

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

A INVESTIGAÇÃO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO COM CALCULADORAS GRÁFICAS

Ricardo Scucuglia

Orientador: Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino-Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção de título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
2006

510.07 Scucuglia, Ricardo
S436i A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com
Calculadoras Gráficas / Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva.
– Rio Claro: [s.n.], 2006.
145 f.: il., tabs., fots.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: Marcelo de Carvalho Borba.

1. Educação Matemática. 2. Seres-Humanos-com-
Mídias. 3. Experimentação com Tecnologias. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcelo de C. Borba (Orientador)

Prof^a. Dr^a. Mónica E. Villarreal

Prof^a. Dr^a. Telma de S. Gracias

Ricardo Scucuglia R. da Silva

Rio Claro, 20 de Fevereiro de 2006.

Resultado: Aprovado

**Dedico este Trabalho à minha Mãe
Maria José S. Scucuglia.**

Agradecimentos Acadêmicos

Ao Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, por me orientar e contribuir determinantemente para minha admiração pela Educação Matemática.

Às Prof.^{as}. Dr.^{as}. Participantes da Banca de Defesa (Comissão Examinadora): Mônica Villarreal e Telma Gracias, por inúmeras indicações ilustres.

À Prof.^a. Dr.^a. Miriam G. Penteado, coordenadora do Programa e que, além de também participar da Banca de qualificação, foi minha professora na graduação e potencializou minha apreciação pela Educação Matemática.

Ao GPIMEM (2000-2005), por constituir coletivamente minha pesquisa de diversos modos: Marcelo Borba, Mirian Penteado, Mônica Villarreal, Telma Gracias, Rúbia Zullato, Paula Malheiros, Fernanda Bonafini, Marcus Maltempo, Antônio Olímpio, Maurício Rosa, Silvana Santos, Sueli Javaroni, Norma Allevato, Simone Gouvêa, Adriana Richit, Leandro Diniz, Sandra Barbosa, João A. Azevedo, Francisco Benedetti, Nilce Scheffer, Jussara Araújo, Tânia, Renata Moro, Audria Bovo, Geraldo Lima, Lara Carceles, Sheila Barros, Maria Helena Barbosa e toda a Iniciação Científica.

Aos Colegas e Amigos da PGEM que contribuiriam cientificamente com meu trabalho. Em especial: Luzia (por diversas leituras do trabalho, críticas e sugestões sempre consistentes); Adriana Richit (pela leitura prévia da dissertação); Fernanda Bonafini (por indicar Programas para a Calculadora Gráfica); Maurício Rosa (pelas indicações no projeto em 2003) e Emerson Rolkouski (pelas referências sobre demonstração).

Ao Geraldo Lima, pelas diversas dimensões de apoio técnico.

À Anne Kepple, pela ilustre revisão do *Abstract*.

Às duplas de estudantes do primeiro ano da graduação em Matemática da UNESP de Rio Claro, SP, que participaram da pesquisa: Ana Paula e Viviane, Moara e Naiara.

Aos Professores Doutores do Departamento de Matemática da UNESP de Rio Claro, SP (1999 – 2005) por motivos científicos diversos. Em especial, os que foram meus professores na graduação e na PGEM e/ou indicaram contribuições (inspirações) à minha pesquisa: Alice K. Libardi (principalmente, por condicionar minha concepção de Matemática), Suzinei S. Marconato (Suzi), Rosa S. Baroni, Vanderlei do Nascimento, Gilberto Loibel, Rômulo C. Lins, Nativi Bertolo e João Ivo Bertolo, Geraldo Garcia (Geraldinho), Marcos Teixeira (Marquinho), Sérgio Nobre (Serginho), Renata Zotin, Jairo da Silva, Nelo Allan, Roberto Baldino, Stavros Christodoulou, Irineu Bicudo, Maria Pion, Maria Bicudo, Simone M. Bruschi, Geraldo Perez, João Perez Vieira, Rosana Miskulin e professores visitantes. Também, agradeço aos professores de minha graduação vinculados a outros Departamentos da UNESP (1999 – 2005): Alzira C. M. Stein-Barana, Dante L. Chinaglia, Gilson Coutinho Júnior e Francisco José dos Santos (Física), Antônio Carlos Carrera, Paulo Emerique e Marilena Camargo (Educação) e Ricardo Egídio (Computação).

Aos Professores Doutores da PGEM da UNESP de Rio Claro, SP (2002-2005), também por motivos científicos diversos: Ubiratam D' Ambrósio, Ole Skovsmose e Vicente Garnica.

Aos Professores Doutores que indicaram contribuições no EBRAPEM (2004-2005): Marie Clair (UEL/PR) e Nilson Machado (USP/SP).

Aos Funcionários do Departamento de Matemática da UNESP de Rio Claro, SP (1999 – 2005): Elisa, Ana, Lê, Zezé, Geraldo Lima, Diego, Rosana e Bete.

Aos Funcionários da Seção de Pós-Graduação do IGCE da UNESP de Rio Claro, SP (2003 – 2006). Em especial: Eliana.

Aos Diversos Colegas e Amigos de Graduação do curso de Matemática (e outros) da UNESP de Rio Claro, SP (1999-2002).

Aos Professores Liceu – Piracicaba, SP (1995-1998), por condicionarem minha admiração pela profissão de professor. Em especial: Teles (principalmente), Marisa, Badin, Marcelo, Paulo, Ângelo, Itapê, Luis Fernando, Newton, Reginaldo, Luiz Roberto, Turcão, etc.

Ao Professor Isaac do Ensino Fundamental – Anglo – Piracicaba, SP (Ginásio).

À Professora Chenorick do Ensino Fundamental (Primário).

Aos Amigos e Colegas do Colégio Técnico-Industrial de Piracicaba – COTIP – FUMEP. Em especial: Márcio.

Ao CNPq, por me auxiliar na Iniciação Científica e, principalmente, por possibilitar que eu Vivesse a Pós-Graduação em Educação Matemática na Unesp em Rio Claro.

Agradecimentos Familiares

À Minha Mãe Maria José, primeiramente por tudo, e principalmente por me indicar as melhores decisões de vida e sempre me apoiar nas decisões tomadas.

Ao Meu Pai Marcos, por tudo, mas principalmente por indicar aspectos sobre a relevância da Educação.

À Minha irmã Raquel e ao meu irmão Rafael, por tudo.

Aos Meus Avós Anselmina e Orfeu (*in memoriam*), Jairo e Irma, por tudo, sempre.

À Luzia, minha princesa e amor de vida, exemplo de beleza, carisma, retórica e críticas científicas.

Ao Valter, à Deise, aos meus tios, tias, primos e outros familiares, por me apoiarem e admirarem meu engajamento científico.

Agradecimentos Pessoais

Aos Amigos da Banda Sancast: Jeferson, Jean, Peter e Renan. Também, suas namoradas.

Aos Amigos de República (1999 - 2000): Matheus (Chancrélio) e Rodrigo (Japóca-Kung).

Aos Amigos de República (2004 - 2005): Ricardo (Insano), Thiago (Chiga), Rodrigo (Rodruguin), João (Jão) e César (Bob Psicótico).

Aos casais Flávio e Cristiane, Marcelo e Anne, Mabel e Alex e Simone e Flávio, por amizade e oportunidades diversas.

Aos Amigos e Vizinhos da Rua dos Pixoxós (Piracicaba, SP). Em especial:
Erick Giovanni, seus pais (Seu Mário e Dona Santana) e sua família.
Carlos, Cida (*in memoriam*) e família. Também, Rodolfo, Rose e família.

Aos Outros Amigos e Amigas (PGEM, UNESP, Piracicaba, Rio Claro, Mundo) que pensaram em algum momento em meu trabalho enquanto pesquisador em Educação Matemática. Vocês estão sendo lembrados por mim nesse momento.

Agradecido!

Sumário

Resumo	i
Abstract	ii
<u>Prólogo - Informática e Demonstração Matemática</u>	01
<u>Primeiro Capítulo - A Pesquisa</u>	
1. Gênese da Pesquisa: Calculadoras Gráficas e a Iniciação Científica no GPIMEM	06
2. Experimentação com Tecnologias e Demonstração: O Contexto Investigativo	10
3. Do Projeto à Pergunta Diretriz da Pesquisa: A Metodologia Qualitativa	16
<u>Segundo Capítulo - Os Métodos Qualitativos da Pesquisa</u>	
1. Pesquisa Qualitativa: Ressonância entre Procedimentos e Visão de Conhecimento	20
2. Informática e Epistemologia: Os Coletivos Seres-Humanos-com-Mídias	21
3. Experimentos de Ensino e Análise de Vídeos	23
4. Procedimentos Metodológicos da Pesquisa	26
4.1 A Atividade Piloto	26
4.2 O Primeiro Piloto	27
4.3 O Curso Temático sobre Calculadoras Gráficas TI-83	28
4.4 Potencialidades da Calculadora Gráfica TI-83	29
4.5 As Atividades de Experimentação com Calculadoras Gráficas	31
4.6 As Duplas Participantes dos Experimentos de Ensino	34
4.7 Os Experimentos de Ensino	35
4.8 A Análise de Vídeo e Descrição dos Dados	36
5. Comentários Finais sobre os Procedimentos Qualitativos da Pesquisa	37
<u>Terceiro Capítulo - A Investigação do Conceito de Soma de Riemann com Calculadoras Gráficas</u>	
Introdução	38
1. Episódio SR ₁ - Iniciando o Programa AREA	39
1.1 Uma Coordenação Inicial de Representações	42
1.2 Pensando-com-o-Programa-AREA	43
1.3 O <i>Design</i> da Calculadora Gráfica	44
2. Episódio SR ₂ – Os Tipos de Aproximações do AREA	46
2.1 Diversidade de Mídias no Contexto Investigativo	48
3. Episódio SR ₃ – Funções com Imagem que Assumem Valores Negativos	50
4. Episódio SR ₄ – Uma conjectura Inicial sobre o Conceito de Soma de Riemann	52
5. Considerações sobre a Primeira Atividade de Experimentação	53

Quarto Capítulo - A Investigação do Conceito de Integração Definida com Calculadoras Gráficas

Introdução	55
1. Episódio ID ₁ – Investigando uma Notação Matemática sobre a Execução do AREA	56
2. Episódio ID ₂ – O Conceito de Integração Definida e a Experimentação do SOMA	58
2.1 Os Papéis do Programa SOMA	62
3. Episódio ID ₃ – Uma Articulação entre o Programa SOMA e o Comando $\int f(x)dx$	66
3.1 A Coordenação de Representações na Investigação do Conceito de Integração	71
4. Comentários Finais sobre a Investigação do Conceito de Integral de Riemann	74

Quinto Capítulo - A Experimentação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas

Introdução	75
1. Episódio ETFC ₁ – Conjecturando a Relação Fundamental com o Comando $\int f(x)dx$	76
1.1 A Investigação de Ana Paula e Viviane sobre a Relação Fundamental	77
1.2 A Investigação de Moara e Naiara sobre Relação Fundamental	79
2. Episódio ETFC ₂ : Conjecturando o Resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	80
2.1 A Experimentação de Moara e Naiara sobre o Resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	81
2.2 A Experimentação de Ana Paula e Viviane sobre o Resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	84
3. O Processo de Experimentação com Calculadoras Gráficas e o Pensamento Abduutivo	86
4. O Momento Crítico da Investigação com Calculadoras Gráficas	88

Sexto Capítulo - Uma Abordagem Dedutiva do Teorema Fundamental do Cálculo

Introdução	90
1. Episódio ADTFC ₁ – A Primeira Parte do TFC: A Relação Fundamental	92
1.1 Considerações sobre a Abordagem Dedutiva da Relação Fundamental	97
2. Episódio ADTFC ₂ : O Resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$: a Segunda Parte do TFC	100
2.1 Comentários sobre a Abordagem Dedutiva do Teorema Fundamental do Cálculo	103

Epílogo - Contribuições à Informática e Educação Matemática

1. Evidenciar a Experimentação com Tecnologias no Processo Investigativo	105
2. Possibilidades Emergentes com a Análise Vídeos	110
3. A Metáfora da Colcha de Retalhos	111

Bibliografia	113
<u>Anexo I</u> - A Atividade de Experimentação com Calculadoras Gráficas TI-83	124
<u>Anexo II</u> - O Teorema Fundamental do Cálculo	127
<u>Anexo III</u> - Paradigmas de Pesquisa Qualitativa	142

Sumário de Figuras

Figura 2.1: Região $\mathfrak{R}$.	26
Figura 2.2: Perspectiva Superior do Laboratório de Ensino do Departamento de Matemática da UNESP/RC: Ambiente dos experimentos de ensino Software Arcon Versão 5.0 Demo.	35
Figura 3.1: Representação gráfica da Região $\mathfrak{R}$.	39
Figura 3.2: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane – Item a – Questão 1 - Primeira Atividade.	41
Figura 3.3: Ficha de Trabalho de Moara e Naiara – Item a – Questão 1 - Primeira Atividade.	41
Figura 3.4: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane – Item b – Questão 1 - Primeira Atividade.	47
Figura 3.5: Ficha de Trabalho de Moara e Naiara – Item b – Questão 1 - Primeira Atividade.	47
Figura 3.6: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane – Item c – Questão 1 - Primeira Atividade.	51
Figura 3.7: Ficha de Trabalho de Moara e Naiara – Questão 2 – Primeira Atividade.	52
Figura 4.1: Ficha de Trabalho de Moara e Naiara – Questão 1 – Segunda Atividade.	56
Figura 4.2: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane - Questão 3 - Segunda Atividade.	59
Figura 4.3: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane - Terceira Atividade.	68
Figura 4.4a: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane.	69
Figura 4.4b: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane.	69
Figura 4.5: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane – Terceira Atividade.	72
Figura 4.6: Integração de Leibniz.	73
Figura 5.1: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane - Quarta Atividade.	78
Figura 5.2: Fichas de Trabalho de Ana Paula e Viviane - Quinta Atividade.	85
Figura 6.1: Seja $y = f(x) \geq 0$ em $[a; b]$ e $A(x)$ a função que determina o valor da área da Região $\mathfrak{R}$ delimitada por $y = f(x)$ em $[a; x]$.	92
Figura 6.2: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane - A abordagem dedutiva da relação fundamental do TFC.	95
Figura 6.3: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane - A abordagem dedutiva da relação fundamental do TFC.	99
Figura 6.4: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane - A abordagem dedutiva do resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.	101
Figura E1: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane – Demonstração da relação Fundamental do TFC.	107
Figura E2: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane – Demonstração do Resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.	107
Figura A2.1: A Integração de Leibniz.	131
Figura A2.2: Cauchy - Teorema do Valor Médio para Integrais.	135

Sumário de Fotos

Foto 2.1: Ana Paula e Viviane.	34
Foto 2.2: Naiara e Moara.	34
Foto 3.1: Ana Paula e Viviane visualizam, na projeção do <i>View Screen</i> , a simulação do Programa AREA, considerando $N = 36$.	41
Foto 3.2: Ana Paula e Viviane discutem os tipos de aproximações do Programa AREA.	46
Foto 3.3: Ana Paula e Viviane discutem os tipos de aproximações do Programa AREA utilizando a projeção.	49
Foto 3.4: Moara explica sua inferência.	52
Foto 4.1: Ana Paula e Viviane experimentam Comando $\int f(x)dx$ considerando $y = x^2$ em $[0; 3]$.	66
Foto 5.1: Ana Paula e Viviane utilizam o Comando $\int f(x)dx$ na investigação de $y = 4x^3$.	77
Foto 5.2: Moara e Naiara investigam $y = 2x$ em $[0; 5]$ com o Comando $\int f(x)dx$.	79
Foto 5.3: Moara e Naiara investigam o resultado $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$.	83
Foto 6.1: Moara e Naiara iniciam da investigação dedutiva do TFC.	94
Foto 6.2: Moara e Naiara iniciam da investigação dedutiva do TFC.	94
Fotos 6.3 e 6.4: Viviane vai ao quadro na investigação dedutiva do TFC.	95
Foto 6.5: Naiara e Moara identificam a dedução da Relação Fundamental do TFC.	96
Foto 6.6: Viviane demonstra o resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.	101
Foto 6.7: Moara e Naiara exploram a dedução do resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.	102
Fotos E 1-4: i) a definição da função $A(x)$ a partir de $y = x^2$ em $[0; t]$; ii) a taxa de variação da função $A(x)$; iii) e iv) uma simulação intuitiva do Teorema do Valor Médio para Integrais.	108
Fotos E 5-8: Após testar algumas anti-derivadas determina-se o valor $t^3/3$. Conseqüentemente obtém-se $\int_0^t x^2 dx = \frac{t^3}{3}$.	108
Fotos E 9-12: i) Observa-se a constituição do gráfico de uma função área a partir de $f(x)$; ii) Observa-se que, ao se considerar a função derivada da função área constituída, obtém-se o próprio gráfico da $f(x)$; iii) observa-se simultaneamente as simulações de i) e ii); iv) a Relação Fundamental é explicitada gráfica e algebricamente.	108
Fotos E13-15: i) e ii) Evidenciam novamente a quadratura da parábola, só que considerando intervalo do tipo $[a; b]$ ao invés de $[0; t]$; iii) a exploração desse exemplo permite explorar o resultado $F(b) - F(a)$.	109

Resumo

A Informática vem gerando discussões sobre fundamentos da Matemática e reorganizando dinâmicas em Educação Matemática. Baseado nessa idéia, e em meu engajamento como pesquisador participante do GPIMEM, estruturei uma pesquisa onde discuto **como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo** (TFC). Apoiado na perspectiva epistemológica Seres-Humanos-com-Mídias, que evidencia o papel das tecnologias no processo de produção de conhecimento, realizei experimentos de ensino com duplas de estudantes do primeiro ano da graduação em matemática, UNESP, Rio Claro, SP. A partir da análise de vídeos da primeira sessão de Experimentos de Ensino notei que a utilização de programas e comandos da Calculadora Gráfica TI-83 condicionou o pensamento das estudantes na investigação dos conceitos de Soma de Riemann e Integração (conceitos intrinsecamente inerentes ao TFC). Na segunda sessão, explorando exemplos de funções polinomiais com o comando de integração definida da Calculadora Gráfica, os coletivos pensantes formados por Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas-Lápis-e-Papel estabeleceram conjecturas sobre o TFC. No processo de demonstração deste Teorema, foram utilizadas noções intuitivas e notações simplificadas, antes que fosse usada a simbologia padronizada pela Matemática Acadêmica. Essa abordagem possibilitou o engajamento gradativo das estudantes em “discussões matemáticas dedutivas” a partir dos resultados obtidos “experimentalmente” com as atividades propostas na pesquisa.

Palavras-Chave: Educação Matemática, Calculadoras Gráficas, Teorema Fundamental do Cálculo, Seres-Humanos-com-Mídias, Experimentação com Tecnologias.

Abstract

Information technology has been generating discussion regarding the foundations of mathematics, and reorganizing dynamics in mathematics education. Based on this idea, and on my engagement as a researcher participating in GPIMEM, I designed a study in which I discuss **how students-with-graphing-calculators investigate the Fundamental Theorem of Calculus (FTC)**. Based on the epistemological perspective of humans-with-media, which emphasizes the role of technology in the process of knowledge production, I conducted teaching experiments with pairs of students enrolled in the first year of the mathematics program at the State University of São Paulo (UNESP), Rio Claro campus. Based on analysis of video-tapes of the first teaching experiments session, I noted that the use of programs and commands of the TI-83 graphing calculator conditioned the students' thinking in the inquiry into the concepts Riemann Sums and Integration (concepts intrinsically inherent to the FTC). In the second session, exploring examples of polynomial functions with the definite integration command by the graphing calculator, the thinking collectives composed of students-with-graphing-calculators-paper-and-pencil established conjectures regarding the FTC. In the process of demonstrating this theorem, intuitive notions and simplified notations were used before using the standardized symbology of academic mathematics. This approach made it possible for the students to become gradually engaged in “deductive mathematical discussions” based on the results obtained “experimentally” through the activities proposed in the study.

Key-Words: Mathematics Education, Graphing Calculators, Fundamental Theorem of Calculus, Humans-with-Media, Experimentation with Technologies.

Prólogo - Informática e Demonstração Matemática

A rigor, a matemática vive em constante crise de fundamentos, da descoberta dos incomensuráveis entre os gregos até a querela atual suscitada pelo uso de computadores como instrumentos não apenas heurísticos, mas de demonstração matemática, passando pela descoberta das geometrias não-euclidianas, e pela introdução dos números imaginários no cálculo algébrico, a matemática está constantemente revendo seus fundamentos (SILVA, 1999, p. 47).

Desde o terceiro milênio antes de Cristo, egípcios e babilônios tiveram suas matemáticas ligadas a atividades práticas, caracterizadas por sua utilidade e por seu caráter operatório, envolvendo cálculo de figuras planas e problemas concernentes a relações entre números. Enfim, uma matemática de caráter empírico. Mas com a matemática grega (século VI a.C.) observa-se, nas estruturas de Tales e Pitágoras, por exemplo, uma busca por fundamentar na razão proposições referentes a objetos ideais, abstratos. O pensamento dedutivo articula-se à gênese das demonstrações matemáticas¹ e, conseqüentemente, surgem as crises de fundamentos da matemática².

Com o advento dos Irracionais/Incomensuráveis – primeira crise de fundamentos - a matemática direcionou-se à geometria e os Elementos de Euclides (século III a.C.) consolidaram um método postulacional nessa época. A partir das geometrias não euclidianas (século XIX d.C.) a matemática adquiriu um rigor cada vez maior, no qual podem ser evidenciados momentos como a Teoria dos Conjuntos de Cantor, a tendência logicista da filosofia da matemática e a tendência formalista (1920): o auge da formalização matemática.

¹ Bicudo (2004), no texto *Peri Apodexius/de demonstracione*, contrasta o caráter empírico das matemáticas egípcias e babilônias com a abstração da matemática grega. “Com os matemáticos gregos, a razão suplanta a ‘empeiria’ como critério de verdade, tornando-se a matemática uma ciência dedutiva” (BICUDO, 2004, p. 58).

² As crises de fundamentos geraram algumas tendências na filosofia da matemática: o Intuicionismo, o Logicismo e o Formalismo. De modo breve, pode-se considerar que o Logicismo funda-se na tentativa de reduzir a matemática à lógica. Os logicistas pressupunham que a matemática era redutível à lógica. Que a matemática era um tipo de lógica, que sempre era possível expressar em termos lógicos todas as proposições matemáticas, e que todas as proposições matemáticas verdadeiras eram verdades lógicas. No entanto, os *paradoxos lógicos* evidenciaram incoerências no projeto logicista. O Formalismo propõe esvaziar o discurso matemático de qualquer referência, significado ou verdade. O Intuicionismo discorda das idéias formalistas e logicistas. Caracteriza-se por uma crítica à matemática tradicional e à lógica como eixos principais que fundamentam o fazer matemático (SILVA; 1999; TENÓRIO; 2001).

O Formalismo funda-se nas idéias do filósofo germânico Kant (1724-1804) e sua proposta não é reduzir a matemática à lógica, mas sim conceber a lógica como um método de obter todas as conclusões legítimas sobre qualquer conteúdo. Foi fundamentando-se em Kant que Hilbert estruturou a Teoria da Demonstração, na qual os principais fundamentos são: i) a matemática é descritiva dos objetos e elabora construções, sendo extra-lógica; ii) a lógica é o instrumento articulador das teorias formais construídas com os objetos matemáticos; iii) o trabalho matemático deve ser o de elaborar teorias formais consistentes, sempre mais abrangentes, até se conseguir sua formalização completa (LÉVY, 1998; SILVA, 1999; TENÓRIO, 2001).

Mas em 1931, Kurt Gödel demonstrou a impossibilidade da propriedade de consistência, e conseqüentemente, desestruturou a tendência formalista. Gödel colocou em xeque o princípio da não contradição e provou que existiam proposições que não eram passíveis de serem demonstradas como verdadeiras ou falsas. Assim, evidenciou-se como fundamental no fazer matemático não somente a busca pela verdade de proposições como concebiam os formalistas, mas também uma busca *a priori* sobre a demonstrabilidade da proposição dada³ (TENÓRIO, 2001; HODGES, 2001).

Posteriormente, dez anos antes da construção do primeiro computador, em 1936, Alan Turing, com base nessas concepções atacou a propriedade da decidibilidade da Teoria das Demonstrações de Hilbert e criou o conceito de **Máquina de Turing**⁴, que pode ser entendido como o “antepassado abstrato” - um modelo lógico - do computador contemporâneo. Os matemáticos, em geral, aceitam que o conceito de algoritmo é estabelecido pela definição de Máquina de Turing⁵ (LÉVY, 1998).

³ Gödel também argumentou que é sempre possível construir enunciados a partir das regras de teoria formal que não são dedutíveis de um conjunto de axiomas de tal teoria e, mais ainda, é sempre possível construir dentro dessa teoria formal uma nova proposição indecidível (LÉVY, 1998).

⁴ Todos os processos decomponíveis numa seqüência finita e ordenada de operações sobre um alfabeto restrito que chegam ao resultado procurado num tempo finito podem ser efetuados por uma **Máquina de Turing**; inversamente, todas as tarefas que uma Máquina de Turing pode executar são algoritmos ou processamentos. Assim, cada problema calculável corresponde a uma Máquina de Turing capaz de resolvê-lo. Essa máquina, que é um modelo intrinsecamente abstrato, pode ser entendida como um quadro de instruções, ou como a representação de um algoritmo por um mecanismo físico (LÉVY, 1998).

⁵ Sipser (1997) evidencia uma definição matemática complexa sobre Máquina de Turing na teoria da computação.

Emerge, portanto, uma articulação entre a Computação e a Matemática que condiciona e intensifica a crise dos fundamentos formalistas, evidenciando a demonstrabilidade. Simultaneamente, as tecnologias informáticas vêm potencializando as dimensões heurísticas no fazer matemático, na investigação matemática, na demonstração.

Até os anos 70, o uso de computadores na Matemática era caracterizado pela rapidez em cálculos e algumas contribuições na resolução de sistemas de equações. Mas, em 1976, a Informática começou a trazer possibilidades mais complexas para a demonstração matemática. Apple e Haken provaram que é sempre possível colorir mapas com apenas quatro cores, de tal forma que cores iguais não façam fronteira⁶. Para isso, valeram-se de centenas de horas de computação, analisando cada um dos muitos casos de configurações representativas possíveis. Esse tipo de prova abre controvérsias a respeito do significado da demonstração em Matemática (DOMINGUES, 2002).

Em meio a esse domínio do formalismo no século XX, acabou se instaurando no terreno da demonstração matemática, um estranho no ninho, o computador, para constrangimento dos mais puristas. Em 1976, com base numa intrincada e gigantesca análise feita da computação eletrônica, W. Haken e K. Apple deram a primeira demonstração da conjectura das quatro cores, uma questão em aberto desde 1858. Não faltaram objeções à demonstração de Haken-Apple. Como, por exemplo, a de D. Cohen: “Nosso objetivo não é acumular fatos a respeito do mundo ou mesmo a respeito de objetos matemáticos. A missão da matemática é compreender...” Mas com a ciência cada vez mais dependente do computador e com os matemáticos não podendo se isolar cientificamente, objeções como essa não poderiam vingar e a tendência é desaparecer (DOMINGUES, 2002, p. 66).

O uso de tecnologias informáticas condiciona um caráter experimental ao fazer matemático e é inerente a necessidade de demonstrações a esse processo. A necessidade de comprovação de verdades é intrínseca ao contexto dedutivo.

⁶ Quantas cores são necessárias e suficientes para colorir um mapa (esférico ou plano) com qualquer número de países, sem que regiões fronteiriças tenham a mesma cor? Embora se tenha mostrado anteriormente que quatro cores são necessárias e cinco suficientes, não se havia até 1976, encontrado o requisito padrão para as demonstrações matemáticas, isto é, uma condição necessária e suficiente. (TENÓRIO, 2001, p. 77).

Mas as reorganizações cognitivas/culturais intrínsecas à Informática, condicionada ao contexto da investigação matemática, potencializam as dimensões heurísticas. Um Paradigma⁷ Informático na Matemática (LÉVY, 1998).

Uma das mais estranhas modificações ligadas ao uso das simulações digitais é a que hoje afeta as matemáticas. Tradicionalmente consideradas como reino da dedução, elas também estão adquirindo um carácter experimental. Simulações de objetos matemáticos podem infirmar, confirmar, ou gerar conjecturas (LÉVY, 1998, p. 104).

Além de evidenciar um Paradigma na Matemática, a demonstração é discutida em Filosofia, em Educação, no ensino de Matemática, em Educação Matemática (HANNA, 1983; ERNEST, 1991; GARNICA, 1995; CARVALHO, 2004). Muitos professores consideram que a demonstração constitui a entrada no mundo da Matemática. No entanto, estudantes comentam que a demonstração marca o início de seu insucesso, seu fracasso, nesta disciplina.

O estudante de matemática é, geralmente, defrontado com uma apresentação lógico-dedutiva do conhecimento. A um conjunto de teoremas seguem-se as provas lógicas. O conhecimento parece ter sido produzido num ato mágico.

As proposições assim apresentadas são sempre verdadeiras, e válidas todas as inferências. A matemática se constitui, então, num conjunto crescente de verdades imutáveis e eternas.

Essa concepção de ciência matemática e educação esconde a contradição, oculta a luta, tende a impedir o movimento. Obviamente tal concepção está impregnada do carácter mecanicista e autoritário da razão clássica, que procura manter sua hegemonia (TENÓRIO, 2001, p. 90).

Existem, nesse sentido, tendências no ensino da Matemática que destacam, no processo de ensino, a investigação, a descoberta, a resolução de problemas e as atividades experimentais (FIORENTINI, 1995). Esses processos são inerentes à utilização das tecnologias informáticas, pois a partir de atividades envolvendo simulações, medições, levantamento de informações, comparação de informações e diversos outros processos possibilitados e potencializados pelo uso de interfaces informáticas pode-se constituir um ambiente no qual experimentação com tecnologias e demonstração caracterizam a investigação matemática de estudantes.

⁷ Sistema básico de opiniões ou a visão de mundo que guia o investigador, não somente nas escolhas do método, mas nos caminhos ontológica e epistemologicamente fundamentais (GUBA; LINCOLN, 1994, p.105).

É nesse contexto que esta pesquisa se engaja, pois nesta Dissertação está estruturada uma discussão em Educação Matemática que evidencia as possibilidades emergentes na investigação de estudantes a partir do uso de tecnologias informáticas. De modo específico, discute-se **a investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas**.

Primeiro Capítulo - A Pesquisa

Por estar restrita a uma fidelidade, a uma rigidez absoluta, a mensagem escrita corre o risco de tornar-se obscura para seu leitor (LÉVY, 1993).

1. Gênese da Pesquisa: Calculadoras Gráficas e a Iniciação Científica no GPIMEM

No ano 2000, ao cursar o segundo ano da graduação em Licenciatura em Matemática pela UNESP – Universidade Estadual Paulista – Campus de Rio Claro, SP, pude realizar atividades junto ao GPIMEM⁸, desenvolvendo um projeto de Iniciação Científica. O enfoque principal do projeto desenvolvido era a utilização de Calculadoras Gráficas no estudo de funções polinomiais.

As Calculadoras Gráficas dispõem de diversas potencialidades, algumas particulares, dependendo da marca e/ou modelo. Além das funções de uma Calculadora Científica, ela permite trabalhar temas diversos como gráficos e tabelas de funções (de uma ou duas variáveis reais, paramétricas), matrizes, matemática financeira, estatística, geometria (dinâmica e analítica), física, etc. E, embora não disponha de todas as potencialidades de um microcomputador, a Calculadora Gráfica pode ser concebida como um “mini computador” voltado para estudos em matemática e ciências, sendo ainda de fácil transporte. Ainda, a Calculadora Gráfica pode executar programas e pode ser acoplada a sensores, o que permite abordar diversos outros conceitos.

A dinâmica característica do grupo de Iniciação Científica do GPIMEM permitiu que eu realizasse diversas atividades de pesquisa⁹ associadas ao uso de Calculadoras Gráficas. Além das discussões de referenciais teóricos sobre esse tema, e também sobre Informática e Educação Matemática, pude conhecer inúmeras pesquisas e trabalhar com muitos pesquisadores desta área. Um exemplo foi minha participação no Projeto Texas¹⁰, no qual explorei a Calculadora Gráfica TI-83¹¹, utilizada nesta pesquisa. Com esse vínculo ao Projeto Texas, em 2000, trabalhei com Calculadoras Gráficas a partir de atividades elaboradas pelo GPIMEM e de seu manual.

⁸ Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática. IGCE – Unesp – Rio Claro.

⁹ Sobre dinâmicas do GPIMEM ver: Penteado e Borba (2000), Borba e Penteado (2003), Araújo e Borba (2004).

¹⁰ Projeto de pesquisa desenvolvido pelo GPIMEM com Calculadoras Gráficas da Texas Instruments.

¹¹ Para conhecer os modelos de Calculadoras Gráficas da Texas Instruments acesse www.ti.com.

Em 2001, já como bolsista do CNPq, trabalhei essas atividades sobre funções juntamente com estudantes e com a professora de uma turma de oitava série da Escola Estadual Heloísa Lemenhe Marasca, em Rio Claro, SP. Esse trabalho com estudantes da referida escola foi realizado em parceria com Nilce Scheffer e Ana Paula Malheiros, pesquisadoras participantes do GPIMEM.

Basicamente, meu envolvimento no Projeto Texas permitiu que eu elaborasse uma apostila de atividades sobre funções polinomiais e o uso de Calculadoras Gráficas, indicando comentários a professores a partir das discussões dos estudantes.

Em 2002, continuei realizando essas atividades, referentes a parte do Projeto Texas. Permaneci trabalhando com os estudantes da escola Marasca e elaborando novas versões da apostila de atividades. Considero interessante destacar que em 2002 emergiram momentos relevantes para que eu pudesse iniciar a estruturação do Projeto de Pesquisa que direcionou esta Dissertação.

Saliento ainda que, desde 1993, o GPIMEM produz discussões sobre o tema funções e uso de informática. Um dos principais enfoques nessas discussões são as **representações múltiplas**¹². Isto é, o fato do software gráfico ou da Calculadora Gráfica possibilitar ao estudante coordenar diferentes tipos de representações - gráfica, algébrica e tabular - de uma função ou de uma família de funções.

Em seu mestrado, por exemplo, Souza (1996) discutiu uma proposta pedagógica para estudo de funções quadráticas com o uso de Calculadoras Gráficas. Trabalhando com estudantes de segundo grau em experimentos de ensino, a pesquisadora destacou, além da relevância do aspecto visual, o caráter empírico influenciado pelo *design* da Calculadora e discussões sobre pré-cálculo (funções) e sobre Informática na Educação¹³.

A dissertação de Souza (1996) foi de extrema relevância no contexto da Iniciação Científica desenvolvida por mim, principalmente nos aprofundamentos matemáticos que enfocam as relações entre os coeficientes a , b e c de famílias de funções $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = ax^2 + bx + c$, e suas respectivas representações gráficas.

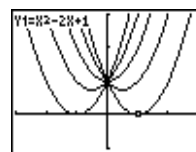
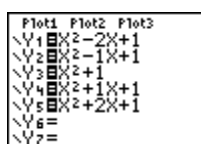
¹² Ver (BORBA, 1993; 1994; 1995; 1999b; 1999c; BORBA; CONFREY, 1996; SOUZA, 1996; VILLARREAL, 1999; BORBA; PENTEADO, 2003; SCHEFFER, 2001; BENEDETTI, 2003; BONAFINI, 2004).

¹³ Por exemplo, o fato de ser proibido o uso de Calculadoras em testes como o exame vestibular.

O GPIMEM também oferece diversos cursos sobre Calculadoras Gráficas (BORBA, 1999a). Em 2002, o Grupo elaborou um curso de extensão universitária destinado a estudantes da graduação da UNESP de Rio Claro, SP, do qual pude participar como monitor. Alguns questionamentos levantados por estudantes, ao explorarem as representações múltiplas de funções durante esse curso, trouxeram-me inquietações com relação à questão da *demonstração*. Estudantes discutiram a necessidade de uma *prova rigorosa* sobre uma conjectura elaborada diante da visualização de um gráfico. Por exemplo¹⁴:

**Sejam funções do tipo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \in \mathbb{R}^+$ e $b, c \in \mathbb{R}$.
Ao se manter a e c inalterados e variar o coeficiente b , o que acontece graficamente?**

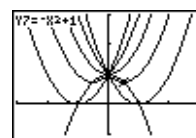
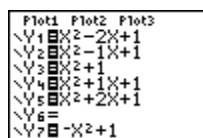
Investiguemos o caso $a = c = 1$ com a Calculadora Gráfica TI-83:



A partir da visualização dos gráficos acima, exibidos pela calculadora gráfica, pode-se conjecturar, por exemplo, que a curva determinada pelos vértices das parábolas obtidas também é uma parábola. *E qual seria a equação desta parábola?* Notei que alguns estudantes, ao invés de elaborarem inicialmente uma estruturação algébrica, procuraram determinar tal equação valendo-se de informações gráficas, evidenciando a visualização e as múltiplas representações.

Foram elaboradas conjecturas como: “a equação $y = ax^2 + bx + c$, deve ter o coeficiente a negativo, pois a parábola possui concavidade voltada para baixo”; “o coeficiente c deve ser igual a 1, pois é onde a curva intercepta o *eixo-y*”; “as raízes são +1 e -1, logo a deve ser igual a -1”. Surgiu então a conjectura: $y = -x^2 + 1$.

Tem-se a seguinte comprovação visual com a Calculadora Gráfica:



¹⁴ Ver (SOUZA, 1996; BORBA; PENTEADO, 2003).

Algebricamente, obtemos a seguinte confirmação:

Como $x_v = \frac{-b}{2a}$ ⁽¹⁵⁾ tem-se que $b = -2ax_v$ (1) e

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2}{4a} + c \text{ (2)}.$$

Ao substituir (1) em (2): $y_v = \frac{-(-2ax_v)^2}{4a} + c = \frac{-4a^2 x_v^2}{4a} + c = -ax_v^2 + c$.

Logo, no caso $a = c = 1$, obtém-se $y = -x^2 + 1$. **Como havíamos conjecturado!**

Situações como a descrita acima, ocorridas em cursos de extensão, faziam-me refletir sobre uma articulação entre explorar atividades com a Calculadora Gráfica e elaborar uma prova algébrica nesse processo de investigação. Enfim, qual é o papel da Calculadora Gráfica na demonstração?

Ao mesmo tempo em que essas inquietações emergiam, pude perceber que o tema demonstração é bastante discutido em Educação Matemática.

Em fevereiro de 2002, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM - SP) e o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PGEM - Unesp - Rio Claro) promoveram um Seminário intitulado “*Como a demonstração é considerada em diversas áreas do conhecimento*”¹⁶.

Alguns pesquisadores destacam, por exemplo, que as tecnologias informáticas possibilitam novas abordagens par o ensino da demonstração matemática. Abordagens nas quais são privilegiadas as inferências informais, como a visualização (LOURENÇO, 2002).

É nesse sentido que a experimentação com tecnologias pode ser evidenciada como um processo relevante no contexto de investigação matemática, possibilitando caracterizar o papel da Calculadora Gráfica na demonstração. E o que é experimentação com tecnologias em Educação Matemática?

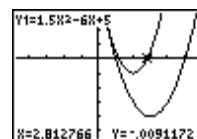
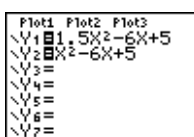
¹⁵ Como $y = ax^2 + bx + c$, $y' = 2ax + b$. Para obtermos o ponto crítico basta tomar a raiz de y' . Obtemos $x = -b/2a$.

¹⁶ Alguns dos debates deste seminário e dos textos publicados por seus expositores na revista Bolema (Boletim de Educação Matemática - PGEM) Número 18, trataram discussões específicas sobre a demonstração em Informática e Educação Matemática.

2. Experimentação com Tecnologias e Demonstração: O Contexto Investigativo

Borba (1999c) discutiu parte de sua pesquisa sobre Modelagem e Informática, desenvolvida junto à disciplina Matemática Aplicada no Curso de Ciências Biológicas da Unesp - Universidade Estadual Paulista - de Rio Claro. O autor destaca que, além dos estudantes desta disciplina desenvolverem *projetos de modelagem*¹⁷ utilizando tecnologias informáticas, estes também exploram potencialidades das Calculadoras Gráficas no estudo de funções durante as aulas. Esse processo de exploração (experimentação) de conceitos matemáticos fundamentais da disciplina, realizado pelos estudantes com tecnologias informáticas, é denominado *enfoque experimental com Calculadoras Gráficas* (BORBA, 1999c).

Por exemplo, a partir da Análise de Vídeo de uma dessas aulas do curso de biologia, interessei-me por uma conjectura expressa por uma estudante ao relacionar diferentes valores para o coeficiente **a** da função polinomial $y = ax^2 + bx + c$ e sua representação gráfica utilizando Calculadora Gráfica. A estudante investigou as funções de equação $y_1 = 1.5x^2 - 6x + 5$ e $y_2 = x^2 - 6x + 5$.



A partir dessa experimentação a estudante conjecturou que “*quando a aumenta, as raízes diminuem*”. Eu busquei dar um tratamento a esta fala, “traduzindo-a” em um enunciado matemático. Mesmo tendo que elaborar inúmeras hipóteses para esse enunciado, o que implicou na estruturação de diversos casos ($c > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$, $c < 0$ e $b > 0$, $c < 0$ e $b < 0$, etc.), argumentei sobre uma demonstração (ou prova rigorosa) para o enunciado elaborado e pude apresentar tal resultado em dois congressos de Iniciação Científica (SCUCUGLIA, 2002).

Borba e Villarreal (2005) também analisam o exemplo acima e destacam que, além da conjectura elaborada em sala de aula ter promovido discussões matemáticas interessantes, também possibilitou meu engajamento em uma pesquisa em Educação Matemática em nível de Iniciação Científica:

¹⁷ Ver (BORBA; MENEGHETI; HERMINI, 1997; BORBA, 1999c; BORBA; PENTEADO, 2003; MALHEIROS, 2004).

A conjectura que surgiu durante uma atividade exploratória com estudantes de biologia, no coletivo de seres-humanos-com-calculadora-gráfica, criou o envolvimento para uma investigação a um graduando em matemática, o qual se engajou na tarefa de reformular e provar a conjectura (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 129).

Esse é um exemplo de experimentação com Calculadoras Gráficas, ou seja, o fato de possibilitar ao estudante experimentar a Calculadora Gráfica e desenvolver atividades coordenando diferentes tipos de representações de funções, permitiu que a estudante elaborasse uma conjectura sobre o coeficiente a da função quadrática. É nesse sentido que a mídia informática pode assumir um papel essencial no processo de descoberta, de investigação e de exploração desenvolvida por estudantes, promovendo discussões sobre a demonstração.

Borba e Villarreal (2005), no livro *Humans-with-Media and Reorganization of Mathematical Thinking*, tratam de forma profunda a concepção Seres-Humanos-com-Mídias¹⁸ e discutem diversas implicações dessa perspectiva para a Educação Matemática. Os autores evidenciam, por exemplo, questões sobre experimentação com tecnologias, visualização e demonstração. Indicam também alguns processos inerentes ao fazer matemático com informática, como a possibilidade de testar uma conjectura usando um grande número de exemplos, de executar modos alternativos de testes, ressaltando a possibilidade de repetir os experimentos, a disposição de diferentes tipos de representações etc.

Uma abordagem experimental em educação matemática implica:

- No uso de procedimentos de tentativas e processos educativos que possibilitem a geração de conjecturas;
- Na descoberta de resultados matemáticos desconhecidos previamente à experimentação;
- Na possibilidade de testar modos alternativos de coletar resultados;
- Na chance de proporcionar novos experimentos;
- Em um modo diferente de aprender matemática.
- Na possibilidade de testar conjecturas usando um grande número de exemplos e a chance de repetir os experimentos; (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 75).

Conseqüentemente, em discussões sobre experimentação com tecnologias, sobressaem discussões sobre a visualização, pois as informações visuais podem, por exemplo, condicionar o pensamento matemático de estudantes.

¹⁸ Essa concepção teórica sobre o conhecimento será discutida no próximo capítulo.

A visualização pode ser considerada um modo alternativo na constituição da produção de conhecimento matemático. É parte da atividade matemática, um modo de resolução de problemas, trazendo, nesse sentido, implicações diversas para a Educação Matemática.

Uma abordagem visual no processo de pensamento matemático pode ser caracterizada pela:

- Utilização de informação gráfica para resolver questões matemáticas que poderiam ser também abordadas algebricamente.
- Dificuldade em estabelecer interpretações algébricas das soluções gráficas.
- Não necessidade de recorrer primeiro à álgebra, quando as soluções gráficas são requisitadas.
- Facilidade na formulação de conjecturas e refutações ou dando explicações usando informação gráfica (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 93).

A partir dessa idéia, que articula experimentação e visualização, Borba e Villarreal (2005) apresentam diversas pesquisas desenvolvidas pelo GPIMEM.

Sheffer (2001) enfocou a utilização da Calculadora Gráfica e do sensor CBR¹⁹. Para tanto, a pesquisadora realizou experimentos de ensino e investigou como estudantes de oitava série coordenam a representação gráfica de um movimento destacando que o coletivo Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas-e-CBR procurou, no processo de experimentação, elaborar uma relação entre o movimento executado e a representação gráfica desse movimento, tendo como base as informações exibidas pela Calculadora Gráfica. Assim, a investigação matemática articulou-se a questões da física, tornando evidente a ressonância entre experimentação, visualização e coordenação de representações de funções.

Bonafini (2004) também enfocou diversas dimensões sobre a articulação entre matemática e física a partir da experimentação com Calculadoras Gráficas e Sensores. A pesquisadora utilizou o sensor CBL²⁰ de temperatura e programas da Calculadora Gráfica. Com a realização de experimentos de ensino, Bonafini (2004) possibilitou aos estudantes verificar diferentes tipos de resfriamento podendo abordar, conseqüentemente, questões sobre leis de resfriamento e sobre Cálculo Diferencial e Integral.

¹⁹ CBR: Calculator-Based Ranger. Este Sensor, acoplado à Calculadora Gráfica, possibilita que se tenha a representação gráfica de um movimento com as variáveis: distância, velocidade e aceleração.

²⁰ CBL: Calculator-Based Laboratory.

Outra vertente de discussão abordada em pesquisas do GPIMEM é a experimentação e demonstração. Benedetti (2003), por exemplo, enfocou o aspecto das representações múltiplas no estudo de funções junto a estudantes do segundo grau e, com isso, fez indicações sobre a questão da demonstração.

Benedetti (2003) investigou, em sua dissertação, a relevância de diferentes tipos de mídias no processo de produção de conhecimento matemático com um software gráfico. Em uma das análises de seu estudo, o pesquisador destacou as possibilidades dos estudantes gerarem conjecturas, considerando-os “criadores de teoremas”, pois estes elaboraram e testaram diversas conjecturas sobre representações múltiplas de funções.

Villarreal (1999) enfocou as concepções de estudantes universitários ao estudarem o conceito de derivada utilizando um software gráfico. Assumindo uma perspectiva de ênfase aos aspectos visuais na aprendizagem dos estudantes, foram abordadas profundamente questões como a relevância da visualização na elaboração de conjecturas e refutações no processo de produção do conhecimento. Isso permitiu que a autora discutisse sobre o contexto da demonstração com base na filosofia falibilista de Lakatos (1976).

No contexto da experimentação e demonstração Borba e Villarreal (2005) estruturam discussões referindo-se a argumentações de Polya (1945) e Lakatos (1976), destacando os aspectos investigativos no fazer matemático, bem como os próprios fundamentos da matemática, exemplos históricos de caráter heurístico, concepções sobre resolução de problemas e suas instâncias com a Informática. Os autores também destacam a concentração de pesquisas sobre demonstração em Educação Matemática, as quais envolvem atividades de geometria dinâmica.

Hanna (2000), por exemplo, investigando o uso de *software* de geometria dinâmica, evidencia o fato da geometria dinâmica trazer discussões sobre a questão da **visualização**, da **exploração** e da **heurística**, principalmente no que se refere às possibilidades do “arrastar”, de invenção (gerando conjecturas), de descoberta (testando hipóteses) e de convencimento no fazer matemático de estudantes.

O termo *heurístico* é de origem grega. A tradução desse termo e de suas derivações traz significados como: “encontrar, descobrir, inventar; inventivo, engenhoso”. Mais especificamente, a partir da concepção de Polya (1945), o termo heurístico refere-se à arte relativa à descoberta e à invenção (FILHO, 2004)²¹.

Nesse sentido as demonstrações podem assumir diferentes papéis. Além do caráter lógico-dedutivo, emergem instâncias heurísticas, caracterizadas pela visualização, exploração, investigação, pelo convencimento, etc. Villiers (2001) argumenta especificamente sobre alguns dos papéis da demonstração no ensino, também evidenciando atividades investigativas.

- A demonstração, enquanto *processo de verificação/convencimento*, coloca em uma perspectiva mais apropriada uma suposição distorcida da demonstração como único e absoluto meio de verificação, pois a elaboração de conjecturas desempenha, na procura da convicção, um papel tão importante como o processo da justificação dedutiva. Logicamente, exigem-se inferências dedutivas, mas a experimentação exploratória e a compreensão intuitiva são necessárias.
- A demonstração, enquanto *processo de descoberta*, possibilita considerar que os teoremas são, na maior parte das vezes, descobertos por meio da intuição e por métodos quase-empíricos, antes de serem verificados através de demonstrações. Para o matemático profissional, a demonstração não é apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas um processo de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados.
- A demonstração, enquanto *processo de sistematização*, permite transformar um conjunto de significados conhecidos em um sistema dedutivo e identificar inconsistências e reorganizar hipóteses, tornando possível verificar a possibilidade de aplicação de toda uma estrutura complexa ou teoria através de uma avaliação de axiomas e definições.

²¹ Nesta tese, o autor busca discutir os indícios heurísticos nas obras *O Método* de Arquimedes, *A Coleção Matemática* de Pappus e *Regras para a Direção do Espírito* de Descartes. Nesse sentido, Filho (2004) estabelece relações dessas obras com definições de Polya sobre a investigação heurística. Essas definições e outras concepções estruturam-se nas obras *A Arte de Resolver Problemas* e *Matemática e Raciocínio Plausível*. Uma resenha crítica deste trabalho encontra-se publicada na revista *BOLEMA* número 23 (SCUCUGLIA, 2005).

- A demonstração, enquanto *desafio intelectual*, cumpre uma função gratificante e de realização própria. A demonstração é, portanto, um campo de teste para a energia intelectual e engenho do matemático.

Além disso, a própria abordagem tradicional das demonstrações está pautada na visualização. Borba e Villarreal (2005) argumentam sobre a necessidade de se elaborar um gráfico para que seja desenvolvida a demonstração do Teorema do Valor Médio, por exemplo. De modo específico, Hurtz (1997) evidencia os aspectos visuais da prova do Teorema do Valor Médio com o uso de Calculadoras Gráficas, comentando que ela pode ser usada na discussão de teoremas e possibilita a elaboração de conjecturas no processo de experimentação. As tecnologias informáticas possibilitam que se tenham não somente imagens estáticas, mas movimentos e simulações que condicionam diversas possibilidades na investigação matemática.

Ponte, Brocado e Oliveira (2003) argumentam que uma investigação matemática envolve quatro momentos principais que podem ocorrer simultaneamente: i) o reconhecimento da situação, a exploração preliminar e a formulação de questões; ii) o processo de formulação de conjecturas; iii) realização de testes e refinamento de conjecturas; iv) demonstração e avaliação do trabalho realizado.

Essas concepções sobre experimentação e demonstração e as atividades de pesquisa desenvolvidas por mim em Iniciação Científica junto ao GPIMEM, permitiram que eu iniciasse a estruturação de um projeto de mestrado em Informática e Educação Matemática, articulando os temas Funções, Calculadoras Gráficas e Demonstração.

3. Do Projeto à Pergunta Diretriz da Pesquisa: A Metodologia Qualitativa

Em 2003, como aluno especial da PGEM em Rio Claro²², pude cursar no primeiro semestre a disciplina Tendências em Educação Matemática²³. Neste contexto, houve certo aprofundamento em referenciais de diversas áreas da Educação Matemática, nos quais se buscou discutir os principais debates em cada tendência. E, como trabalho final desta disciplina, estruturei a primeira versão do projeto que direcionou a presente pesquisa.

Além das discussões sobre Calculadoras Gráficas, experimentação com tecnologias, múltiplas representações de funções e demonstração, procurei evidenciar no referido projeto concepções sobre a pesquisa qualitativa, pois esse tipo de abordagem permite ao pesquisador “observar, diretamente, como cada indivíduo, grupo ou instituição experimenta, concretamente, a realidade pesquisada” (Goldenberg, 1998, p. 63).

O pesquisador, nessa abordagem, não deve se preocupar com representatividades numéricas, mas com o aprofundamento da compreensão de determinado grupo social. Nesse sentido, Bogdan e Biklen (1998) argumentam que um dos enfoques do pesquisador nas ciências qualitativas é

Melhor compreender o comportamento e a experiência humana. Eles procuram compreender o processo pelo qual as pessoas constroem significados e descrevem o que são aqueles significados. Usam observação empírica por que é com eventos concretos do comportamento humano que os investigadores podem pensar mais clara e profundamente sobre a condição humana (Bogdan; Biklen, 1998, p.38).

Até os anos 1960, os Métodos nas Ciências Sociais eram assentados sobre os mesmos pressupostos caracterizados nas Ciências Naturais: objetividade, racionalidade, quantificações. No entanto, naquele momento, as Ciências do Humano iniciaram uma busca estrutural em modelos alternativos ao Positivismo²⁴.

²² Também como Professor do curso de Engenharia Mecânica (Disciplina Cálculo C) da Escola de Engenharia de Piracicaba (EEP) da FUMEP (Fundação Municipal de Ensino de Piracicaba, SP) e como professor do Ensino Médio do Colégio Técnico-Industrial de Piracicaba (COTIP), da mesma Fundação.

²³ Disciplina ministrada pelo Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba.

²⁴ O Positivismo caracteriza-se pela valorização de um método empirista e quantitativo, pela defesa da experiência sensível como fonte principal do conhecimento, pela hostilidade em relação ao idealismo, e pela consideração das ciências empírico-formais como paradigmas de cientificidade e modelos para as demais ciências (JAPIASSÚ; MARCONDES, 1996, p.217).

O Positivismo²⁵ pode ser entendido como uma forma de se conceber o conhecimento como sendo suficiente para todo entendimento científico. Goldenberg (2003) argumenta que, na perspectiva positivista, a pesquisa é uma atividade neutra e objetiva, que busca descobrir regularidades e leis, em que o pesquisador não pode fazer julgamentos nem permitir que seus preconceitos e crenças a contaminem.

No entanto, ao se pressupor o pesquisador como o principal instrumento de investigação, emergem modelos que não são ressonantes aos métodos positivistas. Tais modelos, os quais divergem do pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências e que recusam legitimar o conhecimento por processos quantificáveis, são denominados Paradigmas da Pesquisa Qualitativa²⁶.

Bicudo (1993), ao comentar sobre a conduta de um pesquisador qualitativo, argumenta que a ética deste se delineia principalmente por

- a. Perseguir uma interrogação de modo rigoroso, sistemático, sempre andando em torno dela, buscando todas as suas dimensões.
- b. Assumir uma atitude de respeito e de compromisso com a pesquisa à luz do sentido que ela tem para ele, pesquisador, e à luz dos significados que estão sendo elaborados no contexto social (Bicudo, 1993, p. 19).

Motivado com discussões promovidas junto ao GPIMEM, consolidei uma versão do Projeto de Pesquisa com o título “Funções, Calculadoras Gráficas e Demonstração” direcionado pela pergunta: *Como estudantes demonstram ao explorarem atividades investigativas sobre funções com a utilização de calculadoras gráficas?*

Mas com a intensificação de leituras visando uma revisão de literatura referente a esse assunto, com a consolidação de um quadro teórico, com a análise dos dados, e, com diversos outros processos de pesquisa, a pergunta diretriz foi modificada. Ocorreram três refinamentos essenciais. No início da pesquisa, busquei explorar diversas possibilidades sobre o tema múltiplas representações de funções, com o intuito de elaborar uma atividade de pesquisa.

²⁵ Linha de pensamento iniciada com o francês Augusto Comte (1798 – 1857).

²⁶ Sobre Paradigmas de Pesquisa Qualitativa ver Anexo III (GUBA; LINCOLN, 1990; LINCOLN; GUBA, 1996; 2000; ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNADJER, 2004).

A partir de indicações do orientador, de experiências profissionais e do aprofundamento em referenciais teóricos comecei a investigar, além do tema funções, discussões sobre o ensino e conceitos de Cálculo Diferencial e Integral.

O ensino de Cálculo é bastante discutido em Educação Matemática e umas das principais justificativas para tal discussão é o grande número de reprovações de estudantes. É nesse sentido que algumas pesquisas sobre Cálculo buscam caracterizar as concepções dos estudantes sobre funções, continuidade, diferenciação, integração, etc. Mais especificamente, algumas pesquisas discutem essas concepções com o uso de informática (CONFREY, 1990; BALDINO, 1996; VILLARREAL, 1999).

Uma pesquisa sobre ensino de Cálculo e Informática que me influenciou consideravelmente foi a tese de Villarreal (1999), que enfocou as concepções de estudantes universitários ao estudarem o conceito de derivada utilizando um software gráfico. A partir de um vasto levantamento bibliográfico sobre o ensino de Cálculo e o uso de computadores, a autora assumiu uma perspectiva de ênfase nos aspectos visuais, na aprendizagem dos estudantes. Nesse sentido, as concepções dos estudantes foram analisadas considerando-se valores epistemológicos.

Definido esse enfoque em relação ao Cálculo, iniciei uma investigação sobre como elaborar uma atividade de pesquisa com conteúdos dessa disciplina explorando os seguintes temas: Regra da Cadeia, Teorema do Valor Médio e **Teorema Fundamental do Cálculo**²⁷. Foi neste último tema que surgiu a possibilidade de elaborar uma Atividade com Calculadoras Gráficas. Assim, além de focar representações múltiplas de funções, como estruturado no Projeto, explorei também atividades sobre o ensino de Cálculo com Informática. Esse foi o primeiro refinamento da pesquisa.

A concepção de conhecimento sobre a qual argumento, e que perpassa em diversas pesquisas desenvolvidas no GPIMEM, propõe que o conhecimento não é produzido somente por humanos ou por coletivos humanos, mas por **Seres-Humanos-com-Mídias**²⁸.

²⁷ Sobre o Teorema Fundamental do Cálculo ver Anexo II.

²⁸ Ver (BORBA, 1999d; BORBA; PENTEADO, 2003; BORBA, 2004; BORBA; VILLARREAL, 2005).

Essa concepção é inerente às dimensões e considerações sobre o processo de experimentação-com-tecnologias. Portanto, enfoco nesta pesquisa coletivos de Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas.

O terceiro refinamento essencial no enfoque da pesquisa foi com relação ao tema demonstração. Na presente pesquisa, este tema está articulado à questão da prova em matemática com informática e, principalmente, à questão da experimentação com tecnologias e dedução. Para caracterizar esse processo de experimentação/demonstração utilizarei ordinariamente o termo investigação.

A partir desses três refinamentos – Teorema Fundamental do Cálculo, Seres-Humanos-com-Mídias e Experimentação/Demonstração (investigação) - é que a pergunta diretriz do Projeto foi modificada, reestruturada.

Araújo e Borba (2004) destacam que o refinamento da pergunta diretriz é contínuo no processo de pesquisa qualitativa e as alterações podem surgir a partir da coleta e análise de dados, e o aprofundamento sobre perspectivas teóricas.

[A pergunta] pode ser modificada à medida que a própria experiência com o trabalho de campo e as leituras de novas referências levem o autor a ganhar uma nova perspectiva que transforma o foco em questão. (...) Esse fato é característico do que Lincoln e Guba (1985) denominam design emergente de uma pesquisa, (...), ele vai sendo construído à medida que a pesquisa se desenvolve e seus passos não podem ser rigidamente determinados a priori (Araújo; Borba, 2004, p. 29).

Como mencionado, eu enfocava no Projeto *como os estudantes tratam a demonstração ao explorarem atividades investigativas sobre funções com a utilização de Calculadoras Gráficas*. Agora, de modo refinado, consolidado o seguinte questionamento:

Como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo?

E como produzir dados para estruturar discussões sobre esse questionamento? Assim, estruturei a seguir concepções sobre os Procedimentos Qualitativos da Pesquisa.

SEGUNDO CAPÍTULO - Os Procedimentos Qualitativos da Pesquisa

O mundo não é, o mundo está sendo.
Paulo Freire

1. Pesquisa Qualitativa: Ressonância entre Procedimentos e Visão de Conhecimento

Araújo e Borba (2004) evidenciam a relevância de existir uma sinergia entre os procedimentos de uma pesquisa qualitativa em Educação Matemática e as concepções teóricas defendidas pelo pesquisador.

Em uma pesquisa em Educação (Matemática), a metodologia que embasa seu desenvolvimento deve ser coerente com as visões de Educação e de conhecimento sustentadas pelo pesquisador, o que inclui suas concepções de Matemática e de Educação Matemática. Portanto, o que o pesquisador acredita ser a Matemática e a Educação Matemática e seu entendimento de conhecimento e como é produzido são fundamentos que influenciam diretamente os resultados de pesquisa (ARAÚJO; BORBA, 2004, p. 43).

Como abordado anteriormente, diversas pesquisas desenvolvidas por integrantes do GPIMEM, envolvendo experimentação com tecnologias, sustentam uma visão epistemológica que destaca a relevância da utilização de tecnologias (informáticas) no processo de produção de conhecimento: os coletivos **Seres-Humanos-com-Mídias**.

Dessa forma, as pesquisas vinculadas ao GPIMEM e seus respectivos procedimentos podem inter-relacionar-se como uma teia²⁹, construída ao longo do pesquisar, promovendo uma harmonia entre metodologia de pesquisa e concepções de conhecimento (ARAÚJO; BORBA, 2004).

²⁹ Também serão utilizadas as metáforas Rede, Colcha de Retalhos e Mosaico.

2. Informática e Epistemologia: Os Coletivos Seres-Humanos-com-Mídias

*A consciência é individual, mas o pensamento é coletivo.
Lévy (1993)*

A concepção epistemológica Seres-Humanos-com-Mídias ressalta o papel das mídias no processo de produção de conhecimento matemático. Argumenta-se que essa produção não é realizada apenas por humanos ou por grupos destes, mas por coletivos constituídos de Humanos-com-Mídias.

O conhecimento nunca é produzido somente por humanos, mas também por atores não humanos. As tecnologias são produtos humanos, e são impregnados de humanidade, e reciprocamente o ser humano é impregnado de tecnologia. Neste sentido, o conhecimento produzido é condicionado pelas tecnologias (BORBA, 2004, p. 305).

A idéia de Seres-Humanos-com-Mídias possibilita a elaboração de perspectivas específicas à Informática e Educação Matemática a partir de concepções fundamentadas, por exemplo, em Tikhomirov (1981) com a idéia de Reorganização do Pensamento, em Lévy (1993; 1998), na caracterização das Tecnologias Intelectuais e em Lévy (1999), com a estruturação do conceito de Inteligência Coletiva.

Tikhomirov (1981) argumenta que os computadores reorganizam o pensamento. Os instrumentos informáticos e suas instâncias não substituem ou apenas complementam os seres humanos em suas atividades intelectuais. A Informática, enquanto instrumento de mediação, reorganiza a cognição humana. Emergem, então, reorganizações epistemológicas e culturais.

No contexto das Tecnologias Intelectuais (LÉVY, 1993; 1998), a Oralidade, a Escrita e a Informática são consideradas as mídias que determinaram a temporalidade das eras antropológicas. Mais especificamente, assim como a Escrita reorganizou a Oralidade enquanto Tecnologia Intelectual, a Informática concentra e potencializa todos os sistemas de controle que a antecederam, como línguas, numerações, alfabetos, ideografias e outros.

Com a Informática ocorrem re-significações sobre a linguagem e, conseqüentemente, as atividades cognitivas são reestruturadas (reorganizadas) devido à mediação, condicionada pela técnica digital. Simultaneamente,

Um modelo digital não é lido ou interpretado como um texto clássico, ele é explorado de forma interativa. Contrariamente à maioria das descrições funcionais sobre papel ou aos modelos reduzidos analógicos, o modelo informático é essencialmente plástico, dinâmico, dotado de uma certa autonomia de ação e reação (LÉVY, 1993, p. 121).

Em uma caracterização específica sobre as Tecnologias Intelectuais, Lévy (1998) destaca que a Informática, suas dimensões e sua plasticidade, redefinem a função do docente e dos meios de acesso aos conhecimentos. O professor deixa de executar a transmissão de informação e a notação de exercícios, e passa a buscar um direcionamento do estudante às informações contidas nos programas, nos bancos de dados e nos livros. A máquina não dá ao estudante um problema a ser resolvido, mas sim os estudantes com o computador resolvem problemas (LÉVY, 1998).

Surgem então discussões que enfocam novas caracterizações sobre a Matemática. Emergem, portanto, novos modelos sobre modos de produção de conhecimento matemático. Modelos condicionados pelas mídias digitais e que reorganizam o processo de produção de conhecimento matemático.

Ao se investigar como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas exploram o Teorema Fundamental do Cálculo, nota-se que os elementos que constituem os processos de experimentação/demonstração de estudantes, são complexos: envolvem uma diversidade de vertentes provenientes de falas, gestos, formas de utilizar determinada mídia na investigação matemática, etc.

É nesse sentido, e como vêm evidenciando diversos pesquisadores do GPIMEM, que os **experimentos de ensino** e a **análise de vídeos** emergem como procedimentos ressonantes com a perspectiva Seres-Humanos-com-Mídias e com o questionamento aqui proposto.

3. Experimentos de Ensino e Análise de Vídeos

Ou bem estudar numerosos casos, de uma maneira sempre superficial e sem grande resultado, ou bem se limitar resolutamente à análise aprofundada de um pequeno número de casos, e provar assim que, no fim das contas, uma experiência bem feita vale por uma demonstração (LÉVY-STRAUSS, 1985, p. 15).

Os experimentos de ensino podem ser entendidos como séries de encontros entre estudantes e pesquisador, que se estendem por um certo período de tempo, referente a ensino-aprendizagem onde o pesquisador que os promove busca uma estruturação da forma como os estudantes estão pensando no processo de exploração de problemas.

Steffe e Thompson (2000) argumentam que os experimentos de ensino, iniciados nos anos 1970, buscam a compreensão de transformações que a matemática dos estudantes (*Students' Mathematics*³⁰) sofre em períodos determinados, valorizando-se a experimentação como uma de suas características e a interação entre pesquisador e pesquisados na produção coletiva de conhecimento.

Os experimentos de ensino possibilitam, essencialmente, a estruturação de modelos da matemática de estudantes na exploração de atividades matemáticas. Esses são modelos (estruturas conceituais) dos tipos de mudanças que se referem à aprendizagem e desenvolvimento de estudantes e possibilitam ao pesquisador entender e explorar tais mudanças. Desse modo, as conjecturas e inferências elaboradas nas sessões de experimentos de ensino, identificadas a partir das ações e linguagens dos estudantes (com a tecnologia), permitem que o pesquisador identifique nuances epistemológicas no processo de investigação matemática (STEFFE; THOMPSON, 2000).

O experimento de ensino é uma ferramenta conceptual que os pesquisadores usam na organização de suas atividades. É primariamente uma ferramenta exploratória [e tem por] objetivo explorar a matemática dos estudantes. Por envolver experimentação com modos e meios de influenciar o conhecimento matemático dos estudantes, o experimento de ensino é mais que uma entrevista clínica (STEFFE; THOMPSON, 2000, p. 273)³¹.

³⁰ Diferentemente, a *Mathematics of Students* refere-se à trajetória escolar em matemática de estudantes.

³¹ The teaching experiment is a conceptual tool that researchers use in the organization of their activities. Is primarily an exploratory tool (...) and aimed of at exploring students' mathematics. Because it involves experimentation with the ways and means of influencing students' mathematics knowledge, the teaching experiment is more than a clinical interview (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. 83).

Os elementos que constituem os experimentos são: seqüência de Episódios de Ensino constituídos por um agente de ensino; um ou mais estudantes; testemunhas³²; um método de gravação. Analisando *videoteipes* das sessões de experimentos, o pesquisador tem a oportunidade de estruturar uma análise da matemática produzida por estudantes. Estas perspectivas promovem *insights* sobre as ações e interações dos estudantes, que não foram “percebidas” pelo pesquisador durante a realização das atividades (STEFFE; THOMPSON, 2000).

O GPIMEM vem desenvolvendo diversas pesquisas tendo como base a utilização de diversos métodos para elaboração de dados. A **triangulação de dados** é o processo de elaboração e articulação entre diferentes dados para discutir sobre a investigação da pesquisa e que, além de aumentar sua credibilidade, permite que esta seja compreendida como interligada a outras pesquisas³³ (ARAÚJO; BORBA, 2004).

Goldenberg (2003, p. 63) argumenta que a triangulação “tem por objetivo abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do objeto de estudo”. A análise dos dados da presente pesquisa é realizada, principalmente, a partir das gravações em vídeo dos experimentos de ensino e é “triangulada” com fichas de trabalhos dos estudantes, fotos dos vídeos e diário de campo (comentários escritos elaborados pelo pesquisador no momento dos experimentos de ensino).

Powell, Francisco e Maher (2004, p. 86), destacam que “o vídeo é um importante e flexível instrumento de coleta de informação oral e visual”, que permite capturar “interações complexas e permite aos pesquisadores reexaminar continuamente os dados”. Ao se referir à Educação Matemática, os autores evidenciam a ressonância entre experimentos de ensino e análise de vídeo.

Por meio de experimentos de ensino, desenhados para criar ambientes de sala de aula onde a construção de sentido seja uma norma cultural, pesquisadores engajam estudantes em ramos coerentes da Matemática, (...). No curso desses experimentos, um resultado particularmente notável da cultura da construção do sentido tem sido a emergência de argumentações, de justificações e a proposição de demonstrações no discurso do estudante (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. 83).

³² As testemunhas podem interagir com o professor-pesquisador e estudantes durante os episódios de ensino e podem contribuir com o professor pesquisador para a interpretação das interações.

³³ Por exemplo, rede (teia) constituída por pesquisas do GPIMEM.

Estes autores propõem um modelo analítico baseado em fases não lineares para estudar, discutir e estruturar o modelo do pensamento matemático de estudantes em um processo de investigação.

- *Observação dos dados de vídeo:* deve existir uma familiarização do pesquisador com o conteúdo dos dados. As gravações devem ser assistidas e observadas inúmeras vezes, buscando-se um “acostumar-se” com as sessões de experimentos de ensino da pesquisa em sua totalidade.
- *Descrição dos dados de vídeo:* o pesquisador busca descrever períodos, de modo essencialmente descritivo (“não interpretativo”) ³⁴.
- *Identificação de eventos críticos:*

Um evento é crítico em sua relação a uma questão particular perseguida pela pesquisa. Assim, uma instância na qual os aprendizes apresentam uma explicação matemática ou um argumento, pode ser significativa para uma questão de pesquisa preocupada com a construção de justificação matemática ou demonstração pelos estudantes e, como tal, pode ser identificada como um evento crítico (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. 105).

- *Transcrição dos Dados:* Ao se transcrever eventos críticos busca-se, além de apresentar os dados da pesquisa, propiciar à análise um enfoque sobre elementos principais de linguagem e de fluxo de idéias.
- *Codificação:* consiste na elaboração de uma notação para os participantes e elementos que compõem as transcrições. Podem ser criados códigos que busquem identificar aspectos do enfoque e do quadro teórico da pesquisa.
- *Composição da Narrativa:* texto que constitui e descreve os dados da pesquisa a partir das diversas fontes.
- *Construir o enredo:* Fase de interpretação de dados. O pesquisador deve usar diversas fontes e pode ser auxiliado pelos participantes da pesquisa e por outros pesquisadores. Este processo é caracterizado pela não linearidade. Pode-se considerar que neste contexto é consolidada a *triangulação de dados*.

³⁴ Para discutir esse processo de “imparcialidade” na descrição de dados Goldenberg (2003) utiliza o termo subjetividade controlada. Não entrarei em detalhes sobre tal discussão, mas evidencio a concepção de que a “parcialidade” é inerente ao fazer do pesquisador qualitativo.

4. Procedimentos Metodológicos da Pesquisa

4.1. A Atividade Piloto

As atividades de pesquisa que desenvolvi durante o primeiro semestre de 2004 basearam-se no desenvolvimento da Atividade Piloto. Em propostas iniciais, busquei abordar o Teorema do Valor Médio, a Regra da Cadeia e o Teorema Fundamental do Cálculo. Nesse momento, desenvolvi, com a Calculadora Gráfica, um estudo aprofundado desses conceitos, principalmente a partir dos livros didáticos citados no Anexo II. E foi nesse momento que identifiquei a possibilidade de estruturar uma Atividade de Experimentação com Calculadoras Gráficas para investigar o **Teorema Fundamental do Cálculo**. Teorema esse intrinsecamente articulado ao conceito de Integral de Riemann³⁵.

Um trabalho que influenciou a elaboração da Atividade de Experimentação foi o artigo de Etchells (1993). Este autor explorou os conceitos de Soma de Riemann e Integração Definida a partir do CAS³⁶ *Derive*. Na metodologia proposta pelo, autor os estudantes exploravam o valor da área determinada pela curva de uma função $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ em um intervalo $[a; b] \subset \mathfrak{R}$ e pelo eixo-x, considerando-se $f(x) \geq 0$ em $[a; b]$. Região esta que denominarei Região $\mathfrak{R}$.

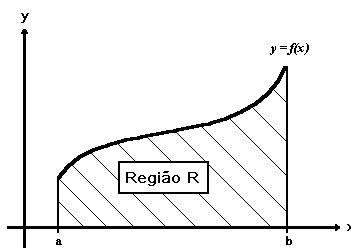


Figura 2.1: Região $\mathfrak{R}$.

Etchells (1993) evidenciou que os estudantes determinavam com o *Derive* os valores de áreas de retângulos que buscavam representar uma aproximação para uma área. A partir das informações obtidas com o CAS, os estudantes generalizavam fórmulas matemáticas utilizando os símbolos de somatórios. Isso permitiu explorar o conceito de Integral de Riemann. Com base nessa abordagem foi elaborada a primeira versão da Atividade de Experimentação sobre Soma de Riemann e Integração Definida e buscou-se desenvolver um estudo piloto, no qual se pudesse identificar diversas limitações com relação aos recursos da Calculadora Gráfica propostos neste momento.

³⁵ Essa articulação entre o conceito de Integral de Riemann (Soma de Riemann e Integração Definida) e o Teorema Fundamental do Cálculo também é discutida no Anexo II.

³⁶ Computer Algebra System.

4.2. O Primeiro Piloto

Mesmo em um período de greve de professores na UNESP - Universidade Estadual Paulista - de Rio Claro, SP, em julho e agosto de 2004, o estudante Edson, do primeiro ano da graduação em Matemática, freqüentava o Departamento de Matemática. Propus ao estudante explorar atividades com a Calculadora Gráfica, e ele manifestou interesse.

O Primeiro Piloto, realizado em duas sessões, foi estruturado e filmado na Sala de Seminário Menor do Departamento de Matemática da instituição mencionada. A partir desse desenvolvimento, emergiram as seguintes questões:

(a) Aspectos da Calculadora Gráfica: os recursos propostos na Atividade Piloto para serem explorados com Calculadora Gráfica eram limitados para a investigação dos conceitos. Essencialmente, era necessário que a Calculadora TI-83 executasse alguns cálculos sobre somatórios que podem, de certa forma, ser considerados complexos e até mesmo tediosos de serem calculados com as mídias tradicionais. Isto é, a Calculadora Gráfica deveria exercer um papel mais significativo no contexto de investigação do estudante.

(b) Aspectos Técnicos: foi possível identificar a importância de uma pessoa responsável pelas filmagens, considerando-se que os estudantes e o professor desenvolvem as atividades junto a carteiras e ao quadro negro, ou seja, eles se locomovem no ambiente de experimentação. Devido às dimensões, notei também limitações ao focar na filmagem o *écran* da Calculadora Gráfica³⁷ e aspectos pertinentes à iluminação e áudio.

Essas “modificações” entre os experimentos de ensino, onde se pôde, por exemplo, modificar a Atividade ou o ambiente e equipamentos de ensino é que Steffe e Thompson (2000) denominam generalização. Esse aspecto de generalização também pode “servir” para “comparar” a matemática produzida por diferentes estudantes nas sessões de experimentos de ensino, sendo de essencial relevância na constituição de investigações enquanto pesquisador.

Após o Primeiro Piloto, ministrei um curso temático sobre Calculadoras TI-83 como integrante do GPIMEM. Esse curso possibilitou que eu selecionasse estudantes para participar de experimentos de ensino definitivos.

³⁷ Nas sessões de experimentos de ensino utilizei o retroprojeter e o *View Screen*, um recurso técnico (aparelho) que pode ser acoplado a Calculadora Gráfica e funciona como um “écran vazado”. Isso permitiu projetar a imagem da tela da Calculadora Gráfica e observar simultaneamente, a partir dos vídeos, as ações dos estudantes e as execuções da Calculadora Gráfica.

4.3. O Curso Temático sobre Calculadoras Gráficas TI-83

Em agosto de 2004, o GPIMEM ofereceu a estudantes da graduação da UNESP - Universidade Estadual Paulista - um curso temático de doze horas intitulado *Noções sobre Calculadoras Gráficas TI-83*. Este curso foi desenvolvido sob responsabilidade do Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba. Colaborei com a organização e divulgação, contribui para a elaboração das atividades e participei das aulas, no desenvolvimento deste curso.

Foram oferecidas 20 vagas, das quais 12 foram preenchidas somente por **estudantes do Primeiro ano da Graduação em Matemática em 2004**. O fato de não ocorrer total preenchimento do número de vagas e dos estudantes de outros cursos da graduação não manifestarem interesse, pode ser atribuído ao momento pelo qual se deu a divulgação e inscrição do curso. Esse período foi caracterizado por uma greve de professores na Universidade e, normalmente, estudantes da graduação não costumam freqüentar o campus nessas épocas.

O curso buscou explorar atividades de representações múltiplas de funções e possibilitou uma “familiarização” dos estudantes com a Calculadora Gráfica, ou seja, ao investigarem as Atividades nas sessões de experimentos de ensino, os estudantes já haviam “quebrado o efeito novidade” e executavam alguns comandos da Calculadora Gráfica com “fluência”.

Ao final do curso, os estudantes preencheram um questionário sobre o interesse de participar desta pesquisa. Todos manifestaram interesse. Nesse sentido, elaborei uma lista eletrônica com o intuito de estabelecer uma comunicação sobre o início dos experimentos e os critérios de seleção para os estudantes, pois dos doze alunos que participaram do curso apenas a metade participaria dos experimentos de ensino.

No entanto, não foi necessário estabelecer critérios de seleção, pois foram exatamente (e apenas) seis estudantes que expressaram interesse na participação através de *e-mail*. Aliás, sete estudantes participaram das discussões eletrônicas, mas um deles havia participado do estudo Piloto. Nesse momento foram constituídas três duplas de estudantes para participarem dos experimentos de ensino: i) Paula e Vitor; ii) Ana Paula e Viviane; iii) Naiara e Moara. Mas como comentarei em seguida, somente duas destas duplas participaram efetivamente dos experimentos de ensino.

Definidas as duplas, iniciei um processo para analisar algumas limitações da Atividade de pesquisa identificadas no primeiro piloto. A Atividade adquiriu um novo aspecto com a utilização de Programas e Comandos. Um caráter ressonante com características emergentes no processo de experimentação-com-tecnologias.

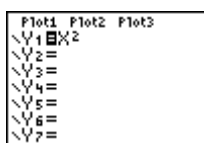
4.4. Potencialidades da Calculadora Gráfica TI-83

Após a realização do Primeiro Piloto, a atividade da pesquisa mudou consideravelmente. A mudança deu-se essencialmente pela utilização de Programas junto à Calculadora Gráfica TI-83. Em uma pesquisa *on-line*, a partir do *site* www.ti.com, pude encontrar programas que tratam os assuntos abordados nesta pesquisa. Programas que exploram Soma de Riemann e Integração. Eu, então, realizei um *download* de dois Programas. Com o software *Graph-Link* acessei as linhas de comando dos programas, realizei uma tradução e modifiquei os *design*. Esses programas foram por mim denominados de AREA e SOMA.

- O Programa ÁREA trata de forma gráfica e numérica o conceito de Soma de Riemann, executando aproximações a partir de áreas de retângulos. Para executá-lo, deve-se inicialmente inserir uma função na Calculadora Gráfica TI-83 a partir da tecla o.

Ao iniciar o AREA, define-se o intervalo no qual vai se trabalhar, o número de retângulos e o tipo de aproximação. O Programa então exibe o resultado da soma dos valores das áreas dos retângulos configurados e concomitantemente exibe uma simulação, na qual retângulos (ou trapézios) “preenchem” a área em questão. Seja o exemplo da função $y = x^2$ em $[0; 3]$ com Retângulos Superiores:

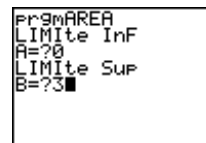
- Insere-se a função $y = x^2$ a partir do comando o;
- Executa-se o Programa AREA a partir da tecla ;
- Configura-se o intervalo.



(i)



(ii)



(iii)

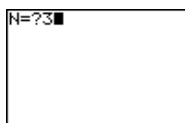
- Define-se o tipo de aproximação;

v) Define-se o número de retângulos;

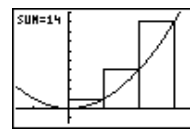
vi) Tem-se a simulação e o resultado da soma dos valores das áreas dos retângulos



(iv)



(v)



(vi)

• O Programa SOMA explora de forma numérica o conceito de Soma de Riemann e de Integral Definida. Neste programa define-se uma função, um intervalo e o número de retângulos. A partir dessa definição, o programa exibe os valores de diferentes aproximações e, ao final, o valor da Integral definida. Segue o mesmo exemplo tratado anteriormente, mas considerando-se agora 15 retângulos.

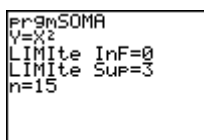
i) Inicia-se o Programa Soma a partir da tecla .

ii) Configura-se a função, o intervalo e o número de retângulos.

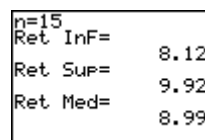
iii) Obtêm-se os resultados por diferentes aproximações e o valor da integral



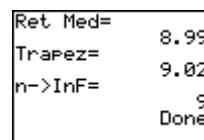
(i)



(ii)



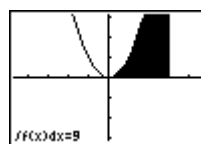
(iii)



(iv)

Cabe aqui destacar uma mudança feita por mim no *design* deste programa. Originalmente, o SOMA, ao invés de exibir " $n \rightarrow \infty$ " (n tendendo ao infinito), era configurado como "*integer*". Com essa mudança, possibilita-se que estudantes identifiquem o conceito de Integral de Riemann. Além dos Programas AREA e SOMA, destaco também o Comando $\int f(x)dx$ da Calculadora TI-83.

• O Comando $\int f(x)dx$ calcula Integrais definidas de funções do tipo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $y = f(x)$, exibindo uma simulação. No exemplo tomado, temos:



Com a proposta de utilização dos Programas AREA e SOMA e do Comando $\int f(x)dx$, as Atividades exploradas no Primeiro Piloto foram reestruturadas. Emergiram novas perspectivas e diversas limitações se restringiram, consolidando o caráter de experimentação da Atividade.

4.5. As Atividades de Experimentação com Calculadoras Gráficas

A Atividade de Experimentação com Calculadoras Gráficas produzida nesta pesquisa foi bastante influenciada por minhas concepções teóricas, principalmente pela idéia de Seres-Humanos-com-Mídias, pois a forma como propus as questões nos experimentos de ensino já buscava destacar as potencialidades e recursos (Comandos e Programas) da Calculadora Gráfica TI-83 no fazer matemático das estudantes. Enfatizava a experimentação, buscava proporcionar a elaboração de conjecturas e a discussão de resultados, tornando-a, dessa forma, uma Atividade investigativa.

Na Primeira sessão de experimentos de ensino, propus Atividades para explorar o conceito de Integral de Riemann³⁸.

Atividades de Cálculo Integral com Calculadoras Gráficas TI-83

Introdução

O objetivo das atividades é calcular o valor da área de uma Região $\mathcal{R}$, limitada pelo eixo- x e pelo gráfico de uma função quadrática $y = f(x) \geq 0$, definida em um intervalo $[a; b]$.

Primeira Atividade

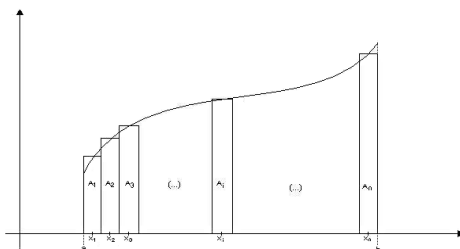
Utilize o Programa AREA e determine aproximações para os valores das áreas determinadas por

- a) $y = x^2$ no intervalo $[0; 3]$
- b) $y = x^2 + 1$ no intervalo $[-2; 2]$
- c) $y = x^2 - 1$ no intervalo $[-1; 1]$

Indicações: Insira a equação em $\circ$ e configure o *window*; Inicie o Programa AREA a partir de $\square$. Considere $N= 3, 6, 15$ e 36 . Utilize diferentes tipos de aproximações

Segunda Atividade

O esboço abaixo representa uma Região $\mathcal{R}$ limitada pelo gráfico de $y = f(x)$ e pelo eixo- x no intervalo $[a; b]$. Considera-se que o intervalo $[a; b]$ foi “dividido em n partes iguais”, que $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ são os pontos médios de cada sub-intervalo e que foi executada uma aproximação “Retângulos Médios”. Observe que o valor da medida da base dos Retângulos é $\frac{|b-a|}{n}$ e o da medida da altura de cada Retângulo é $f(x_i)$.



Considere que os retângulos têm o mesmo valor de medida de base: $\frac{|b-a|}{n} = \Delta x$

³⁸ As Atividades foram investigadas uma a uma pelas estudantes.

- 1) Qual o valor da área de cada Retângulo A_1 , A_2 , A_3 , A_i e A_n ?
- 2) É coerente propor que o Programa AREA executa a soma $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i$?

Como determinar a expressão $\sum_{i=1}^n A_i$ em função de x ?

- 3) É possível determinar o valor exato da área da Região $\mathfrak{R}$?

Terceira Atividade

- 1) Insira a equação $y = x^2$ e utilize um θ decimal.
- 2) Selecione o comando $\int f(x)dx$ - opção 7 no menu *calc* (ΨP) .
- 3) Pressione $\underline{=}$ para $x = 0$ e $x = 3$.
- 4) Qual a relação entre o valor encontrado e o valor calculado a partir do programa SOMA?
- 5) Qual o valor da área da região determinada por $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$ no intervalo $[-1; 2]$.

Existem limitações nessas Atividades. Uma delas é uma limitação conceptual. Para explorar o conceito de Soma de Riemann, na Primeira e Segunda Atividades, baseei-me principalmente na idéia inicial de Etchells

(1993). Este autor utiliza ordinariamente a notação $\sum_{i=1}^n f(x_i)dx$ para representar as Somas de Riemann³⁹. Posteriormente, percebi que seria mais coerente e correto, denotar inicialmente $\frac{b-a}{n} = \Delta x$, ou seja, representar as Somas de

Riemann por $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$. E, posteriormente, considerar $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x = dx$.

Isso possibilitaria, além de maior rigor na notação matemática, uma discussão durante a qual as estudantes investigassem detalhadamente o fato de n tender ao infinito e o valor da medida da base dos retângulos tornar-se

infinitesimal. O próprio conceito de Integral Definida: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$.

Essa é a primeira ressalva das Atividades. Outras limitações serão indicadas na apresentação e na análise os dados da pesquisa, nos capítulos seguintes.

Na Segunda sessão de experimentos de ensino foram propostas as seguintes Atividades para explorar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Quarta Atividade

Equação	Intervalo	$\int_a^b f(x)dx$
$y = 2x$	[0; 1]	
	[0; 2]	
	[0; 3]	
	[0; x]	
$y = 3x^2$	[0; 1]	
	[0; 2]	
	[0; 3]	
	[0; x]	
$y = 4x^3$	[0; 1]	
	[0; 2]	
	[0; 3]	
	[0; x]	

- 1) Utilizando o Comando $\int f(x)dx$ na calculadora TI-83, preencha a tabela ao lado calculando o valor da área entre o gráfico da função de equação $y = f(x)$ e o eixo-x no intervalo proposto.
- 2) Determine uma equação no caso do intervalo [0; x] que represente o valor encontrado para a área.
- 3) Se a equação $y = f(x)$, na primeira coluna da tabela, determinar uma equação $y = F(x)$ na terceira coluna, qual a relação entre $f(x)$ e $F(x)$?

Quinta Atividade

Equação	Intervalo:	$\int_a^b f(x)dx$
$y = 2x$	[1; 2]	
	[2; 3]	
	[1; 3]	
	[a; b]	
$y = 3x^2$	[1; 2]	
	[2; 3]	
	[1; 3]	
	[a; b]	
$y = 4x^3$	[1; 2]	
	[2; 3]	
	[1; 3]	
	[a; b]	

- 1) Utilizando o Comando $\int f(x)dx$ na calculadora TI-83, preencha a tabela ao lado calculando o valor da área entre o gráfico da função de equação $y = f(x)$ e o eixo-x no intervalo proposto.
- 2) Determine uma equação no caso do intervalo [a; b] que represente o valor encontrado para a área.
- 3) Seja $y = f(x)$ e suponhamos que exista uma $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Determine o valor de $\int_a^b f(x)dx$.

³⁹ E eu também a usei na versão proposta nos experimentos de ensino.

4.6 As Duplas Participantes dos Experimentos de Ensino

O primeiro experimento de ensino da pesquisa estava programado para a dupla Paula/Vitor, mas a estudante Paula não pôde comparecer à sessão de experimento. Diante disso, desenvolvi um Piloto apenas com o estudante Vitor. A maior contribuição que esse Piloto trouxe foi para a organização técnica do ambiente de experimento, ou seja, questões referentes à iluminação, ao áudio e ao enquadramento no processo de gravação em vídeo. Nesse sentido, somente duas duplas participaram efetivamente dos experimentos de ensino desta pesquisa.

i) Ana Paula e Viviane

ii) Moara e Naiara

Em relação às estudantes: i) todas cursavam o primeiro ano de Licenciatura em Matemática da UNESP – Universidade Estadual Paulista – de Rio Claro, SP, em 2004, e tinham alcançado ótimo aproveitamento em Matemática durante o Ensino Médio; ii) no momento da realização dos experimentos de ensino, todas as estudantes já haviam abordado, em sala de aula, o Teorema Fundamental do Cálculo e o conceito de Integração de Riemann, bem como já haviam se familiarizado com a Calculadora TI-83, ao participarem do curso temático; iii) todas as estudantes permitiram a filmagem dos experimentos de ensino, a divulgação dos nomes, das fotos e das discussões nesta pesquisa; iv) as quatro estudantes foram aprovadas no curso regular de Cálculo Diferencial e Integral da UNESP, ao fim do ano de 2004.



Foto 2.1: Ana Paula e Viviane

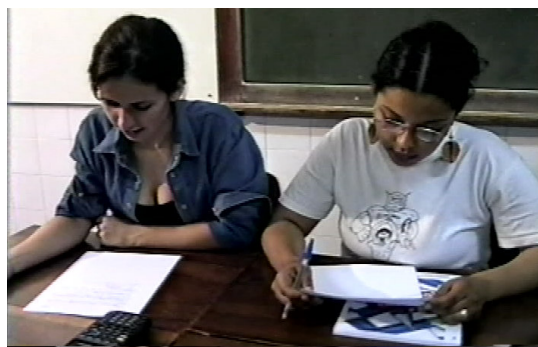


Foto 2.2: Naiara e Moara

4.7 Os Experimentos de Ensino

Os experimentos de ensino desta Pesquisa foram realizados no Laboratório do Ensino do Departamento de Matemática da UNESP - Universidade Estadual Paulista - de Rio Claro, SP. Pôde-se contar com a colaboração do integrante do GPIMEM Geraldo Lima nas filmagens, o qual, além de testemunha dos experimentos, propiciou um ambiente de qualidade para gravação com relação a aspectos de iluminação, áudio e enfoque de filmagem. Esse ambiente pode ser representado da seguinte forma:

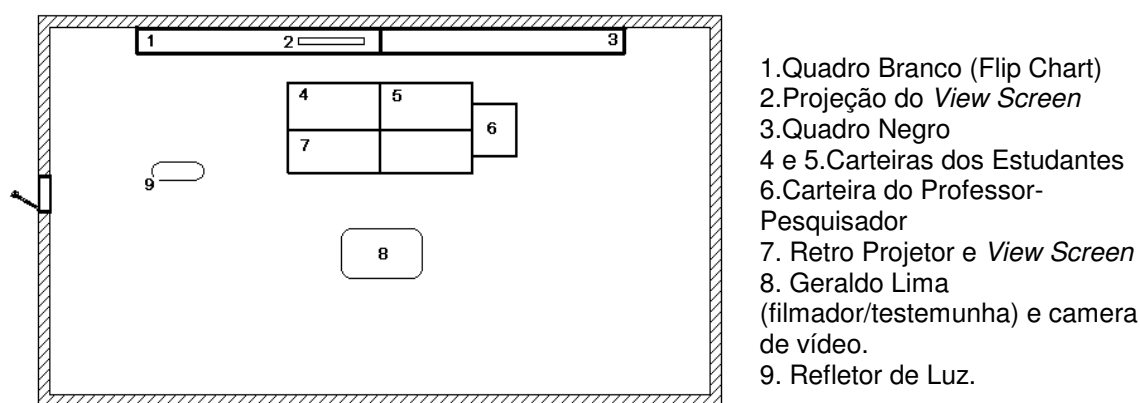


Figura 2.2: Perspectiva Superior do Laboratório de Ensino do Departamento de Matemática da Unesp/RC:
Ambiente dos experimentos de ensino - Software Arcon Versão5. 0 Demo.

Cada uma das duas duplas realizou duas sessões de experimentos de aproximadamente duas horas cada. Foi uma sessão para cada parte da atividade proposta na pesquisa. Primeiramente, investigaram os conceitos de Soma de Riemann e Integração Definida (Primeira a Terceira Atividades) e, conseqüentemente, o Teorema Fundamental do Cálculo (Quarta e Quinta Atividades).

Os experimentos de ensino e as Atividades de Experimentação proporcionaram momentos nos quais as estudantes investigaram o Teorema Fundamental do Cálculo com a Calculadora Gráfica. Com a análise dos vídeos que registraram os experimentos, procurei elaborar discussões sobre a matemática produzida pelas estudantes (*Students' Mathematics*) e como a utilização de recursos da Calculadora Gráfica condicionou essa produção.

4.8 A Análise de Vídeo e Descrição dos Dados

Com base no modelo analítico de Powell, Francisco e Maher (2004) a análise de vídeo da pesquisa estruturou-se sob os seguintes procedimentos:

(a) Realizei a primeira observação dos vídeos que registraram os experimentos de ensino ainda entre as sessões. De início, busquei verificar os aspectos técnicos da gravação como áudio, iluminação, qualidade da imagem, tempo total da sessão de experimento. Este foi também um momento propício para a familiarização com os aspectos totais de vídeo, isto é, uma visão abrangente (geral) dos dados.

(b) Realizados os experimentos, analisei os vídeos enfocando eventos críticos, ou seja, momentos que caracterizassem a produção de conhecimento matemático das Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas ao investigarem os conceitos abordados a partir das Atividades de Experimentação.

(c) A forma como a Atividade foi elaborada e os momentos críticos identificados proporcionaram e determinaram a elaboração de Episódios. Episódios são trechos que apresentam eventos críticos de discussão matemática e condicionam a descrição e a análise de dados.

(d) Os vídeos foram transcritos praticamente em sua totalidade. No entanto, os dados descritos nos próximos capítulos contêm, além de transcrições, ilustrações da tela da Calculadora Gráfica referentes ao seu uso, a exposição de fotos das sessões de experimentos de ensino⁴⁰, assim como trechos das fichas de trabalho dos estudantes. A utilização desses diferentes métodos constitui a *triangulação* de dados da pesquisa.

(e) Estruturada a descrição dos dados, elaborei articulações entre essas e as concepções comentadas anteriormente como, por exemplo, a relevância da visualização e de coordenação de representações no processo de experimentação e demonstração.

⁴⁰ Essas fotos foram obtidas a partir da digitalização dos vídeos em equipamentos do GPIMEM financiados pelo CNPq. Como o leitor notará nos próximos capítulos, as fotos são significativamente relevantes na descrição das discussões matemáticas desenvolvidas nos experimentos de ensino, pois potencializam tal descrição com imagens ilustrativas de situações diversas.

5. Comentários Finais sobre os Procedimentos Qualitativos da Pesquisa

Neste segundo capítulo, evidenciei inicialmente a relevância de os procedimentos de uma pesquisa de caráter qualitativo serem ressonantes com as perspectivas teóricas defendidas pelo pesquisador que a desenvolve. Nesse sentido, por focar como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo, procurei caracterizar alguns fundamentos sobre a perspectiva Seres-Humanos-com-Mídias e apontar sua ressonância com a realização de experimentos de ensino e com a análise de vídeos.

Após discutir essas concepções teóricas sobre metodologia qualitativa, busquei expor e detalhar neste capítulo alguns procedimentos desenvolvidos durante a pesquisa. Mostrei momentos como a elaboração e realização de Atividades Piloto e o oferecimento de um Curso Temático sobre Calculadoras TI-83. Apresentei também alguns Comandos e Programas desta Calculadora, recursos estes que foram utilizados na pesquisa. Por fim, caracterizei o ambiente de Experimentos de Ensino e comentei sobre como analisei os vídeos.

Com base nessas considerações metodológicas, descreverei nos capítulos seguintes Episódios que sintetizam momentos críticos sobre como as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigaram o Teorema Fundamental do Cálculo nos experimentos de ensino desenvolvidos nessa pesquisa. De modo específico, destaco, no capítulo seguinte, como o coletivo pensante aqui enfocado investigou o conceito de Soma de Riemann a partir da utilização do Programa AREA.

Terceiro Capítulo - A Investigação do Conceito de Soma de Riemann com Calculadoras Gráficas

Introdução

O Teorema Fundamental do Cálculo, como comentado no Anexo II, está intrinsecamente articulado ao conceito de Integral de Riemann, relacionando os conceitos de Soma de Riemann e Integração. Neste capítulo, discuto como as estudantes (Ana Paula/Viviane e Moara/Naiara) investigaram o conceito de Soma de Riemann, a partir das Atividades exploradas na Primeira Sessão dos experimentos de ensino.

A forma como os dados são descritos e analisados neste capítulo é estruturada em Quatro Episódios. Os Episódios foram constituídos a partir de momentos críticos por mim identificados na análise de vídeos e buscam evidenciar a forma como a utilização de recursos da Calculadora Gráfica (Programas e Comandos) condicionou o pensamento das estudantes nos experimentos de ensino e caracterizou a investigação desenvolvida pelo coletivo pensante aqui constituído. Enfoque este direcionado pelo questionamento:

Como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo?

Os Episódios que descrevem a investigação do conceito de Soma de Riemann (SR) são intitulados e estruturados da seguinte forma:

Episódio SR₁ – Iniciando o Programa AREA.

Episódio SR₂ – Os Tipos de Aproximações do Programa AREA.

Episódio SR₃ – Funções com Imagem que Assumem Valores Negativos.

Episódio SR₄ – Uma Conjectura Inicial sobre o Conceito de Soma de Riemann.

1. Episódio SR₁ - Iniciando o Programa AREA

A Primeira Atividade investigada pelas duplas nos experimentos de ensino propôs, como introdução, uma exploração sobre o processo de como calcular o valor da área de uma Região $\mathfrak{R}$ determinada pelo gráfico de uma função $y = f(x) \geq 0$ e pelo eixo das abscissas em um intervalo $[a; b]$.

Atividades de Cálculo Integral com Calculadoras Gráficas TI-83

Introdução

O objetivo das atividades é calcular o valor da área de uma Região $\mathfrak{R}$ limitada pelo eixo- x e pelo gráfico de uma função quadrática $y = f(x) \geq 0$, definida em um intervalo $[a; b]$.

De modo breve cada uma das duplas foi questionada sobre a representação gráfica da Região $\mathfrak{R}$ definida, propondo que uma estudante de cada dupla esboçasse tal Região no quadro. Por decisão das próprias estudantes, no caso da primeira dupla, Viviane foi à lousa e, no da segunda, Moara. As estudantes não tiveram dificuldades em identificar graficamente o tipo de Região explorada nas Atividades. Uma representação da Região $\mathfrak{R}$.

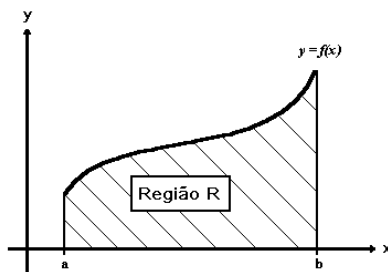


Figura 3.1: Representação gráfica da Região $\mathfrak{R}$.

Identificada graficamente a Região $\mathfrak{R}$, foi iniciada a exploração da Primeira Atividade, que propunha a utilização do Programa AREA na investigação de três funções quadráticas.

Primeira Atividade⁴¹

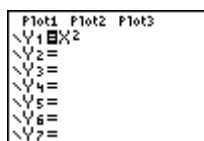
Utilize o Programa AREA e determine aproximações para os valores das áreas determinadas por

- a) $y = x^2$ no intervalo $[0; 3]$
- b) $y = x^2 + 1$ no intervalo $[-2; 2]$
- c) $y = x^2 - 1$ no intervalo $[-1; 1]$

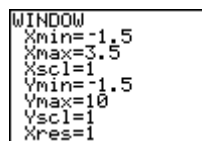
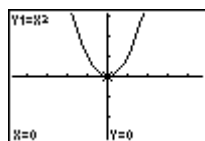
Indicações: Insira a equação em θ e configure o π ; Inicie o Programa AREA a partir de π . Considere $N=3, 6, 15$ e 36 . Utilize diferentes tipos de aproximações.

⁴¹ Ao invés de indicar $N = 6$, indiquei $N = 9$ para a dupla Moara e Naiara.

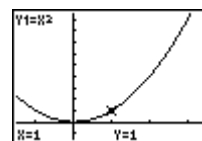
O item *a* indicava investigar $y = x^2$ em $[0; 3]$. Primeiramente, as estudantes inseriram a equação proposta a partir da tecla π da Calculadora Gráfica e configuraram o π , de modo a obterem uma boa visualização da curva em relação à Região $\mathfrak{R}$. Uma otimização da janela gráfica.



Inicialmente, as estudantes inseriram a função $y = x^2$ e visualizaram o gráfico com θ decimal.

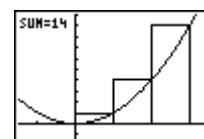
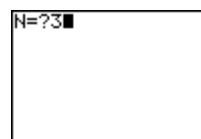
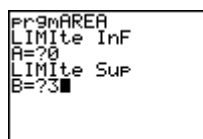


Posteriormente, configuraram o menu π e visualizaram a Região $\mathfrak{R}$.



Após inserirem a equação $y = x^2$ e configurarem o *menu* π , as estudantes iniciaram o Programa AREA, considerando o intervalo $[0; 3]$ e $N = 3$.

Ana Paula e Viviane optaram pela aproximação por Retângulos Superiores.



Executando o Programa AREA considerando $y = x^2$ em $[0; 3]$, Retângulos Superiores e $N = 3$.

A partir dessa experimentação, iniciei uma discussão propondo que as estudantes buscassem identificar o que o Programa AREA estava executando.

Ricardo: [Apareceu] um número lá em cima. E o que seria esse número?

Viviane: É a área aproximada, maior.

Ricardo: Isso é uma área aproximada.

Ana Paula: A soma dos três retângulos.

Viviane: Só que dá uma área superior à real.

Ana Paula: Está sobrando muita coisa fora do gráfico.

Ana Paula e Viviane, identificaram que o Programa AREA executa aproximações para o valor da área da Região $\mathfrak{R}$ explorada, a partir da soma dos valores das áreas de retângulos. Moara e Naira também identificaram tal execução, considerando a aproximação por Retângulos Inferiores.

Elaborada essa identificação, as estudantes investigaram valores maiores de N , como indicado na Atividade. Ao considerarem $N = 15$ e depois $N = 36$, Ana Paula e Viviane expressaram “surpresa” diante da velocidade com que o Programa AREA executou os cálculos e exibiu os retângulos.



Programa AREA.: $y = x^2$ em $[0; 3]$. Retângulos Superiores. $N = 15$ e 36 , respectivamente.

Ana Paula: Nossa! A primeira foi...Olha só a diferença!

Viviane: Agora trinta e seis.

Ana Paula: Ainda bem que não é na mão isso.

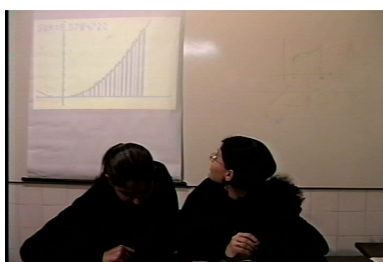


Foto 3.1: Ana Paula e Viviane visualizam, na projeção do View Screen, a simulação do Programa AREA, considerando $N = 36$.

Ana Paula e Viviane anotaram na ficha de trabalho os resultados investigados, embora tenham indicado de forma equivocada o tipo de aproximação utilizada.

a) $y_1 = x^2$ no intervalo $[0;3]$. (inferior) ?

$N = 3 \Rightarrow A = 14$	$N = 15 \Rightarrow A = 9,92$
$N = 6 \Rightarrow A = 11,375$	$N = 36 \Rightarrow A = 9,3704722$

Figura 3.2: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane – Item a – Questão 1 - Primeira Atividade.

Moara e Naiara também anotaram os resultados na ficha de trabalho, indicando a opção de aproximação por Retângulos Inferiores.

1. soma dos retângulos inferiores = 5 para $N = 3$

"	"	"	"	= 7,55 para $N = 9$
"	"	"	"	= 8,12 para $N = 15$
"	"	"	"	= 8,62 para $N = 36$

Figura 3.3: Ficha de Trabalho de Moara e Naiara – Item a – Questão 1 - Primeira Atividade.

O Episódio SR_1 descreveu a forma como as estudantes iniciaram a experimentação do Programa AREA a partir da Primeira Atividade e como desenvolveram uma investigação inicial sobre o conceito de Soma de Riemann. Nesse contexto, ocorreram alguns momentos importantes que permitem discutir sobre a investigação das Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas

1.1. Uma Coordenação Inicial de Representações

Quando as estudantes configuravam o π na Calculadora Gráfica, ou seja, quando inseriam uma nova função e otimizavam a janela gráfica de visualização, elas produziam uma coordenação de representações. Coordenação essa que foi explorada no curso temático, antes da realização dos experimentos de ensino.

Para iniciar sua investigação, Ana Paula e Viviane, por exemplo, tiveram que inserir uma função a partir do comando $\circ$ e configurar o π . Ao inserirem a função e visualizarem o gráfico, estabeleceram uma relação algébrica/gráfica. A partir dessa coordenação é que configuraram o π . Mas, para executar essa configuração, pensaram no domínio e na imagem da função explorada e elaboraram uma configuração numérica para estruturar uma boa visualização da Região $\Re$: uma coordenação algébrica/gráfica/numérica.

Por exemplo, seja a Região $\Re$ determinada por $y = x^2$ em $[0; 3]$. A partir da representação algébrica/gráfica, Ana Paula e Viviane relacionaram os parâmetros numéricos para elaborar uma visualização adequada para a Região $\Re$ explorada, pensaram no domínio maior que 3, na imagem maior que 9. Simultaneamente, fizeram uma ressalva considerando que, excedendo muito os valores, a visualização poderia se “deformar”.



Esse tipo de coordenação permeou a experimentação das Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas em diversos momentos, pois elas configuraram o π no mínimo uma vez para cada função investigada nas Atividades.

1.2. Pensando-com-o-Programa-AREA

A partir das experimentações de Ana Paula/Viviane e Naiara/Moara foi possível identificar momentos nos quais as estudantes identificam o que o Programa AREA estava executando. Isto é, momentos nos quais elas “pensaram-com-a-Calculadora-Gráfica” na experimentação da Atividade proposta.

Por exemplo, ao experimentarem o Programa AREA, Viviane e Ana Paula, valendo-se principalmente de aspectos gráficos e numéricos, conjecturaram que o Programa calculou uma aproximação para o valor da área de uma Região $\mathfrak{R}$, determinada pela curva de uma função $y = f(x)$ em $[a; b]$, a partir da soma dos valores da área de retângulos, conforme evidenciado na transcrição do diálogo.

Ricardo: Deu um número lá em cima. E o que seria esse número?

Viviane: É a área aproximada.

Ricardo: Isso. É uma área aproximada.

Viviane: Maior.

Ana Paula: A soma dos três retângulos.

Viviane: Só que dá uma área superior a real.

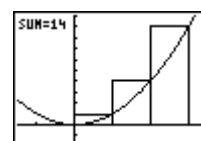
Ana Paula: Está sobrando muita coisa fora do gráfico.

Para identificar o que o Programa AREA estava executando, as estudantes elaboraram uma coordenação algébrica/gráfica/numérica de representações diversas intrinsecamente articuladas.

Primeiramente, como já analisado, ocorreu uma coordenação de representações na configuração do π . Posteriormente (e simultaneamente), ocorreu outra coordenação algébrica/gráfica/numérica, agora, referente ao Programa AREA, pois elas configuraram numericamente os parâmetros iniciais do programa AREA e em seguida visualizaram uma simulação (gráfica/numérica) e um resultado numérico.

```
Programa AREA
Limite Inf
A=?0
Limite Sup
B=?3
```

```
N=?3
```



Executando o Programa AREA considerando $y = x^2$ em $[0; 3]$, Retângulos Superiores e $N = 3$.

As estudantes puderam visualizar três retângulos ($N = 3$), que são retângulos superiores à curva determinada por $y = x^2$, que “*está sobrando muita coisa fora do gráfico*” e, portanto, “*dá uma área superior a real*”.

O AREA exibiu ainda um dado numérico ($SUM = 14$). As estudantes então coordenaram o aspecto gráfico (retângulos e curva da função) com o resultado numérico e conjecturaram que o valor da área em questão é menor que 14, pois o valor da área determinada pelos retângulos é maior que o da Região $\mathfrak{R}$ explorada.

É nesse sentido, assim como evidenciado nos Episódios seguintes também, que o processo de pensar-com-o-Programa-AREA foi bastante importante na experimentação das Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas, na produção de conhecimento matemático desse coletivo. E, inerente (articulado), a esse processo de experimentação, o processo de visualização e coordenação de diferentes representações, que envolvem a utilização do Programa AREA, condicionaram a investigação dos coletivos pensantes sobre os conceitos de Soma de Riemann e Integração Definida: a Integral de Riemann.

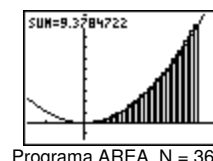
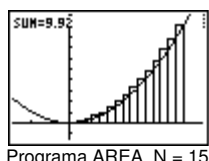
Desse modo, fica evidenciada a atuação e o condicionamento da mídia Calculadora Gráfica no processo de produção de conhecimento matemático de estudantes, ressaltando a sinergia entre humanos e mídias no contexto epistemológico e no processo de investigação matemática.

1.3 O *Design* da Calculadora Gráfica

Um aspecto bastante discutido sobre o processo de experimentação com Calculadoras Gráficas a partir da visão de Seres-Humanos-com-Mídias refere-se ao *design* experimental das tecnologias informáticas.

Em diversos momentos dos experimentos, o *design* da Calculadora Gráfica, seus Comandos, Programas, seu caráter experimental, estiveram em sinergia com a experimentação das estudantes, isto é, com a forma como as Atividades foram propostas e as execuções da Calculadora Gráfica caracterizaram o ambiente de investigação matemática das estudantes.

Ana Paula e Viviane iniciaram a experimentação do Programa AREA explorando a função $y = x^2$ em $[0; 3]$. Ao executarem o AREA, considerando $N = 15$ e depois $N = 36$, as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas expressaram “surpresa” (admiração) diante da velocidade com que o Programa AREA executou os cálculos e exibiu os retângulos.



Ana Paula: Nossa, a primeira foi...Olha só a diferença!

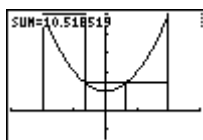
Ainda bem que não é na mão isso [Olhando a projeção].

A própria estudante Ana Paula comentou a inviabilidade de executar tais cálculos com Lápis e Papel. Pude perceber essa inviabilidade principalmente no desenvolvimento do primeiro piloto com o estudante Edson, no qual o Programa AREA não foi utilizado. O papel da Calculadora Gráfica, no processo de experimentação das estudantes, foi importante tanto na realização da simulação (aspecto visual) como na execução de cálculos complexos, com considerável rapidez. Nesse sentido, o fato da Calculadora TI-83 executar cálculos complexos num reduzido intervalo de tempo, bem como executar programas e simulações pode condicionar a produção de conhecimento matemático de estudantes.

2. Episódio SR₂ – Os Tipos de Aproximações do AREA

Ao explorarem o item *b* da Primeira Atividade, que indica $y = x^2 + 1$ em $[-2; 2]$, surgiu uma discussão interessante sobre os tipos de aproximações executadas pelo Programa AREA, a partir do momento em que o Programa “exibiu simultaneamente Retângulos Inferiores e Superiores”.

Ana Paula e Viviane, por exemplo, utilizaram inicialmente uma aproximação por Retângulos Inferiores e Ana Paula iniciou a discussão.



Aproximação por Retângulos Inferiores.

Ana Paula: *O único que parece inferior é esse aqui.*

[Apontando para o retângulo à direita do eixo-y na projeção]

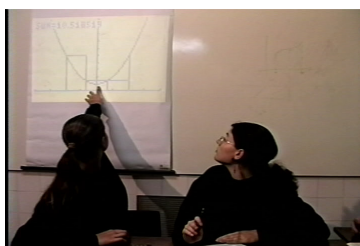


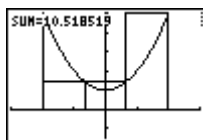
Foto 3.2: Ana Paula e Viviane discutem os tipos de aproximações do Programa AREA.

Sugeri que as estudantes mudassem o tipo de aproximação.

Ricardo: *Mas por que será que ficou assim?*

Muda a aproximação para a gente ver. Coloca Retângulo Superior.

Ana Paula e Viviane: *Fez o contrário!*

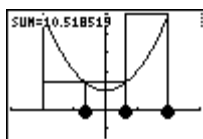


Aproximação por Retângulos Superiores

Nesse momento, as duas duplas de estudantes não elaboraram, de modo imediato, trivialmente, conjecturas que justificassem o que o Programa AREA estava executando com relação aos tipos de aproximação, mesmo dispondo de um tempo considerável para discutirem.

Somente mediante alguns indicativos propostos, utilizando a projeção, as estudantes puderam expressar algumas idéias sobre essa execução do AREA. Fiz algumas inferências, indicativos como: “*vamos olhar para os extremos dos intervalos*”, “*vamos mudar o tipo de aproximação*”, “*qual extremo do intervalo determina a altura dos retângulos?*”.

A partir dessas inferências e visualizando a projeção da Calculadora Gráfica, as estudantes identificaram que, para o Programa AREA, o **Retângulo Superior**, por exemplo, não é definido a partir do fato dele estar acima da curva do gráfico, mas sim pelo fato de cada retângulo superior ter sua altura determinada pelo **ponto que limita superiormente cada intervalo** que representa sua base. Com o Retângulo Inferior, acontece o contrário.



Aproximação por Retângulos Superiores.

Estabelecida essa discussão, Viviane e Ana Paula puderam conferir tal execução tendo como exemplo a aproximação por retângulo médio.

Ricardo: *Tudo bem o que está sendo superior e inferior?*

Viviane: *É ponto do intervalo.*

Ricardo: (...) *E, por exemplo, o retângulo médio?*

Viviane: *Ah, ele pegou o meio do intervalo.*

Na investigação realizada pela outra dupla, a estudante Naiara, ao discutir com Moara, elaborou articulações entre o tipo de aproximação e o fato da curva gráfica ser crescente ou decrescente. Naiara elaborou inferências como: “*o retângulo superior só vai ser superior à curva se ela for crescente*”, “*quando a curva for decrescente sempre vai inverter a aproximação*”. Essas inferências são coerentes (verdadeiras neste contexto) e indicam algumas das possibilidades emergentes de argumentações no contexto investigativo das Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas.

Naiara: *Neste caso aqui, essa parte da função aqui ela é decrescente.*

[Referindo-se ao intervalo de menos dois a zero de $y = x^2 + 1$].

Esclarecido e identificado o que o Programa AREA executa com relação aos tipos de aproximações, as estudantes continuaram a desenvolver a Primeira Atividade. Elas calcularam os valores aproximados das áreas, considerando $N = 6$ (9), 15 e 36, como indicado na Atividade.

b) $y_1 = x^2 + 1$ no intervalo $[-2;2]$. (superior)

$N=3 \Rightarrow A=10,518519$	$N=15 \Rightarrow A=9,3807407$
$N=6 \Rightarrow A=9,6298296$	$N=36 \Rightarrow A=9,3415638$

Figura 3.4: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane – Item b – Questão 1 - Primeira Atividade.

b. soma dos retângulos superiores:

Para $N=3$ soma = 10,5	$N=15$ soma = 9,38
$N=9$ " = 9,46	$N=36$ soma = 9,34

Figura 3.5: Ficha de Trabalho de Moara e Naiara – Item b – Questão 1 - Primeira Atividade.

O Episódio SR_2 discutiu a forma como as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas identificaram o que o Programa AREA executa com relação aos tipos de aproximação, na qual ficou evidenciado o processo de pensar-com-o-Programa-AREA, pois o coletivo pensante engajou-se em um processo de articulação de informações visuais, algébricas, geométricas e numéricas obtidas a partir da Calculadora Gráfica.

2.1 Diversidade de Mídias no Contexto Investigativo

A perspectiva Seres-Humanos-com-Mídias argumenta que o surgimento de uma nova mídia não implica a exclusão das que a antecedem, mas, sim, uma reorganização do pensamento onde se concebe que o conhecimento é produzido por coletivos, não somente humanos, mas de Humanos-com-Mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005).

A escrita não eliminou a oralidade. A escrita reorganizou, re-estruturou os sistemas e processos humanos baseados somente na oralidade. Analogamente, a informática vem reorganizando processos humanos estruturados somente pelo sistema escrita/oralidade. Atualmente, os processos e produtos humanos estruturam-se sob o sistema informática/escrita/oralidade (LÉVY, 1993; 1998).

Nesse sentido, uma concepção destacada pela perspectiva Seres-Humanos-com-Mídias é a utilização de diversas mídias no processo de produção de conhecimento matemático. Os próprios coletivos pensantes (BENEDETTI, 2003; VILLARREAL, 1999).

No processo de experimentação realizado nesta pesquisa, o coletivo pensante investigado não era composto apenas pelas Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas. Noto, por exemplo, que, em diversos momentos, nas sessões de experimento de ensino, a projeção foi bastante utilizada. Elaborei ainda diversas inferências, as estudantes registraram anotações na ficha de trabalho, elaboraram inferências, etc. Existem vários atores humanos e não humanos constituindo o processo de produção de conhecimento aqui investigado.

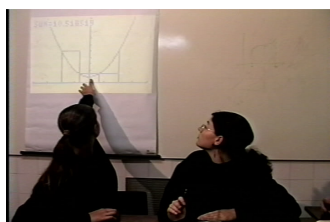


Foto 3.3: Ana Paula e Viviane discutem os tipos de aproximações do Programa AREA, utilizando a projeção.

O coletivo pensante que produziu conhecimento nas sessões de experimentos desta pesquisa foi um coletivo complexo: Estudantes – com – Calculadoras – Gráficas – com – Professor – com – Lápis – e – Papel – com – Projeção (*View Screen*) – com – (...) – Humanos – e – Mídias. No entanto, em termos de enfoque de pesquisa, “fiz um recorte” nesse coletivo. Procurei privilegiar e analisar especificamente o coletivo Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas, mesmo concebendo que outras mídias e humanos estiveram presentes no contexto investigativo.

3. Episódio SR₃ – Funções com Imagem que Assumem Valores Negativos

Executado os cálculos propostos no item *b*, as estudantes iniciaram uma nova discussão⁴², mais elaborada, quando trataram, no último item, de uma função com imagem que assume valores negativos: $y = x^2 - 1$ em $[-1; 1]$.



A discussão surgiu pelo fato do AREA exibir um valor negativo para a aproximação da Região $\mathfrak{R}$. Mas as estudantes não tiveram dificuldades em conjecturar que o AREA considera o valor da altura de cada retângulo como $f(x)$. Logo, se f assumir imagem de valor negativo, o Programa considera que o retângulo possui “altura de valor negativo”. Como o valor da área do retângulo é calculado pelo produto do valor da base pelo valor da altura, o AREA exibe o parâmetro “SUM” com um valor negativo.

Ricardo: *O que é que o programa está fazendo que tá dando negativo aí?*

Viviane e Ana Paula: (...) *Ele está usando os “ y_s ” negativos.*

Nesse contexto, as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas identificaram que o AREA considerava o valor da altura de cada retângulo como $f(x)$. O processo de pensar-com-AREA possibilitou que o coletivo conjecturasse que se f assumir imagem menor que zero, como em $y = x^2 - 1$ em $[-1; 1]$, o retângulo deve apresentar “altura de valor negativo”. Conseqüentemente, como o valor da área do retângulo é calculado pelo produto do valor da base pelo valor da altura, o AREA exibiu o parâmetro “SUM” com um valor negativo.

Embora o coletivo tenha registrado na ficha de trabalho os valores encontrados que foram literalmente visualizados com a Calculadora Gráfica (valores negativos), matematicamente, em termos formais, deve-se considerar esses valores em módulo, ao nos referirmos ao valor da área em questão.

⁴² As estudantes também retomaram a discussão sobre os topos de aproximações.

Ana Paula: A área negativa vira positiva no caso, não é?

c) $y_1 = x^2 - 1$ no intervalo $[-1;1]$. (médio)

$N=3 \Rightarrow A = -1,407407$	$N=15 \Rightarrow A = -1,336296$
$N=6 \Rightarrow A = -1,351652$	$N=36 \Rightarrow A = -1,333648$

Figura 3.6: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane – Item c – Questão 1 - Primeira Atividade.

Considero que esse poderia ter sido um momento relevante para se iniciar uma discussão sobre a relação entre área e Integral com as estudantes, já que nesta foi explorada uma função polinomial com imagem de valores negativos e o Programa AREA exibiu um resultado de valor de área negativo. Limitei-me apenas a inferir que tal resultado deveria ser tratado em módulo. Mesmo assim, esse Episódio evidencia novamente como a investigação das Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas foi condicionada pelo *design* dos recursos da Calculadora TI-83, no caso, pelo Programa AREA.

4. Episódio SR₄ – Uma conjectura Inicial sobre o Conceito de Soma de Riemann

Finalizando a discussão da Primeira Atividade, ao explorar a questão *O que acontece com a aproximação quando se aumenta o valor de N ?*, as duas duplas conjecturaram com considerável facilidade o conceito de Soma de Riemann.

Viviane: Fica mais próxima do valor real da área, não é?

Ana Paula: Melhora, a aproximação.

(...) Quanto maior o número de divisões, mais próximo do valor exato.

Ricardo: Conforme eu aumento meu n , a aproximação melhora ou piora?

Moara: Melhora (...) Você vai cada vez dividindo mais.

Aqueles “espacinhos” que estavam sobrando vão sendo mais preenchidos.



Foto 3.4: Moara explica sua inferência.

Moara e Naiara elaboraram o seguinte comentário na ficha de trabalho.

2) O que acontece com a aproximação quando se aumenta o valor de N ?
A aproximação melhora à medida que o N aumenta, pois quanto mais o nº de retângulos, ^{melhor} mais próxima a aproximação do valor da área calculada.

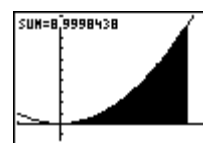
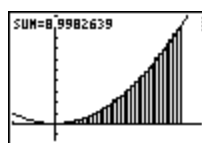
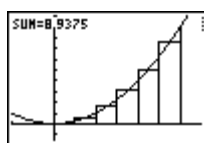
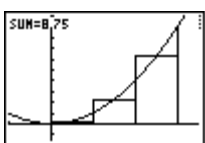
Figura 3.7: Ficha de Trabalho de Moara e Naiara – Questão 2 – Primeira Atividade.

Portanto, os Episódios SR buscaram destacar como o pensamento matemático das Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas foi condicionado pelo Programa AREA na investigação do conceito de Soma de Riemann. Diversas conjecturas e justificativas foram elaboradas no processo de pensar-com-o-AREA, a partir de indicações propostas por mim e pela Primeira Atividade.

5. Considerações sobre a Primeira Atividade de Experimentação

Considero que seria significativo estruturar outra investigação na exploração da Primeira Atividade. O Conceito de Soma de Riemann não evidencia somente que “quanto maior o valor de N melhor é a aproximação”. As Somas de Riemann estão também intrinsecamente articuladas ao valor para o qual a soma está tendendo. Portanto, considero necessário inserir no contexto da Primeira Atividade o questionamento: **Para que valor a Soma está tendendo quando se aumenta o valor de n ?** Em seguida pode-se, por exemplo, indicar que sejam executadas aproximações por Retângulos Médios⁴³.

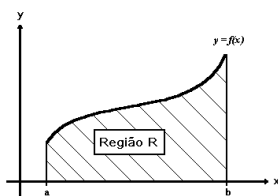
No caso $y = x^2$ em $[0; 3]$ nota-se que o valor das Somas tende a 9:



A Primeira Atividade pode então ser estruturada do seguinte modo:

Atividade de Cálculo Integral com Calculadoras Gráficas TI-83

O objetivo das atividades é calcular o valor da área de uma Região $\mathfrak{R}$ limitada pelo eixo- x e pelo gráfico de uma função $y = f(x) \geq 0$, definida em um intervalo $[a; b]$.



Primeira Atividade

1) Utilize o Programa AREA e indique aproximações para a Região $\mathfrak{R}$ determinada por $y = x^2$ em $[0; 3]$. Considere diferentes valores para N . Por exemplo, $N = 3, 9, 15, 36$ e 48 .

Indicações: i) Insira a equação em o e configure o π .

ii) Inicie o Programa AREA a partir de .

iii) Utilize inicialmente a Aproximação por Retângulos Médios.

2) O que acontece quando se aumenta o valor de N ?

3) Para que valor a soma está tendendo quando se aumenta o valor de N ?

⁴³ Ordinariamente, os livros de Análise Matemática consideram, necessariamente, as Somas Superiores e Inferiores na definição do conceito de Soma de Riemann. Essa duas aproximações também podem ser indicadas na exploração da Primeira Atividade. Indiquei a aproximação por Retângulos Médios, pois considero que a sequência determinada com o AREA tende “melhor” para 9, no caso explorado. Considero também que, neste caso, com a aproximação por Retângulos Médios, é executada uma aproximação por falta (inferior) e excesso (superior) simultaneamente. E, mais ainda, usa-se o fato do valor do limite das somas superiores, inferiores e “médias” coincidirem para se provar que uma função é integrável e, no caso tomado ($y = x^2$ em $[0; 3]$), já se pressupõe a integrabilidade das funções polinomiais.

Essa investigação, por evidenciar a utilização de recursos da Calculadora Gráfica a partir de uma atividade inicial proposta aos estudantes e por valorizar instâncias diversas como aspectos visuais, a elaboração de conjecturas, a coordenação de diferentes representações e informações sobre o tema explorado, pode condicionar a estruturação de uma abordagem experimental sobre Soma de Riemann e, simultaneamente, engajar o coletivo pensante na investigação do conceito de Integração Definida.

E ainda, a partir de outros exemplos, como os apresentados nos Episódios, pode-se evidenciar a possibilidade de novas conjecturas serem elaboradas com base nas informações obtidas no processo de experimentação com a Calculadora Gráfica, engajando estudantes em uma investigação com o Programa AREA.

Portanto, neste capítulo, descrevi, em quatro episódios, como as duplas de Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigaram o conceito de Soma de Riemann nas sessões de experimentos de ensino, buscando destacar as possibilidades emergentes com o uso de uma tecnologia informática na investigação matemática. O capítulo pode ser sumariado da seguinte forma:

1. Episódio SR₁ - Iniciando o Programa AREA.

1.1 Uma Coordenação Inicial de Representações.

1.2 Pensando-com-o-Programa-AREA.

1.3 O *Design* da Calculadora Gráfica.

2. Episódio SR₂ – Os Tipos de Aproximações do Programa AREA.

2.1 Diversidade de Mídias no Contexto Investigativo.

3. Episódio SR₃ – Funções com Imagem que Assumem Valores Negativos.

4. Episódio SR₄ – Uma conjectura Inicial sobre o Conceito de Soma de Riemann.

5. Considerações sobre a Primeira Atividade de Experimentação.

Depois de explorarem o conceito de Soma de Riemann, na Primeira Atividade, as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas iniciaram a investigação do conceito de Integração Definida.

Quarto Capítulo – A Investigação Conceito de Integração Definida com Calculadoras Gráficas

Introdução

Este capítulo discute como as duplas de estudantes (Ana Paula/Viviane e Moara/Naiara) investigaram o conceito de Integral Definida com base na investigação da Segunda e Terceira Atividades, exploradas ainda na primeira sessão dos experimentos de ensino.

A forma como descrevo e analiso os dados neste capítulo é estruturada em Três Episódios. Os Episódios foram constituídos a partir de eventos críticos por mim identificados na análise de vídeos. Como comentado, tais Episódios buscam evidenciar a forma como a utilização de recursos da Calculadora Gráfica (Programas e Comandos) condicionou o pensamento das estudantes nos experimentos de ensino e caracterizou a investigação desenvolvida pelo coletivo pensante aqui constituído, enfoque este direcionado pelo questionamento:

Como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo?

Os Episódios que descrevem a investigação do conceito de Integração Definida (ID) são intitulados da seguinte forma:

Episódio ID₁ – Investigando uma Notação Matemática sobre a Execução do AREA.

Episódio ID₂ – O Conceito de Integração Definida e a Experimentação do SOMA.

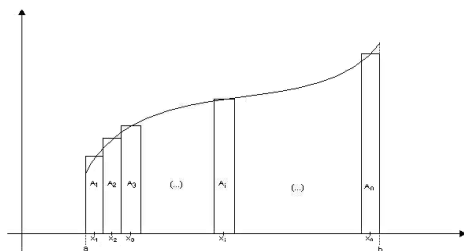
Episódio ID₃ – Uma Articulação entre o Programa SOMA e o Comando $\int f(x)dx$.

1. Episódio ID₁ – Investigando uma Notação Matemática sobre a Execução do AREA

Na primeira sessão de experimentos de ensino, a Segunda Atividade foi apresentada da seguinte forma às estudantes:

Segunda Atividade

O esboço abaixo representa uma Região $\mathfrak{R}$ limitada pelo gráfico de $y = f(x)$ e pelo eixo- x no intervalo $[a; b]$. Considera-se que o intervalo $[a; b]$ foi “dividido em n partes iguais”, que $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ são os pontos médios de cada sub-intervalo e foi executada uma aproximação “Retângulos Médios”. Observe que o valor da medida da base dos Retângulos é $\frac{|b-a|}{n}$ e o da medida da altura de cada Retângulo é $f(x_i)$.



Considere que os retângulos têm o mesmo valor de medida de base: $\frac{|b-a|}{n} = dx$

- 1) Qual o valor da área de cada Retângulo A_1, A_2, A_3, A_i e A_n ?
- 2) É coerente propor que o Programa AREA executa a soma $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i$?

Como determinar a expressão $\sum_{i=1}^n A_i$ em função de x ?

- 3) É possível determinar o valor exato da área da Região $\mathfrak{R}$?

Ao iniciar a investigação da Segunda Atividade, as estudantes conjecturaram sem dificuldades que o valor da altura de cada retângulo poderia ser calculado determinando-se valores de $f(x)$ e, também, que cada retângulo tem o mesmo valor de medida de base $[(b - a)/n]$, denotado na ocasião, incoerentemente, por dx . Essas indicações possibilitaram a elaboração de uma equação geral para um retângulo de área A_n [$A_n = f(x_n) \cdot dx$].

$$A_1 = dx \cdot f(x_1) \quad A_i = dx \cdot f(x_i) \quad A_n = dx \cdot f(x_n)$$

Figura 4.1: Ficha de Trabalho de Moara e Naiara – Questão 1 – Segunda Atividade.

Em seguida, as estudantes, a partir do segundo questionamento - *É coerente propor que o Programa AREA executa a soma $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i$?* - voltaram a discutir o que o Programa AREA executa. Isso permitiu que as estudantes explorassem a notação de somatório e identificassem que a exploração realizada representava a execução do AREA.

Ricardo: O Programa AREA, esse que a gente estava usando agora, executa a soma $A_1 + A_2 + A_3$, e assim por diante?

Viviane: É, ele executa, por que se ele dá o valor da área nesse determinado intervalo, é por que ele somou a área de cada retângulo, e é o que ele está falando aqui [Aponta para a ficha de trabalho].

Ana Paula: É. O somatório.

Viviane: É isso que ele executa.

Ricardo: Eu substituí a soma por essa notação de somatório. $[A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i]$.

Esse foi um momento no qual as estudantes investigaram uma representação algébrica sobre o que o Programa AREA estava executando. Foi mais um momento no qual as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas passaram a articular diferentes tipos de representações, neste caso, uma articulação algébrica/gráfica/numérica: outro momento explícito onde as duplas pensaram-com-o-AREA. A partir desse momento é que as estudantes passaram a pensar gráfica, numérica e algebricamente sobre o que Programa AREA executa. Ou seja, com base na experimentação do Programa AREA, puderam produzir conhecimento matemático sobre o conceito de Soma de Riemann, bem como, tratar uma notação referente a esse conceito.

Assim, a visualização e a coordenação de diferentes representações constituíram um modo de inferência no processo de produção de conhecimento matemático nos experimentos desta pesquisa. É nesse sentido que a visualização é bastante discutida e evidenciada no processo de pensamento matemático, na elaboração de inferências, conjecturas e justificativas.

2. Episódio ID2 – O Conceito de Integração Definida e a Experimentação do SOMA

Até esse momento da investigação, ambas as duplas concebiam que o Programa AREA executava uma soma do tipo $\sum_{i=1}^n f(x_i)dx$. Também haviam identificado, por meio da Primeira Atividade, que o Programa AREA executava um cálculo aproximado ao valor da área de uma determinada Região $\mathfrak{R}$.

A partir dessas concepções, as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas iniciaram a investigação do conceito de Integração Definida: **É possível determinar o valor exato da área da Região $\mathfrak{R}$?** Foi nesse contexto, na exploração da Terceira questão da Segunda Atividade, que sugeri a utilização do Programa SOMA.

Ana Paula e Viviane, inicialmente, não consideravam que fosse possível determinar o valor exato de áreas de Regiões $\mathfrak{R}$.

Ricardo: *É possível determinar o valor exato da área da Região $\mathfrak{R}$?*

Ana Paula: *Exato?*

Viviane: *Eu acho que exato não.*

Pode ser muito próximo, mas exato eu acho difícil.

Ana Paula: *Por que você vai estar usando retas e é uma curva na verdade.*

Viviane: *Porque sempre vai estar faltando alguma coisa ou sobrando.*

Porém, antes de propor a utilização do SOMA, procurei retomar o questionamento. Viviane esboçou uma primeira conjectura e Ana Paula concordou. Procurei indicar o conceito de limite, que torna possível identificar que o valor da área de uma Região $\mathfrak{R}$ poderia ser calculado por $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)dx$.

Ricardo: *Qual seria o n que dá o valor mais próximo da área?*

Viviane: *Seria o n tendendo ao infinito.*

Ana Paula: *Eu também acho que tem que ser um n muito grande.*

Ricardo: *Tem alguma ferramenta matemática que faz o n tender ao infinito?*

Ana Paula e Viviane: *O limite.*

Ricardo: *E não seria interessante então calcular o limite desse somatório?*

Ana Paula e Viviane anotaram o resultado discutido.

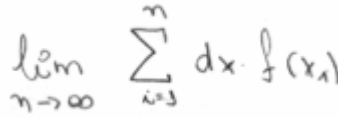
A handwritten mathematical formula in black ink on a light background. The formula represents the limit of a Riemann sum as the number of subintervals approaches infinity. It is written as:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(x_i)$$

Figura 4.2: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane - Questão 3 - Segunda Atividade.

Baseado nesta idéia explorada pelas estudantes Ana Paula e Viviane, de que é possível calcular o valor exato da área da Região $\mathfrak{R}$, calculando

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$, iniciei a proposta de utilização do programa SOMA.

No entanto, antes de finalizar meus comentários sobre tal proposta fui “interrompido” por uma delas (Falei: “*agora eu gostaria de propor o seguinte a vocês...*”). Viviane completou a frase, antes mesmo de eu terminá-la, com certa ironia e risos: “... *calcular o limite do somatório!*”. Viviane não falou em tom sarcástico, mas no sentido de que calcular tal limite (“com lápis-e-papel”) seria um absurdo, uma incoerência.

Quando comentei que era isso mesmo que eu iria propor, que elas calculassem limites de somatórios para as regiões $\mathfrak{R}$ da Primeira Atividade, ambas as estudantes mudaram de expressão rapidamente. Elas, de certa forma, ficaram “sérias”. Mas voltaram a se descontraír quando falei que elas utilizariam um outro programa para executar os cálculos. Elas então começaram a experimentar o Programa SOMA.

Ana Paula e Viviane: *[Mudam rapidamente para uma expressão séria].*

Ricardo: *Mas vou propor um outro programa [que] vai fazer essa conta.*

Ana Paula e Viviane: *Ah! [risos novamente]*

Viviane: *Aí já gostei mais.*

Ricardo: *O certo era deixar vocês calcularem na raça, não é? [risos]*

Ana Paula: *O curso é de calculadora gráfica, tem que deixar ela fazer [isso].*

Ricardo: *Então vamos usar um outro programa agora, o Programa SOMA.*

Comentei que diferentemente do Programa AREA, no SOMA é preciso definir a função investigada no próprio *layout* do Programa. Viviane e Ana Paula começaram a investigar as equações exploradas da Primeira Atividade para que pudessem calcular o valor exato das áreas das Regiões $\mathfrak{R}$ propostas.

```
PrgrmSOMA
y=x^2
LIMite InF=0
LIMite Sup=3
n=15
```

```
n=15
Ret InF=
Ret Sup= 8.12
Ret Med= 9.92
Ret Med= 8.99
```

```
Ret Med= 8.99
Trapez= 9.02
n->InF= 9
Done
```

Investigando o Programa Soma considerando $y = x^2$ no intervalo $[0; 3]$, considerando $N = 15$.

O último parâmetro exibido pelo Programa SOMA mostra “ $n \rightarrow \infty$ ”. A visualização desse parâmetro confirmou a conjectura elaborada por Viviane anteriormente, sobre calcular o limite do somatório, com n tendendo ao infinito, e permitiu obter o valor exato da área da Região $\mathfrak{R}$: a própria definição de Integral Definida.

Ricardo: *Aperta enter de novo. Ele [o Programa] mostra por trapézio.*

Viviane: *E por o quê? [referindo-se ao parâmetro “ $n \rightarrow \infty$ ”]*

Ana Paula: *n tendendo ao infinito?*

Viviane: *Ah! Nove. Que legal! [risos].*

Nossa, vou levar essa calculadora para a prova de Cálculo.

Para Moara e Naiara, o Programa SOMA assumiu um papel diferente, pois, diante do questionamento - **É possível determinar o valor exato da área da Região $\mathfrak{R}$?** – as estudantes não haviam elaborado nenhuma conjectura inicialmente.

Moara: *É possível determinar o valor exato da área da região R?*

Exato? Acho que só próximo. (...) Exato acho que não, por que é curva...

Naiara: *Se [houver] algum jeito, eu não conheço.*

Naiara e Moara então iniciaram a experimentação do Programa, explorando também a Região determinada por $y = x^2$ em $[0; 3]$, considerando $N = 15$. Ao visualizarem o último parâmetro exibido pelo SOMA – “ $n \rightarrow \infty$ ” – Moara e Naiara identificaram a possibilidade de calcular o valor exato de Regiões $\mathfrak{R}$.

Essa identificação possibilitou conjecturar que, ao calcular “ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ ”, obtém-se o valor exato da área da Região $\mathfrak{R}$. Em $y = x^2$ em $[0; 3]$ tem-se o resultado 9.

Naiara: *n* tendendo ao infinito?

Moara: É o mais próximo...(...)

Ricardo: Agora tem uma informação: quando *n* tender ao infinito dá nove. Como fica a gente enxergar cada retângulo com *n* indo para o infinito?

Moara: Fica muito pequeno, vai preencher tudo.

Ricardo: E esse preencher tudo seria preencher o valor exato da área?

Moara: É, para mim.

Ricardo: Que ferramenta que eu uso para fazer o *n* ir para o infinito?

Moara e Naiara: O limite.

Ricardo: [Usando o quadro] O limite.

Então a hora que eu penso nesse somatório, e penso nesse limite aqui...

Naiara: ... dá a área exata!

Pautadas nesse contexto, as estudantes haviam constatado que é possível calcular o valor exato da Região $\mathfrak{R}$ a partir de “ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ ”. Foi então iniciada a investigação da Terceira Atividade, sendo assim possível que as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigassem o conceito e a notação de Integração

Definida: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$.

Antes de comentar como foi essa investigação, discuto outras instâncias que emergiram com base na forma como os coletivos pensantes utilizaram o Programa SOMA.

2.1 Os Papéis do Programa SOMA

O Programa SOMA, assim como o AREA, também executa aproximações para uma determinada Região $\mathfrak{R}$ ($y = f(x)$ em $[a; b]$). No entanto, o SOMA apresenta um *design* essencialmente numérico e, além disso, exibe o parâmetro “ $n \rightarrow \infty$ ”, ou seja, exibe cálculos a partir de $\int_a^b f(x)dx$.

```
PrgrmSOMA
Y=X^2
LIMite InF=0
LIMite Sup=3
n=15
```

```
n=15
Ret InF=
Ret Sup= 8.12
Ret Med= 9.92
Ret Med= 8.99
```

```
Ret Med= 8.99
Trapez= 9.02
n->InF= 9
Done
```

Programa SOMA: investigando $y = x^2$ no intervalo $[0; 3]$, considerando $N = 15$.

Esse parâmetro “ $n \rightarrow \infty$ ” foi inserido de forma intencional. Quando estava elaborando as Atividades para os experimentos de ensino, reconfigurei o Programa que baixei da Internet e alterei o parâmetro “interger” por “ $n \rightarrow \infty$ ”. Na configuração do Programa, é executada uma integral definida.

```
PROGRAM: SOMA
:Pause
:(K+R)/2>T
:Disp "Trapez=",
T
:Pause
:Disp "n->InF=",
fnInt(Y1,X,L,U)
```

Linhas de Comando do Programa SOMA.

Realizei essa alteração na configuração do SOMA considerando a possibilidade de que Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas, após investigarem o conceito de Soma de Riemann, conjecturassem, a partir da visualização do parâmetro “ $n \rightarrow \infty$ ”, que o valor da área determinada pela Região $\mathfrak{R}$ pode ser expresso por $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$.

Viviane e Ana Paula, após identificarem que o Programa AREA executa uma soma do tipo $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$, conjecturaram o conceito de Integração antes da utilização do Programa SOMA. Ou seja, anteriormente à utilização do programa SOMA, as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas propuseram que a forma de calcular o valor exato da área da Região $\mathfrak{R}$ seria por meio de $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$.

Ricardo: Qual seria o n que dá o valor mais próximo da área?

Viviane: Seria o n tendendo ao infinito.

Ana Paula: Eu também acho que tem que ser um n muito grande.

Mas como calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$, considerando as Regiões $\mathfrak{R}$ investigadas na Primeira Atividade? Inicialmente, Ana Paula e Viviane consideraram inviável calcular os limites dos somatórios com Lápis e Papel. Elas acharam que seria uma “brincadeira” calcular tais limites. Prática esta que considero comum em cursos regulares de Cálculo.

Como descrito, propus na sessão de experimento de ensino que a Calculadora Gráfica executasse tais operações: o Programa SOMA. O coletivo apreciou o fato do SOMA calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$.

Viviane: *Aí já gostei mais.*

Ana Paula: *O curso é de Calculadora Gráfica.*

Tem que deixar ela fazer esses trabalhos.

Com base na experimentação do Programa SOMA, ao visualizarem o parâmetro “ $n \rightarrow \infty$ ”, Ana Paula e Viviane puderam visualizar a possibilidade de se calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$. De certa forma, argumento que, ao investigarem $y = x^2$ em $[0; 3]$ com o SOMA, as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas **verificaram** a conjectura elaborada.

Ret. Med=	8.99
Trapez=	9.02
n->InF=	9
	Done

Programa SOMA: $y = x^2$ em $[0; 3]$, $N = 15$.

Ana Paula: *n tendendo ao infinito?*

Viviane: *Ah! Nove. Que legal! [risos].*

Portanto, a partir da experimentação com a Calculadora Gráfica, coordenando informações com os Programas AREA e SOMA, Ana Paula e Viviane conjecturaram e verificaram a possibilidade de calcular o valor exato da área da Região $\mathfrak{R}$ através de $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$, o que constitui uma investigação sobre o conceito de Integração Definida.

No entanto, para Naiara e Moara, o SOMA assumiu um papel diferente. Primeiramente, as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas não identificaram a possibilidade de se calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$, isto é, o coletivo pensante não elaborou nenhuma inferência sobre a possibilidade de calcular o valor exato da área da Região $\mathfrak{R}$, mesmo tendo explorado o conceito de Soma de Riemann.

Ao executarem o SOMA, mediante minha indicação, Moara e Naiara, visualizando o parâmetro " $n \rightarrow \infty$ ", identificaram a possibilidade de inferir sobre o conceito de Integração. As Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas conjecturaram que o valor exato da área da Região $\mathfrak{R}$ pode ser calculado a partir de $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$.

Naiara: [Ao visualizar o parâmetro " $n \rightarrow \infty$ "] *n* tendendo ao infinito?

Moara: É o mais próximo.

Ricardo: Como a gente enxerga cada retângulo com *n* indo para o infinito?

Moara: Fica muito pequeno, **vai preencher tudo.**

Ricardo: E esse preencher tudo seria preencher o valor exato da área?

Moara: É, para mim.

Ricardo: Que ferramenta que eu uso para fazer o *n* ir para o infinito?

Moara e Naiara: O limite.

Ricardo: O limite [usando o quadro].

Então a hora que eu penso nesse somatório, e penso nesse limite aqui...

Naiara: [Complementando minha fala] **...dá a área exata**

Esse foi um momento onde o Programa SOMA assumiu, para Naiara e Moara, um papel relevante na própria produção de conhecimento matemático das estudantes sobre o conceito de Integração Definida, pois foi a partir da visualização do parâmetro “ $n \rightarrow \infty$ ”, na experimentação do Programa SOMA, que as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas conjecturaram que, ao se calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x, \text{ tem-se o valor exato da área da Região } \mathfrak{R} \text{ explorada:}$$

uma abordagem sobre conceito de Integração Definida.

Analisando e evidenciando esses processos inerentes a experimentação, pode-se argumentar que a Calculadora Gráfica, ao executar Programas ou executar cálculos complexos, às vezes considerados tediosos, pode assumir um papel importante na exploração do coletivo pensante. A investigação das Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas pautava-se não somente em calcular tais limites, mas, principalmente, na exploração do conceito de Integração com base nos Programas AREA e SOMA.

Pode-se, portanto, considerar que a produção de conhecimento foi condicionada pelas informações gráficas, pelos dados visuais e pela coordenação de diferentes representações, exploradas a partir da Calculadora Gráfica na exploração do conceito de Integração Definida com base na Segunda Atividade.

Na terceira Atividade, além de explorarem esse conceito com o Comando $\int f(x)dx$, as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas puderam investigar uma notação que o representa. O coletivo, ao coordenar as informações obtidas com esse comando e com as do Programa SOMA, pôde identificar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx .$$

3. Episódio ID3 – Uma Articulação entre o Programa SOMA e o Comando $\int f(x)dx$

A Terceira Atividade foi proposta do seguinte modo:.

Terceira Atividade

- 1) Insira a equação $y = x^2$ e utilize um θ *decimal*.
- 2) Selecione o comando $\int f(x)dx$ - opção 7 no menu *calc* ($\psi\rho$) .
- 3) Pressione $\subseteq$ para $x = 0$ e $x = 3$.
- 4) Qual a relação entre o valor encontrado e o valor calculado a partir do programa SOMA?
- 5) Qual o valor da área da região determinada por $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$ no intervalo $[-1; 2]$.



Experimentando o Comando $\int f(x)dx$.

Ao experimentarem o Comando $\int f(x)dx$, explorando $y = x^2$ em $[0; 3]$, além de verificarem o resultado $\int f(x)dx = 9$, as estudantes puderam visualizar uma simulação executada pela Calculadora Gráfica que mostrava o preenchimento da Região $\Re$ explorada.

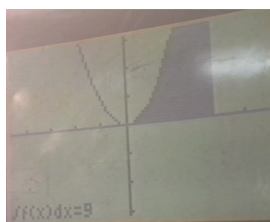
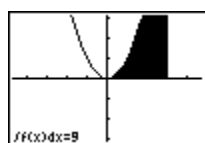


Foto 4.1: Ana Paula e Viviane experimentam Comando $\int f(x)dx$ considerando $y = x^2$ em $[0; 3]$.

As Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas, nesse momento, articularam os resultados e as simulações do Programa SOMA e do Comando $\int f(x)dx$. Isso permitiu que elas investigassem o conceito de Integração Definida e iniciassem uma investigação sobre a notação que representa esse conceito.



Ret. Med=	8.99
Trapez=	9.02
n->InF=	9
Done	

Comando $\int f(x)dx$ e Programa SOMA considerando $y = x^2$ em $[0; 3]$.

Ana Paula e Viviane estabeleceram uma relação direta entre as execuções do Comando $\int f(x)dx$ e do programa SOMA.

Viviane: Qual a relação entre o valor encontrado e o valor da área dessa região?

Ana Paula: A área deu nove.

Esse valor que ele deu aí foi o valor da área, é isso? O valor encontrado é nove.

Viviane: É o valor da integral.

É. É a área. (...) Ele calcula a mesma coisa que esse Programa SOMA.

Moara e Naiara se surpreenderam com o fato do resultado exibido pelo Comando $\int f(x)dx$ ser o mesmo exibido pelo SOMA. Procurei então indicar que o Comando $\int f(x)dx$ calculava “ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)dx$ ”.

Naiara e Moara: Oh!

Ricardo: E que comando que foi esse aí que a gente usou aí?

Moara: $\int f(x)dx$.

Estabelecida essa articulação entre o Programa SOMA e o Comando $\int f(x)dx$ foi proposta às estudantes a definição da notação $\int_a^b f(x)dx$ para Integração Definida, iniciando-se, portanto, uma investigação sobre o fato de “ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)dx = \int_a^b f(x)dx$ ”.

Nesse momento, surgiu um primeiro comentário sobre o TFC, já visto pelas estudantes no curso regular de Cálculo, em sala de aula.

Viviane e Ana Paula expressaram uma conjectura correta sobre o conceito de Integração Definida, ou seja, conceberam a Integral como o limite de uma Soma de Riemann e produziram (definiram) notações sobre essas concepções.

No entanto, nesse momento, o TFC, na concepção de Viviane, relacionava integral e área, mas “servia” apenas para calcular o valor das áreas. As estudantes não comentaram sobre a relação fundamental, ou seja, sobre a relação entre integração e diferenciação: o cerne do TFC.

Ricardo: Dá para estabelecer uma relação entre uma integral e a área?

Viviane: Não é o Teorema Fundamental do Cálculo?

Por que na verdade, a integral é a área, não é? Da região do gráfico.

Ana Paula: Isso.

Viviane: A soma [do valor das áreas] dos retângulos.

Ricardo: Eu vou pensar no limite dessa soma aí como sendo a integral em um certo intervalo, tudo bem?

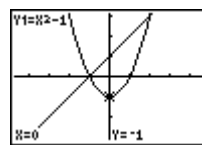
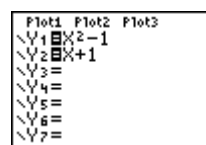
Eu vou trocar o limite desse somatório pelo símbolo integral.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n dx \cdot f(x_i) = \int_a^b f(x) dx$$

Figura 4.3: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane - Terceira Atividade.

Mas a relação entre Integral e área deve ser investigada cuidadosamente, principalmente quando exploramos funções com imagem de valor negativo. Foi nesse sentido que surgiu o Quinto questionamento da Terceira Atividade.

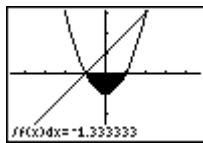
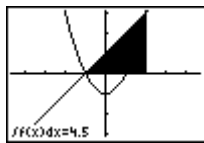
- 5) Qual o valor da área da região determinada por $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$ no intervalo $[-1; 2]$.



Visualizando a Região $\mathfrak{R}$ determinada por $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$ em $[-1; 2]$.

Ambas as duplas de Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas, mediante minha indicação, elaboraram estratégias para “dividir” a Região explorada em sub-regiões e calcular a integral dessas sub-regiões. Indiquei essa estratégia, pois, uma das curvas em questão assumia valores negativos na imagem.

As estudantes calcularam inicialmente $\int_{-1}^2 (x+1)dx$ e $\int_{-1}^1 (x^2-1)dx$ e obtiveram os resultados 4,5 e $-4/3$.



Utilizando o Comando $\int f(x)dx$.

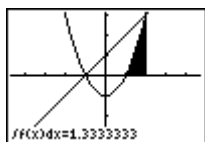
$$\int_{-1}^2 (x+1) dx = 4,5$$

$$\int_{-1}^1 (x^2-1) dx = -\frac{4}{3}$$

Figura 4.4a: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane.

Igualmente, Ana Paula e Viviane, visualizando o gráfico e a simulação do comando $\int f(x)dx$, conjecturaram que, ao calcular $\int_{-1}^2 (x+1)dx$, haviam considerado uma Região no gráfico que não pertence à região limitada por $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$ no intervalo $[-1; 2]$, que coincide com $\int_1^2 (x^2 - 1)dx$.

Ao calcularem $\int_1^2 (x^2 - 1)dx$, Ana Paula e Viviane obtiveram o resultado $4/3$.



Utilizando o Comando $\int f(x)dx$.

$$\int_1^2 (x^2-1) dx = \frac{4}{3}$$

Figura 4.4b: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane.

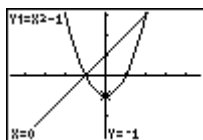
Por fim as estudantes expressaram o valor 4,5 para a área da Região $\mathfrak{R}$ investigada. As estudantes elaboraram a seguinte estratégia:

$$\int_{-1}^2 (x+1)dx + \left| \int_{-1}^1 (x^2-1)dx \right| - \int_1^2 (x^2-1)dx = 4,5 + |-4/3| - 4/3 = 4,5.$$

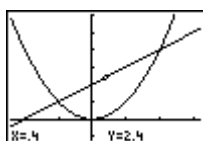
Outras discussões sobre a resolução deste problema poderiam ter sido indicadas. Por exemplo, bastava calcular $\int_{-1}^2 (x+1) - (x^2-1)dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2)dx = 4,5$, pois

$$-\int_{-1}^2 (x^2-1)dx = -\int_{-1}^1 (x^2-1)dx - \int_1^2 (x^2-1)dx \text{ e } -\int_{-1}^1 (x^2-1)dx \text{ representa "a parte que temos que somar" com } \int_{-1}^2 (x+1)dx \text{ e } -\int_1^2 (x^2-1)dx \text{ "a parte que temos que subtrair" de } \int_{-1}^2 (x+1)dx.$$

Pode-se pensar também em uma translação. Basta considerar que o ponto de mínimo da função que está determinando a Região $\mathfrak{R}$ “torne-se” raiz da equação. Seja o exemplo explorado: $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$ em $[-1; 2]$.



Nesse contexto, o ponto de mínimo é determinado pelo vértice da parábola: $(0; -1)$. Pode-se pensar em uma translação da parábola de tal forma que esse ponto “torne-se” raiz. Coordenando representações, pode-se perceber que essa translação é condicionada pelo parâmetro c de $y = ax^2 + bx + c$. Logo, pode-se considerar $y = x^2$. Conseqüentemente, a reta também deve ser transladada. Analogamente, tem-se $y = x + 2$.



Desse modo, ao invés de relevar as Integrais que assumem valores negativos, pode-se neste caso, calcular o valor da área da Região $\mathfrak{R}$ a partir de

$$\int_{-1}^2 x + 2 \, dx - \int_{-1}^2 x^2 \, dx = 4,5.$$

Ficam, portanto, evidenciadas não somente as diversas possibilidades de abordagem dessa Atividade, mas também a relevância de se estabelecer estratégias de resolução a partir da visualização dos gráficos. Tanto a divisão da Região $\mathfrak{R}$ em sub-regiões como a “subtração entre o gráfico superior e o inferior” ou a translação proposta evidenciam a necessidade e a relevância de se visualizar graficamente as funções exploradas e a Região determinada por essas curvas.

3.1 A Coordenação de Representações na Investigação do Conceito de Integração

A Terceira Atividade propõe a utilização do Comando $\int f(x)dx$ para que surja a possibilidade das Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas conjecturarem que

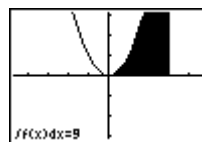
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx.$$

Anteriormente à experimentação do Comando $\int f(x)dx$, as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas haviam identificado que o Programa AREA executava uma soma do tipo $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ e que, calculando o limite desse somatório, com n tendendo ao infinito, tem-se o valor exato da área da Região $\mathfrak{R}$. Mais ainda, as duplas de estudantes sabiam, a partir da experimentação do Programa SOMA, que, para a região $\mathfrak{R}$ determinada por $y = x^2$ em $[0; 3]$, o valor da área é 9.

Ao experimentarem o comando $\int f(x)dx$, considerando a mesma Região $\mathfrak{R}$, as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas, além de verificarem o mesmo resultado 9 em ambas as execuções, identificaram no SOMA o parâmetro “ $n \rightarrow \infty$ ” e visualizaram com o Comando $\int f(x)dx$ uma simulação gráfica que preenchia a área investigada.

Com essas informações, o coletivo relacionou a concepção elaborada a partir do SOMA com notação de Integral no comando $\int f(x)dx$. Uma articulação inicial entre conceito e notação. Uma coordenação de informações diversas com base na Calculadora Gráfica TI-83.

Ret. Med=	8.99
Trapez=	9.02
n->InF=	9
Done	



Programa SOMA e Comando $\int f(x)dx$: Investigando $y = x^2$ em $[0; 3]$.

Ana Paula: A área deu nove.

Esse valor que ele deu aí foi o valor da área, é isso? O valor encontrado é nove.

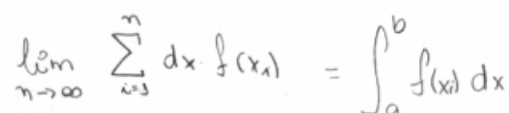
Viviane: É o valor da integral.

É, é a área. Acho que ele calcula a mesma coisa que esse Programa SOMA.

No processo de experimentação, as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas relacionavam o fato de $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ representar o conceito de integração definida, denotado tradicionalmente por $\int_a^b f(x) dx$ e explorado na Calculadora Gráfica a partir do Comando $\int f(x) dx$.

Nos experimentos de ensino, por ter sido definido incoerentemente, na Segunda Atividade $\frac{|b-a|}{n} = dx$, conforme Etchels (1993), as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas utilizavam ordinariamente a notação “ $\sum_{i=1}^n f(x_i) dx$ ”.

Mas Viviane e Ana Paula expressaram suas anotações da seguinte forma:



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n dx \cdot f(x_i) = \int_a^b f(x) dx$$

Figura 4.5: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane – Terceira Atividade.

Aqui, além da incoerência da notação $\sum_{i=1}^n f(x_i) dx$, tem-se $\int_a^b f(x_i) dx$. Essa expressão deveria ter sido investigada nas sessões de experimentos de ensino, pois esse é o próprio cerne no conceito de Integração e base do TFC.

Essa investigação poderia ter sido iniciada pelo fato de se definir coerentemente $\frac{|b-a|}{n} = \Delta x$. Posteriormente, no processo de investigação do conceito de Integração, bastava considerar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b-a|}{n} = dx$.

Assim, poder-se-ia investigar detalhadamente que, ao se considerar $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$, tem-se o valor exato da área da Região $\mathfrak{R}$ explorada. Essa Região, determinada pela curva de função $y = f(x) \geq 0$ em um intervalo $[a; b]$, pode ser representada por $\int_a^b f(x) dx$. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$.

No caso incoerentemente proposto, onde $\frac{|b-a|}{n} = dx$, deveria pensar-se ao menos, “ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) dx = \int_a^b f(x) dx$ ”. E não “ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) dx = \int_a^b f(x_i) dx$ ” como inferiram Ana Paula e Viviane.

Essa investigação de Integração Definida está articulada com alguns aspectos da abordagem estruturada por Leibniz. Como comentado no Anexo II, Leibniz, com base na notação de Cavallieri, criou o símbolo de integral pensando intrinsecamente em uma soma de retângulos: “Será útil escrever $\int$ para *omn.*, tal que $\int \ell = \text{omn.} \ell$, ou a soma dos ℓ 's” (BARON; BOS, 1985, V. 3, p. 54).

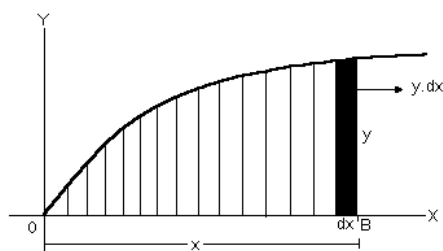


Figura 4.6: Integração de Leibniz.

Embora essa notação não contenha os intervalos de integração, $\int y dx$ representa a área entre zero e x . Isto é, para Leibniz, “ $\int y dx$ é a área da curva $y(x)$ ”. Ou seja, $\int f(x) dx$. A mesma notação da Calculadora Gráfica!

Parece razoável considerar que essa idéia de criar uma notação que representasse a “soma dos retângulos”, foi o que permitiu a Leibniz elaborar mais regras sobre o Cálculo e tratar o TFC, argumentando que a diferencial da área $O\hat{C}B$ é o retângulo $y dx$: $d \int y dx = y dx$, o que mostra a relação inversa entre d e $\int$. Reciprocamente, com essa notação, tem-se $\int dy = y$. Fica assim evidenciada a intrínseca articulação entre os conceitos de Soma de Riemann e Integração ao TFC, e a relevância da notação no fazer matemático (BARON; BOS, 1985).

No entanto, mesmo tendo sido proposto uma notação incoerente na Segunda Atividade (“ $\sum_{i=1}^n f(x_i) dx$ ”), o que se quer destacar nesse momento é que a importância da notação usada pauta-se, principalmente, pelo fato de se produzir um símbolo matemático que represente um fenômeno, em um processo de investigação matemática. A própria articulação de representações entre conceito e notação, com informações diversas, a partir da experimentação com as Calculadoras Gráficas.

4. Comentários Finais sobre a Investigação do Conceito de Integral de Riemann

Este Quarto Capítulo foi estruturado da seguinte forma:

1. Episódio ID₁ – Investigando uma Notação Matemática sobre a Execução do AREA.

2. Episódio ID₂ – O Conceito de Integração Definida e a Experimentação do SOMA.

2.1 Os Papéis do Programa SOMA.

3. Episódio ID₃ – Uma Articulação entre o Programa SOMA e o Comando $\int f(x)dx$.

3.1 A Coordenação de Representações na Investigação do Conceito de Integração.

Com base no processo de investigação desenvolvido por Ana Paula/Viviane e Moara/Naiara sobre o conceito de Integral de Riemann (Soma de Riemann e Integração Definida), descritos tanto neste capítulo como no anterior, argumenta-se que Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas podem:

i) A partir da investigação do Programa AREA na Primeira e Segunda Atividades, conjecturar que as Somas de Riemann podem ser representadas por $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$;

ii) Com a exploração do Programa SOMA investigar o conceito de Integração Definida pois, ao visualizarem o parâmetro “ $n \rightarrow \infty$ ”, emerge a possibilidade de identificar que o valor exato da área da região $\mathfrak{R}$ (definida por funções $f(x) \geq 0$) pode ser calculado por $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$;

iii) Articular essa conjectura $(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x)$ com as execuções do Comando $\int f(x)dx$, e investigar o conceito $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$: uma articulação e exploração entre conceito e notação de Integração Definida.

Portanto, esses momentos caracterizaram a produção de conhecimento matemático das Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas sobre os conceitos de Soma de Riemann e Integração, nas investigações desenvolvidas na Primeira Sessão de experimentos de ensino e, simultaneamente, indicam possibilidades para outros estudantes investigarem esses conceitos.

Na Segunda Sessão, os coletivos investigaram o Teorema Fundamental do Cálculo.

Quinto Capítulo - A Experimentação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas

Introdução

Neste capítulo descreve-se e discute-se como as estudantes (Ana Paula/Viviane e Moara/Naiara) investigaram o Teorema Fundamental do Cálculo, a partir das Atividades exploradas na segunda sessão dos experimentos de ensino.

A forma como são descritos e analisados os dados neste capítulo é estruturada em dois Episódios. Os Episódios foram elaborados de acordo com a identificação de eventos críticos na análise de vídeos. Busca-se, assim, evidenciar a forma como a utilização de recursos da Calculadora TI-83 (Programas e Comandos), na coleta de informações e na articulação dessas informações, condicionou o pensamento matemático de estudantes no processo de experimentação com tecnologias. Este enfoque possibilita estruturar argumentações sobre o questionamento proposto:

Como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo?

Os Episódios que descrevem a Experimentação do Teorema Fundamental do Cálculo (ETFC) são determinados da seguinte forma:

Episódio ETFC₁ - Conjecturando a Relação Fundamental com o Comando $\int f(x)dx$.

Episódio ETFC₂ - Conjecturando o Resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

1. Episódio ETFC₁ – Conjecturando a Relação Fundamental com o Comando $\int f(x)dx$

Este Episódio discute a forma como as estudantes exploraram a Quarta Atividade. Nesse contexto as duplas, utilizando o Comando $\int f(x)dx$ da Calculadora TI-83, investigaram as funções de equação $y = 2x$, $y = 3x^2$ e $y = 4x^3$, considerando diferentes intervalos. Ao coletar os dados com a Calculadora Gráfica, as estudantes identificaram padrões e elaboraram generalizações com os resultados obtidos. Esse processo possibilitou que fosse investigada, de modo inicial, a relação entre integração e diferenciação: a primeira parte do TFC, aqui denominada ordinariamente Relação Fundamental ($F'(x) = f(x)$).

Na segunda sessão de experimentos de ensino, a seguinte versão da Quarta Atividade foi apresentada:

Quarta Atividade (com Gabarito da Primeira e Segunda Questões)

Equação	Intervalo	$\int_a^b f(x)dx$
$y = 2x$	[0; 1]	1
	[0; 2]	4
	[0; 3]	9
	[0; x]	x^2
$y = 3x^2$	[0; 1]	1
	[0; 2]	8
	[0; 3]	27
	[0; x]	x^3
$y = 4x^3$	[0; 1]	1
	[0; 2]	16
	[0; 3]	81
	[0; x]	x^4

1) Utilizando o Comando $\int f(x)dx$ na calculadora TI-83, preencha a tabela ao lado, calculando o valor da área entre o gráfico da função de equação $y = f(x)$ e o eixo-x no intervalo proposto.

2) Determine uma equação no caso do intervalo [0; x] que represente o valor encontrado para a área.

3) Se a equação $y = f(x)$ na primeira coluna da tabela determinar uma equação $y = F(x)$ na terceira coluna, qual a relação entre $f(x)$ e $F(x)$?

Como indicado na Atividade, Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas utilizaram o comando $\int f(x)dx$, preencheram os valores encontrados em cada item e conjecturaram com facilidade os padrões de generalização, determinando x^2 , x^3 e x^4 .

1.1. A Investigação de Ana Paula e Viviane sobre a Relação Fundamental

Na investigação de Ana Paula e Viviane, foi Ana Paula que percebeu primeiro o padrão de generalização. E, imediatamente com a exploração de $f(x) = 2x$ e com o resultado $F(x) = x^2$, as estudantes elaboraram uma conjectura sobre a Relação Fundamental, isto é, as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas identificaram que a “função” encontrada é a integral (uma primitiva) da função dada.

Ana Paula: *Três, não é? Nove. [antes de o resultado aparecer].*

Viviane: *E agora, x ?*

Ana Paula: *[Sorrindo] x^2 , não é?*

Não é isso que tá dando?

Viviane: *Por que?*

Ana Paula: *[Apontando na ficha] A função é x^2 .*

Viviane: *É verdade. Integral de $2x$ é x^2 .*

Ao explorarem o item seguinte ($y = 3x^2$), Ana Paula e Viviane perceberam rapidamente o padrão x^3 , antes de determinar todos os cálculos propostos para a Atividade. Mas, mesmo assim elas, conferiram todos os cálculos propostos usando a Calculadora Gráfica.

Logo em seguida, ao buscarem um padrão com os resultados obtidos na exploração de $y = 4x^3$, Ana Paula e Viviane já haviam estabelecido uma conjectura sobre a “função” x^4 . Dessa forma, antes da Calculadora Gráfica exibir seus resultados, as estudantes “previam” as informações visualizadas, demonstrando certo satisfação em confirmarem suas hipóteses.



Foto 5.1: Ana Paula e Viviane utilizam o Comando $\int f(x)dx$ na investigação de $y = 4x^3$.

Viviane: Agora $4x^3$. Vai ser x^4 .

Ana Paula: [Sorrindo] É verdade.

Viviane: Acho que vai dar um.

[Elaborando uma hipótese para o resultado determinado por $\int_0^1 4x^3 dx = 1^4$].

Ana Paula: Também acho.

Viviane: Agora dezesseis. ["Prevendo" o resultado de $\int_0^2 4x^3 dx = 2^4$]

Ana Paula: Espera aí. Zero e dois? É, dezesseis.

Finalizando a Quarta Atividade, ao explorar a terceira questão - qual a relação entre $f(x)$ e $F(x)$? - Ana Paula e Viviane novamente estabeleceram uma conjectura sobre a Relação Fundamental. Argumentaram: "f é derivada de F".

Ana Paula: Então é comparar a relação entre (...).

A $f(x)$ é a derivada da $F(x)$.

Ana Paula e Viviane preencheram a ficha de trabalho da seguinte forma.

Equação	Intervalo: $[a; b]$	$\int_a^b f(x) dx$
$y = 2x$	$[0, 1]$	1
	$[0, 2]$	4
	$[0, 3]$	9
	$[0, x]$	x^2
$y = 3x^2$	$[0, 1]$	1
	$[0, 2]$	8
	$[0, 3]$	27
	$[0, x]$	x^3
$y = 4x^3$	$[0, 1]$	1
	$[0, 2]$	16
	$[0, 3]$	81
	$[0, x]$	x^4

3) Se a equação $y = f(x)$ na primeira coluna da tabela determinar uma equação $y = F(x)$ na terceira coluna, qual a relação entre $f(x)$ e $F(x)$? $f(x)$ é a derivada de $F(x)$.

Figura 5.1: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane - Quarta Atividade.

1.2 A Investigação de Moara e Naiara sobre Relação Fundamental

Moara e Naiara, na investigação do primeiro item da Quarta Atividade ($y = 2x$), calcularam inclusive considerando valores de x igual a quatro e cinco, sempre utilizando o comando $\int f(x)dx$. O coletivo investigou funções considerando diferentes intervalos, além dos propostos na Atividade. Ressalta-se que, para x igual a cinco, o menu π precisou ser configurado adequadamente. Após encontrar o valor vinte e cinco para x igual a cinco, Naiara percebeu o padrão x^2 .

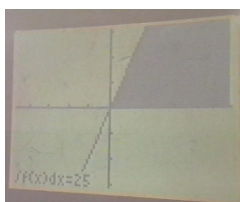


Foto 5.2: Moara e Naiara investigam $y = 2x$ em $[0; 5]$ com o Comando $\int f(x)dx$.

No segundo item ($y = 3x^2$), Moara executou os cálculos, mas foi Naiara novamente quem percebeu o padrão, neste caso x^3 . Moara concordou. O mesmo aconteceu no terceiro item, onde o padrão encontrado foi x^4 . Foi proposta, então, uma discussão sobre a terceira questão. Utilizando o quadro para escrever as equações da primeira coluna e a respectiva equação encontrada na terceira coluna, Moara conjecturou sobre a Relação Fundamental, argumentando que a derivada de F seria f .

$f(x)$	$F(x)$
$2x$	x^2
$3x^2$	x^3
$4x^3$	x^4

Ricardo: No primeiro exemplo então seria $F(x) = x^2$ e a $f(x) = 2x$.

Moara: Derivada.

Ricardo: Ou F' [no quadro $F'(x) = f(x)$].

O Episódio ETFC₁ evidencia que, ao investigar alguns exemplos triviais de funções polinomiais na Quarta Atividade e elaborar padrões com as informações coletadas com a Calculadora Gráfica em um processo indutivo, coordenando representações, Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas podem investigar a Relação Fundamental do Teorema Fundamental do Cálculo com base na utilização do Comando $\int f(x)dx$.

2. Episódio ETFC₂: Conjecturando o Resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Esse Episódio discute a forma como as estudantes exploraram a Quinta Atividade. As duplas, utilizando o Comando $\int f(x)dx$ da Calculadora TI-83, investigaram as funções de equação $y = 2x$, $y = 3x^2$ e $y = 4x^3$, considerando diferentes intervalos.

Ao coletar informações com a Calculadora Gráfica, as estudantes, assim como na Atividade anterior, identificaram padrões e elaboraram generalizações com base nos resultados coletados com o Comando $\int f(x)dx$. Puderam, dessa forma, conjecturar

o resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$: a segunda parte do TFC.

Quinta Atividade (com Gabarito da Primeira e Segunda Questões)

Equação	Intervalo:	$\int_a^b f(x)dx$
$y = 2x$	[1; 2]	3
	[2; 3]	5
	[1; 3]	8
	[a; b]	$b^2 - a^2$
$y = 3x^2$	[1; 2]	7
	[2; 3]	19
	[1; 3]	26
	[a; b]	$b^3 - a^3$
$y = 4x^3$	[1; 2]	15
	[2; 3]	65
	[1; 3]	80
	[a; b]	$b^4 - a^4$

1) Utilizando o Comando $\int f(x)dx$ na calculadora TI-83,

preencha a tabela ao lado calculando o valor da área entre o gráfico da função de equação $y = f(x)$ e o eixo-x no intervalo proposto.

2) Determine uma equação no caso do intervalo [a; b] que represente o valor encontrado para a área.

3) Seja $y = f(x)$ e suponhamos que exista uma $F(x)$ tal

que $F'(x) = f(x)$. Determine o valor de $\int_a^b f(x)dx$.

Ambas as duplas apresentaram dificuldade em determinar o primeiro padrão de generalização: $b^2 - a^2$. Minhas orientações pautaram-se em comparar os padrões na Quarta Atividade com as informações obtidas na investigação da Quinta Atividade. Novamente, o processo de coordenar informações obtidas a partir da experimentação possibilitou que as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas conjecturassem o TFC.

2.1 A Experimentação de Moara e Naiara sobre o Resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Moara e Naiara refletiram por bastante tempo para identificar o primeiro padrão: $b^2 - a^2$. Sugeri que as estudantes comparassem os dados encontrados na Quinta Atividade com os padrões já determinados na Quarta Atividade. Como comentado na transcrição a seguir, estabelecida essa articulação entre os resultados das duas Atividades, Naiara propôs um padrão inicial, mas busquei indicar um contra-exemplo com o intuito de “refutar a conjectura”.

Ricardo: Na hora que eu olho para os dois primeiros, eu “fui no” intervalo $[0; 2]$.

Moara: É.

Ricardo: E lá, de certa forma, eu tô indo para o $[0; 1]$.

O $[0; 1]$ deu um, o $[0; 2]$ deu quatro. Ali, o $[1; 2]$ deu três, não é?

De certa forma eu posso pensar que eu fiz o que, ali, para dar três?

Naiara: Somou esse dois com esse um? [Um primeiro candidato].

Ricardo: Se eu pensar nesse padrão aí, o oito fura, não é? [Um contra-exemplo].

E eu tenho que tentar relacionar o que deu com o a e com o b , não é?

Naiara: [Concordou].

$y = 2x$	$[0,1]$	1
	$[0,2]$	4
	$[0,3]$	9
	$[0,x]$	x^2

$y = 2x$	$[1,2]$	3
	$[2,3]$	5
	$[1,3]$	8
	$[a,b]$	?

Procurei insistir na comparação com a tabela da atividade anterior. Comentei que nessa atividade elas haviam encontrado os valores x^2 , x^3 e x^4 para o intervalo $[0; x]$. Procurei supor que se fosse o intervalo $[0; b]$ seriam encontrados os valores b^2 , b^3 e b^4 .

Com essa comparação, Naiara conjecturou o primeiro padrão: $b^2 - a^2$.

Ricardo: *Aqui, o que deu foi b^2 . Aqui deu b^3 . E lá será que daria quanto?*

Naiara: *Será que não é $b, \dots, b^2 - a^2$, não dá...três, nove, dá, não dá? $b^2 - a^2$.*

Nove menos quatro, cinco. Está certo.

Moara concordou com a conjectura de Naiara e comentou que na Quarta Atividade também era $b^2 - a^2$, só que o a era zero e o b era x . Logo, x^2 era o padrão. As estudantes então calcularam o segundo item, isto é, exploraram $y = 3x^2$. Inicialmente, Moara propôs o padrão $b^3 - 1$, mas Naiara foi quem o percebeu uma similaridade mais coerente. Elas conferiram alguns resultados e concluíram que o padrão em questão era $b^3 - a^3$.

Moara: $a^3 - 1$.

Naiara: $a^3 \dots$

Moara: Menos um.

Naiara: E se for $b^3 - a^3$?

Moara: b ao cubo? Será que tem que ser? Esse aqui dá porque é um.

Naiara: Três ao cubo, vinte sete; dois ao cubo, oito; vinte sete menos oito, dezenove.

Moara: Dezenove, dá sim. [concordando]

Em seguida, Moara e Naiara não tiveram dificuldade em determinar o último padrão: $b^4 - a^4$. Utilizando a lousa, procurei, então, iniciar uma discussão que buscasse generalizar os padrões encontrados pelas estudantes, isto é, comecei a abordar a terceira questão proposta na Quinta Atividade.

3) Seja $y = f(x)$ e suponhamos que exista uma $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

Determine o valor de $\int_a^b f(x)dx$.

Primeiro procurei comparar cada padrão encontrado com a função de origem, ou seja, busquei comentar que, para $y = 2x$, temos uma antiderivada $F(x) = x^2$ e o padrão encontrado é $b^2 - a^2$.

Isso também ocorre nos demais exemplos explorados!

Ricardo: Eu posso considerar como sendo uma primitiva dessa aí, o x^2 , tá?

Da mesma forma, vocês pegaram a $f(x) = 3x^2$.

Eu posso pensar na primitiva $F(x) = x^3$, tudo bem?

E a hora que vocês calcularam $\int_a^b 3x^2 dx$, deu $b^3 - a^3$.

A pergunta três fala o seguinte: suponha que eu tenho uma função aqui $[y = f(x)]$. Uma $f(x)$, tá? E eu sei que a $F(x)$ é uma primitiva dela, tudo bem? [Escrevendo $F'(x) = f(x)$].

Naiara e Moara concordaram com minhas considerações. Busquei então a discussão sobre o resultado geral, da qual Naiara elaborou a conjectura corretamente, ou seja, ela determinou o resultado $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Ricardo: Bom, quanto que vai valer isso aqui [escrevendo $\int_a^b f(x) dx$]?

Naiara: Não é a F aplicada em b menos a F aplicada em a ?

The image shows a chalkboard with three rows of handwritten mathematical work. Each row illustrates the Fundamental Theorem of Calculus with a specific function and its antiderivative.

$f(x) = 2x$	$\int_a^b 2x dx = b^2 - a^2$
$F(x) = x^2$	
$f(x) = 3x^2$	$\int_a^b 3x^2 dx = b^3 - a^3$
$F(x) = x^3$	
$y = f(x)$	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
$F'(x) = f(x)$	

Foto 5.3: Moara e Naiara investigam o resultado $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

2.2 A Experimentação de Ana Paula e Viviane sobre o Resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Ana Paula e Viviane também refletiram durante bastante tempo para identificar o primeiro padrão $b^2 - a^2$. Os padrões seguintes foram determinados “mais rapidamente”.

Viviane: *Acho que é $b^2 - a^2$, não é? Porque, nove menos quatro,... É isso?*

Ana Paula: *[Concorda] Hum, hum.*

(...)

Viviane: *É mesma coisa, só que é $b^3 - a^3$.*

Ana Paula: *É. (...) $b^4 - a^4$.*

Determinados os padrões, Ana Paula e Viviane começaram então a refletir sobre a Terceira questão. Elas não identificaram com facilidade o padrão a ser generalizado, no caso $F(b) - F(a)$. Eu fiz vários indicativos (ver falas abaixo) buscando relacionar a Quarta Atividade com os padrões já determinados pelas estudantes na Quinta Atividade. Isso permitiu que as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas conjecturassem o resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Mais especificamente, Viviane foi quem esboçou primeiramente tal conjectura.

Ricardo: *Peguei $2x$, e na hora que penso em uma antiderivada dela, qual é?*

Ana Paula e Viviane: x^2 .

Ricardo: x^2 . *Aqui eu vou e calculo a integral, quanto que dá?*

Ana Paula e Viviane: $b^2 - a^2$.

Ricardo: *Agora esse aqui. Qual [seria] uma antiderivada?*

Viviane: $b^3 - a^3$.

Ricardo: *E se eu pegar uma $y = f(x)$ aqui, uma antiderivada vai ser como?*

Ana Paula: *Vai ser integral de $f(x)dx$, não é?*

Viviane: *Então isso aqui vai ficar $F(b) - F(a)$.*

Ana Paula e Viviane anotaram os seguintes resultados na ficha de trabalho.

Equação	Intervalo: $[a; b]$	$\int_a^b f(x)dx$
$y = 2x$	$[1,2]$	3
	$[2,3]$	5
	$[1,3]$	8
	$[a,b]$	$b^2 - a^2$
$y = 3x^2$	$[1,2]$	7
	$[2,3]$	19
	$[1,3]$	26
	$[a,b]$	$b^3 - a^3$
$y = 4x^3$	$[1,2]$	15
	$[2,3]$	65
	$[1,3]$	80
	$[a,b]$	$b^4 - a^4$

3) Seja $y = f(x)$ e suponhamos que exista uma $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Determine o

valor de $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Figura 5.2: Fichas de Trabalho de Ana Paula e Viviane - Quinta Atividade.

Fica, portanto, evidenciado com os Episódios ETFC que, ao investigar alguns exemplos triviais de funções polinomiais e elaborar padrões com as informações obtidas com a Calculadora Gráfica, em um processo indutivo, coordenando representações, Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas podem investigar tanto a Relação Fundamental quanto o resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, ou seja, podem explorar o Teorema Fundamental do Cálculo a partir da utilização do Comando $\int f(x)dx$.

3. O Processo de Experimentação com Calculadoras Gráficas e o Pensamento Abduativo

Os Episódios ETFC destacam como as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas engajaram-se em um processo de identificar padrões com base nas informações obtidas com o comando $\int f(x)dx$. Ao determinar padrões sobre informações coletadas com a Calculadora Gráfica, os coletivos puderam elaborar conjecturas sobre os resultados do Teorema Fundamental Cálculo.

Essencialmente, esse processo de generalização de informações, executado pelas Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas, pode ser concebido como um processo de indução, no qual as inferências intuitivas são privilegiadas. E, inerente ao processo indutivo no fazer matemático, está a necessidade de uma abordagem dedutiva. Têm-se, portanto, inferências de caráter indutivo/dedutivo.

Existe também uma discussão sobre a emergência de uma nova categoria intrínseca ao processo indutivo/dedutivo: a Abdução.

Josephson e Josephson (1996) discutem a Abdução de modo bastante profundo, com diversas concepções na Inteligência Artificial. Para os autores, a Abdução (ou inferência da melhor explicação) é uma forma de inferência que vai de dados que descrevem algo, a hipóteses que explicam ou respondem aos dados. É um tipo de formação de teoria ou inferência interpretativa.

Estruturada originalmente nas idéias de C. S. Peirce (1839-1914), as discussões sobre Abdução, em determinados momentos, evidenciam a existência de uma forte articulação entre as três possibilidades de inferência: Abdução, Dedução e Indução⁴⁴.

Na investigação aqui desenvolvida com as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas sobre TFC, ficou caracterizado que este coletivo pensou indutivamente, pois se engajou em um processo de coletar e generalizar informações.

⁴⁴ Josephson e Josephson (1996) reorganizam a taxonomia Abdução/Indução/Dedução sobre os tipos de Inferências proposta por Pierce. Os autores estruturam duas dimensões. A Dimensão Um considera as Inferências do tipo Dedutivas/Outras. A Outra Dimensão considera a taxonomia Abdução/Predição/Diversos. Cada uma caracterizada e condicionada por métodos diversos.

Não discutirei especificamente o termo Predição no contexto das complexas concepções sobre Abdução na Inteligência Artificial, mesmo tendo considerado que as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas “previam” resultados com o comando $\int f(x)dx$ nas sessões de experimentos de ensino.

Josephson e Josephson (1996) comentam que o pensamento indutivo pode ser considerado um tipo de pensamento abdutivo, estando intrinsecamente articulado à Informática em geral: à Inteligência Artificial, ao uso de tecnologias informáticas, às potencialidades WWW etc. Estando, assim, também inerente à própria experimentação-com-tecnologias.

A forma como as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigaram o TFC, pautando-se na generalização de informações coletadas experimentalmente com a Calculadora Gráfica, obtendo inclusive informações visuais, articulando resultados e representações diversas, permite argumentar que a produção de conhecimento matemático desse coletivo assumiu um caráter abdutivo.

Tendo os coletivos conjecturado os resultados do TFC, baseados na investigação da Quarta e Quinta Atividades, iniciei uma abordagem dedutiva de tais resultados. Uma abordagem necessária e que determina um momento crítico na investigação matemática: o Paradigma Informático.

4. O Momento Crítico da Investigação com Calculadoras Gráficas

Lévy (1998) caracterizou um Paradigma Informático na Matemática.

Uma das mais estranhas modificações ligadas ao uso das simulações digitais é a que hoje afeta as matemáticas. Tradicionalmente consideradas como reino da dedução, elas também estão adquirindo um carácter experimental. Simulações de objetos matemáticos podem infirmar, confirmar, ou gerar conjecturas. Mas uma conjectura precisa ser demonstrada para tornar-se um teorema. Surgem ali os limites do cálculo, pois até hoje jamais os demonstradores automáticos têm conseguido demonstrar teoremas significativos que não tivessem sido comprovados por um matemático de carne e osso (LÉVY, 1998, p. 104).

A experimentação com Calculadoras Gráficas evidenciou que os resultados determinados são válidos para os casos investigados. Pensando indutivamente/abduktivamente, os coletivos pensantes conjecturaram os resultados do Teorema Fundamental do Cálculo. Mas Bicudo (2004) comenta que

A “indução empírica” nas ciências naturais vai de uma espécie particular de observações de um certo fenômeno à enunciação de uma lei geral que governe todas as ocorrências do fenômeno. O grau de certeza com que a lei é estabelecida depende do número de observações singulares e de confirmações (BICUDO, 2004, p. 74).

No processo de experimentação das Atividades, as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas conjecturaram a Relação Fundamental e o resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Mas ocorreu uma comprovação “apenas” para os exemplos investigados. E como mostrar que os resultados coletados com a Calculadora Gráfica são verdadeiros para um número maior de casos? Ou, ainda, quais seriam as hipóteses para que os resultados sejam matematicamente verdadeiros para uma diversidade de casos? Evidencia-se a necessidade de uma abordagem dedutiva. O cerne do Paradigma Informático.

As dimensões heurísticas condicionadas pelas tecnologias informáticas possibilitam, por exemplo, considerar que experimentação-com-tecnologias permite primeiramente um momento de investigação, de descoberta de resultados, de elaboração de conjecturas.

Posteriormente, e necessariamente, é que se efetiva uma abordagem dedutiva. De certo modo, isso constitui uma possibilidade “inversa” aos modelos tradicionais. É nesse sentido que Borba e Penteado (2003) argumentam que

A experimentação se torna algo fundamental, invertendo a ordem de exposição oral da teoria, exemplos e exercícios bastante usuais no ensino tradicional permitindo uma nova ordem: investigação e, então, a teorização (BORBA; PENTEADO, 2003, p. 39).

Considero, adicionalmente, que esse processo de “inversão” (investigação/teorização) promovido pela experimentação com tecnologias, neste caso a Calculadora Gráfica, implicou também uma reorganização de papéis da demonstração.

Como abordado no Primeiro Capítulo, Villiers (2001) argumentou sobre diversos papéis que uma demonstração pode assumir. Dentre esses papéis, o processo de *verificação/convencimento* foi evidenciado principalmente nas abordagens experimentais. E, como já comentado, esse fato pôde ser percebido nas experimentações de Ana Paula, Viviane, Moara e Naiara.

Tradicionalmente, estudantes abordam inicialmente resultados matemáticos dedutivamente e, posteriormente, verificaram-nos experimentalmente. No entanto, considero que, na abordagem das Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas, a questão da verificação e convencimento articulou-se principalmente com a abordagem dedutiva, pois as estudantes buscaram um convencimento de que os resultados encontrados, descobertos e investigados experimentalmente eram verdadeiros para uma variedade genérica de casos.

O convencimento generalizado então, neste caso, pautou-se em uma abordagem dedutiva. Porém, associado a esse caráter dedutivo, a demonstração assumiu um papel de *desafio intelectual* e pôde cumprir uma função gratificante e de realização própria (VILLIERS, 2001).

Como observado, as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas, depois de experimentarem o TFC, “foram engajadas” em uma abordagem que enfatizava a elaboração de hipóteses e a identificação de artifícios matemáticos lógicos para estruturar o convencimento: uma abordagem dedutiva.

Sexto Capítulo - Uma Abordagem Dedutiva do Teorema Fundamental do Cálculo

Introdução

Este capítulo discute como as estudantes abordaram dedutivamente o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) na investigação proposta nos experimentos de ensino.

O TFC já havia sido explorado pelas estudantes em sala de aula, no curso regular de Cálculo. Mas, inicialmente, as duplas Ana Paula/Viviane e Moara/Naiara não estabeleceram discussões específicas ou argumentações detalhadas sobre a demonstração do Teorema na sessão de experimento de ensino.

Ricardo: *E esses resultados que vocês encontraram, vocês conhecem?*

Ana Paula e Viviane: *É o Teorema Fundamental do Cálculo.*

Ricardo: *Vocês já viram?*

Viviane: *Vimos na segunda-feira.*

Ricardo: *E sobre a demonstração do Teorema, vocês chegaram a ver?*

Ana Paula: *[Sorrindo] Vimos.*

Ana Paula e Viviane: *Ela [referindo-se à professora de Cálculo do curso regular que cursavam] demonstrou, mas eu não lembro.*

Ricardo: *Vocês já viram esse enunciado no curso de vocês?*

Naiara: *A demonstração ou que isso vale?*

Ricardo: *Os dois [sorrindo...].*

Moara: *Já vimos isso?*

Naiara: *Eu acho que já.*

Moara: *Se eu vi, não lembro.*

Naiara: *Mas se você pedir para eu fazer eu não sei fazer, mas eu tenho impressão que eu já vi isso sim. Tanto que a gente vive aplicando isso.*

Moara: *Ah, é verdade.*

Naiara: *É o Teorema Fundamental do Cálculo.*

Moara: *É. Mas eu nem lembro.*

Com base nessas observações, iniciei uma discussão referente à uma possível abordagem dedutiva do TFC, buscando tratar inicialmente a Relação Fundamental e, posteriormente, o resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Uma abordagem baseada em Hoffmann e Bradley (2003), que considera apenas funções que possuem imagem de valores não negativos ($f(x) \geq 0$).

Demonstração do teorema Fundamental do Cálculo para um Caso Particular

Vamos encarar essa seção como uma demonstração do teorema fundamental do cálculo para o caso em que $y = f(x) \geq 0$. Nesse caso, a

integral definida $\int_a^b f(x)dx$ representa a área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a; b]$. Para um valor de x qualquer entre a e b , seja $A(x)$ a área sob a curva $f(x)$ no intervalo $[a; x]$. Então, o quociente-diferença de $A(x)$ é $\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$ onde, por definição, a expressão $A(x+h) - A(x)$ no

numerador é a área sob a curva $y = f(x)$ entre x e $x + h$. Para pequenos valores de h , essa área é aproximadamente igual à área de um retângulo de altura $f(x)$ e largura h , como mostra a Fig. 6.7. Assim, $A(x+h) - A(x) \cong f(x) \cdot h$ ou $\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \cong f(x)$.

Quando h tende a zero, o erro envolvido na aproximação tende a zero e, conseqüentemente, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$.

Acontece que, de acordo com a definição de derivada, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = A'(x)$.

Portanto $A'(x) = f(x)$ Ou seja, $A(x)$ é a antiderivada de $f(x)$.

Suponha que $F(x)$ seja outra antiderivada de $f(x)$. Nesse caso, de acordo com a propriedade fundamental das antiderivadas, temos: $A(x) = F(x) + C$. Onde C é uma constante e x pode ter qualquer valor no intervalo $a \leq x \leq b$. Como $A(x)$ é a área sob a curva $y = f(x)$ entre a e x , $A(a)$, a área entre a e a , é 0, logo, $A(a) = 0 = F(a) + C$

e $C = -F(a)$. A área sob a curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ é $A(b)$, que satisfaz a relação $A(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$.

Finalmente, como a área sob a curva $y = f(x)$ na região $a \leq x \leq b$ também é dada pela integral definida $\int_a^b f(x)dx$, temos

$\int_a^b f(x)dx = A(b) = F(b) - F(a)$ como estabelece o teorema fundamental do cálculo (HOFFMANN; BRADLEY, 2003, p. 320).

1. Episódio ADTFC₁ – A Primeira Parte do TFC: A Relação Fundamental

Iniciei a abordagem dedutiva do TFC de modo semelhante com as duas duplas. Questionei ambas as estudantes sobre o que teria que ser demonstrado no Teorema. Qual era a tese?

Ana Paula e Viviane responderam apenas que deveria ser calculado o resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Moara e Naiara não propuseram nenhum encaminhamento.

Busquei, então, usando a lousa, discutir a Relação Fundamental, com base na conjectura anteriormente comentada pelas estudantes: “que derivada de F é f ”. Que F existe e é derivável. Mas as estudantes comentaram que não tinham idéia de como iniciar tal demonstração. Procurei expor um encaminhamento inicial, onde defini uma função área, denotada por $A(x)$. Os valores da imagem da função $A(x)$ indicam os valores da área de uma Região $\mathfrak{R}$ definida por $y = f(x) \geq 0$, para x pertencente a $[a, b]$, ou seja, a área determinada por $[a; x]$.

Ricardo:*[Ao quadro] Eu defino uma função que eu vou chamar $A(x)$.*

Ela pega um determinado ponto aqui no intervalo e dá a área.

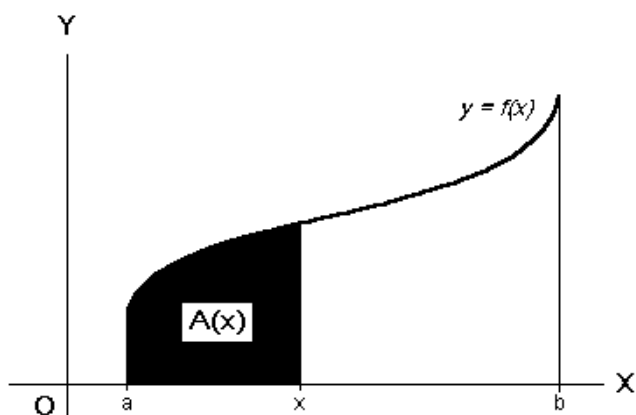


Figura 6.1: Seja $y = f(x) \geq 0$ em $[a; b]$ e $A(x)$ a função de determina o valor da área da Região $\mathfrak{R}$ delimitada por $y = f(x)$ em $[a; x]$.

Em seguida, questionei como derivar tal função.

Ricardo: *Então, eu quero mostrar que essa função que tá me dando a área, a hora que eu derivo, eu volto na minha função original.*

Como a gente pode pensar em uma proposta para mostrar isso?

Ana Paula e Viviane propuseram calcular a variação da função área. No entanto, inicialmente, não indicaram qual seria a variação. Propus então a Ana Paula e Viviane enfocarem a área determinada por $A(x + h) - A(x)$.

Com Moara e Naiara, embora eu também houvesse produzido inúmeras inferências utilizando a lousa, procurei discutir mais detalhadamente como identificar a variação $A(x + h) - A(x)$.

Considere os pontos x e $x + h$ no intervalo $[a; b]$ e perguntei quanto valeria, com base na função $A(x)$, a área entre esses pontos. Naiara conjecturou que bastava calcular a integral entre os pontos x e $x + h$. Só que, no momento, eu pretendia “obter” uma resposta em função de $A(x)$. Então, procurei ir relacionando a notação de integral com a notação definida a partir da função $A(x)$: uma coordenação de representações algébricas.

Questionei quanto valeria a área no intervalo $[a; x]$. Naiara respondeu que valeria $\int_a^x f(x)dx$. Confirmei a veracidade de tal conjectura e questionei quanto valeria para o intervalo $[a; x + h]$. Novamente, Naiara respondeu corretamente que seria $\int_a^{x+h} f(x)dx$.

A partir daí comentei com as estudantes que a primeira área poderia ser calculada por $A(x)$ e a segunda por $A(x + h)$. Ambas concordaram. Assim, elas puderam concluir que o valor da área determinada por $[x; x + h]$ pode ser representado por $A(x + h) - A(x)$.

Ricardo: *Essa $A(x + h)$. é toda essa área aqui. Menos esse pedaço aqui $A(x)$].*

Naiara: $A(x)$.

Ricardo: *Isso. A área verde ali então é $A(x + h)$, que é tudo isso, menos $A(x)$.*

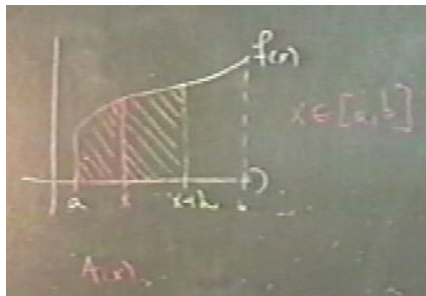


Foto 6.1: Moara e Naiara iniciam da investigação dedutiva do TFC.

Discutido o que $A(x + h) - A(x)$ está representando graficamente, procurei iniciar o tratamento de um outro artifício na demonstração. Uma idéia intuitiva do Teorema do Valor Médio para Integrais⁴⁵.

Com Moara e Naiara, comentei que a área em questão era aproximadamente a área de um certo retângulo e desenhei esse retângulo na lousa. Quando questionei quanto seria o valor da área desse retângulo que eu havia construído, Naiara conjecturou que seria h vezes $f(x)$. Ou seja, as estudantes concordaram com a veracidade da expressão $A(x + h) - A(x) \cong f(x) \cdot h$.

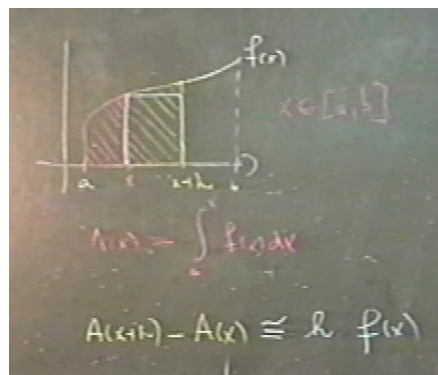


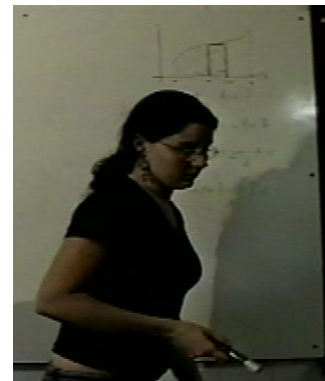
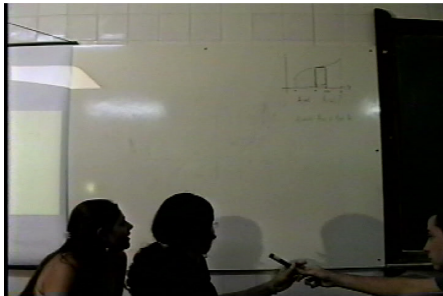
Foto 6.2: Moara e Naiara iniciam da investigação dedutiva do TFC.

Com Ana Paula e Viviane desenhei, o retângulo de altura $f(x)$ e base variando de x até $x + h$, ou seja, de base de medida h . Comentei, então, que a área desse retângulo tem valor aproximado a $A(x + h) - A(x)$; escrevi $A(x + h) - A(x) \cong f(x) \cdot h$. Nesse momento é que Ana Paula conjecturou a expressão $\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \cong f(x)$ e propôs calcular o limite dela, pensando na definição de derivada.

⁴⁵ Ver Demonstração no Anexo II.

Ana Paula: Se você pegar o h e dividir aqui e aplicar limite de $\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$?
É a derivada, não é?

Solicitada, Viviane foi à lousa. Ela deu continuidade à idéia de Ana Paula, que havia pensado no conceito de derivada como limite. No entanto, na exposição, as argumentações não ficaram claras e as estudantes, através das notações, não conseguiram expressar suas idéias. Ficaram, dessa forma, evidenciadas minhas inferências.



Fotos 6.3 e 6.4: Viviane vai ao quadro na investigação dedutiva do TFC.

Ricardo: A hora que eu aplico o limite aqui, fica $F(x)$.

É o próprio $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$. Que é $A'(x)$.

O que eu faço agora, só para fazer essa questão do A para o f ...

... [a gente considera] $A(x)$ como sendo $F(x) + C$.⁴⁶

Viviane e Ana Paula expressaram suas anotações de caráter dedutivo sobre a Relação Fundamental do TFC (a primeira parte) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 i) \quad F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \\
 \text{T.V.M.} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(t) = f(x) \quad \text{c.g.m}
 \end{aligned}$$

Figura 6.2: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane - A abordagem dedutiva da Relação Fundamental do TFC.

⁴⁶ Observe que, conseqüentemente, $F'(x) = f(x)$, pois $A(x) = F(x) + c \Rightarrow A'(x) = F'(x) + 0 \Rightarrow f(x) = F'(x)$.

Com Moara e Naiara, após as estudantes determinarem a expressão $A(x + h) - A(x) \cong f(x) \cdot h$, propus rescrever a expressão da seguinte forma: $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \cong f(x)$. Questionei então “qual seria a forma de fazer o sinal $\cong$ transformar-se em $=$ na expressão?”.

Moara então conjecturou que se $x + h$ tendesse a x , à distância (“o erro de aproximação”) seria nulo. Ou seja, h deveria tender a zero. Obteve-se, desse modo, a expressão $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$. Assim, tendo como referência esse limite, Naiara pôde identificar o conceito de derivada.

Moara: Quando $x + h$ tender a x , não é? A distância entre ele vai para zero.

Ricardo: Isso, e qual a distância entre eles, aí?

Moara: h .

Ricardo: h . Penso no h tendendo a zero. Tenho que é igual ao $f(x)$.

Naiara: Não é o negócio de derivada?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$

$$A'(x) = f(x)$$

Foto 6.5: Naiara e Moara identificam a dedução da Relação Fundamental do TFC.

Concordei com a proposta das estudantes de que essa era uma derivada. No entanto, era a derivada de $A(x)$. Eu tinha então que $A'(x) = f(x)$. Como obter o resultado $F'(x) = f(x)$?

As estudantes não conseguiram conjecturar nenhum modo de relacionar $A(x)$ com $F(x)$. Nesse sentido, fui eu que propus tal articulação. Procurei comentar que $A(x)$ era uma antiderivada particular de $f(x)$. Bastava considerar $F(x) + C$ como a antiderivada genérica de $f(x)$. Assim, eu teria a relação a ser provada, pois como $A'(x) = f(x)$ e $A'(x) = F'(x)$, tem-se o resultado $F'(x) = f(x)$.

1.1. Considerações sobre a Abordagem Dedutiva da Relação Fundamental

Considero que a abordagem dedutiva estruturada por Hoffmann e Bradley (2003) possui caráter experimental, pois, além dos autores proporem em outros momentos o uso de CAS, há um tratamento voltado para as ciências empíricas, principalmente a física e a biologia.

Essa abordagem empírica privilegia aspectos intuitivos nas demonstrações, tornando-as mais acessíveis. Ressalva-se ainda que, no caso da estruturação do TFC, Hoffmann e Bradley (2003) consideram apenas funções com imagem que assumem valores não negativos ($f(x) \geq 0$). O que configura uma demonstração para um caso particular.

Na abordagem da Relação Fundamental (primeira parte), em alguns momentos, as estudantes (as duas duplas) identificaram alguns artifícios matemáticos necessários à demonstração. Elas, por exemplo, conjecturaram a questão da taxa de variação da função área definida, ou, mais ordinariamente, em determinados momentos, “enxergaram” a definição de derivada como limite.

Ana Paula: Se você pegar o h , dividir aqui e aplicar limite de $\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$?

É a derivada, não é?

Naiara: Não é o negócio de derivada?

No entanto, mesmo tendo conjecturado alguns artifícios desse tipo, não foram as Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas o coletivo mais atuante na abordagem dedutiva da Relação Fundamental aqui desenvolvida. Quem mais atuou nesse momento foi o coletivo Estudantes-e-Professor-com-Giz-e-Quadro. Principalmente com Moara e Naiara. Com Ana Paula e Viviane, mesmo eu tendo elaborado inúmeras inferências, elas igualmente elaboraram anotações na ficha de trabalho e produziram argumentações utilizando a lousa.

Outro fato a ser destacado é que Hoffmann e Bradley (2003) não utilizam o Teorema do Valor Médio para Integrais na demonstração. Isso acarreta duas considerações. A primeira consideração é que a abordagem visual é privilegiada. De certa forma, na demonstração, quando foi relevado que o valor da área entre x e $x + h$ é aproximadamente o valor da área do retângulo de base h e altura $f(x)$, os aspectos intuitivos foram privilegiados em detrimento aos dedutivos. Não foi “necessário” utilizar o teorema do valor médio para integrais. Foi explorada uma noção, uma abordagem intuitiva deste Teorema.

A segunda consideração é que, do ponto de vista matemático-formal, a demonstração proposta por Hoffmann e Bradley (2003) pode ser concebida como uma “primeira idéia da demonstração do TFC”. Os próprios autores propõem uma “demonstração para um caso particular”. Assim, ao enfatizar o conceito de integração definida com base na questão de área e, simultaneamente, não abordar o conceito de partição, ao se explorar funções com imagem que assumem valores não negativos e ao utilizar o Teorema do Valor Médio para Integrais de modo intuitivo, Hoffmann e Bradley (2003) estruturam uma demonstração que pode ser caracterizada como não rigorosa do ponto de vista matemático. Esta é uma demonstração que pode ser considerada acessível para alunos de primeiro ano de graduação.

Ao mesmo tempo, essa “demonstração mais acessível” pode possibilitar que se abordem demonstrações mais formais. A partir dessa abordagem, pode-se proporcionar aos estudantes uma oportunidade de articular e estruturar o próprio TFC com outros teoremas e resultados do próprio Cálculo e, ainda, elaborar uma notação mais rigorosa. Por essa razão, uma demonstração pode assumir um papel de *sistematização*, ou seja, o fato de surgir a oportunidade de explorar a transformação de um conjunto de significados conhecidos em um sistema dedutivo com base no Teorema investigado (VILLIERS, 2001). Mas, mesmo na abordagem feita nos experimentos de ensino, as estudantes elaboraram argumentações interessantes sobre a Relação Fundamental. Viviane e Ana Paula, que registraram argumentações, optaram por utilizar a notação de integral ao invés da própria função $A(x)$ e identificaram o momento em que é utilizado o teorema do valor médio para integrais. Uma coordenação de notações na dedução do TFC.

$$i) F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}$$

$$\stackrel{\text{T.V.M.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = f(x) \quad \text{c.g.m.}$$

Figura 6.3: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane - A abordagem dedutiva da relação fundamental do TFC.

Exceto quanto à formalização das hipóteses, a forma como as estudantes Viviane e Ana Paula escreveram sua demonstração da Relação Fundamental assemelha-se à abordagem de Guidorizzi (2001), mesmo tendo sido proposta uma “diferente” nos experimentos de ensino.

Demonstração

Precisamos provar que, para todo x em I , $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$

$$\text{Temos } \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}$$

Pelo teorema do valor médio para integrais existe c entre x e $x+h$ tal que $\int_x^{x+h} f(t) dt = f(c) \cdot h$. Assim, $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$.

Tendo em vista que a continuidade de f em I e observando que c tende a x quando h tende a zero resulta $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

(GUIDORIZZI, 2001, Volume II, p.19-20)⁴⁷

Explorada a Relação Fundamental do TFC, as estudantes iniciaram a abordagem dedutiva do resultado $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

⁴⁷ Destaco o erro tipográfico na segunda linha da demonstração. Onde se diz $h(x)$, deve-se dizer $F(x)$. Na edição de 2002 esse erro não aparece.

2. Episódio ADTFC₂ - O Resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$: a Segunda Parte do TFC

Para iniciar a abordagem dedutiva do resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ com a dupla Ana Paula e Viviane, a estudante Viviane foi ao quadro. Nesse momento houve uma maior participação das estudantes. Elas conseguiram conjecturar alguns artifícios no processo de demonstração e, ao determinarem o resultado, expressaram satisfação (apreciação) em finalizar uma demonstração.

Ana Paula e Viviane sabiam que $F(x) = A(x) - C$. Viviane conjecturou com facilidade que $F(a) = A(a) - C$. Logo em seguida, Ana Paula identificou que $A(a)$ é zero, pois indica “um retângulo de área zero”. Ou seja, que $F(a) = -C$. Posteriormente, propôs que as estudantes calculassem $A(b)$. Viviane identificou que $A(b) = F(b) - F(a)$ e que, ao mesmo tempo, $A(b) = \int_a^b f(x)dx$. As estudantes então

concluíram a demonstração ao determinarem o resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Ricardo: Vou pedir para vocês então, calcularem para mim o $F(a)$.

Viviane: $A(a) - c$.

Ricardo: Quanto que vale o $A(a)$?

Ana Paula: Zero. É a área ali no caso.

Viviane: [Escrevendo o resultado no quadro] Tudo bem. Fica $F(a) - c$.

Ricardo: Calcula para mim agora o $A(b)$.

Viviane: $A(b) = F(b) - c$. Só que $-c$ é $F(a)$.

[Escreveu $A(b) = F(b) - F(a)$]. Só que esse $A(b)$...

Ana Paula: É a área. $A(b)$ no caso é a integral, não é?(...) de a até b de $f(x)dx$.

Viviane: É. $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

Ana Paula: Ah! Que legal!

Viviane: Saiu bem mais fácil.

Ana Paula: Certinho. Primeira vez que a gente conseguiu demonstrar alguma coisa!

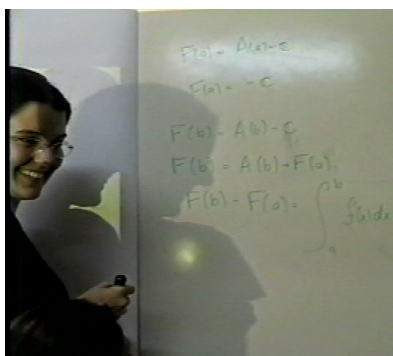


Foto 6.6: Viviane demonstra o resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Ana Paula e Viviane estruturaram os seguintes comentários sobre a abordagem dedutiva do resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

$$\begin{aligned} \text{em)} \quad F(x) &= \int_a^x f(t) dt \\ F(a) &= \int_a^a f(t) dt = 0 \\ F(b) &= \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx = \\ \Rightarrow F(b) - F(a) &= \int_a^b f(x) dx - 0 = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Figura 6.4: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane.
A abordagem dedutiva do resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Para abordar o resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ com Naiara e Moara questionei, inicialmente, como calcular $A(a)$. Naiara respondeu, “com certo ar de incerteza”, que seria $F(a) + C$. Ao mesmo tempo, Moara identificou que $A(a)$ era zero. Então as estudantes concluíram que $C = -F(a)$.

Posteriormente, questionei como calcular $A(b)$. Moara indicou a expressão $F(b) + C$. Comentei que $C = -F(a)$. As estudantes identificaram de modo imediato que a expressão $A(b) = F(b) - F(a)$.

Em seguida, questioneei o que representava o $A(b)$ e Naiara conjecturou que era a própria $\int_a^b f(x)dx$. As estudantes chegaram, dessa forma, ao resultado

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ricardo: E como que eu posso representar essa área aí?

Naiara: Pela integral?

Moara: Integral de a até b .

Naiara: Ah! Eu sei que a gente não viu dessa forma.

Dessa forma é bem mais fácil!

Handwritten derivation on a chalkboard:

$$\begin{aligned} \text{ii) } A(x) &= F(x) + C \\ \text{P/ } x=a &\Rightarrow A(a) = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \\ \text{P/ } x=b &\Rightarrow A(b) = F(b) + C \\ A(b) &= F(b) - F(a) \\ \int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Foto 6.7: Moara e Naiara exploram a dedução do resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Finalizei a atividade comentando algumas das prováveis diferenças desta demonstração em relação à demonstração vista pelas estudantes em seu curso regular de Cálculo, que seria o uso da notação de integral ao invés de $A(x)$, a utilização do Teorema do Valor Médio para Integrais e o uso do conceito de partição. Embora eu não tenha buscado um maior aprofundamento sobre essa discussão, esse talvez seja um viés relevante para estudantes de matemática identificarem e se “familiarizarem” com minúcias e detalhes inerentes ao rigoroso fazer matemático.

2.1. Comentários sobre a Abordagem Dedutiva do Teorema Fundamental do Cálculo

Na elaboração escrita da primeira parte do TFC, assim como na fala de Naiara, Viviane e Ana Paula também articularam a notação da função $A(x)$ com a notação de Integral.

No entanto, Viviane e Ana Paula deveriam considerar inicialmente $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ ao invés de $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Isso tornaria mais coerente o fato de $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ ao invés de $F(b) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$.

Com as duas duplas de estudantes, notei que houve uma “apreciação” em ter determinado dedutivamente os resultados encontrados experimentalmente sobre o TFC. Ou seja, concluir e entender a abordagem dedutiva do teorema proporcionou às estudantes um engajamento intelectual. A demonstração assumiu explicitamente o caráter *de desafio intelectual* na abordagem dedutiva das estudantes, conforme evidenciado por Villiers (2001).

A acessibilidade da abordagem estruturada por Hoffmann e Bradley (2003) e as elaborações estruturadas por mim nas sessões de experimentos de ensino sobre a demonstração dedutiva do TFC determinaram sua realização. E, como comentado,

O estudante de matemática é, geralmente, defrontado com uma apresentação lógico-dedutiva do conhecimento. (...) O conhecimento parece ter sido produzido num ato mágico.(...) A matemática se constitui, então, num conjunto crescente de verdades imutáveis e eternas. Obviamente tal concepção está impregnada do caráter mecanicista e autoritário da razão clássica, que procura manter sua hegemonia (TENÓRIO, 2001, p. 90).

Geralmente, estudantes de primeiro ano de graduação ficam “surpresos” com o grau de abstração dos conceitos matemáticos abordados e com as notações inerentes. É nesse sentido que a experimentação com Calculadoras Gráficas e uma abordagem dedutiva de caráter acessível podem ser relevantes, não somente ao processo de produção de conhecimento matemático das estudantes, mas também pelo fato de proporcionar uma abordagem investigativa, promovendo e evidenciando as conjecturas elaboradas por estudantes.

Colocações como *“Ah! Dessa forma é bem mais fácil!”* ou *“Primeira vez que a gente conseguiu demonstrar alguma coisa!”* permitem considerar a possibilidade de que um processo investigativo do TFC com Calculadoras Gráficas, permeado por uma abordagem de caráter dedutivo, possibilita a discussão e produção de conhecimento de estudantes. Fator esse que pode contribuir com alteração do atual quadro de reprovações no ensino de Cálculo. Emerge, portanto, a possibilidade de indicar algumas sutis contribuições à Educação Matemática.

Epílogo - Contribuições à Informática e Educação Matemática

Ir longe demais é tão mau quanto ficar aquém.

Confúcio

1. Evidenciar a Experimentação com Tecnologias no Processo Investigativo

A Atividade de Experimentação com Calculadoras Gráficas proposta nesta pesquisa, para que estudantes pudessem investigar o Teorema Fundamental do Cálculo e o conceito de Integral de Riemann, é uma das contribuições à Informática e Educação Matemática. O processo de experimentação e demonstração, com base na Atividade, condicionou o contexto investigativo das Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas. Os Episódios apresentados evidenciaram a constituição mútua dos atores humanos e não humanos no processo de produção de conhecimento matemático dos conceitos explorados, principalmente em relação às possibilidades emergentes da forma como a Calculadora Gráfica condicionou o pensamento do coletivo aqui investigado.

Além de propor a Atividade aos participantes desta pesquisa, tive a oportunidade, mediante o Estágio de Docência na Graduação da Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro, SP, de propô-la a duas turmas de primeiro ano do curso de Ecologia na disciplina Cálculo II, nos anos de 2004/5. Em sala de aula pude perceber que ocorreram investigações interessantes como na determinação dos padrões de generalização.

Uma dupla de estudantes, por exemplo, ao investigar $y = 2x$, na Quinta Atividade, ao invés de determinar diretamente o padrão $b^2 - a^2$, identificou que para $[1; 2]$, em que tem-se o resultado 3, pode-se considerar $(2+1)(2-1)=3$. Para $[2; 3]$, em que tem-se o resultado 5, pode-se considerar $(3+2)(3-2)=5$. Para $[1; 3]$, em que tem-se o resultado 8, pode-se considerar $(3+1)(3-1)=8$. Logo, o padrão de generalização é $(b + a)(b - a)$ que, embora seja um padrão “diferente”, é algebricamente equivalente à $b^2 - a^2$.

Nesse sentido, uma Atividade de Investigação pode ser desenvolvida em sala de aula, e três fases não lineares podem acontecer: i) a introdução da Atividade, onde o professor faz uma proposta à turma; ii) a realização de investigações coletivas, onde emergem as conjecturas; iii) a discussão dos resultados, onde podem ser tratadas abordagens dedutivas (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003).

A Atividade de Experimentação aqui proposta, apresentada em Anexo e disponível na *Home Page* do GPIMEM⁴⁷, pode, portanto, permear tanto minhas dinâmicas enquanto futuro professor de Cálculo Diferencial e Integral quanto a de outros professores desta disciplina.

A Atividade pode ainda ser modificada, passar por novas versões, mediante resultados e situações identificadas em sala de aula⁴⁸. Assim, mesmo considerando a seqüência de encaminhamento proposta na Atividade, fica inerente a ela um “caráter aberto” e a possibilidade de emergirem indicações de diversos professores-pesquisadores, mediante seu desenvolvimento, para evidenciar os aspectos da experimentação no processo investigativo⁴⁹.

Existem diversas formas de enfatizar a experimentação-com-tecnologias no contexto da investigação matemática. Uma delas é destacar as conjecturas elaboradas pelos coletivos pensantes nesse processo e enfatizar as abordagens intuitivas no contexto dedutivo.

Diversas vezes, ao se finalizar uma abordagem dedutiva, matemáticos utilizam a abreviação C.Q.D. (Como Queríamos Demonstrar!).

Quando Ana Paula e Viviane desenvolveram a abordagem dedutiva do TFC na segunda sessão de experimentos de ensino, elas não elaboraram muitas inferências na primeira parte do TFC, na demonstração da Relação Fundamental. Mas as estudantes preencheram a ficha de trabalho desta forma:

⁴⁷ <http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/gpimem.html>

⁴⁸ Tanto a “minha” sala de aula quanto a de outros professores interessados em desenvolver a Atividade.

⁴⁹ Uma proposta que aqui coloco como uma idéia inicial de Projeto, é estruturar um curso de Calculadoras Gráficas abordando questões diversas sobre o Cálculo, mas enfatizando as representações múltiplas de funções e a utilização de sensores (BORBA, 1993; SOUZA, 1996; SCHEFFER, 20001; BENEDETTI, 2003; BONAFINI, 2004), o conceito de Derivada e suas regras (VILLARREAL, 1999) e, é claro, o conceito de Integral de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo. Mais especificamente, penso *a priori* em oferecer este curso em 2006 a estudantes de Licenciatura em Matemática da UNESP de Rio Claro, SP, que sejam repetentes na disciplina Cálculo, que estejam cursando a disciplina no ano indicado assim como àqueles que, no período de desenvolvimento do curso, ainda não tenham explorado em sala de aula os conceitos de Derivada e Integral.

$$i) F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}$$

$$\xrightarrow{T.V.M} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(t) = f(x) \quad (\text{c.q.m.})$$

Figura E1: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane – Demonstração da Relação Fundamental do TFC.

Na abordagem do resultado $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, na qual Ana Paula e Viviane elaboraram diversas conjecturas e inferências, diferentemente da abordagem da Relação Fundamental, as estudantes não indicaram a abreviação C.Q.M. (como queríamos mostrar⁵⁰) na formalização dedutiva do TFC.

$$ii) F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$$

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx - 0 = \int_a^b f(x) dx$$

Figura E2: Ficha de Trabalho de Ana Paula e Viviane – Demonstração do Resultado $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

É no cerne dessa observação que destaco outro modo de evidenciar a experimentação-com-tecnologias no processo de investigação matemática. Ao serem elaboradas conjecturas no processo de experimentação-com-tecnologia, a abordagem dedutiva assume um papel de confirmação da conjectura elaborada.

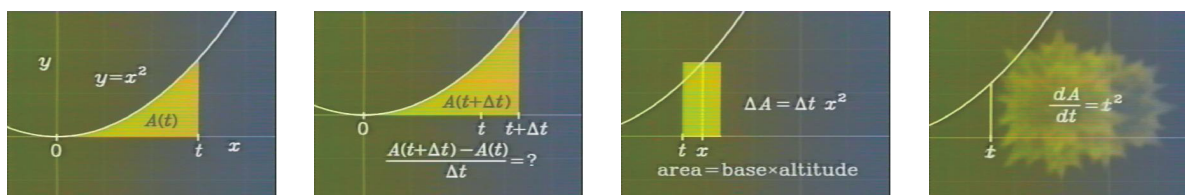
Portanto, ao se confirmar dedutivamente um resultado conjecturado experimentalmente, ao invés de nos vangloriarmos com o tradicional C.Q.D., considero que a abreviação mais coerente para se utilizar ao finalizar uma abordagem dedutiva após uma abordagem experimental é **C.H.C. (Como Havíamos Conjecturado!)**. Desse modo fica enfatizada a importância da experimentação no processo de investigação, ou seja, fica evidente a valorização heurística no processo de investigação matemática.

⁵⁰ Poder-se-ia questionar ainda por que as estudantes escreveram *mostrar* e não *demonstrar*.

Uma outra forma de evidenciar o processo de experimentação no contexto investigativo é com a utilização de simulações (vídeos e/ou aplicativos Aplets) sobre o tema investigado. A utilização de alguns recursos informáticos permite conceber a existência de provas visuais (HANNA, 2000), podendo inclusive redefinir a necessidade e os métodos de abordagens dedutivas tradicionais.

Uma idéia bastante interessante de uma demonstração visual do Teorema Fundamental do Cálculo é a que é apresentada no vídeo intitulado *Universo Mecânico*: uma abordagem dedutiva/experimental, no qual a visualização de simulações, a investigação de exemplos, a exposição de inferências dedutivas e a oralidade são evidenciadas. Destaco momentos breves deste vídeo:

• A Quadratura da Parábola

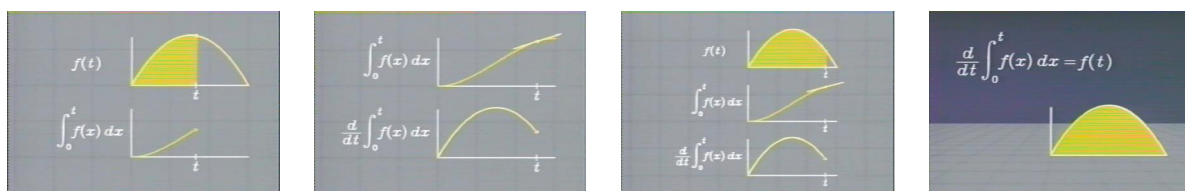


Fotos E 1-4: i) a definição da função $A(x)$ a partir de $y = x^2$ em $[0; t]$; ii) a taxa de variação da função $A(x)$; iii) e iv) uma simulação intuitiva do Teorema do Valor Médio para Integrais



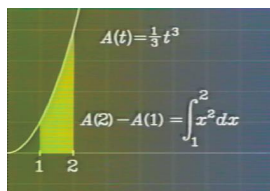
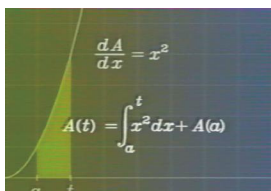
Fotos E 5-8: Após testar algumas anti-derivadas determina-se o valor $t^3/3$. Consequentemente obtém-se $\int_0^t x^2 dx = \frac{t^3}{3}$.

• A Relação Fundamental



Fotos E 9-12: i) observa-se a constituição do gráfico de uma função área a partir de $f(x)$; ii) Observa-se que, ao se considerar a função derivada da função área constituída, obtém-se o próprio gráfico da $f(x)$; iii) observa-se simultaneamente as simulações de i) e ii); iv) a Relação Fundamental é explicitada gráfica e algebricamente.

- **O Resultado** $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$



$$A(t) = \int_a^t \frac{dA}{dx} dx + A(a)$$

Fotos E13-15: i) e ii) Evidenciam novamente a quadratura da parábola, só que considerando intervalo do tipo $[a; b]$ ao invés de $[0; t]$; ii) a exploração desse exemplo permite explorar o resultado $F(b) - F(a)$.

Pautando-se nessa abordagem de caráter experimental, condicionada por potencialidades das tecnologias informáticas, estudantes podem investigar temas matemáticos com base em argumentações que privilegiam as inferências abduativas⁵¹, isto é, um enfoque que potencializa a abordagem dos conceitos a partir desses diversos tipos de inferências e que é ressonante com disciplinas de caráter empírico, sendo assim indicada a estudantes de cursos de física, ciências biológicas, química, ecologia, etc.

Com base na Atividade aqui proposta, pode-se indicar algumas limitações do ponto de vista matemático-formal como, por exemplo, a abordagem intuitiva/visual do Teorema do valor Médio para Integrais, a não utilização da notação de partição, etc. Com essas identificações, o estudante de matemática pode iniciar a investigação de outros Teoremas e resultados articulados ao TFC ou identificar as concepções de autores diversos, podendo assim estruturar uma concepção sobre o engajamento do TFC no Cálculo Diferencial e Integral enquanto área em matemática.

Analogamente, pode-se generalizar uma concepção de Matemática, pois é possível estruturar uma visão sobre um sistema formal constituído de elementos intrinsecamente articulados como axiomas e definições, teoremas, postulados e corolários. É nesse sentido que a demonstração pode assumir um papel de sistematização pois, a partir da demonstração de um teorema, é possível estabelecer sua relação com outros conceitos (outros teoremas, definições, postulados, etc) possibilitando uma articulação complexa entre estes e, simultaneamente, consolidando uma perspectiva holística sobre determinada teoria formal matemática (Cálculo, Análise Matemática, Geometria Euclidiana, etc).

⁵¹ Conseqüentemente, inferências dedutivas e indutivas/intuitivas.

2. Possibilidades Emergentes com a Análise de Vídeos

O fato de esta pesquisa utilizar vídeos para registrar as sessões de experimentos de ensino também deve ser destacado. Além das características inerentes à análise de vídeos como a possibilidade de observar interações complexas e de reexaminar continuamente os dados, pude **inserir fotos dos vídeos** no corpo da dissertação.

Esse processo potencializou a forma de descrição dos dados da pesquisa, pois valorizou aspectos visuais, explicitando as justificativas das estudantes e as indicações elaboradas por mim. Cabe, portanto, evidenciar novamente as potencialidades emergentes com a utilização de recursos informáticos, já que pude exibir imagens sobre o que estava descrito textualmente. Esse procedimento, embora não tenha dado a qualidade de hipertexto a esta dissertação, pretende atribuir um caráter “mais plástico”⁵² ao texto escrito.

Essa observação permite destacar as novas possibilidades de divulgação de hipertextos científicos em Educação Matemática: os *vídeo-papers*. A revista *Educational Studies in Mathematics*⁵³, por exemplo, publicou um volume especial com um *vídeo-paper* contendo idéias inerentes à pesquisa de Scheffer (2001). O caráter hipertextual e os diversos links com trechos de vídeos de experimentos de ensino contidos em artigos digitais possibilitam novas formas de se conhecer um estudo, de se “interagir com” e interpretar as informações de uma pesquisa a partir de textos e vídeos que se complementam e podem ser exibidos simultaneamente.

A Coleção GPIMEM Digital⁵⁴ também vem publicando alguns volumes desse gênero com pesquisas desenvolvidas por integrantes do GPIMEM. A existência dessa Coleção permite considerar a possibilidade de se produzir um *vídeo-paper* desta pesquisa, ao mesmo tempo em que os temas indicados pela Coleção permitem “mapear” o espectro de pesquisas do GPIMEM.

⁵² No sentido de Lévy (1993), que evidencia a plasticidade dos modelos digitais em contraste com a rigidez da escrita.

⁵³ **Educational Studies in Mathematics** – an International Journal - Volume 57 – n.º 3 – 2004. Editors: Marcelo Borba & Ricardo Nemirovsky - Kluwer Academic Publishers Dordrecht, The Netherlands.

⁵⁴ ISSN: 1679-53. Editores em 2005: Marcelo Borba e Ricardo Scucuglia.

3. A Metáfora da Colcha de Retalhos

É na interface de regiões de inquérito que a Filosofia da Educação Matemática movimenta-se, construindo seu modo de argumentar, de articular idéias, de investigar, de agir na realidade educacional, de expressar seu pensamento por meio de uma linguagem apropriada ao seu universo de questionamento (BICUDO; GARNICA, 2002).

Por que é relevante desenvolver uma pesquisa sobre como estudantes pensam e investigam conceitos matemáticos com tecnologias informáticas? Quais as possíveis contribuições da presente Dissertação à Educação Matemática?

Considero que a Educação tem sua gênese associada a preocupações com o ensino. Mas, ao mesmo tempo, constitui-se como algo que abrange diversas dimensões, diversas concepções. Analogamente, a Educação Matemática emerge de preocupações com o ensino desta disciplina especificamente e também assume dimensões diversas, podendo ser concebida, por exemplo, como ensino de Matemática, como pesquisas em Educação Matemática, como Linhas de Pesquisas em Educação Matemática, como Tendências em Educação Matemática, por Grupos de Pesquisa em Educação Matemática, etc.

É nesse sentido que diversas discussões, no contexto da Pesquisa Qualitativa, da Educação e da Educação Matemática fazem referência à metáfora da Colcha de Retalhos (ou Mosaico), pois a Educação Matemática pode ser concebida como uma colcha de retalhos, na qual os retalhos são cada uma dessas concepções de Educação Matemática. Cada uma das pesquisas, das linhas de pesquisas, das tendências, etc. é uma Região de Inquérito constituída por regiões de fronteiras.

Logo, para identificar as contribuições desta pesquisa à Educação Matemática, é importante procurar discutir suas contribuições à Informática e Educação Matemática. Mas a Colcha de Retalhos constituída pelas pesquisas do GPIMEM, de certo modo, indica algumas possibilidades de se abordar conceitos inerentes ao Cálculo Diferencial e Integral com o uso de tecnologias informáticas.

Acredito que experimentação com Calculadoras Gráficas, proposta nesta pesquisa sobre o Teorema Fundamental do Cálculo pode ajudar no estabelecimento de conexões entre a matemática difundida no Ensino Médio e a matemática exposta na comunidade acadêmica. Ao invés de propor uma abordagem tradicional a estudantes de primeiro ano da graduação, no sentido de expor diretamente os resultados de um teorema e buscar uma demonstração complexa deste, procurei possibilitar que os estudantes conjecturassem os resultados do Teorema Fundamental do Cálculo de modo experimental, com a Calculadora gráfica, e em seguida propus, a partir das conjecturas elaboradas experimentalmente pelos coletivos pensantes, uma demonstração mais acessível, com notações e simbologias mais simples, não exacerbadamente complexas.

Mas outros pesquisadores do GPIMEM também têm buscado essa proposta experimental com relação a outros temas do Cálculo Diferencial e Integral⁵⁵: funções, limites, continuidade, derivada, regra da cadeia, etc. Dessa forma, a Colcha de Retalhos constituída por pesquisas do GPIMEM implica uma perspectiva de contribuições diversas e específicas à Informática e Educação Matemática, uma vez que evidencia que as possibilidades múltiplas de investigações e os processos cognitivos estão sendo reorganizados pela constituição mútua de Seres-Humanos-com-Mídias no fazer matemático.

Analogamente, a Colcha de Retalhos constituída pela Informática e Educação Matemática e por outras Tendências em Educação Matemática permitem indicar contribuições à Educação Matemática. Conseqüentemente, contribuições à Educação.

Existem duas invenções humanas que podem ser consideradas mais difíceis que quaisquer outras: a arte do governo e a arte da educação; e as pessoas continuam a discutir inclusive seu significado (KANT, 1996, p. 12).

⁵⁵ Funções (BORBA, 1993; SOUZA, 1996; BENEDETTI, 2003); Derivada, Limite e Continuidade (VILLARREAL, 1999); Aplicações na Física (SCHEFFER, 2001; BONAFINI, 2004). Conceitos abordados em pesquisas em andamento: i) Funções, Limite e Continuidade e suas instâncias com a mídia escrita; ii) Regra da Cadeia; iii) Equações Diferenciais. Algumas dessas pesquisas são caracterizadas no Primeiro Capítulo desta pesquisa

Bibliografia^{*}

ABRAHÃO, A. M.; PALIS G. A Questão da escala e as concepções de professores ao analisarem gráficos de funções $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ obtidos em calculadoras. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2004.

ALVES-MAZZOTTI, A.; GEWANDSZNADJER, F. **O Método nas Ciências Sociais e Naturais**: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

ANTON, H. **Cálculo**: Um novo horizonte. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000. v.1

ARAÚJO, J. Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática e a Educação Matemática. 2002. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2002.

ARAÚJO, J.; BORBA, M.C. *Construindo Pesquisas coletivamente em Educação Matemática*. In BORBA, M.C.; ARAÚJO, J. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. (Tendências em Educação Matemática).

ARCON. **Visual Architecture**. German: Software AG D-5.4. German: 2000. Demo.

BALDINO, R. *Sobre o papel do conceito de limite no primeiro curso de Cálculo*. In **Encontro Paulista de Educação Matemática**, 1996, São Paulo. Anais do Encontro Paulista de Educação Matemática. São Paulo, 1996.

BARBIN, E. *Que concepções epistemológicas da demonstração? Para que aprendizagens?* (I e II). **Revista Educação e Matemática**. n. 27-28. 1993.

BARBOSA, L. M. **Ensino de Algoritmos em Cursos e Computação**. São Paulo: Educ, 2001.

^{*} Referências Bibliográficas e Bibliografia Consultada.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2004.

BARON, E.; BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática**. Origens e Desenvolvimento do Cálculo. 2. ed. Volumes 1 à 5. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BENEDETTI, F. C. **Funções, Software Gráfico e Coletivos Pensantes**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

BENNATON, J. **O que é Cibernética**. 4. ed. São Paulo: Brasiliense, 1986.

BICUDO, I. Peri Apodeixeos/De demonstratione. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

BICUDO, I. Demonstração em Matemática. **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA** – Rio Claro, n. 18, p. 79-90, 2002.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. **Pró-Posições**. v. 4. n.º 1. 1993.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, V. **Filosofia da Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. (Tendências em Educação Matemática).

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Qualitative Research for Education**: an Introduction for Theory and Methods. 3. ed. Boston: Allyn and Bacon, 1998.

BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - BOLEMA. Rio Claro: UNESP, 2001-2005. n. 15 – 24.

BONAFINI, F. **Explorando conexões entre a Matemática e a Física com o uso de calculadoras gráficas e o CBL**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

BORBA, M. C. **Students' understanding of transformations of functions using multi-representational software**. 1993. Tese (PhD em Educação Matemática). Cornell University, Ithaca, 1993.

BORBA, M. C. Computadores, Representações Múltiplas e a construção de idéias matemáticas. **Boletim de Educação Matemática** - BOLEMA. Rio Claro, n. 9, 1994.

BORBA, M. C. **Funções, representações múltiplas e visualização na Educação Matemática**. In: Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 1995.

BORBA, M. C. A Informática trará mudanças na Educação Brasileira? **Zetetiké**, Campinas: v. 4. n. 6, p. 123-134, 1996.

BORBA, M. C.; CONFREY, J. A students construction of transformations of functions in a multiple representational environment. **Educational Studies in Mathematics**, 1996.

BORBA, M. C.; MENEGHETI, R.; HERMINI, H. Modelagem, Calculadora Gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de Ciências Biológicas. **Revista de Educação Matemática** – SBEM. São Paulo: 1997.

BORBA, M. C. GPIMEM e UNESP: pesquisa, extensão e ensino em Informática e Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999a.

BORBA, M. C. Calculadoras Gráficas e Reorganização do Pensamento: a transição de funções para derivadas. In: FRAINGUELRNIT, E.; GOTTLIEB, F. **Calculadoras Gráficas e Educação Matemática**. Rio de Janeiro: Art Bureal, 1999b.

BORBA, M. C. **Calculadoras Gráficas e Educação Matemática**. Rio de Janeiro: Art Bureau, 1999c.

BORBA, M.C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento. In BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999d.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Tendências em Educação Matemática).

BORBA, M. C. Dimensões da Educação Matemática à Distância. In BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo Cortez, 2004.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. **Humans-with-Media and Reorganization of Mathematical Thinking**: Information and Communication Thechnologies, Modeling, Experimentation and Visualization. USA: Springer, 2005. (Mathematics Education Library).

BRANDÃO, C. **A Pergunta a Várias Mãos**. A Experiência de Pesquisas no Trabalho do Educador. São Paulo: Cortez, 2003.

CADOZ, C. **Realidade Virtual**. São Paulo: Ática, 1997.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2000.

CARVALHO, A. M. **A Extremidade da Demonstração**. 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

COHEN, J. J. **Pedagogia dos Monstros**: Os prazeres e os perigos da confusão de fronteiras. Belo Horizonte: Autêntica, 2000.

CONFREY, J. A review of the research on student conceptions in Mathematics, Science and Programming. In: CAZEN, C. **Review of Research in Education**. Washington, DC: American Educational Research Association, 1990.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

DENZIN, N.; LINCOLN, Y. The discipline and practice of qualitative research. **Handbook of qualitative Research**. 2nd ed. London: Sage, 2000.

DOMINGUES, H. A Demonstração ao Longo dos Séculos. **Boletim de Educação Matemática** – BOLEMA, Rio Claro, n. 18. p. 55-67, 2002.

EDUCAÇÃO EM REVISTA. **Dossiê de Pesquisas em Educação Matemática no Brasil**. Belo Horizonte: 2002

ERNEST, P. **The Philosophy of Mathematics Education**. Hampshire: The Falmer, 1991.

ETCHELLS, T. Computer Algebra Systems and students' understanding of the Riemann Integral. In: MONAGHAN, J.; ETCHELLS, T. **Computer Algebra Systems in the classroom**. Leeds, U.K: Center for Studies in Science and Mathematics Educations, 1993.

FETISSOV, A. I. **A demonstração em Geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. (Aprendendo e Ensinando).

FIGUEIREDO, D. G. **Análise I**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

FILHO, I. **Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya**: Quatro Episódios da História da Heurística. 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**. Campinas: 1995.

FRAWLEY, W. **Vygotsky e a Ciência Cognitiva**: linguagem e integração das mentes social e computacional. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1997.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da Técnica, declínio da crítica**: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática. 1995. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1995.

GARNICA, A. V. M. Lakatos e a Filosofia do Provas e Refutações. **Educação e Sociedade**. Campinas: 1996.

GARNICA, A. V. M. As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA**, Rio Claro, n. 18, 2002.

GOLDENBERG, M. **A arte de Pesquisar**: Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 2003.

GUBA, E.; LINCOLN, Y. Postpositivism and the Naturalist Paradigm. In: LINCOLN Y; GUBA, E. **Naturalistic Inquiry**. London: Sage, 1990.

GUBA, E.; LINCOLN, Y. Competing Paradigms in Qualitative Research. **Handbook of qualitative Research**. London: Sage, 1994.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. V. 1 - 2. São Paulo: LTC, 2001.

HANNA, G. Rigorous Proof in Mathematics Education. **Curriculum Series**. Toronto: Ontario, 1983.

HANNA, G. Proof, Explanation and Exploration: an Overview. **Educational Studies in Mathematics**. 2000.

HESSEN J. **Teoria do Conhecimento**. 8. ed. Coimbra: Armenio Amado, 1987.

HODGES, A. **Turing**: um filósofo da natureza. Tradução de Marcos Barbosa de Oliveira. São Paulo: Editora Unesp, 2001.

HOFFMANN, L.; BRADLEY, G.; **Cálculo**: Um curso moderno e suas aplicações. 7. ed. Tradução de Ronaldo Sergio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

HURTZ, M. *Visualizing the Proof of the Mean-Value Theorem for Derivates*. **Mathematics Teachers**. USA: NCTM, 1997.

JAPIASSU, H.; MARCONDES, D. **Dicionário Básico de Filosofia**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar 1996.

JOSEPHSON, J.; JOSEPHSON, S. **Abductive Inference**: Computation, Philosophy, Technology. Cambridge: 1996.

KANT, I. **Education**. Piracicaba: Editora Unimep, 1996.

KERCKHOVE, D. **A Pele da Cultura**: Uma Investigação sobre a nova realidade eletrônica. Lisboa: Relógio D'Água, 1997.

KONDER, L. **O que é Dialética**. 2. ed. São Paulo: Brasiliense, 1981.

LAKATOS, I. **Proofs and Refutations**: the logic of mathematical discovery. Cambridge: 1976.

LÉVI-STRAUSS, C.; **A noção de estrutura em etnologia**. 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1985.

LÉVY, P. **As Tecnologias da Inteligência**: O futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LÉVY, P. **A Máquina Universo**: Criação, Cognição e Cultura Informática. Porto Alegre: Artimed, 1998.

LÉVY, P. **A Inteligência Coletiva**: por uma cultura do ciberespaço. São Paulo: Edições Loyola, 1999.

LIMA, E. L. **Análise Real**. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Aplicada, CNPq, 1989. v.1. (Universitária).

LINCOLN, Y.; GUBA, E. **Naturalistic Inquiry**. London: Sage, 1985.

LINCOLN, Y.; GUBA, E. Paradigmatic Controversies. **Handbook of qualitative Research**. London: Sage, 1996.

LINCOLN, Y.; GUBA, E. Paradigmatic controversies, contradictions, and emerging confluences. **Handbook of qualitative Research**. 2nd ed. London: Sage, 2000.

LOURENÇO, M. L. A Demonstração com Informática Aplicada à Educação. **Boletim de Educação Matemática** - BOLEMA. Rio Claro, N. 18, 2002.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. **A Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MALHEIROS, A. P. S.; **A Produção Matemática dos alunos em um ambiente de Modelagem**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

MARCONDES, D. **Iniciação à História da Filosofia**: dos pré-socráticos a Wittgenstein. 8. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2004.

MARTIN, A. **Calculo 2000**: Matemáticas com Calculadora Gráfica. Barcelona: Divisão Didática Calculadoras Científicas CASIO, 2000.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky**: Aprendizado e desenvolvimento. Um processo sócio-histórico. 4 ed. São Paulo: Scipione, 1997.

PAPERT, S. **The Connected Family**: Bridging the Digital Generation Gap. Atlanta: Longstreet, 1996.

PENTEADO, M. G.; BORBA, M. C. **A Informática em Ação**: formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olho d'Água, 2000.

POLYA, G. How to Solve it? Princeton University Press, 1945.

PONTE, P.; BROCCADO J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Tendências em Educação Matemática).

POWELL, A.; FRANCISCO, J.; MAHER, C. Uma abordagem à Análise de Dados de Vídeo para investigar o desenvolvimento de idéias e raciocínios matemáticos de estudantes. Tradução de Antônio Olímpio Junior. **Boletim de Educação Matemática** - BOLEMA. Rio Claro, n. 21, 2004.

REÑON, L. V.; **La Trama de la Demostración**. Madrid: Alianza Editorial: 1990.

ROUKOUSKI, E., **Demonstrações em Geometria**: uma descrição de processos de construção, utilizados por alunos de licenciatura em matemática, em ambiente informatizado. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2002.

SHEFFER, N. **Sensores Informática e o Corpo**: a Noção de Movimento no Ensino Fundamental. 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

SCUCUGLIA, R. **Calculadoras Gráficas**: Conjeturando um teorema a partir de um estudo investigativo de funções. In: Simpósio de Iniciação Científica, SIC, 2002, Rio Claro. Anais do V Simpósio de Iniciação Científica. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, 2002.

SCUCUGLIA, R. Resenha: Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya. Quatro episódios da história da heurística. Boletim de Educação Matemática - BOLEMA. Rio Claro/SP: , n.23, p.123 - 126, 2005.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho Científico**. 20. ed. São Paulo: Cortez, 1996.

SEVERINO, A. J. **Educação, Sujeito e História**. São Paulo: Olho D'água, 2001.

SILVA, J. J. Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

SILVA, J. J. Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática. **Boletim de Educação Matemática** - BOLEMA. Rio Claro, n. 18, p 68-78, 2002.

SILVER, J. Can Computers Be Used to Teach Proofs? **Mathematics Teachers**. USA: NCTM, 1998.

SIPISER, M. **Introduction to the Theory of Computation**. Boston: PWS, 1997.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica**: a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001.

SOUZA, T. **Calculadoras Gráficas**: uma proposta didático-pedagógica para o tema funções quadráticas. 1996. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1996.

STEFFE, L.; THOMPSON, P.W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. **Research design in mathematics and science education**, Hillsdale, NJ, 2000.

STEWART, J. **Cálculo**. 10. ed. São Paulo: Pioneira, 2001. v.1.

STRATHERN, P. **Turing e o Computador**. Tradução de Maria Luiza Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2000.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Makrom Books, 1995. v.1.

THIKHOMIROV, O. The psychological consequences of the computerization. In: WERSTCH, J. **The concept of activity in soviet psychology**. New York: Sharp, 1981.

TENÓRIO, R. **Computadores de Papel**: Máquinas abstratas para um ensino concreto. São Paulo: Cortez, 2001.

TENÓRIO, R. **Cérebros e Computadores**: A complementariedade analógico-digital na informática e na educação. São Paulo: Escrituras, 1998.

TEXAS INSTRUMENTS. **TI-83 Graphing Calculator Guidebook**. 1996.

TOUVAL, A. Investigating a Definite Integral: from Graphing Calculator to Rigorous Proof. **Mathematics Teachers**. USA: NCTM, 1997.

VALENTE, J. A. **Formação de Professores para o uso da Informática na Escola**. Campinas: Unicam/NIED, 2003.

VILLIERS, M. Papel e Funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. São Paulo: **Educação e Matemática**, 2001.

VILLARREAL, M. **O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas**. 1999. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

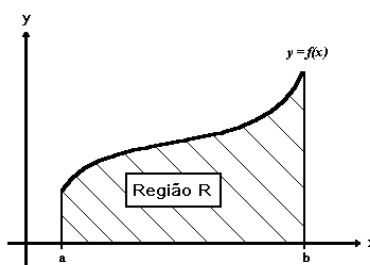
ZULATTO, R. B. A. **Professores de Matemática que utilizam softwares de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas**. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

Anexo I - Atividade de Cálculo Integral com Calculadoras Gráficas TI-83

Ricardo Scucuglia¹

Atividade elaborada por Ricardo Scucuglia e GPIMEM
(Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática)
IGCE – UNESP / Rio Claro. Coordenador: Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba.
www.rc.unesp.br/igce/pgem/gpimem.html

O objetivo das atividades é calcular o valor da área de uma Região $\mathfrak{R}$ limitada pelo eixo- x e pelo gráfico de uma função $y = f(x) \geq 0$, definida em um intervalo $[a; b]$.



Primeira Atividade²

1) Utilize o Programa AREA e indique aproximações para a Região $\mathfrak{R}$ determinada por $y = x^2$ em $[0;3]$. Considere diferentes valores para N . $N = 3, 9, 15, 36, 48, 90$.

Indicações: i) Insira a equação em o e configure o π
ii) Inicie o Programa AREA a partir de .
iii) Utilize inicialmente a Aproximação por Retângulos Médios

2) O que acontece quando se aumenta o valor de N ?

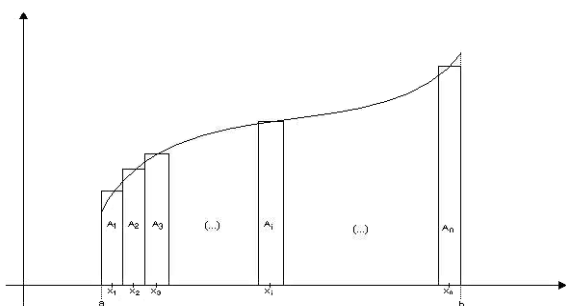
3) Para que valor a Soma está tendendo quando se aumenta o valor de n ?

¹ Mestre em Educação Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - UNESP / Rio Claro.

² Atividade elaborada a partir da idéia inicial de Terence Etchells – The University of Leeds – U. K. – ETHELLES, T. Computer Algebra Systems and students' understanding of the Riemann Integral. In MONAGHAN, J; ETHELLES, T. **Computer Algebra Systems in the classroom**. Leeds: U.K: Center for Studies in Science and Mathematics Educations. University of Leeds, 1993.

Segunda Atividade

O esboço abaixo representa uma aproximação (por “ Retângulos Médios”) de uma Região $\mathcal{R}$ limitada pelo gráfico de $y = f(x) > 0$ e pelo eixo- x no intervalo $[a, b]$. Considera-se que o intervalo $[a, b]$ foi “ dividido em n partes iguais e que $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ são os pontos médios de cada subintervalo.



Indicação 1: Note que o valor da medida da base dos retângulos pode ser expresso por $|b - a|/n$.

Indicação 2: Os valores das medidas das altura dos retângulos são determinados em cada $f(x_i)$.

Indicação 3: Utilize a seguinte notação: $|b - a|/n = \Delta x$.

- 1) Quais os valores de A_1, A_2, A_i e A_n , que representam o valor da área de cada retângulo?
- 2) É coerente propor que o Programa AREA executa a soma $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i$?
- 3) Como determinar a expressão $\sum_{i=1}^n A_i$ em função de x e Δx ?

Terceira Atividade

- 1) É possível determinar o valor exato da área da Região $\mathcal{R}$ determinada por $y = x^2$ em $[0;3]$?

Indicações: i) Utilize o Programa SOMA da Calculadora TI-83 a partir de .

ii) Considere, como na Primeira Atividade, $y = x^2, A=0, B=3$ e $N=15$.

iii) Estabeleça relações entre os Programas AREA e SOMA.

- 2) Explorando o Comando $\int f(x)dx$ da Calculadora TI-83.

Indicações: i) Insira a equação $y = x^2$ e configure o θ decimal.

ii) Utilize o comando $\int f(x)dx$ - opção 7 no menu calc (ψp).

iii) Pressione $\subseteq$ para $x = 0$ e $x = 3$.

iv) Estabeleça relações entre os Programas AREA e SOMA e o Comando $\int f(x)dx$.

Quarta Atividade

Equação	Intervalo	$\int_a^b f(x)dx$
$y = 2x$	[0; 1]	
	[0; 2]	
	[0; 3]	
	[0; x]	
$y = 3x^2$	[0; 1]	
	[0; 2]	
	[0; 3]	
	[0; x]	
$y = 4x^3$	[0; 1]	
	[0; 2]	
	[0; 3]	
	[0; x]	

1) Utilize o Comando $\int f(x)dx$ na calculadora TI-83 e preencha a tabela ao lado, calculando o valor da integral definida a partir das equações e intervalos indicados .

2) Determine uma equação no caso do intervalo $[0, x]$ que represente o valor encontrado para as integrais.

3) Se a equação $y = f(x)$ na primeira coluna da tabela determinar uma equação $y = F(x)$ na terceira coluna, qual a relação entre $f(x)$ e $F(x)$? Demonstre o resultado encontrado.

Quinta Atividade

Equação	Intervalo:	$\int_a^b f(x)dx$
$y = 2x$	[1; 2]	
	[2; 3]	
	[1; 3]	
	[a; b]	
$y = 3x^2$	[1; 2]	
	[2; 3]	
	[1; 3]	
	[a; b]	
$y = 4x^3$	[1; 2]	
	[2; 3]	
	[1; 3]	
	[a; b]	

1) Utilize o Comando $\int f(x)dx$ na Calculadora TI-83 e preencha a tabela ao lado, calculando o valor da integral definida a partir das equações e intervalos indicados .

2) Determine uma equação no caso do intervalo $[a, b]$ que represente o valor encontrado para a área.

3) Seja $y = f(x)$ e suponhamos que exista uma $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Determine o valor de $\int_a^b f(x)dx$. Demonstre o resultado encontrado.

Anexo II - O Teorema Fundamental do Cálculo

De qualquer modo, a filosofia e a matemática são fios que se misturam na textura do pensamento grego e, por extensão, do pensamento ocidental (BICUDO, 1999, p.122)

Introdução

Este Anexo apresenta uma concepção histórica do Teorema Fundamental do Cálculo, evidenciando as abordagens de Newton e Leibniz, e também expõe diversas abordagens atuais do Teorema aqui focado a partir de alguns livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática.

Este texto não se tornou um capítulo da Dissertação, pois os temas aqui abordados não permeiam direta e explicitamente os dados da pesquisaⁱ. No entanto, por ser o principal tema matemático explorado nesta pesquisa, surgiu a possibilidade de se elaborar um Anexo que visa proporcionar ao leitor uma síntese, um compêndio sobre os fundamentos e sobre algumas demonstrações e possibilidades de se abordar dedutivamente o Teorema Fundamental do Cálculo.

ⁱ No Quarto Capítulo, algumas concepções de Leibniz sobre o conceito de Integração estão apenas sintetizadas.

1. Gênese do Teorema Fundamental do Cálculo

Baron e Bos (1985) argumentam que Newton e Leibnitz são os inventores do Cálculo Diferencial e Integral, principalmente por terem desenvolvido novas notações e por terem criado diversas regras. No entanto, a gênese desse pensamento diferencial remete à análise de problemas de quadratura e cubatura, ou seja, problemas relativos a áreas e volumes, já tratados na Grécia Antiga, principalmente por Arquimedes.

Os métodos usados por Arquimedes (século III a.C.) para determinar áreas de regiões limitadas por curvas, volumes de regiões limitadas por superfícies e áreas de superfícies estão presentes em vários de seus tratados. Seus argumentos sempre envolvem cadeias de axiomas, definições e proposições. No sentido geométrico formal, a construção de cada proposição é completa e rigorosa e o uso de séries é freqüente em seus trabalhos relacionados com quadraturas e cubaturas. As demonstrações de Arquimedes são consideradas difíceis devido à notação e linguagem da época. Uma importante técnica utilizada nas demonstrações é o Método da Exaustão, que pode ser entendido como o “antepassado” do conceito de limite.

Torricelli (1608-1647) foi o primeiro matemático a relacionar tangente e quadratura. Embora Torricelli não tenha publicado seu resultado, um de seus discípulos comunicou a descoberta a Gregory (1638-1675) e Barrow (1630-1677). Estes dois matemáticos foram os primeiros a publicarem o Teorema Fundamental.

Gregory (1638-1675), em sua publicação *Geometriae pars universalis* (1668), expôs o primeiro tratado sistemático contendo todas as operações para a determinação de arco, tangente, área e volume que apareciam em um trabalho de cálculo infinitesimal. O tratamento era todo verbal e geométrico e a estrutura da demonstração era fundamentada no método da exaustão, associado ao da redução. Gregory compreendia a relação entre tangente e quadratura. Na proposição VI ele passa diretamente da quadratura de uma curva à construção da tangente de uma outra curva. A obra de Gregory pode ser considerada a primeira publicação, geométrica, do Teorema Fundamental do Cálculo.

Isaac Barrow (1630 -1677) assumiu a posição de professor em Cambridge, em 1663. Embora Barrow não fosse contrário ao uso dos métodos dos indivisíveis, seu livro *Lectiones geometricae* (1670) é estruturado sob a forma geométrica ortodoxa de demonstração. Na segunda parte desse livro, mais especificamente na proposição 11, lição 10, Barrow apresenta o que é concebido hoje como o Teorema Fundamental do Cálculo.

Barrow foi orientador de Isaac Newton (1642 - 1727). Os estudos de Newton sobre o cálculo ficaram abandonados por quase meio século. Isso ocorreu devido às próprias reservas de Newton quanto a fazer publicações e às dificuldades de se publicar complexos trabalhos matemáticos naquela época.

Até pouco tempo, os únicos ensaios pelos quais o cálculo de Newton tornou-se conhecido no mundo foram: *De analysi per equationes numero terminorum infinitas* (1669), *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (1671), *Tractatus de quadratura curvarum* (1693) e *Principia* (1687). Em 1666, Newton conseguiu uma primeira síntese de diversos fragmentos num estudo que ele chamava de “método de fluxões”. No quadro desse método, as noções de movimento desempenham um papel central. Nesse sentido,

Embora, nas pesquisas anteriores, Newton tenha traçado o esboço de uma demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo (nas linhas das demonstrações que foram publicadas por Barrow e Gregory) aparentemente ele se referiu à reversibilidade das operações, de modo que a diferenciação e a integração são essencialmente consideradas mutuamente inversas, isto é, se $z = f(x) = \int y dx$, então

$$\frac{dz}{dx} = f'(x) = y.$$

Reciprocamente, se $y = f'(x) = \frac{dz}{dx}$, então $z = \int y dx = f(x)$
(BARON; BOS, 1985, v. 3, p. 25).

Leibniz (1646 - 1716) foi contemporâneo de Newton e, de certa forma, embora tenha efetuado abordagens diferentes sobre o Cálculo, ambos “disputaram sua invenção”. Leibniz também trabalhou em outros campos da matemática, dentre os quais inclui-se o projeto e a construção de uma calculadora que executava a adição, subtração, multiplicação e divisão.

Os conceitos que fundamentaram a invenção do Cálculo de Leibniz foram publicados em outubro e novembro de 1675 e podem ser indicados da seguinte forma:

- i) O interesse de Leibniz pelo simbolismo e pela notação, vinculado à sua idéia de uma linguagem simbólica;
- ii) O reconhecimento de que somar seqüências e determinar suas diferenças são operações inversas e que, semelhantemente, a determinação de áreas e a de tangentes são operações inversas;
- iii) O tratamento analítico das transformações de quadratura mediante o simbolismo de Cavalieri;
- iv) A criação do símbolo $\int$ e do símbolo d para a operação inversa de $\sum$;
- vi) A exploração de regras para $\int$ e d .

Leibniz iniciou seus estudos a partir das relações entre áreas, expressas analiticamente, mediante o simbolismo introduzido por Cavalieri. Ou seja, ele escreveu “*omn.l*” (a abreviação para *omnes l*, “todos os *l*”) para indicar a área de uma curva cujas ordenadas são *l*.

Posteriormente, explorando as regras operacionais para o símbolo *omn*, Leibniz percebeu que *omn.yz* não é igual a *omn.y* $\times$ *omn.z*. Leibniz subitamente escolheu um novo símbolo que substituiria *omn*. Baron e Bos (1985, v. 3, p. 54) expõem literalmente a forma como Leibniz se refere ao conceito de integral “*Será útil escrever $\int$ para *omn.*, tal que $\int l = omn.l$, ou a soma dos *l*'s*”.

O símbolo $\int$ é o *S* estilizado de calígrafo, que significa *suma* (soma), tal que o símbolo menor é mais conveniente para a concepção da quadratura de Leibniz: a soma dos termos ao invés de “todos os termos” de Cavalieri. Leibniz analogamente considerou $\iint$ para *omn.omn.* e salientou que as diferenças entre os termos são infinitamente pequenas.

Com esse novo simbolismo, Leibniz escreveu relações de quadratura:

- Se $\int \ell$ é dado analiticamente, então também ℓ é dado; portanto, se $\int \ell$ for dado, também ℓ o será; porém se ℓ for dado, $\int \ell$ não será dado.

Em todos os casos $\int x = x^2 / 2$.

- Todos esses teoremas são verdadeiros para séries nas quais as diferenças dos termos impõem aos próprios termos uma razão que é menor do que uma quantidade qualquer determinável $\int x^2 = x^3 / 3$ (BARON; BOS, 1985, v. 3, p. 55).

Leibniz criou regras para $\int$, como por exemplo, $\int a\ell = a\int \ell$, se **a** é uma constante. Leibniz argumentou que $\int (y + x) = \int y + \int x$, formulou também o problema geral das quadraturas e introduziu o símbolo *d* para denotar a diferenciação.

Dado ℓ e a sua relação com *x*, ache $\int \ell$. Isso obtém-se do cálculo contrário, quer dizer, suponha que $\int \ell = ya$. Seja $\ell = ya/d$; então, à medida que *a* $\int$ aumentar, *d* diminuirá as dimensões. Mas $\int$ significa uma soma e *d* uma diferença. Para um *y* dado sempre podemos achar *y/d* ou ℓ , quer dizer, a diferença dos *y*'s (BARON; BOS, 1985, V 3, p. 55).

Observa-se que $\int$ e *d* não são variáveis. São símbolos usados para operações. A partir de então, Leibniz foi capaz de escrever relações como $\int ydy = y^2 / 2$, exatamente como no Cálculo atual. Por exemplo, ele ainda escreveu $\int y$ para indicar a área sob a curva *y(x)*. Posteriormente, chegou a escrever consistentemente $\int ydx$ para essa área, considerando-a como uma soma de retângulos de área $y \times dx$.

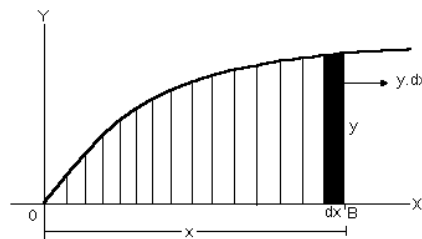


Figura A2.1: A Integração de Leibniz.

Para Leibniz, a integral $\int ydx$ é a soma de retângulos infinitamente pequenos ydx . A $\int ydx$ é a área da curva $y(x)$ e ele não indicou o intervalo de integração, ou seja, as fórmulas não explicitam as constantes de integração como na integração Definida do Cálculo atual. A fronteira esquerda é a origem e $\int ydx$ indica a área entre zero e x .

Não existem regras gerais pelas quais $\int ydx$ possa ser calculada em todos os casos, ou reduzida a integrais conhecidas. Para Leibnitz, a diferencial da área $O\hat{C}B$ é o retângulo ydx à extrema direita: $d\int ydx = ydx$, o que mostra a “relação inversa” entre d e $\int$. Reciprocamente $\int dy = y$: o Teorema Fundamental do Cálculo! Fica então evidenciada a intrínseca articulação entre o conceito de Integração e o Teorema Fundamental do Cálculo.

Um artigo de 1686 expõe os primeiros exemplos que Leibnitz publicou sobre seu Cálculo Diferencial e Integral. Nesse texto, são destacados: i) um exemplo de uma equação diferencial com sua solução por integração; ii) a **“relação inversa” entre d e $\int$** ; iii) uma justificativa para a escolha do símbolo dx .

Newton e Leibniz ocupam uma posição central na história do Cálculo e na história da matemática em geral. Eles podem ser considerados os inventores do Cálculo. Isso significa que eles fizeram algo essencialmente diferente e além de seus predecessores. Outros matemáticos já haviam trabalhado com a matemática infinitesimal e a geometria, portanto, suas pesquisas pertencem à história do cálculo. Entretanto, é também nesse sentido que Newton e Leibniz podem ser considerados seus inventores, pois:

(a) A coerência dos sistemas de Leibniz e Newton foi atingida devido ao reconhecimento do teorema fundamental do cálculo: a relação inversa entre a diferenciação e a integração. Através dele o relacionamento recíproco entre os problemas de quadratura e tangentes, que foram considerados anteriormente como problemas separados.

(b) Newton e Leibnitz inventaram um sistema de notação e de símbolos pelo qual podiam aplicar analiticamente seus novos métodos, quer dizer, pelo uso de fórmulas ao invés de figuras e a sua descrição verbal por argumentos geométricos. Seus métodos foram explicitados na forma de um algoritmo claro e simples, um aparato de regras de cálculo para as fórmulas.

(I) Fermat tinha um método próprio e sistemático para a quadratura das parábolas e hipérbolas de graus superiores. Tinham também o início de um método sistemático para tangentes. Porém, o alcance desses métodos ficou restrito, pois faltou uma notação conveniente.

(II) Torricelli, Gregory e Barrow tinham conhecimento sobre o relacionamento inverso entre a quadratura e as tangentes. Gregory e Barrow publicaram o teorema fundamental, mas eles se mantiveram no tratamento completamente geométrico da quadratura e dos problemas de tangentes e não desenvolveram uma notação específica.

(III) Cavalieri introduziu uma notação específica para as quadraturas. Mas esse método foi restrito demais. Ele não tinha um método para tangentes e conseqüentemente não, foi capaz de reconhecer o teorema fundamental (BARON; BOS, 1985, v. 3, p.69-70).

Newton considerava as variáveis dependentes do tempo, aplicando conceitos de movimento. As variáveis eram denominadas quantidades fluentes e ele compreendeu a integração como a tarefa de achar as quantidades para as fluxões dadas. Ou seja, para Newton, o Teorema Fundamental está contido na definição de integral. A fluxão não foi uma quantidade infinitamente pequena, mas uma velocidade finita. Newton trabalhou com pontos para as fluxões (x) e fez pouco uso de qualquer símbolo para a integração.

Leibniz considerava as variáveis como percorrendo seqüências de valores infinitamente próximos e fez pouco uso de conceitos de movimento. Ele tratava a diferencial como a diferença de dois valores sucessivos na seqüência. Nesse sentido, compreendeu a integração como somatório. Portanto, para Leibniz, a “relação inversa” entre diferenciação e integração não está contida na definição de integral utilizando letras distintas como símbolos ($d, \int$). Isso permitiu vantagens sobre o simbolismo de Newton, pois foi mais fácil enunciar o TF e mais fácil incorporar d e $\int$ em fórmulas complexas.

Um estudo bastante interessante é caracterizar a forma como os cálculos de Newton e Leibniz influenciaram a estruturação do Cálculo Moderno. Enquanto Newton e Leibniz referiam-se a *variáveis*, o Cálculo Moderno funda-se sobre o conceito de *função*. No Cálculo Moderno, a operação de *diferenciação* associa uma *função* a sua *derivada*. Já Leibniz, por exemplo, associava uma diferencial infinitamente pequena a uma variável, e Newton uma velocidade finita a uma variável.

Após Newton e Leibniz, pode-se considerar, de modo sucinto, que Jabob e Johann Bernoulli (1654-1705 e 1667-1748), assim como L'Hopital (1661-1704), desenvolveram técnicas de integração embasadas nos métodos infinitesimais de Leibniz. No entanto, surgiram algumas críticas aos fundamentos do Cálculo, críticas estas elaboradas principalmente por Berkley (1685-1753).

Maclaurin (1698-1746), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph Lagrange (1736-1813) buscaram refutar essas críticas. Nesse sentido, eles contribuíram para o desenvolvimento do conceito de limite, atribuído a seu contemporâneo D'Alambert (1717-1784).

Com o conceito de limite, o Cálculo Moderno superou os problemas sobre a consistência lógica dos conceitos fundamentais de fluxão (razões últimas) e Diferencial (diferença infinitamente pequena). Como qualquer outro progresso matemático, as obras de Newton e Leibniz incentivaram grandes desenvolvimentos posteriores. O cálculo foi estendido e amplamente aplicado, o que permitiu diversas discussões.

O desenvolvimento do conceito de limite permitiu a elaboração do conceito de continuidade. Cauchy (1789-1857) dedicou-se a essa elaboração, o que permitiu o cálculo diferencial e integral direcionar-se à Análise. A prova de Cauchy sobre o Teorema Fundamental é mais clara que as discutidas anteriormente e, além de tratar da relação inversa entre derivada e integral, trata de um modo de calcular Integrais Definidas a partir do teorema do valor médio para integrais.

Se um dos dois limites da integral definida $\int_{x_0}^x f(x)dx$, digamos, a quantidade X , puder variar, a própria integral variará com esta quantidade. E, se substituirmos o limite X , que se tornou variável por x , teremos uma nova função de x , que é chamada uma integral de origem $x = x_0$. Seja $F(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx$ (1) essa nova função (BARON; BOS, 1985, v. 4, p. 52).

Posteriormente, Cauchy enuncia o Teorema do Valor Médio para integrais: Se f é uma função contínua no intervalo $[a; b]$, então existe um valor ξ no

intervalo, tal que $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$.

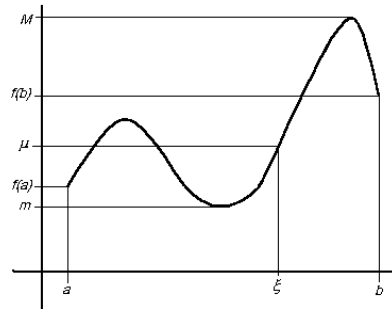


Figura A2.2: Cauchy - Teorema do Valor Médio para Integrais

Nesse sentido, $\int_a^b f(x)dx$ é a área sob a curva. Logo,

$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M$. Portanto, deve existir um valor μ entre m e M , tal

que $f(\xi) = \mu$ ou $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$ (2). Como $a \leq \xi \leq b$, pode-se considerar que $\xi = a + \theta(b-a)$, para algum número θ entre 0 e 1. Esta é a forma como Cauchy

usa o teorema. Ele descobre que $F(x+\alpha) - F(x) = \int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^x f(x)dx = \int_x^{x+\alpha} f(x)dx$.

Isso implica que $F(x+\alpha) - F(x) = \alpha f(x+\theta\alpha)$ (3). Portanto,

Se a função $f(x)$ é finita e contínua, nas vizinhanças de um valor da variável x , a nossa função $F(x)$ será contínua e finita nas vizinhanças desse valor, já que um acréscimo infinitamente pequeno em x ocasionará um acréscimo infinitamente pequeno em $F(x)$. Assim, se a função $f(x)$ é finita e contínua, de $x = 0$ a $x = X$, o mesmo podemos dizer da função $F(x)$. Além disso, se dividirmos ambos os lados de (3) por α e tomarmos os limites, obteremos $F'(x) = f(x)$ (4). Assim, a integral (1), considerada como função de x , tem como derivada a função $f(x)$, que está sob o sinal $\int$ na integral (BARON; BOS, 1985, v. 4, p. 53).

2. Algumas Abordagens Atuais do Teorema Fundamental do Cálculo

Atualmente, o TFC é tratado de diferentes modos em livros didáticos.

Na Análise Matemática, por exemplo, LIMA (1989) primeiramente demonstra que toda função contínua possui uma primitiva. E, em segundo lugar, que se $F' = f$ então $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Figueiredo (1996), em seu livro *Análise I*, estrutura de modo específico e profundo um capítulo inteiro (sétimo) sobre a *Relação entre Derivação e Integração*. O autor desenvolve seis tópicos para discutir essa relação. No primeiro, intitulado *Existência de Primitivas*, Figueiredo (1996) propõe inicialmente dois teoremas e dois corolários e depois mais um teorema e um corolário para discutir a Relação Fundamental do Teorema Fundamental do Cálculo. Seguem os enunciados

Seja $f: [a; b] \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função limitada integrável. Podemos definir uma função $F: [a; b] \rightarrow \mathfrak{R}$, pela expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (1) para todo x em $[a; b]$.

Teorema 7.1. A função $F(x)$ definida em (1) é contínua em $[a; b]$.

Teorema 7.2. Seja $f: [a; b] \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função limitada integrável, e suponhamos que f seja contínua em um ponto $x_0 \in (a; b)$. Então, a função F definida em (1) é derivável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

Corolário 7.1. Se a função f é contínua em todos os pontos de $[a; b]$, então $F'(x) = f(x)$ para todo x em $(a; b)$. (Isto é, a função F definida em (1) é uma primitiva de f).

Corolário 7.2. Se a função $f: [a; b] \rightarrow \mathfrak{R}$ é contínua para todo x em $[a; b]$, então $F'(x) = f(x)$ para todo x em $[a; b]$. (Entende-se que, para todo $x = a$, temos $F'_+(a) = f(a)$, e análogo para $x = b$.)

Teorema 7.3. Seja $f: [a; b] \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função real definida em um intervalo fechado $[a; b]$, a qual é derivável em todos os pontos de $[a; b]$. Então, a função $f': [a; b] \rightarrow \mathfrak{R}$ assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.

Corolário 7.3. Seja $f: [a; b] \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função derivável em $[a; b]$. Então, $f': [a; b] \rightarrow \mathfrak{R}$ não pode ter descontinuidades de primeira espécie (FIGUEIREDO, 1996, p.171-4)

No segundo tópico do sétimo capítulo, intitulado Teorema Fundamental do Cálculo, Figueiredo (1996) releva inicialmente que, se F é uma primitiva de f , então $F + c$ é também uma primitiva. Em seguida, o autor estrutura dois Teoremas para discutir o resultado $F(b) - F(a)$, neste caso, $G(b) - G(a)$.

Teorema 7.4. Se F e G são duas primitivas de uma função $f: [a; b] \rightarrow \mathfrak{R}$, então $F - G$ é uma função constante.

Teorema 7.5. Seja $f: [a; b] \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função (limitada) integrável. Se G for uma primitiva qualquer de f em $[a; b]$, então $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ (FIGUEIREDO, 1996, p.176).

Nos outros quatro tópicos, Figueiredo (1996) discute *operadores de derivação e integração, mudança de variável nas integrais, integração por partes e teoremas do valor médio para integrais*.

Numa abordagem bastante tratada em cursos de Licenciatura em Matemática, no primeiro volume de suas obras sobre Cálculo, Guidorizzi (2001) expõe que

De acordo com a definição de integral, se f for integrável em $[a, b]$, o valor do limitante $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ será sempre o mesmo,

independentemente da escolha dos c_i , e igual a $\int_a^b f(x)dx$. Assim, se, para uma particular escolha dos c_i , tivermos

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L \text{ então teremos } L = \int_a^b f(x)dx.$$

Suponhamos, agora, que f seja integrável em $[a, b]$ e que admita uma primitiva $F(x)$ em $[a, b]$, isto é, $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$. Seja $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Já

vimos que $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]$. Segue, então, do TVM, que,

para uma conveniente escolha de $\bar{c}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$, teremos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(\bar{c}_i) \Delta x_i \text{ ou } F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i \quad (1).$$

Se, para cada partição P de $[a, b]$, os $\bar{c}_i$ forem escolhidos como em (1),

teremos $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i = F(b) - F(a)$ e, portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (\text{GUIDORIZZI, 2001, V. I, p.305}).$$

A notação introduzida nesse contexto é $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. A partir dessas argumentações, Guidorizzi (2001, p. 306) considera provado o primeiro teorema fundamental do cálculo: “Se f for integrável em $[a,b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ”. Somente no segundo volume de suas obras Guidorizzi (2001) discute o segundo Teorema Fundamental. Especificamente, busca-se provar que sendo $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ (com f contínua em I e a um ponto em I), então $F'(x) = f(x)$ para todo x em I .

Teorema (fundamental do cálculo). Seja f definida e contínua no intervalo I e seja $a \in I$. Nestas condições, a função F dada por $F(x) = \int_a^x f(x)dx$, $x \in I$, é uma primitiva de f em I , isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo x em I .

Demonstração

Precisamos provar que, para todo x em I ,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

$$\text{Temos } \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, existe c entre x e $x+h$ tal que $\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c) \cdot h$. Assim, $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$.

Tendo em vista que continuidade de f em I e observando que c tende a x quando h tende a zero resulta $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

(GUIDORIZZI, 2001, v. II, p.19-20)ⁱⁱ.

Anton (2000), assim como Guidorizzi, refere-se ao conceito e notação de partição e utiliza o teorema do valor médio. No entanto, ele apresenta uma abordagem matemática diferente. Este autor inicia uma de suas argumentações definindo uma função Área para introduzir o resultado $F(b) - F(a)$.

ⁱⁱ Destaco o erro tipográfico na segunda linha da demonstração. Onde se diz $h(x)$, deve-se dizer $F(x)$. Na edição de 2002 esse erro não aparece.

Nesse processo inicial, Anton (2000) evidencia primeiramente aspectos visuais e intuitivos. Em seguida, o autor expõe o enunciado referente à primeira parte do TFC: *Se f for contínua em $[a,b]$ e se F for uma antiderivada de f em $[a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$* (ANTON, 2000, p. 417).

Em um segundo momento é que Anton (2000) enuncia e demonstra o teorema do valor médio para integrais. Feita essa demonstração, o autor enuncia o que ele considera a segunda parte do teorema fundamental utilizando em sua demonstração o TVM para integrais.

Se f for contínua em um intervalo I , então f tem uma antiderivada em I . Em particular, se a for um ponto qualquer em I , então a função F definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é uma antiderivada de f em I ; isto é, $F'(x) = f(x)$ para cada x em I , ou em notação alternativa $\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t)dt \right] = f(x)$ (ANTON, 2000 p. 423).

Alguns livros de cálculo buscam enfocar aspectos de física, engenharia, química, economia, biologia, ecologia, etc. Nessas abordagens, enfocam-se aspectos práticos, voltados a discussão de modelos matemáticos. Estas são abordagens concomitantes com perspectiva da matemática experimental. Swokowski (1995) é um autor bastante consultado em cursos de graduação em física. Inicialmente, com relação ao teorema fundamental, o autor argumenta sobre a existência de uma função $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ ⁱⁱⁱ.

Suponhamos f contínua em um intervalo fechado $[a,b]$.

Parte I Se a função G é definida por $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, para todo x em $[a,b]$, então G é uma antiderivada de f em $[a,b]$.

Parte II Se F é qualquer antiderivada de f em $[a,b]$ então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (SWOKOWSKI, 1995, p. 362).

ⁱⁱⁱ f contínua em $[a,b]$, $x \in [a,b]$. $DG = [a,b]$.

A primeira parte é demonstrada propondo-se imediatamente a resolução do limite que representa a derivada de $G(x)$. Utiliza-se o Teorema do Valor Médio.

A segunda parte argumenta que, se G é uma antiderivada específica de f definida na parte um, e F uma antiderivada qualquer, existe uma constante C tal que $G(x) = F(x) + C$ para todo x em $[a, b]$. Pela definição de G , $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$ para todo x em $[a, b]$. Fazendo $x = a$ e considerando que $\int_a^a f(t)dt = 0$, obtém-se $0 = F(a) + C$, ou $C = -F(a)$. Conseqüentemente, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. Como $x \in [a, b]$, tem-se $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Stewart (2001) enfoca disciplinas como Física e Engenharia. Em termos de aspectos históricos o autor comenta os nomes de Barrow, Newton e Leibniz. A abordagem de Stewart propõe a utilização de “plotadores” gráficos (CAS e calculadoras gráficas) em determinados momentos, evidenciando explicitamente a abordagem experimental. Especificamente, sobre a demonstração do TFC, este autor inicia uma abordagem visual e intuitiva para explorar na primeira parte a relação inversa entre derivada e integral. O autor não menciona a demonstração o TVM para integrais nesse contexto. Para isso ele utiliza o Teorema do Valor Extremo e o Teorema do Confronto.

Hoffmann e Bradley (2003) enfocam vertentes da biologia, da ecologia, da economia e da física. O autor propõe a utilização de calculadoras gráficas TI em diversos momentos. Sua abordagem também evidencia a abordagem experimental sobre o TFC e evidencia aspectos intuitivos.

Demonstração do teorema Fundamental do Cálculo para um Caso Particular

Vamos encarar essa seção como uma demonstração do teorema fundamental do cálculo para o caso em que $y = f(x) \geq 0$. Nesse caso, a

integral definida $\int_a^b f(x)dx$ representa a área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a; b]$. Para um valor de x qualquer entre a e b , seja $A(x)$ a área sob a curva $f(x)$ no intervalo $[a; x]$. Então, o quociente-diferença de $A(x)$ é $\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$ onde, por definição, a expressão $A(x+h) - A(x)$ no

numerador é a área sob a curva $y = f(x)$ entre x e $x + h$.

Para pequenos valores de h , essa área é aproximadamente igual à área de um retângulo de altura $f(x)$ e largura h , como mostra a Fig. 6.7. Assim,

$$A(x+h) - A(x) \cong f(x) \cdot h \text{ ou } \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \cong f(x).$$

Quando h tende a zero, o erro envolvido na aproximação tende a zero e, conseqüentemente, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$.

Acontece que de acordo com a definição de derivada, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = A'(x)$.

Portanto $A'(x) = f(x)$ Ou seja, $A(x)$ é a antiderivada de $f(x)$.

Suponha que $F(x)$ seja outra antiderivada de $f(x)$. Nesse caso, de acordo com a propriedade fundamental das antiderivadas, temos: $A(x) = F(x) + C$. Onde C é uma constante e x pode ter qualquer valor no intervalo $a \leq x \leq b$. Como $A(x)$ é a área sob a curva $y = f(x)$ entre a e x , $A(a)$, a área entre a e a , é 0, logo, $A(a) = 0 = F(a) + C$

e $C = -F(a)$. A área sob a curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ é $A(b)$, que satisfaz a relação $A(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$.

Finalmente, como a área sob a curva $y = f(x)$ na região $a \leq x \leq b$ também é dada pela integral definida $\int_a^b f(x)dx$, temos

$\int_a^b f(x)dx = A(b) = F(b) - F(a)$ como estabelece o teorema fundamental do cálculo (HOFFMANN; BRADLEY, 2003, p. 320).

Fica, portanto, evidenciado que, atualmente, embora sejam explorados tanto a Relação Fundamental (a primeira parte) como o resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, diversos autores, de distintas áreas da exatas (Análise Matemática, Matemática, Física, Engenharias, Biologia, Ecologia, etc.) estruturam e demonstram o Teorema Fundamental do Cálculo de diferentes formas.

Anexo III - Paradigmas de Pesquisa Qualitativa

Introdução

Este texto era inerente ao corpo do Capítulo sobre Metodologia Qualitativa e tornou-se um anexo, pois não foi estabelecida uma articulação direta entre os Paradigmas de Pesquisa Qualitativa e a pesquisa bem como não foram discutidos detalhadamente os termos e concepções que caracterizam tais paradigmas. Ao mesmo tempo é um texto relevante, pois sintetiza a idéia de um “compendio” sobre o tema e evidencia concepções convergentes e ressonantes entre os Paradigmas.

Goldenberg (2003, p. 17) argumenta que, na perspectiva positivista, a pesquisa é uma atividade neutra e objetiva, que busca descobrir regularidades e leis, em que o pesquisador não pode fazer julgamentos nem permitir que seus preconceitos e crenças a contaminem. No entanto, ao se pressupor o **pesquisador como o principal instrumento de investigação**, emergem modelos não ressonantes aos métodos positivistas. Modelos que divergem do pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências e que recusam legitimar seu conhecimento por processos quantificáveis. Nessa perspectiva é que surgem os paradigmas da pesquisa qualitativa.

Guba e Lincoln (1990) propõem momentos históricos referentes aos paradigmas da pesquisa qualitativa caracterizando a Era Positivista e a Era Pós-Positivista. A Era Positivista é profundamente caracterizada e criticada pelos autores. Nesse momento, são evidenciados e refutados aspectos como objetividade, teoria hipotético-dedutiva, linguagem exata e formal e a possibilidade de separação entre fatos e significados.

Relevando-se a Era Pós-Positivistaⁱⁱⁱ, caracterizada pelos autores sob um Paradigma denominado *Naturalístico*, argumenta-se sobre a possibilidade de *várias verdades* (verdades metafísicas - provisórias) e, conseqüentemente, de *realidades múltiplas*, aspectos estes ressonantes com vertentes da subjetividade.

Guba e Lincoln (1990) expõem pressupostos essenciais às Eras Positivista e Pós-Positivista sob aspectos da **relação pesquisador/pesquisado** e da **possibilidade de generalização**. As caracterizações elaboradas pelos autores evidenciam pressupostos fundamentais que contrapõem o Paradigma Naturalístico e o Paradigma Positivista.

Quadro 1 – Era Positivista e Era Pós-Positivista - Guba e Lincoln (1990)		
	Era Positivista Paradigma Positivista	Era Pós-Positivista Paradigma Naturalista
<i>A Natureza da Realidade (Ontologia)</i>	Realidade única e fragmentada	Realidades Múltiplas e Holísticas
<i>Relação Pesquisador/Pesquisado (Epistemologia)</i>	Independência , Dualismo	Interação, Inseparáveis
<i>Possibilidade de Generalização</i>	As generalizações ocorrem mediante o estabelecimento da verdade. Aspectos Dedutivos	As generalizações pressupõem “hipóteses de trabalho” e são intrínsecas a casos individuais. Aspectos Intuitivos

Alves-Mazzotti (1998) comenta que o Paradigma Naturalístico caracterizado por Guba e Lincoln (1990) estruturou os modelos qualitativos nas Ciências Sociais durante a década de oitenta do século XX. Posteriormente, na Pesquisa Qualitativa, emergiram os Paradigmas do Construtivismo Social (“extensão” do Paradigma Naturalístico), da Teoria Crítica e do Pós-Positivismo. Argumenta-se, portanto, que a Era Pós-Positivista caracterizada por Guba e Lincoln (1990) estruturou-se inicialmente sob o Paradigma Naturalístico e, posteriormente, sob o Construtivismo Social, Teoria-Crítica e Pós-Positivismo.

ⁱⁱⁱ Inicialmente o termo Pós-Positivista é visto como um período científico, uma Era. Posteriormente tanto Guba e Lincoln como Alves-Mazzotti consideram esse termo de forma um pouco distinta. De certa forma, esses autores contextualizam que “dentro” da Era Pós-Positivista existem diferentes tendências. E uma dentre essas tendências é o Pós-Positivismo.

Os Paradigmas Qualitativos discutidos por Alves-Mazzotti (1999) são discutidos com base em seus pressupostos de caráter Ontológico, Epistemológico e Metodológico. Sucintamente, pode-se considerar que o caráter ontológico trata concepções sobre a realidade. O caráter epistemológico discute concepções sobre o conhecimento. E o metodológico sobre as possibilidades de argumentação e interpretação.

Quadro 2 – Pressupostos Básicos dos Paradigmas Qualitativos - Alves-Mazzotti (1999)			
	Pós-Positivismo	Teoria Crítica	Construtivismo
<i>Ontologia</i>	<i>Crítico-Realista</i> Existe uma realidade externa ao sujeito (regida por leis naturais), mas que nunca pode ser aprendida perante as limitações sensoriais humanas.	<i>Crítico-Realista</i> Pressupõe-se a existência de uma “consciência verdadeira” que implica uma realidade objetiva que deve ser desvelada.	<i>Relativista</i> Realidades existem sob forma de múltiplas construções mentais, locais e específicas.
<i>Epistemologia</i>	<i>Objetivista-Modificada</i> Mantém-se a objetividade do positivismo, mas admite-se que o pesquisador pode apenas se aproximar desta.	<i>Subjetivista</i> Os valores do pesquisador estão presentes não apenas na escolha do problema, mas em todo processo de investigação.	<i>Subjetivista</i> Como concebe várias realidades, a subjetividade é a forma de fazer vir à luz as construções mantidas pelos indivíduos.
<i>Metodologia</i>	<i>Experimental/Manipulativa</i> Forma elaborada de triangulação que recorre a várias fontes de dados usando mais métodos qualitativos.	<i>Dialógica</i> Busca-se aumentar o nível de consciência dos sujeitos enfocando-se transformações sociais.	<i>Hermenêutico-Dialética</i> As construções individuais são refinadas através da hermenêutica e confrontadas dialeticamente.

Analogamente, Lincoln e Guba (1996) expõem as seguintes concepções, tratando inclusive o paradigma positivista.

Quadro 3 - Pressupostos Básicos dos Paradigmas de Pesquisa – Lincoln & Guba (1996)				
Item	Positivismo	Pós-positivismo	Teoria Crítica	Construtivismo
<i>Ontologia</i>	<i>Realismo</i> Realidade compreensível.	<i>Realismo Crítico</i> Realidade “real” mas apenas imperfeitamente e probabilisticamente compreensível.	<i>Realismo Histórico</i> Formado por valores sociais, políticos, culturais, econômicos, éticos e de gênero.	<i>Relativismo</i> Realidades locais, construídas e específicas .
<i>Epistemologia</i>	<i>Dualista-Objetivista</i> Descobertas verdadeiras.	<i>Dualismo Modificado-Objetivista</i> Tradição crítica/comunidade; Descobertas Verdadeiras.	<i>Negociável-Subjetivista</i> Descobertas; Valor mediado.	<i>Negociável-Subjetivista</i> Descobertas.
<i>Metodologia</i>	<i>Experiencial</i> Verificação de hipóteses; Métodos quantitativos.	<i>Experimental-Manipulativa</i> Multiplicidade crítica; Pode incluir métodos qualitativos.	<i>Dialógica-Dialética</i>	<i>Hermenêutica - Dialética</i>

Destaca-se, portanto, que determinados Paradigmas podem ser ressonantes ou não, dependendo da concepção que se busca tratar. Por exemplo, em termos de concepções epistemológicas, o positivismo e o pós-positivismo diferem da teoria crítica e do construtivismo. Enquanto os primeiros relevam um caráter de objetividade os outros dois evidenciam a subjetividade do conhecimento. Ou ainda, em termos ontológicos, só o construtivismo é de caráter relativista embora, assim como a teoria crítica, argumente sob métodos dialéticos.