



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

CONTROLE SEMI-ATIVO DE VIBRAÇÕES COM FLUIDO MAGNETOREOLÓGICO
UTILIZANDO LMIS E LÓGICA NEBULOSA OTIMIZADA POR ALGORITMO GENÉTICO

Luiz Arthur Gagg Filho
Engenheiro Mecânico

Ilha Solteira
2013



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

CONTROLE SEMI-ATIVO DE VIBRAÇÕES COM FLUIDO MAGNETOREOLÓGICO UTILIZANDO LMIS
E LÓGICA NEBULOSA OTIMIZADA POR ALGORITMO GENÉTICO.

Luiz Arthur Gagg Filho

Orientador: Prof. Dr. Vicente Lopes Júnior

Coorientador: Dr. Gustavo Luiz Chagas Manhães de Abreu

Dissertação apresentada à Faculdade
de Engenharia - UNESP – Campus de
Ilha Solteira como parte dos requisitos
necessários para a obtenção do título
de Mestre em Engenharia Mecânica.
Área do conhecimento: Mecânica dos
Sólidos

Ilha Solteira
2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

G133c Gagg Filho, Luiz Arthur .
Controle semi-ativo de vibrações com fluido magnetoreológico utilizando
Imis e lógica nebulosa otimizada por algoritmo genético / Luiz Arthur Gagg
Filho. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2013
143 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2013

Orientador: Vicente Lopes Júnior

Co-orientador: Gustavo Luiz Chagas Manhães de Abreu

Inclui bibliografia

1. Controle semi-ativo. 2. Amortecedor magnetoreológico. 3. Lógica
nebulosa. 4. Algoritmo genético. 5. Desigualdades matriciais lineares.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Controle Semi-Ativo de Vibrações com Fluido Magnetoreológico Utilizando LMIs e Lógica Nebulosa Otimizada por Algoritmo Genético

AUTOR: LUIZ ARTHUR GAGG FILHO

ORIENTADOR: Prof. Dr. VICENTE LOPES JUNIOR

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. GUSTAVO LUIZ CHAGAS MANHÃES DE ABREU

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica ,
Área: MECANICA DOS SÓLIDOS, pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. VICENTE LOPES JUNIOR

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. MICHAEL JOHN BRENNAN

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. PAULO ROBERTO GARDEL KURKA

Departamento de Projeto Mecânico / Universidade Estadual de Campinas

Data da realização: 25 de abril de 2013.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho especialmente
aos meus pais e a toda minha família.

AGRADECIMENTOS

À DEUS por tudo que existe ...

Ao Prof. Vicente Lopes Júnior por me guiar nesta pesquisa e mais importante ainda pela amizade criada durante estes cinco anos de convivência. Agradeço também pelas oportunidades oferecidas por ele e ao incentivo à pesquisa desde a época da graduação e de iniciação científica. Ao meu coorientador Gustavo Luiz Chagas Manhães de Abreu pelas inúmeras ajudas na Iniciação Científica e no Mestrado.

À todos os meus amigos de graduação e de mestrado. Aos meus vizinhos, que me aturaram por muito tempo com muitos momentos divertidos. Aos meus amigos que moram longe de mim, mas que sempre me apoiam.

Ao Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes (GMSINT) da Unesp/Ilha Solteira pelo compartilhamento de conhecimentos, pelas amizades e pelos momentos de descontração.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro imprescindível para minha dedicação integral neste trabalho.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica (DEM) e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM) da Unesp/Ilha Solteira pela oportunidade de realização deste trabalho.

Aos professores e funcionários da Unesp/Ilha Solteira que muito contribuíram para minha formação.

Aos membros da banca examinadora pelas sugestões e comentários.

GAGG FILHO, L. A. **Controle semi-ativo de vibrações com fluido magnetoreológico utilizando lmis e lógica nebulosa otimizada por algoritmo genético.** 2012. 143 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho – UNESP, Ilha Solteira, 2012.

RESUMO

Este trabalho estuda diversas estratégias de controle semi-ativo para a redução de vibração em suspensões veiculares empregando amortecedores magnetoreológicos (MR). A modelagem do amortecedor MR é feita utilizando o modelo de Bouc-Wen modificado. A fim de entender o princípio de funcionamento de um amortecedor MR, uma análise dinâmica é conduzida. Nesta análise o comportamento não linear do amortecedor MR é caracterizado através de laços histeréticos. Quando incorporado ao modelo da suspensão de ¼ de carro, outros efeitos não lineares são evidenciados. Compreendido o comportamento de todo o modelo da suspensão semi-ativa, diversos controladores são estudados e projetados. Este trabalho pode ser dividido em duas frentes. A primeira é o projeto de controladores via LMIs, que possuem uma formulação sólida e permitem o projeto de controladores com altos índices de desempenho. A segunda é o projeto de controladores nebulosos, cuja formulação teórica sobre estabilidade ainda encontra dificuldades, entretanto, é muito utilizada e tem experimentado grandes avanços devido a sua fácil implementação. O controlador nebuloso utilizado neste trabalho foi projetado por um processo automático através da otimização por algoritmo genético. Todos os controladores projetados neste trabalho são comparados com as estratégias de controle passivo. Outras comparações também foram realizadas com o controle semi-ativo utilizando um controlador LQR e um controlador nebuloso do tipo Mamdani sem otimização. Simulações numéricas com diversas excitações de entrada foram conduzidas. O trabalho termina demonstrando a superioridade do controle nebuloso via algoritmo genético e sua potencialidade para o futuro. Houve destaque também para o controlador que reduz a norma H_2 via LMI.

Palavras-chave: Lógica nebulosa. Algoritmo genético. Desigualdades matriciais lineares (LMI). Amortecedor magnetoreológico. Controle semi-ativo.

GAGG FILHO, L. A. **Semi-active control of vibrations with magnetorheological fluid using lmis and fuzzy logic optimized by genetic algorithm.** 2012. 143 f. Dissertação (Mestrado of Science in Mechanical Engineering)- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”- UNESP, Ilha Solteira, 2012.

ABSTRACT

This work studies several semi-active control strategies for vibration attenuation in vehicle suspensions employing magnetorheological dampers (MR). The modeling of MR damper is made using the Bouc-Wen modified model. In order to understand the principle of operation of an MR damper, a dynamic analysis is conducted. In this analysis the nonlinear behavior of the MR damper is characterized by hysteretic loops. When it is incorporated into the $\frac{1}{4}$ car suspension model, other nonlinear effects are evident. After this study, different controllers are designed. This work can be divided into two phases. The first one applies controllers projected via by LMIs, which has a solid formulation and allows high performances to the controllers. The second one uses a fuzzy controller, whose theoretical formulation on stability still faces difficulties. However, it is widely used and has been demonstrating great advances due to its easy implementation. The fuzzy controller used in this work was designed by an automatic process through optimization by genetic algorithm. All controllers projected are compared with passive control strategies. Other comparisons were also performed with semi-active control using a LQR controller and a Mamdani fuzzy controller without optimization. Numerical simulations with different input excitations were conducted. The work ends up demonstrating the superiority of the fuzzy controller with genetic algorithm and its potential for the future. There was also a highlight for the controller that reduces the H_2 norm by LMIs.

Keywords: Fuzzy logic. Genetic algorithms. Linear matrix inequalities (LMI). Magnetorheological damper. Semi-active control.

Lista de Figuras

Figura 1	Assento com amortecedor MR.....	24
Figura 2	Controle semi-ativo de vibração de cabos estaiados utilizando amortecedores MR.	25
Figura 3	Esquema de um amortecedor MR.	25
Figura 4	Tensão de cisalhamento (τ) versus taxa de cisalhamento ($\dot{\gamma}$).	29
Figura 5	Modelo de Bingham para amortecedor MR.	29
Figura 6	Modelo de de Bouc-Wen para amortecedor MR.	30
Figura 7	Resposta do estado estacionário quando $\beta + \gamma > 0$ e $\gamma - \beta > 0$	32
Figura 8	Resposta do estado estacionário quando $\beta + \gamma > 0$ e $\gamma - \beta < 0$	33
Figura 9	Laço histerético estrangulado.	34
Figura 10	Modelo proposto por GAMOTA e FILSKO (1991)	34
Figura 11	Modelo modificado de Bouc-Wen.	35
Figura 12	Modelo de suspensão equivalente a $\frac{1}{4}$ de veículo.	38
Figura 13	Modelo da suspensão não linear de $\frac{1}{4}$ de veículo.	40
Figura 14	Diagrama de blocos no <i>Simulink</i>	42
Figura 15	Diagrama de blocos do modelo de Bouc-Wen modificado.	43
Figura 16	Força versus Deslocamento.	44
Figura 17	Força versus Velocidade.	44
Figura 18	Força através do tempo.	45
Figura 19	Diagrama de blocos no <i>Simulink</i> para varredura senoidal.	46

Figura 20	Comportamento de x_1 adimensionalizada em relação à entrada $w(t)$ com diferentes voltagens.....	47
Figura 21	Comportamento de x_2 adimensionalizada em relação à entrada $w(t)$ com diferentes voltagens.....	47
Figura 22	Comportamento de x_1 adimensionalizada em relação à entrada $w(t)$ com diferentes amplitudes.....	49
Figura 23	Comportamento de x_2 adimensionalizada em relação à entrada $w(t)$ com diferentes amplitudes.....	49
Figura 24	FFT de x_1 considerando entradas senoidais.....	50
Figura 25	FFT de x_2 considerando entrada senoidais.....	50
Figura 26	Ilustração da norma H_∞ para sistema MIMO.....	58
Figura 27	Precisão e significância no mundo real.....	71
Figura 28	Grau de pertinência (Lógica Booleana) e grau de pertinência (Lógica Nebulosa) respectivamente.....	72
Figura 29	Funções de pertinência do tipo (a) triangular, (b) trapezoidal e (c) gaussiana.....	73
Figura 30	Operações padrões da lógica Booleana.....	74
Figura 31	Operadores <i>min</i> e <i>max</i>	74
Figura 32	Operadores da lógica nebulosa.....	75
Figura 33	Mecanismo de Inferência utilizando o operador <i>min</i>	77
Figura 34	Tipos de filhos.....	82
Figura 35	Diagrama de blocos do sistema a ser simulado no Simulink.....	86
Figura 36	Bloco “Grampeamento” com a função embarcada.....	87
Figura 37	Diagrama de blocos no <i>Simulink</i> do controle passivo.....	87

Figura 38	Comportamento do deslocamento x_2 em relação ao tempo.....	88
Figura 39	Comportamento da aceleração \dot{x}_3 em relação ao tempo.....	88
Figura 40	Comportamento de x_2 no controle utilizando a norma H_∞	89
Figura 41	Comportamento de \dot{x}_3 no controle utilizando a norma H_∞	90
Figura 42	Comportamento da voltagem v enviada ao amortecedor no controle utilizando a norma H_∞	90
Figura 43	Força desejada pelo controlador e a força produzida pelo amortecedor no controle com norma H_∞	91
Figura 44	Comportamento de x_2 no controle utilizando a norma H_2	92
Figura 45	Comportamento de \dot{x}_3 no controle utilizando a norma H_∞	92
Figura 46	Comportamento da voltagem v enviada ao amortecedor no controle utilizando a norma H_2	93
Figura 47	Força desejada pelo controlador e a força produzida pelo amortecedor no controle com norma H_2	94
Figura 48	Diagrama de blocos no <i>Simulink</i> do controle derivativo.....	95
Figura 49	Força desejada pelo controlador e a força produzida pelo amortecedor no controle utilizando Finsler.....	96
Figura 50	Comportamento da voltagem v enviada ao amortecedor no controle utilizando Finsler.....	96
Figura 51	Comportamento de x_2 no controle utilizando Finsler.....	97
Figura 52	Comportamento de \dot{x}_3 no controle utilizando Finsler.....	97
Figura 53	Diagrama de blocos do <i>Simulink</i> para avaliar o comportamento do controlador nebuloso.....	102
Figura 54	Função de pertinência.....	102

Figura 55	Tabela de Regras	104
Figura 56	Evolução das gerações.	105
Figura 57	Comparação do comportamento de x_2 com os controles passivos.	106
Figura 58	Comparação do comportamento de x_2 com outras estratégias de controle ...	106
Figura 59	Comparação do comportamento de \dot{x}_3 com os controles passivos.....	107
Figura 60	Comparação do comportamento de \dot{x}_3 com os outras estratégias de controle.....	107
Figura 61	Voltagem enviada ao amortecedor MR no controle semi-ativo nebuloso-GA.	108
Figura 62	Comparação entre a força produzida pelo amortecedor MR e a força calculada pelo controlador nebuloso-GA.....	108
Figura 63	Comparação do comportamento de x_2 com excitação do tipo dente-de-serra.	110
Figura 64	Comparação do comportamento de \dot{x}_3 com excitação do tipo dente-de-serra.	110
Figura 65	Voltagem enviada ao amortecedor MR no controle semi-ativo utilizando o controle nebuloso-GA.	111
Figura 66	Comparação entre a força produzida pelo amortecedor e a força calculada pelo controlador no controle nebuloso-GA.....	111
Figura 67	Comparação do comportamento de x_2 considerando as diversas estratégias de controle no modelo linear de $\frac{1}{4}$ de carro com variações paramétricas.	113
Figura 68	Comparação do comportamento de \dot{x}_3 considerando as diversas estratégias de controle no modelo linear de $\frac{1}{4}$ de carro com variações paramétricas.	113

Figura 69	Voltagem enviada ao amortecedor MR no controle semi-ativo utilizando o controle nebuloso-GA.	114
Figura 70	Comparação entre a força produzida pelo amortecedor e a força calculada pelo controlador no controle nebuloso-GA.	114
Figura 71	Diagrama de blocos do controle utilizando a planta não linear.	116
Figura 72	Planta não linear	117
Figura 73	Comparação do comportamento de x_2 considerando as diversas estratégias de controle no modelo não linear de ¼ de carro.	118
Figura 74	Comparação do comportamento de \dot{x}_3 considerando as diversas estratégias de controle no modelo não linear de ¼ de carro.	118
Figura 75	Voltagem enviada ao amortecedor MR no controle semi-ativo utilizando o controle nebuloso-GA.	119
Figura 76	Comparação entre a força produzida pelo amortecedor e a força calculada pelo controlador no controle nebuloso-GA.	119
Figura 77	Comparação do comportamento de x_2 considerando as diversas estratégias de controle no modelo não linear de ¼ de carro com excitação dente-de-serra.	121
Figura 78	Comparação do comportamento de \dot{x}_3 considerando as diversas estratégias de controle no modelo não linear de ¼ de carro com excitação dente-de-serra.	121
Figura 79	Voltagem enviada ao amortecedor MR no controle semi-ativo utilizando o controle nebuloso-GA.	122
Figura 80	Comparação entre a força produzida pelo amortecedor e a força calculada pelo controlador no controle nebuloso-GA.	122
Figura 81	Comparação do comportamento de x_2 considerando as diversas estratégias de controle no modelo não linear de ¼ de carro com variações paramétricas.	124

Figura 82	Comparação do comportamento de \dot{x}_3 considerando as diversas estratégias de controle no modelo não linear de ¼ de carro com variações paramétricas.	124
Figura 83	Voltagem enviada ao amortecedor MR no controle semi-ativo utilizando o controle nebuloso-GA.	125
Figura 84	Comparação entre a força produzida pelo amortecedor e a força calculada pelo controlador no controle nebuloso-GA.	125
Figura 85	Sinal de entrada em lombada.	127
Figura 86	Comparação do comportamento de x_2 considerando as diversas estratégias de controle no modelo linear de ¼ de carro com entrada em lombada.	128
Figura 87	Comparação do comportamento de \dot{x}_3 considerando as diversas estratégias de controle no modelo linear de ¼ de carro com entrada em lombada.	128
Figura 88	Voltagem enviada ao amortecedor MR no controle nebuloso genético.	129
Figura 89	Comparação da força produzida pelo amortecedor MR e a força desejada pelo controlador nebuloso genético.	129
Figura 90	Comportamento do <i>jerk</i> no controle passivo em 2 V.	130
Figura 91	Comportamento do <i>jerk</i> no controle passivo em 0 V.	131
Figura 92	Comportamento do <i>jerk</i> no controle semi-ativo minimizando a norma H_∞	131
Figura 93	Comportamento do <i>jerk</i> no controle semi-ativo minimizando a norma H_2 . ..	132
Figura 94	Comportamento do <i>jerk</i> no controle semi-ativo nebuloso genético.	132

Lista de Tabelas

Tabela 1	Valores dos parâmetros físicos do modelo linear de $\frac{1}{4}$ de veículo	39
Tabela 2	Valores dos parâmetros do amortecedor MR, modelo de Bouc-Wen modificado.....	39
Tabela 3	Valores dos parâmetros físicos do modelo não linear de $\frac{1}{4}$ de veículo	41
Tabela 4	Frequências naturais amortecidas em diferentes valores de voltagem.....	48
Tabela 5	Valores AR em dois casos de controle passivo.....	89
Tabela 6	Valores AR no controle passivo e no controle utilizando a norma H_∞	91
Tabela 7	Valores AR nos diversos tipos de controle incluindo o controle H_2	93
Tabela 8	Valores RMS nos diversos tipos de controle incluindo o controle derivativo abordando Finsler.....	98
Tabela 9	Principais comandos utilizados para se projetar o controlador nebuloso.....	99
Tabela 10	Valores AR de cada estratégia de controle utilizando o modelo linear de $\frac{1}{4}$ de carro.....	109
Tabela 11	Valores AR de cada estratégia de controle utilizando o modelo linear de $\frac{1}{4}$ de carro para uma excitação do tipo dente-de-serra.....	112
Tabela 12	Valores AR de cada estratégia de controle utilizando o modelo linear de $\frac{1}{4}$ de carro com variações paramétricas.	115
Tabela 13	Valores AR de cada estratégia de controle utilizando o modelo não linear de $\frac{1}{4}$ de carro.....	120
Tabela 14	Valores AR de cada estratégia de controle utilizando o modelo não linear de $\frac{1}{4}$ de carro com excitação do tipo dente-de-serra.....	123

Tabela 15	Valores AR de cada estratégia de controle utilizando o modelo não linear de $\frac{1}{4}$ de carro com variações paramétricas.....	126
Tabela 16	Valores AR de cada estratégia de controle utilizando o modelo linear de $\frac{1}{4}$ de carro sujeito a perturbação em lombada.....	130

Lista de Símbolos

Letras Latinas

$\ \cdot \ _{\infty}$	Norma H_{∞}
$\ \cdot \ _2$	Norma H_2
A	Matriz dinâmica
B	Matriz de entrada
B₁	Matriz de entrada de distúrbio
B₂	Matriz de entrada de controle
C	Matriz de saída
c_0, c_1	Coefficientes de amortecimento
c_1^*	Coefficiente de amortecimento não linear
c_1^l	Termo linear do amortecedor não linear
c_1^{nl}	Termo não linear do amortecedor não linear
c_1^y	Coefficiente de amortecimento do termo assimétrico
D	Matriz de transmissão direta
K	Ganho do controlador
f_c	Força friccional
f_{\max}	Força friccional máxima
f_0	Força residual
F	Força gerada
$F_d, F_{desejada}$	Força calculada pelo controlador
F_{MR}	Força produzida pelo amortecedor MR
$H[]$	Função degrau unitário ou função de Heaviside
i_{\max}	Corrente elétrica máxima que pode ser aplicada
I, i	Corrente elétrica
k_0, k_1, k_2, k_{1sist}	Rigidezes

k_1^*	Rigidez não linear
k_1^l	Termo linear da mola não linear
k_1^{nl}	Termo não linear da mola não linear
\mathbf{L}_C	Graminiano de controlabilidade
\mathbf{L}_O	Graminiano de observabilidade
m_1	Massa de ¼ de veículo
m_2	Massa do conjunto da roda
N	Número de vértices do politopo
s	Variável complexa de Laplace
$\text{sgn}()$	Função sinal
$\text{tr}()$	Traço
u	Sinal de entrada
V_{\max}	Voltagem máxima que pode ser aplicada
V	Voltagem
v	Voltagem aplicada no driver de corrente
vp	Número de parâmetros incertos
$\mathbf{V}(\mathbf{x})$	Função energia genérica de Lyapunov
$w(t)$	Deslocamento vertical da interface entre pista e pneu
$\mathbf{x}(t)$	Vetor de estado
$\dot{\mathbf{x}}$	Derivada temporal do vetor de estado
x_0	Deslocamento inicial
x	Deslocamento
\dot{x}	Velocidade
x_c, x_1	Deslocamento da massa de ¼ de veículo
x_r, x_2	Deslocamento da roda (massa não amortecida)
x_3	Velocidade da massa amortecida
\dot{x}_3	Aceleração da massa amortecida
x_4	Velocidade da massa não amortecida
x_{RMS}	Valor RMS do sinal x

$\mathbf{y}(t)$	Vetor de saída
z	Componente histerética da força

Letras Gregas

α	Coeficiente de rigidez
λ, γ, β e η	Parâmetros do fluido magnetoreológico
Λ_N	Simplex unitário
σ	Valor singular
$\mathcal{L}^{-1}\{\}$	Transformada inversa de Laplace
μ	Viscosidade do fluido magnetoreológico
μ_A	Grau de pertinência em relação ao conjunto A
μ_B	Grau de pertinência em relação ao conjunto B
δ	Função impulsiva
τ	Tensão de escoamento do fluido magnetoreológico
$\dot{\gamma}$	Taxa de cisalhamento do fluido magnetoreológico

Siglas

LMI	Desigualdade Matricial Linear
MR	Magnetoreológico
AR	Área do sinal retificado
<i>IP</i>	Índice de Performance
RMS	Root Mean Square
LQR	Linear Quadratic Regulator
GA	Algoritmo genético
NG	Negativo Grande
NM	Negativo Médio
NB	Negativo Baixo
Z	Zero
PB	Positivo Baixo
PM	Positivo Médio
PG	Positivo Grande

Sumário

1	INTRODUÇÃO.....	22
2	MODELAGEM MATEMÁTICA DO AMORTECEDOR MAGNETOREOLÓGICO	28
2.1	INTRODUÇÃO	28
2.2	MODELO VISCOPLÁSTICO DE BINGHAM.....	28
2.2.1	Relacionado com a Voltagem	29
2.2.2	Relacionado com a Corrente	30
2.3	Modelo de Bouc-Wen	30
2.3.1	Relacionado com a Voltagem	31
2.3.2	Relacionado com a Corrente	31
2.3.3	Interpretação dos parâmetros	31
2.4	OUTROS MODELOS	34
2.4.1	Modelo proposto por Gamota e Filisko	34
2.4.2	Modelo de Bouc-Wen modificado.....	35
2.5	ALGORITMO DE CONTROLE UTILIZADO EM AMORTECEDORES MR.....	36
2.5.1	Algoritmo de Controle Grampeado.....	36
2.6	MODELO LINEAR DE ¼ DE VEÍCULO.....	38
2.7	MODELO NÃO-LINEAR DE ¼ DE VEÍCULO.....	40
2.8	ANÁLISE DINÂMICA	41
3	ESTRATÉGIAS DE CONTROLE.....	52

3.1	CONTROLE UTILIZANDO LMIS	52
3.1.1	Introdução	52
3.1.2	Conceitos Básicos	54
3.1.3	Caracterização do critério de estabilidade de Lyapunov	55
3.1.4	Controle Robusto	56
3.1.5	Controle Robusto utilizando a norma H_∞ via LMI	57
3.1.6	Controle Robusto utilizando a norma H_2 via LMI.....	61
3.1.7	Controle utilizando o Lema de Finsler.....	67
3.2	CONTROLADORES NEBULOSOS	70
3.2.1	Introdução	70
3.2.2	Fundamentos da Lógica Nebulosa	71
3.2.3	Conjuntos Nebulosos	72
3.2.4	Operações Lógicas	73
3.2.5	Regras <i>Se-Então</i>	75
3.2.6	Sistema de Inferência Nebulosa.....	76
3.2.7	Projeto de Controladores Nebulosos.....	77
3.2.8	Estabilidade de Controladores Nebulosos	78
3.3	ALGORITMO GENÉTICO.....	80
3.3.1	Fundamentos do Algoritmo Genético	81
4	RESULTADOS NUMÉRICOS.....	84
4.1	CONTROLE PASSIVO.....	87
4.2	CONTROLE H_∞ POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS	89

4.3	CONTROLE H_2 POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS	92
4.4	CONTROLE UTILIZANDO O LEMA DE FINSLER POR REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA.....	94
4.5	CONTROLE POR LÓGICA NEBULOSA OTIMIZADA POR ALGORITMO GENÉTICO.....	98
4.5.1	Modelo Linear de ¼ de carro	105
4.5.2	Modelo Linear com variações paramétricas	112
4.5.3	Modelo Não-Linear.....	115
4.5.4	Modelo Não Linear com variações paramétricas.....	123
4.6	COMPARAÇÕES DAS PRINCIPAIS ESTRATÉGIAS DE CONTROLE	126
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	134
	Referências.....	136

1 Introdução

Estruturas inteligentes podem ser definidas como sistemas estruturais com um certo grau de autonomia, que decorre das funções intrínsecas de sensores, atuadores e processadores, cujas características estruturais podem ser automaticamente ajustadas em resposta a perturbações externas (OTANI et al., 2000). O intuito dessas mudanças nas propriedades desses materiais é promover a segurança, a operacionalidade e aumentar a vida útil da estrutura. A origem dos sistemas inteligentes remonta de um campo de pesquisa que objetivava projetar materiais e aparelhos que possam imitar o sistema nervoso e muscular humano (AKHRAS, 2000). Os sistemas, com seus sensores e atuadores incorporados, formam uma entidade única que podem agir e reagir de uma maneira previsível simulando uma função biológica.

Os materiais inteligentes podem ser separados nas seguintes categorias:

- Piezelétricos: quando o material é submetido a uma carga elétrica ou a uma variação de voltagem ele sofre uma deformação mecânica. O efeito oposto também ocorre.
- Eletrostrictivo: o material possui as mesmas propriedades que os piezelétricos, no entanto, a deformação mecânica é proporcional ao quadrado do campo elétrico produzindo deslocamentos sempre na mesma direção.
- Magnetostrictivo: uma tensão mecânica é induzida no material quando este é submetido a campo magnético. O efeito contrário também ocorre.
- Liga de memória de forma: quando sujeito a um campo térmico, o material sofre transformações de fase produzindo mudanças de forma. Ele deforma na fase martensítica em baixas temperaturas e volta à sua forma original na fase de austenita quando aquecido.
- Fibras óticas: fibras que utilizam intensidade, fase, frequência ou polarização de modulação de ondas eletromagnéticas para medir tensão, temperatura, campos elétrico e magnético, pressão e outras grandezas.
- Fluidos controláveis: quando o fluido muda de forma e de viscosidade quando submetido a um campo magnético é nomeado de fluido magnetoreológico, quando o mesmo ocorre só que agora em campo elétrico o fluido leva o nome de eletroreológico.

Existe uma outra categoria de materiais inteligentes chamada de compósitos inteligentes. Estes são a combinação de dois ou mais materiais inteligentes mencionados anteriormente com a intenção de aproveitar as vantagens oferecidas individualmente de cada material e combiná-las para satisfazer rigorosas especificações de projetos. Pode-se dizer que os compósitos inteligentes são o futuro dos materiais inteligentes.

O conceito de sistemas inteligentes foi inicialmente proposto no campo da engenharia aeroespacial, pois estes sistemas originalmente são ativos e adaptativos exigindo alto desempenho e pouco peso (OTANI et al., 2000). Depois estes sistemas foram incorporados em construções civis. Hoje se espalha em diversas áreas incluindo a área médica e a automobilística.

Os sistemas inteligentes automotivos vêm sendo estudados tanto em centros de pesquisas como em indústrias. Estes estão concentrados em resolver problemas relacionados principalmente com o conforto e a segurança dos passageiros (DO et al., 2010). Especificamente para os problemas de segurança, sistemas de controle de freio (SAVARESI et al., 2007), como o ABS e de direção foram estudados para estabilizar o veículo em situações extremas. Para o problema de conforto os estudos estão direcionados principalmente para suspensões ativas (DE JAGER, 1997). Entretanto, um projeto eficaz de uma suspensão pode melhorar tanto conforto quanto segurança. Neste aspecto, as suspensões semi-ativas são ideais por possuírem pouco peso e volume, baixo preço e bom desempenho quando comparada às suspensões ativas. Além disso, as suspensões semi-ativas possuem baixo consumo de energia, que é utilizada somente para mudar as propriedades físicas do dispositivo semi-ativo (SPENCER JUNIOR et al., 1997). Portanto a energia não é aplicada diretamente na estrutura forçando uma deformação por exemplo, diferente do controle ativo (CARNEIRO, 2009), onde uma maior fonte de energia externa é necessária com a vantagem de ser mais adaptável. Dentre os dispositivos semi-ativos destaca-se os amortecedores que utilizam fluido eletroreológico (ER) e os que utilizam fluido magnetoreológico (MR). Embora estes dois fluidos houvessem sido descobertos quase ao mesmo tempo (WLNSLOW, 1947), o fluido ER foi primeiro estudado e utilizado em aplicações civis (GAVIN et al., 1994). Contudo, recentes estudos consideram o fluido MR mais interessante, pois pode operar em temperaturas entre -40°C e 150°C e alcança uma tensão de escoamento cerca de uma ordem de grandeza maior que o fluido ER (CARLSON, 1994), além de necessitar de baixa voltagem na saída do driver de corrente. O trabalho de Stelzer et al. (2003) mostra que a abordagem de um isolador semi-ativo utilizando fluido MR é promissora. Entretanto, o comportamento de

um fluido MR é completamente não linear tornando este o principal problema de modelagem e projeto de sistemas que utilizam este material.

As aplicações do fluido MR são inúmeras. Pode-se citar a utilização de fluidos MR em embreagens automotivas (SAKAI, 1988); em freios para equipamentos de exercícios (CARLSON; SPROSTON, 2000); em líquidos de polimento (KORDONSKI; GOLINI, 1999); em amortecedores de assento (CARLSON; SPROSTON, 2000), veja figura 1. O trabalho de Lewis e Griffin (2000) é útil para este objetivo pois faz uma análise detalhada do conforto para os ocupantes do veículo. Outras aplicações dos fluidos MR incluem amortecedores para próteses de joelho (CARLSON; SPROSTON, 2000); sistemas de atuadores (LEWIS, 1999); absorvedores de impacto e amortecedores aplicados em estruturas civis contra terremotos (DYKE et al., 1999). Christenson et al. (2006) utilizaram o fluido MR em um isolador semi-ativo para reduzir o ruído e a transmissibilidade de vibração em automóveis.

Figura 1 – assento com amortecedor MR



Fonte: Lord Corporation.

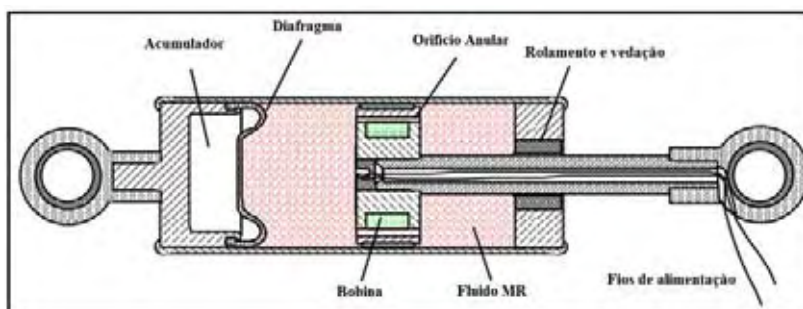
A figura 2 ilustra amortecedores MR que são aplicados em estratégias de controle semi-ativo de vibrações nos cabos estaiados de uma ponte. Em 2002, os amortecedores MR foram aplicados em 156 cabos estaiados na ponte de Dongting Lake, em uma província da China. Estudos analíticos e experimentais com controle em malha fechada estão sendo conduzidos para melhorar a redução de vibração na ponte, induzida principalmente pelo vento e pela chuva (CHRISTENSON et al., 2006). A figura 3 ilustra as partes de um amortecedor MR convencional.

Figura 2 – controle semi-ativo de vibração de cabos estaiados utilizando amortecedores MR.



Fonte: Spencer e Nagarajaiah (2003).

Figura 3 – esquema de um amortecedor MR.



Fonte: Dyke et al. (1996).

Ao mesmo tempo em que os sistemas inteligentes foram desenvolvidos novas teorias de controle foram elaboradas. O aumento da complexidade dos sistemas inspirou o surgimento de uma nova linha de pesquisa voltada para o controle de tais sistemas: os controladores fundamentados na Inteligência Artificial (PASCHOAL, 2011). Basicamente, a Inteligência Artificial se sustenta sobre três pilares: a lógica nebulosa (*Fuzzy Logic*), as redes neurais artificiais (*Artificial Neural Networks*) e os algoritmos genéticos (*Genetic Algorithms*).

A lógica nebulosa vem apresentando resultados excepcionais (PASCHOAL, 2011). A razão para tanto interesse se concentra em algumas características básicas desta tecnologia: ela tenta imitar a intuição humana operando uma estratégia de controle; não requer o conhecimento detalhado dos modelos dos elementos do processo a ser controlado; se aplica a sistemas lineares e não lineares; é de implementação fácil e de baixo custo; e apresenta boa robustez às incertezas ou variações paramétricas. No entanto, o projeto de controladores nebulosos encontra dificuldade quando a intuição humana é insuficiente para prever o

comportamento do sistema tornando impossível a construção das regras de projeto do controlador nebuloso, isso ocorre principalmente em sistemas de múltiplos graus de liberdade. Para sanar esta dificuldade pode-se incorporar o Algoritmo Genético, que nada mais é do que um algoritmo de otimização, a fim de escolher as melhores regras. As Redes Neurais também encontram seu espaço ao reconhecer padrões no sistema facilitando a criação das regras. Diversas são as combinações entre essas três teorias e a lista de aplicações é imensa.

Entretanto, apesar da praticidade da lógica nebulosa, não há um formalismo matemático abordando o controle e a estabilidade de controladores deste tipo. Tanto em sistemas simples quanto complexos, muitas vezes são exigidos rigorosos critérios de estabilidade. Apesar dos controladores nebulosos atenderem esses requisitos, estes não são garantidos por uma teoria robusta. Nestes casos, as LMIs (*linear matrix inequalities*) são extremamente úteis. A teoria do projeto de controladores via LMIs é muito bem formulada. Ela nasceu no critério de estabilidade de Lyapunov, quando a primeira LMI foi criada e obteve um grande avanço quando suas soluções foram obtidas através de algoritmos de otimização convexa. Além de projetos com altos requisitos de estabilidade, as LMIs são amplamente utilizadas em projetos com incertezas paramétricas. Contudo, a formulação das LMIs permite o projeto de controladores voltados somente para sistemas lineares.

Existem trabalhos que utilizam LMIs em sistemas não lineares. Por exemplo, CHEN et al. (2000) aproximam uma classe de sistemas não lineares em um modelo nebuloso para depois desenvolver uma teoria de controle via LMI. Como foi dito anteriormente, a lógica nebulosa não possui um formalismo matemático sobre estabilidade. No trabalho de Fang et al. (2006) é proposta uma nova condição de estabilidade quadrática, representada por LMIs, para um sistema nebuloso. Como se pode perceber muitas são as combinações possíveis destas novas tecnologias.

Este trabalho pretende estudar o controle semi-ativo de vibrações em um conjunto de suspensão de um quarto de veículo, que incorpora fluido magnetoreológico (MR). O objetivo é avaliar o desempenho dos controladores visando a melhoria tanto do conforto dos passageiros quanto do desempenho do carro. Para isso, duas variáveis de estados serão consideradas, a primeira representa o deslocamento do conjunto da roda e está relacionada com o desempenho e a outra representa a aceleração da massa de $\frac{1}{4}$ de carro e está relacionada com o conforto do passageiro. Os controladores serão submetidos a diversas condições considerando inclusive as não linearidades presentes no modelo de $\frac{1}{4}$ de carro e no fluido MR. Assim o comportamento dessas variáveis podem ser verificados sempre visando a redução delas através de um índice. A fim de alcançar o objetivo proposto o Capítulo 2 faz

uma breve revisão dos modelos de um amortecedor MR e explica o modelo utilizado nesse trabalho. O modelo linear e não linear de $\frac{1}{4}$ de carro também são apresentados. Nesse mesmo capítulo uma análise dinâmica desses modelos é realizada a fim de caracterizar as frequências naturais amortecidas e as não linearidades presentes. O Capítulo 3 consiste em explicar as estratégias de controle. Primeiramente são abordados os controles de redução das normas H_2 e H_∞ via LMIs, pois possuem uma teoria consolidada de estabilidade e garantem as especificações exigidas para as respostas transitórias quando há incertezas no modelo. Posteriormente, a fim de aperfeiçoar os índices de conforto e de desempenho do veículo, um controlador nebuloso é implementado via Algoritmo Genético, que é comparado com um controlador nebuloso implementado por Paschoal (2011). Todos os controladores são comparados com as técnicas de controle passivo. No Capítulo 4 os principais resultados são apresentados considerando diversos tipos de sinais de pista aplicados tanto no modelo linear quanto no modelo não linear de $\frac{1}{4}$ de carro. Por fim, o Capítulo 5 apresenta as considerações finais e sugere trabalhos futuros.

2 Modelagem Matemática do Amortecedor Magnetoreológico

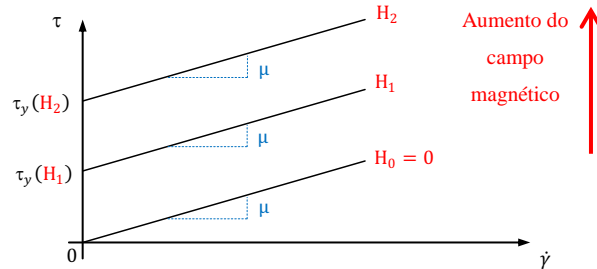
2.1 Introdução

Amortecedores Magnetoreológicos (MR) são altamente não lineares, devido a isso grandes esforços continuam concentrados na modelagem desse tipo de amortecedor. O tipo de modelo pode ser classificado de acordo com as propriedades (LIAO, 2011): se as propriedades do fluido no modelo se alteram com o tempo, então este é classificado como modelo dinâmico, caso contrário será classificado como modelo quasistático. O modelo também pode ser classificado de acordo com o método de modelagem entre modelo dinâmico não paramétrico e modelo dinâmico paramétrico. No primeiro, o sistema real é modelado como uma combinação de elementos físicos como molas, amortecedores e outros elementos. Para configurar as propriedades destes elementos corretamente faz-se necessário a realização de um experimento e comparação dos dados experimentais com os dados fornecidos pelo modelo composto pelos elementos. Posteriormente as propriedades são ajustadas a fim de minimizar o erro entre os dados experimentais e teóricos. No modelo dinâmico não paramétrico um experimento também deve ser realizado a fim de comparar os dados experimentais e os dados teóricos fornecidos pelo modelo, o qual não é mais composto por elementos físicos, mas sim emprega expressões analíticas que capturam o comportamento do amortecedor. Finalmente, o modelo pode ser classificado de acordo com a reversibilidade entre modelo dinâmico ou modelo dinâmico inverso. Se o modelo consiste em calcular a força produzida pelo amortecedor, a qual é dependente do deslocamento e da voltagem ou da corrente elétrica, então o modelo é classificado como modelo dinâmico. Por outro lado, se o modelo calcula o deslocamento e a corrente elétrica ou a voltagem as quais devem ser fornecidas ao amortecedor para produzir determinada força, então o modelo é classificado como modelo dinâmico inverso.

2.2 Modelo viscoplástico de Bingham

Neste modelo a tensão de cisalhamento possui uma relação linear com a taxa de cisalhamento. Com o aumento do campo magnético a tensão de cisalhamento será maior, como pode ser visto na figura 4.

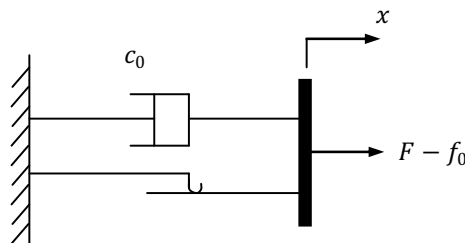
Figura 4 – Tensão de cisalhamento (τ) versus taxa de cisalhamento ($\dot{\gamma}$).



Fonte: Srinivasan e Mcfarland (2000)

Stanway et al. (1987) criaram o modelo de Bingham para amortecedores ER baseado neste comportamento. O modelo possui um amortecedor viscoso ideal em paralelo com um elemento de fricção de Coulomb. Essa configuração é mostrada na figura 5.

Figura 5 – Modelo de Bingham para amortecedor MR.



Fonte: Dyke (1996)

A força gerada pelo amortecedor MR é calculada de acordo com a equação (1).

$$F = f_c \operatorname{sgn}(\dot{x}) + c_0 \dot{x} + f_0 \quad (1)$$

onde F é a força gerada, f_c é a força friccional, que depende do campo magnético aplicado, $\operatorname{sgn}()$ é a função sinal, c_0 é o coeficiente de amortecimento e f_0 é a força residual devido a presença de um acumulador no equipamento.

2.2.1 Relacionado com a Voltagem

A fim de tornar a força F relacionada com a voltagem, uma relação proporcional deve ser construída entre f_c e a voltagem, como é mostrada na equação (2) a seguir.

$$f_c(V) = f_{\max} \left(\frac{V}{V_{\max}} \right) \quad (2)$$

onde V_{max} é a maior voltagem que pode ser aplicada no sistema e f_{max} é a maior força friccional que pode ser fornecida pelo fluido MR, esta última é específica para cada fluido.

2.2.2 Relacionado com a Corrente

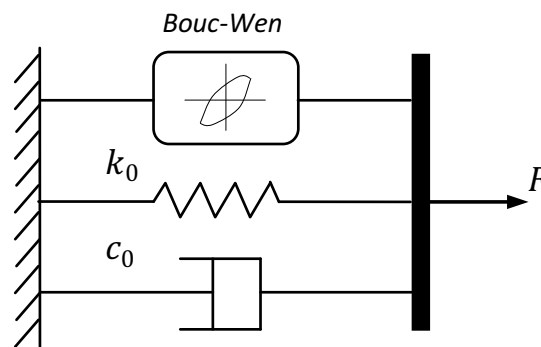
Pode ser feito a mesma relação do tópico anterior usando a corrente, como é mostrado na equação (3)

$$f_c(V) = f_{max} \left(\frac{i}{i_{max}} \right) \quad (3)$$

2.3 Modelo de Bouc-Wen

Uma das desvantagens do modelo de Bingham é sua inabilidade em modelar o comportamento dinâmico transiente do amortecedor MR, o qual é caracterizado como um ciclo histerético. Assim, em baixas velocidades, o modelo não pode prever com precisão a força gerada. No entanto, o modelo de Bouc-Wen é extremamente versátil e pode exibir uma ampla variedade de comportamentos histeréticos (DYKE, 1996). A configuração desse modelo é mostrada na figura 6.

Figura 6 – modelo de Bouc-Wen para amortecedor MR.



Fonte: Spencer Junior et al. (1997).

A força gerada pelo amortecedor MR é dada por:

$$F = c_0(\dot{x} - \dot{x}_0) + k_0(x - x_0) + \alpha z \quad (4)$$

onde z pode ser calculado por:

$$\dot{z} = -\gamma |\dot{x}| z |z|^{n-1} - \beta \dot{x} |z|^n + A \dot{x} \quad (5)$$

Onde c_0 é o coeficiente de amortecimento, k_0 é a rigidez, x_0 é o deslocamento inicial, x é a variável dependente, α é um coeficiente de rigidez e as constantes γ , β , A e n são parâmetros do fluido, que, quando ajustados, podem controlar a linearidade no descarregamento e a

suavidade na transição da região de pré-carga para a região de pós-carga. A força devido ao acumulador é diretamente incorporada no modelo como um deslocamento inicial x_0 e uma mola linear k_0 .

2.3.1 Relacionado com a Voltagem

Para configurar esse modelo em um campo magnético flutuante as seguintes relações são propostas:

$$\alpha(u) = \alpha_a + \alpha_b u \quad (6)$$

$$c_0(u) = c_{0a} + c_{0b} u \quad (7)$$

$$\dot{u} = -\eta(u - v) \quad (8)$$

onde v é a voltagem aplicada no circuito que fornece a corrente elétrica e η é uma constante. A equação (8) é um filtro de primeira ordem, que modela o tempo necessário para as variáveis α e c_0 alcançarem o equilíbrio reológico.

2.3.2 Relacionado com a Corrente

As propriedades do amortecedor MR são relacionadas com o campo magnético, que é diretamente relacionado com a corrente. Portanto, faz mais sentido propor uma relação entre os parâmetros do modelo de Bouc-Wen e a corrente. Dominguez et al. (2004) propõem as seguintes relações:

$$c_0(I) = c_1 + c_2(1 - e^{-c_3 I}) \quad (9)$$

$$k_0(I) = k_1 + k_2 \quad (10)$$

$$\alpha(I) = \alpha_1 + \alpha_2(1 - e^{-\alpha_3 I}) \quad (11)$$

$$\gamma(I) = -\gamma_1 + \gamma_2(I) \quad (12)$$

onde c_1 e c_2 são coeficientes de amortecimentos, k_1 e k_2 são rigidezes, α_1 e α_2 são coeficientes de rigidezes, γ_1 e γ_2 são parâmetros do fluido e I é a corrente elétrica.

2.3.3 Interpretação dos parâmetros

Na seção 2.3 foi mostrado o modelo de Bouc-Wen. Este tópico discutirá sobre a interpretação física dos parâmetros γ , β , A , η e α mostrados nas equações (4) e (5).

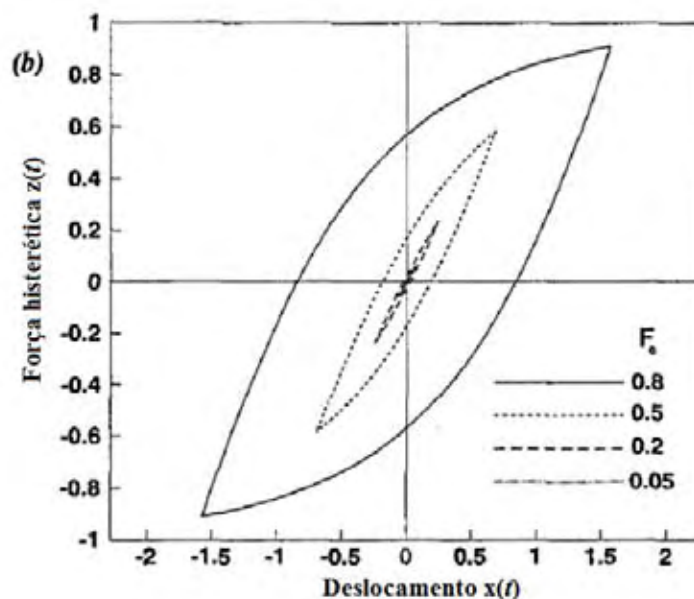
O objetivo do modelo de Bouc-Wen é modelar o laço histerético. Na equação (4), a variável z representa a componente histerética da força gerada pelo amortecedor MR. A derivada desta componente em relação à velocidade é dada por:

$$\frac{dz}{dx} = A - [\beta + \gamma \cdot \text{sgn}(\dot{x}) \cdot \text{sgn}(z)] \cdot |z(\tau)|^n \quad (13)$$

Fazendo $z = 0$; pode-se deduzir que a inclinação do laço histerético é igual a A . Quando $z > 0$, significa que o estágio de carregamento-descarregamento está ocorrendo, já o estágio de descarregamento-carregamento ocorre quando $z < 0$. Em relação aos outros parâmetros da equação (13), pode-se configurá-los a fim de representar uma ampla variedade de diferentes formas de laços histeréticos.

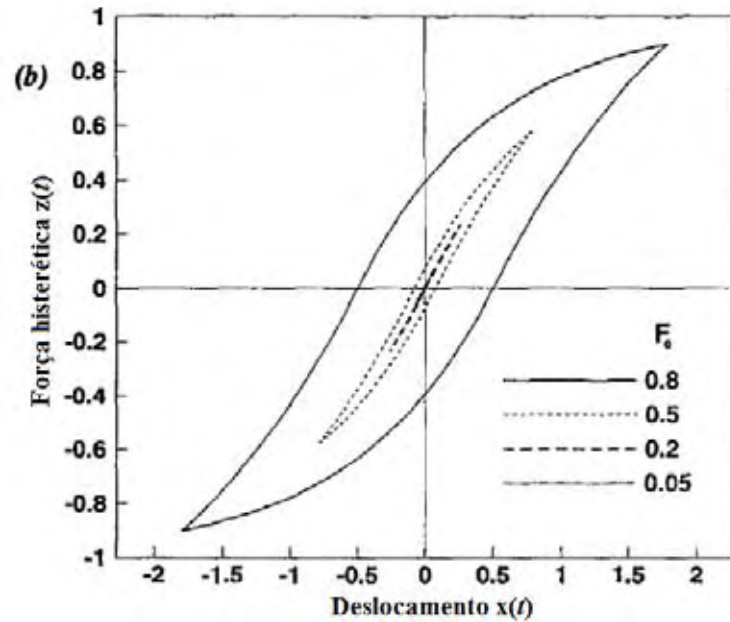
Os parâmetros β e γ são muito importantes para moldar o laço. Para $z > 0$ durante o carregamento ($\dot{x} > 0$), a inclinação do laço diminui com o aumento de z quando $\beta + \gamma > 0$, aumenta com o acréscimo de z quando $\beta + \gamma < 0$ e, permanece constante quando $\beta + \gamma = 0$. Ainda para $z > 0$, mas dessa vez durante o descarregamento ($\dot{x} < 0$), a inclinação do laço histerético diminui com o decréscimo de z quando $\gamma - \beta > 0$, aumenta com o decréscimo de z quando $\gamma - \beta < 0$ e, mantém-se constante para $\gamma - \beta = 0$. As figuras 7 e 8 apresentam o formato do laço para duas diferentes configurações desses parâmetros.

Figura 7 – Resposta do estado estacionário quando $\beta + \gamma > 0$ e $\gamma - \beta > 0$.



Fonte: Wong et al. (1994).

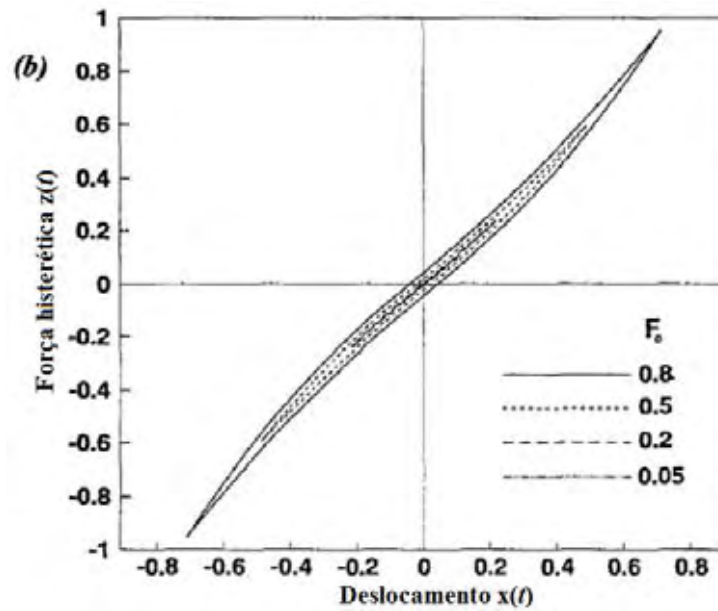
Figura 8 – Resposta do estado estacionário quando $\beta + \gamma > 0$ e $\gamma - \beta < 0$.



Fonte: Wong et al. (1994).

Como foi visto anteriormente, o parâmetro A controla a inclinação do laço em $z=0$, contudo este também é responsável pelo valor da amplitude do laço se todos os outros parâmetros permanecerem constantes. O parâmetro n governa a suavidade na transição da região linear para a região não-linear. Caso esses dois parâmetros estiverem muito elevados, o laço histerético será mais estrangulado como mostra a figura 9.

Figura 9 – Laço histerético estrangulado.



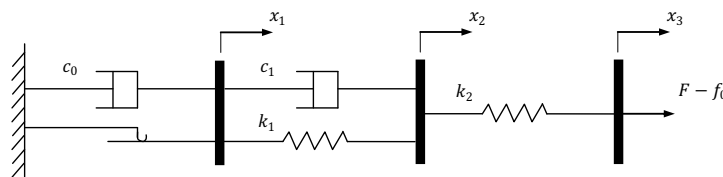
Fonte: Wong et al. (1994)

2.4 Outros Modelos

2.4.1 Modelo proposto por Gamota e Filisko

Nesta formulação existe um modelo de Bingham em série com o modelo padrão de um sólido não linear, que é constituído por uma mola em série com um elemento de Kelvin-Voigt, este último é uma mola em paralelo com um amortecedor viscoso ideal, figura 10.

Figura 10 – Modelo proposto por Gamota e Filisko (1991).



Fonte: Paschoal (2011).

As equações que governam o comportamento dinâmico deste modelo são as seguintes:

Para $|F| > f_c$:

$$F = k_1(x_2 - x_1) + c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f_0 = c_0(\dot{x}_1) + f_c \operatorname{sgn}(\dot{x}_1) + f_0 = k_2(x_3 - x_2) + f_0 \quad (14)$$

Para $|F| \leq f_c$:

$$F = k_1(x_2 - x_1) + c_1\dot{x}_2 + f_0 = k_2(x_3 - x_2) + f_0 \quad (15)$$

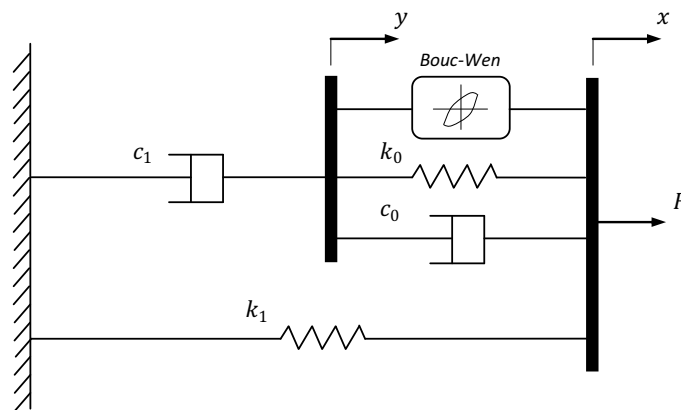
onde F é a força fornecida pelo amortecedor MR, c_0 é o coeficiente de amortecimento viscoso no modelo de Bingham, k_1 e k_2 são coeficientes de rigidez, c_1 é o coeficiente de amortecimento, f_0 é a força devido ao acumulador, f_c é a força friccional, x_1 , x_2 e x_3 são os deslocamentos e, \dot{x}_1 , \dot{x}_2 e \dot{x}_3 são as velocidades. Note que, quando $|F| \leq f_c$, $\dot{x}_1 = 0$.

Este modelo pode representar muito bem o comportamento do amortecedor MR, entretanto, ele despende muito tempo computacional quando é simulado numericamente, pois se faz necessário usar um algoritmo com um passo de integração muito pequeno, além disso, podem surgir instabilidades devido ao erro numérico (SPENCER JUNIOR et al., 1997).

2.4.2 Modelo de Bouc-Wen modificado

Spencer Junior et al. (1997) propuseram um modelo baseado no modelo de Bouc-Wen. Este novo modelo consegue descrever o comportamento de dispositivos que apresentam um rápido decréscimo de força (*roll-off*) quando a velocidade do pistão passa pelo zero. Este efeito ocorre devido ao vazamento de fluido entre o pistão e o cilindro. O modelo proposto é mostrado na figura 11.

Figura 11 – Modelo modificado de Bouc-Wen.



Fonte: Paschoal (2011).

As equações do comportamento dinâmico desse modelo são as seguintes:

$$F = c_1\dot{y} + k_1(x - x_0) \quad (16)$$

onde

$$\dot{y} = \frac{1}{c_0 + c_1} [\alpha z + c_0\dot{x} + k_0(x - y)] \quad (17)$$

e

$$\dot{z} = -\lambda|\dot{x} - \dot{y}|z|z|^{n-1} - \gamma(\dot{x} - \dot{y})|z|^n + \beta(\dot{x} - \dot{y}) \quad (18)$$

Para configurar este modelo em um campo magnético flutuante as seguintes relações são propostas:

$$\alpha(u) = \alpha_a + \alpha_b u \quad (19)$$

$$c_0(u) = c_{0a} + c_{0b} u \quad (20)$$

$$c_1(u) = c_{1a} + c_{1b} u \quad (21)$$

$$\dot{u} = -\eta(u - v) \quad (22)$$

onde F é a força fornecida pelo amortecedor MR, x e y são os deslocamentos. O ponto ($\dot{}$) sobre as variáveis representa a derivada temporal, c_0 e c_1 são os coeficientes de amortecimento viscosos, k_0 e k_1 são coeficientes de rigidez, x_0 é o deslocamento inicial devido ao acumulador, α é um coeficiente de rigidez oriundo do modelo de Bouc-Wen, figura 6. As constantes λ , γ , β e n são parâmetros do fluido magnetoreológico. Ajustando esses parâmetros pode-se controlar a linearidade no descarregamento e a suavidade na transição da região não linear para a região linear. A equação (22) é um filtro de primeira ordem que modela o tempo necessário para as variáveis α , c_0 e c_1 alcançarem o equilíbrio reológico. As constantes α_a , α_b , c_{0a} , c_{0b} , c_{1a} e c_{1b} modelam a relação linear com a voltagem v aplicada no driver de corrente.

2.5 Algoritmo de Controle Utilizado em Amortecedores MR

2.5.1 Algoritmo de Controle Grampeado

O algoritmo de controle grampeado será a estratégia de controle usada neste trabalho. Esta técnica está classificada como uma das técnicas de controle semi-ativo.

Em um amortecedor convencional a força gerada está relacionada com as propriedades reológicas (viscosidade, elasticidade e plasticidade), que permanecem constantes com os parâmetros geométricos e com a velocidade relativa de suas extremidades (PASCHOAL, 2011). Entretanto, em um amortecedor MR suas propriedades reológicas estão sempre se alterando, pois dependem da intensidade do campo magnético no qual o fluido está inserido, que, por sua vez, depende da corrente elétrica. Assim, a força gerada pelo amortecedor MR é relacionada com a voltagem elétrica. Esta relação tem se mostrado não linear e complexa, devido a isto, o cálculo da voltagem necessária que deve ser aplicada ao circuito eletromagnético do amortecedor para se produzir uma força desejada é uma tarefa difícil (STUTZ, 2005).

Alguns algoritmos de controle utilizam um modelo inverso do amortecedor, que calcula a voltagem que deve ser aplicada para que o amortecedor produza determinada força dado o deslocamento e a velocidade das extremidades do mesmo. Tal algoritmo funciona da seguinte forma: uma lei de controle ativa calcula a força de controle desejada, esta é inserida no modelo inverso do amortecedor que determina a voltagem. Tal voltagem é mandada ao circuito eletro-magnético do amortecedor esperando que este produza a mesma força desejada. O modelo inverso pode ser obtido utilizando redes neurais ou outras estratégias, como por exemplo, séries de Volterra. Bahar et al. (2012) modelaram o comportamento de um amortecedor MR utilizando filtros de Kautz com redes neurais artificiais. Tusset (2008) propôs um modelo inverso do amortecedor usando um sistema nebuloso para determinar a corrente elétrica a ser aplicada no amortecedor MR.

Outra classe de algoritmo de controle para amortecedores MR é aquela em que não há a necessidade de se conhecer o modelo do amortecedor MR. O mais utilizado na literatura e apontado como mais eficiente (CARNEIRO, 2009) é o controle *clipped control* ou controle grampeado.

O controle grampeado funciona da seguinte forma: através de uma lei de controle ativa calcula-se a força desejada que o amortecedor MR deva produzir para uma determinada aplicação, no entanto, a força gerada pelo amortecedor não pode ser comandada diretamente. Pode-se comandar diretamente somente a voltagem elétrica. Neste caso, uma realimentação da força do amortecedor MR é inserida na saída da lei de controle ativa com o intuito de se comparar a força produzida e a força desejada. Neste ponto um bloco de decisão é implantado. Tal bloco toma as seguintes atitudes: se a força gerada pelo amortecedor for igual a força desejada, a voltagem elétrica aplicada no amortecedor permanece inalterada. Quando a magnitude da força produzida for menor do que a da força desejada e ambas possuem o mesmo sentido, a voltagem aplicada ao amortecedor é aumentada ao seu máximo valor possível no intuito de aumentar a força gerada pelo amortecedor. Caso contrário, a voltagem aplicada ao amortecedor é nula, ou seja, quando a magnitude da força é maior do que a da força desejada, ou quando as forças possuem sentidos opostos, a voltagem aplicada é nula. Esse bloco de decisão pode ser traduzido pela equação (23).

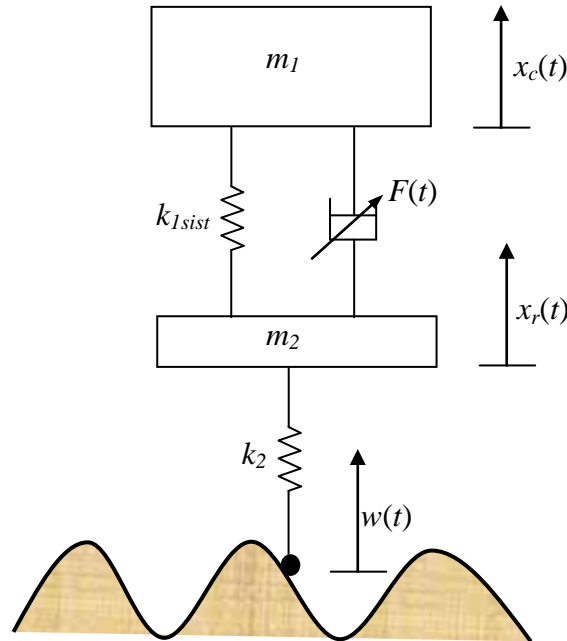
$$v = v_{\max} H[(F_d - F)F] \quad (23)$$

onde $H[x]$ denota a função degrau unitário ou função Heaviside (utilizada para representar descontinuidades) e F_d é a força desejada.

2.6 Modelo Linear de ¼ de Veículo

O modelo de ¼ de veículo é esquematizado na figura 12 como um sistema de 2 graus de liberdade e é o mesmo utilizado por (PASCHOAL, 2011).

Figura 12 – Modelo de suspensão equivalente a ¼ de veículo.



Fonte: Paschoal (2011).

A massa m_1 representa a massa de ¼ do veículo, portanto é a massa onde se deseja a redução da vibração a fim de favorecer o conforto dos passageiros. A redução da vibração é feita pelo sistema de suspensão representada por uma rigidez k_{1sist} em paralelo com um amortecedor MR, que gera uma força de controle semi-ativa $F(t)$. O conjunto da roda é modelado por uma mola linear com constante de elasticidade k_2 , representando a rigidez do pneu, e por uma massa não amortecida m_2 . A forma da pista ocasiona um deslocamento vertical, $w(t)$, na interface entre ela e o pneu. x_c representa o deslocamento da massa de ¼ de veículo (massa amortecida) e x_r , o deslocamento da roda (massa não amortecida)

A representação deste sistema em espaço de estados é dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 w(t) + \mathbf{B}_2 F(t) \quad (24)$$

onde:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_{1sist}}{m_1} & \frac{k_{1sist}}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_{1sist}}{m_2} & -\frac{(k_{1sist} + k_2)}{m_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix}.$$

Nesta nova representação x_1 representa x_c ; x_2 representa x_r ; a variável de estado x_3 representa a velocidade da massa amortecida m_1 , ou \dot{x}_c ; e a variável x_4 é a velocidade da massa não amortecida m_2 , ou \dot{x}_r . Os valores das variáveis foram baseados no trabalho de Paschoal (2011) e Lam e Liao (2003) e são mostrados na tabela 1.

Tabela 1 – Valores dos parâmetros físicos do modelo linear de ¼ de veículo

Parâmetros	Valores
m_1	372 kg
m_2	45 kg
k_{1sist}	40 kN/m
k_2	190 kN/m

Fonte: Paschoal (2011).

A força $F(t)$ gerada pelo amortecedor MR é produzida através do modelo de Bouc-Wen modificado, equações (16) a (22). Os parâmetros deste modelo foram coletados do trabalho de Paschoal (2011) e Lai e Liao (2002) e estão dispostos na tabela 2 a seguir.

Tabela 2 – Valores dos parâmetros do amortecedor MR, modelo de Bouc-Wen modificado.

Parâmetros	Valores
c_{0a}	784 N s/m
c_{0b}	1803 N s/Vm
k_0	3610 N/m
c_{1a}	14649 N s/m
c_{1b}	34622 N s/V m
k_1	840 N/m
x_0	0.0245 m
α_a	12441 N/m
α_b	38430 N/V m
λ	136320 m ⁻²

γ	2059020 m ⁻²
β	58
n	2
η	190 s ⁻¹

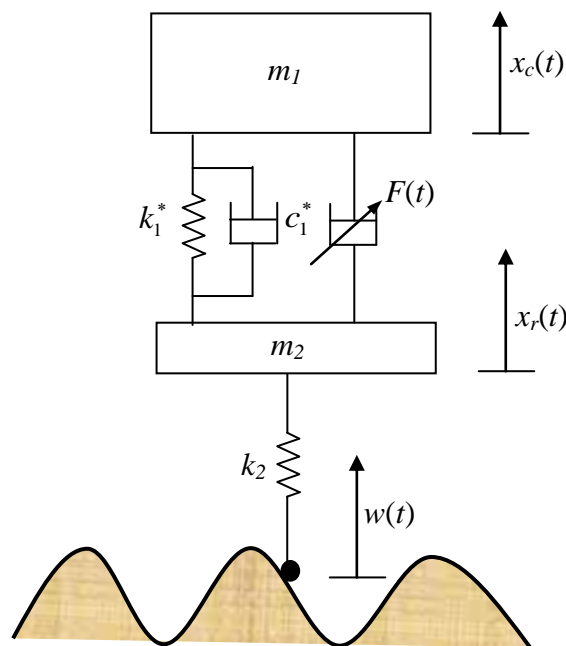
Fonte: Paschoal (2011).

2.7 Modelo Não-Linear de ¼ de Veículo

Para tornar o sistema mais próximo da realidade, um modelo não linear de ¼ de veículo é estudado, pois em suspensões automotivas reais existem sempre a presença de componentes não lineares (PASCHOAL, 2011) que devem ser considerados no modelo (ALLEYNE; HEDRICK, 1992; KARLSSON et al., 2000).

A figura 13 esquematiza o modelo não linear proposto por Paschoal (2011).

Figura 13 – Modelo da suspensão não linear de ¼ de veículo.



Fonte: Paschoal (2011).

Comparando o modelo linear, figura 12, com o não linear, figura 13, este último inclui dois componentes não lineares: um amortecedor c_1^* e uma mola k_1^* em paralelos com o amortecedor MR. O modelo em espaço de estados pode assumir a seguinte forma, (GASPAR et al., 2003).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, w) + \mathbf{B}F(t) \quad (25)$$

onde:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1^l}{m_1} & \frac{k_1^l}{m_1} & -\frac{c_1^l}{m_1} & \frac{c_1^l}{m_1} \\ \frac{k_1^l}{m_2} & -\frac{(k_1^l + k_2)}{m_2} & \frac{c_1^l}{m_2} & -\frac{c_1^l}{m_2} \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, w) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_1^{nl}}{m_1}(x_2 - x_1)^3 - \frac{c_1^y}{m_1}|\dot{x}_2 - \dot{x}_1| + \frac{c_1^{nl}}{m_1}\sqrt{|\dot{x}_2 - \dot{x}_1|} \operatorname{sgn}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ -\frac{k_1^{nl}}{m_2}(x_2 - x_1)^3 + \frac{c_1^y}{m_2}|\dot{x}_2 - \dot{x}_1| - \frac{c_1^{nl}}{m_2}\sqrt{|\dot{x}_2 - \dot{x}_1|} \operatorname{sgn}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \frac{k_2}{m_2}w \end{bmatrix}$$

Os pares (k_1^l, k_1^{nl}) e (c_1^l, c_1^{nl}) são, respectivamente, os pares dos termos linear e não linear da mola e do amortecedor, $\operatorname{sgn}()$ é a função sinal e c_1^y é o coeficiente de amortecimento do termo assimétrico do amortecedor. A tabela 3 mostra os valores dos parâmetros utilizados.

Tabela 3 – Valores dos parâmetros físicos do modelo não linear de ¼ de veículo

Parâmetros	Valores
m_1	372 kg
m_2	45 kg
k_1^l	40 kN/m
k_1^{nl}	400 kN/m
c_1^l	100 Ns/m
c_1^{nl}	30 Ns/m
c_1^y	40 Ns/m
k_2	190 kN/m

Fonte: Paschoal (2011).

Os valores do modelo Bouc-Wen modificado do amortecedor MR são os mesmo dados anteriormente pela tabela 2.

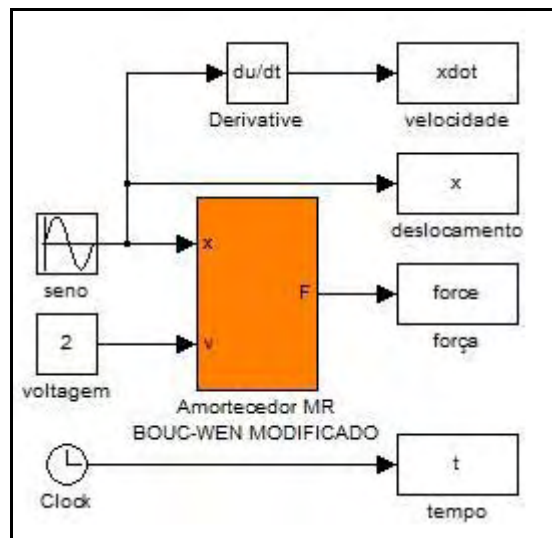
2.8 Análise dinâmica

Este tópico visa estudar o modelo de Bouc-Wen modificado do amortecedor MR com o intuito de prever seu comportamento dinâmico. Também neste tópico será avaliado o

comportamento dinâmico no domínio da frequência do modelo linear de $\frac{1}{4}$ de carro com o amortecedor MR. Assim os efeitos das não linearidades serão avaliados nos modelos.

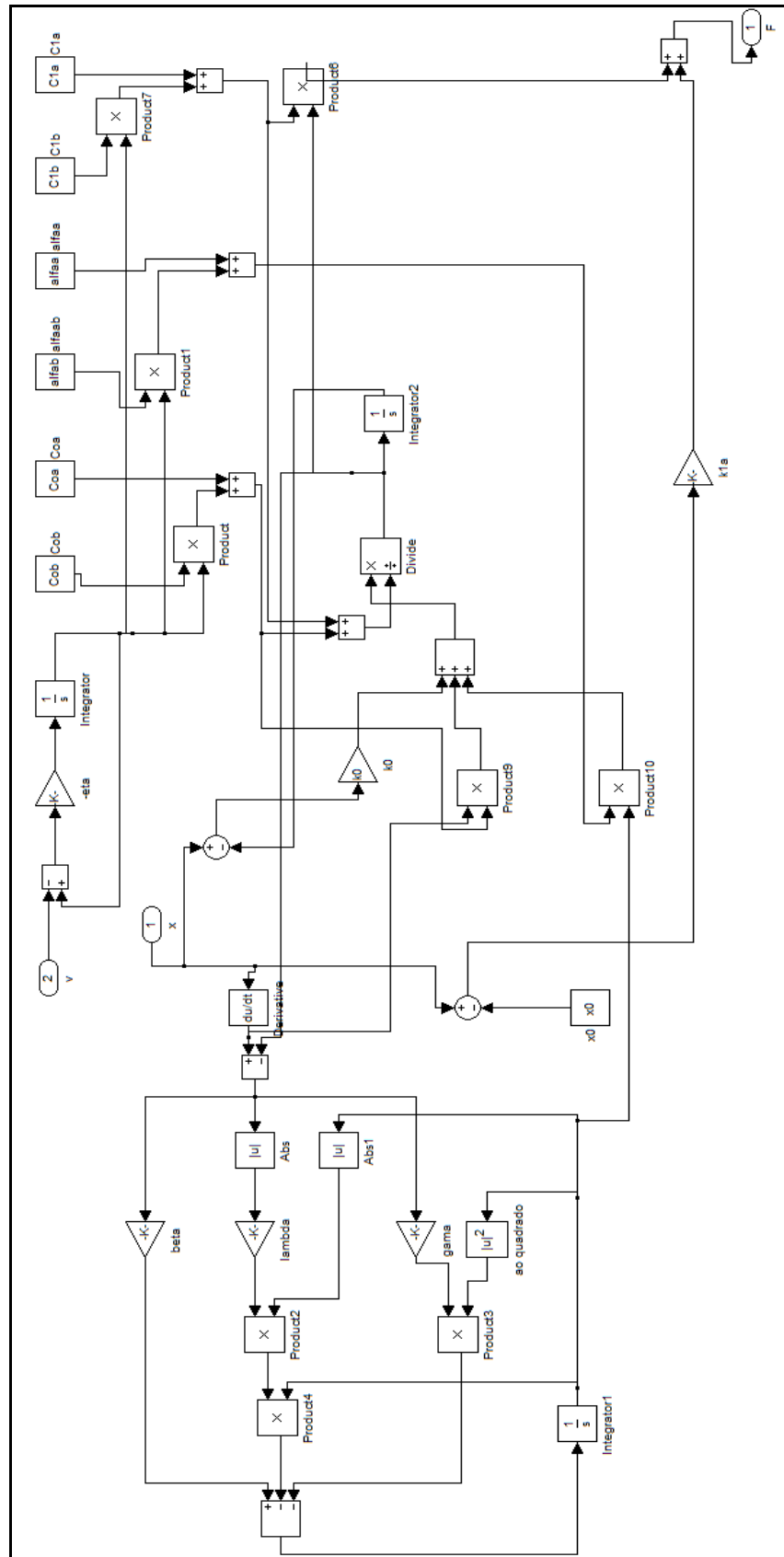
A fim de analisar o comportamento dinâmico do modelo de Bouc-Wen modificado, dado pelas equações (16) a (22), monta-se o diagrama de blocos conforme ilustra a figura 14. O subsistema do bloco “Bouc-Wen modificado” é detalhado na figura 15.

Figura 14 – Diagrama de blocos no *Simulink*.



Fonte: próprio autor.

Figura 15 – Diagrama de blocos do modelo de Bouc-Wen modificado.



Fonte: próprio autor.

Uma entrada senoidal de frequência de 1 Hz e amplitude de 10 mm foi aplicada no modelo. Utilizou-se um tempo de simulação de 10 segundos, portanto exatamente 10 ciclos serão completados. Realizou-se 5 simulações, sendo que para cada uma alterou-se o valor da voltagem de entrada no amortecedor MR. Em cada simulação a voltagem permanece constante e os valores adotados foram respectivamente de 0V, 0.5V, 1V, 1.5V e 2V. As figuras 16 a 18 ilustram os principais resultados obtidos.

Figura 16 – Força versus Deslocamento.

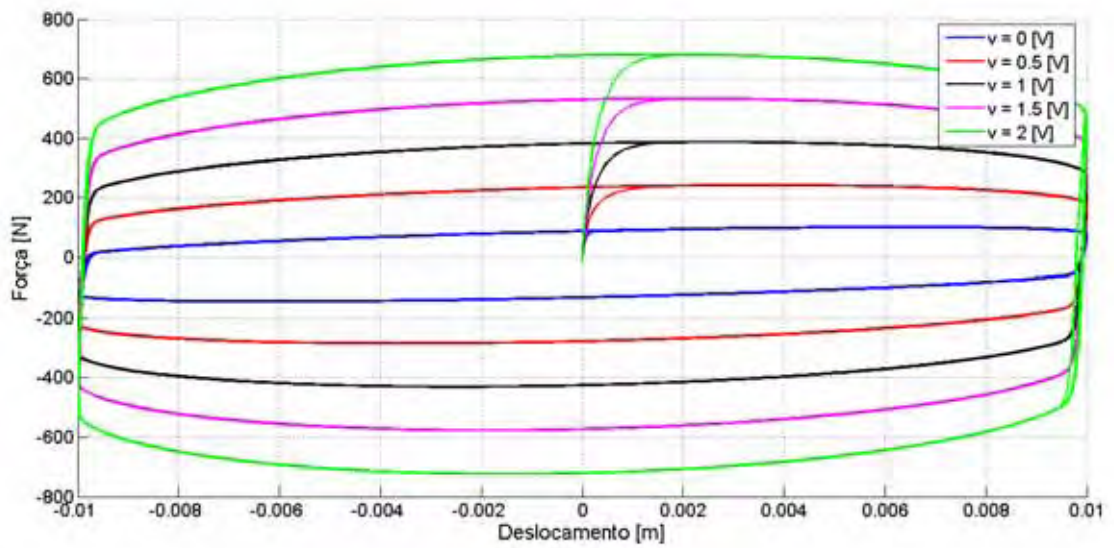


Figura 17 – Força versus Velocidade.

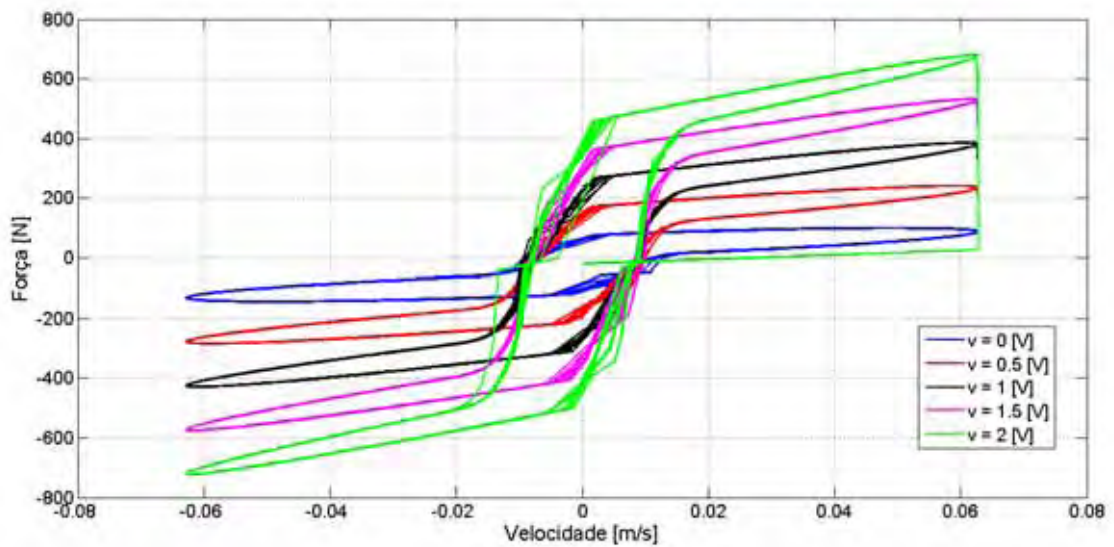
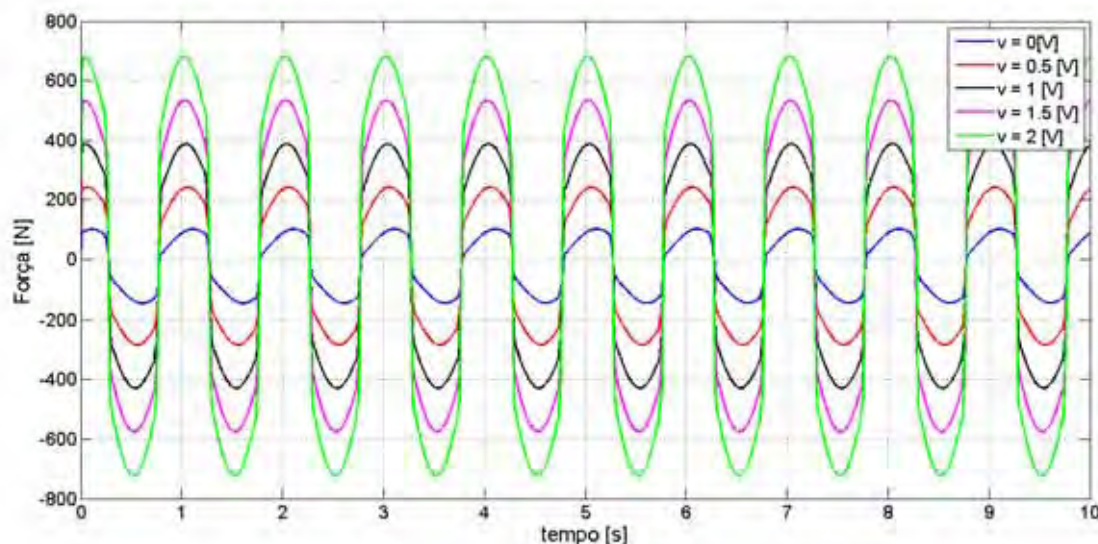
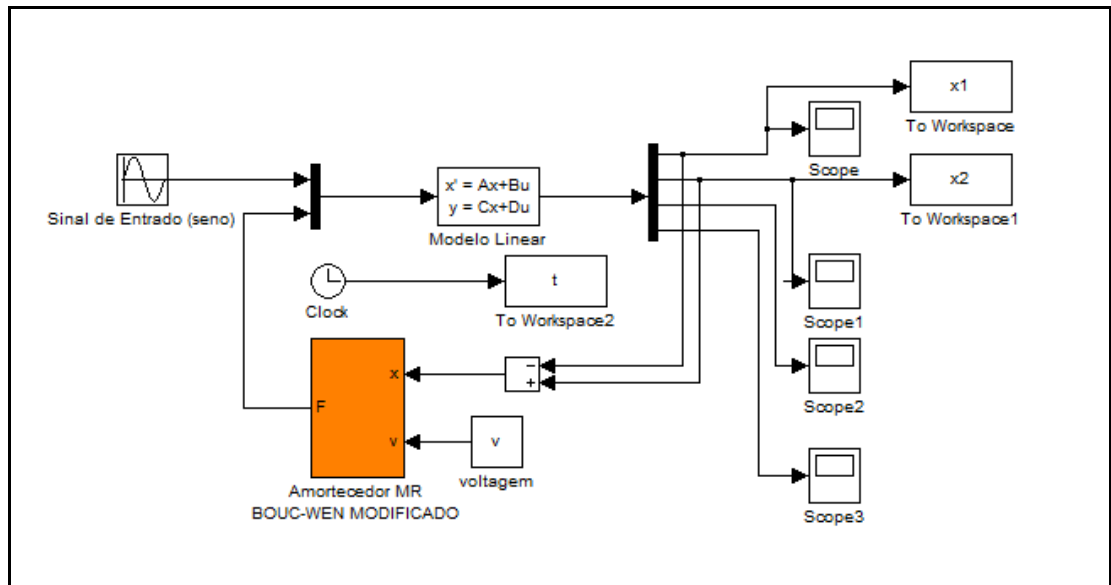


Figura 18 – Força através do tempo.



Pela figura 16 observa-se que o aumento da voltagem acarreta em um aumento da área interna da curva força-deslocamento. Esta mesma área representa a energia dissipada pelo amortecedor MR, dessa forma, com o crescimento da voltagem mais energia é dissipada pelo amortecedor e maiores são as forças de tração e compressão no amortecedor, figura 18. Na figura 17 as alterações na voltagem provocam mudanças no tamanho e na forma do ciclo histerético e modificam a inclinação da curva na região de pós-carregamento. Isto já era esperado, pois os parâmetros que modelam o tamanho e a forma do ciclo histerético, equação (18), estão presentes no termo αz , equação (17), que é dependente da voltagem. As principais variáveis responsáveis pela inclinação da curva na região de pós-carregamento são c_0 e c_1 , as quais também dependem da voltagem.

Uma vez estudado o comportamento do modelo de Bouc-Wen modificado será analisado o comportamento do modelo linear de $\frac{1}{4}$ de carro com o amortecedor MR embutido. O objetivo desta análise visa caracterizar as frequências naturais amortecidas e os efeitos que a voltagem enviada ao amortecedor provoca no sistema como um todo. Para atender a estes objetivos, o sistema será estudado no domínio da frequência através das curvas obtidas por uma varredura senoidal do sinal de excitação. Tal varredura é feita realizando inúmeras simulações utilizando o diagrama de blocos do *Simulink* ilustrado na figura 19. O algoritmo utilizado para resolver as equações diferenciais foi o de Runge-Kutta de 4ª ordem com passo variável e utilizou-se um tempo de simulação de 90 segundos.

Figura 19 – Diagrama de blocos no *Simulink* para varredura senoidal.

Fonte: próprio autor.

Para a obtenção de uma curva suave, calculou-se 2991 pontos para cada curva da resposta. Assim a varredura senoidal iniciou-se em 0.1Hz e finalizou em 30Hz com um passo de 0.01Hz. Este método foi utilizado, pois se trata de um sistema não linear, no qual a não linearidade está presente somente no amortecedor MR já que o modelo de ¼ de carro é linear. Caso o sistema completo fosse linear, apenas uma simulação poderia ser realizada utilizando um sinal de entrada rico em frequência como o *Chirp* ou Ruído Branco. As curvas mostradas nas figuras 20 e 21 foram obtidas utilizando o sinal de entrada senoidal com amplitude de 10 mm e consistem em analisar o comportamento do sistema quando a tensão enviada ao amortecedor MR é alterada.

Figura 20 – Comportamento de x_1 adimensionalizada em relação à entrada $w(t)$ com diferentes voltagens.

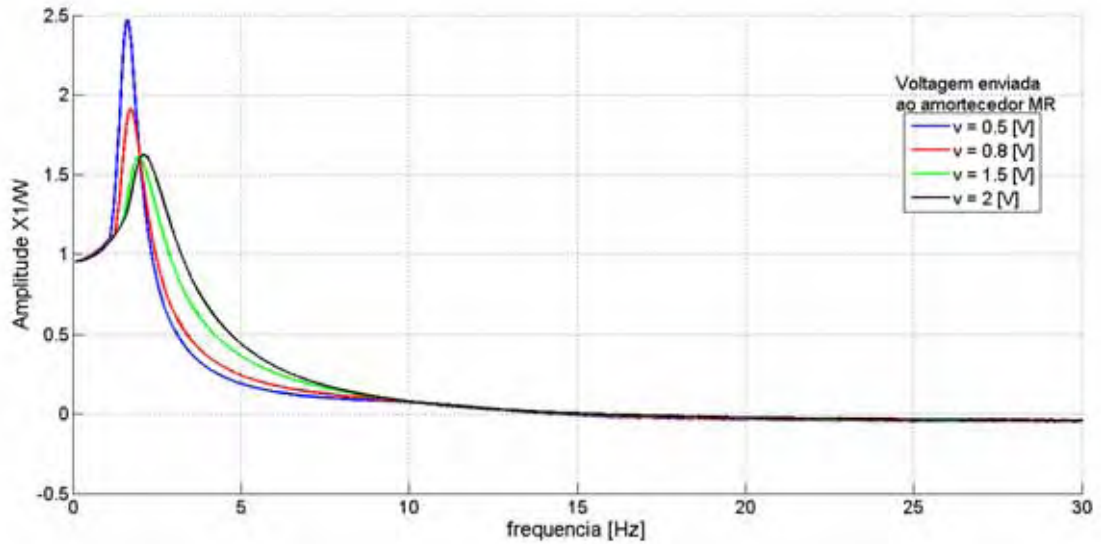
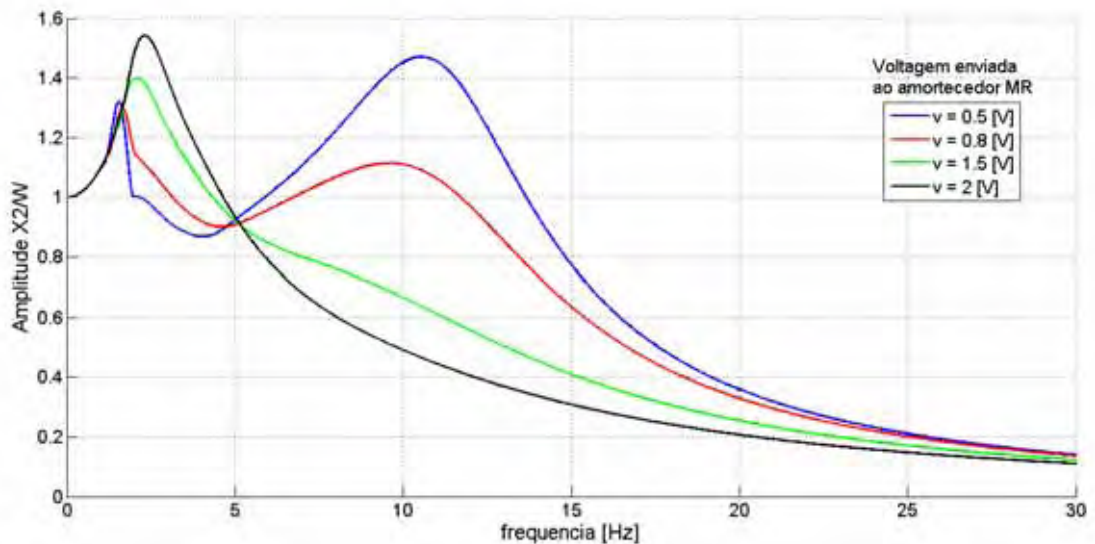


Figura 21 – Comportamento de x_2 adimensionalizada em relação à entrada $w(t)$ com diferentes voltagens.



A caracterização dos dois graus de liberdade do sistema é mais evidente na resposta em frequência do deslocamento da massa do conjunto da roda x_r , figura 21, já que nesta curva os 2 picos são distinguíveis. Nesta mesma figura observa-se que com o aumento da voltagem a amplitude na 2ª frequência natural amortecida se torna menos acentuada e desaparece completamente em 2 V. Em contrapartida a amplitude na 1ª frequência natural amortecida

eleva-se. Portanto, em uma boa estratégia de controle a voltagem não se mantém fixa, e o controlador força o sistema a transitar entre as curvas sempre buscando os menores valores de amplitudes. Um fato que merece destaque é a ligeira alteração nos valores das frequências naturais amortecidas do sistema quando se modifica a voltagem, tabela 4, o que já era esperado, pois as frequências naturais amortecidas dependem dos coeficientes de amortecimento, e estes, por sua vez, são dependentes da voltagem neste modelo. Entretanto, além das frequências naturais amortecidas, alterações na voltagem também influenciam nas frequências naturais do sistema. No modelo de Bouc-Wen modificado, o parâmetro α é uma variável de rigidez também dependente da voltagem. Dessa forma, quando este parâmetro é alterado pela voltagem, as frequências naturais do sistema sofrem uma ligeira modificação.

Tabela 4 – Frequências naturais amortecidas em diferentes valores de voltagem.

	Voltagem igual a 0.5 V	Voltagem igual a 0.8 V	Voltagem igual a 1.5 V	Voltagem igual a 2 V
1 ^a frequência natural amortecida	1.55 Hz	1.66 Hz	2.08 Hz	2.31 Hz
2 ^a frequência natural amortecida	10.62 Hz	9.65 Hz	-	-

O comportamento não linear do sistema não é claramente observado nas figuras 20 e 21. A curva em azul da figura 21, com uma voltagem de 0.5 V, dá apenas uma vaga ideia da não linearidade. Nesta curva, um salto próximo a 1^a frequência natural amortecida, e imediatamente depois desta, está quase ocorrendo. Ressonâncias com saltos são fenômenos típicos de sistemas não lineares e a sua existência é observada quando o termo de amortecimento é pequeno com uma amplitude de excitação suficientemente grande (OGATA, 2003). Isso não ocorre neste sistema, pois mesmo com uma voltagem de 0 V o termo de amortecimento ainda possui um valor alto. Dessa forma, a fim de comprovar o comportamento não linear do sistema, as curvas mostradas nas figuras 22 e 23 foram obtidas alterando-se a amplitude do sinal de entrada e mantendo-se a voltagem constante em 0.5V.

Figura 22 – Comportamento de X_1 adimensionalizada em relação à entrada $w(t)$ com diferentes amplitudes.

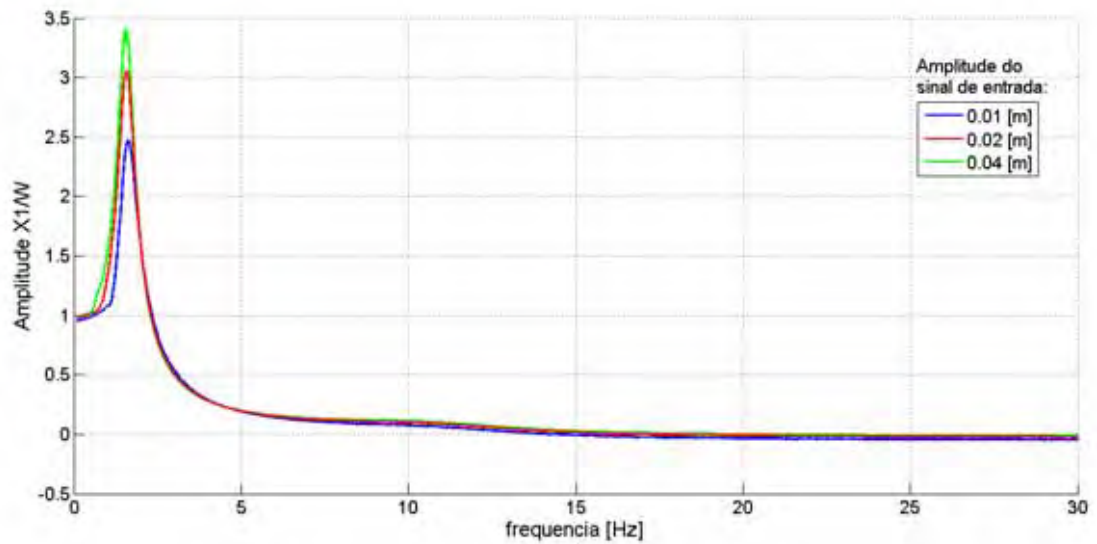
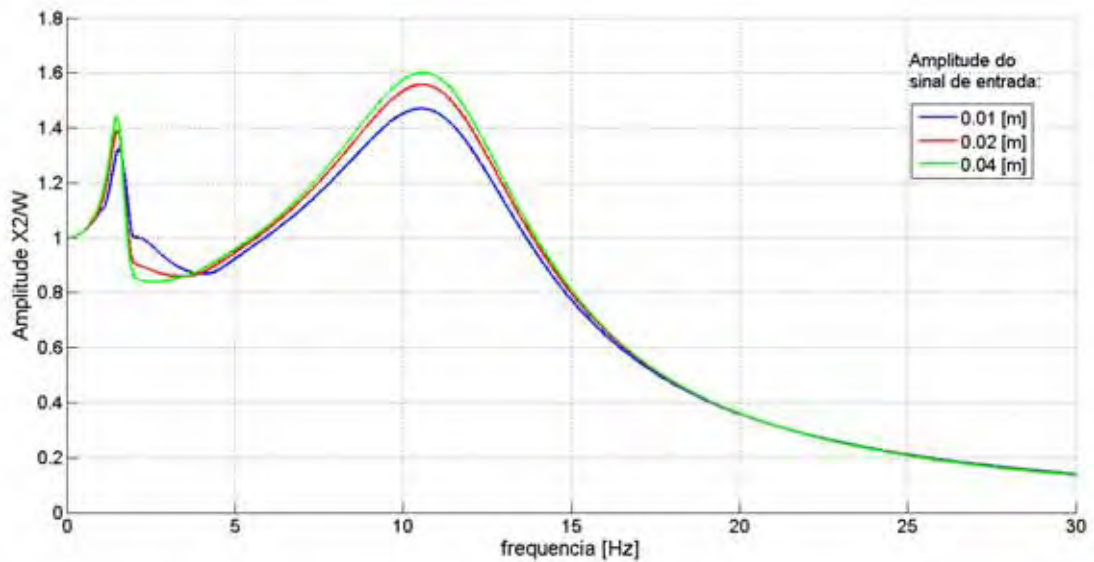


Figura 23 – Comportamento de X_2 adimensionalizada em relação à entrada $w(t)$ com diferentes amplitudes.



Em um sistema linear não existe a dependência frequência-amplitude, ou seja, com a variação da amplitude de excitação as curvas mostradas nas figuras 22 e 23 deveriam permanecer inalteradas. Porém não é isso o que ocorre. Nota-se claramente que o aumento da amplitude torna mais elevado os picos das curvas. Na figura 23, a diferença entre as curvas é mais nítida abrangendo quase todo o intervalo de frequência considerado. Outro efeito que as

não linearidades provocam é a geração de oscilações super harmônicas, que são oscilações estacionárias com frequência de oscilação igual a um inteiro múltiplo da frequência de excitação. Para verificar este efeito, o sistema foi submetido a uma entrada senoidal com frequências de 5Hz, 11Hz e 16Hz admitindo condições iniciais nulas. Em cada uma das 3 simulações, esperou-se o regime estacionário do sistema e aplicou-se a Transformada Rápida de Fourier (FFT) nos sinais de saída. Os resultados obtidos são mostrados nas figuras 24 e 25.

Figura 24 – FFT de x_1 considerando entradas senoidais.

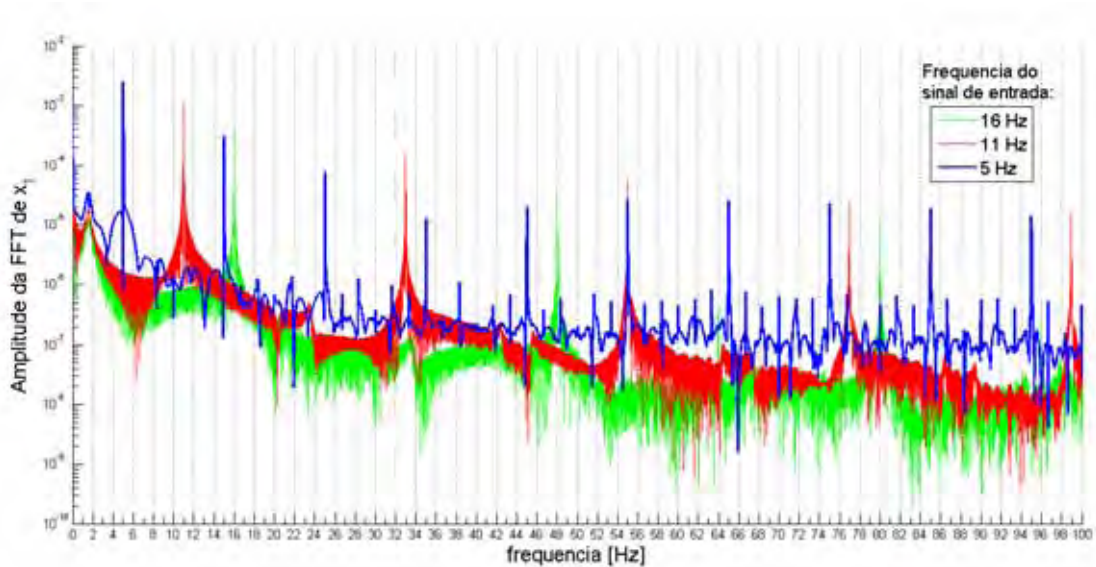
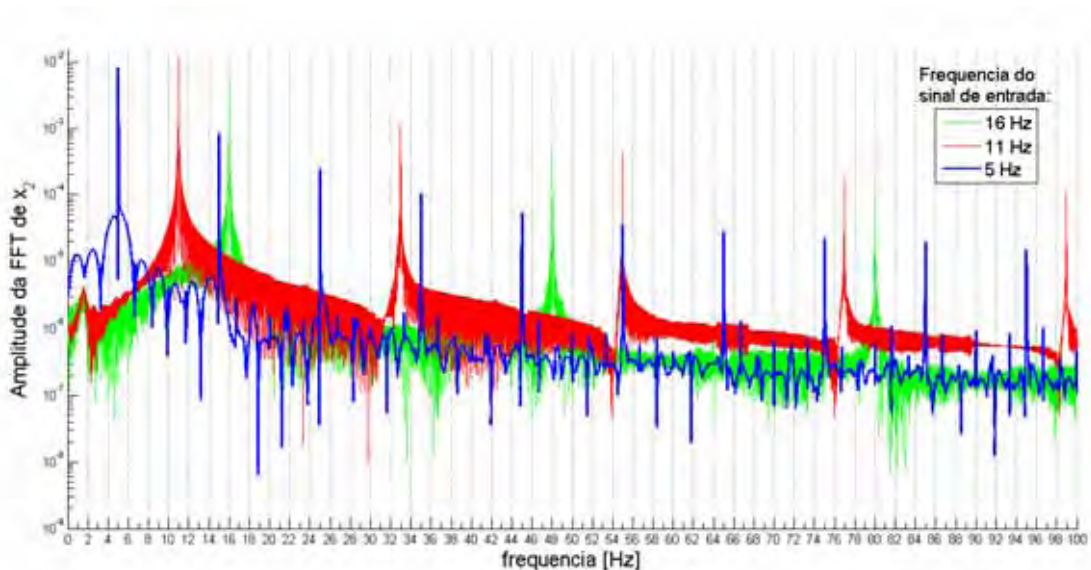


Figura 25 – FFT de x_2 considerando entrada senoidais.



Observa-se pelas figuras 24 e 25 que é notável a presença das oscilações super harmônicas. Os maiores picos ocorrem no mesmo valor da frequência de excitação e são eles que mais contribuem para a resposta do sistema. É interessante constatar que as super harmônicas sempre ocorrem em múltiplos inteiros ímpares. Por exemplo, analisando a curva cuja frequência de excitação é 5 Hz, as super harmônicas ocorrem nos múltiplos de 3,5, 7..., assim os picos surgem em 15 Hz, 25 Hz e 35 Hz respectivamente. O mesmo vale para as outras frequências de excitação.

Feita toda a modelagem do sistema e compreendido seu comportamento, parte-se agora para o estudo de estratégias de controle para a redução de vibração na suspensão de $\frac{1}{4}$ de veículo. O próximo capítulo formula as principais estratégias de controle semi-ativo utilizadas neste trabalho.

3 Estratégias de Controle

3.1 Controle utilizando LMIs

3.1.1 Introdução

A história das desigualdades matriciais lineares, que do inglês abrevia-se como LMIs, começou quando Lyapunov publicou seu trabalho introduzindo o que chamamos de teoria de Lyapunov na década de 1890 (BOYD et al., 1994). Ele mostrou que o seguinte sistema dinâmico

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (26)$$

é assintoticamente estável, ou seja, todas as trajetórias convergem para zero se, e somente se, existir uma matriz definida positiva tal que

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} < 0 \quad (27)$$

A equação (27) foi a primeira LMI e Lyapunov mostrou que ela poderia ser explicitamente resolvida. De fato, a desigualdade de Lyapunov pode ser analiticamente resolvida através de um conjunto de equações lineares.

Segundo Boyd et al. (1994) o próximo grande passo ocorreu na década de 1940 quando Lur'e, Postnikov, e outros da União Soviética aplicaram o método de Lyapunov para o problema de estabilidade de um sistema de controle com não linearidade no atuador, assim como em outros problemas práticos de engenharia de controle. Nestes trabalhos, embora as desigualdades matriciais não fossem explícitas, os critérios de estabilidade possuíam de fato a forma de desigualdades matriciais lineares, as quais foram reduzidas a desigualdades polinomiais para serem resolvidas. Apesar da utilização destas desigualdades em sistemas de terceira ordem, no máximo, ficou demonstrada a importância da teoria de Lyapunov em problemas práticos em engenharia de controle.

O seguinte grande avanço se deu no começo da década de 1960, quando Yakubovich, Popov, Kalman, e outros pesquisadores reduziram a solução das desigualdades matriciais lineares de Lur'e a um simples critério gráfico (BOYD et al., 1994), o qual ficou conhecido como lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) ou, também, de *positive real-lemma* (DA SILVA, 2005). Tal avanço mostrou como se resolve uma família de LMIs através de um

método gráfico. Nesta época, a teoria de LMIs já estava reconhecida como peça fundamental na teoria de controle, especialmente por Yakubovich.

Ainda na década de 1960, o lema KYP e suas extensões foram exaustivamente estudadas e se constatou uma relação entre este e as ideias de passividade, ao critério de pequenos ganhos e ao controle ótimo quadrático. De fato, em 1970, mostrou-se que as LMIs que aparecem no lema KYP poderiam ser resolvidas utilizando de um conjunto de equações algébricas de Riccati, além da solução gráfica (BOYD et al., 1994). Aliás, foi através da solução da equação algébrica de Riccati que o problema do regulador linear quadrático (LQR) foi resolvido (OGATA, 2003) sendo utilizado até hoje em problemas de controle ótimo (DA SILVA, 2005).

Próximo do ano de 1971, os pesquisadores já conheciam vários métodos de solução para alguns tipos de LMIs como o método direto para sistemas de pequena ordem, o método gráfico e a solução através das equações de Riccati ou Lyapunov. No entanto, segundo (BOYD et al., 1994), a solução por estes métodos são consideradas restritas ou analíticas, que podem ser usadas para resolver apenas algumas formas especiais de LMIs. Ainda na década de 1970, Willems (1971) suspeitou que as LMIs poderiam possuir alguma vantagem computacional, quando comparadas às suas correspondentes equações de Riccati, se algum método numérico fosse criado para resolvê-las.

Tal método surgiu do fato de que as LMIs advindas da teoria de sistemas e controle poderiam ser formuladas como um problema de otimização convexa, facilitando a implementação numérica e tornando possível encontrar soluções que antes eram impossíveis de serem obtidas analiticamente. Pyatnitskiy e Skorodinskiy (1982) foram os primeiros a formular a busca da função de Lyapunov em termos de um problema de otimização convexa, para em seguida aplicar um algoritmo garantindo a solução do problema de otimização. Eles reduziram o problema original de Lur'e em um problema de otimização convexa envolvendo desigualdades matriciais lineares, as quais foram resolvidas usando o algoritmo do elipsoide (BOYD et al., 1994). Entretanto, a ideia da busca computacional da função de Lyapunov apareceu em um trabalho em 1965 escrito por (SCHULTZ et al., 1965).

Recentemente, a aliança do poder computacional com eficientes algoritmos de otimização convexa (DA SILVA, 2005) como o método dos pontos interiores deu às LMIs dos sistemas de controle uma grande importância prática. Por exemplo, Karmarkar (1984) introduziu um algoritmo de programação linear mais eficiente na prática que o método da elipsoide. Tal método inspirou diversos trabalhos contribuindo para o desenvolvimento do

método dos pontos interiores, incluindo o método dos pontos interiores aplicado diretamente nos problemas convexos das desigualdades matriciais (NESTEROV et al., 1994).

O método dos pontos interiores mostrou-se bastante eficiente nos problemas de otimização convexa envolvendo LMIs. Atualmente existem diversos pacotes computacionais especializados em LMIs (DA SILVA, 2005) como o *LMI Control Toolbox* (GAHINET et al., 1995), o *Yalmip* (LÖFBERG, 2008) e o *Sedumi* (STURM, 1999) do *Matlab*® e o software *LMI sol* de domínio público (OLIVEIRA, et al., 1997).

Atualmente as LMIs vêm sendo estudadas e aplicadas em diversos problemas: Assunção (2000) aplicou-as para redução de modelos; CHEN et al. (2000) combinaram a lógica *fuzzy* com as normas H_2 e H_∞ formuladas por LMIs para o controle de um sistema não linear; Gonçalves (2003) utilizou LMIs no controle ativo de vibração estrutural; Da Silva (2005) utilizou LMIs para projetar um observador de estados; Santos et al. (2007) estudaram o controle ativo de vibrações de um prédio de dois andares através das normas H_2 e H_∞ formuladas por LMIs; Ganet-Schoeller e Pita-Gil (2008) estudaram o controle de um veículo espacial durante a reentrada; Cerone et al. (2010) utilizam a técnica de relaxação das LMIs para identificar os parâmetros de um sistema dinâmico linear e Henrion et al. (2012) analisaram a segurança e a robustez das leis de controle não linear de um veículo lançador espacial. Como se pode notar, as áreas de aplicação das LMI são extensas. A intenção deste trabalho é utilizar LMIs no projeto de um controlador de realimentação de estados que atue juntamente com o controle grampeado a fim de diminuir a vibração de uma suspensão semi-ativa.

3.1.2 Conceitos Básicos

De acordo com Boyd et al. (1993) uma desigualdade matricial linear possui a forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i > 0 \quad (28)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ é a variável, e $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ são dados. O conjunto $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0\}$ é convexo e não necessita possuir borda suave.

Além disso, múltiplas LMIs $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) > 0, \dots, \mathbf{F}_n(\mathbf{x}) > 0$ podem ser expressas como uma única LMI montada com $\mathbf{diag}(\mathbf{F}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{F}_n(\mathbf{x})) > 0$. De forma que não há diferença entre um conjunto de LMIs e uma única LMI.

Quando se tenta formular determinado problema de controle sob a ótica de LMI, corriqueiramente surgem desigualdades matriciais não lineares. Este problema é facilmente

resolvido aplicando o complemento de Schur na desigualdade, transformando-a em LMI. A seguir, a ferramenta do complemento de Schur é sintetizada.

Considere a LMI:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}^T(\mathbf{x}) & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > 0 \quad (29)$$

sendo $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^T(\mathbf{x})$, $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})$, é equivalente a:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{S}^T(\mathbf{x}) > 0 \quad (30)$$

Como o processo inverso é verdadeiro, então a desigualdade não linear representada pela equação (30) pode ser transformada na LMI representada pela equação (29). A prova do complemento de Schur pode ser encontrada em Vanantwerp e Braatz (2000).

3.1.3 Caracterização do critério de estabilidade de Lyapunov

Considere o seguinte sistema dinâmico linear e invariante no tempo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (31)$$

O teorema de Lyapunov analisa a estabilidade através do conceito de energia. Como, normalmente, a fórmula de cálculo de energia envolve um termo quadrático, por exemplo: a energia potencial elástica possui o deslocamento ao quadrado, enquanto, que a energia cinética possui o termo da velocidade ao quadrado; então, analogamente, o teorema de Lyapunov cria a seguinte função energia genérica de Lyapunov:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (32)$$

sendo \mathbf{P} , simétrica, uma matriz incógnita.

A energia de um sistema deve ser sempre zero ou positiva, logo, a equação (32) deve ser maior que zero. Para isso acontecer a matriz \mathbf{P} deve ser positiva definida. Existem algumas formas de se descobrir se uma matriz é definida positiva, dentre as quais se podem citar: i) analisando os autovalores da matriz, se todos eles forem positivos então a matriz será positiva definida; ii) ou aplicando o critério de Silvester que estuda os menores principais da matriz.

Para um sistema ser assintoticamente estável, ou seja, todas as trajetórias convergem à zero, então a função energia de Lyapunov deve sempre decrescer conforme o tempo passa, dessa forma, $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) < 0$. Derivando a equação (32) tem-se:

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \quad (33)$$

Substituindo a equação (31) na equação (33) resulta:

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T [\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}] \mathbf{x} < 0 \quad (34)$$

Portanto, a condição necessária e suficiente para que o sistema descrito pela equação (31) seja assintoticamente estável é encontrar uma matriz \mathbf{P} simétrica que satisfaça as seguintes LMIs:

$$\mathbf{P} > 0$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \quad (35)$$

Se for possível encontrar pelo menos uma matriz \mathbf{P} sujeita às LMIs da equação (35) diz que o sistema é factível.

Para um sistema com incertezas politópicas do tipo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x}(t) \quad (36)$$

sendo $\mathbf{A}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{A}_i$, $\alpha \in \Lambda_N$, com Λ_N o simplex unitário dado por:

$$\Lambda_N \triangleq \{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \}$$

a estabilidade quadrática é garantida para todo o politopo convexo, ou seja, para $\forall \alpha \in \Lambda_N$, se for encontrada uma única matriz \mathbf{P} , definida positiva, tal que se verifique a estabilidade em todos os vértices do politopo. Ou seja, deve-se encontrar factibilidade para o seguinte sistema de LMIs:

$$\mathbf{P} > 0$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (37)$$

sendo $N = 2^{vp}$ o número de vértices do politopo e vp , o número de parâmetros incertos.

3.1.4 Controle Robusto

Considere o sistema linear:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \quad (38)$$

O problema consiste em determinar uma matriz $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que a lei de controle por realimentação de estados, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, estabilize o sistema em malha fechada:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) \quad (39)$$

Fazendo uma analogia entre a equação (39) e a equação (31) a condição de estabilidade fica resumida em encontrar uma matriz \mathbf{P} simétrica e positiva definida tal que:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) < 0 \quad (40)$$

Que aplicando a propriedade distributiva resulta em:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} < 0 \quad (41)$$

A equação (41) é claramente uma desigualdade matricial **não** linear, pois há multiplicação de matrizes incógnitas. Para transformá-la em uma LMI deve-se primeiro aplicar uma transformação de congruência multiplicando, simultaneamente, pela esquerda e pela direita por \mathbf{P}^{-1} :

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{P}^{-1} < 0 \quad (42)$$

Em seguida faz-se uma mudança de variáveis chamando $\mathbf{W} = \mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{Z} = \mathbf{K} \mathbf{W}$ resultando na seguinte LMI:

$$\mathbf{A} \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{B}^T < 0 \quad (43)$$

Dessa forma, o problema do projeto do controlador \mathbf{K} que estabilize o sistema $(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K})$ fica resumido em encontrar uma matriz $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que:

$$\mathbf{W} > 0; \quad \mathbf{A} \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{B}^T < 0 \quad (44)$$

Se houver factibilidade, então o ganho do controlador será dado por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{Z} \mathbf{W}^{-1} \quad (45)$$

Se houver incertezas politópicas no sistema com $\mathbf{A}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{A}_i$ e $\mathbf{B}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{B}_i$ o projeto do controlador fica resumido em encontrar uma única matriz $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma única matriz $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que:

$$\mathbf{W} > 0; \quad \mathbf{A}_i \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{B}_i \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T \mathbf{B}_i^T < 0, \quad (46)$$

sendo $i = 1, \dots, N$ os vértices do politopo.

Novamente, o ganho do controlador será dado por $\mathbf{K} = \mathbf{Z} \mathbf{W}^{-1}$.

3.1.5 Controle Robusto utilizando a norma H_∞ via LMI

Antes de desenvolver as LMIs como foi feito no tópico anterior, é necessário explicar o que é a norma H_∞ . Considere o seguinte sistema invariante no tempo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{w}(t) \end{aligned} \quad (47)$$

onde $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^m$ representa uma entrada exógena e $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída medida. Aplicando a transformada de Laplace na equação (47) resulta em:

$$s \mathbf{X}(s) = \mathbf{A} \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \mathbf{W}(s) \quad (48a)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \mathbf{X}(s) + \mathbf{D} \mathbf{W}(s) \quad (48b)$$

onde s é variável complexa de Laplace. Isolando $\mathbf{X}(s)$ na equação (48a) e substituindo na equação (48b) resulta em:

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{W}(s) \quad (49)$$

Portanto, a função de transferência de \mathbf{w} para \mathbf{y} é dada por:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (50)$$

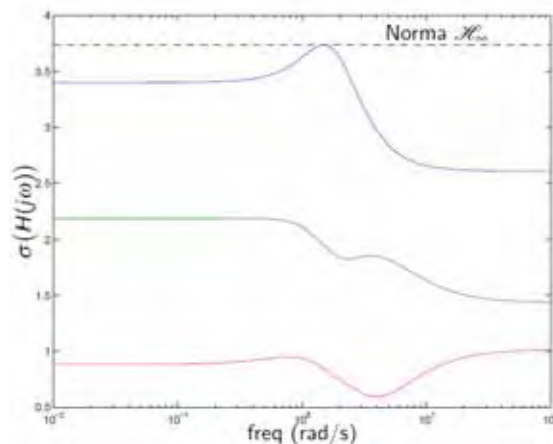
A norma H_∞ fica definida como:

$$\|\mathbf{H}(s)\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^+} \sigma_{\max}(\mathbf{H}(j\omega)) \quad (51)$$

onde σ representa o valor singular.

A forma da equação (51) é um tanto complicada e difícil de interpretar. Para facilitar a interpretação imagine um sistema SISO (*single input single output*), neste caso, a norma H_∞ definida pela equação (51) corresponde simplesmente ao valor máximo da magnitude no diagrama de Bode. Para o caso de sistemas MIMO (*multiple input multiple output*), a norma H_∞ é o máximo valor atingido pelo diagrama de valores singulares como mostra a figura 26. Nesta mesma figura, um sistema de ordem 3 é considerado e cada curva representa o comportamento de cada valor singular no eixo de frequência ω .

Figura 26 – Ilustração da norma H_∞ para sistema MIMO.



Fonte: Oliveira.e Peres (2010).

Para o desenvolvimento teórico do controle robusto utilizando a norma H_∞ via LMIs deve-se antes caracterizar tal norma também por LMIs. O seguinte desenvolvimento tem por finalidade atingir esse objetivo.

Considerando $\mathbf{w}(t)$, da equação (47), um sinal de energia, ou seja:

$$\int_0^\infty \mathbf{w}(\tau)^T \mathbf{w}(\tau) d\tau < +\infty \quad (52)$$

A norma H_∞ pode ser calculada pelo menor valor de γ tal que (OLIVEIRA et al., 1997):

$$\|\mathbf{y}\|_\infty \leq \gamma \|\mathbf{w}\|_\infty \quad (53)$$

Quanto maior for o valor de γ , mais suscetível à saída $\mathbf{y}(t)$ do sistema será em relação ao sinal de entrada ruidoso $\mathbf{w}(t)$.

Portanto, pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\|\mathbf{H}(s)\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \mathbf{y}^T \mathbf{y} < \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} \quad (54)$$

Que passando para o primeiro membro resulta em:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} < 0 \quad (55)$$

Como $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) < 0$ então:

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} < 0 \quad (56)$$

Substituindo $\dot{\mathbf{x}}$ da equação (47) na equação (33) resulta:

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C}) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T (\mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{D}) \mathbf{w} + \mathbf{w}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{D}^T \mathbf{C}) \mathbf{x} + \mathbf{w}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{D} - \gamma^2 \mathbf{I}) \mathbf{w} < 0$$

ou

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{w}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{D}^T \mathbf{C} & \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} < 0 \quad (57)$$

A equação (57) guia para uma forma de se calcular a norma H_∞ utilizando LMIs e é conhecida como *Bounded real lemma*, que pode ser enunciado da seguinte forma (OLIVEIRA et al., 1997):

Bounded real lemma: \mathbf{A} é assintoticamente estável e $\|\mathbf{H}(s)\|_\infty < \gamma$ se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{D}^T \mathbf{C} & \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (58)$$

É interessante notar que a matriz da equação (58) é simétrica e atingi o primeiro objetivo de se calcular a norma H_∞ via LMI.

Uma vez caracterizada a norma H_∞ , prossegue-se agora para o desenvolvimento teórico do controle ótimo. Tal controle busca minimizar a norma H_∞ do sistema em malha fechada usando realimentação de estados. Considere o sistema linear e invariante no tempo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}(t) + \mathbf{D}_1 \mathbf{w}(t) \end{aligned} \quad (59)$$

O objetivo do problema é projetar um controlador de ganho \mathbf{K} que gere o sinal de controle $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ que estabilize e minimize a norma H_∞ do sistema em malha fechada, que é obtido substituindo $\mathbf{u}(t)$ na equação (59) resultando em:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{C} + \mathbf{D}_2\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_1\mathbf{w}(t) \quad (60)$$

Chamando $(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})$ de \mathbf{A}_N , \mathbf{B}_1 de \mathbf{B}_N , $(\mathbf{C} + \mathbf{D}_2\mathbf{K})$ de \mathbf{C}_N e \mathbf{D}_1 de \mathbf{D}_N e aplicando o *Bounded Real Lemma* na equação (60), trocando \mathbf{P} por \mathbf{W} com intuito apenas literal, e γ^2 por μ para tornar linear o problema, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_N\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}_N^T + \mathbf{B}_N\mathbf{B}_N^T & \mathbf{W}\mathbf{C}_N^T + \mathbf{B}_N\mathbf{D}_N^T \\ \mathbf{C}_N\mathbf{W} + \mathbf{D}_N\mathbf{B}_N^T & \mathbf{D}_N\mathbf{D}_N^T - \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (61)$$

Que separando a soma resulta em:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_N\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}_N^T & \mathbf{W}\mathbf{C}_N^T \\ \mathbf{C}_N\mathbf{W} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_N\mathbf{B}_N^T & \mathbf{B}_N\mathbf{D}_N^T \\ \mathbf{D}_N\mathbf{B}_N^T & \mathbf{D}_N\mathbf{D}_N^T \end{bmatrix} < 0 \quad (62)$$

Rearranjando e multiplicando por (-1) fica:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_N\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{A}_N^T & -\mathbf{W}\mathbf{C}_N^T \\ -\mathbf{C}_N\mathbf{W} & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_N \\ -\mathbf{D}_N \end{bmatrix} \mathbf{I} \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_N^T & -\mathbf{D}_N^T \end{bmatrix} > 0 \quad (63)$$

O desenvolvimento até a equação (63), que ainda não é LMI, foi preparado para aplicar o complemento de Schur, o qual resulta em:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_N\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{A}_N^T & -\mathbf{W}\mathbf{C}_N^T & -\mathbf{B}_N \\ -\mathbf{C}_N\mathbf{W} & \mu\mathbf{I} & -\mathbf{D}_N \\ -\mathbf{B}_N^T & -\mathbf{D}_N^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (64)$$

Substituindo de volta \mathbf{A}_N , \mathbf{B}_N , \mathbf{C}_N e \mathbf{D}_N , chamando $\mathbf{Z} = \mathbf{K}\mathbf{W}$ e multiplicando por (-1) resulta:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_2\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{W}\mathbf{C}^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{D}_2^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}\mathbf{W} + \mathbf{D}_2\mathbf{Z} & -\mu\mathbf{I} & \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{D}_1^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (65)$$

Portanto, o projeto do controlador pode ser sintetizado pelo seguinte lema:

LEMA 1

O sistema dado pela equação (59) é estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o seguinte problema convexo de otimização:

“**minimize** μ e encontre uma matriz \mathbf{Z} e \mathbf{W} simétrica definida positiva sujeitas à LMI da equação (65). O ganho do controlador é calculado por $\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}$, que, na solução ótima, a relação $\|\mathbf{H}(s)\|_{\infty}^2 = \mu$ é satisfeita para a função de transferência em malha fechada.”

Para um sistema com incertezas politópicas do tipo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2(\alpha)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_1(\alpha)\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\alpha)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_2(\alpha)\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}_1(\alpha)\mathbf{w}(t)\end{aligned}\quad (66)$$

Cujas matrizes são agora uma combinação convexa dependentes de $\alpha \in \Lambda_N$, com Λ_N o simplex unitário dado já definido anteriormente, pode-se enunciar o seguinte lema.

LEMA 2

A norma H_{∞} é minimizada e a estabilidade quadrática é garantida para todo o politopo convexo, ou seja, para $\forall \alpha \in \Lambda_N$, se μ for minimizado e for encontrada uma única matriz \mathbf{Z} e \mathbf{W} simétrica, tal que se encontre factibilidade para o seguinte sistema de LMIs:

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &> 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{B}_{2i}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T\mathbf{B}_{2i}^T & \mathbf{W}\mathbf{C}_i^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{D}_{2i}^T & \mathbf{B}_{1i} \\ \mathbf{C}_i\mathbf{W} + \mathbf{D}_{2i}\mathbf{Z} & -\mu\mathbf{I} & \mathbf{D}_{1i} \\ \mathbf{B}_{1i}^T & \mathbf{D}_{1i}^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} &< 0, \quad i = 1, \dots, N\end{aligned}\quad (67)$$

Novamente, o ganho do controlador robusto com custo garantido H_{∞} é dado como $\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}$.

3.1.6 Controle Robusto utilizando a norma H_2 via LMI

Assim como no tópico anterior, o início deste visa dar uma breve introdução sobre o conceito da norma H_2 . Em seguida, será desenvolvido o equacionamento que modela tal norma na forma de LMIs. Finalmente, será mostrado como se projeta um controlador de realimentação de estados que minimize esta norma.

Antes de desenvolver as LMIs como foi feito no tópico anterior, é necessário explicar o que é a norma H_2 .

Considere o seguinte sistema linear e invariante no tempo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\quad (68)$$

Neste ponto já é notado uma diferença entre a norma H_2 e H_∞ . Para se calcular a norma H_2 , o sistema não pode ter o termo de transmissão direta de $\mathbf{w}(t)$ para $\mathbf{y}(t)$ como mostra a equação (68), caso contrário a norma H_2 não será finita. Entretanto, este fato é irrelevante para a norma H_∞ .

Portanto, a matriz de transferência de \mathbf{w} para \mathbf{y} será dada por:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (69)$$

A norma H_2 fica definida como (OLIVEIRA et al., 1997):

$$\|\mathbf{H}(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(\mathbf{H}(j\omega)^* \mathbf{H}(j\omega)) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \sigma_i(\mathbf{H}(j\omega)) d\omega \quad (70)$$

onde $\sigma_i(\mathbf{H}(j\omega))$ são os valores singulares, $\mathbf{H}^*(j\omega)$ o conjugado transposto de $\mathbf{H}(j\omega)$ e a notação $\text{tr}()$ indica o traço da matriz, que nada mais é do que a soma dos elementos das diagonais.

Se a norma H_∞ , para um sistema *SISO*, corresponde ao máximo valor da magnitude no diagrama de Bode, a norma H_2 corresponde à área abaixo da curva da magnitude para o mesmo diagrama.

Pelo teorema de Parseval a norma H_2 é equivalente a:

$$\|\mathbf{H}(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(\mathbf{H}^*(j\omega)\mathbf{H}(j\omega)) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(\mathbf{h}(t)^* \mathbf{h}(t)) dt \quad (71)$$

Considerando um sinal de entrada impulsional no sistema representado pela equação (68), a transformada inversa de Laplace da função de transferência, equação (69), é dada como:

$$\mathbf{h}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{H}(s)\} = \begin{cases} \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (72)$$

onde $e^{\mathbf{A}t}$ é calculado pela seguinte série (OGATA, 2003):

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4 t^4}{4!} + \dots \quad (73)$$

Neste caso a norma H_2 pode ser calculada por:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}(s)\|_2^2 &= \int_0^{+\infty} \text{tr}(\mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)) dt = \int_0^{+\infty} \text{tr}(\mathbf{h}(t)\mathbf{h}^T(t)) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \text{tr}(\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B}) dt = \int_0^{+\infty} \text{tr}(\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T) dt \end{aligned} \quad (74)$$

Como os gramianos de controlabilidade \mathbf{L}_C e de observabilidade \mathbf{L}_O são:

$$\mathbf{L}_C = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A t} dt \quad (75)$$

$$\mathbf{L}_O = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{A t} dt \quad (76)$$

Pode-se provar usando as equações (75) e (76) que:

$$\mathbf{A} \mathbf{L}_C + \mathbf{L}_C \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = 0 \quad (77)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{L}_O + \mathbf{L}_O \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0 \quad (78)$$

Para demonstrar a equação (77) pode-se escrevê-la da seguinte forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{L}_C + \mathbf{L}_C \mathbf{A}^T = -\mathbf{B} \mathbf{B}^T \quad (79)$$

Que, substituindo \mathbf{L}_C torna:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \mathbf{A} e^{A^T t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A t} dt + \int_0^{+\infty} e^{A^T t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A t} \mathbf{A}^T dt \\ &= \int_0^{+\infty} [\mathbf{A} e^{A^T t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A t} + e^{A^T t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T e^{A t}] dt = -\mathbf{B} \mathbf{B}^T \end{aligned} \quad (80)$$

É necessário um pouco de intuição matemática para descobrir que o termo dentro da integral da equação (80) não passa da derivada de um produto. Dessa forma, o resultado da equação (80) é:

$$e^{A^T t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A t} \Big|_0^{+\infty} = -\mathbf{B} \mathbf{B}^T \quad (81)$$

Para um sistema estável $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{A t} = 0$ assim, a equação (81) se torna:

$$-\mathbf{I} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{I} = -\mathbf{B} \mathbf{B}^T, \text{ como se queria demonstrar.} \quad (82)$$

Substituindo as equações (75) e (76) na equação (74) resulta:

$$\|\mathbf{H}(s)\|_2^2 = \text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{L}_O \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{L}_C \mathbf{C}^T) \quad (83)$$

A fim de incorporar LMIs, a igualdade das equações (77) e (78) é transformada em um problema de otimização com desigualdades. Portanto, existem duas formas de calcular a norma H_2 : ou se usa o gramiano de observabilidade na desigualdade e o de controlabilidade no traço; ou se usa o gramiano de controlabilidade na desigualdade e o de observabilidade no traço. Dessa forma, o cálculo da norma H_2 é sintetizado por um dos dois seguintes problemas.

Problema 1

Minimize $\text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})$ e encontre uma matriz \mathbf{P} simétrica de forma que se encontre factibilidade para o seguinte sistema de LMIs:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &> 0 \\ \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} &< 0 \end{aligned} \quad (84)$$

Problema 2

Minimize $\text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{W} \mathbf{C}^T)$ e encontre uma matriz \mathbf{W} simétrica de forma que se encontre factibilidade para o seguinte sistema de LMIs:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &> 0 \\ \mathbf{A} \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T &< 0 \end{aligned} \quad (85)$$

Prossegue-se agora para o desenvolvimento teórico do controle ótimo, uma vez feita a caracterização da norma H_2 . Pretende-se projetar um controlador de realimentação de estados que estabilize o sistema em malha fechada e minimize tal norma. Considere o sistema linear e invariante no tempo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (86)$$

Assumindo que o sinal de controle seja $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \mathbf{x}(t)$. O sistema da equação (86) adquire a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= (\mathbf{C} + \mathbf{D} \mathbf{K}) \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (87)$$

Chamando $(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K})$ de \mathbf{A}_N e $(\mathbf{C} + \mathbf{D} \mathbf{K})$ de \mathbf{C}_N e substituindo na equação (84) tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_N^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_N + \mathbf{C}_N^T \mathbf{C}_N &< 0 \\ = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}) + (\mathbf{C} + \mathbf{D} \mathbf{K})^T (\mathbf{C} + \mathbf{D} \mathbf{K}) &< 0 \end{aligned} \quad (88)$$

Que é o mesmo que:

$$-(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K})^T \mathbf{P} - \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}) - (-1)(\mathbf{C} + \mathbf{D} \mathbf{K})^T \mathbf{I} (-1)(\mathbf{C} + \mathbf{D} \mathbf{K}) > 0 \quad (89)$$

Repare que foi escolhido o Problema 1, o mesmo desenvolvimento poderia ser feito utilizando o Problema 2. Aplicando o complemento de Schur na equação (89) resulta em:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K})^T \mathbf{P} - \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}) & -(\mathbf{C} + \mathbf{DK})^T \\ & -(\mathbf{C} + \mathbf{DK}) & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \\ & = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K})^T \mathbf{P} - \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}) & (\mathbf{C} + \mathbf{DK})^T \\ & (\mathbf{C} + \mathbf{DK}) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (90)$$

Aplicando uma transformação de congruência na equação (90) multiplicando à esquerda e à direita pela matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$ origina a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K})^T - (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{K})\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{C} + \mathbf{DK})^T \\ \mathbf{CP}^{-1} + \mathbf{DKP}^{-1} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (91)$$

A equação (91) ainda não é uma LMI, pois existem: multiplicação de matrizes incógnitas, e inversa de matriz incógnita. Estes problemas são resolvidos por substituição de variáveis. Chamando $\mathbf{W} = \mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{Z} = \mathbf{KW}$ resulta em:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{WA}^T + \mathbf{Z}^T \mathbf{B}_2^T + \mathbf{AW} + \mathbf{B}_2 \mathbf{Z} & \mathbf{WC}^T + \mathbf{Z}^T \mathbf{D}^T \\ \mathbf{CW} + \mathbf{DZ} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (92)$$

A equação (92) é caracterizada como uma LMI.

Entretanto, ao se fazer substituição de variáveis, o traço, também dado pelo enunciado do problema 1, resulta em $\text{tr}(\mathbf{B}_1^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}_1)$, que não é uma LMI, já que existe a inversa de uma matriz incógnita. Assumindo que traço possui um valor finito, uma nova variável \mathbf{X} é introduzida e a seguintes suposições podem ser feitas:

$$\mathbf{B}_1^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}_1 < \mathbf{X} \quad (93)$$

$$\text{tr}(\mathbf{B}_1^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}_1) < \text{tr}(\mathbf{X}) \quad (94)$$

A equação (93) é reescrita como:

$$\mathbf{X} - \mathbf{B}_1^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}_1 > 0 \quad (95)$$

Que aplicando complemento de Schur resulta:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{W} \end{bmatrix} > 0 \quad (96)$$

Portanto, o projeto do controlador pode ser resumido pelo seguinte lema.

LEMA 3

“O sistema dado pela equação (86) é estabilizável por realimentação de estados se e somente se existir uma solução para o seguinte problema convexo de otimização:

minimize $\text{tr}(\mathbf{X})$, sendo \mathbf{X} uma matriz simétrica e encontre uma matriz \mathbf{Z} e \mathbf{W} simétrica sujeitas às LMIs

$$\begin{aligned} & \mathbf{W} > 0 \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{W}\mathbf{A}^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{B}_2^T + \mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{B}_2\mathbf{Z} & \mathbf{W}\mathbf{C}^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{D}^T \\ \mathbf{C}\mathbf{W} + \mathbf{D}\mathbf{Z} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{W} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (97)$$

O ganho do controlador que estabiliza o sistema dado pela equação (86) e minimiza a norma H_2 é calculado por $\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}$.

Um desenvolvimento semelhante poderia ser feito utilizando o Problema 2, que resultaria no seguinte problema de otimização convexa:

LEMA 4

“**minimize** $\text{tr}(\mathbf{X})$, sendo \mathbf{X} uma matriz simétrica e encontre uma matriz \mathbf{Z} e \mathbf{W} simétrica sujeitas às LMIs

$$\begin{aligned} & \mathbf{W} > 0 \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{B}_2\mathbf{Z} + \mathbf{W}\mathbf{A}^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{C}\mathbf{W} + \mathbf{D}\mathbf{Z} \\ \mathbf{W}\mathbf{C}^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{D}^T & \mathbf{W} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (98)$$

O ganho do controlador será dado também por $\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}$.

Para um sistema com incertezas politópicas do tipo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2(\alpha)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_1(\alpha)\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\alpha)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\alpha) \end{aligned} \quad (99)$$

Da mesma forma que na norma H_∞ , as matrizes são agora uma combinação convexa dependentes de $\alpha \in \Lambda_N$, com Λ_N o simplex unitário dado definido anteriormente. Dessa forma, o lema a seguir pode ser enunciado.

LEMA 5

“A estabilidade quadrática é garantida para todo o politopo convexo, ou seja, para $\forall \alpha \in \Lambda_N$, se for encontrada uma única matriz \mathbf{Z} , \mathbf{W} simétrica e \mathbf{X} simétrica, tal que se encontre factibilidade para o seguinte sistema de LMIs:

Minimize $\text{tr}(\mathbf{X})$ sujeito a

$$\begin{aligned} & \mathbf{W} > 0 \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{W}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{B}_{2i}^T + \mathbf{A}_i\mathbf{W} + \mathbf{B}_{2i}\mathbf{Z} & \mathbf{W}\mathbf{C}_i^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{D}_i^T \\ \mathbf{C}_i\mathbf{W} + \mathbf{D}_i\mathbf{Z} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{B}_{1i}^T \\ \mathbf{B}_{1i} & \mathbf{W} \end{bmatrix} > 0 \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (100)$$

ou

Minimize $\text{tr}(\mathbf{X})$ sujeito a

$$\begin{aligned} & \mathbf{W} > 0 \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i\mathbf{W} + \mathbf{B}_{2i}\mathbf{Z} + \mathbf{W}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{B}_{2i}^T & \mathbf{B}_{1i} \\ \mathbf{B}_{1i}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{C}_i\mathbf{W} + \mathbf{D}_i\mathbf{Z} \\ \mathbf{W}\mathbf{C}_i^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{D}_i^T & \mathbf{W} \end{bmatrix} > 0 \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (101)$$

A minimização de $\text{tr}(\mathbf{X})$ garante a exigência máxima do valor da norma H_2 para todas as combinações convexas possíveis do sistema em malha fechada. O ganho do controle robusto é dado como $\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}$.

3.1.7 Controle utilizando o Lema de Finsler

O controle robusto, seja utilizando a norma H_∞ ou a norma H_2 via LMIs, consegue obter controladores eficientes que possibilitam que a resposta do sistema em malha fechada possua intervalos transitórios quase tão breves quanto se queira. A única restrição é que haja factibilidade para as LMIs. Entretanto, o custo que se paga para tamanha robustez é o valor do ganho do controlador, que muitas vezes atinge valores tão altos que é impossível de se obter na realidade devido à limitação dos atuadores. O Lema de Finsler (FINSLER, 1936) permite manusear as LMIs introduzindo uma variável de relaxação de tal forma que o sinal de controle requerido seja amenizado diminuindo assim, o ganho do controlador.

Lema de Finsler

Seendo $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{S}^n$, e $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\text{rank}(\boldsymbol{\beta}) < n$. As seguintes afirmações são válidas:

i) $\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\omega} < 0$, $\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\omega} = 0$, $\forall \boldsymbol{\omega} \neq 0$

ii) $\boldsymbol{\beta}^{\perp T} \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\beta}^{\perp} < 0$

$$iii) \exists \mu \in \mathbb{R} : \rho - \mu \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta} < 0$$

$$iv) \exists \boldsymbol{\chi} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \rho + \boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\chi}^T < 0$$

onde $\boldsymbol{\beta}^\perp$ denota uma base para o espaço nulo de $\boldsymbol{\beta}$. A afirmação *i*) é uma forma quadrática restrita onde o vetor $\boldsymbol{\omega}$ está confinado em um espaço nulo de $\boldsymbol{\beta}$. A afirmação *ii*) vem diretamente de *i*) fornecendo uma forma quadrática não restrita. As afirmações *iii*) e *iv*) são formas quadráticas não restritas, cujas formas restritas foram originalmente obtidas introduzindo multiplicadores. No caso *iii*) o multiplicador é um escalar, μ ; e no caso *iv*), o multiplicador é uma matriz, $\boldsymbol{\chi}$ (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2002).

Considere o seguinte sistema linear, invariante no tempo e com incertezas politópicas:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{u}(t) \quad (102)$$

O objetivo é estabilizar o sistema em malha fechada. Para sair um pouco do conservadorismo será usada a realimentação derivativa na formulação. Neste caso o sinal de controle é dado como:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}(t) \quad (103)$$

Substituindo equação (103) na equação (102) resulta:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}(t) \\ \Rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{K})\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x}(t) \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{K})^{-1} \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (104)$$

Passando tudo para o primeiro membro obtém-se:

$$0 = \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x}(t) - (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{K})\dot{\mathbf{x}}(t) \quad (105)$$

No projeto do controlador será utilizada uma função de Lyapunov dependente de parâmetros. Dessa forma, a função energia de Lyapunov é dada como:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t), \alpha) &= \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}(\alpha)\mathbf{x}(t) > 0 \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}(t), \alpha) &= \dot{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P}(\alpha)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}(\alpha)\dot{\mathbf{x}}(t) < 0 \end{aligned} \quad (106)$$

Sendo $\mathbf{P}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{P}_i$, $\alpha \in \Lambda_N$.

Define-se o seguinte conjunto de vetores e matrizes:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\rho}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}(\alpha) \\ \mathbf{P}(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}(\alpha) = [\mathbf{A}(\alpha) \quad -\mathbf{I} - \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{K}] \quad (107)$$

Substituindo equação (107) na afirmação *i*) obtém-se:

$$\dot{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\rho}(\mathbf{P}(\alpha)) \boldsymbol{\omega} < 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P}(\alpha) \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}(\alpha) \dot{\mathbf{x}}(t) < 0 \quad (108)$$

Que é a própria condição de estabilidade de Lyapunov e:

$$\boldsymbol{\beta}(\alpha) \boldsymbol{\omega} = 0 \Leftrightarrow 0 = \mathbf{A}(\alpha) \mathbf{x}(t) - (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\alpha) \mathbf{K}) \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (109)$$

Que é a definição do sistema em malha fechada com realimentação derivativa dada pela equação (105).

Novamente, utilizando os termos da equação (107), contudo na afirmação *iv*) resulta na seguinte declaração:

$\exists \mathbf{P}(\alpha) = \mathbf{P}(\alpha)^T > 0$, $\exists \boldsymbol{\chi} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}(\alpha) \\ \mathbf{P}(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\chi} [\mathbf{A}(\alpha) \quad -\mathbf{I} - \mathbf{B}(\alpha) \mathbf{K}] + [\mathbf{A}(\alpha) \quad -\mathbf{I} - \mathbf{B}(\alpha) \mathbf{K}]^T \boldsymbol{\chi}^T < 0 \quad (110)$$

Os seguintes lemas foram elaborados a partir dessas informações e apresentam condições suficientes para que o sistema seja estabilizável usando a realimentação derivativa.

LEMA 6

“O sistema dado pela equação (102) é estabilizável por realimentação derivativa se for encontrada as matrizes $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T$ que garantem factibilidade para as seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \mathbf{Y}^T + \mathbf{Y} \mathbf{A}_i^T & \mathbf{Q}_i - \mathbf{Y} - \mathbf{B}_i \mathbf{G} + \mathbf{Y} \mathbf{A}_i^T \\ \mathbf{Q}_i - \mathbf{Y} + \mathbf{A}_i \mathbf{Y} - \mathbf{G}^T \mathbf{B}_i^T & -2\mathbf{Y} - \mathbf{B}_i \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{B}_i^T \end{bmatrix} < 0 \quad (111)$$

$$\mathbf{Q}_i > 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (112)$$

O ganho do controlador é dado por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{G} \mathbf{Y}^{-1} \quad (113)$$

LEMA 7

“O sistema dado pela equação (102) é estabilizável por realimentação derivativa se for encontrada as matrizes $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{Y} \neq \mathbf{Y}^T$ que garantem factibilidade para as seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \mathbf{Y}^T + \mathbf{Y} \mathbf{A}_i^T & \mathbf{Q}_i - \mathbf{Y}^T - \mathbf{B}_i \mathbf{G} + \mathbf{Y} \mathbf{A}_i^T \\ \mathbf{Q}_i - \mathbf{Y} + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}^T - \mathbf{G}^T \mathbf{B}_i^T & -\mathbf{Y}^T - \mathbf{Y} - \mathbf{B}_i \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{B}_i^T \end{bmatrix} < 0 \quad (114)$$

$$\mathbf{Q}_i > 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (115)$$

O ganho do controlador pode ser dado por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}^T)^{-1}, \quad (116)$$

3.2 Controladores Nebulosos

3.2.1 Introdução

O conceito de conjuntos nebulosos foi introduzido por Zadeh (1965) que os definiu como um mapeamento de conjuntos dentro de um reticulado Booleano. Goguen (1967) estendeu o conceito definindo conjuntos nebulosos como funções de um conjunto dentro de um reticulado. Os conjuntos nebulosos foram criados com o propósito de ser uma ferramenta matemática capaz de descrever situações que originam classes mal definidas, isto é, coleções de objetos para os quais não existe um critério preciso de pertinência (BROWN, 1971). As fronteiras destes objetos são vagas, de visibilidade não tão clara, nebulosas, de forma que existem objetos cuja classificação em determinada classe é impossível.

Em 1974 os conjuntos nebulosos foram a base para o desenvolvimento dos controladores nebulosos, cujos projetos eram focados principalmente em aplicações industriais (MAMDANI, 1974). Hoje se destaca como uma tecnologia promissora na engenharia de controle convencional. As aplicações de conjuntos nebulosos cresceram significativamente nas últimas duas décadas fugindo do escopo industrial e ganhando espaço no meio científico. Liao (2008) utilizou a teoria de conjuntos nebulosos para avaliar a inundação devido a tufões em Taiwan de 1980 a 2002. Chang et al. (2001) utilizaram a abordagem de conjuntos nebulosos para identificar a qualidade da água de um rio e Sasikumar e Mujumdar (1998) aplicaram um modelo de otimização nebulosa no controle de qualidade da água. Yasunobu et al. (1983) projetaram um controlador nebuloso para um sistema automático de operação de trem e Sekine et al. (1995) fizeram o mesmo ajustando as regras do controlador, que combina rede neural e lógica nebulosa. Suzuki et al. (1993) usaram o controlador nebuloso no controle de um guindaste. Até mesmo no campo da engenharia a lógica nebulosa encontrou seu espaço (HEGER et al., 1995). Atualmente a lógica nebulosa é empregada também em máquinas de lavar, câmeras fotográficas e painéis automáticas. O setor automobilístico não escapou do domínio de abrangência dos conjuntos nebulosos. Li et al. (2003) implementaram um controlador nebuloso que substitui as habilidades do motorista levando um simples carro robô a possuir um comportamento autônomo. Contudo, uma das aplicações mais importantes dos controladores nebuloso neste setor está relacionada com o controle semi-ativo das suspensões veiculares que empregam fluidos magnetoreológicos. Dong et al. (2010) estudam essa aplicação e comparam com diversos tipos de controle.

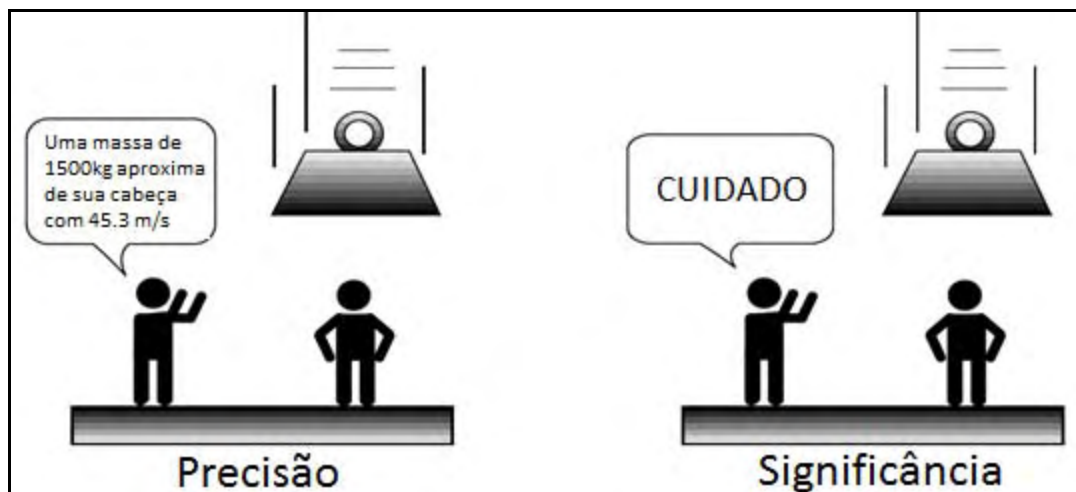
De acordo com Paschoal (2011) há três vantagens que enquadram o controlador nebuloso no controle semi-ativo de suspensões veiculares com fluidos magnetoreológicos: *i*) incorporam as não linearidades no projeto do controlador adquirindo potencial de controlar sistemas complexos e superar o desempenho de controladores convencionais; *ii*) incorporam a experiência de um operador através de regras linguísticas; e *iii*) não necessita do conhecimento detalhado dos modelos, quais sejam planta, sensores ou atuadores.

3.2.2 Fundamentos da Lógica Nebulosa

Este tópico foi baseado no guia de usuário do *toolbox* de lógica nebulosa do Matlab® (ZADEH; BERKELEY, 2001).

O conceito de lógica nebulosa, embora moderno, personifica o modo nativo de pensamento humano ponderando a tomada de decisão entre significância e precisão. A figura 27 ilustra uma situação em que é importante para o controlador em tomar uma decisão significativa ao invés de uma precisa.

Figura 27 – Precisão e significância no mundo real.



Fonte: Zadeh e Berkeley (2001)

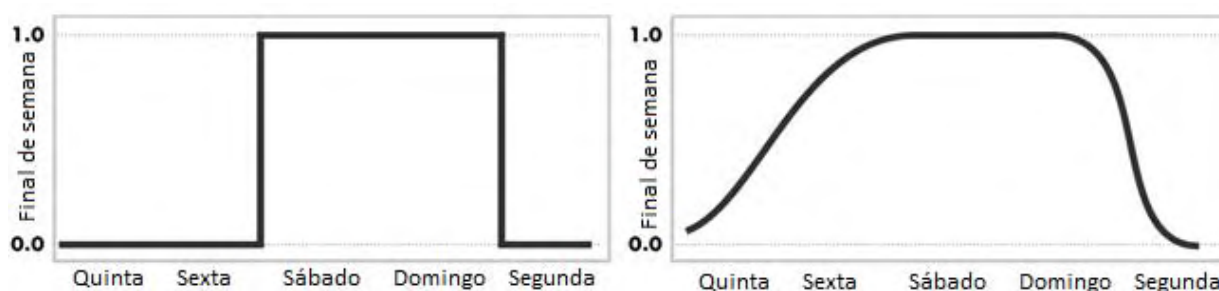
A lógica nebulosa é um modo conveniente de se mapear um espaço de entrada para um espaço de saída, por exemplo: a mulher diz para seu acompanhante em um restaurante sobre a qualidade do serviço, assim, a variável de entrada “qualidade” é mapeada e posteriormente classificada subjetivamente pela mulher em um rótulo (“bom”, “médio” ou “ruim”). Então o homem dirá qual será a gorjeta do garçom.

3.2.3 Conjuntos Nebulosos

Um conjunto nebuloso é um conjunto sem uma fronteira claramente definida. Para entender um conjunto nebuloso primeiro considere o chamado de conjunto clássico. Este pode ser representado por uma caixa fechada, que, ou inclui completamente um elemento ou o exclui completamente. Por exemplo: o conjunto de palavras com os dias da semana incluem inquestionavelmente: “segunda-feira”, “terça-feira” e “quarta-feira” e excluem completamente as palavras: “professor”, “dissertação” e “academia”. Assim, se um elemento não pertence ao conjunto “dias da semana”, ele automaticamente pertence ao conjunto “não dias da semana”. Esses dois conjuntos englobam o universo inteiro de palavras e não há nenhum elemento que possa pertencer aos dois conjuntos ao mesmo tempo.

Agora considere o conjunto de palavras com os dias do final de semana. Todos concordariam que as palavras “sábado” e “domingo” constituem palavras desse conjunto. Mas e a palavra “sexta-feira”? Para alguns “sexta-feira” já faz parte do final de semana, contudo de alguma forma ela deveria situar tecnicamente fora desse conjunto. Desse modo, a melhor posição de “sexta-feira” seria na fronteira do conjunto “final de semana” podendo pertencer não completamente a ele. Conjuntos clássicos não permitem essa abordagem, ao contrário de conjuntos nebulosos, que podem dizer que “sexta-feira” pertence **em parte** ao conjunto “final de semana”. Se a verdade adquirir o valor numérico 1, e falso adquirir o valor numérico de 0, então a lógica nebulosa permite qualquer valor situado entre 0 e 1, em oposição a lógica booleana, que somente permite os valores 0 e 1. A figura 28 mostra o grau de pertinência dos dias da semana no conjunto “final de semana” sob a ótica desses dois tipos de lógica.

Figura 28 – Grau de pertinência (Lógica Booleana) e grau de pertinência (Lógica Nebulosa) respectivamente.



Fonte: Zadeh e Berkeley (2001)

As curvas contínuas da figura 28 definem o grau de pertinência de qualquer instante da semana no conjunto “final de semana”, ou seja, ela mapeia inteiramente o espaço de entrada “dias da semana”, também chamado de **universo de discurso**, para o espaço de saída “final de semana”. Devido a esse fato, essa curva leva o nome de **função de pertinência**.

A única condição que uma função de pertinência deve satisfazer é a obrigação de variar entre 0 e 1, sua forma pode ser arbitrária podendo esta ser escolhida de acordo com a conveniência, simplicidade, velocidade e eficiência.

Um conjunto clássico A pode ser expresso de acordo com a seguinte expressão:

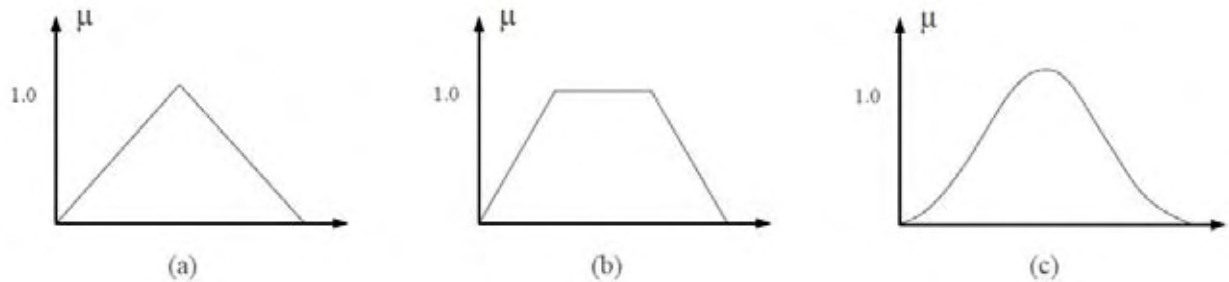
$$A = \{x \mid x > 6\} \quad (117)$$

Um conjunto nebuloso é uma extensão do conjunto clássico. Se X é o universo de discurso e seu elemento é denotado por x , então um conjunto nebuloso A em X é definido como um conjunto de pares ordenados.

$$A = \{x, \mu_A(x) \mid x \in X\} \quad (118)$$

Onde $\mu_A(x)$ é a função de pertinência de x em A . A função de pertinência mapeia cada elemento de X em um valor de pertinência entre 0 e 1. Existem vários tipos de funções de pertinência. As mais comuns são: triangular, trapezoidal e gaussiana (veja figura 29).

Figura 29 – Funções de pertinência do tipo (a) triangular, (b) trapezoidal e (c) gaussiana.



Fonte: Paschoal (2011)

3.2.4 Operações Lógicas

A primeira coisa que se deve mencionar sobre a lógica nebulosa é que se os graus de pertinência forem mantidos nos valores extremos, ou seja, em 1 se completamente verdadeiro ou 0, se completamente falso, então as operações padrões da lógica Booleana podem ser aplicadas. A figura 30 é um exemplo que ilustra as operações padrões *AND*, *OR* e *NOT*.

Figura 30 – Operações padrões da lógica Booleana

A	B	A and B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

A	B	A or B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

A	not A
0	1
1	0

NOT

Fonte: Zadeh e Berkeley (2001)

No entanto, como a lógica nebulosa assume também os valores intermediários entre 0 e 1, esses operadores padrões se tornam difusos. Assim, a expressão $A \text{ AND } B$, com A e B sendo limitados no intervalo $(0,1)$, é substituída pela função $\min(A,B)$, significando o valor mínimo entre A e B . Pela mesma linha de pensamento o operador OR é substituído pela função \max . E, finalmente, a operação $NOT A$ torna-se $1 - A$. Observando a figura 31 percebe-se que essas novas operações mantêm os mesmos valores vistos na figura 30.

Figura 31 – Operadores \min e \max .

A	B	$\min(A,B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

A	B	$\max(A,B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

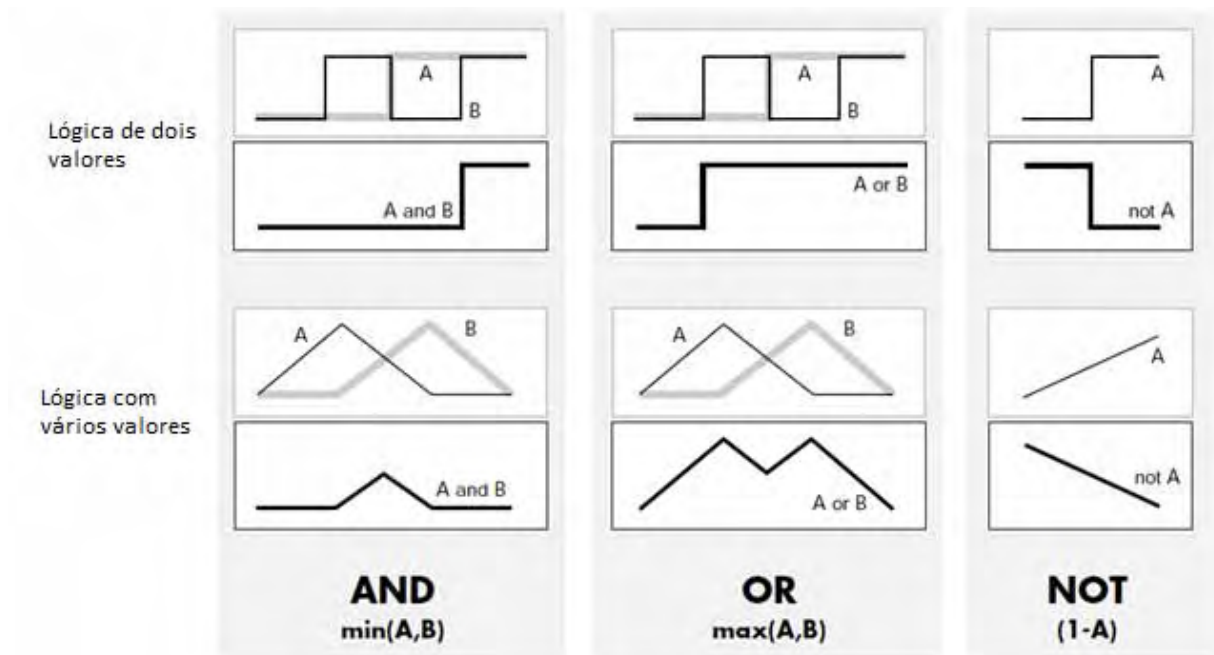
A	$1 - A$
0	1
1	0

NOT

Fonte: Zadeh e Berkeley (2001).

Como agora os operadores são funções, é possível aplicá-los em valores intermediários entre 0 e 1 como mostra a parte inferior da figura 32 a seguir. A parte superior da mesma figura mostra os mesmo conjuntos A e B da figura 30 com apenas valores extremos.

Figura 32 – Operadores da lógica nebulosa



Fonte: Zadeh e Berkeley (2001).

3.2.5 Regras Se-Então

Conjuntos nebulosos e operadores nebulosos são apenas o sujeito e o verbo da lógica nebulosa. As regras são utilizadas para formular as expressões que compreendem a lógica nebulosa e assumem a seguinte forma básica:

Se x é A então y é B .

onde A e B são valores linguísticos, ou rótulos, definidos por conjuntos nebulosos no universo de discurso de X e Y , respectivamente. A parte condicional " x é A " é chamada de antecedente ou premissa, enquanto que a parte " y é B " é chamada de conseqüente ou conclusão.

Agora considere uma regra cujo antecedente possui duas partes como a seguir:

Se x é A ou y é B então z é C

A interpretação dessa regra é feita da seguinte forma:

i) A expressão " x é A " é convertida em um valor numérico. Isso é feito calculando $\mu_A(x)$, ou seja, o grau de pertinência de x no conjunto A . O mesmo se aplica para a variável y resultando no grau de pertinência $\mu_B(y)$. Este processo responsável por transformar a linguagem simbólica das partes do antecedente em valores de grau de pertinência é chamada de *Nebulização*.

ii) o operador nebuloso é aplicado em todo o antecedente. No caso, como o antecedente é constituído apenas de duas partes conectados pelo operador “ou” (*OR*), então a função $\max(\mu_A(x), \mu_B(y))$ é aplicada.

iii) Aplicar um método de implicação. Este será visto em detalhe na próxima seção.

3.2.6 Sistema de Inferência Nebulosa

O Sistema de Inferência Nebulosa é um processo que traduz a linguagem simbólica das regras, construídas a partir da intuição do projetista, em uma linguagem matemática a fim de aplicar os operadores da lógica nebulosa para posteriormente calcular o valor da variável da saída. Portanto, este processo divide-se em 3 partes: *Nebulização*, *Mecanismo de Inferência* e *Desnebulização*.

A fase de *Nebulização*, já discutido anteriormente, é responsável por transformar a linguagem simbólica das partes do antecedente em valores de graus de pertinência dos conjuntos nebulosos que rotulam as variáveis nas regras.

O *Mecanismo de Inferência* está relacionado com o conectivo “então” e é a forma pela qual as regras serão interpretadas. Antes de aplicar um método de implicação, os pesos às regras devem ser atribuídos. Normalmente os pesos são configurados como 1, assim todas as regras têm a mesma importância não afetando no processo de implicação. No método Mamdani, o consequente é um conjunto nebuloso representado por uma função de pertinência. Esta é modificada por um único valor resultado do antecedente. Assim, a entrada para o processo de implicação é um único valor dado pelo antecedente e a saída é um conjunto nebuloso. Para o método de Sugeno, a função de pertinência da saída é uma constante ou linear. Uma típica regra em um modelo de Sugeno de ordem zero é da seguinte forma:

Se x é A ou y é B então z é k .

onde k é uma constante. Já em um modelo de primeira ordem a regra assume a seguinte forma

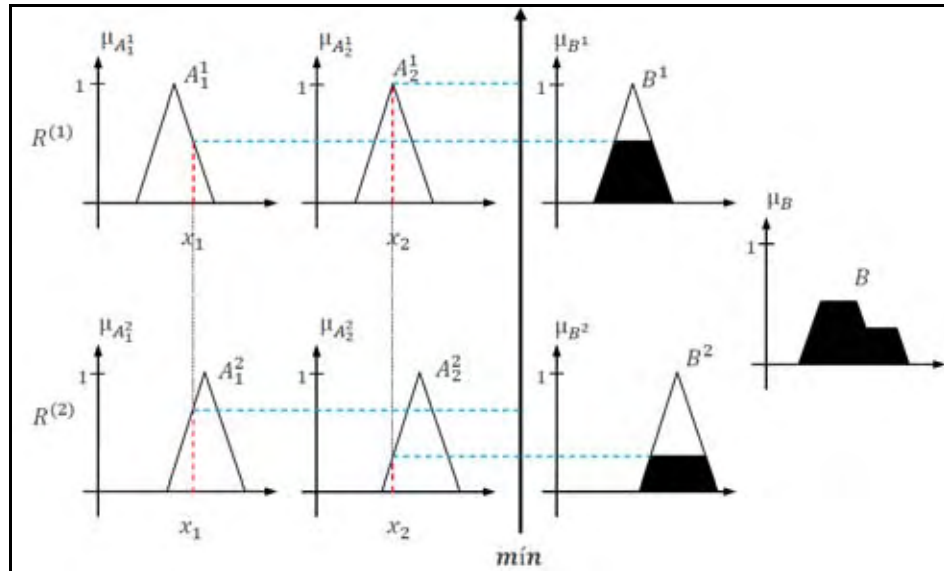
Se x é A ou y é B então $z = px + qy + r$.

onde p, q e r são constantes e o consequente é dado por uma função linear.

Cada regra resulta em um conjunto nebuloso na saída. O final do processo do mecanismo de inferência é combinar todos os conjuntos nebulosos em apenas um através de um processo de agregação. Assim, a entrada do processo de agregação é uma lista de conjuntos nebulosos calculados pelo processo de implicação e a saída é apenas um conjunto nebuloso para cada variável de saída. A figura 33 ilustra todo o processo do mecanismo de inferência: os valores das variáveis x_1 e x_2 são convertidos em graus de pertinência nos

conjuntos A_1^1 , A_2^1 , A_1^2 e A_2^2 ; utilizando-se do operador *min* os conjuntos nebulosos B^1 e B^2 , que mapeiam o universo de discurso da saída, são modificados e posteriormente agregados.

Figura 33 – Mecanismo de Inferência utilizando o operador *min*.



Fonte: Paschoal (2011).

Por fim, a fase de *Desnebulização* tem a função de calcular um único valor numérico para a saída do sistema de inferência. Assim, o processo de desnebulização possui como entrada um conjunto nebuloso e um valor numérico como saída. Talvez o mais famoso processo de desnebulização é o método do centroide, que retorna o centro da área abaixo da curva do conjunto nebuloso agregado. O software Matlab ® possui outros 4 métodos em sua biblioteca, quais sejam: média do máximo, maior do máximo, menor do máximo e do bisetor. Neste trabalho somente o método do centroide foi aplicado. Neste método a saída calculada pelo desnebulizador é dada por:

$$u = \frac{\sum_{j=1}^M \mu_B(w_j) w_j}{\sum_{j=1}^M \mu_B(w_j)} \quad (119)$$

onde u é a saída calculada, w_j é a variável que discretiza o universo de discurso, $\mu_B(\cdot)$ é a função de pertinência do conjunto nebuloso B e M é o número de elementos do universo de discurso.

3.2.7 Projeto de Controladores Nebulosos

O projeto de um controlador nebuloso envolve a execução de 5 etapas muito bem definidas:

- a) *Definição das Variáveis de Entrada e de Saída*: normalmente, em controladores nebulosos, há somente uma variável de saída por exemplo: força, voltagem, corrente. Já o número de variáveis de entrada varia conforme o problema. Quanto maior o número de variáveis de entrada mais difícil é a construção das regras, pois a intuição humana torna-se limitada.
- b) *Caracterização do Intervalo de Valores das Variáveis de Entrada e Saída*: estes intervalos irão definir os universos de discursos das variáveis. Para defini-los se faz necessário realizar simulações numéricas a fim de descobrir a ordem de grandeza das variáveis. A experiência do projetista também ajuda neste processo.
- c) *Definição do Conjunto de Funções de Pertinência*: cada universo de discurso será mapeado por um número específico de funções de pertinência de um determinado tipo (trapezoidal, triangular ou gaussiana). Cada função de pertinência possuirá um nome, ou rótulo como “Alto”, “Médio” ou “Baixo” facilitando a construção das regras.
- d) *Definição da Base de Regras*: esta etapa é onde a intuição e experiência do projetista são importantes. Todas as regras devem ser montadas formando a base de regras do controlador. Em geral, não é bom que a base de regras possua somente uma regra, de forma que são utilizadas duas ou mais. A possibilidade de regras aumenta exponencialmente com o número de variáveis de entrada. Assim, duas variáveis de entrada já são suficientes para formar uma grande base de regras, mas não é condição suficiente para a estabilidade do sistema. Nesta etapa o projetista deverá escolher entre o modelo de Mamdani ou o de Sugeno.
- e) *Sistema de Inferência Nebulosa*: esta etapa é praticamente automatizada restando ao projetista escolher o método de desnebulização.

3.2.8 Estabilidade de Controladores Nebulosos

Apesar do controle nebuloso apresentar notáveis vantagens, sendo utilizado com sucesso em muitas aplicações, ainda há uma certa relutância em empregá-lo. Isso ocorre devido a sua maior desvantagem, que seria a ausência de uma técnica consolidada voltada para o estudo de estabilidade. Como controladores nebulosos são intrinsecamente não lineares, o desenvolvimento de uma teoria geral de estabilidade é de difícil obtenção. Além disso, os esforços até agora despendidos foram voltados principalmente para o projeto de controladores nebulosos específicos para cada aplicação e não para a criação de uma metodologia geral de

análise e projeto. Entretanto, nos últimos anos um maior esforço foi concentrado para estudar a estabilidade destes controladores (GIRON-SIERRA; ORTEGA, 2002).

O estudo de estabilidade de um controlador clássico, como o PID, aborda o sistema completo: planta, atuadores, sensores e controlador. Para um controlador nebuloso, o modelo da planta muitas vezes não está disponível e o estudo de estabilidade do controlador nebuloso, por si só, já é complicado. Para começar, existem vários tipos de controladores nebulosos e o conceito de estável e instável somente pode ser aplicado em blocos dinâmicos. Assim, os controladores baseados no modelo Mamdani são excluídos dessa análise, pois são constituídos por blocos não lineares estáticos, diferente do modelo de Sugeno, onde os blocos são dinâmicos.

Mas o que é estabilidade do ponto de vista teórico? Atualmente, duas abordagens vêm sendo utilizadas para responder esta questão no escopo de lógica nebulosa. A primeira considera o comportamento dos transientes; e a segunda procura saídas limitadas no sistema dada uma entrada limitada (GIRON-SIERRA; ORTEGA, 2002). Há muitas caracterizações de estabilidade podendo ser local ou global, ser relacionado com estados ou trajetórias de equilíbrio, etc. Cabe ao projetista decidir o tipo de estabilidade mais pertinente ao problema.

Existem duas principais abordagens na análise de estabilidade: no domínio da frequência ou no domínio do tempo. Além disso, a estabilidade em controladores nebulosos é estudada sob a ótica da teoria de controle não linear.

No domínio do tempo destacam-se 2 métodos. No método direto de Lyapunov, a planta não linear é modelada por um sistema de Sugeno, e o controlador nebuloso, também utilizando Sugeno, é desenvolvido baseado no problema clássico do controle ótimo linear quadrático resultando em uma sequência de controladores locais; através da linearização a estabilidade de cada controlador é obtida tornando o controle completo assintoticamente estável com uma margem de ganho infinita (WU; LIN, 2000). No método indireto de Lyapunov uma condição suficiente de estabilidade é dada por uma função de Lyapunov e uma única matriz \mathbf{P} deve ser encontrada para todos os subsistemas que constituem o controlador nebuloso, este é baseado no modelo de Sugeno (BASTOW et al., 2004).

Já no domínio da frequência há 3 principais métodos: método por função descritiva, que foi uma das primeiras abordagens utilizadas para o estudo de estabilidade em controladores nebulosos (PICADO, 1998); método de Popov, Picado (1998) mostra como aplicá-lo em um gráfico de Nyquist de acordo com as condições suficientes para a estabilidade assintótica global; e o critério do círculo, cujos primeiros estudos deve-se a Rutledge et al. (1996), que mostraram como usar o critério do círculo para modelos lineares de plantas SISO e MIMO.

Existem outros trabalhos que discutem outros métodos. Por exemplo, através do trabalho de (SHIRAHATTI et al., 2008) pode-se estudar a estabilidade aplicando abordagens comum à teoria de sistemas não-lineares (planos de fase, análise espectrais, mapas de Poincaré, mapas de bifurcação, expoentes de Lyapunov, entropia de Kolmogorov-Sinai e outras conjecturas).

Neste trabalho, optou-se por não empregar nenhum método de análise de estabilidade. Assim, o estudo do desempenho do controlador ficará restrito às comparações com outros controladores.

A seção seguinte visa introduzir e explicar o Algoritmo Genético para em seguida ser combinado com a lógica nebulosa a fim de automatizar o projeto do controlador nebuloso.

3.3 Algoritmo Genético

Algoritmo Genético é um método de busca e otimização que se baseia nas idéias evolucionistas de Charles Darwin e nos processos genéticos biológicos propostos por Gregor Mendel. Os seres vivos apresentam notada capacidade de reconhecimento do ambiente no qual estão inseridos podendo tomar decisões quase que instantaneamente aos eventos dinâmicos que ocorrem na natureza. Segundo Charles Darwin, a evolução ocorre através da seleção natural, onde os seres mais aptos sobrevivem passando suas características aos seus descendentes. Portanto, a sobrevivência de uma espécie e sua evolução depende da diversidade de características, ou fenótipos, pois nunca se sabe que tipo de mudança poderá ocorrer no ambiente. Os fenótipos são a manifestação física do arranjo de genes, que são transferidos para gerações futuras. Os genes estão arranjados em cromossomos, que sofrem constante mudança através de determinados processos que mudam o arranjo dos genes, assim, fica garantida a diversidade de fenótipos.

No início dos anos de 1970, John Holland, da Universidade de Michigan, teve a idéia de criar um algoritmo baseado nos processos explicados anteriormente. Para isso os genes digitais podiam ter dois valores: 0 ou 1. Agrupando vários genes em um cromossomo cria-se um indivíduo com determinados valores de fenótipos. Holland fez o computador criar diversos cromossomos caracterizando assim a população inicial e mantendo a diversidade de fenótipos. A seleção natural foi feita através de uma função objetivo. O indivíduo cujo fenótipo melhor se aproxima da função objetivo tem uma maior probabilidade de passar seus genes a seus descendentes. Holland implementou processos de mutação e crossover em seu algoritmo: os cromossomos mais aptos trocavam determinados genes para manter a

diversidade. Assim a população inicial criada evolui mantendo a diversidade até maximizar a função objetivo.

3.3.1 Fundamentos do Algoritmo Genético

Este tópico foi baseado no guia de usuário do *toolbox* de algoritmo genético do Matlab® (ABRAMSON, 2004). Antes de explicar como o algoritmo genético funciona, a terminologia do algoritmo deve ser elucidada. A seguir são explicadas algumas definições:

Função de *fitness*: comumente chamada de função objetivo pelos algoritmos de otimização. É a função que se pretende otimizar, ou seja, encontrar seu ponto de máximo ou de mínimo.

Indivíduo: é qualquer ponto onde a função objetivo possa ser calculada. Normalmente, a coordenada deste ponto é dada como um vetor, ou seja, é multidimensional, e a função objetivo assume um valor escalar. Fazendo uma analogia com um DNA, cada coordenada do ponto é um *gene* e o indivíduo é também referenciado como *genoma*.

População: é um conjunto/vetor de indivíduos formando uma matriz de *genes*, com dimensão (*nº de indivíduos*) x (*nº de coordenadas*). O mesmo pode eventualmente aparecer mais de uma vez em uma população.

Geração: é cada sucessão da população. Em cada iteração, o algoritmo calcula uma nova população por processos que serão explicados mais adiante.

Diversidade: está relacionada com a distância média entre indivíduos em uma população. Dessa forma, uma população com alta diversidade possui uma maior média das distâncias e uma população com baixa diversidade possui menor média. É importante trabalhar com populações com alta diversidade, assim o algoritmo possui um universo de busca maior.

Valor de *fitness*: é o valor calculado pela função objetivo em um indivíduo. Portanto, o melhor valor *fitness* de uma população é o menor (ou o maior) valor calculado pela função objetivo em todos os indivíduos da população.

Pais e Filho: a cada iteração o algoritmo genético cria uma nova população. Para isso, o algoritmo seleciona determinados indivíduos da população atual, chamada de *pais*, e utilizam seus genes para criar novos indivíduos, *filhos*, para a próxima geração.

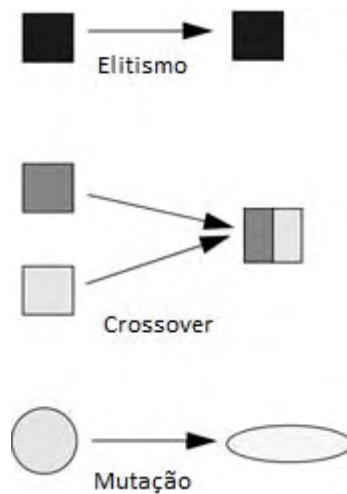
Como o algoritmo genético funciona

O algoritmo genético pode ser dividido em três etapas sequenciais:

1ª) O algoritmo começa criando uma população inicial por um método randômico.

2^a) A partir da população inicial, o algoritmo cria uma sequência de novas populações ou gerações. A cada passo, o algoritmo utiliza os indivíduos da população atual para criar a próxima geração. O processo de criação da nova população consiste em classificar cada indivíduo da população atual em uma escala de 0 a 1, onde 1 representa o indivíduo mais apto e 0 o menos apto. Essa classificação é feita comparando o indivíduo com a função objetivo. A ideia é criar uma roleta (metáfora das roletas de cassino), onde cada fatia da roleta representa um indivíduo. O tamanho da fatia do indivíduo está de acordo com sua aptidão. Os indivíduos que serão selecionados aleatoriamente pela roleta serão os que se reproduzirão. Assim, os indivíduos mais aptos possuem maiores chances de serem escolhidos. Os filhos poderão ser produzidos por: *Mutação*, quando mudanças randômicas são aplicadas em um único pai; *Crossover*, quando os *genes* de pares de pais são combinados; *Elitismo*, neste caso os indivíduos com os melhores valores da função objetivo automaticamente sobrevivem para a próxima geração. A figura 34 ilustra os diferentes tipos de filhos produzidos a partir dos indivíduos da população inicial.

Figura 34 – Tipos de filhos



Fonte: Zadeh e Berkeley (2001).

A nova geração é então formada substituindo os indivíduos da população atual pelos filhos.

3^a) O Algoritmo termina quando algum critério de parada é atingido. Existem 5 critérios de parada, os quais são listados a seguir.

Número de Gerações: o algoritmo termina quando o número de gerações alcança o valor máximo estipulado.

Limite de Tempo: o algoritmo termina após rodar uma determinada quantidade de tempo previamente estipulada.

Limite da Função Objetivo: o algoritmo termina quando o valor da função objetivo para o melhor ponto da população atual é menor ou igual ao seu valor limite previamente estipulado.

Estagnação das Gerações: o algoritmo termina se não houver melhoras no valor da função objetivo para uma sequência consecutiva de gerações de tamanho previamente estipulada.

Limite de Tempo de Estagnação: o algoritmo termina se não houver melhoras no valor da função objetivo durante um intervalo de tempo previamente estipulado.

Uma vez explicado as teorias envolvidas nas estratégias de controle: controle via LMIs, controladores nebulosos e algoritmos genéticos; parte-se para a aplicação dessas formulações no problema de redução de vibração. O próximo capítulo explica o procedimento para a aplicação destas teorias e mostra os principais resultados obtidos.

4 Resultados Numéricos

As simulações numéricas visam avaliar o comportamento dos controladores no quesito conforto dos passageiros, que está relacionado com a atenuação da vibração; e no quesito do desempenho e segurança do veículo, que está relacionado com a aderência do conjunto da roda com o piso (PASCHOAL, 2011). Portanto, para análise de conforto leva-se em conta a aceleração da massa amortecida do veículo m_1 representada pela variável de estado \dot{x}_3 , já para a análise de desempenho leva-se em conta o deslocamento do conjunto da roda representada pela variável de estado x_2 . O compromisso entre estes dois objetivos ainda é um grande desafio de projeto (CRIVELLARO, 2011). Para qualificar estes dois requisitos utilizam-se a área retificada do sinal, equação (120). Um baixo valor de área proporciona um melhor conforto (REGAZZI; XIMENES, 2005) ou um melhor desempenho dependendo de qual variável se está analisando.

$$AR = \int_0^T |x(t)| dt \quad (120)$$

onde T é o tempo considerado da existência do sinal $x(t)$ e AR é a área retificada do sinal.

O sinal $w(t)$, que representa a perturbação causada pela pista no pneu, foi o utilizado por Tusset (2008) e é definida a seguir como uma forma impulsiva:

$$w(t) = \delta(t) = 0.1[\text{m}] \quad 1.0[\text{s}] \leq t \leq 1.1[\text{s}] \quad (121)$$

Todas as simulações foram realizadas no toolbox *Simulink* do Matlab® admitindo condições iniciais nulas e utilizando o *solver ode45* de passo variável, que incorpora o algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem. A tolerância absoluta do *solver* foi configurada como automática e a tolerância relativa assumiu o valor de 0.001. Utilizou-se um tempo de simulação de 3 segundos, suficiente para verificar a estabilização do sistema (PASCHOAL, 2011).

Adotou-se o modelo linear da suspensão semi-ativa, equação (24), com os valores da tabela 1. A força de controle semi-ativa é gerada por um amortecedor MR modelado por Bouc-Wen modificado, cujas propriedades assumem os valores da tabela 2. O esquema da montagem deste sistema no Simulink é mostrado na figura 35.

O diagrama de blocos do amortecedor MR com o modelo Bouc-Wen modificado já foi ilustrado na figura 15. O bloco “Grampeamento” implementa o algoritmo de controle grampeado, equação (23), através de um código do Matlab embarcado no Simulink, figura 36.

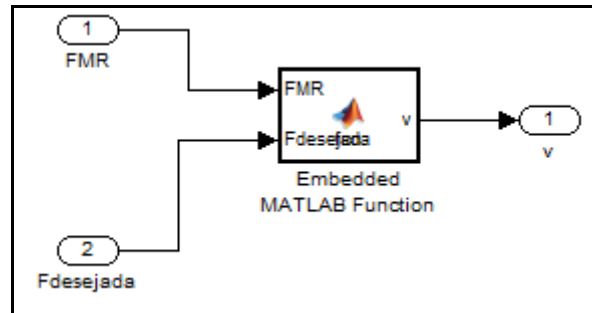
Este código é compilado antes do início das simulações e pode ser traduzido da seguinte forma:

$$v = \begin{cases} 2 & F_{desejada} > F_{MR} \\ 0 & F_{desejada} \leq F_{MR} \end{cases} \text{ se } \text{sgn}(F_{desejada}) = \text{sgn}(F_{MR}) \quad (122)$$

$$v = 0 \quad \text{se } \text{sgn}(F_{desejada}) \neq \text{sgn}(F_{MR})$$

onde $F_{desejada}$ é a força gerada pelo controlador, F_{MR} é a força produzida pelo amortecedor MR, e v é a voltagem aplicada no amortecedor MR. O bloco “Eliminador de erro”, figura 35, implementa um teste condicional que deixa passar valores de força do amortecedor MR acima de um determinado valor. Se caso o valor desta força for menor, em valor absoluto, que o valor estipulado, então a saída deste bloco é zero. Este procedimento elimina variações na força devido a erros números.

Figura 36 – Bloco “Grampeamento” com a função embarcada.

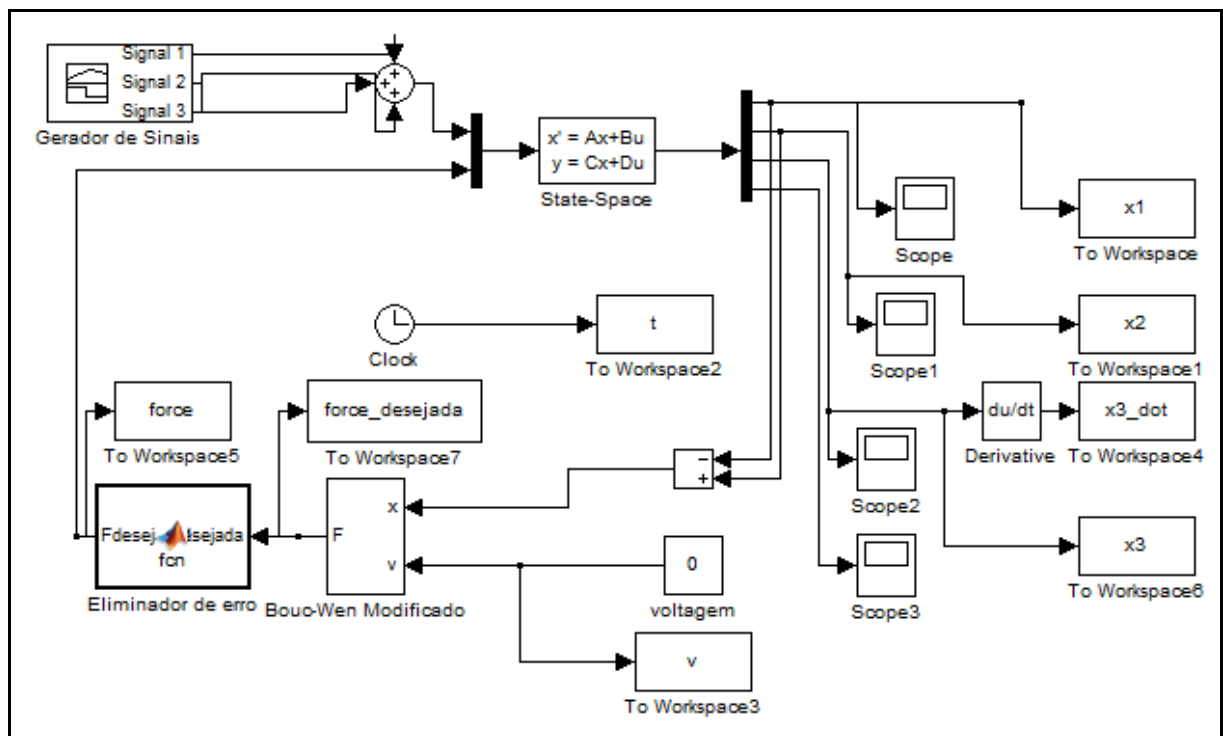


Fonte: próprio autor.

4.1 Controle Passivo

O controle passivo foi implementado para servir de base de comparação para os demais tipos de controles. Neste tipo de controle não existe um controlador e a voltagem enviada ao amortecedor MR é mantida constante durante toda a simulação como mostra o diagrama de blocos na figura 37. Duas simulações de controle passivo foram feitas: a primeira com a máxima voltagem que pode ser enviada ao amortecedor, ou seja, 2V, e a segunda com 0V.

Figura 37 – Diagrama de blocos no Simulink do controle passivo



Fonte: próprio autor.

As figuras 38 e 39 ilustram o comportamento, respectivamente, das variáveis x_2 e \dot{x}_3 .

Figura 38 – Comportamento do deslocamento x_2 em relação ao tempo.

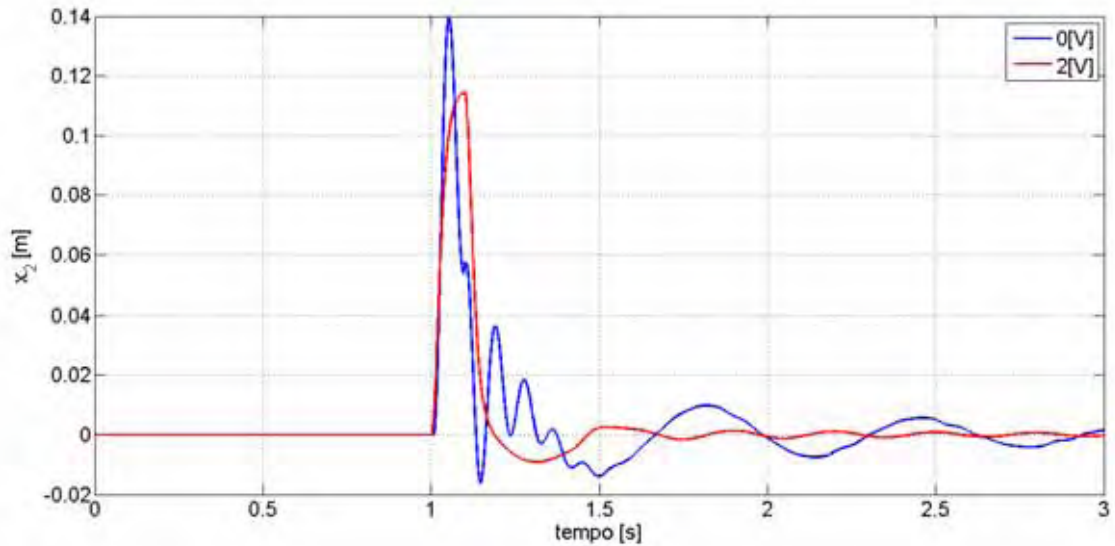
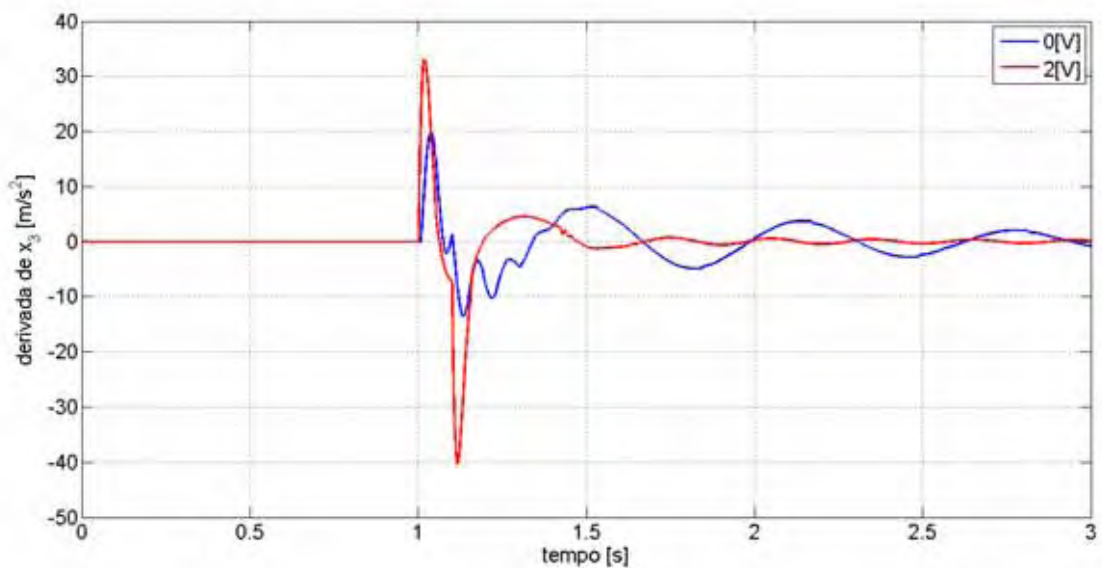


Figura 39 – Comportamento da aceleração \ddot{x}_3 em relação ao tempo.



Nota-se pelas figuras 38 e 39 que o controle passivo com nenhuma voltagem fornecida ao amortecedor MR não consegue atenuar a vibração tão bem quanto o controle passivo com a voltagem em 2V (PASCHOAL, 2011). Em contrapartida, o controle em 2V atinge picos mais elevados na aceleração da massa não amortecida, figura 39, prejudicando o conforto. A tabela 5 fornece mais informações sobre estas variáveis. O valor AR de x_2 , representando o desempenho do veículo, obteve um decréscimo de 26,56%, em relação ao controle passivo em 0 V, quando a voltagem sobe para 2V melhorando o desempenho do veículo. O conforto do

passageiro também melhora, pois houve um decréscimo de 30% no valor AR de \dot{x}_3 . Apesar do controle passivo em 2V apresentar melhoras, o consumo de energia é muito elevado e existem rápidos momentos onde se sente um grande desconforto, como os pontos de picos. Assim o objetivo dos controladores semi-ativos projetados nesse trabalho visam diminuir esses valores AR mantendo-se um equilíbrio entre conforto e desempenho.

Tabela 5 – Valores AR em dois casos de controle passivo.

Voltagem	AR de \dot{x}_3	AR de x_2
0 [V]	6.2240	0.0192
2 [V]	4.3568	0.0141

4.2 Controle H_∞ por realimentação de estados

Para o cálculo do ganho do controlador \mathbf{K} que minimiza a norma H_∞ utilizou-se um *toolbox* do Matlab® de otimização convexa para solucionar as LMIs dadas pelo LEMA 1. O controlador calculado foi:

$$\mathbf{K} = [0.3998 \quad -0.3989 \quad -1.7803 \quad 0] * 10^5 \quad (123)$$

As respostas transitórias das variáveis x_2 , \dot{x}_3 e v são mostradas, respectivamente nas figuras 40, 41 e 42.

Figura 40 – Comportamento de x_2 no controle utilizando a norma H_∞ .

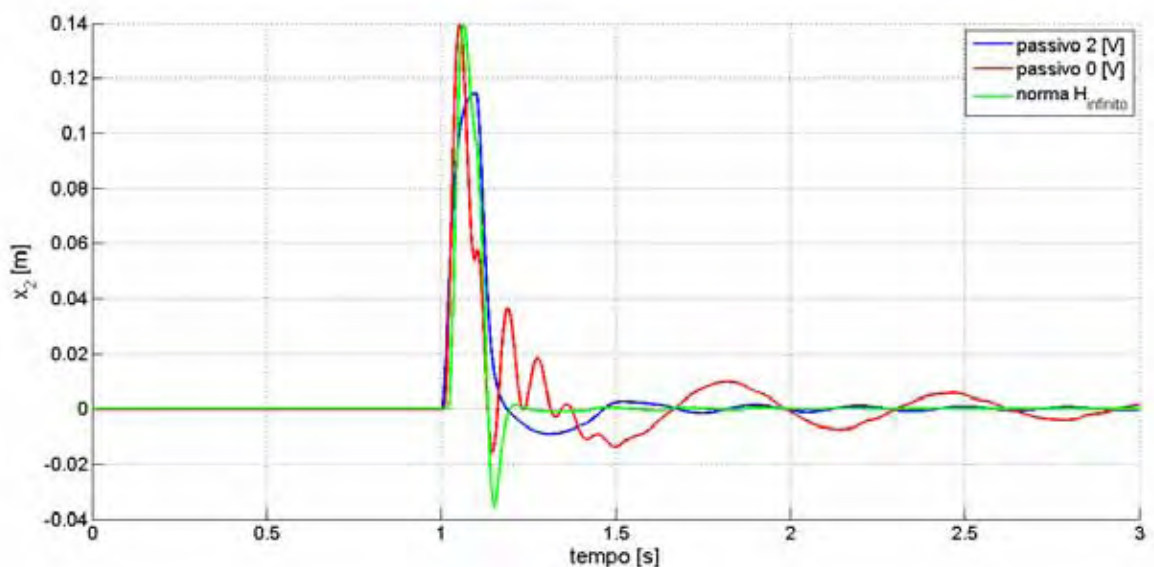


Figura 41 – Comportamento de \dot{x}_3 no controle utilizando a norma H_∞ .

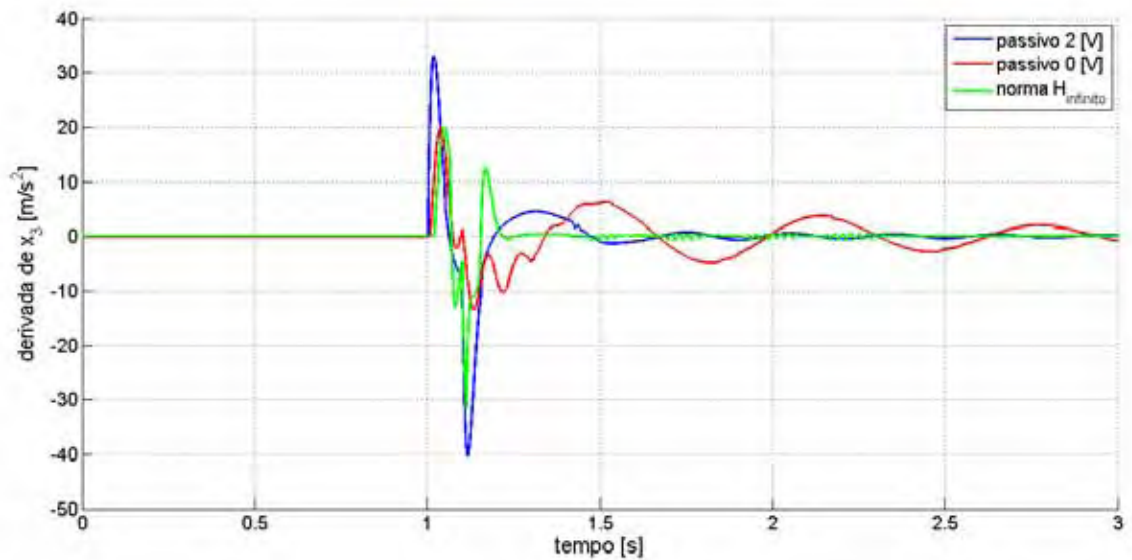
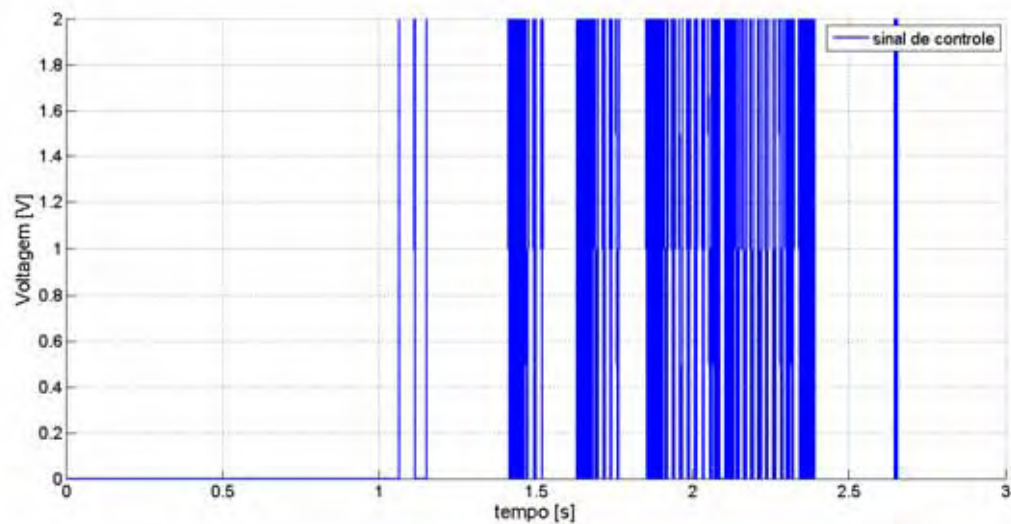


Figura 42 – Comportamento da voltagem v enviada ao amortecedor no controle utilizando a norma H_∞ .



Observa-se pelas figuras 40 e 41 que o controle utilizando a norma H_∞ atenuou muito bem as vibrações e se saiu melhor que os controles passivos. Entretanto, o deslocamento do conjunto da roda, figura 40, apresentou um pico elevado tão grande quanto o controle passivo em 0V, que prejudica o desempenho do carro. A tabela 6 a seguir qualifica melhor estas variáveis: apesar de haver um pico na aceleração da massa amortecida, houve em geral uma redução do valor desta em relação ao controle passivo em 2V, contribuindo para a redução do

valor AR de \dot{x}_3 . O desempenho do carro também melhorou representado por um decréscimo de 43,75% no valor AR de x_2 . E uma redução de quase 50% é observada no consumo de energia em relação ao controle passivo em 2V.

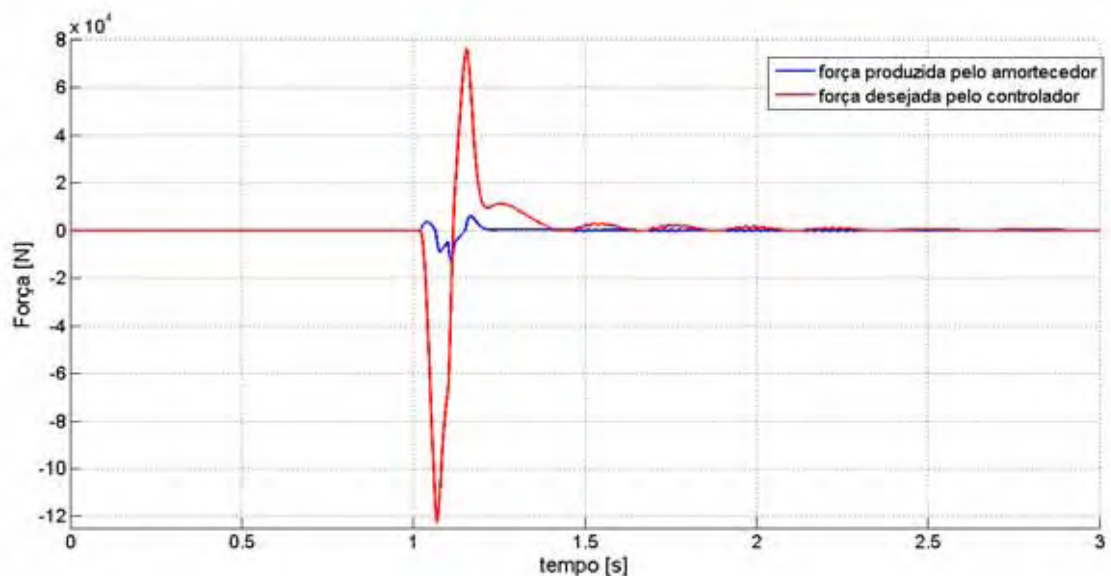
Tabela 6 – Valores AR no controle passivo e no controle utilizando a norma H_∞

Controle	AR de \dot{x}_3	AR de x_2	AR de v
Controle passivo 0 [V]	6.2240	0.0192	0
Controle passivo 2 [V]	4.3568	0.0141	6
Controle norma H_∞	2.3959	0.0108	2.9949

Fonte: próprio autor

É interessante verificar se a força calculada, ou força desejada pelo controlador é a mesma que a força fornecida pelo amortecedor MR. A figura 43 ilustra isso. Através dessa figura nota-se que a força que o controlador precisa exercer é praticamente 10^4 vezes maior que a força que o amortecedor fornece. Isso ocorre devido ao algoritmo de grampeamento que pode fornecer uma voltagem de no máximo 2V.

Figura 43 – Força desejada pelo controlador e a força produzida pelo amortecedor no controle com norma H_∞ .



Em geral, a performance do controlador H_∞ apresentou o melhor índice para o conforto do passageiro e para o desempenho do carro. O próximo tópico analisará se o controle minimizando a norma H_2 obterá melhores resultados.

4.3 Controle H_2 por realimentação de estados

Para o cálculo do ganho do controlador \mathbf{K} que minimiza a norma H_2 também foi utilizado um *toolbox* do Matlab® de otimização convexa para solucionar as LMIs dadas pelo LEMA 3. O controlador calculado foi:

$$\mathbf{K} = [3.9702 \quad -3.4906 \quad -1.1357 \quad 0.0398] * 10^4 \quad (124)$$

As respostas transitórias das variáveis x_2 , \dot{x}_3 e v são mostradas, respectivamente nas figuras 44, 45 e 46.

Figura 44 – Comportamento de x_2 no controle utilizando a norma H_2 .

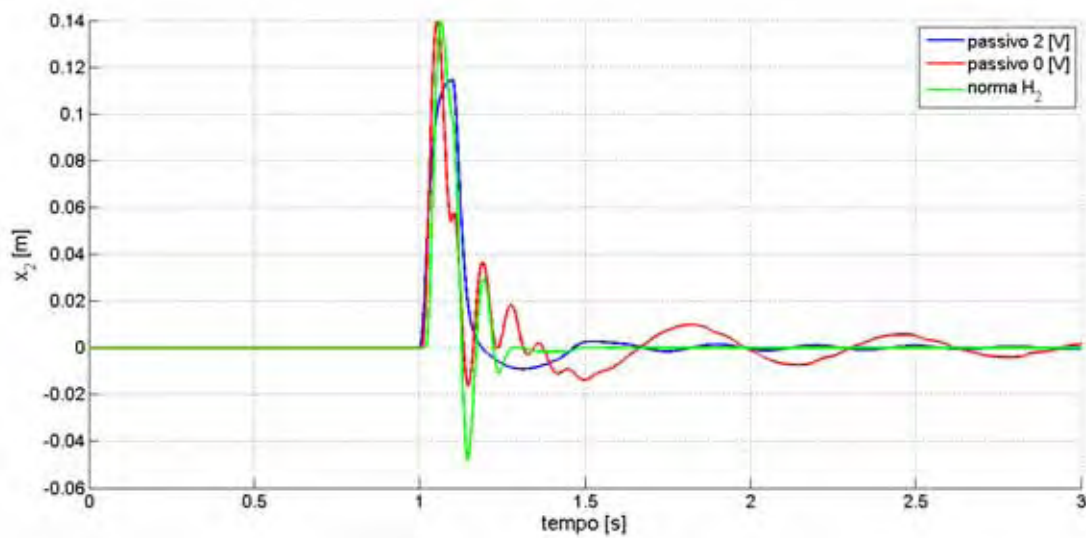


Figura 45 – Comportamento de \dot{x}_3 no controle utilizando a norma H_∞ .

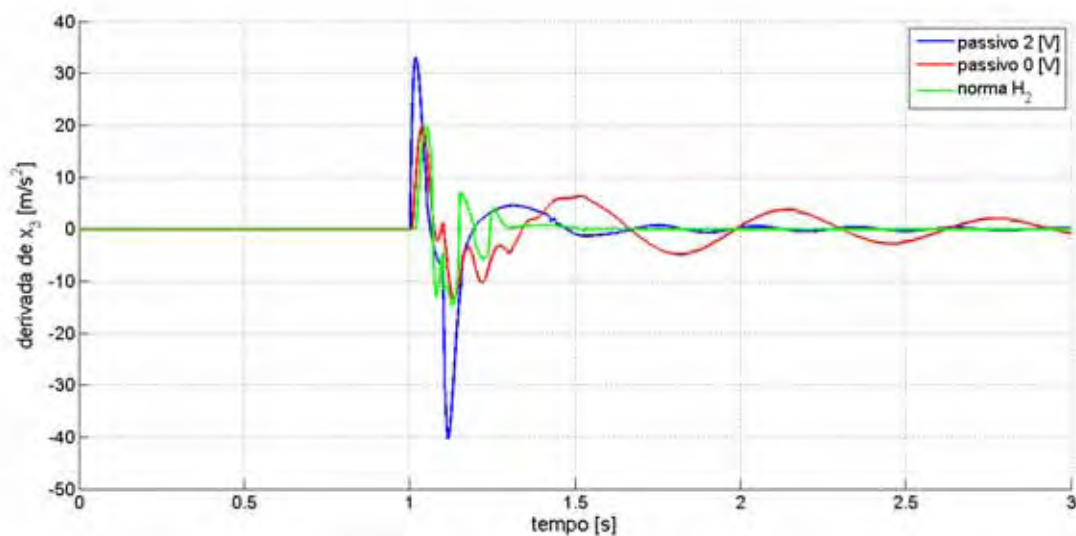
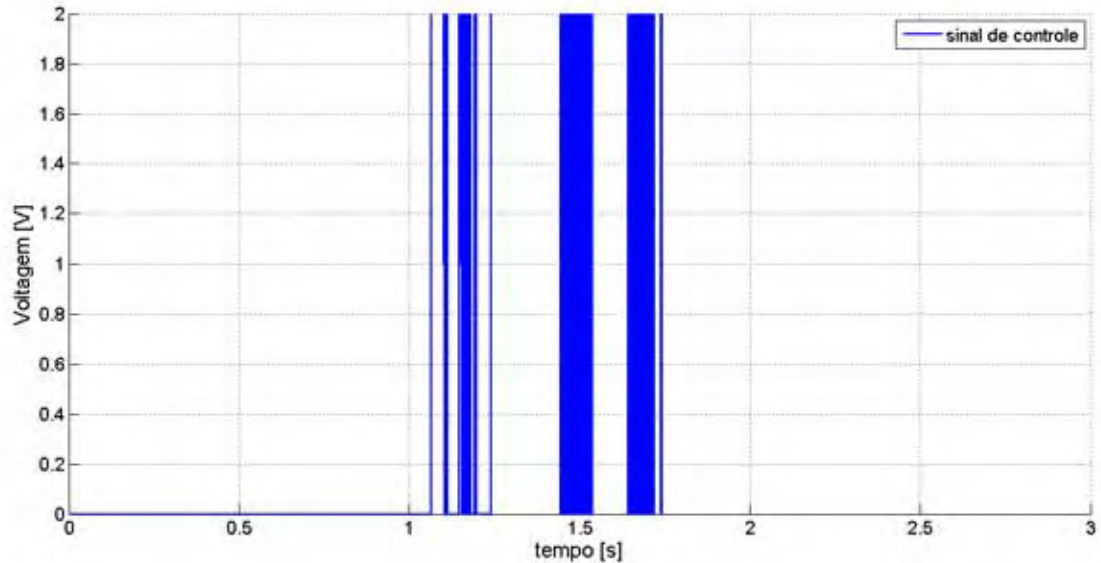


Figura 46 – Comportamento da voltagem v enviada ao amortecedor no controle utilizando a norma H_2 .

Analisando as figuras 44 e 45, observa-se que o controle H_2 atenuou bem as vibrações e o pico da aceleração da massa amortecida, figura 45, não ultrapassou a controle passivo em 2V. Portanto, espera-se que os índices de desempenho e conforto sejam os melhores. Entretanto, tais índices levam em conta todo o histórico do sinal, tabela 7. Verifica-se que houve uma melhora no conforto do passageiro e uma piora no desempenho do veículo em relação à norma H_∞ . Um aumento no consumo de energia também é verificada no controle H_2 em relação ao controle H_∞ . Observa-se que para reduzir o índice de performance, o controlador concentra seus esforços na melhoria do conforto. No caso do controle H_2 , a melhora no conforto, em valores absolutos foi de 4.0182 em relação ao controle passivo a 0V, se opondo a uma piora de somente 0.0073 no desempenho do veículo. É conveniente em trabalhos futuros alterar os pesos de cada variável que constituem o índice de performance, dando uma maior importância para o deslocamento do conjunto da roda.

Tabela 7 – Valores AR nos diversos tipos de controle incluindo o controle H_2 .

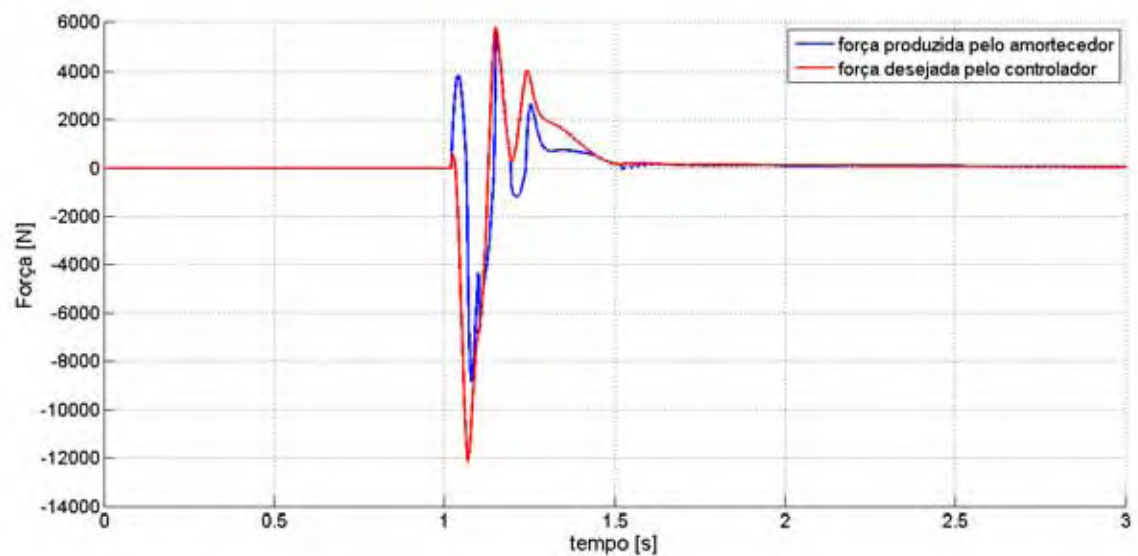
Controle	AR de \dot{x}_3	AR de x_2	AR de v
Controle passivo 0 [V]	6.2240	0.0192	0
Controle passivo 2 [V]	4.3568	0.0141	6
Controle norma H_∞	2.3959	0.0108	2.9949
Controle norma H_2	2.2058	0.0119	3.4282

Fonte: próprio autor

A figura 47 compara a força desejada pelo controlador e a força fornecida pelo amortecedor MR. É notável a aproximação dessas duas quando se compara com o controle

H_∞ . Contudo, a força calculada pelo controlador ainda possui um valor ligeiramente maior que a força fornecida pelo amortecedor, o que prejudica a performance do controlador. No tópico a seguir, o lema de Finsler é aplicado no projeto de um controlador de realimentação derivativa com o propósito de aproximar ainda mais essas duas forças e tornar o controlador mais condizente com a realidade, produzindo forças que o amortecedor MR seja capaz de fornecer.

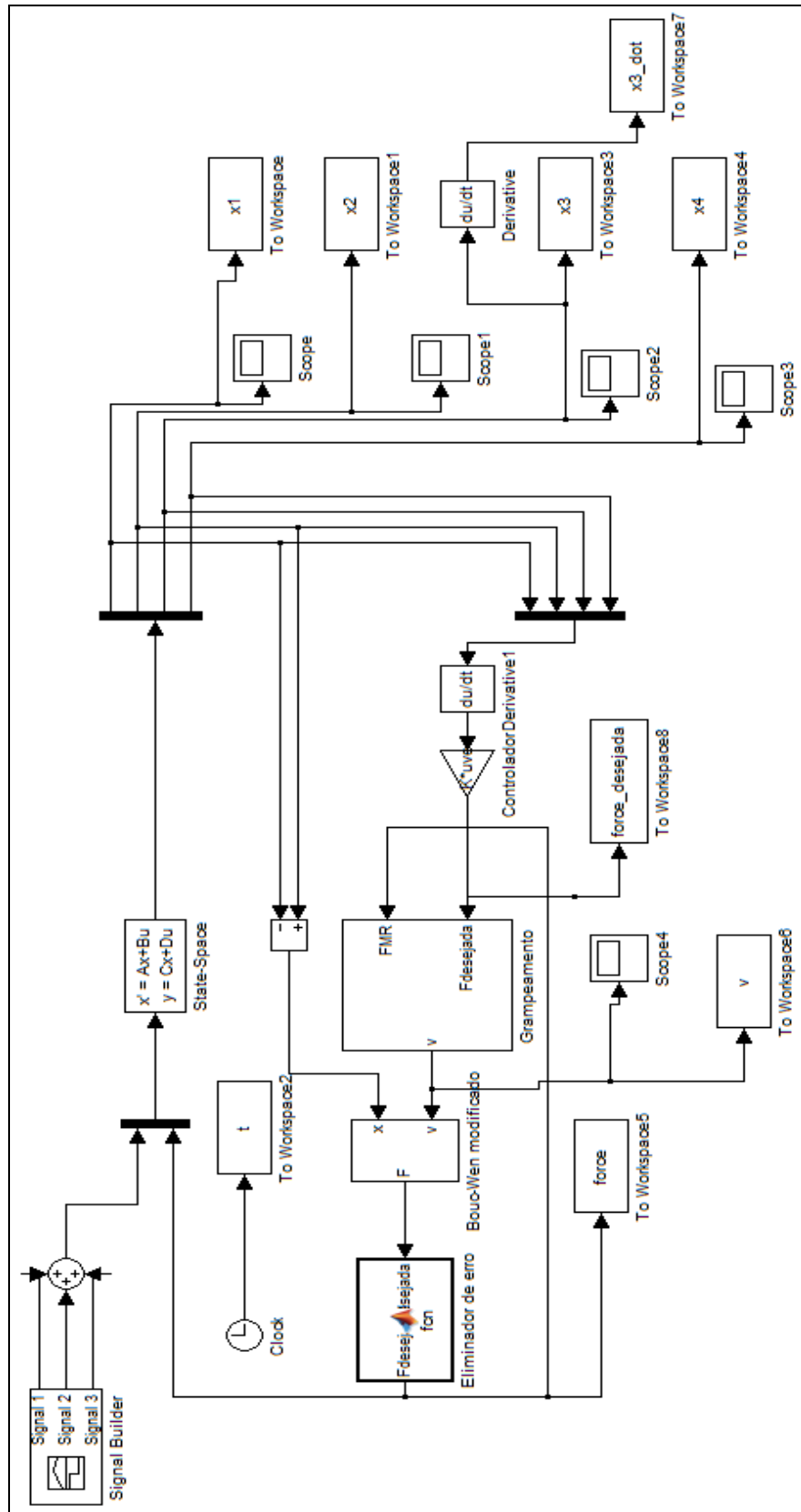
Figura 47 – Força desejada pelo controlador e a força produzida pelo amortecedor no controle com norma H_2 .



4.4 Controle utilizando o lema de Finsler por realimentação derivativa

A figura 48 a seguir mostra o diagrama de blocos implementado no *Simulink* do Matlab® do sistema de controle com realimentação derivativa.

Figura 48 – Diagrama de blocos no Simulink do controle derivativo



Fonte: próprio autor

Novamente, o cálculo do ganho do controlador \mathbf{K} foi feito utilizando um *toolbox* de otimização convexa para resolver o **LEMA 7**. O controlador obtido é o seguinte:

$$\mathbf{K} = [0.7844 \quad -4.4760 \quad 0.0070 \quad -0.0006] * 10^3 \quad (125)$$

A força desejada pelo controlador e a força fornecida pelo amortecedor MR são ilustradas na figura 49 e a voltagem enviada ao amortecedor na figura 50 .

Figura 49 – Força desejada pelo controlador e a força produzida pelo amortecedor no controle utilizando Finsler.

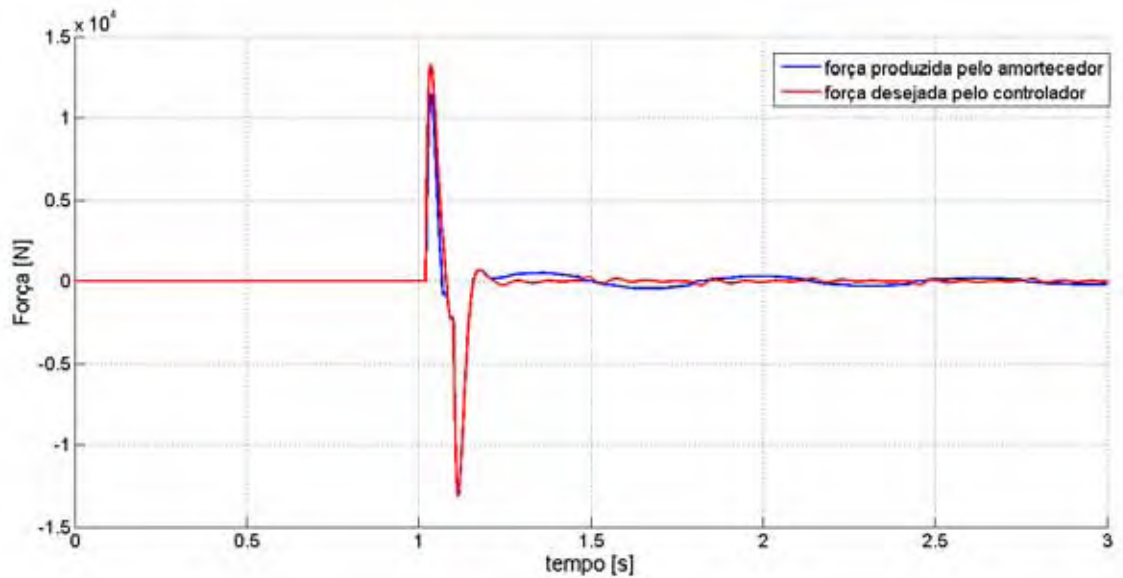
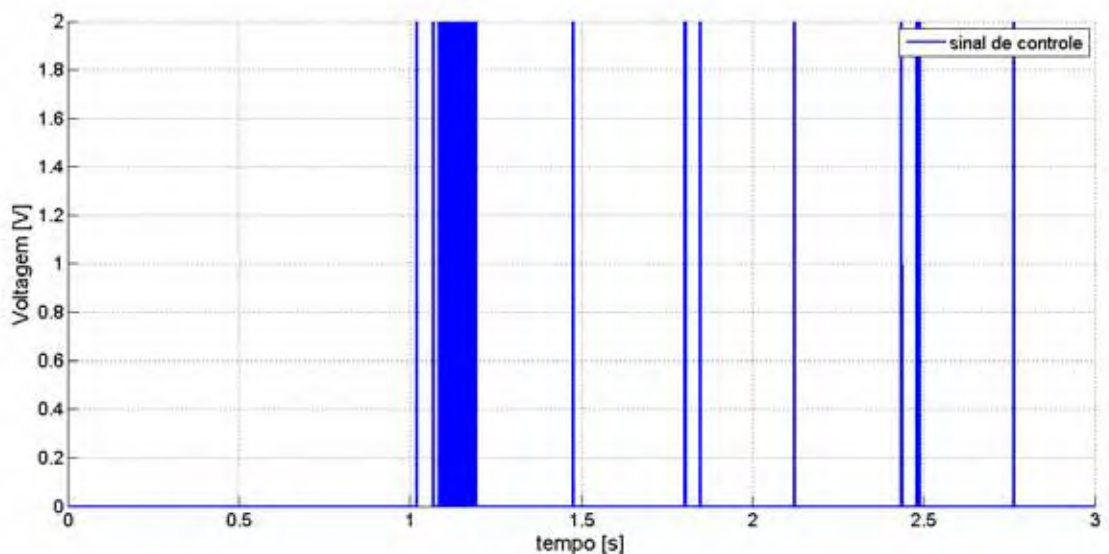


Figura 50 – Comportamento da voltagem v enviada ao amortecedor no controle utilizando Finsler.



Observando a figura 50 , nota-se que o consumo de energia foi menor que os outros controladores, a exceção do passivo em 2V, pois houve poucos momentos em que a voltagem

adquiriu 2V. Pela figura 49, percebe-se que a força calculada pelo controlador praticamente se equipara com a força produzida pelo amortecedor, que foi o objetivo desejado ao se aplicar o lema de Finsler. O principal objetivo, entretanto, é verificar as respostas transitórias das variáveis x_2 e \dot{x}_3 , as quais são mostradas nas figuras 51 e 52 a seguir.

Figura 51 – Comportamento de x_2 no controle utilizando Finsler.

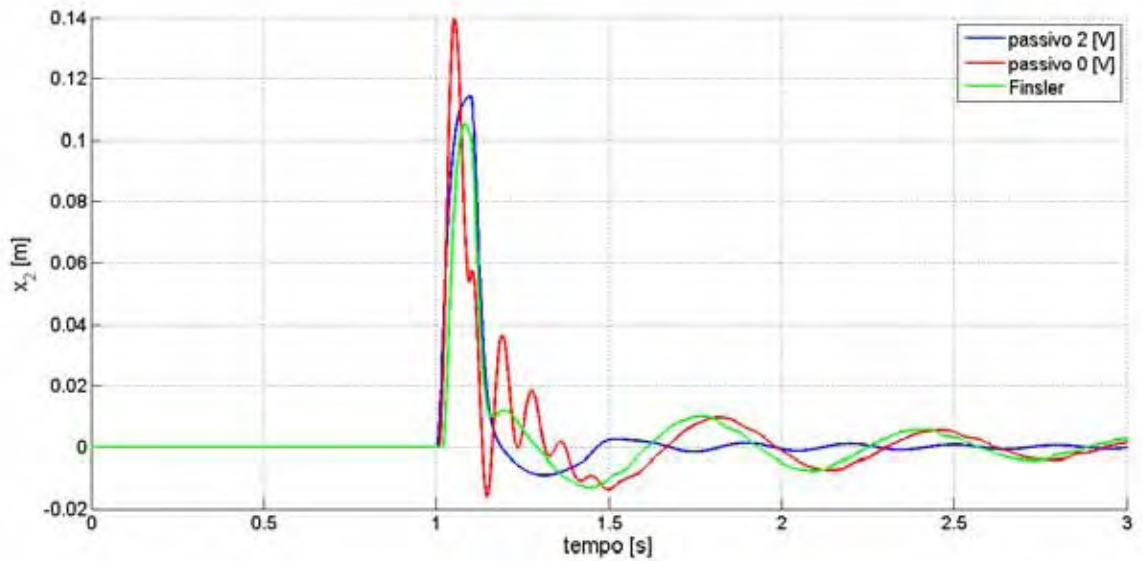
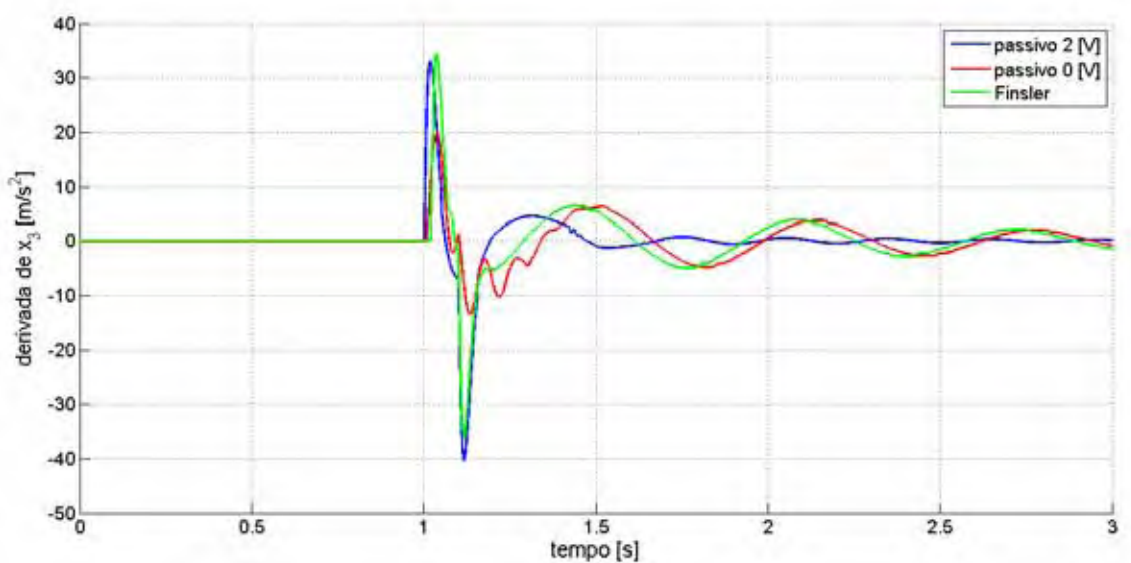


Figura 52 – Comportamento de \dot{x}_3 no controle utilizando Finsler.



Apesar do controle derivativo utilizando Finsler ter conseguido equiparar as forças produzidas pelo controlador e pelo amortecedor, este controle não foi muito eficaz em atenuar

as vibrações como mostra as figuras 51 e 52. A tabela 8 prova que a sensação de desconforto (valor AR de \dot{x}_3) é a pior de todos os casos estudados quando se usa esse tipo de controle derivativo. Já o índice de desempenho apresentou um valor ligeiramente melhor que o controle passivo em 0V com uma queda de 7,29%.

Tabela 8 – Valores RMS nos diversos tipos de controle incluindo o controle derivativo abordando Finsler

Controle	AR de \dot{x}_3	AR de x_2	AR de v
Controle passivo 0 [V]	6.2240	0.0192	0
Controle passivo 2 [V]	4.3568	0.0141	6
Controle norma H_∞	2.3959	0.0108	2.9949
Controle norma H_2	2.2058	0.0119	3.4282
Controle derivativo (Finsler)	7.1683	0.0178	0.2075

Fonte: próprio autor

4.5 Controle por Lógica Nebulosa otimizada por Algoritmo Genético

O Algoritmo Genético pode facilitar o projeto de um controlador nebuloso automatizando todo o processo, dessa forma é considerado como o algoritmo de otimização preferido para problemas que envolvem lógica nebulosa (GIRON-SIERRA; ORTEGA, 2002). Existem inúmeras maneiras de se combinar lógica nebulosa e algoritmo genético. CORDON et al., (1995) publicaram uma lista com 345 artigos de pesquisa relacionados a este tópico. Basicamente existem dois enfoques de otimização envolvendo lógica nebulosa: pode-se otimizar o controlador nebuloso, ou pode-se otimizar a lógica nebulosa responsável por modelar a planta. No primeiro caso, as primeiras contribuições foram feitas por Thrift (1991) e um dos exemplos é o problema de encontro de um satélite. No segundo caso o livro de Babuska (1998) é um bom guia para se estudar este tipo de problema. Carmignani et al. (2004) aplicaram o algoritmo genético para otimizar as regras de um controlador nebuloso, que calcula a corrente elétrica necessária para alimentar uma bobina. Esta gera um campo magnético ao redor do fluido magnetoreológico alterando sua viscosidade aparente e reduzindo a vibração de um rotor.

Neste trabalho o algoritmo genético é utilizado para otimizar somente o controlador nebuloso. Existem várias formas de se fazer isso. Pode-se otimizar somente as regras, como no trabalho de Carmignani et al. (2004), ou somente os intervalos das funções de pertinência, ou ambos. Neste trabalho, optou-se por otimizar tanto as regras do controlador nebuloso quanto o intervalo das funções de pertinência.

O software Matlab® possui os *toolboxes* de algoritmo genético e de lógica nebulosa com interfaces gráficas. No entanto, a combinação dos dois fica mais fácil se for usada uma programação por linhas de comando. Assim todo o controlador é projetado utilizando linhas de comando ao invés da interface gráfica. O método de Sugeno foi utilizado devido, principalmente à sua eficiência computacional e, ao seu bom funcionamento quando aliado com técnicas de otimização. A tabela 9 descreve os principais comandos para montar um controlador nebuloso por linha de comando.

Tabela 9 – Principais comandos utilizados para se projetar o controlador nebuloso.

COMANDO	EXEMPLO	DESCRIÇÃO
<code>newfis()</code>	<code>a = newfis('nebuloso_opt')</code>	Cria uma estrutura <i>.fis</i> com todos os dados do controlador nebuloso
<code>.type</code>	<code>a.type = 'sugeno'</code>	Escolhe o método a ser utilizado: Sugeno ou Mamdani
<code>.defuzzMethod</code>	<code>a.defuzzMethod = 'centroid'</code>	Configura o método de desnebulização
<code>.input().name</code>	<code>a.input(1).name = 'deslocamento'</code>	Adiciona e nomeia uma entrada
<code>.input().range</code>	<code>a.input(1).range = [-0.8 0.8]</code>	Configura o intervalo do universo de discurso de uma entrada
<code>.input().mf().name</code>	<code>a.input(1).mf(1).name = 'NG'</code>	Nomeia uma função de pertinência para uma entrada
<code>.input().mf().type</code>	<code>a.input(1).mf(1).type = 'trimf'</code>	Configura o tipo de uma função de pertinência para uma entrada
<code>.input().mf().params</code>	<code>a.input(1).mf(1).params = [-0.8 -0.5 -0.3];</code>	Configura o intervalo de uma função de pertinência para uma

		entrada
<code>.output().name</code>	<code>a.output(1).range = [-3000 3000]</code>	Adiciona e nomeia uma saída
<code>.output().range</code>	<code>a.output(1).range = [-3000 3000]</code>	Configura o intervalo do universo de discurso de uma saída
<code>.output().mf().name</code>	<code>a.output(1).mf(1).name = 'NG'</code>	Nomeia uma função de pertinência para uma saída
<code>.output().mf().type</code>	<code>a.output(1).mf(1).type = 'trimf'</code>	Configura o tipo de uma função de pertinência para uma saída
<code>.output().mf().params</code>	<code>a.output(1).mf(1).params = [666.7 -2000 666.7]</code>	Configura os parâmetros da função de pertinência para uma saída
<code>addrule()</code>	<code>addrule(a, [1 3 2 0.5 2])</code>	Adiciona as regras do controlador nebuloso

Fonte: próprio autor

Deve-se ter muito cuidado ao utilizar o comando `addrule()`, pois é ele quem modela as regras do controlador. No exemplo da tabela 9, a regra é representada pelo vetor linha [1 3 2 0.5 2]. Se houver m entradas para o sistema e n saídas, então as primeiras m colunas desse vetor linha representam o índice da função de pertinência associada à entrada i , onde i varia de 1 a m . As seguintes n colunas representam o índice da função de pertinência associada a saída j , onde j varia de 1 a n . A coluna $m+n+1$ representa o peso da regra e a coluna $m+n+2$ representa o conectivo usado na regra: o valor 1 representa o conectivo *e*, e o valor 2 representa o conectivo *ou*. No exemplo da tabela 9, supondo que o sistema possua duas entradas e uma saída, o vetor linha [1 3 2 0.5 2] representa a seguinte regra:

“Se (entrada 1) é (função de pertinência 1) **ou** (entrada 2) é (função de pertinência 3), então (saída 1) é (função de pertinência 2).” O peso da regra é 0.5.

A fim de otimizar o controlador nebuloso, as regras, os pesos e os parâmetros das funções de pertinência passam a ser variáveis, ou as coordenadas ou os genes para a otimização, no total há 41 parâmetros a serem otimizados. Assim, cada indivíduo carrega as

características de um controlador, que serão passadas para a função objetivo. Esta, por sua vez realiza três operações na seguinte sequência:

1º) com os parâmetros de entrada a função objetivo monta um controlador nebuloso, ou seja, gera um arquivo no formato *.fis*;

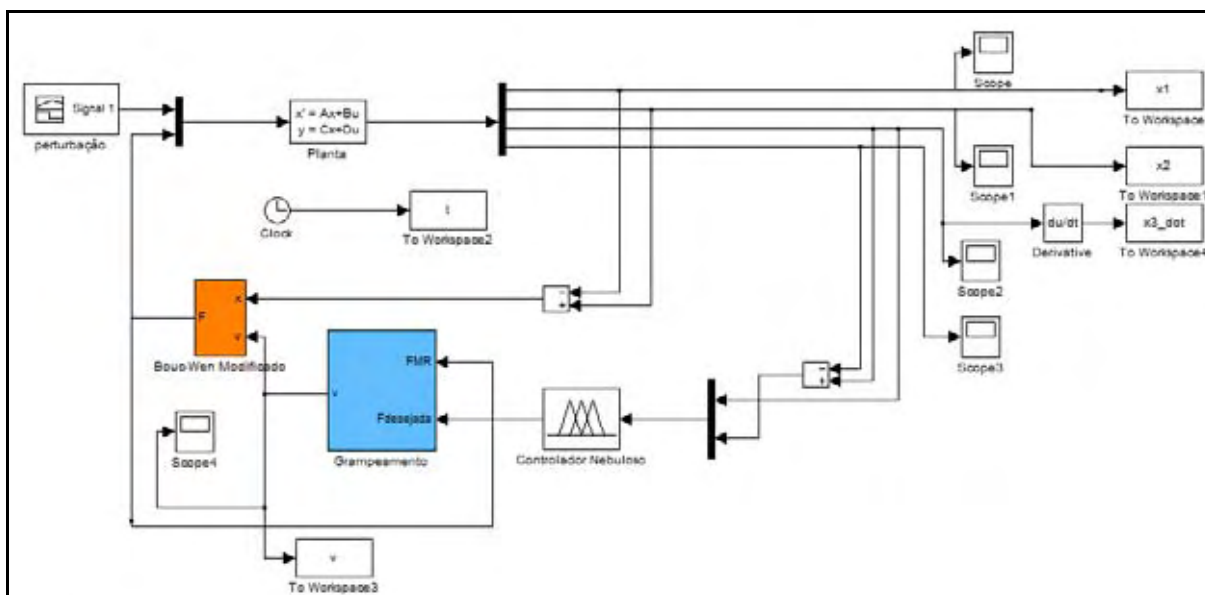
2º) o arquivo *.fis* é carregado no bloco do controlador nebuloso do diagrama de blocos do *Simulink*, figura 53, e uma chamada para a simulação acontece pela própria função objetivo. O diagrama de blocos do *Simulink* calcula a resposta do sistema do modelo linear de um quarto de carro com o modelo de Bouc-Wen modificado, dada uma entrada definida pela equação (121). A voltagem enviada ao amortecedor MR é determinada pelo controlador nebuloso. Os parâmetros da simulação são os mesmos definidos no início deste capítulo;

3º) após realizar a simulação, o índice de performance, que será o valor retornado pela função objetivo, é calculado através da equação (126).

$$IP = e^{\frac{1}{2} \left(\frac{AR_0}{AR_0^*} + \zeta \frac{AR_1}{AR_1^*} \right)} \quad (126)$$

onde IP é o índice de performance calculado, AR_0^* e AR_1^* representam, respectivamente, o valor AR de \dot{x}_3 e x_2 no controle passivo em 0V. AR_0 e AR_1 são os valores AR de \dot{x}_3 e x_2 respectivamente no controlador considerado. A constante ζ é o peso que possibilita equilibrar a otimização destas duas variáveis. Este índice foi adaptado do trabalho de Carmignani et al. (2004), que utiliza um índice semelhante.

Figura 53 – Diagrama de blocos do *Simulink* para avaliar o comportamento do controlador nebuloso.



Fonte: próprio autor

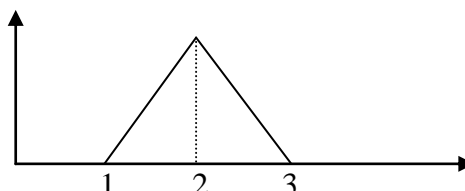
Repare que o índice de performance depende tanto da aceleração da massa amortecida quanto do deslocamento do conjunto da roda. Foi escolhido empiricamente o valor de 2 para ζ a fim de otimizar em iguais proporções o desempenho do veículo e o conforto do passageiro.

Vários cuidados devem ser tomados durante a otimização, pois na criação da população inicial e mesmo durante a atualização das gerações podem surgir genes incompatíveis. Por exemplo, supondo os seguintes genes que definem os parâmetros de uma função de pertinência triangular:

$$[1 \ 2 \ 3]$$

A função de pertinência possuirá a seguinte forma:

Figura 54 – Função de pertinência



Fonte: próprio autor

Agora se os parâmetros fossem $[2 \ 1 \ 3]$ seria impossível construir essa função de pertinência uma vez que a coordenada do pico deve estar entre as duas coordenadas do extremo do triângulo.

O toolbox de otimização do Algoritmo Genético permite que o projetista crie um ou mais indivíduos. Os outros indivíduos que faltam para completar a população inicial o algoritmo cria aleatoriamente a partir destes indivíduos previamente configurados. A fim de se construir o primeiro indivíduo, as 5 etapas de projeto do controlador nebuloso, explicadas anteriormente, devem ser executadas:

a) Definição das variáveis de entrada e saída

Na literatura existem 3 propostas para a escolha destas variáveis: 1) velocidade absoluta de m_1 e velocidade relativa entre m_1 e m_2 (DONG et al., 2010; LI et al., 2004); 2) deslocamento absoluto de m_1 e deslocamento relativo entre m_1 e m_2 (RASHID et al., 2011) e 3) velocidade e aceleração absolutas de m_1 (LI et al., 2008) Como este trabalho se trata da continuação do trabalho de Paschoal (2011), optou-se também por utilizar a proposta 1. A variável de saída utilizada é a força de controle F , que representa a força desejada que o amortecedor magnetoreológico deve produzir.

b) Construção do intervalo de valores das variáveis de entrada e saída

Os intervalos de valores que as variáveis de entrada assumiram foram os mesmos utilizados por (PASCHOAL, 2011), que se baseou observando o comportamento transitório destas mesmas variáveis quando o sistema é submetido ao controle passivo em 0 [V]. Desta forma, a velocidade absoluta de m_1 e a velocidade relativa entre m_1 e m_2 podem assumir valores nos seguintes intervalos, respectivamente: $-0.8\left[\frac{m}{s}\right] \leq x_3 \leq 0.8\left[\frac{m}{s}\right]$ e $-5\left[\frac{m}{s}\right] \leq x_3 - x_4 \leq 5\left[\frac{m}{s}\right]$. Para a variável de saída optou-se por utilizar o seguinte intervalo: $-3000[N] \leq F \leq 3000[N]$.

c) Definição do conjunto de funções de pertinência

Assim como em Paschoal(2011) o universo de discurso das variáveis de entrada foi dividido em 5 funções de pertinência triangulares: “Negativo Grande” (NG), “Negativo Baixo” (NB), “Zero” (Z), “Positivo Baixo” (PB) e “Positivo Grande” (PG). Em contrapartida, o universo de discurso da variável de saída foi dividido em 7 funções de pertinência: “Negativo Grande” (NG), “Negativo Médio” (NM), “Negativo Baixo” (NB), “Zero” (Z), “Positivo Baixo” (PB), “Positivo Médio” (PM) e “Positivo Grande” (PG). Os intervalos de cada função de pertinência serão otimizados pelo algoritmo genético, entretanto, para a criação do primeiro indivíduo os intervalos das funções de pertinência da entrada assumiram os mesmos valores de (PASCHOAL, 2011).

d) Definição da base de regras

O intuito deste trabalho é otimizar as regras via algoritmo genético. Assim a definição da base de regras é feita de maneira automática. Entretanto, como se deseja melhorar o controlador projetado por Paschoal (2011), configurou-se o primeiro indivíduo da população inicial com as mesmas regras de Paschoal (2011), figura 55. Assim o processo de otimização tomará um atalho e se iniciará a partir deste controlador.

Figura 55 – Tabela de Regras

		$x_3 - x_4$				
		<i>NG</i>	<i>NB</i>	<i>Z</i>	<i>PB</i>	<i>PG</i>
x_3	<i>NG</i>	<i>PG</i>	<i>PM</i>	<i>PB</i>	<i>Z</i>	<i>Z</i>
	<i>NB</i>	<i>PM</i>	<i>PB</i>	<i>Z</i>	<i>Z</i>	<i>Z</i>
	<i>Z</i>	<i>PB</i>	<i>Z</i>	<i>Z</i>	<i>Z</i>	<i>NB</i>
	<i>PB</i>	<i>Z</i>	<i>Z</i>	<i>Z</i>	<i>NB</i>	<i>NM</i>
	<i>PG</i>	<i>Z</i>	<i>Z</i>	<i>NB</i>	<i>NM</i>	<i>NG</i>

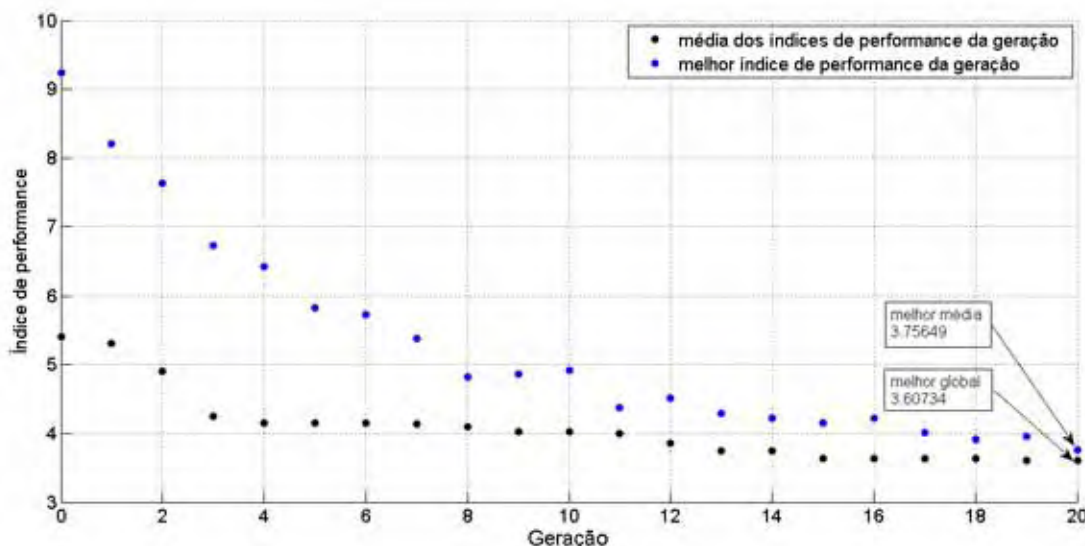
Fonte: Paschoal (2011)

e) Definição do mecanismo de inferência nebulosa

O mecanismo de inferência foi modificado para o método de Sugeno devido às vantagens citadas anteriormente. Assim, o controlador que inicializa o algoritmo de otimização não é completamente igual ao de Paschoal (2011), mas é uma escolha inicial bem aproximada. Os coeficientes das regras, ou seja, os parâmetros das funções de pertinência da saída foram escolhidos de forma empírica.

Após a criação da primeira geração a partir deste primeiro indivíduo, o algoritmo genético conduz a evolução dos indivíduos como mostra a figura 56. Nota-se que após a geração 15 mais ou menos, a evolução do melhor indivíduo não é significativa. A otimização finalizou na vigésima geração e o melhor índice de performance obtido foi de 3.60734. Dessa forma, o indivíduo correspondente a este índice será o controlador nebuloso utilizado neste trabalho.

Figura 56 – Evolução das gerações.



Para avaliar a eficiência dos controlador nebuloso realizaram-se simulações numéricas no *Simulink* de acordo com a montagem ilustrada na figura 53. O sinal $w(t)$, que representa a perturbação da pista, é determinado pela equação (121). Em todas as simulações admitiram-se condições iniciais nulas e foi adotado o método de Runge-Kutta de 4ª ordem de passo variável como método de resolução. As principais variáveis a serem analisadas são: a aceleração \ddot{x}_3 da massa amortecida m_1 , o deslocamento do conjunto da roda x_2 , a voltagem v enviada ao amortecedor MR e a força desejada pelo controlador, $F_{desejada}$, e produzida pelo amortecedor MR, F_{MR} . O algoritmo de grampeamento é o mesmo explicado pela equação (122).

4.5.1 Modelo Linear de ¼ de carro

Para o modelo linear do carro, o controlador nebuloso obtido com otimização via Algoritmo Genético é comparado primeiro com os controles passivos e depois com um controlador LQR e um controlador nebuloso do tipo Mamdani implementado por Paschoal (2011). O controlador LQR foi obtido através dos resultados também de Paschoal (2011), o ganho deste controlador é o seguinte:

$$\mathbf{K} = [0 \quad -115.85 \quad 3165.10 \quad -13.05]$$

Os resultados são mostrados nas próximas figuras. Para simplificar o texto, o controle nebuloso otimizado por algoritmo genético é citado somente como ‘nebuloso-GA’ ou “nebuloso genético”.

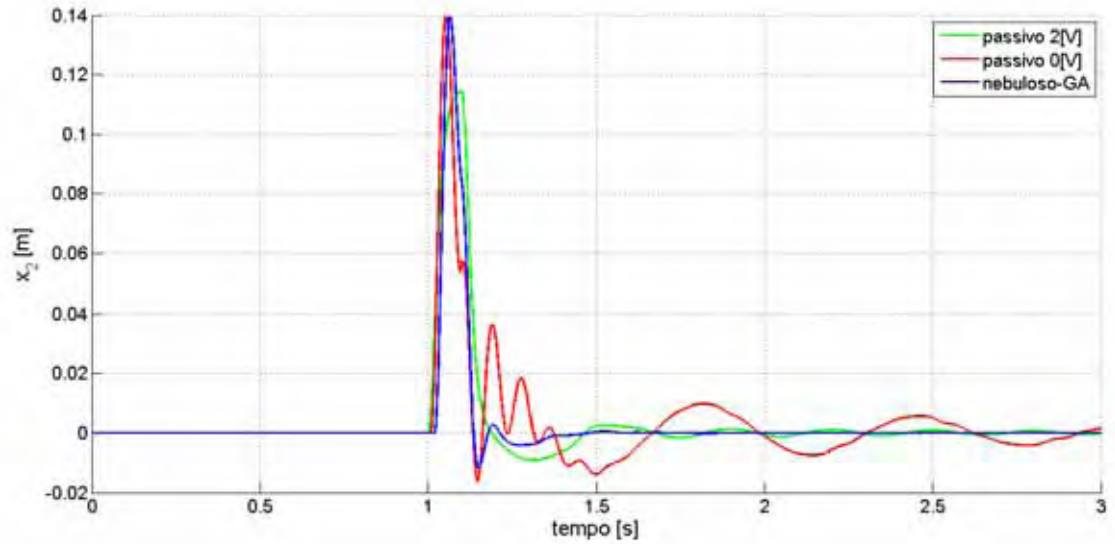
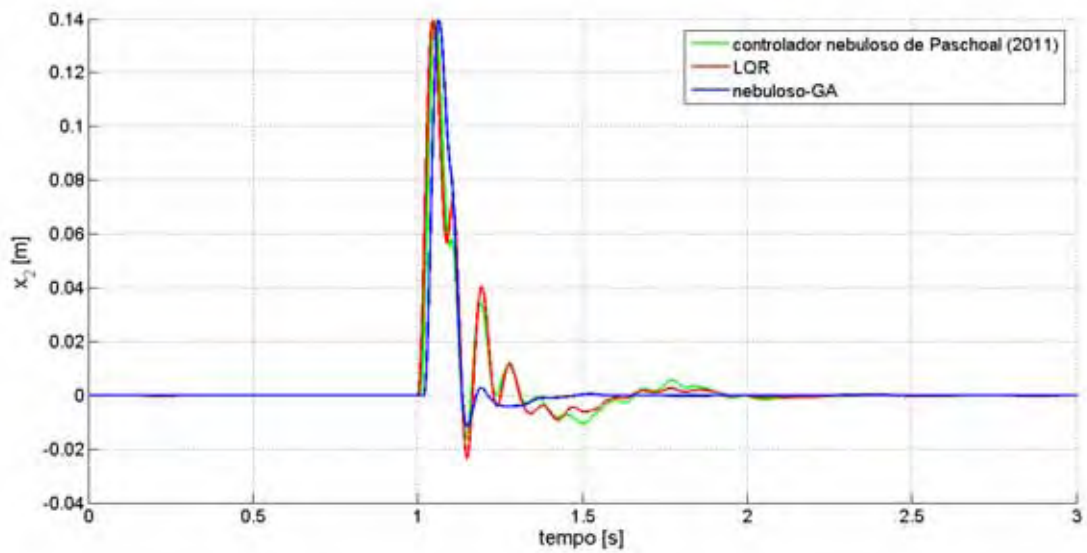
Figura 57 – Comparação do comportamento de x_2 com os controles passivos.Figura 58 – Comparação do comportamento de x_2 com outras estratégias de controle

Figura 59 – Comparação do comportamento de \dot{x}_3 com os controles passivos.

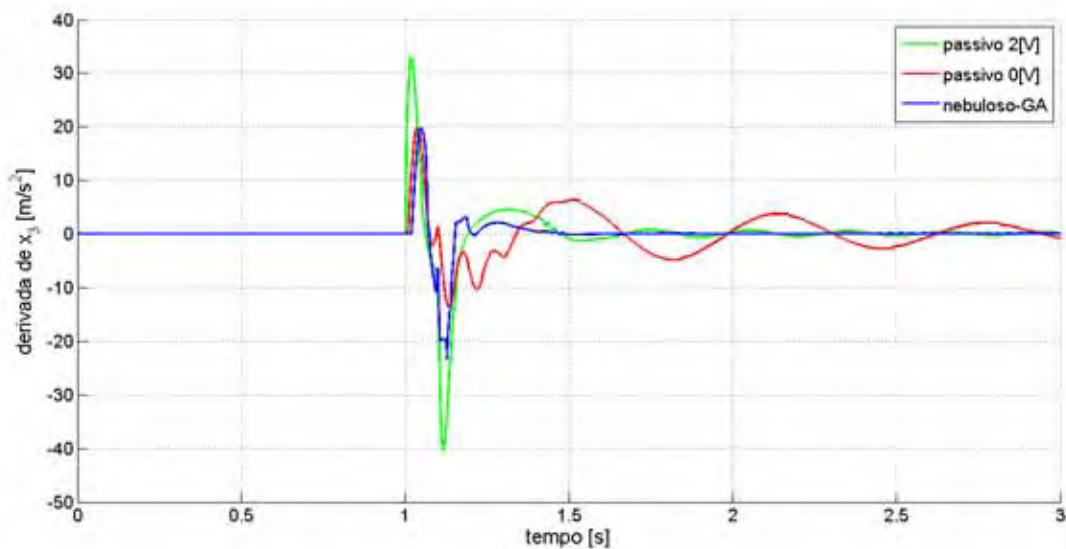


Figura 60 – Comparação do comportamento de \dot{x}_3 com as outras estratégias de controle.

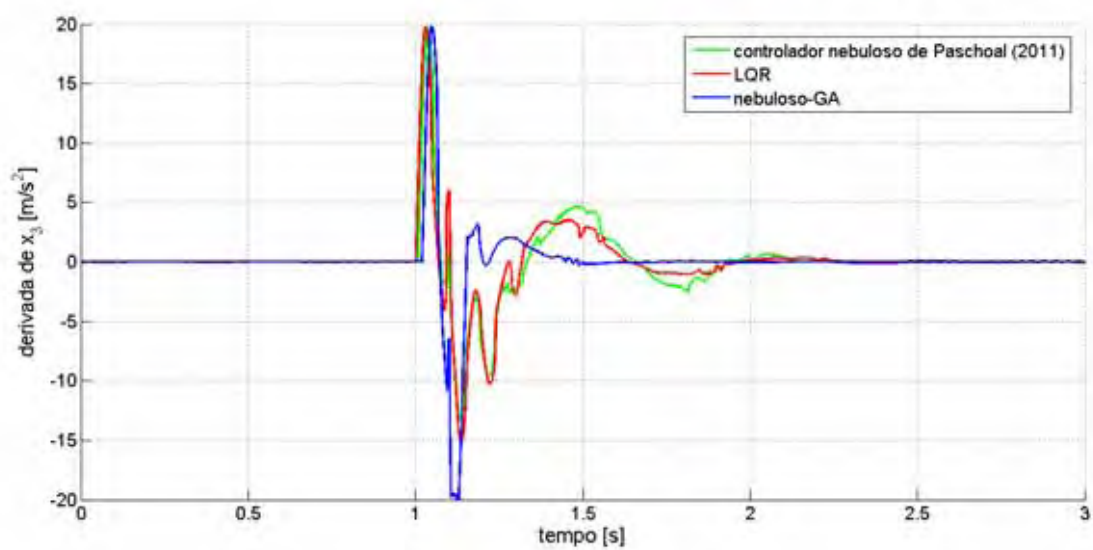


Figura 61 – Voltagem enviada ao amortecedor MR no controle semi-ativo nebuloso-GA.

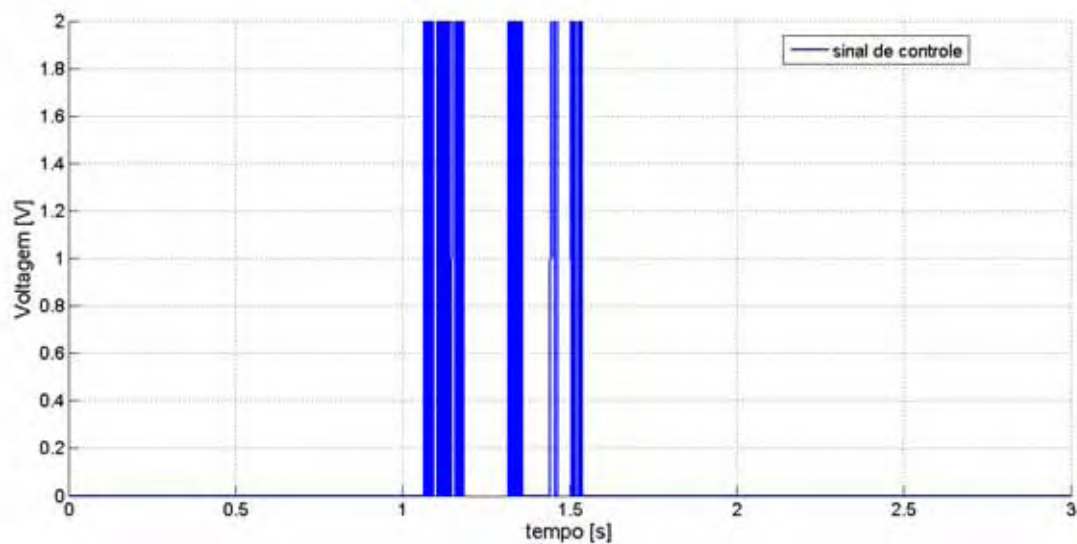
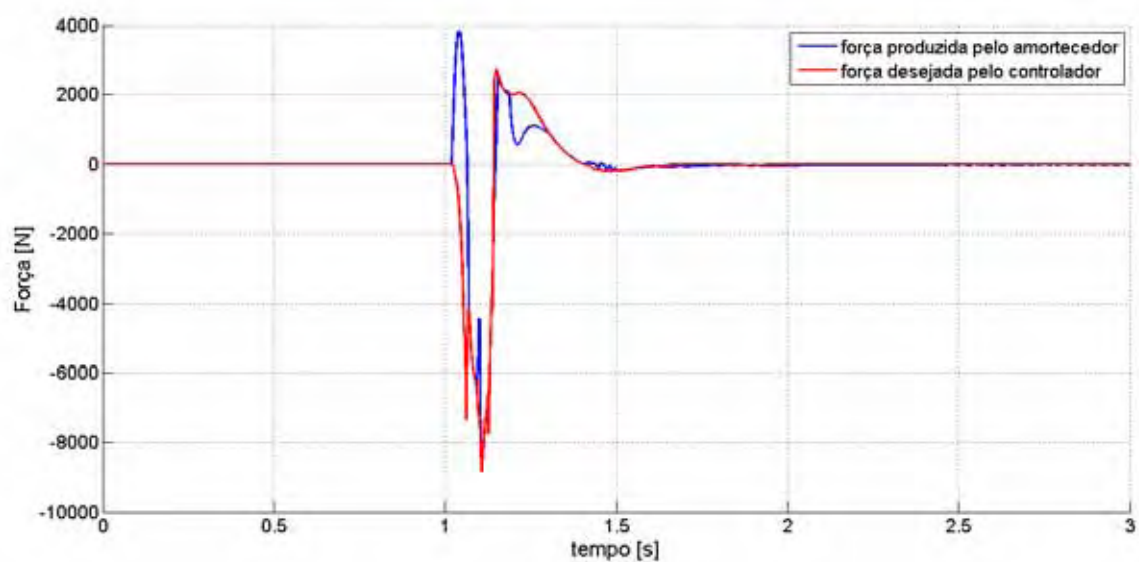


Figura 62 – Comparação entre a força produzida pelo amortecedor MR e a força calculada pelo controlador nebuloso-GA.



Com os resultados obtidos pelas figuras 57, 58, 59, 60 e 61 é possível montar a tabela 10 onde são mostrados os níveis AR, equação (120), das principais variáveis estudadas.

Tabela 10 – Valores AR de cada estratégia de controle utilizando o modelo linear de ¼ de carro.

Controle	AR de \dot{x}_3	AR de x_2	AR de v
Passivo 0[V]	6.2240	0.0192	0
Passivo 2[V]	4.3568	0.0141	6
Nebuloso de PASCHOAL (2011)	3.3618	0.0136	0.6385
LQR	3.1983	0.0144	0.5670
Nebuloso-GA	2.0765	0.0098	0.5297

Pelos resultados observa-se que o controle nebuloso-GA obteve os melhores resultados sendo a estratégia de controle que melhor alia conforto e segurança. Em relação ao controle passivo em 0V, o valor AR que caracteriza o conforto do passageiro obteve uma redução de 66,64%, e o valor AR que representa o desempenho do veículo decresceu 48,96%. A melhora na sensação de conforto pelo controle nebuloso-GA fica melhor evidenciada pela figura 59, onde é nítida a redução do pico da aceleração da massa amortecida. O nível AR da voltagem enviada ao amortecedor MR do controle nebuloso-GA também foi menor em relação aos outros controladores apresentando uma redução de 6,58% em relação ao controlador de Paschoal (2011) o que implica em uma maior economia de energia. Observando atentamente as figuras 58 e 60, nota-se que o controle nebuloso-GA consegue atenuar com maior rapidez as oscilações de \dot{x}_3 e x_2 com amplitudes menores superando até mesmo o controle LQR. Da comparação entre a força desejada pelo controlador e a força produzida pelo amortecedor MR nota-se certa equivalência, figura 62. De uma maneira geral os resultados do controlador otimizado por Algoritmo Genético apresentou expressivas melhoras em relação aos demais controladores aliando conforto, segurança e economia de energia.

Vale ressaltar que o projeto dos controladores deste trabalho parte da hipótese de que todos os estados do sistema são conhecidos. Entretanto, na prática, alguns estados não são facilmente acessíveis e a incorporação de métodos de medição de todas as variáveis pode tornar o projeto do veículo muito caro. Uma possível solução seria a incorporação de observadores de estados no projeto.

Para tornar as simulações mais próximas da realidade os controladores serão sujeitos a outro tipo de excitação $w(t)$ provocada por irregularidades na pista. As pistas consideradas

boas apresentam amplitudes menores que 0.005m, as pistas rotuladas de médias não possuem amplitudes maiores que 0.013m e as pistas ruins têm amplitudes maiores que 0.019m (BASTOW et al., 2004). Desta forma é proposta neste trabalho uma pista com amplitude máxima de 0.025m representada por uma excitação do tipo dente-de-serra com frequência de 1.5Hz, que é próxima à primeira frequência natural do sistema. Neste caso, assumiu-se um tempo de simulação de 10 segundos. As figuras seguintes ilustram os resultados do sistema com os diferentes controladores para este tipo de excitação.

Figura 63 – Comparação do comportamento de x_2 com excitação do tipo dente-de-serra.

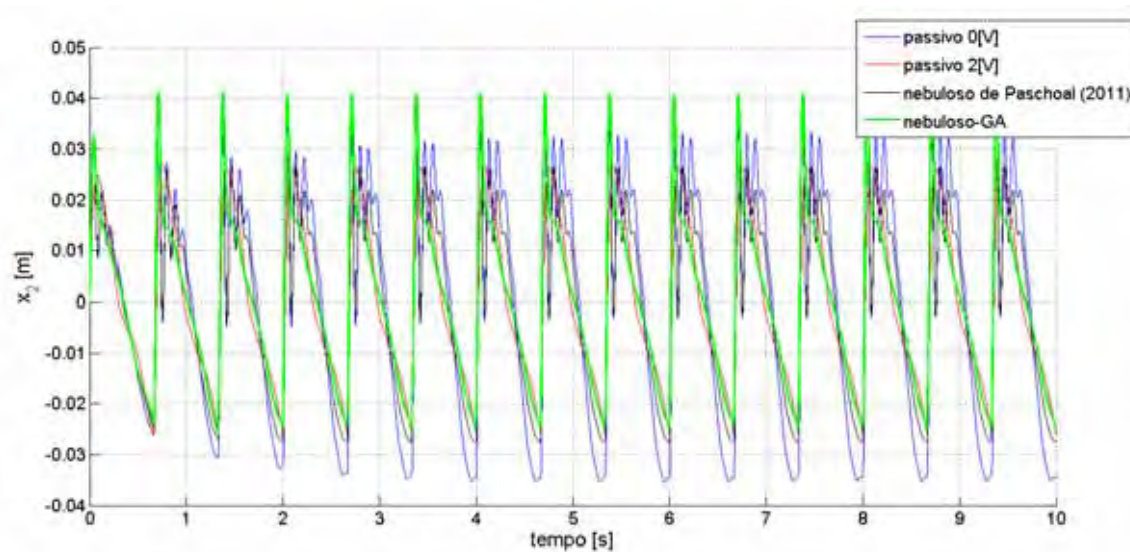


Figura 64 – Comparação do comportamento de \dot{x}_3 com excitação do tipo dente-de-serra.

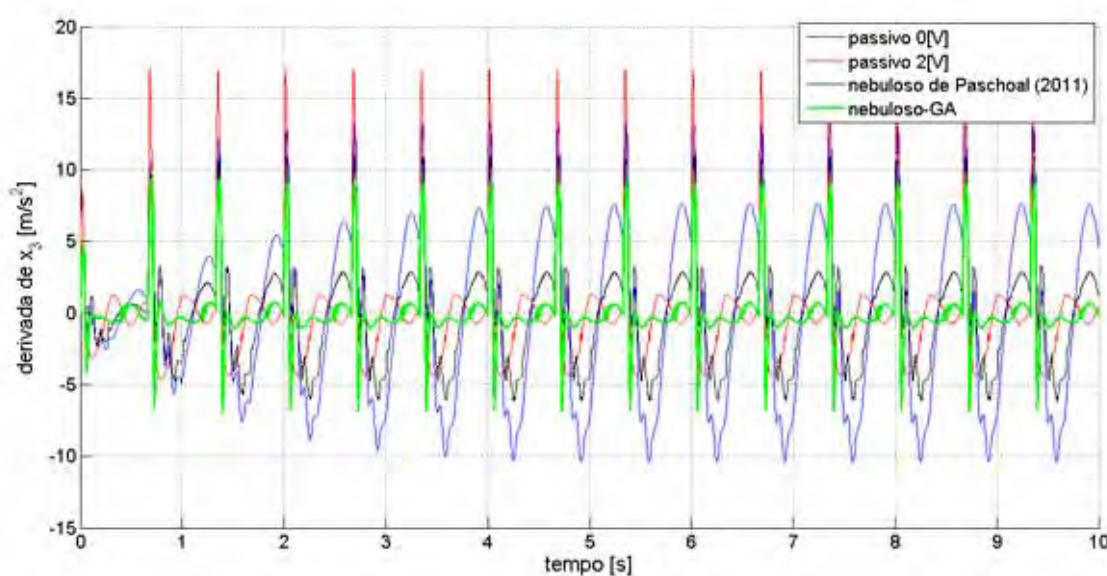


Figura 65 – Voltagem enviada ao amortecedor MR no controle semi-ativo utilizando o controle nebuloso-GA.

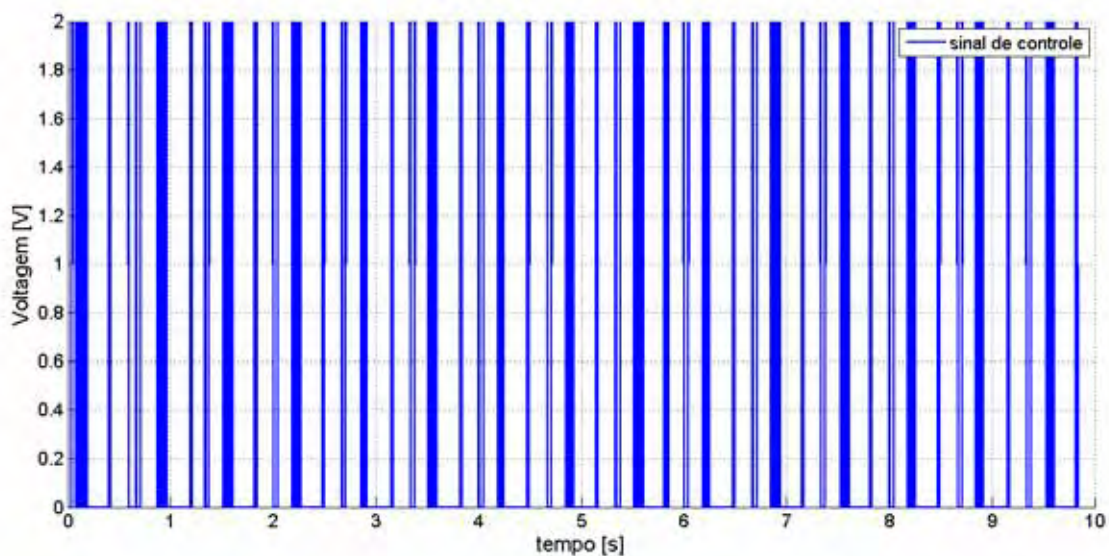
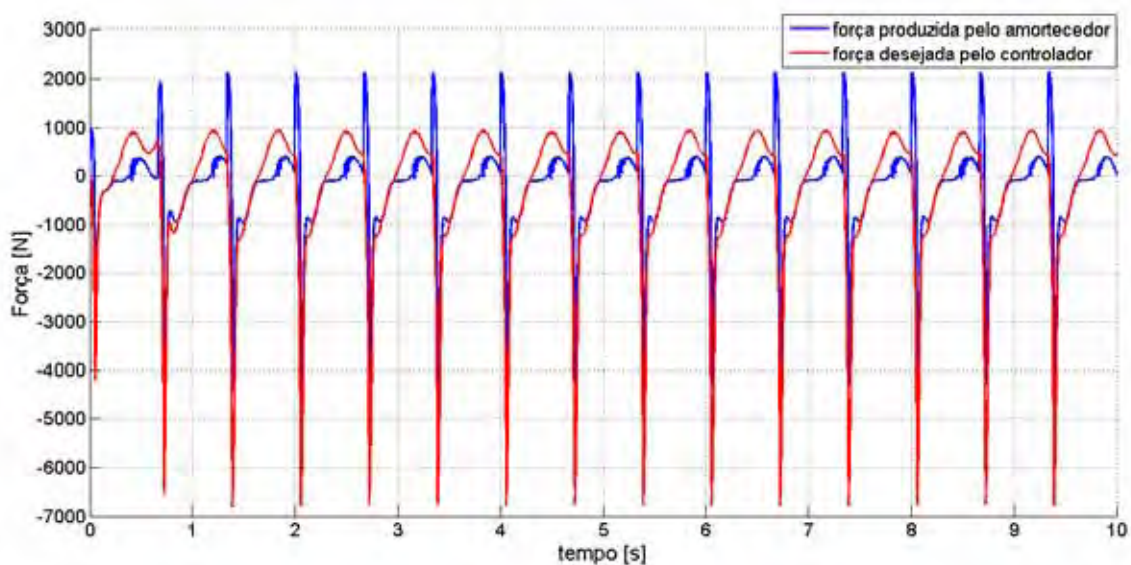


Figura 66 – Comparação entre a força produzida pelo amortecedor e a força calculada pelo controlador no controle nebuloso-GA.



Pelos resultados obtidos das figuras 63, 64, 65 e 66 monta-se a tabela 11, que mostra os valores AR das variáveis consideradas.

Tabela 11 – Valores AR de cada estratégia de controle utilizando o modelo linear de ¼ de carro para uma excitação do tipo dente-de-serra.

Controle	AR de \dot{x}_3	AR de x_2	AR de v
Passivo 0[V]	51.8568	0.2000	0
Passivo 2[V]	21.9420	0.1406	20
Nebuloso de PASCHOAL (2011)	22.7910	0.1479	5.5067
Nebuloso - GA	12.0225	0.132	10.2797

Pela análise da tabela 11, nota-se novamente que o controlador nebuloso-GA implementado neste trabalho mostrou-se superior aos demais com uma redução de 76,82% do valor AR de \dot{x}_3 e de 34% do valor AR de x_2 em relação ao controle passivo em 0V, melhorando tanto o desempenho do veículo quanto a sensação de conforto do passageiro. As curvas da figura 64 mostram a superioridade deste controlador em relação aos outros apresentando os menores valores de pico. Entretanto, ao verificar o valor AR da voltagem enviada ao amortecedor percebe-se um aumento do consumo de energia (cerca de 86,68%) deste controlador em relação ao controlador nebuloso implementado por Paschoal (2011).

O próximo tópico visa comparar a robustez dos controladores quando o modelo linear é sujeito a variações paramétricas em algumas propriedades nominais.

4.5.2 Modelo Linear com variações paramétricas

Assim como em Paschoal (2011), elegeram-se 3 propriedades do modelo linear de ¼ de carro, figura 12, como parâmetros incertos, a saber: a massa amortecida m_1 e as rigidezes k_1 e k_2 . Dessa forma assumiu-se uma incerteza de $\pm 30\%$ em cada rigidez e um aumento de 50kg na massa m_1 .

Para avaliar o desempenho dos controladores, aplicou-se a excitação traduzida pela equação (121) com as propriedades nominais k_1 e k_2 aumentadas em 30% e com a massa m_1 acrescida de 50kg. Os resultados são mostrados nas 67 a 70.

figura 67 – comparação do comportamento de x_2 considerando as diversas estratégias de controle no modelo linear de 1/4 de carro com variações paramétricas.

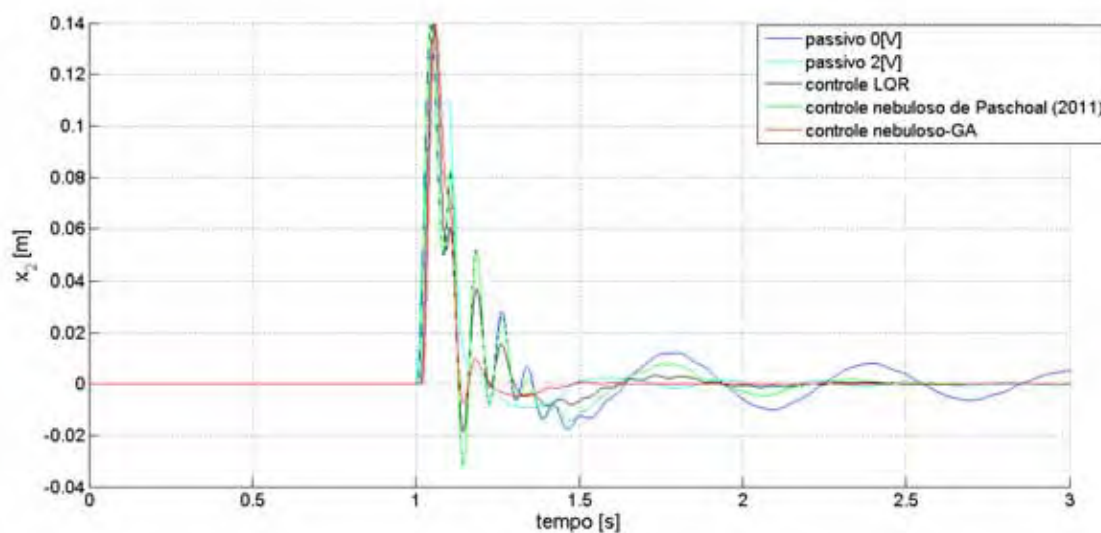


Figura 68 – comparação do comportamento de \dot{x}_3 considerando as diversas estratégias de controle no modelo linear de 1/4 de carro com variações paramétricas.

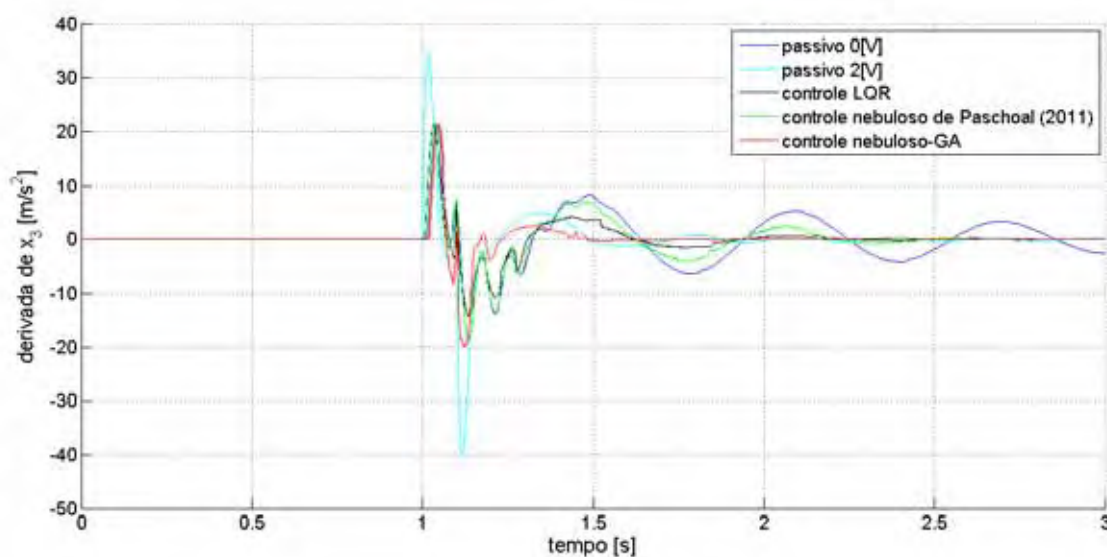


Figura 69 – voltagem enviada ao amortecedor mr no controle semi-ativo utilizando o controle nebuloso-ga.

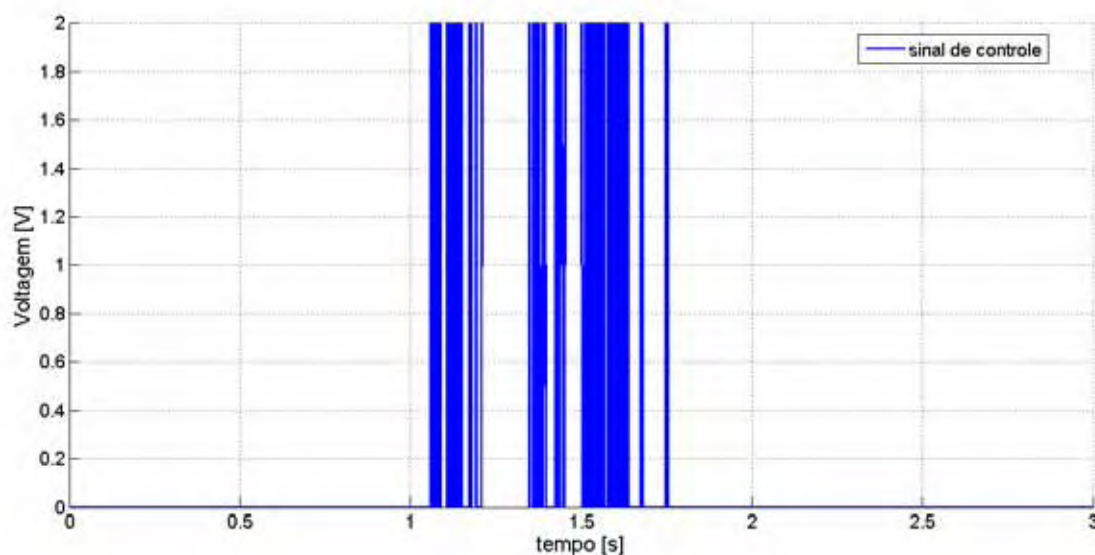
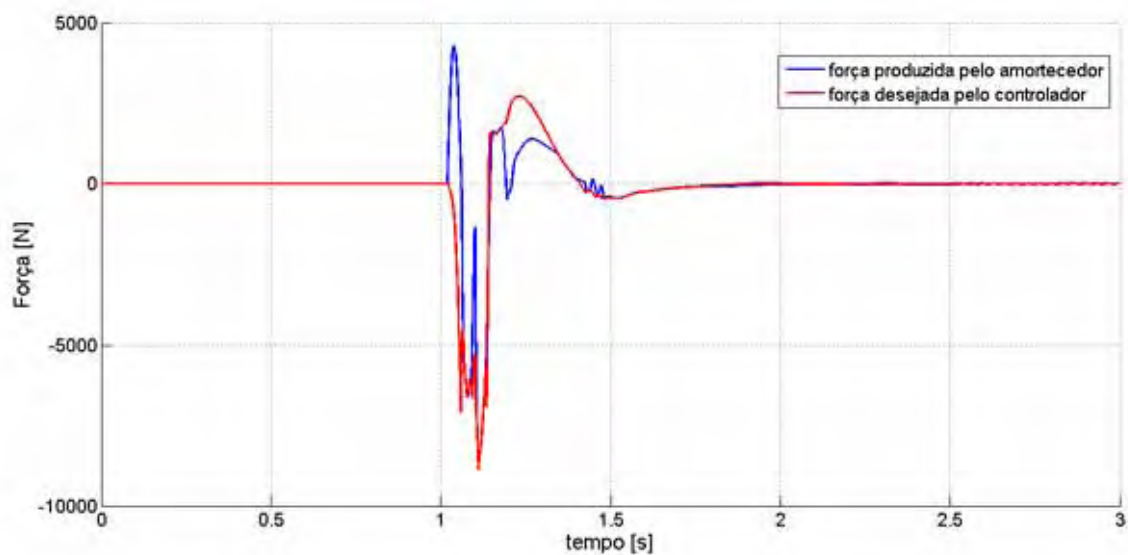


Figura 70 – comparação entre a força produzida pelo amortecedor e a força calculada pelo controlador no controle nebuloso-ga.



Os resultados das figuras 67, 68, 69, 70 são apresentados pela tabela 12 através dos valores AR das variáveis.

Tabela 12 – valores ar de cada estratégia de controle utilizando o modelo linear de $\frac{1}{4}$ de carro com variações paramétricas.

Controle	Área de \dot{x}_3	Área de x_2	Área de v
Passivo 0[V]	7.9538	0.0229	0
Passivo 2[V]	4.3274	0.0142	6
Nebuloso de PASCHOAL (2011)	3.3618	0.0136	0.6385
LQR	3.4178	0.0129	0.6243
Nebuloso-GA	2.09830	0.0097	0.6976

Novamente, o controlador nebuloso-GA merece destaque atingindo os menores valores AR: para a variável \dot{x}_3 a redução foi de 73,62% em relação ao passivo em 0V e, para a variável x_2 a redução foi de 57,64%. O controlador LQR também merece atenção, pois apresentou o menor consumo de energia, entretanto, o consumo de energia do controlador nebuloso-GA não se distancia do controlador LQR com uma diferença de 11,7% no valor AR de v . A figura 68 comprova os baixos picos atingidos pela variável \dot{x}_3 no controle nebuloso-GA. A figura 70 ilustra uma razoável equivalência entre a força calculada pelo controlador e a força produzida pelo amortecedor MR. É notável, portanto, a robustez do controlador nebuloso-GA diante de variações paramétricas no modelo comprovando sua superioridade em relação ao controle do tipo Mamdani construído por Paschoal (2011).

4.5.3 Modelo Não-Linear

Para avaliar o desempenho do controlador nebuloso-GA no modelo não linear de $\frac{1}{4}$ de carro foi montado o diagrama de blocos no Simulink de acordo com a figura 71.

As figuras 73 a 76 comparam o comportamento das principais variáveis do controle semi-ativo nebuloso-GA com outras estratégias de controle.

Figura 73 – Comparação do comportamento de x_2 considerando as diversas estratégias de controle no modelo não linear de ¼ de carro.

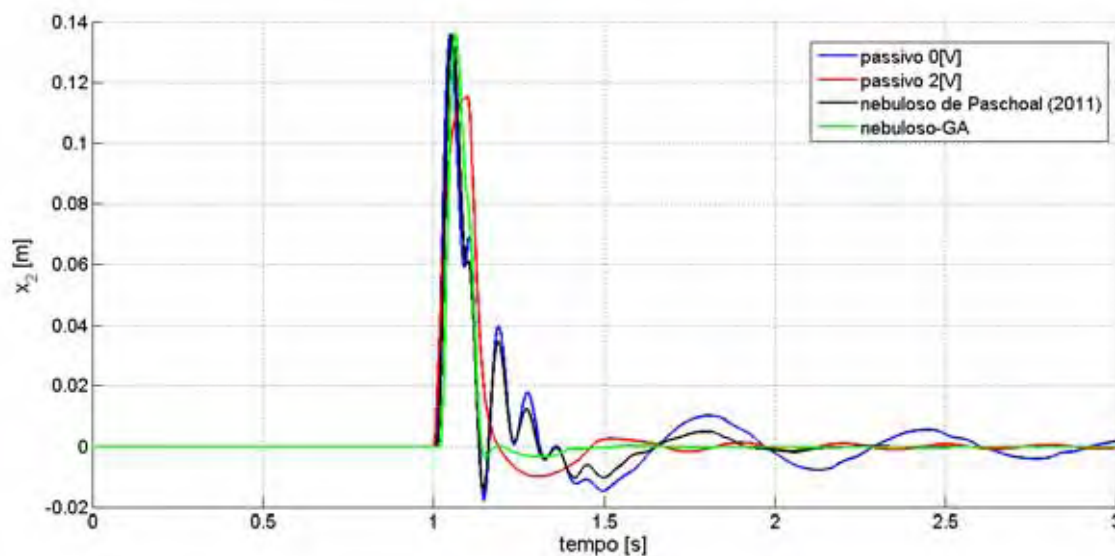


Figura 74 – Comparação do comportamento de \dot{x}_3 considerando as diversas estratégias de controle no modelo não linear de ¼ de carro.

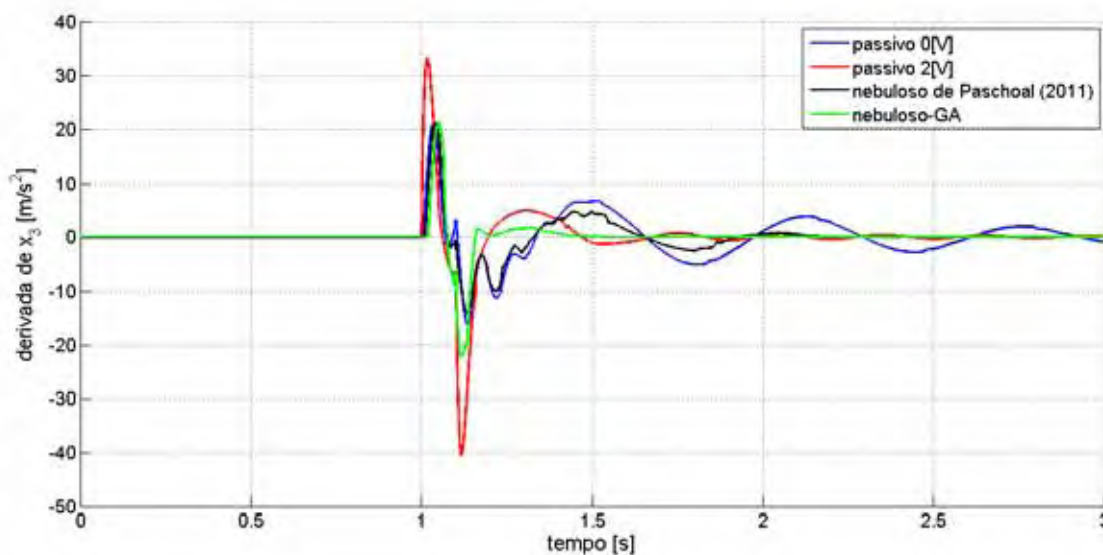


Figura 75 – Voltagem enviada ao amortecedor MR no controle semi-ativo utilizando o controle nebuloso-GA.

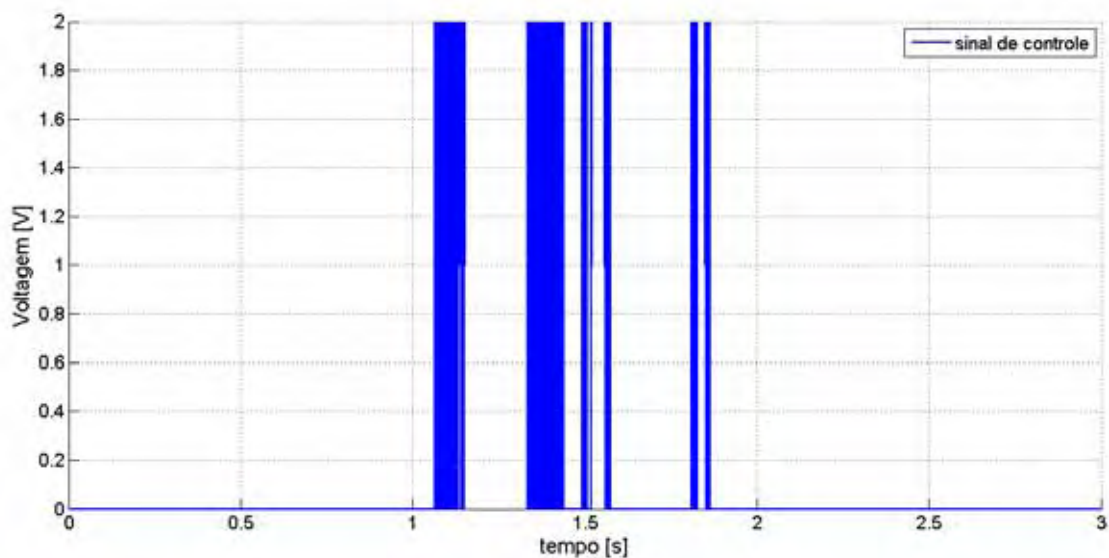
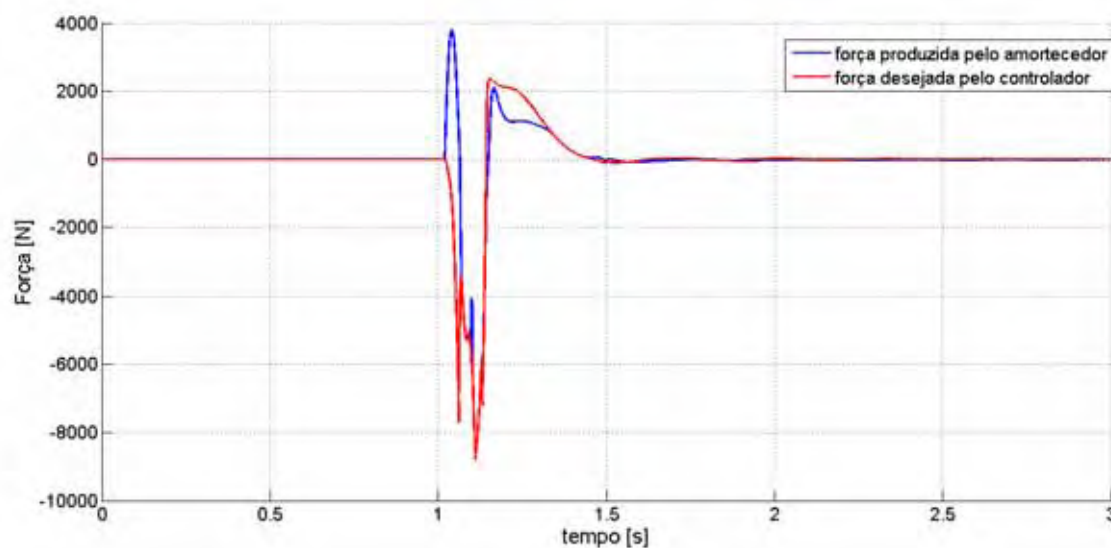


Figura 76 – Comparação entre a força produzida pelo amortecedor e a força calculada pelo controlador no controle nebuloso-GA.



Com os resultados obtidos pelas figuras 73, 74, 75 e 76 é possível montar a tabela 13, onde são mostrados os valores AR, equação (120), das principais variáveis estudadas de cada estratégia de controle.

Tabela 13 – valores AR de cada estratégia de controle utilizando o modelo não linear de ¼ de carro.

Controle	Área de \dot{x}_3	Área de x_2	Área de v
Passivo 0[V]	6.5339	0.0200	0
Passivo 2[V]	4.4865	0.0146	6
Nebuloso de PASCHOAL (2011)	3.6224	0.0137	0.5640
Nebuloso-GA	2.0764	0.0093	0.6911

Pela tabela 13 é evidente a superioridade do controlador nebuloso-GA em relação às demais estratégias de controle demonstrando notáveis características de desempenho frente a não linearidades do sistema. Comparando este controlador com o controle nebuloso do tipo Mamdani de Paschoal (2011) observa-se uma melhoria de 32,12% no desempenho do veículo e um aumento de 42,68% na sensação de conforto do passageiro com um consumo de energia maior, cerca de 22,5%.

Novamente, para tornar as simulações mais próximas da realidade os controladores são sujeitos a outro tipo de excitação $w(t)$ provocada por irregularidades na pista. Uma excitação do tipo dente-de-serra foi utilizada com amplitude máxima de 0.025m com frequência de 1.5Hz, que é próxima à primeira frequência natural do sistema. Assumiu-se um tempo de simulação de 10 segundos. As figuras 77 a 80 ilustram os resultados do sistema com os diferentes controladores para este tipo de excitação.

Figura 77 – comparação do comportamento de x_2 considerando as diversas estratégias de controle no modelo não linear de $\frac{1}{4}$ de carro com excitação dente-de-serra.

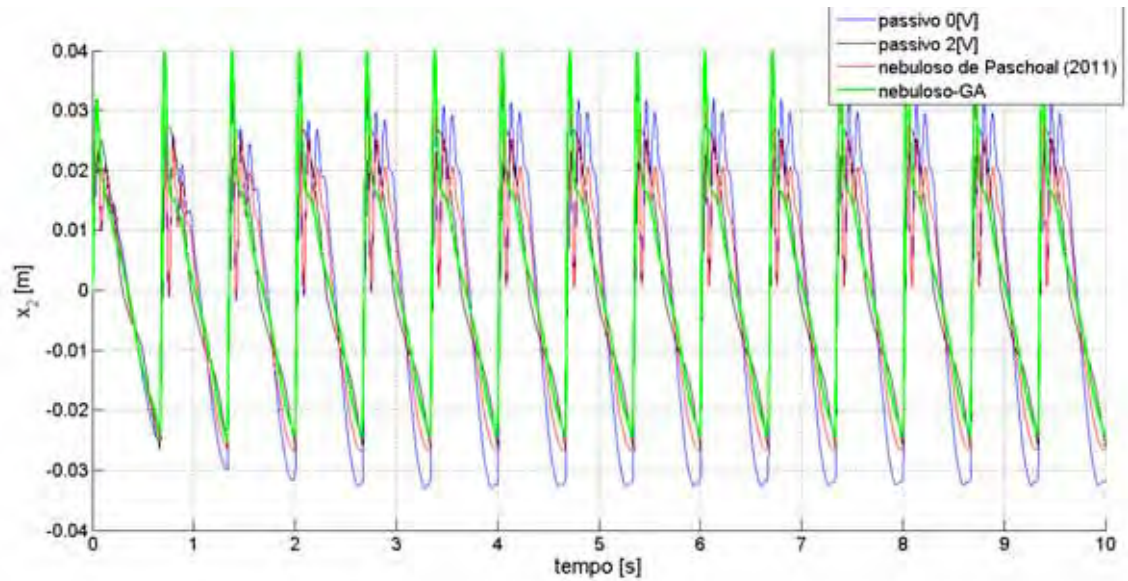


Figura 78 – comparação do comportamento de \dot{x}_3 considerando as diversas estratégias de controle no modelo não linear de $\frac{1}{4}$ de carro com excitação dente-de-serra.

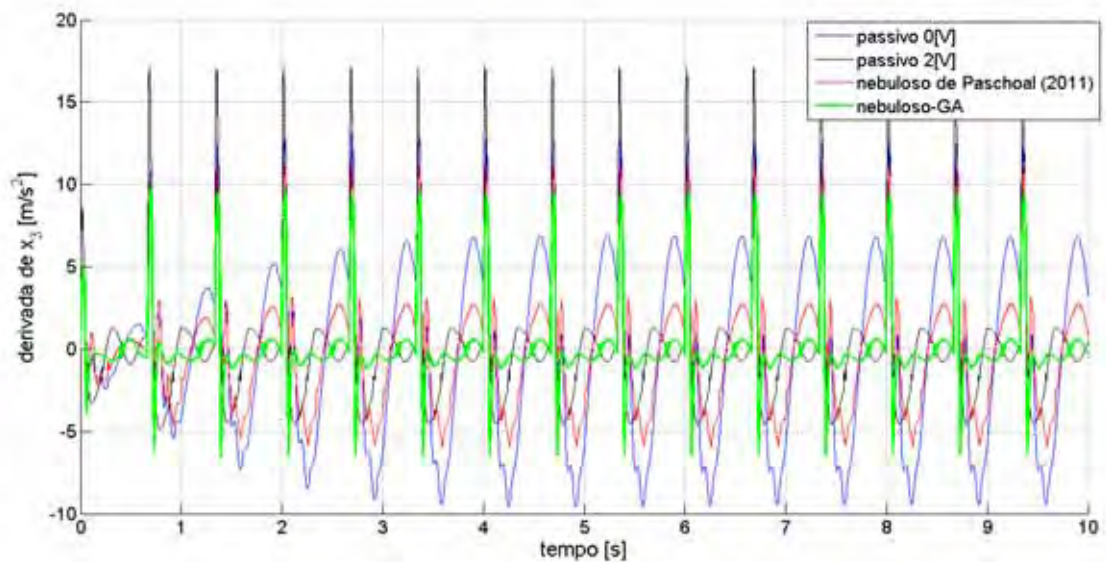


Figura 79 – Voltagem enviada ao amortecedor MR no controle semi-ativo utilizando o controle nebuloso-GA.

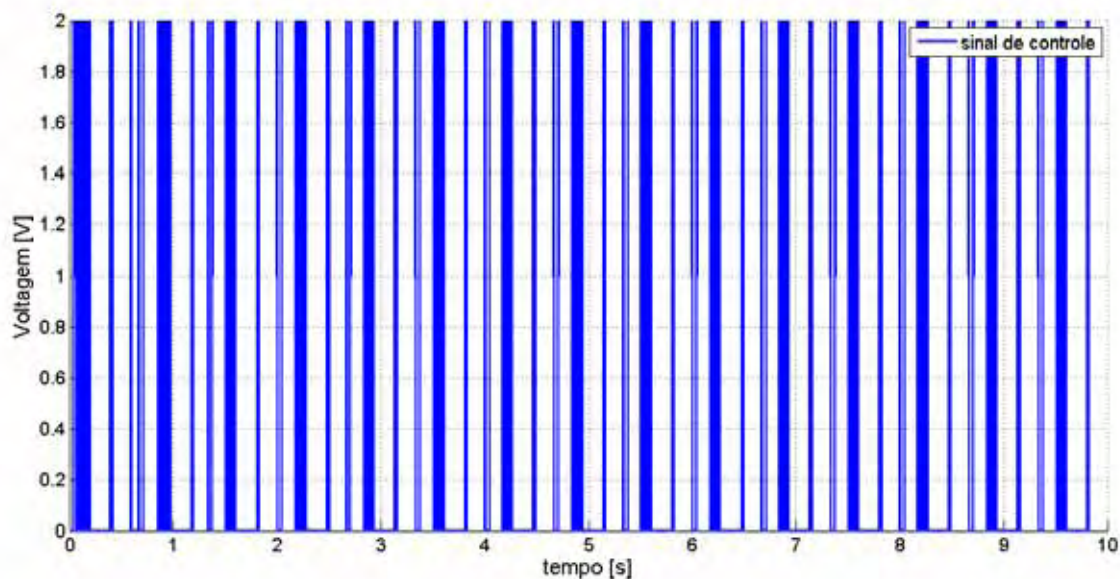
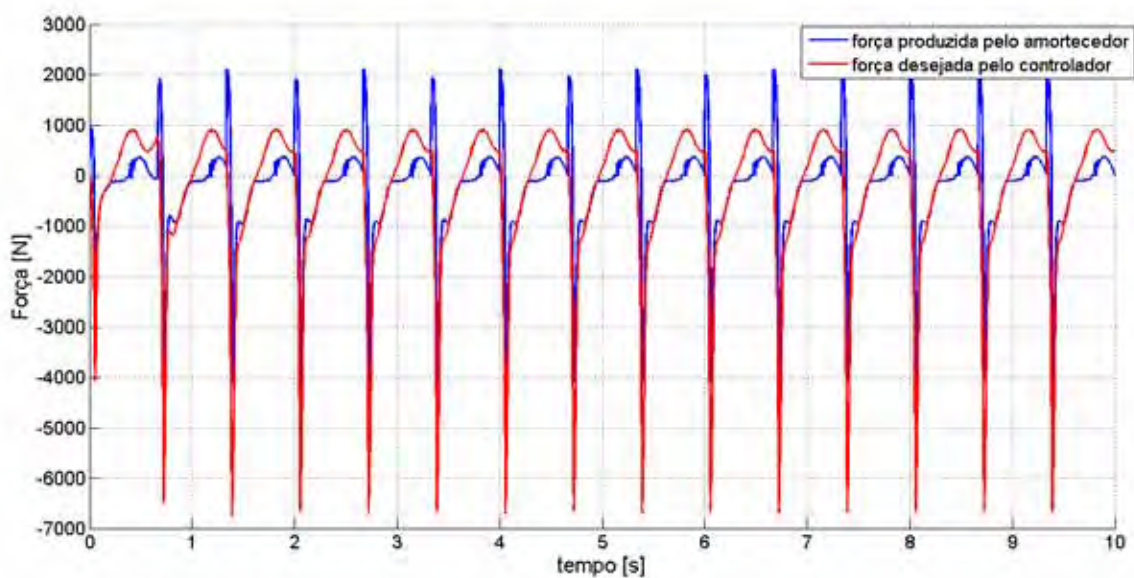


Figura 80 – Comparação entre a força produzida pelo amortecedor e a força calculada pelo controlador no controle nebuloso-GA.



Pelos resultados obtidos das figuras 77, 78, 79 e 80, monta-se a tabela 14 que mostra os valores AR das variáveis consideradas.

Tabela 14 – Valores AR de cada estratégia de controle utilizando o modelo não linear de ¼ de carro com excitação do tipo dente-de-serra.

Controle	Área de \dot{x}_3	Área de x_2	Área de v
Passivo 0[V]	47.8311	0.1963	0
Passivo 2[V]	22.2351	0.141	20
Nebuloso de PASCHOAL (2011)	27.9994	1.1578	1.9082
Nebuloso-GA	12.0263	0.1323	10.399

Pela análise da tabela 14, comprova-se novamente a eficiência do controle semi-ativo nebuloso-GA. Em relação ao controle nebuloso de Paschoal (2011) observou-se: uma melhora 57,05% na sensação de conforto do passageiro e uma melhora na segurança do carro de 88,57%. Contudo houve um aumento no consumo de energia situando-se ainda 48% abaixo do consumo do controle passivo em 2V.

O próximo tópico visa comparar a robustez dos controladores quando o modelo não linear é sujeito a variações paramétricas em algumas propriedades nominais.

4.5.4 Modelo Não Linear com variações paramétricas

Fazendo uma analogia com Paschoal (2011), elegeu-se 4 propriedades do modelo não linear de ¼ de carro, figura 13, como parâmetros incertos, a saber: a massa amortecida m_1 e as rigidezes k_1^l, k_1^{nl} e k_2 . Dessa forma assumiu-se uma incerteza de $\pm 30\%$ em cada rigidez e um aumento de 50 kg na massa m_1 .

Para avaliar o desempenho dos controladores aplicou-se a excitação traduzida pela equação (121) com as propriedades nominais k_1^l, k_1^{nl} e k_2 aumentadas em 30% e com a massa m_1 acrescida de 50kg. Os resultados são mostrados nas figuras 81 a 84.

Figura 81 – comparação do comportamento de x_2 considerando as diversas estratégias de controle no modelo não linear de ¼ de carro com variações paramétricas.

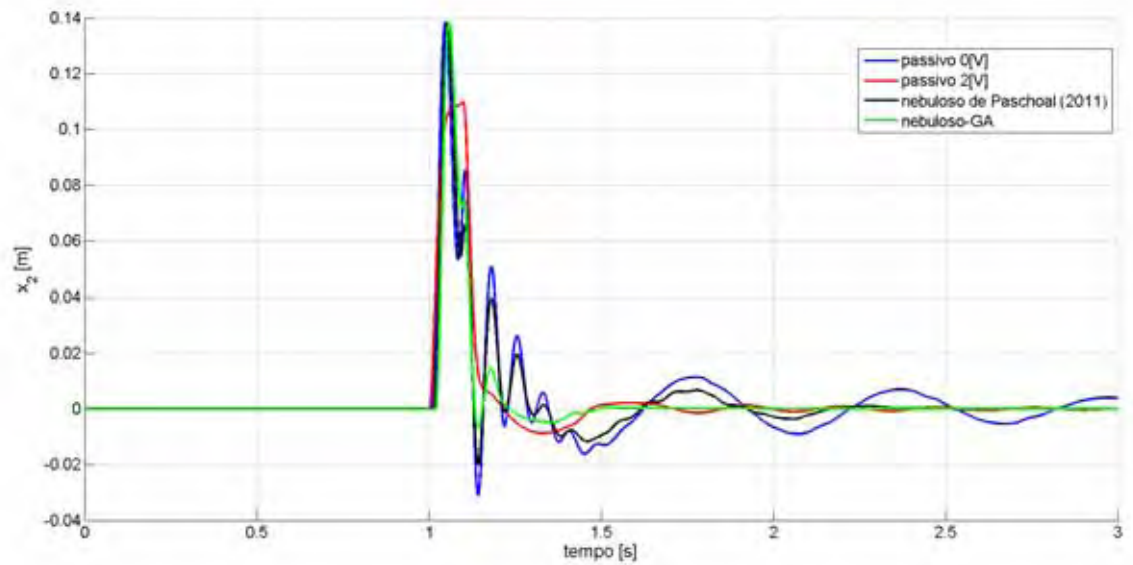


Figura 82 – comparação do comportamento de \dot{x}_3 considerando as diversas estratégias de controle no modelo não linear de ¼ de carro com variações paramétricas.

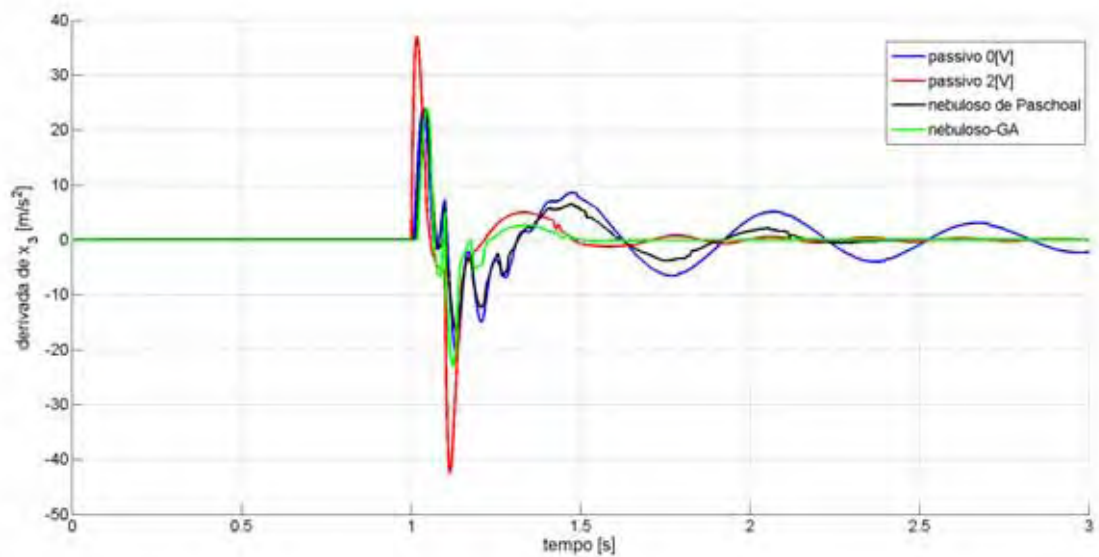


Figura 83 – voltagem enviada ao amortecedor mr no controle semi-ativo utilizando o controle nebuloso-ga.

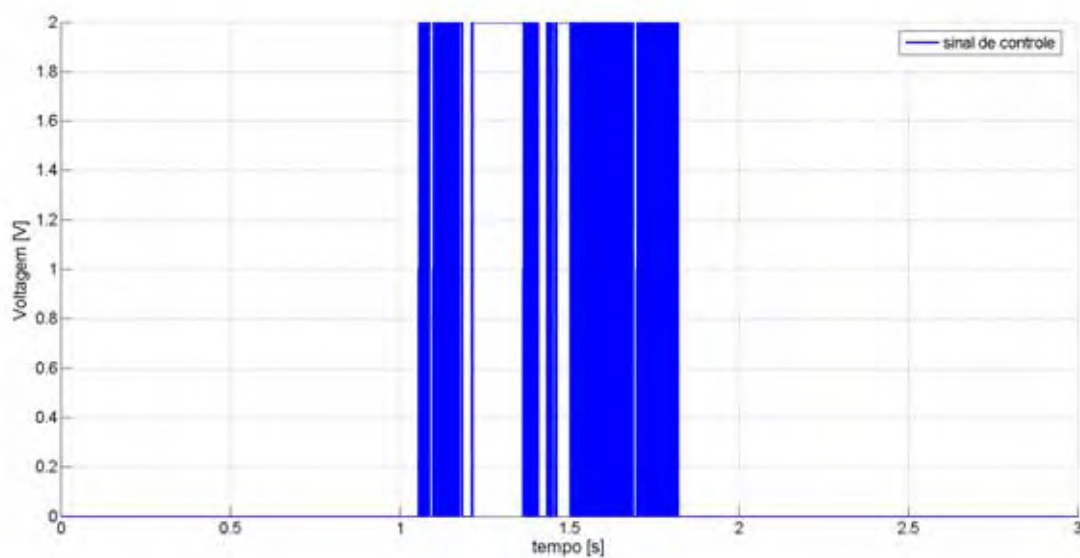
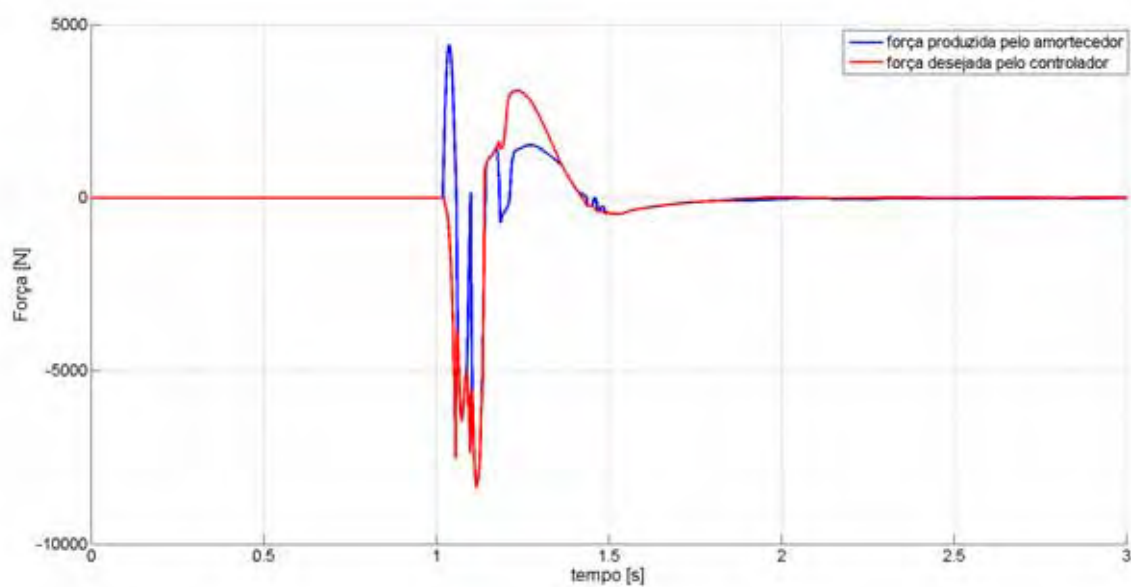


Figura 84 – comparação entre a força produzida pelo amortecedor e a força calculada pelo controlador no controle nebuloso-ga.



Os resultados das figuras 81, 82, 83 e 84 são mostrados na tabela 15 através dos valores AR das variáveis.

Tabela 15 – valores ar de cada estratégia de controle utilizando o modelo não linear de $\frac{1}{4}$ de carro com variações paramétricas.

Controle	Área de \dot{x}_3	Área de x_2	Área de v
Passivo 0[V]	7.9830	0.0215	0
Passivo 2[V]	4.3498	0.0136	6
Nebuloso de PASCHOAL (2011)	4.5838	0.0143	0.5067
Nebuloso-GA	2.2946	0.0097	0.7426

Pode-se constatar que o controle semi-ativo nebuloso-GA apresentou o melhor desempenho frente a variações paramétricas no modelo não linear. Foram observadas melhoras significativas na sensação de conforto do passageiro e um pequeno aumento no consumo de energia em relação ao controle nebuloso de (PASCHOAL, 2011).

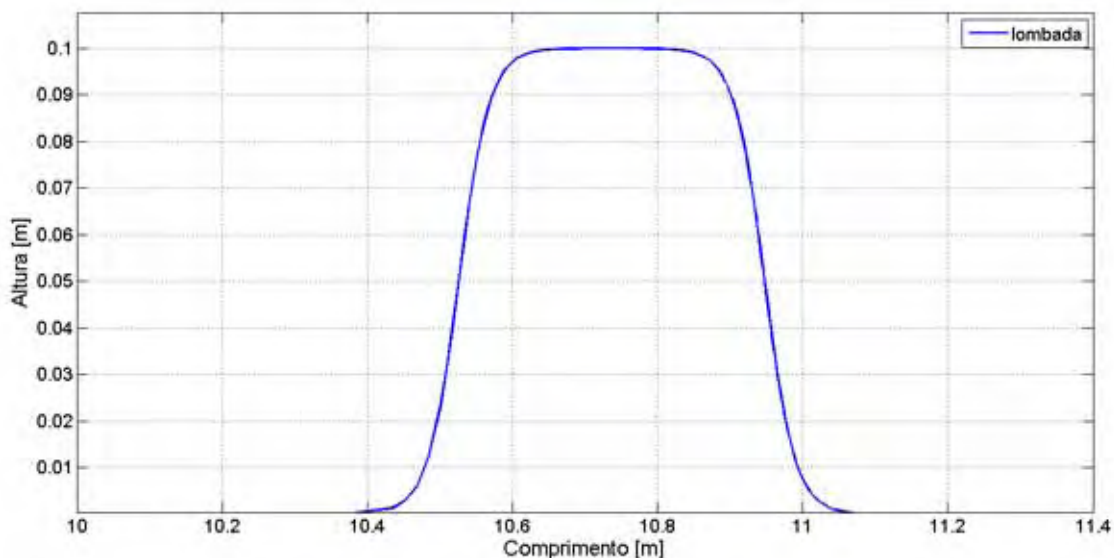
4.6 Comparações das principais estratégias de controle

A fim de comparar as principais estratégias de controle estudadas até agora, outro tipo de sinal de entrada é proposta com a intenção de representar uma lombada de magnitude de 10 cm. Dessa forma optou-se por utilizar uma composição de 2 curvas tangentes sigmóides como é indicada na equação 127. Esta mesma composição foi utilizada por Picado (1998) com uma magnitude de força diferente.

$$\begin{cases} u = \frac{0.1}{(1 + e^{-950t+500})} & \text{para } 0 \leq t \leq 0.5352 \\ u = \frac{0.1}{(1 + e^{950t-520})} & \text{para } t > 0.5352 \end{cases} \quad (127)$$

O sinal gerado pela equação (127) modela uma lombada com duração de aproximadamente 0.025 segundos aplicada no instante 0.5352 s. Supondo que o veículo atravesse a lombada com uma velocidade de 72 km/h (20 m/s) então o comprimento da lombada seria de 0.5 m, como mostra a figura 85.

Figura 85 – Sinal de entrada em lombada.



A vantagem de se utilizar esse tipo de função é sua característica de ser contínua e de classe elevada, que facilita o processo de integração numérica e gera menos erros. Neste caso, a derivada da aceleração, *jerk*, da massa amortecida também será considerada para avaliar o nível de conforto do passageiro. Nos casos anteriores, o estudo do *jerk* é difícil, pois as entradas utilizadas não eram continuamente diferenciáveis acarretando em valores absurdos de *jerk*, oriundos de erros numéricos. De acordo com Picado (1998) a utilização do *jerk* como indicador de conforto é mais representativa, entretanto, na prática, o cálculo deste indicador é complicado necessitando de sensores de custo elevado. Rutledge et al. (1996) projetaram um controlador ótimo que minimiza o *jerk* nos modelos de 1 e 2 graus de liberdade de um quarto de carro. O intervalo de conforto através do *jerk* é estabelecido pelo valor de pico desta variável, que deve ser menor que 18 m/s^3 em valor absoluto (SHIRAHATTI et al., 2008). As figuras 86 a 89 mostram o comportamento das principais variáveis no desempenho dos diversos tipos de controladores. A partir destas curvas, os valores de AR são calculados e mostrados na tabela 16.

Figura 86 – Comparação do comportamento de x_2 considerando as diversas estratégias de controle no modelo linear de $\frac{1}{4}$ de carro com entrada em lombada.

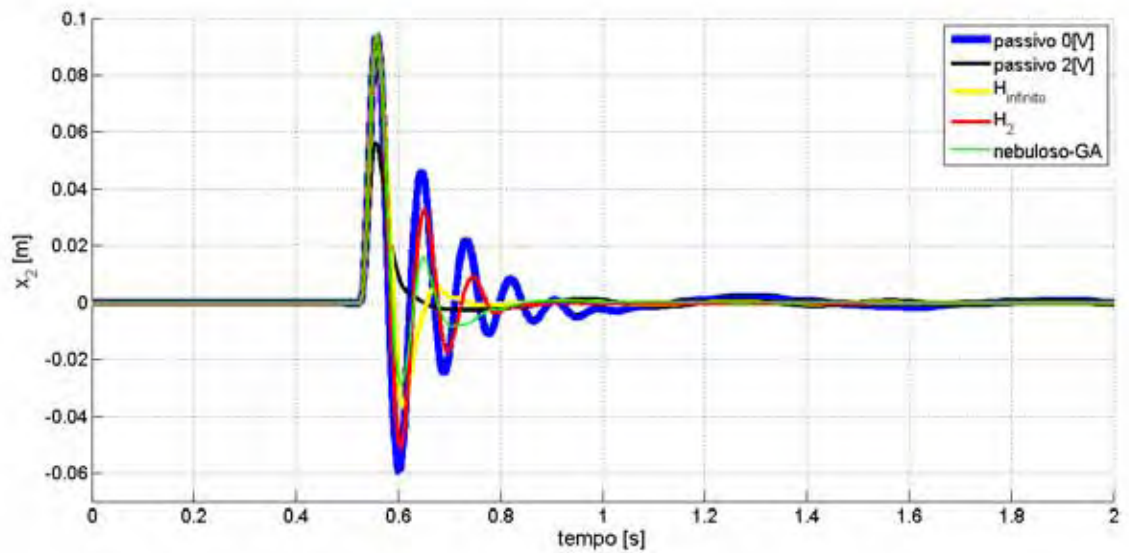


Figura 87 – Comparação do comportamento de \dot{x}_3 considerando as diversas estratégias de controle no modelo linear de $\frac{1}{4}$ de carro com entrada em lombada.

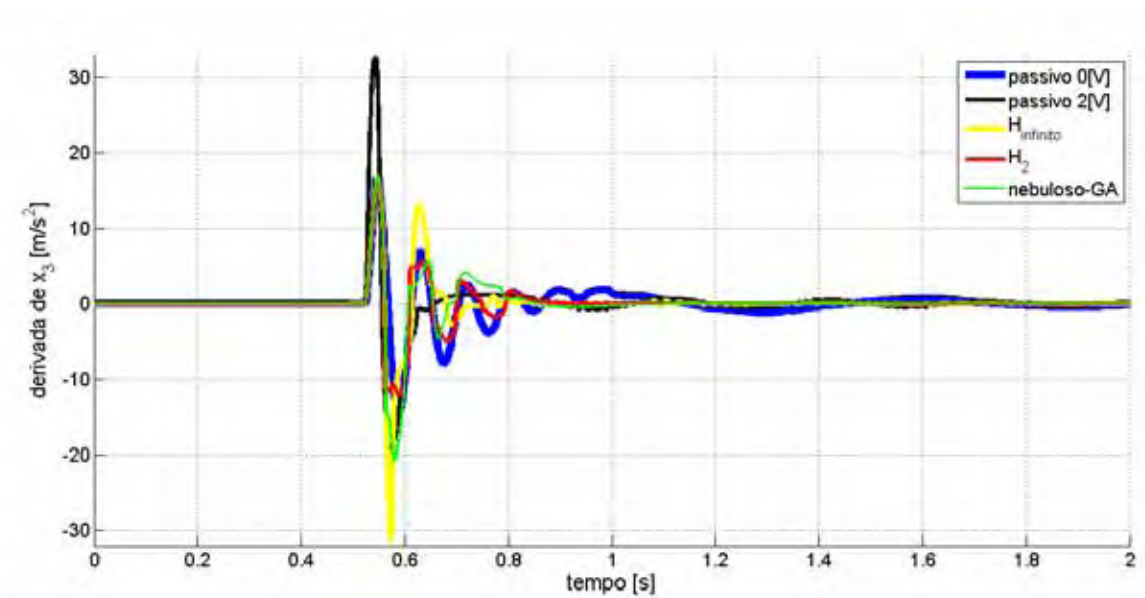


Figura 88 – Voltagem enviada ao amortecedor MR no controle nebuloso genético.

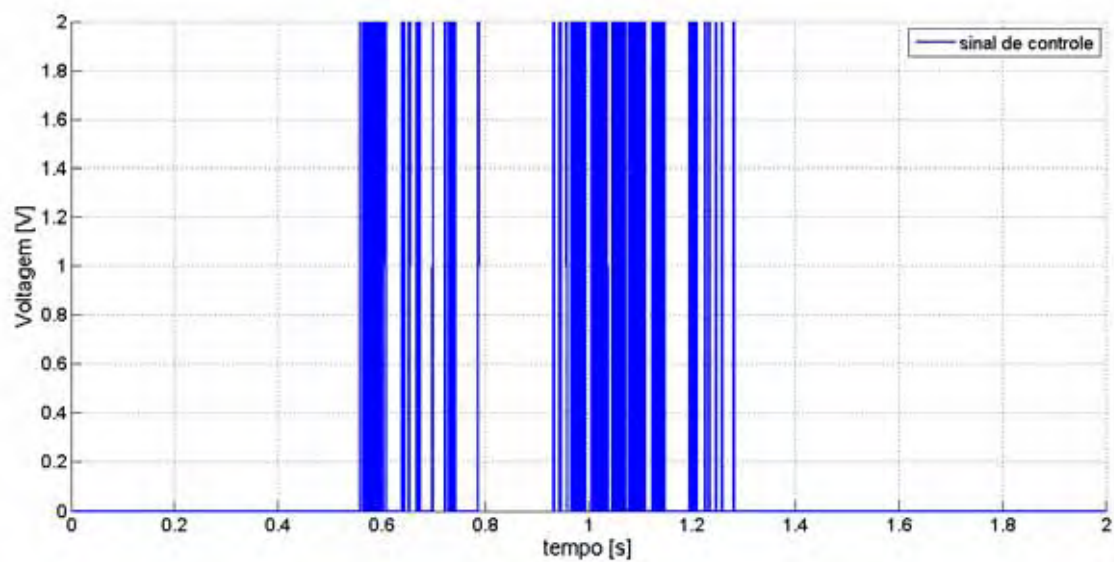


Figura 89 – Comparação da força produzida pelo amortecedor MR e a força desejada pelo controlador nebuloso genético.

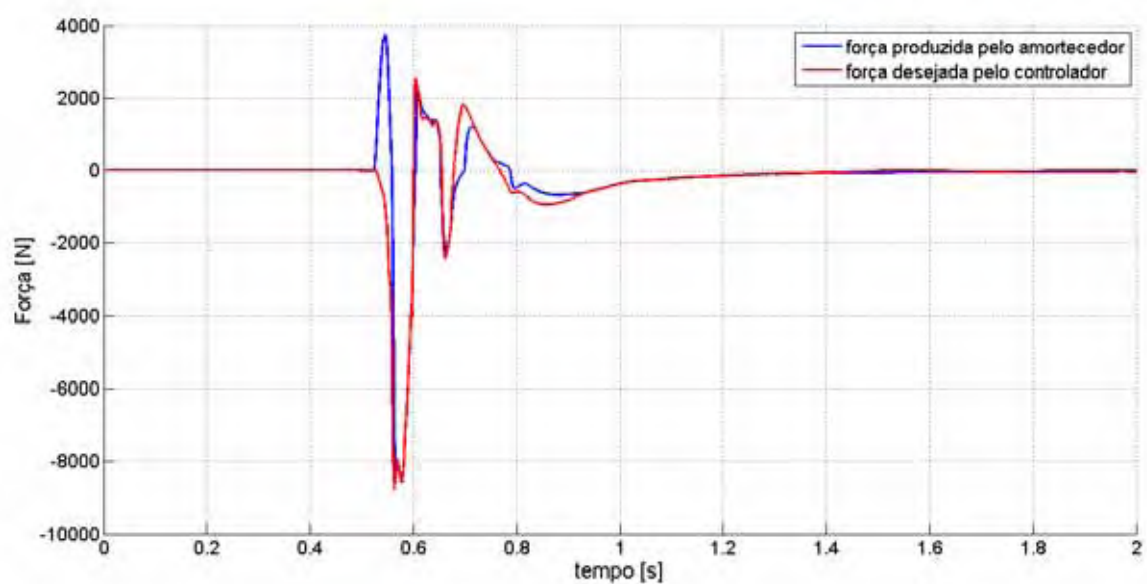


Tabela 16 – valores AR de cada estratégia de controle utilizando o modelo linear de ¼ de carro sujeito a perturbação em lombada.

Controle	Área de \dot{x}_3	Área de x_2	Área de v
Passivo 0[V]	2.4494	0.0093	0
Passivo 2[V]	2.7322	0.0041	20
H_∞	1.7850	0.0049	3.0160
H_2	1.6749	0.0065	3.1192
Nebuloso-GA	1.8743	0.0053	0.6318

Fonte: próprio autor.

O comportamento do *jerk* em cada estratégia de controle é mostrado nas figuras 90 a 94 a seguir.

Figura 90 – Comportamento do *jerk* no controle passivo em 2 V.

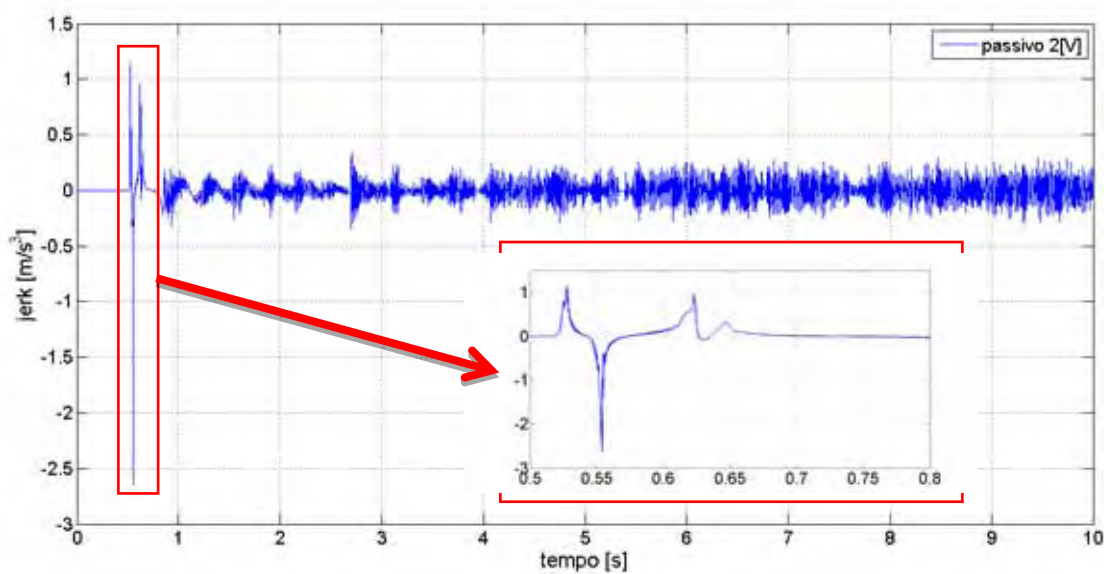


Figura 91 – Comportamento do *jerk* no controle passivo em 0 V.

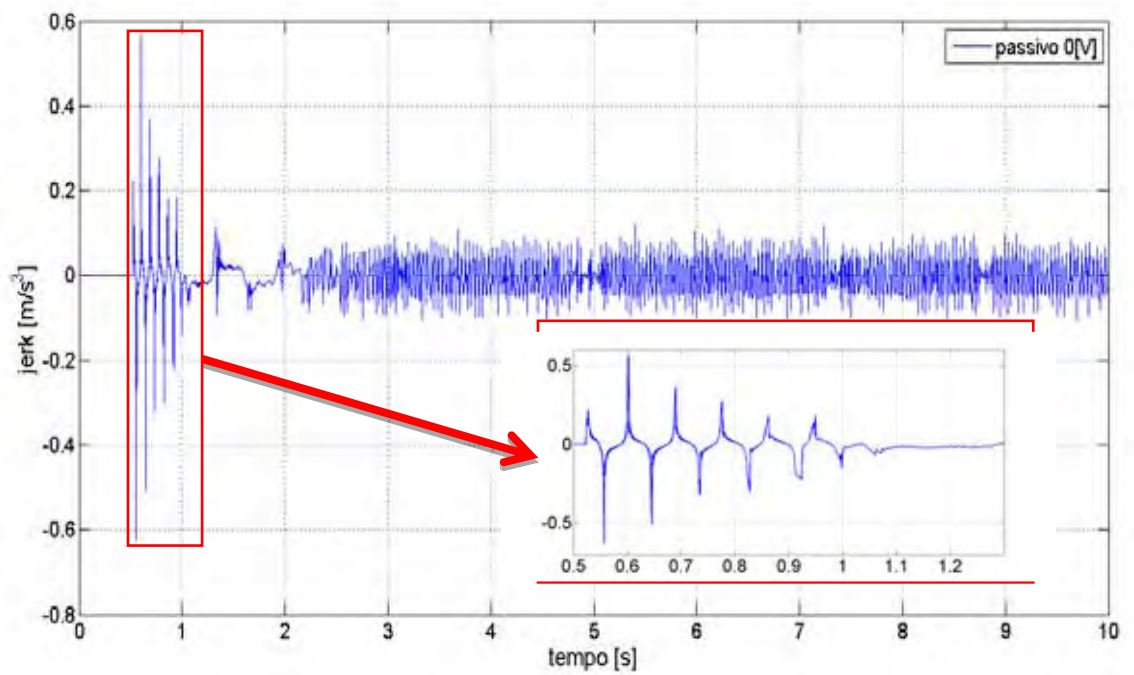


Figura 92 – Comportamento do *jerk* no controle semi-ativo minimizando a norma H_{∞} .

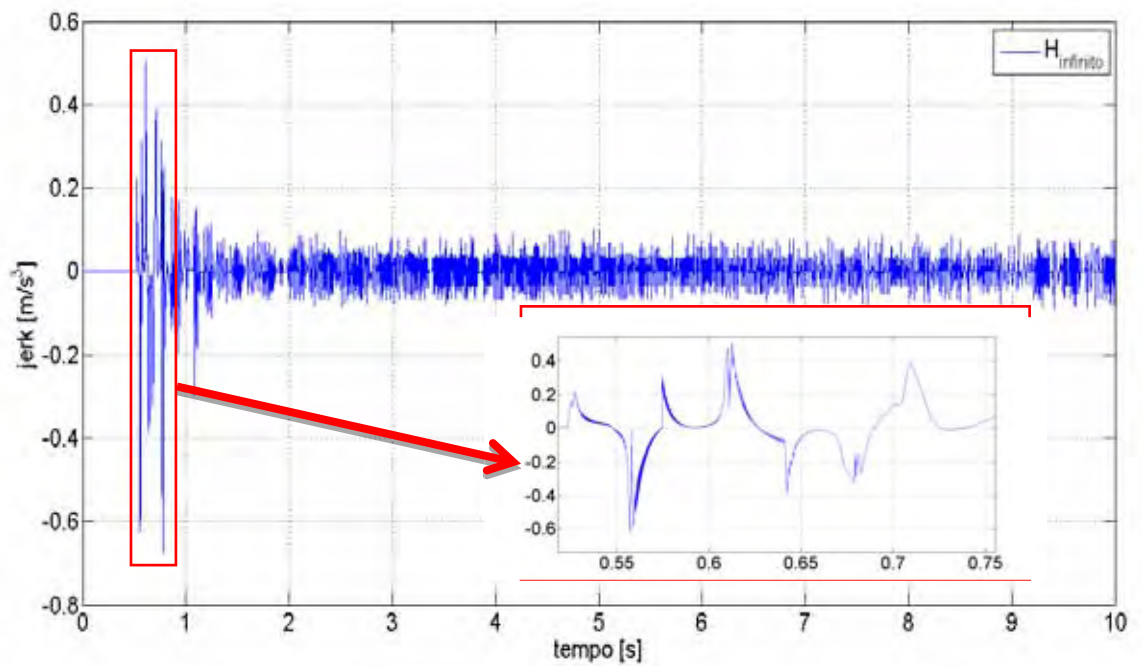


Figura 93 – Comportamento do *jerk* no controle semi-ativo minimizando a norma H_2 .

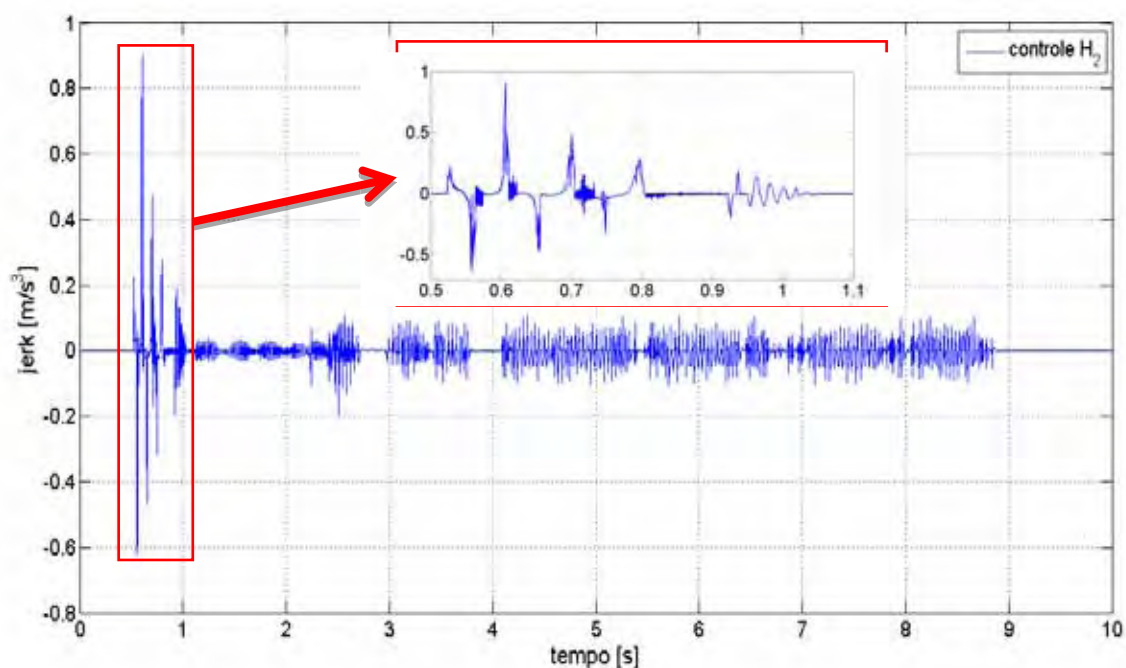
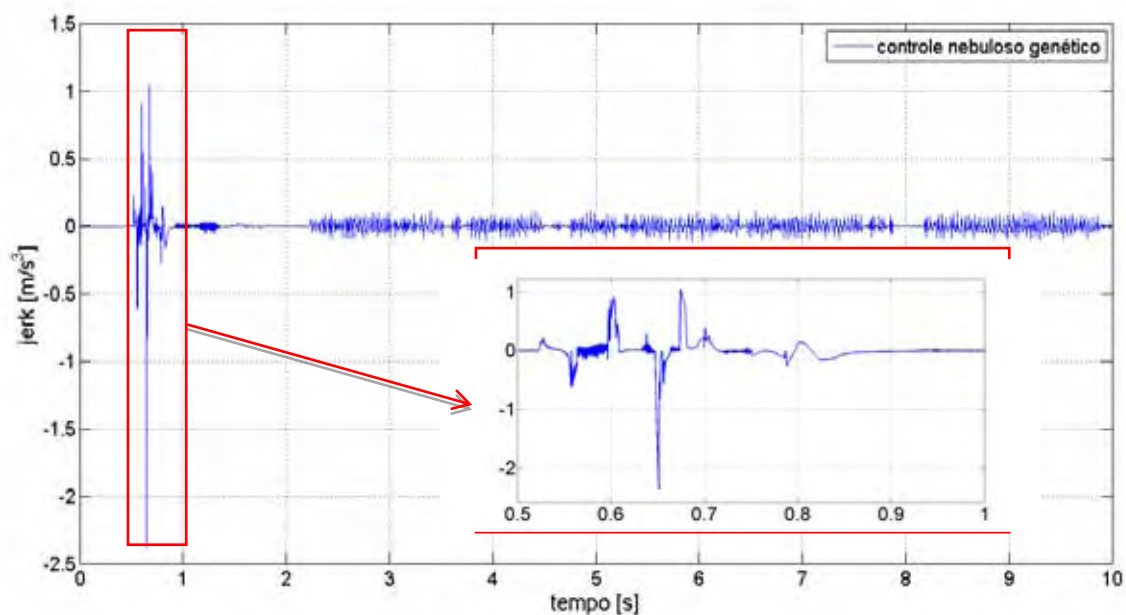


Figura 94 – Comportamento do *jerk* no controle semi-ativo nebuloso genético.



A primeira observação que deve ser feita é em relação ao erro numérico gerado pelo algoritmo que resolve as equações diferenciais não lineares. Nota-se nitidamente que, em todas as curvas das figuras 90 a 94 houve variações numéricas associadas a este erro, que se

originaram a partir de singularidades encontradas pelo algoritmo. A caixa ampliada em cada figura mostra com mais detalhes o comportamento do *jerk* até sua estabilização. O intervalo fora desta caixa e com o tempo maior deveria permanecer em 0 m/s^3 , mas há um erro numérico associado para cada curva: no controle passivo em 2 V o erro no regime permanente é de $\pm 0.3 \text{ m/s}^3$; no controle passivo em 0 V, o erro é de $\pm 0.12 \text{ m/s}^3$ e nos demais tipos de controle o erro é de $\pm 0.1 \text{ m/s}^3$ aproximadamente. Observa-se nestas mesmas figuras que até o momento da aplicação do sinal de entrada o *jerk* permaneceu em 0 m/s^3 , o que era de se supor pois o sistema está em repouso.

A segunda observação que deve ser mencionada é o fato de todas as curvas de *jerk* permanecerem dentro do intervalo aceitável de conforto, menor que 18 m/s^3 em valor absoluto, destacando que o sinal de entrada gerado não é tão agressivo ao veículo independente do tipo de controle utilizado. Entretanto, pode-se caracterizar a superioridade de cada controlador com a magnitude e a quantidade de picos dos respectivos *jerks* gerados. Dessa forma, o controle passivo em 0 V não obteve um bom índice pois foi observado o maior número de picos apesar de possuírem baixa magnitude, figura 91. O controle passivo em 2 V obteve aproximadamente 3 picos, entretanto, as magnitudes foram elevadas, figura 90. O controle nebuloso genético, figura 94, apresentou uma quantidade de picos menor que o controle passivo em 0V e com uma magnitude menor que o passivo em 2V. O maior destaque foi para o controlador semi-ativo utilizando a norma H_∞ que obteve um baixo número de picos com baixas magnitudes. A tabela 16 reforça estes resultados destacando os controle semi-ativos H_2 e H_∞ com os melhores valores de AR tanto para \dot{x}_3 quanto para x_2 . Já o controle semi-ativo nebuloso genético apresentou valores intermediários de AR entre os controles passivos e os controles utilizando LMIs. A fim de superar esta queda no desempenho do controlador nebuloso genético, a otimização do controlador nebuloso pode ser feita considerando vários tipos de entrada separadamente, incluindo a entrada em lombada.

Ao observar com rigorosidade a figura 89 nota-se que no momento da aplicação do sinal de entrada a força produzida pelo amortecedor MR tem sentido oposto à força desejada pelo controlador prejudicando o desempenho do controlador. Este mesmo fato ocorreu na maioria das simulações mostradas anteriormente. No momento da aplicação do sinal de entrada, o sistema oscila de uma maneira exageradamente forçada na qual o controlador não consegue reduzir a amplitude de oscilação dos dois graus de liberdade ao mesmo tempo. A redução de vibração de um grau de liberdade implicaria no aumento da vibração do segundo grau de liberdade.

5 Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo a caracterização da modelagem de um amortecedor MR incorporado como elemento semi-ativo em uma suspensão veicular. Nas análises dinâmicas se consideraram as não linearidades presentes no modelo: laços histeréticos, amplitudes de curvas da varredura senoidal dependentes da frequência e existência de super-armônicas. Diante destas não linearidades foi proposto controladores que reduzissem o nível de vibração ocasionada pela interface entre a pista e o pneu do carro. Os controladores via LMIs se mostraram eficientes com destaque para o controlador que minimiza a norma H_2 . Portanto, a escolha desse controlador seria excelente para reduzir a vibração do veículo a fim de aumentar o conforto e a segurança, porém, seu projeto envolve o conhecimento detalhado da planta além de exigir o conhecimento de todos os estados, o que dificulta e encarece sua implementação prática. Por outro lado, um controlador nebuloso não necessita de todos os estados para produzir o sinal de controle. Dessa forma, foi proposto um controlador nebuloso cujas regras e intervalos das funções de pertinências foram otimizadas por algoritmo genético. Este controlador se mostrou eficaz nos testes numéricos com diferentes tipos de excitação de entrada: impulsional, dente de serra e lombada. Além disso, o projeto deste controlador nebuloso se mostrou simples, uma vez que não foi necessário o conhecimento da planta durante a fase de projeto. A otimização por algoritmo genético atualizou o controlador nebuloso tornando-o superior ao controlador nebuloso do tipo Mamdani implementado em trabalhos anteriores. A performance do controlador nebuloso-GA também foi testada no modelo não linear de $\frac{1}{4}$ de carro, com e sem variações paramétricas, e sua robustez foi comprovada. A fim de melhorar o controlador nebuloso proposto neste trabalho, a otimização via algoritmo genético pode ser feita adotando diferentes pesos nas variáveis que constituem o índice de performance e utilizando vários tipos de sinais de entrada. Assim, as regras do controlador adquirem mais conhecimento. Uma outra forma de melhorar tal controlador seria otimizar as regras de forma online, ou seja, enquanto a simulação estiver rodando. Para isto, seria necessário aproximar o modelo do amortecedor MR e da planta para um modelo de rápido processamento. Uma rede neural desempenharia muito bem este papel, pois esta pode utilizar funções de ativação não lineares nos neurônios. Séries de Volterra também poderiam ser utilizadas na criação de um modelo inverso de rápido processamento.

Em trabalhos futuros, pretende-se construir uma bancada experimental com 2 graus de liberdade que simule a vibração na suspensão de $\frac{1}{4}$ de veículo. O controlador projetado pode ser implementado em um microcontrolador. Assim, todo o sistema de controle ficaria embarcado com um custo relativamente baixo.

Os controladores via LMIs também podem ser fonte de estudos para trabalhos futuros, uma vez que esta é uma área recente e tem mostrado grandes avanços na área de controle. Assim, pode-se propor um estudo de controladores via LMIs com realimentação de saída com fonte chaveada. A fonte chaveada é incorporada nas LMIs e o algoritmo de grampeamento não seria necessário. Neste trabalho foi adotada a realimentação de estados com a hipótese de todos os estados conhecidos. No caso da realimentação de saída, alguns estados podem ser desconhecidos no projeto do controlador. Outra proposta é utilizar LMIs para projetar o controlador nebuloso substituindo a função do algoritmo genético na criação das regras. A vantagem deste procedimento é a eliminação do uso do modelo, pois, apesar do modelo não ser necessário para o projeto do controlador nebuloso, ele é indispensável na otimização via algoritmo genético.

Outras abordagens de controle semi-ativo podem ser estudadas futuramente: um algoritmo superior ao algoritmo de grampeamento pode ser utilizado, uma vez que este último gera saltos repentinos no sinal de controle podendo queimar o driver de corrente.

Referências

- ABRAMSON, M. **Genetic algorithm and direct search toolbox user's guide for use with MATLAB**. [S.l.]: The MathWorks, 2004.
- AKHRAS, G. Smart materials and smart systems for the future. **Canadian Military Journal**, Autumn, v. 1, n. 3, p. 24-31, 2000.
- ALLEYNE, A.; HEDRICK, J. K. Nonlinear control of a quarter car active suspension. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 11., 1992, Chicago. **CONFERENCE...** Chicago: IEEE, 1992. p. 21-25.
- ASSUNÇÃO, E. **Redução H2 e H ∞ de modelos através de desigualdades matriciais lineares**: otimização local e global. 2000. 105 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas- UNICAMP, Campinas, 2000.
- BABUSKA, R. **Fuzzy modelling for control**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- BAHAR, A.; CHAIBAKHSH, A.; HAQDADI, S. Identification of MR damper based on normalized bouc-wen model using neural network. In: INTERNACIONAL CONFERENCE ON MECHANICAL AND ELECTRICAL TECHNOLOGY, 4., 2012, Kuala Lumpur. **CONFERENCE...** Kuala Lumpur: [s.n.], 2012.
- BASTOW, D.; HOWARD, G.; WHITEHEAD, J. P. **Car suspension and handling**. Warrendale: SAE International, 2004. ISBN 0768008727.
- BOYD, S.; BALAKRISHNAN, V.; FERON, E.; EL GHAOUI, L. History of linear matrix inequalities in control theory. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 13., 1994, San Diego. **PROCEEDINGS...** San Diego: IEEE, 1994. p. 31-34.
- BOYD, S.; BALAKRISHNAN, V.; FERON, E.; ELGHAOUI, L. Control system analysis and synthesis via linear matrix inequalities. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1993, San Francisco, California. **PROCEEDINGS...** San Francisco: IEEE, 1993. p. 2147-2154.
- BROWN, J. G. A note on fuzzy sets. **Information and Control**, New York, v. 18, n. 1, p. 32-39, 1971. ISSN 0019-9958.
- CARLSON, J. The promise of controllable fluids. **Actuator**, Basel, v. 94, p.266-270, 1994.
- CARLSON, J.; SPROSTON, J. Controllable fluids in 2000—Status of ER and MR fluid technology. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NEW ACTUATORS, 7., 2000, Bremen. **CONFERENCE...** Bremen: [s.n.], 2000. p. 126-130.
- CARMIGNANI, C.; FORTE, P.; RUSTIGHI, E. A fuzzy control for a magnetorheological squeeze-film damper. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NOISE AND VIBRATION ENGINEERING, 5, 2004, Belgium. **PROCEEDINGS...** Belgium: ISMA, 2004. p. 187-200.

CARNEIRO, R. B. **Controle semi-ativo de vibrações em estruturas utilizando amortecedor magnetorreológico**. 2009. 135 f. Tese (Doutorado em Construção Civil e Estruturas)- Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

CERONE, V.; PIGA, D.; REGRUTO, D. Set-membership EIV identification through LMI relaxation techniques. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE- ACC, 29, 2010, Baltimore. **PROCEEDINGS...** New York: IEEE, 2010. p. 2158-2163.

CHANG, N. B.; CHEN, H. W.; NING, S. K. Identification of river water quality using the fuzzy synthetic evaluation approach. **Journal of Environmental Management**, London, v. 63, n. 3, p. 293-305, 2001. ISSN 0301-4797.

CHEN, B. S.; TSENG, C. S.; UANG, H. J. Mixed H_2 H_∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems: an LMI approach. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**. New York, v. 8, n. 3, p. 249-265, 2000. ISSN 1063-6706.

CHRISTENSON, R. E.; SPENCER JR, B.; JOHNSON, E. A. Experimental verification of smart cable damping. **Journal of engineering mechanics**. Reston, , v. 132, n. 3, p. 268-278, 2006. ISSN 0733-9399.

CORDON, O.; HERRERA, F.; LOZANO, M. **A classified review on the combination fuzzy logic-genetic algorithms bibliography**. Granada: Universidad de Granada, 1995. (Tech. Report 95129).

CRIVELLARO, C. **Controle robusto de suspensão semi-ativa para caminhonetes utilizando amortecedores magneto-reológicos**. 2011. 269 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Controle e Automação Mecânica)- Escola Politécnica, Universidade de São Paulo- USP, São Paulo, 2011.

DA SILVA, S. **Projeto de controladores robustos para aplicações em estruturas inteligentes utilizando desigualdades matriciais lineares**. 2005. 130 f. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Ilha Solteira, 2005.

DE JAGER, B. Robust H_2 optimal control of an active suspension. IN: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 6., 1997, Hartford. **PROCEEDINGS...** Hartford: IEEE, 1997. p. 761-766.

DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. On stability tests for linear systems. IN: IFAC WORLD CONGRESS, 15., Barcelona, 2002. **PROCEEDINGS...** Barcelona: IFAC, 2002 p. 3021-3026.

DO, A. L.; SENAME, O.; DUGARD, L.; AUBOUET, S.; RAMIREZ-MENDOZA, R. A. An LPV approach for semi-active suspension control. IN: PACAM , 11., 2010, Foz do Iguaçu. **PROCEEDINGS...**Foz do Iguaçu: ABCM, 2010.

DOMINGUEZ, A.; SEDAGHATI, R.; STIHARU, I. Modelling the hysteresis phenomenon of magnetorheological dampers. **Smart Materials and Structures**, New York, v. 13, n. 6, p. 1351, 2004. ISSN 0964-1726.

DONG, X.; YU, M.; LIAO, C.; CHEN, W. Comparative research on semi-active control strategies for magneto-rheological suspension. **Nonlinear dynamics**, Dordrecht, v. 59, n. 3, p. 433-453, 2010. ISSN 0924-090X.

DYKE, S. **Acceleration feedback control strategies for active and semi-active systems: modeling, algorithm development and experimental verification**. 1996. 274 f. Tese (Doutorado)- Department of Civil Engineering and Geological Sciences, University of Notre Dame, Notre Dame, 1996.

DYKE, S.; SPENCER JR, B.; SAIN, M.; CARLSON, J. Modeling and control of magnetorheological dampers for seismic response reduction. **Smart Materials and Structures**, Temple Back, v. 5, n. 5, p. 565, 1999. ISSN 0964-1726.

FANG, C. H.; LIU, Y. S.; KAU, S. W.; HONG, L.; LEE, C. H. A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of TS fuzzy control systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**. New York, v. 14, n. 3, p. 386-397, 2006. ISSN 1063-6706.

FINSLER, P. Über das vorkommen definitiver und semidefiniter formen in scharen quadratischer formen. **Commentarii Mathematici Helvetici**, Basel, v. 9, n. 1, p. 188-192, 1936. ISSN 0010-2571.

GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A.; CHILALI, M. **LMI Control toolbox user's guide**. Natick: the mathworks, 1995.

GAMOTA, D.; FILISKO, F. Dynamic mechanical studies of electrorheological materials: moderate frequencies. **Journal of Rheology**, New York, v. 35, n. 3, p. 399-425, 1991. ISSN 0148-6055.

GANET-SCHOELLER, M.; PITA-GIL, G. Gain scheduled and LPV control design and validation for re-entry vehicle. IN: ESA GNC CONFERENCE, 7., 2008, Tralee. **PROCEEDINGS...** Tralee: ESA, 2008.

GASPAR, P.; SZASZI, I.; BOKOR, J. Active suspension design using linear parameter varying control. **International Journal of Vehicle Autonomous Systems**, Olney, v. 1, n. 2, p. 206-221, 2003. ISSN 1471-0226.

GAVIN, H.; HOSE, Y.; HANSON, R. Design and control of electrorheological dampers. IN: WORLD CONFERENCE ON STRUCTURAL CONTROL- WP3, 1., Pasadena, 1994. **PROCEEDINGS...** Pasadena: [s.n.], 1994. p. 83-92.

GIRON-SIERRA, J. M.; ORTEGA, G. A survey of stability of fuzzy logic control with aerospace applications. In: TRIENNIAL WORLD CONGRESS, 15., 2002, Barcelona. **PROCEEDINGS...** Barcelona: IFAC, 2002. p. 1235-1235.

GOGUEN, J. A. L-fuzzy sets. **J. Math. Anal. Appl**, [S.l.], v. 18, n. 1, p. 145-174, 1967.

GONÇALVES, P. **Controle Ativo de vibração estrutural utilizando materiais inteligentes e desigualdades matriciais lineares**. 2003. 110 f. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de

Engenharia, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho –UNESP, Ilha Solteira 2003.

HEGER, A. S.; ALANG-RASHID, N.; JAMSHIDI, M. Application of fuzzy logic in nuclear reactor control: Part 1: an assessment of state-of-the-art. **Nuclear Safety**, Oak Ridge, v. 36, n. 1, p. 109-121, 1995.

HENRION, D.; GANET-SCHOELLER, M.; BENNANI, S. **Measures and LMI for space launcher robust control validation**. [S.l.]: Cornell University Library, 2012.

KARLSSON, N.; RICCI, M.; HROVAT, D.; DAHLEH, M. A suboptimal nonlinear active suspension. IN: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 19., 2000, Chicago. **PROCEEDINGS...** Chicago: IEEE, 2000. p. 4036-4040.

KARMARKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. IN: ANNUAL ACM SYMPOSIUM ON THEORY OF COMPUTING, 16., 1984, Washington. **PROCEEDINGS...** Washington: ACM, 1984. p. 302-311.

KORDONSKI, W.; GOLINI, D. Fundamentals of magnetorheological fluid utilization in high precision finishing. **Journal of intelligent material systems and structures**, Lancaster, v. 10, n. 9, p. 683-689, 1999. ISSN 1045-389X.

LAI, C. Y.; LIAO, W. H. Vibration control of a suspension system via a magnetorheological fluid damper. **Journal of Vibration and Control**, Thousand Oaks, v. 8, n. 4, p. 527-547, 2002. ISSN 1077-5463.

LAM, A. H. F.; LIAO, W. H. Semi-active control of automotive suspension systems with magneto-rheological dampers. **International Journal of Vehicle Design**, Jersey, v. 33, n. 1, p. 50-75, 2003. ISSN 0143-3369.

LEWIS, C.; GRIFFIN, M. Evaluating the vibration isolation of soft seat cushions using an active anthropodynamic dummy. In: UNITED KINGDOM GROUP MEETING ON HUMAM RESPONSES TO VIBRATION, 35., 2000, England. **Meeting...** England: Southampton University, 2000. p. 295-311.

LEWIS, J. Put the brakes on pneumatics. **Design news**, Boston, v. 54, p. 92, 1999. ISSN 0011-9407.

LI, R.; CHEN, W.; YU, M.; LIU, D. Fuzzy intelligent control of automotive vibration via magneto-rheological damper. In: CONFERENCE ON CYBERNETICS AND INTELLIGENT SYSTEMS, 1., 2004, Singapore. **PROCEEDINGS...** Singapore: IEEE, 2004. p.503-507.

LI, T. H. S.; CHANG, S. J.; CHEN, Y. X. Implementation of human-like driving skills by autonomous fuzzy behavior control on an FPGA-based car-like mobile robot. **TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS**, New York, v. 50, n. 5, p. 867-880, 2003. ISSN 0278-0046.

LI, Z.; YANG, Y.; GONG, X.; LIN, Y.; LIU, G. Fuzzy control of the semi-active suspension with MR damper based on μ GA. In: IEEE VEHICLE POWER AND PROPULSION CONFERENCE- VPPC, 8., 2008, Harbin. **CONFERENCE...** Harbin: IEEE, 2008. p. 1-6.

- LIAO, H. Y. **Assessment of typhoon flood in taiwan using fuzzy theory.** IN: IASME/WSEAS INTERNATIONAL CONFERENCE ON WATER RESOURCES, HYDRAULICS AND HYDROLOGY, 3., 2008, Cambridge. **PROCEEDINGS...** Athens: World Scientific And Engineering Acad and Soc, 2008. p.21-26.
- LIAO, W. H. Magnetorheological fluid dampers: a review of parametric modeling. **Smart Materials and Structures**, Bristol, v. 20, n. 2, p. 34, 2011.
- LÖFBERG, J. Modeling and solving uncertain optimization problems in YALMIP. IN: IFAC WORLD CONGRESS, 17., 2008, Coex. **PROCEEDINGS...** Coex: IFAC, 2008. p. 1337-1341.
- MAMDANI, E. H. Application of fuzzy algorithms for simple dynamic plant. **Proceedings of the IEEE**, New York, , v. 121, n. 12, p. 1585-1588, 1974.
- NESTEROV, Y.; NEMIROVSKII, A. S.; YE, Y. **Interior-point polynomial algorithms in convex programming.** Philadelphia: SIAM, 1994. 396 p.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno.** São Paulo: Prentice Hall, 2003. 800p.
- OLIVEIRA, M. C.; FARIAS, D.; GEROMEL, J. **LMISol, user's guide.** Campinas: UNICAMP, 1997. não pag.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. **Análise e controle de sistemas lineares por meio de desigualdades matriciais lineares.** [S.l.: s.n.], 2010. Mini-Curso do CBA Notas de Aula. Disponível em: < <http://www.dt.fee.unicamp.br/~peres/> >. Acesso em: 21 maio 2013.
- OTANI, S.; HIRAISHI, H.; MIDORIKAWA, M.; TESHIGAWARA, M.; FUJITANI, H. et al. Development of smart systems for building structures. In: ANNUAL INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SMART STRUCTURES AND MATERIALS- SPIE's, 7., 2000, Newport Beach. **PROCEEDINGS...** Bellingham: SPIE, 2000, p. 2-9.
- PASCHOAL, E. F. **Controle semi-ativo de vibrações usando lógica nebulosa e fluido magnetoreológico.** 2011. 116 f. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista Julio de mesquita Filho- UNESP, Ilha Solteira, 2011.
- PICADO, R. M. **Controle semi-ativo de suspensões automotivas.** 1998. 100 f. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas- UNICAMP, Campinas, 1998.
- PYATNITSKIY, Y. S.; SKORODINSKIY, V. Numerical methods of Lyapunov function construction and their application to the absolute stability problem. **Systems & Control Letters**, v. 2, n. 2, p. 130-135, 1982. ISSN 0167-6911.
- RASHID, M. M.; RAHIM, N. A.; HUSSAIN, M. A.; RAHMAN, M. A. Analysis and experimental study of magnetorheological-based damper for semi-active suspension system using fuzzy hybrids. **IEEE Transaction on Industry Applications**, Piscataway, v. 47, n. 2, p. 1051-1059, 2011.
- REGAZZI, R. D.; XIMENES, G. M. **A importância da avaliação da vibração no corpo humano.** Rio de Janeiro: IMETRO, 2005. Disponível em: <

<http://www.isegnet.com.br/arquivosartigos/Rogério%20e%20Gilmar%20artigo%20vibracao.doc>
. >. Acesso em: 12 dez. 2012.

RUTLEDGE, D.; HUBBARD, M.; HROVAT, D. A two DOF model for jerk optimal vehicle suspensions. **Vehicle System Dynamics**, Lisse, v. 25, n. 2, p. 113-136, 1996. ISSN 0042-3114.

SAKAI, Y. **The ECVT electro continuously variable transmission**. [S.l.: s.n.], 1988. (SAE Special Publication Papers PT-125, SAE880481)

SANTOS, R. B.; BUENO, D. D.; MARQUI, C. R.; LOPES JR, V. Active vibration control of a two-floors building model based on H₂ and H_∞ methodologies using linear matrix inequalities(LMIs). In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE- IMAC, 25., 2007, Orlando. **PROCEEDINGS...** Orlando: IMAC, 2007.

SASIKUMAR, K.; MUJUMDAR, P. Fuzzy optimization model for water quality management of a river system. **Journal of water resources planning and management**, New York, v. 124, n. 2, p. 79-88, 1998. ISSN 0733-9496.

SAVARESI, S. M.; TANELLI, M.; CANTONI, C. Mixed slip-deceleration control in automotive braking systems. **Journal of dynamic systems, measurement, and control**, Milan, v. 129, n. 1, p. 20-31, 2007. ISSN 0022-0434.

SCHULTZ, D. G.; SMITH, F.; HSIEH, H.; JOHNSON, C. The generation of liapunov functions. **Advances in control systems**, New York, v. 2, p. 1-64, 1965.

SEKINE, S.; IMASAKI, N.; ENDO, T. Application of fuzzy neural network control to automatic train operation and tuning of its control rules. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 4., 1995, Yokohama. **PROCEEDINGS...** Yokohama: IEEE, 1995. p. 1741-1746.

SHIRAHATTI, A.; PRASAD, P.; PANZADE, P.; KULKARNI, M. Optimal design of passenger car suspension for ride and road holding. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Rio de Janeiro, v. 30, n. 1, p. 66-76, 2008. ISSN 1678-5878.

SPENCER JR, B.; DYKE, S.; SAIN, M.; CARLSON, J. D. Phenomenological model for magnetorheological dampers. **Journal of engineering mechanics**, New York, v. 123, n. 3, p. 230-238, 1997. ISSN 0733-9399.

SPENCER JR, B. F.; NAGARAJAIAH, S. State of the art of structural control. **Journal of Structural Engineering**, Reston, v. 129, n. 7, p. 845-856, 2003.

SRINIVASAN, A.; MCFARLAND, D. M. **Smart structures: analysis and design**. Cambridge: Cambridge University, 2000. ISBN 0521659779.

STANWAY, R.; SPROSTON, J.; STEVENS, N. Non-linear modelling of an electro-rheological vibration damper. **Journal of Electrostatics**, Amsterdam, v. 20, n. 2, p. 167-184, 1987. ISSN 0304-3886.

STELZER, G. J.; SCHULZ, M. J.; KIM, J.; ALLEMANG, R. J. A magnetorheological semi-active isolator to reduce noise and vibration transmissibility in automobiles. **Journal of intelligent material systems and structures**, London, v. 14, n. 12, p. 743-765, 2003. ISSN 1045-389X.

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones: optimization methods and software. **Optimization Methods & Software**, Abingdon, v. 11, n. 1-4, p. 625-653, 1999.

STUTZ, L. T. **Síntese e análise de uma suspensão semi-ativa magneto-reológica baseada na abordagem de controle com estrutura variável.** 2005. 181 f. Tese (Doutorado)- Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação e Pesquisa de Engenharia - COPPE, Rio de Janeiro, 2005.

SUZUKI, Y.; YAMADA, S. I.; FUJIKAWA, H. Anti-swing control of the container crane by fuzzy control . IN: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, CONTROL, AND INSTRUMENTATION- IECON, 19.,1993, Maui. **PROCEEDINGS...** Maui: IEEE, 1993. p. 230-235.

THRIFT, P. Fuzzy logic synthesis with genetic algorithms. IN: INTERNATIONAL CONFERENCE ON GENETIC ALGORITHMS, 4., 1991, Morgan. **PROCEEDINGS...** Morgan: Kaufmann Publishers, 1991. p. 509-513.

TUSSET, A. M. **Aplicação da teoria do controle ótimo em modelo de suspensão veicular não-linear controlada através de um amortecedor magneto-reológico.** 2008 156 f. Tese (Doutorado)- Escola de Engenharia,, Universidade Federal do Rio Grande do Sul- UFRS, Porto Alegre, 2008.

VANANTWERP, J. G.; BRAATZ, R. D. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. **Journal of Process Control**, London, v. 10, n. 4, p. 363-385, 2000. ISSN 0959-1524.

WILLEMS, J. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 16, n. 6, p. 621-634, 1971. ISSN 0018-9286.

WINSLOW, W. **Method and means for translating electrical impulses into mechanical force.** U.S. Patent No. 2417850, Washington, DC. Patent and Trademark Office, 1947.

WONG, C.; NI, Y.; KO, J. Steady-state oscillation of hysteretic differential model. ii: performance analysis. **Journal of engineering mechanics**, New York, v. 120, n. 11, p. 2271-2298, 1994. ISSN 0733-9399.

WU, S. J.; LIN, C. T. Optimal fuzzy controller design: local concept approach. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 8, n. 2, p. 171-185, 2000. ISSN 1063-6706.

YASUNOBU, S.; MIYAMOTO, S.; IHARA, H. Fuzzy control for automatic train operation system. IN: IFAC/IFIP/IFORS INT. CONGRESS ON CONTROL IN TRANSPORTATION SYSTEMS, , 4., 1983, Baden-Baden. **PROCEEDINGS...** Baden-Baden: IFAC, 1983. p. 33-39.

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Information and Control**, Maryland Heights v. 8, n. 3, p. 338-353, 1965.

ZADEH, L. A.; BERKELEY, C. **Fuzzy logic toolbox user's guide version 2. 1. 1.** [S.l.]: the Mathworks, 2001.