

Sandra Stephan de Souza Telles

**UM MODELO PARA  
CALIBRAÇÃO DE CÂMARAS  
DIGITAIS BASEADO EM  
LINHAS RETAS**

Presidente Prudente

2004

**Sandra Stephan de Souza Telles**

**UM MODELO PARA  
CALIBRAÇÃO DE CÂMARAS  
DIGITAIS BASEADO EM  
LINHAS RETAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Cartográficas da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP, para a obtenção do título de Mestre.

**Orientador: Prof. Dr. Antonio Maria Garcia Tommaselli**

Presidente Prudente

2004

# DEDICATÓRIA

À minha mãe, Irene Stephan, ao meu irmão Rodrigo Stephan de S. Telles, ao meu pai Ricardo E. M. de S. Telles, ao meu namorado Marcelo B. de Araújo e ao meu cachorro Toco Stephan pelo amor, carinho, incentivo e apoio.

# AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Dr. Antonio Maria Garcia Tommaselli, pela orientação, correção, incentivo, ajuda e paciência.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa (CNPQ), pelo auxílio financeiro dado a essa pesquisa com a concessão de uma bolsa.

A todos os professores do PPGCC e do departamento de Cartografia em especial ao Prof. Dr. Mauricio Galo.

A todos os meus colegas e amigos, em especial: ao Zaqueu, Christiane Kokubum, Laysson, André Tadashi, Roberto Ruy, Nilcilene, Edinéia, Giovani, Eniuce, Mário Reiss, Daniele, Miriam, Maia, Marcelo Holzschuh, France, Luiz Sappucci, Narjara, Letícia, Elaine, Edmur, Jaqueline, Juliano Fazan, Cristina Sugui, Hellen Santos, Claudinha Sato, Juliana Vicente, William Kim, Silvana Sato, Dona Mikiko, Ítalo, Cinthia Vendrusculo e Alípio pela amizade e eventuais contribuições.

Aos funcionários da FCT-UNESP, pelos serviços prestados, a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho e à Annette pela ajuda na montagem do campo de calibração.

# Epígrafe

*“...Mesmo quando tudo pede um pouco mais de calma*

*Até quando o corpo pede um pouco mais de alma*

*Eu sei, a vida não pára...”*

Oswaldo **Lenine** Macedo Pimentel

## RESUMO

Com o aumento do uso das câmaras digitais não métricas em aplicações fotogramétricas, tem crescido a necessidade pela calibração destas câmaras e pela frequência de realização desta. Com o objetivo de tornar mais simples a utilização e a automação desta etapa, foi desenvolvido um modelo matemático para calibração que usa feições retas, baseado no modelo dos planos equivalentes, com estimação dos parâmetros pelo método combinado. O modelo foi implementado em linguagem C++ em conjunto com o método convencional que usa as equações de colinearidade, de modo a permitir tanto a calibração com pontos quanto com retas. O método foi testado com dados simulados e dados reais e apresentou resultados satisfatórios, compatíveis com o modelo convencional. Para os experimentos com dados reais, foi ainda implementado um programa de extração de bordas com precisão subpixel.

## ABSTRACT

Nowadays, digital cameras have been more and more employed in photogrammetric applications. However, the geometric of common camera is not rigid as metric cameras. Therefore, the need for camera calibration has been increasing; moreover it is important to be frequent. The use of straight lines can lead to an easy and fast camera calibration process due to the promising possibility of automation in the line extraction process. Following this thought, a mathematical model, based on the model of equivalent planes, was developed to include inner orientation parameters, using straight lines. This model was implemented using the unified method of adjustment with weight constraint to the parameters. The implemented program was tested using simulate and real data. The results have shown the developed model is comparable to the conventional one using control points. A feature extraction method aiming sub-pixel precision was implemented as well.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Distorção radial simétrica.....	19
Figura 2.2 - Distorção descentrada (ANDRADE, 1998).....	20
Figura 2.3 – Sistema de referência no espaço imagem. ....	23
Figura 2.4 - Os vetores normais aos planos de interpretação no espaço imagem e espaço objeto (TOMMASELLI e TOZZI, 1996).....	36
Figura 2.5 – Elementos das representações normal e paramétrica da reta (TOMMASELLI e TOZZI, 1996). ....	37
Figura 2.6 - Regiões que são consideradas para o cálculo do valor suavizado (ARTERO, 1999).....	45
Figura 2.7 – Vizinhança do pixel de contorno. ....	46
Figura 2.8 – Máscaras de Sobel. ....	47
Figura 3.1 – Fluxograma do programa implementado.....	50
Figura 3.2 – Vetores normais em relação aos planos de interpretação no espaço imagem e objeto.....	55
Figura 3.3 - Projeto do campo de calibração. ....	64
Figura 3.4 - Campo de Calibração. ....	65
Figura 3.5 - Exemplo do algoritmo para o cálculo da direção.....	69
Figura 3.6 - Exemplo da rotina de extração de coordenadas subpixel.....	70

Figura 3.7 - Exemplo do algoritmo de extração de linhas.....	71
Figura 4.1 – Retas usadas na geração das imagens simuladas. ....	75
Figura 4.2 – Espaço objeto simulado.....	79
Figura 4.3 - Imagens simuladas, de acordo com os parâmetros da tabela 4.5.....	80
Figura 4.4 – Imagem simulada modificada para o experimento. ....	93
Figura 4.5 – Imagem simulada 4 da figura 4.3 modificada para o experimento.....	95
Figura 4.6 – Imagens tomadas do campo de calibração. ....	101
Figura 4.7 – Imagens usadas para verificação. Os pontos marcados foram utilizado para orientação exterior. ....	106



## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Parâmetros de orientação exterior das imagens simuladas.....	75
Tabela 4.2 – Resultados da resseção.....	76
Tabela 4.3 – Comparação da resseção pelo método paramétrico e combinado, usando retas.....	77
Tabela 4.4 - Retas simuladas para espaço objeto.....	79
Tabela 4.5 - Parâmetros de orientação exterior simulados. ....	80
Tabela 4.6 - Parâmetros de orientação interior simulados .....	81
Tabela 4.7 – Resultados da calibração com erros randômicos de $1\mu m$ .....	83
Tabela 4.8 – Matriz de correlação para o experimento com erros randômicos $1\mu m$ .	84
Tabela 4.9 – Resultados da calibração com erros randômicos $1\mu m$ considerando apenas $K_1$ . ....	85
Tabela 4.10 – Resultados da calibração com erros randômicos $5\mu m$ . ....	86
Tabela 4.11 – Resultados da calibração com erros randômicos $10\mu m$ .....	88
Tabela 4.12 – Resultados da calibração com erros randômicos $10\mu m$ considerando apenas $K_1$ . ....	89
Tabela 4.13 - Retas simuladas para o espaço objeto com variação de Z de 200mm. ....	90

Tabela 4.14 – Resultados da calibração com erros randômicos de $5\mu m$ e com variação de $Z$ no espaço objeto.....	91
Tabela 4.15 – Resultados da calibração com erros randômicos de $10\mu m$ e com variação de $Z$ no espaço objeto.....	92
Tabela 4.16 – Resultados da calibração com erros randômicos $5\mu m$ e com menos convergência. ....	94
Tabela 4.17 – Resultados da calibração com erros randômicos de $5\mu m$ sem rotação em $\kappa$ . ....	96
Tabela 4.18 – Resultados da calibração com pontos e comparações com reta, ambos pelo método combinado. ....	98
Tabela 4.19 - Resultados da calibração com dados reais para pontos usando o programa CC e o implementado neste trabalho. ....	103
Tabela 4.20 - Resultados da calibração com dados reais para pontos usando o programa CC e o implementado neste trabalho. ....	104
Tabela 4.21 – Coordenadas dos pontos no espaço objeto calculadas para verificação, usando os parâmetros de orientação interior obtidos por pontos e por retas. ....	107

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>13</b>
1.1	Considerações iniciais .....	13
1.2	Objetivo.....	14
1.2.1	Objetivo geral.....	14
1.2.2	Objetivos específicos .....	14
<b>2</b>	<b>CALIBRAÇÃO.....</b>	<b>15</b>
2.1	Geometria da Câmara.....	15
2.1.1	Distorções.....	16
2.1.1.1	Distorção radial simétrica .....	17
2.1.1.2	Distorção descentrada .....	19
2.2	Sistemas de Referência.....	22
2.2.1	Sistemas de referência no espaço imagem .....	22
2.2.2	Sistemas de referência no espaço objeto .....	23
2.3	Métodos e Modelos fotogramétricos de Calibração.....	24
2.3.1	Métodos e Modelos que utilizam pontos.....	24
2.3.1.1	Métodos de laboratório.....	24
2.3.1.1.1	Multicolimador .....	24
2.3.1.1.2	Goniômetro .....	25
2.3.1.2	Métodos de campo.....	26
2.3.1.2.1	Método dos Campos Mistos .....	27
2.3.1.2.2	Calibração <i>On-the-job</i> (em serviço).....	28
2.3.1.2.3	Auto-calibração.....	29
2.3.1.2.4	Método da DLT .....	31
2.3.2	Modelos e Métodos que utilizam Retas.....	32
2.3.2.1	<i>Plumb-line</i> .....	33
2.3.2.1.1	Método de Prescott e McLean.....	34
2.3.2.2	Modelo dos planos equivalentes .....	36
2.3.2.2.1	Método de calibração em dois estágios que usa linhas retas.....	41

2.3.2.3	Método de Triangulação de Habib.....	42
<b>2.4</b>	<b>Processamento de Imagens para extração de linhas e bordas.....</b>	<b>44</b>
2.4.1	Suavização.....	44
2.4.1.1	Filtro da mediana com análise de variância.....	44
2.4.2	Esqueletização.....	45
2.4.3	Operadores de Sobel .....	47
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>49</b>
<b>3.1</b>	<b>Modelos Matemáticos.....</b>	<b>51</b>
3.1.1	Equação de colinearidade .....	51
3.1.2	Desenvolvimento do modelo baseado em linhas retas.....	52
<b>3.2</b>	<b>Implementação Computacional .....</b>	<b>58</b>
3.2.1	Parâmetros .....	59
3.2.2	Observações .....	60
<b>3.3</b>	<b>Geração de dados simulados e dados reais .....</b>	<b>61</b>
3.3.1	Programa para geração de dados simulados.....	61
3.3.2	Campo de calibração.....	63
<b>3.4</b>	<b>Extração de linhas .....</b>	<b>65</b>
3.4.1	Transformação da imagem de RGB para níveis de cinza .....	66
3.4.2	Suavização com preservação de bordas.....	66
3.4.3	Eliminação dos valores de brilho menores que um limiar .....	67
3.4.4	Esqueletização.....	67
3.4.5	Cálculo da direção da reta.....	67
3.4.6	Extração de coordenadas subpixel de pontos pertencentes às linhas.....	69
3.4.7	Exemplo da rotina de extração de linhas .....	71
<b>3.5</b>	<b>Extração de coordenadas subpixel de bordas .....</b>	<b>72</b>
<b>4</b>	<b>EXPERIMENTOS.....</b>	<b>74</b>
<b>4.1</b>	<b>Experimentos com dados simulados.....</b>	<b>74</b>
4.1.1	Experimentos para resseção.....	74
4.1.2	Testes para calibração .....	78
4.1.2.1	Experimentos com diferentes erros randômicos.....	82
4.1.2.1.1	Erros randômicos com desvio padrão de $1\mu m$ .....	82
4.1.2.1.2	Erros randômicos com desvio padrão de $5\mu m$ .....	86
4.1.2.1.3	Erros randômicos com desvio padrão de $10\mu m$ .....	87

4.1.2.2	Espaço objeto não plano.....	89
4.1.2.3	Experimentos com variações de parâmetros OE .....	93
4.1.2.4	Comparação com calibração usando pontos.....	97
4.1.3	Análise dos experimentos com dados simulados .....	99
<b>4.2</b>	<b>Experimentos com dados reais.....</b>	<b>100</b>
4.2.1	Tomada das imagens.....	101
4.2.2	Leitura e processamento das imagens .....	101
4.2.3	Processamento dos dados.....	102
4.2.4	Análise dos resultados com dados reais .....	108
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>109</b>
<b>5.1</b>	<b>Conclusões .....</b>	<b>109</b>
<b>5.2</b>	<b>Sugestões para trabalhos futuros.....</b>	<b>110</b>

# CAPÍTULO I

## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 Considerações iniciais

A calibração de câmaras é importante em Fotogrametria, pois, através da determinação de parâmetros de orientação interior, possibilita a correção de erros sistemáticos que comprometem a precisão de processos fotogramétricos.

Nos últimos anos vem aumentando a utilização de câmaras digitais não métricas em aplicações fotogramétricas. A geometria interna de câmaras não métricas é menos estável e possui maiores distorções quando comparadas às câmaras métricas. Assim, quando se utilizam câmaras não métricas não apenas é importante uma boa calibração, como também que esta seja realizada com maior frequência. Portanto, seria interessante um processo de calibração rápido e fácil, como no caso de um processo automático.

Os métodos mais comuns de calibração utilizam feições pontuais. Entretanto existem outros métodos que, ao invés de pontos, usam feições retas. A vantagem do uso de feições retas, em relação aos pontos, é que estas, em geral, são mais fáceis de identificar na imagem, tanto visualmente, quanto automaticamente, além de serem muito comuns em ambientes antrópicos. Porém, quando comparados os modelos matemáticos que utilizam retas aos modelos que

utilizam pontos, verifica-se que há menos estudos realizados relacionados ao uso de modelos a partir de retas.

Levando em consideração estes aspectos, a proposta deste trabalho foi desenvolver um modelo matemático que relaciona o espaço objeto e espaço imagem através do uso de feições retas, incluindo todos os parâmetros de orientação interior; bem como realizar um estudo comparativo dos resultados obtidos.

## **1.2 Objetivo**

### **1.2.1 Objetivo geral**

O objetivo principal desse trabalho foi desenvolver um modelo matemático para calibração usando feições retas que incluía os parâmetros de orientação interior costumeiramente utilizados.

### **1.2.2 Objetivos específicos**

Os objetivos específicos foram: implementar um programa que possibilite a calibração por pontos ou por retas; realizar experimentos com dados simulados para testar diferentes configurações e verificar o comportamento do modelo; testar o programa em situação real; fazer análise estatística dos resultados e realizar uma comparação com resultados obtidos através de programa de calibração, usando pontos.

# CAPÍTULO II

## 2 CALIBRAÇÃO

### 2.1 Geometria da Câmara

O modelo matemático de projeção perspectiva central pode ser usado para descrever a formação da imagem em uma câmara, porém esta consideração implica em admitir algumas discrepâncias. Assim, a *calibração de câmaras* é responsável por identificar os desvios e calcular quanto uma projeção em uma câmara real difere do modelo teórico de perspectiva central (ATKINSON, 1996).

A imagem é formada no *plano de projeção*, *plano focal*, ou, para câmaras digitais, *plano dos sensores* (ATKINSON, 1996 e GALO, 1993), o qual se admite como perpendicular ao eixo ótico do conjunto de lentes. O ponto de intersecção entre o eixo ótico do conjunto de lentes com o plano focal é chamado *ponto principal de autocolimação*, ou simplesmente *ponto principal* ( $pp$ ).

A *distância principal* ( $c$ ) é a distancia ortogonal entre o ponto principal e o ponto nodal do sistema de lentes ou, de maneira simplificada, é a distância ortogonal entre o ponto principal e o centro perspectivo ( $CP$ ) (ATKINSON, 1996 e MIKHAIL et al, 2001). Nas câmaras focalizadas para o infinito, como as câmaras métricas, o plano focal fica localizado na posição do foco principal do conjunto de lentes; neste caso a distância principal é igual à *distância focal* ( $f$ ).



Para câmaras usadas em aplicações de curta distância, a distância principal é maior que a distância focal e muda conforme a focalização (MIKHAIL et al, 2001).

O modelo de perspectiva central admite que o feixe de luz proveniente de um ponto no espaço objeto será projetado na imagem por meio de uma linha reta passante pelo centro perspectivo do conjunto de lentes. Porém, neste processo ocorrem diferentes erros que podem provocar desvios na trajetória da luz, os quais serão melhor explicados na seção 2.1.1.

Em alguns casos, além das distorções das lentes, considera-se também os parâmetros de afinidade que têm como objetivo modelar a não ortogonalidade e a diferença de escala entre os eixos x e y do referencial imagem. Este efeito ocorre em câmaras digitais quando o plano dos sensores não é perpendicular ao eixo óptico e quando as dimensões do pixel são diferentes em x e y (GALO, 1993). Para este trabalho, admite-se que a câmara usada não sofre influência deste efeito.

### **2.1.1 Distorções**

O feixe de luz, ao atravessar o sistema óptico, sofre perturbações que podem prejudicar a qualidade visual ou provocar deslocamento de pontos na imagem. Devido, principalmente, ao processo de fabricação e ao fato das lentes serem esféricas, ao invés de parabolóides de revolução, podem ocorrer efeitos como: aberração esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo e distorção radial (GALO, 1993). Os quatro primeiros efeitos prejudicam a qualidade visual da imagem e o último provoca deslocamento radial e simétrico com relação ao ponto

principal, por isso esse efeito é denominado *distorção radial simétrica*. Além desses efeitos, existem as aberrações cromáticas que não dependem da construção das lentes (ANDRADE, 1998). Ocorrem deslocamentos também devido ao alinhamento dos eixos das lentes, pertencentes ao sistema de lentes, ao longo do eixo ótico do sistema de lentes não ser perfeito. A este deslocamento na imagem dá-se o nome de *distorção descentrada*.

### 2.1.1.1 Distorção radial simétrica

A imperfeição na forma das lentes causa uma refração no feixe de luz incidente nestas. Sendo  $\alpha$  o ângulo de incidência em relação ao eixo ótico; ao atravessar as lentes o ângulo do feixe em relação ao eixo torna-se  $\alpha + d\alpha$ , ocasionando um deslocamento  $\partial r$  na posição da imagem no plano do negativo. Se o plano do negativo se deslocasse perpendicularmente ao eixo ótico, em alguma posição, o deslocamento  $\partial r$  para um determinado ponto se anularia. Conrady (1919 apud ANDRADE, 1998) denominou o deslocamento que anularia  $\partial r$  de *distorção longitudinal*  $\partial \ell$ . Conrady (1919 apud ANDRADE, 1998) partiu de três hipóteses para formular o modelo: a primeira é que a *distorção longitudinal* pode ser modelada por uma função contínua, apresentada pela equação 2.1, na qual  $r$  é a distância entre o ponto lido na imagem e o ponto principal, como mostra figura 2.1.

$$\partial \ell = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \dots \quad (2.1)$$

A segunda hipótese assegura, que o raio axial não sofre desvio ao atravessar as lentes,  $a_0 = 0$ . A terceira garante que o sentido da *distorção longitudinal* seja positivo para os deslocamentos centrífugos da imagem e, para isso, foram eliminados os termos de ordem ímpar (equação 2.2).

$$\partial \ell = a_2 r^2 + a_4 r^4 + \dots \quad (2.2)$$

Da figura 2.1, tira-se a seguinte relação (equação 2.3).

$$\partial r = \frac{r}{c} \partial \ell \quad (2.3)$$

Sendo  $K_{i/2} = a_i c^{-1}$  e unindo as equações anteriores (equação 2.2 e 2.3) tem-se (equação 2.4) :

$$\partial r = K_1 r^3 + K_2 r^5 + K_3 r^7 + \dots \quad (2.4)$$

Decompondo  $\partial r$  em dois componentes  $\partial x$  e  $\partial y$ , tem-se o efeito da distorção radial simétrica nas coordenadas  $x$  e  $y$ , como mostram as equações 2.5 e 2.6.

$$\partial x = \partial r \frac{(x - x_0)}{r} \quad (2.5)$$

$$\partial y = \partial r \frac{(y - y_0)}{r} \quad (2.6)$$

Portanto:

$$\partial x = (x - x_0) (K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6 + \dots) \quad (2.7)$$

$$\partial y = (y - y_0) (K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6 + \dots) \quad (2.8)$$

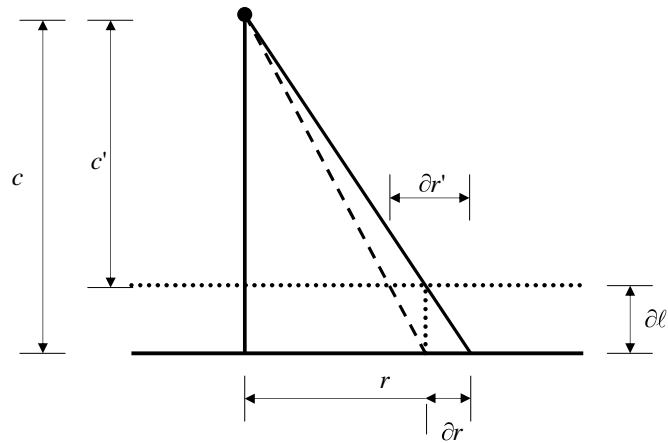


Figura 2.1 - Distorção radial simétrica.

Ao final do processo de calibração a distorção radial pode apresentar valores positivos e negativos, sendo que, em geral, um dos dois predomina. Quando se balanceia a curva de distorção deve se calcular uma nova distância focal chama *distância focal calibrada* que às vezes é referida como *constante da câmara* (MIKHAIL et al, 2001). Este processo é mais usado para o caso analógico, não sendo necessário no caso da calibração de câmaras digitais.

### 2.1.1.2 Distorção descentrada

O modelo da distorção descentrada de Conrady (1919 apud BROWN e FRYER, 1986) é dividido em componentes radial ( $\Delta_r$ ) e tangencial ( $\Delta_t$ ), sendo o ponto principal a origem do sistema de coordenadas cartesianas  $x, y$ . Esse modelo (equações 2.9 e 2.10) é válido apenas para lentes focadas para o infinito.

$$\Delta_r = 3P(r)\text{sen}(\phi - \phi_0) \quad (2.9)$$

$$\Delta_t = P(r)\text{cos}(\phi - \phi_0) \quad (2.10)$$

$$P(r) = J_1 r^2 + J_2 r^4 + \dots \quad (2.11)$$

nas quais:

- $\phi$  é o ângulo entre o eixo  $x$  positivo e o vetor radial do ponto na imagem;
- $r$  é a distância radial;
- $\phi_0$  é o ângulo de fase, que representa o ângulo entre o eixo  $x$  e o eixo de distorção tangencial máxima;
- $P(r)$  é a função perfil;
- $J_1, J_2, \dots$  são os coeficientes da função perfil;

A figura 2.2 apresenta em esquema da distorção descentrada.

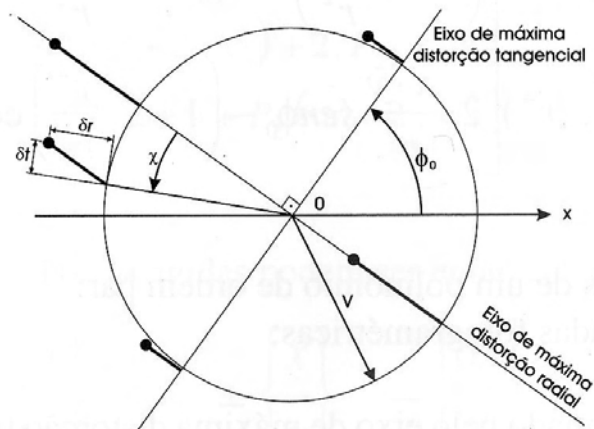


Figura 2.2 - Distorção descentrada (ANDRADE, 1998).

na qual:

- $v$  é a distância entre o eixo óptico e o ponto imagem;

- $\chi$  é o ângulo medido no plano da imagem, do eixo de máxima distorção radial até a radial que contém a imagem não distorcida do ponto;
- $\partial r$  é a distorção radial assimétrica;
- $\partial t$  é a distorção tangencial.

Reescrevendo as equações 2.9 e 2.10 em função de  $x$  e  $y$ , as componentes  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  nas direções dos eixos  $x$  e  $y$  respectivamente resultam nas equações 2.12 e 2.13 (ANDRADE, 1998).

$$\Delta_x = [P_1(r^2 + 2x^2) + 2P_2xy][1 + P_3r^2 + \dots] \quad (2.12)$$

$$\Delta_y = [P_2(r^2 + 2y^2) + 2P_1xy][1 + P_3r^2 + \dots] \quad (2.13)$$

nas quais os parâmetros  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  estão relacionados com  $J_1$  e  $J_2$  pelas equações 2.14.

$$\begin{aligned} P_1 &= -J_1 \operatorname{sen} \phi_0 \\ P_2 &= J_1 \cos \phi_0 \\ P_3 &= \frac{J_2}{J_1} \\ J_1 &= (P_1^2 + P_2^2)^{1/2} \\ J_2 &= -J_1 P_3 \\ \operatorname{tg} \phi_0 &= -\frac{P_1}{P_2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Segundo Brown e Fryer (1986) os termos de maiores ordens ( $J_2$ ,  $J_3$ , ...) raramente são significantes. Assim, normalmente os termos  $P_3$  e superiores e superiores são desprezados.

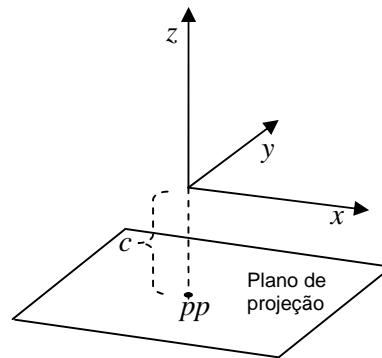
Da mesma forma que a distorção radial simétrica, a distorção descentrada também varia com a distância principal. Porém, segundo Brown e Fryer (1986), geralmente esta variação é razoavelmente pequena para câmaras métricas, sendo menor que  $1\mu m$ .

## 2.2 Sistemas de Referência

Os sistemas de referência podem ser divididos em sistemas do espaço imagem e sistemas do espaço objeto.

### 2.2.1 Sistemas de referência no espaço imagem

O sistema de referência fotogramétrico  $(x, y, z)$  é definido com origem no centro perspectivo,  $CP$ , (SCHENK, 1999 e ATKINSON, 1996). O eixo  $z$  do sistema cartesiano coincide com o eixo ótico e seu sentido é contrário à localização do plano de projeção, como mostra a figura 2.3. Os eixos  $x$  e  $y$  são paralelos ao plano de projeção de maneira a formar um sistema dextrógiro (ATKINSON, 1996). As coordenadas de um ponto  $p$  qualquer na imagem, neste sistema, são denotadas por  $x_p$ ,  $y_p$  e  $z_p$ , sendo  $z_p = -c$ .



**Figura 2.3 – Sistema de referência no espaço imagem.**

O sistema fiducial é usado para câmaras métricas. O centro fiducial é definido pela intersecção de linhas que unem as marcas fiduciais opostas na imagem. Quando se trata de Aerofotogrametria, o eixo  $x$  tem aproximadamente a mesma direção que a linha de vôo e o eixo  $y$  é tal que o sistema cartesiano seja dextrógiro. No caso de câmaras digitais não métricas, considera-se, ao invés do centro fiducial, o centro da imagem.

### **2.2.2 Sistemas de referência no espaço objeto**

No espaço objeto, o sistema, considerado neste trabalho, deve ser tridimensional e cartesiano. A origem e orientação do sistema podem ser definidas de acordo com o que for conveniente. Um ponto no espaço objeto é denotado por  $X_p$ ,  $Y_p$  e  $Z_p$ , e as coordenadas do centro perspectivo no sistema de referência do espaço objeto são  $X_0$ ,  $Y_0$  e  $Z_0$ .



## **2.3 Métodos e Modelos fotogramétricos de Calibração**

Existem vários modelos e métodos de calibração desenvolvidos em Fotogrametria, os métodos mais tradicionais foram inicialmente desenvolvidos para câmaras analógicas, especialmente as métricas, e mais tarde adaptados para câmaras digitais.

Com o objetivo de proporcionar uma compreensão geral dos modelos e métodos de calibração já existentes, são apresentados alguns dentre os mais conhecidos e os que serviram de base para o desenvolvimento deste trabalho.

Para facilitar o entendimento, os métodos foram separados de acordo com a fonte de controle envolvida, ou seja, modelos e métodos que usam pontos e modelos e métodos que usam retas.

### **2.3.1 Métodos e Modelos que utilizam pontos**

Os métodos que utilizam pontos podem ser subdivididos ainda em métodos de campos e métodos de laboratório.

#### **2.3.1.1 Métodos de laboratório**

##### **2.3.1.1.1 Multicolimador**

A calibração com multicolimadores é um método bem difundido para câmaras aerofotogramétricas, focalizadas no infinito. O multicolimador consiste de um conjunto de colimadores, responsáveis pela projeção de luz, distanciados por um

ângulo constante, de modo que todos os feixes de luz se interceptam num único ponto (ANDRADE, 1998).

A câmara é colocada com o ponto nodal exterior do sistema de lentes coincidindo com a intersecção dos raios de luz provenientes dos colimadores e seu plano focal deve ser posicionado perpendicularmente ao eixo ótico do colimador central. Quando os colimadores são acionados, a imagem é registrada em uma chapa fotográfica de vidro, posicionada no plano focal. A imagem resultante contém marcas ao longo das diagonais. Os parâmetros de orientação interior são calculados a partir dos ângulos conhecidos entre os colimadores e de medidas de distância entre as marcas (para aprofundar neste método sugere-se consultar MIKHAIL et al 2001).

#### **2.3.1.1.2 Goniômetro**

O goniômetro é um aparelho que permite medir ângulos, de modo semelhante ao teodolito. No plano focal da câmara a ser calibrada é colocada uma placa com uma malha de pontos com coordenadas conhecidas. A câmara é encaixada no goniômetro e é alinhada juntamente com a malha, até que esteja na posição zero do goniômetro. A seguir o goniômetro é apontado para cada uma das marcas da malha e os respectivos ângulos são lidos, semelhantemente ao método do multicolimador; os parâmetros de orientação interior são calculados a partir das distâncias conhecidas entre os pontos da malha e dos ângulos lidos no goniômetro (MIKHAIL, et al, 2001).

### 2.3.1.2 Métodos de campo

Um dos modelos mais usados para relacionar o espaço objeto com o espaço imagem nos métodos que utilizam pontos é o modelo de colinearidade. O modelo de colinearidade consiste em duas equações, as quais asseguram que um ponto no espaço objeto, o seu correspondente no espaço imagem e o centro perspectivo são colineares no momento da tomada da imagem, se todos os erros sistemáticos tiverem sido eliminados.

$$x = -c \cdot \frac{r_{11}(X_i - X_0) + r_{12}(Y_i - Y_0) + r_{13}(Z_i - Z_0)}{r_{31}(X_i - X_0) + r_{32}(Y_i - Y_0) + r_{33}(Z_i - Z_0)}$$

$$y = -c \cdot \frac{r_{21}(X_i - X_0) + r_{22}(Y_i - Y_0) + r_{23}(Z_i - Z_0)}{r_{31}(X_i - X_0) + r_{32}(Y_i - Y_0) + r_{33}(Z_i - Z_0)}$$
(2.15)

nas quais  $r_{ij}$  são as componentes da matriz de rotação,  $R$ , entre o sistema do espaço objeto e o sistema do espaço imagem; a qual é definida por  $R_z(\kappa)$ ,  $R_y(\varphi)$  e  $R_x(\omega)$ :

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \kappa & \cos \omega \cdot \text{sen} \kappa + \text{sen} \omega \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \kappa & \text{sen} \omega \cdot \text{sen} \kappa - \cos \omega \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \kappa \\ -\cos \varphi \cdot \text{sen} \kappa & \cos \omega \cdot \cos \kappa - \text{sen} \omega \cdot \text{sen} \varphi \cdot \text{sen} \kappa & \text{sen} \omega \cdot \cos \kappa + \cos \omega \cdot \text{sen} \varphi \cdot \text{sen} \kappa \\ \text{sen} \varphi & -\text{sen} \omega \cdot \cos \varphi & \cos \omega \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

na qual:

- $\kappa$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  são as rotações em torno dos eixos  $Z$ ,  $Y$  e  $X$ , respectivamente.

No processo de calibração são adicionados às equações de colinearidade mais alguns parâmetros de orientação interior, como coordenadas do

ponto principal e parâmetros de distorção das lentes. Assim pode-se escrever o modelo como:

$$x = x_0 - \Delta_{Kx} - \Delta_{Px} - c \cdot \frac{r_{11}(X_i - X_0) + r_{12}(Y_i - Y_0) + r_{13}(Z_i - Z_0)}{r_{31}(X_i - X_0) + r_{32}(Y_i - Y_0) + r_{33}(Z_i - Z_0)} \quad (2.17)$$

$$y = y_0 - \Delta_{Ky} - \Delta_{Py} - c \cdot \frac{r_{11}(X_i - X_0) + r_{12}(Y_i - Y_0) + r_{13}(Z_i - Z_0)}{r_{31}(X_i - X_0) + r_{32}(Y_i - Y_0) + r_{33}(Z_i - Z_0)}$$

nas quais:

- $x_0$  e  $y_0$  são as coordenadas do ponto principal referenciadas no sistema com origem no centro da imagem;
- $\Delta_{Kx}$  e  $\Delta_{Px}$  são os deslocamentos causados na direção  $x$  pela distorção radial simétrica e pela distorção descentrada, respectivamente.
- $\Delta_{Ky}$  e  $\Delta_{Py}$  são os deslocamentos causados na direção  $y$  pela distorção radial simétrica e pela distorção descentrada, respectivamente.

### 2.3.1.2.1 Método dos Campos Mistos

Grande parte dos métodos de calibração de campo para Aerofotogrametria utiliza pontos no terreno com coordenadas conhecidas. A vantagem desses métodos, neste caso, é que, além da acurácia com que esses pontos podem ser levantados, a câmara é usada em condições similares às quais ela se encontrará na tomada das fotos para o aerolevanteamento. Porém, é importante haver uma boa quantidade de pontos de apoio, tanto planimétricos como altimétricos, distribuídos de forma relativamente uniforme na cena. Quando se têm

fotos perfeitamente verticais ( $\varphi = \omega = 0$ ) e terreno plano podem ocorrer relações constantes entre os seguintes parâmetros:

- $x_0$  e  $X_0$ ;
- $y_0$  e  $Y_0$ ;
- $c$  e  $Z_0$ .

Nesta situação, Merchant (1979) explica a correlação entre os parâmetros no processo de calibração: os coeficientes ( $c/(Z - Z_0)$ ) que multiplicam os parâmetros no ajustamento tornam-se múltiplos (ou quase múltiplos, quando as fotos são aproximadamente verticais), causando dependência linear e um sistema mal condicionado.

A calibração poderia ser efetuada em um terreno acidentado, porém, antes do advento da Geodésia por satélites, o processo de levantamento de pontos de apoio nesse tipo de terreno era mais complexo.

Para solucionar este problema Merchant (1979) desenvolveu o chamado Método dos Campos Mistos. Utilizou dois campos de teste, um montanhoso e outro plano. O montanhoso servia para quebrar a dependência linear, e neste eram usados poucos pontos de apoio, o que era compensado pela grande quantidade de pontos existentes no campo de teste plano.

#### **2.3.1.2.2 Calibração *On-the-job* (em serviço)**

O objetivo do método *on-the-job* é realizar a calibração juntamente com o processo de levantamento. São usadas as equações de colinearidade com os parâmetros adicionais de orientação interior (equações 2.17). Ao redor ou sobre o

objeto, são colocados pontos de apoio a serem imageados. Realiza-se uma fototriangulação com as equações de colinearidade estendidas para considerar parâmetros de orientação interior (CLARKE e FRYER, 1998). As vantagens desse método são mais evidentes para câmaras não-métricas, que possuem a necessidade de diferentes focalizações (ATKINSON, 1996).

### 2.3.1.2.3 Auto-calibração

A auto-calibração também é baseada nas equações de colinearidade estendidas para calibração. A diferença da calibração *on-the-job* e a auto-calibração é que na última não há, de fato, a necessidade de pontos de apoio (CLARKE e FRYER, 1998). Podem ser considerados como parâmetros: a orientação exterior, a orientação interior e as coordenadas de pontos no espaço objeto. Para solucionar o problema é necessário acrescentar injunções que podem ser, por exemplo, coordenadas, distâncias ou ângulos conhecidos no espaço objeto, parâmetros de orientação exterior conhecidos e as condições de variação das distorções das lentes da câmara em diferentes focalizações (FRASER, 1980, apud FRASER, 1997).

Quando todos os pontos no espaço objeto são conhecidos e desejar-se determinar apenas os parâmetros de orientação exterior e interior, o procedimento pode ser chamado de pré-calibração, ou simplesmente calibração (GALO, 1993).

Um procedimento muito comum na auto-calibração, para solucionar problemas de dependência linear e sistemas mal condicionados, é o uso de fotos

tomadas com a câmara em posições convergentes e rotacionadas entre si de aproximadamente  $90^\circ$  em  $\kappa$ .

### 2.3.1.2.3.1 Método das Câmaras Convergentes

Este método foi desenvolvido após a missão Apollo 14 que teve como objetivo mapear a Lua a partir de uma câmara aerofotogramétrica a qual quebrou durante a missão. As fotos, então, foram tomadas com uma câmara não métrica que não havia sido calibrada. Assim criou-se a necessidade de calibrá-la com estas imagens (KENEFFICK et al, 1974). O que possibilitou essa calibração foi o fato das fotos serem convergentes e rotacionadas entre si.

Quando são usadas fotos convergentes, isto é, tomadas de posições oblíquas, pode-se eliminar os problemas de correlações que ocorrem entre os parâmetros:  $x_0$  e  $X_0$ ,  $y_0$  e  $Y_0$  e  $c$  e  $Z_0$ .

No entanto, o uso de fotos convergentes não basta para solucionar o problema. É necessário que se tenha, além disto, fotos rotacionadas entre si de aproximadamente  $90^\circ$  em torno do eixo ótico ( $90^\circ$  em  $\kappa$ ). Isto serve para eliminar tanto a correlação entre os parâmetros  $x_0$  e  $X_0$  quanto entre  $y_0$  e  $Y_0$ . Com isto as coordenadas  $x_0$  e  $y_0$  terão precisão equivalente (KENEFFICK et al, 1974). Portanto, o método de câmaras convergentes consiste em usar, além de imagens convergentes, imagens rotacionadas de aproximadamente  $90^\circ$  em torno do eixo ótico. Quando se pretende efetuar uma calibração sem a necessidade das coordenadas de tomadas das fotos e pontos de apoio no terreno, se fixa apenas uma das posições da tomada da foto e as outras podem flutuar.

#### 2.3.1.2.4 Método da DLT

Essa abordagem foi desenvolvida na Universidade de Illinois (ABDEL-AZIZ e KARARA, 1971, 1974 apud ATKINSON, 1996). A inovação da DLT foi o conceito da transformação direta das coordenadas medidas na imagem para as coordenadas no espaço objeto. Seu modelo matemático foi obtido agrupando alguns parâmetros das equações de colinearidade (equação 2.17) e considerando escalas diferentes nos eixos  $x$  e  $y$  (TOMMASELLI e TOZZI, 1991), resultando no seguinte par de equações (equação 2.18).

$$\begin{aligned} x + xK_1r^2 &= \frac{(L_1X + L_2Y + L_3Z + L_4)}{(L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1)} \\ y + yK_1r^2 &= \frac{(L_5X + L_6Y + L_7Z + L_8)}{(L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

na qual:

- $L_i$  são agrupamentos de diferentes parâmetros de orientação exterior e interior presentes na equação de colinearidade;
- $K_1$  é um parâmetro de distorção radial das lentes;
- $r^2 = x^2 + y^2$ ;

Considerando  $A = L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1$ , foi derivada, a partir da equação 2.18, uma solução linear (equação 2.19).

$$\begin{aligned} L_1X + L_2Y + L_3Z + L_4 - xL_9X - xL_{10}Y - xL_{11}Z - xK_1r^2A - x &= r_x \\ L_5X + L_6Y + L_7Z + L_8 - yL_9X - yL_{10}Y - yL_{11}Z - yK_1r^2A - y &= r_y \end{aligned} \quad (2.19)$$



Fazendo  $AK = K^{\wedge}$  a equação 2.19 pode ser reduzida à equação matricial 2.20.

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X & -Y & -Z & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & xX & xY & xZ & xr^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -X & -Y & -Z & -1 & yX & yY & yZ & yr^2 \end{bmatrix} L + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad (2.20)$$

na qual:

- $L = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ \dots \ L_{11} \ K'_1]$ .

Como as equações possuem 12 incógnitas, são necessários, no mínimo, 6 pontos de controle. É importante notar que neste caso podem ocorrer problemas de correlação semelhantes aos explicados anteriormente com relação às equações de colinearidade, portanto, os pontos de apoio não devem pertencer ao mesmo plano ou a câmara deve ter sido colocada em posição oblíqua ao plano contendo os pontos.

A vantagem desse método é que o modelo usado para transformação é linear, ou seja, num processo de ajustamento não há a necessidade de iterações. A desvantagem é que seus parâmetros não possuem significado físico. Além disso, com relação aos parâmetros de distorção das lentes, o modelo inclui apenas o primeiro termo da distorção radial simétrica.

### 2.3.2 Modelos e Métodos que utilizam Retas

Assim como os pontos, as retas também podem ser utilizadas para realizar a calibração. As vantagens da utilização de retas é que, em geral, na

imagem, tanto a detecção automática, quanto a visualização destas feições é mais simples quando comparadas a feições do tipo pontos. Existem métodos que usam retas para relacionar o espaço objeto com o espaço imagem e outros que utilizam apenas a imagem destas feições para determinação de alguns parâmetros de orientação interior.

A seguir serão descritos alguns métodos e modelos que se baseiam em retas.

### 2.3.2.1 *Plumb-line*

O método *plumb-line* (fio de prumo) foi desenvolvido por Brown em 1971 e é assim denominado, pois as primeiras retas imageadas para o processo de calibração eram de um conjunto de fios de prumo. Esse método é adequado para o cálculo dos parâmetros de distorção das lentes, distorção radial e descentrada. Neste método parte-se do princípio que, em uma projeção perspectiva, não havendo distorções, a imagem de uma linha reta será também uma linha reta no plano. Assim, os desvios da colinearidade dos pontos da linha projetada na imagem são atribuídos às distorções radial simétrica e descentrada. Neste método não há a necessidade de correspondência com o espaço objeto, isto é, não há a necessidade que as retas sejam conhecidas no espaço objeto, bem como a posição da câmara no instante da tomada das fotos.

O modelo matemático usado no método *plumb-line* é a equação da reta no plano. Para o cálculo dos parâmetros, são observados vários pontos na imagem das retas. A vantagem desse método é que não há a necessidade do uso de equipamentos de laboratório ou campos de calibração. São necessárias apenas

feições retas, muito comuns em ambientes antrópicos. Porém, este método não pode ser usado para recuperar os parâmetros de orientação exterior, bem como a distância principal. Além disso, as coordenadas do ponto principal provocam uma piora no condicionamento do sistema, sendo sua recuperação em alguns casos não satisfatória, e estas, quando mal determinadas, provocam erros significantes na estimação das distorções das lentes (TELLES e TOMMASELLI, 2002).

### 2.3.2.1.1 Método de Prescott e McLean

Prescott e McLean (1996) apresentaram um processo de otimização, semelhante ao método *plumb-line*, para a obtenção dos parâmetros de distorção das lentes da câmara usando linhas retas. Neste método, admite-se que as curvaturas das retas na imagem sejam causadas apenas pela distorção das lentes, os parâmetros das distorções radial simétrica e descentrada podem ser calculados através de um processo iterativo usando um modelo de distorção. Este processo pode ser realizado sem o conhecimento das coordenadas tridimensionais das retas no espaço objeto.

A equação 2.21 apresenta as coordenadas com o efeito das distorções radial simétrica e descentrada.

$$\begin{aligned} x &= x' + \bar{x}(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6 + \dots) + [P_1(r^2 + 2\bar{x}^2) + 2P_2 \bar{x}y][1 + P_3 r^2 + \dots] \\ y &= y' + \bar{y}(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6 + \dots) + [P_2(r^2 + 2\bar{y}^2) + 2P_1 \bar{x}y][1 + P_3 r^2 + \dots] \end{aligned} \quad (2.21)$$

nas quais:

- $(x, y)$  são as coordenadas corrigidas dos pixels pertencentes às retas;

- $\bar{x} = (x' - x_0)$ ;
- $\bar{y} = (y' - y_0)$ ;
- $(x', y')$  são as coordenadas dos pixels das linhas distorcidas no sistema com origem no centro da imagem.

A posição e orientação de cada reta são incógnitas que são determinadas junto com o processo de otimização.

Prescott e McLean (1996) alcançaram o objetivo minimizando a somatória dos quadrados das distâncias entre cada ponto da linha e sua reta correspondente, representada pela equação 2.22.

$$F = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{N_m} (x_k \cos \theta_m + y_k \sin \theta_m - \rho_m)^2 \quad (2.22)$$

na qual:

- $\rho$  é a distância perpendicular entre o ponto principal e a linha reta;
- $\theta$  é o ângulo entre  $\rho$  e o eixo horizontal;
- $M$  é o número de linhas;
- $N$  é o número de pontos na linha.

### 2.3.2.2 Modelo dos planos equivalentes

Tommaselli (1988) desenvolveu um modelo matemático para resseção espacial que utiliza retas para relacionar o espaço objeto com o espaço imagem. O modelo parte de dois planos, um no espaço imagem e o outro no espaço objeto. O primeiro plano, denominado *plano de interpretação no espaço imagem*, é formado pela reta na imagem e o centro perspectivo. O segundo, *plano de interpretação no espaço objeto*, é formado pela reta correspondente no espaço objeto e o centro perspectivo no sistema do espaço objeto.

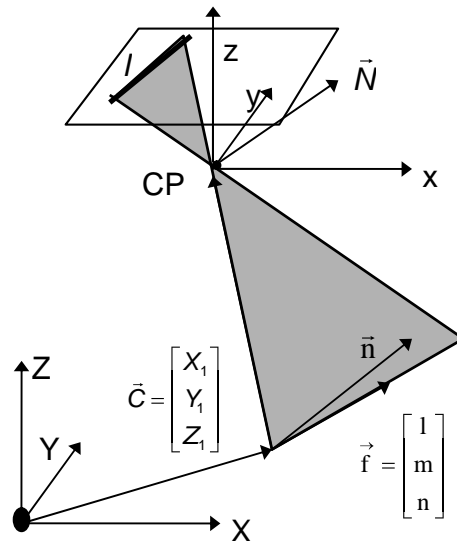
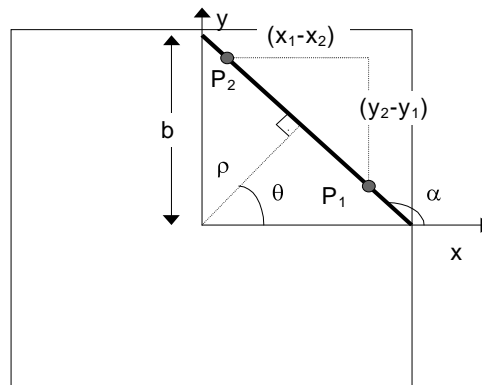


Figura 2.4 - Os vetores normais aos planos de interpretação no espaço imagem e espaço objeto (TOMMASELLI e TOZZI, 1996).

na qual:

- $\vec{N}$  é o vetor normal ao plano de interpretação no espaço imagem;
- $\vec{n}$  é o vetor normal ao plano de interpretação no espaço objeto;
- $\vec{f}$  é o vetor dos cossenos diretores da reta no espaço objeto.

Na imagem, a reta é descrita por suas coordenadas polares (figura 2.4) e a correspondente no objeto é descrita por um ponto em coordenadas cartesianas tridimensionais e seus cossenos diretores. A figura 2.5 mostra as representações da reta na imagem.



**Figura 2.5 – Elementos das representações normal e paramétrica da reta (TOMMASELLI e TOZZI, 1996).**

Dados dois pontos na imagem, cujas coordenadas são  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  podem-se expressar as seguintes relações trigonométricas:

$$\cos \theta = (y_2 - y_1)/d \quad (2.23)$$

$$\text{sen } \theta = (x_1 - x_2)/d \quad (2.24)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.25)$$

$$\rho = -(x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)/d \quad (2.26)$$

O modelo consiste em garantir que, aplicadas as devidas rotações, os planos de interpretação, e conseqüentemente seus vetores normais, nos espaços imagem e objeto sejam paralelos. Isso considerando que possíveis erros de orientação interior já tenham sido corrigidos.

No desenvolvimento do modelo, partiu-se de dois pontos  $p_1 = (x_1, y_1, f)$  e  $p_2 = (x_2, y_2, f)$ . O vetor diretor formado pelos dois pontos e a origem do sistema define o plano de interpretação no espaço imagem. A equação 2.27 representa o plano de interpretação no espaço imagem, que passa pelos pontos  $p_1, p_2$  e origem do sistema.

$$-f \cdot (y_2 - y_1) \cdot x - f \cdot (x_1 - x_2) \cdot y - (x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2) \cdot z = 0 \quad (2.27)$$

Dividindo a equação pela distância ( $d$ ) e considerando as relações trigonométricas, a equação do plano resulta em:

$$-f \cdot \cos \theta \cdot x - f \cdot \sin \theta \cdot y + \rho \cdot z = 0 \quad (2.28)$$

No espaço objeto, partiu-se da representação paramétrica da reta apresentada na equação 2.29.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

nas quais:

- $X_1, Y_1$  e  $Z_1$  são as coordenadas de um ponto qualquer da reta;
- $l, m$  e  $n$  são os cossenos diretores da reta;
- $\lambda$  é um parâmetro livre.

O vetor normal ao plano de interpretação no espaço objeto foi definido pelo produto vetorial entre o vetor formado pelos cossenos diretores da reta e o vetor diferença entre as coordenadas do centro perspectivo e o ponto na reta. A equação 2.30 mostra o vetor normal.

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} -n.(Y_c - Y_1) + m.(Z_c - Z_1) \\ n.(X_c - X_1) - l.(Z_c - Z_1) \\ -m.(X_c - X_1) + l.(Y_c - Y_1) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Para que os vetores sejam paralelos basta aplicar a matriz de rotação. Assim, sendo  $\lambda$  um fator de escala, pode-se admitir a seguinte relação:

$$\vec{N} = \lambda.R.\vec{n} \quad (2.31)$$

O desenvolvimento da equação 2.31 resulta em três equações. Para eliminar o termo  $\lambda$ , as duas primeiras foram divididas pela terceira. Na divisão realiza-se uma simplificação substituindo  $-\cot g\theta$  por  $a$  e  $\rho / \sin\theta$  por  $b$ .

Com o objetivo de evitar divisões por zero, foram admitidas duas classes de retas, aproximadamente horizontais e verticais. Estas são referenciadas de forma diferente e, portanto, utilizam modelos diferentes. A primeira e a segunda são referenciadas nas equações paramétricas da reta apresentadas, respectivamente, a seguir:

$$y = ax + b \quad (2.32)$$

$$x = a^*y + b^* \quad (2.33)$$

Deste modo, o modelo matemático dos planos equivalentes consiste em dois pares de equações.

Modelo para retas com  $45^\circ < \theta \leq 135^\circ$  ou  $225^\circ < \theta \leq 315^\circ$ :



$$\begin{aligned}
 a &= - \frac{r_{11} \cdot n_x + r_{12} \cdot n_y + r_{13} \cdot n_z}{r_{21} \cdot n_x + r_{22} \cdot n_y + r_{23} \cdot n_z} \\
 b &= - f \cdot \frac{r_{31} \cdot n_x + r_{32} \cdot n_y + r_{33} \cdot n_z}{r_{21} \cdot n_x + r_{22} \cdot n_y + r_{23} \cdot n_z}
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

Modelo para retas com  $315^\circ < \theta \leq 45^\circ$  ou  $135^\circ < \theta \leq 225^\circ$ :

$$\begin{aligned}
 a^* &= - \frac{r_{21} \cdot n_x + r_{22} \cdot n_y + r_{23} \cdot n_z}{r_{11} \cdot n_x + r_{12} \cdot n_y + r_{13} \cdot n_z} \\
 b^* &= - f \cdot \frac{r_{31} \cdot n_x + r_{32} \cdot n_y + r_{33} \cdot n_z}{r_{11} \cdot n_x + r_{12} \cdot n_y + r_{13} \cdot n_z}
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

nas quais:

- $r_{ij}$  são os elementos da matriz de rotação;

Posteriormente foram acrescentados ao modelo, alguns parâmetros de orientação interior: as coordenadas do ponto principal ( $x_0$  e  $y_0$ ) e um fator de escala  $d_s$  no eixo  $x$  (TOMMASELLI, 1999). A distância focal faz parte do modelo dos planos equivalentes para resseção espacial embora não seja tratada como incógnita. Os outros parâmetros de orientação interior são considerados como corrigidos previamente.

As equações 2.36 e 2.37 apresentam a extensão do modelo dos planos equivalentes.

Modelo para retas com  $45^\circ < \theta \leq 135^\circ$  ou  $225^\circ < \theta \leq 315^\circ$ :

$$a' = \frac{1}{(1 + d_s)} \frac{r_{11} \cdot n_x + r_{12} \cdot n_y + r_{13} \cdot n_z}{r_{21} \cdot n_x + r_{22} \cdot n_y + r_{23} \cdot n_z} \quad (2.36)$$

$$b' = -f \cdot \frac{r_{31} \cdot n_x + r_{32} \cdot n_y + r_{33} \cdot n_z}{r_{21} \cdot n_x + r_{22} \cdot n_y + r_{23} \cdot n_z} + ax_0 - y_0$$

Modelo para retas com  $315^\circ < \theta \leq 45^\circ$  ou  $135^\circ < \theta \leq 225^\circ$ :

$$a^* = -\frac{r_{21}n_x + r_{22}n_y + r_{23}n_z}{r_{11}n_x + r_{12}n_y + r_{13}n_z}(1 + d_s) \quad (2.37)$$

$$b^* = -f(1 + d_s) \frac{r_{31}n_x + r_{32}n_y + r_{33}n_z}{r_{11}n_x + r_{12}n_y + r_{13}n_z} - (x_0 + a^* y_0)(1 + d_s)$$

Utiliza-se este modelo com as equações das retas conhecidas em ambos os espaços, imagem e objeto, sendo as incógnitas os parâmetros de orientação interior e exterior.

Neste modelo não é possível calcular os parâmetros das distorções radial simétrica ( $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$ ) e descentrada ( $P_1$  e  $P_2$ ), pois não estão presentes no modelo.

### 2.3.2.2.1 Método de calibração em dois estágios que usa linhas retas

Telles e Tommaselli (2002) desenvolveram um método em dois estágios baseado em retas para calibrar os seguintes parâmetros: coordenadas do ponto principal, distorção radial simétrica, distorção descentrada e distância principal ( $c$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $P_1$  e  $P_2$ ).

O método consiste em dois estágios: no primeiro é feita a calibração dos parâmetros de distorção das lentes e no segundo são calibrados os demais parâmetros. Os parâmetros de distorção ( $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $P_1$  e  $P_2$ ) são calibrados

usando um método semelhante ao *plumb-line*. São observados vários pontos ao longo da reta e esses são ajustados usando a equação da reta, incluindo as distorções das lentes (equações 2.12 e 2.13). O ajustamento é feito pelo método combinado.

$$F = [\bar{x} + \bar{x}(K_1r^2 + K_2r^4 + K_3r^6) + P_1(r^2 + 2\bar{x}^2) + 2P_2\bar{x}\bar{y}] \cos \theta + \\ + [\bar{y} + \bar{y}(K_1r^2 + K_2r^4 + K_3r^6) + P_2(r^2 + 2\bar{y}^2) + 2P_1\bar{x}\bar{y}] \sin \theta - \rho = 0 \quad (2.38)$$

Observando a equação 2.38, nota-se que é possível considerar as coordenadas do ponto principal como parâmetros também, porém é preferível que estas sejam calculadas na segunda etapa (TELLES e TOMMASELLI, 2002), desta forma o sistema apresenta-se melhor condicionado.

A segunda etapa consiste em usar o modelo estendido dos planos equivalentes para recuperar os demais parâmetros de orientação interior, distância focal e coordenadas do ponto principal, e parâmetros de orientação exterior.

### 2.3.2.3 Método de Triangulação de Habib

Habib (1999) desenvolveu um método de triangulação semelhante ao dos planos equivalentes, para o qual poderia ser estudada a possibilidade de ampliação para incluir parâmetros de orientação interior.

Habib (1999) investigou o uso de diferentes representações das feições lineares e concluiu que o modelo de representação mais conveniente para uma reta tridimensional é aquele que faz uso de dois pontos ao longo da reta.

Na seqüência, Habib (1999) desenvolveu um algoritmo para manipulação de retas e pontos no processo de aerotriangulação. Neste algoritmo, as retas são representadas na primeira imagem por dois pontos em coordenadas cartesianas e nas imagens seguintes, são representadas por coordenadas polares, sendo que os dois pontos observados na primeira imagem não precisam ser identificados nas seguintes. Para estas imagens são determinados planos formados pelas retas e os centros perspectivos (como o plano de interpretação no espaço imagem). O cálculo do vetor normal (equação 2.39) é feito a partir do produto vetorial entre os vetores  $(\rho_i/\cos\theta_i, 0, -c)$  e  $(0, \rho_i/\sin\theta_i, -c)$  que conectam o centro perspectivo com a intersecção da reta na imagem e os eixos  $x$  e  $y$ .

$$\vec{n}_i = \begin{bmatrix} \rho_i/\cos\theta_i \\ 0 \\ -c \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_i/\sin\theta_i \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cos\theta_i \\ c \sin\theta_i \\ \rho_i \end{bmatrix} \frac{\sin\theta_i \cos\theta_i}{\rho_i} \quad (2.39)$$

A intersecção destes planos com a linha, formada pelos pontos lidos nas imagens e seu centro perspectivo, fornecerá as coordenadas destes pontos no terreno.

A injeção ao modelo é feita usando o vetor normal ao plano de interpretação no espaço imagem e a distância entre as coordenadas de um ponto  $(X_1, Y_1, Z_1)$  no terreno e as coordenadas do centro perspectivo  $(X_0, Y_0, Z_0)$ , isto é, as coordenadas transladadas para a origem do sistema imagem. Além das translações, são aplicadas rotações e em seguida calculado o produto escalar entre estes, como mostra a equação (2.40).

$$R_{\omega, \phi, \kappa}^T \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} c \cos\theta_i \\ c \sin\theta_i \\ \rho_i \end{bmatrix} = 0 \quad (2.40)$$

A equação (2.40) é usada por Habib (1999) como uma injunção no seu modelo.

É importante notar mais uma vez que o modelo de Habib (1999) não é um modelo de calibração, pois foi desenvolvido para fototriangulação.

## **2.4 Processamento de Imagens para extração de linhas e bordas**

Como o objetivo de proporcionar uma compreensão geral de algumas rotinas de processamento de imagem usadas neste trabalho, foi feita uma breve revisão bibliográfica destas.

### **2.4.1 Suavização**

A suavização tem por finalidade eliminar ruídos e excesso de detalhes na imagem. Alguns dos métodos mais comuns de suavização são suavização pela média, mediana, moda. O método que foi usado neste trabalho foi o *Filtro da mediana com análise de variância*, também conhecido como *suavização com preservação de bordas*.

#### **2.4.1.1 Filtro da mediana com análise de variância**

Este filtro consiste em atribuir o valor da mediana do grupo de pixels vizinhos que apresentar a menor variância (NEWTON, 1993 apud ARTERO, 1999).

Na figura 2.6 apresenta-se 3 representações da mesma região da imagem com os grupos de pixels vizinhos usados no algoritmo. Os quatro primeiros grupos são apresentados na primeira representação, outros quatro na segunda e um grupo na terceira. Ao todo, 9 regiões são usadas para os cálculos das variâncias.

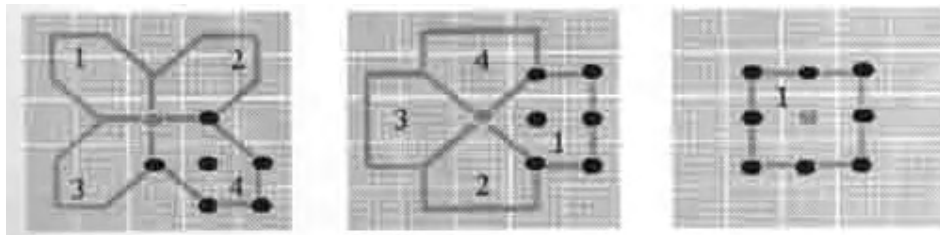


Figura 2.6 - Regiões que são consideradas para o cálculo do valor suavizado (ARTERO, 1999).

Ou seja, a imagem é percorrida e, para cada pixel, são identificadas as regiões; a seguir calcula-se a variância de cada região. Da região que apresentar a menor variância é obtida a mediana, e este valor é armazenado para ser atribuído ao pixel central da posição em questão ao final do processo. Isso é feito para todos os pixels da imagem, com exceção dos pixels das molduras da imagem.

#### 2.4.2 Esqueletização

A esqueletização é um algoritmo de afinamento, o qual tem como objetivo eliminar alguns pixels das bordas das feições nas imagens para que resulte em uma borda com um único pixel de largura. Pelo algoritmo devem ser respeitadas algumas restrições, segundo as quais a eliminação dos pontos não deve:

- Remover pontos extremos;

- Quebrar a conectividade;
- Causar a erosão excessiva da região

Para a aplicação do algoritmo presume-se que a imagem deve ser binária. O método consiste na aplicação sucessiva de dois passos aos pontos de contorno da região, sendo que o pixel de contorno é definido com um pixel,  $p_1$ , de valor 1 que possua, no mínimo, um vizinho, de 8 vizinhos, com valor 0. A figura 2.7, a seguir, mostra a rotulação utilizada no algoritmo.

$p_9$	$p_2$	$p_3$
$p_8$	$p_1$	$p_4$
$p_7$	$p_6$	$p_5$

Figura 2.7 – Vizinhança do pixel de contorno.

O passo 1 deve satisfazer as seguintes condições:

- a)  $2 \leq N(p_1) \leq 6$ ;
- b)  $S(p_1) = 1$ ;
- c)  $p_2 \cdot p_4 \cdot p_6 = 0$ ;
- d)  $p_4 \cdot p_6 \cdot p_8 = 0$

em que:

- $N(p_1)$  é o numero de vizinhos não-nulos de  $p_1$
- $S(p_1)$  é o numero de transições na seqüência ordenada.

No passo 2 as condições (a) e (b) são as mesmas mas as condições (c) e (d) são mudadas para:

$$c) \quad p_2 \cdot p_4 \cdot p_8 = 0;$$

$$d) \quad p_2 \cdot p_6 \cdot p_8 = 0.$$

O passo 1 deve ser aplicado a todos os pixel de borda; se as condições forem aceitas, o pixel deve ser marcado para ser apagado ao final do passo 1. O mesmo deve ser feito com o passo 2. Este processamento deve ser aplicado até que não haja mais pixels para serem apagados (GONZALEZ e WOODS, 2000).

### 2.4.3 Operadores de Sobel

Os operadores de Sobel são usados para detecção de bordas. Consistem de duas máscaras, uma para o cálculo do gradiente em x e outra para o cálculo do gradiente em y, como mostra a figura 2.8.

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

$$G_x$$

1	2	1
0	0	0
-1	-2	-1

$$G_y$$

**Figura 2.8 – Máscaras de Sobel.**

As máscaras são convoluídas com a imagem e os valores do gradiente são usados para calcular a magnitude das bordas e o ângulo ( $\alpha$ ) referente a cada píxel (equações 2.41 e 2.42).



$$\text{Magnitude}_{G_x G_y} = \sqrt{G_x^2 + G_y^2} \quad (2.41)$$

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{G_y}{G_x}\right) \quad (2.42)$$

As altas magnitudes indicam bordas, magnitudes de pequenos valores indicam que o pixel não pertence a uma borda bem definida e valores de magnitudes zero indicam áreas homogêneas (ARTERO, 1999).

## CAPÍTULO III

### 3 METODOLOGIA

Neste trabalho tem-se como objetivo principal desenvolver um modelo matemático para a calibração baseado em retas que inclua todos os parâmetros de orientação interior comumente utilizados. Dentro deste contexto, a primeira etapa do trabalho foi o desenvolvimento matemático deste modelo.

O modelo desenvolvido neste trabalho e o modelo de colinearidade foram implementados pelo método combinado, no mesmo programa, possibilitando a utilização de pontos ou retas. A figura 3.1 apresenta o fluxograma do programa que será melhor descrito nas próximas seções.

Existe a possibilidade de utilizar simultaneamente pontos e retas montando um único sistema de equações, mas esta alternativa não será explorada neste trabalho.

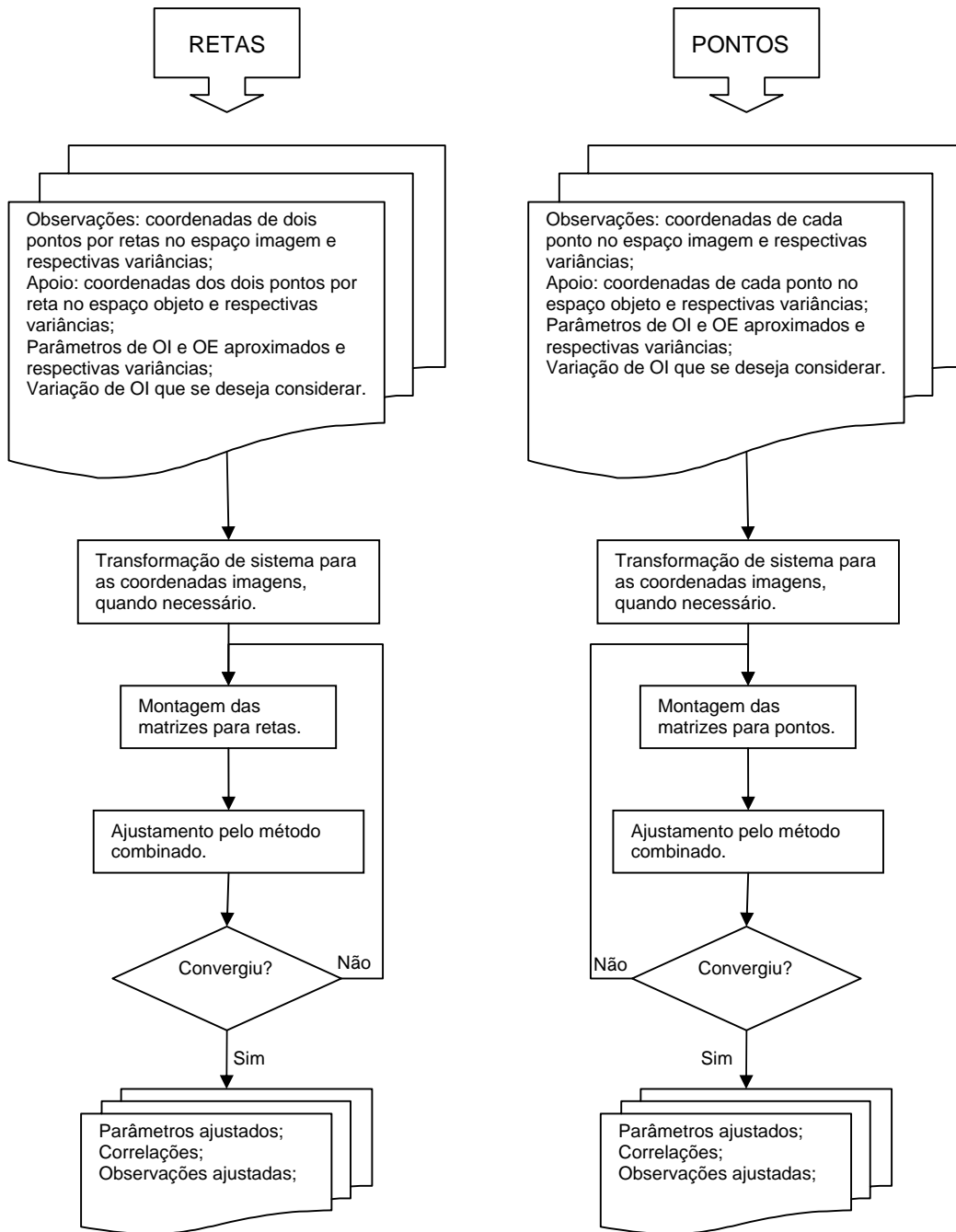


Figura 3.1 – Fluxograma do programa implementado.

Com objetivo de testar o programa e o modelo matemático desenvolvido, foram gerados dados simulados. Para isso, foram feitas adaptações num programa já implementado por Tommaselli (1988).

Os resultados das simulações foram analisados comparativamente com os dados simulados e com resultados obtidos através do programa CC de calibração por pontos (GALO, 1993). Além disso, foram feitas análises estatísticas com o teste  $t$  de Student e o qui-quadrado unicaudal, pois este é usado com mais frequência (MIKHAIL e ACKERMAN, 1976).

Nos experimentos com dados reais foram tomadas imagens de um campo de calibração construído para este fim. As imagens foram processadas num programa implementado para obter observações de pontos nas retas com precisão subpixel.

### **3.1 Modelos Matemáticos**

#### **3.1.1 Equação de colinearidade**

As equações de colinearidade (seção 2.3.1.2) são usadas para as observações do tipo pontos, às quais foram acrescentados outros parâmetros de orientação interior: coordenadas do ponto principal e distorções das lentes. No método combinado, as equações devem estar na forma  $F(X_a, L_a) = 0$  (apêndice A). Com isso, as equações de colinearidade se apresentam na seguinte forma (equações 3.1):

$$\begin{aligned}
 x + c \cdot \frac{r_{11}(X_i - X_0) + r_{12}(Y_i - Y_0) + r_{13}(Z_i - Z_0)}{r_{31}(X_i - X_0) + r_{32}(Y_i - Y_0) + r_{33}(Z_i - Z_0)} &= 0 \\
 y + c \cdot \frac{r_{11}(X_i - X_0) + r_{12}(Y_i - Y_0) + r_{13}(Z_i - Z_0)}{r_{31}(X_i - X_0) + r_{32}(Y_i - Y_0) + r_{33}(Z_i - Z_0)} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

nas quais:

- $x = x' - x_0 + \bar{x}(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6) + P_1(r^2 + 2\bar{x}^2) + 2P_2 \bar{x} \bar{y}$ ;
- $y = y' - y_0 + \bar{y}(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6) + P_2(r^2 + 2\bar{y}^2) + 2P_1 \bar{x} \bar{y}$ .
- $x'$  e  $y'$  são observações referenciadas ao centro da imagem, para o caso de câmaras digitais;
  - $x' = \text{coluna} - (\text{total\_de\_colunas}) / 2$ ;
  - $y' = (\text{total\_de\_linhas}) / 2 - \text{linha}$ ;
- $\bar{x} = x' - x_0$ ;
- $\bar{y} = y' - y_0$ ;
- $x_0$  e  $y_0$  são as coordenadas do ponto principal;
- $r_{ij}$  são os elementos da matriz de rotação  $3 \times 3$ ;
- $c$  é a distância principal da câmara.

### 3.1.2 Desenvolvimento do modelo baseado em linhas retas

Este modelo é baseado no modelo dos planos equivalentes e é usado no algoritmo quando há a presença de retas para relacionar uma reta no

espaço objeto com sua correspondente na imagem. No modelo dos planos equivalentes usa-se como observações nas imagens os parâmetros  $a$  e  $b$  (ou  $a^*$  e  $b^*$ ) das retas (seção 2.3.2.2). Uma das vantagens desta abordagem, em relação à desenvolvida neste trabalho, é o fato de serem usados apenas dois parâmetros (duas observações quando se refere ao ajustamento) por reta. Porém, quando se deseja incluir os demais parâmetros de orientação interior é conveniente que a reta seja definida por dois pontos, bastando incluir a este, o modelo de distorções já existente, como no caso das equações de colinearidade.

Assim, o modelo desenvolvido utiliza retas, presentes no espaço imagem, definidas por dois pontos, o que implica em quatro observações por reta no ajustamento, isto é,  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_2$  e  $y_2$ . Estes parâmetros, ao contrário dos anteriores ( $a$  e  $b$  ou  $a^*$  e  $b^*$ ), não são linearmente independentes, pois apenas dois parâmetros são suficientes para definir uma reta bi-dimensional. Essa dependência linear entre os parâmetros de referência da reta não implica na dependência linear entre as equações do modelo, pois o conceito geométrico de ambos os modelos (o desenvolvido neste trabalho e o dos Planos Equivalentes) é o mesmo. Assim como no modelo dos Planos Equivalentes, o modelo desenvolvido possui duas equações independentes.

Com relação às retas no espaço objeto, as duas representações são semelhantes. No modelo dos planos equivalentes, a reta objeto é representada por um ponto e seus cossenos diretores (seção 2.3.2.2). No modelo implementado a reta é representada por dois pontos, isto é,  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $Z_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_2$  e  $Z_2$ . Como no caso da representação da reta no plano estes parâmetros também não são independentes. É

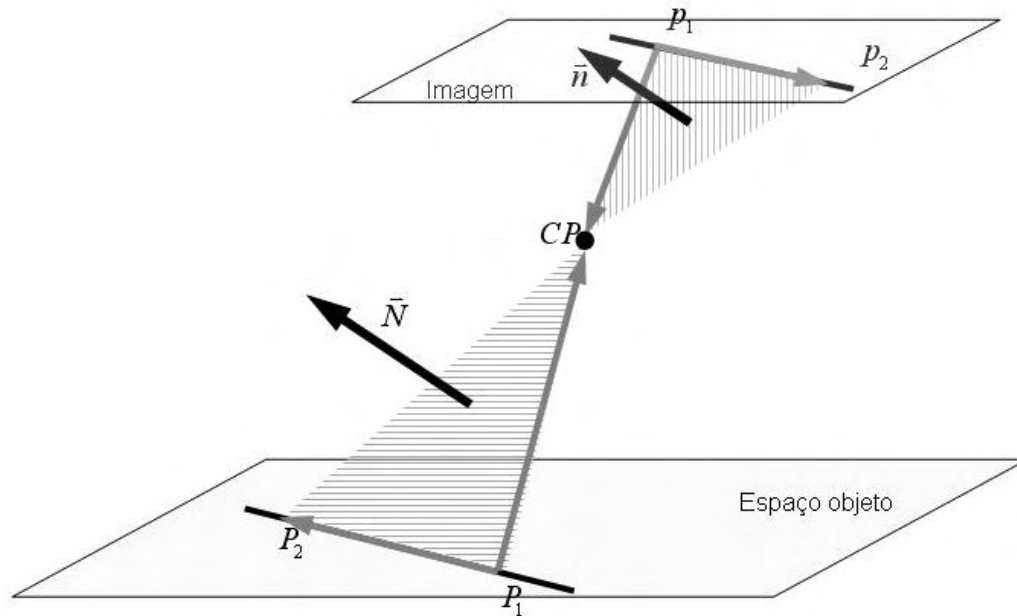
importante notar ainda que os pontos que representam a reta no espaço objeto não precisam ser correspondentes aos que representam a mesma reta na imagem.

Para o desenvolvimento do modelo partiu-se de quatro vetores: dois no espaço imagem e dois no espaço objeto. Sendo  $(x_1, y_1, -c)$  e  $(x_2, y_2, -c)$  as coordenadas dos dois pontos,  $p_1$  e  $p_2$  ( $p_1 \neq p_2$ ), definidores da reta na imagem, definiu-se os vetores no espaço imagem como:  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$  e  $(x_1, y_1, -c)$ . Portanto, o vetor normal  $\vec{n}$  (figura 3.2) ao plano de interpretação no espaço imagem será, o produto vetorial entre o vetor  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$  e o vetor  $(x_1, y_1, -c)$ . A equação 3.2 representa este vetor normal.

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \Delta x_{12} \\ \Delta y_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c\Delta y_{12} \\ c\Delta x_{12} \\ x_2 y_1 - x_1 y_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

na qual:

- $\Delta x_{12} = x_2 - x_1$ ;
- $\Delta y_{12} = y_2 - y_1$



**Figura 3.2 – Vetores normais em relação aos planos de interpretação no espaço imagem e objeto.**

Sendo  $(X_1, Y_1, Z_1)$  e  $(X_2, Y_2, Z_2)$  as coordenadas de dois pontos  $(P_1, P_2)$  definidores da reta no espaço objeto, definiu-se os vetores no espaço objeto como:  $(X_2 - X_1, Y_2 - Y_1, Z_2 - Z_1)$  e  $(X_1 - X_0, Y_1 - Y_0, Z_1 - Z_0)$ . É importante notar que os pontos no espaço objeto e no espaço imagem não precisam ser necessariamente homólogos, apenas as retas precisam ser correspondentes.

Portanto, no espaço objeto, o vetor normal  $\vec{N}$  (figura 3.2) ao plano de interpretação é definido pelo produto vetorial entre os vetores  $(X_2 - X_1, Y_2 - Y_1, Z_2 - Z_1)$  e  $(X_1 - X_0, Y_1 - Y_0, Z_1 - Z_0)$ . A equação 3.3 representa este vetor normal.



$$\vec{N} = \begin{bmatrix} \Delta X_{12} \\ \Delta Y_{12} \\ \Delta Z_{12} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \Delta X_{01} \\ \Delta Y_{01} \\ \Delta Z_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta Y_{12} \Delta Z_{01} - \Delta Y_{01} \Delta Z_{12} \\ \Delta X_{01} \Delta Z_{12} - \Delta X_{12} \Delta Z_{01} \\ \Delta X_{12} \Delta Y_{01} - \Delta X_{01} \Delta Y_{12} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

na qual:

- $\Delta X_{12} = X_2 - X_1$ ;
- $\Delta Y_{12} = Y_2 - Y_1$ ;
- $\Delta Z_{12} = Z_2 - Z_1$ ;
- $\Delta X_{01} = X_1 - X_0$ ;
- $\Delta Y_{01} = Y_1 - Y_0$ ;
- $\Delta Z_{01} = Z_1 - Z_0$ .

Da mesma forma como foi desenvolvido o modelo dos Planos Equivalentes, os planos definidos na imagem e objeto devem ser paralelos. Para garantir o paralelismo entre os planos basta garantir que os seus vetores normais sejam paralelos. Para isso é necessário aplicar rotações entre os dois sistemas de referência, isto é, pré-multiplica-se o vetor normal ao plano no espaço objeto pela matriz de rotação, com isso, rotaciona-se o sistema de referência no espaço objeto para ficar paralelo ao da imagem.

Antes de igualar os vetores normais (na imagem e no objeto multiplicado pelas rotações), é necessário admitir um fator de escala, pois os vetores não precisam ter necessariamente a mesma norma e sim apenas a mesma direção. A equação 3.4 apresenta a forma final do modelo.

$$R_{\omega, \phi, \kappa} \begin{bmatrix} \Delta Y_{12} \Delta Z_{01} - \Delta Y_{01} \Delta Z_{12} \\ \Delta X_{01} \Delta Z_{12} - \Delta X_{12} \Delta Z_{01} \\ \Delta X_{12} \Delta Y_{01} - \Delta X_{01} \Delta Y_{12} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -c \Delta y_{12} \\ c \Delta x_{12} \\ x_2 y_1 - x_1 y_2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Chamando de  $N_i$ , com  $i$  variando de 1 a 3, as componentes do vetor normal ao plano de interpretação do espaço objeto, a equação (3.4) pode também ser escrita na forma (equações 3.5):

$$\begin{aligned} r_{11}N_1 + r_{12}N_2 + r_{13}N_3 &= -\lambda c \Delta y_{12} \\ r_{21}N_1 + r_{22}N_2 + r_{23}N_3 &= \lambda c \Delta x_{12} \\ r_{31}N_1 + r_{32}N_2 + r_{33}N_3 &= \lambda (x_2 y_1 - x_1 y_2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

na qual,  $r_{ij}$  são os elementos da matriz de rotação.

Para eliminar o termo  $\lambda$  das equações 3.5, dividiu-se a primeira e a segunda equações pela terceira. Reorganizando as equações tem-se:

$$\begin{aligned} (x_2 y_1 - x_1 y_2)(r_{11}N_1 + r_{12}N_2 + r_{13}N_3) + c \Delta y_{12}(r_{31}N_1 + r_{32}N_2 + r_{33}N_3) &= 0 \\ (x_2 y_1 - x_1 y_2)(r_{21}N_1 + r_{22}N_2 + r_{23}N_3) - c \Delta x_{12}(r_{31}N_1 + r_{32}N_2 + r_{33}N_3) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Com as equações desenvolvidas para relacionar o espaço objeto com o espaço imagem, como no caso da colinearidade, basta inserir as equações de distorção:

- $x = x' - x_0 + \bar{x}(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6) + P_1(r^2 + 2\bar{x}^2) + 2P_2 \bar{x} \bar{y}$ ;
- $y = y' - y_0 + \bar{y}(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6) + P_2(r^2 + 2\bar{y}^2) + 2P_1 \bar{x} \bar{y}$ .

Geometricamente, o modelo garante que os sistemas sejam paralelos, mas não necessariamente coincidentes, pois o modelo não garante nenhum ponto em comum entre planos. Porém, não há a necessidade de coincidência. Com o objetivo de facilitar a visualização, a figura 3.2 ilustra os planos, com os vetores citados no texto, de maneira coincidente.

O método de ajustamento usado para a aplicação do modelo desenvolvido é o método combinado, pois as equações (3.6) não permitem que sejam isoladas as observações  $(x_1, y_1, x_2 \text{ e } y_2)$ , ao contrário do modelo dos Planos Equivalentes no qual as observações podem ser isoladas. Porém isto implica em admitir dois grupos de equações (seção 2.3.2.2) devido a possíveis divisões por zero. No modelo agora desenvolvido não há a necessidade de mais um grupo de equações, pois estas, independentemente da posição da reta, não apresentam os problemas de divisão por zero. Por outro lado, o método paramétrico de ajustamento, que foi usado para a aplicação do modelo dos Planos Equivalentes, não pode ser usado neste caso.

Em resumo, a grande vantagem do modelo determinístico desenvolvido é que possibilita a inclusão dos demais parâmetros de orientação interior, e a vantagem do modelo estocástico usado (método combinado) é que não implica na utilização de dois grupos de parâmetros para representação das retas.

### 3.2 Implementação Computacional

O programa foi implementado em linguagem C++ no ambiente Borland C++ Builder. Foram implementados, no mesmo programa o modelo

desenvolvido, para o uso de retas, e o modelo de colinearidade, para o uso de pontos. O ajustamento para os dois modelos foi feito pelo método combinado com injunções de peso para os parâmetros (apêndice A). Desta maneira, podem-se definir os pesos tanto para as observações quanto para os parâmetros (GEMAEL, 1994 e MIKHAIL, 1976).

Com o objetivo de simplificar o problema, admitiu-se que as observações ( $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_2$  e  $y_2$ ) nas retas imagem não são correlacionadas, na entrada de dados, bem como as das retas objeto ( $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $Z_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_2$  e  $Z_2$ ).

O programa permite efetuar a calibração com pontos ou com retas. O número de pontos e retas fica a critério do usuário. Todos os pontos, bem como as retas, lidos na imagem devem ter correspondentes no espaço objeto, mesmo que algumas destas sejam aproximadas e com altas variâncias.

### 3.2.1 Parâmetros

Para ambos os modelos, que usam pontos e retas, os seguintes elementos são utilizados como parâmetros no ajustamento.

- Parâmetros de orientação interior:
  - Distância principal,  $c$ ;
  - Coordenadas do ponto principal,  $x_0$  e  $y_0$ ;
  - Parâmetros de distorção radial simétrica,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$ ;
  - Parâmetros de distorção descentrada,  $P_1$  e  $P_2$ .
- Parâmetros de orientação exterior:

- Rotações,  $\kappa$ ,  $\varphi$  e  $\omega$ ;
- Translações,  $X_0$ ,  $Y_0$  e  $Z_0$ .

O programa considera por “default” as rotações ( $\kappa$ ,  $\varphi$  e  $\omega$ ) e translações ( $X_0$ ,  $Y_0$  e  $Z_0$ ) como incógnitas no ajustamento. Quanto aos parâmetros de orientação interior, o programa permite que sejam selecionados quais se deseja considerar, permitindo qualquer combinação destes. Pode-se também não selecionar nenhum parâmetro de orientação interior, realizando assim, uma resseção fotogramétrica. Todos os parâmetros considerados, tanto de orientação interior quanto de exterior, devem ter um valor aproximado e uma variância que corresponderá a um peso no ajustamento.

### 3.2.2 Observações

As observações diferem quando se trata de cada modelo. Quando se usa pontos as observações são:

- Coordenadas dos pontos lidos nas imagens
  - Podem ser referenciadas ao centro da imagem,  $x'_i$  e  $y'_i$ ;
  - Podem ser linha e coluna,  $lin_i$  e  $col_i$ . Neste caso o programa faz a conversão para  $x'_i$  e  $y'_i$ , desde que sejam introduzidos os parâmetros de conversão no corpo do programa (número de linhas e colunas e tamanho do pixel).
- Coordenadas dos pontos no espaço objeto,  $X_i$ ,  $Y_i$  e  $Z_i$ .

Para o modelo que usa retas as observações são:

- Coordenadas dos dois pontos definidores das retas lidos nas imagens;
  - Podem ser referenciadas ao centro da imagem,  $x'_{1i}$ ,  $y'_{1i}$ ,  $x'_{2i}$  e  $y'_{2i}$ ;
  - Podem ser linha e coluna,  $lin_{1i}$ ,  $col_{1i}$ ,  $lin_{2i}$  e  $col_{2i}$ .
- Coordenadas dos dois pontos definidores das retas no espaço objeto,  $X_{1i}$ ,  $Y_{1i}$ ,  $Z_{1i}$ ,  $X_{2i}$ ,  $Y_{2i}$  e  $Z_{2i}$ .

O programa permite também que se usem as coordenadas de pontos no espaço objeto como parâmetros ao invés de observações. Isto implica no aumento do número de colunas na matriz  $A$  e diminuição na matriz  $B$  (apêndice A), porém, os resultados são semelhantes.

Como os parâmetros, as observações também devem ter variância na, que definirá o peso das observações.

### 3.3 Geração de dados simulados e dados reais

Os dados simulados foram gerados a partir de um programa implementado com essa finalidade e os dados reais foram obtidos tomando-se imagens de um campo de calibração construído.

#### 3.3.1 Programa para geração de dados simulados

Para gerar os dados, foram feitas algumas modificações em um programa de simulação implementado por Tommaselli (1993). O programa foi

implementado para calcular as coordenadas no espaço imagem desses pontos pela equação de colinearidade a partir de coordenadas de pontos no espaço objeto, parâmetros de orientação exterior e distância focal.

Para incluir os outros parâmetros de orientação interior, partiu-se da primeira equação de distorção das lentes e ponto principal:

$$x = x' - x_0 + \bar{x}(K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6) + P_1(r^2 + 2\bar{x}^2) + 2P_2 \bar{x} \bar{y} \quad (3.7)$$

Como não é possível isolar o termo  $x'$ , pois  $\bar{x}$  e  $r$  são função de  $x'$ , fazendo  $K = (K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6)$ , foi feita uma aproximação:

$$x = x' [1 + K + 2P_1 x' - 4P_1 x_0 + 2P_2 \bar{y}] - x_0 - x_0 K + P_1 r^2 + 2P_1 x_0^2 - 2P_2 x_0 \bar{y} \quad (3.8)$$

Assim:

$$x' = \frac{x + x_0 + x_0 K - P_1 r^2 - 2P_1 x_0^2 + 2P_2 x_0 \bar{y}}{1 + K + 2P_1 x' - 4P_1 x_0 + 2P_2 \bar{y}} \quad (3.9)$$

Analogamente:

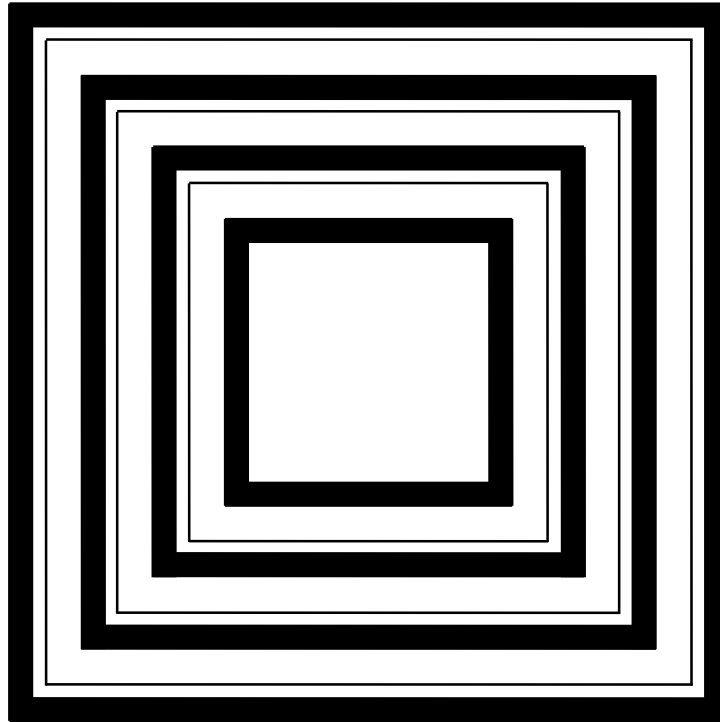
$$y' = \frac{y + y_0 + y_0 K - P_2 r^2 - 2P_2 y_0^2 + 2P_2 y_0 \bar{x}}{1 + K + 2P_2 y' - 4P_2 y_0 + 2P_1 \bar{x}} \quad (3.10)$$

Porém, ainda existe  $x'$ , do lado direito da equação. Isso foi solucionado iniciando-se com a seguinte aproximação:  $x' = x$  e recursivamente até que os valores de  $x'$  e  $y'$  satisfaçam as equações da distorção, dentro de um limiar menor que o erro randômico aplicado. Os erros randômicos são calculados no programa e somados às observações simuladas, usando uma função “RandG” disponível no ambiente Borland C++ Builder, que gera números obedecendo a uma distribuição normal de probabilidade. Para as observações simuladas no caso das retas, são usadas as mesmas coordenadas como início e fim das retas em seqüência, isto é, as retas são definidas ligando os pontos na mesma seqüência em que são calculados.

### **3.3.2 Campo de calibração**

Planejou-se um campo de aproximadamente  $4m^2$ , contendo faixas e linhas, como-se mostra na figura 3.3.





**Figura 3.3 - Projeto do campo de calibração.**

Foi utilizada uma das paredes externas do discente I da UNESP (Universidade Estadual Paulista) do campus de Presidente Prudente para a montagem do campo de calibração. As medidas foram feitas usando uma régua de invar de  $2m$  e uma placa também de invar com furos de aproximadamente  $3mm$  de diâmetro espaçados de  $100$  em  $100mm$ , formando um retângulo de  $1m$  por  $0.7m$ .

As faixas foram feitas com uma fita adesiva preta com filamentos de poliéster (conhecida como *silver-tape*) e as linhas, amarrando-se elásticos esticados em pequenos pregos. A figura 3.4 mostra como ficou o campo de calibração gerado:

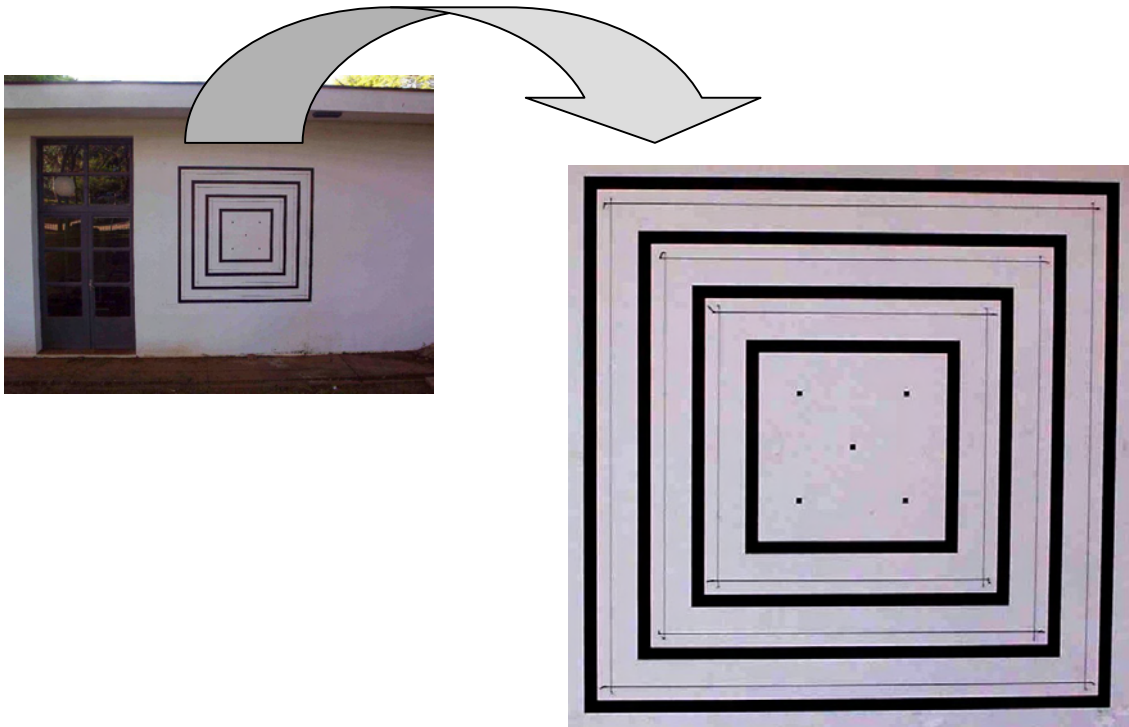


Figura 3.4 - Campo de Calibração.

Estima-se que a precisão das coordenadas no campo de calibração seja da ordem de  $1mm$ , devido a erros provenientes, entre outros fatores, da irregularidade da parede, da coincidência imperfeita da placa nas medições e de uma leve curvatura da régua dependente de seu posicionamento.

### 3.4 Extração de linhas

Foi implementado um programa que visa detectar linhas em imagens tomadas do campo de calibração e calcular o eixo central da feição linear com precisão subpixel. Estas imagens possuem fundo claro e linhas escuras, permitindo assim, algumas simplificações no processo de extração.

O programa foi implementado no ambiente *Borland C++ Builder*, com uma interface que permite a abertura de uma imagem no formato *Bitmap* (BMP). O processamento do programa consiste em 6 etapas que serão descritas nas próximas seções:

- Transformação da imagem de RGB para níveis de cinza;
- Suavização com preservação de bordas;
- Eliminação dos valores de brilho menores que um limiar estabelecido;
- Esqueletização;
- Cálculo da direção da linha;
- Obtenção das coordenadas subpixel dos pontos das linhas;

#### **3.4.1 Transformação da imagem de RGB para níveis de cinza**

Esta etapa transforma a imagem anteriormente colorida em uma imagem em tons de cinza. Além disso, inverte a tonalidade de brilho da imagem para que o fundo se apresente escuro e as retas claras.

#### **3.4.2 Suavização com preservação de bordas**

O método de suavização implementado foi o filtro da mediana com análise de variância (seção 4.1.1), pois é necessário que as bordas das linhas não sejam alteradas e este método foi desenvolvido para preservar as bordas, como explicado anteriormente.

### **3.4.3 Eliminação dos valores de brilho menores que um limiar**

O valor limiar é estabelecido empiricamente por meio de observação de alguns valores de níveis de cinza presentes na imagem, com o objetivo de eliminar o fundo e manter apenas as linhas na imagem, as quais se apresentam mais claras que o fundo, todos os pixels abaixo desse valor limiar são igualados a zero.

### **3.4.4 Esqueletização**

O algoritmo de extração de linhas com precisão subpixel proposto requer um afinamento prévio para que possam ser usados os pixels resultantes do afinamento, como ponto de partida. Assim o algoritmo selecionado para este afinamento foi a esqueletização, implementado seguindo os passos explicados na seção 2.4.2.

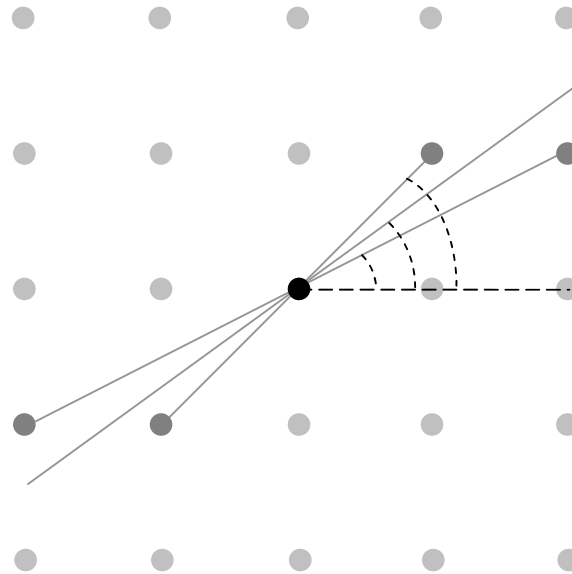
### **3.4.5 Cálculo da direção da reta**

Anteriormente à aplicação do algoritmo de obtenção das coordenadas subpixel, é necessário conhecer a direção local da linha. Primeiramente, testou-se a utilização de máscaras de detecção de linhas para a obtenção da direção, como as máscaras de Cervena e Charvat (1981 apud SONKA et al, 1999). Porém, verificou-se, que eram necessários intervalos menores entre as direções de cada máscara. Para solucionar este problema, ao invés de aumentar a

quantidade de direções e conseqüentemente a quantidade de máscaras e a dimensão destas, optou-se pela implementação de um novo algoritmo.

Neste, a imagem é percorrida pixel a pixel e, para cada pixel com nível de brilho diferente de zero, é observada a vizinhança com nível de brilho também maior que zero. Para cada vizinho é calculado um ângulo, formado pela direção do pixel atual com seu vizinho e a direção da linha que contém o pixel atual. Assim, para cada vizinho haverá uma direção diferente e a direção atribuída para o pixel atual será uma média das direções calculadas.

A figura 3.5 exemplifica o algoritmo: os pontos mais claros representam os pixel vizinhos, o pixel central representa o pixel para o qual será atribuído um ângulo e os outros pixels mais escuros representam os pixels para o qual estão sendo calculados os ângulos. São calculados ângulos para todos os pixels vizinhos. O ângulo que será atribuído ao pixel central é uma média ponderada dos ângulos calculados pelos seus respectivos pesos, que são os valores de brilho de cada um.



**Figura 3.5 - Exemplo do algoritmo para o cálculo da direção.**

Para o caso de haver intersecção de linhas, a função verifica se os ângulos calculados possuem diferenças maiores que um certo valor a ser informado. Além disso, o programa permite que se defina o tamanho da vizinhança que será observada.

### **3.4.6 Extração de coordenadas subpixel de pontos pertencentes às linhas**

Para calcular as coordenadas subpixel, o algoritmo percorre a imagem e, para cada pixel com nível de brilho diferente de zero, da matriz resultante do afinamento, é calculada uma direção perpendicular à direção obtida anteriormente para a feição linear naquele pixel. Nessa direção são calculadas

posições subpixel, com uma unidade de pixel de distância entre si. A figura 3.6 mostra esta situação.

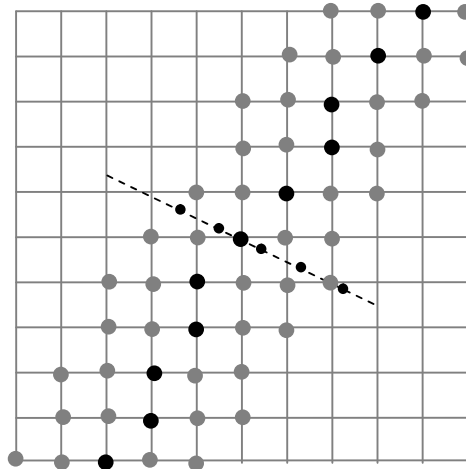


Figura 3.6 - Exemplo da rotina de extração de coordenadas subpixel.

Para cada posição subpixel calculada, é feita uma interpolação bilinear com os níveis de brilho dos pixels vizinhos da imagem resultante da limiarização. O resultado de cada interpolação é atribuído às suas respectivas posições subpixel. São calculadas posições subpixel, para ambos os lados da linha, até que o resultado da interpolação seja zero ou até um número máximo de pontos. Após adquirir todos os valores de brilho destes pontos pertencentes à direção perpendicular, efetua-se uma média ponderada entre estes valores, de modo a encontrar uma posição subpixel média no eixo central da feição linear. O peso é dado pelo valor de brilho

Este procedimento é realizado para toda a imagem e o resultado são coordenadas com números reais das posições dos pontos localizados no eixo central das feições. As coordenadas, por fim, são armazenados num arquivo do tipo *Data Exchange File* (DXF).

### 3.4.7 Exemplo da rotina de extração de linhas

Com o objetivo de exemplificar o algoritmo de extração de linhas é apresentada a figura 3.7.

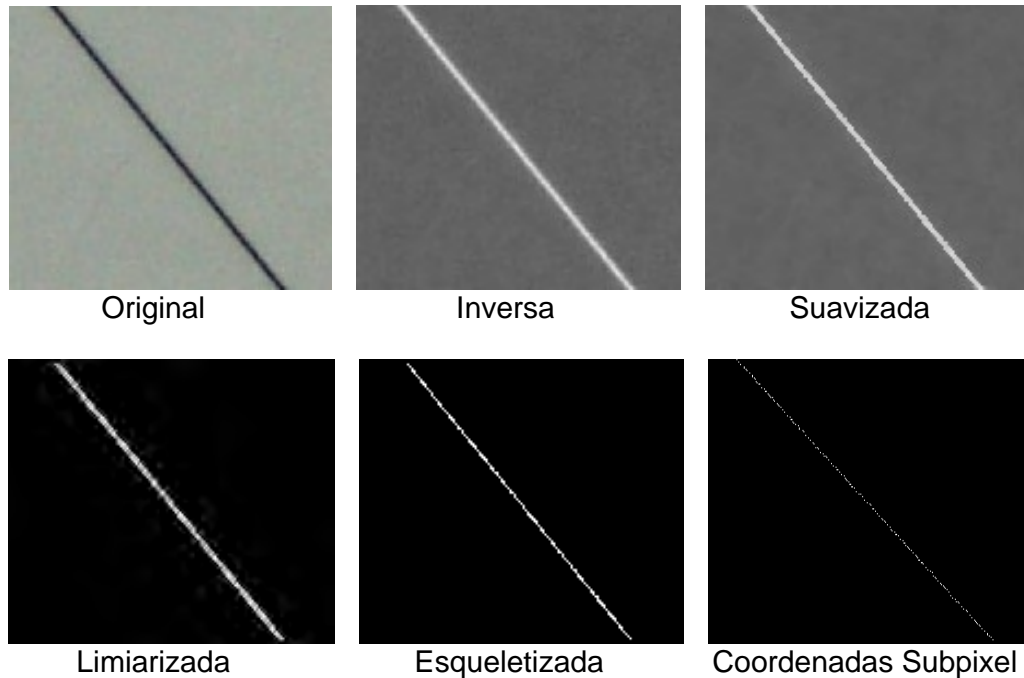


Figura 3.7 - Exemplo do algoritmo de extração de linhas.

A figura 3.7 apresenta imagens da seqüência de etapas do algoritmo de extração de linhas. Foi usada uma imagem com apenas uma reta, pois o exemplo foi feito apenas para visualização das imagens resultantes das etapas.



### 3.5 Extração de coordenadas subpixel de bordas

Foram feitas adaptações no programa de extração de linhas para a extração de bordas. O algoritmo consiste da aplicação em seqüência de 6 funções:

- Suavização com preservação de bordas;
- Detecção das bordas usando as máscaras de Sobel;
- Limiarização;
- Esqueletização;
- Cálculo da direção da linha;
- Obtenção das coordenadas subpixel dos pontos da borda.

Com exceção da segunda e da última rotina, as outras são as mesmas usadas no algoritmo de extração de linhas.

Primeiramente, foi implementada a rotina para a extração de bordas pelo operadores de Sobel como descrito na seção 2.4.3 e feitas modificações na rotina para a obtenção das coordenadas subpixel. Ao invés de usar os níveis de brilho na ponderação da posição subpixel, usa-se as diferenças de nível de brilho de cada ponto (do vetor perpendicular à reta) e seu anterior e atribui-se esse valor ao ponto médio entre os pontos usados para calcular a diferença. Assim, se usa esses pontos médios, com suas respectivas ponderações, para o cálculo da posição subpixel do eixo da borda.

Há ainda algumas diferenças neste algoritmo. A limiarização, neste caso, é usada para eliminar pixels indesejáveis provenientes da rotina de Sobel e a

imagem usada para o cálculo do nível de brilho pela interpolação bi-linear é feita diretamente na imagem suavizada.

É importante notar ainda, que poderiam ser usadas as direções provenientes da rotina de Sobel, porém optou-se pelo uso da rotina de cálculo da direção já implementada, pois apresentaram resultados mais adequados as necessidades. As direções calculadas a partir dos gradientes de Sobel, ao contrário da função implementada, consideram apenas um pequeno intervalo ( $3 \times 3$ ) da borda para definir a direção.

# CAPÍTULO IV

## 4 EXPERIMENTOS

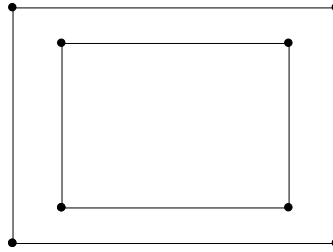
Foram feitos vários experimentos; os primeiros foram realizados com dados simulados gerados pelo programa que calcula coordenadas imagens a partir de coordenadas objeto e parâmetros de orientação exterior e interior; e os demais experimentos foram feitos em situação real, a partir de imagens tomadas do campo de calibração construído.

### 4.1 Experimentos com dados simulados

Primeiramente foram feitos testes para verificar apenas o comportamento do programa para o caso da resseção espacial, isto é, calculam-se apenas os parâmetros de orientação exterior. Em seguida foram feitos testes para calibração.

#### 4.1.1 Experimentos para resseção

No primeiro experimento foi simulado um espaço objeto com apenas oito retas, como mostra a figura 4.1.



**Figura 4.1 – Retas usadas na geração das imagens simuladas.**

Foram simuladas três imagens com erro randômico de 0,005 mm de desvio-padrão nas observações, com os parâmetros de orientação exterior apresentados na tabela 4.1. A distância principal foi simulada com o valor de 35 mm.

**Tabela 4.1 - Parâmetros de orientação exterior das imagens simuladas.**

Imagem	$\kappa_{(rad)}$	$\varphi_{(rad)}$	$\omega_{(rad)}$	$X_{0(mm)}$	$Y_{0(mm)}$	$Z_{0(mm)}$
1	0,0	0,0	0,0	1000,0	1000,0	2500,0
2	0,1	0,1	-0,1	1100,0	900,0	2000,0
3	0,0	0,7	0,0	2600,0	1000,0	2500,0

Os erros nos valores dos parâmetros aproximados foram da ordem de 0,4 rad ( $\cong 23^\circ$ ) para as rotações e 100 mm para as translações.

Os mesmos dados foram utilizados para executar a resseção com pontos com o programa implementado. Isto é, os mesmos erros randômicos, observações, variâncias, coordenadas de apoios, aproximação dos parâmetros e graus de liberdade (30). Os resultados da resseção usando pontos e retas são apresentados na tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Resultados da resseção.

Parâmetros		Retas (método combinado)			Pontos (método combinado)		
		Valor estimado	Desvio Padrão estimado	Erro Verdadeiro	Valor Estimado	Desvio Padrão estimado	Erro Verdadeiro
Imagem 1	$\kappa$ (rad)	8,08E-05	1,30E-04	8,08E-05	6,89E-05	1,29E-04	6,89E-05
	$\varphi$ (rad)	-4,24E-04	4,21E-04	-4,24E-04	-4,46E-04	4,41E-04	-4,46E-04
	$\omega$ (rad)	4,87E-04	4,16E-04	4,87E-04	5,23E-04	4,24E-04	5,23E-04
	$X_0$ (mm)	998,822	1,183	-1,178	998,771	1,229	-1,229
	$Y_0$ (mm)	998,615	1,173	-1,385	998,513	1,182	-1,487
	$Z_0$ (mm)	2500,144	0,326	0,144	2500,142	0,348	0,142
Imagem 2	$\kappa$ (rad)	9,98E-02	1,32E-04	-1,52E-04	9,98E-02	1,28E-04	-1,71E-04
	$\varphi$ (rad)	9,97E-02	3,15E-04	-2,84E-04	9,97E-02	3,36E-04	-2,93E-04
	$\omega$ (rad)	-9,96E-02	3,15E-04	4,00E-04	-9,96E-02	3,23E-04	4,39E-04
	$X_0$ (mm)	1099,484	0,761	-0,516	1099,472	0,781	-0,528
	$Y_0$ (mm)	899,051	0,760	-0,949	898,958	0,766	-1,042
	$Z_0$ (mm)	2000,178	0,261	0,178	2000,169	0,286	0,169
Imagem 3	$\kappa$ (rad)	-5,45E-05	2,11E-04	-5,45E-05	-7,47E-05	2,20E-04	-7,47E-05
	$\varphi$ (rad)	7,00E-01	2,89E-04	-4,54E-04	7,00E-01	3,17E-04	-4,91E-04
	$\omega$ (rad)	-8,71E-05	4,38E-04	-8,71E-05	-7,31E-05	4,78E-04	-7,31E-05
	$X_0$ (mm)	2599,309	0,711	-0,691	2599,196	0,790	-0,804
	$Y_0$ (mm)	1000,375	1,135	0,375	1000,336	1,211	0,336
	$Z_0$ (mm)	2501,360	0,698	1,360	2501,380	0,743	1,380

Observando os erros verdadeiros obtidos por retas e por pontos, pode se verificar que os resultados obtidos pelo uso de retas são comparáveis com resultados obtidos através do uso de pontos.

Tanto para retas quanto para pontos o sistema, em geral, apresentou altas (maior que 0,9) correlações entre os parâmetros  $\varphi$  e  $\omega$  com  $X_0$  e  $Y_0$ .

Os mesmos dados simulados foram usados para efetuar a resseção usando programa implementado por Tommaselli (1993) que efetua a resseção pelo modelo dos planos equivalentes e o ajustamento pelo método paramétrico (seção 2.3.2.2). Usando este programa verificou-se que, para este experimento, há a necessidade de parâmetros de rotação aproximados mais próximos dos verdadeiros. Foram usados valores aproximados com erros de 0,1 rad, pois testes feitos com 0,2 rad ou mais apresentaram divergência. Na tabela 4.3 pode-se verificar que os erros verdadeiros na estimação apresentaram-se maiores que no caso anterior.

**Tabela 4.3 – Comparação da resseção pelo método paramétrico e combinado, usando retas.**

Parâmetros		Retas (combinado)		Retas (paramétrico)	
		Valor estimado	Erro verdadeiro	Valor Estimado	Erro verdadeiro
Imagem 1	$\kappa$ (rad)	8,08E-05	8,08E-05	7,235E-05	-7,24E-05
	$\varphi$ (rad)	-4,24E-04	-4,24E-04	-1,45E-03	1,45E-03
	$\omega$ (rad)	4,87E-04	4,87E-04	-4,08E-04	4,08E-04
	$X_0$ (mm)	998,822	-1,178	995,987	4,013
	$Y_0$ (mm)	998,615	-1,385	1000,847	-0,847
	$Z_0$ (mm)	2500,144	0,144	2500,434	-0,434
Imagem 2	$\kappa$ (rad)	9,98E-02	-1,52E-04	9,959E-02	4,10E-04
	$\varphi$ (rad)	9,97E-02	-2,84E-04	9,82E-02	1,80E-03
	$\omega$ (rad)	-9,96E-02	4,00E-04	-9,91E-02	-9,00E-04
	$X_0$ (mm)	1099,484	-0,516	1096,288	3,712
	$Y_0$ (mm)	899,051	-0,949	898,209	1,791
	$Z_0$ (mm)	2000,178	0,178	2000,485	-0,485
Imagem 3	$\kappa$ (rad)	-5,45E-05	-5,45E-05	-5,307E-04	5,31E-04
	$\varphi$ (rad)	7,00E-01	-4,54E-04	7,00E-01	0,00E+00
	$\omega$ (rad)	-8,71E-05	-8,71E-05	-1,88E-03	1,88E-03
	$X_0$ (mm)	2599,309	-0,691	2599,752	0,248
	$Y_0$ (mm)	1000,375	0,375	1014,840	-14,840
	$Z_0$ (mm)	2501,360	1,360	2500,792	-0,792

Na tabela 4.3 pode-se verificar que os erros verdadeiros na estimação apresentaram-se maiores que no caso anterior. As razões para este fato precisam ser melhor estudadas, porém acredita-se que isto não estaria relacionado com os modelos matemáticos, pois o princípio geométrico de ambos é o mesmo. Isto pode ser devido às diferenças nos modelos estocásticos usados, principalmente devido ao fato de, neste trabalho, serem usados pesos nas observações, o que não aconteceu na implementação do modelo dos planos equivalentes pelo paramétrico. Subestimando-se o erro nas observações para este mesmo experimento (com o modelo implementado), verificou-se que, quanto mais subestimadas são as observações, maiores são os erros verdadeiros nos parâmetros de orientação exterior.

#### **4.1.2 Testes para calibração**

Para analisar a qualidade dos parâmetros de orientação interior realizado pelo programa, foram feitas várias simulações, com diferentes parâmetros de orientação exterior e interior, número de imagens, disposição e número de retas no espaço objeto e diferentes erros randômicos para as observações.

Com o intuito de testar a qualidade de todos os parâmetros de orientação interior simultaneamente, foi simulado um espaço objeto com várias retas e arrançadas de forma variada, como mostra a figura 4.2. As coordenadas dos dois pontos de cada uma das retas no espaço objeto simulado estão apresentadas na tabela 4.4.

Tabela 4.4 - Retas simuladas para espaço objeto.

$X_1$ (mm)	$Y_1$ (mm)	$Z_1$ (mm)	$X_2$ (mm)	$Y_2$ (mm)	$Z_2$ (mm)
100	1900	0	1900	1900	0
1900	1900	0	1900	100	0
1900	100	0	300	300	0
300	300	0	300	1700	0
300	1700	0	1700	1700	0
1700	1700	0	1700	300	0
1700	300	0	500	500	0
500	500	0	500	1500	0
500	1500	0	1500	1500	0
1500	1500	0	1500	500	0
1500	500	0	0	0	0
0	0	0	0	2000	0
0	2000	0	2000	2000	0
2000	2000	0	2000	0	0
2000	0	0	200	200	0
200	200	0	200	1800	0
200	1800	0	1800	1800	0
1800	1800	0	1800	200	0
1800	200	0	400	400	0
400	400	0	400	1600	0
400	1600	0	1600	1600	0
1600	1600	0	1600	400	0
1600	400	0	600	600	0
600	600	0	600	1400	0
600	1400	0	1400	1400	0
1400	1400	0	1400	600	0
1400	600	0	48	48	0
48	48	0	48	1952	0
48	1952	0	1952	1952	0
1952	1952	0	1952	48	0
1952	48	0	248	248	0
248	248	0	248	1752	0
248	1752	0	1752	1752	0
1752	1752	0	1752	248	0
1752	248	0	448	448	0
448	448	0	448	1552	0
448	1552	0	1552	1552	0
1552	1552	0	1552	448	0
1552	448	0	648	648	0
648	648	0	648	1352	0
648	1352	0	1352	1352	0
1352	1352	0	1352	648	0
1352	648	0	0	2000	0
0	2000	0	2000	0	0
	0	0	100	1900	0

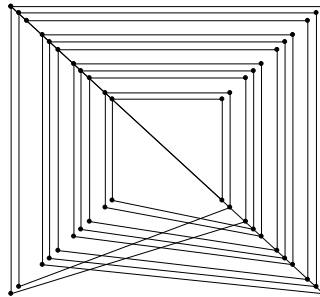


Figura 4.2 – Espaço objeto simulado.

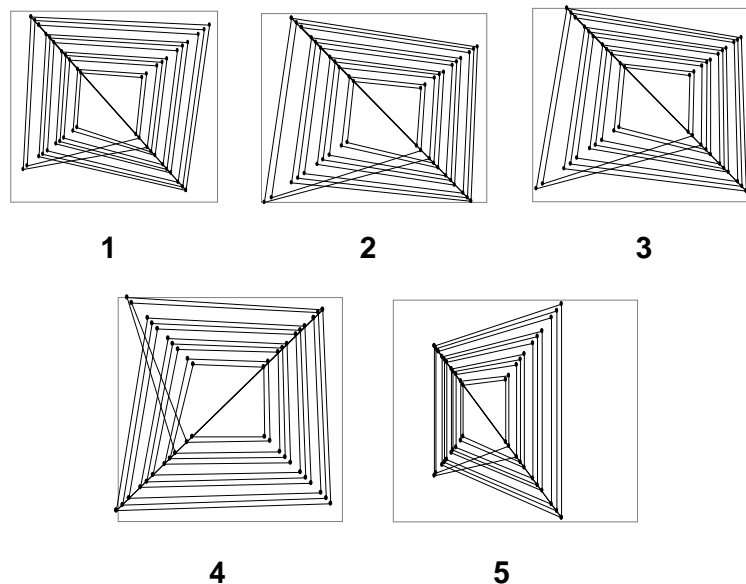


Os parâmetros de orientação exterior simulados para as imagens estão apresentados na tabela 4.5.

**Tabela 4.5 - Parâmetros de orientação exterior simulados.**

Imagem	$\kappa_{(rad)}$	$\varphi_{(rad)}$	$\omega_{(rad)}$	$X_{0(mm)}$	$Y_{0(mm)}$	$Z_{0(mm)}$
1	0,1	0,1	-0,1	1300,0	1200,0	2300,0
2	0,1	-0,2	0,1	450,0	850,0	2100,0
3	0,1	-0,2	0,2	450,0	500,0	2100,0
4	1,57	0,1	0,1	1300,0	800,0	2100,0
5	0,0	0,7	0,0	3000,0	1000,0	1800,0

A figura 4.3 mostra as imagens simuladas, sendo o quadrado exterior destas o quadro da câmara simulado com dimensão de 35 mm x 35 mm.



**Figura 4.3 - Imagens simuladas, de acordo com os parâmetros da tabela 4.5.**

Os parâmetros de orientação interior foram simulados com os valores apresentados na tabela 4.6. A tabela apresenta também os efeitos de cada parâmetro, que modela os erros sistemáticos na imagem, na direção  $x$  e  $y$ , para um ponto localizado no canto da imagem,  $p = (17mm, 17mm)$ .

**Tabela 4.6 - Parâmetros de orientação interior simulados**

Parâmetro	Valor Simulado	Efeito dos parâmetros na imagem (mm)	
		Em x	Em y
$c$ (mm)	35,0	-----	-----
$x_0$ (mm)	0,2	0,2	-----
$y_0$ (mm)	0,3	-----	0,3
$K_1$ (mm <sup>-2</sup> )	1,0E-05	0,098	0,098
$K_2$ (mm <sup>-4</sup> )	2,0E-09	0,011	0,011
$K_3$ (mm <sup>-6</sup> )	5,0E-12	6,83E-04	6,83E-04
$P_1$ (mm <sup>-1</sup> )	2,0E-05	0,023	0,035
$P_2$ (mm <sup>-1</sup> )	3,0E-05	0,012	0,017

Na entrada de dados os parâmetros aproximados para orientação exterior foram simulados com erros de 0,3 rad para as rotações e erros de 150 a 250 mm para translações, que são valores compatíveis com casos reais. Para orientação interior as simulações nos parâmetros aproximados foram de 45 mm para a distância principal e zero para os demais parâmetros. As variâncias usadas para os parâmetros aproximados o foram de acordo com o erro atribuído ou maiores. Ao espaço objeto foi atribuída uma variância de 0,25 mm e às observações foram usadas as respectivas variâncias das simulações. O critério de convergência foi de 0,00001 de correção para todos os parâmetros.

Usando estas configurações foram feitos vários testes: alterando a dimensão do erro randômico aplicado às observações simuladas; modificando a configuração do espaço objeto; e modificando as posições simuladas das câmaras. Por fim, foi realizada uma comparação dos resultados com outros obtidos por pontos usando as equações de colinearidade e o método combinado.

#### 4.1.2.1 Experimentos com diferentes erros randômicos

Com o objetivo de verificar o comportamento da recuperação dos parâmetros com diferentes erros randômicos nas observações, foram feitas simulações com erros randômicos com desvios-padrão de:  $1\mu m$ ,  $5\mu m$  e  $10\mu m$ .

##### 4.1.2.1.1 Erros randômicos com desvio padrão de $1\mu m$

No teste que considera erros randômicos com desvio padrão de  $1\mu m$ , obteve os resultados apresentados na tabela 4.7, a qual mostra os parâmetros recuperados de orientação interior e apenas os de orientação exterior da primeira imagem, com o objetivo de reduzir as dimensões da tabela. O mesmo foi feito para a tabela de correlações entre os parâmetros (tabela 4.8) obtidas ao final do processo de ajustamento.

**Tabela 4.7 – Resultados da calibração com erros randômicos de  $1\mu m$ .**

Parâmetro	Valor recuperado	Desvio padrão estimado	Erro verdadeiro	$t$ de Student
$c$ (mm)	35,002	8,49E-03	2,11E-03	0,248
$x_0$ (mm)	0,195	5,44E-03	-4,85E-03	-0,892
$y_0$ (mm)	0,300	4,87E-03	-2,38E-04	-0,049
$K_1$ (mm <sup>-2</sup> )	1,05E-05	9,59E-07	4,88E-07	0,509
$K_2$ (mm <sup>-4</sup> )	1,51E-09	2,44E-09	-4,91E-10	-0,201
$K_3$ (mm <sup>-6</sup> )	5,56E-12	2,24E-12	5,59E-13	0,249
$P_1$ (mm <sup>-1</sup> )	2,11E-05	7,60E-07	1,07E-06	1,409
$P_2$ (mm <sup>-1</sup> )	2,93E-05	6,68E-07	-7,46E-07	-1,117
$\kappa$ (rad)	0,100	5,75E-05	-6,84E-06	-0,119
$\varphi$ (rad)	0,100	1,36E-04	4,69E-05	0,344
$\omega$ (rad)	-0,100	1,42E-04	4,60E-05	0,325
$X_0$ (mm)	1299,761	0,235	-0,239	-1,018
$Y_0$ (mm)	1199,818	0,200	-0,182	-0,911
$Z_0$ (mm)	2299,904	0,487	-0,096	-0,197

Numero de iterações: 12

Graus de liberdade: 412

Qui-quadrado amostral: 246,973

Da tabela 4.7 pode-se observar que os parâmetros tanto de orientação interior quanto de exterior foram recuperados adequadamente. Além disso, o teste  $t$  de Student não foi rejeitado em nenhum dos casos, inclusive para os parâmetros que não estão apresentados na tabela, com grau de significância de 0,15 ou maior, exceto para os parâmetros  $P_1$  e  $P_2$  que não foram rejeitados para o grau de significância de 0,05 e 0,10 respectivamente. Para o teste qui-quadrado a hipótese básica não foi rejeitada com grau de significância de até 0,995.

Tabela 4.8 – Matriz de correlação para o experimento com erros randômicos  $1\mu m$ .

	$c$	$x_0$	$y_0$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$P_1$	$P_2$	$\kappa$	$\varphi$	$\omega$	$X_0$	$Y_0$	$Z_0$
$c$	1,000	0,410	-0,482	0,566	-0,496	0,446	0,028	-0,059	0,136	-0,406	-0,433	0,241	0,243	<b>0,805</b>
$x_0$	0,410	1,000	-0,165	0,043	-0,097	0,119	-0,410	0,029	0,014	-0,792	-0,018	0,515	0,066	0,464
$y_0$	-0,482	-0,165	1,000	-0,079	0,068	-0,055	0,090	-0,394	-0,263	0,269	<b>0,830</b>	-0,097	0,030	-0,533
$K_1$	0,566	0,043	-0,079	1,000	<b>-0,936</b>	<b>0,862</b>	0,173	-0,003	0,060	-0,054	-0,132	-0,004	0,117	0,070
$K_2$	-0,496	-0,097	0,068	-0,936	1,000	<b>-0,981</b>	-0,187	-0,040	-0,048	0,056	0,088	-0,080	-0,074	-0,096
$K_3$	0,446	0,119	-0,055	<b>0,862</b>	<b>-0,981</b>	1,000	0,185	0,036	0,042	-0,065	-0,069	0,102	0,069	0,103
$P_1$	0,028	-0,410	0,090	0,173	-0,187	0,185	1,000	-0,079	0,009	0,456	0,037	-0,073	-0,013	-0,050
$P_2$	-0,059	0,029	-0,394	-0,003	-0,040	0,036	-0,079	1,000	0,104	-0,025	-0,367	0,068	-0,081	-0,037
$\kappa$	0,136	0,014	-0,263	0,060	-0,048	0,042	0,009	0,104	1,000	-0,013	-0,285	0,064	0,108	0,121
$\varphi$	-0,406	-0,792	0,269	-0,054	0,056	-0,065	0,456	-0,025	-0,013	1,000	0,124	0,070	-0,043	-0,457
$\omega$	-0,433	-0,018	<b>0,830</b>	-0,132	0,088	-0,069	0,037	-0,367	-0,285	0,124	1,000	-0,036	-0,473	-0,400
$X_0$	0,241	0,515	-0,097	-0,004	-0,080	0,102	-0,073	0,068	0,064	0,070	-0,036	1,000	0,067	0,302
$Y_0$	0,243	0,066	0,030	0,117	-0,074	0,069	-0,013	-0,081	0,108	-0,043	-0,473	0,067	1,000	0,160
$Z_0$	<b>0,805</b>	0,464	-0,533	0,070	-0,096	0,103	-0,050	-0,037	0,121	-0,457	-0,400	0,302	0,160	1,000

Da tabela de correlações pode-se observar que as maiores correlações entre os parâmetros estão ressaltados em negrito. Para as demais imagens o comportamento das correlações foi semelhante, exceto para a quinta imagem que apresentou correlações altas (-0,901) entre  $X_0$  e  $\omega$ . Para cada uma das outras imagens, os parâmetros de orientação exterior apresentaram correlações menores que 0,7 entre si. Já com relação aos parâmetros de orientação interior, pode-se observar (tabela 4.8) correlações altas entre os parâmetros  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$ , porém, para muitas câmaras, não há a necessidade de modelar as distorções usando os parâmetros  $K_2$  e  $K_3$ . Outras correlações altas (maiores que 0,9) ocorreram entre vários parâmetros de orientação exterior com os mesmos das outras imagens.

Na tabela 4.9 mostram-se os resultados considerando que apenas o parâmetro  $K_1$ , das distorções óticas, tem influência nas coordenadas imagem.

**Tabela 4.9 – Resultados da calibração com erros randômicos  $1\mu m$  considerando apenas  $K_1$ .**

Parâmetro	Valor recuperado	Desvio padrão estimado	Erro verdadeiro	$t$ de Student
$c$ (mm)	35,002	7,09E-03	1,65E-03	0,233
$x_0$ (mm)	0,198	4,81E-03	-1,84E-03	-0,382
$y_0$ (mm)	0,297	4,44E-03	-2,84E-03	-0,638
$K_1$ (mm <sup>-2</sup> )	1,03E-05	1,92E-07	3,31E-07	1,726
$\kappa$ (rad)	0,100	5,70E-05	-1,23E-06	-0,021
$\varphi$ (rad)	0,100	1,19E-04	-3,84E-05	-0,322
$\omega$ (rad)	-0,100	1,31E-04	-1,58E-05	-0,121
$X_0$ (mm)	1299,795	0,231	-0,205	-0,890
$Y_0$ (mm)	1199,803	0,199	-0,197	-0,991
$Z_0$ (mm)	2299,911	0,482	-0,089	-0,185
Numero de iterações 8				
Graus de liberdade: 412				
Qui-quadrado: 248,965				

Observando-se a tabela 4.9 verifica-se que, em geral, houve uma pequena diminuição nos erros verdadeiros, porém, apesar da diminuição da quantidade de parâmetros a se determinar, e conseqüente diminuição das correlações, que deveria acarretar em melhora, esta melhora não foi significativa, pois os parâmetros já haviam sido bem recuperados no experimento anterior.

#### 4.1.2.1.2 Erros randômicos com desvio padrão de $5\mu m$

O experimento feito com erros randômicos de desvio padrão de  $5\mu m$  também foram capazes de recuperar os parâmetros, como se mostram a tabela 4.10.

**Tabela 4.10 – Resultados da calibração com erros randômicos  $5\mu m$ .**

Parâmetro	Valor recuperado	Desvio Padrão Estimado	Erro Verdadeiro	$t$ de Student
$C$ (mm)	34,965	2,41E-02	-3,52E-02	-1,460
$x_0$ (mm)	0,186	1,63E-02	-1,40E-02	-0,864
$y_0$ (mm)	0,311	1,48E-02	1,12E-02	0,759
$K_1$ (mm <sup>-2</sup> )	8,07E-06	3,26E-06	-1,93E-06	-0,592
$K_2$ (mm <sup>-4</sup> )	7,65E-09	1,02E-08	5,65E-09	0,552
$K_3$ (mm <sup>-6</sup> )	1,35E-12	1,01E-11	-3,65E-12	-0,363
$P_1$ (mm <sup>-1</sup> )	2,50E-05	3,77E-06	5,04E-06	1,337
$P_2$ (mm <sup>-1</sup> )	2,62E-05	3,44E-06	-3,77E-06	-1,097
$\kappa$ (rad)	0,100	8,66E-05	-6,56E-05	-0,757
$\varphi$ (rad)	0,100	4,14E-04	3,51E-04	0,848
$\omega$ (rad)	-0,099	4,14E-04	5,50E-04	1,329
$X_0$ (mm)	1299,580	0,667	-0,420	-0,630
$Y_0$ (mm)	1199,136	0,678	-0,864	-1,276
$Z_0$ (mm)	2297,964	1,358	-2,036	-1,499

Numero de iterações: 10  
Graus de liberdade: 412  
Qui-quadrado amostral: 305,946

Neste caso, o teste  $t$  de Student não foi rejeitado para um grau de significância de 0,05 ou maior, exceto para o parâmetro  $Y_0$  da quinta imagem, na qual o grau de significância para a não rejeição foi de 0,025. Como no caso anterior, para o teste qui-quadrado, os resultados também não foram rejeitados com grau de significância de até 0,995.

#### 4.1.2.1.3 Erros randômicos com desvio padrão de $10\mu m$

No caso em que as observações foram simuladas com erros randômicos com desvio padrão de  $10\mu m$  houve a necessidade de melhorar o valor aproximado da distância principal, que era de 45 mm e passou a ser de 40 mm, ao valor verdadeiro desta (35 mm). Caso contrário o sistema não recuperava valores esperados: a distância principal e os parâmetros  $Z_0$ , em geral, se aproximavam de zero. Porém, a possibilidade de 5 mm na aproximação da distância principal é mais que suficiente, pois, em uma situação real, costuma-se conhecer a distância principal da câmara usada, com uma aproximação comumente melhor que 5 mm. Na tabela 4.11 mostram-se os resultados para observações simuladas com erros randômicos de desvio padrão de  $10\mu m$ .



**Tabela 4.11 – Resultados da calibração com erros randômicos  $10\mu m$ .**

Parâmetro	Valor recuperado	Desvio Padrão estimado	Erro verdadeiro	$t$ de Student
$C$ (mm)	34,900	4,29E-02	-9,97E-02	-2,323
$x_0$ (mm)	0,177	2,68E-02	-2,29E-02	-0,854
$y_0$ (mm)	0,314	2,54E-02	1,38E-02	0,543
$K_1$ (mm <sup>-2</sup> )	5,15E-06	5,62E-06	-4,85E-06	-0,864
$K_2$ (mm <sup>-4</sup> )	1,58E-08	1,85E-08	1,38E-08	0,743
$K_3$ (mm <sup>-6</sup> )	-5,08E-12	1,86E-11	-1,01E-11	-0,541
$P_1$ (mm <sup>-1</sup> )	2,95E-05	6,74E-06	9,54E-06	1,415
$P_2$ (mm <sup>-1</sup> )	2,37E-05	6,57E-06	-6,32E-06	-0,961
$\kappa$ (rad)	9,99E-02	1,32E-04	-1,19E-04	-0,899
$\varphi$ (rad)	1,01E-01	6,98E-04	5,23E-04	0,750
$\omega$ (rad)	-9,90E-02	7,01E-04	9,93E-04	1,416
$X_0$ (mm)	1298,992	1,284	-1,008	-0,785
$Y_0$ (mm)	1197,849	1,348	-2,151	-1,597
$Z_0$ (mm)	2294,407	2,480	-5,593	-2,256

Numero de iterações: 13  
Graus de liberdade: 412  
Qui-quadrado amostral: 341,407

Com relação à estatística  $t$  de Student para este experimento, os resultados foram aceitos para um grau de significância de 0,01 ou maior, exceto para o parâmetro  $Z_0$  da segunda imagem que foi aceito para o grau de significância 0,005. Portanto, nos casos anteriores a estimação dos desvios-padrão foi melhor que neste experimento. A hipótese básica do teste qui-quadrado foi aceita, desta vez com grau de significância 0,95.

Testou-se também a situação considerando que as coordenadas do espaço imagem sofriam influência de distorção ótica apenas do parâmetro  $K_1$ . Os resultados estão apresentados na tabela 4.12.

**Tabela 4.12 – Resultados da calibração com erros randômicos  $10\mu m$  considerando apenas  $K_1$ .**

Parâmetro	Valor recuperado	Desvio padrão Estimado	Erro verdadeiro	$t$ de Student
$c$ (mm)	34,921	3,86E-02	-7,89E-02	-2,042
$x_0$ (mm)	0,209	1,79E-02	9,24E-03	0,516
$y_0$ (mm)	0,294	1,70E-02	-6,15E-03	-0,363
$K_1$ (mm <sup>-2</sup> )	1,04E-05	6,30E-07	4,25E-07	0,674
$\kappa$ (rad)	9,99E-02	1,16E-04	-7,61E-05	-0,654
$\varphi$ (rad)	9,97E-02	4,15E-04	-3,42E-04	-0,824
$\omega$ (rad)	-9,94E-02	4,55E-04	5,69E-04	1,250
$X_0$ (mm)	1299,381	1,263	-0,619	-0,491
$Y_0$ (mm)	1197,660	1,338	-2,340	-1,749
$Z_0$ (mm)	2294,519	2,465	-5,481	-2,223

Numero de iterações 10  
Graus de liberdade: 412  
Qui-quadrado: 343,907

Neste caso, além de não haver a necessidade de diminuir o erro no valor aproximado da distância principal, os erros verdadeiros apresentaram-se, em geral, menores. Isto significa que os problemas na solução do sistema do caso anterior podem ser devidos às correlações entre os parâmetros desconsiderados neste experimento e os demais. Quanto aos testes  $t$  de Student e qui-quadrado os resultados foram os mesmos.

#### 4.1.2.2 Espaço objeto não plano

As retas no espaço objeto usado nos experimentos anteriores (tabela 4.4) não possuíam diferenças de coordenadas Z. Com objetivo de verificar a influência deste tipo de configuração na recuperação dos parâmetros, foram, para

este experimento, introduzidas diferenças nas coordenadas Z do espaço objeto para algumas retas, como mostra a tabela 4.13.

**Tabela 4.13 - Retas simuladas para o espaço objeto com variação de Z de 200mm.**

$X_1$ (mm)	$Y_1$ (mm)	$Z_1$ (mm)	$X_2$ (mm)	$Y_2$ (mm)	$Z_2$ (mm)
100	1900	0	1900	1900	200
1900	1900	200	1900	100	200
1900	100	200	300	300	0
48	48	0	48	1952	200
48	1952	200	1952	1952	200
1952	1952	200	1952	48	200
1952	48	200	248	248	0

As observações foram simuladas com erros randômicos de  $5\mu m$  de desvio-padrão. A tabela 4.14 apresenta os resultados obtidos neste experimento e as diferenças de erro verdadeiro em relação ao teste anterior feito com a mesma magnitude de erro randômico e sem diferença de coordenada Z no espaço objeto.

**Tabela 4.14 – Resultados da calibração com erros randômicos de  $5\mu\text{m}$  e com variação de  $Z$  no espaço objeto.**

Parâmetro	Valor recuperado	Desvio Padrão estimado	Erro verdadeiro	$t$ de Student	$ E_{anterior}  -  E_{atual} $
$C$ (mm)	34,978	2,28E-02	-2,21E-02	-0,971	1,31E-02
$x_0$ (mm)	0,179	1,61E-02	-2,14E-02	-1,328	-7,40E-03
$y_0$ (mm)	0,307	1,48E-02	6,83E-03	0,461	4,37E-03
$K_1$ (mm <sup>-2</sup> )	9,55E-06	3,15E-06	-4,55E-07	-0,144	1,48E-06
$K_2$ (mm <sup>-4</sup> )	2,42E-09	9,68E-09	4,16E-10	0,043	5,23E-09
$K_3$ (mm <sup>-6</sup> )	6,45E-12	9,24E-12	1,45E-12	0,157	2,20E-12
$P_1$ (mm <sup>-1</sup> )	2,51E-05	3,66E-06	5,07E-06	1,385	-3,00E-08
$P_2$ (mm <sup>-1</sup> )	2,60E-05	3,35E-06	-4,01E-06	-1,197	-2,40E-07
$\kappa$ (rad)	0,100	8,62E-05	-5,01E-05	-0,582	1,55E-05
$\varphi$ (rad)	0,100	4,11E-04	4,72E-04	1,147	-1,21E-04
$\omega$ (rad)	-0,100	4,13E-04	4,47E-04	1,082	1,03E-04
$X_0$ (mm)	1299,493	0,621	-0,507	-0,817	-8,70E-02
$Y_0$ (mm)	1199,127	0,630	-0,873	-1,387	-9,00E-03
$Z_0$ (mm)	2298,656	1,271	-1,344	-1,057	6,92E-01

Numero de iterações: 10  
Graus de liberdade: 412  
Qui-quadrado amostral: 303,860

Quanto ao teste  $t$  de Student, os resultados foram os mesmos: foi aceito para todos os parâmetros com grau de significância de 0,05 ou maior, exceto para o parâmetro  $Y_0$ , da quinta imagem que foi aceito com grau de significância de 0,005. Como nos primeiros experimentos, usando o teste qui-quadrado, o resultado global do ajustamento foi aceito com nível de significância de 0,995.

Observando as diferenças entre os erros verdadeiros deste experimento e o anterior, verifica-se que, em alguns casos, o erro verdadeiro foi menor que o anterior, e em outros foi maior. Desta maneira, não se pode afirmar conclusivamente que houve uma melhora ou piora dos resultados.

Para analisar melhor a situação com relação ao espaço objeto, testou-se com erros randômicos com desvio padrão de  $10\mu m$  nas observações simuladas. Neste caso não houve a necessidade de diminuir o erro na aproximação da distância principal. Os resultados estão apresentados na tabela 4.15.

**Tabela 4.15 – Resultados da calibração com erros randômicos de  $10\mu m$  e com variação de  $Z$  no espaço objeto.**

Parâmetro	Valor recuperado	Desvio Padrão estimado	Erro verdadeiro	$t$ de Student
$C$ (mm)	34,936	3,90E-02	-6,37E-02	-1,634
$x_0$ (mm)	0,169	2,69E-02	-3,10E-02	-1,151
$y_0$ (mm)	0,311	2,56E-02	1,15E-02	0,447
$K_1$ (mm <sup>-2</sup> )	7,90E-06	5,40E-06	-2,10E-06	-0,389
$K_2$ (mm <sup>-4</sup> )	5,86E-09	1,74E-08	3,86E-09	0,221
$K_3$ (mm <sup>-6</sup> )	5,24E-12	1,70E-11	2,39E-13	0,014
$P_1$ (mm <sup>-1</sup> )	2,91E-05	6,52E-06	9,15E-06	1,403
$P_2$ (mm <sup>-1</sup> )	2,28E-05	6,35E-06	-7,15E-06	-1,127
$\kappa$ (rad)	9,99E-02	1,30E-04	-1,04E-04	-0,801
$\varphi$ (rad)	1,01E-01	6,87E-04	6,30E-04	0,918
$\omega$ (rad)	-9,91E-02	6,89E-04	9,07E-04	1,317
$X_0$ (mm)	1298,941	1,185	-1,059	-0,893
$Y_0$ (mm)	1198,074	1,234	-1,926	-1,560
$Z_0$ (mm)	2296,405	2,215	-3,595	-1,623

Numero de iterações: 13  
Graus de liberdade: 412  
Qui-quadrado amostral: 338,963

Quanto ao teste  $t$  de Student os parâmetros não foram rejeitados com grau de significância de 0,001, inclusive o parâmetro  $Z_0$  da segunda imagem que não havia sido aceito com este grau de significância.

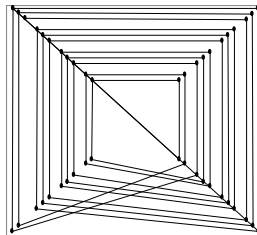
Isso significa que a variação de  $Z$  no espaço objeto melhorou a geometria para a recuperação dos parâmetros para calibração por retas.

#### 4.1.2.3 Experimentos com variações de parâmetros OE

O objetivo deste experimento foi analisar o comportamento da recuperação dos parâmetros em relação às rotações da imagem. Isso foi feito diminuindo a convergência e a rotação em torno de  $z$  nas imagens, para verificar se haveria uma degradação nos resultados. Para isso usou-se desvio padrão de  $5\mu m$  nos erros randômicos aplicados às observações.

Neste experimento manteve-se o espaço objeto sem diferenças nas coordenadas  $Z$  das retas simuladas.

Primeiramente, foi eliminada a convergência (rotação em  $\varphi$ ) da quinta imagem (tabela 4.5) e foi feita uma translação em  $X_0$  e  $Z_0$ , para garantir a centralização da imagem, isto é:  $\varphi = 0$ ,  $X_0 = 900m$  e  $Z_0 = 2000m$  (figura 4.4).



**Figura 4.4 – Imagem simulada modificada para o experimento.**

Os resultados obtidos estão apresentados na tabela 4.16, que possui uma coluna com as diferenças entre os valores absolutos dos erros

verdadeiros, deste experimento e do correspondente (usando  $5\mu\text{m}$  de desvio padrão nos erros randômicos) com convergência na quinta imagem.

**Tabela 4.16 – Resultados da calibração com erros randômicos  $5\mu\text{m}$  e com menos convergência.**

Parâmetro	Valor recuperado	Desvio Padrão Estimado	Erro verdadeiro	$t$ de Student	$ E_{anterior}  -  E_{atual} $
$C$ (mm)	34,746	7,71E-02	-0,254	-3,290	-2,19E-01
$x_0$ (mm)	0,147	2,03E-02	-0,053	-2,586	-3,90E-02
$y_0$ (mm)	0,285	1,68E-02	-0,015	-0,898	-3,80E-03
$K_1$ (mm <sup>-2</sup> )	9,44E-06	3,79E-06	-5,62E-07	-0,148	1,37E-06
$K_2$ (mm <sup>-4</sup> )	3,03E-09	1,12E-08	1,03E-09	0,092	4,62E-09
$K_3$ (mm <sup>-6</sup> )	4,09E-12	1,01E-11	-9,09E-13	-0,090	2,74E-12
$P_1$ (mm <sup>-1</sup> )	2,55E-05	3,74E-06	5,46E-06	1,459	-4,20E-07
$P_2$ (mm <sup>-1</sup> )	2,78E-05	3,34E-06	-2,21E-06	-0,663	1,56E-06
$\kappa$ (rad)	0,100	9,19E-05	-1,17E-04	-1,275	-5,14E-05
$\varphi$ (rad)	0,100	4,48E-04	-1,21E-04	-0,269	2,30E-04
$\omega$ (rad)	-0,099	4,51E-04	1,03E-03	2,276	-4,80E-04
$X_0$ (mm)	1294,725	1,764	-5,275	-2,990	-4,86E+00
$Y_0$ (mm)	1194,661	1,620	-5,339	-3,296	-4,48E+00
$Z_0$ (mm)	2284,493	4,625	-15,507	-3,353	-1,35E+01

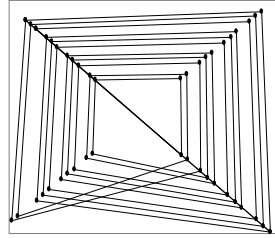
Numero de iterações: 13

Graus de liberdade: 412

Qui-quadrado amostral: 327,759

Observando os erros verdadeiros deste experimento e as diferenças deste com o anterior, verifica-se que vários parâmetros apresentaram erros verdadeiros significativamente maiores, principalmente para o parâmetro  $Z_0$ . Além disso, muitos parâmetros não foram aceitos no teste  $t$  de Student. No teste qui-quadrado o grau de significância para a não rejeição foi de 0,995, como no anterior.

A seguir, foi retirada a rotação em torno do eixo Z, isto é,  $\kappa = 0$  na quarta imagem (figura 4.5) e a convergência da quinta imagem foi mantida.



**Figura 4.5 – Imagem simulada 4 da figura 4.3 modificada para o experimento.**

Os resultados estão apresentados na tabela 4.17, na última coluna estão apresentadas as razões entre os erros verdadeiros deste experimento e do experimento anterior (com  $5\mu m$  no erro randômico e com a quarta imagem rotacionada em torno do eixo Z.)



**Tabela 4.17 – Resultados da calibração com erros randômicos de  $5\mu m$  sem rotação em  $\kappa$ .**

Parâmetro	Valor recuperado	Desvio Padrão estimado	Erro Verdadeiro	t de Student	$\frac{ E_{anterior} }{ E_{atual} }$
$C$ (mm)	34,964	2,43E-02	-3,63E-02	-1,496	0,971
$x_0$ (mm)	0,200	2,54E-02	1,17E-04	0,005	120,436
$y_0$ (mm)	0,316	2,49E-02	1,55E-02	0,622	0,724
$K_1$ (mm <sup>-2</sup> )	8,05E-06	3,30E-06	-1,95E-06	-0,591	0,990
$K_2$ (mm <sup>-4</sup> )	5,60E-09	1,03E-08	3,60E-09	0,350	1,569
$K_3$ (mm <sup>-6</sup> )	4,46E-12	1,01E-11	-5,38E-13	-0,053	6,782
$P_1$ (mm <sup>-1</sup> )	1,96E-05	7,28E-06	-4,48E-07	-0,061	11,261
$P_2$ (mm <sup>-1</sup> )	2,57E-05	7,54E-06	-4,31E-06	-0,572	0,876
$\kappa$ (rad)	0,100	1,08E-04	-8,38E-05	-0,773	0,782
$\varphi$ (rad)	0,100	6,84E-04	-6,58E-05	-0,096	5,332
$\omega$ (rad)	-0,099	7,08E-04	6,73E-04	0,951	0,817
$X_0$ (mm)	1299,613	0,690	-0,387	-0,561	1,085
$Y_0$ (mm)	1199,254	0,717	-0,746	-1,040	1,158
$Z_0$ (mm)	2298,092	1,363	-1,908	-1,400	1,067

Numero de iterações: 19  
Graus de liberdade: 412  
Qui-quadrado amostral: 317,564

Neste experimento a hipótese básica, como nos anteriores, não foi rejeitada para a maioria dos parâmetros com grau de significância de 0,05 ou maior, exceto para  $Z_0$  e  $Y_0$  da segunda e da quinta imagem respectivamente que foram aceitos com grau de significância de 0,025.

Observando o valor da razão entre os erros verdadeiros (tabela 4.17), verifica-se que, nos casos em que as razões diferenciam-se significativamente de 1, o fato deve-se, em geral, a erros verdadeiros maiores ocorridos no experimento anterior (com  $5\mu m$  no erro randômico e com a quarta imagem rotacionada em torno do eixo Z.). Isto significa que, quando se retirou a rotação em torno do eixo Z, os resultados se apresentaram melhores. Quanto às altas (maior

que 0,8) correlações, em geral, tiveram um aumento. Tanto neste experimento quanto no anterior (seção 4.1.2.1.2), em geral, com relação aos parâmetros de orientação interior, as maiores correlações ocorreram entre os seguintes parâmetros:

- $x_0$  e  $\varphi$ ;
- $y_0$  e  $\kappa$ ;
- $y_0$  e  $\omega$ ;
- $P_1$  e  $\varphi$ ;
- $P_2$  e  $\kappa$ ;
- $P_2$  e  $\omega$ .

#### 4.1.2.4 Comparação com calibração usando pontos

Com objetivo de verificar se o método usando retas é compatível com os métodos usando pontos, realizou-se um experimento com pontos para comparação. A calibração usando pontos foi feita pelo programa implementado que realiza a calibração usando o modelo de colinearidade e o método combinado de ajustamento. As simulações escolhidas (seção 4.1.2.1.2) para fazer a análise comparativa foram as de  $5\mu m$  de desvio padrão nos erros randômicos aplicados às observações e com a primeira geometria especificada de tomada das fotos e espaço objeto (início da seção 4.1.2).

Na entrada do programa, foram usadas as mesmas observações e espaço objeto, bem como parâmetros aproximados e variâncias.

Os resultados obtidos pelo programa implementado usando pontos e as razões entre os erros verdadeiros deste experimento e os erros verdadeiros do experimento similar ( $E_{similar}$ ) usando com retas estão apresentados na tabela 4.18. Além destes estão apresentadas as razões entre os erros deste experimento e os erros do experimento usando retas sem a rotação em torno do eixo Z ( $E_{sem\ rot\ em\ Z}$ ).

**Tabela 4.18 – Resultados da calibração com pontos e comparações com reta, ambos pelo método combinado.**

Parâmetro	Resultado com PONTOS				Comparação com RETAS	
	Valor Recuperado	Desvio Padrão estimado	Erro Verdadeiro	$t$ de Student	$\frac{E_{pontos}}{E_{similar}}$	$\frac{E_{pontos}}{E_{sem\ rot\ em\ Z}}$
$C$ (mm)	34,970	2,25E-02	-2,95E-02	-1,310	0,838	0,814
$x_0$ (mm)	0,188	1,66E-02	-1,20E-02	-0,727	0,857	103,206
$y_0$ (mm)	0,313	1,57E-02	1,29E-02	0,821	1,144	0,829
$K_1$ (mm <sup>-2</sup> )	9,73E-06	3,19E-06	-2,65E-07	-0,083	0,137	0,136
$K_2$ (mm <sup>-4</sup> )	2,72E-09	9,89E-09	7,17E-10	0,072	0,127	0,199
$K_3$ (mm <sup>-6</sup> )	5,53E-12	9,67E-12	5,34E-13	0,055	0,146	0,992
$P_1$ (mm <sup>-1</sup> )	2,61E-05	4,01E-06	6,12E-06	1,525	1,213	13,663
$P_2$ (mm <sup>-1</sup> )	2,54E-05	3,96E-06	-4,62E-06	-1,167	1,225	1,072
$\kappa$ (rad)	0,100	9,37E-05	-5,35E-05	-0,571	0,815	0,638
$\varphi$ (rad)	0,100	4,42E-04	4,52E-04	1,022	1,288	6,870
$\omega$ (rad)	-0,099	4,56E-04	5,62E-04	1,231	1,022	0,835
$X_0$ (mm)	1299,924	0,665	-0,076	-0,114	0,180	0,195
$Y_0$ (mm)	1199,256	0,707	-0,744	-1,052	0,861	0,997
$Z_0$ (mm)	2297,956	1,267	-2,044	-1,613	1,004	1,071
Informações	Número de iterações: 10 Graus de liberdade: 392 Qui-quadrado: 296,618					

Com relação ao teste  $t$  de Student os resultados apresentaram-se um pouco piores que os resultados do experimento similar usando retas. Os

resultados foram aceitos com grau de significância de 0,05 ou maior, com exceção do parâmetro  $Y_0$  da quinta imagem e, desta vez, do parâmetro  $Z_0$  da segunda imagem, que foram aceitos com grau de significância de 0,001 e 0,025 respectivamente.

Os erros verdadeiros obtidos neste experimento, quando comparados com o experimento similar com retas, se apresentaram, em geral, melhores. Porém, quando comparado com o experimento que não usou a rotação em torno de Z, (ver tabela 4.18) as razões que menos se aproximaram do valor 1, foram devidos a erros verdadeiros maiores no experimento que utilizou pontos. Isso significa que cada método (que usa pontos e que usa retas) se apresenta melhor ou pior, de acordo com cada situação.

#### **4.1.3 Análise dos experimentos com dados simulados**

A partir dos testes feitos com a resseção espacial, observou-se que o modelo baseado em retas é eficaz, porém apresenta sensibilidade a variações de peso das observações. É necessário que os desvios-padrão das observações não sejam subestimados.

A calibração apresentou fortes correlações entre os parâmetros da distorção radial simétrica e as simulações feitas com apenas o primeiro termo desta e sem a distorção descentrada, em geral, apresentaram melhores resultados.

Verificou-se que, quanto maiores são os erros randômicos das observações ou a variância destes, pior será o resultado do teste  $t$  de Student, o que significa que o método pode superestimar os desvios-padrão dos parâmetros ao

final do processo de ajustamento, quando há erros grandes nas observações ou na variância destes.

Com relação ao espaço objeto, verificou-se que quando foram acrescentadas diferenças nas coordenadas  $Z$  das retas de apoio, os resultados apresentaram-se, em geral, melhores.

Com relação às rotações das câmaras, a convergência apresentou-se necessária, pelo menos quando não há diferenças nas coordenadas  $Z$  das retas no espaço objeto, ao contrário da rotação em torno do eixo  $z$ , pois a ausência desta apresentou uma melhora.

O teste qui-quadrado mostrou que a estimação global dos parâmetros, em geral, não apresentou problema no método desenvolvido.

Em resumo, o comportamento do método não é muito diferente dos métodos que usam pontos com a equação de colinearidade e os resultados são compatíveis.

## **4.2 Experimentos com dados reais**

Para os experimentos com dados reais foram tomadas imagens do campo de calibração descrito na seção 3.3.2. As imagens foram lidas e processadas para obtenção de coordenadas imagens de pontos e retas. Estas coordenadas foram usadas no programa de calibração implementado para obtenção dos parâmetros de orientação interior da câmara.

#### 4.2.1 Tomada das imagens

Na tomada das imagens foram usados o campo de calibração construído e uma câmara digital da Sony (DSC-F828). Com a câmara focalizada para o infinito e distância focal de 50 mm, foram tomadas 5 imagens de diferentes posições, com o cuidado de haver imagens convergentes para evitar problemas de correlação. Estas imagens estão apresentadas na figura 4.6. A quinta imagem está rotacionada em torno do eixo  $z$ .

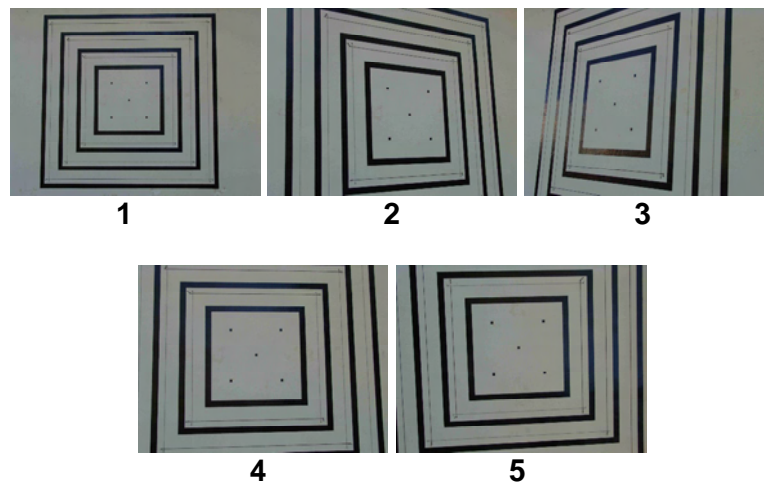


Figura 4.6 – Imagens tomadas do campo de calibração.

#### 4.2.2 Leitura e processamento das imagens

As coordenadas dos pontos de apoio foram obtidas através da leitura dos vértices dos quadrados formados pelas retas. Suas coordenadas foram lidas manualmente com a ajuda do programa *Mid* implementado por Reiss (2002), o qual monta um arquivo com as coordenadas dos pixels onde foram feitas as pontarias do cursor.

As coordenadas dos dois pontos das retas foram obtidas processando as imagens com o programa implementado para extração de bordas (seção 3.5). Foi usada apenas a versão para a extração de bordas, pois estas apresentaram-se mais bem definidas nas imagens que as linhas. Após os processamentos, foram usados os arquivos “dxf” gerados pelo programa, com as coordenadas com precisão subpixel dos pontos pertencentes às retas, no programa *MicroStation*. Este programa possibilitou a escolha manual dos pontos mais adequados para a representação das retas e leitura de suas coordenadas. Dessa maneira estima-se precisão melhor que quando se usa pontaria visual nos pixels da imagem, como foi feito para o caso dos pontos.

#### 4.2.3 Processamento dos dados

Montados os arquivos, iniciou-se o processo de cálculo dos parâmetros de orientação interior e exterior, tanto por retas quanto por pontos. As coordenadas dos pontos também foram usadas para testes com o programa CC, implementado por Galo (1993), para comparação. O programa CC efetua a calibração usando as equações de colinearidade e o método paramétrico de ajustamento. Nestes experimentos foi usado apenas o primeiro parâmetro da distorção radial simétrica ( $K_1$ ) e a distorção descentrada também não foi considerada, pois esses demais parâmetros não possuem influências significativas para a câmara utilizada.

Primeiramente foram gerados os resultados com os dois programas usando apenas pontos. Neste caso, ambos os programas utilizam a equação de colinearidade; a diferença principal entre os dois é o método de ajustamento: o

programa implementado utiliza o método combinado e o programa CC utiliza o paramétrico. A tabela 4.19 apresenta os resultados dos dois programas de calibração usando pontos.

**Tabela 4.19 - Resultados da calibração com dados reais para pontos usando o programa CC e o implementado neste trabalho.**

Parâmetros	Método combinado		Método paramétrico CC		Diferenças entre os parâmetros ajustado dois métodos
	Valor ajustado	Desvio Padrão estimado	Valor ajustado	Desvio padrão estimado	
$c$ (mm)	52,316	0,111	52,289	0,131	2,77E-02
$x_0$ (mm)	0,357	0,074	0,358	0,079	-8,72E-04
$y_0$ (mm)	0,106	0,070	0,135	0,070	-2,86E-02
$K_1$ (mm <sup>-2</sup> )	-6,45E-06	1,52E-06	5,38E-06	1,42E-06	-1,07E-06
$\kappa$ (rad)	-3,19E-03	2,06E-04	-3,21E-03	2,35E-04	-3,40E-03
$\varphi$ (rad)	2,98E-02	1,17E-03	3,00E-02	1,33E-03	-1,44E-04
$\omega$ (rad)	8,66E-02	1,15E-03	8,68E-02	1,31E-03	-2,69E-04
$X_0$ (mm)	1227,274	7,041	1227,461	7,997	-0,186
$Y_0$ (mm)	621,146	6,742	622,965	7,618	-1,819
$Z_0$ (mm)	4159,261	8,568	4156,281	10,130	2,981
Informações	Número de iterações: 8 Graus de liberdade: 184 Qui-quadrado amostral: 50,701		Número de iterações: 6 Graus de liberdade: 184 Qui-quadrado amostral: 89,610		

Pode-se perceber que os sinais dos parâmetros das distorções radiais calculados nos dois programas estão opostos devido ao fato de terem sido considerados com influências opostas nas equações de distorção. Para o cálculo da diferença entre estes dois parâmetros, apresentada tabela 4.19, foi considerado o valor absoluto.



Analisando os valores das diferenças apresentados na tabela 4.19, verifica-se que os parâmetros ajustados são similares, inclusive seus desvios-padrão.

A seguir, foram gerados os resultados com retas e, neste caso os graus de liberdade do ajustamento foram maiores, pois nas imagens eram visíveis mais retas que pontos. A tabela 4.20 apresenta os resultados deste experimento, bem como as diferenças entre estes resultados e os dois outros métodos que utilizam pontos.

**Tabela 4.20 - Resultados da calibração com dados reais para pontos usando o programa CC e o implementado neste trabalho.**

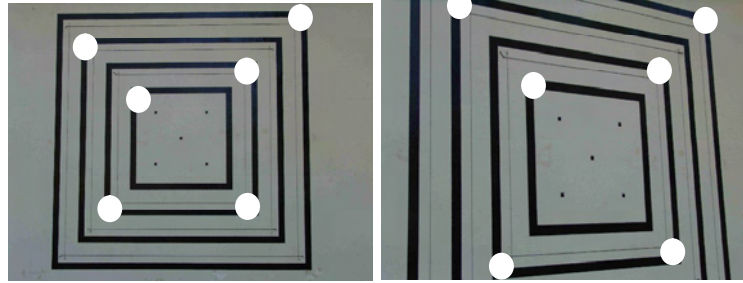
Parâmetros	Método combinado usando retas		Diferenças entre resultados com retas e pontos	
	Valor ajustado	Desvio Padrão estimado	Método combinado	Método Paramétrico, CC
$c$ (mm)	51,991	0,121	-0,325	-0,297
$x_0$ (mm)	-0,125	0,010	-0,482	-0,483
$y_0$ (mm)	0,124	0,058	0,018	-0,011
$K_1$ (mm <sup>-2</sup> )	-5,94E-06	1,56E-06	5,11E-07	-5,60E-07
$\kappa$ (rad)	-2,95E-03	2,39E-04	-6,14E-03	-3,16E-03
$\varphi$ (rad)	3,17E-02	1,22E-03	1,90E-03	1,75E-03
$\omega$ (rad)	8,61E-02	1,32E-03	-4,80E-04	-7,49E-04
$X_0$ (mm)	1196,519	5,244	-30,755	-30,941
$Y_0$ (mm)	626,915	5,157	5,769	3,950
$Z_0$ (mm)	4130,852	9,397	-28,408	-25,428
Informações	Número de iterações: 22 Graus de liberdade: 200 Qui-quadrado: 188,725			

Pela tabela 4.20 pode-se observar diferenças grandes nos parâmetros de translação da orientação exterior. Observa-se também que ocorreram diferenças consideráveis na recuperação das coordenadas do ponto principal. Porém, para os demais parâmetros os resultados foram semelhantes aos obtidos usando pontos.

Como os experimentos feitos com os dados simulados não proporcionaram diferenças grandes como as ocorridas neste experimento com dados reais, acredita-se que as possíveis causas destas diferenças sejam devidas ao fato de que a geometria neste caso foi menos favorável: não haviam retas diagonais no espaço objeto como nas simulações e além disso a distância principal foi de 50 mm, ao invés de 35 mm que proporciona um sistema melhor condicionado. As diferenças também podem ser atribuídas às configurações de tomadas das imagens que podem ter sido desfavoráveis; ou ainda, a erros nas observações dos pontos nas retas, pois estas foram obtidas processando as imagens no programa implementado para a extração de bordas, o qual pode ter gerado erros durante o processo.

Com o objetivo de verificar quais parâmetros de orientação interior (os obtidos com retas ou com pontos) fornecem melhores resultados, foi feito um experimento calculando apenas a orientação exterior e tratando a orientação interior como injunção. Isso foi feito usando o programa CC e os parâmetros resultantes da calibração com pontos pelo método paramétrico e retas pelo método combinado.

Foram usadas as duas primeiras imagens e selecionados 6 pontos distribuídos, como mostra a figura 4.7



**Figura 4.7 – Imagens usadas para verificação. Os pontos marcados foram utilizado para orientação exterior.**

Apenas estes 6 pontos selecionados e marcados nas imagens da figura 4.7 foram usados como apoio para solucionar a orientação exterior. Os outros pontos no espaço objeto foram usados para verificação. Os parâmetros de orientação interior foram fixados com injunções. Primeiramente foram usados os parâmetros de orientação interior obtidos pela calibração com pontos e a seguir foram usados os obtidos por retas. As coordenadas dos pontos no espaço objeto calculadas, usando cada um dos grupos de parâmetros de orientação interior, estão apresentados na tabela 4.21 com seus respectivos erros verdadeiros.

**Tabela 4.21 – Coordenadas dos pontos no espaço objeto calculadas para verificação, usando os parâmetros de orientação interior obtidos por pontos e por retas.**

Coordenada	Valores calculados		Erros verdadeiros	
	Pontos	Retas	Pontos	Retas
$X_{(mm)}$	1799,958	1799,939	0,042	0,061
	400,117	400,045	-0,117	-0,045
	400,06	400,151	-0,06	-0,151
	601,062	601,158	-1,062	-1,158
	600,051	600,341	-0,051	-0,341
	1399,696	1399,945	0,304	0,055
	1399,722	1399,697	0,278	0,303
	1953,073	1952,869	-1,073	-0,869
	1752,872	1752,919	-0,872	-0,919
	447,649	447,797	0,351	0,203
	1552,918	1553,109	-0,918	-1,109
	1552,741	1552,557	-0,741	-0,557
	648,006	648,135	-0,006	-0,135
	1352,66	1352,916	-0,66	-0,916
	1352,188	1352,205	-0,188	-0,205
$Y_{(mm)}$	1799,938	1799,457	0,062	0,543
	400,378	399,961	-0,378	0,039
	1600,465	1600,85	-0,465	-0,85
	601,063	600,799	-1,063	-0,799
	1400,415	1400,454	-0,415	-0,454
	1399,895	1399,722	0,105	0,278
	600,271	600,661	-0,271	-0,661
	1951,76	1951,089	0,24	0,911
	1752,11	1751,688	-0,11	0,312
	1553,094	1553,376	-1,094	-1,376
	1552,502	1552,247	-0,502	-0,247
	446,8	447,507	1,2	0,493
	648,54	648,305	-0,54	-0,305
	1352,571	1352,416	-0,571	-0,416
	647,567	647,872	0,433	0,128
$Z_{(mm)}$	0,132	0,635	-0,132	-0,635
	4,93	4,893	-4,93	-4,893
	-1,247	-2,062	1,247	2,062
	4,634	4,783	-4,634	-4,783
	-0,773	-1,067	0,773	1,067
	2,412	2,943	-2,412	-2,943
	0,161	0,666	-0,161	-0,666
	0,776	1,239	-0,776	-1,239
	-2,19	-1,684	2,19	1,684
	-0,029	-0,705	0,029	0,705
	-0,061	0,464	0,061	-0,464
	-2,679	-2,3	2,679	2,3
	4,465	4,654	-4,465	-4,654
	3,771	4,301	-3,771	-4,301
	1,412	1,941	-1,412	-1,941
Erro médio		<b>0,974</b>	<b>1,093</b>	
Média dos erros		<b>-0,530</b>	<b>-0,597</b>	
Desvio padrão dos erros		<b>1,512</b>	<b>1,591</b>	
Erro médio quadrático		<b>2,574</b>	<b>2,897</b>	

Verifica-se, pela tabela 4.21, que quando se usou os parâmetros de orientação interior obtidos por retas, os índices apresentados na tabela (erro médio, média e desvio padrão dos erros e erro médio quadrático) foram um pouco maiores

que quando se usou os obtidos por pontos. Porém os índices apresentaram valores próximos, indicando que os resultados são equivalentes, assim não se pode afirmar que um método é melhor que o outro.

#### **4.2.4 Análise dos resultados com dados reais**

Verificou-se que o método de calibração de câmaras usando o modelo desenvolvido e o método combinado pode ser usado em uma situação real. Apesar de alguns parâmetros obtidos usando retas terem se apresentado diferentes dos mesmos calculados pelos métodos que usam pontos, os resultados da utilização dos diferentes grupos de parâmetros de orientação interior calculados foram semelhantes. Isto significa que o método implementado de calibração por retas é comparável com o método convencional que utiliza pontos.

# CAPÍTULO V

## 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Objetivando melhorar a automação no processo de calibração, foi desenvolvido um modelo matemático para efetuar a calibração usando feições do tipo retas incluindo alguns parâmetros de orientação interior que não eram considerados em outros modelos matemáticos que usam retas para calibração. O modelo foi implementado juntamente com o modelo de colinearidade para a calibração.

### 5.1 Conclusões

Através de experimentos feitos com dados simulados pode se concluir que o modelo desenvolvido proporciona resultados semelhantes com os obtidos pelo método convencional, assim pode-se dizer que o modelo desenvolvido é comparável ao modelo convencional de colinearidade. Verificou-se que variações na configuração do espaço objeto e tomada das imagens proporcionaram, na maioria dos casos, efeitos semelhantes aos que costumam ocorrer com o uso do modelo de colinearidade, exceto em um caso, no qual o comportamento do sistema apresentou-se diferente do esperado.

Os resultados obtidos através do uso do modelo desenvolvido com dados reais apresentaram diferenças maiores, com relação ao método convencional, quando comparados com as diferenças obtidas nas simulações. Este fato deve-se provavelmente à geometria do problema que proporciona um sistema pior condicionado que a proporcionada pela geometria utilizada nas simulações. Porém, a utilização dos parâmetros de orientação interior, obtidos usando o modelo desenvolvido, para correção das observações na imagem e cálculo de coordenadas no espaço objeto proporcionou resultados semelhantes aos obtidos usando os parâmetros de orientação interior calculados pelo método convencional. Com isso pode-se dizer que o modelo desenvolvido proporciona resultados comparáveis com os proporcionados pelo modelo convencional de colinearidade.

## **5.2 Sugestões para trabalhos futuros**

Com objetivo de simplificar o problema, neste trabalho, não foram consideradas as correlações entre as coordenadas que definem as retas no espaço imagem e objeto. Sugere-se, então, efetuar estas modificações no programa, permitindo testar a influência destas aproximações nos resultados.

No programa implementado foram feitos testes ajustando o método usando retas, separadamente do método usando pontos. Sugere-se testar o ajustamento simultâneo de pontos e retas para possibilitar o aumento de redundância e/ou solucionar possíveis problemas encontrados em apenas um dos métodos.

Sugere-se também realizar um estudo teórico das correlações entre os elementos do modelo, possibilitando assim um conhecimento das condições ideais para o uso do método e situações críticas não recomendadas. Além disso, sugere-se um estudo comparativo mais aprofundado entre os métodos que usam pontos e os que usam retas, com relação às condições nas quais se possa recomendar o método mais adequado.

Outra sugestão é realizar um estudo mais aprofundado dos casos em que ocorre divergência na recuperação dos resultados, com o objetivo de detectar as causas do problema. Além disso, verificar as causas das diferenças, na recuperação de alguns parâmetros usando retas e pontos, ocorridas nos experimentos com dados reais.

Por último, são sugeridas adaptações e melhorias no programa de extração de linhas e bordas. O programa foi implementado para utilizar apenas as imagens do campo de calibração construído. Sugere-se implementações de novas funções que possibilitem o uso imagens tomadas de outros espaços objeto. O programa implementado possui problemas como: não realiza processamentos nas margens da imagem e não fornece bons resultados para regiões de quinas das feições. Sugere-se estudar alternativas para a solução destes problemas.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, J. B. **Fotogrametria**. SBEE. Curitiba, PR, 1998.

ARTERO, A. O. **Técnicas para a Extração Automática de Feições Retas em Imagens Digitais**. Dissertação de Mestrado. UNESP. Presidente Prudente, SP, 1999.

ATKINSON, K. B. **Close Range Photogrammetry and Machine Vision**. Department of Photogrammetry and Surveying, University College London, 1996.

BROWN, D. C. **Close Range Camera Calibration**. Symposium on Close-Range Photogrammetry. Urbana, Illinois, 1971.

BROWN, D. C.; FRYER, J. G. **Lens Distortion for Close-Range Photogrammetry**. PE&RS: Photogrammetric Engineering and Remote Sensing. v. 52, 1986.

CLARKE, T. A.; FRYER, J. G. **The Development of Camera Calibration Methods and Models**. Photogrammetric Record, v 16, 1998.

FRASER, C. S. **Digital Camera Self-Calibration**. ISPRS: Journal of Photogrammetry & Remote Sensing, 1997.

GALO, M. **Calibração e Aplicação de Câmaras Digitais**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, PR, 1993.

GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. **Processamento de Imagens Digitais**, Tradução: Roberto Marcondes César Junior e Luciano da Fontoura Costa, Ed, Edgard Blücher, São Paulo, 2000, 509p.

HABIB, AYMAN F. **Aerial Triangulation Using Point and Linear Features**. In: IAPRS, ISPRS Conference on "Automatic Extraction of GIS Objects from Digital Imagery" v. 32. München, 1999.

KENEFICK, J. F. at al. **Analytical Self-Calibration**. PE&RS: Photogrammetric Engineering and Remote Sensing. v. 40, 1974.

MERCHANT, D. C. **System Calibration for Aerial Analytical Photogrammetry**. IX Congresso Brasileiro de Cartografia. Curitiba, PR, 1979.

MIKHAIL, E. M. et al. **Introduction to Modern Photogrammetry**. U.S.A, 2001.

MIKHAIL, E. M., ACKERMAN, F. **Observations and Least Squares**. IEP Series in Civil Engineering, New York, 1976.

PRESCOTT, B.; MCLEAN G.I. **Line Base Correction of Radial Lens Distortion**. Graphical Models and Image Processing, 1996.

REISS, M. L. L - **Restituição Fotogramétrica Flexível de Imagens à Curta Distância: Estudo de Métodos e Desenvolvimento de Protótipo** FCT-UNESP, Presidente Prudente, SP, 2002.

SCHENK, T. **Digital Photogrammetry**. v 1. The Ohio State University, 1999.

SONKA, M.; VAKLAV, H; BOYLE, R. **Image Processing, Analysis, and Machine vision**. PWS Publishing, 1998.

TELLES, S. S. S.; TOMMASELLI, A. M. G. **Calibração de Câmaras Digitais usando Linhas Retas**. In: Série em Ciências Geodésicas. v.2. Presidente Prudente, SP, 2002.

TOMMASELLI, A. M. G **Um Modelo Alternativo à Equação de Colinearidade utilizando Feições Retas** Universidade estadual do Paraná, Curitiba, 1988.

TOMMASELLI, A. M. G.; TOZZI, C.L. **Calibração de Câmaras usando Feições Genéricas**, Tutorial. IV Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens, Anais, São Paulo, 1991.

TOMMASELLI, A.M.G.; TOZZI, C. L. **A Recursive Approach to Space Resection using Straight Lines**, Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, Presidente Prudente, SP, 1996

TOMMASELLI, A. M. G. **Modelo Matemático para Orientação de Imagens usando Linhas Retas**. UNESP. In: III Fórum de Ciências da FCT-UNESP, 1999.

## BIBLIOGRAFIA

CLARKE A. T. e FRYER G. J. **The Development of Cameras Calibration Methods and Models.** Photogrammetric Record, 1998.

GEMAEL, C. **Intrdução ao Ajustamento de Observações.** Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1994.

GALO, M. **Estrutura de Dados de Entrada/Saída do Aplicativo para Calibração de Câmaras (CC)** Universidade Estadual Paulista – FCT-UNESP, Presidente Prudente, SP, 2004.

LUGNANI, J. B. **Introdução à Fototriangulação.** Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1987.

TOMMASELLI, A.M.G.; LUGNANI, J. B. **An Alternative Mathematical Model to the Collinearity Equation using Straight Features,** In: Proceedings of the International Society for Photogrammetry and Remote Sensing, Kyoto, 1988.

TOMMASELLI, A.M.G. **Um Método Recursivo Aplicado ao Problema de Localização em Visão de Máquina.** Tese de doutorado. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1993.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.

# APÊNDICE A

## A. MÉTODO COMBINADO DE AJUSTAMENTO

O método combinado é usado para modelos funcionais que combinam observações e parâmetros. O número de equações de condição é, em geral, a soma dos graus de liberdade  $r$ , ou redundância, com o número de parâmetros incógnitos  $u$  (equação A.1) (MIKHAIL e ACKERMAN, 1976).

$$c = r + u \quad (\text{A.1})$$

Para parâmetros incógnitos independentes, devem ser satisfeitas as seguintes equações:

$$r \leq c \leq n \quad (\text{A.2})$$

$$0 \leq u \leq n_0 \quad (\text{A.3})$$

nas quais:

- $r = n - n_0$ ;
- $c$  número de equações de condições independentes;
- $n$  é o número total de observações;
- $n_0$  é o número mínimo de variáveis no modelo.

O modelo matemático do método combinado reúne parâmetro  $X_a$  ajustados e observações ajustadas  $L_a$ .

$$F(X_a, L_a) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Sendo:

- $X_0$  o vetor dos parâmetros aproximados;
- $V$  o vetor dos resíduos;
- $L_b$  as observações;
- $X = X_a - X_0$ .
- $B = \left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_b, X_0}$  ;
- $A = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{L_b, X_0}$  ;
- $W = F(L_b, X_0)$ .
- $M = BP^{-1}B^T$

As equações normais para o método combinado de ajustamento são:

$$X = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W \quad (\text{A.5})$$

No caso de modelos não lineares, onde há a necessidade de iniciar o processo com valores aproximados para os parâmetros deve-se somar o valor estimado para  $X$  com os parâmetros aproximados,  $X_0$ , (equação A.6).

$$X_a = X_0 + X \quad (\text{A.6})$$

Os resíduos podem ser obtidos pela equação A.7:

$$V = P^{-1} B^T K \quad (\text{A.7})$$

em que:

- $K = -M^{-1}(AX + W)$ .

As observações ajustadas são obtidas apenas somando os resíduos às observações,  $L_a = L_b + V$ .

Os parâmetros ajustados da iteração anterior serão usados na próxima iteração como parâmetros aproximados  $X_{i-1}^a = X_i^0$ . As observações ajustadas da iteração anterior  $L_{i-1}^a$  serão usadas na montagem das matrizes  $A$ ,  $B$  e  $W$ , ao invés das observações,  $L_b$ , que eram usadas na primeira iteração. Estas novas observações serão denotadas por  $L_i^0$ . As equações A.8 e A.9 mostram as matrizes  $A$  e  $B$  nas iteração  $i$ .

$$A_i = \left. \frac{\partial F}{\partial X_i^a} \right|_{X_i^0, L_i^0} \quad (\text{A.8})$$

$$B_i = \left. \frac{\partial F}{\partial L_i^a} \right|_{X_i^0, L_i^0} \quad (\text{A.9})$$

O vetor  $W$  terá uma pequena modificação, como mostra a equação A.10.

$$W_i = B_i(L_b - L_i^0) + F(L_i^0, X_i^0) \quad (\text{A.10})$$

Portanto (GEMAEL, 1994):

$$X_i = -(A_i^T M_i^{-1} A_i)^{-1} A_i^T M_i^{-1} W_i \quad (\text{A.11})$$

$$X_i^a = X_i^o + X_i \quad (\text{A.12})$$

$$V_i = -P^{-1} B_i^T M_i^{-1} (A_i X_i + W_i) \quad (\text{A.13})$$

$$L_i^a = L_b + V_i \quad (\text{A.14})$$

O critério de convergência pode ser baseado nas correções  $X_i$  dos parâmetros, ou a partir do vetor dos resíduos  $V_i$ . Quando o ajustamento converge, os resíduos e os parâmetros tendem a estabilizar e, portanto, as correções dos parâmetros tendem a zero. Assim basta verificar a estabilidade dos resíduos ou o valor das correções.

### A.1.1 Injunções de peso

De acordo com Mikhail e Ackerman (1976) as equações normais para o caso do método combinado com injunções de pesos nos parâmetros são:

$$X_i = -(A_i^T M_i^{-1} A_i + P_x)^{-1} (A_i^T M_i^{-1} W_i + P_x W_x) \quad (\text{A.15})$$

Sendo que  $P_x$  é a matriz diagonal dos pesos dos parâmetros e  $W_x$  é um vetor nulo na primeira iteração e nas demais ele acumula a correção ( $X_i$ ) dos parâmetros. Isto é:

$$W_{x_i} = \sum X_i \quad (\text{A.16})$$

Fazendo  $N_i = (A_i^T M_i^{-1} A_i + P_x)$  e  $U_i = (A_i^T M_i^{-1} W_i + P_x W_x)$  tem-se



$$X_i = -N_i^{-1}U_i \quad (\text{A.17})$$

$$\Sigma_{X_a} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} \quad (\text{A.18})$$

Na qual  $\Sigma_{X_a}$  é a matriz variância e covariância dos parâmetros ajustados.

## APÊNDICE B

### B. MODELO DESENVOLVIDO E DERIVADAS

#### B.1 Modelo matemático

- $$F_3 = (x_2 y_1 - x_1 y_2) v_1 + c \cdot \Delta y \cdot v_3 = 0$$

$$F_4 = (x_2 y_1 - x_1 y_2) v_2 - c \cdot \Delta x \cdot v_3 = 0$$

- $$\Delta x = x_2 - x_1$$

- $$\Delta y = y_2 - y_1$$

- $$v_1 = r_{11} N_1 + r_{12} N_2 + r_{13} N_3$$

- $$v_2 = r_{21} N_1 + r_{22} N_2 + r_{23} N_3$$

- $$v_3 = r_{31} N_1 + r_{32} N_2 + r_{33} N_3$$

$$r_{11} = \cos \varphi \cos \kappa$$

$$r_{12} = \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa$$

$$r_{13} = \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa$$

$$r_{21} = -\cos \varphi \sin \kappa$$

$$r_{22} = \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa$$

$$r_{23} = \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa$$

$$r_{31} = \sin \varphi$$

$$r_{32} = -\sin \omega \cos \varphi$$

$$r_{33} = \cos \omega \cos \varphi$$

$$N_1 = \Delta Y \cdot \bar{Z}_1 - \bar{Y}_1 \cdot \Delta Z$$

$$N_2 = \bar{X}_1 \cdot \Delta Z - \Delta X \cdot \bar{Z}_1$$

$$N_3 = \Delta X \cdot \bar{Y}_1 - \bar{X}_1 \cdot \Delta Y$$

$$\bar{X}_1 = X_1 - X_0$$

$$\bar{Y}_1 = Y_1 - Y_0$$

$$\bar{Z}_1 = Z_1 - Z_0$$

$$\bar{X}_2 = X_2 - X_0$$

$$\bar{Y}_2 = Y_2 - Y_0$$

$$\bar{Z}_2 = Z_2 - Z_0$$

$$\Delta X = X_2 - X_1$$

$$\Delta Y = Y_2 - Y_1$$

$$\Delta Z = Z_2 - Z_1$$

$$x_1 = x'_1 - x_0 + \bar{x}_1 K1 + P_1(r_1^2 + 2\bar{x}_1^2) + 2P_2\bar{x}_1\bar{y}_1$$

$$y_1 = y'_1 - y_0 + \bar{y}_1 K1 + P_2(r_1^2 + 2\bar{y}_1^2) + 2P_1\bar{x}_1\bar{y}_1$$

$$x_2 = x'_2 - x_0 + \bar{x}_2 K2 + P_1(r_2^2 + 2\bar{x}_2^2) + 2P_2\bar{x}_2\bar{y}_2$$

$$y_2 = y'_2 - y_0 + \bar{y}_2 K2 + P_2(r_2^2 + 2\bar{y}_2^2) + 2P_1\bar{x}_2\bar{y}_2$$

$$K1 = (K_1 r_1^2 + K_2 r_1^4 + K_3 r_1^6)$$

$$K2 = (K_1 r_2^2 + K_2 r_2^4 + K_3 r_2^6)$$

$$\bar{x}_1 = x'_1 - x_0$$

$$\bar{y}_1 = y'_1 - y_0$$

$$\bar{x}_2 = x'_2 - x_0$$

$$\bar{y}_2 = y'_2 - y_0$$

$$r_1 = \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2}$$

$$r_2 = \sqrt{\bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2}$$

## B.2 Derivadas parciais para os parâmetros de Orientação Exterior

### B.2.1 Derivadas parciais de $F_3$

$\kappa$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial \kappa} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_1}{\partial \kappa} + c \Delta y \frac{\partial v_3}{\partial \kappa}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \kappa} = \frac{\partial r_{11}}{\partial \kappa} N_1 + \frac{\partial r_{12}}{\partial \kappa} N_2 + \frac{\partial r_{13}}{\partial \kappa} N_3$$

$$\frac{\partial r_{11}}{\partial \kappa} = -\cos \varphi \sin \kappa$$

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial \kappa} = \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa$$

$$\frac{\partial r_{13}}{\partial \kappa} = \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial \kappa} = \frac{\partial r_{31}}{\partial \kappa} N_1 + \frac{\partial r_{32}}{\partial \kappa} N_2 + \frac{\partial r_{33}}{\partial \kappa} N_3$$

$$\frac{\partial r_{31}}{\partial \kappa} = 0$$

$$\frac{\partial r_{32}}{\partial \kappa} = 0$$

$$\frac{\partial r_{33}}{\partial \kappa} = 0$$

$\varphi$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial \varphi} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + c \Delta y \frac{\partial v_3}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial r_{11}}{\partial \varphi} N_1 + \frac{\partial r_{12}}{\partial \varphi} N_2 + \frac{\partial r_{13}}{\partial \varphi} N_3$$

$$\frac{\partial r_{11}}{\partial \varphi} = -\text{sen } \varphi \cos \kappa$$

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial \varphi} = \text{sen } \omega \cos \varphi \cos \kappa$$

$$\frac{\partial r_{13}}{\partial \varphi} = -\cos \omega \cos \varphi \cos \kappa$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial \varphi} = \frac{\partial r_{31}}{\partial \varphi} N_1 + \frac{\partial r_{32}}{\partial \varphi} N_2 + \frac{\partial r_{33}}{\partial \varphi} N_3$$

$$\frac{\partial r_{31}}{\partial \varphi} = \cos \varphi$$

$$\frac{\partial r_{32}}{\partial \varphi} = \text{sen } \omega \text{sen } \varphi$$

$$\frac{\partial r_{33}}{\partial \varphi} = -\cos \omega \text{sen } \varphi$$

## $\omega$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial \omega} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_1}{\partial \omega} + c \Delta y \frac{\partial v_3}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \omega} = \frac{\partial r_{11}}{\partial \omega} N_1 + \frac{\partial r_{12}}{\partial \omega} N_2 + \frac{\partial r_{13}}{\partial \omega} N_3$$

$$\frac{\partial r_{11}}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial \omega} = -\text{sen } \omega \text{sen } \kappa + \cos \omega \text{sen } \varphi \cos \kappa$$

$$\frac{\partial r_{13}}{\partial \omega} = \cos \omega \text{sen } \kappa + \text{sen } \omega \text{sen } \varphi \cos \kappa$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial \omega} = \frac{\partial r_{31}}{\partial \omega} N_1 + \frac{\partial r_{32}}{\partial \omega} N_2 + \frac{\partial r_{33}}{\partial \omega} N_3$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_{31}}{\partial \omega} &= 0 \\ \frac{\partial r_{32}}{\partial \omega} &= -\cos \omega \cos \varphi \\ \frac{\partial r_{33}}{\partial \omega} &= -\sin \omega \cos \varphi\end{aligned}$$

## $X_0$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_0} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_1}{\partial X_0} + c \cdot \Delta y \frac{\partial v_3}{\partial X_0}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial X_0} = r_{11} \frac{\partial N_1}{\partial X_0} + r_{12} \frac{\partial N_2}{\partial X_0} + r_{13} \frac{\partial N_3}{\partial X_0}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial X_0} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial X_0} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial X_0} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial X_0}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial X_0} = 0$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial X_0} = -\Delta Z$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial X_0} = \Delta Y$$

## $Y_0$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial Y_0} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_1}{\partial Y_0} + c \cdot \Delta y \frac{\partial v_3}{\partial Y_0}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial Y_0} = r_{11} \frac{\partial N_1}{\partial Y_0} + r_{12} \frac{\partial N_2}{\partial Y_0} + r_{13} \frac{\partial N_3}{\partial Y_0}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial Y_0} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial Y_0} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial Y_0} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial Y_0}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial Y_0} &= \Delta Z \\ \frac{\partial N_2}{\partial Y_0} &= 0 \\ \frac{\partial N_3}{\partial Y_0} &= -\Delta X\end{aligned}$$

$Z_0$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial Z_0} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_1}{\partial Z_0} + c \cdot \Delta y \frac{\partial v_3}{\partial Z_0}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial Z_0} = r_{11} \frac{\partial N_1}{\partial Z_0} + r_{12} \frac{\partial N_2}{\partial Z_0} + r_{13} \frac{\partial N_3}{\partial Z_0}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial Z_0} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial Z_0} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial Z_0} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial Z_0}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial Z_0} &= -\Delta Y \\ \frac{\partial N_2}{\partial Z_0} &= \Delta X \\ \frac{\partial N_3}{\partial Z_0} &= 0\end{aligned}$$

## B.2.2 Derivadas parciais de $F_4$

$K$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial K} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_2}{\partial K} - c \cdot \Delta x \frac{\partial v_3}{\partial K}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \kappa} = \frac{\partial r_{21}}{\partial \kappa} N_1 + \frac{\partial r_{22}}{\partial \kappa} N_2 + \frac{\partial r_{23}}{\partial \kappa} N_3$$

$$\frac{\partial r_{21}}{\partial \kappa} = -\cos \varphi \cos \kappa$$

$$\frac{\partial r_{22}}{\partial \kappa} = -\cos \omega \sin \kappa - \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa$$

$$\frac{\partial r_{23}}{\partial \kappa} = -\sin \omega \sin \kappa + \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial \kappa} = \frac{\partial r_{31}}{\partial \kappa} N_1 + \frac{\partial r_{32}}{\partial \kappa} N_2 + \frac{\partial r_{33}}{\partial \kappa} N_3$$

$$\frac{\partial r_{31}}{\partial \kappa} = 0$$

$$\frac{\partial r_{32}}{\partial \kappa} = 0$$

$$\frac{\partial r_{33}}{\partial \kappa} = 0$$

---

$\varphi$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial \varphi} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} - c \cdot \Delta x \frac{\partial v_3}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \varphi} = \frac{\partial r_{21}}{\partial \varphi} N_1 + \frac{\partial r_{22}}{\partial \varphi} N_2 + \frac{\partial r_{23}}{\partial \varphi} N_3$$

$$\frac{\partial r_{21}}{\partial \varphi} = \sin \varphi \sin \kappa$$

$$\frac{\partial r_{22}}{\partial \varphi} = -\sin \omega \cos \varphi \sin \kappa$$

$$\frac{\partial r_{23}}{\partial \varphi} = \cos \omega \cos \varphi \sin \kappa$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial \varphi} = \frac{\partial r_{31}}{\partial \varphi} N_1 + \frac{\partial r_{32}}{\partial \varphi} N_2 + \frac{\partial r_{33}}{\partial \varphi} N_3$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial r_{31}}{\partial \varphi} &= \cos \varphi \\ \frac{\partial r_{32}}{\partial \varphi} &= \sin \omega \sin \varphi \\ \frac{\partial r_{33}}{\partial \varphi} &= -\cos \omega \sin \varphi\end{aligned}$$

---

$\omega$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial \omega} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_2}{\partial \omega} - c \Delta x \frac{\partial v_3}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \omega} = \frac{\partial r_{21}}{\partial \omega} N_1 + \frac{\partial r_{22}}{\partial \omega} N_2 + \frac{\partial r_{23}}{\partial \omega} N_3$$

$$\frac{\partial r_{21}}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{\partial r_{22}}{\partial \omega} = -\sin \omega \cos \kappa - \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa$$

$$\frac{\partial r_{23}}{\partial \omega} = \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial \omega} = \frac{\partial r_{31}}{\partial \omega} N_1 + \frac{\partial r_{32}}{\partial \omega} N_2 + \frac{\partial r_{33}}{\partial \omega} N_3$$

$$\frac{\partial r_{31}}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{\partial r_{32}}{\partial \omega} = -\cos \omega \cos \varphi$$

$$\frac{\partial r_{33}}{\partial \omega} = -\sin \omega \cos \varphi$$

---

$X_0$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_0} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_2}{\partial X_0} - c \Delta x \frac{\partial v_3}{\partial X_0}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial X_0} = r_{21} \frac{\partial N_1}{\partial X_0} + r_{22} \frac{\partial N_2}{\partial X_0} + r_{23} \frac{\partial N_3}{\partial X_0}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial X_0} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial X_0} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial X_0} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial X_0}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial X_0} = 0$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial X_0} = -\Delta Z$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial X_0} = \Delta Y$$

$Y_0$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial Y_0} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_2}{\partial Y_0} - c \cdot \Delta x \frac{\partial v_3}{\partial Y_0}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial Y_0} = r_{21} \frac{\partial N_1}{\partial Y_0} + r_{22} \frac{\partial N_2}{\partial Y_0} + r_{23} \frac{\partial N_3}{\partial Y_0}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial Y_0} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial Y_0} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial Y_0} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial Y_0}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial Y_0} = \Delta Z$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial Y_0} = 0$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial Y_0} = -\Delta X$$

$$Z_0$$


---

$$\frac{\partial F_4}{\partial Z_0} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_2}{\partial Z_0} - c \cdot \Delta x \frac{\partial v_3}{\partial Z_0}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial Z_0} = r_{21} \frac{\partial N_1}{\partial Z_0} + r_{22} \frac{\partial N_2}{\partial Z_0} + r_{23} \frac{\partial N_3}{\partial Z_0}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial Z_0} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial Z_0} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial Z_0} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial Z_0}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial Z_0} = -\Delta Y$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial Z_0} = \Delta X$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial Z_0} = 0$$

### B.3 Derivadas parciais para as retas de apoio

#### B.3.1 Derivadas parciais de $F_3$

$$X_1$$


---

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_1} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_1}{\partial X_1} + c \cdot \Delta y \frac{\partial v_3}{\partial X_1}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial X_1} = r_{11} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} + r_{12} \frac{\partial N_2}{\partial X_1} + r_{13} \frac{\partial N_3}{\partial X_1}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial X_1} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial X_1} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial X_1}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial X_1} = 0$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial X_1} = \Delta Z + \bar{Z}_1 = \bar{Z}_2$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial X_1} = -\bar{Y}_1 - \Delta Y = -\bar{Y}_2$$

## $Y_1$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial Y_1} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_1}{\partial Y_1} + c \Delta y \frac{\partial v_3}{\partial Y_1}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial Y_1} = r_{11} \frac{\partial N_1}{\partial Y_1} + r_{12} \frac{\partial N_2}{\partial Y_1} + r_{13} \frac{\partial N_3}{\partial Y_1}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial Y_1} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial Y_1} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial Y_1} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial Y_1}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial Y_1} = -\bar{Z}_1 - \Delta Z = -\bar{Z}_2$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial Y_1} = 0$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial Y_1} = \Delta X + \bar{X}_1 = \bar{X}_2$$

## $Z_1$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial Z_1} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_1}{\partial Z_1} + c \Delta y \frac{\partial v_3}{\partial Z_1}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial Z_1} = r_{11} \frac{\partial N_1}{\partial Z_1} + r_{12} \frac{\partial N_2}{\partial Z_1} + r_{13} \frac{\partial N_3}{\partial Z_1}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial Z_1} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial Z_1} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial Z_1} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial Z_1}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial Z_1} = \Delta Y + \bar{Y}_1 = \bar{Y}_2$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial Z_1} = -\bar{X}_1 - \Delta X = -\bar{X}_2$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial Z_1} = 0$$

## $X_2$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_2} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_1}{\partial X_2} + c \cdot \Delta y \frac{\partial v_3}{\partial X_2}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial X_2} = r_{11} \frac{\partial N_1}{\partial X_2} + r_{12} \frac{\partial N_2}{\partial X_2} + r_{13} \frac{\partial N_3}{\partial X_2}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial X_2} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial X_2} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial X_2} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial X_2}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial X_2} = 0$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial X_2} = -\bar{Z}_1$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial X_2} = \bar{Y}_1$$

## $Y_2$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial Y_2} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_1}{\partial Y_2} + c \cdot \Delta y \frac{\partial v_3}{\partial Y_2}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial Y_2} = r_{11} \frac{\partial N_1}{\partial Y_2} + r_{12} \frac{\partial N_2}{\partial Y_2} + r_{13} \frac{\partial N_3}{\partial Y_2}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial Y_2} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial Y_2} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial Y_2} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial Y_2}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial Y_2} = \bar{Z}_1$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial Y_2} = 0$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial Y_2} = -\bar{X}_1$$

---

## $Z_2$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial Z_2} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_1}{\partial Z_2} + c \Delta y \frac{\partial v_3}{\partial Z_2}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial Z_2} = r_{11} \frac{\partial N_1}{\partial Z_2} + r_{12} \frac{\partial N_2}{\partial Z_2} + r_{13} \frac{\partial N_3}{\partial Z_2}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial Z_2} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial Z_2} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial Z_2} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial Z_2}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial Z_2} = -\bar{Y}_1$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial Z_2} = \bar{X}_1$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial Z_2} = 0$$

### B.3.2 Derivadas parciais de $F_4$

$X_1$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_1} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_2}{\partial X_1} - c \Delta x \frac{\partial v_3}{\partial X_1}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial X_1} = r_{21} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} + r_{22} \frac{\partial N_2}{\partial X_1} + r_{23} \frac{\partial N_3}{\partial X_1}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial X_1} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial X_1} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial X_1}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial X_1} = 0$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial X_1} = \Delta Z + \bar{Z}_1 = \bar{Z}_2$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial X_1} = -\bar{Y}_1 - \Delta Y = -\bar{Y}_2$$

$Y_1$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial Y_1} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_2}{\partial Y_1} - c \Delta x \frac{\partial v_3}{\partial Y_1}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial Y_1} = r_{21} \frac{\partial N_1}{\partial Y_1} + r_{22} \frac{\partial N_2}{\partial Y_1} + r_{23} \frac{\partial N_3}{\partial Y_1}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial Y_1} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial Y_1} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial Y_1} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial Y_1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial Y_1} &= -\bar{Z}_1 - \Delta Z = -\bar{Z}_2 \\ \frac{\partial N_2}{\partial Y_1} &= 0 \\ \frac{\partial N_3}{\partial Y_1} &= \Delta X + \bar{X}_1 = \bar{X}_2\end{aligned}$$

## Z<sub>1</sub>

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial Z_1} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_2}{\partial Z_1} - c \Delta x \frac{\partial v_3}{\partial Z_1}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial Z_1} = r_{21} \frac{\partial N_1}{\partial Z_1} + r_{22} \frac{\partial N_2}{\partial Z_1} + r_{23} \frac{\partial N_3}{\partial Z_1}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial Z_1} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial Z_1} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial Z_1} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial Z_1}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial Z_1} = \Delta Y + \bar{Y}_1 = \bar{Y}_2$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial Z_1} = -\bar{X}_1 - \Delta X = -\bar{X}_2$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial Z_1} = 0$$

## X<sub>2</sub>

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_2} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_2}{\partial X_2} - c \Delta x \frac{\partial v_3}{\partial X_2}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial X_2} = r_{21} \frac{\partial N_1}{\partial X_2} + r_{22} \frac{\partial N_2}{\partial X_2} + r_{23} \frac{\partial N_3}{\partial X_2}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial X_2} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial X_2} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial X_2} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial X_2}$$



$$\frac{\partial N_1}{\partial X_2} = 0$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial X_2} = -\bar{Z}_1$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial X_2} = \bar{Y}_1$$

## $Y_2$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial Y_2} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_2}{\partial Y_2} - c \Delta x \frac{\partial v_3}{\partial Y_2}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial Y_2} = r_{21} \frac{\partial N_1}{\partial Y_2} + r_{22} \frac{\partial N_2}{\partial Y_2} + r_{23} \frac{\partial N_3}{\partial Y_2}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial Y_2} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial Y_2} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial Y_2} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial Y_2}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial Y_2} = \bar{Z}_1$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial Y_2} = 0$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial Y_2} = -\bar{X}_1$$

## $Z_2$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial Z_2} = (x_2 y_1 - x_1 y_2) \frac{\partial v_2}{\partial Z_2} - c \Delta x \frac{\partial v_3}{\partial Z_2}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial Z_2} = r_{21} \frac{\partial N_1}{\partial Z_2} + r_{22} \frac{\partial N_2}{\partial Z_2} + r_{23} \frac{\partial N_3}{\partial Z_2}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial Z_2} = r_{31} \frac{\partial N_1}{\partial Z_2} + r_{32} \frac{\partial N_2}{\partial Z_2} + r_{33} \frac{\partial N_3}{\partial Z_2}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial Z_2} = -\bar{Y}_1$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial Z_2} = \bar{X}_1$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial Z_2} = 0$$

## B.4 Derivadas parciais para os parâmetros de Orientação Interior

### B.4.1 Derivadas parciais de $F_3$

$C$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial c} = \Delta y \cdot v_3$$

$x_0$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_0} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_0} + \frac{\partial x_2}{\partial x_0} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_0} - \frac{\partial x_1}{\partial x_0} y_2 \right) v_1 + c \cdot \left( \frac{\partial y_2}{\partial x_0} - \frac{\partial y_1}{\partial x_0} \right) \cdot v_3$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_0} = -1 - K_1 - x_0 \frac{\partial K_1}{\partial x_0} + 2P_1 r_1 \frac{\partial r_1}{\partial x_0} - 4P_1 \bar{x}_1 - 2P_2 \bar{y}_1$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_0} = \bar{y}_1 \frac{\partial K_1}{\partial x_0} + 2P_2 r_1 \frac{\partial r_1}{\partial x_0} - 2P_1 \bar{y}_1$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_0} = 2K_1 r_1 \frac{\partial r_1}{\partial x_0} + 4K_2 r_1^3 \frac{\partial r_1}{\partial x_0} + 6K_2 r_1^5 \frac{\partial r_1}{\partial x_0}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_0} = -\frac{\bar{x}_1}{r_1}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_0} = -1 - K_2 - x_0 \frac{\partial K_2}{\partial x_0} + 2P_1 r_2 \frac{\partial r_2}{\partial x_0} - 4P_1 \bar{x}_2 - 2P_2 \bar{y}_2$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_0} = \bar{y}_2 \frac{\partial K_2}{\partial x_0} + 2P_2 r_2 \frac{\partial r_2}{\partial x_0} - 2P_1 \bar{y}_2$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial x_0} = 2K_1 r_2 \frac{\partial r_2}{\partial x_0} + 4K_2 r_2^3 \frac{\partial r_2}{\partial x_0} + 6K_2 r_2^5 \frac{\partial r_2}{\partial x_0}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_0} = -\frac{\bar{x}_2}{r_2}$$

$y_0$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial y_0} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial y_0} + \frac{\partial x_2}{\partial y_0} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial y_0} - \frac{\partial x_1}{\partial y_0} y_2 \right) v_1 + c \left( \frac{\partial y_2}{\partial y_0} - \frac{\partial y_1}{\partial y_0} \right) v_3$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_0} = \bar{x}_1 \frac{\partial K_1}{\partial y_0} + 2P_1 r_1 \frac{\partial r_1}{\partial y_0} - 2P_2 \bar{x}_1$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_0} = -1 - K_1 - y_0 \frac{\partial K_1}{\partial y_0} + 2P_2 r_1 \frac{\partial r_1}{\partial y_0} - 4P_2 \bar{y}_1 - 2P_1 \bar{x}_1$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial y_0} = 2K_1 r_1 \frac{\partial r_1}{\partial y_0} + 4K_2 r_1^3 \frac{\partial r_1}{\partial y_0} + 6K_2 r_1^5 \frac{\partial r_1}{\partial y_0}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y_0} = -\frac{\bar{y}_1}{r_1}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial y_0} = \bar{x}_2 \frac{\partial K_2}{\partial y_0} + 2P_1 r_2 \frac{\partial r_2}{\partial y_0} - 2P_2 \bar{x}_2$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial y_0} = -1 - K_2 - y_0 \frac{\partial K_2}{\partial y_0} + 2P_2 r_2 \frac{\partial r_2}{\partial y_0} - 4P_2 \bar{y}_2 - 2P_1 \bar{x}_2$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial y_0} = 2K_1 r_2 \frac{\partial r_2}{\partial y_0} + 4K_2 r_2^3 \frac{\partial r_2}{\partial y_0} + 6K_2 r_2^5 \frac{\partial r_2}{\partial y_0}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial y_0} = -\frac{\bar{y}_2}{r_2}$$

## $K_1$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial K_1} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial K_1} + \frac{\partial x_2}{\partial K_1} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial K_1} - \frac{\partial x_1}{\partial K_1} y_2 \right) v_1 + c \cdot \left( \frac{\partial y_2}{\partial K_1} - \frac{\partial y_1}{\partial K_1} \right) v_3 = 0$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial K_1} = \bar{x}_1 r_1^2$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial K_1} = \bar{y}_1 r_1^2$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial K_1} = \bar{x}_2 r_2^2$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial K_1} = \bar{y}_2 r_2^2$$

## $K_2$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial K_2} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial K_2} + \frac{\partial x_2}{\partial K_2} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial K_2} - \frac{\partial x_1}{\partial K_2} y_2 \right) v_1 + c \cdot \left( \frac{\partial y_2}{\partial K_2} - \frac{\partial y_1}{\partial K_2} \right) v_3 = 0$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial K_2} = \bar{x}_1 r_1^4$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial K_2} = \bar{y}_1 r_1^4$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial K_2} = \bar{x}_2 r_2^4$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial K_2} = \bar{y}_2 r_2^4$$

### $K_3$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial K_3} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial K_3} + \frac{\partial x_2}{\partial K_3} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial K_3} - \frac{\partial x_1}{\partial K_3} y_2 \right) v_1 + c \cdot \left( \frac{\partial y_2}{\partial K_3} - \frac{\partial y_1}{\partial K_3} \right) v_3 = 0$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial K_3} = \bar{x}_1 r_1^6$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial K_3} = \bar{y}_1 r_1^6$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial K_3} = \bar{x}_2 r_2^6$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial K_3} = \bar{y}_2 r_2^6$$

### $P_1$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial P_1} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial P_1} + \frac{\partial x_2}{\partial P_1} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial P_1} - \frac{\partial x_1}{\partial P_1} y_2 \right) v_1 + c \cdot \left( \frac{\partial y_2}{\partial P_1} - \frac{\partial y_1}{\partial P_1} \right) v_3 = 0$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial P_1} = r_1^2 + 2\bar{x}_1^2$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial P_1} = 2\bar{x}_1\bar{y}_1$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial P_1} = r_2^2 + 2\bar{x}_2^2$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial P_1} = 2\bar{x}_2\bar{y}_2$$

---

**$P_2$**

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial P_2} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial P_2} + \frac{\partial x_2}{\partial P_2} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial P_2} - \frac{\partial x_1}{\partial P_2} y_2 \right) v_1 + c \left( \frac{\partial y_2}{\partial P_2} - \frac{\partial y_1}{\partial P_2} \right) v_3 = 0$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial P_2} = 2\bar{x}_1\bar{y}_1$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial P_2} = r_1^2 + 2\bar{y}_1^2$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial P_2} = 2\bar{x}_2\bar{y}_2$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial P_2} = r_2^2 + 2\bar{y}_2^2$$

#### B.4.2 Derivadas parciais de $F_4$

**$C$**

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial c} = -\Delta x.v_3$$

$x_0$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial x_0} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_0} + \frac{\partial x_2}{\partial x_0} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_0} - \frac{\partial x_1}{\partial x_0} y_2 \right) v_2 - c \cdot \left( \frac{\partial x_2}{\partial x_0} - \frac{\partial x_1}{\partial x_0} \right) v_3 = 0$$

$y_0$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial y_0} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial y_0} + \frac{\partial x_2}{\partial y_0} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial y_0} - \frac{\partial x_1}{\partial y_0} y_2 \right) v_2 - c \cdot \left( \frac{\partial x_2}{\partial y_0} - \frac{\partial x_1}{\partial y_0} \right) v_3 = 0$$

$K_1$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial K_1} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial K_1} + \frac{\partial x_2}{\partial K_1} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial K_1} - \frac{\partial x_1}{\partial K_1} y_2 \right) v_2 - c \cdot \left( \frac{\partial x_2}{\partial K_1} - \frac{\partial x_1}{\partial K_1} \right) v_3 = 0$$

$K_2$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial K_2} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial K_2} + \frac{\partial x_2}{\partial K_2} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial K_2} - \frac{\partial x_1}{\partial K_2} y_2 \right) v_2 - c \cdot \left( \frac{\partial x_2}{\partial K_2} - \frac{\partial x_1}{\partial K_2} \right) v_3 = 0$$

$K_3$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial K_3} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial K_3} + \frac{\partial x_2}{\partial K_3} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial K_3} - \frac{\partial x_1}{\partial K_3} y_2 \right) v_2 - c \cdot \left( \frac{\partial x_2}{\partial K_3} - \frac{\partial x_1}{\partial K_3} \right) v_3 = 0$$

$P_1$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial P_1} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial P_1} + \frac{\partial x_2}{\partial P_1} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial P_1} - \frac{\partial x_1}{\partial P_1} y_2 \right) v_2 - c \cdot \left( \frac{\partial x_2}{\partial P_1} - \frac{\partial x_1}{\partial P_1} \right) \cdot v_3 = 0$$

$P_2$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial P_2} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial P_2} + \frac{\partial x_2}{\partial P_2} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial P_2} - \frac{\partial x_1}{\partial P_2} y_2 \right) v_2 - c \cdot \left( \frac{\partial x_2}{\partial P_2} - \frac{\partial x_1}{\partial P_2} \right) \cdot v_3 = 0$$

## B.5 Derivadas parciais para as observações

### B.5.1 Derivadas parciais de $F_3$

$x'_1$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial x'_1} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial x'_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} y_2 \right) v_1 - c \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x'_1} \cdot v_3 = 0$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial x'_1} = 1 + K_1 + x'_1 \frac{\partial K_1}{\partial x'_1} + 2P_1 r_1 \frac{\partial r_1}{\partial x'_1} + 4P_1 \bar{x}_1 + 2P_2 \bar{y}_1$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x'_1} = \bar{y}_1 \frac{\partial K_1}{\partial x'_1} + 2P_2 r_1 \frac{\partial r_1}{\partial x'_1} + 2P_1 \bar{y}_1$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial x'_1} = 2K_1 r_1 \frac{\partial r_1}{\partial x'_1} + 4K_2 r_1^3 \frac{\partial r_1}{\partial x'_1} + 6K_2 r_1^5 \frac{\partial r_1}{\partial x'_1}$$



$$\frac{\partial r_1}{\partial x'_1} = \frac{\bar{x}_1}{r_1}$$

$y'_1$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial y'_1} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial y'_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y'_1} y_2 \right) v_1 - c \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y'_1} \cdot v_3 = 0$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial y'_1} = \bar{x}_1 \frac{\partial K1}{\partial y'_1} + 2P_1 r_1 \frac{\partial r_1}{\partial y'_1} + 2P_2 \bar{x}_1$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial y'_1} = 1 + K1 + y'_1 \frac{\partial K1}{\partial y'_1} + 2P_2 r_1 \frac{\partial r_1}{\partial y'_1} + 4P_2 \bar{y}_1 + 2P_1 \bar{x}_1$$

$$\frac{\partial K1}{\partial y'_1} = 2K_1 r_1 \frac{\partial r_1}{\partial y'_1} + 4K_2 r_1^3 \frac{\partial r_1}{\partial y'_1} + 6K_2 r_1^5 \frac{\partial r_1}{\partial y'_1}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y'_1} = \frac{\bar{y}_1}{r_1}$$

$x'_2$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial x'_2} = \left( \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial x'_2} \right) v_1 + c \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x'_2} v_3 = 0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial x'_2} = 1 + K2 + x'_2 \frac{\partial K2}{\partial x'_2} + 2P_1 r_2 \frac{\partial r_2}{\partial x'_2} + 4P_1 \bar{x}_2 + 2P_2 \bar{y}_2$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x'_2} = \bar{y}_2 \frac{\partial K2}{\partial x'_2} + 2P_2 r_2 \frac{\partial r_2}{\partial x'_2} + 2P_1 \bar{y}_2$$

$$\frac{\partial K2}{\partial x'_2} = 2K_1 r_2 \frac{\partial r_2}{\partial x'_2} + 4K_2 r_2^3 \frac{\partial r_2}{\partial x'_2} + 6K_2 r_2^5 \frac{\partial r_2}{\partial x'_2}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x'_2} = \frac{\bar{x}_2}{r_2}$$

$y'_2$

---

$$\frac{\partial F_3}{\partial y'_2} = \left( \frac{\partial x_2}{\partial y'_2} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial y'_2} \right) v_1 + c \cdot \frac{\partial y_2}{\partial y'_2} v_3 = 0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial y'_2} = \bar{x}_2 \frac{\partial K_2}{\partial y'_2} + 2P_1 r_2 \frac{\partial r_2}{\partial y'_2} + 2P_2 \bar{x}_2$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial y'_2} = 1 + K_2 + y'_2 \frac{\partial K_2}{\partial y'_2} + 2P_2 r_2 \frac{\partial r_2}{\partial y'_2} + 4P_2 \bar{y}_2 + 2P_1 \bar{x}_2$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial y'_2} = 2K_1 r_2 \frac{\partial r_2}{\partial y'_2} + 4K_2 r_2^3 \frac{\partial r_2}{\partial y'_2} + 6K_2 r_2^5 \frac{\partial r_2}{\partial y'_2}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial y'_2} = \frac{\bar{y}_2}{r_2}$$

### B.5.2 Derivadas parciais de $F_4$

$x'_1$

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial x'_1} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial x'_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} y_2 \right) v_2 + c \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} v_3 = 0$$

$y'_1$ 

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial y'_1} = \left( x_2 \frac{\partial y_1}{\partial y'_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y'_1} y_2 \right) v_2 + c \cdot \frac{\partial x_1}{\partial y'_1} \cdot v_3 = 0$$

 $x'_2$ 

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial x'_2} = \left( \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial x'_2} \right) v_2 - c \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} v_3 = 0$$

 $y'_2$ 

---

$$\frac{\partial F_4}{\partial y'_2} = \left( \frac{\partial x_2}{\partial y'_2} y_1 - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial y'_2} \right) v_2 - c \cdot \frac{\partial x_2}{\partial y'_2} v_3 = 0$$