

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

André Luís Prando Livorati

**O BILHAR STADIUM DEPENDENTE DO TEMPO: ACELERAÇÃO DE FERMI E O
FENÔMENO DE RETARDO DE VELOCIDADE**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, área de Física Aplicada.

Orientador: Edson Denis Leonel

Rio Claro - SP
2011

530.15 Livorati, André Luís Prando
L788b O bilhar stadium dependente do tempo: aceleração de
Fermi e o fenômeno de retardo de velocidade / André Luís
Prando Livorati. - Rio Claro : [s.n.], 2011
64 f. : il., figs., gráfs., forms.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Edson Denis Lenoel

1. Física matemática. 2. Sistemas dinâmicos caóticos. 3.
Bilhares. 4. Caos. I. Título.

André Luís Prando Livorati

**O BILHAR STADIUM DEPENDENTE DO TEMPO: ACELERAÇÃO DE FERMI E O
FENÔMENO DE RETARDO DE VELOCIDADE**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, área de Física Aplicada.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Prof. Dr. Varderlei Marcos do Nascimento

Rio Claro, 16 de fevereiro de 2011

Resultado: APROVADO

*A diversidade dos fenômenos da Natureza é tão vasta e os tesouros escondidos nos Céus são
tão ricos, precisamente para que a mente humana nunca tenha falta de alimento.*

Johannes Kepler

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, minha mãe Miriam e minha irmã Ana Carolina, por sempre acreditar em mim e me darem forças para prosseguir nos momentos difíceis.

Ao meu amigo e orientador Prof. Edson Denis Leonel, pelo constante entusiasmo, dicas e lições preciosas. Por estar sempre disposto a discutir as dúvidas e possíveis idéias, os meus mais sinceros agradecimentos e admiração.

Agradeço também a minha namorada Mirian, que sempre me alegra nos momentos tristes, me dá forças e sempre me entusiasma a conseguir os objetivos.

Aos meus amigos de república e de turma, companheiros de laboratório e demais colegas, pelos momentos de descontração e alegria.

Ao Prof. Alexander Loskutov, pelas dicas preciosas sobre bilhares e pelas discussões em grupo.

A FAPESP pelo apoio e suporte financeiro.

Ao DEMAC (Departamento de Estatística Matemática Aplicada e Computação) pelo acesso e uso dos laboratórios e computadores.

E principalmente a Deus que tornou tudo isso possível.

Resumo

Neste trabalho investigamos a dinâmica de uma partícula confinada dentro de um bilhar *stadium-like*. Em uma primeira aproximação, consideramos as fronteiras do bilhar estáticas, encontramos um mapeamento bidimensional não linear que preserva a área no espaço de fases e que descreve a dinâmica de uma partícula clássica sofrendo reflexões especulares com a fronteira. Variando os parâmetros geométricos da fronteira, pudemos observar uma transição de caos global para caos misto, quando os pontos fixos perdem sua estabilidade. Tal transição é caracterizada pelo mecanismo desfocalizador do bilhar, pela análise estatística do desvio do ângulo médio $\bar{\psi}$ e pela invariância de escala do expoente de Lyapunov máximo. Baseado nesses itens, descrevemos o bilhar através de um mapeamento genérico que apresenta transição semelhante. Introduzimos uma perturbação temporal na fronteira e consideremos a dinâmica de duas maneiras distintas; (i) onde a partícula pode sofrer colisões sucessivas com a mesma componente e (ii) colisões indiretas. Através da linearização do mapeamento obtido na versão estática, encontramos um valor crítico de velocidade de ressonância, onde velocidades iniciais com valores menores do que esse valor crítico, sofrem um decréscimo em sua velocidade devido ao fenômeno de *stickiness*. Contudo, se a velocidade inicial é maior do que a velocidade crítica de ressonância, temos um comportamento típico de aceleração de Fermi, onde conseguimos descrever esse crescimento ilimitado de energia da partícula através de hipóteses de escala. Quando a dissipação é introduzida via colisões inelásticas da partícula com a fronteira móvel, observamos uma transição de fase de decréscimo de velocidade para crescimento ilimitado de energia quando o coeficiente de restituição das componentes normal e tangencial da velocidade tendem a unidade, recuperando assim os choques elásticos.

Palavras Chaves: Aceleração de Fermi, Caos , Retardo de Velocidade.

Abstract

In this work we consider the dynamics of a point particle confined inside a stadium-like billiard. In a first approximation, and considering static boundaries, we construct a two-dimensional nonlinear area preserving mapping. Ranging the control parameters, we observed a transition from partial chaos to global, when the fixed points loose their stability. This transition is characterized by the defocusing mechanism. A statistical analysis of the deviation of the average angle $\overline{\psi}$, and the scaling invariance of the maximal Lyapunov exponent, give support to this transition. We also introduced a perturbation to the boundaries. Linearizing the unperturbed mapping, we found a critical value for the resonant velocity. For initial velocities smaller than the critical one, we observe a decreasing of the particle's velocity caused by a stickiness phenomenon. However, when initial velocity is larger than the resonant one, we observe a typical behavior of Fermi acceleration, where we describe this unlimited energy growth by using scaling arguments. When dissipation is introduced via inelastic collisions, we observe a phase transition from limited to unlimited energy growth in the regime of null dissipation.

Key Words: Fermi acceleration, Chaos, Velocity decreasing.

SUMÁRIO

1	Introdução	8
2	O Biliar Stadium Estático	12
2.1	Resumo	12
2.2	O modelo e o mapa	12
2.2.1	Descrição analítica de propriedades caóticas	16
2.2.2	Linearização do Mapeamento	18
2.2.3	Mecanismo Desfocalizador	19
2.3	Resultados Numéricos	20
2.3.1	Expoentes de Lyapunov	20
2.3.2	Desvio Quadrático de ψ	24
2.4	Generalização do Mapeamento	26
3	O Biliar Stadium Dependente do Tempo	28
3.1	Resumo	28
3.2	O modelo e o mapeamento	28
3.3	Velocidade de Ressonância	35
3.4	Aceleração de Fermi	39
3.4.1	Discussão de escala	43
4	O Biliar Stadium Dependente do Tempo Dissipativo	45
4.1	Resumo	45
4.2	Mapeamento Dissipativo	45
4.3	Supressão de Aceleração de Fermi	48
4.3.1	Curvas de $\bar{V}$	49
4.3.2	Discussão de Escala	53
5	Conclusões	57

Capítulo 1

Introdução

Ao longo do desenvolvimento da ciência, o estudo de sistemas dinâmicos sempre foi uma área muito atraente, pois permite modelar matematicamente sistemas naturais. Através do desenvolvimento de equações diferenciais, foi possível fazer previsões sobre o comportamento dos sistemas. O tema tem sido continuamente desenvolvido, tanto do ponto de vista de métodos analíticos, como também expandido nas mais diversas áreas do conhecimento, principalmente em sistemas físicos. A descrição completa da evolução temporal de um sistema físico se dá, em geral, pela resolução de equações diferenciais, geralmente não lineares, e pela análise qualitativa e quantitativa de suas soluções em função de condições iniciais e de parâmetros externos.

Os sistemas dinâmicos podem ser subdivididos em sistemas de tempo contínuo e sistemas de tempo discreto. Os sistemas de tempo contínuo são representados por equações diferenciais ordinárias ou parciais, juntamente com condições iniciais e parâmetros de controle externos que permitem descrever o comportamento dinâmico desse sistema ao longo do tempo. No caso de sistemas em tempo discreto, normalmente temos uma modelagem através de mapas, nos quais existe uma lei de recorrência relacionando os valores das variáveis dinâmicas no instante posterior com seus valores em instantes anteriores [1].

Podemos também subdividir os sistemas dinâmicos em determinísticos (nos quais uma vez conhecidas as variáveis de estado em um dado instante, seu comportamento em qualquer instante posterior é determinado univocamente) e sistemas não determinísticos (ou estocásticos), cuja modelagem, de um modo geral, envolve teorias probabilísticas. A abordagem via teoria dos sistemas dinâmicos discretos e do estudo da evolução temporal dos sistemas físicos pressupõe que esta evolução pode ser descrita por um mapeamento discreto envolvendo um conjunto de variáveis relevantes, denominado estado, que caracterizem completamente o sistema. Dá-se o nome de espaço de fases ao conjunto de todos os estados acessíveis. Ao evoluir, a partir de um estado inicial, o sistema passa por pontos do espaço de fases; ao conjunto assim percorrido denomina-se órbita. Assim, o espaço de fases é também o conjunto de todas as órbitas possíveis [2].

A estrutura do espaço de fases caracteriza portanto os comportamentos dinâmicos possíveis do sistema. De uma maneira geral esta estrutura pode se apresentar de várias maneiras, em

graus distintos de organização e contendo hierarquias de arranjos. Além do mais, alguns destes sistemas podem apresentar comportamentos descritos por leis de potência, os quais podem ser uma clara evidência de que estes sistemas podem ser enquadrados em classes de universalidade.

Podemos ainda, dentro da teoria de sistemas dinâmicos, caracterizar de acordo com a dimensão da trajetória bilhares unidimensionais e bi-dimensionais.

Na história contemporânea, a noção de bilhar é conhecida desde que Birkoff [3] propôs o problema do movimento de uma esfera em várias direções colidindo com fronteiras. Uma análise mais completa sobre as características deste tipo de dinâmica foi feita por Krylov [4]. Entretanto, graças aos trabalhos de Sinai [5, 6], que desenvolveu teorias matemáticas sobre propriedades dos bilhares com fronteiras dispersivas, uma nova época sobre análises de propriedades de bilhares começou. Essas idéias levaram a um crescimento do tipo “avalanche” de trabalhos físicos e matemáticos sobre propriedades e características de bilhares. Um avanço considerável foi encontrar a solução, considerando a teoria ergódica de Boltzmann para a dinâmica de gases [7].

Basicamente os bilhares são sistemas físicos cuja dinâmica consiste de um domínio Q , com fronteira suave ∂Q , em que uma partícula puntual (bola de bilhar) se move livremente em trajetórias retilíneas com velocidade constante. Ao colidir com a fronteira a partícula é refletida elasticamente, de modo que sua componente normal muda de sinal, enquanto que sua componente tangencial é preservada. Essa condição nos leva a consequência de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão [8]. Se o domínio ∂Q não depende do tempo, então o sistema não troca energia e/ou velocidade com a partícula e é dito um sistema de fronteira fixa. Por outro lado, se $\partial Q = \partial Q(t)$, dizemos então que o sistema apresenta dependência temporal.

Dependendo da geometria da fronteira, podemos dividir os bilhares em dispersivos, convergentes e neutros. Bilhares dispersivos, algumas vezes conhecidos por bilhares de Sinai [5, 6], consistem de componentes dispersivas e neutras. Um dos exemplos mais populares desse tipo de bilhar é o Gás de Lorentz [7, 8, 9]. A análise desse modelo resultou na prova de que a dinâmica puramente determinística pode ser ergódica com propriedades mistas e similar ao movimento Browniano [10]. A fronteira de bilhares convergentes, consiste somente de componentes convergentes ou de componentes convergentes conectadas por retas. Exemplos típicos desse tipo de bilhares pertencem a Bunimovich [11, 12]. Um desses exemplos é o bilhar stadium, que é constituído de dois arcos conectados por segmentos de reta paralelas. Para esse bilhar já foi provado que para uma combinação de parâmetros geométricos, ele possui propriedades caóticas e mistas [8].

O mecanismo gerador de caos em bilhares convergentes e dispersivos é diferente. Para bilhares divergentes, a própria geometria da fronteira “diverge” a trajetória da partícula, mas no caso convergente, as trajetórias tendem a convergir para um ponto focal após interagirem com a fronteira convergente. Nesses bilhares, o caos aparece, quando o tempo de divergência, ou seja, o tempo gasto pela partícula, depois que ela passou pelo ponto focal até colidir novamente com a fronteira convergente, for maior que o tempo de convergência, que é o tempo gasto entre a

colisão com a componente convergente até o ponto focal.

De uma maneira geral, a dinâmica de uma partícula de bilhar, pode ser descrita qualitativamente de três maneiras distintas: (i) completamente integrável, ou seja, regular; (ii) ergódica, e (iii) mista. Um exemplo típico do caso (i) é o bilhar circular [13], cuja integrabilidade vem da conservação do momento angular. O bilhar de Sinai e o bilhar stadium de Bunimovich, são exemplos do caso (ii); para esses sistemas a evolução temporal de uma única condição inicial, para combinações apropriadas de parâmetros de controle, é condição suficiente para preencher o espaço de fases ergodicamente [7, 8, 10, 12]. Finalmente, para o caso (iii), existe um número significativo de sistemas que apresentam uma característica mista para o espaço de fases, cujos parâmetros de controle possuem diferentes significados físicos. Para esses sistemas observamos um conjunto de ilhas do tipo *Komolgorov-Arnold-Moser* (KAM), geralmente envoltas por uma mar de caos e curvas invariantes do tipo *spanning*, também chamadas de toros invariantes (invariant tori), assim separando diferentes regiões do espaço de fases [14, 15, 16]. Atualmente, o estudo de bilhares se relata em vários campos, como mecânica estatística não linear e sistemas hiperbólicos, e em diversas áreas experimentais [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23].

Frequentemente, a dinâmica de um sistema depende dos seus parâmetros de controle. Particularmente, esses parâmetros controlam a intensidade da não-linearidade dos sistemas. Quando esse parâmetros variam, quantidades médias de observáveis mensuráveis podem experimentar mudanças súbitas de comportamento, caracterizando portanto transições de fases [24]. Muitas dessas transições, podem ser descritas utilizando-se de argumentos de escala, onde expoentes críticos desempenham um importante papel na descrição completa de propriedades médias. Em particular, uma transição de integrabilidade para não integrabilidade pode ser estudada [25, 26, 27], e portanto classes de universalidade podem ser obtidas [28]. Esse formalismo de escala se mostrou útil e válido em diferentes tipos de transições de fases em bilhares, considerando casos com fronteiras estáticas e dependentes do tempo [29, 30, 31], conservativos e dissipativos [32, 33, 34].

Neste trabalho, investigamos o problema de bilhar clássico nas seguintes versões: (i) estática, (ii) dependente do tempo, e (iii) dependente do tempo com dissipação. Nas três versões do nosso trabalho, estudaremos o bilhar *stadium-like*, que basicamente consiste em duas retas paralelas conectadas por regiões de curvatura negativa. Nosso principal objetivo é compreender e descrever algumas propriedades dinâmicas desse sistema, dentre elas, como o fenômeno de stickiness e a introdução de dissipação, são mecanismos para suprimir o fenômeno de crescimento ilimitado de energia. É importante compreender que a dinâmica do bilhar é controlada pelos três parâmetros geométricos, a , b e l .

No Capítulo 2 estudamos o caso onde a fronteira de curvatura negativa é descrita por um segmento de parábola. Essa aproximação evita que a partícula sofra colisões sucessivas com a mesma componente. Encontramos um mapeamento bi-dimensional não-linear que preserva a área no espaço de fases, nas variáveis posição dentro do billhar (ξ) e ângulo entre a vertical no ponto de colisão e a trajetória (ψ). Pontos fixos foram encontrados e caracterizados. Além disso,

encontramos também uma transição, dependendo dos parâmetros de controle geométricos, de caos global, no sentido de que nenhuma órbita regular é vista no espaço de fases, para misto, onde no espaço de fases encontramos ilhas de estabilidade e mares de caos. Essa transição se reflete também pelo decaimento abrupto do expoente de Lyapunov médio em função dos parâmetros de controle, assim como do desvio quadrático de $\overline{\psi}$. Ainda para esta transição obtemos um *colapso* de curvas de expoente de Lyapunov médio em função dos parâmetros de controle, além de, ao reescrevermos as variáveis (ξ, ψ) , encontramos um novo mapeamento semelhante ao mapa padrão *standard*, mas como uma perturbação do tipo função tangente.

No Capítulo 3 analisamos o caso onde a fronteira côncava é descrita por um segmento de circunferência e também é dependente do tempo de forma periódica. A dinâmica se dá agora de duas maneiras distintas. A primeira delas, é quando a partícula sofre colisões subsequentes com a mesma componente do bilhar, e a outra é quando ela sofre uma colisão com uma das componentes e a próxima colisão se dá com a outra fronteira. Para esses dois casos, obtemos um mapeamento quadridimensional, onde as principais variáveis dinâmicas são, (α, ϕ) , que são os ângulos polares, que nos fornecem a condição inicial da dinâmica, além da velocidade e do tempo. Ao analisarmos a evolução da dinâmica ao longo das colisões, observamos o fenômeno de aceleração de Fermi, que podemos descrever basicamente como crescimento ilimitado de energia, além do fenômeno de desaceleração de Fermi. Essa transição de aceleração, para desaceleração de Fermi, depende de uma velocidade inicial crítica, que por sua vez, depende da combinação dos parâmetros geométricos de controle. Além disso, caracterizamos o comportamento da velocidade média para o caso em que ocorre aceleração de Fermi usando formalismo de escala.

O Capítulo 4 está dedicado a estudar a dinâmica do bilhar na presença de dissipação. Existem várias maneiras de se introduzir dissipação no modelo, particularmente escolhemos introduzir colisões inelásticas da partícula com a fronteira. Desse modo, assumimos que a partícula experimenta uma perda fracional de energia após colidir com a fronteira dependente do tempo. Introduziremos dois coeficientes distintos para a dissipação. Um para a componente normal $\gamma \in [0, 1]$ e o outro para a componente tangencial $\eta \in [0, 1]$. Quando $\gamma = \eta = 1$, a colisão é completamente elástica e conseguimos recuperar todos os resultados do modelo conservativo estudado no Capítulo 3. Por outro lado, se $\gamma = \eta = 0$, a colisão é totalmente inelástica, e uma única colisão é o suficiente para encerrar toda a dinâmica da partícula. Analisando a evolução da dinâmica do sistema ao longo das colisões, podemos ver que ela se comporta diferente de outros modelos nos quais observamos aceleração de Fermi em sua versão conservativa. Observamos que a velocidade média, tem um regime constante nas primeiras colisões e depois sofre uma mudança abrupta de comportamento, decaindo rapidamente regida por uma lei de potência com expoente -1 , e depois tende a se estabilizar novamente num platô constante.

Finalmente, algumas considerações finais, conclusões e perspectivas futuras são mostradas no Capítulo 5.

Capítulo 2

O Bilhar Stadium Estático

2.1 Resumo

Neste Capítulo, descrevemos todos os detalhes necessários para a construção do mapa que descreve a dinâmica do modelo. Após obtermos o mapa, mostramos que dependendo dos parâmetros de controle geométricos, ocorre uma transição, de caos global, no sentido de que nenhuma ilha de estabilidade ou ponto fixo é encontrado visualmente, para caos misto, onde no espaço de fases encontramos ilhas de estabilidade e mares de caos. Essa transição foi caracterizada pelo desvio quadrático médio do ângulo ψ e pela mudança abrupta de comportamento do expoente de Lyapunov médio em função dos parâmetros de controle, a qual é descrita via formalismo de escala. Também é mostrado que ao reescrever de maneira correta as variáveis dinâmicas do sistema, encontramos um novo mapeamento que se assemelha muito com o mapa *standard*, mas com uma perturbação do tipo função tangente.

2.2 O modelo e o mapa

O modelo consiste basicamente em considerar o movimento de uma partícula puntual dentro de uma região fechada Q , que colide elasticamente com fronteiras de curvatura negativa ∂Q . Os parâmetros de controle geométricos a , b e l estão ilustrados na Fig.2.1. Para essa primeira aproximação, consideraremos a curvatura da fronteira como segmentos de parábola, como mostra a Fig.2.1(b), onde é necessário que $a \gg b$. Tal aproximação, evita que a partícula sofra colisões subsequentes com a mesma componente [35].

Para descrever a dinâmica da partícula escolhemos as variáveis ψ e x , onde ψ indica o ângulo que a trajetória da partícula faz com o eixo das ordenadas e x indica a posição no eixo das abscissas (ver Fig.2.2). Vale lembrar que a variável x está modulada em a . Utilizamos o método *unfolding*, conhecido também como método do desdobramento ou espelhamento para obter as variáveis dinâmicas principais e auxiliares [8]. O método consiste basicamente em continuar a trajetória da partícula em um bilhar secundário anexado ao bilhar original. Assim

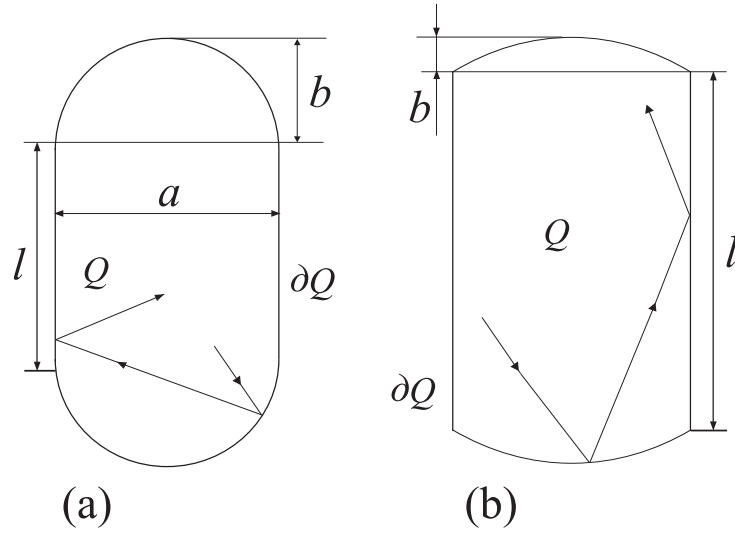


Figura 2.1: Esquema ilustrativo das componentes do bilhar. Em (a) o bilhar stadium original proposto por Bunimovich, e em (b) um bilhar stadium-like, com fronteiras parabólicas.

como mostra a Fig.(2.2), podemos ver que na primeira colisão com o segmento de reta, se a partícula conseguisse passar direto pela fronteira, ela atingiria o ponto da fronteira parabólica simétrico em relação ao eixo axial do bilhar, caso sofresse reflexão ao colidir com a fronteira reta.

O movimento da partícula dentro do bilhar gera um mapeamento do tipo $(\psi_n, x_n) \rightarrow (\psi_{n+1}, x_{n+1})$. Considerando que a origem do sistema de coordenadas está na primeira junção entre a componente parabólica inferior com o segmento de reta, e levando em conta que uma parábola é descrita pela função $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, devemos encontrar os valores de A , B e C , para o nosso sistema.

Com $f(0) = 0$ e de $f(a) = 0$, temos que, respectivamente

$$C = 0 ,$$

e que

$$B = -Aa .$$

Fazendo agora $f(a/2) = -b$, encontramos os valores

$$A = \frac{4b}{a^2} ,$$

e

$$B = -\frac{4b}{a} .$$

Substituindo as expressões de A e B , na função de segundo grau, obtemos a seguinte

aproximação que denominaremos por $\chi(x)$.

$$\chi(x) = \frac{4bx}{a^2}(x - a) . \quad (2.1)$$

A equação da fronteira superior é obtida de maneira análoga e é praticamente a mesma, mas transladada por um fator l no eixo das ordenadas e corrigida por um sinal negativo no expoente quadrático.

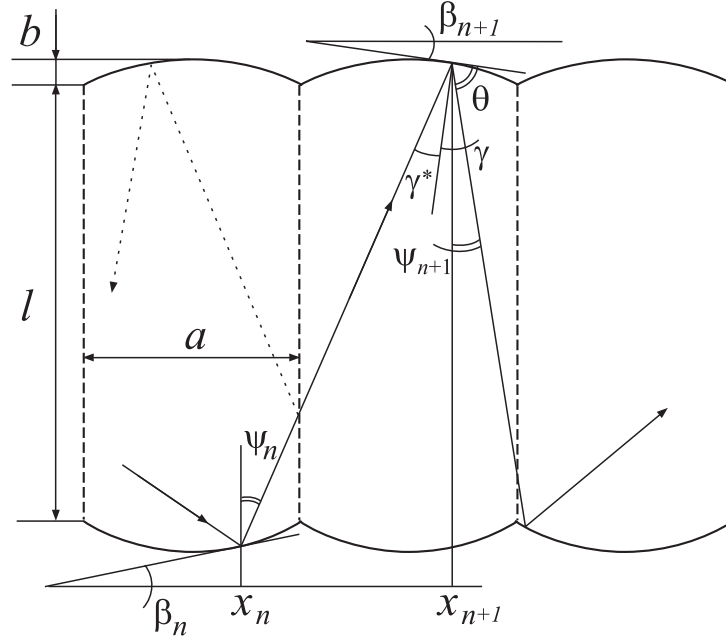


Figura 2.2: Esquema ilustrativo de uma trajetória com o método unfolding, ressaltando as variáveis principais e auxiliares, envolvidas na obtenção do mapeamento.

Para encontrar a relação de recorrência da posição $x_n \rightarrow x_{n+1}$, consideramos a aproximação $l \gg b$ e esboçamos um triângulo retângulo entre a n -ésima e a $(n+1)$ -ésima colisão, como mostra a Fig.(2.2). Desta maneira obtemos as relações angulares

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - \psi_n) = \sin(\psi_n) = \frac{x_{n+1} - x_n}{hip} \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \psi_n) = \cos(\psi_n) = \frac{l+2b}{hip} \end{cases} , \quad (2.2)$$

onde hip , é a hipotenusa do triângulo retângulo mostrado na Fig.2.2.

Dividindo o conjunto de equações (2.2) uma pela outra, e levando em consideração a aproximação $l \gg b$, temos que

$$x_{n+1} = x_n + l \tan(\psi_n) . \quad (2.3)$$

Para encontrar a relação de recorrência entre os ângulos $\psi_n \rightarrow \psi_{n+1}$, definimos a função $\beta(x) = \arctan(\chi'(x))$, como a inclinação da reta tangente ao ponto de colisão com a fronteira. Expandindo $\beta(x)$ em série de Taylor, tomando o termo de primeira ordem e levando em

consideração o resultado da Eq.(2.1), obtemos

$$\beta(x) \approx \frac{4b}{a^2}(2x - a) . \quad (2.4)$$

Como mostra a figura (2.2), devemos considerar a reta normal ao ponto de colisão, e os ângulos que a trajetória e o eixo das ordenadas fazem com ela. Esses ângulos λ^* e λ são respectivamente os ângulos de incidência e de reflexão. Levando em conta o método da reflexão especular, temos que $\lambda^* = \lambda$. Considerando a perpendicularidade entre as retas tangente e normal ao ponto de colisão, e também entre os eixos das ordenadas e abcissas, conseguimos encontrar algumas relações entre ângulos na Fig. (2.2), tais como

$$\psi_{n+1} + \theta + \beta_{n+1} = \frac{\pi}{2} . \quad (2.5)$$

Considerando o eixo formado pelas retas normal e tangente ao ponto da colisão, encontramos a relação

$$\lambda^* + \theta = \lambda + \theta = \frac{\pi}{2} . \quad (2.6)$$

Igualando as equações (2.5) e (2.6), obtemos

$$\beta_{n+1} + \psi_{n+1} = \lambda . \quad (2.7)$$

Pelo triângulo indicado na Fig.(2.2) e utilizando a relação matemática de complemento de ângulos, chegamos em

$$\psi_{n+1} = 2\lambda - \psi_n . \quad (2.8)$$

Substituindo a equação (2.7) na eq.(2.8), encontramos a relação de recorrência entre ψ_n e ψ_{n+1} , ou seja

$$\psi_{n+1} = \psi_n - 2\beta_{n+1} . \quad (2.9)$$

Deste modo, com as equações (2.3) e (2.9), obtemos o nosso mapeamento:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + l \tan(\psi_n) \mod(a) \\ \psi_{n+1} = \psi_n - 2\beta(x_{n+1}) \end{cases} . \quad (2.10)$$

Definindo uma nova variável adimensional $\xi = x/a$, onde $\xi \in [0, 1)$, e levando em consideração a Eq.(2.4), obtemos o mapeamento para o bilhar stadium estático com fronteiras parabólicas [35]

$$T : \begin{cases} \xi_{n+1} = \xi_n + \frac{l}{a} \tan(\psi_n) \mod(1) \\ \psi_{n+1} = \psi_n - \frac{8b}{a}(2\xi_{n+1} - 1) \end{cases} . \quad (2.11)$$

Como o bilhar stadium possui uma simetria axial, a transformação $T(\xi_n, \psi_n) = (\xi_{n+1}, \psi_{n+1})$ em relação a essa simetria devem ser $\xi \rightarrow 1 - \xi$ e $\psi \rightarrow -\psi$. Portanto, os resultados obtidos para valores positivos de ψ descrevem bem toda a dinâmica.

A Figura 2.3(a,b,d), mostra a evolução de uma única condição inicial escolhida no mar de caos, iterada por um tempo longo. Em particular para a Fig.2.3(c), mostramos algumas evoluções de condições iniciais escolhidas nas vizinhanças dos pontos fixos, e caracterizamos o período de alguns deles. Analisando a Fig.2.3 podemos ver que quando o parâmetro de controle geométrico b , assume grande valores (ver legenda na própria Figura), o espaço de fases se torna completamente caótico. Contudo, conforme diminuimos o valor do parâmetro b , mantendo fixos os outros parâmetros l e a , mais e mais ilhas de estabilidade aparecem no espaço de fases. Também aparecem curvas invariantes relacionadas a oscilações regulares. Portanto, uma transição de caos global para caos parcial é observada. Vale salientar, que nos referimos a caos global, onde não encontramos visualmente nenhuma estrutura regular ou ponto fixo.

2.2.1 Descrição analítica de propriedades caóticas

Como é conhecido na literatura [36, 37], a transição de caos global ocorre quando todos os pontos fixos estáveis se bifurcam e perdem a sua estabilidade, assim somente órbitas instáveis estão presentes no espaço de fases. Portanto para descrever esse critério de estabilidade, primeiramente precisamos obter os pontos fixos para o mapeamento dado pela Eq.(2.11). Para mapeamentos discretos, o critério de obtenção de pontos fixos, consiste basicamente em analisar as variáveis a cada iteração. Essas variáveis devem assumir os mesmos valores a cada iteração. Para mapas que possuem variáveis moduladas, como é o nosso caso, basta adicionarmos um fator m , que identifica a periodicidade da órbita na variável modulada. Deste modo, obtemos as equações:

$$\begin{cases} \xi_n^* = \xi_{n+1} = \xi_n + m \\ \psi_n^* = \psi_{n+1} = \psi_n \end{cases} \quad (2.12)$$

Substituindo as expressões de ξ_{n+1} e de ψ_{n+1} , de acordo com o mapeamento dado pela Eq.(2.11), obtemos as relações dos pontos fixos

$$\psi_n^* = \tan^{-1}\left(\frac{ma}{l}\right), \quad (2.13)$$

$$\xi_n^* = \frac{1}{2} + m, \quad (2.14)$$

onde $m \in \mathbb{Z}$ e também representa a quantidade de bilhares espelhados numa trajetória. Por exemplo, na Fig.2.2, $m = 1$.

A estabilidade dos pontos fixos de período 1 é obtida através dos auto-valores da matriz Jacobiana, avaliada nos pontos fixos

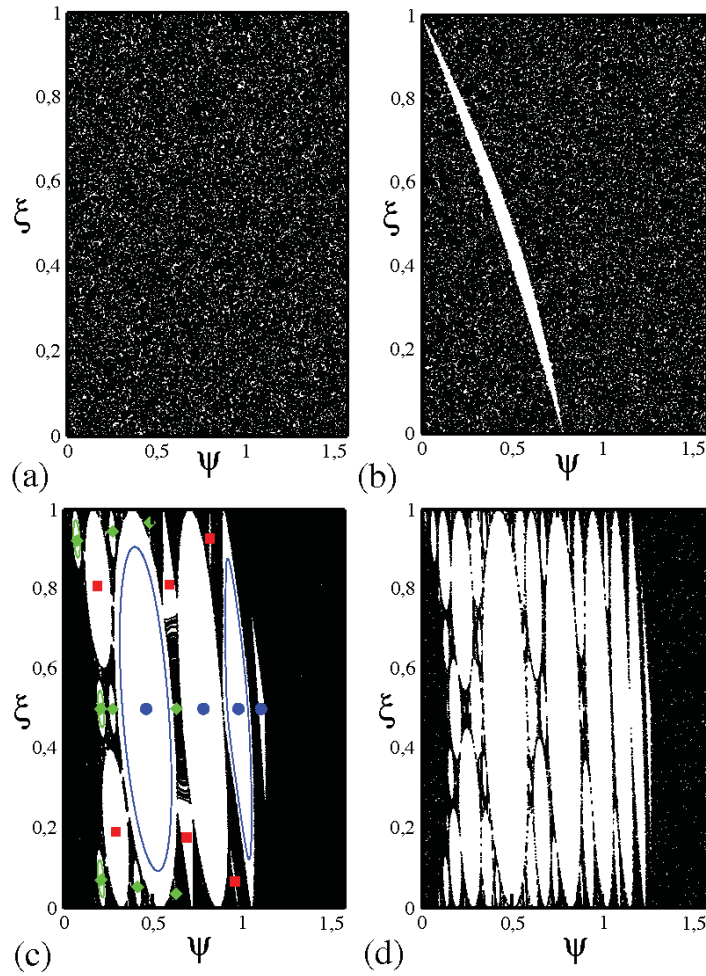


Figura 2.3: Espaços de fases para o bilhar do tipo stadium com fronteiras parabólicas estáticas. Em (a) $b = 0.07$, (b) $b = 0.05$, (c) $b = 0.01$ e em (d) $b = 0.005$. Em todos os itens da figura os parâmetros de controle a e l tiveram seus valores mantidos constantes em respectivamente 0.5 e 1. Em particular para (c), os círculos representam pontos fixos de período 1, os quadrados indexam os pontos fixos de período 2 e os losangos mostram os pontos fixos de período 3.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \xi_n} & \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \psi_n} \\ \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial \xi_n} & \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial \psi_n} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \xi_n} &= 1, & \frac{\partial \xi_{n+1}}{\partial \psi_n} &= \frac{l}{a \cos^2(\psi_n^*)}, \\ \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial \xi_n} &= -\frac{16b}{a}, & \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial \psi_n} &= 1 - \frac{16bl}{a^2 \cos^2(\psi_n^*)}. \end{aligned}$$

Como o determinante é igual a 1, o mapa preserva área no espaço de fases. O critério

de estabilidade é definido por $|Tr J| \leq 2$ (ver Ref.[37]), ao resolvermos a desigualdade na inequação, encontramos a seguinte expressão

$$\frac{4bl}{a^2} > 1. \quad (2.16)$$

Os auto-valores da matriz Jacobiana são

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm\sigma}, \quad (2.17)$$

onde $\cos(\sigma) = \frac{1}{2}Tr J$.

Ao variarmos os parâmetros de controle, os auto-velores de J também mudam, e com eles a estabilidade dos pontos fixos. Se a combinação de parâmetros de controle obedecer a inequação dada em (2.16) os pontos fixos são classificados como sela ou hiperbólicos instáveis e observamos somente caos no espaço de fases, como mostra a Fig.2.3(a). Se a inequação (2.16) não for obedecida, os pontos fixos são classificados como elípticos estáveis, neste caso, aparecem ilhas de estabilidade no espaço de fases como mostrado na Fig.2.3(b,c,d).

2.2.2 Linearização do Mapeamento

A linearização do mapeamento é importante pois através dela obtemos propriedades que serão de extrema relevância ao introduzirmos uma perturbação temporal no sistema no Capítulo 3. Considerando a matriz Jacobiana dada na Eq.(2.15) e introduzindo novas variáveis como $f = l/(a \cos^2(\psi_n^*))$ e $g = 16b/a$, podemos reescrever a matriz Jacobiana na forma

$$J = \begin{pmatrix} 1 & f \\ -g & 1 - fg \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

e seus auto-vetores são dados por

$$X_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{e^{\pm i\sigma} - 1}{f} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Considerando a matriz coluna X de auto-vetores, é conhecido que a matriz $\Lambda = X^{-1}JX$ é uma matriz diagonal do tipo

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e^{i\sigma} & 0 \\ 0 & e^{-i\sigma} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Para que a matriz Jacobiana, tenha uma forma diagonal, é necessário introduzirmos novas variáveis, de forma que

$$\begin{pmatrix} Z \\ Z^* \end{pmatrix} = X^{-1} \begin{pmatrix} \xi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

onde

$$X^{-1} = \frac{i}{2 \sin(\sigma)} \begin{pmatrix} e^{-i\sigma} - 1 & -f \\ e^{+i\sigma} + 1 & f \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Como Z e Z^* são complexo conjugados, obtemos

$$Z_{n+1} = Z_n e^{i\sigma}.$$

Ao fazermos $Z \rightarrow I e^{i\sigma}$, encontramos a variáveis ação-ângulo

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \sigma \end{cases}, \quad (2.23)$$

onde o número de rotação ao redor do ponto fixo σ é dado por

$$\sigma = \arccos \left(1 - \frac{8bl}{a^2 \cos^2(\psi_n^*)} \right), \quad (2.24)$$

onde ψ_n^* é dado pela Eq.(2.13).

2.2.3 Mecanismo Desfocalizador

Em bilhares que possuem componentes de curvatura negativa, a dinâmica da partícula é caótica se todas essas componentes se aproximarem de um círculo, pertencentes a “mesa” de bilhar Q . A desigualdade dada pela Eq.(2.16), é aproximadamente a mesma expressão para que o mecanismo desfocalizador funcione no bilhar stadium original de Bunimovich (veja Fig.2.1(a)), onde o bilhar stadium possui como fronteiras convergentes dois semi-círculos. Para este caso, a expressão para que o mecanismo desfocalizador funcione é

$$\frac{l}{2R} = \frac{4bl}{a^2} > 1, \quad (2.25)$$

onde R é o raio do semi-círculo.

Este mecanismo funciona basicamente quando o tempo de divergência, ou seja, o tempo gasto pela partícula, depois que ela passou pelo ponto focal até colidir novamente com a fronteira convergente, for maior que o tempo de convergência, que é o tempo gasto entre a colisão com a componente convergente até o ponto focal [8, 11]. Neste caso, analisando a média, as trajetórias divergentes prevalecem sobre as convergentes, gerando assim caos. Caso a inequação (2.16), não se sustente, o mecanismo desfocalizador para de funcionar. Fazendo novamente uma análise na média, as trajetórias convergentes agora prevalecem sobre as divergentes. Este mecanismo explica a diferença do espaço de fases da Fig.2.3, quando variamos o parâmetro de controle b .

2.3 Resultados Numéricos

Nesta seção analisamos como o mecanismo desfocalizador interfere em algumas propriedades caóticas e estatística do nosso bilhar.

2.3.1 Expoentes de Lyapunov

Variando parâmetros de controle, encontramos regiões do espaço de fases em que trajetórias apresentam comportamento caótico. Os expoentes de Lyapunov têm se mostrado muito úteis nos últimos anos como uma das mais eficazes ferramentas para caracterização de dinâmica caótica.

O princípio básico de obtenção dos expoentes de Lyapunov consiste em verificar se duas trajetórias vizinhas divergem exponencialmente uma da outra com o decorrer do tempo. Se as trajetórias permanecem próximas durante todo o tempo, então elas não são sensíveis as condições iniciais, consequentemente a órbita é considerada estável (regular). Mas, se as trajetórias divergem exponencialmente com o tempo, então trajetórias são classificadas como caóticas. Se um sistema é caótico, então pelo menos um expoente de Lyapunov é positivo. Para sistemas conservativos, os dois expoentes são iguais em módulo, porém com sinais invertidos $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, como previsto pelo Teorema de Liouville [37], que diz que um sistema conservativo preserva a área no espaço de fases. Para sistemas dissipativos eles são diferentes de maneira que $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, assim não ocorre mais a preservação de área no espaço de fases. Para aplicações em sistemas altamente dimensionais, podemos citar como exemplos [38, 39].

Os expoentes são definidos como [40]

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^n| \quad j = 1, 2 \quad (2.26)$$

onde Λ_j^n , são os autovalores da matriz $M = \prod_{i=1}^n J(\xi_i, \psi_i)$. Aqui J_i é a matriz Jacobiana do mapeamento, dada pela Eq.(2.15), avaliada ao longo da órbita.

O procedimento adotado na determinação dos autovalores da matriz M , consiste em escrever J como o produto de uma matriz ortogonal θ por uma matriz triangular superior T da seguinte forma: $J = \theta T$. Uma vez que $M = J_n J_{n-1} \dots J_2 J_1 = J_n J_{n-1} \dots J_2 \theta_1 \theta_1^{-1} J_1$. Definindo $\tilde{J}_2 = J_2 \theta_1$, podemos aplicar o mesmo procedimento para obter $M = J_n J_{n-1} \dots J_3 \theta_2 \theta_2^{-1} \tilde{J}_2 T_1$, e assim sucessivamente. Deste modo, a matriz M é reescrita como o produto de matrizes triangulares T cujos autovalores são T_{11}^i, T_{22}^i .

Para obter a expressão dos autovalores de T , devemos explicitar as matrizes θ e T . Escolhendo a matriz ortogonal

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

e a matriz triangular superior

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

temos assim os elementos de θ que podem ser escritos em termos dos coeficientes de J como o produto das matrizes $\theta J = T$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

onde j_{11} , j_{12} , j_{21} e j_{22} representam os coeficientes das matrizes jacobianas.

Feita a multiplicação das matrizes, chegamos a

$$\begin{pmatrix} j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta) & j_{12} \cos(\theta) + j_{22} \sin(\theta) \\ j_{21} \cos(\theta) - j_{11} \sin(\theta) & j_{22} \cos(\theta) - j_{12} \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Comparando os coeficientes, temos

$$j_{21} \cos(\theta) = j_{11} \sin(\theta), \quad (2.31)$$

assim,

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{j_{21}}{j_{11}}. \quad (2.32)$$

Para obtermos as expressões das razões trigonométricas $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$, vamos recorrer ao triângulo retângulo, sendo j_{11} o eixo x e j_{21} o eixo y . Aplicando as conhecidas relações de $\sin$ e $\cos$ e também o teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo, chegamos a

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{j_{21}}{\sqrt{j_{21}^2 + j_{11}^2}}}{\frac{j_{11}}{\sqrt{j_{21}^2 + j_{11}^2}}}, \quad (2.33)$$

então

$$\sin(\theta) = \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{21}^2 + j_{11}^2}}, \quad (2.34)$$

$$\cos(\theta) = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{21}^2 + j_{11}^2}}. \quad (2.35)$$

Com esses resultados, os autovalores de T são dados por

$$T_{11} = j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta), \quad (2.36)$$

assim levando em conta as Eqs.(2.34) e (2.35), o primeiro autovalor é dado por

$$T_{11} = \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}} . \quad (2.37)$$

O segundo autovalor é descrito da seguinte maneira,

$$T_{22} = j_{22} \cos(\theta) - j_{12} \sin(\theta) , \quad (2.38)$$

novamente considerando as Eqs.(2.34) e (2.35), podemos escrever T_{22} da seguinte forma

$$T_{22} = \frac{j_{22}j_{11} - j_{12}j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}} . \quad (2.39)$$

O valor de $\tilde{J}_2$, é obtido da seguinte maneira

$$\tilde{J}_2 = J_1 \theta_1 , \quad (2.40)$$

$$\tilde{J}_2 = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} , \quad (2.41)$$

$$\tilde{J}_2 = \begin{pmatrix} j_{11} \cos(\theta_1) + j_{12} \sin(\theta_1) & j_{12} \cos(\theta_1) - j_{11} \sin(\theta_1) \\ j_{21} \cos(\theta_1) + j_{22} \sin(\theta_1) & j_{22} \cos(\theta_1) - j_{21} \sin(\theta_1) \end{pmatrix} . \quad (2.42)$$

Usando os resultados de T_{11} e T_{22} , podemos encontrar numericamente os expoentes de Lyapunov, iterando diversas condições iniciais para o bilhar do tipo stadium com fronteiras parabólicas estáticas.

A Figura 2.4 mostra o comportamento do valor médio do expoente de Lyapunov positivo em função do parâmetro de controle b , para o mapa dado pela Eq.(2.11). Para esta figura, mantivemos fixos os valores dos outros parâmetros de controle a e l , em respectivamente 0.5 e 1. Cada dado numérico mostrado na Fig.2.4 foi obtido para 7 condições iniciais distintas escolhidas de maneira aleatória ao longo do mar de caos e iteradas até 10^8 colições com a fronteira parabólica. Uma estatística mais apurada nas condições iniciais não se faz necessária, pois a convergência do expoente de Lyapunov positivo é excelente. As barras de erro encontradas em cada dado numérico da Fig.2.4 correspondem ao desvio padrão das 7 condições iniciais, e como pode-se notar, as barras de erros são bem pequenas.

Analisando qualitativamente a Fig.2.4, podemos perceber que há uma mudança repentina no comportamento do expoente de Lyapunov positivo médio, denotado por $\bar{\lambda}$, quando a transição de caos global para caos misto ocorre. Para os parâmetros de controle fixos a e l , o valor crítico, denotado por b_c , onde a transição ocorre é $b_c = 0.0625$. A janela de zoom na Fig.2.4 corresponde a ampliação do comportamento de $\bar{\lambda}$. Refinamos o passo da transição no parâmetro de controle b , como $\Delta b = 10^{-4}$, levando assim, a uma investigação bem precisa. Essa transição também nos mostra em ação o mecanismo desfocalizador. Para valores de b

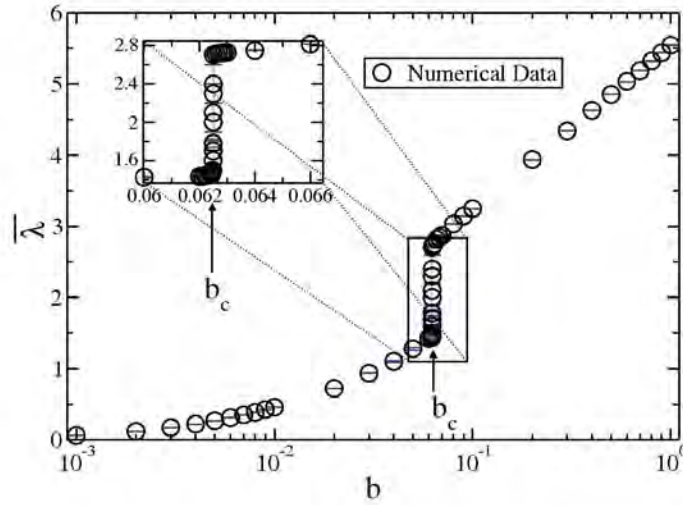


Figura 2.4: Gráfico de $\bar{\lambda} \times b$. A mudança repentina de comportamento caracteriza uma transição de caos para estabilidade. Os parâmetros de controle geométricos usados foram: $a = 0.5$ e $l = 1$. A janela de zoom, mostra com maior precisão a transição, onde $\Delta b = 10^{-4}$.

acima da transição, podemos ver que obtemos altos valores para os expoentes médios positivos de Lyapunov, indicando assim uma alta atividade caótica. Imediatamente antes da transição, podemos ver o expoente de Lyapunov médio decaindo, explicando assim o aparecimento de ilhas de estabilidade no espaço de fases para $b < b_c$.

Essa mudança repentina do comportamento de $\bar{\lambda}$ também é observada para outras combinações dos parâmetros de controle. Se o parâmetro de controle l tem seu valor aumentado, juntamente com o valor de a sendo mantido fixo; de acordo com a Eq.(2.16), a transição é observada para um valor menor do parâmetro b . A Figura 2.5(a) mostra diversas curvas de $\bar{\lambda} \times b$ para diferentes valores de l .

Todas as curvas exibem qualitativamente o mesmo comportamento, no entanto, a mudança repentina de comportamento de $\bar{\lambda}$, ocorre para diferentes valores críticos de b_c . Para o limite $b \rightarrow 0$, o expoente de Lyapunov tende a zero, dessa maneira o sistema se comporta majoritariamente como regular. Até onde pudemos investigar, essa transição é suave e o expoente de Lyapunov tende a zero monotonicamente.

Ao fazermos a mesma análise numérica em relação ao parâmetro a , encontramos de fato, o mesmo comportamento geral. A Figura 2.5(b) mostra um gráfico de $\bar{\lambda} \times b$ para o parâmetro de controle geométrico l fixo com seu valor em 1 e três valores distintos do parâmetro a . A mudança repentina de comportamento é evidente.

O comportamento mostrado nas Figs.2.5(a,b) indica que $\bar{\lambda}$ parece ser invariante de escala. De fato, ao reescalarmos os eixos de maneira apropriada por bl/a^2 , uma representação universal de todas as curvas é obtida, e mostrada na Fig.2.6. Podemos ver que todas as curvas de $\bar{\lambda}$, obtidas para várias combinações dos parâmetros de controle, se combinam em um perfeito colapso universal de todas as curvas em um único gráfico. Esta é uma informação clara de que

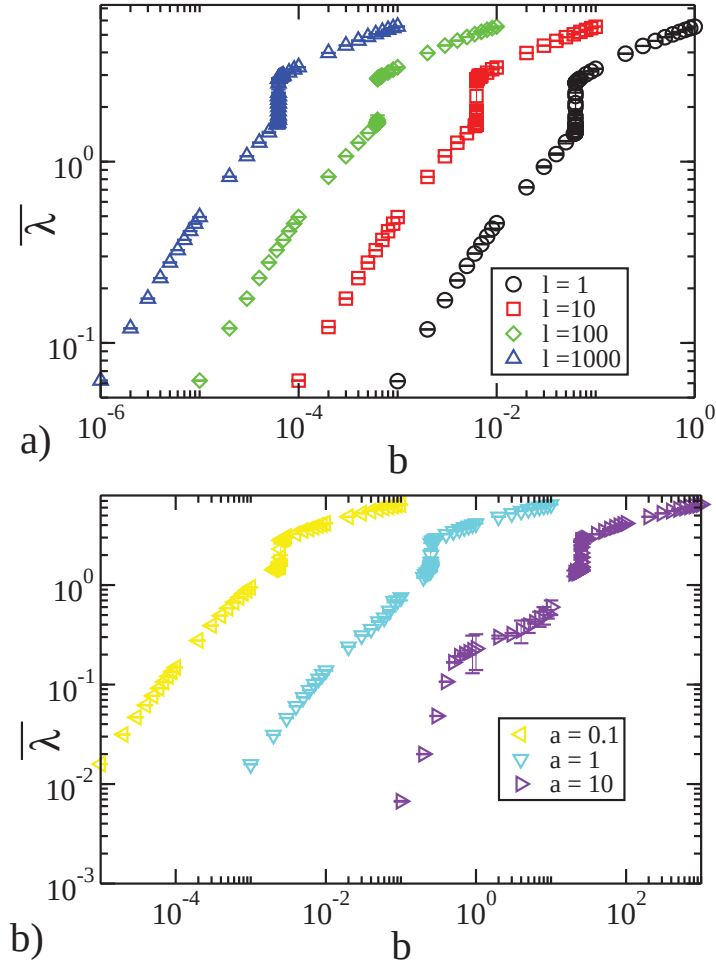


Figura 2.5: Gráficos de $\bar{\lambda} \times b$. Os parâmetros de controle usados foram: (a) $a = 0.5$ e $l = 1$, $l = 10$, $l = 100$ e $l = 1000$; (b) $l = 1$ e $a = 0.1$, $a = 1$ e $a = 10$.

$\bar{\lambda}$ é realmente invariante de escala com respeito a transição dada pela eq.(2.16).

2.3.2 Desvio Quadrático de ψ

Podemos também caracterizar o comportamento do desvio quadrático do ângulo médio ψ . Denotaremos esse desvio como ω , e o avaliaremos perto da transição crítica onde o mecanismo desfocalizador ainda funciona. Definimos ω [41] como

$$\omega(n, l, a, b) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sqrt{\bar{\psi}_i^2(n, l, a, b) - \bar{\psi}_i^2(n, l, a, b)}, \quad (2.43)$$

onde M representa um *ensemble* de condições iniciais, e o ângulo ψ médio é dado por

$$\bar{\psi}(n, l, a, b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_i. \quad (2.44)$$

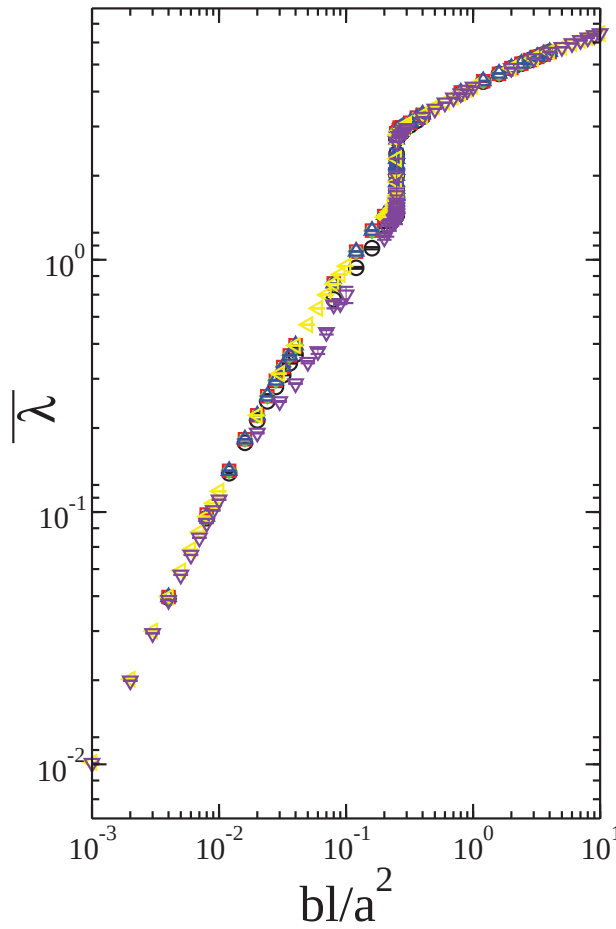


Figura 2.6: Gráfico universal de diferentes curvas de $\bar{\lambda}$, para diferentes combinações de parâmetros de controle.

A Equação (2.43) foi iterada até 10^9 colisões da partícula com a fronteira parabólica do bilhar, utilizando-se um *ensemble* de 5×10^3 diferentes condições iniciais escolhidas ao longo do mar de caos.

A Figura 2.7 nos mostra o comportamento de ω em função do número de colisões n , para diferentes valores do parâmetro de controle b . Desde que todos os parâmetros geométricos de controle são invariantes de escala, resolvemos manter a e l fixos constantes, e variar somente o parâmetro b . Podemos perceber três tipos de comportamentos distintos na Fig.2.7, de acordo com os parâmetros de controle.

Quando b é escolhido na condição de que o mecanismo desfocalizador está em operação, ou seja, quando a inequação dada por (2.16) é válida, as curvas de ω tem um crescimento inicial, e depois de um número pequeno de colisões, elas tendem a um regime de saturação para valores muito grandes de n . Para esse comportamento, ω está restrito a uma variação $\omega \in (0.8, 1)$.

Se o parâmetro de controle b é escolhido perto da criticalidade, ou seja, $4bl/a^2 \approx 1$, as curvas de ω , começam a crescer para um regime inicial de n , e então repentinamente elas

decaem abruptamente, e convergem para um platô constante variando entre (0.1, 0.3).

Finalmente, escolhendo b , quando a inequação dada por (2.16) não é mais válida, ou seja, quando o mecanismo desfocalizador não está funcionando, as curvas de ω são quase todas constantes para todos os valores de n . Elas estão todas confinadas em um valor menor do que 0.1, indicando que o ângulo médio $\bar{\psi}$ é muito pequeno.

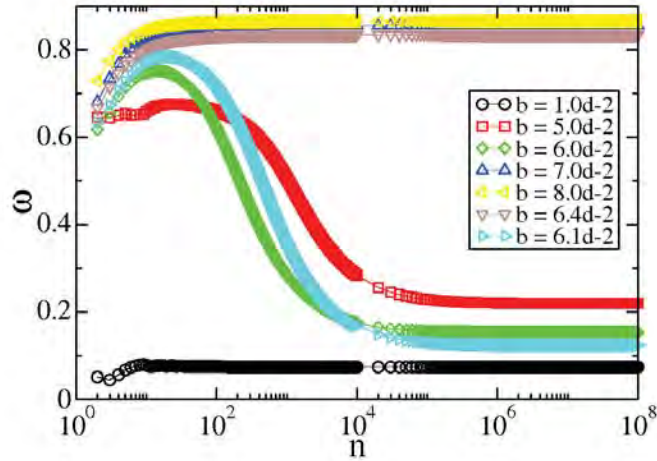


Figura 2.7: Comportamento das curvas de ω . O parâmetro de controle b está indicado na própria figura, enquanto os outros parâmetros a e l , tiveram seus valores mantidos constantes em respectivamente 0.5 e 1.

2.4 Generalização do Mapeamento

Vamos agora nos aprofundar um pouco mais na discussão de uma possível reorganização do mapa dado pela Eq.(2.11), em uma família genérica de mapas de um único parâmetro de controle. Definindo

$$\begin{cases} p_{n+1} = 2\xi_{n+1} - 1 \\ I_{n+1} = \left(\frac{8b}{a}\right)p_{n+1} \end{cases}, \quad (2.45)$$

e fazendo $K = 16bl/a^2$, o mapa dado pela Eq.(2.11), pode ser reescrito na forma

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + K \tan(p_n) \\ p_{n+1} = p_n - I_{n+1} \end{cases}. \quad (2.46)$$

Para esse novo mapa, todos os pontos fixos de período 1, se tornam instáveis para $K > 4$. Um gráfico de $\bar{\lambda} \times K$ é mostrado na Fig.2.8. Uma mudança abrupta de comportamento é também evidente quando $K \approx 4$ (ver Ref.[42]), o que confirma o decaimento repentino em λ , quando os pontos fixos estáveis perdem a sua estabilidade, levando a dinâmica a totalmente caótica. A janela de zoom na Fig.2.8, nos mostra melhor essa transição.

Em princípio, é esperado que essa generalização possa ser aplicada e estendida para toda família de mapas de um único parâmetro de controle, com a não-linearidade dada por uma função do tipo tangente [43].

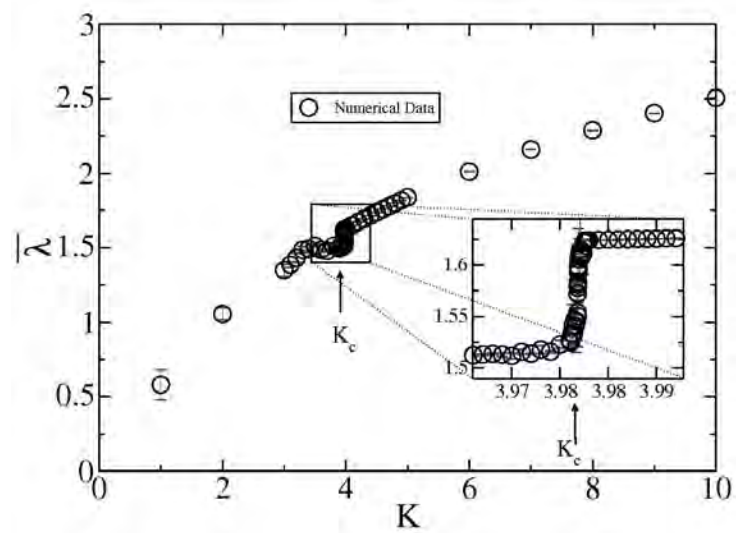


Figura 2.8: Gráfico de $\bar{\lambda} \times K$. A janela de zoom, mostra uma ampliação da mudança abrupta de comportamento, perto da criticalidade.

Capítulo 3

O Bilhar Stadium Dependente do Tempo

3.1 Resumo

Neste capítulo investigaremos o bilhar stadium-like com fronteiras circulares que dependem periodicamente do tempo. Descreveremos em detalhes, os procedimentos para a obtenção do mapeamento quadri-dimensinal, para a aproximação de fronteira fixa (versão simplificada). Encontramos um valor crítico para a velocidade, através da linearização do mapa não perturbado. A partir dessa velocidade crítica, encontramos espaços de fases diferentes, para velocidades iniciais com valores maiores e menores do que o valor crítico. Para velocidades iniciais com valores menores do que o valor crítico, ocorre um decaimento da velocidade média da partícula devido a uma ressonância com a perturbação externa, onde a partícula pode encontrar-se temporariamente presa ao redor das ilhas de estabilidade podendo até penetrar dentro das mesmas. Para o caso onde a velocidade inicial é maior do que o valor crítico, encontramos uma dinâmica típica de aceleração de Fermi, onde a partícula, após um regime inicial de velocidade constante, sofre um crescimento ilimitado de sua velocidade. Conseguimos ainda descrever esse comportamento com argumentos de escala, nas variáveis velocidade inicial e amplitude de oscilação da fronteira móvel, além de obtermos uma grade de condições iniciais, em que algumas delas sofrem aceleração de Fermi e outras não, mesmo considerando a velocidade inicial maior do que a velocidade crítica.

3.2 O modelo e o mapeamento

O bilhar stadium de Bunimovich (veja Fig.2.1(a)), consiste basicamente de uma partícula clássica puntual que colide elasticamente entre dois segmentos de reta paralelos conectados por dois semi-círculos. Em nosso estudo, analisaremos o bilhar stadium-like, que consiste em uma generalização do bilhar stadium original proposto, onde podemos ter, dependendo dos parâmetros de controle a , b e l , fronteiras convergentes no formato de semi-círculos inteiros ou somente segmentos de semi-círculos.

Introduzimos a dependência temporal, fazendo $\partial Q = \partial Q(t)$, na forma de uma perturbação periódica nas fronteiras convergentes. Assim, a equação da fronteira pode ser escrita como

$$R(t) = R_0 + rf(t) , \quad (3.1)$$

onde $r \ll R_0$ e $f(t)$ é uma perturbação do tipo harmônica $\sin(wt)$. Ao derivarmos, a Eq.(3.1), obtemos a equação da velocidade da fronteira móvel, como sendo

$$\dot{R}(t) = B(t) = B_0 f'(wt) , \quad (3.2)$$

onde $B_0 = rw$ é a amplitude de oscilação e w é a frequência de oscilação.

Consideraremos a aproximação da fronteira circular convergente como sendo fixa, mas no momento da colisão a partícula troca momentum com a fronteira como se esta estivesse se movendo. Esse tipo de simplificação da dinâmica, já foi feita para outros bilhares e não afeta a não-linearidade do sistema [44, 45, 46]. Para facilitar os cálculos futuros, fixaremos $w = 1$.

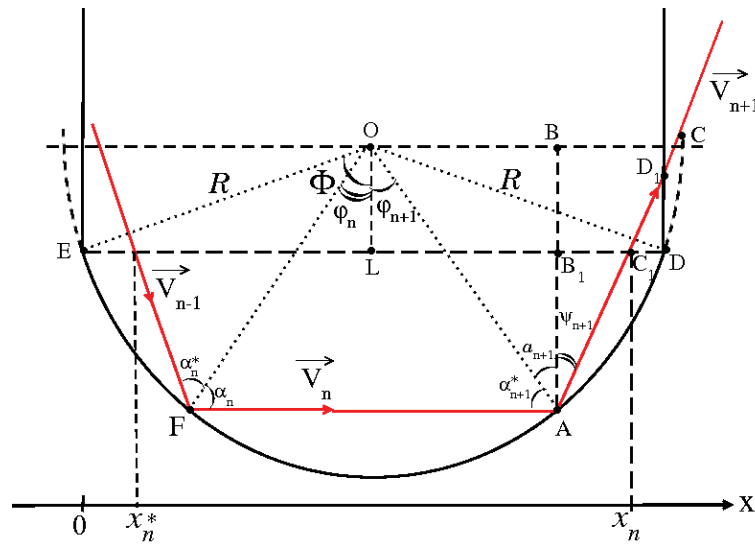


Figura 3.1: Esquema ilustrativo de uma trajetória sofrendo colisões sucessivas com a mesma componente convergente explicitando algumas de suas variáveis dinâmicas.

A figura 3.1 nos mostra um esquema ilustrativo com os parâmetros de controle geométrico, juntamente com R e Φ .

Analisando mais cautelosamente a Fig.3.1, podemos encontrar os valores de R e Φ como sendo

$$R = \frac{a^2 + 4b^2}{8b} , \quad \Phi = \arcsin\left(\frac{2a}{R}\right) , \quad (3.3)$$

onde em particular se $a = 2b$, recuperamos o bilhar stadium original proposto por Bunimovich.

Para descrever a dinâmica do sistema, utilizaremos 4 variáveis principais, sendo duas delas angulares, além do tempo e da velocidade. As condições iniciais angulares são α , que é o ângulo medido entre a trajetória e a reta normal ao ponto de colisão com a componente convergente e

φ que é o ângulo medido entre a vertical ao eixo de simetria do bilhar e a reta normal ao ponto de colisão com a componente convergente. Para facilitar questões de notação, as variáveis indexadas por $*$ são medidas imediatamente antes da colisão em análise. Assumimos então, que V_n e t_n , são respectivamente a velocidade e o tempo da partícula no instante da n -ésima colisão, e que escolhemos, no instante inicial $t = 0$, a partícula pertença a fronteira convergente do bilhar ∂Q , e o vetor velocidade aponte para dentro da mesa de bilhar Q .

Consideramos dois casos distintos para descrever a dinâmica da partícula: (i) colisões sucessivas e (ii) colisões indiretas. Em (i) consideramos que a partícula, após sofrer uma colisão com a componente convergente, sofre uma colisão subsequente com a mesma componente; já em (ii) consideramos que após uma colisão com a componente convergente, a próxima colisão se dá com a componente oposta. Para este segundo caso, conforme feito no Capítulo 2, utilizamos o método do desdobramento (*unfolding*) para avaliar a dinâmica.

Vamos primeiramente introduzir as equações dinâmicas para o primeiro caso, ou seja, colisões sucessivas com a mesma componente convergente. Como mostra a Fig.3.1, esse tipo de colisão ocorrerá somente quando for satisfeita a condição

$$|\varphi_{n+1}| \leq \Phi. \quad (3.4)$$

Ainda de acordo com a Fig.3.1 e a lei de reflexão especular, encontramos a seguinte relação para o ângulo α_n ,

$$\alpha_{n+1}^* = \alpha_n. \quad (3.5)$$

Considerando o triângulo AOF na Fig.3.1, levando em conta que o ângulo φ_n é medido no sentido anti-horário, juntamente com o auxílio da Eq.(3.4) e utilizando a propriedade de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a π , obtemos a relação de recorrência para o ângulo φ_n , como

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \pi - 2\alpha_n \pmod{2\pi}. \quad (3.6)$$

Para encontramos uma relação de recorrência no tempo, devemos considerar na Fig.3.1, que na primeira colisão o tempo é t_n e na segunda colisão o tempo é t_{n+1} , e que a velocidade entre os choques é V_n . Deste modo encontramos

$$t_{n+1} = t_n + \frac{2R \cos(\alpha_n)}{V_n}. \quad (3.7)$$

Agora, devemos considerar o segundo caso onde a partícula, após sofrer uma colisão com a componente convergente, a sua próxima colisão se dá com a componente oposta. Para que esta condição seja satisfeita, é necessário que

$$\Phi < |\varphi_{n+1}|. \quad (3.8)$$

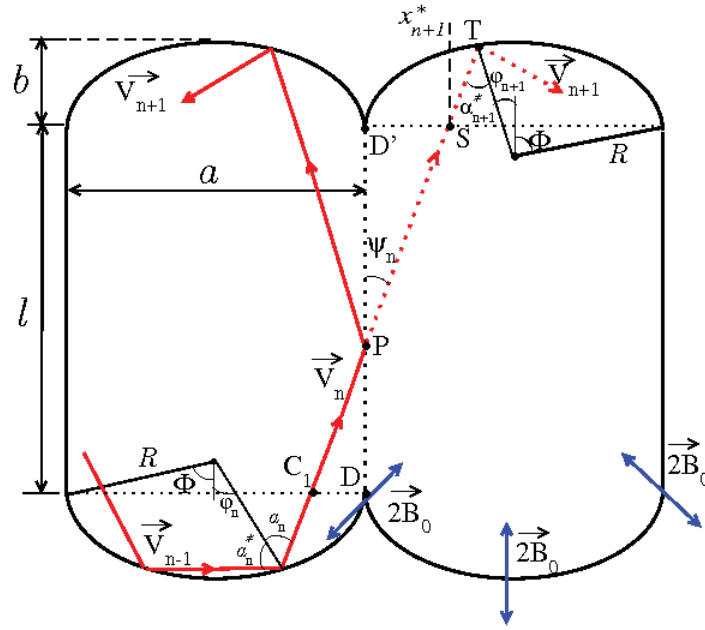


Figura 3.2: Esquema ilustrativo de uma trajetória sofrendo colisões indiretas com as duas componentes convergentes.

Além disso, introduziremos algumas variáveis dinâmicas auxiliares no mapeamento, como ψ que é o ângulo medido entre a trajetória e a reta vertical ao ponto de colisão e x_n que é a projeção da posição da partícula no eixo horizontal. Vale ressaltar que a dinâmica do bilhar que estamos estudando consiste em considerar o modelo de aproximação de fronteira fixa, ou modelo simplificado, por isso x_n é somente a projeção da posição da partícula no momento em que ela entra na zona das componentes convergentes, ou zona de colisão, como mostra a Fig.3.1.

Observando a figura 3.2, obtemos o valor de ψ , como sendo

$$\psi_n = \alpha_n - \varphi_n . \quad (3.9)$$

Para obter a projeção x_n , devemos olhar novamente para a Fig.3.1, onde x_n é a soma dos segmentos de reta $\overline{EL}$, $\overline{LB_1}$ e $\overline{B_1C_1}$. O segmento de reta $\overline{EL}$ é obtido trivialmente através da Fig.3.1, e é expresso como

$$\overline{EL} = R \cos(\Phi) . \quad (3.10)$$

O segmento de reta $\overline{LB_1}$ tem o mesmo módulo do segmento de reta $\overline{OB}$, sendo assim

$$\overline{LB_1} = \overline{OB} = R \sin(\varphi_n) . \quad (3.11)$$

Para encontramos o módulo do segmento de reta $\overline{B_1C_1}$, é necessário um pouco mais de álgebra.

Considerando a semelhança entre os triângulos ABC e AB_1C_1 , temos que

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB} - \overline{OL}}{\overline{AB}}, \quad (3.12)$$

onde podemos obter analisando a Fig.3.1 $\overline{AB} = R \cos(\varphi_n)$ e $\overline{OL} = R \cos(\Phi)$. Deste modo

$$\overline{B_1C_1} = \overline{BC} \left[\frac{R \cos(\varphi_n) - R \cos(\Phi)}{R \cos(\varphi_n)} \right], \quad (3.13)$$

onde $\overline{BC} = \overline{AB} \tan(\psi_n)$. Desta maneira, obtemos o segmento de reta $\overline{B_1C_1}$, como sendo

$$\overline{B_1C_1} = R \tan(\psi_n) [\cos(\varphi_n) - \cos(\Phi)]. \quad (3.14)$$

Combinando as Eqs.(3.10), (3.11) e (3.14), levando em conta a expressão de ψ_n dado pela Eq.(3.9) e aplicando as conhecidas relações de soma de ângulos de senos e cosseno, podemos finalmente obter a projeção no eixo horizontal x_n , como

$$x_n = \frac{R}{\cos(\psi_n)} [\sin(\alpha_n) + \sin(\Phi - \psi_n)]. \quad (3.15)$$

A relação de recorrência entre x_n e x_{n+1} é obtida analisando a Fig.3.2, onde utilizamos a técnica do método de *unfolding*.

Uma vez que o parâmetro de controle l pode ser escrito pela combinação

$$l = \overline{DP} + \overline{PD'}. \quad (3.16)$$

Desta maneira, podemos, de acordo com a Fig.3.2, escrever

$$\tan(\psi_n) = \frac{\overline{D'S}}{\overline{PD'}} = \frac{x_{n+1}^*}{\overline{PD'}}, \quad (3.17)$$

onde x_{n+1}^* é a projeção, medida imediatamente antes da colisão ($n + 1$).

Desta forma, combinando as Eqs.(3.16) e (3.17), encontramos a relação

$$x_{n+1}^* = l \tan(\psi_n) - \overline{DP} \tan(\psi_n). \quad (3.18)$$

Considerando agora o triângulo C_1DP , encontramos a relação

$$\tan(\psi_n) = \left(\frac{a - x_n}{\overline{DP}} \right), \quad (3.19)$$

onde a é o parâmetro geométrico de controle da largura do bilhar.

Assim, combinando as Eqs.(3.18) e (3.19), obtemos

$$x_{n+1}^* = l \tan(\psi_n) - (a - x_n). \quad (3.20)$$

Levando em consideração o método de *unfolding*, tomamos o $\text{mod}(a)$, e assim encontramos a relação de recorrência entre as projeções da posição da partícula no eixo horizontal, para o

caso das colisões indiretas entre as duas componentes convergentes opostas, como sendo

$$x_{n+1}^* = x_n + l \tan(\psi_n) \mod(a), \quad (3.21)$$

a qual, é mesma equação encontrada para o caso do bilhar estático estudado no Capítulo 2.

Vamos agora encontrar as relações para as variáveis dinâmicas angulares e o tempo. Ao invertermos o movimento da partícula, isto é, considerarmos a direção inversa da partícula dentro do bilhar, a Eq.(3.15) que fornece a projeção da posição da partícula no eixo horizontal do bilhar também é invertida, e o ângulo α_n dado por essa equação se torna α_n^* .

Resolvendo a equação (3.15) em relação a α_n^* , e levando em consideração que o ângulo α_n^* é mudado na direção oposta de α_n , e que o ângulo φ_n deve ter seu sinal invertido, podemos então encontrar o valor de α_n^* , que se tornará α_{n+1}^* quando reinvertermos a direção de propagação da partícula. Deste modo

$$\alpha_{n+1}^* = \arcsin \left[\sin(\psi_n + \Phi) - \frac{x_{n+1} \cos(\psi_n)}{R} \right]. \quad (3.22)$$

Observando a parte superior direita da Fig.3.2, através de uma simples análise de ângulos, podemos encontrar a seguinte relação

$$\varphi_{n+1} = \psi_n - \alpha_{n+1}^*. \quad (3.23)$$

Para obtermos o tempo entre uma colisão e outra, no caso das colisões indiretas com as componentes convergentes opostas, devemos considerar a distância percorrida pela partícula entre as duas colisões como sendo a soma dos segmentos de reta, como mostra a Fig.3.2, ou seja

$$Distancia = \overline{AC_1} + \overline{C_1P} + \overline{PS} + \overline{ST}, \quad (3.24)$$

onde

$$\begin{aligned} \overline{AC_1} &= \frac{R \cos(\varphi_n) - R \cos(\Phi)}{\cos(\psi_n)}, \\ \overline{C_1P} &= \frac{\overline{DP}}{\cos(\psi_n)}, \\ \overline{PS} &= \frac{\overline{PD'}}{\cos(\psi_n)}, \\ \overline{ST} &= \frac{R \cos(\varphi_{n+1}) - R \cos(\Phi)}{\cos(\psi_n)}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Desta forma, de acordo com a Eq.(3.16), considerando o tempo na colisão com a primeira componente convergente como sendo t_n e o tempo na colisão com a componente oposta como sendo t_{n+1} , e dividindo a Eq.(3.24) pela respectiva velocidade V_n , encontramos a relação de recorência no tempo entre as colisões indiretas com as componentes opostas do bilhar, como sendo

$$t_{n+1} = t_n + \frac{R [\cos(\varphi_n) + \cos(\varphi_{n+1}) - 2 \cos(\Phi)] + l}{V_n \cos(\psi_n)} . \quad (3.26)$$

A relação de recorrência entre velocidades e entre a relação do ângulo imediatamente antes a colisão α_n^* e o ângulo imediatamente após α_n , são as mesmas para ambos os casos considerados, isto é, seja colisões sucessivas com a mesma componente, ou convergente, ou colisões indiretas com as componentes opostas.

Considerando a arranjo vetorial entre as velocidades $|\vec{V}_n|$ e $|\vec{V}_{n+1}|$ de acordo com a Fig.3.1 e aplicando a lei da reflexão (Lei de Snell-Decartes), encontramos

$$\alpha_n = \arcsin \left(\frac{|\vec{V}_n|}{|\vec{V}_{n+1}|} \sin(\alpha_n^*) \right) . \quad (3.27)$$

Agora olhando para o lado inferior direito da Fig.3.2, podemos ver como a fronteira convergente se comporta quando perturbada. Sua amplitude varia entre $[-B_0, +B_0]$. Ao fazermos um arranjo vetorial entre o módulo da amplitude de oscilação da fronteira convergente, e os vetores velocidade $\vec{V}_n$ e $\vec{V}_{n+1}$, e após aplicarmos a lei dos cossenos em relação ao ângulo α_n^* , obtemos a relação

$$V_{n+1} = \sqrt{V_n^2 + 4B_n^2 + 4V_n B_n \cos(\alpha_n^*)} , \quad (3.28)$$

onde B_n é a equação da velocidade da fronteira dependente do tempo no momento da n-ésima colisão no tempo t_n e já foi descrita pela Eq.(3.2).

Deste modo, podemos descrever o mapeamento por completo para ambos os casos de colisões [35], conforme o conjunto de equações abaixo

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \sqrt{V_n^2 + 4B_n^2 + 4V_n B_n \cos(\alpha_n^*)} \\ \alpha_n &= \arcsin \left(\frac{|\vec{V}_n|}{|\vec{V}_{n+1}|} \sin(\alpha_n^*) \right) \end{aligned} . \quad (3.29)$$

Se $|\varphi_{n+1}| \leq \Phi$, temos o caso de colisões sucessivas com a mesma componente convergente, e as equações dinâmicas são dadas por

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}^* = \alpha_n \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + \pi - 2\alpha_n \pmod{2\pi} \\ t_{n+1} = t_n + \frac{2R \cos(\alpha_n)}{V_n} \end{cases} . \quad (3.30)$$

Por outro lado, se $|\varphi_{n+1}| > \Phi$, temos o caso em que ocorrem colisões indiretas com as componentes convergentes opostas, e as relações dinâmicas são dadas por

$$\begin{cases} \psi_n = \alpha_n - \varphi_n \\ x_n = \frac{R}{\cos(\psi_n)} [\sin(\alpha_n) + \sin(\Phi - \psi_n)] \\ x_{n+1} = x_n + l \tan(\psi_n) \\ \alpha_{n+1}^* = \arcsin[\sin(\psi_n + \Phi) - x_{n+1} \cos(\psi_n)/R] \\ \varphi_{n+1} = \psi_n - \alpha_{n+1}^* \\ t_{n+1} = t_n + \frac{R[\cos(\varphi_n) + \cos(\varphi_{n+1}) - 2 \cos(\Phi)] + l}{V_n \cos(\psi_n)} \end{cases} . \quad (3.31)$$

3.3 Velocidade de Ressonância

Ao linearizarmos o mapa não perturbado estudado no Capítulo 2, encontramos de acordo com a variáveis ação-ângulo, o número de rotação:

$$\sigma = \arccos \left(1 - \frac{8bl}{a^2 \cos^2(\psi_n^*)} \right) , \quad (3.32)$$

onde o ponto fixo ψ_n^* é dado pela Eq.(2.13) e $m \geq 1$ é o número de *stadiums* espelhados que a partícula percorre em uma trajetória.

Ao considerarmos uma órbita em que a partícula se move ao redor de algum ponto fixo no modelo não perturbado, o tempo entre duas colisões sucessivas é

$$\tau \approx \frac{l}{\cos(\psi_n^*) V_n} . \quad (3.33)$$

Assim, podemos encontrar um período de rotação dessa órbita ao redor do ponto fixo como

$$T_{rot} = \frac{2\pi\tau}{\sigma} . \quad (3.34)$$

Quando introduzimos a perturbação externa, encontramos que o período dessa perturbação é dado por

$$T_{ext} = \frac{2\pi}{\omega} . \quad (3.35)$$

Quando o período de rotação externa for igual ao período de rotação de uma órbita ao redor do ponto fixo, temos então uma ressonância entre as oscilações da fronteira móvel e a rotação ao redor de um ponto fixo. Sendo assim, ao igualarmos as Eqs.(3.34) e (3.35), obtemos a expressão da velocidade de ressonância para o modelo perturbado [35], dada por

$$V_r = \frac{l}{\cos(\psi_n^*) \arccos \left(1 - \frac{8bl}{(a \cos(\psi_n^*))^2} \right)} . \quad (3.36)$$

Vale ressaltar que tal ressonância só é observada no bilhar quando este não está sobre a ação do mecanismo desfocalizador.

O fenômeno de ressonância é típico de sistemas dinâmicos que possuem espaço de fases

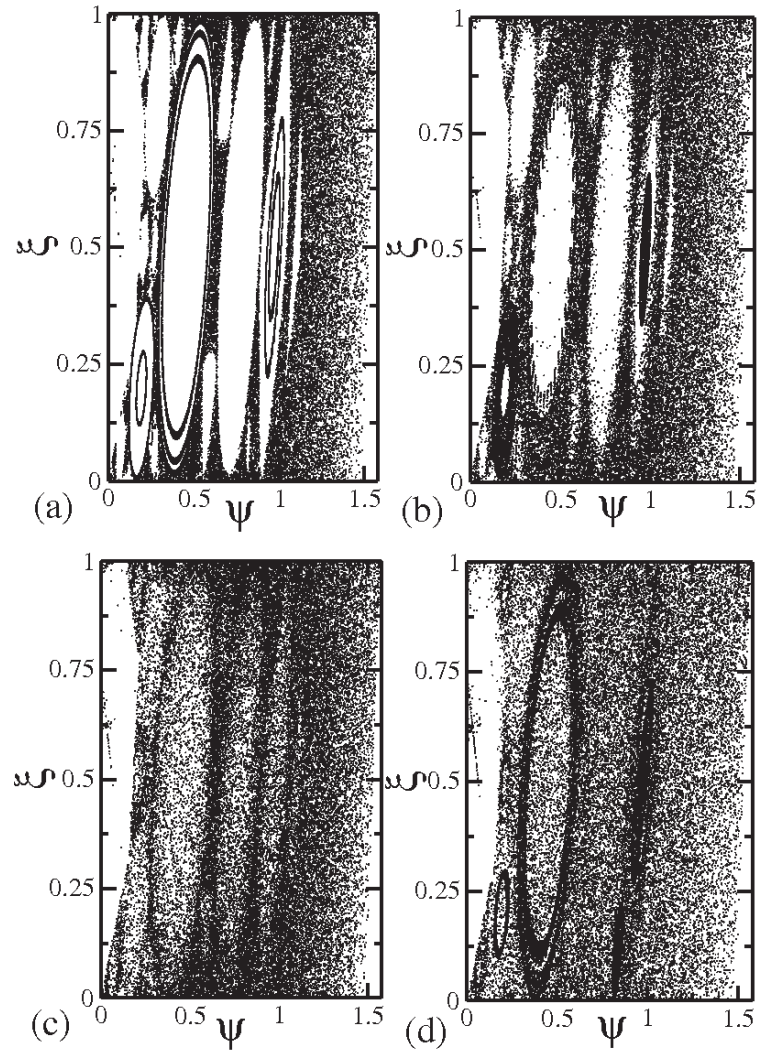


Figura 3.3: Espaços de fase para o modelo perturbado periodicamente no tempo para 50 condições iniciais diferentes. Os parâmetros de controle utilizados foram $l = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.01$, $B_0 = 0.01$ e $m = 1$, e se mantiveram constantes nos 4 itens da figura. As velocidades iniciais são: (a) $V_0 = 5$, (b) $V_0 = 1.5$, (c) $V_0 = 1.2$ e (d) $V_0 = 0.5$.

do tipo misto. Quando uma órbita encontra-se na velocidade igual ou menor do que a velocidade de ressonância, a partícula pode penetrar nas vizinhanças dos pontos fixos permanecendo por algum intervalo de tempo dentro da ilha de estabilidade [2, 37]. Esse tipo de evento acontece pois as curvas invariantes que antes delimitavam a estrutura regular, com a introdução da perturbação, tornaram-se “porosas”, e se comportam de maneira semelhante a uma *stochastic layer* [47]. Como consequência disso, todo o espaço de fases se torna acessível para a partícula, assim como mostra a Fig.3.3, para 25 condições iniciais diferentes escolhidas aleatoriamente com os parâmetros de controle $l = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.01$, $B_0 = 0.01$ e $m = 1$.

Para essa combinação de parâmetros de controle, através da Eq.(3.36) encontramos uma velocidade de ressonância igual $V_r = 1.2$. As velocidades iniciais de cada espaço de fases da na Fig.3.3 são dadas respectivamente por: (a) $V_0 = 5$, (b) $V_0 = 1.5$, (c) $V_0 = 1.2$ e (d) $V_0 = 0.5$. Vale ressaltar que as variáveis em que o espaço de fases foi construído correspondem, no eixo

horizontal, ao ângulo entre a vertical no ponto de colisão e a trajetória, ou seja, ψ , dado pela Eq.(3.9), e no eixo vertical, introduzimos a nova variável ξ , onde $\xi = 0.5 + x_n/a$. Escolhemos essas variáveis, pois elas são análogas as variáveis que descrevem o modelo na sua versão não perturbada.

Fazendo uma análise mais aprofundada na Fig.3.3, vemos que quando $V_0 > V_r$, as ilhas de estabilidade não se tornam acessíveis a partícula como mostra a Fig.3.3(a) em que $V_0 = 5$. Já na Fig.3.3(b), onde $V_0 = 1.5$, podemos ver que algumas órbitas ainda penetram um pouco nas ilhas de estabilidade.

Agora, ao analisarmos a Fig.3.3(c), onde $V_0 = V_r$, podemos ver que a maioria do espaço de fases se torna acessível, o mesmo comportamento acontece quando $V_0 < V_r$, como é o caso da Fig.3.3(d), onde $V_0 = 0.5$. Podemos ver ainda, em ambas as Figs.3.3(c,d), uma densidade maior de pontos, ao redor de algumas ilhas de estabilidade sugerindo que a ressonância entre a rotação ao redor de um ponto fixo e a perturbação externa, levou a partícula a ter um comportamento de uma órbita em um regime de *stickiness* [2, 48]. Este regime é caracterizado por aprisionamentos temporários de órbitas ao redor de ilhas de estabilidade [49, 50, 51], geralmente afetando propriedades de difusão e transporte [52, 53, 54].

Acreditamos também que o comportamento de órbitas em regime de *stickiness*, seja o mecanismo responsável pelo decréscimo de velocidade da partícula [55], quando evoluímos a dinâmica em função do número de colisões com a fronteira móvel convergente. A Figura 3.4 mostra uma única condição inicial sendo evoluída até 10^5 colisões.

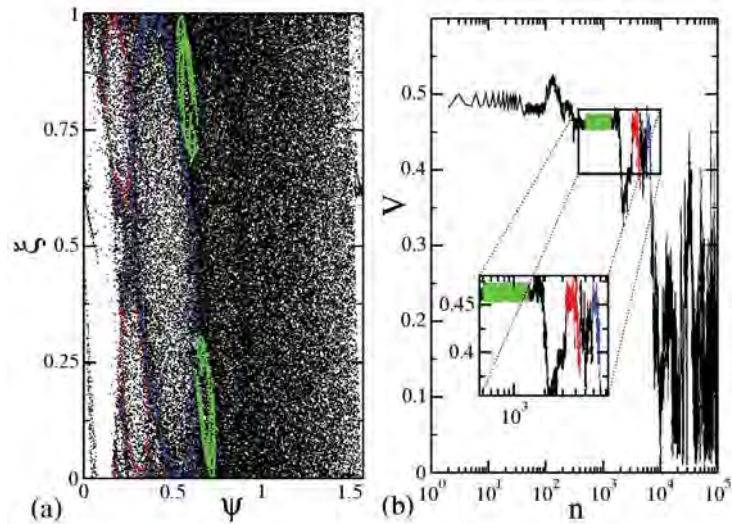


Figura 3.4: Em (a) mostramos o comportamento de uma órbita em regime de *stickiness*, onde estão ressaltados de cores diferentes esse aprisionamento temporário ao redor das ilhas de estabilidade. Já em (b), mostramos como as mesmas órbitas em regime de *stickiness* de (a) interferem no comportamento da velocidade em função do número de colisões com a fronteira convergente móvel. Os parâmetros de controle utilizados foram: $l = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.01$, $B_0 = 0.01$ e $V_0 = 0.5$

Analisando a Figura 3.4(a), podemos ver ressaltado nas cores azul, vermelho e verde, o comportamento ressonante de trajetórias que ficam aprisionadas por um certo intervalo de tempo em torno das ilhas de estabilidade em órbitas de regime de *stickiness*. Já na Fig.3.4(b), podemos ver destacado novamente nas cores azul, vermelho e verde, como esse comportamento de *stickiness* influencia na velocidade em função do número de colisões. Podemos perceber que após uma dinâmica inicial em regime de *stickiness*, a curva de velocidade sofre um decréscimo.

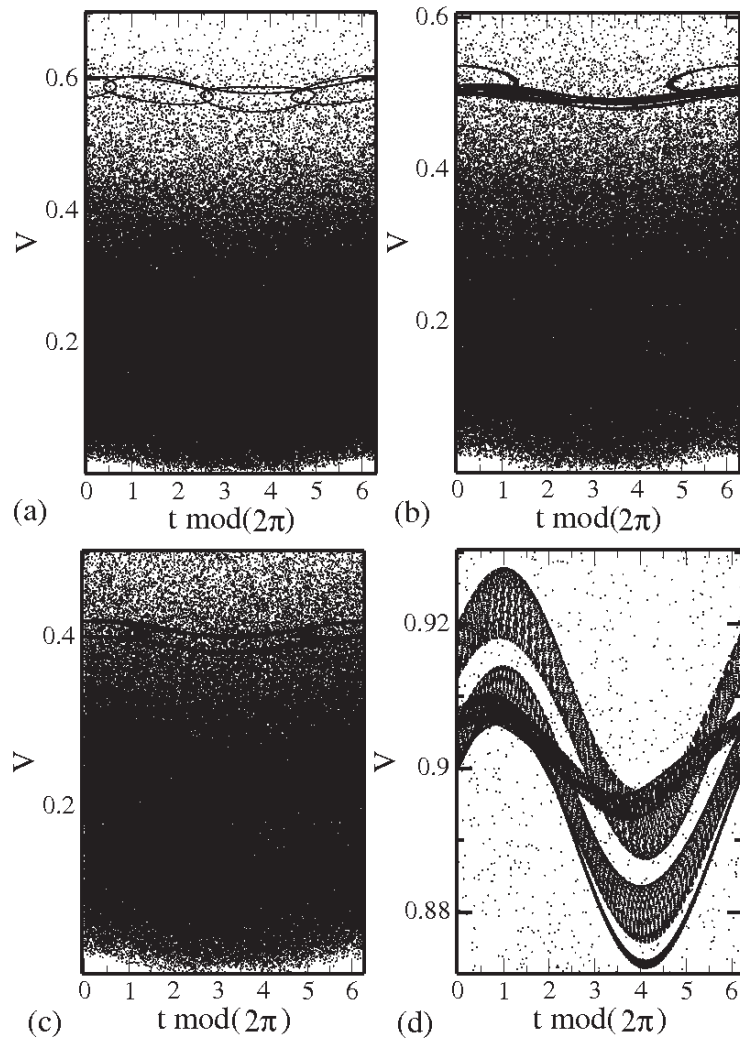


Figura 3.5: Espaços de fases $(V, t \bmod(2\pi))$. O parâmetro de velocidade inicial usado foi: (a) $V_0 = 0.6$, (b) $V_0 = 0.5$, (c) $V_0 = 0.4$ e em (d) uma ampliação na faixa das órbitas em regime de *stickiness* para $V_0 = 0.9$.

A Figura 3.5 mostra espaços de fase para as variáveis $(V, t \bmod(2\pi))$ para as órbitas em regime de *stickiness*. Cada item da Fig.3.5 foi construído iterando 50 condições iniciais distintas iteradas até 10^5 colisões. Podemos ver nas Figs.3.5(a,b,c) a dinâmica inicial das órbitas em regime de *stickiness* conforme a a velocidade inicial dada. Já na Fig.3.5(d), mostramos uma ampliação do regime inicial da dinâmica para o parâmetro de controle $V_0 = 0.9$.

Quando analisamos esse comportamento de *stickiness* na média das velocidades, observa-

mos fenômeno semelhante ao do decréscimo de velocidade mostrado na Fig.3.4. A Figura 3.6, mostra o comportamento da velocidade média da partícula em um *ensemble* de 5000 condições iniciais distintas para diferentes valores de velocidade inicial. Podemos perceber que o decréscimo da velocidade da partícula em função de n é nítido. As curvas de velocidade média começam com um regime constante para as colisões iniciais dentro do seu respectivo parâmetro de velocidade inicial, assim como mostra também as Figs.3.4 e 3.5; e logo depois desse regime de stickiness no platô inicial da dinâmica, as curvas de $\bar{V}$ experimentam um repentino decaimento com a evolução de n , e depois se estabilizam em um regime de velocidade constante novamente, mas, com sua velocidade final (até 3×10^6 colisões), menor do que a velocidade inicial, caracterizando dessa maneira, um retardo de velocidade. Para a construção da Fig.3.6, consideramos apenas velocidades iniciais abaixo da velocidade de ressonância, dada pela Eq.(3.36). Os parâmetros de controle utilizados foram $a = 0.5$, $b = 0.01$, $l = 1$ e $B_0 = 0.01$.

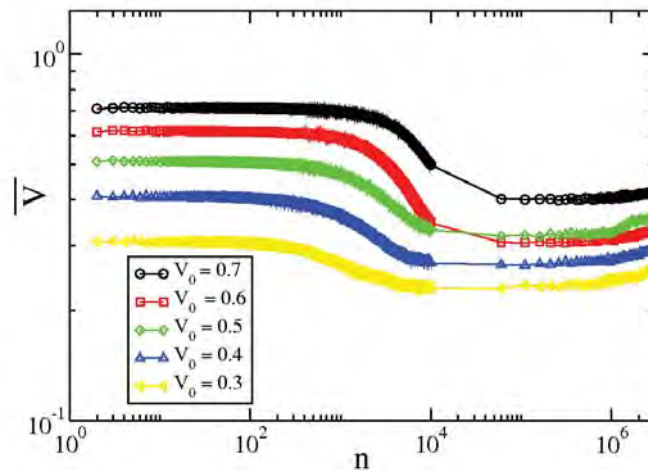


Figura 3.6: Comportamento das curvas de velocidade média em função de n . Podemos ver nitidamente o decréscimo de velocidade em função de n . Os parâmetros de controle utilizados foram: $l = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.01$, $B_0 = 0.01$.

3.4 Aceleração de Fermi

Em 1949, o físico italiano Enrico Fermi [56], estudava o comportamento da interação dos raios cósmicos de altas energias com campos magnéticos oscilantes. Ele percebeu, que na média, a energia das partículas tendia ao crescimento. A esse fenômeno de crescimento de energia foi dado o nome de *aceleração de Fermi*.

Em bilhares existe uma conjectura sobre esse fenômeno de aceleração de Fermi. A conjectura LRA (Loskutov-Ryabov-Aikinshin) [44, 57] diz que para bilhares que possuem alguma componente caótica em seu espaço de fases na sua versão estática, a introdução da perturbação

temporal externa na fronteira é condição suficiente para observarmos o fenômeno de aceleração de Fermi. Em 2008, F.Lenz, *et al.* [58], mostrou que no bilhar elíptico, que possui a dinâmica integrável em sua versão estática, quando introduzida a dependência temporal na fronteira, o fenômeno de aceleração de Fermi ocorria. Para este caso em particular, constatou-se que a aceleração de Fermi se dá porque algumas órbitas cruzam a região da curva seatrix no espaço de fases, que se torna uma *stochastic layer* quando a perturbação é introduzida. Esse cruzamento das regiões de órbitas, faz com que a partícula sofra os efeitos da aceleração de Fermi.

Recentemente Leonel e Bunimovich [47], complementaram a conjectura LRA, confirmando que somente a presença de órbitas heteroclínicas no espaço de fases da versão estática do bilhar, é condição suficiente para que o bilhar experimente aceleração de Fermi, quando a dependência temporal na fronteira é introduzida.

Em nosso bilhar stadium-like com uma perturbação periódica no tempo sobre as fronteiras convergentes, observemos o fenômeno de aceleração de Fermi quando a partícula possui velocidade inicial maior do que a velocidade de ressonância. Neste caso, a partícula não experimenta o aprisionamento periódico pela ressonância, mecanismo este responsável pelo decréscimo na velocidade em função do número de colisões com a fronteira convergente. Podemos ver na Fig.3.3(a), que as ilhas de estabilidade não são mais acessadas pela partícula quando $V_0 > V_r$.

Entretanto, não são todas as condições iniciais que sofrem os efeitos do fenômeno de aceleração de Fermi. A figura 3.7 mostra um gráfico de $\alpha \times \varphi$, para $V_0 = 3.6$, onde as condições iniciais angulares foram escolhidas aleatoriamente no intervalo $[0, \pi/2]$.

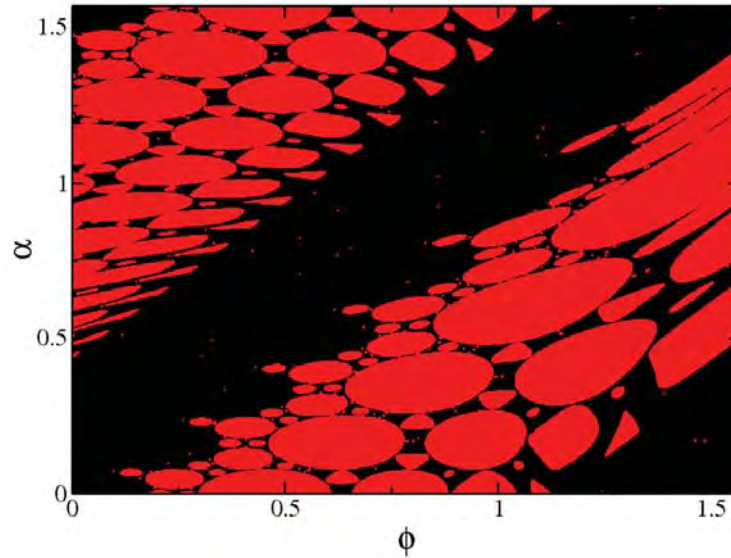


Figura 3.7: Grade 500×500 das condições iniciais angulares α e φ , onde $V_0 = 3.6$. Os parâmetros de controle utilizados foram: $l = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.01$. A região em preto indica crescimento de energia, ao passo, que a região em vermelho, não exhibe o fenômeno de aceleração de Fermi para pelo menos 10^8 colisões com a fronteira.

A região em preto corresponde as condições iniciais que sofrem aceleração de Fermi e as ilhas em vermelho mostram as condições iniciais que não sofreram os efeitos do crescimento

ilimitado de energia. Essa distinção de condições iniciais acontece pois ao escolhermos um par (α, φ) dentro das ilhas em vermelho, corresponde a uma escolha dentro de uma ilha de estabilidade no espaço de fases (ξ, ψ) . Sendo assim, tal condição inicial não sofre aceleração de Fermi pois a sua dinâmica é majoritariamente regular. Para a confecção da Fig.3.7, foi utilizado uma grade de 500×500 condições iniciais, onde iteramos cada par de condição inicial 10^8 vezes. Classificamos as condições iniciais que sofreram aceleração de Fermi, somente aquelas que após esse número de iteração, tiveram sua velocidade aumentada no mínimo em uma ordem de grandeza, quando comparada com $V_0 = 3.6$.

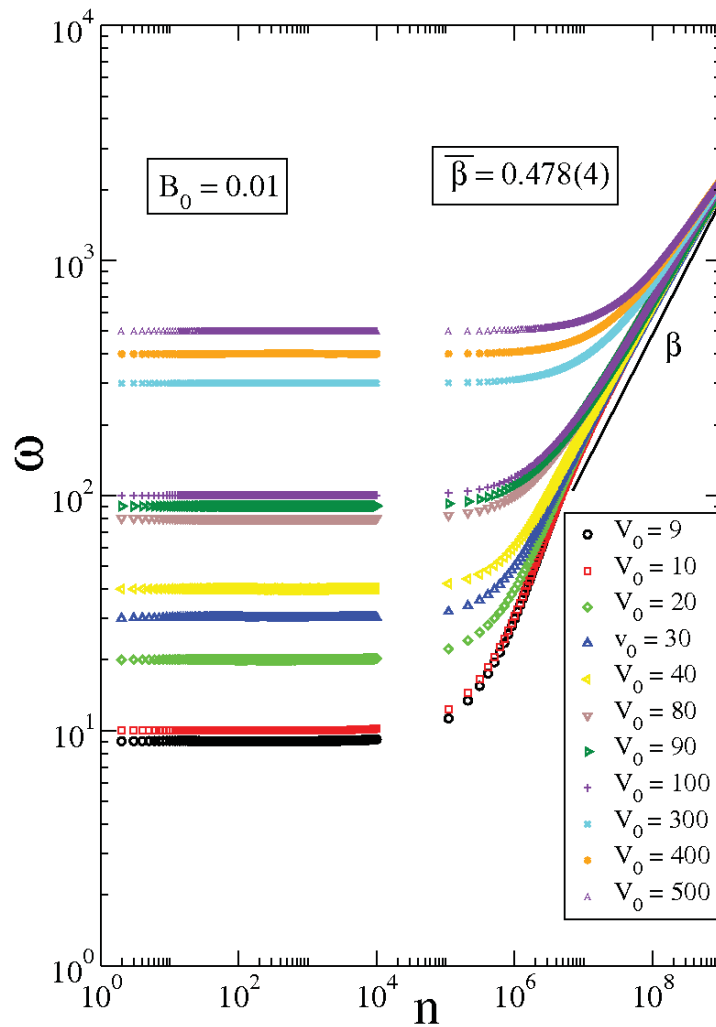


Figura 3.8: Comportamento das curvas ω , com diferentes valores de velocidade inicial em função do número de colisões. Podemos ver claramente o típico comportamento do fenômeno de aceleração de Fermi. Foi mantido fixo a amplitude oscilação da fronteira móvel em $B_0 = 0.01$. Os parâmetros de controle utilizados foram: $l = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.01$

Afim de uma melhor análise estatística em cima do fenômeno de aceleração de Fermi, reavaliamos o comportamento das curvas de desvio quadrático médio da velocidade, que denotaremos por ω . Essas curvas possuem as mesmas propriedades da velocidade média.

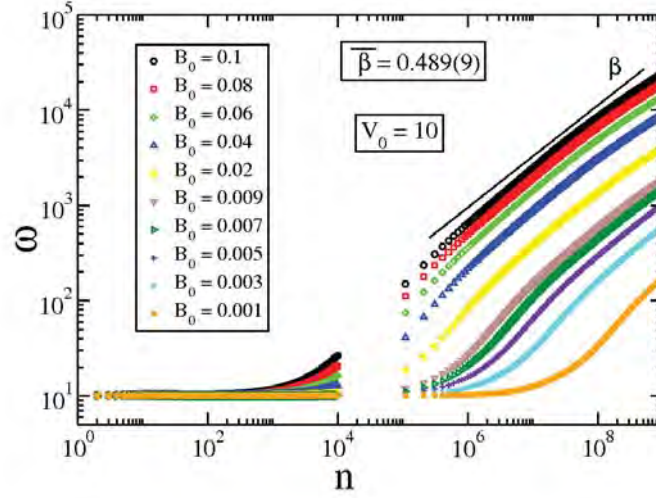


Figura 3.9: Comportamento das curvas ω , com diferentes valores de amplitude de oscilação da fronteira móvel em função do número de colisões. Podemos ver claramente o típico comportamento do fenômeno de aceleração de Fermi. Foi mantida fixa a velocidade inicial da partícula em $V_0 = 10$. Os parâmetros de controle utilizados foram: $l = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.01$

Definimos ω como sendo

$$\omega(n, V_0, B_0) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sqrt{V_i^2(n, V_0, B_0) - \bar{V}^2(n, V_0, B_0)}, \quad (3.37)$$

onde M representa um *ensemble* de condições iniciais, e velocidade média é dada por

$$\bar{V}(n, V_0, B_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i. \quad (3.38)$$

Enfatizamos que as curvas de ω , assim como as curvas de velocidade média para o caso ressonante, não dependem dos parâmetros de controle a , b e l , pois esses parâmetros são invariantes de escala conforme a descrição dos expoentes de Lyapunov no Capítulo 2, e portanto, basta somente uma combinação desses parâmetros para uma boa análise estatística.

Em nossos resultados numéricos iteramos a Eq.(3.37) até 10^9 colisões com a fronteira móvel, para um *ensemble* de 5000 pares condições iniciais (α, φ) distintas. A análise foi feita em duas partes. Na primeira, variamos a velocidade inicial da partícula e mantivemos constante a amplitude de oscilação da fronteira móvel. Já na segunda parte, fizemos o processo inverso, ou seja, variamos a amplitude de oscilação da fronteira móvel e a velocidade inicial foi mantida fixa.

As Figuras 3.8 e 3.9 mostram o comportamento das curvas de ω , em função de n . Na Figura 3.8, podemos ver que todas as curvas de ω se comportam de maneira semelhante, para uma extensa faixa de velocidade iniciais distintas, mas com o valor da amplitude de oscilação da fronteira móvel sendo mantido constante em $B_0 = 0.01$. As curvas obedecem a um regime constante

no início que depende da velocidade inicial, e então, elas passam por um *crossover* (n_x), e iniciam um regime de crescimento com um expoente de crescimento médio $\bar{\beta} = 0.47(9) \approx 0.5$, caracterizando assim, um comportamento típico de aceleração de Fermi. Já na Fig.3.9, são mostradas as curvas de ω para diferentes valores da amplitude de oscilação da fronteira móvel, mas com o valor da velocidade inicial sempre constante igual a $V_0 = 10$. Para as primeiras colisões há um regime constante, e depois de passar por um *crossover* (n_x), as curvas experimentam o crescimento ilimitado de energia, com um expoente de crescimento médio ≈ 0.5 .

3.4.1 Discussão de escala

Analisando o comportamento das curvas de ω , podemos propor algumas hipóteses de escala para caracterizar o fenômeno de aceleração de Fermi para qualquer faixa de parâmetros, desde que estes obedeçam as condições $V_0 > V_r$ e $B_0/\omega \ll l$. Propomos que:

(i) $\omega \propto V_0^\mu$, para $n \ll n_x$, onde μ é um expoente crítico.

(ii) $\omega \propto n^\beta$, para $n \gg n_x$, onde $\beta \approx 0.5$ é o expoente de crescimento.

(iii) $n_x \propto V_0^{z_1} B_0^{y+z_2}$, onde z_1 e z_2 são expoentes dinâmicos e y é um expoente de ajuste, de forma que $y = 4.5$.

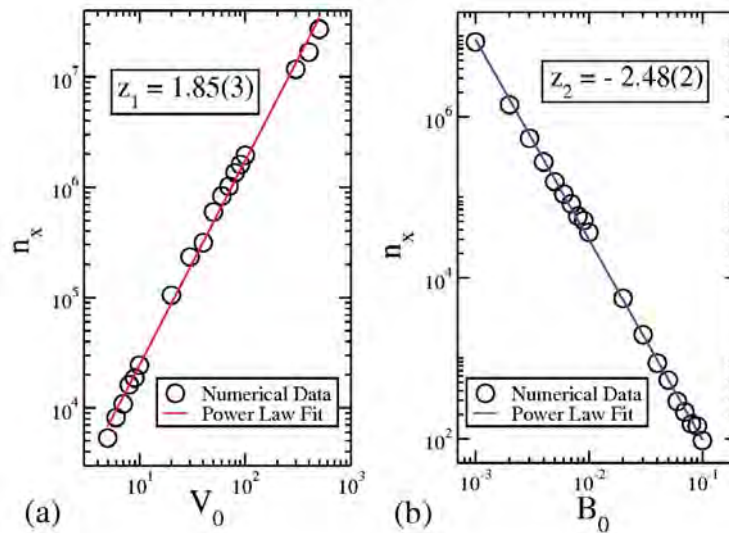


Figura 3.10: Em (a) temos o ajuste em lei de potência de $n_x \times V_0$, onde foi mantido constante $B_0 = 0.01$ e em (b) mostramos o ajuste em lei de potência de $n_x \times B_0$, onde foi mantido constante $V_0 = 10$. Ambos os ajustes nos fornecem os respectivos expoentes: $z_1 = 1.85(3)$ e $z_2 = -2.48(2)$. Os parâmetros de controle utilizados foram: $l = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.01$.

Considerando que nas curvas de ω o regime inicial para $n \ll n_x$, a velocidade permanece constante, é fácil perceber que o expoente crítico $\mu = 1$.

Os expoente dinâmicos z_1 e z_2 são obtidos através de ajustes em lei de potência pelo número de colisão de $crossover(n_x)$ contra a velocidade inicial e novamente n_x contra a amplitude de oscilação da fronteira móvel respectivamente. Esse ajustes numéricos são mostrados na Fig.3.10, onde em (a) encontramos $z_1 = 1.85(3)$ e em (b) obtemos $z_2 = -2.48(2)$.

De acordo com a hipóteses da escala propostas e com os expoentes encontrados, podemos agora colapsar as curvas de ω em uma única curva universal que descreve o comportamento da dinâmica da partícula ao longo do número de colisões e dos parâmetros de controle velocidade inicial e amplitude de oscilação da fronteira móvel [55], confirmando assim uma invariância de escala de ω em função dos parâmetros de controle

A Figura 3.11 mostra perfeitamente esse colapso, onde todas as curvas da Fig.3.11(a) são colapsadas em (b).

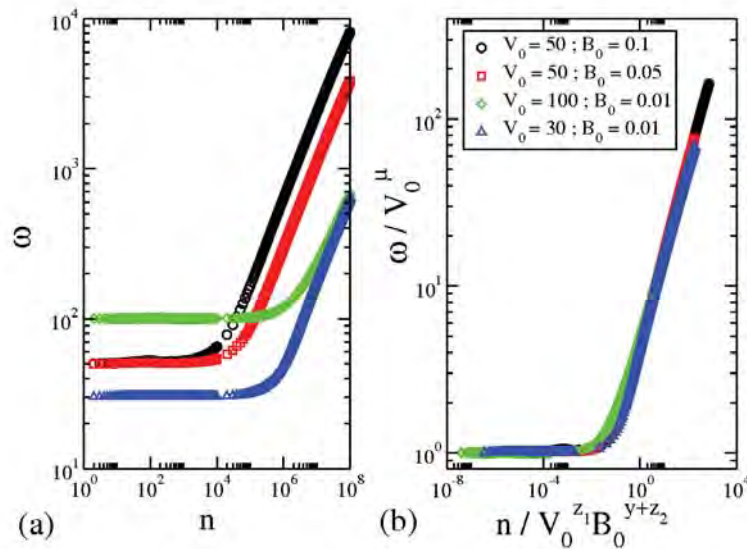


Figura 3.11: Em (a) mostramos o comportamento de algumas curvas de ω e em (b) temos o colapso de todas as curvas de (a) em uma única curva universal. Os parâmetros de controle utilizados foram: $l = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.01$

Capítulo 4

O Bilhar Stadium Dependente do Tempo Dissipativo

4.1 Resumo

Neste capítulo discutimos alguns resultados para o bilhar stadium com fronteira dependente do tempo, considerando uma versão dissipativa. Descrevemos todos os procedimentos necessários para obtenção do mapa que fornece a dinâmica do modelo onde a partícula sofre efeitos de dissipação introduzidos via choques inelásticos. Mostramos que a introdução de dissipação no sistemas causa uma drástica mudança no comportamento da partícula e suprime o fenômeno de aceleração de Fermi, mostrando assim que esse fenômeno não é estruturalmente estável. Descrevemos o comportamento da velocidade média em função do coeficiente de dissipação e da velocidade inicial usando formalismo de escala e mostramos que dependendo dos parâmetros de controle da velocidade inicial e do coeficiente de amortecimento, diferentes condições iniciais convergem para diferentes pontos fixos (*sinks*).

4.2 Mapeamento Dissipativo

O modelo consiste em considerar uma partícula puntual sofrendo colisões dentro de um bilhar stadium-like com fronteiras circulares dependentes periodicamente do tempo. A dissipação é introduzida via colisões inelásticas da partícula com as fronteiras móveis. Ressaltamos que colisões com os segmentos de reta paralelos continuam sendo totalmente elásticas, e que consideramos a dinâmica com a aproximação de fronteira fixa, ou seja, no momento da colisão a partícula e a fronteira trocam momentum como se a fronteira estivesse se movendo.

Assim como no caso conservativo, estudado no Capítulo 3, a dinâmica da partícula se dá de duas maneiras distintas: (i) colisões sucessivas com a mesma componente convergente, e (ii) colisões indiretas com as componentes opostas.

As componentes convergentes possuem o mesmo raio R e o ângulo entre elas continua

sendo 2Φ , onde

$$R = \frac{a^2 + 4b^2}{8b} \quad , \quad \Phi = \arcsin\left(\frac{2a}{R}\right) . \quad (4.1)$$

Colisões sucessivas ocorrem, quando $|\varphi_{n+1}| \leq \Phi$, e as equações dinâmicas são dadas por

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}^* = \alpha_n \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + \pi - 2\alpha_n \pmod{2\pi} \\ t_{n+1} = t_n + \frac{2R \cos(\alpha_n)}{V_n} \end{cases} . \quad (4.2)$$

Por outro lado, se $|\varphi_{n+1}| > \Phi$, temos o caso em que ocorrem colisões indiretas com as componentes convergentes opostas, e as relações dinâmicas são fornecidas por

$$\begin{cases} \psi_n = \alpha_n - \varphi_n \\ x_n = \frac{R}{\cos(\psi_n)} [\sin(\alpha_n) + \sin(\Phi - \psi_n)] \\ x_{n+1} = x_n + l \tan(\psi_n) \\ \alpha_{n+1}^* = \arcsin[\sin(\psi_n + \Phi) - x_{n+1} \cos(\psi_n)/R] \\ \varphi_{n+1} = \psi_n - \alpha_{n+1}^* \\ t_{n+1} = t_n + \frac{R[\cos(\varphi_n) + \cos(\varphi_{n+1}) - 2\cos(\Phi)] + l}{V_n \cos(\psi_n)} \end{cases} . \quad (4.3)$$

As equações que fornecem a relação de recorrência da velocidade da partícula e do ângulo de reflexão α_n , sofrem mudanças com a introdução da dissipação [8].

Ao avaliarmos colisões inelásticas, introduzimos dois coeficientes de dissipação distintos. O primeiro deles η , nos fornece o amortecimento em relação a componente tangencial da velocidade, onde $\eta \in [0, 1]$, já o segundo coeficiente γ , nos fornece o amortecimento com a componente normal da velocidade, com $\gamma \in [0, 1]$ (ver Refs.[34, 47]).

Decompondo o vetor velocidade da partícula $\vec{v}_n$, em componente tangencial e componente normal, avaliadas antes da colisão temos que

$$\vec{v}_n \cdot \vec{T}_n = v_n \sin(\alpha_n^*) , \quad (4.4)$$

$$\vec{v}_n \cdot \vec{N}_n = -v_n \cos(\alpha_n^*) . \quad (4.5)$$

Para avaliarmos como será velocidade da partícula após a colisão, devemos fazer uma mudança de referencial, conforme a Fig.4.1, pois devemos calcular a velocidade da partícula em um referencial que está se movendo. Na figura 4.1 o referencial xy é o referencial inercial, e o referencial $x'y'$ é o referencial não inercial.

De acordo com a representação vetorial da Fig.4.1, temos que:

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{r}' , \quad (4.6)$$

onde $\vec{R}$ é o vetor posição da partícula medido no referencial inercial, $\vec{r}$ é o vetor posição da fronteira móvel medido no referencial inercial, e $\vec{r}'$ é o vetor posição da partícula medido no

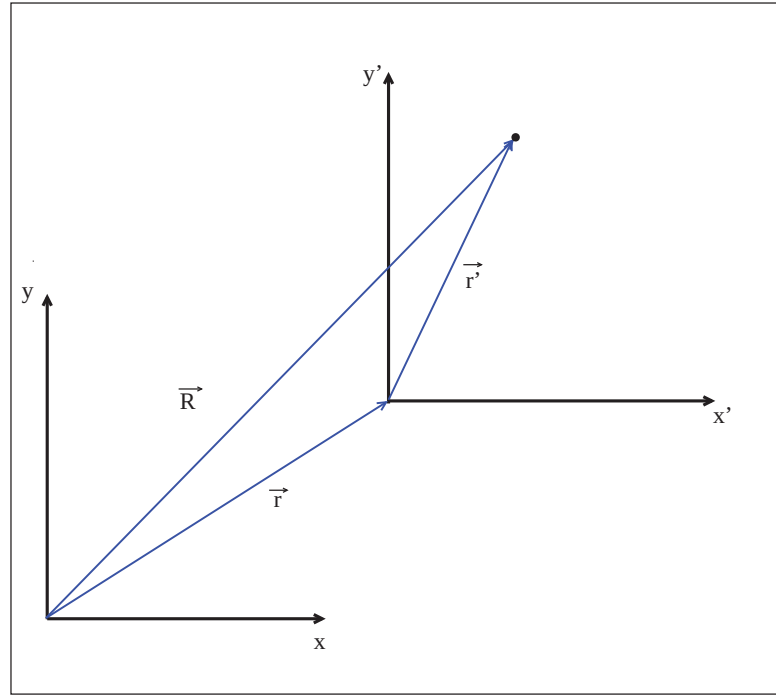


Figura 4.1: Esquema Ilustrativo de uma Mudança de Referencial.

referencial não inercial.

Por questão de notação, sempre que utilizarmos o índice *l* (*linha*), estaremos lidando com o referencial não inercial. Ao derivamos a Eq.(4.5), obtemos a relação de velocidades entre os referenciais

$$\vec{V}_p = \vec{v}_w + \vec{v}'_p, \quad (4.7)$$

onde o subíndice *p* indica que a velocidade está relacionada a partícula e o subíndice *w* nos diz que estamos lidando com a fronteira móvel. A equação que fornece a velocidade da fronteira móvel já foi estudada no Capítulo 3 pela Eq.(3.2), e é descrita como

$$v_w = B(t_n) = B_0 \cos(\omega t_n). \quad (4.8)$$

As leis de reflexão para o caso dissipativo, para as componentes normal e tangencial, são

$$\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\gamma \vec{V}'_n \cdot \vec{N}_{n+1}, \quad (4.9)$$

$$\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = \eta \vec{V}'_n \cdot \vec{T}_{n+1}. \quad (4.10)$$

Substituindo as relações (4.10) e (4.9) na Eq.(4.7), encontramos as relações de velocidade

para a colisão $n + 1$, ou seja

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\gamma \vec{V}_n \cdot \vec{N}_{n+1} + (1 + \gamma) B(t_{n+1}) \cdot \vec{N}_{n+1} , \quad (4.11)$$

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = \eta \vec{V}_n \cdot \vec{T}_{n+1} + (1 - \eta) B(t_{n+1}) \cdot \vec{T}_{n+1} , \quad (4.12)$$

onde $B(t_{n+1})$ é dado pela Eq.(4.8).

Desta maneira, obtemos a relação de recorrência entre as velocidades para o modelo dissipativo

$$|\vec{V}_{n+1}| = \sqrt{(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1})^2 + (\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1})^2} . \quad (4.13)$$

Para obtermos a relação do ângulo de reflexão α_n , mantemos fixa a componente tangencial e fazemos um remanejamento vetorial utilizando a lei da Reflexão entre $\vec{V}_n$ e $\vec{V}_{n+1}$, deste modo

$$|\vec{V}_n| \sin(\alpha_n^*) = |\vec{V}_{n+1}| \sin(\alpha_n) . \quad (4.14)$$

Isolando α_n , encontramos

$$\alpha_n = \arcsin \left[\frac{|\vec{V}_n|}{|\vec{V}_{n+1}|} \sin(\alpha_n^*) \right] . \quad (4.15)$$

Agora que obtemos as equações que descrevem a dinâmica do sistema, podemos finalmente descrever o comportamento de uma partícula puntual no interior de um bilhar stadium-like com fronteiras circulares dependentes periodicamente do tempo, sob efeito de dissipação introduzida via colisões inelásticas.

4.3 Supressão de Aceleração de Fermi

Podemos descrever o fenômeno de aceleração de Fermi como basicamente um crescimento ilimitado de energia. Recentemente na literatura, vários trabalhos sobre supressão de aceleração de Fermi em bilhares com introdução de dissipação têm sido publicados. Essa dissipação pode ser introduzida via colisões inelásticas da partícula com a fronteira móvel [32, 33, 34, 47, 59], via força de arrasto por um gás [60, 61, 62] ou até mesmo por força de atrito cinético da partícula com a superfície plana do bilhar [63]. Para este último caso de dissipação, a escolha da perturbação temporal da fronteira é importante e influencia na supressão do fenômeno de crescimento ilimitado de energia [63].

Contudo, ao considerarmos a perturbação da fronteira do tipo harmônica e periódica no tempo, percebemos que qualquer dissipação que seja introduzida no sistema, por menor que seja, já é suficiente para suprimir o fenômeno de aceleração de Fermi.

Sendo assim, podemos dizer que o fenômeno de aceleração de Fermi não é estruturalmente estável. Além disso, com a introdução da dissipação podemos caracterizar uma transição

de fase no sistema. Se o coeficiente de amortecimento é igual a unidade, então temos um sistema conservativo onde o fenômeno de crescimento ilimitado de energia é inerente. Então, com os efeitos da dissipação, caracterizamos uma transição de crescimento ilimitado de energia para crescimento limitado de energia.

4.3.1 Curvas de $\bar{V}$

Nesta seção, analisamos como as curvas de velocidade média, $\bar{V}$, se comportam na evolução temporal dentro do bilhar stadium-like dependente do tempo com a introdução de dissipação via colisões inelásticas da partícula com a fronteira móvel. Vale lembrar que a análise feita para $\bar{V}$ segue as mesmas propriedades de ω que é o desvio quadrático da velocidade média, como visto no Capítulo 3.

A velocidade média é definida por

$$\bar{V} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n V_j(n, V_0, \gamma), \quad (4.16)$$

onde M é um *ensemble* de 5000 diferentes condições iniciais (α, φ) e V_j é expresso por

$$V(n, V_0, \gamma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i. \quad (4.17)$$

Avaliamos a dinâmica da partícula sob os efeitos da dissipação de duas maneiras distintas: (i) Variamos a velocidade inicial e fixamos o valor do coeficiente de amortecimento normal; (ii) fixamos a velocidade inicial e variamos o coeficiente de amortecimento da componente normal da velocidade da partícula. É importante frisar aqui, que os parâmetros de controle do bilhar foram mantidos constantes durante todas as simulações numéricas, já que eles são invariantes de escala, conforme a análise feita no Capítulo 2. Também decidimos por manter constante a amplitude de oscilação da fronteira móvel em $B_0 = 0.01$, pois, conforme análise feita no Capítulo 3, esse parâmetro também é invariante de escala, desde que obedeça a condição $B_0/\omega \ll l$. Os valores dos parâmetros utilizados foram $l = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.01$ e $B_0 = 0.01$.

A Figura 4.2 mostra o comportamento das curvas de $\bar{V}$ avaliadas para diferentes velocidades iniciais, com a dissipação fixa em $\gamma = 0.999$. A dinâmica para cada par de condição inicial (α, φ) , foi iterada até 10^9 colisões com a fronteira móvel.

Analisando a Fig.4.2, observamos que as curvas de $\bar{V}$ comportam-se de forma semelhante. Elas mantêm-se em regime inicial constante em um platô de velocidade inicial, e depois de algumas colisões, todas as curvas experimentam em um mesmo número característico de colisão de *crossover* (n_x) um súbito decaimento em lei de potência, com expoente $\zeta \approx -1$, e depois saturam em diferentes platôs para uma velocidade baixa.

A Figura 4.3 mostra como um *ensemble* de 5000 condições iniciais avaliadas na média de $\bar{V}$ se comportam experimentando diferentes coeficientes de dissipação ao longo de 10^9 colisões

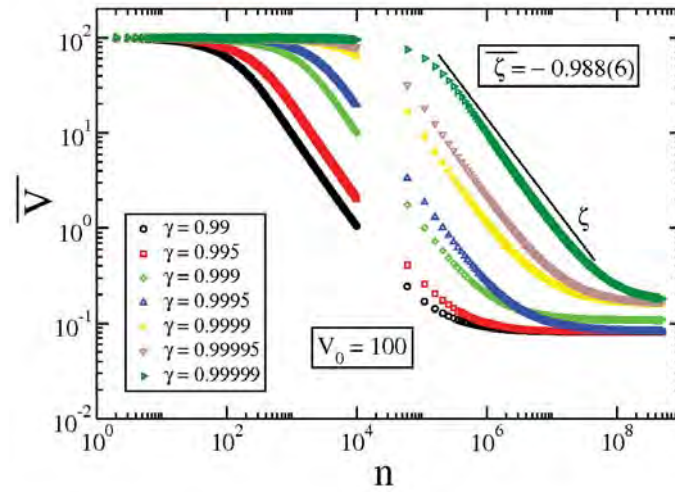


Figura 4.2: Comportamento das curvas de $\bar{V}$ com coeficiente de dissipação fixo $\gamma = 0.999$ e velocidade inicial variando conforme a legenda da própria figura. Os parâmetros geométricos de controle utilizados foram: $l = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.01$ e $B_0 = 0.01$.

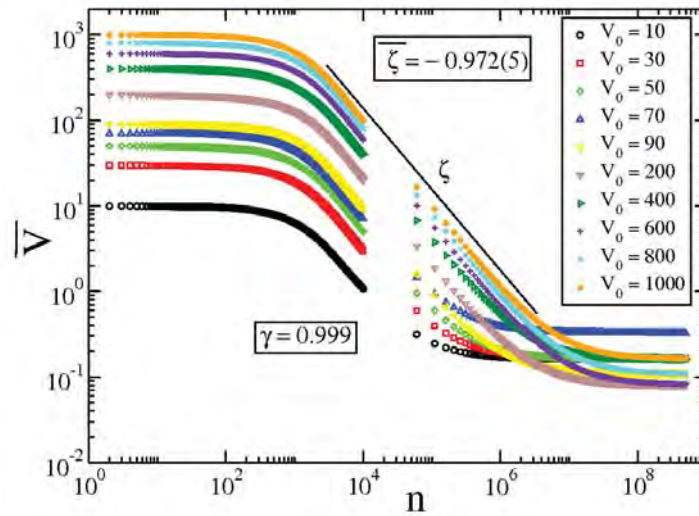


Figura 4.3: Comportamento das curvas de $\bar{V}$ com coeficiente de dissipação γ variando conforme a legenda da própria figura e velocidade inicial constante em $V_0 = 100$. Os parâmetros geométricos de controle utilizados foram: $l = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.01$ e $B_0 = 0.01$.

com a fronteira móvel. Ao avaliarmos o comportamento dessas curvas de $\bar{V}$ variando o coeficiente de amortecimento da componente normal e mantendo fixa a velocidade inicial da partícula, observamos um comportamento ligeiramente diferente, do que o observado quando fixamos a coeficiente de amortecimento e variamos a velocidade inicial. Para essas curvas, percebemos que todas obedecem um regime inicial constante em sua respectiva velocidade inicial, e depois experimentam um decréscimo repentino em lei de potência, também com expoente $\zeta \approx -1$ em

diferentes números característicos de colisão de *crossover* (n_x) e depois convergem para diferentes platôs. Os números de *crossover* variam com o coeficiente de dissipação. Se a dissipação é relativamente baixa, o n_x é maior do que quando se têm uma dissipação alta.

Analisando ambas as Figs.4.2 e 4.3, observamos que conforme o par de parâmetro de controle (V_0, γ) varia, as curvas de $\bar{V}$ convergem para diferentes platôs constantes para um alto número de colisões. Esse tipo de comportamento ocorre, pois, quando a dissipação é introduzida no bilhar, as curvas invariantes que antes delimitavam as regiões estáveis dos pontos fixos são destruídas e os pontos fixos que eram estáveis, tudo leva a crer que se tornam *sinks*, e as órbitas passam a convergir para eles.

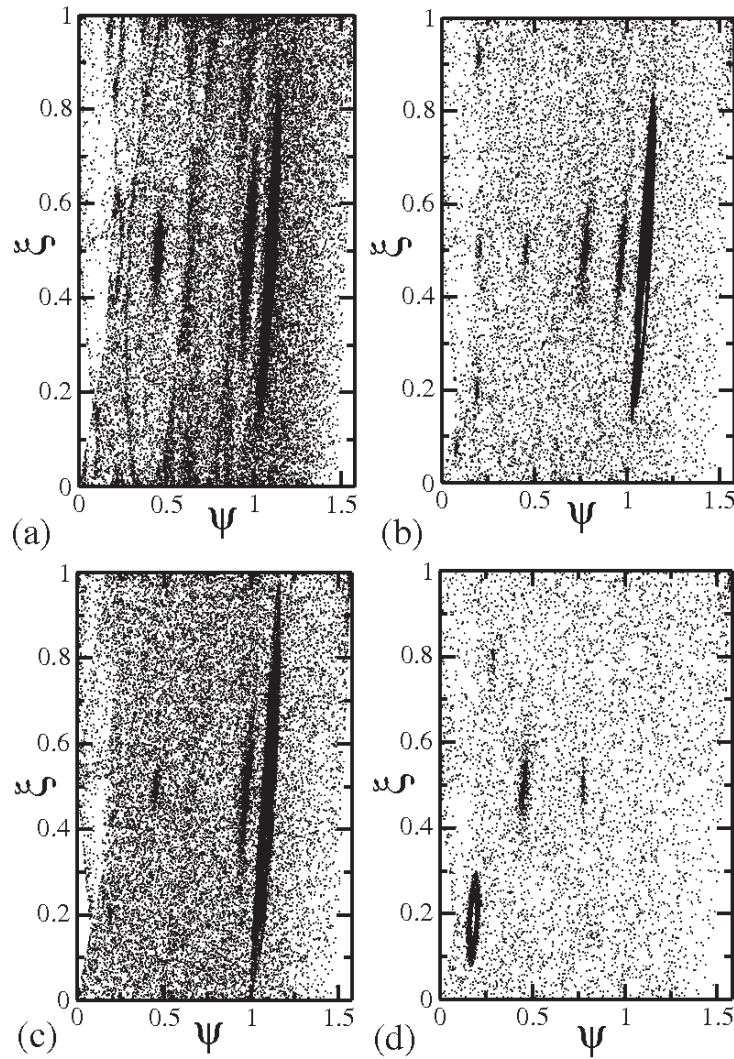


Figura 4.4: Espaço de fases (ξ, ψ). Os parâmetros de controle utilizados foram: (a) $V_0 = 100$ e $\gamma = 0.9999$; (b) $V_0 = 100$ e $\gamma = 0.999$; (c) $V_0 = 10$ e $\gamma = 0.999$ e (d) $V_0 = 1000$ e $\gamma = 0.99$.

A Figura 4.4 mostra o espaço de fases (ξ, ψ) para diferentes valores de V_0 e γ , onde 10 condições iniciais diferentes são iteradas até 10^6 colisões. Podemos ver claramente, que conforme variamos a velocidade inicial e o parâmetro de dissipação da componente normal do bilhar, as diferentes órbitas são atraídas para diferentes *sinks*.

Afim de mostrar como esse efeito de atração das órbitas pelos *sinks* afeta a velocidade da partícula, mostramos na Fig.4.5 um *zoom* na região de baixas velocidades no espaço de fases (V, t) , onde V é a velocidade da partícula, e t é tempo entre uma colisão e outra da partícula com a fronteira móvel, seja a colisão do tipo sucessiva ou indireta, tomado o $\text{mod}(2\pi)$, para analisarmos a fase da perturbação harmônica da função cosseno. Podemos ver nitidamente a atração das órbitas pelos *sinks* em cada faixa de velocidade do espaço de fases. A Figura 4.5 foi confeccionada utilizando os mesmos parâmetros de controle (V_0, γ) e as mesmas condições iniciais da Fig.4.4.

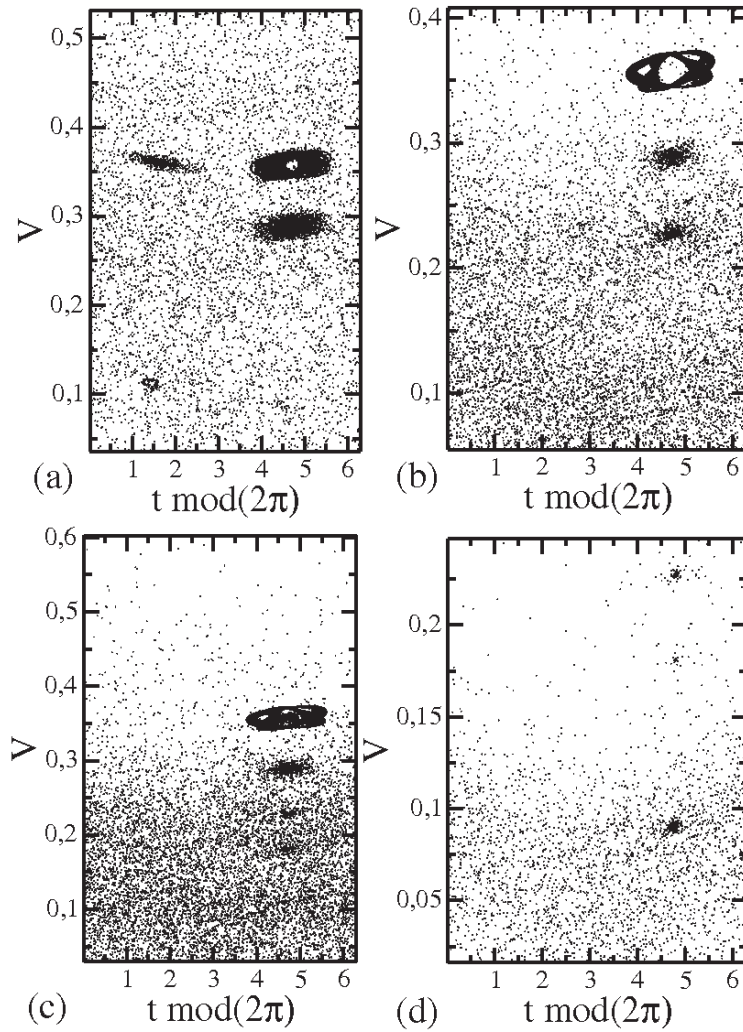


Figura 4.5: Espaço de fases $(V, t \text{ mod}(2\pi))$. Os parâmetros de controle utilizados foram: (a) $V_0 = 100$ e $\gamma = 0.9999$; (b) $V_0 = 100$ e $\gamma = 0.999$; (c) $V_0 = 10$ e $\gamma = 0.999$ e (d) $V_0 = 1000$ e $\gamma = 0.99$.

Se o expoente $\gamma \rightarrow 1$, recuperamos o caso conservativo do bilhar, estudado no Capítulo 3.

4.3.2 Discussão de Escala

Analisando a dinâmica das curvas de $\bar{V}$, vemos que elas apresetam um regime constante para um número pequeno de colisões e um primeiro *crossover* (n_x), levando a um decaimento de lei de potência com expoente $\zeta \approx -1$. Percebemos que há um comportamento semelhante, mesmo quando variamos ambos os parâmetros de controle, velocidade inicial V_0 e coeficientes de amortecimento da componente normal da velocidade, γ . Sendo assim, propomos algumas hipóteses de escala:

(i) $\bar{V} \propto V_0^\nu$, para $n \ll n_x$, onde ν é um expoente crítico;

(ii) $\bar{V} \propto \left(\frac{n}{V_0}\right)^\zeta$, para $n \gg n_x$, onde $\zeta \approx -1$ é o expoente de decaimento;

(iii) $\left(\frac{n_x}{V_0}\right) \propto V_0^{z_1} (1 - \gamma)^{z_2}$, onde z_1 e z_2 são expoentes dinâmicos.

Na terceira hipótese de escala consideramos a variável $(1 - \gamma)$ ao invés de γ , pois queremos trazer a criticalidade da transição de fase de decréscimo de energia para crescimento ilimitado de energia para $(1 - \gamma \rightarrow 0)$. Ainda analisando a terceira hipótese de escala, escolhemos que a proporcionalidade entre V_0 e n_x , deve obedecer a lei de potência $n_x/V_0 \propto V_0^{z_1}$, pois como podemos ver na Fig.4.2, o número característico de colisão de *crossover*, é sempre o mesmo não importando a variação da velocidade inicial. Tudo leva a crer que na estatística da lei de escala, a variável ideal a ser analisada é n/V_0 e não somente n . Sendo assim, como mostra a Fig.4.6, todas as curvas $\bar{V}$ passam a decair juntas com o expoente $\zeta \approx -1$. Desta forma, conseguimos encontrar um n_x diferente para cada parâmetro V_0 , e desta maneira, obter um expoente crítico dinâmico z_1 .

Considerando que nas curvas de $\bar{V}$ o regime inicial para $n \ll n_x$, a velocidade permanece constante em seu valor inicial, é fácil perceber que o expoente crítico $\nu = 1$.

Os expoente dinâmicos z_1 e z_2 são obtidos através de um ajuste em lei de potência através do número de colisões de *crossover* já apropriadamente reescalado (n_x/V_0) contra a velocidade inicial, e n_x contra $(1 - \gamma)$ respectivamente. Esse ajustes numéricos são mostrados na Fig.4.7, onde em (a) encontramos $z_1 = -0.99(1)$ e em (b) obtemos $z_2 = -0.968(1)$.

Desta forma, analisando as hipóteses de escala podemos propor a seguinte função homogeneia generalizada para o comportamento de $\bar{V}$,

$$\bar{V}(n/V_0, V_0(1 - \gamma)) = l(l^a n/V_0, l^b V_0(1 - \gamma)), \quad (4.18)$$

onde l é o fator de escala e a e b são expoentes de escala.

Ao tomarmos $l^a n/V_0 = cte = 1$, temos que

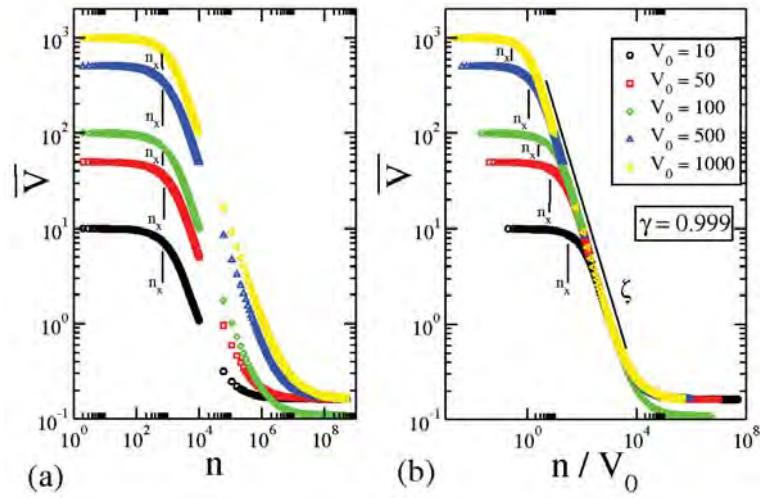


Figura 4.6: Transformação da variável apropriada para descrição da escala. Em (a) curvas de $\bar{V}$ em função de n , e em (b) as mesmas curvas de (a) em função de n/V_0 .

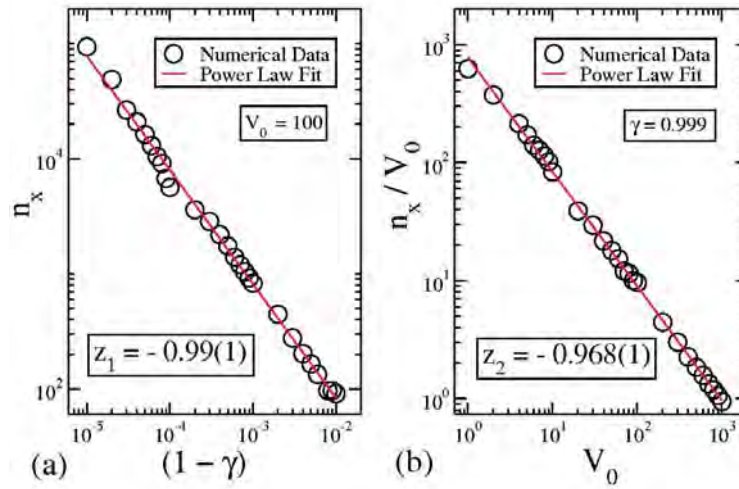


Figura 4.7: Em (a) temos o ajuste em lei de potência de $n_x/V_0 \times V_0$, onde foi mantido constante $\gamma = 0.999$ e em (b) mostramos o ajuste em lei de potência de $n_x \times (1 - \gamma)$, onde foi mantido constante $V_0 = 100$. Ambos os ajustes nos fornecem os respectivos expoentes: $z_1 = -0.99(1)$ e $z_2 = -0.968(1)$.

$$l = \left(\frac{n}{V_0} \right)^{-\frac{1}{a}}. \quad (4.19)$$

Substituindo a Eq.(4.19) na Eq.(4.18), obtemos

$$\bar{V}(n/V_0, V_0(1 - \gamma)) = V_0^{-\frac{1}{a}} \bar{V}_1(l^{-\frac{b}{a}} V_0(1 - \gamma)). \quad (4.20)$$

Ao compararmos a Eq.(4.20) com a segunda hipótese de escala, $\overline{V}_1$ é assumido ser constante para $n \gg n_x$ e como já conhecemos o valor de $\zeta \approx -1$, obtemos

$$\zeta = -\frac{1}{a} \Rightarrow a = 1 . \quad (4.21)$$

Escolhendo agora $l^b V_0(1 - \gamma) = cte = 1$, encontramos

$$l = (V_0(1 - \gamma))^{-\frac{1}{b}} . \quad (4.22)$$

Substituindo a Eq.(4.22) na Eq.(4.18), obtemos

$$\overline{V}(n/V_0, V_0(1 - \gamma)) = V_0(1 - \gamma)^{-\frac{1}{b}} \overline{V}_2(l^{-\frac{a}{b}} n/V_0, 1) . \quad (4.23)$$

Ao compararmos a Eq.(4.23) com a primeira hipótese de escala, $\overline{V}_2$ é também assumido ser constante para $n \ll n_x$ e como já é conhecido o valor de $\nu = 1$, e uma vez que no regime inicial da dinâmica não depende do parâmetro de dissipação, o termo $(1 - \gamma)$, é absorvido pela constante de proporcionalidade, então temos que

$$\nu = -\frac{1}{b} \Rightarrow b = -1 . \quad (4.24)$$

Ao fazermos a escolha do *crossover* e igualarmos as Eqs.(4.19) e (4.22), encontramos

$$\left(\frac{n}{V_0}\right)^{-\frac{1}{a}} = (V_0(1 - \gamma))^{-\frac{1}{b}} . \quad (4.25)$$

Elevando toda a igualdade dada Eq.(4.25) a potência de $(-a)$, obtemos

$$\left(\frac{n}{V_0}\right) = (V_0(1 - \gamma))^{\frac{a}{b}} . \quad (4.26)$$

Fazendo uma comparação da Eq.(4.26) com a terceira hipótese de escala, encontramos a seguintes expressão

$$\frac{a}{b} = z_1 = z_2 , \quad (4.27)$$

$$\frac{\nu}{\zeta} = z_1 = z_2 . \quad (4.28)$$

Uma vez conhecida a lei de escala, podemos agora colapsar as curvas de $\overline{V}$ em uma única curva universal que descreve o comportamento de $\overline{V}$ da partícula para tempos curtos e dos parâmetros de controle velocidade inicial e dissipação.

A Figura 4.8 mostra perfeitamente esse colapso, onde todas as curvas da Fig.4.8(a) são colapsadas em (b).

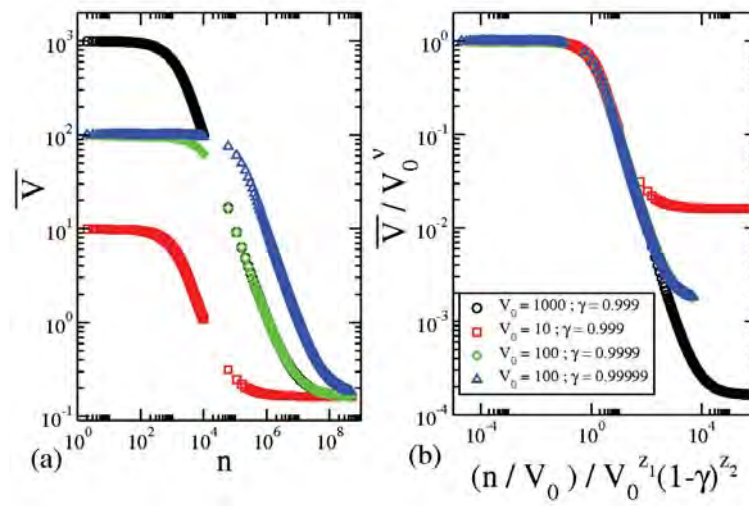


Figura 4.8: Em (a) mostramos o comportamento de algumas curvas de $\bar{V}$ e em (b) temos o colapso de todas as curvas de (a) em uma única curva universal para tempos curtos.

Capítulo 5

Conclusões

Nesta dissertação estudamos o modelo do bilhar clássico stadium-like com fronteiras parabólicas estáticas, com fronteiras circulares dependentes periodicamente do tempo e com fronteiras dependentes do tempo sob a ação de dissipação. Para o caso estático obtivemos um mapeamento não linear, bidimensional que preserva a área no espaço de fases que descreve a dinâmica da partícula nas variáveis (ξ, ψ) . Mostramos que conforme variamos os parâmetros de controle, a dinâmica da partícula também sofre mudança. Mudança esta, que está ligada com a ação do mecanismo desfocalizador do bilhar e com a perda de estabilidade dos pontos fixos, conforme variam os auto-valores da matriz Jacobiana. Caracterizamos uma transição de fase no sentido de caos misto, ou seja, no espaço de fases aparecem curvas invariantes, mares de caos e regiões regulares, para caos global no espaço de fases, quando o mecanismo desfocalizador está atuando. Essa transição de fase foi comprovada através de uma análise estatística em cima do desvio quadrático do ângulo médio $\bar{\psi}$ e também pela invariância de escala da dinâmica frente aos parâmetros de controle através do expoente de Lyapunov máximo. Conseguimos ainda, reorganizar o mapeamento em um mapa genérico com apenas um parâmetro de controle com uma perturbação do tipo tangente, onde transição semelhante foi observada.

Ao estudarmos o bilhar stadium-like com fronteiras circulares, introduzimos uma perturbação temporal periódica somente nas fronteiras convergentes. Consideramos dois tipos distintos de dinâmica, onde a partícula pode sofrer colisões subsequentes com a mesma componente ou sofrer colisões indiretas com a componente oposta, conforme o valor do ângulo entre a normal ao ponto de colisão e o eixo de simetria da fronteira circular. Para os dois casos, encontramos um mapeamento quadri-dimensional nas variáveis (α, φ, t, V) . Através da linearização do mapeamento do modelo não perturbado, observamos uma ressonância entre o número de rotação ao redor de um ponto fixo e o período de perturbação externa. Através dessa ressonância, encontramos um valor crítico da velocidade, onde velocidades iniciais com valores menores do que esse valor crítico, sofrem um decréscimo em sua velocidade média ao longo do número de colisões, pois um fenômeno muito similar ao stickiness acontece, consequentemente o decaimento ocorre, pois um grande número de órbitas ficam temporariamente presas ao redor das ilhas de estabilidade, fazendo com que a velocidade da partícula decresça. Por outro lado, se

a velocidade inicial é maior do que esse valor crítico de ressonância, observamos um comportamento característico de aceleração de Fermi na dinâmica do sistema. Para este caso em particular, variamos os valores de velocidade inicial e de amplitude de oscilação da fronteira móvel e conseguimos caracterizar esse crescimento ilimitado de energia através de argumentos e hipóteses de escala, onde encontramos uma única curva universal que descreve a dinâmica da velocidade média da partícula .

Finalmente, consideramos o modelo dependente do tempo sob ação de dissipação introduzida via colisões inelásticas da partícula com a fronteira, nas componentes normal e tangencial. Uma nova relação de recorrência para a velocidade da partícula foi obtida, considerando os efeitos da dissipação. Com a introdução da dissipação, os pontos fixos, antes elípticos, se tornam *sinks*, além de observamos um interessante fenômeno nas curvas de velocidade média. Uma transição de fase de decréscimo de velocidade para crescimento ilimitado de energia quando os coeficientes de restituição das componentes normal e tangencial tendem a unidade. Variando os valores da velocidade inicial e do parâmetro de dissipação na componente normal, percebemos que diferentes condições iniciais são atraídas para diferentes *sinks* fazendo com que a velocidade da partícula decresça em lei de potência com expoente $\zeta \approx -1$. Conseguimos ainda caracterizar a dinâmica inicial da partícula através de leis e hipóteses de escala e confirmamos que a dissipação é um excelente mecanismo para suprimir o fenômeno de aceleração de Fermi. Concluimos mais, que esse fenômeno de crescimento ilimitado de energia parece não ser estruturalmente estável.

Referências Bibliográficas

- [1] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, New York, 1994.
- [2] G. M. Zaslavsky, *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*, Imperial College Press, New York (2007).
- [3] Birkhoff G. D. *Dynamical Systems* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 9. Providence: American Mathematical Society. 1927.
- [4] N. Krylov, *Works on the Foundations of Statistical Physics* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1979.
- [5] Y. G. Sinai, “Dynamical systems with elastic reflections”. Russ. Math. Surveys., vol. 25, pp. 137-189, 1970.
- [6] Y. G. Sinai, “Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersive billiards”. Russ. Math. Surv., vol. 25, pp. 141-192, 1970.
- [7] Y. G. Sinai, “On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics”. Math. Dokl. vol. 4, pp. 1818, 1963.
- [8] N. Chernov and R. Markarian, *Chaotic Billiards*. American Mathematical Society, Vol. 127, 2006.
- [9] D. F. M. Oliveira, J. Vollmer e E. D. Leonel, “Fermi acceleration and suppression of Fermi acceleration in a time-dependent Lorentz Gas”, *Physica D*, vol. 240, pp. 389396, 2011.
- [10] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai, “Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers”. *Commun. Math. Phys.*, vol. 78, pp. 479-497, 1981.
- [11] L. A. Bunimovich, “On Ergodic Properties of Certain Billiards”. *Funct. Anal. Appl.*, vol. 8, pp. 254-255, 1974.
- [12] L. A. Bunimovich, “On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards”. *Commun. Math. Phys.*, vol. 65, pp. 295-312, 1979.

- [13] D. G. Ladeira e J. K. L. da Silva, “Scaling features of a breathing circular billiard”. J. Phys. A, vol. 41, pp. 365101-365114, 2008.
- [14] M. V. Berry, “Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard”. Eur. J. Phys. vol. 2, pp. 91-102, 1981.
- [15] D. F. M. Oliveira e E. D. Leonel, “On the dynamical properties of an elliptical oval billiard with static boundary”. Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simulat. vol. 15, pp. 1009-1020, 2010.
- [16] J. Koiller, R. Markarian, S. P. Carvalho e S. O. Kamphorst, “Static and Time-dependent perturbations of the classical elliptical billiard”. J. Stat. Phys vol. 83, pp. 127-143, 1996.
- [17] J. Stein e H. J. Stokmann, “Experimental determination of billiard wave functions”. Phys. Rev. Lett. vol. 68, pp. 2867(1-4), 1992.
- [18] H. J. Stokmann, *Quantum Chaos: An Introduction*. Cambridge University Press - 1999.
- [19] V. Milner *et al.*, “Optical Billiards for Atoms”. Phys. Rev. Lett., vol. 86, pp.1514 (1-4), 2001.
- [20] N. Friedman *et al.*, “Observation of Chaotic and Regular Dynamics in Atom-Optics Billiards”. Phys. Rev. Lett., vol. 86, pp. 1518(1-4), 2001.
- [21] M. F. Andersen *et al.*, “Revivals of coherence in chaotic atom-optics billiards”. Phys. Rev. A, vol. 69, pp. 63413, 2004.
- [22] M. F. Andersen *et al.*, “Decay of Quantum Correlations in Atom Optics Billiards with Chaotic and Mixed Dynamics”. Phys. Rev. Lett., vol. 97, pp. 104102(1-4), 2006.
- [23] C. M. Marcus *et al.*, “Conductance fluctuations and chaotic scattering in ballistic microstructures”. Phys. Rev. Lett., vol. 69, pp.506(1-4), (1992).
- [24] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, Elsevier – Burlington 2008.
- [25] E. D. Leonel e J. K. L. da Silva, “Dynamical properties of a particle in a classical time-dependent potential well”. Physica A, vol. 323, pp. 181-196, 2003.
- [26] E. D. Leonel e P. V. E. McClintock, “Dynamical properties of a particle in a time-dependent double-well potential”. J. Phys. A, vol. 37, pp. 89498968, 2004.
- [27] E. D. Leonel e P. V. E. McClintock, “Chaotic properties of a time-modulated barrier”. Phys. Rev. E, vol. 70, pp. 016214(1-11), 2004.
- [28] J. A. de Oliveira, R. A. Bizão e E. D. Leonel, “Finding critical exponents for two-dimensional Hamiltonian maps”. Phys. Rev. E, vol. 81, pp. 046212(1-6), 2010.

- [29] E. D. Leonel, D. F. M. de Oliveira e A. Loskutov, “Fermi acceleration and scaling properties of a time dependent oval billiard”. *Chaos* (Woodbury), vol. 19, pp. 033142, 2009.
- [30] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock e J. K. L. da Silva, “Fermi-Ulam Accelerator Model under Scaling Analysis”. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, pp. 014101(1-4), 2004.
- [31] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock, “A hybrid Fermi-Ulam-bouncer model”. *J. Phys. A*, vol. 38, pp. 823-839, 2005.
- [32] E. D. Leonel, A. L. P. Livorati, “Describing Fermi acceleration with a scaling approach: bouncer model revisited”. *Physica. A*, vol. 387, pp. 1155-1160, 2008.
- [33] A. L. P. Livorati, D. G. Ladeira, E. D. Leonel, “Scaling investigation of Fermi acceleration on a dissipative bouncer model”. *Phys. Rev. E*, vol. 78, pp. 056205(1-12), 2008.
- [34] D. F. M. Oliveira, e E. D. Leonel, “Suppressing Fermi acceleration in a two-dimensional non-integrable time-dependent oval-shaped billiard with inelastic collisions”. *Physica. A*, vol. 389, pp. 1009-1020, 2010.
- [35] A. Loskutov, A. Ryabov, “Particle dynamics in time-dependent stadium-like billiards”. *J. Stat. Phys.*, vol. 108, No 5-6, pp. 995-1014, 2002.
- [36] N. Fiedler-Ferrara, C. P. C. do Prado, *Caos - Uma Introdução*. Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1994.
- [37] A. J. Lichtenberg, M.A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*. Appl. Math. Sci. 38, Springer Verlag, New York, 1992.
- [38] C. Manchein, J. Rosa, M. W. Beims, “Chaotic motion at the emergence of the time averaged energy decay”. *Physica D*, vol. 238, pp. 1688, 2009.
- [39] M. W. Beims e C. Manchein, “Gauss map and Lyapunov exponents of interacting particle in a billiard”. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 39, pp. 2041-2047, 2007.
- [40] J. P. Eckmann, D. Ruelle, “Ergodic theory of chaos and strange attractors”. *Rev. Mod. Phys.*, vol. 57, pp. 617-655, 1985.
- [41] A-L. Barabasi, H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth*
- [42] B. V. Chirikov, “A universal instability of many-dimensional oscillator systems”. *Phys. Rep.* vol. 52, pp. 263, 1979.
- [43] A. L. P. Livorati, A. Loskutov e E. D. Leonel, “A family of stadium-like billiards with parabolic boundaries under scaling analysis”. *Aceito para publicação. J. Phys. A*, 2011.

- [44] A. Loskutov, A. B. Ryabov, L. G. Akinshin, “Mechanism of Fermi acceleration in dispersing billiards with perturbed boundaries”. J. Exp. and Theor. Physics, vol. 89, No 5, pp. 966-974, 1999.
- [45] A. Loskutov, L. G. Akinshin, A. N. Sobolevsky, “Dynamics of billiards with periodically time-dependent boundaries”. Applied Nonlin. Dynamics, vol. 9, No 4-5, pp. 50-63, 2001.
- [46] A. Loskutov, A. Ryabov, “Chaotic time-dependent billiards”. Int. J. of Comp. Anticipatory Syst., vol. 8, pp. 336-354, 2001.
- [47] E. D. Leonel e L. Bunimovich, “Suppressing Fermi Acceleration in a Driven Elliptical Billiard”. Phys. Rev. Lett., vol. 104, pp.224101(1-4), 2010.
- [48] G. M. Zaslavsky, *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*, Oxford University Press, New York (2008).
- [49] G. M. Zaslavsky, “Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport”. Phys Rep., vol. 371, pp. 461, 2002.
- [50] M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky e J. Klafter, “Strange Kinetics”. Nature, vol. 363, pp. 31, 1993.
- [51] G. M. Zaslavsky e M. Edelman, “Polynomial dispersion of trajectories in sticky dynamics”. Phys. Rev. E, vol. 72, pp. 036204, 2005.
- [52] S. V. Prants, M. V. Budyansky, M. Yu. Uleysky, e G. M. Zaslavsky, “Chaotic mixing and transport in a meandering jet flow”. arXiv:nlin.CD/0607016 v1, 2006.
- [53] N. N. Thyagu e N. Gupte, “Transport and diffusion in the embedding map”. Phys. Rev. E, vol. 79, pp.066203, 2009.
- [54] F. Lenz, C. Petri, F. R. N. Koch, F. K. Diakonov e P. Schmelcher, “Evolutionary phase space in driven elliptical billiards”. New J. Phys., vol. 11, pp. 083035, 2009.
- [55] A. L. P. Livorati e E. D. Leonel, “Decreasing mechanism of Fermi acceleration in a time-dependent stadium billiard.”. submetido para Phys. Rev. Lett. 2011.
- [56] E. Fermi, “On the Origin of the Cosmic Radiation”. Phys. Rev., vol. 75, No 8, pp. 1169-1174, 1949.
- [57] A. Loskutov, A. B. Ryabov, L. G. Akinshin, “Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries”. J. Phys. A, vol. 33, No 44, pp. 7973-7986, 2000.
- [58] F. Lenz, F. K. Diakonov, P. Schmelcher, “Tunable Fermi Acceleration in the Driven Elliptical Billiard”. Phys. Rev. Lett., vol. 100, pp. 014103(1-4), 2008.

- [59] D. G. Ladeira, E. D. Leonel, “Dynamical Properties of a Dissipative Hybrid Fermi- Ulam-bouncer model”. *Chaos (Woodbury)*, vol. 17, pp. 013119(1-8), 2007.
- [60] E. D. Leonel e L. Bunimovich, “Suppressing Fermi acceleration in two-dimensional driven billiards”. *Phys. Rev. E.*, vol. 82, pp. 016202, 2010.
- [61] E. D. Leonel e D. F. Tavares. “Consequences of Quadratic Frictional Force on the One Dimensional Bouncing Ball Model”. *American Institute of Physics - AIP Conference Proceedings*, pp. 108-113, 2007.
- [62] F. A. de Souza, L. E. A. Simões, M. R. da Silva, E. D. Leonel, “Can Drag Force Suppress Fermi Acceleration in a Bouncer Model?”. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2009, Article ID 409857, 2009.
- [63] D. G. Ladeira, E. D. Leonel, “Competition between suppression and production of Fermi acceleration”. *Phys. Rev. E*, vol.81 , pp.036216, 2010.
- [64] E. D. Leonel, “Breaking down the Fermi acceleration with inelastic collisions”. *Journal of Physics A, Mathematical and General*, vol. 40, pp. F1077-F1083, 2007.