.006119$ e $P = 1026.86$) com $p_{GLS}(n) = 0.736125$ e $FAP(0.736125) \approx 1.53 \cdot 10^{-10}$;
5. **periodograma Kepleriano:** neste ponto, tivemos e e τ conforme tabela 5.3 e frequência atualizada para $\nu_{ótima} = 0.001006$ ($P = 994.259048$), com coeficientes $a = -72.478801$, $b = 65.989143$ e $c = -2.660187$;
6. **amplitude, argumento do periastro e velocidade radial média:** a amplitude:

$$K = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-72.478801)^2 + 65.989143^2} = 98.019098,$$

com:

$$\cos(\omega) = \frac{a}{K} = \frac{-72.478801}{98.019098} = -0.739435$$

a velocidade radial média:

$$\gamma = -(Ke \cos(\omega) - c) = -(98.02 \cdot 0.62 \cdot (-0.74) - (-2.66)) = 42.11$$

e o argumento do periastro:

$$\omega = \arccos \frac{a}{K} = \arccos \frac{-72.478801}{98.019098} = 2.403028$$

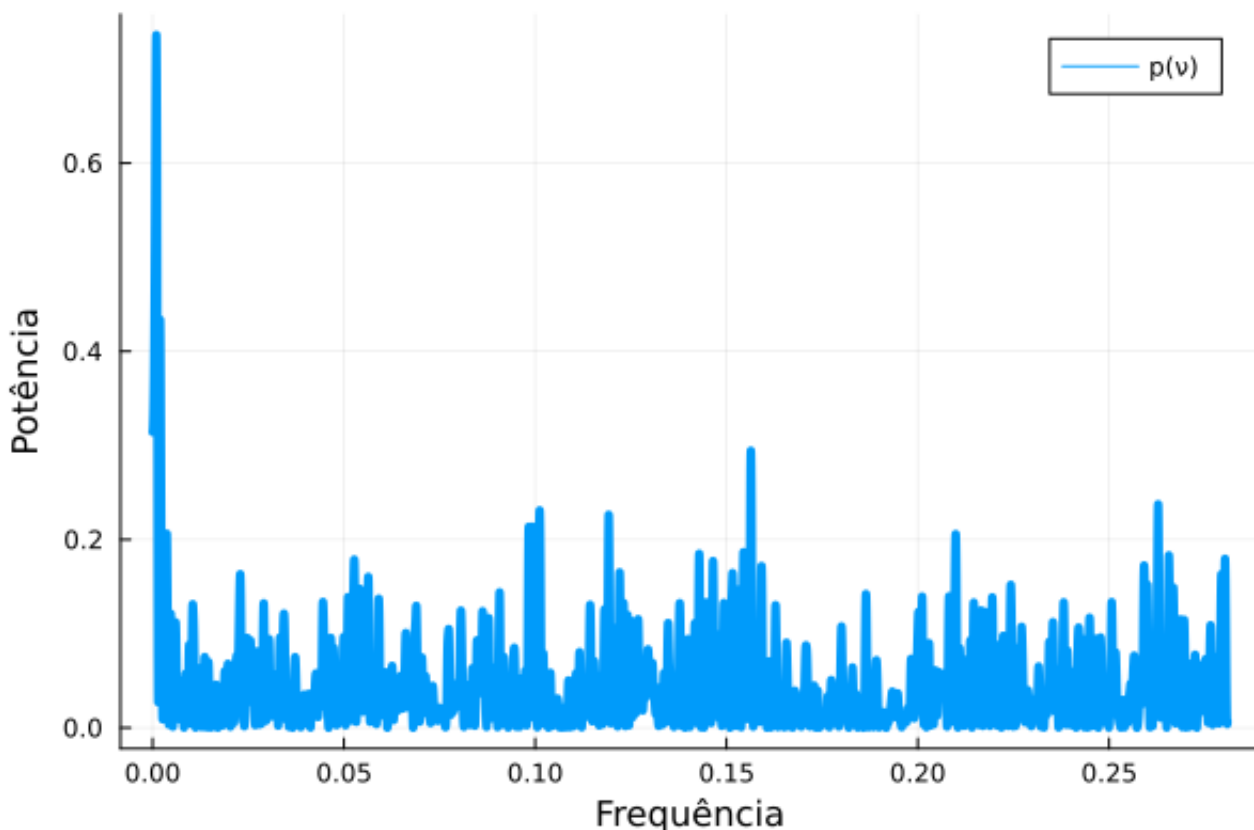


Figura 5.9: HD 16175 b: Potências das frequências via GLS

que em graus:

$$\omega = 2.403028 \frac{180}{\pi} = 137.683351^\circ.$$

Como usamos os mesmos dados de [26] seu gráfico ficou muito semelhante a fig. 5.10. [34] e [37] não apresentaram um gráfico de velocidade radial para HD 16175 b; o gráfico de [8] está mais atualizado, conforme a fig. 5.11: os pontos vermelhos são novos dados de 02/09/2011 a 03/09/2015.

O algoritmo com as expansões elípticas para HD 16175 b ocorreu da seguinte forma:

1. **leitura de dados:** vide tabela ?? no apêndice ??;
2. **coeficientes da primeira harmônica:** o periodograma de Lomb-Scargle nos forneceu: $\nu = 0.000973$ — $P = 1026.857705$ e $n = 0.006119$ — com $p_{GLS}(n) = 0.736125$ e coeficientes $a_1 = 64.497593$, $b_1 = -9.345651$ e $c_1 = 44.821156$;
3. **coeficientes da segunda harmônica:** usando os resíduos e a função $s_1(t)$ obtivemos os coeficientes $a_2 = -19.719212$ e $b_2 = -15.316851$;
4. **expansões elípticas:** com a_1 , b_1 , c_1 , a_2 e b_2 temos:

amplitude e excentricidade:

$$K = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{64.497593^2 + (-9.345651)^2} = 65.171164$$

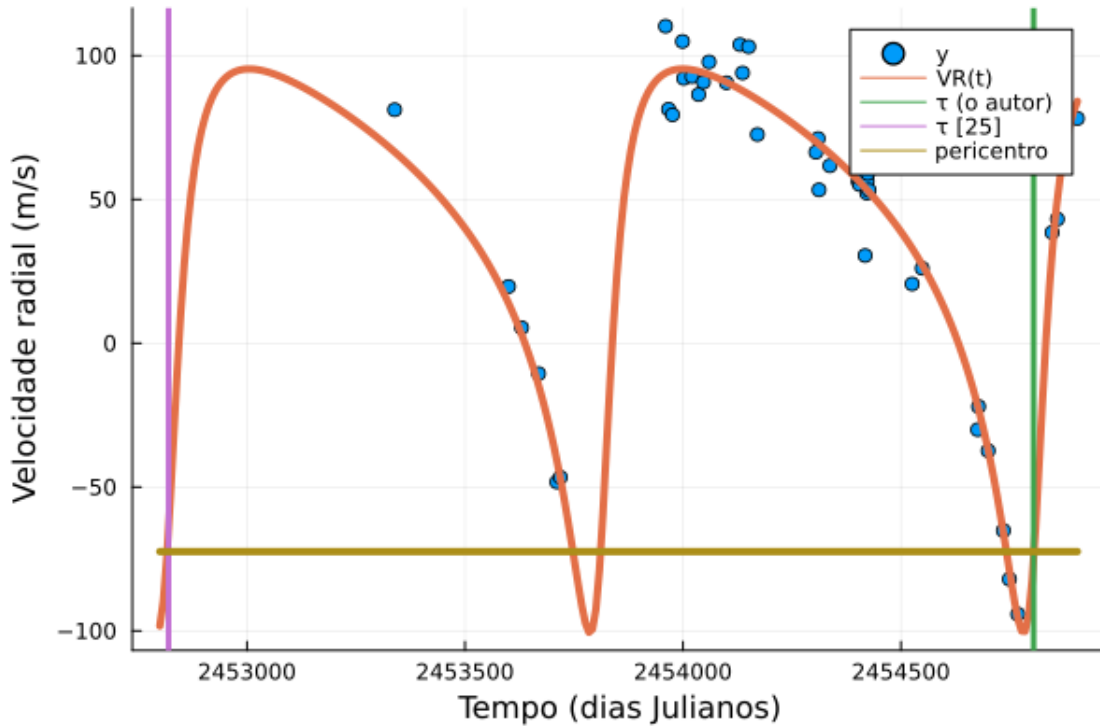


Figura 5.10: Ajuste da função $v_r(t)$ aos dados y de [26] de HD 16175 b

e

$$e = \sqrt{\frac{a_2^2 + b_2^2}{K^2}} = \sqrt{\frac{(-19.719212)^2 + (-15.316851)^2}{65.171164^2}} = 0.38313;$$

argumento e tempo do periastro: temos $\alpha = 0.143898$ e $\beta = 2.4811916$:

$$\omega = 2\alpha - \beta = 2 \cdot 0.143898 - 2.4811916 = -2.193396$$

que em graus $\omega = -2.193396 \cdot 180/\pi = -125.67^\circ$ e

$$\tau = \frac{\alpha - \beta}{n} = \frac{0.143898 - 2.4811916}{0.006119} = -381.982735,$$

consideramos para comparação $\tau = t_1 - 381.982735 = 2452956.698$.

E assim, a comparação dos elementos orbitais pode ser verificado na tabela 5.3 com outros quatro trabalhos no catálogo de [9].

HD 16175 b deixa claro a diferença no ajuste entre os periodogramas p_{GLS} e p_{Kep} devido à sua alta excentricidade. Há uma "dificuldade" da função senoidal $y(t)$ se ajustar aos dados: obtivemos um $p_{GLS} = 0.735964$. Porém como é possível configurar e , P , τ e os coeficientes no periodograma Kepleriano, obtivemos $p_{Kep} = 0.941617$ e fica evidente a "facilidade" da função $v_r(t)$ se ajustar aos dados ao observar o gráfico 5.10.

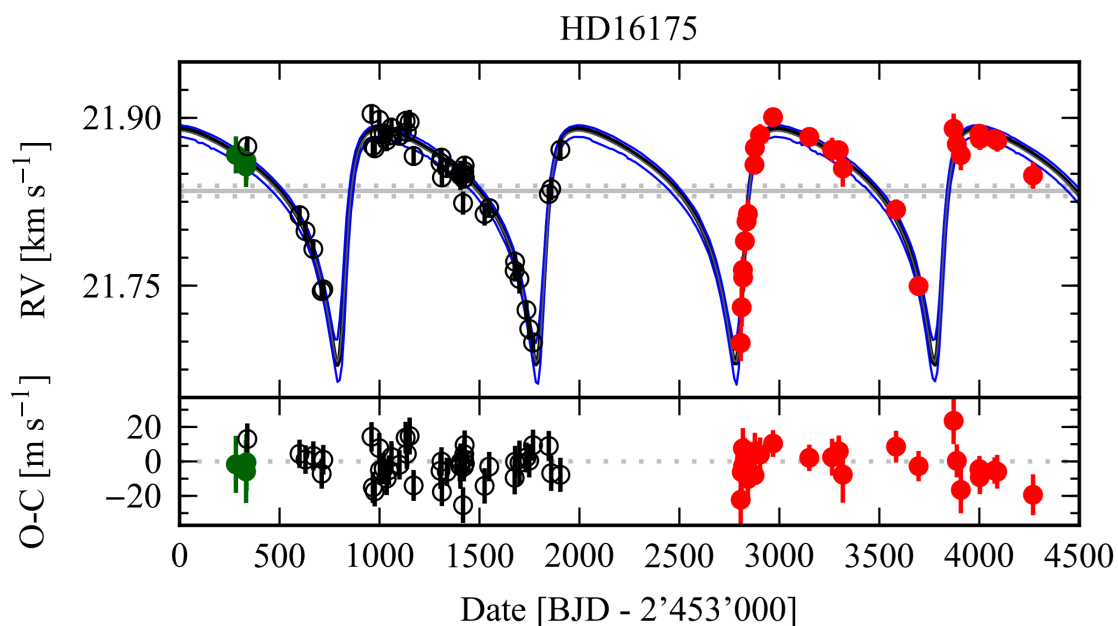


Figura 5.11: Os pontos verdes são dados do equipamento ELODIE, em vermelho de SOPHIE e em preto do Observatório Lick, Califórnia. A parte de baixo mostra a distância entre o ponto e a função, está relacionado aos erros σ_i . Fonte: [8]

El. orbit.	$(p_{Kep}(n))$	(Exp. Elip.)	[34]	[37]	[8]	[26]
e	0.618	0.38	0.60	0.675	0.637	0.59
P (dias)	994	1027	990	981	995	990
K (m/s)	98.01	65.17	94	-	103.5	-
τ (dias)	2454804.3	2452956.7	-	2455800.4	2455801.4	2452820
ω (graus)	137.68	125.67	-	216	221.5	222
γ	42.11	44.82	-	-	21.83	-
rms	8.66	20.74	-	9.0	9.07	9.2

Tabela 5.3: Comparação com outros trabalhos de HD 16175b. Usamos os dados de [26]

6 Conclusão

Esperamos que haja melhor compreensão do periodograma de Lomb-Scargle para fazer ajustes iniciais da função senoidal aos dados para posteriormente melhorá-la com uma função mais adequada, no caso deste trabalho, a função velocidade radial. Considerando a coordenada (X, Y, Z) vimos que a função velocidade radial $v_r(t)$ é baseada na velocidade que a estrela está no eixo Z . Os observadores registram os dados, que servem de fonte para podermos fazer uma descrição da órbita do planeta, por meio dos parâmetros orbitais que compõem a função $v_r(t)$: o período P , a excentricidade e , o tempo do periastro τ , o argumento do periastro ω , a amplitude K e a velocidade radial média γ . Para a obtenção dos parâmetros é necessário chutes iniciais. Começamos pelo período P via periodograma de Lomb-Scargle, que por meio de um vetor de frequências, localiza uma que melhor ajusta a função senoidal aos dados. Com um P inicial, podemos utilizar as expansões elípticas ou o periodograma Kepleriano para obtermos os parâmetros. Foi necessário utilizarmos uma linguagem de programação para aplicação aos dados reais, e optamos por Julia. Esta experiência:

- possibilitou comparação dos métodos expansões elípticas e periodograma Kepleriano na obtenção dos valores dos parâmetros;
- possibilitou utilizarmos vários dados reais, e pudemos comparar os valores obtidos neste trabalho com o de outros trabalhos;
- mostrou o comportamento dos valores obtidos alterando os ajustes adicionais como o fator Nyquist ou a granularidade nas amostras por pico no vetor de frequências: quanto maior estes valores, mais precisos ficam os parâmetros, mas maior tempo de processamento;
- possibilitará futuras análises, melhorias ou usos pois todo o programa está apresentado no apêndice.

Obter parâmetros orbitais com os métodos numéricos e comparar com outros trabalhos foi de grande ajuda na percepção de alguns pontos a se considerar:

- como estimamos o período P antes dos outros elementos orbitais, temos que P impacta no valor dos demais elementos;
- a diferença entre p_{GLS} e p_{Kep} está diretamente relacionada à excentricidade e ;
- dados reais fazem com que precisemos lidar com erros, mas ainda assim há certa proximidade no valor dos parâmetros de outros trabalhos;

-
- confirmamos a citação de [38]: "Como a órbita Kepleriana tem mais graus de liberdade ela sempre tem a maior redução χ^2 ($0 \leq p_{LS} \leq p_{GLS} \leq p_{Kep, e < 0.6} \leq p_{Kep} \leq 1$)", afirmando que $v_r(t)$ — utilizada em p_{kep} — tem mais graus de liberdade que $y(t)$ — utilizada em p_{GLS} — e por isso $p_{kep} \geq p_{GLS}$;
 - as diferenças com os outros trabalhos pode indicar que há necessidade de aperfeiçoamento e melhoria contínua nos trabalhos — inclusive este — que envolvem ajuste de curvas de velocidade radial de órbitas de exoplanetas com métodos numéricos.

Referências

- [1] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. *Handbook of Mathematical Functions* 9^aed. Nova Iorque: National Bureau of Standards (NBS), 1971.
- [2] BEAUGÉ, C.; FERRAZ-MELLO, S.; MICHTCHENKO, T. A. Planetary Masses and Orbital Parameters from Radial Velocity Measurements. *Extrasolar Planets: Formation, Detection and Dynamics*, p. 1–25, 2007.
- [3] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis* 9^aed. Boston: Cengage Learning, 2011.
- [4] CHAKRAVORTY, P. What Is a Signal? *IEEE Signal Processing Magazine*, volume 35, n^o5, p. 175–177, 2018.
- [5] CORREIA, A. C. M. *Complete determination of the orbital parameters of a system with $N + 1$ bodies using a simple Fourier analysis of the data*. Coimbra, Portugal: Universidade de Coimbra, 2022.
- [6] CRATO, N. *O papel dos mínimos quadrados na descoberta dos planetas*. Lisboa, Portugal: Universidade de Lisboa, 2000.
- [7] CUMMING, A.; MARCY, G. W.; BUTLER, R. P. The lick planet search: detectability and mass thresholds. *The American Astronomical Society*, 526:890–915, 1999.
- [8] DÍAZ, R. F.; et al. The SOPHIE search for northern extrasolar planets. XI. Three new companions and an orbit update: Giant planets in the habitable zone. *Astronomy & Astrophysics*, vol. **591**, id.A146, 17 pp, 2016.
- [9] *EXOPLANET EXPLORATION: PLANETS BEYOND OUR SOLAR SYSTEM*. 2020. Disponível em <https://exoplanets.nasa.gov/discovery/exoplanet-catalog/>. Acesso em 2 ago. 2023.
- [10] FORD, E. B. Improving the Efficiency of Markov chain Monte Carlo for Analyzing the Orbits of Extrasolar Planets. *The Astrophysical Journal*, 642:505–522, 2006.
- [11] FRASÃO, D. *Cláudio Ptolomeu: Cientista grego*. eBiografia. 24 de jul. de 2019. Disponível em https://www.ebiografia.com/claudio_ptolomeu/. Acesso em 14 ago. 2023.
- [12] GAVIN, H. P. The Levenberg-Marquardt algorithm for nonlinear least squares curve fitting problems. *Department of civil and environmental engineering*, volume 19, 2019.

-
- [13] HINKEL, N. L.; et. al. A new analysis of the exoplanet hosting system HD 6434. *The Astronomical Journal*, 150:169–176, 2015.
- [14] HORNE, J. H.; BALIUNAS, S. L. A prescription for period analysis of unevenly sampled time series. *The American Astronomical Society*, 302:757–763, 1986.
- [15] JOHNSON, J. A.; et. al. Retired a stars and their companions. IV. Seven jovian exoplanets from Keck Observatory. *The Astronomical Society of the Pacific*, 122:701–711, 2010.
- [16] JULIA PROGRAMMING LANGUAGE, The. Disponível em <https://julialang.org/>. Acesso em 11 dez. 2023.
- [17] KOCHENDERFER, M. J.; WHEELER, T. A. *Algorithms for Optimization*. Londres: The MIT Press Cambridge, 2019.
- [18] LOMB, N. R. *Least-squares frequency analysis of unequally spaced data*. Sydney, Austrália: University of Sydney, 1975.
- [19] LOVIS, C.; FISCHER, D. A. Radial Velocity. *Exoplanets*, 526:27–53, 2010.
- [20] LUHN, J. K. et al. Retired A Stars and Their Companions. VIII. 15 New Planetary Signals around Subgiants and Transit Parameters for California Planet Search Planets with Subgiant Hosts. *The Astronomical Journal*, 157:149–171, 2019.
- [21] MAYOR, M.; et. al. The CORALIE survey for southern extra-solar planets. XII. Orbital solutions for 16 extra-solar planets discovered with CORALIE. *Astronomy & Astrophysics*, 415:391–402, 2004.
- [22] MURRAY, C. D.; CORREIA, A. C. M. Keplerian Orbits and Dynamics of Exoplanets. *Exoplanets*, 526:15–23, 2010.
- [23] MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. *Solar System Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [24] NOYES, R. W. et al. A Planet Orbiting the Star ρ Coronae Borealis. *The Astrophysical Journal*, 483:111–114, 1997.
- [25] OLIVEIRA, C. *Nicolau Copérnico*. eBiografia. 2010. Disponível em <https://www.infoescola.com/biografias/nicolau-copernico/>. Acesso em 14 ago. 2023.
- [26] PEEK, K. M. G.; et al. Old, Rich, and Eccentric: Two Jovian Planets Orbiting Evolved Metal-Rich Stars. *The Astrophysical Society of the Pacific*, 121:613–620, 2009.
- [27] PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipies in C*. 2a ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [28] PULTAROVA, T.; CARTER, J. *Astronomy: Everything you need to know*. Space.com, 2023. Disponível em: <https://www.space.com/16014-astronomy.html> Acessado em 09 ago 2023.

-
- [29] *QUEM FOI JOHANNES KEPLER, UM DOS ASTRÔNOMOS MAIS IMPORTANTES DA HISTÓRIA*. 2020. Disponível em <https://revistagalileu.globo.com/Sociedade/Historia/noticia/2020/01/quem-foi-johannes-kepler-um-dos-astronomos-mais-importantes-da-historia.html>. Acesso em 14 ago. 2023.
- [30] da ROCHA, V. R. P.; TORT, A. C. Redescobrimo a lei empírica de Hubble em sala de aula. *Revista Brasileira e Ensino de Física*, volume 41, issue 4, 2019.
- [31] SCARGLE, J. D. Studies in astronomical time series analysis II: Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *The Astrophysical Journal*, 263:835–853, 1982.
- [32] da SILVA, R. et al. ELODIE metallicity-biased search for transiting Hot Jupiters. IV. Intermediate period planets orbiting the stars HD 43691 and HD 132406. *Astronomy and Astrophysics*, 473:323–328, issue 1, 2007.
- [33] da SILVEIRA, E. *Poluição luminosa de grandes cidades faz estrelas 'desaparecerem' do céu e pesquisas minguarem*. BBC Brasil. 27 de mai. de 2018. Disponível em <https://www.bbc.com/portuguese/geral-44177666>. Acesso em 2 ago. 2023.
- [34] STASSUN, K. G. et al. Accurate Empirical Radii and Masses of Planets and Their Host Stars with Gaia Parallaxes. *The Astronomical Journal*, 153:136–156, 2017.
- [35] *TYCHO BRAHE: BIOGRAFIA E CONTRIBUIÇÕES PARA A CIÊNCIA*. 2023. Disponível em <https://maestrovirtuale.com/tycho-brahe-biografia-e-contribuicoes-para-a-ciencia/>. Acesso em 2 ago. 2023.
- [36] VANDERPLAS, J. Understanding the Lomb-Scargle Periodogram. *The American Astronomical Society*, ApJS **236** 16, 2018.
- [37] XIAO, G.; et al. The Masses of a Sample of Radial-velocity Exoplanets with Astrometric Measurements. *Research in Astronomy and Astrophysics*, vol. **23**, issue 5, id.055022, 32 pp, 2023.
- [38] ZECHMEISTER, M.; KÜRSTER, M. The generalized Lomb-Scargle periodogram: A new formalism for the floating-mean and Keplerian periodograms. *Astronomy & Astrophysics*, 496:577–584, 2009.

A Código fonte do programa

O código fonte escrito em Julia será mostrado neste apêndice, dividido em Programação principal, programação de apoio e exemplo de uso, todos seguidos de uma breve explicação de cada função.

Para utilizá-lo, é necessário baixar Julia em <https://julialang.org/downloads/>. É recomendável também baixar um editor ou IDE para auxiliar na programação. Outras necessidades são as bibliotecas utilizadas. Para obtê-las basta abrir Julia no terminal e ir executando linha a linha, ou executar em um script:

```
1 using Pkg
2 Pkg.add("PackageCompiler")
3 Pkg.add("Calculus")
4 Pkg.add("LinearAlgebra")
5 Pkg.add("Plots")
```

Um *script* Julia roda com extensão ".jl". Abaixo um exemplo de um *script* Julia, helloWorld.jl:

```
1 function main()
2     println("Hello world!")
3 end
4 main()
```

A.1 Programação principal

Abaixo a programação foi construída conforme os capítulos 3 e 4. É principal no sentido de que foram reunidos aqui as funções analisadas neste trabalho. Temos a construção do vetor de frequências, o $p_{GLS}(n)$ com $n = 2\pi f_j$ que utiliza χ_0^2 e $\chi_{GLS}^2(n)$, o $\chi_{Kep}^2(n)$ que substitui o $\chi_{GLS}^2(n)$ em $p_{Kep}(n)$. Há também uma função que encontra o melhor valor — ou seja, com a maior potência — para excentricidade e e o tempo do periastro τ , bem como o método de Newton-Raphson para encontrar a anomalia excêntrica E e consequentemente a anomalia verdadeira $\nu(t)$.

```
1 # Bibliotecas :
2 using Calculus # Para usar derivative(f, x)
3 using LinearAlgebra # Para usar norm(f(x0))
4
5 function newton_raphson(f, x0, tol)
6     while norm(f(x0)) > tol
7         df(x) = derivative(f, x)
8         x0 = x0 - f(x0) / df(x0)
9     end
10    return x0
```

```

11     end
12
13     function frequencia(t, f_por_pico, nyquist)
14     T = maximum(t) - minimum(t)
15     delta_f = inv(f_por_pico * T)
16     f_min = delta_f/2.0
17     f_max = (nyquist * length(t)) / (2 * T)
18     f = []
19     f_curr = f_min
20     while (f_curr <= f_max)
21     push!(f, f_curr)
22     f_curr = f_curr + delta_f
23     end
24     return f
25     end
26
27     function qui_quadrado_0(s, err)
28     W = 0.0
29     Y = 0.0
30     YY2 = 0.0
31     w = zeros(length(err))
32     for i in 1:length(s)
33     W = W + (1/(err[i]^2))
34     end
35     for i in 1:length(s)
36     w[i] = (1/W) * (1/(err[i]^2))
37     Y = Y + (w[i] * s[i])
38     YY2 = YY2 + (w[i] * (s[i]^2))
39     end
40     YY = YY2 - (Y * Y)
41     return W * YY
42     end
43
44     function qui_quadrado(t, s, err, f)
45     W = 0.0
46     Y = 0.0
47     C = 0.0
48     S = 0.0
49     YY2 = 0.0
50     YC2 = 0.0
51     YS2 = 0.0
52     CC2 = 0.0
53     SS2 = 0.0
54     CS2 = 0.0
55     omega = 2 * pi * f
56     w = zeros(length(t))
57     for i in 1:length(t)
58     W = W + (1/(err[i]^2))
59     end
60     for i in 1:length(t)
61     w[i] = (1/W) * (1/(err[i]^2))
62     Y = Y + w[i] * s[i]
63     C = C + w[i] * cos(omega * t[i])
64     S = S + w[i] * sin(omega * t[i])
65     YY2 = YY2 + (w[i] * (s[i]^2))
66     YC2 = YC2 + w[i] * s[i] * cos(omega * t[i])
67     YS2 = YS2 + w[i] * s[i] * sin(omega * t[i])
68     CC2 = CC2 + w[i] * cos(omega * t[i]) * cos(omega * t[i])

```

```

69     SS2 = SS2 + w[i] * sin(omega * t[i]) * sin(omega * t[i])
70     CS2 = CS2 + w[i] * cos(omega * t[i]) * sin(omega * t[i])
71     end
72     YY = YY2 - Y * Y
73     YC = YC2 - Y * C
74     YS = YS2 - Y * S
75     CC = CC2 - C * C
76     SS = SS2 - S * S
77     S = CS2 - C * S
78     D = CC * SS - CS * CS
79     quiQuadrado = YY - ((SS * YC^2) / D) -
80     ((CC * YS^2) / D) + (2 * (CS * YC * YS) / D)
81     return quiQuadrado * W
82     end
83
84     function potencia(t, s, err, f)
85     p = zeros(length(f))
86     X0 = qui_quadrado_0(s, err)
87
88     for i in 1:length(f)
89     Xf = qui_quadrado(t, s, err, f[i])
90     p[i] = (X0 - Xf) / X0
91     end
92     return p
93     end
94
95     function qui_quadrado_kep(t, s, err, vt)
96     W = 0.0
97     Y = 0.0
98     C = 0.0
99     S = 0.0
100    YY2 = 0.0
101    YC2 = 0.0
102    YS2 = 0.0
103    CC2 = 0.0
104    SS2 = 0.0
105    CS2 = 0.0
106    w = zeros(length(t))
107    for i in 1:length(t)
108    W = W + (1/(err[i]^2))
109    end
110    for i in 1:length(t)
111    w[i] = (1/W) * (1/(err[i]^2))
112    Y = Y + w[i] * s[i]
113    C = C + w[i] * cos(vt[i])
114    S = S + w[i] * sin(vt[i])
115    YY2 = YY2 + (w[i] * (s[i]^2))
116    YC2 = YC2 + w[i] * s[i] * cos(vt[i])
117    YS2 = YS2 + w[i] * s[i] * sin(vt[i])
118    CC2 = CC2 + w[i] * cos(vt[i]) * cos(vt[i])
119    SS2 = SS2 + w[i] * sin(vt[i]) * sin(vt[i])
120    CS2 = CS2 + w[i] * cos(vt[i]) * sin(vt[i])
121    end
122    YY = YY2 - Y * Y
123    YC = YC2 - Y * C
124    YS = YS2 - Y * S
125    CC = CC2 - C * C
126    SS = SS2 - S * S

```

```

127     CS = CS2 - C * S
128     D = CC * SS - CS * CS
129     quiQuadrado = YY - ((SS * YC^2) / D) -
130     ((CC * YS^2) / D) + (2 * (CS * YC * YS) / D)
131     return quiQuadrado * W
132     end
133
134     function potencia_eT0vt(t, s, err, f, e_max, resolucao, tol)
135     X0 = qui_quadrado_0(s, err)
136     e = range(0.01, e_max, resolucao)
137     P = 1/f
138     #t0 = range(t[length(t)] - (P), t[length(t)], resolucao)
139     T = (maximum(t) - minimum(t))/2
140     t0 = range(t[length(t)] - T, t[length(t)], resolucao)
141     eBest = e[1]
142     t0Best = t0[1]
143     vt = zeros(length(t))
144     vtBest = zeros(length(t))
145     pBest = 0.0
146     pCurr = 0.0
147     for i in 1:resolucao
148     for j in 1:resolucao
149     for k in 1:length(t)
150     M = ((2*pi)/P) * (t[k] - t0[j])
151     g(E0) = E0 - e[i] * sin(E0) - M
152     E = newton_raphson(g, M, tol)
153     vt[k] = 2 * atan(sqrt((1+e[i])/(1-e[i]))) *
154     tan(E/2))
155     end
156     Xf = qui_quadrado_kep(t, s, err, vt)
157     pCurr = (X0 - Xf) / X0
158     if pCurr > pBest
159     eBest = e[i]
160     t0Best = t0[j]
161     vtBest = copy(vt)
162     pBest = pCurr
163     end
164     end
165     end
166     R = eBest, t0Best, pBest, vtBest
167     return R
168     end

```

A função de Newton-Raphson que começa na linha 6 tem os parâmetros `f`, `x0` e `tol`. O parâmetro:

- `f` é a função a qual o usuário deseja encontrar a raiz — um exemplo para `f`: `f(x0) = x0 - 0.3 * sin(x0)`;
- `x0` começa com um chute inicial, e com as iterações acontecendo, vai se tornando a aproximação atual da raiz — por exemplo: `x0 = 10`, `x0 = ((2*pi)/300) * 40`;
- `tol` é o quão próximo o usuário deseja que `x0` esteja da raiz de `f` — exemplo: `tol = 0.0001`.

Na linha 13 temos `function frequencia(t, f_por_pico, nyquist)`, que cria o vetor de frequências `f` que foi explicado na seção 4.2. O parâmetro `t` é um vetor dos tempos

oriundo do arquivo de dados, `f_por_pico` é o fator que ajusta o tamanho do passo (a resolução) do vetor de frequências, as amostras por pico e `nyquist` é o fator que configura o tamanho do vetor de frequências.

Na linha 27, o que temos é o χ_0^2 usado como referência para o periodograma. O parâmetro:

- `s` é um vetor das velocidades radiais do arquivo de dados;
- `err` é um vetor dos erros, as incertezas σ das respectivas velocidades radiais de `s`.

Na linha 44, `function qui_quadrado(t, s, err, f)` é sobre o $\chi^2(n)$. Os parâmetros:

- `t` é o vetor dos tempos do arquivo de dados;
- `s` é o vetor das velocidades radiais, dos respectivos momentos em `t`;
- `err` é o vetor das incertezas das velocidades radiais em `s`;
- `f` é a frequência a ser testada — aqui não é um vetor, é um escalar.

O algoritmo desta função foi baseado na abordagem alternativa, conforme a seção ??.

`function potencia(t, s, err, f)` na linha 84 é o periodograma $p(n)$ (ou $p(\omega)$), conforme a equação 4.6. Retorna um vetor de potências, ou seja, uma potência de cada frequência do vetor `f`. Sobre os parâmetros:

- `t` é o vetor dos tempos;
- `s` é o vetor das velocidades radiais;
- `err` é o vetor das incertezas;
- `f` é o vetor das frequências que vem de `function frequencia(t)`.

Note que a eq. 4.6 está na linha 91.

Na linha 95 temos `function qui_quadrado_kep(t, s, err, vt)`, também teve por base a seção ??, onde:

- `t` é o vetor de tempos;
- `s` é o vetor de velocidades radiais;
- `err` é o vetor de incertezas;
- `vt` é o vetor de anomalias verdadeiras $\nu(t)$.

A função `potencia_eT0vt(t, s, err, f, e_max, resolucao, tol)` foi feita de forma pragmática, que recebe sete parâmetros e sai quatro retornos. Foi utilizado o algoritmo chamado Grid Search para localizar e , τ e $\nu(t)$ que resulta em um maior $p_{Kep}(n)$ possível. Sobre os parâmetros de entrada:

- `t`, `s` e `err` são os vetores do arquivo dos dados coletados;
- `f` a esta altura é a melhor frequência que veio do periodograma *generalised Lomb-Scargle*, ou seja, que teve a maior potência ($\max\{\mathbf{p}\}$),

- `e_max` é o valor máximo para excentricidade a ser decidido pelo usuário, pois, na realidade, não tem como haver uma órbita com excentricidade muito próxima de 1 — mesmo assim, os resultados que obtivemos foram com um `e_max = 0.8`;
- `resolucao` é o valor para dividir em partes iguais os vetores de excentricidade (e na linha 137) e tempo do periastro (`t0` na linha 139);
- `tol` é o valor para tolerância na função `newton_raphson(f, x0, tol)`, que é usada na linha 151 para calcular a anomalia excêntrica.

Tornamos a linha 138 "obsoleta", e atualizamos o valor de `t0` conforme linhas 139 e 140. A seção ?? **Observações práticas** mostra empiricamente que foi necessário aumentar o alcance para os candidatos a τ . O parâmetro `f` serve para termos o período `P` que é usado para calcular a anomalia média `M` na linha 150, que por sua vez é usada na equação de Kepler na linha 151 para passar no método de Newton-Raphson na linha 152 afim de obtermos a anomalia excêntrica `E` e finalmente calcular a anomalia verdadeira na linha 153, que é a eq. 3.3.

Uma vez obtido a anomalia verdadeira, calculamos o $\chi_{Kep}^2(n)$ na linha 156, e temos a potência $p_{Kep}(n)$ na linha 157. Este valor de potência é o que vai determinar o *output* desta função, que retorna o melhor valor para:

- excentricidade `eBest`;
- tempo do periastro `t0Best`;
- potência `pBest`;
- anomalia verdadeira `vtBest`.

Para encontrar os elementos orbitais que dependem dos coeficientes a , b e c da função $y(t)$ (eq. 4.14) ou $v_r(t)$ (eq. 4.26) basta utilizar a função abaixo:

```

1      function coeficientes(t, s, err, vt)
2      W = 0.0
3      Y = 0.0
4      C = 0.0
5      S = 0.0
6      YC2 = 0.0
7      YS2 = 0.0
8      CC2 = 0.0
9      SS2 = 0.0
10     CS2 = 0.0
11     w = zeros(length(t))
12     for i in 1:length(t)
13     W = W + (1/(err[i]^2))
14     end
15     for i in 1:length(t)
16     w[i] = (1/W) * (1/(err[i]^2))
17     Y = Y + w[i] * s[i]
18     C = C + w[i] * cos(vt[i])
19     S = S + w[i] * sin(vt[i])
20     YC2 = YC2 + w[i] * s[i] * cos(vt[i])
21     YS2 = YS2 + w[i] * s[i] * sin(vt[i])
22     CC2 = CC2 + w[i] * cos(vt[i]) * cos(vt[i])
23     SS2 = SS2 + w[i] * sin(vt[i]) * sin(vt[i])
24     CS2 = CS2 + w[i] * cos(vt[i]) * sin(vt[i])

```

```

25     end
26     YC = YC2 - Y * C
27     YS = YS2 - Y * S
28     CC = CC2 - C * C
29     SS = SS2 - S * S
30     CS = CS2 - C * S
31     D = CC * SS - CS * CS
32     a = (YC * SS - YS * CS) / D
33     b = (YS * CC - YC * CS) / D
34     c = Y - a * C - b * S
35     R = vcat(a, b, c)
36     return R
37     end

```

Note que foi baseado na abordagem alternativa conforme seção ???. Os parâmetros \mathbf{t} , \mathbf{s} e \mathbf{err} são o tempo, velocidade radial e incertezas respectivamente, lidos do arquivo. O \mathbf{vt} deve ser um vetor que, se quisermos os coeficientes de $y(t)$ da equação 4.14 (*generalised Lomb-Scargle*), basta colocar um vetor com tamanho de \mathbf{t} , e os valores de cada elemento seja $\mathbf{vt}[i] = 2 * \pi * f * \mathbf{t}[i]$, onde f é a frequência com a maior potência; se o desejado for os coeficientes de $v_r(t)$ da equação 4.26 (periodograma Kepleriano), deverá ser o output \mathbf{vtBest} da função `potencia_eT0vt(t, s, err, f, e_max, resolucao, tol)`. Para ambos os casos, fica possível estimar K , ω e γ , bem como plotar os pontos com a função em um gráfico.

A.2 Programação de apoio

Esta seção contém os códigos que foram construídos para dar funcionamento ao programa principal. Aqui se encontram os códigos que não estão diretamente relacionados ao assunto, registrados apenas para esclarecer como funciona o programa desenvolvido neste trabalho.

Abaixo é um módulo que faz leitura de arquivos com dados de velocidade radial. Funciona com um arquivo como o da figura 5.2 com extensão ".tbl". Se for customizado em um ".csv" por exemplo, recomendamos que:

- seja separado por espaço ou "Tab";
- a primeira coluna seja o dos tempos;
- a segunda coluna seja o das velocidades radiais;
- a terceira coluna seja o das incertezas.

```

1     module dados
2
3     function get_coluna(arquivo, coluna, linhasCabecalho)
4     f = open(arquivo, "r")
5     linhas = readlines(f)
6     i = 0
7     d = []
8     for linha in linhas
9     i = i + 1
10    if (i > linhasCabecalho)
11    valores = split(linha)

```

```

12     push!(d, tryparse(Float64, valores[coluna]))
13     end
14     end
15     close(f)
16     return d
17     end

```

A função `get_coluna(arquivo, coluna, linhasCabecalho)` recebe:

- `arquivo` como parâmetro e deve ser o nome do arquivo. Recomendamos que seja um arquivo de [9], conforme a figura 5.2, ou um ".csv", preferencialmente conforme descrito acima;
- `coluna` como parâmetro, que é qual das colunas de dados se deseja obter; geralmente a primeira coluna é o dos tempos, a segunda coluna é o das velocidades radiais e a terceira coluna é o das incertezas;
- `linhasCabecalho`, que é para informar quantas linhas a função deve ignorar antes de começar a coletar os dados; um arquivo nos moldes da fig. 5.2 (vindo de [9]) vem com 22 linhas de cabeçalho.

O primeiro elemento de vetores e listas em Julia começa no índice $i = 1$ (geralmente as linguagens de programação começam no índice $i = 0$). Então, caso a intenção seja obter os tempos de um arquivo de "HD4313.tbl" por exemplo, o comando poderia ser `t = dados.get_coluna("HD4313.tbl", 1, 22)`.

As funções tais como `open(arquivo, "r")`, `readlines(f)` ou `split(linha)` estão embutidas em Julia e não necessitam de bibliotecas específicas. Na linha 4 em `f = open(arquivo, "r")`, o parâmetro "r" indica que queremos ler o parâmetro `arquivo`; na linha 5 temos `linhas = readlines(f)`, que irá guardar as linhas do arquivo na variável `linhas`; na linha 11, o comando `split(linha)` faz a leitura da `linha`, guarda cada caractere encontrado até encontrar um espaço ou "Tab", e quando isto ocorre, salva os dados (menos o(s) espaço(s) e "Tab"), adiciona um próximo elemento e volta a guardar cada caractere até o próximo espaço ou "Tab"... quando não houver mais caracteres na `linha`, o programa continua.

Na linha 1, `module dados` permite que as funções escritas neste script seja executado em outro(s) script(s) Julia.

À seguir temos uma função que foi utilizada para identificar o índice do maior valor de potência em um vetor de potências. Sabendo disso, acessamos a melhor frequência que está em outro vetor. Na seção 4.2 Lomb-Scargle, quando citamos que queremos *p_{ótima}* para obtermos *f_{ótima}*, utilizamos esta função abaixo.

```

1     function indice_do_maior_valor(vet, n)
2         if n == 1
3             return 1
4         end
5         k = indice_do_maior_valor(vet, n - 1)
6         if vet[n] > vet[k]
7             return n
8         else
9             return k
10        end
11        end

```

Nesta função, busca-se qual o maior valor do vetor `vet` de tamanho `n` e retorna seu índice. Como `function indice_do_maior_valor(vet, n)` é recursivo, as linhas de 2 a 4 tratam-se da condição de parada: quando `vet` tem tamanho 1. À partir da linha 5, ficamos comparando `vet["ultimo elemento"]` com `vet["penultimo elemento"]`, sempre retirando o último elemento de `vet` recursivamente na linha 5 até atingir a condição de parada.

Para calcular a probabilidade de falso-alarme (*FAP*), necessitamos da função $Prob(p > p_0)$ mencionada na eq. 4.11. Mas a função abaixo utiliza uma forma alternativa de se calcular *FAP*:

```

1      function embaralha(arr)
2      len = length(arr)
3      for i = 1:len
4      j = rand(1:len)
5      arr[i], arr[j] = arr[j], arr[i]
6      end
7      return arr
8      end
9
10     function fap(t, s, err, p0, qtd)
11     z = 0
12     copia_t = copy(t)
13     copia_s = copy(s)
14     copia_e = copy(err)
15     for i in 1:qtd
16     copia_t = embaralha(copia_t)
17     copia_s = embaralha(copia_s)
18     copia_e = embaralha(copia_e)
19     f = frequencia(copia_t, 20, 20)
20     p = potencia(copia_t, copia_s, copia_e, f)
21     best = indice_do_maior_valor(p, length(p))
22     if p[best] >= p0
23     z = z + 1
24     end
25     end
26     return z/qtd
27     end

```

A função `fap(t, s, err, p0, qtd)` tem um contador `z`, que soma +1 sempre que aleatoriamente surgir um valor `p` maior que `p0`. A aleatoriedade vem da função `rand(1:len)` em `function embaralha(arr)`. Esta função recebe um vetor, troca aleatoriamente de posição seus valores e a retorna. Assim, embaralhamos os tempos `t`, as velocidades radiais `s` e as incertezas `err` `qtd` vezes. Assim, temos como retorno:

$$\text{retorno} = \frac{\text{quantidade de vezes que } p \geq p_0}{\text{quantidade total de tentativas}}$$

Mas para evitar tanto processamento computacional, [38] apresenta algumas formas para se calcular $Prob(p > p_0)$. Utilizamos — e recomendamos — a seguinte alternativa:

```

1      function prob(N, p0)
2      P = (1 - p0)^((N-3)/2)
3      return P
4      end

```

Os gráficos foram feitos utilizando as seguintes funções:

```

1      using Plots
2
3      function anomaliaVerdadeira(t, P, e, tau, tol)
4      vt = zeros(length(t))
5      for i in 1:length(t)
6      M = ((2*pi)/P) * (t[i] - tau) #Palpite inicial E0 = M
7      g(E0) = E0 - e * sin(E0) - M # Funcao f(x)
8      E = newton_raphson(g, M, tol)
9      vt[i] = 2 * atan(sqrt((1+e)/(1-e)) * tan(E/2))
10     end
11     return vt
12 end
13
14     function plotar_no_grafico_Kep(t, s, a, b, c, f, e, t0, tol)
15     P = 1/f
16     t_fit = range(0, stop = 1, length = (length(t)*3))
17     s_fit = zeros(length(t_fit))
18     av = anomaliaVerdadeira(t_fit/f, P ,e ,t0 ,tol)
19     pericentro = a+c
20     pericentros = zeros(length(t_fit))
21
22     for i in 1:length(t_fit)
23     s_fit[i] = a * cos(av[i]) + b * sin(av[i]) + c
24     pericentros[i] = pericentro
25 end
26
27     scatter(mod.(t.*f, 1), s, lab="y")
28     plot!(t_fit, s_fit, lab="VR(t) em uma fase", linewidth=4)
29     savefig(plot!(t_fit, pericentros, lab="pericentro",
30     linewidth=4), "ajustePeriodo.png")
31     scatter(t, s, lab="y")
32     t_fit = range(minimum(t), maximum(t), length = (length(t)*3))
33     av = anomaliaVerdadeira(t_fit, P ,e ,t0 ,tol)
34
35     for i in 1:length(t_fit)
36     s_fit[i] = a * cos(av[i]) + b * sin(av[i]) + c
37 end
38     plot!(t_fit, s_fit, lab="VR(t)", linewidth=4)
39     plot!([t0], seriestype="vline", label="τ (o autor)", linewidth=3)
40     savefig(plot!(t_fit, pericentros, lab="pericentro",
41     linewidth=4), "ajusteTempo.png")
42 end

```

A primeira linha, `using Plots`, é um pacote que habilita funções tais como `scatter(x, y)`, `plot(x, y)` ou `savefig(plot(x, y), "grafico.png")` para construção de gráficos. A função `plotar_no_grafico_Kep(t, s, a, b, c, f, e, t0, tol)` foi feita para facilitar a geração de gráficos neste trabalho, e recebe como parâmetros de entrada:

- `t`: vetor de tempos;
- `s`: vetor das velocidades radiais;
- `a`, `b`, `c`: coeficientes da função $v_r(t)$;
- `f`: a melhor frequência;
- `e`: excentricidade;

- `t0`: momento do periastro (τ);
- `tol`: a tolerância condição de parada no método de Newton.

A função `anomaliaVerdadeira(t, P, e, tau, tol)` é a execução da eq. 3.3 que possibilita a função $v_r(t)$ se ajustar aos dados e é utilizada em `plotar_no_grafico_Kep(t, s, a, b, c, f, e, t0, tol)`. A variável `av` é o $\nu(t)$ mas com o vetor dos tempos ajustado conforme eq. 5.3 em `t_fit/f` (na eq. 5.3 foi expresso como " $t'P$ "e, neste caso, $t' = t_fit$). Preparamos `s_fit` para receber $v_r(t)$ versão eq. 4.26 utilizando os coeficientes `a`, `b` e `c`. O comando `scatter` plota pontos no gráfico, e ainda trabalhando em um período, plotamos os pontos conforme as coordenadas em 5.2 (que foi expresso como $(t/P \bmod 1, y)$).

O código abaixo é usado para atualizar a frequência (ou o período) após a obtenção da excentricidade e do momento do periastro no periodograma Kepleriano.

```

1      function potencia_new_P(t, s, err, f, best, e, t0, resolucao, tol)
2      X0 = qui_quadrado_0(s, err)
3      meio_res = resolucao÷2
4      vt = zeros(length(t))
5      newBest = 0
6      pBest = 0.0
7      pCurr = 0.0
8
9      esq = 1
10     dir = length(f)
11     if (best - meio_res > 1)
12     esq = best - meio_res
13     end
14     if (best + meio_res < length(f))
15     dir = best + meio_res
16     end
17
18     esq = 1
19     dir = length(f)
20
21     for i in esq:dir
22     P = 1/f[i]
23     for j in 1:length(t)
24     M = ((2*pi)/P) * (t[j] - t0)
25     g(E0) = E0 - e * sin(E0) - M # Funcao f(x)
26     E = newton_raphson(g, M, tol)
27     vt[j] = 2 * atan(sqrt((1+e)/(1-e)) * tan(E/2))
28     end
29     Xf = qui_quadrado_kep(t, s, err, vt)
30     pCurr = (X0 - Xf) / X0
31     if pCurr > pBest
32     newBest = i
33     pBest = pCurr
34     end
35     end
36     return newBest
37     end

```

A função recebe os seguintes parâmetros de entrada:

- `t`: tempos dos dados;

- **s**: dados de velocidades radiais;
- **err**: variações das velocidades radiais coletadas;
- **f**: destacamos que aqui é o **vetor** de frequências construída pela função `frequencia(t, f_por_pico, nyquist)`;
- **best**: é o índice da maior potência oriúnda do periodograma Lomb-Scargle generalizado;
- **e**: é a excentricidade estimada no periodograma Kepleriano;
- **t0**: é o momento do periastro estimado no periodograma Kepleriano;
- **resolucao**: define o alcance da varredura que esta função fará no vetor **f**;
- **tol**: a tolerância condição de parada na função iterativa `newton_raphson(g, M, tol)`.

Será atualizada a frequência $f_{ótima}$ desta vez com **e** e **t0** fixados, fazendo a varredura pela vizinhança da antiga melhor frequência — que foi pelo periodograma Lomb-Scargle generalizada — retornando o índice da maior potência Kepleriana. A mudança para uma nova frequência é proporcional à excentricidade.

A.3 Exemplo de uso

Abaixo um exemplo de uso.

```

1      using Plots
2      using Calculus
3      using LinearAlgebra
4      include("sistema/dados.jl")
5
6      function main()
7
8          #1. Leitura dos dados
9          arquivoDados = "HD4313.tbl"
10         t = convert(Vector{Float64}, dados.getColuna(arquivoDados, 1, 22))
11         s = convert(Vector{Float64}, dados.getColuna(arquivoDados, 2, 22))
12         err = convert(Vector{Float64}, dados.getColuna(arquivoDados, 3, 22))
13
14         #2. Vetor de frequencias
15         f = frequencia(t)
16
17         #3. Vetor de potencias
18         p = potencia(t, s, err, f)
19
20         #4. Maior potencia
21         best = indice_do_maior_valor(p, length(p))
22
23         #5. Periodograma Kepleriano
24         e_max = 0.8 #Define o maior valor para excentricidade
25         resolucao = 60 #Define a resolucao do grid de e e t0
26         tol = 0.001 # Tolerancia de erro na funcao newton_raphson
27         e, t0, p_kep, vt = potencia_eT0vt(t, s, err, f[best],
28         e_max, resolucao, tol)

```

```

29
30 #Obs 1. Atualiza a melhor frequencia
31 newBest = potencia_new_P(t, s, err, f, best, e,
32 t0, resolucao, tol)
33 println("P = ", (1/f[newBest]))
34 e, t0, p_kep, vt = potencia_eT0vt(t, s, err, f[newBest],
35 e_max, resolucao, tol)
36
37 #Obs 2. Metodo dos minimos quadrados
38 a, b, c = coeficientes(t, s, err, vt)
39
40
41 #6. Amplitude, argumento do periastro e velocidade radial media
42 k = sqrt(a^2 + b^2)
43 println("K = ", k)
44 cosomega = a/k
45 println("cos(omega) = $cosomega")
46 println("omega(rad) = ", acos(cosomega))
47 println("omega(graus) = ", acos(cosomega) * 180/pi)
48 println("gamma = ", -(k*e*cosomega - c))
49
50 # Geracao de grafico
51 plotar_no_grafico_Kep(t, s, a, b, c, f[newBest], e, t0, tol)
52 end
53
54 main()

```

O código abaixo é um exemplo de uso das expansões elípticas para estimar os parâmetros orbitais. É mais rápido que o periodograma Kepleriano, mas não é recomendável se a órbita for de excentricidade alta.

```

1 include("sistema/dados.jl")
2
3 function main()
4 #1. Leitura dos dados
5 arquivoDados = "HD6434.csv"
6 t = convert(Vector{Float64}, dados.getColuna(arquivoDados, 1, 1))
7 s = convert(Vector{Float64}, dados.getColuna(arquivoDados, 2, 1))
8 err = convert(Vector{Float64}, dados.getColuna(arquivoDados, 3, 1))
9
10 #2. Vetor de frequencias
11 f = frequencia(t)
12
13 #3. Vetor de potencias
14 p = potencia(t, s, err, f)
15
16 #4. Maior potencia
17 best = indice_do_maior_valor(p, length(p))
18
19 #5. Coeficientes da primeira harmonica
20 n = 2 * pi * f[best]
21 a1, b1, c1 = coeficientes(t, s, err, (n .* t))
22
23 #6. Funcao de ajuste
24 s1 = zeros(length(t))
25 for i in 1:length(s1)
26 s1[i] = a1 * cos(n*t[i]) + b1 * sin(n*t[i]) + c1
27 end

```

```
28
29     #7. Residuos
30     residuos = zeros(length(t))
31     for i in 1:length(residuos)
32     residuos[i] = s[i] - s1[i]
33     end
34
35     #8. Coeficientes da segunda harmonica
36     a2, b2, c2 = coeficientes(t, residuos, err, (2*n .* t))
37
38     #9. Estimativas
39     println("P = ", (1/f[best]))
40     println("gamma = $c1")
41     k = sqrt(a1^2 + b1^2)
42     println("K = $k")
43     e = sqrt((a2^2 + b2^2)/k^2)
44     println("e = $e")
45     alfa = atan((-b1), a1)
46     beta = atan((-b2), a2)
47     tau = (alfa - beta)/n
48     println("tau = $tau")
49     omega = 2*alfa - beta
50     println("omega(graus) = ", (omega*180/pi))
51     end
52
53     main()
```

B Dados de velocidades radiais observadas

Seguem abaixo os dados utilizados neste trabalho.

t (calendário juliano)	t (calendário comum)	s (m/s)	σ (m/s)
2454339.932	26/8/2007	23.92	1.57
2454399.842	25/10/2007	21.61	1.59
2454456.806	21/12/2007	-30.29	1.61
2454675.006	27/7/2008	8.82	1.71
2454689.004	10/8/2008	13.91	1.6
2454717.945	7/9/2008	24.71	1.53
2454722.895	12/9/2008	31.39	1.6
2454779.854	8/11/2008	8.37	1.7
2454790.889	19/11/2008	1.82	1.64
2454805.807	4/12/2008	-18.24	1.54
2454838.768	6/1/2009	-46.7	1.61
2454846.745	14/1/2009	-54.5	1.69
2454867.754	4/2/2009	-61.16	3.56
2454987.118	4/6/2009	-25.11	1.69
2455015.049	2/7/2009	-3.83	1.54
2455016.081	3/7/2009	-1.47	1.41
2455027.089	14/7/2009	8.26	1.61
2455049.038	5/8/2009	22.34	1.56
2455076.091	1/9/2009	22.9	1.6
2455081.091	6/9/2009	21.97	1.55
2455084.143	9/9/2009	15.79	1.6
2455109.955	4/10/2009	15.55	1.63
2455133.975	28/10/2009	0	1.6
2455169.86	3/12/2009	-23.21	1.57
2455187.855	21/12/2009	-42.72	1.55
2455198.771	1/1/2010	-51.25	1.55
2455229.722	1/2/2010	-63.75	1.43
2455250.713	22/2/2010	-67.93	1.5

Tabela B.1: Velocidades radiais de HD 4313b. Fonte: [4]

(t) (calendário juliano)	(s) (m/s)	(σ) (m/s)	(w) ($\frac{1}{W\sigma^2}$)
2454339.932	23.92	1.57	0.037222029188618
2454399.842	21.61	1.59	0.036291515267207
2454456.806	-30.29	1.61	0.035395463040402
2454675.006	8.82	1.71	0.031376690177157
2454689.004	13.91	1.6	0.035839288963682
2454717.945	24.71	1.53	0.039193720255895
2454722.895	31.39	1.6	0.035839288963682
2454779.854	8.37	1.7	0.031746913407275
2454790.889	1.82	1.64	0.034112351184944
2454805.807	-18.24	1.54	0.038686363529695
2454838.768	-46.7	1.61	0.035395463040402
2454846.745	-54.5	1.69	0.032123728072205
2454867.754	-61.16	3.56	0.007239346337822
2454987.118	-25.11	1.69	0.032123728072205
2455015.049	-3.83	1.54	0.038686363529695
2455016.081	-1.47	1.41	0.046148875683832
2455027.089	8.26	1.61	0.035395463040402
2455049.038	22.34	1.56	0.037700764195852
2455076.091	22.9	1.6	0.035839288963682
2455081.091	21.97	1.55	0.038188794899907
2455084.143	15.79	1.6	0.035839288963682
2455109.955	15.55	1.63	0.034532191556711
2455133.975	0	1.6	0.035839288963682
2455169.86	-23.21	1.57	0.037222029188618
2455187.855	-42.72	1.55	0.038188794899907
2455198.771	-51.25	1.55	0.038188794899907
2455229.722	-63.75	1.43	0.0448670251587
2455250.713	-67.93	1.5	0.040777146554234

Tabela B.2: Dados de HD 4313b com os pesos

(t) (calendário juliano)	(y) (m/s)	(σ) (m/s)	$\nu(t)$ (radianos)
2454339.932	23.92	1.57	-2.1455618560573
2454399.842	21.61	1.59	-1.11207220240144
2454456.806	-30.29	1.61	0.033900783631072
2454675.006	8.82	1.71	-2.59224553466726
2454689.004	13.91	1.6	-2.38171935481733
2454717.945	24.71	1.53	-1.92542173051347
2454722.895	31.39	1.6	-1.84377327540899
2454779.854	8.37	1.7	-0.808738458982925
2454790.889	1.82	1.64	-0.588377734708726
2454805.807	-18.24	1.54	-0.283478830325458
2454838.768	-46.7	1.61	0.398735090688449
2454846.745	-54.5	1.69	0.56131604366264
2454867.754	-61.16	3.56	0.977200274429805
2454987.118	-25.11	1.69	0.931555788334647
2455015.049	-3.83	1.54	-2.94775819421136
2455016.081	-1.47	1.41	-2.93279654305037
2455027.089	8.26	1.61	-2.77250671965385
2455049.038	22.34	1.56	-2.44663243941478
2455076.091	22.9	1.6	-2.0255209435152
2455081.091	21.97	1.55	-1.9444901785699
2455084.143	15.79	1.6	-1.89445929418307
2455109.955	15.55	1.63	-1.45217584855708
2455133.975	0	1.6	-1.00713422925635
2455169.86	-23.21	1.57	-0.288830388263968
2455187.855	-42.72	1.55	0.084233915923584
2455198.771	-51.25	1.55	0.310149668506033
2455229.722	-63.75	1.43	0.931844170309221
2455250.713	-67.93	1.5	1.3271742953309

Tabela B.3: Dados de HD 4313b com as anomalias verdadeiras $\nu(t)$

t (c. juliano)	t (c. gregoriano)	y (m/s)	σ (m/s)	$E(t)$	$\nu(t)$
2451142.6802	24/11/98	22987	7	-426.1689	1.2465
2451181.5618	02/01/99	22984	13	-415.3019	-0.7182
2451388.9163	28/07/99	23031	12	-355.7917	2.4655
2451432.8003	10/09/99	23045	10	-343.2429	2.4500
2451446.7394	24/09/99	22996	12	-339.3997	-0.1279
2451446.7727	24/09/99	22996	11	-339.3882	-0.1143
2451454.734	02/10/99	23022	8	-336.9702	2.4408
2451454.7476	02/10/99	23033	9	-336.9667	2.4438
2451455.7867	03/10/99	23059	11	-336.7040	2.6725
2451464.6979	12/10/99	23022	7	-334.4153	-1.5787
2451480.6649	28/10/99	23020	12	-329.7081	-3.0077
2451480.6785	28/10/99	23053	10	-329.7048	-3.0049
2451485.6452	02/11/99	23033	7	-328.4267	-1.8698
2451485.6587	02/11/99	23040	7	-328.4230	-1.8662
2451490.5891	07/11/99	22971	10	-326.8676	-0.1686
2451490.6025	07/11/99	23006	10	-326.8630	-0.1632
2451496.5696	13/11/99	23012	9	-324.9652	1.9267
2451496.5831	13/11/99	23019	8	-324.9615	1.9303
2451497.6153	14/11/99	23026	8	-324.6819	2.1912
2451497.6331	14/11/99	23021	7	-324.6772	2.1955
2451498.6244	15/11/99	23028	6	-324.4189	2.4274
2451498.6388	15/11/99	23040	6	-324.4152	2.4307
2451503.5636	20/11/99	23030	6	-323.1982	-2.8158
2451503.5817	20/11/99	23034	6	-323.1937	-2.8120
2451541.5773	28/12/99	23027	8	-312.1122	2.1943
2451550.572	06/01/00	23046	9	-309.8500	-2.1271
2451551.5993	07/01/00	23037	7	-309.5687	-1.8617
2451552.5597	08/01/00	23029	6	-309.2934	-1.5896
2451554.5609	10/01/00	22999	7	-308.6756	-0.9309
2451562.5475	18/01/00	23003	7	-306.1007	1.9410
2451568.5513	24/01/00	23062	8	-304.5784	-3.0102
2451570.54	26/01/00	23062	7	-304.0870	-2.5914
2451570.5536	26/01/00	23036	7	-304.0836	-2.5884
2451571.5637	27/01/00	23067	9	-303.8255	-2.3616
2451573.5364	29/01/00	23023	8	-303.2961	-1.8718
2451574.5367	30/01/00	23054	12	-303.0095	-1.5889
2451576.536	01/02/00	23030	10	-302.3923	-0.9308
2451578.5464	03/02/00	23001	10	-301.7146	-0.1446
2451579.5338	04/02/00	22962	8	-301.3744	0.2594
2451579.5604	04/02/00	22983	8	-301.3652	0.2702
2451581.5683	06/02/00	22985	7	-300.6960	1.0391
2451583.5305	08/02/00	23002	6	-300.0980	1.6676
2451583.5441	08/02/00	23032	7	-300.0941	1.6715
2451585.5272	10/02/00	23012	7	-299.5457	2.1944

Tabela B.4: Velocidades radiais de HD 6434b (parte 1). Fonte: [5]

t (c. juliano)	t (c. gregoriano)	y (m/s)	σ (m/s)	$E(t)$	$\nu(t)$
2451587.5236	12/02/00	23037	8	-299.0325	2.6487
2451587.5372	12/02/00	23063	9	-299.0291	2.6516
2451619.4978	15/03/00	23052	12	-290.1381	-1.2720
2451619.5113	15/03/00	23063	14	-290.1340	-1.2676
2451748.8797	22/07/00	23077	11	-253.1562	-1.9916
2451748.8931	22/07/00	23082	11	-253.1525	-1.9882
2451749.8854	23/07/00	23038	6	-252.8743	-1.7192
2451749.8988	23/07/00	23041	6	-252.8704	-1.7154
2451750.8909	24/07/00	23023	7	-252.5781	-1.4186
2451750.9043	24/07/00	23027	7	-252.5741	-1.4144
2451751.9114	25/07/00	23006	7	-252.2615	-1.0800
2451751.9247	25/07/00	23022	7	-252.2572	-1.0753
2451752.9153	26/07/00	22995	7	-251.9349	-0.7134
2451752.9286	26/07/00	23001	7	-251.9305	-0.7083
2451753.8854	27/07/00	22987	7	-251.6066	-0.3310
2451753.8989	27/07/00	22990	7	-251.6020	-0.3256
2451754.9127	28/07/00	22999	9	-251.2529	0.0886
2451754.926	28/07/00	22992	10	-251.2483	0.0940
2451755.8851	29/07/00	22989	9	-250.9195	0.4821
2451755.8984	29/07/00	22992	9	-250.9150	0.4874
2451756.8749	30/07/00	22981	9	-250.5886	0.8628
2451756.8884	30/07/00	22995	8	-250.5841	0.8678
2451757.9161	01/08/00	22992	9	-250.2566	1.2284
2451757.9294	01/08/00	23006	9	-250.2525	1.2328
2451758.8781	01/08/00	23009	7	-249.9643	1.5346
2451758.8923	01/08/00	22996	7	-249.9601	1.5389
2451759.9056	02/08/00	23007	8	-249.6675	1.8300
2451759.9188	02/08/00	23008	8	-249.6638	1.8336
2451774.8553	17/08/00	23010	7	-245.6633	-0.7266
2451774.8686	17/08/00	22989	7	-245.6588	-0.7215
2451776.8028	19/08/00	22974	8	-244.9989	0.0539
2451776.8161	19/08/00	22989	9	-244.9943	0.0594
2451777.8503	20/08/00	22977	9	-244.6396	0.4784
2451777.8636	20/08/00	22994	8	-244.6350	0.4837
2451778.8138	21/08/00	22978	11	-244.3171	0.8495
2451778.8273	21/08/00	22989	10	-244.3127	0.8545
2451780.7002	23/08/00	22990	10	-243.7265	1.4880
2451780.7145	23/08/00	22981	11	-243.7222	1.4924
2451782.85	25/08/00	23009	7	-243.1171	2.0838
2451782.8643	25/08/00	23014	8	-243.1132	2.0873
2451783.7195	26/08/00	23048	7	-242.8864	2.2947
2451783.7339	26/08/00	23018	7	-242.8826	2.2981
2451784.7033	27/08/00	23033	7	-242.6326	2.5196

Tabela B.5: Velocidades radiais de HD 6434b (parte 2). Fonte: [5]

t (c. juliano)	t (c. gregoriano)	y (m/s)	σ (m/s)	$E(t)$	$\nu(t)$
2451784.7175	27/08/00	23049	7	-242.6290	2.5227
2451785.7744	28/08/00	23033	7	-242.3648	2.7508
2451785.7877	28/08/00	23039	7	-242.3615	2.7536
2451786.8129	29/08/00	23049	7	-242.1093	2.9676
2451786.8263	29/08/00	23052	7	-242.1060	2.9703
2451788.8254	01/09/00	23056	10	-241.6173	-2.9011
2451789.7401	01/09/00	23056	6	-241.3915	-2.7089
2451789.7533	01/09/00	23049	6	-241.3883	-2.7061
2451790.8251	02/09/00	23044	7	-241.1191	-2.4726
2451790.8383	02/09/00	23040	7	-241.1157	-2.4697
2451791.6562	03/09/00	23060	8	-240.9036	-2.2809
2451791.6684	03/09/00	23059	8	-240.9004	-2.2780
2451793.7328	05/09/00	23048	11	-240.3371	-1.7480
2451793.7461	05/09/00	23045	10	-240.3333	-1.7443
2451804.8092	16/09/00	23023	7	-236.8381	2.0799
2451804.8224	16/09/00	23016	7	-236.8345	2.0832
2451806.7588	18/09/00	23041	9	-236.3290	2.5374
2451806.7721	18/09/00	23040	10	-236.3257	2.5403
2451836.7011	18/10/00	23037	7	-228.0446	-2.0115
2451836.7188	18/10/00	23030	7	-228.0397	-2.0070
2451838.6863	20/10/00	23025	8	-227.4765	-1.4509
2451838.6997	20/10/00	23022	8	-227.4724	-1.4467
2451861.6053	12/11/00	23005	7	-220.9024	-1.1421
2451861.6178	12/11/00	23031	7	-220.8984	-1.1378
2451868.6314	19/11/00	23001	7	-218.5840	1.4980
2451868.6448	19/11/00	23000	7	-218.5800	1.5021
2451896.583	17/12/00	23045	11	-210.7186	2.9462
2451899.5464	20/12/00	23048	7	-209.9922	-2.7232
2451901.6061	22/12/00	23052	6	-209.4676	-2.2628
2451912.5489	02/01/01	23000	6	-206.0271	1.4883
2451915.5659	05/01/01	23045	6	-205.1877	2.2944
2451918.5669	08/01/01	23041	9	-204.4332	2.9482
2451921.5544	11/01/01	23060	11	-203.7008	-2.7161
2451922.5557	12/01/01	23060	10	-203.4497	-2.4988
2452129.8781	07/08/01	22993	6	-143.9623	0.6484
2452129.8914	07/08/01	22979	6	-143.9578	0.6535
2452162.7744	09/09/01	23054	6	-134.7097	-2.8218
2452190.7725	07/10/01	23032	5	-126.7958	-1.2938
2452221.6414	07/11/01	23002	6	-117.6455	1.9024
2452221.6547	07/11/01	23014	6	-117.6418	1.9060
2452486.8383	30/07/02	23008	8	-41.8428	2.2782
2452486.8525	30/07/02	23013	8	-41.8390	2.2816
2452643.5488	04/01/03	23039	6	2.8674	2.9105

Tabela B.6: Velocidades radiais de HD 6434b (parte 3). Fonte: [5]

t (c. jul.)	t (c. gr.)	y (m/s)	σ (m/s)	$E(t)$	$\nu(t)$
2453338.681	29/11/04	81.17	5.96	-9.1029777108838	-2.99653115727372
2453599.929	17/08/05	19.72	4.64	-7.98077012742039	-2.39055367479163
2453629.867	16/09/05	5.4	4.73	-7.80517642531716	-2.26275728624474
2453668.833	25/10/05	-10.57	4.96	-7.53860043949218	-2.03600365194825
2453710.744	06/12/05	-48.24	5.36	-7.16880710515813	-1.62837804230093
2453718.692	14/12/05	-46.62	5.26	-7.08289488716865	-1.51325079340591
2453959.999	12/08/06	110.21	5.1	-4.50150695089799	2.44697547867684
2453966.942	19/08/06	81.34	6.02	-4.46521382709479	2.47049025586369
2453975.925	28/08/06	79.43	5.48	-4.41931318393384	2.49956076746585
2453998.914	20/09/06	104.92	5.44	-4.30664176921156	2.56801864179238
2454001.894	23/09/06	92.09	5.13	-4.29248930652016	2.57634845400046
2454020.897	12/10/06	92.71	5.89	-4.20437742344651	2.62698752441512
2454035.837	27/10/06	86.45	6.82	-4.13743835723129	2.66415915165556
2454046.831	07/11/06	90.77	5.27	-4.08933499017422	2.69024347703414
2454059.809	20/11/06	97.79	6.12	-4.03368366474312	2.71981875786422
2454099.808	30/12/06	90.56	5.14	-3.86840537639759	2.80433153646402
2454130.751	30/01/07	103.82	6.21	-3.74635256788643	2.86408988616191
2454136.648	05/02/07	93.97	5.58	-3.72350607697426	2.87506783077808
2454150.684	19/02/07	103.07	8.31	-3.66959417817508	2.90074451002463
2454170.642	11/03/07	72.56	5.83	-3.59395168408118	2.93628406694323
2454304.984	23/07/07	66.41	7.94	-3.10257138090594	-3.12412224055506
2454309.978	28/07/07	71.15	4.79	-3.08453907991795	-3.11604595770012
2454311.997	30/07/07	53.32	4.67	-3.07725070760652	-3.11278076756789
2454336.958	24/08/07	61.7	4.57	-2.98729248246296	-3.07240738004927
2454401.815	28/10/07	56.27	6.58	-2.74877703128518	-2.96391327167671
2454404.904	31/10/07	55.17	11.24	-2.73725842474212	-2.95858990483903
2454405.854	01/11/07	57.46	5.66	-2.7337116815871	-2.9569487699513
2454417.794	13/11/07	30.49	7.8	-2.68895361998349	-2.93615346298774
2454421.776	17/11/07	52.18	5.22	-2.6739479567404	-2.92914439690954
2454422.837	18/11/07	56.29	5.96	-2.6699426986246	-2.92727023755691
2454423.791	19/11/07	59.01	4.68	-2.66633879727165	-2.92558266424364
2454425.847	21/11/07	64.05	5.06	-2.65856353354464	-2.92193781732879
2454426.798	22/11/07	53.18	3.7	-2.65496318407144	-2.92024820114305
2454525.64	29/02/08	20.61	7.68	-2.26183459446714	-2.72629054231386
2454548.644	23/03/08	26.06	5.19	-2.1628322921987	-2.67348143973189
2454675.985	28/07/08	-30.05	6.84	-1.50858201346016	-2.25237207341088
2454677.971	30/07/08	-22	6.32	-1.49606045382297	-2.24258668067469
2454699.954	21/08/08	-37.38	11.05	-1.34935840507062	-2.1211369058818
2454734.937	25/09/08	-65.1	5.39	-1.0747389911103	-1.85292663690935
2454748.784	09/10/08	-82.01	6.9	-0.94571458280415	-1.70382261316108
2454767.935	28/10/08	-94.18	5.89	-0.738879270705554	-1.42623632300058
2454846.68	15/01/09	38.5	5.49	0.507507820024335	1.05015110901095
2454858.657	27/01/09	43.15	7.74	0.670277365622293	1.32233429814653
2454904.639	14/03/09	78.14	7.19	1.13690753386559	1.91905430648275

Tabela B.7: Velocidades radiais de HD 16175 b. Fonte: [6]