

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências

Exatas Câmpus de Rio Claro

LEONARDO DI SCHIAVI TROTTA

MODELO DINÂMICO 3-D PARA A EVOLUÇÃO DO SISTEMA
PLUTÃO-CARONTE

Dissertação de Mestrado
apresentada ao Instituto de
Geociências e Ciências Exatas do
Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista “Júlio
de Mesquita Filho”, como parte dos
requisitos para obtenção do título de
Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Tadashi Yokoyama

Rio Claro - SP

2017

523.4 Trotta, Leonardo Di Schiavi
T858m Modelo dinâmico 3-d para a evolução do sistema
Plutão-Charonte / Leonardo Di Schiavi Trotta. - Rio Claro,
2017
101 f. : il., figs., quadros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Tadashi Yokoyama

1. Planetas. 2. Satélites planetários. 3. Rotação. 4.
Variáveis de Andoyer. 5. Sincronismo. I. Título.

LEONARDO DI SCHIAVI TROTTA

MODELO DINÂMICO 3-D PARA A EVOLUÇÃO DO SISTEMA
PLUTÃO-CARONTE

Dissertação de Mestrado
apresentada ao Instituto de
Geociências e Ciências Exatas do
Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista “Júlio
de Mesquita Filho”, como parte dos
requisitos para obtenção do título de
Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Tadashi Yokoyama – UNESP, Rio Claro

Prof. Dr. Nelson Callegari Junior – UNESP, Rio Claro

Prof. Dr. Rodney da Silva Gomes – Observatório Nacional, Rio de Janeiro

Rio Claro, SP 22 de Fevereiro de 2017

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho às mulheres mais importantes da minha vida: minha mãe Sandra Di Schiavi Trotta, minha noiva Larissa Berloff Belardin, minhas avós Maria Del Padre Trotta (*in memoriam*) e Giuseppa Pulcini Schiavi, e minha sogra Tereza Fruchi Berloff Belardin.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer o meu orientador, professor e amigo Tadashi Yokoyama, pela orientação e atenção que tem me dado durante todos esses anos de pesquisa nesta deslumbrante área de pesquisa que é a Astronomia Dinâmica. Também gostaria de agradecer todos os colegas de pesquisa, Gabriel e Marina, pelas frutíferas discussões e reflexões.

Em especial, um agradecimento com muito carinho e satisfação à minha noiva Larissa Berloff Belardin, que esteve ao meu lado em quase todos os momentos da minha vida, sejam tristes ou felizes, sempre me dando suporte e forças. À minha mãe e aos meus avós agradeço também, com muita felicidade, pelo suporte que eles têm me dado todos estes anos nesta jornada, sempre me apoiando e acreditando no que poderia ser feito. Um agradecimento mais do que especial para a família da minha noiva, meus sogros, meu cunhado e seus avós, que são pessoas maravilhosas, responsáveis por compor uma parte essencial da minha vida. Não posso me esquecer também dos meus amigos da eterna “República Eskina”: Fábio Alberguini (Cueca), André (Monge), Bruno (Moita), João (Atirador), Luiz (Pé Grande), Flávio (Rosinha), Mauro (Minecraft) e Carlos (Carlinhos), um grande abraço para todos vocês e agradeço muito pelos momentos de descontração que passamos juntos, vocês fizeram parte de um momento muito especial da minha vida, e vou guardar para sempre todas as memórias que eu for capaz de guardar. Um agradecimento também aos meus amigos do Programa de Pós-Graduação da Física: Murilo, companheiro de bar, agradeço pelas conversas sobre Física acompanhada por uma boa cerveja gelada, seja em um tempo chuvoso ou ensolarado, e também as mais novas amizades que fiz nesta jornada, Arthur e sua inseparável namorada Kimi, o famoso André Ramalho, Geovane, Hans e muitos outros também. O grande André Paganotti também, pelas conversas jogadas fora no Departamento de Física e atenção que me deu durante esses anos, foi um grande prazer lhe ajudar e ser ajudado por um cara tão carismático quanto você.

Agradeço o corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Física, pelas disciplinas ministradas, pela qualidade das aulas e do material apresentado, o prof. Dr. Nelson Callegari e toda a equipe de professores e técnicos, por terem organizado com sabedoria e propriedade o XVIII Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital (CBDO), um evento de grande importância para a Astronomia Dinâmica e tantas outras áreas correlacionadas. O Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação (DEMAC) pela disponibilização de computadores no laboratório de Mecânica Celeste, que permitiram o desenvolvimento da pesquisa. Esta pesquisa também tornou-se possível graças aos recursos computacionais disponibilizados pelo Núcleo de Computação Científica (NCC/GridUNESP) da Universidade Estadual Paulista (UNESP).

Por final agradeço a CAPES (1481208) e a agência fomentadora de pesquisa FAPESP (nº Processo: 2014/27322-0), pelos recursos fornecidos que tornaram este projeto possível.

EPÍGRAFE

“Life is a waterfall
We're one in the river,
and one again after the fall
Swimming through the void
we hear the word
We lose ourselves but we find it all

Cause we are the ones that want to play
Always want to go but you never want to stay
And we are the ones that want to choose
Always want to play but you never want to lose

Aerials In the sky
When you lose small mind you free your life

(...)”

(trecho da música *Aerials*, da banda *System of a Down*)

RESUMO

O sistema Plutão-Caronte é um par quase binário em estado de duplo sincronismo. Hoje sabe-se que Plutão possui cinco satélites: Caronte, Styx, Nix, Kerberos e Hydra, onde os últimos quatro são muito menores que Caronte. A origem mais plausível para o sistema Plutão-Caronte é a de um impacto de grandes proporções entre corpos de tamanhos similares, onde o impactador (que viria a ser Caronte) permanece quase intacto após o evento. Caronte iniciaria o movimento orbital próximo de Plutão (ex: $a \approx 4 R_p$) com ambos rotacionando rapidamente, como consequência da colisão mútua. Devido a intensa maré, suas distâncias irão evoluir e seus equadores (provavelmente desalinhados devido ao choque) irão também evoluir em consonância com seus respectivos spins. Alguns autores, por meio de um modelo bidimensional, tomando a maré modelada por Mignard (1980) e Peale (2007), usando dois métodos distintos, evoluíram Plutão-Caronte à partir deste cenário, reproduzindo os parâmetros orbitais e rotacionais atuais do sistema. Neste trabalho fazemos um estudo tridimensional, usando na parte rotacional as variáveis canônicas de Andoyer. Nesta abordagem, integramos a atitude de Plutão e Caronte por meio das equações de Hamilton, enquanto que a dinâmica translacional é feita classicamente via equações cartesianas de Newton. As contribuições dos torques, devidas às interações por efeito de maré entre Plutão e Caronte são inseridas nas equações de Hamilton. Como resultado mostramos o alinhamento dos equadores de ambos Plutão e Caronte, circularização da órbita de Caronte, alinhamento dos eixos de rotação de ambos Plutão e Caronte ao vetor normal à órbita de Caronte em torno de Plutão, a evolução de todo o sistema fazendo o semieixo de Caronte evoluir de $a \approx 4 R_p$ até $16,5 R_p$. Mostramos também o estado final de duplo sincronismo e a libração do ângulo ressonante 1 : 1, de ambos Plutão e Caronte. Durante a evolução do sistema, dependendo dos parâmetros de maré adotados (k_2 e Δt) a excentricidade de Caronte pode atingir valores consideráveis. Em 2005 foram descobertos novos satélites de Plutão: Nix, Hydra e mais recentemente, em 2011 e 2012, Kerberos e Styx, respectivamente. A origem desses pequenos satélites é ainda um problema não resolvido. Entretanto neste trabalho também fizemos algumas explorações tentando examinar a sobrevivência desses corpos durante a evolução de Plutão-Caronte.

Palavras-chave: Satélites Planetários. Rotação. Variáveis de Andoyer. Plutão-Caronte. Sincronismo. Atitude.

ABSTRACT

The Pluto-Charon system is almost a binary system in dual synchronous state. It is well known that Pluto has five satellites: Charon, Styx, Nix, Kerberos and Hydra, where the latter four are much smaller than Charon. The most plausible origin for the Pluto-Charon system is an oblique impact of great proportions between bodies with similar sizes. In this scenario, the impactor, which would later originate Charon, would remain almost intact after the collision. Initially the satellite would be revolving very close to Pluto (ex: $a \approx 4R_p$), with both bodies rotating very fast, as consequence of the mutual collision. The strong tidal effects, due to the initial approximation of both bodies combined with the fast rotation, expanded Charon's orbit, so as their equators aligned (probably misaligned due to the collision), in consonance with their respective spins. Some authors, using a two dimensional system and tidal forces modeled by Mignard (1980) and Peale (2007), with two distinct methods, evolved Pluto-Charon from this scenario. They were able to reproduce the current orbital and rotational parameters of the system. In our work, a three-dimensional study was done, using the Andoyer's variable for the rotational problem. We integrated Pluto and Charon's attitude through Hamilton's equation, while the translational dynamics is calculated classically through Newton's cartesian equations. Torque's contributions due to tides raised on both Pluto and Charon are introduced in Hamilton's equations. As result we demonstrate: the alignment of the equators of Pluto and Charon, the circularization of Charon's orbit around Pluto, the alignment of the spin axis of both Pluto and Charon with the vector normal to the orbit plane and the expansion of Charon's orbit to its current value (from $a=4 R_p$ to $16,5 R_p$). We also demonstrate the moment where the system reaches the final point of tidal evolution, that is, the dual synchronous state of the pair and the libration of the respective resonant angle 1 : 1. During the evolution process of the system, some simulations showed that depending on the tidal parameters assumed (k_2 e Δt), Charon can reach a considerable eccentricity. In 2005 two satellites of Pluto were discovered, Nix and Hydra, and later in 2011 and 2012 another two satellites were discovered, Kerberos and Styx, respectively. The origin of these satellites remains uncertain. Nevertheless in this work, some approaches were done in order to study the lifespan of these bodies during the process of tidal evolution of the Pluto-Charon system.

Keywords: Planetary satellites. Rotation. Andoyer's Variable. Pluto-Charon. Synchronism. Attitude.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1. (A) Variação da obliquidade de Plutão quando perturbado por Caronte e Sol. (B) Variação da obliquidade de Plutão quando este é apenas perturbado pelo Sol. (C) Variação da obliquidade de Plutão quando este é perturbado por ambos Caronte e Sol, onde Caronte está em uma órbita com inclinação orbital relativa ao equador de Plutão $i_e = 5^\circ$39
- Figura 2. Precessão Secular dos polos de Plutão. (A) Plutão é perturbado por ambos Caronte e Sol. (B) Plutão é perturbado apenas pelo Sol, $m_2=0$40
- Figura 3. Libração do ângulo ressonante e precessão dos polos de Plutão em um período de 2,0 ky. (A) Libração de σ_{p11} em torno de 0° (B) Libração do ângulo ressonante $h_1-\Omega$ em torno de 0° . (C) Libração de σ_{p11} em torno de 180°42
- Figura 4. Libração dos ângulos ressonantes referente ao Cassini State de Caronte em um período de 200 y. (A) Libração de σ_{c11} em torno de 0° (B) Libração do ângulo ressonante $h_1-\Omega$ em torno de 0° . (C) Libração de σ_{c11} em torno de 180° ... 43
- Figura 5. Evolução dos parâmetros orbitais de Caronte para $A\Delta t=2,34$. (A) Variação do semieixo maior de Caronte em unidades de raio equatorial de Plutão; (B) Excentricidade da órbita de Caronte; (C) Inclinação orbital de Caronte relativa a um plano no equador de Plutão.....61
- Figura 6. Evolução dos parâmetros rotacionais de ambos Plutão e Caronte para $A\Delta t=2,34$. (A,B) Spins de ambos Plutão e Caronte, respectivamente, em unidades de movimento médio de Caronte, ao longo da evolução; (C,D) Ângulo ressonante 1 : 1 de ambos Plutão e Caronte, respectivamente; (E,F) Inclinação dos equadores de Plutão e Caronte em relação ao plano fundamental escolhido, respectivamente.....62
- Figura 7. (A,B) Evolução das longitudes do nodo do equador relativo a um eixo inercial, de ambos Plutão e Caronte, respectivamente. Caso $A\Delta t = 2,34$63
- Figura 8. Evolução dos parâmetros orbitais de Caronte para $A\Delta t=1,73$. (A) Variação do semieixo maior de Caronte em unidades de raio equatorial de Plutão; (B) Excentricidade da órbita de Caronte; (C) Inclinação orbital de Caronte relativa a um plano no equador de Plutão.....64
- Figura 9. Evolução dos parâmetros rotacionais de ambos Plutão e Caronte para

$A\Delta t=1,73$. (A,B) Spins de ambos Plutão e Caronte, respectivamente, em unidades de movimento médio de Caronte, ao longo da evolução; (C,D) Ângulo ressonante 1 : 1 de ambos Plutão e Caronte, respectivamente; (E,F) Inclinação dos equadores de Plutão e Caronte em relação ao plano fundamental escolhido, respectivamente.....65

Figura 10. (A,B) Evolução das longitudes do nodo do equador relativo a um eixo inercial, de ambos Plutão e Caronte, respectivamente. Caso $A\Delta t = 1,73$66

Figura 11. Evolução dos parâmetros orbitais de Caronte para $A\Delta t=9,0$. (A) Variação do semieixo maior de Caronte em unidades de raio equatorial de Plutão; (B) Excentricidade da órbita de Caronte; (C) Inclinação orbital de Caronte relativa a um plano no equador de Plutão.....67

Figura 12. Evolução dos parâmetros rotacionais de ambos Plutão e Caronte para $A\Delta t=9,0$. (A,B) Spins de ambos Plutão e Caronte, respectivamente, em unidades de movimento médio de Caronte, ao longo da evolução; (C,D) Ângulo ressonante 1 : 1 de ambos Plutão e Caronte, respectivamente; (E,F) Inclinação dos equadores de Plutão e Caronte em relação ao plano fundamental escolhido, respectivamente.....68

Figura 13. (A,B) Evolução das longitudes do nodo do equador relativo a um eixo inercial, de ambos Plutão e Caronte, respectivamente. Caso $A\Delta t = 1,7$69

Figura 14. Sistema de eixos fixos e sistema do plano orbital.....90

Figura 15. Intersecção dos planos equatorial, perpendicular ao momento angular de rotação, orbital do Sol e inercial na esfera unitária.....92

Figura 16. Ângulos de Andoyer (HENRARD, 2005).....100

LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Parâmetros físicos. Fontes: (BROZOVIĆ et al., 2015; STERN et al., 2015)	
.....	37
Quadro 2. Condições Iniciais. Fontes: (BINZEL et al., [s.d.]; BROZOVIĆ et al., 2015; STERN et al., 2015).	
.....	38
Quadro 3. Parâmetros físicos e condições iniciais para cálculo do momento angular. Fontes: (BROZOVIĆ et al., 2015; CHENG; LEE; PEALE, 2014; STERN et al., 2015).	
.....	54
Quadro 4. Condições Iniciais para $a = 4 R_p$	57
Quadro 5. Parâmetros de Maré adotados no caso 1.....	58
Quadro 6. Parâmetros de Maré adotados no caso 2.....	59
Quadro 7. Parâmetros de Maré adotados no caso 3.....	59

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	13
2. OBJETIVOS GERAIS.....	16
3. DINÂMICA SECULAR ROTACIONAL DE PLUTÃO E CARONTE.....	17
3.1. Objetivos.....	17
3.2. Métodos.....	18
3.3. Equações do Movimento.....	18
3.4. Condições Iniciais.....	37
3.5. Resultados para $C_{22} = 0$	39
3.6. Resultados para $C_{22} \neq 0$	41
4. MODELO DINÂMICO 3-D PARA A EVOLUÇÃO DO SISTEMA PLUTÃO-CARONTE.....	44
4.1. Objetivos.....	44
4.2. Métodos.....	44
4.3. Equações do movimento.....	45
4.4. Condições Iniciais.....	56
4.5. Resultados.....	60
4.5.1 Caso 1 – $A\Delta t = 2,34$	60
4.5.2 Caso 2 – $A\Delta t = 1,73$	64
4.5.3 Caso 3 – $A\Delta t = 9,0$	66
5. DISCUSSÃO.....	70
5.1. Dinâmica Secular de Plutão-Caronte.....	70
5.2. Modelo Dinâmico 3-d para a Evolução do Sistema Plutão-Caronte.....	72
6. CONCLUSÃO.....	75
6.1. Dinâmica Secular de Plutão-Caronte.....	75

6.2. Modelo Dinâmico 3-d para a Evolução do Sistema Plutão-Caronte.....	76
REFERÊNCIAS.....	77
APÊNDICES.....	80
Apêndice A – Dedução da função perturbadora RJ2 como função dos elementos orbitais do satélite.....	80
Apêndice B – Dedução da energia cinética de rotação como função dos ângulos de Andoyer.....	82
Apêndice C – Cossenos diretores a_i , b_i e c_i como função de cossenos diretores dos eixos principais de inércia relativos aos eixos inerciais.....	83
Apêndice D – Dedução da expressão (74) das componentes do momento angular total do sistema Plutão-Caronte.....	86
Apêndice E – Cálculo da obliquidade.....	92
Apêndice F – Dedução das equações de movimento.....	94
ANEXO A – VARIÁVEIS DE ANDOYER.....	100

1. INTRODUÇÃO

O sistema Plutão-Caronte é um par quase binário em estado de duplo sincronismo. O centro de massa do sistema encontra-se fora da superfície de Plutão (BUIE et al., 2010). Hoje sabe-se que Plutão possui cinco satélites: Caronte, Styx, Nix, Kerberos e Hydra, onde os últimos quatro são muito menores que Caronte (WEAVER et al., 2016).

A origem mais plausível para o sistema Plutão-Caronte é a de um impacto oblíquo entre corpos de tamanhos similares, onde o impactador permanece quase intacto após o evento (CANUP, 2005; MCKINNON, 1989), o que explicaria o alto momento angular do sistema e a razão das massas. Caronte iniciaria próximo de Plutão, com alta excentricidade, inclinação diferente de zero, com ambos rotacionando rapidamente e com os equadores desalinhados. Hipotetizou-se ainda que os demais satélites de Plutão teriam se originado deste mesmo evento (CANUP, 2011; STERN et al., 2006; WARD; CANUP, 2006).

Inicialmente estes corpos estariam em uma órbita mais próximos entre si, que seria posteriormente expandida por transporte ressonante. Esta última hipótese sustenta-se basicamente nos seguintes fatos: Styx, Nix, Kerberos e Hydra estão atualmente próximos da ressonância de movimento médio 1:3:4:5:6 com Caronte; a autora CANUP (2011) demonstrou por meio de simulações de “*smooth particle hydrodynamic*” que detritos com ordem de massa similar aos satélites pequenos de Plutão, de uma suposta colisão entre um Plutão e um Caronte primordial localizavam-se dentro de uma faixa de distância inferior à extensão da órbita atual dos satélites. Entretanto, foi demonstrado posteriormente que esta hipótese não é plausível.

Primeiramente, não é possível transportar ambos Nix e Hydra por transporte ressonante até suas posições atuais (LITHWICK; WU, 2008). Em um segundo trabalho (CHENG; PEALE; LEE, 2014), verificou-se a possibilidade de se transportar os satélites pequenos de Plutão de forma que estes passassem por diversas ressonâncias, de mesma comensurabilidade. Novamente, os autores mostraram ser pouco provável que estes corpos atingissem suas posições atuais por meio destes

mecanismos físicos.

Em outros trabalho (SANTOS; MORBIDELLI; NESVORNÝ, 2012), foi verificada a hipótese de que os pequenos satélites de Plutão teriam sido capturados durante estágios iniciais da evolução do sistema Plutão-Caronte, onde o sistema estaria penetrado em um disco de partículas mil vezes mais massivo que o cinturão de Kuiper (MORBIDELLI; LEVISON; GOMES, 2007). Estes corpos capturados poderiam sofrer colisões com planetesimais do disco, criando um disco de detritos e posteriormente um disco de acréscimo, formando os satélites de Plutão. Porém, demonstrou-se que o tempo de vida colisional é muito mais longo que o tempo de captura.

No dia 14 de Julho de 2015 a sonda *New Horizons* atravessou o sistema Plutão-Caronte, e apenas no final do ano de 2016 que toda a informação enviada pela sonda foi processada ("New Horizons", [s.d.]). Com esta missão, inúmeros dados foram obtidos, ou melhorados, principalmente aqueles mais básicos (massa dos satélites, raios médios, atmosfera, J_2 , C_{22} , albedo, etc). Estudos da geologia, forma e da atmosfera destes corpos puderam também ser feitos com mais precisão. Foi também analisado a possível existência de outros satélites, dentro de um raio de precisão (STERN et al., 2015; WEAVER et al., 2016).

Dentre várias características muito peculiares, Plutão apresenta do ponto de vista dinâmico, alguns dados extremamente importantes:

- Plutão forma com seu satélite Caronte, um sistema quase binário, ambos envolvidos numa dupla ressonância spin-órbita.;
- o seu eixo de rotação apresenta uma inclinação de $\approx 120^\circ$ em relação a normal do plano de sua órbita heliocêntrica (BINZEL et al., [s.d.]) ;
- sua órbita heliocêntrica apresenta, a exemplo de Mercúrio, uma excentricidade bastante alta (≈ 0.2).

Esta dupla ressonância spin-órbita é bastante singular, se comparada com aquelas entre planetas e satélites, pois as duas massas são quase de mesma ordem.

Um trabalho recente (CHENG; LEE; PEALE, 2014) traz novos resultados referindo-se em especial sobre a evolução dinâmica do sistema. Trata-se de um

estudo volumoso onde os autores incluem a hipótese de que Plutão e Caronte evoluem exercendo mútuos efeitos de maré e também a evolução se faz começando com alta excentricidade. Embora os autores dizem ser um modelo completo, os dois corpos evoluem sempre no plano de suas órbitas (2 dimensões), e portanto o equador de ambos se confunde com tal plano. Além disso são feitas algumas expansões em excentricidades. Os autores usam variáveis de Euler e discutem situações possíveis de captura na ressonância 3 : 2 até mesmo quando C_{22} é nulo. É afirmado ainda que nem sempre ocorre uma rápida sincronização do *spin* de Caronte (como é classicamente aceito, com baixa excentricidade). Afirmam os autores que isso pode depender da excentricidade inicial (não muito pequena) de Caronte e do modelo de maré adotado.

Nota-se que neste trabalho os autores se preocupam principalmente no processo de captura em diferentes ressonâncias de spin-órbita via mecanismos de maré. Por outro lado, como o problema é plano, não se aborda o problema da inclinação do equador de Plutão em relação ao plano orbital deste em relação ao Sol, fazendo-se necessário um modelo tridimensional.

2. OBJETIVOS GERAIS

Neste trabalho desejamos estudar do sistema binário Plutão-Caronte, os seguintes tópicos:

- Modelagem da dinâmica de rotação em variáveis de Andoyer, tridimensional;
- Ressonância spin-órbita 1 : 1;
- Variação atual do equador de Plutão e Caronte;
- Possibilidade de duplo sincronismo;
- Evolução do sistema até seu estado atual.

A modelagem em variáveis de Andoyer tem evidentes vantagens, estas são canônicas e as médias são possíveis de serem feitas de maneira rigorosa, separando a parte secular da parte de curto período. A combinação destas variáveis com as de Delaunay permite também escrever claramente os termos ressonantes de qualquer ordem de ressonância spin-órbita. Assim, fica óbvio que não é nenhuma surpresa o fato mencionado por CHENG *et al.* (2014) sobre possíveis dificuldades de capturas na ressonância 3 : 2 quando C_{22} de Caronte é tomado nulo. Nas variáveis de Andoyer isto fica claro, pois em teoria de perturbação de 1ª ordem, ressonâncias do tipo que a velocidade angular de rotação é um múltiplo semi-inteiro do movimento médio, são fatoradas por C_{22} (GOLDREICH; PEALE, 1966). Isto é, corpos com simetria axial ($A=B$ ou $C_{22}=0$) ignoram estas ressonâncias spin-órbita no caso sem maré. Na próxima seção, fórmula (34), isto fica claro com o uso das variáveis de Andoyer. Comentário idêntico se aplica sobre a questão da excentricidade quando se compara ressonância 3 : 2 com 1 : 1. A segunda ocorre mesmo que a excentricidade seja nula, ao passo que a primeira nunca ocorre se $e = 0$. O uso de variáveis adequadas reflete claramente estas características.

O problema da variação ou precessão do plano do equador, obliquidade, etc., foi estudado por DOBROVOLSKIS *et al.* (1997), considerando uma versão simplificada. Estes autores tomaram o sistema Plutão-Caronte como um único corpo, ou seja, um alteres. Desta forma, como o momento de inércia de um alteres (duas massa unidas por uma barra de comprimento fixo) é trivialmente calculada de

forma exata, calcula-se a variação do conjunto. Neste trabalho tomamos estes dois objetos de forma realista, isoladamente cada um dos corpos com seus respectivos momentos de inércia A , B e C . Para estudarmos a rotação de Plutão, tomamos Plutão sendo orbitado por Caronte e perturbado também pelo Sol. Uma simplificação é feita nesse momento, isto é, Caronte é considerado um corpo puntual. De forma semelhante, para estudar a rotação de Caronte, tomamos este sendo orbitado por um Plutão puntual. Na realidade esta hipótese de ser puntual não é obrigatória, porém isso proporciona uma enorme economia nos cálculos. O Sol também é computado.

Com esta técnica, estudamos a possibilidade do duplo sincronismo no sistema Plutão-Caronte. Por outro lado, se desejarmos situações passadas quando Caronte esteve em distâncias diversas de Plutão, basta tomar diferentes semieixos do par Plutão-Caronte e evoluir o sistema inserindo interações de maré entre os dois corpos. Nesta última abordagem é necessário considerar ambos Plutão e Caronte como corpos finitos, uma vez que as interações de maré estão intrinsecamente relacionadas aos *spins* dos corpos interagentes.

3. DINÂMICA SECULAR ROTACIONAL DE PLUTÃO E CARONTE

3.1. Objetivos

Expressar o potencial gravitacional mútuo proveniente da interação entre um corpo finito não esférico $C1$ e outros dois corpos pontuais $C2$ e $C3$, e estudar a dinâmica de rotação de $C1$ usando as variáveis de Andoyer.

Estudar a variação secular da obliquidade de $C1$, assim como o movimento de precessão. Para o estudo da atitude de Plutão, este será identificado como $C1$ e Caronte como $C2$, sendo que $C3$ será sempre o Sol. Para o caso em que se estuda a atitude de Caronte, inverte-se os papéis de $C1$ e $C2$.

3.2. Métodos

Seja um corpo triaxial C1 com momentos de inércia A, B e C, com $A \leq B \leq C$, e uma massa puntual C2. Este segundo realiza uma trajetória elíptica em relação ao primeiro, perturbada pela presença de um terceiro corpo C3 (Sol) e pelo achatamento polar e equatorial de C1. O segundo e terceiro corpo C2 e C3 exercem um torque sobre o primeiro C1, perturbando a sua atitude.

Utiliza-se o conjunto de ângulos de Andoyer l, g, h, J e K (DEPRIT, 1967) para relacionar o sistema equatorial de C1 com um sistema de eixos centrado no centro de massa do mesmo. O ângulo de Andoyer J (*Wobble*) será tomado como nulo para simplificar as equações.

Em relação às equações que definem a translação de C2, a integração do sistema será feita via equações médias, através das equações variacionais de Lagrange (BROUWER; CLEMENCE, 1961). Os elementos orbitais seculares de C3, no caso o Sol, é dado segundo as equações em (DOBROVOLSKIS; PEALE; HARRIS, 1997). A atitude de C1 será integrada à partir das equações de Hamilton, onde também será feita uma média no potencial gravitacional.

3.3. Equações do Movimento

Dado um sistema de eixos no centro de massa do corpo C1, as equações que definem o movimento translacional de C2 perturbado pelo achatamento de C1 e pelo Sol (C3) é:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{k^2 (m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} + \nabla (R_{\odot} + R_{J_2}) \quad (1)$$

Onde k^2 é a constante gravitacional, m_1 e m_2 são as massas dos corpos C1 e C2 respectivamente, $\mathbf{r}$ o vetor posição de C2 e $R_{\odot}$ e R_{J_2} as funções perturbadoras referentes ao Sol (C3) e ao achatamento de C1, respectivamente.

As funções perturbadoras têm a seguinte forma (BROUWER; CLEMENCE, 1961):

$$R_{J_2} = \frac{k^2(m_1+m_2)R_1^2}{r^3} J_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \phi \right) \quad (2)$$

$$R_{\odot} = \frac{k^2 M_{\odot} r^2}{r_{\odot}^3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 S \right) \quad (3)$$

Temos que R_1 e J_2 representam o raio equatorial e o coeficiente de achatamento de C1, respectivamente, o ângulo ϕ a latitude de C2 em relação ao plano equatorial de C1 e S a distância angular C2-C3. Parâmetros que levam o subíndice $\odot$ são aqueles referentes ao Sol.

A fim de se obter a variação secular do problema, sempre que possível, realizamos uma média usual na anomalia média l_0 de C2 em ambas as expressões (2) e (3).

Primeiramente, vamos definir a seguinte notação para indicar a média na anomalia média l_0 de uma função arbitrária $F = F(l_0, \mathbf{q})$, onde $\mathbf{q}$ indica uma n-upla de variáveis quaisquer:

$$\langle F(l_0, \mathbf{q}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(l_0, \mathbf{q}) dl_0 \quad (4)$$

Estas médias nas funções perturbadoras são feitas diretamente sem necessidade de se utilizar expansões em potências de excentricidade através da seguinte relação:

$$\frac{1}{r^3} dl_0 = \frac{(1+e \cos f)}{a^3(1-e^2)^{(3/2)}} df \quad (5)$$

Aplicando (5) e realizando as devidas médias (KOZAI, 1959; YOKOYAMA, 2002):

$$\langle R_{J_2} \rangle = \frac{n^2 R_1^2 J_2}{4(1-e^2)^{3/2}} (3 \cos^2 i - 1) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \langle R_{\odot} \rangle = & \frac{k^2 M_{\odot} a^2}{2a_{\odot}^3} \left(\frac{a_{\odot}}{r_{\odot}} \right)^3 \left[\frac{3}{2} P (A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2E^2 - \frac{2}{3}) + \right. \\ & + \frac{3}{2} A^2 Z \cos(2\omega + 2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\ & + \frac{3}{2} B^2 Z \cos(2\omega + 2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\ & + \frac{3}{2} C^2 Z \cos(2\omega - 2f_{\odot} - 2\omega_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\ & + \frac{3}{2} D^2 Z \cos(2\omega - 2f_{\odot} - 2\omega_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\ & + \frac{3}{2} Z (E^2 + 2CD) \cos(2\omega - 2f_{\odot} - 2\omega_{\odot}) \\ & + \frac{3}{2} Z (E^2 + 2AB) \cos(2\omega + 2f_{\odot} + 2\omega_{\odot}) \\ & + 3Z (-E^2 + AD + BC) \cos 2\omega \\ & + 3P (-E^2 + AC + BD) \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot}) \\ & + 3P (AB + CD) \cos(2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\ & + 3ACZ \cos(2\omega + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\ & + 3ADP \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\ & + 3EP (A - D) \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\ & + 3EP (-A - B + C + D) \cos(\Omega - \Omega_{\odot}) \\ & + 3EZ (A - C) \cos(2\omega + \Omega - \Omega_{\odot}) \\ & - 3AEZ \cos(2\omega + 2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\ & + 3BCP \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) + \\ & + 3BDZ \cos(2\omega - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) + \\ & + 3EP (B - C) \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) + \\ & + 3EZ (B - D) \cos(2\omega - \Omega + \Omega_{\odot}) + \\ & - 3BEZ \cos(2\omega + 2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) + \\ & + 3CEZ \cos(2\omega - 2f_{\odot} - 2\omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) + \\ & \left. + 3DEZ \cos(2\omega - 2f_{\odot} - 2\omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) \right] \quad (7) \end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{4}(1+\cos I)(1-\cos I_{\odot}) \\
 B &= \frac{1}{4}(1-\cos I)(1+\cos I_{\odot}) \\
 C &= \frac{1}{4}(1+\cos I)(1+\cos I_{\odot}) \\
 D &= \frac{1}{4}(1-\cos I)(1-\cos I_{\odot}) \\
 E &= \frac{1}{2}\sin I \sin I_{\odot} \\
 P &= 1+\frac{3}{2}e^2 \\
 Z &= \frac{5}{2}e^2
 \end{aligned} \tag{8}$$

Definamos:

- a : semieixo maior da órbita de C2.
- e : excentricidade da órbita de C2.
- i : inclinação orbital de C2 em relação a um plano no equador de C1.
- n : movimento médio de C2.
- l_0 : anomalia média de C2.
- $l_{0\odot}$: anomalia média de C3.
- I : Inclinação da órbita de C2 em relação a um plano fundamental.
- ω : argumento do periastro de C2 em relação a um sistema fundamental.
- Ω : longitude do nodo ascendente de C2 em relação a um sistema fundamental.
- $f_{\odot}$: anomalia verdadeira do corpo C3.

Os parâmetros que levam o subíndice $\odot$ são aqueles referentes ao Sol. Para

um sistema de referência arbitrário, centrado no corpo C1, diferente daquele do equador, a expressão (6) toma a seguinte forma (Apêndice A):

$$\langle R_{J_2} \rangle = \frac{n^2 a^2}{8(1-e^2)^{3/2}} \left[1 - 3 \cos^2 \tilde{I} + 9 \cos^2 \tilde{I} \cos^2 I - 3 \cos^2 I + 3 \sin^2 \tilde{I} \cos(2\Omega - 2\tilde{\Omega}) \sin^2 I + 3 \sin 2\tilde{I} \cos(\Omega - \tilde{\Omega}) \sin 2I \right] \quad (9)$$

O ângulo $\tilde{\Omega}$ e $\tilde{I}$ são respectivamente a longitude e a inclinação do equador em relação ao sistema de referência.

Da geometria do problema escreve-se $\langle R_{J_2} \rangle$ em relação aos elementos orbitais, no sistema arbitrário, e aos ângulos de Andoyer (DEPRIT, 1967) através das seguintes relações:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= h + \Omega_2 \\ \sin \tilde{I} \sin \Omega_2 &= \sin J \sin g \\ \cos \tilde{I} &= \cos K \cos J - \sin K \sin J \cos g \\ \sin \tilde{I} \cos \Omega_2 &= \cos J \sin K + \cos K \sin J \cos g \end{aligned} \quad (10)$$

Onde Ω_2 é um ângulo auxiliar e K, J, h e g são ângulos de Andoyer. A definição dos ângulos de Andoyer está no Anexo A.

Deste modo, $\langle R_{J_2} \rangle$ está escrito como função dos elementos orbitais relativo a um sistema arbitrário e em função dos ângulos de Andoyer.

Aplicando-se as equações variacionais de Lagrange (BROUWER; CLEMENCE, 1961) obtém-se a taxa de variação temporal secular dos elementos orbitais: excentricidade, longitude do nodo ascendente, argumento do periastro e inclinação orbital de C2.

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle &= \frac{-(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \omega} \\
\left\langle \frac{dI}{dt} \right\rangle &= \frac{\cot I}{na^2 (1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 (1-e^2)^{1/2} \sin I} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \Omega} \\
\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial e} - \frac{\cot I}{na^2 (1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial I} \\
\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{na^2 (1-e^2)^{1/2} \sin I} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial I}
\end{aligned} \tag{11}$$

A função perturbadora secular $\langle R \rangle$ é a soma das funções perturbadoras $\langle R_{J2} \rangle$ e $\langle R_{\odot} \rangle$. Devido às médias realizadas em l_0 , o semieixo a de C2 será constante.

Para a dinâmica de rotação do corpo C1 e cálculo da anomalia média de C2, utiliza-se o formalismo hamiltoniano. A Hamiltoniana em função das variáveis canônicas de Andoyer (rotação) e das variáveis canônicas de Delaunay l_0 e L_0 (anomalia média do satélite C2 e o momento conjugado correspondente) têm a seguinte forma (DEPRIT, 1967):

$$H_R = -\frac{\mu_0^2}{2L_0^2} + \frac{1}{2}(G^2 - L^2) \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{L^2}{2C} - U_{22} - U_{\odot 2} \tag{12}$$

O primeiro termo é a parcela da Hamiltoniana de 2 corpos (C1 e C2), onde $\mu_0 = k^2 (m_1 + m_2)$ e $L_0 = \sqrt{\mu_0 a}$. O segundo e terceiro termos da equação (12) é a energia de rotação livre de C1 e as funções potenciais U_{22} e $U_{\odot 2}$ são o segundo termo da expansão da energia potencial gravitacional U em harmônicos esféricos (NOYELLES; LEMAITRE; VIENNE, 2008), onde o primeiro é referente a interação C1-C2 e o segundo a C1-C3.

Omitiu-se os termos U_{20} e $U_{\odot 0}$ (termos de ordem 0) por estes não produzirem torques, enquanto que os termos de ordem superior foram negligenciados.

Uma simplificação é feita tomando $J = 0$. Deste modo as variáveis angulares do conjunto canônico de Andoyer l e g não são bem definidas, porém suas somas são. Como estamos trabalhando com um sistema Hamiltoniano, adota-se o seguinte

conjunto canônico não-singular (D'HOEDT; LEMAITRE, 2004):

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= l+g+h & \Lambda_1 &= G \\ \lambda_2 &= -l & \Lambda_2 &= G-L \\ \lambda_3 &= -h & \Lambda_3 &= G-H\end{aligned}\tag{13}$$

A Hamiltoniana toma a forma:

$$H_R = -\frac{\mu_0^2}{2L_0^2} + \frac{\Lambda_1^2}{2C} - U_{22} - U_{\odot 2}\tag{14}$$

Explicitando a função potencial U_{i2} (interação entre os corpos C1-Ci, com $i \neq 1$):

$$U_{i2} = \frac{3k^2 m_1 m_i R_1^2}{2r_i^3} [J_2(x_i^2 + y_i^2) + 2C_{22}(x_i^2 - y_i^2)]\tag{15}$$

Usando a definição do momento conjugado L_0 , da anomalia média de C2, reescreve-se U_{22} :

$$U_{22} = \frac{3k^2 m_1 m_2 R_1^2 \mu_0^3}{2L_0^6} \left(\frac{a}{r}\right)^3 [J_2(x^2 + y^2) + 2C_{22}(x^2 - y^2)]\tag{16}$$

Para a interação de segunda ordem C1-C3, omite-se os termos fatorados por C_{22} , uma vez que não há ressonância do tipo spin-órbita para este par. Será demonstrado *a posteriori* que os termos ressonantes spin-órbita são provenientes da parcela do potencial devido ao C_{22} , sendo que termos fatorados por J_2 não contribuem para a ressonância spin-órbita, pois a combinação $x^2 + y^2$ nas fórmulas (15) e (16), quando escrita explicitamente nas variáveis de Andoyer, não depende do

parâmetro I .

$$U_{\odot 2} = \frac{3k^2 m_1 m_{\odot} R_1^2}{2a_{\odot}^3} \left(\frac{a_{\odot}}{r_{\odot}} \right)^3 J_2 (x_{\odot}^2 + y_{\odot}^2) \quad (17)$$

Aqui (x, y, z) e $(x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot})$ são as componentes cartesianas do vetor com origem em C1, que aponta para o corpo C2 e C3, respectivamente. O plano oxy coincide com o plano equatorial de C1 e C_{22} é o coeficiente de achatamento de C1.

Dado um sistema de eixos OXYZ, no centro de massa de C1, relaciona-se o sistema equatorial com o inercial através de 5 rotações, empregando-se os ângulos de Andoyer (Anexo A):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_f = T_3(l) T_1(J) T_3(g) T_1(K) T_3(h) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_e \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} x_{\odot} \\ y_{\odot} \\ z_{\odot} \end{pmatrix}_f = T_3(l) T_1(J) T_3(g) T_1(K) T_3(h) \begin{pmatrix} X_{\odot} \\ Y_{\odot} \\ Z_{\odot} \end{pmatrix}_e \quad (19)$$

Expressam-se também as coordenadas cartesianas dos corpos C2 e C3 em função dos elementos orbitais (BROUWER; CLEMENCE, 1961):

$$\begin{aligned} X &= \cos(f + \omega) \cos(\Omega) - \sin(f + \omega) \sin \Omega \cos I \\ Y &= \cos(f + \omega) \sin(\Omega) + \sin(f + \omega) \cos \Omega \cos I \\ Z &= \sin(f + \omega) \sin I \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
X_{\odot} &= \cos(f_{\odot} + \omega_{\odot}) \cos(\Omega_{\odot}) - \sin(f_{\odot} + \omega_{\odot}) \sin \Omega_{\odot} \cos I_{\odot} \\
Y_{\odot} &= \cos(f_{\odot} + \omega_{\odot}) \sin(\Omega_{\odot}) + \sin(f_{\odot} + \omega_{\odot}) \cos \Omega_{\odot} \cos I_{\odot} \\
Z_{\odot} &= \sin(f_{\odot} + \omega_{\odot}) \sin I_{\odot}
\end{aligned} \tag{21}$$

Para a obtenção de U_{22} e U_{02} como função dos elementos orbitais $(a, e, I, \Omega, \omega)$ e $(a_{\odot}, e_{\odot}, I_{\odot}, \Omega_{\odot}, \omega_{\odot})$, da anomalia verdadeira f e $f_{\odot}$ e das variáveis canônicas de Andoyer transformadas $(\lambda_1, \lambda_3, \Lambda_1, \Lambda_3)$, aplicam-se as equações (18) e (20) em (16) e (19) e (21) em (17), respectivamente.

No caso C1-C3, expressão (17), toma-se a expansão da anomalia verdadeira $f_{\odot}$ e de $(a_{\odot}/r_{\odot})^3$ em potências da excentricidade até ordem 4 ($i=\odot$) (BROUWER; CLEMENCE, 1961; MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$\begin{aligned}
f_i = l_{0i} + \left(2e_i - \frac{1}{4}e_i^3\right) \sin(l_{0i}) + \left(\frac{5}{4}e_i^2 - \frac{11}{24}e_i^4\right) \sin(2l_{0i}) + \frac{13}{12}e_i^3 \sin(3l_{0i}) \\
+ \frac{103}{96}e_i^4 \sin(4l_{0i})
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_i}{r_i}\right)^3 = 1 + 3\cos(l_0)e_i + \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2}\cos(2l_0)\right)e_i^2 + \left(\frac{27}{8}\cos(l_0) + \frac{53}{8}\cos(3l_0)\right)e_i^3 + \\
+ \left(\frac{15}{8} + \frac{7}{2}\cos 2l_0 + \frac{77}{8}\cos 4l_0\right)e_i^4
\end{aligned} \tag{23}$$

Deste modo, $U_{2\odot}$ está inteiramente escrito em função dos elementos orbitais $(a_{\odot}, e_{\odot}, I_{\odot}, \omega_{\odot}, \Omega_{\odot})$, das variáveis canônicas de Andoyer transformadas $(\lambda_1, \lambda_3, \Lambda_1, \Lambda_3)$ e da anomalia média $l_{0\odot}$. A anomalia média $l_{0\odot}$ é calculada diretamente por meio da terceira Lei de Kepler:

$$n_{\odot} = \sqrt{\frac{k^2(m_1 + m_{\odot})}{a_{\odot}^3}} \tag{24}$$

$$l_{0\odot} = n_{\odot}(t - t_0) \quad (25)$$

Onde o semieixo $a_{\odot}$ é mantido constante durante a evolução do sistema e $U_{\odot 2}$ toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
U_{\odot 2} = & + \frac{3k^2 m_1 m_{\odot} R_1^2 J_2}{2a_{\odot}^3} \left(\frac{a_{\odot}}{r_{\odot}} \right)^3 \\
& \left[\frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I_{\odot}) \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(I_{\odot}) \cos(\lambda_3 + \Omega_{\odot}) \right. \\
& - \frac{1}{4} \cos(I_{\odot})^2 + \frac{1}{4} \cos(I_{\odot})^2 \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot}) - \frac{1}{4} \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot}) \\
& - \frac{1}{4} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} + \frac{3}{4} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot}) \\
& - \frac{3}{4} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I_{\odot})^2 \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot}) + \frac{3}{4} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I_{\odot})^2 \\
& + \frac{1}{8} \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\lambda_3 - 2\Omega_{\odot}) + \frac{1}{8} \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\lambda_3 + 2\Omega_{\odot}) \\
& + \frac{1}{8} \cos(I_{\odot})^2 \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\lambda_3 + 2\Omega_{\odot}) + \frac{1}{8} \cos(I_{\odot})^2 \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\lambda_3 - 2\Omega_{\odot}) \\
& + \frac{1}{4} \cos(I_{\odot}) \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\lambda_3 + 2\Omega_{\odot}) - \frac{1}{4} \cos(I_{\odot}) \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\lambda_3 - 2\Omega_{\odot}) \\
& - \frac{1}{8} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\lambda_3 + 2\Omega_{\odot}) \\
& - \frac{1}{8} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\lambda_3 - 2\Omega_{\odot}) \\
& - \frac{1}{8} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I_{\odot})^2 \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\lambda_3 + 2\Omega_{\odot}) \\
& - \frac{1}{8} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I_{\odot})^2 \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\lambda_3 - 2\Omega_{\odot}) \\
& - \frac{1}{4} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I_{\odot}) \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\lambda_3 + 2\Omega_{\odot}) \\
& + \frac{1}{4} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I_{\odot}) \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\lambda_3 - 2\Omega_{\odot}) \\
& - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(I_{\odot}) \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(\Omega_{\odot} + 2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + \lambda_3) \\
& + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(I_{\odot}) \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(-\Omega_{\odot} + 2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - \lambda_3) \\
& - \frac{1}{2} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I_{\odot}) \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(I_{\odot}) \cos(\Omega_{\odot} + 2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + \lambda_3) \\
& - \frac{1}{2} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I_{\odot}) \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(I_{\odot}) \cos(-\Omega_{\odot} + 2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - \lambda_3) \\
& + \frac{1}{4} \cos(2\lambda_3 + 2\Omega_{\odot}) - \frac{1}{4} \cos(I_{\odot})^2 \cos(2\lambda_3 + 2\Omega_{\odot}) - \frac{1}{4} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(2\lambda_3 + 2\Omega_{\odot}) \\
& \left. + \frac{1}{4} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I_{\odot})^2 \cos(2\lambda_3 + 2\Omega_{\odot}) \right]
\end{aligned} \tag{26}$$

Nas variáveis adotadas, o corpo C1 está em ressonância spin-órbita 1 : 1 com o corpo C2 quando a seguinte condição é satisfeita:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d(\omega + \Omega + l_0)}{dt} \quad (27)$$

Para o estudo desta ressonância entre os corpos C1 e C2, definimos a nova variável canônica:

$$\sigma_1 = \lambda_1 - l_0 \quad (28)$$

Para manter a transformação canônica, o momento conjugado da anomalia média l_0 toma a seguinte forma:

$$\Lambda_0 = L_0 + \Lambda_1 \quad (29)$$

As equações (27), (28) e (29) foram baseadas em D'HOEDT & LEMAITRE (2004). Aplica-se (28) e (29) em U_{22} e faz-se uma média na anomalia média l_0 a fim de se obter a energia potencial gravitacional de 2ª ordem do par C1-C2 de longo período, preservando os cossenos ressonantes fatorados por C_{22} :

$$\langle U_{22} \rangle = \frac{3k^2 m_1 m_2 R_1^2 u_0^3}{2(\Lambda_0 - \Lambda_1)^6} \left(\frac{1}{2\pi} \right) \left[J_2 \int_0^{2\pi} \frac{(1 + e \cos f)}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} (x_i^2 + y_i^2) df + 2C_{22} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r} \right)^3 (x_i^2 - y_i^2) dl_0 \right] \quad (30)$$

Para o primeiro termo da expressão acima utilizou-se da expressão (5) para realizar diretamente a média na anomalia verdadeira f . No segundo termo utiliza-se as expansões dadas nas expressões (22) e (23), limitando apenas aos termos de terceira ordem na excentricidade e . Deste modo obtém-se apenas os cossenos com

as combinações ressonantes (referente ao *Cassini State* (NOYELLES; LEMAITRE; VIENNE, 2008)):

$$\sigma_{11} = \sigma_1 - \omega - \Omega \quad (31)$$

Justifica-se a seguinte decomposição:

$$\langle U_{22} \rangle = \langle U_{22}^{J_2} \rangle + \langle U_{22}^{C_{22}} \rangle_{11} \quad (32)$$

Onde o primeiro termo do lado direito da equação acima representam aqueles fatorados por J_2 e o último aqueles fatorados por C_{22} .

Abaixo escrevemos as expressões dos termos da decomposição de U_{22} médio (com seus n-índices), restrito apenas aos termos de longo período e ressonantes (spin-órbita):

$$\begin{aligned} \langle U_{22}^{J_2} \rangle = & \frac{3}{2} \frac{k^2 m_1 m_2 R_1^2 \mu_0^3 J_2}{(\Lambda_0 - \Lambda_1)^6 (1 - e^2)^{3/2}} \left[\right. \\ & - \frac{1}{4} \frac{(\Lambda_{11} - \Lambda_{31})^2}{\Lambda_{11}^2} + \frac{3}{4} \frac{(\Lambda_{11} - \Lambda_{31})^2}{\Lambda_{11}^2} \cos(I)^2 \\ & + \left(1 - \frac{(\Lambda_{11} - \Lambda_{31})^2}{\Lambda_{11}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(I) \frac{(\Lambda_{11} - \Lambda_{31})}{\Lambda_{11}} \cos(I) \cos(\lambda_{31} + \Omega) \\ & + \frac{1}{4} \frac{(\Lambda_{11} - \Lambda_{31})^2}{\Lambda_{11}^2} \cos(I)^2 \cos(2\lambda_{31} + 2\Omega) - \frac{1}{4} \cos(I)^2 \cos(2\lambda_{31} + 2\Omega) \\ & \left. - \frac{1}{4} \frac{(\Lambda_{11} - \Lambda_{31})^2}{\Lambda_{11}^2} \cos(2\lambda_{31} + 2\Omega) + \frac{1}{4} \cos(2\lambda_{31} + 2\Omega) \right] \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle U_{22}^{C_{22}} \rangle_{11} = & \frac{3k^2 m_1 m_2 R_1^2 \mu_0^3 C_{22}}{(\Lambda_0 - \Lambda_1)^6} \left[+\frac{1}{8} \cos(-2\sigma_1 - 2\lambda_3 + 2\omega) \right. \\
& +\frac{1}{16} \cos(-2\sigma_1 + 2\omega + 2\Omega) \\
& +\frac{1}{16} \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 + 2\omega - 2\Omega) \\
& -\frac{1}{16} e^2 \cos(-2\sigma_1 - 2\lambda_3 + 2\omega) \\
& +\frac{1}{16} e^2 \cos(-2\sigma_1 - 2\lambda_3) \\
& -\frac{1}{32} e^2 \cos(-2\sigma_1 + 2\omega + 2\Omega) \\
& -\frac{1}{32} e^2 \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 + 2\omega - 2\Omega) \\
& +\frac{1}{32} e^2 \cos(-2\sigma_1 + 2\Omega) \\
& +\frac{1}{32} e^2 \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 - 2\Omega) \\
& -\frac{1}{8} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 - 2\lambda_3 + 2\omega) \\
& +\frac{1}{16} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 + 2\omega + 2\Omega) \\
& +\frac{1}{16} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 + 2\omega - 2\Omega) \\
& -\frac{1}{8} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 + 2\omega - 2\Omega) \\
& +\frac{1}{8} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 + 2\omega + 2\Omega) \\
& +\frac{1}{16} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(-2\sigma_1 - 2\lambda_3 + 2\omega) \\
& -\frac{1}{8} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(-2\sigma_1 - 2\lambda_3 + 2\omega) \\
& -\frac{1}{16} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(-2\sigma_1 - 2\lambda_3) \\
& -\frac{1}{16} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(-2\sigma_1 + 2\omega + 2\Omega) \\
& -\frac{1}{32} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 + 2\omega - 2\Omega) \\
& \left. +\frac{1}{16} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 + 2\omega - 2\Omega) \right]
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{32}e^2\frac{(\Lambda_1-\Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\cos(-2\sigma_1+2\omega+2\Omega) \\
& +\frac{1}{16}\frac{(\Lambda_1-\Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\cos(-2\sigma_1+2\omega+2\Omega) \\
& +\frac{1}{16}\frac{(\Lambda_1-\Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\cos(-2\sigma_1-4\lambda_3+2\omega-2\Omega) \\
& -\frac{1}{8}\frac{(\Lambda_1-\Lambda_3)}{\Lambda_1}\cos(-2\sigma_1-4\lambda_3+2\omega-2\Omega) \\
& +\frac{1}{8}\frac{(\Lambda_1-\Lambda_3)}{\Lambda_1}\cos(-2\sigma_1+2\omega+2\Omega) \\
& -\frac{1}{16}e^2\frac{(\Lambda_1-\Lambda_3)}{\Lambda_1}\cos(-2\sigma_1-4\lambda_{31}-2\Omega) \\
& +\frac{1}{16}e^2\frac{(\Lambda_1-\Lambda_3)}{\Lambda_1}\cos(-2\sigma_1+2\Omega) \\
& +\frac{1}{32}e^2\frac{(\Lambda_1-\Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\cos(-2\sigma_1+2\Omega) \\
& +\frac{1}{32}e^2\frac{(\Lambda_1-\Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\cos(-2\sigma_1-4\lambda_3-2\Omega) \\
& +\frac{1}{16}e^2\cos(I)^2\cos(-2\sigma_1-2\lambda_3) \\
& +\frac{1}{16}e^2\cos(I)^2\cos(-2\sigma_1-2\lambda_3+2\omega) \\
& -\frac{1}{32}e^2\cos(I)^2\cos(-2\sigma_1-4\lambda_3+2\omega-2\Omega) \\
& +\frac{1}{16}e^2\cos(I)\cos(-2\sigma_1-4\lambda_3+2\omega-2\Omega) \\
& -\frac{1}{32}e^2\cos(I)^2\cos(-2\sigma_1+2\omega+2\Omega) \\
& -\frac{1}{16}e^2\cos(I)\cos(-2\sigma_1+2\omega+2\Omega) \\
& -\frac{1}{32}e^2\cos(I)^2\cos(-2\sigma_1+2\Omega) \\
& -\frac{1}{32}e^2\cos(I)^2\cos(-2\sigma_1-4\lambda_3-2\Omega) \\
& -\frac{1}{16}e^2\frac{(\Lambda_1-\Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\cos(I)^2\cos(-2\sigma_1-2\lambda_3+2\omega) \\
& -\frac{1}{16}e^2\frac{(\Lambda_1-\Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\cos(I)^2\cos(-2\sigma_1-2\lambda_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 - 2\lambda_3 + 2\omega) \\
& - \frac{1}{16} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 + 2\omega + 2\Omega) \\
& + \frac{1}{16} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 + 2\omega - 2\Omega) \\
& - \frac{1}{16} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 + 2\omega + 2\Omega) \\
& + \frac{1}{16} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 + 2\omega - 2\Omega) \\
& - \frac{1}{32} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 + 2\omega + 2\Omega) \\
& - \frac{1}{32} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 + 2\omega - 2\Omega) \\
& - \frac{1}{8} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 + 2\omega + 2\Omega) \\
& - \frac{1}{8} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 + 2\omega - 2\Omega) \\
& - \frac{1}{16} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 + 2\Omega) \\
& + \frac{1}{16} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 - 2\Omega) \\
& - \frac{1}{32} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 + 2\Omega) \\
& - \frac{1}{32} e^2 \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 - 2\Omega) \\
& + \frac{1}{16} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 + 2\omega + 2\Omega) \\
& + \frac{1}{16} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 + 2\omega - 2\Omega) \\
& + \frac{1}{4} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 + 2\omega + 2\Omega) \\
& + \frac{1}{4} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 + 2\omega - 2\Omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 + 2\omega - 2\Omega) \\
& + \frac{1}{8} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 + 2\omega + 2\Omega) \\
& - \frac{1}{8} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 - 4\lambda_3 + 2\omega - 2\Omega) \\
& + \frac{1}{8} \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I)^2 \cos(-2\sigma_1 + 2\omega + 2\Omega) \\
& - \frac{1}{8} e^2 \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right) \sin(I)^2 \cos(-2\sigma_1 - 2\lambda_3 + 2\omega) \\
& - \frac{1}{8} e^2 \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right) \sin(I)^2 \cos(-2\sigma_1 - 2\lambda_3) \\
& + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right) \sin(I)^2 \cos(-2\sigma_1 - 2\lambda_3 + 2\omega) \\
& - \frac{1}{8} e^2 \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \cos(-2\sigma_1 - \lambda_3 + 2\omega + \Omega) \\
& - \frac{1}{8} e^2 \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \cos(-2\sigma_1 - 3\lambda_3 + 2\omega - \Omega) \\
& + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \cos(-2\sigma_1 - \lambda_3 + 2\omega + \Omega) \\
& + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \cos(-2\sigma_1 - 3\lambda_3 + 2\omega - \Omega) \\
& - \frac{1}{8} e^2 \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(-2\sigma_1 - \lambda_3 + 2\omega + \Omega) \\
& + \frac{1}{8} e^2 \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(-2\sigma_1 - 3\lambda_3 + 2\omega - \Omega) \\
& - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(-2\sigma_1 - 3\lambda_3 + 2\omega - \Omega) \\
& + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(-2\sigma_1 - \lambda_3 + 2\omega + \Omega) \\
& - \frac{1}{8} e^2 \cos(I) \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \cos(-2\sigma_1 - \lambda_3 + 2\omega + \Omega) \\
& + \frac{1}{8} e^2 \cos(I) \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \cos(-2\sigma_1 - 3\lambda_3 + 2\omega - \Omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8}e^2 \cos(I) \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \cos(-2\sigma_1 - \lambda_3 + \Omega) \\
& + \frac{1}{8}e^2 \cos(I) \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \cos(-2\sigma_1 - 3\lambda_3 - \Omega) \\
& - \frac{1}{4} \cos(I) \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \cos(-2\sigma_1 - 3\lambda_3 + 2\omega - \Omega) \\
& + \frac{1}{4} \cos(I) \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \cos(-2\sigma_1 - \lambda_3 + 2\omega + \Omega) \\
& - \frac{1}{8}e^2 \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 - \lambda_3 + 2\omega + \Omega) \\
& - \frac{1}{8}e^2 \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 - 3\lambda_3 + 2\omega - \Omega) \\
& - \frac{1}{8}e^2 \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 - \lambda_3 + \Omega) \\
& - \frac{1}{8}e^2 \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 - 3\lambda_3 - \Omega) \\
& + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 - \lambda_3 + 2\omega + \Omega) \\
& + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)^2}{\Lambda_1^2}\right)^{1/2} \sin(I) \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_3)}{\Lambda_1} \cos(I) \cos(-2\sigma_1 - 3\lambda_3 + 2\omega - \Omega) \Big]
\end{aligned}$$

Para obter a evolução dos parâmetros orbitais e rotacionais basta integrar numericamente as equações de (11), relativas ao movimento orbital de C2 em torno de C1 e as equações de Hamilton, relativas a atitude de C1 e anomalia média de C2, isto é:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_1}{dt} &= \frac{\partial \langle H_R \rangle}{\partial \Lambda_1} & \frac{d\Lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial \langle H_R \rangle}{\partial \sigma_1} \\
\frac{d\lambda_3}{dt} &= \frac{\partial \langle H_R \rangle}{\partial \Lambda_3} & \frac{d\Lambda_3}{dt} &= -\frac{\partial \langle H_R \rangle}{\partial \lambda_3}
\end{aligned} \tag{35}$$

Observa-se que agora I_0 é coordenada cíclica, portanto seu momento conjugado Λ_0 é constante no tempo. Reitera-se que $\langle H_R \rangle$ é a média de H_R na anomalia média de C2, dado na expressão (14).

A variável canônica σ_1 contém l_0 implicitamente, de modo que, quando se faz a média em l_0 de H_R , apenas cossenos com combinações ressonantes spin-órbita do tipo 1:1 se mantêm no termo de 2ª ordem da energia potencial oriunda da interação gravitacional C1-C2:

$$\langle H_R \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_R dl_0 = -\frac{\mu_0^2}{2(\Lambda_0 - \Lambda_1)^2} + \frac{\Lambda_1^2}{2C} - \langle U_{22}^{J_2} \rangle - \langle U_{22}^{C_{22}} \rangle - U_{\odot 2} \quad (36)$$

Onde $\langle U_{22}^{J_2} \rangle$ e $\langle U_{22}^{C_{22}} \rangle$ são as energias potenciais gravitacionais médias recém obtidas, livres de termos de curto período contendo só os termos ressonantes σ_{11} e seculares de longo período.

A integração numérica é realizada utilizando o código RA15 de (EVERHART, 1985), onde definimos C1 como Plutão (corpo finito não esférico) e C2 como Caronte (satélite principal de Plutão) e C3 como o Sol. As variações temporais dos elementos orbitais de Caronte (e, l, ω, Ω) são obtidas integrando-se simultaneamente as equações variacionais de Lagrange, explicitadas na expressão (11). A variação temporal da atitude de Plutão e da anomalia média de Caronte é obtida integrando-se as expressões dadas em (35).

Para o Sol, utilizam-se as equações seculares de (DOBROVOLSKIS; PEALE; HARRIS, 1997), que expressam os elementos seculares de Plutão visto de um referencial no Sol, onde o plano OXY é o plano invariável do sistema solar. Como o sistema de referência do problema em questão é plutocêntrico, devemos expressar a posição do Sol relativo a Plutão, isto é feito mediante uma correção no argumento do periastro.

$$\omega_{\odot} = \omega_P + \pi \quad (37)$$

Onde ω_P é o argumento do periastro de Plutão, visto de um referencial no Sol, deste modo:

$$\begin{aligned}
e_{\odot} &= 0,244 + 0,022 \cos \psi + 0,005 \cos 3 \psi \\
\omega_{\odot} &= 90,0^{\circ} + 24,0^{\circ} \sin \psi + 180^{\circ} \\
I_{\odot} &= 15,91^{\circ} - 1,04^{\circ} \cos \psi \\
\Omega_{\odot} &= 111,428^{\circ} - 97,209^{\circ} t - 1,5^{\circ} \sin \psi
\end{aligned} \tag{38}$$

Note que o semieixo maior $a_{\odot}$ do Sol, visto de Plutão, é considerado constante no tempo, assim como de Caronte (ver Quadro 2). Na equação acima, t é dado em milhões de anos (My).

3.4. Condições Iniciais

Para ambos os casos: C_{22} nulo e diferente de zero, tomamos os seguintes valores dos parâmetros físicos e as seguintes condições iniciais:

Quadro 1. Parâmetros físicos. Fontes: (BROZOVIĆ et al., 2015; STERN et al., 2015)

Parâmetros	Valores
$R_1 [km]$	1.187
$R_2 [km]$	606
$k^2 m_1 [km^3 s^{-2}]$	869,6
$k^2 m_2 [km^3 s^{-2}]$	105,88
C_1	$(2/5) m_1 R_p^2$
C_2	$(2/5) m_2 R_c^2$
J_2^1	$1,25 \times 10^{-4}$
C_{22}^1	$3,74 \times 10^{-5}$
J_2^1	$1,36 \times 10^{-4}$
C_{22}^2	$4,09 \times 10^{-5}$

Para um corpo com densidade constante, seguindo as equações de (CHENG; LEE; PEALE, 2014), temos a seguinte relação para o coeficiente de achatamento J_2 (tomando $k_f = 3/2$, para esfera homogênea):

$$J_2^{(i)} = \frac{1}{2} \frac{R_i^3 \Omega_i^2}{k^2 m_i} \quad (39)$$

Considerando ainda o caso hidrostático, o coeficiente C_{22} é (ZHARKOV; LEONTJEV; KOZENKO, 1985):

$$C_{22}^{(i)} = \frac{3}{10} J_2^{(i)} \quad (40)$$

Quadro 2. Condições Iniciais. Fontes: (BINZEL et al., [s.d.]; BROZOVIĆ et al., 2015; STERN et al., 2015)

Parâmetros	Valores
$a [R_p]$	16,5088
$a_\odot [U.A]$	39,482117
$T_1 [d]$	6,3872
$T_2 [d]$	6,3872
e	0,00005
$I_e [^\circ]$ (inclinação orb. relativa a equador)	$7,0 \times 10^{-2}$
$I [^\circ]$ (incl orb. Relativa a fund.)	113,0
$\omega [^\circ]$ (fundamental)	236,86
$\Omega [^\circ]$ (fundamental)	230,08
$K_1 [^\circ]$	113,00
$h_1 [^\circ]$	230,00
ε (obliquidade) $[^\circ]$	120,00

Onde T_1 e T_2 são os períodos de rotação sideral de Plutão e Caronte, respectivamente.

3.5. Resultados para $C_{22} = 0$

Nesta seção, para a dinâmica secular, não serão considerados termos fatorados por C_{22} , assim a hamiltoniana média em I_0 leva apenas os seguintes termos:

$$\langle H_R \rangle = \frac{\Lambda_1^2}{2C} - \langle U_2^{J_2} \rangle - U_{2\odot} \quad (41)$$

Considerando os parâmetros físicos do Quadro 1 e as condições iniciais do Quadro 2, a integração numérica fornece os seguintes resultados (Apêndice E para cálculo da obliquidade):

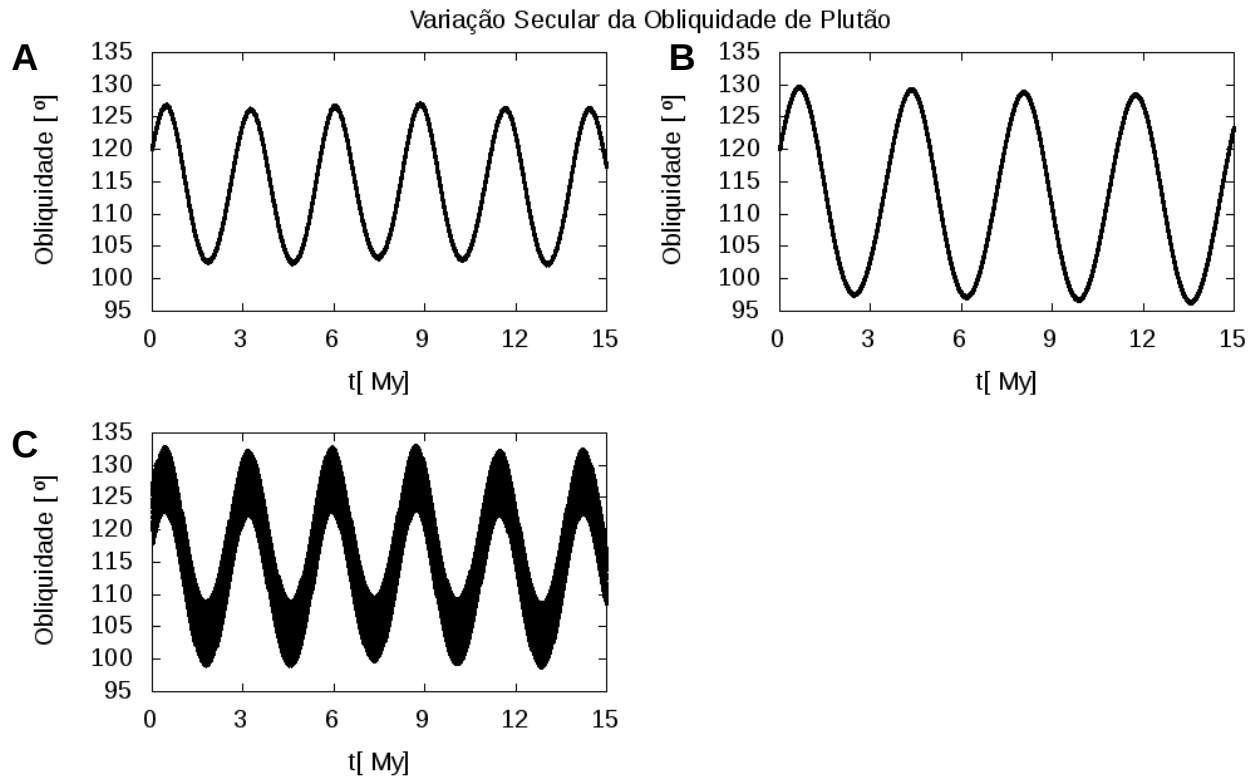


Figura 1. (A) Variação da obliquidade de Plutão quando perturbado por Caronte e Sol. (B) Variação da obliquidade de Plutão quando este é apenas perturbado pelo Sol. (C) Variação da obliquidade de Plutão quando este é perturbado por ambos Caronte e Sol, onde Caronte está em uma órbita com inclinação orbital relativa ao equador de Plutão $I_e = 5^\circ$.

Na Figura 1 vemos como a presença e a configuração orbital de um satélite influencia diretamente na atitude do planeta. No *plot* (A) observa-se que a obliquidade de Plutão varia de aproximadamente 103° a 127° , e também de 103° a 128° em determinados ciclos, com um período de $2,85 \text{ My}$, enquanto que em (B), onde não se considera Caronte, a obliquidade de Plutão varia de aproximadamente 97° a 130° , na primeira oscilação, com um período de aproximadamente $3,75 \text{ My}$. No *plot* (C) temos a variação da obliquidade de Plutão quando Caronte está inicialmente em uma órbita inclinação de 5° em relação ao equador de Plutão, que afeta claramente a amplitude máxima da obliquidade de Plutão.

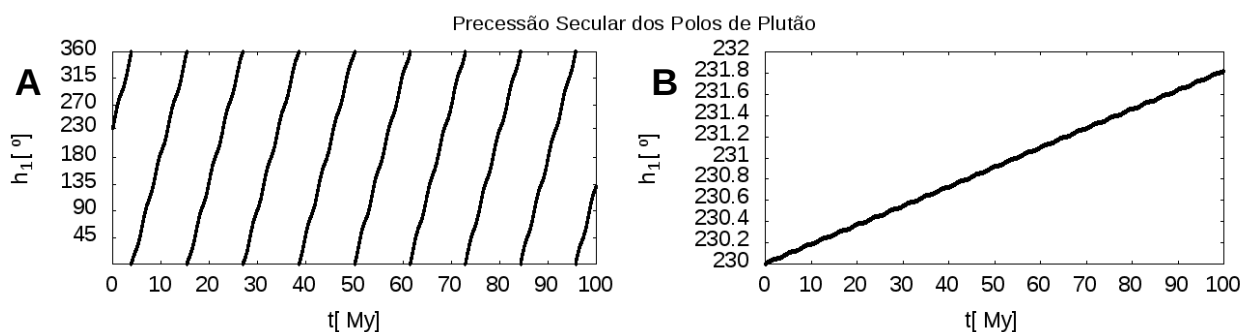


Figura 2. Precessão Secular dos polos de Plutão. (A) Plutão é perturbado por ambos Caronte e Sol. (B) Plutão é perturbado apenas pelo Sol, $m_2=0$.

Nos *plots* (A) e (B) da Figura 2 observa-se a precessão dos polos de Plutão em um período de 100 My . Nota-se que o polo de Plutão completa um ciclo em aproximadamente $11,45 \text{ My}$ quando sofre perturbações de ambos Caronte e Sol, porém, quando anulamos o efeito de Caronte na atitude de Plutão, observa-se que o período de oscilação do Polo de Plutão torna-se muito mais alto.

3.6. Resultados para $C_{22} \neq 0$

Considera-se agora que a Hamiltoniana média em l_0 tem a seguinte forma, em função dos termos já calculados:

$$\langle H_R \rangle = -\frac{\mu_0^2}{2(\Lambda_0 - \Lambda_1)^2} + \frac{\Lambda_1^2}{2C} - \langle U_2^{J_2} \rangle - \langle U_2^{C_{22}} \rangle_{11} - U_{\odot 2} \quad (42)$$

Estuda-se o comportamento do ângulo ressonante definido pela equação (31) e a precessão dos polos do corpo finito C1, definido pela variável de Andoyer h_1 . No *plot* (A) da Figura 3 temos a libração deste ângulo para o caso onde Plutão é o corpo C1 (corpo finito) e Caronte o corpo C2, assim como temos no *plot* (B) desta mesma figura a precessão dos polos de Plutão.

Para o primeiro caso:

$$\begin{aligned} \sigma_{p11} &= l + g + h - (\omega + \Omega + l_0) \\ \sigma_{p11} &= \sigma_1 - \omega - \Omega \end{aligned} \quad (43)$$

Na equação acima, os ângulos de Andoyer são relativos à atitude de Plutão e os elementos orbitais são aqueles de Caronte relativos a um sistema fundamental no centro de massa de Plutão.

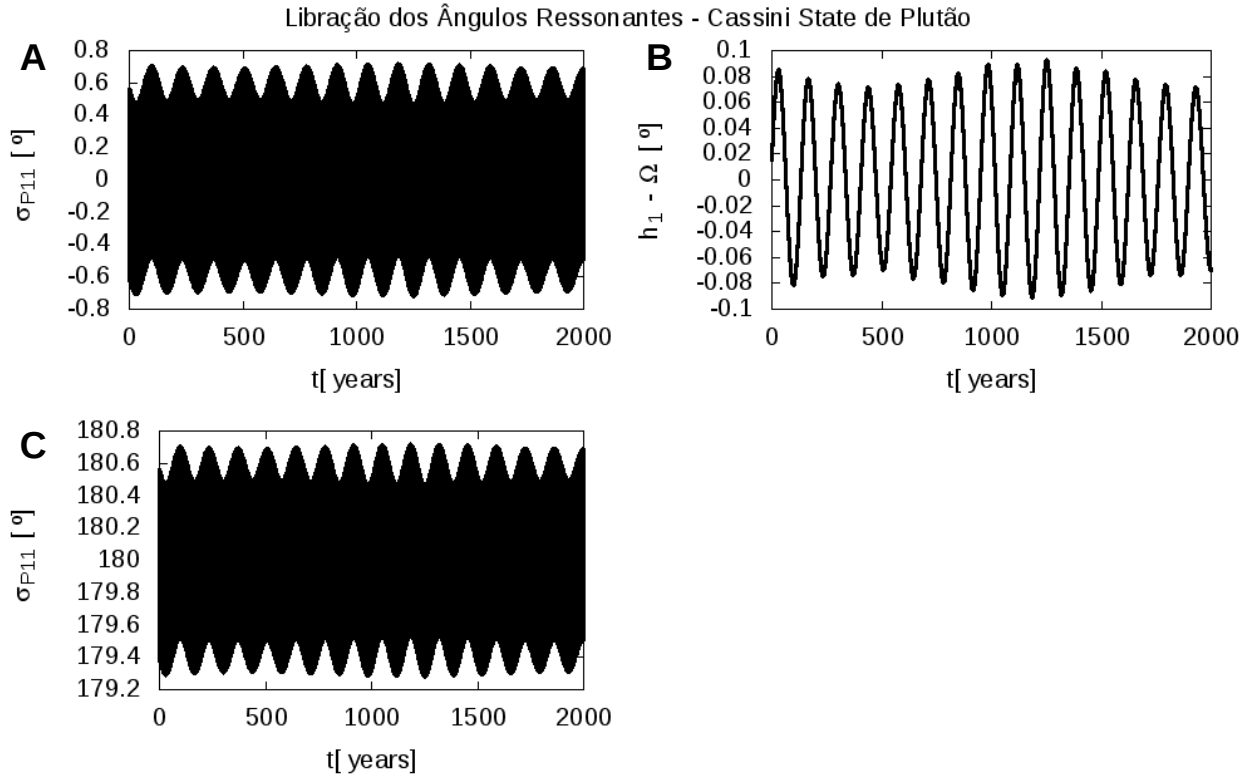


Figura 3. Libração do ângulo ressonante e precessão dos polos de Plutão em um período de 2,0 ky. (A) Libração de σ_{p11} em torno de 0° (B) Libração do ângulo ressonante $h_1 - \Omega$ em torno de 0° . (C) Libração de σ_{p11} em torno de 180° .

Observa-se na Figura acima a libração dos ângulos ressonantes relativos à ressonância spin-órbita 1 : 1 de Plutão em relação a Caronte. Neste cenário Plutão tem o período rotacional igual ao período orbital de Caronte. Os *plots* A e C mostram que o ângulo ressonante de tal sincronismo pode librar em torno de 0° e 180° . A libração do ângulo $(h_1 - \Omega)$, *plot* B, é uma consequência da comensurabilidade entre o movimento rotacional do corpo em questão e o movimento médio de seu satélite. Pode-se inferir que os ângulos representados acima possuem mesmo período de libração.

Para o segundo caso, Caronte é o corpo C1 e Plutão C2, reiterando que C1 é o corpo finito no qual é integrada a atitude:

$$\begin{aligned}\sigma_{c11} &= l + g + h - (\omega + \Omega + l_0) \\ \sigma_{c11} &= \sigma_1 - (\omega + \pi) - \Omega\end{aligned}\tag{44}$$

Na equação acima, os ângulos de Andoyer são relativos à atitude de Caronte e os elementos orbitais são aqueles de Plutão relativos a um sistema fundamental no centro de massa de Caronte. A correção no argumento do periastro ω se deve ao fato de que agora Plutão é visto de um referencial em Caronte.

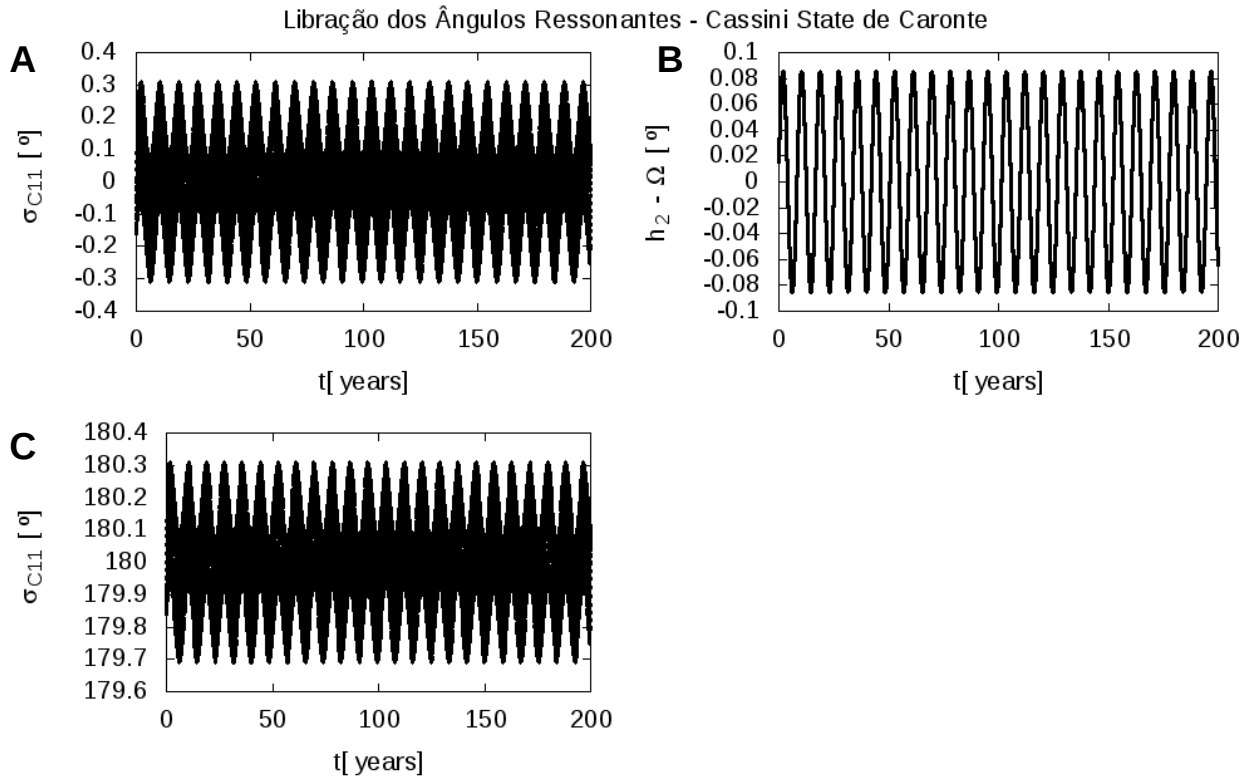


Figura 4. Libração dos ângulos ressonantes referente ao *Cassini State* de Caronte em um período de 200 y. (A) Libração de σ_{C11} em torno de 0° (B) Libração do ângulo ressonante $h_1 - \Omega$ em torno de 0° . (C) Libração de σ_{C11} em torno de 180° .

A Figura acima representa a libração dos ângulos ressonantes relativos à ressonância spin-órbita 1 : 1 de Caronte em relação a Plutão, em outras palavras, Caronte com um período rotacional igual ao período orbital de Plutão em relação a Caronte. Quando comparamos as Figuras 3 e 4, nota-se que os período das librações dos ângulos ressonantes são diferentes, de Caronte sendo mais curto. Isto se deve ao fato de Caronte possuir uma massa menor que a de Plutão ($m_2/m_1 \approx 12\%$), assim a longitude de seu equador libra mais rapidamente.

4. MODELO DINÂMICO 3-D PARA A EVOLUÇÃO DO SISTEMA PLUTÃO-CARONTE

4.1. Objetivos

Obter diferentes figuras de evolução do sistema Plutão-Caronte através de um modelo tridimensional.

4.2. Métodos

Considera-se Plutão e Caronte como corpos finitos não esféricos, ambos com achatamento polar e equatorial, ou seja, J_2 e C_{22} diferente de zero.

O sistema de referência tomado será plutocêntrico, com eixos inerciais, onde o plano OXY é paralelo ao plano invariável do sistema solar.

A interação gravitacional mútua é definida pelo potencial gravitacional e pelas forças de maré, onde para a primeiro, toma-se apenas os termos de até ordem 2 de uma expansão em polinômios de Legendre.

Os efeitos de maré são aqueles dados por (MIGNARD, 1979) e (S. J. PEALE, 2007).

4.3. Equações do movimento

A equação que define o movimento translacional de Caronte em relação a Plutão, considerando efeitos de maré (MIGNARD, 1980; S. J. PEALE, 2007) tem a seguinte forma:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{\mu} \nabla U + \frac{1}{\mu} (\mathbf{F}_{21}^T - \mathbf{F}_{12}^T) \quad (45)$$

Onde U é o potencial gravitacional mútuo para 2 corpos finitos não esféricos, $\mathbf{F}_{21}^T$ é a perturbação em Caronte (corpo C2) devido a maré que este levanta em Plutão (corpo C1), $\mathbf{F}_{12}^T$ a perturbação em Plutão devido a maré que este levanta em Caronte e μ a massa reduzida de Plutão e Caronte: $(m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$.

Estes dois últimos termos têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{21}^T &= - \frac{3k_{21}k^2m_2^2R_1^5}{r^8} \left(\mathbf{r} + \Delta t_1 \left[\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{r^2} + (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}_1 + \mathbf{v}) \right] \right) \\ \mathbf{F}_{12}^T &= + \frac{3k_{22}k^2m_1^2R_2^5}{r^8} \left(\mathbf{r} + \Delta t_2 \left[\frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{r^2} + (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}_2 + \mathbf{v}) \right] \right) \end{aligned} \quad (46)$$

Temos que k_{2i} , $\boldsymbol{\Omega}_i$ e Δt_i representam do corpo i , respectivamente, o número de Love de grau 2, o vetor velocidade angular instantânea e o intervalo de tempo entre a distorção no corpo i e o momento que este atinge a figura de equilíbrio. Este último será tomado como constante.

Para incluir os efeitos de maré na rotação de ambos os corpos serão utilizadas as equações do torque.

Escrevendo as expressões em (46) em termos das componentes cartesianas na base fundamental $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$:

$$(\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}) = \frac{1}{\mu} \nabla(U_0 + U_2) - \frac{1}{\mu} \left[\frac{3k_{21}k^2m_2^2R_1^5}{r^8} (T_{x1}, T_{y1}, T_{z1}) + \frac{3k_{22}k^2m_1^2R_2^5}{r^8} (T_{x2}, T_{y2}, T_{z2}) \right] \quad (47)$$

Onde se define:

$$\begin{aligned} T_{x1} &= X \left[1 + \frac{2\Delta t_1(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r^2} \right] + \Delta t_1 (Y \Omega_{1z} - Z \Omega_{1y} + v_x) \\ T_{y1} &= Y \left[1 + \frac{2\Delta t_1(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r^2} \right] + \Delta t_1 (Z \Omega_{1x} - X \Omega_{1z} + v_y) \\ T_{z1} &= Z \left[1 + \frac{2\Delta t_1(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r^2} \right] + \Delta t_1 (X \Omega_{1y} - Y \Omega_{1x} + v_z) \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} T_{x2} &= X \left[1 + \frac{2\Delta t_2(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r^2} \right] + \Delta t_2 (Y \Omega_{2z} - Z \Omega_{2y} + v_x) \\ T_{y2} &= Y \left[1 + \frac{2\Delta t_2(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r^2} \right] + \Delta t_2 (Z \Omega_{2x} - X \Omega_{2z} + v_y) \\ T_{z2} &= Z \left[1 + \frac{2\Delta t_2(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r^2} \right] + \Delta t_2 (X \Omega_{2y} - Y \Omega_{2x} + v_z) \end{aligned} \quad (49)$$

Note que as componentes do vetor velocidade angular Ω_i estão escritas na base fundamental. O valor dessas variáveis não é conhecido *a priori* mas o seu módulo é, uma vez que depende do período de rotação sideral do corpo em questão.

O vetor Ω_i no sistema fundamental se relaciona com Ω_i no sistema equatorial do corpo i ($J_i = 0$) através da seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{ix} \\ \Omega_{iy} \\ \Omega_{iz} \end{bmatrix}_e = T_3^{-1}(h_i) T_1^{-1}(K_i) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_i \end{bmatrix}_f \quad (50)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_{ix} \\ \Omega_{iy} \\ \Omega_{iz} \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \Omega_i \sin(K_i) \sin(h_i) \\ -\Omega_i \sin(K_i) \cos(h_i) \\ \Omega_i \cos(K_i) \end{bmatrix}_e$$

Por definição, o momento angular de rotação é dado por:

$$G_i \hat{f}_{3i} = \vec{I} \otimes \Omega = \begin{bmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{bmatrix}_{fi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_i \end{bmatrix}_{fi} = C_i \Omega_i \quad (51)$$

É evidente que:

$$\Omega_i = \frac{G_i}{C_i} \quad (52)$$

Aplicando-se (50) e (52) em (49), as equações diferenciais que definem o movimento translacional de Caronte ficam inteiramente escritas como função dos ângulos de Andoyer de Plutão e Caronte e das coordenadas cartesianas (X,Y,Z).

A hamiltoniana de rotação do sistema toma a seguinte forma:

$$H_R = \frac{1}{2} \Omega_1 \cdot G_1 + \frac{1}{2} \Omega_2 \cdot G_2 - U_2 \quad (53)$$

O primeiro e o segundo termo são as já conhecidas energias cinéticas de rotação, deduzidas no Apêndice A. O último termo advém do termo de segunda ordem da expansão do potencial perturbador de dois corpos finitos em polinômios de Legendre e têm a seguinte forma (BROUWER; CLEMENCE, 1961; OLIVEIRA,

2015):

$$U_2 = \frac{k^2 m_2}{r^3} \left[\frac{1}{2} (A_1 + B_1 + C_1) - \frac{3}{2} (A_1 a_1^2 + B_1 b_1^2 + C_1 c_1^2) \right] + \frac{k^2 m_1}{r^3} \left[\frac{1}{2} (A_2 + B_2 + C_2) - \frac{3}{2} (A_2 a_2^2 + B_2 b_2^2 + C_2 c_2^2) \right] \quad (54)$$

Definamos:

- (A_i, B_i, C_i) : Momentos principais de inércia do corpo i (i =Plutão ou Caronte).
- (a_i, b_i, c_i) : Cossenos diretores da linha que une os centros de massa de Plutão e Caronte relativo a um sistema nos eixos principais de inércia do corpo i .

Os cossenos diretores (a_i, b_i, c_i) em função de cossenos diretores dos eixos principais de inércia relativo aos eixos fundamentais é escrito como segue (Apêndice C):

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}_f = \frac{1}{r} T_3(l_i) T_1(J_i) T_3(g_i) T_1(K_i) T_3(h_i) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_e \quad (55)$$

Onde (X, Y, Z) são as coordenadas de Caronte visto de um referencial de eixos fixos no centro de massa de Plutão. Este sistema de eixos fixos é paralelo a um sistema inercial arbitrário. Substituindo (55) em (54) e definindo:

$$\begin{aligned} (I_1^{(i)}, I_2^{(i)}, I_3^{(i)}) &= (A_i, B_i, C_i) \\ (x_1, x_2, x_3) &= (X_2 - X_1, Y_2 - Y_1, Z_2 - Z_1) \\ (X, Y, Z) &= (x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (56)$$

e também:

$$T_3(l_i)T_1(J_i)T_3(g_i)T_1(K_i)T_3(h_i)=\begin{pmatrix} T_{11}^i & T_{12}^i & T_{13}^i \\ T_{21}^i & T_{22}^i & T_{33}^i \\ T_{31}^i & T_{32}^i & T_{33}^i \end{pmatrix} \quad (57)$$

O segundo termo da expansão do potencial toma a forma:

$$U_2=k^2\sum_{\xi=1}^3\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^2\frac{m_i}{2r^3}\left\{I_{\xi}^{(j)}\left[1-3\sum_{\substack{\eta,\zeta=1 \\ \xi\neq\eta}}^3\left(T_{\xi\eta}^{(j)}x_{\eta}\right)^2+T_{\xi\eta}^{(j)}T_{\xi\zeta}^{(j)}x_{\eta}x_{\zeta}\right]\right\} \quad (58)$$

Onde agora:

$$U_2=U_2(l_1,g_1,h_1,L_1,G_1,H_1,l_2,g_2,h_2,L_2,G_2,H_2,X,Y,Z) \quad (59)$$

O potencial está escrito inteiramente em função das variáveis canônicas de Andoyer de Plutão e Caronte e das coordenadas cartesianas.

Fazendo a transformação canônica (13), e tomando J_1 e J_2 iguais a zero:

$$H_R=\frac{\Lambda_{11}}{2C_1}+\frac{\Lambda_{12}}{2C_2}-U_2 \quad (60)$$

O termo de 2ª ordem da energia potencial gravitacional mútua é função destas novas variáveis:

$$U_2=U_2(\lambda_{11,-},\lambda_{31},\Lambda_{11,-},\Lambda_{31},\lambda_{12,-},\lambda_{32},\Lambda_{12,-},\Lambda_{32},X,Y,Z) \quad (61)$$

Ao contrário do capítulo anterior, desta vez, vamos sempre trabalhar com equações exatas (nenhuma média será feita). Mesmo assim vamos tomar ambos J_1 e J_2 iguais a zero, pois isso diminui dois graus de liberdade do problema.

Falta-nos agora inserir as derivadas primeiras da parte rotacional de Plutão e Caronte oriundas dos efeitos de maré que agem mutuamente nos dois corpos.

O momento angular deste sistema de dois corpos é dado por (Apêndice D):

$$\mathbf{L} = M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 \quad (62)$$

E o torque:

$$\mathbf{N} = M \mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}} + \mu \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{G}}_1 + \dot{\mathbf{G}}_2 + \dot{\mathbf{G}}_1^T + \dot{\mathbf{G}}_2^T \quad (63)$$

O terceiro e quarto termo representam as contribuições das forças devido ao potencial gravitacional U_2 no torque no *spin* de Plutão e Caronte, enquanto que os dois últimos representam as contribuições das forças de maré para a variação do momento angular rotacional de Plutão e Caronte.

O torque total durante a evolução do sistema será considerado nulo, assim:

$$\dot{\mathbf{G}}_1 + \dot{\mathbf{G}}_2 + \dot{\mathbf{G}}_1^T + \dot{\mathbf{G}}_2^T + M \mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}} = -\mu \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \quad (64)$$

Substituindo a equação (45) em (64) temos:

$$\dot{\mathbf{G}}_1 + \dot{\mathbf{G}}_2 + \dot{\mathbf{G}}_1^T + \dot{\mathbf{G}}_2^T + M \mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}} = \left(-\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{21}^T \right) + \left(\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{12}^T \right) + \left(-\mathbf{r} \times \nabla U_2 \right) \quad (65)$$

Faz-se a seguinte correspondência:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{G}}_1^T &= -(\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{21}^T) \\ \dot{\mathbf{G}}_2^T &= -(-\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{12}^T)\end{aligned}\quad (66)$$

A primeira/segunda equação de (66) expressa o torque no *spin* de Plutão/Caronte devido às forças de maré. Estas advém da reação do torque na translação de Caronte/Plutão, devido a força de maré, o que justifica o sinal de (-).

Expressa-se a primeira equação de (66) em função de suas componentes na base fundamental:

$$\begin{aligned}\dot{G}_{1x}^T &= \frac{k_{21}k^2m_2^2R_1^5\Delta t_1}{r^8} \left[X^2\Omega_{1x} + XY\Omega_{1y} + XZ\Omega_{1z} - r^2\Omega_{1x} + Y\dot{Z} - Z\dot{Y} \right] \\ \dot{G}_{1y}^T &= \frac{k_{21}k^2m_2^2R_1^5\Delta t_1}{r^8} \left[XY\Omega_{1x} + Y^2\Omega_{1y} + YZ\Omega_{1z} - r^2\Omega_{1y} + Z\dot{X} - X\dot{Z} \right] \\ \dot{G}_{1z}^T &= \frac{k_{21}k^2m_2^2R_1^5\Delta t_1}{r^8} \left[XZ\Omega_{1x} + YZ\Omega_{1y} + Z^2\Omega_{1z} - r^2\Omega_{1z} + X\dot{Y} - Y\dot{X} \right]\end{aligned}\quad (67)$$

Para Caronte, as equações acima são completamente análogas, bastando permutar $1 \rightarrow 2$ e $2 \rightarrow 1$, lembrando que $(\Omega_{ix}, \Omega_{iy}, \Omega_{iz})$ deve ser escrito segundo a expressão (50). Estas equações acima foram também calculadas por CHENG *et al.*, (2014) para o caso bidimensional.

Como $\mathbf{G}_i$ é paralelo a $\mathbf{\Omega}_i$, as componentes do vetor momento angular na base fundamental relacionam-se com o vetor momento angular na base equatorial também da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} G_{ix} \\ G_{iy} \\ G_{iz} \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} G_i \sin(K_i) \sin(h_i) \\ -G_i \sin(K_i) \cos(h_i) \\ G_i \cos(K_i) \end{bmatrix}_e \quad (68)$$

Note que as equações de Hamilton dizem respeito à derivada primeira do módulo do vetor momento angular de rotação, do módulo da projeção do vetor momento angular em $\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{f}_3$, e dos ângulos l, g e h . À partir das equações de (68) obtém-se:

$$\begin{aligned} G_1 &= \sqrt{(G_{1x}^2 + G_{1y}^2 + G_{1z}^2)} \\ H_1 &= G_{1z} \\ h_1 &= \tan^{-1} \left(-\frac{G_{1x}}{G_{1y}} \right) \end{aligned} \quad (69)$$

Derivando no tempo e separando as derivadas correspondentes à variação devido a maré:

$$\begin{aligned} \dot{G}_1^T &= \frac{G_{1x} \dot{G}_{1x}^T + G_{1y} \dot{G}_{1y}^T + G_{1z} \dot{G}_{1z}^T}{\sqrt{G_{1x}^2 + G_{1y}^2 + G_{1z}^2}} \\ h_1^T &= \frac{G_{1x} \dot{G}_{1y}^T - \dot{G}_{1x}^T G_{1y}}{G_{1x}^2 + G_{1y}^2} \\ H_1^T &= \dot{G}_{1z}^T \end{aligned} \quad (70)$$

Escrevendo em função das variáveis canônicas não singulares:

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_{11}^T &= \frac{G_{1x} \dot{G}_{1x}^T + G_{1y} \dot{G}_{1y}^T + G_{1z} \dot{G}_{1z}^T}{\sqrt{G_{1x}^2 + G_{1y}^2 + G_{1z}^2}} \\ \dot{\Lambda}_{31}^T &= \frac{G_{1x} \dot{G}_{1x}^T + G_{1y} \dot{G}_{1y}^T + G_{1z} \dot{G}_{1z}^T}{\sqrt{G_{1x}^2 + G_{1y}^2 + G_{1z}^2}} - \dot{G}_{1z}^T \\ \dot{\lambda}_{31}^T &= -\frac{G_{1x} \dot{G}_{1y}^T - \dot{G}_{1x}^T G_{1y}}{G_{1x}^2 + G_{1y}^2} \end{aligned} \quad (71)$$

Como já temos as expressões para (G_{ix}, G_{iy}, G_{iz}) e $(\dot{G}_{ix}, \dot{G}_{iy}, \dot{G}_{iz})$, as equações acima ficam inteiramente determinadas em função de parâmetros conhecidos.

Incluindo as contribuições da maré nas equações de Hamilton, as equações que definem a atitude de Plutão e Caronte tomam a forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{11}}{dt} &= \frac{\partial H_R}{\partial \Lambda_{11}} & \frac{d\Lambda_{11}}{dt} &= -\frac{\partial H_R}{\partial \Lambda_{11}} + \frac{d\Lambda_{11}^T}{dt} \\ \frac{d\lambda_{31}}{dt} &= \frac{\partial H_R}{\partial \Lambda_{31}} + \frac{d\lambda_{31}^T}{dt} & \frac{d\Lambda_{31}}{dt} &= -\frac{\partial H_R}{\partial \Lambda_{31}} + \frac{d\Lambda_{31}^T}{dt} \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{12}}{dt} &= \frac{\partial H_R}{\partial \Lambda_{12}} & \frac{d\Lambda_{12}}{dt} &= -\frac{\partial H_R}{\partial \Lambda_{12}} + \frac{d\Lambda_{12}^T}{dt} \\ \frac{d\lambda_{32}}{dt} &= \frac{\partial H_R}{\partial \Lambda_{32}} + \frac{d\lambda_{32}^T}{dt} & \frac{d\Lambda_{32}}{dt} &= -\frac{\partial H_R}{\partial \Lambda_{32}} + \frac{d\Lambda_{32}^T}{dt} \end{aligned} \quad (73)$$

A dinâmica de rotação e translação de Plutão e Caronte é dada pela integração numérica das equações (47), (72) e (73), usando o código RA15 (EVERHART, 1985)

Como o momento angular do sistema é constante, as condições iniciais serão aquelas tais que as componentes cartesianas L_x, L_y e L_z do momento angular sejam as mesmas daquelas do sistema atual.

Das expressões em (119) do Apêndice D e utilizando a relação (93) do Apêndice B, considerando $J_1=J_2=0$, expressa-se as componentes do momento angular no sistema fundamental $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$:

$$\begin{aligned} L_x &= \mu n a^2 \sin I \sin \Omega \sqrt{1-e^2} + C_1 \sin K_1 \sin h_1 \Omega_1 + C_2 \sin K_2 \sin h_2 \Omega_2 \\ L_y &= -\mu n a^2 \sin I \cos \Omega \sqrt{1-e^2} - C_1 \sin K_1 \cos h_1 \Omega_1 - C_2 \sin K_2 \cos h_2 \Omega_2 \\ L_z &= \mu n a^2 \cos I \sqrt{1-e^2} + C_1 \cos K_1 \Omega_1 + C_2 \cos K_2 \Omega_2 \end{aligned} \quad (74)$$

Calcula-se L_x, L_y e L_z para o sistema atual utilizando dos valores contidos no quadro abaixo:

Quadro 3. Parâmetros físicos e condições iniciais para cálculo do momento angular. Fontes: (BROZOVIĆ et al., 2015; CHENG; LEE; PEALE, 2014; STERN et al., 2015).

Parâmetros	Valores
$R_1 [km]$	1.187
$R_2 [km]$	606
$k^2 m_1 [km^3 s^{-2}]$	869,6
$k^2 m_2 [km^3 s^{-2}]$	105,88
C_1	$(2/5) m_1 R_p^2$
C_2	$(2/5) m_2 R_c^2$
$a [R_1]$	16,5088
e	0,00005
$I_e [^\circ]$ (relativo a equador)	7×10^{-2} (JPL Horizon)
$I [^\circ]$ (relativo a fundamental)	131,6
$\Omega [^\circ]$ (relativo a fundamental)	49,54
$K_1 [^\circ]$	131.52
$K_2 [^\circ]$	132.02
$h_1 [^\circ]$	50,00
$h_2 [^\circ]$	50,00

Segundo (CANUP, 2005; MCKINNON, 1989; STERN et al., 2006), o cenário mais provável para a origem do sistema Plutão-Caronte foi uma colisão oblíqua de grandes proporções entre corpos de tamanhos similares. Desta possibilidade emergem diferentes cenários para a formação do par. Em um deles (CANUP, 2011), o impacto geraria um satélite (Caronte) quase intacto com excentricidade inicial diferente de zero, acompanhado de um disco de detritos. Neste cenário, o semieixo de Caronte seria menor do que o atual e portanto este evoluiu por efeitos de maré

até o valor atual.

Dado um semieixo maior inicial $a = 4 R_p$ (consistente com a origem do sistema), calcula-se a excentricidade, o módulo da velocidade angular de rotação de Plutão e Caronte através da seguinte relação, conforme as equações em (74):

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1-e^2} \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} \quad (75)$$

onde,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mu n a^2 \sin I \sin \Omega \\ \alpha_2 &= C_1 \sin K_1 \sin h_1 \\ \alpha_3 &= C_2 \sin K_2 \sin h_2 \\ \beta_1 &= -\mu n a^2 \sin I \cos \Omega \\ \beta_2 &= -C_1 \sin K_1 \cos h_1 \\ \beta_3 &= -C_2 \sin K_2 \cos h_2 \\ \gamma_1 &= \mu n a^2 \cos I \\ \gamma_2 &= C_1 \cos K_1 \\ \gamma_3 &= C_2 \cos K_2 \end{aligned} \quad (76)$$

Para o cálculo de J_2^1 e J_2^2 utiliza-se a expressão (39) (tomando $k_f = 3/2$, para esfera homogênea), que reescrito nas novas variáveis toma a seguinte forma:

$$J_2^{(i)} = \frac{1}{2} \frac{R_i^3 \Lambda_{1i}^2}{C_i^2 k^2 m_i} \quad (77)$$

Como o *spin* de ambos Plutão e Caronte evoluem no tempo devido aos efeitos de maré, também o coeficiente de achatamento J_2^i irá variar.

O coeficiente C_{22}^i é calculado pela expressão (40). Vale ressaltar que o coeficiente C_{22}^i é mantido constante durante toda a integração do sistema e é

calculado para o caso em que ambos Plutão e Caronte atingiram o estado final da evolução de maré.

4.4. Condições Iniciais

Considerando $a = 4 R_p$ e utilizando-se das expressões (75) e (76) obtemos uma grade com algumas dezenas de milhares de condições iniciais plausíveis para um cenário no passado. Escolhemos uma destas para realizar a integração numérica. Esta reflete uma possível configuração orbital e rotacional de Caronte após o evento que possivelmente o originou: órbita excêntrica e inclinada (em relação ao equador de Plutão), ambos Plutão e Caronte rotacionando rapidamente e com ambos os equadores dos corpos desalinhados.

Quadro 4. Condições Iniciais para $a = 4 R_p$.

Parâmetros ($t = 0$)	Valores
e	0,14440
$I [^\circ]$	131,50
$I_e [^\circ]$	18,66
$\omega [^\circ]$	273,94
$\Omega [^\circ]$	37,00
$\Omega_1 [n_0]$	4,73
$\Omega_2 [n_0]$	3,36
$K_1 [^\circ]$	131,52
$K_2 [^\circ]$	61,00
$h_1 [^\circ]$	62,00
$h_2 [^\circ]$	45,00
$l_1 [^\circ]$	41,44
$l_2 [^\circ]$	134,94
$g_1 [^\circ]$	41,44
$g_2 [^\circ]$	134,94

Veja que o momento angular de rotação do sistema não depende dos parâmetros rotacionais I_i e g_i , portanto a escolha desses valores foi arbitrária. Os *spins* de Plutão e Caronte estão em unidades referentes ao movimento médio inicial de Caronte, quando sua aproximação é de $4 R_p$.

O Número de Love de 2ª ordem do corpo i ($i=1$ para Plutão e $i=2$ para Caronte) foi calculado segundo a sua expressão aproximada (CHENG; LEE; PEALE, 2014):

$$k_{2i} \approx \frac{3 \rho_i g_i R_i}{19 \mu_i} \quad (78)$$

Onde ρ_i é a densidade volumétrica, g_i o campo gravitacional na superfície do corpo, R_i o raio equatorial e μ_i é a rigidez do corpo i . Juntamente calcula-se o parâmetro $A_{\Delta t}$, que mede a taxa relativa de dissipação de maré em Plutão e Caronte (MIGNARD, 1980):

$$A_{\Delta t} = \frac{k_{22}}{k_{21}} \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^5 \quad (79)$$

Este parâmetro é utilizado como controle do crescimento da excentricidade, do semieixo maior e do *spin* de Plutão (CHENG; LEE; PEALE, 2014), quanto maior o seu valor, menor é o crescimento da excentricidade e do semieixo (para além de seu valor atual).

Deste modo, faz-se as seguintes combinações de valores de maré:

Quadro 5. Parâmetros de Maré adotados no caso 1

Parâmetros de Maré	Valores
k_{21}	0,054
k_{22}	0,054
Δt_1	600 s
Δt_2	600 s
$A_{\Delta t}$	2,34

Acima calculou-se k_{21} considerando-se que a rigidez de Plutão é igual a da água em estado sólido, $\mu = 4,0 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, e adotou-se k_{22} igual ao de Plutão. O *tidal lag* considerado é igual ao da Terra (MIGNARD, 1980).

Quadro 6. Parâmetros de Maré adotados no caso 2

Parâmetros de Maré	Valores
k_{21}	0,054
k_{22}	0,012
Δt_1	600 s
Δt_2	2000 s
$A_{\Delta t}$	1,73

Nesta caso acima, utilizou-se o mesmo valor da rigidez para ambos Plutão e Caronte, adotando um valor maior para o *tidal lag* de Caronte a fim de se controlar crescimento de parâmetros orbitais e rotacionais.

Quadro 7. Parâmetros de Maré adotados no caso 3

Parâmetros de Maré	
k_{21}	0,054
k_{22}	0,208
Δt_1	600 s
Δt_2	600 s
$A_{\Delta t}$	9,0

Para este último caso, adotou-se tais valores dos parâmetros de maré do Quadro acima de forma que a excentricidade fosse mantida constante durante toda a evolução e o semieixo não crescesse além do valor atual.

4.5. Resultados

Nas Figuras 5-13 a seguir, estão representados alguns resultados de possíveis caminhos da evolução do sistema Plutão-Caronte. O objetivo destas figuras é mostrar o comportamento bastante delicado que a excentricidade de Caronte pode apresentar e também a possibilidade de passagem por várias ressonâncias spin-órbita. Estas figuras mostram (confirmam) que o sistema Plutão-Caronte é bastante instável e pode até mesmo causar o escape de Caronte ou outros possíveis satélites que eventualmente poderiam ter existido, mas que foram expulsos, já que Caronte poderia eventualmente ter adquirido alta excentricidade, e posteriormente adquirido excentricidade nula.

4.5.1 Caso 1 – $A_{\Delta t} = 2,34$

Considerando os parâmetros físicos do Quadro 1, as condições iniciais do Quadro 4, os parâmetros de maré do Caso 1, explicitados no Quadro 5, e realizando a integração numérica do sistema, obtém-se as seguintes figuras de evolução para o sistema Plutão-Caronte:

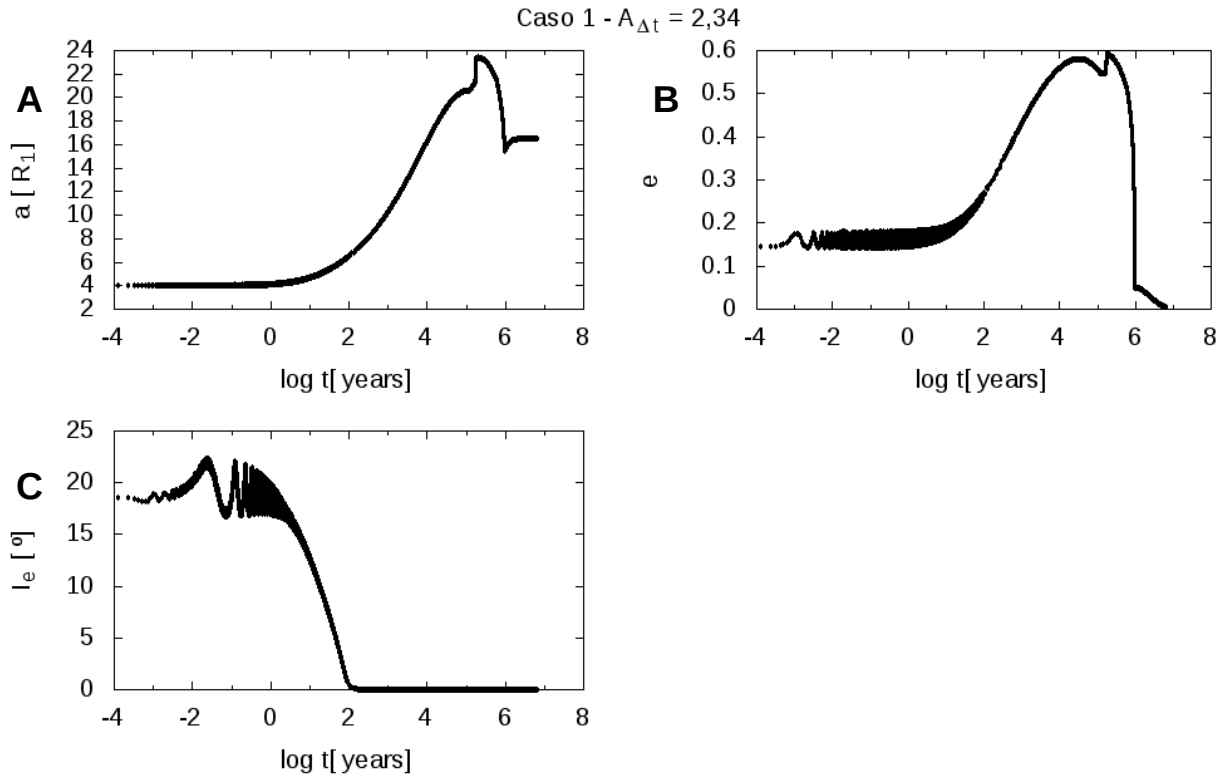


Figura 5. Evolução dos parâmetros orbitais de Caronte para $A_{\Delta t}=2,34$. (A) Variação do semieixo maior de Caronte em unidades de raio equatorial de Plutão; (B) Excentricidade da órbita de Caronte; (C) Inclinação orbital de Caronte relativa a um plano no equador de Plutão.

Na Figura 5, nos *plots* (A) e (B) podemos ver que inicialmente tanto o semieixo quanto a excentricidade da órbita de Caronte crescem até um determinado valor de pico e então começam a convergir até seus valores atuais: $a=16,5$ e $e \approx 0$. Pode-se dizer que o semieixo tem esse crescimento súbito devido ao crescimento da excentricidade, mesmo que este em certo momento tenha atingido seu valor atual, a excentricidade permanece crescendo, forçando o semieixo a crescer conjuntamente. Isto ocorre devido a conservação do momento angular, ver expressão (74).

A inclinação da órbita de Caronte (Figura 5 (C)) se alinha rapidamente ao equador de Plutão, quando comparado a escala de tempo da evolução do sistema.

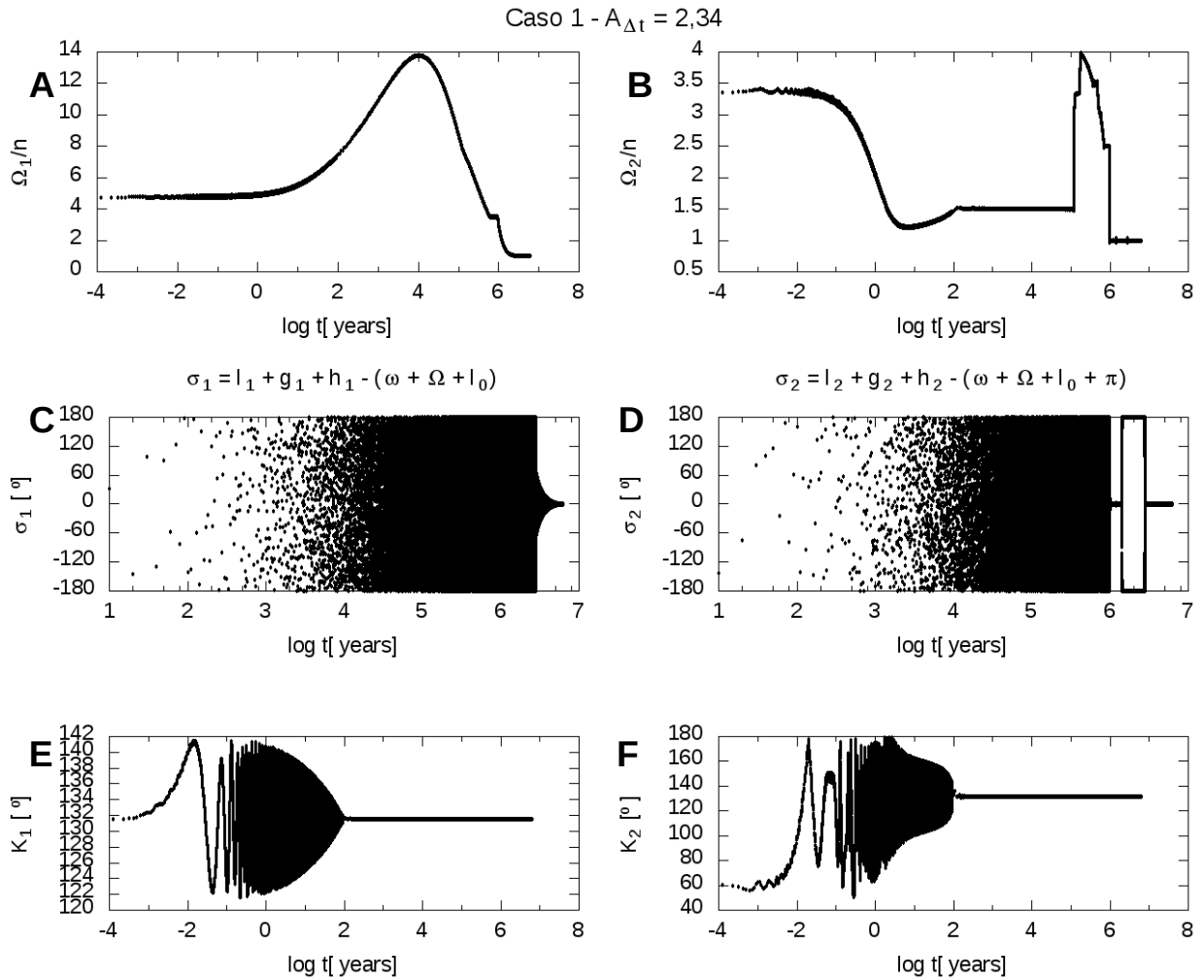


Figura 6. Evolução dos parâmetros rotacionais de ambos Plutão e Caronte para $A_{\Delta t}=2,34$. (A,B) *Spins* de ambos Plutão e Caronte, respectivamente, em unidades de movimento médio de Caronte, ao longo da evolução; (C,D) Ângulo ressonante 1 : 1 de ambos Plutão e Caronte, respectivamente; (E,F) Inclinação dos equadores de Plutão e Caronte em relação ao plano fundamental escolhido, respectivamente.

Os *plots* (A) e (B) da Figura 6 mostram o comportamento do *spin* relativo de Plutão e Caronte, respectivamente. Caronte parece ter sido capturado em diversas ressonâncias spin-órbita durante o período da evolução do sistema, diferente de Plutão, que aparentemente foi capturado apenas na ressonância spin-órbita 7:2. O crescimento inicial dessas curvas se deve ao fato de que o movimento médio decai mais rapidamente que a velocidade angular de rotação dos corpos (n , o movimento médio, está no denominador). Durante o processo de evolução, Caronte parece ter sido capturado nas seguintes ressonâncias spin-órbita: 3:2, 7:2, 3:1 e 5:2.

Ao final da evolução, nos *plots* (C) e (D) da Figura 6, observa-se que os ângulos ressonantes σ_1 e σ_2 , referente ao *cassini state* (NOYELLES; LEMAITRE; VIENNE, 2008), ou melhor, ressonância spin-órbita 1:1 de ambos Plutão e Caronte, iniciam um movimento de libração em torno de 0° e/ou 180°. Primeiramente Caronte

é capturado nesta ressonância, com σ_2 librando em torno de 0° , onde sofre uma mudança no ponto de equilíbrio desta libração, que ao final do processo se estabiliza em 0° , diferente de Plutão, que é capturado posteriormente, com σ_1 librando em torno de 0° .

Nos últimos *plots* da Figura 6, ou seja, em (E) e (F) podemos ver que o equador de Plutão libra em torno de uma posição de equilíbrio, que ao final, tem sua amplitude suavizada pelos efeitos de maré. Caronte, que no início do processo tem seu equador desalinhado em relação ao de Plutão, em um curto intervalo de tempo, tende a ter o seu equador librando em torno do equador de Plutão, onde sua amplitude também se suaviza ao final da evolução. Como o raio equatorial de Caronte é aproximadamente metade do raio equatorial de Plutão, estes processos ocorrem em um curto intervalo de tempo. Vê-se na expressão (67), permutando-se $1 \rightarrow 2$ e $2 \rightarrow 1$, que o torque oriundo dos efeitos de maré em Caronte devido a Plutão é proporcional ao raio equatorial de Caronte elevado a quinta potência.

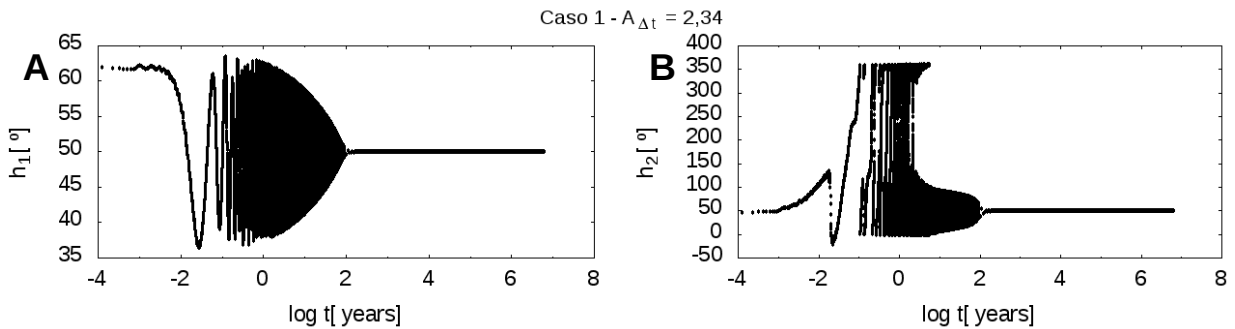


Figura 7. (A,B) Evolução das longitudes do nodo do equador relativo a um eixo inercial, de ambos Plutão e Caronte, respectivamente. Caso $A_{\Delta t} = 2,34$.

Na Figura 7 observamos a longitude dos nodos dos equadores de ambos, Plutão e Caronte, se alinharem em um curto intervalo de tempo, mas antes disso, o equador de Caronte completava diversos ciclos, variando de 0° a 360° . No Quadro 3, das condições iniciais para cálculo do momento angular, tomou-se inicialmente h_1 e h_2 alinhados e depois o sistema foi evoluído com estes ângulos inicialmente desalinhados. Observa-se que as forças de maré tendem a manter o sistema em uma configuração condizente com os valores das componentes do momento angular.

4.5.2 Caso 2 – $A_{\Delta t} = 1,73$

Para este caso, foram tomadas as mesmas condições iniciais e parâmetros físicos do Caso 1, contudo, utilizou-se os parâmetros de maré do Caso 2, explicitados no Quadro 6.

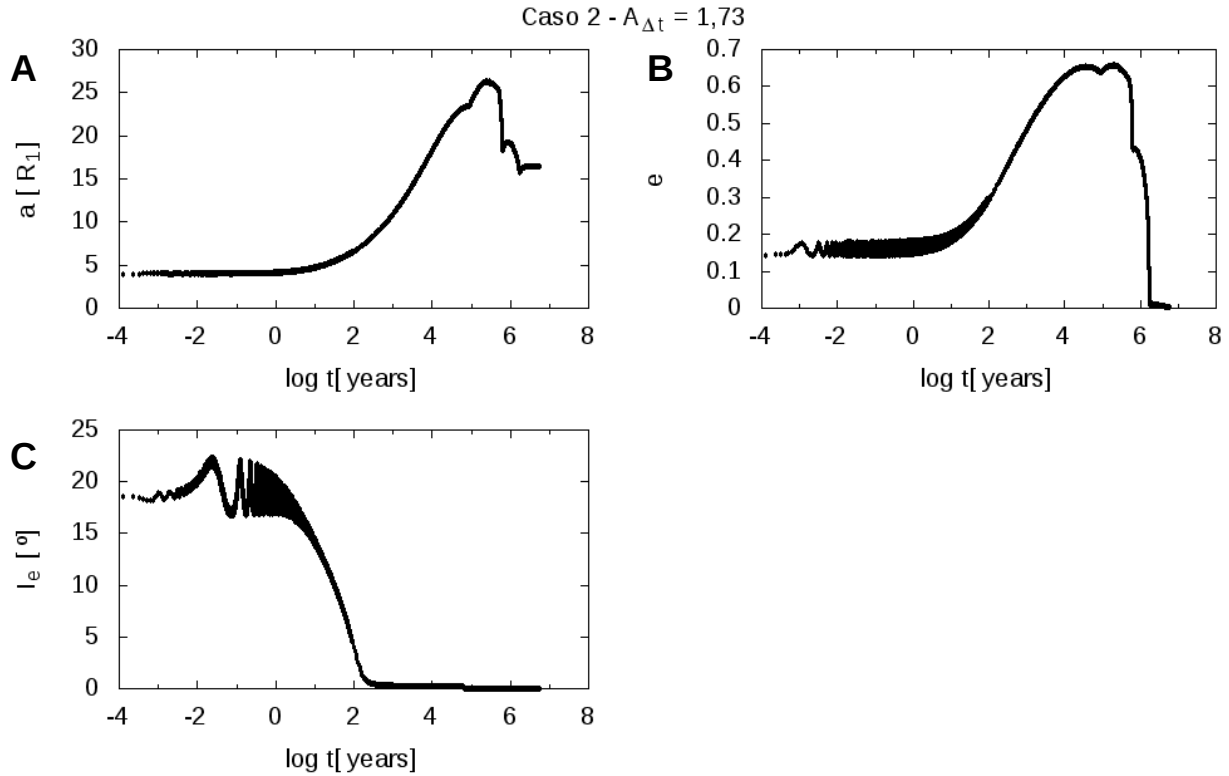


Figura 8. Evolução dos parâmetros orbitais de Caronte para $A_{\Delta t}=1,73$. (A) Variação do semieixo maior de Caronte em unidades de raio equatorial de Plutão; (B) Excentricidade da órbita de Caronte; (C) Inclinação orbital de Caronte relativa a um plano no equador de Plutão.

Neste caso, o parâmetro $A_{\Delta t}$ (taxa relativa de dissipação de maré em Plutão e Caronte) é menor que do Caso 1 ($A_{\Delta t}=2,34$). Pode-se inferir que adotando valores ainda menores de $A_{\Delta t}$, ocasionaria em um crescimento muito elevado do semieixo e da excentricidade, onde a segunda poderia atingir valores próximos de 1. Nestes cenários, das Figuras 5 e 6, onde a órbita de Caronte atinge altas excentricidades, fica evidente a dificuldade de se manter os demais satélites de Plutão estáveis durante a evolução.

Nota-se nos *plots* (A) e (B) da Figura 8 que tanto o semieixo quanto a excentricidade evoluem com diferentes comportamentos dentro do processo

dinâmico. Paralelo a isto, Plutão e Caronte são capturados em diversas ressonâncias spin-órbita, como pode-se verificar nos *plots* (A) e (B) da Figura 9.

Com esta escolha de $A_{\Delta t}$, observamos apenas uma sutil mudança na escala de tempo do alinhamento da órbita de Caronte com o equador de Plutão (Figura 8 (C)).

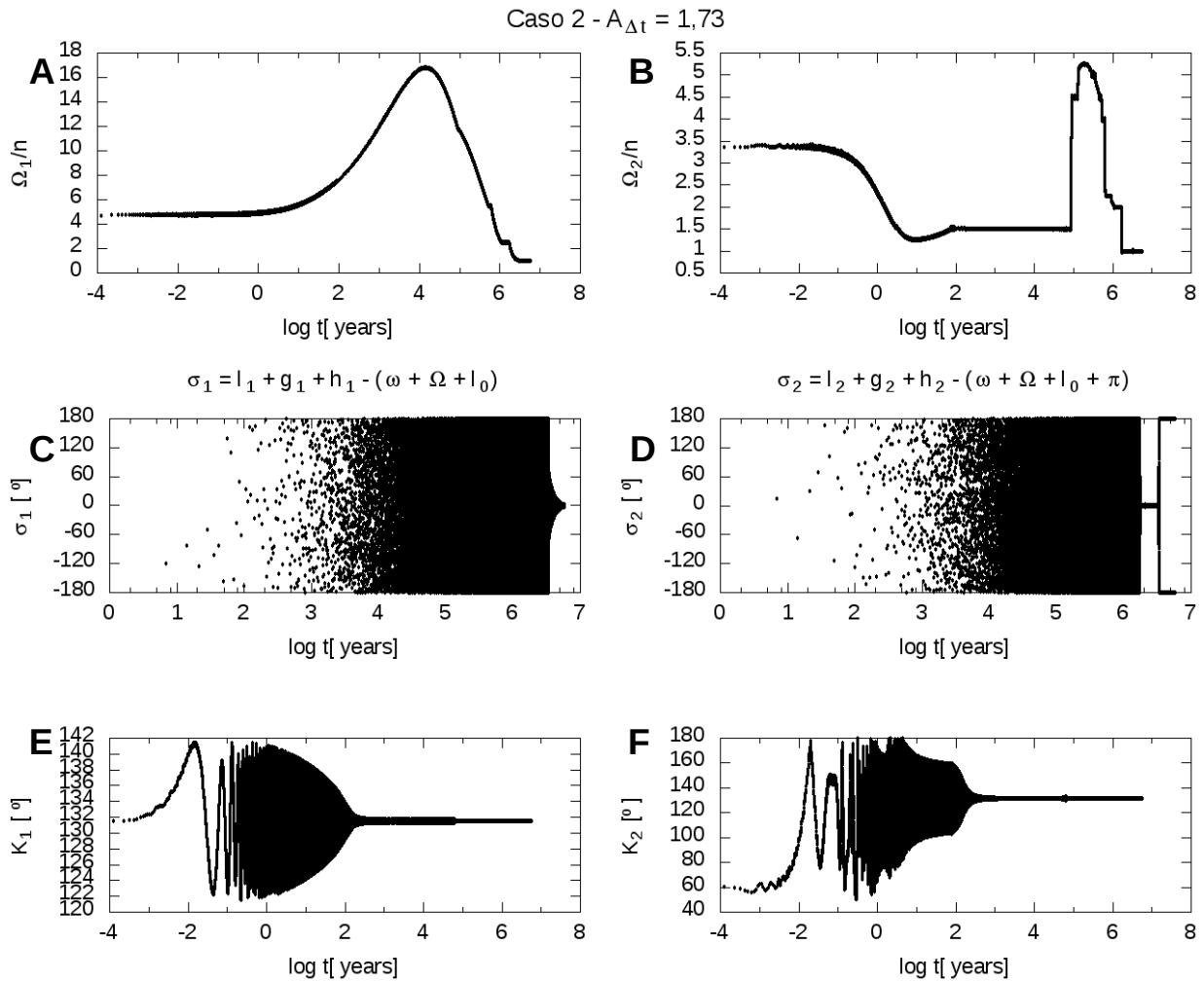


Figura 9. Evolução dos parâmetros rotacionais de ambos Plutão e Caronte para $A_{\Delta t}=1,73$. (A,B) *Spins* de ambos Plutão e Caronte, respectivamente, em unidades de movimento médio de Caronte, ao longo da evolução; (C,D) Ângulo ressonante 1 : 1 de ambos Plutão e Caronte, respectivamente; (E,F) Inclinação dos equadores de Plutão e Caronte em relação ao plano fundamental escolhido, respectivamente.

Com relação à Figura 9, o *spin* relativo de Plutão atinge um valor de pico maior do que no Caso 1, sendo provavelmente capturado em duas ressonâncias spin-órbita: 11:2 e 5:2. Caronte, assim como no caso anterior é capturado em diversas ressonâncias spin-órbita: 3:2, 9:2, 5:1, 19:4, 4:1, 9:4 e 2:1. Observa-se que

ambos os corpos são capturados em diferentes ressonâncias no processo dinâmico antes de atingirem o estado de equilíbrio.

Quanto ao alinhamento dos equadores e o alinhamento dos nodos dos equadores, não é possível notar nenhuma diferença significativa quanto ao período de tempo e comportamento geral da curva (Figura 9 (E,F) e Figura 10 (A,B)).

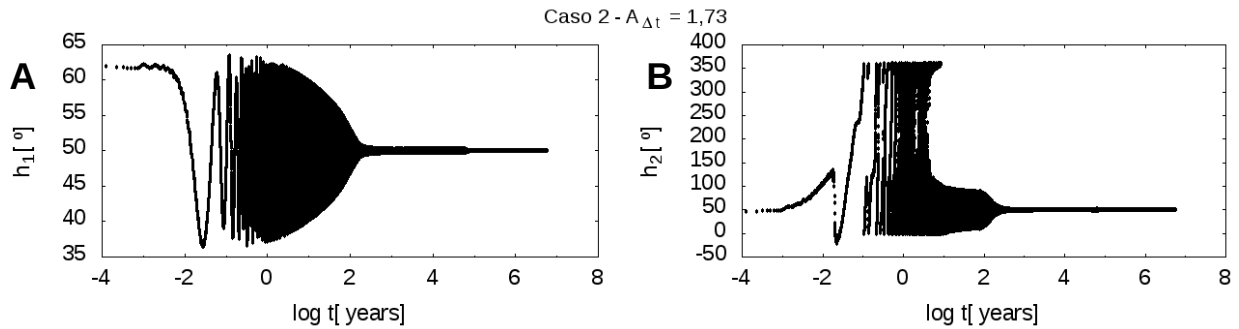


Figura 10. (A,B) Evolução das longitudes do nodo do equador relativo a um eixo inercial, de ambos Plutão e Caronte, respectivamente. Caso $A_{\Delta t} = 1,73$.

4.5.3 Caso 3 – $A_{\Delta t} = 9,0$

Neste último caso, considera-se também as mesmas condições iniciais e parâmetros físicos dos últimos dois casos (Casos 1 e 2) e os parâmetros de maré explicitados no Quadro 7.

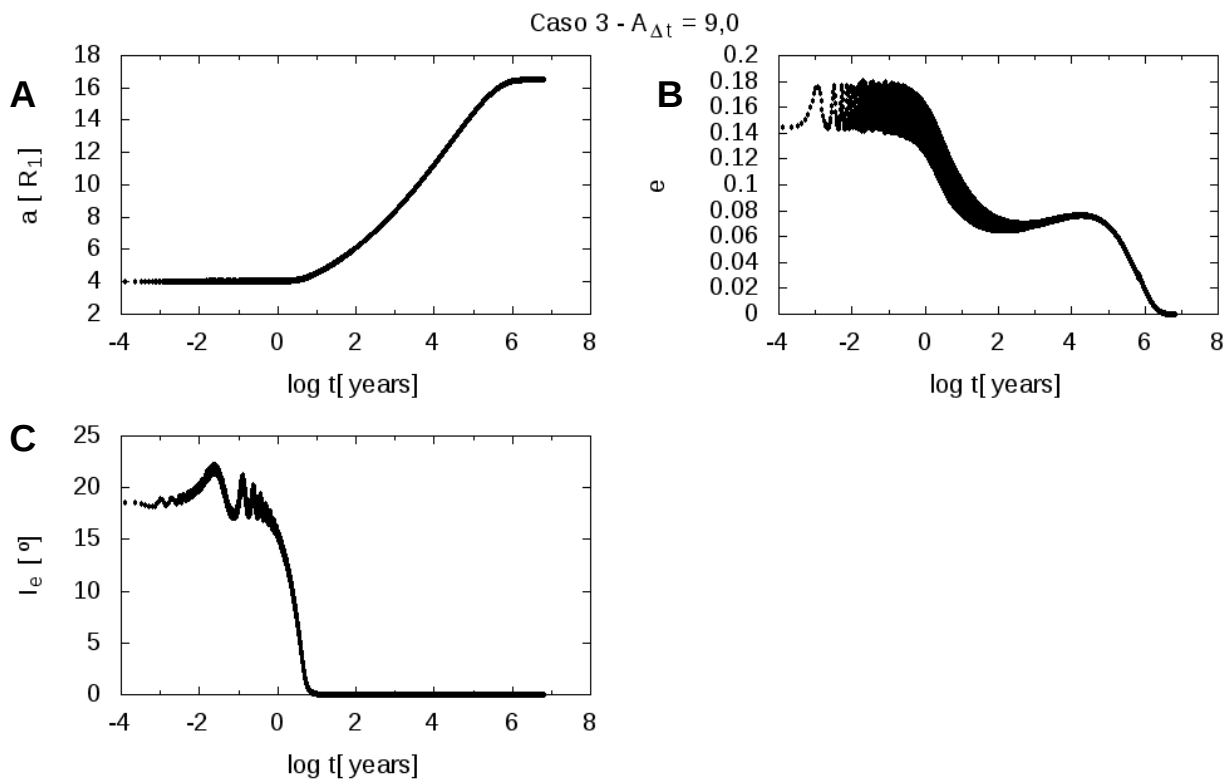


Figura 11. Evolução dos parâmetros orbitais de Caronte para $A_{\Delta t}=9,0$. (A) Variação do semieixo maior de Caronte em unidades de raio equatorial de Plutão; (B) Excentricidade da órbita de Caronte; (C) Inclinação orbital de Caronte relativa a um plano no equador de Plutão.

Neste caso, pode-se observar claramente como esta escolha judiciosa dos parâmetros de maré permitiram que a órbita de Caronte expandisse até seu valor atual sem antes atingir um valor de pico maior que $a = 16,5 R_1$. Como a excentricidade não cresceu até valores consideráveis e se manteve aproximadamente constante durante um certo período da evolução, o semieixo maior pôde expandir suavemente (Figura 11 (A,B)).

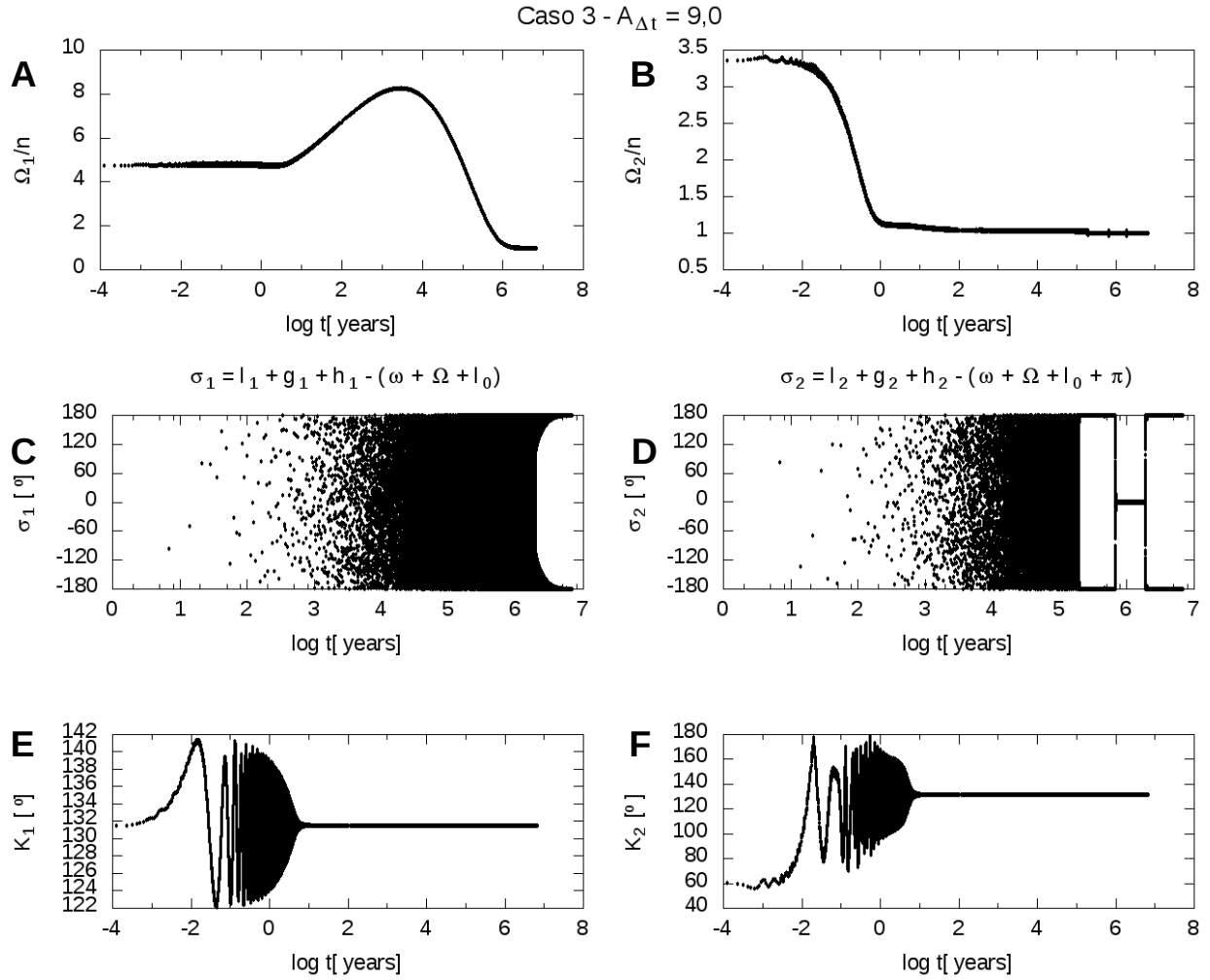


Figura 12. Evolução dos parâmetros rotacionais de ambos Plutão e Caronte para $A_{\Delta t}=9,0$. (A,B) *Spins* de ambos Plutão e Caronte, respectivamente, em unidades de movimento médio de Caronte, ao longo da evolução; (C,D) Ângulo ressonante 1 : 1 de ambos Plutão e Caronte, respectivamente; (E,F) Inclinação dos equadores de Plutão e Caronte em relação ao plano fundamental escolhido, respectivamente.

Do *plot* (C) da Figura 11, observa-se novamente que a única diferença notória no alinhamento da órbita de Caronte com o equador de Plutão, comparando com os outros casos, é a escala de tempo.

Pode-se observar novamente, como a combinação dos parâmetros de maré, resumidos por $A_{\Delta t}$, afetam o caminho da evolução do sistema. Neste terceiro caso Plutão atinge o menor valor de pico de *spin* relativo (Figura 12 (A)) quando comparamos com os Casos 1 e 2. Tomando este número de Love k_{22} , Caronte entra em sincronismo spin-órbita 1 : 1 em aproximadamente 200.000 anos, o que pode ser visto nos *plots* (B) e (D) da Figura 12.

Assim que Plutão é capturado nesta mesma ressonância spin-órbita (Figura

12 (A,C), o ângulo ressonante σ_1 passa a librar em torno de 180° , mudando também o ponto de libração do ângulo ressonante σ_2 (Figura 12 (D)).

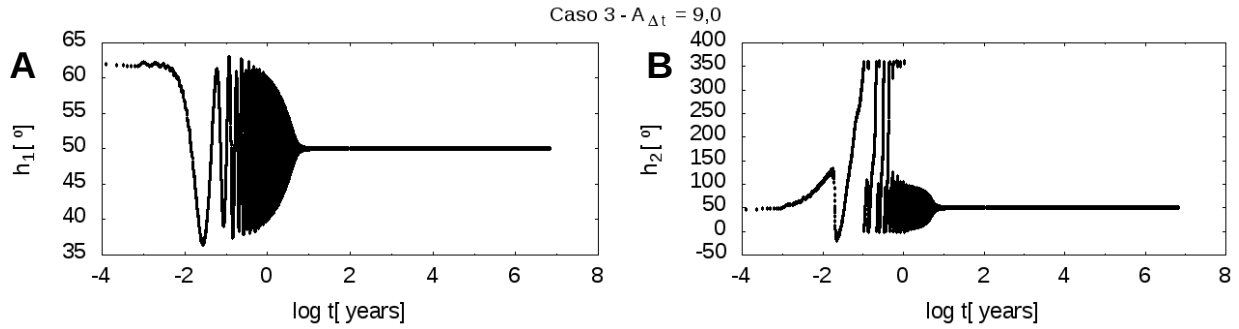


Figura 13. (A,B) Evolução das longitudes do nodo do equador relativo a um eixo inercial, de ambos Plutão e Caronte, respectivamente. Caso $A_{\Delta t} = 1,7$.

Assim como ocorreu com o comportamento da variação do equador de Plutão e Caronte (Figura 12 (E,F)), não houve nenhuma mudança significativa no comportamento da curva dos *plots* da Figura 13, apenas a escala de tempo foi afetada.

5. DISCUSSÃO

5.1. Dinâmica Secular de Plutão-Caronte

No presente estudo, investigou-se a possibilidade do sincronismo 1 : 1, e considerando os dados de (BROZOVIĆ et al., 2015; STERN et al., 2015) simulamos vários testes que mostram a ressonância 1 : 1 do par Plutão-Caronte.

Neste modelo apresentado, no sistema fundamental, o equador de Plutão completa um ciclo em aproximadamente 11,45 My (Figura 2 (A)), enquanto que no modelo simplificado de (DOBROVOLSKIS; PEALE; HARRIS, 1997) o ciclo tem um período de ~11,1 My. Esta pequena diferença se deve à utilização de dados atuais dos parâmetros físicos do sistema.

Quanto à obliquidade de Plutão, no presente modelo, obtivemos um período de ~2,85 My, variando de 103° a 127°, sendo que DOBROVOLSKIS; PEALE; HARRIS, (1997) obtiveram um período de ~2,8 My com variação similar. Este período está diretamente relacionado ao período de precessão dos Polos de Plutão no plano fixo à órbita heliocêntrica.

O fato de se ter tomado Plutão-Caronte como dois corpos diferentes, ao contrário de um alteres como DOBROVOLSKIS; PEALE; HARRIS, (1997), não afetou o cálculo da variação da obliquidade de forma significativa (Figura 1 (A)), contudo como esta abordagem permite separar os efeitos gravitacionais de Caronte, foi possível realizar outros estudos.

Isolou-se o efeito de Caronte na variação da obliquidade de Plutão, que como mostram as simulações (Figura 1 (A,B)), sua presença atenua a amplitude e aumenta o período dessas variações. A Figura 2 (B) mostra a importância de Caronte no movimento precessional dos polos de Plutão, nota-se que na ausência do satélite, o movimento do equador de Plutão no plano fundamental é praticamente nulo no intervalo de tempo considerado. Diferentemente do que afirma DOBROVOLSKIS; PEALE; HARRIS, (1997), tal precessão se deve à interação gravitacional de ambos Caronte e o Sol, e não o Sol apenas.

Segundo as simulações aqui apresentadas, é possível utilizando os parâmetros e dados atuais, reproduzir o cenário em que o par Plutão-Caronte está

em dupla ressonância spin-órbita, com libração em torno de 0° ou 180° (Figuras 3 (A,C) e 4 (A,C)), o que condiz com os trabalhos de (BUIE et al., 2010; BUIE; THOLEN; WASSERMAN, 1997). Estes resultados ainda complementam os teste preliminares que obtivemos em ("★XVII CBDO. XVII Colóquio Brasileiro de Dinamica Orbital. Programa e. Caderno de Resumos. 1 a 5 de dezembro de 2014. Águas de Lindóia - SP", [s.d.]; L. D. S. TROTTA, M. G. OLIVEIRA, T. YOKOYAMA, 2015; L. D. S. TROTTA, T. YOKOYAMA, 2014).

5.2. Modelo Dinâmico 3-d para a Evolução do Sistema Plutão-Caronte

No cenário em que Caronte evolui sua órbita por efeitos de maré com excentricidade não nula (CANUP, 2005), verifica-se que Caronte, e Plutão no Caso 1, passaram por diversas combinações ressonantes conforme seu semieixo aumentou.

Como demonstrado na expressão (34), do potencial perturbador fatorado por termos em C_{22} , os termos (cossenos) ressonantes concernentes à ressonância spin-órbita 1 : 1 são também fatorados por potências pares da excentricidade: 0 e 2.

As equações exatas da força e da atitude de Plutão e Caronte são integradas numericamente, de modo que nenhuma informação, quanto às capturas em ressonâncias de ordem superior de Plutão ou Caronte, fosse perdida.

Foi possível demonstrar ainda a captura do sistema Plutão-Caronte, com valores teóricos plausíveis do número de Love de segunda ordem k_2 (Figura 6 (C,D)), em dupla ressonância spin-órbita assim como foi feito no trabalho de CHENG; LEE; PEALE, (2014).

Como observado por CHENG; LEE; PEALE (2014), quanto menor o valor do parâmetro $A_{\Delta t}$, maior tende a ser o valor de pico atingido pelo semieixo e excentricidade da órbita de Caronte e *spin relativo* de Plutão (ver *plot* (A) da Figura 9). O autor ainda estima um intervalo de valores fisicamente plausíveis para tal parâmetro, considerando os possíveis valores dos parâmetros físicos da equação (78), que seria aproximadamente de $\frac{1}{2}$ a 3.

Diferentes valores do número de Love k_2 foram adotados com o intuito de se analisar os diferentes caminhos da evolução do sistema Plutão-Caronte e demonstrar que é possível, por meio de controle dos parâmetros, obter uma evolução em que a excentricidade e o semieixo orbital de Caronte não atinjam valores consideráveis (Figura 11 (A,B)). Este último cenário é fundamental para que os satélites menores de Plutão não sejam ejetados durante a expansão orbital de Caronte.

Obtivemos resultados similares àqueles de CHENG; LEE; PEALE (2014) para o caso onde C_{22} é diferente de zero. Observa-se tanto um aumento do semieixo

maior da órbita quanto da excentricidade, e depois deste aumento, a convergência para os valores atuais de ambos os parâmetros (Figuras 5 e 8 (A,B)). Além disso, este modelo permite-nos obter a evolução de outros parâmetros, tal como a inclinação dos equadores dos corpos (Figuras 6,9 e 12 (E,F)), as longitudes dos nodos dos equadores (Figuras 7,10,13 (A,B)) e a inclinação orbital referida ao plano equatorial de Plutão (Figuras 5,8,11 (C)).

Segundo as equações de HUT (1981), os equadores de Plutão e Caronte se alinhariam rapidamente, dada a escala de tempo da evolução do sistema. Este fato foi confirmado nas simulações das equações exatas, que demonstrou o alinhamento em um curto período de tempo, Figuras 6, 9 e 12 nos *plots* (E,F).

Utilizando este mesmo modelo inserimos também os demais satélites de Plutão: Styx, Nix, Kerberos e Hydra e um sétimo corpo. Consideramos estes como massas pontuais e inserimos os efeitos de J_2 de ambos Plutão e Caronte em seus movimentos orbitais.

Os autores CHENG; PEALE; LEE, (2014) realizaram mais de 1 milhão de integrações, variando os parâmetros orbitais de Nix e Hydra. Tomou-se J_2 de Plutão tanto nulo quanto diferente de zero. Em nenhuma das integrações os dois satélites sobreviveram ou foram transportados até suas órbitas atuais no processo de evolução de Plutão-Caronte. Concluiu-se que, o transporte dos satélites de Plutão até suas órbitas atuais por meio do processo dinâmico de transporte ressonante é muito pouco provável.

Visando estes resultados e de outros autores (LITHWICK; WU, 2008; SANTOS; MORBIDELLI; NESVORNÝ, 2012; WARD; CANUP, 2006) hipotetizamos que, a presença de um sexto satélite, durante os estágios iniciais da evolução do sistema Plutão-Caronte, fosse capaz de estabilizar as órbitas dos demais satélites, enquanto Caronte expandia a sua órbita devido a efeitos de maré. Este satélite teria um tempo de vida curto comparado ao intervalo de tempo do processo dinâmico.

A integração deste sistema proposto, Plutão e Caronte como corpos finitos e seis massa pontuais, é composta por 44 equações diferenciais de primeira ordem. Diversas integrações foram feitas nesse sentido, tomando diversos valores de parâmetros físicos, orbitais e condições iniciais para os seis satélites: massas, semieixo maior, inclinação, excentricidade, anomalia média, entre outros.

Observamos que o sexto satélite, de massa ainda desconhecida, quando expulso no processo de evolução do sistema Plutão-Caronte, pode estabilizar as órbitas dos demais satélites, uma vez que Caronte pode atingir excentricidade considerável durante a evolução.

Apesar das centenas de integrações realizadas, variando-se os parâmetros mencionados acima, não foi possível determinar uma configuração orbital do sistema que favorecesse a migração dos satélites menores de Plutão no processo de expansão orbital de Caronte. Em outras palavras, em todas as simulações realizadas os satélites Styx, Nix, Kerberos e Hydra foram expulsos, juntamente com o sexto satélite.

6. CONCLUSÃO

6.1. Dinâmica Secular de Plutão-Caronte

Usando o moderno conjunto de variáveis canônicas de Andoyer, foi feito o estudo da dinâmica de rotação do sistema Plutão-Caronte. Foi obtida a hamiltoniana de longo período e ressonante, que visa o estudo do comportamento do equador de Plutão e também a atuação da ressonância spin-órbita. Nosso formalismo permite isolar o efeito específico de Caronte sobre a dinâmica do equador de Plutão.

Com base nos parâmetros orbitais e físicos mais atualizados do sistema e com nosso modelo, determinamos os primeiros valores de amplitude e período do movimento de libração dos ângulos σ_{p11} e σ_{c11} do par Plutão-Caronte, assim como também do ângulo ressonante $(h_i - \Omega)$. Foi possível reproduzir os resultados de DOBROVOLSKIS; PEALE; HARRIS, (1997), tanto para a obliquidade em um intervalo de 15 My, quanto para a precessão dos polos de Plutão, onde para o último, determinamos um valor ligeiramente diferente para o período em questão.

6.2. Modelo Dinâmico 3-d para a Evolução do Sistema Plutão-Caronte

O modelo dinâmico tridimensional de maré proposto foi capaz de demonstrar a evolução do sistema Plutão-Caronte até o seu estado atual, apesar de os caminhos deste cenário ainda serem incertos.

Em todos os casos foi possível demonstrar qualitativamente o estado final da evolução de maré de Plutão-Caronte, isto é:

1. Duplo sincronismo spin-órbita 1 : 1;
2. Semieixo maior $a \approx 16,5 R_p$;
3. Órbita circular $e \approx 0$;
4. Alinhamento dos equadores de Plutão e Caronte ($K_1=K_2$) e alinhamento dos equadores com o plano orbital de Caronte ($I_e=0$);
5. Alinhamento dos nodos dos equadores, relativo a um eixo inercial ($h_1=h_2$).

Os equadores de Plutão e Caronte se alinham em um curto intervalo de tempo, comparado ao tempo de evolução do sistema até o presente estado.

A evolução do *spin* de Caronte indica que este possivelmente foi capturado em diferentes ressonâncias spin-órbita, exceto no Caso 3, onde $A_{\Delta t} = 9$ e Caronte é rapidamente capturado na ressonância spin-órbita 1 : 1. Estas capturas influenciaram diretamente na figura de evolução do semieixo maior da órbita e dos demais parâmetros orbitais.

REFERÊNCIAS

- ★**XVII CBDO. XVII Colóquio Brasileiro de Dinamica Orbital. Programa e. Caderno de Resumos. 1 a 5 de dezembro de 2014. Águas de Lindóia - SP.** Disponível em: <<http://docplayer.com.br/1015889-Xvii-cbdo-xvii-coloquio-brasileiro-de-dinamica-orbital-programa-e-caderno-de-resumos-1-a-5-de-dezembro-de-2014-aguas-de-lindoi-a-sp.html>>. Acesso em: 10 jul. 2016.
- BINZEL, R. P. et al. Climate zones on Pluto and Charon. **Icarus**, [s.d.].
- BROUWER, D.; CLEMENCE, G. M. **Methods of celestial mechanics**. [s.l.] Academic Press, 1961.
- BROZOVIĆ, M. et al. The orbits and masses of satellites of Pluto. **Icarus**, v. 246, p. 317–329, 1 jan. 2015.
- BUIE, M. W. et al. Pluto and Charon with the Hubble Space Telescope. I. Monitoring Global Change and Improved Surface Properties from Light Curves. **The Astronomical Journal**, v. 139, n. 3, p. 1117, 2010.
- BUIE, M. W.; THOLEN, D. J.; WASSERMAN, L. H. Separate Lightcurves of Pluto and Charon. **Icarus**, v. 125, n. 2, p. 233–244, fev. 1997.
- CANUP, R. M. A giant impact origin of Pluto-Charon. **Science (New York, N.Y.)**, v. 307, n. 5709, p. 546–550, 28 jan. 2005.
- CANUP, R. M. On a Giant Impact Origin of Charon, Nix, and Hydra. **The Astronomical Journal**, v. 141, n. 2, p. 35, 2011.
- CHENG, W. H.; LEE, M. H.; PEALE, S. J. Complete Tidal Evolution of Pluto-Charon. **Icarus**, v. 233, p. 242–258, maio 2014.
- CHENG, W. H.; PEALE, S. J.; LEE, M. H. On the origin of Pluto's small satellites by resonant transport. **Icarus**, v. 241, p. 180–189, out. 2014.
- DEPRIT, A. Free Rotation of a Rigid Body Studied in the Phase Plane. **American Journal of Physics**, v. 35, n. 5, p. 424–428, 1 maio 1967.
- D'HOEDT, S.; LEMAITRE, A. The Spin-Orbit Resonant Rotation of Mercury: A Two Degree of Freedom Hamiltonian Model. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 89, n. 3, p. 267–283, abr. 2004.
- DOBROVOLSKIS, A. R.; PEALE, S. J.; HARRIS, A. W. Dynamics of the Pluto-Charon Binary. In: **Pluto and Charon**. [s.l.: s.n.]. p. 159.
- EVERHART, E. An Efficient Integrator that Uses Gauss-Radau Spacings. In: CARUSI, A.; VALSECCHI, G. B. (Eds.). **Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution**. Astrophysics and Space Science Library. [s.l.] Springer Netherlands, 1985. p. 185–202.

GOLDREICH, P.; PEALE, S. Spin-orbit coupling in the solar system. **The Astronomical Journal**, v. 71, p. 425, 1 ago. 1966.

HENRARD, J. The rotation of Io. **Icarus**, v. 178, p. 144–153, 1 nov. 2005.

HUT, P. Tidal evolution in close binary systems. **Astronomy and Astrophysics**, v. 99, p. 126–140, 1 jun. 1981.

KOZAI, Y. The motion of a close earth satellite. **The Astronomical Journal**, v. 64, p. 367, 1 nov. 1959.

L. D. S. TROTTA, M. G. OLIVEIRA, T. YOKOYAMA. **Introdução à Dinâmica Secular Rotacional de Sistemas Quase-Binários: Plutão-Caronte - Relatório PIBIC/CNPq**. [s.l.] Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2015.

L. D. S. TROTTA, T. YOKOYAMA. **Introdução à Dinâmica Secular Rotacional de Sistemas Quase-Binários: Plutão-Caronte - Relatório PIBIC/CNPq**. [s.l.] Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2014.

LEMONS, N. A. **Mecânica Analítica**. [s.l.] Editora Livraria da Física, 2007.

LITHWICK, Y.; WU, Y. On the Origin of Pluto's Minor Moons, Nix and Hydra. **arXiv:0802.2951 [astro-ph]**, 20 fev. 2008.

MCKINNON, W. B. On the origin of the Pluto-Charon binary. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 344, p. L41–L44, 1 set. 1989.

MIGNARD, F. The evolution of the lunar orbit revisited. I. **The moon and the planets**, v. 20, n. 3, p. 301–315, maio 1979.

MIGNARD, F. The evolution of the lunar orbit revisited, II. **The moon and the planets**, v. 23, n. 2, p. 185–201, out. 1980.

MORBIDELLI, A.; LEVISON, H. F.; GOMES, R. The Dynamical Structure of the Kuiper Belt and its Primordial Origin. **arXiv:astro-ph/0703558**, 21 mar. 2007.

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. [s.l.] Cambridge University Press, 1999.

New Horizons. Disponível em: <<http://pluto.jhuapl.edu/Mission/index.php>>. Acesso em: 10 jan. 2017.

NOYELLES, B.; LEMAITRE, A.; VIENNE, A. Titan's rotation: A 3-dimensional theory. **Astronomy and Astrophysics**, v. 478, n. 3, p. 959–970, fev. 2008.

OLIVEIRA, M. G. DE. Potencial de dois corpos finitos achatados: iniciação ao uso de variáveis de Andoyer. 1 jul. 2015.

S. J. PEALE. 10.14 - The Origin of the Natural Satellites A2 - Schubert, Gerald. In: **Treatise on Geophysics**. Amsterdam: Elsevier, 2007. p. 465–508.

S. J. PEALE. 10.17 - The Origin of the Natural Satellites. In: **Treatise on Geophysics**. [s.l.] Elsevier, 2015. p. 465–508.

SANTOS, P. M. P. DOS; MORBIDELLI, A.; NESVORNÝ, D. Dynamical capture in the Pluto-Charon system. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 114, n. 4, p. 341–352, dez. 2012.

STERN, S. A. et al. A giant impact origin for Pluto's small moons and satellite multiplicity in the Kuiper belt. **Nature**, v. 439, n. 7079, p. 946–948, 23 fev. 2006.

STERN, S. A. et al. The Pluto system: Initial results from its exploration by New Horizons. **Science**, v. 350, n. 6258, p. aad1815, 16 out. 2015.

TOUMA, J.; WISDOM, J. Evolution of the Earth-Moon system. **The Astronomical Journal**, v. 108, p. 1943–1961, 1 nov. 1994.

WARD, W. R.; CANUP, R. M. Forced resonant migration of Pluto's outer satellites by Charon. **Science (New York, N.Y.)**, v. 313, n. 5790, p. 1107–1109, 25 ago. 2006.

WEAVER, H. A. et al. The small satellites of Pluto as observed by New Horizons. **Science**, v. 351, n. 6279, p. aae0030, 18 mar. 2016.

YOKOYAMA, T. Possible effects of secular resonances in Phobos and Triton. **Planetary and Space Science**, v. 50, n. 1, p. 63–77, jan. 2002.

ZHARKOV, V. N.; LEONTJEV, V. V.; KOZENKO, V. A. Models, figures, and gravitational moments of the Galilean satellites of Jupiter and icy satellites of Saturn. **Icarus**, v. 61, p. 92–100, 1 jan. 1985.

APÊNDICES

Apêndice A – Dedução da função perturbadora R_{J_2} como função dos elementos orbitais do satélite

Como explicado na Seção 3, a função perturbadora devido ao achatamento R_{J_2} pode ser escrito da seguinte forma (KOZAI, 1959) :

$$\langle R_{J_2} \rangle = \frac{n^2 R_1^2 J_2}{4(1-e^2)^{3/2}} (3 \cos^2 i - 1) \quad (80)$$

Utilizando de relações da trigonometria esférica escrevemos a inclinação relativa ao plano equatorial como função da inclinação relativa a um plano fundamental arbitrário.

Das relações da trigonometria esférica:

$$\cos i = -\cos \tilde{I} \cos(180 - I) + \sin \tilde{I} \sin(180 - I) \cos(\Omega - \tilde{\Omega}) \quad (81)$$

Simplificando os termos:

$$\cos i = \sin \tilde{I} \sin I \cos(\Omega - \tilde{\Omega}) + \cos \tilde{I} \cos I \quad (82)$$

Onde $\tilde{\Omega}$ e $\tilde{I}$ já foram definidos na Seção 3. Calculando o quadrado da expressão acima:

$$\cos^2 i = \sin^2 \tilde{I} \sin^2 I \cos^2(\Omega - \tilde{\Omega}) + \cos^2 \tilde{I} \cos^2 I + 2 \cos \tilde{I} \cos I \sin \tilde{I} \sin I \cos(\Omega - \tilde{\Omega}) \quad (83)$$

E utilizando as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\cos^2(\Omega - \tilde{\Omega}) &= \frac{\cos(2(\Omega - \tilde{\Omega})) + 1}{2} \\ \sin 2\tilde{I} &= 2\cos\tilde{I}\sin\tilde{I}\end{aligned}\tag{84}$$

Obtém-se:

$$\begin{aligned}3\cos^2 i - 1 &= \frac{3}{2}\cos(2(\Omega - \tilde{\Omega}))\sin^2\tilde{I}\sin^2 I + \frac{3}{2}\sin^2 I\sin^2\tilde{I} + 3\cos^2\tilde{I}\cos^2 I + \\ &+ \frac{3}{2}\sin 2\tilde{I}\sin 2I\cos(\Omega - \tilde{\Omega}) - 1\end{aligned}\tag{85}$$

Usando também da seguinte relação trivial:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\sin^2 I\sin^2\tilde{I} &= \frac{3}{2}(1 - \cos^2\tilde{I})(1 - \cos^2 I) \\ \frac{3}{2}\sin^2 I\sin^2\tilde{I} &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos^2 I - \frac{3}{2}\cos^2\tilde{I} + \frac{3}{2}\cos^2\tilde{I}\cos^2 I\end{aligned}\tag{86}$$

Substituindo (86) em (85) e simplificando alguns termos obtemos a expressão de R_{J_2} como função dos elementos orbitais do corpo C2 relativo a um plano fundamental e também outros parâmetros como a longitude e a inclinação do equador neste mesmo sistema:

$$\begin{aligned}\langle R_{J_2} \rangle &= \frac{n^2 a^2}{8(1 - e^2)^{3/2}} \left[1 - 3\cos^2\tilde{I} + 9\cos^2\tilde{I}\cos^2 I - 3\cos^2 I + \right. \\ &\left. 3\sin^2\tilde{I}\cos(2\Omega - 2\tilde{\Omega})\sin^2 I + 3\sin 2\tilde{I}\cos(\Omega - \tilde{\Omega})\sin 2I \right]\end{aligned}\tag{87}$$

Basta agora usar as expressões em (10) para escrever a função perturbadora do achatamento inteiramente como função dos elementos orbitais de C2 relativos ao

sistema de referência arbitrário.

Apêndice B – Dedução da energia cinética de rotação como função dos ângulos de Andoyer

A energia cinética de rotação é dada pela seguinte expressão clássica:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\vec{I} \otimes \boldsymbol{\Omega}) \quad (88)$$

Onde $\vec{I}$ é o tensor de inércia e $\boldsymbol{\Omega}$ o vetor velocidade angular, que na base do sistema equatorial tomam a seguinte forma:

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (89)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{f}_1 + \Omega_2 \mathbf{f}_2 + \Omega_3 \mathbf{f}_3$$

Deste modo o vetor momento angular $\mathbf{G}$ é facilmente obtido:

$$\mathbf{G} = A \Omega_1 \mathbf{f}_1 + B \Omega_2 \mathbf{f}_2 + C \Omega_3 \mathbf{f}_3 \quad (90)$$

Na base do sistema normal é escrito como:

$$\mathbf{G} = G \mathbf{n}_3 \quad (91)$$

Da definição dos ângulos J e I observa-se que:

$$\mathbf{G} = G \sin J \sin l \mathbf{f}_1 + G \sin J \cos l \mathbf{f}_2 + G \cos J \mathbf{f}_3 \quad (92)$$

Igualando a expressão (90) a (92) podemos reescrever a segunda equação de (89) como segue:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{G \sin J \sin l}{A} \mathbf{f}_1 + \frac{G \sin J \cos l}{B} \mathbf{f}_2 + \frac{G \cos J}{C} \mathbf{f}_3 \quad (93)$$

E, usando novamente a definição de energia cinética obtém-se:

$$T = \frac{1}{2} (G^2 - L^2) \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{L^2}{2C} \quad (94)$$

Apêndice C – Cossenos diretores a_i , b_i e c_i como função de cossenos diretores dos eixos principais de inércia relativos aos eixos inerciais

Seja um sistema de eixos ligado no corpo 1 ($\mathbf{f}_{11}, \mathbf{f}_{21}, \mathbf{f}_{31}$) com origem em seu centro de massa O_1 e outro ligado no corpo 2 ($\mathbf{f}_{12}, \mathbf{f}_{22}, \mathbf{f}_{32}$), com origem em seu centro de massa O_2 . Os eixos estão orientados de forma a coincidir com os eixos principais de inércia dos corpos 1 e 2 respectivamente.

Se (a_1, b_1, c_1) são os cossenos diretores da linha O_1O_2 , que une os centros de massa dos corpos 1 e 2, relativos à base $(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{f}_{21}, \mathbf{f}_{31})$, então o vetor com origem no corpo 1, que aponta para o centro de massa do corpo 2 é:

$$\mathbf{r} = r (a_1 \hat{\mathbf{f}}_{11} + b_1 \hat{\mathbf{f}}_{21} + c_1 \hat{\mathbf{f}}_{31}) \quad (95)$$

Seja agora (a_2, b_2, c_2) os cossenos diretores da linha O_1O_2 relativos à base

$(\mathbf{f}_{12}, \mathbf{f}_{22}, \mathbf{f}_{32})$, este mesmo vetor definido acima, na base de eixos fixos no corpo 2 tem a seguinte forma:

$$\mathbf{r} = r(a_2 \hat{\mathbf{f}}_{12} + b_2 \hat{\mathbf{f}}_{22} + c_2 \hat{\mathbf{f}}_{32}) \quad (96)$$

Basta agora obter os cossenos diretores dos eixos $(\mathbf{f}_{11}, \mathbf{f}_{21}, \mathbf{f}_{31})$ e $(\mathbf{f}_{12}, \mathbf{f}_{22}, \mathbf{f}_{32})$ relativos a um sistema fundamental $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. O vetor $\mathbf{r}$ nesta última base é definido como segue:

$$\mathbf{r} = (X_2 - X_1) \hat{\mathbf{e}}_1 + (Y_2 - Y_1) \hat{\mathbf{e}}_2 + (Z_2 - Z_1) \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (97)$$

Onde (X_1, Y_1, Z_1) é a posição do corpo 1 e (X_2, Y_2, Z_2) a posição do corpo 2 em relação a um sistema inercial arbitrário. Usando relações triviais de produto escalar e ortogonalidade nas expressões (95), (96) e (97) obtém-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{f}}_{11} &= r a_1 = (X_2 - X_1) \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{11} + (Y_2 - Y_1) \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{11} + (Z_2 - Z_1) \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{11} \\ \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{f}}_{21} &= r b_1 = (X_2 - X_1) \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{21} + (Y_2 - Y_1) \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{21} + (Z_2 - Z_1) \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{21} \\ \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{f}}_{31} &= r c_1 = (X_2 - X_1) \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{31} + (Y_2 - Y_1) \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{31} + (Z_2 - Z_1) \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{31} \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{f}}_{12} &= r a_2 = (X_2 - X_1) \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{12} + (Y_2 - Y_1) \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{12} + (Z_2 - Z_1) \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{12} \\ \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{f}}_{22} &= r b_2 = (X_2 - X_1) \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{22} + (Y_2 - Y_1) \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{22} + (Z_2 - Z_1) \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{22} \\ \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{f}}_{32} &= r c_2 = (X_2 - X_1) \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{32} + (Y_2 - Y_1) \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{32} + (Z_2 - Z_1) \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{f}}_{32} \end{aligned} \quad (99)$$

Os produtos escalares das expressões acima são os cossenos diretores dos eixos principais de inércia relativos ao sistema fundamental. Estas expressões ainda podem ser reescritas na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}_{f_1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \cdot \hat{f}_{11} & \hat{e}_2 \cdot \hat{f}_{11} & \hat{e}_3 \cdot \hat{f}_{11} \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{f}_{21} & \hat{e}_2 \cdot \hat{f}_{21} & \hat{e}_3 \cdot \hat{f}_{21} \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{f}_{31} & \hat{e}_2 \cdot \hat{f}_{31} & \hat{e}_3 \cdot \hat{f}_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix}_e \quad (100)$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}_{f_2} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \cdot \hat{f}_{12} & \hat{e}_2 \cdot \hat{f}_{12} & \hat{e}_3 \cdot \hat{f}_{12} \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{f}_{22} & \hat{e}_2 \cdot \hat{f}_{22} & \hat{e}_3 \cdot \hat{f}_{22} \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{f}_{32} & \hat{e}_2 \cdot \hat{f}_{32} & \hat{e}_3 \cdot \hat{f}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix}_e \quad (101)$$

Os subíndices f_1 , f_2 e e presentes nas matrizes do lado esquerdo e do lado direito das expressões acima indicam a qual base estes vetores estão referidos: no sistema de eixos ligados ao corpo 1, sistema de eixos ligado ao corpo 2 e sistema inercial arbitrário, respectivamente.

A matriz definida por estes cossenos diretores ($\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{f}_{ji}$) ($j=1,2$ e 3 , referente aos eixos ortogonais dos eixos de referência e $i=1,2$ referente aos corpos 1 e 2) estão relacionando dois vetores em bases diferentes por meio de rotações nos eixos de referência, ou seja, pode ser representado por uma matriz de rotação.

No presente trabalho adotou-se os ângulos de Andoyer como alternativa para relacionar os sistemas de eixos fixos com o sistema de eixos inerciais.

Usando as definições das matrizes de rotação descritas no Anexo A e inserindo o subíndice auxiliar i que indica a qual sistema de eixos principais (do corpo 1 ou do corpo 2) a rotação se refere, reescreve-se as relações (100) e (101) da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}_{f_1} = \frac{1}{r} T_3(l_1) T_1(J_1) T_3(g_1) T_1(K_1) T_3(h_1) \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix}_e \quad (102)$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}_{f_2} = \frac{1}{r} T_3(l_2) T_1(J_2) T_3(g_2) T_1(K_2) T_3(h_2) \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix}_e \quad (103)$$

Por meios das relações acima os cossenos diretores (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) ficam inteiramente escritos como função dos ângulos de Andoyer.

Apêndice D – Dedução da expressão (74) das componentes do momento angular total do sistema Plutão-Caronte.

O momento angular total de um sistema de N partículas pode ser decomposto na parte translacional e rotacional (LEMOS, 2007), a parte translacional refere-se ao momento angular do centro de massa em relação à origem, enquanto que a parte rotacional refere-se ao momento angular das N partículas em relação a seu centro de massa.

Neste caso, há dois conjuntos: um de N_1 partículas e outro de N_2 partículas. O primeiro conjunto correspondente aos infinitésimos de massa que compõem o corpo 1, e o segundo aos infinitésimos de massa que compõem o corpo 2.

Em suma, o momento angular total do sistema é a soma do momento angular da translação dos corpos 1 e 2 e da rotação dos corpos 1 e 2 em relação a seus respectivos centros de massa.

$$L = \mathbf{R}_1 \times m_1 \frac{d}{dt} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \times m_2 \frac{d}{dt} \mathbf{R}_2 + \vec{I}_1 \otimes \boldsymbol{\Omega}_1 + \vec{I}_2 \otimes \boldsymbol{\Omega}_2 \quad (104)$$

Onde:

- $\mathbf{R}_1$: vetor posição do corpo 1 relativo a um sistema fundamental $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.
- $\mathbf{R}_2$: vetor posição do corpo 2 relativo a um sistema fundamental $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.
- $(d/dt)\mathbf{R}_1$: vetor velocidade do corpo 1 relativo a um sistema fundamental

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

- $(d/dt)\mathbf{R}_2$: vetor velocidade do corpo 2 relativo a um sistema fundamental $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.
- $\boldsymbol{\Omega}_1$: Vetor velocidade angular do corpo 1.
- $\boldsymbol{\Omega}_2$: Vetor velocidade angular do corpo 2.
- $\mathbf{I}_1$: Momento de inércia do corpo 1 diagonalizado na base equatorial.
- $\mathbf{I}_2$: Momento de inércia do corpo 2 diagonalizado na base equatorial.

Os primeiros dois termos da expressão acima são os momentos angulares de translação e os últimos dois os momentos angulares de rotação dos corpos 1 e 2, respectivamente.

Definamos agora o vetor posição relativa $\mathbf{r}$ e o vetor centro de massa $\mathbf{R}_{CM}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \quad (105)$$

$$m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{R}_{CM} \quad (106)$$

Resolvendo este sistema para $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \mathbf{R}_{cm} + \frac{m_1}{M} \mathbf{r} \\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{R}_{cm} - \frac{m_2}{M} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (107)$$

Substituindo (107) e as derivadas primeiras no tempo da mesma em (104) e fazendo as devidas simplificações:

$$\mathbf{L} = M \left(\mathbf{R}_{CM} \times \frac{d}{dt} \mathbf{R}_{CM} \right) + \mu \left(\mathbf{r} \times \frac{d}{dt} \mathbf{r} \right) + \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 \quad (108)$$

Onde M é a soma das massa m_1 e m_2 , μ a massa reduzida e os últimos dois termos são os momentos angulares de rotação escritos como função dos vetores $\mathbf{G}_1$ e $\mathbf{G}_2$.

Da terceira Lei de Newton e da definição de centro de massa:

$$m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{R}}_2 = 0 = (m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{R}}_{CM} \quad (109)$$

E integrando-se a expressão acima:

$$\ddot{\mathbf{R}}_{CM} = \mathbf{A} + \mathbf{B}T \quad (110)$$

Com $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sendo vetores constantes, conclui-se que o centro de massa destes dois corpos move-se com velocidade constante em relação ao sistema inercial, sendo portanto um sistema inercial. Haja vista esta afirmação, toma-se o centro de massa como a origem, simplificando (108).

Em coordenadas polares a derivada primeira de $\mathbf{r}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{f} \hat{\mathbf{f}} \quad (111)$$

O primeiro termo é a derivada primeira da distância radial entre os corpos 1 e 2 e f é a anomalia verdadeira da órbita do corpo 2 em relação ao corpo 1.

Tomando o produto vetorial entre $\mathbf{r}$ e a derivada primeira no tempo de $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = r^2 \dot{\mathbf{f}} (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{f}}) \quad (112)$$

O produto escalar entre os versores $\mathbf{r}/r$ e $\mathbf{f}/f$ fornece um versor perpendicular ao plano orbital do corpo 2. O termo que multiplica o versor resultante pode ser expresso em função dos elementos orbitais e de parâmetros físicos:

$$r^2 \dot{\mathbf{f}} = \sqrt{k^2 (m_1 + m_2) (1 - e^2)} \quad (113)$$

Da 3ª Lei de Kepler:

$$na^2 = \sqrt{k^2 (m_1 + m_2) a} \quad (114)$$

Usando (112), (113) e (114) em (108) tem-se:

$$\mathbf{L} = \mu n a^2 \sqrt{1 - e^2} (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{f}}) + \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 \quad (115)$$

Nos recordando do fato de que $\mathbf{R}_{cm}$ coincide com a origem do sistema inercial arbitrário, que é paralelo ao sistema fundamental adotado $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, com origem no corpo 1.

A expressão acima precisa ser reescrita em termos das componentes do sistema fundamental.

Primeiramente, sabemos que os sistemas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, onde o segundo é aquele onde $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ é paralelo ao plano orbital, relacionam-se da seguinte forma:

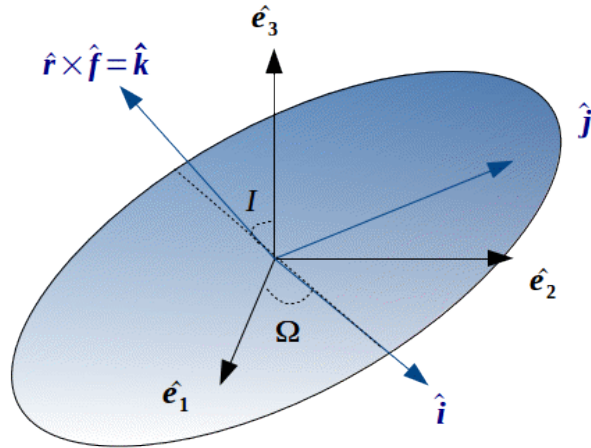


Figura 14. Sistema de eixos fixos e sistema do plano orbital

onde:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{(i,j,k)} = T_1(\Omega) T_3(I) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_e \quad (116)$$

Tem-se que $(\alpha, \beta, \gamma)_e$ é o versor perpendicular ao plano orbital escrito no sistema fundamental. Suas componentes são facilmente escritas em função dos ângulos Ω e I , uma vez que matrizes de rotação são ortonormais, deste modo, a inversa é igual à transposta:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_e = T^t(\Omega) T^t(I) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{(i,j,k)} \quad (117)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} \sin I \sin \Omega \\ -\sin I \cos \Omega \\ \cos I \end{pmatrix}_e$$

Resta-nos agora escrever os vetores $\mathbf{G}_1$ e $\mathbf{G}_2$ no sistema fundamental. Como

está demonstrado pela Figura 16 do Anexo A, as componentes destes são escritas por meio das seguintes relações:

$$\begin{pmatrix} G_{ix} \\ G_{iy} \\ G_{iz} \end{pmatrix}_e = T_3^{-1}(h_i) T_1^{-1}(K_i) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G_i \end{pmatrix}_{n_i} \quad (118)$$

$$\begin{pmatrix} G_{ix} \\ G_{iy} \\ G_{iz} \end{pmatrix}_e = G_i \begin{pmatrix} \sin K_i \sin h_i \\ -\sin K_i \cos h_i \\ \cos K_i \end{pmatrix}_e$$

O sistema $\mathbf{n}_i$ é o sistema normal auxiliar (referente ao corpo i) composto pelos versores $(\mathbf{n}_{1i}, \mathbf{n}_{2i}, \mathbf{n}_{3i})$, onde $\mathbf{n}_{1i}$ e $\mathbf{n}_{3i}$ coincidem com aqueles definidos pela Figura 16. sendo $\mathbf{n}_{3i}$ paralelo ao vetor momento angular do corpo i.

Por meio das expressões (117) e (118) pode-se escrever as componentes de (115) no sistema fundamental $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

$$\begin{aligned} L_x &= \mu n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin I \sin \Omega + G_1 \sin K_1 \sin h_1 + G_2 \sin K_2 \sin h_2 \\ L_y &= -\mu n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin I \cos \Omega + G_1 \sin K_1 \cos h_1 + G_2 \sin K_2 \cos h_2 \\ L_z &= \mu n a^2 \sqrt{1-e^2} \cos I + G_1 \cos K_1 + G_2 \cos K_2 \end{aligned} \quad (119)$$

Apêndice E – Cálculo da obliquidade

Nesta seção calcula-se a obliquidade do corpo C1 em função dos ângulos de Andoyer e dos elementos orbitais do corpo C3. Reitera-se que o corpo C1 realiza um movimento orbital em torno de C3, o Sol.

Segue abaixo a figura que representa o problema:

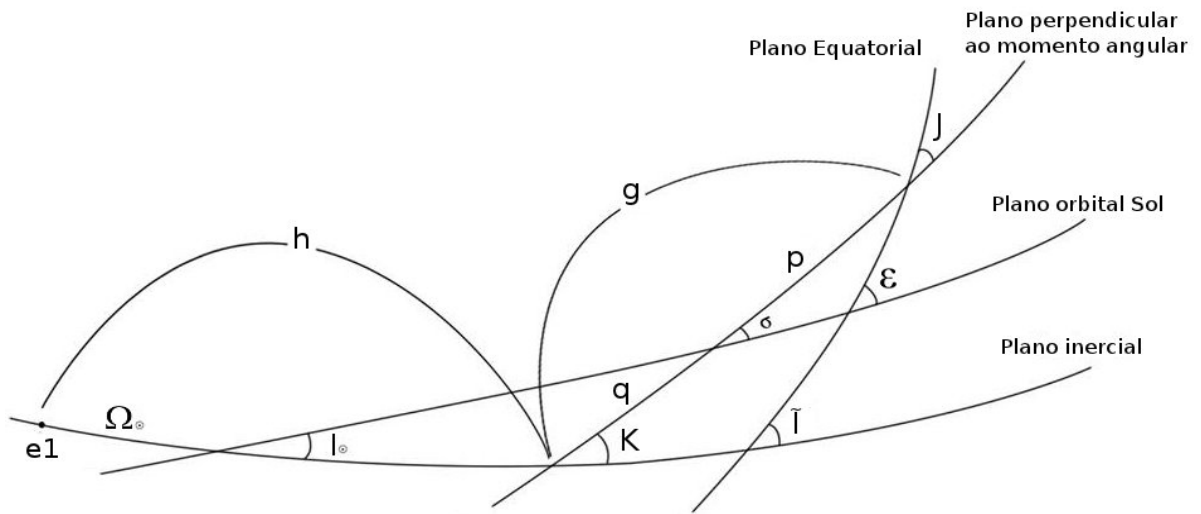


Figura 15. Intersecção dos planos equatorial, perpendicular ao momento angular de rotação, orbital do Sol e inercial na esfera unitária.

Onde p , q e σ são ângulos auxiliares, $\tilde{I}$ a inclinação do equador em relação ao plano inercial, ϵ a obliquidade de C1, enquanto que os outros são os já definidos elementos orbitais e os ângulos de Andoyer.

Observa-se que as intersecções destes planos, na esfera unitária, formam quatro triângulos esféricos. À partir da figura acima, utilizando relações da trigonometria esférica encontram-se as seguintes relações:

$$\cos \epsilon = \cos J \cos \sigma - \sin J \sin \sigma \cos p \quad (120)$$

$$\sin \sigma \sin q = \sin(h - \Omega_{\odot}) \sin I_{\odot} \quad (121)$$

$$\sin \sigma \cos q = \frac{1}{\sin K} (\cos I_{\odot} - \cos K \cos \sigma) \quad (122)$$

$$\cos \sigma = -\cos K \cos I_{\odot} + \sin K \sin I_{\odot} \cos(h - \Omega_{\odot}) \quad (123)$$

$$\sin \sigma \cos p = \sin \sigma \cos(g - q) = \sin \sigma \cos q \cos g + \sin \sigma \sin q \sin g \quad (124)$$

Aplicam-se (121), (122) e (123) em (124) de modo a obter:

$$\sin \sigma \cos p = \cos g [\cos \Omega_{\odot} \sin K - \cos K \sin I_{\odot} \cos(h - \Omega_{\odot}) + \sin g \sin I_{\odot} \sin(h - \Omega_{\odot})] \quad (125)$$

Substituindo (123) e (125) em (120) obtém-se a expressão do cosseno da obliquidade:

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon = & \cos J [-\cos K \cos I_{\odot} + \sin K \sin I_{\odot} \cos(h - \Omega_{\odot})] + \\ & -\sin J \cos g [\cos \Omega_{\odot} \sin K - \cos K \sin I_{\odot} \cos(h - \Omega_{\odot}) + \sin g \sin I_{\odot} \sin(h - \Omega_{\odot})] \end{aligned} \quad (126)$$

Nota-se que o ângulo g é de curto período, desta forma, justifica-se fazer uma média em g e encontrar uma equação secular para a obliquidade do corpo C1:

$$\cos \varepsilon \approx \cos J [-\cos K \cos I_{\odot} + \sin K \sin I_{\odot} \cos(h - \Omega_{\odot})] \quad (127)$$

Sabe-se que a obliquidade estará sempre entre 0° e 180° , ou seja, encontra-se no primeiro ou no segundo quadrante, de modo que pode ser calculada

diretamente aplicando a função arco cosseno na expressão (126), ou na expressão (127) para a variação secular.

Apêndice F – Dedução das equações de movimento

Sejam três corpos providos de massas m_1, m_2 e m_3 , de dimensões N_1, N_2 e N_3 ($1 \leq N_1, N_2, N_3 \leq 3$) e um sistema inercial arbitrário O , as equações que definem o movimento do centro de massa de cada um dos corpos em relação à origem são:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= m_1 \frac{d^2 \mathbf{R}_1}{dt^2} = \nabla_1 U + \nabla_1 U_{13} \\ \mathbf{F}_2 &= m_2 \frac{d^2 \mathbf{R}_2}{dt^2} = \nabla_2 U + \nabla_2 U_{23} \\ \mathbf{F}_3 &= m_3 \frac{d^2 \mathbf{R}_3}{dt^2} = \nabla_3 (U_{13} + U_{23}) \end{aligned} \quad (128)$$

Definamos:

- $\mathbf{F}_1$: Força gravitacional exercida no corpo 1.
- $\mathbf{F}_2$: Força gravitacional exercida no corpo 2.
- $\mathbf{F}_3$: Força gravitacional exercida no corpo 3.
- U : Energia potencial gravitacional mútua dos corpos 1 e 2.
- U_{13} : Energia potencial gravitacional mútua dos corpos 1 e 3.
- U_{23} : Energia potencial gravitacional mútua dos corpos 2 e 3.
- $\mathbf{R}_1$: Vetor posição do centro de massa do corpo 1 em relação ao sistema inercial arbitrário.
- $\mathbf{R}_2$: Vetor posição do centro de massa do corpo 2 em relação ao sistema inercial arbitrário.

- $\mathbf{R}_3$: Vetor posição do centro de massa do corpo 3 em relação ao sistema inercial arbitrário.

O operador gradiente com subíndice i tem a seguinte forma:

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial X_i} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial}{\partial Y_i} \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial}{\partial Z_i} \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (129)$$

Onde $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ são os versores do sistema inercial arbitrário e (X_i, Y_i, Z_i) as componentes do vetor que localiza o corpo i ($i=1,2$ ou 3) neste sistema.

Em um sistema físico que o corpo 1 é um planeta (ou um planeta-anão), o corpo 2 um satélite e o corpo 3 uma estrela (ex: o Sol), é conveniente trabalharmos com as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (X, Y, Z) &= \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{r}_\odot &= (X_\odot, Y_\odot, Z_\odot) &= \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 \end{aligned} \quad (130)$$

Deste modo, reescrevemos as equações do movimento:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \nabla_2 U - \frac{1}{m_1} \nabla_1 U + \frac{1}{m_2} \nabla_2 U_{23} - \frac{1}{m_1} \nabla_1 U_{13} \quad (131)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_\odot}{dt^2} = \frac{1}{m_3} \nabla_3 (U_{13} + U_{23}) - \frac{1}{m_1} \nabla_1 (U + U_{13}) \quad (132)$$

Note que agora o sistema de coordenadas não é mais um sistema inercial. Deste modo as equações de movimento serão reescritas de modo que a derivada segunda no tempo do vetor posição do satélite, relativo ao planeta, esteja em função de um único potencial, que virá a ser definido.

Em (131) temos a equação do movimento do satélite em relação ao planeta, enquanto que em (132) temos a equação do movimento da estrela (ex: Sol) em relação ao planeta.

No primeiro caso, considera-se um sistema com três corpos, onde o planeta é um esferoide com simetria de rotação ($A=B$), de densidade homogênea, e o satélite e o Sol são massas pontuais. Deste modo, as energias potenciais gravitacionais destas interações gravitacionais possuem a seguinte forma (BROUWER; CLEMENCE, 1961):

$$U = \frac{k^2 m_1 m_2}{r} \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{r^i} P_i(\sin \phi) \right] \quad (133)$$

$$U_{13} = \frac{k^2 m_1 m_3}{r_{\odot}} \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{r_{\odot}^i} P_i(\sin \phi_{\odot}) \right] \quad (134)$$

$$U_{23} = \frac{k^2 m_2 m_3}{|\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}|} \quad (135)$$

Onde P_i são os polinômios de Legendre e ϕ_i a latitude do corpo i ($i=2$ ou 3) em um sistema de coordenadas fixo no equador do planeta.

Para a interação Planeta-Satélite consideramos termos de até segunda ordem de (133) e para a interação Planeta-Sol (134) apenas termos de ordem zero, de modo que a energia potencial assume a mesma forma que em (135). Veja que para o caso em estudo, Plutão-Charonte e Sol, $r/r_{\odot} \ll 1$, o que justifica tal simplificação.

A energia potencial U toma a seguinte forma:

$$U = \frac{k^2 m_1 m_2}{r} + \frac{3k^2 m_1 m_2 R^2 J_2}{2r^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \phi \right) \quad (136)$$

Basta agora reescrever os gradientes ∇_1 e ∇_2 como função do gradiente correspondente à nova coordenada para simplificar as equações. Em BROUWER & CLEMENCE (1961) fica evidente que a energia potencial gravitacional mútua do par corpo finito/massa puntual é função da distância relativa entre o centro de massa do corpo finito e a massa puntual e também da atitude do corpo finito. As mesmas considerações valem para o caso do par corpo finito-corpo finito, salvo que tal energia potencial depende obviamente também da atitude do segundo corpo.

Vale explicitar a seguinte dependência da energia potencial U nas coordenadas antigas e novas:

$$U = U(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) = U(\mathbf{r}) \quad (137)$$

O que nos permite fazer as seguintes correspondências:

$$\begin{aligned} \nabla_1 U &= -\nabla U \\ \nabla_2 U &= +\nabla U \end{aligned} \quad (138)$$

Fazendo as devidas simplificações em (131) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -\frac{k^2(m_1+m_2)}{r^3} \mathbf{r} + \nabla \left[\frac{3k^2(m_1+m_2)R^2 J_2}{2r^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \phi \right) \right] + \\ &k^2 m_3 \left[\frac{(\mathbf{r}_\odot - \mathbf{r})}{\|\mathbf{r}_\odot - \mathbf{r}\|^3} - \frac{\mathbf{r}_\odot}{r_\odot^3} \right] \end{aligned} \quad (139)$$

Escrevendo o último termo em função de um potencial:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{k^2(m_1+m_2)}{r^3} \mathbf{r} + \nabla \left[\frac{3k^2(m_1+m_2)R^2 J_2}{2r^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \phi \right) + k^2 m_{\odot} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}\|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\odot}}{r_{\odot}^3} \right) \right] \quad (140)$$

De outro modo:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{k^2(m_1+m_2)}{r^3} \mathbf{r} + \nabla (R_{J_2} + R_{\odot}) \quad (141)$$

O último termo de (140) e (141) representam a perturbação solar no movimento orbital do satélite em torno do planeta. Como neste caso $r/r_{\odot} \ll 1$, pode-se reescrever este último termo da seguinte forma (BROUWER; CLEMENCE, 1961):

$$R_{\odot} = \frac{k^2 m_{\odot}}{r_{\odot}} \left[\frac{r^2}{r_{\odot}^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos S \right) + \frac{r^3}{r_{\odot}^3} \left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \cos^3 S \right) + \dots \right] \quad (142)$$

Retendo apenas os termos de 2ª ordem obtém-se:

$$R_{\odot} = \frac{k^2 m_{\odot}}{r_{\odot}^3} r^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos S \right) \quad (143)$$

Assim, todas as equações do movimento para o caso Plutão-Caronte e Sol foram definidas. Note que as equações para o movimento relativo do Sol não foram desenvolvidas, uma vez que não são utilizadas neste trabalho. O movimento heliocêntrico do planeta-anão (no caso Plutão) são obtidas diretamente das equações seculares de DOBROVOLSKIS et al., (1997).

Na seção 4, o sistema físico consiste de dois corpos finitos providos de massas m_1 e m_2 , onde m_1 é o primário (ex: Plutão) e m_2 o satélite (ex: Caronte). Ambos são considerados corpos finitos (ex: esferoide de momentos de inércia $A < B < C$) e de densidade homogênea. O binário está também submetido às forças de maré, assim o corpo 1 é perturbado pela maré que levanta no corpo 2, e o corpo 2 é perturbado pela maré que levanta no corpo 1. Da terceira Lei de Newton, existe também uma força no corpo 1/corpo 2, devido a maré levantada neste pelo corpo 2/corpo 1.

As equações do movimento tomam a forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= m_1 \frac{d^2 \mathbf{R}_1}{dt^2} = \nabla_1 U + (\mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{21}) \\ \mathbf{F}_2 &= m_2 \frac{d^2 \mathbf{R}_2}{dt^2} = \nabla_2 U + (\mathbf{F}_{21} - \mathbf{F}_{12}) \end{aligned} \quad (144)$$

Onde $\mathbf{F}_{12}$ é a força no corpo 1 devido a maré que o mesmo levanta no corpo 2, $\mathbf{F}_{21}$ a força no corpo 2 devido a maré que o mesmo levanta no corpo 1 (CHENG; LEE; PEALE, 2014; MIGNARD, 1980).

Expandindo a energia potencial gravitacional U em polinômios de Legendre e retendo até os termos de 2ª ordem (BROUWER; CLEMENCE, 1961):

$$\begin{aligned} U &= \frac{k^2 m_1 m_2}{r} + \frac{k^2 m_2}{r^3} \left[\frac{1}{2} (A_1 + B_1 + C_1) - \frac{3}{2} (A_1 a_1^2 + B_1 b_1^2 + C_1 c_1^2) \right] + \\ &+ \frac{k^2 m_1}{r^3} \left[\frac{1}{2} (A_2 + B_2 + C_2) - \frac{3}{2} (A_2 a_2^2 + B_2 b_2^2 + C_2 c_2^2) \right] \end{aligned} \quad (145)$$

Onde A_i, B_i e C_i são os momentos principais de inércia do corpo i e (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) os cossenos diretores da linha que une os centros de massa dos corpos 1 e 2 em relação aos seus respectivos eixos principais de inércia.

As mesmas considerações expressas em (137) e (138) valem para U de

modo que as equações de movimento (144) podem ser reescritas em função do vetor $\mathbf{r}$ e suas componentes:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \nabla U + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} (\mathbf{F}_{21} - \mathbf{F}_{12}) \quad (146)$$

ANEXO A – VARIÁVEIS DE ANDOYER

As variáveis de Andoyer são um conjunto de variáveis canônicas. Por intermédio delas relaciona-se um sistema móvel, no equador de um corpo, a um sistema fundamental.

É formado por dois conjuntos de ângulos de Euler: (h, K, g) e (g, J, I) . O primeiro conjunto relaciona o sistema normal ao fundamental, enquanto que o segundo relaciona o sistema equatorial ao sistema normal (NOYELLES; LEMAITRE; VIENNE, 2008).

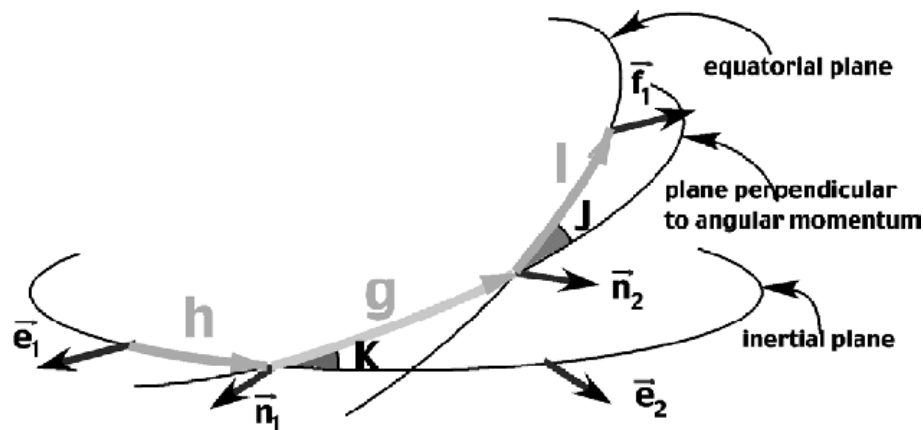


Figura 16. Ângulos de Andoyer (HENRARD, 2005).

As variáveis canônicas são formadas pelos ângulos (l, g, h) e seus respectivos momentos conjugados são (L, G, H) . O momento conjugado L é o módulo da projeção do momento angular de rotação G do corpo sobre o eixo $\mathbf{n}_3$, portanto $L = G \cos J$. O terceiro, H , é o módulo da projeção de G sobre o eixo $\mathbf{e}_3$, assim, $H = G \cos K$.

O sistema $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ relaciona-se com o fundamental $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ através das seguintes relações:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_f = T_3(l)T_1(J)T_3(g)T_1(K)T_3(h)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_e \quad (147)$$

As matrizes de rotação têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_3(h) &= \begin{bmatrix} \cosh h & \sinh h & 0 \\ -\sinh h & \cosh h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & T_1(K) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos K & \sin K \\ 0 & -\sin K & \cos K \end{bmatrix} \\ T_3(g) &= \begin{bmatrix} \cos g & \sin g & 0 \\ -\sin g & \cos g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & T_1(J) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos J & \sin J \\ 0 & -\sin J & \cos J \end{bmatrix} \\ T_3(l) &= \begin{bmatrix} \cos l & \sin l & 0 \\ -\sin l & \cos l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (148)$$