



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de São José do Rio Preto

---

Daiani Denadai

*Controle Aproximado para Sistemas Não-lineares  
de Equações Diferenciais Ordinárias*

Dissertação de Mestrado  
Pós-Graduação em Matemática

---

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas  
Rua Cristóvão Colombo, 2265, 15054-000  
São José do Rio Preto - SP - Brasil  
Telefone: (17) 3221-2444 - Fax: (17) 3221-2445

Daiani Denadai

*Controle Aproximado para Sistemas  
Não-lineares de Equações Diferenciais  
Ordinárias*

Orientador:  
Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS  
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto

12 de Maio de 2011

**Daiani Denadai**

*Controle Aproximado para Sistemas Não-lineares de Equações Diferenciais Ordinárias*

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio  
Professor Doutor  
UNESP - São José do Rio Preto  
Orientador

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Aparecida Bená  
Professora Doutora  
Departamento de Física e Matemática  
FFCLRP - USP - Ribeirão Preto

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Andréa Cristina P. Arita  
Professora Doutora  
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 12 de Maio de 2011.

Ao meu amado pai Dario, que já não vive entre nós.

À minha batalhadora mãe Idenilva.

Aos meus amados irmãos.

Aos meus queridos amigos.

Ao meu noivo por seu amor e paciência.

*Dedico.*

# *Agradecimentos*

Primeiramente agradeço a Deus, que agraciou-me com esta oportunidade de crescimento intelectual e ajudou-me a superar cada dificuldade durante esta caminhada;

Ao meu pai Dario, a quem amei muito nesta vida e guardo lembranças em meu coração com muitas saudades, que através de seu exemplo de vida e de fé, educou-me e guiou-me para que eu pudesse alcançar esta conquista;

À minha mãe Idenilva pelo apoio incondicional, pela luta a cada dia e pelo amor a mim dedicado;

Aos meus irmãos Jonas, Susane e Bruno, e aos meus queridos amigos que sempre me incentivaram e me deram forças nestes anos de mestrado;

Ao meu noivo Junior pelo seu amor e compreensão;

Ao Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio, orientador que com seus ensinamentos, dedicação, paciência e compreensão, ajudou-me a completar com êxito essa difícil tarefa;

Aos amigos da minha turma de mestrado, em especial: Érica, Andrea, Glauce e Juninho pelo companheirismo nas horas de estudo, pelas palavras de ânimo e pela ajuda nas dificuldades e pelos momentos divertidos de descontração;

À CAPES pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

“ Ter fé é assinar uma folha em branco e deixar que Deus nela escreva o que quiser.”

*Santo Agostinho*

# *Resumo*

Neste trabalho provamos a existência de controle aproximado para certos sistemas não-lineares de equações diferenciais ordinárias de entrada e saída únicas e múltiplas. Utilizamos como técnica funções ou aplicações implícitas globais.

**Palavras-chave:** Controle aproximado, funções e aplicações implícitas.

# *Abstract*

In this work we prove the existence of approximate control for certain nonlinear systems of ordinary differential equations of single-input single-output and multi-input multi-output. We use global implicit functions or mappings.

**Keywords:** Approximate control, implicit functions and mappings.



# Introdução

A Teoria de Controle tem desempenhado um importante papel na história através do desenvolvimento de tecnologias. É possível concluir que os romanos fizeram uso de alguns dos elementos da Teoria de Controle em seus aquedutos. Na verdade, um sistema engenhoso de regulação de válvulas era usado nessas construções a fim de manter a água em nível constante.

Existem afirmações de que, na antiga Mesopotâmia, 2000 anos a.C., o controle de sistemas de irrigação também era uma arte conhecida.

Por outro lado, no antigo Egito os "hardenodaptai", eram especializados em esticar longas cordas levando a longos segmentos de reta os quais ajudavam nas construções de grande porte. De alguma forma, essa é uma evidência do fato de que no antigo Egito a asserção seguinte era bem compreendida:

- A menor distância entre dois pontos é a linha reta (que podemos considerar ser o mais clássico problema em Otimização e Cálculo de Variações);

A tarefa dos "hardenodaptai" era precisamente construir essas "curvas ideais".

Os trabalhos de Ch. Huygens e R. Hooke no final do século XVII sobre as *oscilações de um pêndulo* são os mais modernos exemplos de desenvolvimento em Teoria de Controle. O objetivo era alcançar uma medição precisa do tempo e do local, tão preciosos em navegação. Mais tarde, tais trabalhos foram adaptados para regular a velocidade de moinhos de vento. O principal mecanismo era baseado num sistema de bolas girando em torno de um eixo, com a velocidade proporcional à velocidade do moinho de vento. J. Watts adaptou essas ideias quando inventou a *máquina a vapor* e esta constituiu uma etapa magnífica na revolução industrial.

O astrônomo britânico G. Airy foi o primeiro cientista a analisar matematicamente a regulação de sistemas inventados por Watts. Mas a primeira descrição matemática definitiva foi dada somente pelos trabalhos de J. C. Maxwell, em 1868, quando alguns dos comportamentos erráticos encontrados no motor a vapor foram descritos e mecanismos de controle foram propostos.

As ideias centrais da Teoria de Controle ganharam logo um impacto notável e, nos anos vinte, os engenheiros já estavam preferindo o processamento contínuo e utilizando técnicas de controle semi-automático ou automático.

Nos anos trinta importantes progressos foram feitos em controle automático e análises técnicas. O número de aplicações aumentou abrangendo sistemas de telefone, sistemas de distribuição em instalações elétricas, estabilização de aeroplanos, mecanismos elétricos na produção de papel, química, petróleo, indústria de aço, etc. No final dessa década, dois métodos ou abordagens estavam disponíveis: um primeiro método baseado no uso de equações diferenciais e um segundo baseado na análise de amplitudes e fases de "entradas"

e "saídas".

Depois de 1960, os métodos e ideias mencionados acima começaram a ser considerados como partes da Teoria de Controle "clássica". A guerra deixou claro que os modelos considerados até então não eram suficientemente precisos para descrever a complexidade do mundo real. Naquele momento, ficou claro que verdadeiros sistemas são frequentemente não-lineares e não-determinísticos, uma vez que são afetados pelo "ruído". Isso gerou novos e importantes esforços nesse domínio.

As contribuições dos cientistas americanos R. Bellman no contexto de programação dinâmica, R. Kalman nas técnicas de filtragem e tratamento algébrico de sistemas lineares, e do russo L. Pontryagin com o princípio do máximo para problemas de controle ótimo não-lineares, estabeleceram as bases da Teoria de Controle moderna.

A Teoria de controle hoje pode ser considerado sob dois diferentes e complementares pontos de vista: como suporte teórico para a Engenharia de Controle, uma parte da Engenharia de Sistemas, ou como uma disciplina matemática. Além disso, a Teoria de Controle é uma das mais interdisciplinares áreas da ciência, onde Engenharia e Matemática fundem-se perfeitamente e enriquecem-se mutuamente.

A Matemática está atualmente realizando um papel crescente na Teoria de Controle. O grau de sofisticação dos sistemas que a Teoria de Controle tem lidado aumenta de forma permanente e isso produz também uma demanda crescente de matemática no campo.

Nossa sociedade fornece todos os dias problemas para a Teoria de Controle e isso está estimulando a criação de nova matemática. Na verdade, a gama de aplicações da teoria de controle vai desde os mais simples mecanismos que manipulamos na vida cotidiana (sistemas de aquecimento, ventilação e ar condicionado em grandes edifícios) até os mais sofisticados provenientes de novas tecnologias.

A lista de aplicações da Teoria de Controle na indústria é infinita. Podemos mencionar, por exemplo, o controle do pH em reações químicas, as indústrias de papel e automóveis, segurança nuclear, defesa, entre outras.

Podemos citar o controle do *caos*. O comportamento caótico de sistemas pode ser um obstáculo para seu controle; mas também pode ser de grande ajuda. Por exemplo, o controle ao longo de trajetórias instáveis é de grande utilidade no controle da dinâmica de aeronaves de combate.

Estruturas espaciais, refletores ópticos de grandes dimensões, sistemas de comunicação via satélite, também são exemplos de sistemas de controle moderno e complexo. O controle de robôs, que vão desde os mais simples mecanismos aos bípedes que simulam a capacidade locomotiva das pessoas, também é outra área emergente da Teoria de Controle.

Instalações elétricas e redes de distribuição são aplicativos modernos da Teoria de Controle que têm influência significativa em nossa vida cotidiana. Existem também aplicações muito relevantes na Medicina variando de órgãos artificiais a mecanismos de fornecimento de insulina.

Algumas das ideias chaves na Teoria de Controle podem ser encontradas na natureza, na evolução e no comportamento dos seres vivos. No mundo das espécies vivas, organismos são dotados de sofisticados mecanismos que regulam as diversas tarefas que desenvolvem. Isto acontece para garantir que as variáveis essenciais sejam mantidas em regimes ideais

para que a espécie permaneça viva, permitindo-lhe o crescimento, desenvolvimento e reprodução.

Outras informações históricas ou aplicações podem ser vistas em [2] ou ainda em [8]. Neste trabalho consideramos o controle aproximado em certos sistemas não-lineares de equações diferenciais ordinárias. Usamos como técnica funções ou aplicações implícitas globais que são apresentadas no capítulo 2. A existência de controle aproximado com entrada e saída únicas ou múltiplas é considerada no capítulo 3. No capítulo 1 consideramos alguns fatos básicos e fixamos notações.

# *Sumário*

<b>1 Preliminares</b>	p. 12
1.1 O Espaço Euclidiano . . . . .	p. 12
1.2 Matrizes . . . . .	p. 13
1.3 Equações Diferenciais lineares com coeficientes constantes . . . . .	p. 14
<b>2 Funções e Aplicações Implícitas</b>	p. 19
2.1 Funções e Aplicações Implícitas Locais . . . . .	p. 19
2.2 Funções e Aplicações Implícitas Globais . . . . .	p. 23
<b>3 Controlabilidade Aproximada de Sistemas Não-Lineares</b>	p. 30
3.1 Existência de Controle para Sistemas Não-Lineares de Entrada e Saída Únicas . . . . .	p. 30
3.2 Existência de Controle para Sistemas Não-Lineares de Entradas e Saídas Múltiplas . . . . .	p. 36
<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 43

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 O Espaço Euclidiano

Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Consideremos o espaço  $\mathbb{R}^n$  definido como produto cartesiano de  $n$  fatores iguais a  $\mathbb{R}$ :  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ . Seus elementos são  $n$ -uplas ordenadas de números reais  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , o termo  $x_i$  é a  $i$ -ésima coordenada de  $x$ . Se  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , tem-se  $x = y$  se, e somente se,  $x_1 = y_1$ ,  $x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$ . O vetor  $\mathcal{O} = (0, 0, \dots, 0, 0)$ , cujas coordenadas são todas nulas, é chamado origem do  $\mathbb{R}^n$ . Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  o vetor  $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$  é dito oposto, ou simétrico de  $x$ .

Sejam  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Podemos definir as seguintes operações no espaço  $\mathbb{R}^n$ :

(1) Adição

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

(2) Multiplicação por escalar

$$\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n).$$

Com essas operações,  $\mathbb{R}^n$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Os vetores  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ , que têm uma única coordenada não-nula, igual a 1, constituem a base canônica do  $\mathbb{R}^n$ . Assim, podemos escrever

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n,$$

e  $\mathbb{R}^n$  é um espaço vetorial de dimensão  $n$ .

**Definição 1.1.** Dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , o produto interno (ou produto escalar) de  $x$  por  $y$  é o número real

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n.$$

O produto interno definido acima satisfaz as seguintes propriedades, para  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ;
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ;
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$ ;
- $\langle x, x \rangle > 0$  se  $x \neq 0$ .

**Definição 1.2.** A norma de  $x \in \mathbb{R}^n$  é o número real não negativo dado por

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

A norma definida acima satisfaz, para  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

- $|x| \geq 0$ ,  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- $|\alpha x| = |\alpha| |x|$ ;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

Na verdade, toda aplicação  $x \in \mathbb{R}^n \mapsto |x| \in \mathbb{R}$  satisfazendo as três propriedades anteriores é uma norma em  $\mathbb{R}^n$ . Por exemplo,

$$|x|_S = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|,$$

$$|x|_M = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

são exemplos de normas em  $\mathbb{R}^n$ . Sabemos que todas as normas em  $\mathbb{R}^n$  são equivalentes.

Outros fatos básicos da Análise que usaremos podem ser encontrados em [6].

## 1.2 Matrizes

Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , podemos tomar como norma de  $A$  qualquer norma encarando  $A$  como um elemento de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Uma norma geralmente utilizada é

$$\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|$$

onde  $|\cdot|$  representa uma norma do  $\mathbb{R}^n$ . No caso em que a norma considerada é a do máximo (dada acima) pode-se mostrar que a norma induzida é dada por

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right).$$

Se  $x \in \mathbb{R}^n$ , vale a desigualdade

$$|Ax| \leq \|A\| |x|. \quad (1.1)$$

De fato,

$$|Ax| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x| = \|A\| |x|.$$

Antes de enunciar o próximo lema consideremos o seguinte resultado: uma matriz quadrada  $C$  de ordem  $n$  é invertível se existe uma norma de matrizes  $\|\cdot\|$  tal que  $\|I - C\| < 1$ .

Se essa condição está satisfeita,

$$C^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - C)^k.$$

De fato, se  $\|I - C\| < 1$  então a série de matrizes

$$\sum_{k=0}^{\infty} (I - C)^k$$

converge para alguma matriz  $E$  pois o raio de convergência da série  $\sum z^k$  é 1. Mas, desde que

$$C \sum_{k=0}^N (I - C)^k = [I - (I - C)] \sum_{k=0}^N (I - C)^k = I - (I - C)^{N+1} \rightarrow I$$

quando  $N \rightarrow \infty$ , concluímos que  $E = C^{-1}$ .

**Lema 1.3.** *Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ , e suponha que para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  tem-se*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i, j=1}^n |a_{ij}|.$$

*Então  $A$  é invertível.*

*Demonstração.* A hipótese assegura que todas as entradas  $a_{ii}$  da diagonal principal são não nulas. Seja  $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ , de modo que  $D$  é uma matriz diagonal invertível,  $D^{-1}A$  tem todos os elementos da diagonal principal sendo 1's, a matriz  $B = [b_{ij}] = I - D^{-1}A$  tem todos os elementos da diagonal principal sendo 0's, e  $b_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$  se  $i \neq j$ . Tomemos a norma  $\|B\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \right)$ . A hipótese garante que  $\|B\| < 1$ , então  $I - B = D^{-1}A$  é invertível, e portanto  $A$  é invertível.  $\square$

Estes e outros fatos sobre análise matricial podem ser encontrados em [5].

### 1.3 Equações Diferenciais lineares com coeficientes constantes

Seja a equação diferencial ordinária linear de ordem  $n - 1$  com coeficientes constantes

$$y^{(n-1)} + \lambda_{n-1} \cdot y^{(n-2)} + \dots + \lambda_2 \cdot y' + \lambda_1 \cdot y = 0, \quad (1.2)$$

que pode ser transformada em um sistema fazendo

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ \vdots \\ x_{n-2} = y^{(n-3)} \\ x_{n-1} = y^{(n-2)} \end{cases}$$

e obtendo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-2} = x_{n-1} \\ \dot{x}_{n-1} = -\lambda_{n-1} \cdot x_{n-1} - \dots - \lambda_2 \cdot x_2 - \lambda_1 \cdot x_1. \end{cases} \quad (1.3)$$

Na forma matricial, o sistema fica

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-2} \\ \dot{x}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & -\lambda_4 & \dots & -\lambda_{n-2} & -\lambda_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Chamemos

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & -\lambda_4 & \dots & -\lambda_{n-2} & -\lambda_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Nessas condições temos o seguinte resultado, que também pode ser visto em [1].

**Lema 1.4.** *Se  $P_M(r)$  é o polinômio característico da matriz  $M$  então a equação característica de (1.2) é  $P_M(r) = 0$ .*

*Demonstração.* Lembremos que a equação característica de (1.2) é

$$r^{n-1} + \lambda_{n-1}r^{n-2} + \dots + \lambda_2r + \lambda_1 = 0.$$

O polinômio característico de  $M$  é dado por

$$P_M(r) = \det(M - r.I) = \begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & -\lambda_4 & \dots & -\lambda_{n-2} & (-\lambda_{n-1} - r) \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}.$$

Desenvolvendo o determinante pela primeira linha,

$$P_M(r) = (-r) \cdot (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & -\lambda_4 & \dots & -\lambda_{n-2} & (-\lambda_{n-1} - r) \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} +$$



$$+1.(-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_3 & -\lambda_4 & \dots & -\lambda_{n-2} & (-\lambda_{n-1} - r) \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)}.$$

Desenvolvendo o segundo determinante pela primeira coluna, ele é igual a

$$(-\lambda_1).(-1)^{n-2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -r & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \end{vmatrix}_{(n-3) \times (n-3)} = (-\lambda_1).(-1)^{n-1}.1 = (-\lambda_1).(-1)^{n-1}.$$

Portanto temos

$$P_M(r) = -r \begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & -\lambda_4 & \dots & -\lambda_{n-2} & (-\lambda_{n-1} - r) \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} + \lambda_1.(-1)^{n-1}.$$

Continuando, repetindo o raciocínio acima com o determinante de ordem  $n - 2$ , temos

$$\begin{aligned} P_M(r) &= (-r).(-r).(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \\ -\lambda_3 & -\lambda_4 & -\lambda_5 & \dots & -\lambda_{n-2} & (-\lambda_{n-1} - r) \end{vmatrix}_{(n-3) \times (n-3)} + \\ &+ (-r).1.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \\ -\lambda_2 & -\lambda_4 & -\lambda_5 & \dots & -\lambda_{n-2} & (-\lambda_{n-1} - r) \end{vmatrix}_{(n-3) \times (n-3)} + \\ &+ \lambda_1.(-1)^{n-1} \\ &= r^2 \begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \\ -\lambda_3 & -\lambda_4 & -\lambda_5 & \dots & -\lambda_{n-2} & (-\lambda_{n-1} - r) \end{vmatrix}_{(n-3) \times (n-3)} + \\ &+ r \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \\ -\lambda_2 & -\lambda_4 & -\lambda_5 & \dots & -\lambda_{n-2} & (-\lambda_{n-1} - r) \end{vmatrix}_{(n-3) \times (n-3)} + \lambda_1.(-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o último determinante pela primeira coluna obtemos

$$\begin{aligned}
P_M(r) &= r^2 \begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \\ -\lambda_3 & -\lambda_4 & -\lambda_5 & \dots & -\lambda_{n-2} & (-\lambda_{n-1} - r) \end{vmatrix}_{(n-3) \times (n-3)} + \\
&+ r \cdot (-\lambda_2) \cdot (-1)^{n-3+1} \cdot 1 + \lambda_1 \cdot (-1)^{n-1} \\
&= r^2 \begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \\ -\lambda_3 & -\lambda_4 & -\lambda_5 & \dots & -\lambda_{n-2} & (-\lambda_{n-1} - r) \end{vmatrix}_{(n-3) \times (n-3)} + \\
&+ (\lambda_2 \cdot r + \lambda_1) \cdot (-1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Novamente, repetindo o raciocínio acima com o determinante de ordem  $n - 3$ , temos

$$\begin{aligned}
P_M(r) &= r^2 \cdot (-r) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \\ -\lambda_4 & -\lambda_5 & -\lambda_6 & \dots & -\lambda_{n-2} & (-\lambda_{n-1} - r) \end{vmatrix}_{(n-4) \times (n-4)} + \\
&+ r^2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \\ -\lambda_3 & -\lambda_5 & -\lambda_6 & \dots & -\lambda_{n-2} & (-\lambda_{n-1} - r) \end{vmatrix}_{(n-4) \times (n-4)} + \\
&+ (\lambda_2 \cdot r + \lambda_1) \cdot (-1)^{n-1} \\
&= -r^3 \begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \\ -\lambda_4 & -\lambda_5 & -\lambda_6 & \dots & -\lambda_{n-2} & (-\lambda_{n-1} - r) \end{vmatrix}_{(n-4) \times (n-4)} - \\
&- r^2 \cdot (-\lambda_3) \cdot (-1)^{n-4+1} \cdot 1 + (\lambda_2 \cdot r + \lambda_1) \cdot (-1)^{n-1} \\
&= -r^3 \begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 1 \\ -\lambda_4 & -\lambda_5 & -\lambda_6 & -\lambda_7 & \dots & -\lambda_{n-2} & (-\lambda_{n-1} - r) \end{vmatrix}_{(n-4) \times (n-4)} + \\
&+ (\lambda_3 \cdot r^2 + \lambda_2 \cdot r + \lambda_1) \cdot (-1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Assim, continuando o raciocínio até que a ordem do determinante seja 1, temos

$$\begin{aligned} P_M(r) &= (-1)^{n-2} \cdot r^{n-2} \cdot \det [-\lambda_{n-1} - r] + \dots + (-1)^{n-1} \cdot [\lambda_3 \cdot r^2 + \lambda_2 \cdot r + \lambda_1] \\ &= (-1)^{n-1} \cdot \lambda_{n-1} \cdot r^{n-2} + (-1)^{n-1} \cdot r^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot [\lambda_3 \cdot r^2 + \lambda_2 \cdot r + \lambda_1] \\ &= (-1)^{n-1} [r^{n-1} + \lambda_{n-1} \cdot r^{n-2} + \dots + \lambda_3 \cdot r^2 + \lambda_2 \cdot r + \lambda_1]. \end{aligned}$$

Concluimos então, que a equação  $P_M(r) = 0$  coincide com a equação característica de (1.2).  $\square$

## Capítulo 2

# Funções e Aplicações Implícitas

### 2.1 Funções e Aplicações Implícitas Locais

Nesta seção apresentaremos os Teoremas da Função e da Aplicação Implícitas locais. Iniciemos provando a existência da função implícita. Os pontos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  serão denotados por  $(x, u)$  onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}$ .

**Lema 2.1. (Existência da Função Implícita)** *Considere um aberto  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  e um ponto  $(x_0, u_0) \in U$  de tal forma que  $f(x_0, u_0) = c$ . Se  $\frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u_0) \neq 0$ , então existe uma bola  $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ , um intervalo  $J = (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon) \subset \mathbb{R}$  tal que para cada  $x \in B$ , existe um único  $u = \varphi(x) \in J$  tal que  $f(x, \varphi(x)) = c$ ,  $\forall x \in B$  e  $\varphi(x_0) = u_0$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $\frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u_0) > 0$ .

Pelo Teorema da Conservação do Sinal, sendo  $f \in \mathcal{C}^1$ ,  $\exists R > 0$  tal que

$$\frac{\partial}{\partial u} f(x, u) > 0, \forall (x, u) \in \tilde{B} \text{ com } \tilde{B} = B((x_0, u_0), R) \subset U.$$

Sejam  $\epsilon = \frac{R}{2}$ ,  $J = (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon)$ .

Temos que  $\{x_0\} \times \bar{J} = \{x_0\} \times [u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon] \subset \tilde{B}$ .

A função  $u \in \bar{J} \mapsto f(x_0, u) \in \mathbb{R}$  é crescente, pois

$$\frac{d}{du} [f(x_0, u)] = \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u) > 0, \forall u \in \bar{J}.$$

Como  $f(x_0, u_0) = c$ , então  $f(x_0, u_0 - \epsilon) < c$  e  $f(x_0, u_0 + \epsilon) > c$ .

Pelo Teorema da Conservação do Sinal,  $\exists \delta > 0$  tal que para cada  $x \in B = B(x_0, \delta)$ ,

$$(x, u_0 - \epsilon), (x, u_0 + \epsilon) \in \tilde{B} \text{ e } f(x, u_0 - \epsilon) < c, f(x, u_0 + \epsilon) > c.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, para cada  $x \in B = B(x_0, \delta)$ , existe um único  $u = \varphi(x) \in J$  tal que  $f(x, u) = c$ .

Está definida assim  $\varphi : B \rightarrow J$  tal que  $f(x, \varphi(x)) = c$ ,  $x \in B$ .  $\square$

Para provar a continuidade da função implícita, usaremos o seguinte resultado:

**Lema 2.2.** *Seja  $(x_k)$  uma sequência limitada em  $\mathbb{R}^n$ . Então  $(x_k)$  converge para  $a \in \mathbb{R}^n$  se, e somente se, toda subsequência convergente de  $(x_k)$  converge para  $a$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $(x_k)$  converge para  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $(x_{k_j})$  é subsequência de  $(x_k)$  então  $(x_{k_j})$  converge para  $a$ , como é bem conhecido.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $(x_k)$  não converge para  $a$ .

Então  $\exists \epsilon_0 > 0$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $\exists k \geq m$  tal que  $|x_k - a| \geq \epsilon_0$ .

Para  $m = 1$ ,  $\exists k_1 \geq 1$  tal que  $|x_{k_1} - a| \geq \epsilon_0$ .

Para  $m = k_1 + 1$ ,  $\exists k_2 \geq k_1 + 1 > k_1$  tal que  $|x_{k_2} - a| \geq \epsilon_0$ .

Prosseguindo com esse raciocínio, existe um conjunto  $N_1 = \{k_1, k_2, \dots\}$  tal que  $|x_k - a| \geq \epsilon_0$ ,  $\forall k \in N_1$ .

Sendo limitada, a subsequência  $(x_k)_{k \in N_1}$  admite subsequência  $(x_k)_{k \in N_2}$ ,  $N_2 \subset N_1$ , convergente. Por hipótese  $\lim_{k \in N_2} x_k = a$ , o que contradiz a afirmação feita anteriormente. Portanto  $(x_k)$  converge para  $a$ .  $\square$

**Lema 2.3. (Continuidade da Função Implícita)** *Nas condições do Lema 2.1, a função implícita  $u = \varphi(x)$ ,  $\varphi : B \rightarrow (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon)$ , é contínua.*

*Demonstração.* Fixemos  $a \in B = B(x_0, \delta)$  e tomemos  $(x_k)$  em  $B$ ,  $x_k \rightarrow a$ .

Provemos que  $\varphi(x_k) \rightarrow \varphi(a)$ .

A sequência  $(\varphi(x_k))$  em  $J = (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon)$  é limitada, logo possui subsequência convergente.

Seja  $(\varphi(x_{k_m}))$  uma subsequência de  $(\varphi(x_k))$  que converge para  $b \in \bar{J}$ . Temos assim,  $x_{k_m} \rightarrow a$  e  $\varphi(x_{k_m}) \rightarrow b$ .

Pelo Lema 2.1 segue que  $c = f(x_{k_m}, \varphi(x_{k_m}))$ , e pela continuidade de  $f$  temos  $f(x_{k_m}, \varphi(x_{k_m})) \rightarrow f(a, b)$ .

Como  $a \in B$  então  $c = f(a, \varphi(a))$ , logo  $b = \varphi(a) \in J$ .

Assim, toda subsequência convergente de  $(\varphi(x_k))$  converge para  $\varphi(a)$ .

O Lema 2.2 implica que  $\varphi(x_k) \rightarrow \varphi(a)$ .

Portanto,  $\varphi$  é contínua em  $a$ ,  $\forall a \in B$ .  $\square$

Antes da demonstração do Teorema da Função Implícita lembremos do *Teorema do Valor Médio*: sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in U$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável. Se o segmento de reta  $[a, a + v] \subset U$  então existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que

$$f(a + v) - f(a) = \frac{\partial}{\partial v} f(a + \theta v) = \langle \nabla f(a + \theta v), v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(a + \theta v) \alpha_i.$$

**Teorema 2.4. (Teorema da Função Implícita)**

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  um aberto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^1$  e  $(x_0, u_0) \in U$  com  $f(x_0, u_0) = c$ . Se  $\frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u_0) \neq 0$  então existem uma bola  $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$  e um intervalo  $J = (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon)$  tal que  $B \times \bar{J} \subset U$ ,  $\frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \neq 0$ ,  $\forall (x, u) \in B \times \bar{J}$  e para cada  $x \in B$ , existe um único  $u = \varphi(x) \in J$  que satisfaz  $\varphi(x_0) = u_0$  com  $f(x, \varphi(x)) = c$ . A função  $\varphi : B \rightarrow J$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  e suas derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x) = - \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x, \varphi(x))}{\frac{\partial}{\partial u} f(x, \varphi(x))}, \quad x \in B.$$

*Demonstração.* Provamos nos lemas anteriores a existência e a continuidade da função implícita. Verifiquemos a fórmula das derivadas parciais.

Para  $x \in B$  tomemos  $x + te_i \in B$  de forma que  $f(x, \varphi(x)) = c$  e

$$c = f(x + te_i, \varphi(x + te_i)) = f(x + te_i, \varphi(x) + \varphi(x + te_i) - \varphi(x)).$$

Chamando  $k = \varphi(x + te_i) - \varphi(x)$  obtemos  $f(x + te_i, \varphi(x) + k) = c$ .

Seja  $e_{n+1}$  o vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$  na direção do eixo  $u$ .

Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\theta = \theta(t) \in (0, 1)$  tal que

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + te_i, \varphi(x) + k) - f(x, \varphi(x)) = \langle \nabla f(x + \theta te_i, \varphi(x) + \theta k e_{n+1}), (te_i, k e_{n+1}) \rangle, \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x + \theta te_i, \varphi(x) + \theta k) t + \frac{\partial}{\partial u} f(x + \theta te_i, \varphi(x) + \theta k) k \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \frac{\varphi(x + te_i) - \varphi(x)}{t} = \frac{k}{t} = - \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x + \theta te_i, \varphi(x) + \theta k)}{\frac{\partial}{\partial u} f(x + \theta te_i, \varphi(x) + \theta k)}.$$

Fazendo  $t \rightarrow 0$ , como as derivadas parciais são contínuas e  $\varphi$  é contínua, temos  $k \rightarrow 0$  e

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + te_i) - \varphi(x)}{t} = - \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x, \varphi(x))}{\frac{\partial}{\partial u} f(x, \varphi(x))}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Pela fórmula acima, como  $f \in \mathcal{C}^1$ , as derivadas parciais de  $\varphi$  são contínuas e portanto  $\varphi \in \mathcal{C}^1$ .  $\square$

O teorema seguinte será utilizado na demonstração do Teorema da Aplicação Implícita que pode ser visto em [7].

**Teorema 2.5. (Teorema da Aplicação Inversa)** Consideremos  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ). Se  $x_0$  é tal que  $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é invertível então existe uma bola aberta  $B = B(x_0, \delta) \subset U$  tal que a restrição  $f|_B$  é um difeomorfismo de classe  $\mathcal{C}^k$  sobre um aberto  $V \ni f(x_0)$ .

**Teorema 2.6. (Teorema da Aplicação Implícita)**

Sejam  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ) num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $(x_0, u_0) \in U$  onde  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $u_0 \in \mathbb{R}^m$ .

Se  $f(x_0, u_0) = 0$ ,  $\det \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u_0) \neq 0$ , então existe uma vizinhança  $V_0 \subset \mathbb{R}^n$  de  $x_0$  e uma única  $g : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tal que  $f(x, g(x)) = 0$ ,  $\forall x \in V_0$ , e  $g(x_0) = u_0$ .

*Demonstração.* Consideremos  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  definida por  $\phi(x, u) = (x, f(x, u))$ . Temos

- $\phi$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  (pois  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^1$ );
- A matriz Jacobiana de  $\phi$  no ponto  $(x_0, u_0)$  tem a forma

$$J\phi(x_0, u_0) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, u_0) & \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u_0) \end{bmatrix};$$

- $\det(J\phi(x_0, u_0)) = \det \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u_0) \neq 0$ , e portanto  $J\phi(x_0, u_0)$  é bijetora (pois  $J\phi(x_0, u_0)$  é invertível).

Pelo Teorema da Aplicação Inversa existe  $W \subset U$  vizinhança aberta de  $(x_0, u_0)$  tal que  $V = f(W)$  é aberto e  $\phi : W \rightarrow V$  é um difeomorfismo de classe  $\mathcal{C}^1$ , ou seja, existe a função inversa  $G = \phi^{-1} : V \rightarrow W$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Notemos que como  $\phi(x, u) = (x, f(x, u))$ , temos

$$(x, u) = G(x, f(x, u)).$$

Então  $G$  preserva as primeiras  $n$  coordenadas assim como  $\phi$ . Podemos escrever  $G$  da seguinte forma

$$G(x, z) = (x, h(x, z))$$

para  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $z \in \mathbb{R}^m$ , onde  $h : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Seja  $V_0 \subset \mathbb{R}^n$  uma vizinhança de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $V_0 \times 0 \subset W$ . Se  $x \in V_0$ , então  $(x, 0) \in W$ , e temos

$$\begin{aligned} G(x, 0) &= (x, h(x, 0)) \\ (x, 0) &= \phi(x, h(x, 0)) = (x, f(x, h(x, 0))) \\ 0 &= f(x, h(x, 0)). \end{aligned}$$

Tomando  $g(x) = h(x, 0)$  para  $x \in V_0$  teremos  $g : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tal que  $f(x, g(x)) = 0$ ,  $\forall x \in V_0$ , e

$$(x_0, u_0) = G(x_0, f(x_0, u_0)) = G(x_0, 0) = (x_0, h(x_0, 0)) \Rightarrow u_0 = g(x_0).$$

□

## 2.2 Funções e Aplicações Implícitas Globais

Na presente seção, demonstraremos os Teoremas da Função e da Aplicação Implícitas globais. Seguimos [3] e [4].

### Teorema 2.7. (Teorema da Função Implícita Global)

Suponhamos que  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é continuamente diferenciável (ou seja,  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^1$ ), e existe uma constante positiva  $d$  tal que

$$\frac{\partial}{\partial u} f(x, u) > d > 0, \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Então existe uma única função  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tal que  $f(x, u(x)) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

*Demonstração.* Fixemos  $x \in \mathbb{R}^n$ . Provemos que existe um único  $u(x) \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x, u(x)) = 0$ .

A função  $f$  é estritamente crescente com respeito à  $u$ . De fato,

$$\frac{d}{du} [f(x, u)] = \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) > d > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Se  $f(x, 0) = 0$  então  $u(x) = 0$  é a solução trivial que satisfaz  $f(x, u(x)) = 0$ .

Suponha  $f(x, 0) = c \neq 0$ . Por hipótese temos que  $\frac{\partial}{\partial u} f(x, u) > d > 0$  e  $f$  é contínua e diferenciável  $\forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Pelo Teorema do Valor Médio,

$$f(x, \frac{|c|}{d}) - f(x, 0) = \frac{d}{du} [f(x, u)] \Big|_{u=u_*^1} \cdot (\frac{|c|}{d} - 0), \quad u_*^1 \in (0, \frac{|c|}{d});$$

$$f(x, \frac{|c|}{d}) = f(x, 0) + \frac{d}{du} [f(x, u)] \Big|_{u=u_*^1} \cdot \frac{|c|}{d} > c + |c| \geq 0.$$

De modo análogo,

$$f(x, 0) - f(x, -\frac{|c|}{d}) = \frac{d}{du} [f(x, u)] \Big|_{u=u_*^2} \cdot (0 + \frac{|c|}{d}), \quad u_*^2 \in (-\frac{|c|}{d}, 0);$$

$$-f(x, -\frac{|c|}{d}) = -f(x, 0) + \frac{d}{du} [f(x, u)] \Big|_{u=u_*^2} \cdot \frac{|c|}{d} > -c + |c| \geq 0.$$

Logo,  $f(x, -\frac{|c|}{d}) < 0 < f(x, \frac{|c|}{d})$ .

Pelo Teorema do Valor Intermediário existe um único  $u(x) \in (-\frac{|c|}{d}, \frac{|c|}{d})$  tal que  $0 = f(x, u(x))$ .

Portanto, existe uma função  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz  $f(x, u(x)) = 0$ .

Provemos que  $u(x)$  é continuamente diferenciável. Fixemos  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Por hipótese:

- $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ;



- $(x_0, u(x_0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ;
- $\frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u(x_0)) \neq 0$ ;
- $f(x_0, u(x_0)) = 0$ .

Aplicando o Teorema da Função Implícita local vemos que  $u(x)$  é continuamente diferenciável em  $x_0$ . Como  $x_0$  é arbitrário segue que  $u(x)$  é continuamente diferenciável em todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

O seguinte resultado será utilizado na demonstração do Teorema da Aplicação Implícita Global. Trata-se do *Princípio da Contração*: Sejam  $X$  um espaço métrico completo e  $M \subset X$  um subconjunto fechado. Se  $f : M \rightarrow M$  é uma contração então existe um único  $x_0 \in M$  tal que  $f(x_0) = x_0$ , isto é, existe um único ponto fixo de  $f$ .

**Notação:** Denotaremos a entrada  $ij$  da Jacobiana  $\frac{\partial}{\partial u} f(x, u)$  por  $\left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ij}$ .

**Teorema 2.8. (Teorema da Aplicação Implícita Global)** *Suponha que  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação continuamente diferenciável (ou de classe  $C^1$ ). Se para  $\forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ,*

$$\left| \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ii} \right| - \sum_{j \neq i} \left| \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ij} \right| \geq d, \quad (2.1)$$

para uma constante  $d > 0$ , então existe uma única função  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  continuamente diferenciável tal que  $f(x, g(x)) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

*Demonstração.* Primeiro discutiremos o caso em que  $\left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ii} > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . De (2.1) temos para  $\forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ii} - \sum_{j \neq i} \left| \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ij} \right| \geq d > 0. \quad (2.2)$$

Fixemos  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e seja  $c := f(x_0, 0)$ .

Se  $c = 0$  segue que  $f(x_0, 0) = 0$  e tomando  $g(x_0) = 0$  teremos  $f(x_0, g(x_0)) = f(x_0, 0) = 0$ .

Se  $c \neq 0$ , então consideremos a bola fechada  $B[0, \frac{|c|}{d}] = \{u \in \mathbb{R}^m : |u| \leq \frac{|c|}{d}\}$  em  $\mathbb{R}^m$ .

Definamos uma função  $\tau : B[0, \frac{|c|}{d}] \rightarrow \mathbb{R}^m$  por

$$\tau u = u - \frac{1}{l} f(x_0, u), \quad |u| \leq \frac{|c|}{d},$$

onde  $l > 0$  é uma constante a ser especificada.

Temos:

- $f_i(x_0, u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto f_i(x_0, u)$ ;
- $f_i$  continuamente diferenciável,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Assim, para  $u \in \mathbb{R}^m$ , pelo Teorema do Valor Médio aplicado ao segmento de reta  $[(x_0, 0), (x_0, u)] \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\exists \theta_i \in (0, 1)$  tal que

$$f_i(x_0, u) - f_i(x_0, 0) = \langle \nabla_u f_i(x_0, 0 + \theta_i u), u \rangle = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(x_0, \theta_i u) u_j.$$

Então, fazendo  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$$\begin{aligned} f_1(x_0, u) - f_1(x_0, 0) &= \frac{\partial}{\partial u_1} f_1(x_0, \theta_1 u) u_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial u_m} f_1(x_0, \theta_1 u) u_m \\ &\vdots \\ f_m(x_0, u) - f_m(x_0, 0) &= \frac{\partial}{\partial u_1} f_m(x_0, \theta_m u) u_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial u_m} f_m(x_0, \theta_m u) u_m. \end{aligned}$$

Chamando  $L = \left[ \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(x_0, \theta_i u) \right]_{m \times m}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  temos

$$f(x_0, u) - f(x_0, 0) = Lu \Rightarrow f(x_0, u) = f(x_0, 0) + Lu.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\tau u| &= \left| u - \frac{1}{l} f(x_0, u) \right| \\ &= \left| u - \frac{1}{l} (f(x_0, 0) + Lu) \right| \\ &= \left| u - \frac{1}{l} c - \frac{1}{l} Lu \right| \\ &= \left| -\frac{1}{l} c + u - \frac{1}{l} Lu \right|. \end{aligned}$$

Tomemos  $I \in \mathfrak{M}_m(\mathbb{R})$  a matriz identidade de ordem  $m$ . Dessa forma, por (1.1)

$$|\tau u| \leq \left| -\frac{1}{l} c \right| + \left| Iu - \frac{1}{l} Lu \right| \leq \frac{1}{l} |c| + \left\| I - \frac{1}{l} L \right\| |u|. \quad (2.3)$$

Desde que  $\frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u)$  é contínua (pois  $f$  é continuamente diferenciável), todas as entradas são limitadas por uma constante  $M$  para todo  $u \in B[0, \frac{|c|}{d}]$ , isto é,

$$\left| \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u) \right]_{ij} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(x_0, u) \right| \leq M, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad |u| \leq \frac{|c|}{d}.$$

Assim, em particular,

$$1 - \frac{1}{l} \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u) \right]_{ii} = 1 - \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial u_i} f_i(x_0, u) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

para  $l > 0$  suficientemente grande.

Portanto, por (2.2),

$$\begin{aligned}
\left\| I - \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u) \right\| &= \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \left| 1 - \frac{1}{l} \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u) \right]_{ii} \right| + \frac{1}{l} \sum_{j \neq i} \left| \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u) \right]_{ij} \right| \right\} \\
&= \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ 1 - \frac{1}{l} \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u) \right]_{ii} + \frac{1}{l} \sum_{j \neq i} \left| \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u) \right]_{ij} \right| \right\} \\
&= \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ 1 - \frac{1}{l} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u) \right]_{ii} - \sum_{j \neq i} \left| \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, u) \right]_{ij} \right| \right) \right\} \\
&\leq 1 - \frac{1}{l} d < 1, \quad |u| \leq \frac{|c|}{d}.
\end{aligned}$$

De modo análogo,

$$\left\| I - \frac{1}{l} L \right\| = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \left| 1 - \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial u_i} f_i(x_0, \theta_i u) \right| + \frac{1}{l} \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(x_0, \theta_i u) \right| \right\},$$

e como

$$|\theta_i u| = \theta_i |u| \leq \theta_i \frac{|c|}{d} \leq \frac{|c|}{d}, \quad \forall i,$$

segue que

$$\left\| I - \frac{1}{l} L \right\| \leq 1 - \frac{d}{l}. \tag{2.4}$$

Decorre de (2.3) que

$$\begin{aligned}
|\tau u| &\leq \frac{1}{l} |c| + \left(1 - \frac{d}{l}\right) \frac{|c|}{d} \\
&= \frac{|c|}{l} + \frac{|c|}{d} - \frac{|c|}{l} = \frac{|c|}{d},
\end{aligned}$$

que implica que  $\tau : B[0, \frac{|c|}{d}] \rightarrow B[0, \frac{|c|}{d}]$  para  $l$  suficientemente grande. Além disso,  $\tau$  é contínua.

Agora sejam  $u_1, u_2 \in B[0, \frac{|c|}{d}]$ . Temos:

$$\begin{aligned}
|\tau u_2 - \tau u_1| &= \left| u_2 - \frac{1}{l} f(x_0, u_2) - u_1 + \frac{1}{l} f(x_0, u_1) \right| \\
&= \left| (u_2 - u_1) - \frac{1}{l} (f(x_0, u_2) - f(x_0, u_1)) \right|.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio temos

$$f_i(x_0, u_2) - f_i(x_0, u_1) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(x_0, u_1 + \eta_j v) v_j,$$

sendo  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$  com  $u_2 = u_1 + v$ ,  $\eta_i \in (0, 1)$ .

Chamemos  $N = \left[ \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(x_0, u_1 + \eta_i v) \right]_{m \times m}$ . Então,

$$f(x_0, u_2) - f(x_0, u_1) = Nv = N(u_2 - u_1)$$

e

$$\begin{aligned} |\tau u_2 - \tau u_1| &= \left| (u_2 - u_1) - \frac{1}{l} N(u_2 - u_1) \right| \\ &= \left| I(u_2 - u_1) - \frac{1}{l} N(u_2 - u_1) \right| \\ &= \left| \left( I - \frac{1}{l} N \right) (u_2 - u_1) \right|. \end{aligned}$$

Então temos,

$$|\tau u_2 - \tau u_1| = \left| \left( I - \frac{1}{l} N \right) (u_2 - u_1) \right|. \quad (2.5)$$

Podemos afirmar que  $|u_1 + \eta_i v| \leq \frac{|c|}{d}$ ,  $\forall i$ . De fato,

$$\begin{aligned} |u_1 + \eta_i v| &= |u_1 + \eta_i(u_2 - u_1)| \\ &= |u_1 + \eta_i u_2 - \eta_i u_1| \\ &= |(1 - \eta_i)u_1 + \eta_i u_2| \\ &\leq (1 - \eta_i)|u_1| + \eta_i |u_2| \\ &\leq (1 - \eta_i) \frac{|c|}{d} + \eta_i \frac{|c|}{d} \\ &= \frac{|c|}{d}. \end{aligned}$$

Logo, análogo à (2.4), segue que

$$\begin{aligned} \left\| I - \frac{1}{l} N \right\| &= \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \left| 1 - \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial u_i} f_i(x_0, u_1 + \eta_i v) \right| - \frac{1}{l} \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(x_0, \eta_i v) \right| \right\} \\ &\leq 1 - \frac{d}{l}. \end{aligned}$$

Voltando a (2.5) temos

$$|\tau u_2 - \tau u_1| \leq \left\| I - \frac{1}{l} N \right\| \cdot |u_2 - u_1| \leq \left( 1 - \frac{d}{l} \right) |u_2 - u_1|.$$

Assim,

- $\tau : B[0, \frac{|c|}{d}] \rightarrow B[0, \frac{|c|}{d}]$  é contínua;
- $\exists K = 1 - \frac{d}{l}$ ,  $0 < K < 1$  tal que  $|\tau u_2 - \tau u_1| \leq K|u_2 - u_1|$ ,  $\forall u_1, u_2 \in B[0, \frac{|c|}{d}]$ .

Isto significa que  $\tau$  é uma contração contínua em  $B[0, \frac{|c|}{d}]$ .

Pelo Princípio de Contração, existe um único  $u_0 \in B[0, \frac{|c|}{d}]$  tal que  $\tau u_0 = u_0$ .

Logo,

$$\tau u_0 = u_0 - \frac{1}{l} f(x_0, u_0) \Rightarrow f(x_0, u_0) = u_0 - \tau u_0 = 0.$$

Portanto, podemos definir  $g(x_0) = u_0$ .

Seguindo o raciocínio acima para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  temos  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida unicamente e que satisfaz  $f(x, g(x)) = 0$ .

Pela condição (2.1) temos que

$$\left| \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ii} \right| > \sum_{i \neq j} \left| \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ij} \right|, \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

e pelo Lema 1.3 segue que  $\frac{\partial}{\partial u} f(x, u)$  é invertível  $\forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

Provemos a continuidade de  $g$ . Fixemos  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Temos:

- $f(x_0, g(x_0)) = 0$ ;
- $f$  é continuamente diferenciável e  $\det \frac{\partial}{\partial u} f(x_0, g(x_0)) \neq 0$ , pois  $\frac{\partial}{\partial u} f(x, u)$  é invertível  $\forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

Pelo Teorema da Aplicação Implícita local,  $\exists V_0 \subset \mathbb{R}^n$  vizinhança de  $x_0$  e uma única função de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $g_1 : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ , tal que  $f(x, g_1(x)) = 0$ . Como  $g_1$  é única em  $V_0 \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $f(x, g_1(x)) = 0$  e  $g$  satisfaz  $f(x, g(x)) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  então  $g(x) = g_1(x)$ ,  $\forall x \in V_0$ . Portanto  $g$  é continuamente diferenciável em  $V_0$ . Como  $x_0$  é arbitrário segue que  $g$  é continuamente diferenciável em  $\mathbb{R}^n$ .

No caso em que  $\left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ii} < 0$  para todo  $i$ , consideremos  $\hat{f}(x, u) = -f(x, u)$ .

Obviamente,  $\hat{f}$  satisfaz (2.2).

Como antes, podemos encontrar uma única  $g$  continuamente diferenciável tal que

$$\hat{f}(x, g(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow -f(x, g(x)) = \hat{f}(x, g(x)) = 0 \Rightarrow f(x, g(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Se  $\left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ii} > 0$  para alguns  $i$ 's e  $\left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ii} < 0$  para os demais  $i$ 's, com uma permutação nas componentes de  $f$ , então não há perda de generalidade em supor que

$$\left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \text{e} \quad \left[ \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right]_{ii} < 0, \quad i = k + 1, k + 2, \dots, m.$$

Sejam  $f(x, u) = (f_1(x, u), f_2(x, u), \dots, f_k(x, u), f_{k+1}(x, u), \dots, f_m(x, u))$ ,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ . Definamos

$$\hat{f}(x, u) = (f_1(x, u), f_2(x, u), \dots, f_k(x, u), -f_{k+1}(x, u), -f_{k+2}(x, u), \dots, -f_m(x, u)). \quad (2.6)$$

Segue de (2.1) que  $\hat{f}$  satisfaz (2.2). Como acima podemos encontrar uma única  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $\hat{f}(x, g(x)) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Pela condição (2.6), vemos que

$$\begin{aligned}\hat{f}(x, g(x)) &= (f_1(x, g(x)), \dots, f_k(x, g(x)), -f_{k+1}(x, g(x)), -f_{k+2}(x, g(x)), \dots, -f_m(x, g(x))) \\ &= (0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0) \\ &\Leftrightarrow f_i(x, g(x)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}$$

Portanto,  $f(x, g(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

□

## Capítulo 3

# Controlabilidade Aproximada de Sistemas Não-Lineares

### 3.1 Existência de Controle para Sistemas Não-Lineares de Entrada e Saída Únicas

Considere uma equação não-linear de entrada e saída únicas

$$y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, u) \quad (3.1)$$

onde  $y \in \mathbb{R}$  é a medida de saída;

$u \in \mathbb{R}$  é a entrada controle;

$y^{(i)} (i = 1, 2, \dots, n)$  é a  $i$ -ésima derivada temporal da saída  $y$ ;

$f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função não-linear.

O objetivo do controle aproximado pode ser descrito como: dada uma saída desejada,  $y_d(t)$ , encontrar um controle  $u^*$ , tal que a saída da equação acompanha a trajetória desejada com uma precisão aceitável, enquanto os estados e o controle permanecem limitados. Se  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [y, y', \dots, y^{(n-1)}]^T$  for o estado, podemos representar a equação (3.1) na forma de um sistema,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f(x, u). \end{cases} \quad (3.2)$$

As seguintes hipóteses são feitas para o sistema (3.2):

**Hipótese 1:**  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Hipótese 2:**  $\left| \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right| > d > 0, \forall (x, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Hipótese 3:**  $y_d(t), y'_d(t), \dots, y_d^{(n)}(t)$  são suaves e limitadas em  $\mathbb{R}$ .

Definamos  $x_d, \zeta$  como

$$x_d = [y_d, y'_d, \dots, y_d^{(n-1)}]^T, \quad (3.3)$$

$$\zeta = x - x_d = [y - y_d, y' - y'_d, \dots, y^{(n-1)} - y_d^{(n-1)}]^T$$

e o erro como

$$e = [\Lambda \quad 1] \zeta = \lambda_1 \cdot (y - y_d) + \lambda_2 \cdot (y' - y'_d) + \dots + \lambda_{n-1} \cdot (y^{(n-2)} - y_d^{(n-2)}) + (y^{(n-1)} - y_d^{(n-1)}).$$

Os coeficientes  $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}]$  serão apropriadamente escolhidos de tal forma que  $\zeta(t) \rightarrow 0$  quando  $e(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ . Uma condição suficiente para isso está no próximo resultado. Sejam  $y(t)$  solução de (3.1) e  $y_d(t)$  a saída desejada.

**Teorema 3.1.** *Se o polinômio  $P(s) = s^{n-1} + \lambda_{n-1}s^{n-2} + \dots + \lambda_2s + \lambda_1$  é de Hurwitz e se  $e(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  então  $y(t) - y_d(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , juntamente com todas as suas derivadas até ordem  $n - 1$ .*

*Demonstração.* Da definição de  $e(t)$ , temos

$$\lambda_1 \cdot [y(t) - y_d(t)] + \lambda_2 \cdot [y'(t) - y'_d(t)] + \dots + \lambda_{n-1} \cdot [y^{(n-2)}(t) - y_d^{(n-2)}(t)] + [y^{(n-1)}(t) - y_d^{(n-1)}(t)] = e(t)$$

que é equivalente a

$$\lambda_1 \cdot [y(t) - y_d(t)] + \lambda_2 \cdot [y(t) - y_d(t)]' + \dots + \lambda_{n-1} \cdot [y(t) - y_d(t)]^{(n-2)} + [y(t) - y_d(t)]^{(n-1)} = e(t).$$

Vemos que  $y - y_d$  é solução da equação diferencial linear não-homogênea

$$\lambda_1 y + \lambda_2 y' + \dots + \lambda_{n-1} y^{(n-2)} + y^{(n-1)} = e(t). \quad (3.4)$$

Considerando o sistema linear homogêneo (1.4), associado a (3.4), pelo Lema 1.4 e pela hipótese de  $P(s)$  ser de Hurwitz, temos que os autovalores da matriz  $M$  em (1.5) têm parte real negativa. Daí, segue da teoria geral dos sistemas lineares que existem  $K, \nu > 0$  tais que

$$\|e^{Mt}\| \leq K e^{-\nu t}, \quad t \geq 0.$$

Pela Fórmula de Variação dos Parâmetros, toda solução do sistema linear associado a (3.4) é da forma

$$x(t) = e^{Mt} c + e^{Mt} \int_0^t e^{-Ms} [0, \dots, 0, e(s)]^T ds,$$

onde  $x(0) = c$  é um vetor constante. Daí, usando que  $e(t)$  é limitada em  $[0, \infty)$ , chega-se facilmente que  $|x(t)| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Em nosso caso, para

$$x(t) = [y - y_d, y' - y'_d, \dots, y^{(n-2)} - y_d^{(n-2)}, y^{(n-1)} - y_d^{(n-1)}]^T,$$

concluimos o enunciado. □

A derivada temporal do erro pode ser escrita como

$$\dot{e} = f(x, u) - y_d^{(n)}(t) + [0 \quad \Lambda] \zeta. \quad (3.5)$$



De fato, derivando a expressão do erro em relação a  $t$  obtemos

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \lambda_1.(y' - y'_d) + \lambda_2.(y'' - y''_d) + \dots + \lambda_{n-1}.(y^{(n-1)} - y_d^{(n-1)}) + (y^{(n)} - y_d^{(n)}) \\ &= y^{(n)} - y_d^{(n)} + [0 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{n-1}] \cdot \begin{bmatrix} y - y_d \\ y' - y'_d \\ \vdots \\ y^{(n-1)} - y_d^{(n-1)} \end{bmatrix} \\ &= f(x, u) - y_d^{(n)}(t) + [0 \ \Lambda] \zeta. \end{aligned}$$

**Teorema 3.2.** *Considere o sistema (3.2) satisfazendo as Hipóteses 1 – 3. Existe uma entrada controle ideal  $u^*$  tal que*

$$\dot{e} = -k.e \quad (3.6)$$

sendo  $k$  uma constante positiva. Subsequentemente, (3.6) leva a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_d(t)| = 0.$$

*Demonstração.* Somando e subtraindo  $k.e$  do lado direito da equação de erro (3.5), temos

$$\dot{e} = f(x, u) - y_d^{(n)}(t) + [0 \ \Lambda] \zeta + k.e - k.e.$$

Chamando  $\nu(t, x) = k.e - y_d^{(n)}(t) + [0 \ \Lambda] \zeta$  obtemos

$$\dot{e} = f(x, u) + \nu(t, x) - k.e. \quad (3.7)$$

Definamos  $g(t, x, u) = f(x, u) + \nu(t, x)$ .

Pela Hipótese 2 temos que

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right| > d > 0, \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

e considerando o fato de que  $\frac{\partial}{\partial u} \nu(t, x) = 0$  chegamos à

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} g(t, x, u) \right| = \left| \frac{\partial}{\partial u} [f(x, u) + \nu(t, x)] \right| = \left| \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right| > d > 0, \quad \forall (t, x, u) \in \mathbb{R}^{n+2}.$$

Assim:

- $g : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $\mathcal{C}^1$ ;
- $\exists d > 0$  tal que  $\left| \frac{\partial}{\partial u} g(t, x, u) \right| > d > 0$ .

Pelo Teorema da Função Implícita global, existe uma entrada controle ideal  $u^* = u(t, x)$  tal que  $g(t, x, u^*) = 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , isto é,

$$g(t, x, u^*) = f(x, u^*) + \nu(t, x) = 0. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) em (3.7) sob a ação de  $u^*$  temos

$$\dot{e} = f(x, u^*) + \nu(t, x) - k.e = -k.e.$$

Portanto  $\dot{e} = -k.e$ . Se temos (3.6) então

$$e(t) = \exp(-kt).c \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0,$$

onde  $c$  é uma constante.

Como dito anteriormente, o vetor coeficiente  $\Lambda$  da equação de erro foi escolhido de tal forma que, se  $e(t) \rightarrow 0$  então  $\zeta(t) \rightarrow 0$ , o que implica

$$\begin{aligned} y(t) - y_d(t) &\rightarrow 0 \\ y'(t) - y'_d(t) &\rightarrow 0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(t) - y_d^{(n-1)}(t) &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Temos assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_d(t)| = 0.$$

□

**Exemplos 3.3.** Consideremos a equação não-linear

$$y'' = y^2 + 0,1(1 + y'^2)u. \quad (3.9)$$

onde  $y \in \mathbb{R}$  e  $u \in \mathbb{R}$ . Seja  $y_d(t) = \sin(t) + \cos(0,5t)$  a saída desejada para a equação (3.9). Provemos que existe um controle  $u^*$  tal que a solução da equação (3.9) se aproxima da saída desejada.

Se  $x = [x_1, x_2]^T = [y, y']^T$  for o estado podemos representar o sistema associado a (3.9) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + 0,1(1 + x_2^2)u := f(x, u). \end{cases} \quad (3.10)$$

Temos:

$$y'_d(t) = \cos(t) - 0,5 \sin(0,5t) \quad \text{e} \quad y''_d(t) = -\sin(t) - 0,25 \cos(0,5t).$$

Temos as seguintes condições:

- (1)  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $\mathbb{R}^3$ .
- (2)  $\frac{\partial}{\partial u} f(x, u) = 0,1(1 + x_2^2) \geq 0,1$ ;
- (3)  $y_d(t)$ ,  $y'_d(t)$ ,  $y''_d(t)$  são suaves e limitadas em  $\mathbb{R}$ .

Pelo Teorema 3.2 existe uma entrada controle  $u^* = u(t, x)$  tal que  $\dot{e} = -k.e$  o que implica  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_d(t)| = 0$ , sendo  $k$  constante positiva, ou seja, a solução da equação

(3.9) com o controle  $u^*$ , se aproxima da saída desejada.

Neste caso podemos obter a expressão de  $u^* = u(t, x)$ .

Temos:

$$\zeta = x - x_d = [x_1 - \sin(t) - \cos(0, 5t), x_2 - \cos(t) + 0, 5 \sin(0, 5t)]^T,$$

$$e = [\Lambda \quad 1] \zeta = [\lambda \quad 1] \zeta = \lambda x_1 - \lambda \sin(t) - \lambda \cos(0, 5t) + x_2 - \cos(t) + 0, 5 \sin(0, 5t),$$

onde  $\lambda$  é escolhido de tal forma que o polinômio  $P(s) = s + \lambda$  é de Hurwitz (sendo  $e = (y' - y'_d) + \lambda(y - y_d)$ ,  $P(s)$  é o polinômio característico  $y' + \lambda y = 0$ ).

Para que  $P(s)$  seja de Hurwitz é suficiente tomar  $\lambda > 0$ .

A derivada temporal do erro é dada por

$$\begin{aligned} \dot{e} &= f(x, u) - y''_d(t) + [0 \quad \lambda] \zeta \\ &= x_1^2 + 0, 1(1 + x_2^2)u + \sin(t) + 0, 25 \cos(0, 5t) + \\ &\quad + [0 \quad \lambda] \cdot [x_1 - \sin(t) - \cos(0, 5t), x_2 - \cos(t) + 0, 5 \sin(0, 5t)]^T, \end{aligned}$$

$$\dot{e} = x_1^2 + 0, 1(1 + x_2^2)u + \sin(t) + 0, 25 \cos(0, 5t) + \lambda x_2 - \lambda \cos(t) + \lambda \cdot 0, 5 \sin(0, 5t). \quad (3.11)$$

Sob a ação de  $u^*$  a equação (3.11) deve ser igual a

$$\dot{e} = -k \cdot e = -k\lambda x_1 + k\lambda \sin(t) + k\lambda \cos(0, 5t) - k \cdot x_2 + k \cos(t) - k \cdot 0, 5 \sin(0, 5t). \quad (3.12)$$

Igualando o lado direito da equação (3.11) sob a ação de  $u^*$  ao lado direito da equação (3.12) obtemos

$$\begin{aligned} x_1^2 + 0, 1(1 + x_2^2)u^*(t, x) + \sin(t) + 0, 25 \cos(0, 5t) + \lambda x_2 - \lambda \cos(t) + \lambda \cdot 0, 5 \sin(0, 5t) = \\ -k\lambda x_1 + k\lambda \sin(t) + k\lambda \cos(0, 5t) - k \cdot x_2 + k \cos(t) - k \cdot 0, 5 \sin(0, 5t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^*(t, x) &= \frac{-x_1^2 - k\lambda x_1 + (-\lambda - k)x_2}{0, 1(1 + x_2^2)} + \\ &\quad + \frac{(k\lambda - 1) \sin(t) + (k\lambda - 0, 25) \cos(0, 5t) + (k + \lambda) \cos(t) + (-0, 5\lambda - 0, 5 \cdot k) \sin(0, 5t)}{0, 1(1 + x_2^2)}. \end{aligned}$$

Tomando, por exemplo,  $k = 2$  e  $\lambda = 10$  temos

$$u^*(t, x) = \frac{-x_1^2 - 20x_1 - 12x_2 + 19 \sin(t) + 19, 75 \cos(0, 5t) + 12 \cos(t) - 6 \sin(0, 5t)}{0, 1(1 + x_2^2)}.$$

Substituindo  $u^*$  em (3.10) obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -20x_1 - 12x_2 + 19 \sin(t) + 19, 75 \cos(0, 5t) + 12 \cos(t) - 6 \sin(0, 5t) \end{cases}.$$

Voltando à equação (3.9) temos

$$y'' = -20y - 12y' + 19 \sin(t) + 19, 75 \cos(0, 5t) + 12 \cos(t) - 6 \sin(0, 5t)$$

cuja solução, por exemplo com condições iniciais  $y(0) = 10$  e  $y'(0) = 5$ , é

$$y(t) = -\frac{11}{4}e^{-10t} + \frac{47}{4}e^{-2t} + \sin(t) + \cos(0,5t).$$

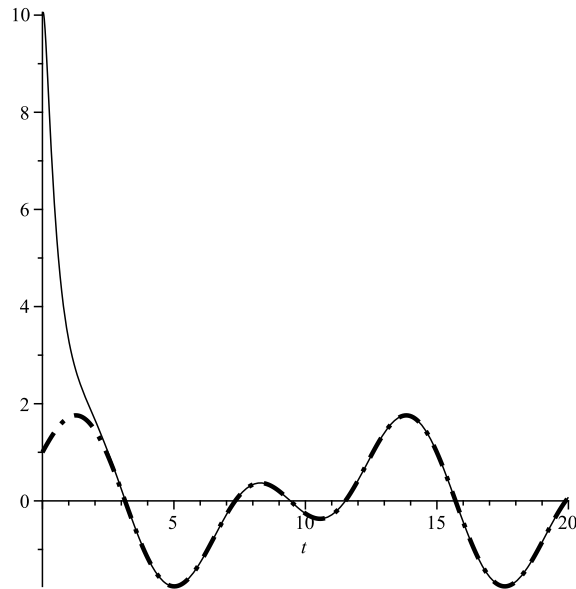


Figura 1: Contínuo: Solução obtida da equação (3.9) através do controle  $u^*$ ; Pontilhado: Saída desejada, no intervalo  $[0, 20]$ .

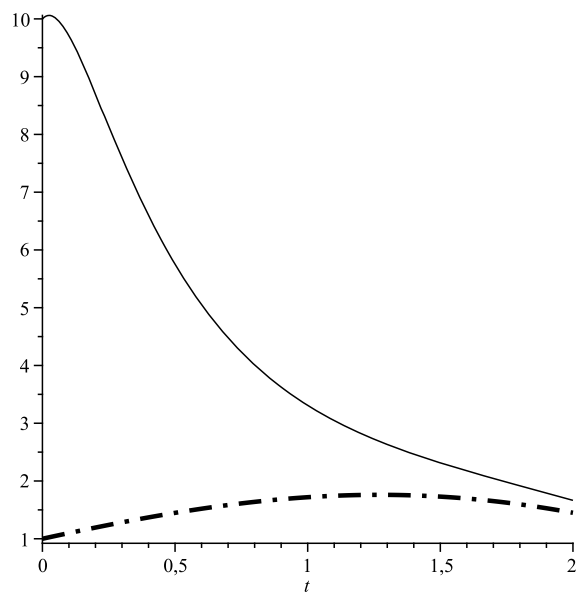


Figura 2: Contínuo: Solução obtida da equação (3.9) através do controle  $u^*$ ; Pontilhado: Saída desejada, no intervalo  $[0, 2]$ .

## 3.2 Existência de Controle para Sistemas Não-Lineares de Entradas e Saídas Múltiplas

O objetivo desta seção é estender os resultados anteriores para sistemas não-lineares de entradas e saídas múltiplas.

Consideremos agora uma equação não-linear de entradas e saídas múltiplas,

$$Y^{(n)} = F(Y, Y', Y'', \dots, Y^{(n-1)}, U) \quad (3.13)$$

onde  $U, Y \in \mathbb{R}^m$ ;

$Y^{(i)}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), é  $i$ -ésima derivada temporal da saída  $Y$ ;

$F : \mathbb{R}^{m(n+1)} \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação não-linear.

O objetivo do controle aproximado pode ser descrito como: dada uma saída desejada  $Y_d(t)$ , encontrar um controle  $U^*$  tal que a saída da equação (3.13) sujeito ao controle  $U^*$  acompanha a trajetória desejada com uma precisão aceitável, enquanto todos os estados e o controle permanecem limitados.

$$\text{Seja } X = [X_1, X_2, \dots, X_n] = [Y, Y', Y'', \dots, Y^{(n-1)}] = \begin{bmatrix} y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m & y'_m & \dots & y_m^{(n-1)} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{a}$$

matriz estado. Podemos representar a equação (3.13) por um sistema

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = Y' = X_2 \\ \dot{X}_2 = Y'' = X_3 \\ \vdots \\ \dot{X}_{n-1} = Y^{(n-1)} = X_n \\ \dot{X}_n = Y^{(n)} = F(Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}, U) = F(X, U) \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \dot{X}_j = X_{j+1}, j = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{X}_n = F(X, U). \end{cases} \quad (3.14)$$

As seguintes hipóteses são feitas para o sistema (3.14):

**Hipótese 1:**  $F$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $\mathbb{R}^{m(n+1)}$ ;

**Hipótese 2:**  $\left| \left[ \frac{\partial}{\partial U} F(X, U) \right]_{ii} \right| - \sum_{j \neq i} \left| \left[ \frac{\partial}{\partial U} F(X, U) \right]_{ij} \right| \geq d, \forall (X, U) \in \mathbb{R}^{m(n+1)}$ ,  
 $i = 1, 2, \dots, m$ , com  $d > 0$  constante.

**Hipótese 3:**  $Y_d(t), Y'_d(t), \dots, Y_d^{(n)}(t)$  são suaves e limitadas em  $\mathbb{R}$ .

Definamos  $X_d$  e  $\Upsilon$  como

$$X_d = [Y_d, Y'_d, Y''_d, \dots, Y_d^{(n-1)}] = \begin{bmatrix} y_{d1} & y'_{d1} & \cdots & y_{d1}^{(n-1)} \\ y_{d2} & y'_{d2} & \cdots & y_{d2}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{dm} & y'_{dm} & \cdots & y_{dm}^{(n-1)} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad (3.15)$$

$$\Upsilon = X - X_d = \begin{bmatrix} y_1 - y_{d1} & y'_1 - y'_{d1} & \cdots & y_1^{(n-1)} - y_{d1}^{(n-1)} \\ y_2 - y_{d2} & y'_2 - y'_{d2} & \cdots & y_2^{(n-1)} - y_{d2}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m - y_{dm} & y'_m - y'_{dm} & \cdots & y_m^{(n-1)} - y_{dm}^{(n-1)} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

e o erro por

$$E = \Upsilon \cdot [\Lambda \quad 1]^T, \quad (3.16)$$

onde  $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}]^T$  é escolhido apropriadamente para que  $s^{n-1} + \lambda_{n-1} \cdot s^{n-2} + \dots + \lambda_2 \cdot s + \lambda_1$  seja de Hurwitz.

Assim, o erro pode ser escrito da seguinte forma:

$$E(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot (y_1 - y_{d1}) + \lambda_2 \cdot (y'_1 - y'_{d1}) + \dots + (y_1^{(n-1)} - y_{d1}^{(n-1)}) \\ \lambda_1 \cdot (y_2 - y_{d2}) + \lambda_2 \cdot (y'_2 - y'_{d2}) + \dots + (y_2^{(n-1)} - y_{d2}^{(n-1)}) \\ \vdots \\ \lambda_1 \cdot (y_m - y_{dm}) + \lambda_2 \cdot (y'_m - y'_{dm}) + \dots + (y_m^{(n-1)} - y_{dm}^{(n-1)}) \end{bmatrix}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_m(t) \end{bmatrix}.$$

A derivada temporal do erro pode ser escrita como

$$\dot{E} = F(X, U) - Y_d^{(n)} + \Upsilon \cdot [0 \quad \Lambda]^T. \quad (3.17)$$

De fato, derivando a expressão do erro em relação a  $t$  obtemos

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot (y'_1 - y'_{d1}) + \dots + \lambda_{n-1} (y_1^{(n-1)} - y_{d1}^{(n-1)}) + (y_1^{(n)} - y_{d1}^{(n)}) \\ \lambda_1 \cdot (y'_2 - y'_{d2}) + \dots + \lambda_{n-1} (y_2^{(n-1)} - y_{d2}^{(n-1)}) + (y_2^{(n)} - y_{d2}^{(n)}) \\ \vdots \\ \lambda_1 \cdot (y'_m - y'_{dm}) + \dots + \lambda_{n-1} (y_m^{(n-1)} - y_{dm}^{(n-1)}) + (y_m^{(n)} - y_{dm}^{(n)}) \end{bmatrix}_{m \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot (y'_1 - y'_{d1}) + \dots + \lambda_{n-1} (y_1^{(n-1)} - y_{d1}^{(n-1)}) \\ \lambda_1 \cdot (y'_2 - y'_{d2}) + \dots + \lambda_{n-1} (y_2^{(n-1)} - y_{d2}^{(n-1)}) \\ \vdots \\ \lambda_1 \cdot (y'_m - y'_{dm}) + \dots + \lambda_{n-1} (y_m^{(n-1)} - y_{dm}^{(n-1)}) \end{bmatrix}_{m \times 1} + \begin{bmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ \vdots \\ y_m^{(n)} \end{bmatrix}_{m \times 1} - \begin{bmatrix} y_{d1}^{(n)} \\ y_{d2}^{(n)} \\ \vdots \\ y_{dm}^{(n)} \end{bmatrix}_{m \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 - y_{d1} + y'_1 - y'_{d1} + \dots + y_1^{(n-1)} - y_{d1}^{(n-1)} \\ y_2 - y_{d2} + y'_2 - y'_{d2} + \dots + y_2^{(n-1)} - y_{d2}^{(n-1)} \\ \vdots \\ y_m - y_{dm} + y'_m - y'_{dm} + \dots + y_m^{(n-1)} - y_{dm}^{(n-1)} \end{bmatrix}_{m \times 1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ \vdots \\ y_m^{(n)} \end{bmatrix}_{m \times 1} - \begin{bmatrix} y_{d1}^{(n)} \\ y_{d2}^{(n)} \\ \vdots \\ y_{dm}^{(n)} \end{bmatrix}_{m \times 1} \\ &= \Upsilon \cdot [0 \quad \Lambda]^T + F(X, U) - Y_d^{(n)}. \end{aligned}$$

Análogo ao caso anterior, temos o seguinte resultado:

**Teorema 3.4.** *Considere o sistema (3.14) satisfazendo as hipóteses 1 – 3. Existe uma entrada controle ideal  $U^* = U(t, X)$  tal que*

$$\dot{E} = -K.E \quad (3.18)$$

com  $K > 0$  constante. Subsequentemente, a equação (3.18) leva a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t) - X_d(t)| = 0.$$

*Demonstração.* Somando e subtraindo  $K.E$  do lado direito da equação de erro (3.17), temos

$$\dot{E} = F(X, U) - Y_d^{(n)}(t) + \Upsilon [0 \ \Lambda]^T + K.E - K.E.$$

Chamando  $\nu(t, X) = K.E - Y_d^{(n)}(t) + \Upsilon [0 \ \Lambda]^T$ , obtemos

$$\dot{E} = F(X, U) + \nu(t, X) - K.E. \quad (3.19)$$

Definindo  $G(t, X, U) = F(X, U) + \nu(t, X)$  observamos que

- $\frac{\partial}{\partial U} \nu(t, X) = 0$ ;
- $G$  é de classe  $\mathcal{C}^1$ ;
- $\left| \left[ \frac{\partial}{\partial U} G(X, U) \right]_{ii} \right| - \sum_{i \neq j} \left| \left[ \frac{\partial}{\partial U} G(X, U) \right]_{ij} \right| =$   
 $= \left| \left[ \frac{\partial}{\partial U} [F(X, U) + \nu(t, X)] \right]_{ii} \right| - \sum_{i \neq j} \left| \left[ \frac{\partial}{\partial U} [F(X, U) + \nu] \right]_{ij} \right|$   
 $= \left| \left[ \frac{\partial}{\partial U} F(X, U) \right]_{ii} \right| - \sum_{i \neq j} \left| \left[ \frac{\partial}{\partial U} F(X, U) \right]_{ij} \right| \geq d > 0,$

$\forall (X, U) \in \mathbb{R}^{m(n+1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Pelo Teorema da Aplicação Implícita global, existe uma única entrada controle ideal  $U^* = U(t, X)$  ( $U^* : \mathbb{R}^{m(n+1)} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ ) tal que  $G(X, U^*) = 0$ .

Então temos,

$$G(X, U^*) = F(X, U^*) + \nu(t, X) = 0. \quad (3.20)$$

Substituindo (3.20) em (3.19) sob a ação de  $U^*$  obtemos

$$\dot{E} = F(X, U^*) + \nu(t, X) - K.E = -K.E,$$

$$\dot{E} = -K.E.$$

Seja  $\rho = E^T . E = |E|^2 = \sum_{j=1}^m e_j^2$ . Se  $E(t)$  é uma solução da equação (3.18), então

$$\dot{\rho} = 2.E^T . \dot{E} = 2.E^T . (-K.E) = -2.K.E^T . E,$$

$$\dot{\rho} = -2.K.\rho.$$

Dessa forma,

$$0 \leq \rho(t) \leq \rho(0). \exp(-2.K.t) \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Mas  $|E(t)|^2 = \rho(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  o que implica que  $|E(t)| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

O erro  $E(t)$  foi definido anteriormente de forma que o polinômio

$$s^{n-1} + \lambda_{n-1}.s^{n-2} + \dots + \lambda_2.s + \lambda_1$$

seja de Hurwitz.

Nomeando cada linha da matriz  $\Upsilon$  como  $\zeta_i$  temos

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \vdots \\ \zeta_m(t) \end{bmatrix}.$$

Como  $E(t) \rightarrow 0$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, m$  temos que  $e_i(t) \rightarrow 0$ , então aplicando o Teorema 3.1 para cada  $e_i$  temos que cada  $\zeta_i(t) \rightarrow 0$  e portanto,  $\Upsilon \rightarrow 0$ .

Logo,

$$\begin{aligned} |y_1 - y_{d_1}| &\rightarrow 0 \\ |y_2 - y_{d_2}| &\rightarrow 0 \\ &\vdots \\ |y_m - y_{d_m}| &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

juntamente com as derivadas até ordem  $n - 1$ .

Sendo

$$X - X_d = \begin{bmatrix} y_1 - y_{d_1} & y'_1 - y'_{d_1} & \dots & y_1^{(n-1)} - y_{d_1}^{(n-1)} \\ y_2 - y_{d_2} & y'_2 - y'_{d_2} & \dots & y_2^{(n-1)} - y_{d_2}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m - y_{d_m} & y'_m - y'_{d_m} & \dots & y_m^{(n-1)} - y_{d_m}^{(n-1)} \end{bmatrix}_{m \times n},$$

temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t) - X_d(t)| = 0.$$

□

**Exemplos 3.5.** Consideremos a equação não-linear

$$Y'' = [(2y_1^2 + 0, 5)U_1 + y_1^2 U_2, 0, 5U_1 + ((y_2')^2 + 1)U_2]^T \quad (3.21)$$

onde  $Y = [y_1, y_2]^T$ ,  $Y' = [y_1', y_2']^T$ ,  $Y'' = [y_1'', y_2'']^T$  e  $U = [U_1, U_2]$ . Seja  $Y_d(t) = [\sin(t) + \cos(0, 5t), \cos(t) - 0, 5 \sin(0, 5t)]^T$  a saída desejada para a equação (3.21).



Provemos que existe um controle  $U^*$  tal que a solução da equação (3.21) se aproxima da saída desejada.

Se  $X_1 = [x_1, x_2]^T$ ,  $X_2 = [z_1, z_2]^T$  então a matriz estado é

$$X = [X_1, X_2]^T = [Y, Y']^T = \begin{bmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{bmatrix}$$

e podemos representar o sistema associado a (3.21) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = F(X, U), \end{cases} \quad (3.22)$$

ou ainda,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x_1^2 + 0,5)U_1 + x_1^2 U_2 \\ 0,5U_1 + (z_2^2 + 1)U_2 \end{bmatrix} := F(X, U). \end{cases}$$

Sendo  $Y_d(t) = [\sin(t) + \cos(0,5t), \cos(t) - 0,5 \sin(0,5t)]^T$  a saída desejada para a equação (3.21), temos

$$Y_d'(t) = [\cos(t) - 0,5 \sin(0,5t), -\sin(t) - 0,25 \cos(0,5t)]^T$$

$$Y_d''(t) = [-\sin(t) - 0,25 \cos(0,5t), -\cos(t) + 0,125 \sin(0,5t)]^T.$$

Para a matriz  $X_d$  temos

$$X_d = [X_{d1}, X_{d2}]^T = [Y_d(t), Y_d'(t)]^T = \begin{bmatrix} \sin(t) + \cos(0,5t) & \cos(t) - 0,5 \sin(0,5t) \\ \cos(t) - 0,5 \sin(0,5t) & -\sin(t) - 0,25 \cos(0,5t) \end{bmatrix}.$$

O sistema (3.22) satisfaz as seguintes hipóteses:

(1)  $F$  é de classe  $\mathcal{C}^1$ ;

(2)  $\left| \left[ \frac{\partial}{\partial U} F(X, U) \right]_{ii} \right| - \sum_{i \neq j} \left| \left[ \frac{\partial}{\partial U} F(X, U) \right]_{ij} \right| \geq 0,5$ .

De fato,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial U} F(X, U) \right] &= \begin{bmatrix} 2x_1^2 + 0,5 & x_1^2 \\ 0,5 & z_2^2 + 1 \end{bmatrix}, \\ \left| \left[ \frac{\partial}{\partial U} F(X, U) \right]_{11} \right| - \left| \left[ \frac{\partial}{\partial U} F(X, U) \right]_{12} \right| &= x_1^2 + 0,5 \geq 0,5, \\ \left| \left[ \frac{\partial}{\partial U} F(X, U) \right]_{22} \right| - \left| \left[ \frac{\partial}{\partial U} F(X, U) \right]_{21} \right| &= z_2^2 + 0,5 \geq 0,5. \end{aligned}$$

(3)  $Y_d(t), Y_d'(t), Y_d''(t)$  são suaves e limitadas em  $\mathbb{R}$ .

Pelo Teorema 3.4 existe uma entrada controle  $U^* = [U_1^*, U_2^*]^T = U(t, X)$  tal que

$\dot{E} = -K.E$  o que implica  $\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t) - X_d(t)| = 0$ , sendo  $K$  constante positiva, ou seja, a solução da equação (3.21) com o controle  $U^*$  se aproxima da saída desejada.

Neste caso podemos obter  $U^*$  explicitamente resolvendo um sistema. Temos:

$$\Upsilon = X - X_d = \begin{bmatrix} x_1 - \sin(t) - \cos(0,5t) & z_1 - \cos(t) + 0,5 \sin(0,5t) \\ x_2 - \cos(t) + 0,5 \sin(0,5t) & z_2 + \sin(t) + 0,25 \cos(0,5t) \end{bmatrix},$$

$$E = \Upsilon \begin{bmatrix} \lambda & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \lambda x_1 - \lambda \sin(t) - \lambda \cos(0,5t) + z_1 - \cos(t) + 0,5 \sin(0,5t) \\ \lambda x_2 - \lambda \cos(t) + 0,5 \lambda \sin(0,5t) + z_2 + \sin(t) + 0,25 \cos(0,5t) \end{bmatrix}.$$

onde  $\lambda$  é escolhido de tal forma que o polinômio  $P(s) = s + \lambda$  seja de Hurwitz (se chamarmos  $X_{d1} = [x_{d1}, x_{d2}]^T$ ,  $X_{d2} = [z_{d1}, z_{d2}]^T$  temos que  $P(s)$  é o polinômio característico de  $e_1 = (x_1 - x_{d1}) + (z_1 - z_{d1})\lambda$  e de  $e_2 = (x_2 - x_{d2}) + (z_2 - z_{d2})\lambda$ ).

Para que  $P(s)$  seja Hurwitz é suficiente tomar  $\lambda > 0$ . A derivada temporal do erro é dada por

$$\begin{aligned} \dot{E} &= F(t, X, U) - Y_d''(t) + \Upsilon \begin{bmatrix} 0 & \lambda \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} (2x_1^2 + 0,5)U_1 + x_1^2 U_2 \\ 0,5U_1 + (z_2^2 + 1)U_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sin(t) - 0,25 \cos(0,5t) \\ -\cos(t) + 0,125 \sin(0,5t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \lambda - \lambda \cos(t) + 0,5 \lambda \sin(0,5t) \\ z_2 \lambda + \lambda \sin(t) + 0,25 \lambda \cos(0,5t) \end{bmatrix}, \\ \dot{E} &= \begin{bmatrix} (2x_1^2 + 0,5)U_1 + x_1^2 U_2 + \sin(t) + 0,25 \cos(0,5t) + z_1 \lambda - \lambda \cos(t) + 0,5 \lambda \sin(0,5t) \\ 0,5U_1 + (z_2^2 + 1)U_2 + \cos(t) - 0,125 \sin(0,5t) + z_2 \lambda + \lambda \sin(t) + 0,25 \lambda \cos(0,5t) \end{bmatrix} \quad (3.23) \end{aligned}$$

Sob a ação de  $U^*$  a equação (3.23) deve ser igual a

$$\dot{E} = -k.E = \begin{bmatrix} -k.\lambda x_1 + k.\lambda \sin(t) + k.\lambda \cos(0,5t) - k.z_1 + k \cos(t) - 0,5k \sin(0,5t) \\ -k.\lambda x_2 + k.\lambda \cos(t) - 0,5k.\lambda \sin(0,5t) - k.z_2 - k \sin(t) - 0,25k \cos(0,5t) \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Igualando o lado direito da equação (3.23) sob a ação de  $U^*$  ao lado direito da equação (3.24) obtemos

$$\begin{aligned} (2x_1^2 + 0,5)U_1^* + x_1^2 U_2^* + \sin(t) + 0,25 \cos(0,5t) + z_1 \lambda - \lambda \cos(t) + 0,5 \lambda \sin(0,5t) &= \\ -k.\lambda x_1 + k.\lambda \sin(t) + k.\lambda \cos(0,5t) - k.z_1 + k \cos(t) - 0,5k \sin(0,5t), & \\ 0,5U_1^* + (z_2^2 + 1)U_2^* + \cos(t) - 0,125 \sin(0,5t) + z_2 \lambda + \lambda \sin(t) + 0,25 \lambda \cos(0,5t) &= \\ -k.\lambda x_2 + k.\lambda \cos(t) - 0,5k.\lambda \sin(0,5t) - k.z_2 - k \sin(t) - 0,25k \cos(0,5t). & \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (2x_1^2 + 0,5)U_1^* + x_1^2 U_2^* = (-1 + k\lambda) \sin(t) + (k\lambda - 0,25) \cos(0,5t) + (-k - \lambda)z_1 + \\ \quad + (\lambda + k) \cos(t) + (-0,5\lambda - 0,5k) \sin(0,5t) - k\lambda x_1 \\ 0,5U_1^* + (z_2^2 + 1)U_2^* = (-1 + k\lambda) \cos(t) + (0,125 - 0,5k\lambda) \sin(0,5t) + \\ \quad + (-\lambda - k)z_2 + (-\lambda - k) \sin(t) + (-0,25\lambda - 0,25k) \cos(0,5t). \end{array} \right.$$

Tomando, por exemplo,  $k = 2$  e  $\lambda = 10$  temos

$$\left\{ \begin{array}{l} (2x_1^2 + 0,5)U_1^* + x_1^2 U_2^* = 19 \sin(t) + 19,75 \cos(0,5t) + 12 \cos(t) - 6 \sin(0,5t) - 20x_1 - 12z_1 \\ 0,5U_1^* + (z_2^2 + 1)U_2^* = 19 \cos(t) - 9,875 \sin(0,5t) - 12 \sin(t) - 3 \cos(0,5t) - 20x_2 - 12z_2. \end{array} \right.$$

Substituindo  $U^*$  em (3.21) obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \sin(t) + 19,75 \cos(0,5t) + 12 \cos(t) - 6 \sin(0,5t) - 20x_1 - 12z_1 \\ 19 \cos(t) - 9,875 \sin(0,5t) - 12 \sin(t) - 3 \cos(0,5t) - 20x_2 - 12z_2 \end{bmatrix} = F(X, U) \end{array} \right.$$

Voltando a equação (3.21) temos

$$Y'' = \begin{bmatrix} -20x_1 - 12z_1 + 19 \sin(t) + 19,75 \cos(0,5t) + 12 \cos(t) - 6 \sin(0,5t) \\ -20x_2 - 12z_2 + 19 \cos(t) - 9,875 \sin(0,5t) - 12 \sin(t) - 3 \cos(0,5t) \end{bmatrix}$$

$$Y'' = -20Y - 12Y' + \begin{bmatrix} 19 \sin(t) + 19,75 \cos(0,5t) + 12 \cos(t) - 6 \sin(0,5t) \\ 19 \cos(t) - 9,875 \sin(0,5t) - 12 \sin(t) - 3 \cos(0,5t) \end{bmatrix}$$

cuja solução, com condições iniciais  $Y(0) = [0, 6, 1]^T$  e  $Y'(0) = [1, 5]^T$ , é

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{10}e^{-10t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \sin(t) + \cos(\frac{1}{2}t) \\ -\frac{19}{32}e^{-2t} - \frac{13}{32}e^{-10t} - \frac{1}{2} \sin(\frac{1}{2}t) + \cos(t) \end{bmatrix}.$$

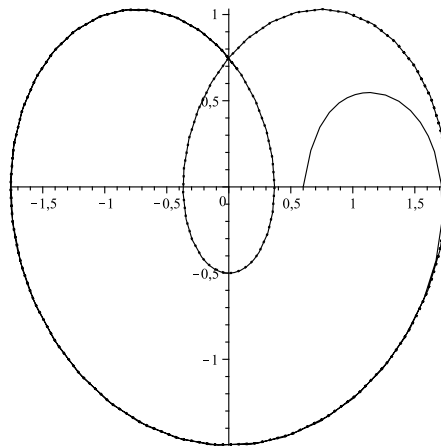


Figura 3: Contínuo: Solução obtida do sistema (3.21) através do controle  $U^*$ ; Pontilhado: Saída desejada.

## *Referências Bibliográficas*

- [1] Carvalho, M.P. *Controlabilidade de sistemas de equações diferenciais lineares*. 2008, 62 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto.
- [2] Fernández-Cara, E.; Zuazua, E. *Control theory: history, mathematical achievements and perspectives*. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl., n. 26, 79-140, 2003.
- [3] Ge, S. S.; Zhang, W. *A global implicit function theorem without initial point and its applications to control of non-affine systems of high dimensions*. J. Math. Anal. Appl., n. 313, p. 251-261, 2006.
- [4] Ge, S. S.; Hang, C.C.; Zhang, T. *Adaptative neural network control of nonlinear systems by state and output feedback*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics (Part B), v.29, n.6, p. 818-828, december 1999.
- [5] Horn, R. A.; Johnson, C. R. *Matrix Analysis*. New York: Cambridge University Press, 1985.
- [6] Lima, E. L. *Análise real: Funções de  $n$  variáveis*. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [7] Munkres, J. R. *Analysis on manifolds*. Redwood Cyty: Addison-Wesley Publishing Company, 1991.
- [8] Slotine, J. J. E.; Li, W. *Applied nonlinear control*. New Jersey: Prentice Hall, 1991.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 12 de Maio de 2011.

---

Daiani Denadai