Universidade Estadual Paulista

Campus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas

Estudo da Equação de Klein-Gordon Linear

Valdir Carlos Arroyo

Orientador

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática/IBILCE/UNESP

como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São José do Rio Preto-SP

Fevereiro - 2008

.

Dedicatória

Este trabalho é exclusivamente dedicado a minha amada esposa Inês, a minha mãe Jandira, a D. Dalva, aos professores do IBILCE-UNESP que muito estimo e aos amigos e a turma do curso.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por tudo.

Agradeço aos Professores doutores: Cláudio Aguinaldo Buzzi e Adalberto Spezamiglio pela oportunidade e confiança em me proporcionar o belo desafio de voltar a estudar e pesquisar.

Agradeço ao Professor Doutor Waldemar Donizete Bastos pela longa amizade, pelo acolhimento, pela paciência e por todo aprendizado.

Agradeço ao Professor Doutor João Peres (Unesp-Rio Claro) pelo incentivo e resgate da vontade de estudar.

Agradeço a magnífica equipe de professores do departamento de matemática do IBILCE pelas excelentes aulas, pelo carinho e dedicação de todos em especial a professora Gorete pela grande alegria com que conduz o seu trabalho e quero lembrar também os antigos professores de minha primeira passagem pelo Ibilce Neusa Kazuko Kakuta e Wilson Maurício Tadini responsáveis diretos pela minha formação acadêmica.

Agradeço aos amigos do mestrado Aguinaldo, Grasiele e Lígia pelo acolhimento e pelas orientações que foram fundamentais no decorrer do curso.

Agradeço aos amigos pelo incentivo e compreensão das dificuldades e limitações impostas por essa jornada. Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram.

.

Resumo

Neste trabalho estudamos a equação de Klein-Gordon linear. Definimos solução generalizada do Problema de Cauchy para tal equação. Provamos a existência e a unicidade da solução no espaço $H^1_{loc}(\mathbb{R}^{2\ +\ 1})$ e demonstramos o decaimento local de energia da solução.

Palavras Chave: Equação de Klein-Gordon, Solução Generalizada, Decaimento Local de Energia.

.

Abstract

In this work we studdy the linear Klein-Gordon equation. We define the notion of generalized solution to the Cauchy problem for such equation. We prove existence and uniqueness of solution in $H^1_{loc}(\mathbb{R}^{2\,+\,1})$. We also prove local decay of energy for the solutions to the Cauchy problem.

Key Words: Klein-Gordom Equation, Generalized Solution, Local Decay of Energy

.

.

Sumário

Capítulo 1

Distribuições e Espaços de Sobolev

1.1 Introdução: Neste capítulo vamos estabelecer algumas notações e resultados preliminares a serem utilizadados nos capítulos seguintes.

1.2 Distribuições: Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $n \in \mathbb{N}$ um natural não nulo. Um multi-índice α é uma n-upla de naturais, isto é, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e u uma função definida em Ω. Dado um multi-índice α, denotamos por $\partial^\alpha u$ a derivada parcial

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ e $x = (x_1, ..., x_n)$.

Dada uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ denota-se *supp* u ao fecho, na topologia do $\mathbb{R}^n$, do conjunto de pontos de Ω onde u não se anula, isto é :

$$supp\ u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$$

O conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ é composto por todas as funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis e possuem suporte compacto em Ω. Com as operações usuais de funções, $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $C_0^{\infty}(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ uma função dada. Dizemos que $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para φ em $C_0^{\infty}(\Omega)$ se forem satisfeita as seguintes condições:

(i) todas as φ_n possuem suportes contidos em um compacto fixo K de Ω.

(ii) para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ a sequência $(\partial^{\alpha}\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente em K para $\partial^{\alpha}\varphi$.

Uma distribuição em Ω é uma transformação linear

$$T : C_0^{\infty}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para φ em $C_0^{\infty}(\Omega)$ então $(T\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para $T\varphi$ em $\mathbb{R}$. O valor de uma distribuição T numa função φ será denotado por $\langle T, \varphi \rangle$.

O espaço de todas as distribuições sobre Ω é denotado por $D'(\Omega)$. Neste espaço, diz-se que uma sequência $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para uma distribuição T se $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n=1}^{\infty}$ converge em $\mathbb{R}$ para $\langle T, \varphi \rangle$, para toda $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Dado uma distribuição $T \in D'(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ é fácil verificar que a aplicação

$$C_0^{\infty}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\phi \mapsto \langle T, \varphi\phi \rangle$$

define uma distribuição . Esta distribuição é denotada φT.

1.3 Os espaços $L^{p'}s$: Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um conjuto mensurável à Lebesgue e $p \in \mathbb{R}$ tal que $p \geq 1$. Define-se o conjunto $L^p(\Omega)$ como o conjunto das funções mensuráveis (classes de equivalência) à Lebesgue em Ω, tais que $|f|^p$ tem integral de Lebesgue em Ω finita. Munido das operações usuais de funções, os conjuntos $L^p(\Omega)$ são espaços de Banach com a norma definida por

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

O espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno definido por:

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Dizemos que f é localmente integrável em Ω se:

$$\int_K |f(x)| \, dx < \infty$$

para todo compacto K de Ω. O espaço dessas funções é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$.

Para todo $p \geq 1$ vale

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega).$$

Cada função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ define uma distribuição T_f em Ω por:

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \ , \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

A proposição seguinte afirma que a correspondência

$$f \in L^1_{loc}(\Omega) \longleftrightarrow T_f \in D'(\Omega)$$

é injetiva.

Proposição 1.3.1:(Du Bois Raymond) Dado $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0$, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ então $f = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração: Veja [4].

A proposição acima permite identificar $L^p(\Omega)$ com um subespaço de $D'(\Omega)$. A partir desse ponto usaremos a mesma notação para $f \in L^p(\Omega)$ e para a distribuição $T_f \in D'(\Omega)$, isto é, $\langle T_f, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Uma consequência da desigualdade de Hölder é que se $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^p(\Omega)$ converge para f em $L^p(\Omega)$ então a convergência também ocorrerá em $D'(\Omega)$.

Para finalizar esta seção observamos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ (ver [1] ou [4]).

1.4 Espaços de Sobolev: Seja T uma distribuição num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-indíce. Facilmente verifica-se que:

$$C_0^\infty(\Omega) \ni \varphi \longmapsto (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle$$

define uma distribuição em Ω. Tal distribuição é a α-ésima derivada de T, denotada por $\partial^\alpha T$, dessa forma a distribuição T tem derivada $\partial^\alpha T$ definida por :

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle \ , \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Se $f \in C_0^\infty(\Omega)$ então para todo $\alpha \in N^n$ a derivada usual $\partial^\alpha f$ coincide com a respectiva derivada distribucional de f, isto é :

$$T_{\theta^\alpha f} = \partial^\alpha T_f.$$

Isto é consequência de integração por partes.

Vejamos um exemplo motivador da próxima definição. Sejam $\Omega =]-1,1[\subset \mathbb{R}$ e $H \in L^2(\Omega)$ a função definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \in]-1,0[\\ 1 \text{ se } x \in [0,1[\end{cases}$$

A função H está em $L^2(\Omega)$, mas sua derivada distribucional H' não está em $L^2(\Omega)$.

De fato:

$$\langle H', \varphi \rangle = -\int_0^1 \varphi'(x)dx = \varphi(0).$$

A distribuição definida por

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

não provém de função localmente integrável. Logo $H' \notin L^2(\Omega)$.

Definição 1.4.1: Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e m um número inteiro positivo.

(a) O espaço de Sobolev $H^m(\Omega)$ é definido por:

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$
$$H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$$

(b) O espaço das distribuições $f \in D'(\Omega)$ tais que $\varphi f \in H^m(\Omega)$, para toda $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ é denotado $H^m_{loc}(\Omega)$.$\Box$

Munido das operações usuais com funções o espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$\langle u.v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u(x)\partial^\alpha v(x)dx. \qquad \text{ver [4]}$$

A norma de $H^m(\Omega)$ é denotada por $\|.\|_{H^m(\Omega)}$.

Proposição 1.4.1: O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, isto é, toda sequencia de Cauchy em $H^m(\Omega)$ é convergente.

Demonstração: Veja [4].■

Seja

$$S = \{\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; \partial^\alpha \phi \text{ é contínua para todo } |\alpha| \leq m \text{ e } \|\phi\|_{H^m(\Omega)} < \infty\}.$$

O teorema de Meyers e Serrin ([1]) afirma que S é denso em $H^m(\Omega)$.

Se $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ o conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ não é denso em $H^m(\Omega)$.Nesse caso definimos o subespaço $H_0^m(\Omega)$ de $H^m(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$, isto é :

$$H_0^m(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^m(\Omega)}.$$

Se $\Omega = \mathbb{R}^n$ tem-se $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$. Em geral, se $u \in H^m(\Omega)$ tem suporte compacto em Ω então $u \in H_0^m(\Omega)$.

Proposição 1.4.2: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Se $u \in H^m(\Omega)$ possui suporte compacto em Ω então $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Veja [4] .■

.

Capítulo 2

Propriedades da Equação de Klein-Gordon

2.1. A equação de Klein-Gordon: Consideremos uma membrana horizontal uniformemente distendida em todas as direções, por meio de uma tensão τ. Vamos assumir que a membrana em seu estado de repouso ocupa uma região Ω. Suponhamos que nenhuma força vertical e nenhuma força horizontal (além da tensão) esteja atuando sobre a membrana, e que os pontos desta podem ter somente deslocamentos transversais. Suponhamos ainda que a membrana não oferece resistência a forças de cisalhamento ou momentos de torção, e que suas deformações estão controladas apenas por sua resistência a distensões subsequentes. Suponhamos que a membrana sofreu uma deformação num instante incial, que assumimos ser $t = 0$ e que se encontra vibrando. Seja $u = u(x,t)$ a posição ocupada pelo ponto $x = (x_1, x_2)$ da membrana, no instante $t > 0$. Assim $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = u_t(x,t)$ representa a velocidade do ponto x da membrana no instante t. Para estudar a vibração supõe-se conhecidos a posição e a velocidade inicial de cada ponto x da membrana, isto é, conhecemos um par de funções (u_0, u_1) tal que $u(x,0) = u_0(x)$ e $u_t(x,0) = u_1(x)$ para todos $x \in \Omega$. Se μ é a massa por unidade de área da membrana verifica-se que a função u satisfaz a equação da onda $\mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \Delta u$ em todo $x \in \Omega$, $t > 0$. Se a membrana estiver imersa em um meio que exerça alguma influência no movimento então a equação apresentará termos adicionais. Vamos supor que o meio aplique na membrana uma força restauradora proporcional ao deslocamento. Tal força é dada por $-Ku$ onde $K \geq 0$ é uma constante que depende do meio. Neste caso a função u deve satisfazer a equação

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \Delta u - Ku,$$

que após mudança conveniente na variável independente x passamos a escreve-la no formato

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = 0,$$

onde m é uma constante real.

O problema de Cauchy para a equação de Klein-Gordon consiste de determinar a solução da equação acima em todo o espaço $\mathbb{R}^{2+1} = \{(x_1, x_2, t) : x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ t > 0\}$ supondo conhecidos os dados iniciais, ou seja, a posição e a velocidade de cada particula $x = (x_1, x_2)$ no instante $t = 0$. Mais precisamente o problema de Cauchy para a equação de Klein-Gordon é colocado na forma

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{2+1}, \\ u(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2) \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^2, \\ u_t(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2) \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Na proxima seção obtemos a fórmula para a solução deste problema.

2.2. A fórmula explícita da solução: Sejam f e g funções de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ e seja $u = u(x_1, x_2, t)$ a única solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{2+1}, \\ u(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \\ u_t(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Defina agora, em $\mathbb{R}^{3\,+\,1}$, a função complexa v dada por

$$v(x_1, x_2, x_3, t) = e^{imx_3} u(x_1, x_2, t).$$

Um cálculo direto nos mostra que v satisfaz o seguinte problema para a equação da onda

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{2+1}, \\ v(x_1, x_2, x_3, 0) = e^{imx_3} f(x_1, x_2) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \\ v_t(x_1, x_2, x_3, 0) = e^{imx_3} g(x_1, x_2) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

A fórmula explicita para este último problema de Cauchy é dada pela conhecida fórmula de Kirchhoff (veja [5]). Assim temos

$$v(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|y-x|=t} e^{imy_3} g(y_1, y_2) dS_y + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|y-x|=t} e^{imy_3} f(y_1, y_2) dS_y \right],$$

onde $|.|$ denota a distância euclidiana e dS_y é o elemento de área da esfera $|y - x| = t$.

Agora, procedemos como no método da descida de Hadamard [5]. Fazendo $x_3 = 0$ e denotando $r = |x - y| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ obtemos

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{r<t} [e^{im|y_3|} + e^{-im|y_3|}] g(y_1, y_2) \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi t} \int\limits_{r<t} [e^{im|y_3|} + e^{-im|y_3|}] f(y_1, y_2) \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 \right],$$

onde $|y_3| = \sqrt{t^2 - r^2}$.

Observando que $v(x_1, x_2, 0, t) = u(x_1, x_2, t)$ e $\left[e^{im|y_3|} + e^{-im|y_3|}\right] = 2\cos(m\sqrt{t^2 - r^2})$ obtemos

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{r<t} [2\cos(m\sqrt{t^2 - r^2})] g(y_1, y_2) \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi t} \int_{r<t} [2\cos(m\sqrt{t^2 - r^2})] f(y_1, y_2) \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 \right]$$

Da última expressão segue a fórmula que procuramos, ou seja, para todos $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e todos $t > 0$ temos

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{r<t} g(y_1, y_2) \frac{\cos(m\sqrt{t^2 - r^2})}{\sqrt{t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{r<t} f(y_1, y_2) \frac{\cos(m\sqrt{t^2 - r^2})}{\sqrt{t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 \right].$$

No capitulo 4 faremos uso desta fórmula para provar o decaimento local de energia da solução do probema de Cauchy para a equação e Klein-Gordon.

Uma observação importante sobre a equação de Klein-Gordon é a propriedade de propagação de sinal com velocidade finita. Este fato é observado facilmente da fórmula explicita obtida aqui e traduz-se na seguinte afirmação:

Se $supp(f)$, $supp(g) \subset B(0, r)$ então temos

$$suppu(.,t), \;\; suppu_t(.,t) \quad \subset \quad B(0, r+t)$$

para todo $t > 0$.

Capítulo 3

Existência de Solução Generalizada

3.1. Introdução: Neste capítulo obteremos algumas estimativas que nos permitirão definir solução da equação de Klein-Gordon quando os dados iniciais estão em espaços de Sobolev. Permitirão também provar que o problema de Cauchy para a equação de Klein-Gordon é bem posto no sentido de que possui uma única solução que depende continuamente dos dados iniciais.

3.2. As estimativas de Energia. Seja u uma solução da equação de Klein-Gordon,

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0 \quad , \quad m > 0.$$

Multiplicando a equação acima por u_t obtemos

$$u_t u_{tt} - u_t \Delta u + u_t m^2 u = 0$$

Agora observando que

$$u_t u_{tt} = \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial t}[u_t^2],$$

$$u_t \Delta u = Div_x\left[u_t \nabla u\right] - \left[\tfrac{\partial}{\partial t}\tfrac{1}{2}\left|\nabla u\right|^2\right],$$

e

$$u_t m^2 u = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{m^2}{2}u^2\right]$$

temos

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[u_t^2] + \left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^2\right] - Div_x\left[u_t \nabla u\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{m^2}{2}u^2\right] = 0$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^2 + \frac{m^2}{2}u^2\right] - Div_x\left[u_t \nabla u\right] = 0 \tag{3.2.1}$$

Esta última equação é denominada equação de Klein-Gordon na forma divergente por ter seu lado esquerdo exatamente igual ao divergente na variável (x, t) do campo $\overrightarrow{F} = (-u_t \nabla u, \ \ \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^2 + \frac{m^2}{2}u^2)$.

Suponhamos agora que a solução u da equação de Klein-Gordon satisfaça as seguintes condições iniciais

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

e que as funções φ e ψ possuam suporte compacto. Mais precisamente:

$$supp(\varphi), \ \ supp(\psi) \ \subset \ B(0,r)$$

para algum $r > 0$. Então, conforme observamos no final do capítulo anterior, para cada $t > 0$ temos

$$suppu(.,t), \ \ suppu_t(.,t) \subset B(0, r+t).$$

Agora, integrando (3.2.1) em relação à $x = (x_1, x_2)$ na bola $B(0, r+t+\delta)$, $\delta > 0$ obtemos

$$\iint\limits_{B(0,r+t+\delta)} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{m^2}{2}u^2\right](x,t)\,dx - \iint\limits_{B(0,r+t+\delta)} Div_x\left[u_t \nabla u\right](x,t)\,dx = 0.$$

Usando o teorema da divergencia no plano escrevemos

$$\iint\limits_{B(0,r+t+\delta)} Div_x\left[u_t \nabla u\right](x,t)\,dx = \iint\limits_{\partial B(0,r+t+\delta)} u_t \nabla u.\vartheta ds$$

Como u e suas derivadas se anulam na $\partial B(0, r+t+\delta)$ então

$$\iint\limits_{\partial B(0,r+t+\delta)} u_t \nabla u.\vartheta ds = 0$$

logo, para todo $t > 0$ temos

$$\iint\limits_{B(0,r+t+\delta)} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{m^2}{2}u^2\right](x,t)\,dx = 0.$$

Como o integrando é identicamente nulo fora de $B(0, r+t)$ podemos escrever

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{m^2}{2}u^2\right](x,t)\,dx = 0$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{m^2}{2}u^2\right](x,t)\,dx = 0$$

Assim, a função que a cada t associa o número real

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{m^2}{2}u^2\right](x,t)\,dx$$

é uma função constante. Logo existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{m^2}{2}u^2\right](x,t)\,dx = \lambda \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, fazendo $t = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}\lambda &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2}u_t^2(x,0) + \frac{1}{2}|\nabla u(x,0)|^2 + \frac{m^2}{2}u(x,0)^2\right] dx \\ &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2}\psi(x)^2 + \frac{1}{2}|\nabla \varphi(x)|^2 + \frac{m^2}{2}\varphi(x)^2\right] dx.\end{aligned}$$

A discussão acima pode ser resumida no seguinte teorema.

Teorema 3.2.1: Sejam φ, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ e u a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{2+1}, \\ u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \\ u_t(x_1, x_2, 0) = \psi(x_1, x_2) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Então, para todo $t \geq 0$ vale

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{m^2}{2}u^2\right](x,t)\,dx =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2}\psi(x)^2 + \frac{1}{2}|\nabla \varphi(x)|^2 + \frac{m^2}{2}\varphi(x)^2\right] dx. \qquad \blacksquare$$

Sejam $B \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto qualquer, $t \geq 0$ um real positivo e u como no teorema acima. A quantidade

$$\mathcal{E}(B,u,t) = \iint\limits_{B} \left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{m^2}{2}u^2\right](x,t)\,dx$$

representa a energia da solução u no instante t confinada na região B. O teorema 3.2.1 afirma que

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^2, u, t) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^2, u, 0)$$

ou seja, a energia total da solução u se mantem constante com passar do tempo.

Agora definamos para o mesmo terno (B, u, t) a quantidade

$$E(B, u, t) = \iint_B (u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2)(x, t)dx.$$

Lembrando as definições das normas dos espaços de Sobolev introduzido no primeiro capítulo vemos que

$$E(B, u, t) = \|u_t(., t)\|^2_{L^2(B)} + \|u(., t)\|^2_{H^1(B)}.$$

Para todo $t \geq 0$ vale a seguinte desigualdade

$$C_0 E(B, u, t) \leq \mathcal{E}(B, u, t) \leq C_1 E(B, u, t) \tag{3.2.2}$$

onde $C_0 = \min\{\frac{1}{2}, \frac{m^2}{2}\}$ e $C_1 = \max\{\frac{1}{2}, \frac{m^2}{2}\}$. De fato, da definição de C_0 e C_1 segue

$$C_0(u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2) \leq (\tfrac{1}{2}u_t^2 + \tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 + \tfrac{m^2}{2}u^2) \leq C_1(u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2)$$

que integrada em B fornece para todo t a desigualdade

$$C_0 \iint_B (u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2)(x, t)dx \leq \mathcal{E}(B, u, t) \leq C_1 \iint_B (u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2)(x, t)dx$$

de onde segue o resultado.

Uma conseqüência de (3.2.2) e da conservação de energia é a seguinte desigualdade:

$$(3.2.3) \quad \|u_t(.,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|u(.,t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \left(\|u_t(.,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|u(.,0)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}\right)$$

onde $C = \frac{C_1}{C_0}$. De fato, fazendo $B = \mathbb{R}^2$ temos

$$C_0 E(\mathbb{R}^2, u, t) \leq \mathcal{E}(\mathbb{R}^2, u, t) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^2, u, 0) \leq C_1 E(\mathbb{R}^2, u, 0)$$

que acarreta $C_0 E(\mathbb{R}^2, u, t) \leq C_1 E(\mathbb{R}^2, u, 0)$, de onde segue

$$E(\mathbb{R}^2, u, t) \leq \tfrac{C_1}{C_0} E(\mathbb{R}^2, u, 0),$$

que se traduz em (3.2.3).

Se os dados iniciais do problema de Cauchy considerado possuir suporte compacto contido na bola $B(0, r)$ então temos

$$suppu(.,t), \ \ suppu_t(.,t) \quad \subset \quad B(0, r+t) \text{ para todo } t > 0.$$

Logo, a estimativa (3.2.3) pode ser melhorada e escrita como

$$(3.2.4) \qquad \|u_t(.,t)\|^2_{L^2(B(0,r+t))} + \|u(.,t)\|^2_{H^1(B(0,r+t))} \leq$$

$$\leq C \ (\|u_t(.,0)\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|u(.,0)\|^2_{H^1(B(0,r))}).$$

Seja agora $T > 0$ um real qualquer. Para todo $0 \leq t \leq T$ temos

$$B(0, r+t) \subset B(0, r+T).$$

Integrando membro a membro a desigualdade

$$\|u_t(.,t)\|^2_{L^2(B(0,r+T))} + \|u(.,t)\|^2_{H^1(B(0,r+T))} \leq$$

$$\leq C \ (\|u_t(.,0)\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|u(.,0)\|^2_{H^1(B(0,r))})$$

em relação à variável t no intervalo $[0, T]$ obtemos

$\int_0^T \{\|u_t(.,t)\|^2_{L^2(B(0,r+T))} + \|u(.,t)\|^2_{H^1(B(0,r+T))}\}dt \leq$
$$\leq C\ T(\|u_t(.,0)\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|u(.,0)\|^2_{H^1(B(0,r))}).$$

Agora, usando o teorema de Fubini e lembrando as definições das norma dos espaços de Sobolev obtemos

$$\|u\|^2_{H^1(B(0,r+T)\times]0,T[)} \leq C\ T(\|u_t(.,0)\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|u(.,0)\|^2_{H^1(B(0,r))}).$$

Esta discussão pode ser resumida no seguinte teorema.

Teorema 3.2.2. Sejam φ, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ funções com suporte contido na bola $B(0, r+t)$ e u a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{2+1}, \\ u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2) \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^2, \\ u_t(x_1, x_2, 0) = \psi(x_1, x_2) \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Então, vale

$$\|u\|^2_{H^1(B(0,r+T)\times]0,T[)} \leq C\ T(\|\psi\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|\varphi\|^2_{H^1(B(0,r))}), \tag{3.2.5}$$

para todo $T > 0$. ■

A estimativa (3.2.5) expressa a colocação correta do problema de Cauchy para a equação de Klein-Gordom na topologia dos espaços de Sobolev. Com efeito; sejam $u = u(\varphi, \psi)$ e $\widetilde{u} = \widetilde{u}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})$ soluções dos problemas

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{2+1}, \\ u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2) \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^2, \\ u_t(x_1, x_2, 0) = \psi(x_1, x_2) \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^2, \end{cases} \text{e} \begin{cases} \widetilde{u}_{tt} - \Delta \widetilde{u} + m^2 \widetilde{u} = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{2+1}, \\ \widetilde{u}(x_1, x_2, 0) = \widetilde{\varphi}(x_1, x_2) \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^2, \\ \widetilde{u}_t(x_1, x_2, 0) = \widetilde{\psi}(x_1, x_2) \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^2, \end{cases} .$$

Então $w = u - \widetilde{u}$ é solução da equação de Klein-Gordon com dados iniciais $\varphi - \widetilde{\varphi}$ e $\psi - \widetilde{\psi}$ respectivamente. Logo, (3.2.5) aplicada a w resulta

$$\|u-\widetilde{u}\|^2_{H^1(B(0,r+T)\times]0,T[)} \leq C\ T(\left\|\psi-\widetilde{\psi}\right\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|\varphi-\widetilde{\varphi}\|^2_{H^1(B(0,r))}).$$

mostrando que $u=\widetilde{u}$ se $\psi=\widetilde{\psi}$ e $\varphi=\widetilde{\varphi}$, ou seja, a solução do problema de Cauchy é única. Mais ainda, se os dados inciais dos dois problema de Cauchy acima estão próximos, nas normas dos espaços de Sobolev envolvidos, então as respectivas soluções também estarão próximas em cada compacto do $\mathbb{R}^3$.

No que segue usaremos (3.2.5) para definir solução generalizada de tal problema de Cauchy.

3.3. Soluções Generalizadas: Nosso objetivo agora é definir e provar a existencia de solução generalizada do problem de Cauchy para a equação de Klein-Gordon quando os dados iniciais estão nos espaços $H^1(\mathbb{R}^2)$ e $L^2(\mathbb{R}^2)$ e possuem suporte compacto.

Definição 3.3.1: Sejam $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ funções com suporte compacto contidos na bola $B(0,r)$. A função $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2\times]0,\infty))$ é solução de

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+m^2u=0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2\times[0,\infty), \\ u(x_1,x_2,0)=u_0(x_1,x_2) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^2, \\ u_t(x_1,x_2,0)=u_1(x_1,x_2) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

se existirem seqüências $(\varphi_n),(\psi_n)\subset C_0^\infty(B(0,r))$ tais que

(i) $\varphi_n \longrightarrow u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$,

(ii) $\psi_n \longrightarrow u_1$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$,

as soluções clássicas u^n dos problemas de Cauchy

$$\begin{cases} u^n_{tt} - \Delta u^n + m^2 u^n = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \times [0,\infty), \\ u^n(x_1,x_2,0) = \varphi_n(x_1,x_2) \;\; \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \\ u^n_t(x_1,x_2,0) = \psi_n(x_1,x_2) \;\; \text{em} \;\; \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

formam uma sequencia (u^n) tal que

$$u^n \longrightarrow u \;\; \text{em} \; H^1(B(0,r+T)\times]0,T[).$$

para cada $T > 0$. ■

É importante observar que a solução generalizada u não depende das seqüências $(\varphi_n), (\psi_n) \subset C_0^\infty(B(0,r))$. De fato; sejam $(\widetilde{\varphi}_n), (\widetilde{\psi}_n) \subset C_0^\infty(B(0,r))$ tais que $\widetilde{\varphi}_n \longrightarrow u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2), \widetilde{\psi}_n \longrightarrow u_1$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$ e sejam $\widetilde{u^n}$ as respectivas soluções dos problemas de Cauchy com dados $\widetilde{\varphi}_n$ e $\widetilde{\psi}_n$. Suponhamos que existe $\widetilde{u} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2\times]0,\infty))$ tal que $\widetilde{u^n} \longrightarrow \widetilde{u}$ em $H^1(B(0,r+T)\times]0,T[)$ para todo $T > 0$. Observe que para cada n a função $u^n - \widetilde{u^n}$ é solução da equação de Klein-Gordon com dados iniciais $\varphi_n - \widetilde{\varphi_n}$ e $\psi_n - \widetilde{\psi}_n$ respectivamente. Logo, (3.2.5) aplicada a $u^n - \widetilde{u^n}$ resulta

$$\left\|u^n - \widetilde{u^n}\right\|^2_{H^1(B(0,r+T)\times]0,T[)} \leq C\; T(\left\|\psi_n - \widetilde{\psi}_n\right\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|\varphi_n - \widetilde{\varphi_n}\|^2_{H^1(B(0,r))}).$$

Aplicando o limite quando $n \longrightarrow \infty$ nesta última desigualdade obtemos $\|u - \widetilde{u}\|^2_{H^1(B(0,r+T)\times]0,T[)} = 0$ mostrando que $u = \widetilde{u}$ em todo cilindro $B(0,r+T)\times]0,T[$, $T > 0$. Logo $u = \widetilde{u}$ em $\mathbb{R}^2\times]0,\infty)$.

Teorema 3.3.1: Sejam $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ com suporte compacto contidos na bola $B(0,r)$. Então existe uma única função $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2\times]0,\infty))$ que é solução de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \times [0, \infty), \\ u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2) \;\; \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \\ u_t(x_1, x_2, 0) = u_1(x_1, x_2) \;\; \text{em} \;\; \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Demonstração: Como u_0 tem suporte compacto na bola $B(0,r)$, da proposição 1.4.1 segue que $u_0 \in H_0^1(B(0,r))$.Logo existe uma seqüência $(\widetilde{\varphi}_n) \subset C_0^\infty(B(0,r))$ tal que $\widetilde{\varphi}_n \longrightarrow u_0$ em $H^1(B(0,r))$. Seja φ_n a extensão de $\widetilde{\varphi}_n$ para todo o plano, nula no exterior de $B(0,r)$. Então $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, supp$\varphi_n \subset B(0,r)$ e

$$\varphi_n \longrightarrow u_0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2).$$

Sendo $C_0^\infty(B(0,r))$ denso em $L^2(\Omega)$ então existe uma seqüência $(\widetilde{\psi}_n) \subset C_0^\infty(B(0,r))$ tal que $\widetilde{\psi}_n \longrightarrow u_1$ em $L^2(\Omega)$. Seja ψ_n a extensão de $\widetilde{\psi}_n$ para todo o plano, nula no exterior de $B(0,r)$. Então $\psi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, supp$\psi_n \subset B(0,r)$. e

$$\psi_n \longrightarrow u_1 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^2).$$

Seja u^n a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u^n_{tt} - \Delta u^n + m^2 u^n = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \times [0, \infty), \\ u^n(x_1, x_2, 0) = \varphi_n(x_1, x_2) \;\; \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \\ u^n_t(x_1, x_2, 0) = \psi_n(x_1, x_2) \;\; \text{em} \;\; \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Para cada par de naturais m e n a função $u^m - u^n$ é solução da equação de Klein-Gordon com dados inciais $\varphi_m - \varphi_n$ e $\psi_m - \psi_n$. Fixe um valor $T > 0$ arbtrário. Aplicando a estimativa (3.2.5) em $u^m - u^n$ obtemos

$$\|u_m - u_n\|^2_{H^1(B(0,r+T)\times]0,T[)} \leq C\ T(\|\psi_m - \psi_n\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|\varphi_m - \varphi_n\|^2_{H^1(B(0,r))}),$$

o que motra que (u_n) é seqüência de Cauchy em $H^1(B(0,r+T)\times]0,T[)$. Como este espaço é um espaço completo, então existe $u_T \in H^1(B(0,r+T)\times]0,T[)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u_T \text{ em } H^1(B(0,r+T)\times]0,T[).$$

Para cada n temos

$$\|u_n\|^2_{H^1(B(0,r+T)\times]0,T[)} \leq C\ T(\|\psi_n\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|\varphi_n\|^2_{H^1(B(0,r))}).$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ obtemos

$$\|u_T\|^2_{H^1(B(0,r+T)\times]0,T[)} \leq C\ T(\|u_0\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|u_1\|^2_{H^1(B(0,r))}) \tag{3.2.6}$$

Sejam $0 < T_1 < T_2$. Então $B(0,r+T_1)\times[0,T_1] \subset B(0,r+T_2)\times[0,T_2]$ e u_{T_2} estende u_{T_1} para o cilindro $B(0,r+T_2)\times[0,T_2]$. De fato; da construção acima temos

$$w_n^1 = u_n|_{B(0,r+T_1)\times[0,T_1]} \longrightarrow u_{T_1} \text{ em } H^1(B(0,r+T_1)\times]0,T_1[)$$

e

$$w_n^2 = u_n|_{B(0,r+T_2)\times[0,T_2]} \longrightarrow u_{T_2} \text{ em } H^1(B(0,r+T_2)\times]0,T_2[).$$

A diferença $w_n^1 - w_n^2$ em $B(0,r+T_1)\times[0,T_1]$ converge em $H^1(B(0,r+T_1)\times]0,T_1[)$ para $u_{T_1} - u_{T_2}$. Mas, em $B(0,r+T_1)\times[0,T_1]$ a diferença $w_n^1 - w_n^2$ é identicamente nula. Logo $u_{T_1} - u_{T_2} = 0$ em $B(0,r+T_1)\times[0,T_1]$.

Segue do argumento acima que existe uma função u definida em $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ tal que para todo $T > 0$ tem-se

$$u|_{B(0,r+T)\times]0,T[} = u_T \in H^1(B(0, r+T)\times]0,T[) \tag{3.2.7}$$

Logo $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2\times]0,\infty))$. Claramente temos

$$u^n \longrightarrow u \;\text{ em } H^1(B(0,r+T)\times]0,T[)$$

para todo $T > 0$. Isto prova a existência de solução do problema de Cauchy.

De (3.2.6) e (3.2.7) segue que para todo $T > 0$ tem-se

$$\|u\|^2_{H^1(B(0,r+T)\times]0,T[)} \le C\, T(\|u_0\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|u_1\|^2_{H^1(B(0,r))}). \tag{3.2.8}$$

Esta estimativa mostra que se $u_0 = u_1 = 0$ então $u = 0$. Assim, se $\widetilde{u} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2\times]0,\infty))$ é outra solução generalizada para o mesmo problema de Cauchy então $u - \widetilde{u}$ será tambem solução generalizada, porém com dados inciais nulos. Logo $u - \widetilde{u} = 0$ mostrando que a solução generalizada é única.

■

Finalizando este capítulo observamos que a estimativa (3.2.8) prova que a solução generalizada depende continuamente dos dados iniciais. Assim, o problema de Cauchy é bem posto.

.

Capítulo 4

Decaimento de energia

4.1. Introdução: O objetivo principal deste capítulo é provar que a energia local da solução do problema de Cauchy para a equação de Klein-Gordom decai na razão $\frac{const.}{t}$. Aqui seguiremos de perto os trabalhos [2] e [3]. Faremos uso da fórmula explícita da solução do problema de Cauchy para a equação de Klein-Gordon obtida no capítulo 2

4.2 Decaimento local de energia para solução clássica: O resultado principal desta seção é o seguinte lema:

Lema 4.2.1: Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um dominio limitado e $f,\ g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ funções com suporte compacto em U. Seja $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{2+1})$ a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{2+1}, \\ u(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2) \ \ \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \\ u_t(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2) \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Para cada $T_0 > \text{diam}(U)$, existe $K = K(m, T_0, U) > 0$ tal que para todo multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$, com $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 \leq 1$ temos

(4.2.1) $$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} u(x_1, x_2, t)\right| \leq \frac{K}{t}\{\|f\|_{H^1(U)} + \|g\|_{L^2(U)}\}$$

para todo $x \in U$ e $t \geq T_0$.

Demonstração: De acordo com o capítulo 2, para cada $t > 0$ a função u é dada por

$$(3.2.2) \qquad u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{r<t} g(y_1,y_2)\frac{\cos(m\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}dy_1dy_2 + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{r<t} f(y_1,y_2)\frac{\cos(m\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}dy_1dy_2\right]$$

onde $r = |x-y| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$.

Agora observe que para cada $x \in U$ e $t \geq T_0$ a bola de centro em x e raio t inclui U no seu interior. Como os dados iniciais possuem suporte em U podemos escrever

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{U} g(y_1,y_2)\frac{\cos(m\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}dy_1dy_2 + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{U} f(y_1,y_2)\frac{\cos(m\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}dy_1dy_2\right]$$

para todo $x = (x_1,x_2) \in U$ e $t > T_0$.

A fim de estimar todas as derivadas de u listadas em (4.2.1) é suficiente estimar a função

$$\zeta(x,y,t) = \frac{\cos(m\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

e suas derivadas parciais

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial t}, \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial t}, \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

uniformemente em $x, y \in U$ e $t > T_0$.

A simetria entre x_1 e x_2 reduz a tarefa em estimar apenas

$$\zeta,\ \frac{\partial\zeta}{\partial x_1},\ \frac{\partial\zeta}{\partial t},\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial t} \text{ e } \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}.$$

Seja

$$\chi(s) = \frac{1}{\sqrt{1-\ s^2}}.$$

Um calculo direto nos leva a

$$\zeta(x,y,t) = \frac{1}{t}\chi(\tfrac{r}{t})\cos(mt/\chi(\tfrac{r}{t})),$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x_1}(x,y,t) = \frac{1}{t}\{m\chi(\tfrac{r}{t})^2\ \frac{x_1-\ y_1}{t} sen(mt/\chi(\tfrac{r}{t})) + \frac{1}{t}\chi(\tfrac{r}{t})^3\ \frac{x_1-\ y_1}{t}\cos(mt/\chi(\tfrac{r}{t}))\},$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}(x,y,t) = \frac{1}{t}\{-m\chi(\tfrac{r}{t})^2 sen(mt/\chi(\tfrac{r}{t})) - \frac{1}{t}\chi(\tfrac{r}{t})^3\cos(mt/\chi(\tfrac{r}{t}))\},$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial t}(x,y,t) = \frac{1}{t}\{m^2\chi(\tfrac{r}{t})^3\ \frac{x_1-\ y_1}{t}\cos(mt/\chi(\tfrac{r}{t})) -$$

$$-\frac{3}{t^2}\chi(\tfrac{r}{t})^5\ \ \frac{x_1-\ y_1}{t}\cos(mt/\chi(\tfrac{r}{t}))\ -$$

$$\frac{3m}{t}\chi(\tfrac{r}{t})^4\ \frac{x_1-\ y_1}{t} sen(mt/\chi(\tfrac{r}{t}))\},$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}(x,y,t) = \frac{1}{t}\{3m\frac{1}{t}\chi(\tfrac{r}{t})^4 sen(mt/\chi(\tfrac{r}{t})) - m\frac{1}{t}\chi(\tfrac{r}{t})^2 sen(mt/\chi(\tfrac{r}{t})) -$$

$$-\frac{1}{t^2}\chi(\tfrac{r}{t})^3\cos(mt/\chi(\tfrac{r}{t})) + \frac{3}{t^2}\chi(\tfrac{r}{t})^5\cos(mt/\chi(\tfrac{r}{t})) - m^2\chi(\tfrac{r}{t})^3\cos(mt/\chi(\tfrac{r}{t}))\}.$$

Observe que se $x, y \in U$ e $t \geq T_0$ então

$$\frac{r}{t} \leq \frac{\text{diam}(U)}{T_0} < 1.$$

Agora fixamos $\eta > 0$ tal que

$$\frac{\text{diam}(U)}{T_0} < \eta < 1$$

e consideramos a função χ no intervalo $[-\eta,\ \eta]$. Se definimos

$$K_1 = (\frac{1}{\sqrt{1-\ \eta^2}})^5$$

obtemos

$$\chi(\tfrac{r}{t})^k \leq\ K_1, \text{ para todo } x, y \in U,\ t > T_0 \text{ e } k = 1, 2, ..., 5.$$

Agora, observando que

$$\left|\tfrac{x_1-\ y_1}{t}\right| \leq \tfrac{r}{t} < \eta < 1$$

obtemos

$$|\zeta(x, y, t)| \leq \tfrac{1}{t} K_1,$$

$$\left|\tfrac{\partial \zeta}{\partial x_1}(x, y, t)\right| \leq \tfrac{1}{t} K_1 \{m + \tfrac{1}{T_0}\},$$

$$\left|\tfrac{\partial \zeta}{\partial t}(x, y, t)\right| \leq \tfrac{1}{t} K_1 \{m + \tfrac{1}{T_0}\},$$

$$\left|\tfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial t}(x, y, t)\right| \leq \tfrac{1}{t} K_1 \{m^2 + \tfrac{3m}{T_0} + \tfrac{3}{T_0^2}\},$$

$$\left|\tfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}(x, y, t)\right| \leq \tfrac{1}{t} K_1 \{m^2 + \tfrac{4m}{T_0} + \tfrac{3}{T_0^2} + \tfrac{1}{T_0^3}\},$$

para todo $x, y \in U$ e $t > T_0$.

Para cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ com $|\alpha| \leq 1$ derivamos (4.2.2), tomamos o valor absoluto em ambos os lados e usamos as estimativas acima para obter

$$\left|\tfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} u(x, t)\right| \leq \tfrac{K_2}{2\pi t}\{\int_U |f(y)|\, dy + \int_U |g(y)|\, dy\}$$

para todo $x \in U$ e $t \geq T_0$, onde K_2 é uma constante dependendo de m, K_1 e T_0.

Para finalizar usamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz juntamente com $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^1}$ para obter

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^{\alpha}} u(x,t)\right| \leq \frac{K_2|U|^{\frac{1}{2}}}{2\pi t}\{\|f\|_{H^1(U)} + \|g\|_{L^2(U)}\}$$

onde $|U|$ denota a medida de Lebesgue de U, uniformemente em $x \in U$ e $t \geq T_0$.

Definimos $K = \frac{K_2|U|^{\frac{1}{2}}}{2\pi}$ e concluimos a demonstração.■

Uma conseqüência imediata de (4.2.1) é a desigualdade

(4.2.2) $\|u_t(.,t)\|^2_{L^2(U)} + \|u(.,t)\|^2_{H^1(U)} \leq \frac{C}{t^{\,2}} \left(\|g\|^2_{L^2(U)} + \|f\|^2_{H^1(U)}\right), \;\; t > T_0$

onde C depende apenas de T_0, U e m. Esta desigualdade expressa o que chamamos de decaimento local de energia da solução u pois, como observado no capítulo 3, a quantidade

$$E(U,u,t) = \|u_t(.,t)\|^2_{L^2(U)} + \|u(.,t)\|^2_{H^1(U)}$$

se relaciona com a energia

$$\mathcal{E}(U,u,t) = \iint_U \left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{m^2}{2}u^2\right](x,t)\,dx$$

atravéz da desigualdade

$$C_0 E(U,u,t) \leq \mathcal{E}(U,u,t) \leq C_1 E(U,u,t).$$

4.3 Decaimento local de energia para solução generalizada: Nesta seção estendemos a estimtiva (4.2.2) da seção anterior para as soluções generalizadas da equação de Klein-Gordon.

Sejam $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ funções com suporte compacto contidos na bola $B(0,r)$ e seja $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times]0,\infty))$ a solução de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \times [0,\infty), \\ u(x_1,x_2,0) = u_0(x_1,x_2) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^2, \\ u_t(x_1,x_2,0) = u_1(x_1,x_2) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Sejam $(\varphi_n), (\psi_n) \subset C_0^\infty(B(0,r))$ seqüências tais que

$$\varphi_n \longrightarrow u_0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2),$$
$$\psi_n \longrightarrow u_1 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^2),$$

e sejam u^n as soluções dos problemas de Cauchy

$$\begin{cases} u^n_{tt} - \Delta u^n + m^2 u^n = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \times]0,\infty), \\ u^n(x_1,x_2,0) = \varphi_n(x_1,x_2) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^2, \\ u^n_t(x_1,x_2,0) = \psi_n(x_1,x_2) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

de tal forma que

$$u^n \longrightarrow u \ \text{ em } H^1(B(0,r+T) \times]0,T[).$$

para cada $T > 0$.

Trabalhando com a estimativa (3.2.4) em $u^m - u^n$ obtemos

$\|(u^m_t - u^n_t)(.,t)\|^2_{L^2(B(0,r+T))} + \|(u^m - u^n)(.,t)\|^2_{H^1(B(0,r+T))} \leq$

$$\leq C\,\left(\|\psi_m - \psi_n\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|\varphi_m - \varphi_n\|^2_{H^1(B(0,r))}\right)$$

válida para todo $t > 0$. Isto mostra que para cada $t > 0$ podemos definir a restrição de u e u_t ao conjunto bidimensional $B(0, r+T) \times \{t\}$. Denotaremos estas restrições por $u(.,t)$ e $u_t(.,t)$ respectivamente. Isto permite definir para a solução generalizada u as expressões

$$E(U, u, t) = \|u_t(.,t)\|^2_{L^2(U)} + \|u(.,t)\|^2_{H^1(U)}$$

e

$$\mathcal{E}(U, u, t) = \iint\limits_U \left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{m^2}{2}u^2\right](x,t)\,dx$$

para todo $0 < t < T$ e todo $U \subset B(0, r+T)$.

Agora considere a estimativa (4.2.2) aplicada a cada u^n com $U = B(0,r)$. Temos

$$\|u_t^n(.,t)\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|u^n(.,t)\|^2_{H^1(B(0,r))} \leq$$
$$\leq \tfrac{C}{t^{\,2}}\,\left(\|\psi_n\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|\varphi_n\|^2_{H^1(B(0,r))}\right),\ \ t > T_0.$$

Aplicando o limite quando $n \longrightarrow \infty$ na última desigualdade obtemos

$$\text{(4.3.1)}\quad \|u_t(.,t)\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|u(.,t)\|^2_{H^1(B(0,r))} \leq$$
$$\leq \tfrac{C}{t^{\,2}}\,\left(\|u_1\|^2_{L^2(B(0,r))} + \|u_0\|^2_{H^1(B(0,r))}\right),\ \ t > T_0,$$

ou seja, para a solução generaliza u vale a estimativa de decaimento de energia:

$$E(B(0,r), u, t) \leq \tfrac{C}{t^{\,2}}E(B(0,r), u, 0), \qquad t > T_0$$

sempre que os dados iniciais têm suporte compacto em $B(0,r)$.

Bibliografia

[1] Adams, R. *Sobolev Spaces*, Academic Press, N. Y. 1975

[2] Bastos, W. D., A. Spezamiglio *Decaimento de energia e controle para a equação de Klein-Gordon em* $\mathbb{R}^{3+1}$. Atas do 61^0. Seminário Brasileiro de Análise, São João del Rei - MG, (2005), pp. 91-98

[3] Bastos, W. D., A. Spezamiglio *On the controllability for second order hyperbolic equations in curved polygons.* TEMA, Tend. Mat. Apl. Comput., v. 8, No. 2 (2007), pp169-179

[4] Giglioli, A. *Equações Diferenciais Elípticas*, 10^0 Coloquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas - MG., 1976

[5] John, F. *Partial Differential Equations*, 4th Edition, Springer Verlag, N. Y., 1986