



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Sistemas dinâmicos e o método do filtro de Kalman

Jose Gregorio Solorzano Movilla

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-
Graduação em Matemática como requisito
parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Selene Maria Coelho Loibel

517.39 Solorzano Movilla, Jose Gregorio
S689s Sistemas dinâmicos e o método do filtro de Kalman/ Jose Grego-
rio Solorzano Movilla- Rio Claro: [s.n.], .
60 f., il., gráfs., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Insti-
tuto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Selene Maria Coelho Loibel

1. Sistemas dinâmicos. 2. Processos estocásticos. 3. Estimação.
4. Filtro de Kalman. I. Título

TERMO DE APROVAÇÃO

Jose Gregorio Solorzano Movilla

SISTEMAS DINÂMICOS E O MÉTODO DO FILTRO DE KALMAN

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Selene Maria Coelho Loibel
Orientadora

Prof. Dr. Maiko Fernandes Buzzi
Departamento Acadêmico de Matemática-
Universidade Tecnológica Federal do Parana

Profa. Dra. Carmen Maria Andreazza
Departamento de Estatística Matemática Aplicada e Computação-
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho-Câmpus Rio Claro

Rio Claro, 19 de Dezembro de 2016

À Deus e minha família

Agradecimentos

Agradeço à Corporación Universitaria Americana pelo apoio, oportunidade e confiança neste processo de estudos de mestrado. À minha orientadora por sua paciência, apoio e disposição para me ajudar. À Unesp por me receber com seus braços abertos. À todos meus professores por me ensinar e despertar em mim de novo o amor pelo aprendizado da matemática com maior profundidade e tomar o rumo certo da vida científica.

*Las matemáticas son el alfabeto
con el cual Dios ha escrito el Universo.*
Galileo Galilei

Resumo

Estimar os estados de um sistema é um problema que a cada dia assume maior importância devido ao grande interesse por conhecer com exatidão os resultados dados pelos sistemas dinâmicos em qualquer tempo. Principalmente nos casos onde o sistema é estocástico, o problema da estimação apresenta uma maior complexidade. É nesse contexto que os estudos que Kalman realizou no século XX, sobre a estimação de sistemas dinâmicos estocásticos, ganharam maior relevância. O filtro de Kalman foi o principal resultado desses estudos, pela eficácia demonstrada dentro desse campo de estudo. Este trabalho tem como eixo principal o filtro de Kalman e sua aplicação tendo importância como o melhor estimador para os estados de sistemas dinâmicos lineares estocásticos em tempo discreto.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos, Processos estocásticos, Estimação, Filtro de Kalman.

Abstract

Estimating the states of a system is a problem of great importance due to interest in knowing exactly the results given by dynamic systems at any time. Moreover, if the system is stochastic, what causes the estimation problem to have complexity. In this context, Kalman studies in the previous century on the estimation of stochastic dynamical systems, whose result is the filter, which, due to its efficiency, is the most used in this field. In this work the main focus is the Kalman filter and its application having in view its importance as the best estimator for the states of linear dynamic stochastic systems of discrete time.

Keywords: Dynamical systems, stochastic processes, estimation, Kalman Filter.

Lista de Figuras

2.1	Realizações de um processo estocástico	17
3.1	Sistema linear	28
3.2	Classes de Filtros	29
3.3	Etapas do Filtro de Kalman	30
5.1	Trajétoria movimento balístico	46
5.2	Trajectoria do modelo versus medidas da câmara	46
5.3	Filtragem com $R=0,0075$; $R=1$ e $R=10$	49
5.4	Exemplo do Tanque	51
5.5	Nível de tanque constante	53
5.6	Filtragem com $q=0,001$ e $q=0,01$	54
5.7	Filtragem com $q=0,1$ e $q=1$	55
5.8	Filtragem com $R=0,01$ e $R=0,001$	55

Lista de Tabelas

5.1	Iterações caso do tanque nível constante	53
-----	--	----

Sumário

1	Introdução	10
2	Processos estocásticos e Sistemas Dinâmicos	16
2.1	Realização de um processo	17
2.2	Caracterização de um Processo Estocástico	18
2.3	Valor esperado e variância de $X(t)$ contínuo	19
2.4	Covariância	19
2.5	Definições adicionais	20
2.6	Sistemas Dinâmicos	21
2.7	Equações em espaço de estados	25
3	Filtro de Kalman	27
3.1	Filtro de Kalman com filtragem	29
3.2	Filtro de Kalman com predição	33
4	Filtro de Kalman como estimador <i>BLUE</i>	37
4.1	Estimação linear	37
4.2	O melhor estimador	38
4.3	Estimador não viciado	39
4.4	Estimador <i>BLUE</i>	39
4.5	Filtro de Kalman como estimador <i>BLUE</i>	41
5	Aplicações	45
5.1	Movimento balístico	45
5.2	Nível da água em um tanque	50
5.3	Conclusão e propostas futuras	56
	Referências	57

1 Introdução

O algoritmo de Kalman constitui o principal método para estimar os estados dos sistemas dinâmicos representados em forma de espaço de estados (*State-Space*), que pode ser aplicado por exemplo na robótica, no processamento digital de sinais, nas comunicações, entre outros. O filtro tem a sua origem no documento de Kalman, (1960), [1] que descreve uma solução recursiva para o problema de filtragem linear de dados discretos. A Abordagem de Kalman estava dentro de um contexto mais amplo de modelos de espaço de estados, onde a ênfase era o estimador por mínimos quadrados recursivos. O grande progresso observado no uso desse método ocorreu devido aos avanços tecnológicos na computação digital. O filtro de Kalman (daqui em diante citado como FK), é objeto de estudo de extenso número de pesquisas e aplicações, em particular na área de navegação autônoma e assistida em mísseis de rastreamento, em economia, além de outras.

O filtro de Kalman é um conjunto de equações matemáticas que fornecem uma solução recursiva eficiente aplicando o método dos mínimos quadrados. Esta solução permite calcular o melhor estimador linear, não viciado do estado de um processo em cada ponto no tempo com base nas informações disponíveis até o período anterior, [2].

A notação de espaço de estados é essencialmente uma forma conveniente para a estimativa de modelos estocásticos onde os erros são assumidos na medição do sistema, permitindo o gerenciamento para lidar com uma vasta gama de modelos. Aplicações particulares usam componentes e parâmetros que mudam ao longo do tempo e não são observáveis. As aplicações do desenvolvimento e princípios do filtro de Kalman ocorreram durante a Guerra Fria entre a União Soviética e a Organização do Tratado do Atlântico Norte e América do Norte, já que nos anos da década de 1950 os soviéticos lançaram o primeiro satélite artificial e o primeiro vôo espacial tripulado. Este fato conduziu a um aumento no investimento na área aeroespacial nos Estados Unidos. Durante o período de progressos tecnológicos que permitiram a chegada do homem à lua, foi observado que existiam problemas relacionados aos dados provenientes de diferentes cálculos de trajetórias de vôos. Na década de 1960, Kalman foi convidado como orador para explicar seu algoritmo aos engenheiros da NASA que trabalhavam no projeto chamado Apollo 11. O uso do FK foi uma ferramenta determinante no sucesso da missão em 1969, [3].

O filtro de Kalman é a ferramenta mais usada para estimar os estados de um sistema dinâmico estocástico,[4]. Este possui três formas: a) filtro de Kalman para sistemas lineares, b) o filtro de Kalman Estendido EKF(do inglês, *Extended Filter Kalman*), para sistemas não lineares e c) o filtro de Kalman *unscented* UFK(do inglês, *Unscented Filter Kalman*) para sistemas mais complexos.

O primeiro tipo de FK procura a melhor estimacão do estado a partir dos estados anteriores, considerando os sistemas lineares, [4]. Já o segundo tipo de FK, o estendido, trata-se de uma variação do filtro de Kalman para resolver o problema da estimativa do estado quando o modelo é possivelmente não linear. Para isso o EKF aproxima a distribuição de probabilidade real do estado X em cada instante, o EKF é, então, uma forma de obter aproximações de primeira ordem dos termos ótimos, [5].

O terceiro tipo de FK, o *unscented*, é o resultado da aplicação da transformação *unscented* no FK. A transformação *unscented* é um método usado para calcular os primeiros momentos da função de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória $Y = f(X)$ resultante da aplicação de uma transformação não linear f a uma variável aleatória X , [5].

Na atualidade, existem muitos casos onde o FK é usado em qualquer de suas três formas. Eles podem-se agrupar em seis categorias:

- Robótica, telecomunicações e processamento de sinal digital.

No caso do processamento de sinal digital, Mateos em 2007), [6], apresentou um trabalho em reconhecimento facial usando câmeras digitais. O objetivo foi melhorar as imagens gravadas pelas câmeras e as posições esperadas dos rostos em cada nova imagem na seqüência. Isto é, uma estimativa baseada nas posições e velocidades de instantes anteriores. O método de predição usado foi o filtro de Kalman, obtendo uma melhora de 30% em relação à imagem e cor.

Enquanto na robótica, Alezones em 2016, [7], e Maia *et al.* em 2010, [8], usaram o FK com robôs móveis, tomando o sinal de informação a partir do ambiente, a predição refere-se ao caminho correto que deve tomar o robô. A melhora atingida foi de 10% no primeiro trabalho e 30% no segundo.

Também, Font e Batle em 2006, [9], apresentaram um método alternativo para resolver o problema de posicionamento dinâmico de um robô. Considera um posicionamento típico utilizando medidas de ângulo reto entre um ponto do robô e o ambiente conhecido, obtidos por um "scanner" a laser rotativo. A partir destas medições, os algoritmos de triangulação determinam a posição e orientação do robô móvel. A partir dos resultados, a utilização do filtro de Kalman diminuiu o valor absoluto de erro da lateral média de 5 milímetros a 3 milímetros, o que representou uma redução de 40%.

Outra aplicação foi desenvolvida por Sabatini em 2011, [10], para melhorar os modelos de sensores em $2D$ e $3D$, que mediam sinais do corpo, como pressão,

temperatura, entre outros. Com a aplicação do EFK a exatidão aumentou em 40%.

Em telecomunicações, Castañeda *et al.* em 2013, [11], encontraram que o filtro de Kalman é uma aplicação ideal para a eliminação de ruído e que remove seletivamente sinais indesejados e permite o acesso direto à informação encontrada no sinal. Isto é conseguido com base nas descrições de probabilidade e utilizando os modelos de espaço de estados, assim conduzindo à eliminação das perturbações.

- *GPS* e rastreamento para rotas de transporte.

É importante destacar que o primeiro Sistema de Posicionamento Global (GPS), foi posto em serviço em 1993 pelo Departamento da Defesa dos Estados Unidos da América. A filtragem de Kalman desempenhou um papel crítico no desenvolvimento do GPS, o que tem sido descrito como "um enorme filtro de Kalman". Este filtro de Kalman considera um vetor de estado do sistema geral, incluindo as trajetórias dos 24 satélites, as taxas de deriva e fases de todo o sistema de relógios, centenas de parâmetros relacionados às variáveis atmosféricas e ao atraso de propagação, como uma função de tempo e de localização. O GPS utiliza receptores de precisão em todo o mundo como sensores para estimar essas variáveis. Além disso, cada receptor usa um FK para estimar a sua própria posição e velocidade para sincronizar o relógio do receptor com o tempo do GPS,[3].

Também, Gurgel em 2015, [12], usou o FK na estimação de tempos de chegada de ônibus urbano considerando que esta predição depende de uma série de fatores, por exemplo, atrasos em cruzamento de ruas sinalizadas, número de passageiros em pontos de parada etc. Estes fatores aumentam significativamente o nível das incertezas associadas ao processo e à medição. Com a implementação, os resultados foram satisfatórios quanto à predição dos tempos de chegada, obtendo erro percentual médio menor que 3%. Hager e Betaille em 2012, [13], aplicaram o UFK para estimar o tempo da viagem da rede urbana. Com a aplicação do UFK as estimativas melhoraram em 20%.

O congestionamento nas redes rodoviárias é uma das principais questões a serem abordadas pelos sistemas de gestão de tráfego de hoje. A automatização combinada com a crescente penetração no mercado da comunicação em linha, navegação e sistemas avançados de assistência ao condutor resultará em sistemas de auto-estradas inteligentes (em inglês IVHS) que distribuem inteligência entre infraestruturas rodoviárias e veículos, segundo Rios em 2016, [14], e Baskar *et al.* em 2016, [15], o EFK e o UFK, são usados na programação destes sistemas inteligentes.

Outra aplicação foi a desenvolvida por Bianco em 2013, [16], na qual se implementou o FK para suavizar as trajetórias de geolocalização, conseguindo reduzir

o erro nas medidas feitas com dispositivos móveis como os celulares e "tablets" em 30%.

- Sensores industriais e os filtros de partículas.

As aplicações nesta área estão concentradas em melhorar a exatidão dos sistemas industriais, os quais usam sensores para conhecer características do processo de fabricação. Um exemplo é o trabalho de Pavkovic, Deur e Lisac de 2011, [17], que apresentam um EFK para uma indústria de tecidos, melhorando o processo e baixando os custos de produção.

Dowi e Hanza em 2014, [18], aplicaram um UFK para obter maior exatidão nas estimativas de redes elétricas, atingindo uma melhora de 40%.

Einike em 2012, [19], usou um FK para desenvolver um sistema de filtragem para partículas de poeira mais eficiente, e assim evitar o dano de aparelhos expostos a condições climáticas extremas. O resultado da aplicação do FK foi um aumento da vida útil dos aparelhos em 35%.

- Medicina.

Na medicina os trabalhos estão relacionado com as medidas feitas por aparelhos que medem certos processos do corpo humano. Como é o caso do trabalho de Samuel de 2015, [20], que a partir da forma como reage a pupila com determinados estímulos, tenta estimar a probabilidade de que uma pessoa sofra uma doença mental como a esquizofrenia. A dilatação da pupila é medida com um aparelho e o uso do EFK neste caso, foi corrigir algumas diferenças dadas pelo aparelho e o modelo matemático para esta pesquisa. A melhora foi de 25%.

Outro caso foi o trabalho de Sánchez de 2008, [21], que usou o FK para filtrar os sinais biômédicos usados para estimar problemas de sono. Aplicando o algoritmo do FK os resultados tiveram uma exatidão de 90%.

- Climatologia e hidrologia.

No México foi usado para a previsão do clima em tempo real. O problema que motivou a aplicação do FK é que o México é classificado como um dos 30 países do mundo mais expostos a três ou mais tipos de riscos naturais, especialmente por aumento do níveis de chuva que incide proporcionalmente na hidrografia. O objetivo consistiu em aplicar o FK para determinar um alerta contra eventos climáticos extremos obtendo como resultados um sistema altamente confiável na previsão com um erro mínimo, [2].

Na Colômbia, foi usado na previsão da temperatura de várias cidades. Estas eram tomadas em uma base climática durante os meses de maio a outubro. Ao aplicar o FK se conseguiu aumentar a confiabilidade da previsão da temperatura, [22].

Em Portugal foi usado para fazer um estudo comparativo entre as observações de temperatura do ar a 2 metros de altura, em quatro estações sinóticas portuguesas e as suas respectivas previsões, feitas pelo modelo de previsão numérica do tempo do *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* (ECMWF). Mostrou-se que existem erros sistemáticos nas previsões do modelo, que variam conforme a hora do dia, a estação do ano e de local para local. Desta forma, foi desenvolvido um FK para corrigir as previsões feitas pelo modelo do centro europeu para as cidades de Lisboa, Porto, Coimbra e Guarda. Entre as vantagens do Filtro de Kalman, quando comparado com outras técnicas estatísticas, está o fato deste poder atualizar recursivamente os parâmetros, permitindo adaptar-se às alterações feitas no modelo de previsão numérica de tempo e também a diferentes situações meteorológicas que podem variar significativamente ao longo do ano, [23].

- Economia

Na economia, a maior parte dos trabalhos que usam o FK tem como principal objetivo calcular as estimativas do PIB, inflação, entre outros temas relacionados. Neste tipo de aplicação, a principal característica é que os trabalhos são feitos em séries temporais, especialmente feito por Bancos Centrais como é mostrado por Ramírez em 2003, [24]. Também ele é aplicado para o estudo da evolução de moedas locais como apresentou Millán em 2004, [25].

Os parágrafos anteriores mostram como é aplicado o FK e o seu uso frequente.

O tema do FK foi escolhido pela possibilidade de incluir o estudo teórico dos sistemas dinâmicos assim como a aplicação de técnicas de estimação nesse contexto. Isso poderá ampliar as perspectivas de trabalhos futuros de pesquisa em diversas áreas de aplicação, uma vez que a abordagem dos problemas de controle, considerando modelos estocásticos tem sido utilizada cada vez mais em problemas das áreas financeira, econômica, eletrônica, informática, telecomunicações entre outros.

O primeiro objetivo do trabalho é estudar a teoria de sistemas dinâmicos determinísticos e estocásticos e o método de filtro de Kalman. O segundo objetivo é aplicar essa técnica de estimação a dados simulados e, se possível, a um conjunto de dados reais.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: Apresentamos no capítulo 1 uma introdução, no capítulo 2 os conceitos de processos estocásticos e sistemas dinâmicos, em seguida no capítulo 3 tratamos sobre os fundamentos do FK em sua forma discreta. No capítulo 4 apresentamos o FK como o melhor estimador linear não viciado. Finalmente no capítulo 5 se faz um análise de 2 exemplos de aplicações: a primeira, que estuda o movimento balístico e a filtragem da posição a partir do registro digital gravado por uma câmera. A segunda, é sobre um tanque de água em dos situações, uma com o nível da água contaste e a outra com o nível da água aumentando a uma

taxa constante. Também neste capítulo se mostram as conclusões do trabalho e as propostas futuras.

2 Processos estocásticos e Sistemas Dinâmicos

Na natureza podem-se encontrar dois tipos de fenômenos, os determinísticos e os estocásticos. Os fenômenos observados ou experimentos realizados sempre nas mesmas condições e que apresentam os mesmos resultados, são ditos determinísticos. Caso contrário, trata-se de fenômenos ou experimentos estocásticos.

O trabalho aqui apresentado está dentro da área da estimação de processos estocástico, mas, para poder compreender com exatidão como são os processos estocásticos é importante destacar alguns conceitos que determinam as suas características aleatórias. Nesta seção é apresentado um conjunto de definições que servem de iniciação do trabalho e que ajudaram na articulação dos elementos conceituais que se encontram nesta dissertação.

Definição 2.1. *O espaço amostral (Ω) é o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento ou fenômeno aleatório.*

Definição 2.2. *Uma variável aleatória (v.a.) é uma função que atribui um valor numérico a cada resultado individual de uma experiência aleatória. Isto é, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Uma quantidade X , associada a cada possível resultado do espaço amostral, é denominada de variável aleatória discreta, se assume valores num conjunto enumerável, com certa probabilidade. Por outro lado, será denominada variável aleatória contínua, se seu conjunto de valores é qualquer intervalo dos números reais, o que é um conjunto não enumerável.*

Definição 2.3. *Uma família de variáveis aleatórias indexadas em $t \in T$, $\{X(t), t \in T\}$ é chamada de processo estocástico. Para cada $t \in T$, $X(t)$ é uma variável aleatória.*

Definição 2.4. *O espaço de estados de um processo estocástico (E) é o conjunto de todos os possíveis valores que as variáveis $X(t)$ podem assumir.*

Definição 2.5. *Cada um dos valores mencionados na definição anterior é chamado de estado do processo. Por exemplo: Se $X(t) = n$, dizemos que o processo está no estado n , no tempo t .*

Os processos são classificados de acordo com o seu conjunto de índices e pelo seu espaço de estados:

- Processo a parâmetro discreto: Se $K = \{\pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ e denotamos por $\{X_k, k \in K\}$.
- Processo a parâmetro contínuo: Se $T = \{t : -\infty < t < \infty\}$ ou $T = \{t : t \geq 0\}$ e denotamos por $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ ou $\{X(t), t \geq 0\}$.
- O espaço de estados é classificado como discreto se ele é finito ou infinito enumerável e classificado como contínuo se consiste de um intervalo de números reais,[26].

2.1 Realização de um processo

Um processo estocástico é definido em um espaço amostral Ω , tal que para $\omega \in \Omega$ existe uma coleção $\{X(t)^{(\omega)}, t \in T\}$ denominada de realização de X em ω .

- $X(t^*)^{(\omega)}, \omega \in \Omega$, é uma variável aleatória.
- $X(t)^{(\omega^*)}, t \in T$ é uma realização do processo.

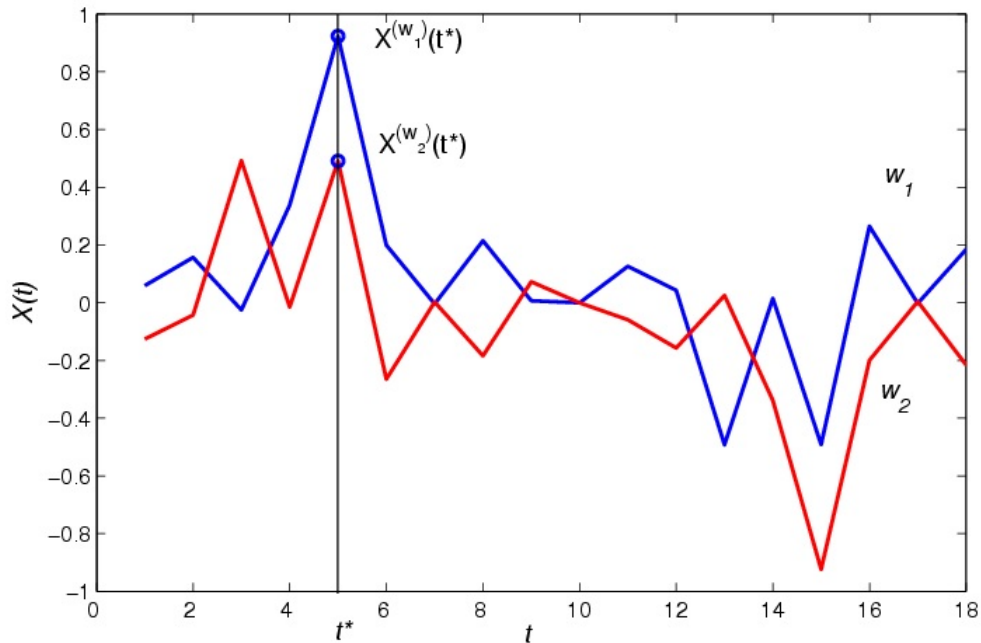


Figura 2.1: Realizações de um processo estocástico

2.2 Caracterização de um Processo Estocástico

Para um melhor entendimento dos conceitos apresentados a seguir definimos:

Definição 2.6. Dizemos que $f(x)$ é uma função contínua de probabilidade ou função densidade de probabilidade para uma variável aleatória contínua X , se satisfaz duas condições:

- i) $f(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty, \infty)$;
- ii) A área definida por $f(x)$ é igual a 1, [27].

Tal que $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$; é a probabilidade que indica a área sob a função f definida pelo intervalo $[a, b]$.

Definição 2.7. Função de distribuição de probabilidade acumulada,
 $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$, sendo X uma v.a. contínua.

Definição 2.8. Seja X uma variável aleatória. O valor $E[(X - b)^k]$, se existe, é chamado k -ésimo momento de X em torno de b , para $b \in \mathbb{R}, k = 1, 2, 3, \dots$.

$$E[(X - b)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - b)^k f_X(x) dx \quad (2.1)$$

O k -ésimo momento de X em torno de zero, $E(X)^k$, é chamado simplesmente de k -ésimo momento de X ou momento de ordem k de X .

Se X é integrável, então o k -ésimo momento em torno da média, $E[X - E(X)]^k$, se chama k -ésimo momento central de X .

O primeiro momento é a esperança de X e o primeiro momento central é nulo: $E[X - E(X)] = 0$. O segundo momento central é chamado de varíância de X , [28]:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X - E(X)]^2 = EX^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2 = \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 = \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned}$$

Definição 2.9. Uma medida da dependência linear entre 2 variáveis aleatórias X e Y é dada pela covariância:

$$\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{X,Y} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)].$$

Em palavras, a covariância é o valor esperado do produto dos desvios de cada variável em relação à sua média, [27].

Um processo estocástico é descrito probabilisticamente por uma distribuição de probabilidade conjunta:

$$F(x_1, \dots, x_n) = P[X(t_1)^{(\omega)} \leq x_1, \dots, X(t_n)^{(\omega)} \leq x_n]$$

para qualquer $t_i \in T, i = 1, \dots, n$, [29].

Quando $X(t)^{(\omega)}$ é um processo com espaço de estados contínuo e $F[X(t)^{(\omega)}]$ é absolutamente contínua, então a definição do processo estocástico pode ser feita em relação à função densidade de probabilidade conjunta:

$$f_{X(t)} = f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$$

Neste caso ele é chamado processo estocástico invariante de primeira ordem.

2.3 Valor esperado e variância de $X(t)$ contínuo

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x) dx = \mu, t \in \mathbb{R}$$

$$V[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_{X(t)}(x) dx$$

A condição para que $E[X(t)] = \mu$ (constante) é:

$$f_{X(t)}(x) = f_{X(t+\tau)}(x), t \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}$$

A condição para que a variância seja constante é que μ seja constante e que $f_{X(t)}$ seja invariante no tempo.

2.4 Covariância

A covariância de um processo estocástico é dada por:

$$\begin{aligned} Cov[X(t), X(t + \tau)] = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu)(x_2 - \mu) f_{X(t)X(t+\tau)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

A condição para que a covariância entre $X(t)$ e $X(t + \tau)$ dependa apenas de τ é que a conjunta $f_{X(t)X(t+\tau)}(\cdot, \cdot)$ seja invariante no tempo, [30]. Quando a covariância é constante o processo estocástico é dito invariante de segunda ordem.

Exemplo 2.1. Processo de Wiener. Um exemplo de processo estocástico a estado e parâmetro contínuos é o movimento Browniano, também conhecido como processo de Wiener.

- ◆ No processo de Wiener a distribuição de probabilidade de $X(s) - X(t)$, $s < t$; $t, s \in T$, é normal com valor esperado $E\{X(s) - X(t)\} = 0$ e variância $V\{X(s) - X(t)\} = s - t$.
- ◆ Esse processo é muito usado em várias áreas:
 - Na física, em modelagem estocástica da posição de uma partícula imersa em um fluido;
 - Em economia, para descrever a variação de séries financeiras;
 - Em ecologia, para descrever a variação no tamanho de uma população animal.

2.5 Definições adicionais

Definição 2.10. *Sejam $\{X_k, k \in K\}$ um processo estocástico discreto e*

$$\mu_k = E[X_k],$$

$$\sigma_{ks} = E[(X_k - \mu_k)(X_s - \mu_s)],$$

seu valor esperado e sua covariância. Se diz que $\{X_k, k \in K\}$ é estacionário, se $\mu_k = \mu$ para todo k e σ_{ks} depende somente de $|k - s|$.

Neste trabalho temos interesse em processos estacionários.

Definição 2.11. *Um processo estocástico $\{X_k, k \in K\}$ não está serialmente correlacionado se $\sigma_{ks} = 0$ para todo $t > s > 0$. De outra maneira se diz que o processo está serialmente correlacionado.*

Definição 2.12. *Se $\{X_k, k \in K\}$ segue a mesma distribuição para todo k , dizemos que o processo é identicamente distribuído e se denota por ID; além disso, se $\{X_k, k \in K\}$ não está serialmente correlacionado, então dizemos que é independente e identicamente distribuído, denotado por IID.*

Definição 2.13. *Seja $\{X_k, k \in K\}$ um processo estocástico IID normalmente e que satisfaz*

$$E[X_k] = 0 \text{ para todo } k,$$

$$E[X_k^2] = \sigma^2 \text{ para todo } k.$$

Diz-se, então, que trata-se de um processo de ruído branco. Se a distribuição não é normal, dizemos que trata-se de um processo de ruído,[30].

2.6 Sistemas Dinâmicos

Entende-se um sistema como a combinação de elementos que trabalham juntos para atingir uma meta específica. Pode-se afirmar que um sistema é dito dinâmico, se muda ao longo do tempo e é possível estabelecer que os sistemas dinâmicos servem para entender como evoluem os processos da natureza. A seguir apresenta-se a classificação dos modelos de sistemas dinâmicos:

Definição 2.14. *Sistemas a tempo discreto e sistemas a tempo contínuo. Modelos em tempo discreto descrevem a relação entre entradas e saídas em pontos de tempo discreto. Assume-se que esses pontos sejam equidistantes e o tempo entre dois pontos consecutivos seja usado como unidade de tempo. Nos modelos a tempo contínuo, tem-se que o índice que indica o tempo é contínuo, ou seja é dado em intervalos dos números reais. Normalmente, os modelos a tempo discreto são descritos por equações de diferença, ao passo que os modelos a tempo contínuo são descritos por equações diferenciais.*

Definição 2.15. *Sistemas determinísticos e sistemas estocásticos. Em um modelo determinístico a saída pode ser calculada de forma exata tão logo se conheça o sinal de entrada e as condições iniciais. Em contraste, um modelo estocástico contém termos aleatórios ou perturbações que tornam impossível um cálculo exato da saída. O modelo determinístico engloba apenas o processo, enquanto que o modelo estocástico considera também os ruídos.*

Definição 2.16. *Sistemas SISO e MIMO. Modelos SISO ("Single input, single output") se referem a processos nos quais é feita a descrição da influência de uma entrada sobre uma saída. Quanto tem-se mais variáveis de entrada e saída envolvidas trata-se de um modelo MIMO ("Multiple input, multiple output").*

Definição 2.17. *Sistemas lineares e sistemas não lineares. Um modelo é linear se a(s) saída(s) depende(m) linearmente da(s) entrada(s) e possíveis perturbações, caso contrário ele é não linear. Os modelos são lineares se as variáveis dependentes ou suas derivadas aparecem apenas no primeiro grau.*

Definição 2.18. *Sistemas paramétricos e sistemas não paramétricos. Um modelo paramétrico utiliza em sua estrutura um conjunto de parâmetros. Neste caso, deve-se designar primeiro uma família de funções com uma determinada estrutura, determinar a ordem dessas funções e o valor de seus parâmetros. Exemplos de modelos paramétricos são funções de transferência (a tempo contínuo ou discreto) e modelos em espaço de estados (a tempo contínuo ou discreto).*

Definição 2.19. *Modelos invariantes no tempo e variantes no tempo. Um modelo é dito invariante no tempo se seus parâmetros não variam ao longo do tempo, o oposto ocorre com os modelos variantes no tempo.*

Existem muitos exemplos de sistemas dinâmicos determinísticos. Suponhamos que X_k é uma sequência de variáveis relacionadas pela equação de diferenças seguinte:

$$X_k = \alpha X_{k+1} + \beta, \quad k = 1, 2, \dots$$

Muitas vezes, o valor de uma variável no presente não depende dos valores obtidos no passado, mas do seu futuro, ou mais precisamente o que esperamos que venham a ser os seus valores futuros.

Para estes casos, é conveniente iterar a equação anterior para o futuro da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} X_k &= \alpha(\alpha X_{k+2} + \beta) + \beta \\ X_k &= \alpha(\alpha(\alpha X_{k+3} + \beta) + \beta) + \beta \\ &\dots \\ X_k &= \alpha^n X_{k+n} + \beta \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \end{aligned}$$

A solução existe sempre que: $|\alpha| < 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n X_{k+n}$ existir. Em particular, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n X_{k+n} = 0,$$

a solução é dada por:

$$X_k = \beta \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

Essa parte chama-se parte fundamental da solução. Se $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha^n X_{k+n} \neq 0$, então a solução não é igual a sua parte fundamental.

Entre os modelos de sistemas determinísticos mais conhecidos temos os seguintes:

Equação de Malthus.

Para estudar a evolução da população de uma determinada espécie, denota-se X_k como o número de indivíduos na população no momento k e $X_{k+1} = \alpha X_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Esta equação linear em primeiras diferenças, proposta para estimar o evolução da população humana, é chamada equação de Malthus, que foi um economista e pensador do século XIX. Se $\alpha > 1$, isto é, se houver um aumento natural na população, os valores X_k crescem em progressão geométrica e aumentam de forma exponencial. Esta equação é considerada a primeira chamada de atenção do problema da superpopulação do planeta, [31].

Parábola Logística de May.

Em 1976, o biólogo Robert May propôs outra equação para estudar o crescimento de uma população de insetos em um ecossistema isolado, sistema diferente do de Malthus.

May levou em conta os efeitos da saturação do ecossistema. Quando a população está se aproximando do máximo possível que o ambiente pode suportar, o parâmetro α deve diminuir, o que é equivalente a considerar este parâmetro dependendo do número de indivíduos, α_{X_k} . Isto é considerado por uma equação da forma: $X_{k+1} = \alpha_{X_k} X_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Pode-se tomar como unidade de medida a população máxima possível, de modo que X_k expressa a fração da população existente no momento k referente ao nível máximo da população. May formulou a hipótese de que α_{X_k} deve diminuir de forma linear quando X_k crescer e tornar-se nulo quando X_k atingir o valor 1. Isto significa que α_{X_k} pode ser escrita na forma $\beta(1 - X_k)$ e a equação da parábola logística de May pode ser expressa por: $X_{k+1} = \beta(1 - X_k)X_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ Para valores pequenos de X_k tem-se que $1 - X_k \approx 1$, fazendo a equação anterior equivalente a equação de Malthus, [31].

A seguir, da mesma forma que [32], apresentam-se alguns conceitos básicos para formular equações de sistemas dinâmicos na forma de espaço de estados. É importante definir o que é o estado do sistema e o vetor de estados:

Definição 2.20. *O estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis (chamadas de variáveis de estado), tal que o conhecimento destas variáveis em $t = t_0$, junto com o conhecimento da entrada para $t \geq t_0$, determina completamente o comportamento do sistema para qualquer $t \geq t_0$.*

Definição 2.21. *O vetor de estados é composto pelas variáveis de estado necessárias para descrever completamente o comportamento de um sistema.*

Na análise por espaço de estados interessam três tipos de variáveis envolvidas na modelagem de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado.

Admita que haja r entradas $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$; m saídas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ e que haja n variáveis de estado $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Então o sistema pode ser descrito por:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t)$$

As saídas do sistema são dadas por:

$$y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t)$$

$$y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t)$$

$$\vdots$$

$$y_n(t) = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t)$$

Define-se

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

$$g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

Então este sistema dinâmico pode ser descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{x}(t) = f(x, u, t) \text{ (equações de estado)} \\ y(t) = g(x, u, t) \text{ (equações de saída)} \end{cases}$$

Se as equações de estado e de saída são lineares, resulta:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

sendo:

$A(t)$: matriz de estado

$B(t)$: matriz de entrada

$C(t)$: matriz de saída

$D(t)$: matriz de transmissão direta

Se o sistema, além de linear, é invariante no tempo, tem-se que:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

De acordo com o definido anteriormente qualquer representação de sistemas dinâmicos dada por uma ou mais equações diferenciais (ou a diferenças) de qualquer ordem pode ser expressa na forma de um sistema de equações diferenciais (ou a diferenças) de primeira ordem.

2.7 Equações em espaço de estados

Embora a representação por espaço de estados não seja única, ela sempre assume a forma para o caso de dinâmica em tempo contínuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

e para o caso de dinâmica em tempo discreto

$$\begin{cases} X_{k+1} = AX_k + Bu_k \\ y_k = CX_k \end{cases}$$

Nos casos contínuo e discreto, a primeira equação é chamada de equação de estado e a segunda recebe a denominação de equação de saída.

Existem técnicas amplamente utilizadas para analisar estes sistemas como a transformada de Laplace, o princípio de soma vetorial, a transformada de Fourier, entre outras. Também é comum recorrer a métodos geométricos para exibir a evolução do sistema ao longo do tempo.

Ao discretizar o tempo é possível introduzir elementos estocásticos de maneira relativamente simples. Em geral em um modelo discreto se usam os períodos: Primeiro período, segundo período, etc. Considerando-se o tempo como uma variável discreta

que pode assumir valores $k = 0, 1, 2, \dots, n$, então, uma função que depende dessa variável, $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, é simplesmente uma sequência de vetores $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$. Supondo-se que cada vetor é associado com o vetor anterior, por uma relação dada de forma geral por:

$$X_{k+1} = f(X_k), \quad (2.2)$$

sendo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial. A imagem da função f é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, chamado de conjunto de estados. Em geral, pode-se dizer que os vetores X são tomados dentro de um conjunto de estados, E , que é um subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Assim, um sistema dinâmico discreto pode ser considerado como uma função $f : E \rightarrow E$, [30].

3 Filtro de Kalman

Este capítulo apresenta o método descrito por Rudolf Kalman [1], em 1958, em um sistema determinístico que funcionaria da seguinte forma:

- Em primeiro lugar, é construído um modelo do sistema a partir das leis que definem sua dinâmica,
- Em segundo lugar, são estudadas sua estrutura e sua resposta,
- Finalmente, são feitas previsões de como o sistema é afetado pelas características compensadoras do sistema ou reguladoras.

Na realidade, os sistemas determinísticos são aproximações, pois não existe um modelo matemático perfeito para um sistema real. Além disso, existem perturbações que não se pode modelar de forma determinística. Estes fatos levam a algumas questões:

- Como desenvolver modelos de sistemas que levem em conta as incertezas?
- Como estimar de forma ótima os estados de um sistema sujeito a ruídos?

O filtro de Kalman é um algoritmo de processamento de dados recursivo, cujo objetivo é minimizar um critério e que incorpora toda a informação que é fornecida para determinar a filtragem. Recursivo porque não requer manutenção dos dados anteriores, o que facilita a sua aplicação em sistemas de processamento em tempo real. Por último, algoritmo de processamento de dados uma vez que é um filtro concebido para sistemas discretos. O objetivo do filtro de Kalman é estimar os estados de uma maneira ótima, de modo que o erro quadrático médio é minimizado [33]. Um sistema linear pode ser expresso em espaço de estados pelas equações:

$$X_{k+1} = AX_k + Bu_k + v_k \tag{3.1}$$

$$y_k = CX_k + w_k \tag{3.2}$$

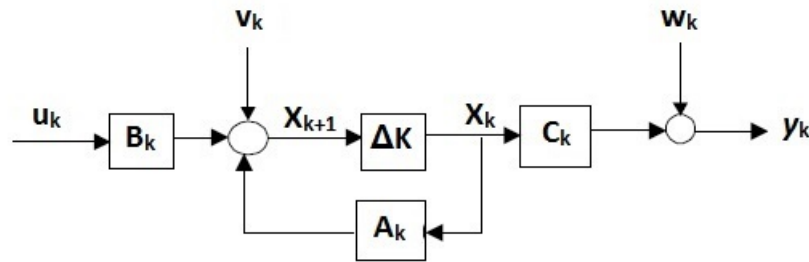


Figura 3.1: Sistema linear

Sendo:

X_k : Estado do sistema

y_k : Saída ou observação do sistema

w_k : Ruído branco associado à saída, com distribuição normal com média 0 (zero) e matriz de covariância R , denotando-se essa condição por $w_k \sim N(0, R)$, para todo k .

v_k : Ruído branco associado ao sistema, com distribuição normal com média 0 (zero) e matriz de covariância Q , denotando-se essa condição por $v_k \sim N(0, Q)$, para todo k .

A, B, C : Matrizes determinísticas que definem a dinâmica do sistema.

Devem-se considerar as seguintes estatísticas dos ruídos e as relações entre ruídos e estados:

$$E[X_0] = X_0$$

$$E[w_k] = 0, \forall k$$

$$E[v_k] = 0, \forall k$$

$$E[X_0 w_k] = 0, \forall k$$

$$E[X_k v_k] = 0, \forall k$$

$$E[v_k w_j] = 0, \forall k$$

$$E[w_k w_j] = 0, \forall k \neq j$$

$$E[w_k w_k] = R$$

$$E[v_k v_k] = Q$$

$$E[v_k v_j] = 0, \forall k \neq j$$

$$E[X_0 X_k] = P_0, \forall k$$

Com P_0 sendo a matriz de covariância dos erros inicial, Q é a matriz de covariância dos ruídos associados ao sistema e R é a matriz de covariância dos ruídos associados à saída. As matrizes de covariância Q e R são diagonais e portanto simétricas.

Em um sistema real, podemos observar o valor da saída y_k , que incorpora uma série de incertezas associadas ao instrumento de medida e ao sistema em si. Se necessitamos

conhecer a evolução dos estados X_k , teremos que estimar esses valores. O filtro de Kalman propõe um método para obter um estimador ótimo do estado. Se supomos que $\hat{X}_k$ é a estimador do estado no instante k , o filtro de Kalman procurará obter esse valor de maneira que minimize o erro quadrático médio. Definindo o erro como:

$$e_k = X_k - \hat{X}_k \quad (3.3)$$

O objetivo, portanto, é minimizar o erro quadrático médio

$$P_k = E\{e_k e_k^T\}. \quad (3.4)$$

Dependendo de k em (3.4), teremos distintas representações do filtro de Kalman, como podemos observar na figura (3.2).

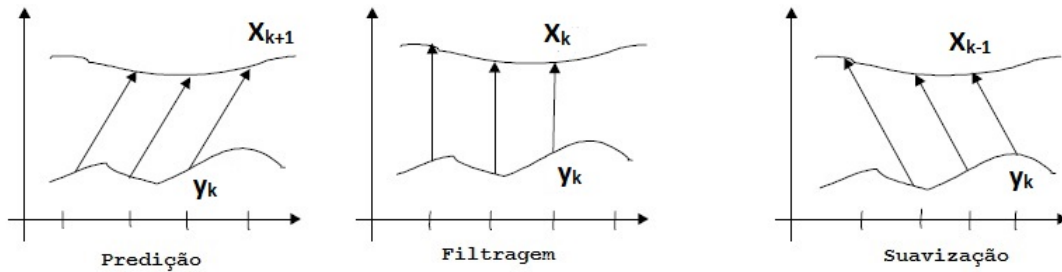


Figura 3.2: Classes de Filtros

3.1 Filtro de Kalman com filtragem

O objetivo é determinar os valores de $\hat{X}_k$ conhecendo as medidas de saída $y_0, y_1, \dots, y_k$ para que P_k seja mínima. A filtragem de $\hat{X}_{k+1}$ proposta por Kalman é feita a partir do estado anterior e de um fator de correção, que é função do erro.

O algoritmo tem dois passos que são executados de maneira iterativa. Predição: antes de ter a medida y_{k+1} e correção ou atualização do estado. A figura (3.3) mostra o processo do cálculo.

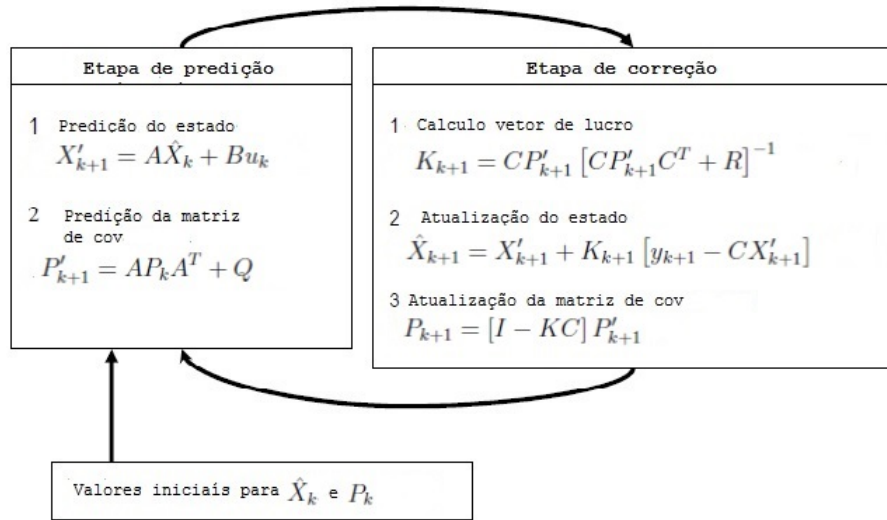


Figura 3.3: Etapas do Filtro de Kalman

De acordo com a figura (3.3) o filtro de Kalman com filtragem tem dois passos, o primeiro chamado estimação e o segundo denominado Correção.

Primero passo: Estimação

Calcula-se uma predição do estado X_{k+1} , o que denota-se por X'_{k+1} . O valor da predição é calculado a partir do valor mais atualizado do estado $\hat{X}_k$.

$$X'_{k+1} = A\hat{X}_k + Bu_k \quad (3.5)$$

Assim se o erro é definido por:

$$e'_{k+1} = X_{k+1} - X'_{k+1} \quad (3.6)$$

Então e'_{k+1} , nesta etapa de predição, tem o valor:

$$e'_{k+1} = AX_k + Bu_k + v_k - A\hat{X}_k - Bu_k$$

A matriz de covariância do erro é dada por:

$$\begin{aligned} P'_{k+1} &= E\left\{\left[A(X_k - \hat{X}_k) + v_k\right]\left[A(X_k - \hat{X}_k) + v_k\right]^T\right\} \\ P'_{k+1} &= E\left\{\left[A(X_k - \hat{X}_k) + v_k\right]\left[(A(X_k - \hat{X}_k))^T + (v_k)^T\right]\right\} \\ P'_{k+1} &= \\ E\left\{\left[A(X_k - \hat{X}_k)(A(X_k - \hat{X}_k))^T + v_k^T(A(X_k - \hat{X}_k)) + v_k(A(X_k - \hat{X}_k))^T + v_k(v_k)^T\right]\right\} \\ P'_{k+1} &= \\ E\left\{\left[A(X_k - \hat{X}_k)(A(X_k - \hat{X}_k))^T\right]\right\} + E\left\{v_k^T(A(X_k - \hat{X}_k))\right\} + E\left\{v_k(A(X_k - \hat{X}_k))^T\right\} + \\ &+ E\left\{v_k v_k^T\right\} \\ \text{como } E[v_k] &= 0, \forall k \text{ e } E[v_k^T] = 0, \forall k \end{aligned}$$

obtém-se portanto $P'_{k+1} = E\{[A(X_k - \hat{X}_k)] [A(X_k - \hat{X}_k)]^T\} + E\{v_k v_k^T\}$, sendo $E\{v_k v_k^T\}$, a matriz de covariância associada ao processo: Q . Portanto:

$$P'_{k+1} = AP_k A^T + Q \quad (3.7)$$

Segundo passo: Correção

O valor do estado é calculado a partir do estado anterior e de uma correção que é função do erro, [34], isto é:

$$\hat{X}_{k+1} = X'_{k+1} + K_{k+1} [y_{k+1} - CX'_{k+1}] \quad (3.8)$$

Sendo que o fator de correção é:

$$K_{k+1} [y_{k+1} - CX'_{k+1}] \quad (3.9)$$

e y_{k+1} é o último valor observado.

X'_{k+1} é o valor mais atualizado disponível do estado que foi calculado na fase de predição.

Procura-se o valor de K_{k+1} para obter um valor ótimo de $\hat{X}_{k+1}$ tal que a matriz de covariância do erro seja mínima. Observando a equação (3.3) onde se define o erro como $e_{k+1} = X_{k+1} - \hat{X}_{k+1}$ e com (3.8) tem-se:

$$e_{k+1} = X_{k+1} - X'_{k+1} - K_{k+1} [y_{k+1} - CX'_{k+1}]$$

Como, de (3.2) resulta:

$$y_{k+1} = CX_{k+1} + w_{k+1}$$

Portanto:

$$e_{k+1} = X_{k+1} - X'_{k+1} - K_{k+1}w_{k+1} + K_{k+1}CX'_{k+1} - K_{k+1}CX_{k+1}$$

e finalmente:

$$e_{k+1} = [I - K_{k+1}C] (X_{k+1} - X'_{k+1} - K_{k+1}w_{k+1})$$

Assim, de acordo com (3.4) e simplificando a notação com $K = K_{k+1}$:

$$P_{k+1} = E\{[(I - KC)(X_{k+1} - X'_{k+1}) - Kw_{k+1}][(I - KC)(X_{k+1} - X'_{k+1}) - Kw_{k+1}]^T\}$$

$$P_{k+1} = E\{[(I - KC)(X_{k+1} - X'_{k+1})][(I - KC)(X_{k+1} - X'_{k+1})]^T\} + E\{Kw(k+1)w(k+1)^TK\}$$

Sendo $E\{w_{k+1}w_{k+1}^T\}$ a matriz de covariância associada à medida R , resulta

$$P'_{k+1} = [I - KC] E\{[X_{k+1} - X'_{k+1}]\} [I - KC]^T + KRK^T$$

Anteriormente calculou-se que:

$$P'_{k+1} = E\{[X_{k+1} - X'_{k+1}]^T\}$$

Portanto,

$$P_{k+1} = [I - KC] P'_{k+1} [I - KC]^T + KRK^T, \quad (3.10)$$

Chamando P'_{k+1} de P_1 e P_{k+1} de P :

$$P = [I - KC]P_1[I - KC]^T + K RK^T$$

$$P = [P_1 - KCP_1][I - KC]^T + K RK^T$$

$$P = P_1 - P_1 K^T C^T - KCP_1 + KCP_1 C^T K^T + K RK^T$$

Aplicando o traço:

$$Tr(P) = Tr(P_1) - 2Tr[KCP_1] + Tr[KCPC^T K^T] + Tr[K RK^T]$$

Logo, diferenciando-se a equação em relação a K e igualando-a a zero para obter o mínimo da expressão:

$$\frac{\partial Tr(P)}{\partial K} = -2Tr[CP_1] + 2Tr[CP_1 C^T] + 2Tr[KR] = 0$$

$$2Tr[KCP_1 C^T] + 2Tr[KR] = 2Tr[P_1 C]$$

$$KCP_1 C^T + KR = P_1 C$$

$$K[CP_1 C^T + R] = P_1 C$$

$$K = CP_1 [CP_1 C^T + R]^{-1}$$

Ou seja:

$$K_{k+1} = CP'_{k+1} [CP'_{k+1} C^T + R]^{-1} \quad (3.11)$$

Substituindo (3.9) em (3.10) obtém-se a atualização da matriz de covariância, dada por:

$$P_{k+1} = [I - KC] P'_{k+1} \quad (3.12)$$

Iniciação do algoritmo

Para iniciar o algoritmo é necessário conhecer as seguintes condições iniciais:

Dado um valor inicial do estado, X_0 , como valor da matriz de covariância do erro, pode-se assumir que $P_0 = Q$, bem como os valores das matrizes de covariância associadas ao sistema e à saída: Q e R , respectivamente, o algoritmo segue os seguintes passos:

Na iteração k :

1 Predição:

$$X'_{k+1} = A\hat{X}_k + Bu_k$$

$$P'_{k+1} = AP_kA^T + Q$$

2 Correção:

$$K_{k+1} = CP'_{k+1} [CP'_{k+1}C^T + R]^{-1}$$

Observação y_{k+1}

$$\hat{X}_{k+1} = X'_{k+1} + K_{k+1} [y_{k+1} - CX'_{k+1}]$$

$$P_{k+1} = [I - KC] P'_{k+1}$$

Note-se que o conceito de filtragem é devido aos valores do estado ótimo $\hat{X}_{k+1}$ e da observação y_{k+1} acontecem no mesmo instante.

3.2 Filtro de Kalman com predição

Considerando o sistema linear representado pelas equações:

$$\begin{cases} X_{k+1} = AX_k + Bu_k + v_k \\ y_k = CX_k + w_k \end{cases} \quad (3.13)$$

Como indicado nas definições anteriores, a solução para o preditor do estado vem determinada pelo cálculo do estado no instante anterior e por um fator de correção que é função do erro entre a observação e a estimativa.

$$\begin{cases} \hat{X}_{k+1} = A\hat{X}_k + Bu_k + K_k[y_k - \hat{y}_k] \\ \hat{y}_k = C\hat{X}_k \end{cases} \quad (3.14)$$

Assumindo as condições iniciais, análogas ao caso da filtragem, trata-se aqui de determinar $\hat{X}_{k+1}$, conhecendo as medidas $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k$, para que a matriz P_{k+1} , seja mínima.

O erro no instante $k + 1$ é determinado por:

$$e_{k+1} = X_{k+1} - \hat{X}_{k+1} \quad (3.15)$$

Substituindo em (3.15) as equações (3.13) e (3.14)

$$e_{k+1} = AX_k + Bu_k + v_k - A\hat{X}_k - Bu_k - K_k [CX_k + w_k - C\hat{X}_k]$$

$$e_{k+1} = A [X_k - \hat{X}_k] - CK_k [X_k - \hat{X}_k] - K_k w_k + v_k$$

$$e_k = [X_k - \hat{X}_k]$$

$$e_{k+1} = [A - K_k C] e_k - K_k w_k + v_k$$

Chamando:

$$\hat{A}_k = A - K_k C \quad (3.16)$$

$$\text{Tem-se } e_{k+1} = \hat{A}_k e_k - K_k w_k + v_k$$

Assim, a matriz de covariância do erro pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= E\{e_{k+1}e_{k+1}^T\} = E\{[\hat{A}_k e_k - K_k w_k + v_k][\hat{A}_k e_k - K_k w_k + v_k]^T\} = \\ &= E\{\hat{A}_k e_k e_k^T \hat{A}_k^T - \hat{A}_k e_k K_k^T w_k^T + \hat{A}_k e_k v_k^T - K_k w_k w_k^T - K_k w_k \hat{A}_k^T e_k^T - K_k w_k v_k^T + \\ &+ v_k \hat{A}_k^T e_k^T - v_k K_k^T w_k^T + v_k v_k^T\} \end{aligned}$$

como:

$$\begin{aligned} E\{\hat{A}_k e_k K_k^T w_k^T\} &= E\{K_k w_k \hat{A}_k^T e_k^T\} = 0 \\ E\{\hat{A}_k e_k v_k^T\} &= E\{v_k \hat{A}_k^T e_k^T\} = 0 \\ E\{K_k w_k w_k^T\} &= K_k E\{w_k w_k^T\} K_k^T = K_k R K_k^T \\ E\{K_k w_k v_k^T\} &= E\{v_k K_k^T w_k^T\} = 0 \\ E\{v_k v_k^T\} &= Q \end{aligned}$$

Resulta portanto:

$$P_{k+1} = \hat{A}_k P_k \hat{A}_k^T + K_k R K_k + Q$$

considerando o valor de $\hat{A}_k$ como em (3.16)

$$P_{k+1} = [A - K_k C] P_k [A - K_k C]^T + K_k R K_k + Q \quad (3.17)$$

Depois de calcular a matriz de covariância do erro, é necessário encontrar o valor de K_k que faz com que essa matriz seja mínima:

$$P_{k+1} = AP_kA^T - AP_kK_k^TC^T - K_kCP_kA^T + K_kCP_kK_k^TC^T + K_kRK_k + Q$$

Aplicando o traço:

$$TrP_{k+1} = Tr(AP_kA^T) - 2Tr(K_kCP_kA^T) + Tr(K_kCP_kK_k^TC^T) + Tr(K_kRK_k) + Tr(Q)$$

diferenciando em relação a K_k

$$\frac{\partial Tr(P)}{\partial K_k} = -2Tr(CP_kA^T) + 2Tr(K_kCP_kC^T) + 2Tr(K_kR)$$

Igualando a zero para encontrar o mínimo:

$$-2Tr(CP_kA^T) + 2Tr(K_kCP_kC^T) + 2Tr(K_kR) = 0$$

Considerando P_k e R simétricas:

$$K(k) [CP_kC^T + R] = 2CP_kA^T$$

$$K_k = CP_kA^T [CP_kC^T + R]^{-1} \quad (3.18)$$

Substituindo em (3.14) obtém-se P_{k+1}

$$P_{k+1} = Q + [A - K_kC] P_kA^T \quad (3.19)$$

Resumindo, o processo iterativo a seguir é:

1- Cálculo do ganho:

$$K_k = CP_kA^T [CP_kC^T + R]^{-1}$$

2- Estimativa do estado:

$$\hat{X}_{k+1} = A\hat{X}_k + Bu_k - K_k [y_k - C\hat{X}_k]$$

3- Atualização da matriz de covariância do erro:

$$P_{k+1} = Q + [A - K_k C] P_k A^T$$

Note-se que o conceito de predição é devido a que quando temos a observação y_k os valores obtidos para o estado ótimo são os de $\hat{X}_{k+1}$.

4 Filtro de Kalman como estimador *BLUE*

O termo *BLUE*, do inglês: *Best Linear Unbiased Estimator*, significa o melhor estimador linear não viciado. O FK é este tipo de estimador. Nesta seção são analisadas quais são as condições que fazem, a partir das definições de estimação linear e os atributos de melhor e não viciado, o FK ser classificado dessa forma, [35].

4.1 Estimação linear

Antes de mostrar essas propriedades para o FK, serão apresentados conceitos preliminares sobre estimação ótima. Dada uma observação y que pode ser definida como uma função conhecida de outra quantidade (determinística mas desconhecida), X (estado) mais um ruído w , pela equação

$$y = c(X) + w \quad (4.1)$$

O problema da estimação consiste em encontrar uma função

$$\hat{X} = \mathcal{L}(y),$$

tal que $\hat{X}$ esteja o mais perto possível de X . A função $\mathcal{L}$ é chamada de estimador, e o valor $\hat{X}$ dadas as observações y é chamada de estimativa. Se a função c é inversível e o ruído w é zero, então $\mathcal{L}$ é a inversa de c . Neste caso não importa a interpretação dada à frase "o mais perto possível". De fato, neste caso $\hat{X}$ é igual a X , portanto a distancia entre $\hat{X}$ e X deve ser zero. Em particular, com as condições descritas, isto corresponde à solução de um sistema não singular da forma

$$y = CX \quad (4.2)$$

sendo C uma matriz quadrada. Neste sentido a solução é algo trivial. Então, o estimador ótimo é representado pela matriz $L^* = C^{-1}$ e a estimativa ótima é $\hat{X} = Ly$. Um exemplo menos trivial acontece quando a matriz C em (4.2) não é quadrada e portanto não tem inversa. Para este caso é preciso definir o que significa " $\hat{X}$ o mais

perto possível à X ". Para sistemas lineares, considera-se o critério no qual prefere-se um $\hat{X}$ em particular, para o qual se faz a norma euclidiana do vetor $y - CX$ a menor possível. Esse é o critério do método dos mínimos quadrados. Este método resolve um tipo particular de problemas de estimação: Equação de observação $y = CX + w$ com C linear e w segue o modelo normal com média 0 (zero) e matriz de covariância I (identidade). Um estimador se diz linear se a função L é linear. Note que a função relacionada com as observações pode ser não linear, mas L deve seguir sendo linear, [35].

4.2 O melhor estimador

Com o objetivo de definir o que é o "melhor" estimador, é preciso definir uma medida da bondade de uma estimação. No enfoque dos mínimos quadrados para a solução de um sistema linear mostrado em (4.2), esta distância é definida como a norma euclidiana do vetor dos ruídos $w = y - C\hat{X}$.

Reescrevendo a equação na versão com o ruído tem-se

$$y = CX + w \quad (4.3)$$

e isto não muda a natureza do problema. O que o método dos mínimos quadrados indica é que na solução existe algum ruído dado pela expressão

$$w = y - C\hat{X} \quad (4.4)$$

e o que estamos procurando é que o resíduo seja o mais pequeno possível no sentido da norma euclidiana. Portanto, as equações (4.2) e (4.3) representam o mesmo problema, mas a equação (4.3) é a que descreve o problema de melhor maneira se o sinal de igualdade é tomado de forma literal.

O termo do ruído, porém, pode ser usado para generalizar o problema. De fato, a norma euclidiana do ruído na equação (4.4) trata todos os componentes igualmente, ou seja, cada equação é considerada com o mesmo peso no cálculo da norma do resíduo. No entanto, diferentes equações podem ter termos de ruído com diferentes variâncias. Isto equivale a dizer que existem critérios para preferir a qualidade de algumas equações sobre outras. Do ponto de vista do método dos mínimos quadrados isto pode ser aplicado utilizando algumas transformações lineares

$$w \longrightarrow Ww$$

assim, em vez de minimizar $\|w\|^2 = w^T w$ pode-se minimizar

$$\|Ww\|^2 = w^T R^{-1} w$$

sendo que

$$R^{-1} = W^T W$$

é uma matriz definida não negativa simétrica. Este método, denominado mínimos quadrados ponderados, é um pouco diferente da versão não ponderada. De fato

$$Ww = W(y - CX) = Wy - WCX$$

e sua resposta está dada pela solução do sistema

$$Wy = WCy$$

no sentido não ponderado. As soluções das equações normais são:

$$\hat{X} = ((WC)^T WC)^{-1} (WC)^T Wy = (C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1} y.$$

Este mesmo resultado pode ser obtido a partir de outro critério da bondade de $\hat{X}$. O próximo critério considerado é probabilístico e permite mostrar que o FK é ótimo em um sentido muito útil.

O novo critério é chamado de covariância mínima. A estimativa $\hat{X}$ de X é uma função das medidas y , que por sua vez estão contaminadas pelo ruído, portanto $\hat{X}$ é também um vetor aleatório.

Portanto, faz sentido medir a qualidade de um estimador pela sua variância. As flutuações da estimação de $\hat{X}$ com referência ao verdadeiro valor (desconhecido) X , a partir de um experimento de estimação deve ser tão pequena quanto seja possível.

Formalmente, se quer encontrar um estimador linear L tal que as estimativas $\hat{X} = Ly$ minimizam a seguinte matriz de covariância

$$P = E[(X - \hat{X})(X - \hat{X})^T].$$

Minimizar uma matriz requer a noção de "tamanho" de uma matriz. Felizmente, as normas das matrizes mais interessantes são equivalentes, no sentido de que dadas duas definições diferentes $\|P\|_1$ e $\|P\|_2$ para a norma de P , existem dois escalares α e β , tais que:

$$\alpha \|P\|_1 \leq \|P\|_2 \leq \beta \|P\|_1$$

Portanto, pode-se tomar qualquer norma.

4.3 Estimador não viciado

Além de desejar que o estimador seja linear e com a covariância mínima, também se quer que seja não viciado, ou seja: $E[X - \hat{X}] = 0 \Rightarrow E[\hat{X}] = E[X]$.

4.4 Estimador BLUE

Agora, o objetivo é encontrar o melhor estimador linear não viciado (BLUE) para X :

$$\hat{X} = Ly$$

Considerando que

$$y = CX + w \quad (4.5)$$

Para atingir o objetivo, primeiro é importante estabelecer uma condição necessária e suficiente para que L seja não viciado.

Lema 4.1. *Seja w na equação $y=CX+w$ com média zero, $E(w)=0$. Então, o estimador linear L é não viciado se, somente se $LC=I$, sendo I a matriz identidade.*

Demonstração. Considerando na definição de estimador não viciado,

$$E[X - \hat{X}] = E[X - Ly] = E[X - L(CX + w)]$$

$$\text{Logo, } E[X - \hat{X}] = E[(I - LC)X] - E[Lw] = (I - CL)E[X]$$

$$\text{já que } E[Lw] = LE[w] = 0 \text{ uma vez que } E[w] = 0$$

$$\text{então, para que } E(X - \hat{X}) = 0 \text{ para todo } X, I - LC = 0$$

$$\text{e portanto } LC = I$$

□

Teorema 4.1. *O melhor estimador linear não viciado $\hat{X} = Ly$ para o modelo de medida $y = CX + w$, sendo que o vetor do ruído w tem média zero e matriz de covariância R , é dado por:*

$$L = (C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1}$$

e a covariância do estado estimado é:

$$P = E[(X - \hat{X})(X - \hat{X})^T] = (C^T R^{-1} C)^{-1}$$

Demonstração. A matriz P pode-se escrever como:

$$P = E[(X - \hat{X})(X - \hat{X})^T] = E[(X - Ly)(X - Ly)^T]$$

$$P = E[(X - LCX - Lw)(X - LCX - Lw)^T] = E[((I - LC)X - Lw)((I - LC)(X - Lw)^T)]$$

$$P = E[Lw w^T L^T] = LE[ww^T]L^T = LRL^T$$

como L é não viciado, tem-se que $LC = I$

$$\text{portanto, } L_0 = (C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1}.$$

Seja L outro estimador linear não viciado, que pode-se escrever como:

$$L = L_0 + (L - L_0)$$

e portanto P pode ser escrito como: $P = LRL^T = [L_0 + (L - L_0)]R[L_0 + (L - L_0)]^T$

$$P = L_0RL_0^T + (L - L_0)RL_0^T + L_0R(L - L_0)^T + (L - L_0)R(L - L_0)^T.$$

Logo

$$RL_0^T = RR^{-1}C(C^TR^{-1}C)^{-1} = C(C^TR^{-1}C)^{-1}$$

Daí

$$(L - L_0)RL_0^T = (L - L_0)C(C^TR^{-1}C)^{-1} = (LC - L_0C)(C^TR^{-1}C)^{-1}$$

Mas, L_0 e L são não viciados

$$\text{portanto, } LC = L_0C = I \text{ e } (L - L_0)RL_0^T = 0.$$

O termo $L_0R(L - L_0)^T$ é a transposta, por tanto também é zero.

Em conclusão, $P = L_0RL_0^T + (L - L_0)R(L - L_0)^T$, esta expressão é reduzida ao mínimo quando o segundo termo desaparece

ou seja, quando $L = L_0$.

Isso equivale a dizer que o estimador L_0 é o melhor, ou seja tem covariância mínima.

Para demonstrar que a covariância P de $\hat{X}$ é dada por:

$$P = E[(X - \hat{X})(X - \hat{X})^T] = (C^TR^{-1}C)^{-1}C^TR^{-1}$$

substitui-se L_0 por L na equação $P = LRL^T$:

$$P = L_0RL_0^T = (C^TR^{-1}C)^{-1}C^TR^{-1}RR^{-1}C(C^TR^{-1}C)^{-1}$$

$$P = (C^TR^{-1}C)^{-1}C^TR^{-1}C(C^TR^{-1}C)^{-1} = (C^TR^{-1}C)^{-1}.$$

□

4.5 Filtro de Kalman como estimador *BLUE*

Temos todos os conceitos necessários para escrever as equações do filtro de Kalman. Dada uma equação linear das medidas

$$y = CX + w$$

sendo w segue o modelo normal com média 0 (zero) e matriz de covariância R , $w \sim N(0, R)$.

O melhor estimador linear não viciado para o estado X é dado por

$$\hat{X} = PC^T R^{-1}y$$

sendo a matriz de covariância dos erros, P , é definida por

$$P = E[(\hat{X} - X)(\hat{X} - X)^T] = (C^T R^{-1}C)^{-1}$$

Dadas as equações do sistema e das medidas

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + B_k u_k + v_k \\ y_k = C_k X_k + w_k \end{cases}$$

sendo que

$$v_k \sim N(0, Q_k) \quad \text{e} \quad w_k \sim N(0, R_k)$$

Assim como o melhor estimador linear, não viciado para o estado inicial $\hat{X}_0$ com matriz de covariância dos erros inicial P_0 , o filtro de Kalman calcula o melhor estimador linear não viciado $\hat{X}_{k+1}$ dadas as observações $y_0, y_1, \dots, y_k$. O filtro também calcula a matriz de covariância P_{k+1} , dadas essas observações. Para conectar a teoria de estimação de estados com o que foi apresentado sobre sistemas lineares, é possível mostrar que a estimação do estado inicial equivale solucionar um sistema de equações lineares atribuindo pesos para cada equação.

Pode-se expandir a equação das observações como segue:

$$\begin{aligned} y_k &= C_k X_k + w_k = C_k (A_{k-1} X_{k-1} + B_{k-1} u_{k-1} + v_{k-1}) + w_k = \\ &= C_k A_{k-1} \dots C_0 X_0 + C_k (A_{k-1} \dots A_1 B_0 u_0 + \dots \\ &+ B_{k-1} u_{k-1}) + C_k (A_{k-1} \dots A_1 v_0 + \dots + v_{k-1}) + w_k \end{aligned}$$

ou de forma compacta

$$y_k = C_k \Phi(k-1, 0) X_0 + C_k \sum_{j=1}^k \Phi(k-1, j) B_{j-1} u_{j-1} + \delta_k \quad (4.6)$$

sendo

$$\Phi(l, j) = \begin{cases} A_1 \dots A_j & \text{para } l \geq j \\ 1 & \text{para } l < j \end{cases} \quad \text{e} \quad \delta_k = C_k \sum_{j=1}^k \Phi(k-1, j) v_{j-1} + w_k$$

O importante é notar que a expressão (4.6) é um sistema de equações lineares em X_0 e que é possível escrever um sistema como este para qualquer $k = 0, \dots, M$, sendo M o último instante considerado. Assim, obtém-se um sistema na forma:

$$z_M = \Psi_M X_0 + g_M + \Delta_M \quad (4.7)$$

sendo

$$z_M = \begin{bmatrix} y_0 \\ \dots \\ y_M \end{bmatrix}$$

$$\Psi_M = \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 A_0 u_0 \\ \dots \\ C_M \Phi(M-1, 0) \end{bmatrix}$$

$$g_M = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 A_0 B_0 \\ \dots \\ C_M [\Phi(M-1, 1)u_0 + \dots + B_{M-1}u_{M-1}] \end{bmatrix}$$

$$\Delta_M = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \dots \\ \delta_M \end{bmatrix}$$

Sem conhecimento sobre as estatísticas de Δ_M , o melhor a fazer é resolver o sistema

$$z_M = \Psi_M X_0 + g_M$$

no sentido dos mínimos quadrados para obter uma estimativa de X_0 a partir das observações $y_0, \dots, y_M$:

$$\hat{X}_0 = \Psi_M^\dagger (z_M - g_M)$$

sendo $\Psi_M^\dagger$ a pseudo-inversa e Ψ_M . Sabe-se que se Ψ_M tem posto completo, o resultado com a pseudo-inversa é o mesmo que seria obtido resolvendo as equações normais, então:

$$\Psi_M^\dagger = (\Psi_M^T \Psi_M)^{-1} \Psi_M^T$$

A solução por mínimos quadrados de (4.7) minimiza o resíduo entre lado esquerdo e o lado direito sob a suposição de que todas as equações devem ser tratadas com a mesma importância. No entanto, conhecemos as covariâncias de todos esses termos de ruídos e podemos dar pesos para cada equação com base nisso. Intuitivamente, um valor baixo para covariância significa que "acreditamos" naquela medida e portanto podemos dar peso maior para aquela equação do que para outras. Em resumo, o filtro de Kalman para um sistema linear é equivalente à solução de uma equação linear, sob a suposição de que os ruídos que afetam cada um das equações seguem a mesma

distribuição de probabilidade, ou seja, que todos os termos em Δ_M tem a mesma importância. No entanto, o filtro de Kalman difere desta solução pois os termos em Δ_M não são considerados com a mesma importância, as medidas vem com matrizes de covariância e o filtro faz um uso ótimo dessas informações para atribuir pesos às equações do sistema: informações melhores devem produzir resultados mais acurados e este é o caso.

5 Aplicações

Neste capítulo analisa-se dois exemplos de aplicações do Filtro de Kalman. A primeira aplicação é para o caso de filtragem sobre o movimento balístico e a segunda é sobre o nível da água em um tanque. No último caso, inicialmente com o nível constante e depois com nível aumentando a uma taxa constante. O objetivo é analisar como o FK atua em determinadas condições a partir dos valores das matrizes Q e R .

5.1 Movimento balístico

Neste exemplo de aplicação se faz uso do FK para filtragem de um sinal. O objetivo é mostrar como é possível reduzir as diferenças entre as medidas de uma câmera e o modelo que descreve o movimento.

Foi gravado um vídeo da trajetória de uma esfera com cerca de 4 cm de diâmetro arremessada manualmente com um certo ângulo, de modo que a trajetória se comporte como um movimento balístico. Para registrar o experimento foi utilizada uma câmera digital capaz de capturar imagens com 1920x1080 pixels de resolução e 30 quadros por segundo, direcionada a um fundo de cor clara de tal forma que capturasse a imagem da esfera quando esta já estava em movimento. O movimento da esfera foi modelado usando equações da cinemática que relacionam posição, velocidade, aceleração e tempo. A modelagem fica muito mais simples analisando o movimento balístico separadamente em dois eixos, s e h , conforme a figura 5.1. Cabe notar que essas equações são válidas se desprezarmos o efeito do ar e considerarmos a esfera como um objeto pontual, mas que mesmo assim formam um bom modelo para o propósito deste trabalho, pois as velocidades envolvidas são baixas suficientes para que o arrasto devido ao ar e efeitos de rotação não alterem de forma significativa o movimento, este experimento foi realizado por Luz e Barrero, apresentado em [36].

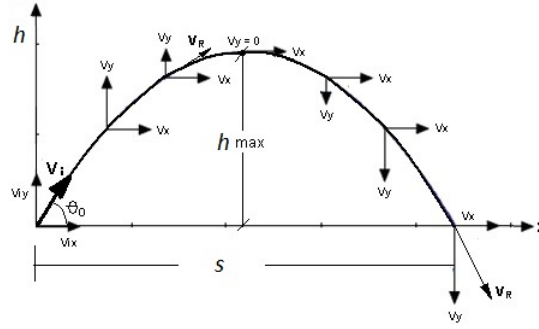


Figura 5.1: Trajetória movimento balístico

As equações para posição e velocidade são respectivamente:

$$s(t) = s_0 + V_{0s}t$$

$$V_s(t) = V_{0s}$$

$$h(t) = h_0 + V_{0h}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$V_h(t) = V_{0h} - gt$$

Sendo $s(t)$ a posição no eixo horizontal no instante t , $h(t)$ a posição no eixo vertical no instante t , s_0 a posição inicial no eixo s , h_0 a posição inicial no eixo h , V_{0s} a velocidade inicial no eixo s , V_{0h} a velocidade inicial no eixo h e g a aceleração da gravidade.

O seguinte grafico mostra as diferenças entre as medidas tomadas pela câmera e a trajetória segundo o modelo físico

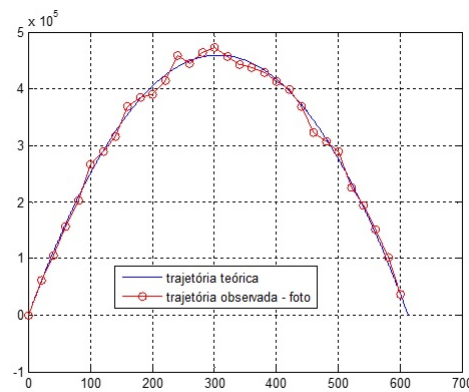


Figura 5.2: Trajetória do modelo versus medidas da câmera

A figura 5.2 mostra que existem algumas diferenças entre as posições que se espera a partir do modelo físico e as obtidas pela câmera para os intervalos de tempo $[200, 300]$ e $[400, 500]$.

Devido a esta situação aplica-se o algoritmo do FK para estabelecer uma melhor aproximação das posições e velocidades reais da esfera.

Considerando o caso discreto do Filtro de Kalman, para isso as equações anteriores são dadas por:

$$s(t) = s(t-1) + V_{0s}(t-1)\Delta t$$

$$V_s(t) = V_s(t-1)$$

$$h(t) = h(t-1) + V_h(t-1)\Delta t - \frac{1}{2}g\Delta t^2$$

$$V_h(t) = V_h(t-1) - g\Delta t$$

As quais podem ser expressas de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} s(t) \\ V_s(t) \\ h(t) \\ V_h(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(t-1) & V_{0s}(t-1)\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & V_s(t-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h(t-1) & V_h(t-1)\Delta t \\ 0 & 0 & 0 & V_h(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}g\Delta t^2 \\ -g\Delta t \end{bmatrix}$$

Ajustando a equação matricial anterior ao modelo no espaço de estados dados pela equação:

$$\begin{cases} X_{k+1} = AX_k + Bu_k + v_k \\ y_k = CX_k + w_k \end{cases}$$

Tem-se que:

- Vetor do estados:

$$X_k = \begin{bmatrix} s(t) \\ V_s(t) \\ h(t) \\ V_h(t) \end{bmatrix}$$

- Matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz B :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz C :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Vetor de entradas:

$$u_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}g\Delta t^2 \\ 1g\Delta t \end{bmatrix}$$

As condições iniciais para posição e velocidade, podem ser obtidas dos primeiros quadros do vídeo de forma aproximada, de tal forma que a matriz de covariância do erro de estimação, P , seja escrita com os valores da sua diagonal próximos de 0,1 , dada a certeza de uma boa estimativa inicial,

$$\hat{X}_0 = \begin{bmatrix} 50 \\ 1200 \\ 50 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Além disso as matrizes Q e R foram escolhidas respectivamente como:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Com a definição das matrizes e com a implementação do FK se obtém os seguintes resultados:

A aplicação do FK pode ser vista nos 3 gráficos da Figura 5.3, considerando diferentes valores para a variância do ruído w_k . A matriz de covariância de w_k é denotada por R e portanto seus elementos da diagonal principal são denotados por $r_{ii}, i = 1, \dots, 4$.

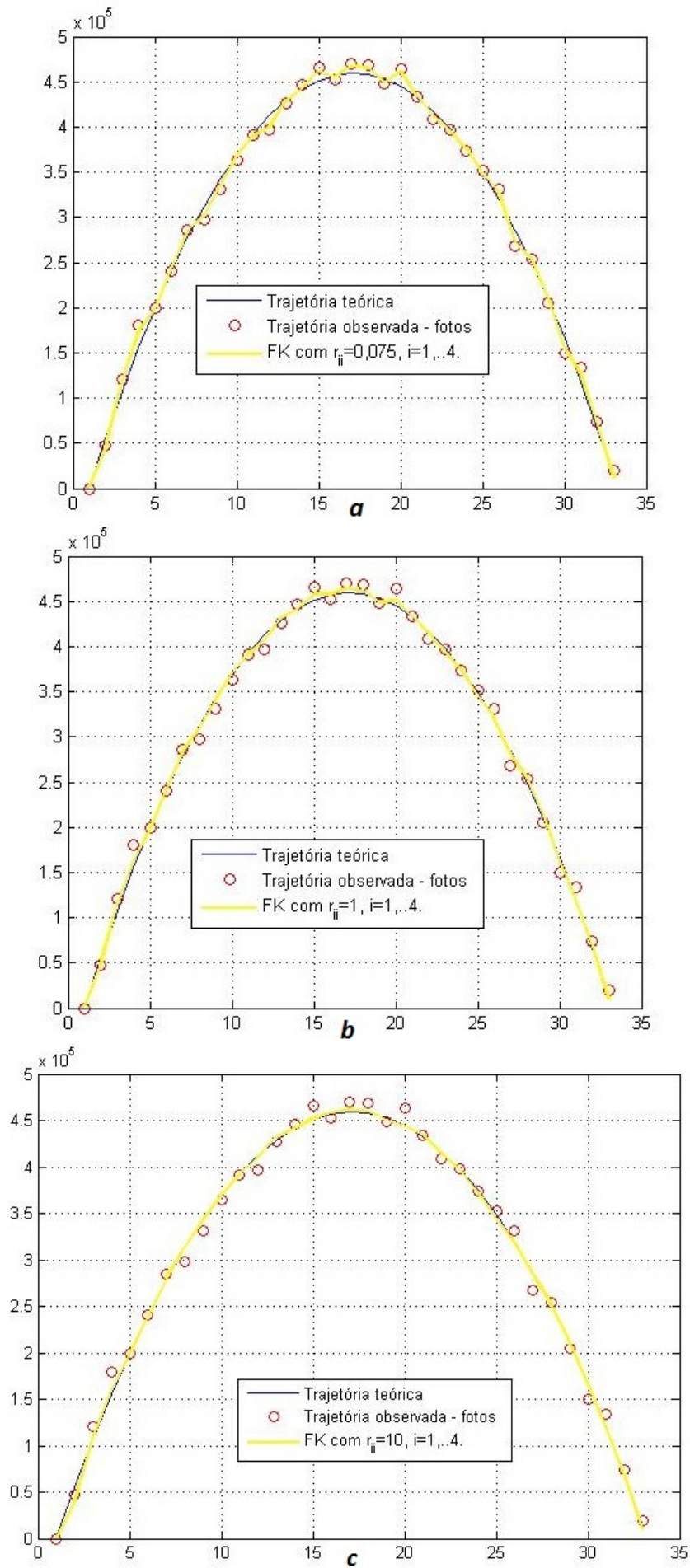


Figura 5.3: Filtragem com $R=0,0075$; $R=1$ e $R=10$

Nota-se que a medida que são tomados valores "altos" para $r_{ii}, i = 1, \dots, 4$; o resultado do FK se aproxima do modelo teórico. Por outro lado, ao tomar valores "baixos" para $r_{ii}, i = 1, \dots, 4$; o resultado do FK se distancia do modelo teórico e se aproxima das observações.

5.2 Nível da água em um tanque

Será estudado um caso referente ao nível de água em um tanque. Esta aplicação faz parte do material do curso do professor Welsh da *University of Central Florida*, [37]. No experimento há um aparelho (bóia) que envia um sinal do nível do líquido em qualquer momento. O objetivo do exemplo é analisar certos aspectos que ajudarão a entender melhor como pode ser aplicado o FK, para o qual é necessário estabelecer as seguintes etapas:

- Compreender a situação
- Modelar o processo de estados
- Modelar o processo da medição
- Modelar o ruído
- Aplicar o filtro
- Aprimorar o filtro.

Como foi mencionado anteriormente, o filtro de Kalman reduz a variância do erro (chamada de matriz P), assumindo uma definição prévia de um modelo do sistema. Consequentemente, o modelo de FK a ser aplicado deve ser coerente com o sistema físico que descreve o fenômeno. Cabe destacar que para este exemplo se tomam as aquações do caso de FK para estimação.

De acordo com as etapas descritas, primeiro deve-se compreender a situação. Tenta-se estimar o nível de água no tanque, o que é desconhecido. As medidas são obtidas pelo nível da bóia. O nível do tanque pode estar aumentando ou estático (nível constante). A situação é mostrada na Figura 5.4.

A segunda etapa consiste em modelar o processo de estados. Descreve-se a situação em que o nível é constante (isto é, a verdadeira medida do tanque é $L = C$). Utilizando as equações de estados para predição:

$$\begin{aligned} X'_{k+1} &= A\hat{X}_k + Bu_k \\ P'_{k+1} &= AP_kA^T + Q \end{aligned}$$

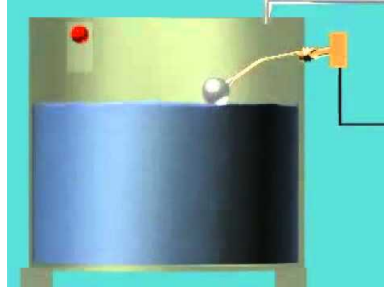


Figura 5.4: Exemplo do Tanque

O fato de considerar o nível de água constante leva a tomar a variável de estado como escalar (isto é, $\hat{X} = X$, onde X é a estimativa de L). Portanto, $X_{k+1} = X_k$, de modo que $A = 1$ para todo k maior ou igual a 0. B e u_K não são utilizadas (isto é, são ambos iguais a 0).

A terceira etapa é modelar o processo de medida, ou seja o nível da bóia. Este é representado por $Y = y_k$. Para simplificar, considera-se que a medida é exatamente na mesma escala que o estado estimado X (isto é, $C = 1$).

Como quarta etapa tem-se a modelagem do ruído. Para este modelo, assume-se que há ruído de medição que se denotará por w_k e sua variância por r (ou seja $R = r$). Lembrando que o processo é assumido como um escalar, se tomará $P = p$. Uma vez que o processo não está bem definido ajusta-se o ruído v_k . A ideia é mostrar os efeitos das alterações desses parâmetros dos ruídos no sistema. Logo, a quinta etapa é testar o filtro

Para predição

$$X_k = X_{k-1}$$

$$p_k = p_{k-1} + q$$

Para atualização

$$X_k = X_{k-1} + K_k(y_k - X_{k-1})$$

$$K_k = p_{k-1}(p_{k-1} + r)^{-1}$$

$$p_k = (1 - K_k)p_{k-1}$$

Com isso o filtro está completamente definido. Substituindo alguns valores no modelo. Para o primeiro teste consideramos $L = 1$.

A sexta etapa é aprimorar o filtro o que é feito com várias iterações, mudando os valores de q ou r . Inicializa-se o estado com um valor arbitrário, com uma variância do

erro extremamente elevada uma vez que este é completamente desconhecido, ou seja, $X_0 = 0$ e $p_0 = 1000$. Para a variância do ruído do sistema utiliza-se um valor baixo, $q = 0,0001$, pois acredita-se que seja um modelo preciso.

Condições iniciais:

$$X_0 = 0$$

$$p_0 = 1000$$

Primeira iteração para predição

$$X'_1 = 0$$

$$p'_1 = 1000 + 0,0001$$

A medida hipotética que temos é $y_1 = 0,9$ (devido ao ruído). Assume-se uma variância do ruído $r = 0,1$

Primeira iteração de atualização

$$K_1 = 1000,0001(1000,0001 + 0,1)^{-1} = 0,999$$

$$\hat{X}_1 = 0 + 0,9999(0,9 - 0) = 0,8999$$

$$\hat{p}_1 = (1 - 0,9999)1000,0001 = 0,1000$$

Então, pode-se ver que na primeira iteração, o valor obtido foi trazido para perto do valor real do sistema. Além disso, a variância foi reduzida para um valor que pode ser considerado razoável.

Fazendo-se mais uma iteração para predição:

$$X'_2 = 0,8999$$

$$p'_2 = 0,1000 + 0,0001 = 0,1001$$

Nova iteração de atualização

A medida hipotética no tempo é $y_2 = 0,8$ (devido ao ruído)

$$K_2 = 0,1001(0,1001 + 0,1)^{-1} = 0,5002$$

$$\hat{X}_2 = 0,8999 + 0,5002(0,8 - 0,8999) = 0,8499$$

$$\hat{p}_2 = (1 - 0,5002)0,1001 = 0,0500$$

Os resultados das próximas iterações podem ser visto na tabela 5.1:

Pode-se notar que a variância se reduz a cada iteração e observa-se que o modelo

Tabela 5.1: Iterações caso do tanque nível constante

k	y_k	$\hat{X}_k$
3	1,1	0,9339
4	1	0,9501
5	0,95	0,9501
6	1,05	0,9669
7	1,2	1,0006
8	0,9	0,9878
9	0,85	0,9722
10	1,15	0,9905

funciona corretamente. Após a estabilização (cerca de $k = 4$) os estados estimados não se desviam de mais que 0,05 do valor "verdadeiro", mesmo que as medidas estejam entre 0,8 e 1,2. Com mais iterações vemos os resultados na figura 5.5.

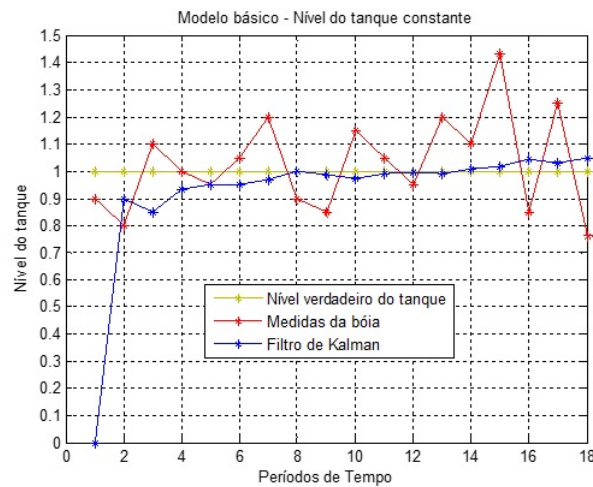


Figura 5.5: Nível de tanque constante

A figura 5.5 mostra como os estados estimados a partir do FK se aproximam a medida real do tanque, ou seja ao valor constante. O que se estabeleceu até agora foi que se for criada uma situação com base no modelo verdadeiro, o estado estimado vai estar perto do valor real.

Se a situação real for diferente e for mantido o mesmo modelo (ou seja, um modelo estático), os resultados do filtro se aproximarão das observações e não do modelo incorreto. Desta vez, a situação real é que o nível do tanque está aumentando a uma taxa constante: $L_k = L_{k+1} + f$.

Assumindo que o tanque está aumentando seu nível a uma taxa $f = 0,1$ a cada período de tempo, e iniciou-se com $L_0 = 0$ e $q = 0,001$ e $r = 0,1$.

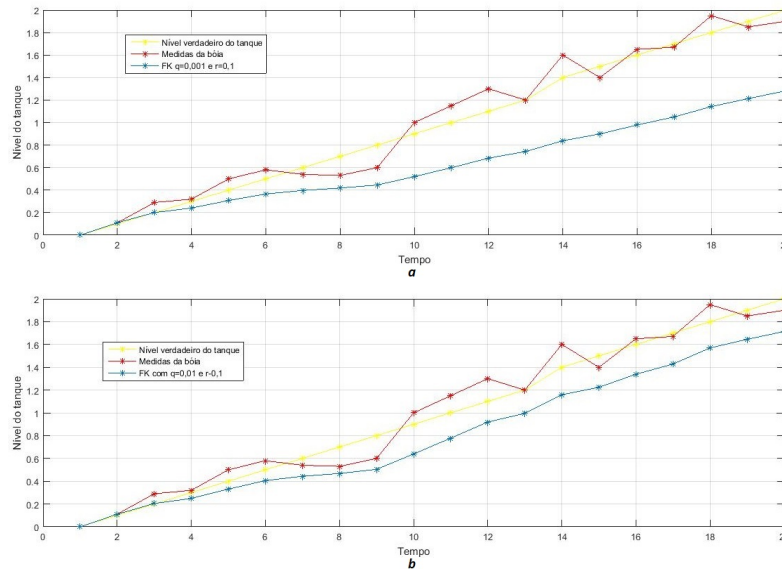


Figura 5.6: Filtragem com $q=0,001$ e $q=0,01$

A figura 5.6a mostra que as estimativas do estado dadas pelo FK. Pode-se ver que o resultado do FK é crescente, mas bem abaixo do real, em outras palavras, quando a variância q é muito baixa, na realidade significa que confiamos no modelo. A figura 5.6b mostra como variam os estados dados pelo FK com um valor de q maior, a diferença com a figura 5.6a é que o resultado do FK está mais perto do valor real. Pode-se estudar o que acontece quando os valores de q forem aumentados, ou dito de outra maneira, pode-se observar que acontece quando não se acredita no modelo. Para isto, assume-se valores maiores iniciando com $q = 0,01$.

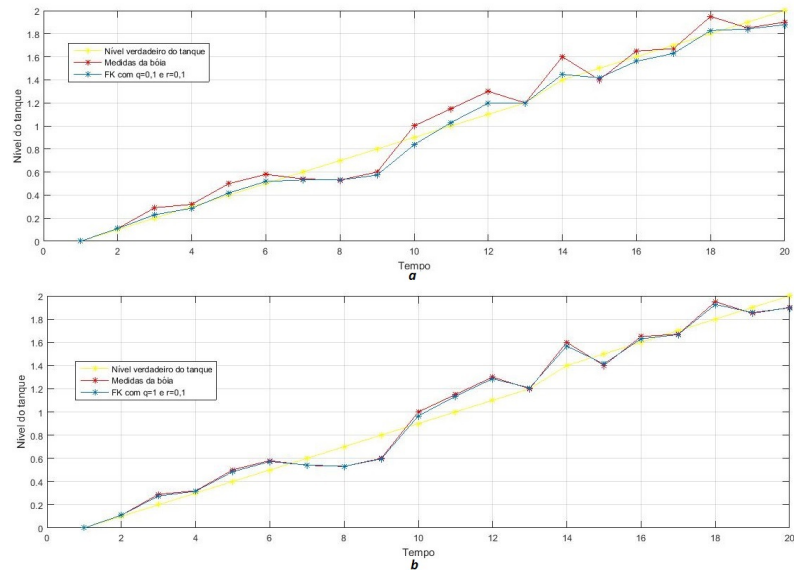


Figura 5.7: Filtragem com $q=0,1$ e $q=1$

As figura 5.7a e 5.7b mostram que quase não há diferença entre os valores das medidas e os estados estimados pelo FK quando for mudado o valor de q de 0,1 para 1. O que o exemplo mostra é o seguinte: se existe confiança no modelo, se atribui variância pequena para o ruído do modelo. Também é possível alterar a variância do ruído das medidas, diminuindo seu valor. Os resultados do FK se aproximam dessas medidas, como pode ser visto nos graficos a e b da figura 5.8.

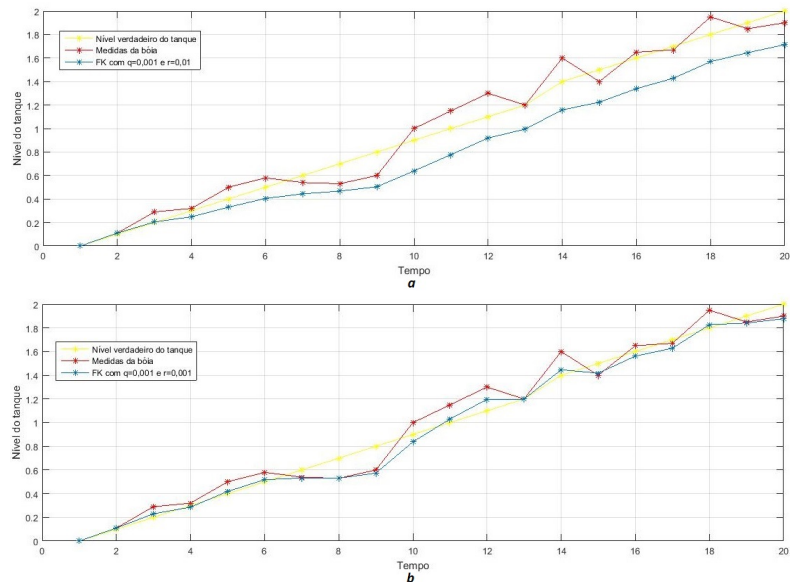


Figura 5.8: Filtragem com $R=0,01$ e $R=0,001$

5.3 Conclusão e propostas futuras

Neste trabalho foram apresentados os elementos característicos do método do FK para estimar os estados de um sistema dinâmico estocástico, sendo considerado como a melhor estimativa possível.

O filtro se distingue pela sua capacidade de prever o estado de um modelo no passado, presente e futuro, mesmo que a natureza exata do sistema modelado seja desconhecida. A modelagem da dinâmica de um sistema é uma das principais características do método de FK. Os modelos lineares considerados no FK são em realidade uma transição de um período para o outro descritos pelas matrizes A e B .

O FK utiliza o método dos mínimos quadrados para gerar recursivamente estimativas de estado. O estimador FK é linear, não viciado e de variância mínima. Daí o seu poder para resolver uma ampla gama de problemas de estimação. O FK tem suas limitações, ele somente é válido quando o sistema é linear e os processos de ruídos são gaussianos.

O método permite diminuir a variância do erro de estimação. Em termos mais simples, o funcionamento do FK está associado com o valor que pode tomar o vetor do ganho K_k o qual é um fator de correção do estado e seu valor pode variar entre 0 e 1. Quando o valor de K_k for próximo de zero ($K_k \cong 0$), os valores dados pelo sistema são estáveis ou seja a variância do erro é mínima. Quando o valor de K_k for próximo de um ($K_k \cong 1$), os valores dados pelo sistema apresentam uma alta variância, o que diminua sua confiabilidade.

Como propostas futuras consideramos a aplicação do FK para um problema real de estimação da temperatura interna de secadores solares utilizados para alimentos,[38].

Consideramos também o estudo dos métodos FK estendido e FK "*unscented*", [39].

Referências

- [1] KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basics engineering*, v. 82, p. 35–45, 1960.
- [2] INDOVAL, R. P. Pronóstico en tiempo real para determinar una alerta contra fenómenos hidrometeorológicos extremos ante la variabilidad climática por medio de: Filtro de kalman discreto. *Int. J. General Systems*, v. 17, p. 95–105, 2010.
- [3] GREWAL, S.; ANDREWS, A. P. Applications of Kalman filtering in aerospace 1960 to the present. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 10, p. 69–78, 2000.
- [4] FARAGHER, R. Understanding the basis of the Kalman filter. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 29, p. 128–132, 2012.
- [5] PASCUAL, A. *EKF y UKF: dos extensiones del filtro de Kalman para sistemas no lineales aplicadas al control*. 2006. [Http://iie.fing.edu.uy/ense/asign/tes/monografias/anteriores/alejandropascual/TES2004_pascual.pdf](http://iie.fing.edu.uy/ense/asign/tes/monografias/anteriores/alejandropascual/TES2004_pascual.pdf). Acceso, 20 – 08 – 2016.
- [6] MATEOS, G. G. *Procesamiento de Caras Humanas Mediante Integrales Proyectivas*. Tese (Doutorado) — Universidad de Murcia, 2007.
- [7] ALEZONES, Z. Introducción al filtro de Kalman en robótica móvil. *Ingenium*, v. 10, p. 37–44, 2016.
- [8] MAIA, V. G.; C.PIMENTA; PEREIRA, G. Navegação de robos utilizando curvas implícitas. *Controle Automação*, v. 21, p. 23–47, 2010.
- [9] FONT, J.; BATLE, J. Posicionamiento de robots móviles mediante un filtro de Kalman angular y triangulación. *Información Tecnológica*, v. 17, p. 9–14, 2006.
- [10] SABATINI, A. M. Estimating three-dimensional orientation of human body parts by inertial/magnetic sensing. *Sensors*, v. 11, p. 1489–1525, 2011.
- [11] CASTAÑEDA, J.; NIETO, M.; ORTIZ, V. Análisis y aplicación del filtro de Kalman a una señal con ruido aleatorio. *Scientia et Technica*, v. 18, p. 267–274, 2013.

-
- [12] GURGEL, F. S. *Estimação de tempos de chegada de ônibus urbano utilizando filtros de Kalman*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA, 2005.
- [13] HAGE, R.; BETAILLE, D. Unscented Kalman filter for urban network travel time estimation. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, v. 54, p. 1047–1057, 2012.
- [14] RISO, M. *Métodos de estimación aplicados a problemas de trafico vehicular y sistemas electricos de potencia*. Tese (Doutorado) — Universidad Nacional del Centenario, 2016.
- [15] BASKAR, L. et al. *Traffic control and intelligent vehicle highway systems: A survey*. 2011. [Http://www.dcsc.tudelft.nl/bdeschutter/pub/rep/09_43.pdf](http://www.dcsc.tudelft.nl/bdeschutter/pub/rep/09_43.pdf). Acesso, 30 – 09 – 2016.
- [16] BIANCO, J. *Estudio y aplicación de Filtros de Kalman sobre sistemas de posicionamiento global para el suavizado de trayectorias geoposicionadas*. Tese (Doutorado) — Universidad Nacional de Cordoba, 2013.
- [17] D.PAVKOVIC; DEUR, J.; A.LISAC. A torque estimator-based control strategy for oil-well drill-string torsional vibrations active damping including an auto-tuning algorithm. *Control Engineering Practice*, v. 30, p. 14–27, 2011.
- [18] S.DOWI; A.HAMZA. Dynamic state forecasting in electric power networks. *Journal of Power and Energy Engineering*, v. 36, p. 45–67, 2014.
- [19] EINICKE, G. Smoothing, filtering and prediction: Estimating the past, present and future. *Rijeka, Croatia: Intech*, v. 36, p. 45–67, 2012.
- [20] SAMUEL, M. *Desarrollo analítico de la reactividad pupilar y su uso como marcador fisiológico en enfermedades psiquiátricas*. Tese (Doutorado) — Universidad de Chile, 2015.
- [21] SÁNCHEZ, D. *Procesado y transmisión de señales biomédicas para el diagnóstico de trastornos y enfermedades del sueño*. Tese (Doutorado) — Universidad de Cadiz, 2008.
- [22] J.DORADO; RUÍZ, J. F. Implementación de filtros de Kalman como método de ajuste a los modelos de pronóstico (gfs) de temperaturas máximas y mínima para algunas ciudades de colombia. *IDEAM*, v. 8, p. 1–17, 2012.
- [23] LIBONATI, R.; TRIGO, I.; DACAMARA, C. Aplicação do filtro de Kalman na correlação das previsões de temperatura a 2 metros do ecmwf. *Anais CBMET*, v. 8, p. 338–353, 2004.

-
- [24] RAMÍREZ, Á. S. *EL FILTRO DE KALMAN*. 1. ed. San Jose de Costa Rica: BANCO CENTRAL DE COSTA RICA, 2003.
- [25] MILLÁN, S. I.; IGLESIAS, C. H.; GUTIÉRREZ, J. P. El espacio de estados en econometría. In: ORGANIZACIÓN, C. de Ingeniería de (Ed.). *VIII Congreso de Ingeniería de Organización*. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2004. v. 8, p. 1–18.
- [26] LOMELÍ, H.; RUMBOS, B. *Métodos Dinámicos en Economía. Otra búsqueda del tiempo perdido*. 1. ed. México DF: Instituto Tecnológico Autónomo de México, 2001.
- [27] MAGALHÃES, M. *Noções de Probabilidade e Estatística*. 7. ed. São Paulo, Brasil: Editora da Universidade de São Paulo, 2011.
- [28] JAMES, B. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. 3. ed. Rio de Janeiro, Brasil: Instituto de Matemática pura e aplicada, 2011.
- [29] ROSS, S. M. *Stochastis Process*. 2. ed. Canada: J. Wiley Sons, INC., 1996.
- [30] HOEL, P. G.; PORT, S. C.; STONE, C. J. *Introduction to Stochastis Process*. 1. ed. Los Angeles: HOUGHTON MIFFLIN COMPANY, 1972.
- [31] DEPARTAMENTO; MATEMÁTICA. *Modelos matemáticos en Biología*. Jaén, España, 2009.
- [32] GARCIA, C. *Modelagem e Simulação De Processos Industriais e de Sistemas Electromecânicos*. 2. ed. São Paulo, Brasil: Editora da Universidade de São Paulo, 2013.
- [33] AIUBE, F. A. L. *Modelagem dos preços futuros de commodities: abordagem pelo filtro de partículas*. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio De Janeiro - PUC-RIO, 2012.
- [34] RAMIREZ, M. L. *Diseño y simulación de un criptosistema caótico para comunicaciones seguras*. Tese (Doutorado) — Universidad de las Americas Puebla, 2006.
- [35] TOMASI, C. *Mathematical Methods for Robotics and Vision*. Santa Monica, Ca, 2000.
- [36] LUZ, F. D.; BARRERO, G. Aplicação didática do filtro de Kalman usando uma câmera digital. *COBECE*, v. 10, p. 1–11, 2014.
- [37] GREG, W. *The Kalman Filter*. 2010. Url<http://www.cs.unc.edu/welch/kalman/>. Acesso 05-06-2016.
- [38] MEALLA, L. E. Evaluación térmica de hornos solares tipo caja en la ciudad de barranquilla. *Journal of Engineering and Technology*, v. 4, p. 70–81, 2015.

-
- [39] BRUQUE, J. L. G. *Filtros de Kalman Extendido y "Unscented" en Sistemas Estocásticos no Lineales con Observaciones Inciertas*. Dissertação (Mestrado) — Universidad de Granada, 2011.