



Solução positiva de uma equação de Schrödinger assintoticamente linear no infinito via variedade de Pohozaev

Juan Carlos Ortiz Chata

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Coorientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Solução positiva de uma equação de
Schrödinger assintoticamente linear no infinito
via variedade de Pohozaev**

Juan Carlos Ortiz Chata

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Coorientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, 24 de janeiro de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA

O89s Ortiz Chata, Juan Carlos.
Solução positiva de uma equação de Schrödinger assintoticamente linear no infinito via variedade de Pohozaev / Juan Carlos Ortiz Chata. - Presidente Prudente : [s.n], 2017
86 p.

Orientador: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Assintoticamente linear. 2. Identidade de Pohozaev. 3. Sequência de Cerami. I. Pimenta, Marcos Tadeu de Oliveira. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Presidente Prudente

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Solução positiva de uma equação de Schrödinger
assintoticamente linear no infinito via variedade de Pohozaev

AUTOR: JUAN CARLOS ORTIZ CHATA

ORIENTADOR: MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA

COORIENTADOR: GIOVANY DE JESUS MALCHER FIGUEIREDO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em MATEMÁTICA
APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Prof. Dr. EDCARLOS DOMINGOS DA SILVA Departamento de Matemática / UNIVERSIDADE FEDERAL
DE GOIÁS

Presidente Prudente, 21 de fevereiro de 2017

À minha mãe Dimna e meu pai Justiniano

Agradecimentos

Agradeço a minha mãe, por ter feito o possível para eu chegar ao Brasil e fazer este trabalho. Ela me deu exemplo de força de vontade, generosidade e amor. A meu pai Justiniano por seu apoio para continuar meus estudos (mesmo que longe deles). Por eles terem dado o melhor que puderam oferecer.

Agradeço a minha esposa, uma flor preciosa que o Senhor deu para mim, seu companheirismo, esforço e ânimo me ajudaram a fazer este trabalho.

Agradeço a meu orientador Prof. Dr. Marcos Tadeu De Oliveira Pimenta, por sua disposição para me atender em minhas dúvidas, além de me dar bons conselhos para minha vida profissional e cotidiana.

Agradeço a meu coorientador Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, que chegou em um momento bom, para me ajudar a continuar este trabalho com mais vontade devido às aulas que tivemos. Por tirar minhas dúvidas com bom ânimo e paciência, também agradeço por seus bons conselhos para minha vida.

Agradeço a meus professores e ao pessoal do Pós-Mac, por seu bom trabalho e tratar-me bem, pelo fato de eu ser estrangeiro. Agradeço a meus colegas do Pós-Mac: Anderson, Letícia, Maria Cecília, Débora, Guilherme, Tais, Leonardo, Clícia e os demais colegas, por suas ajudas nos momentos que eu precisava.

Agradeço às pessoas que encontrei nesta cidade de Presidente Prudente, pois seus ânimos e conselhos, me ajudaram a ficar firme .

Finalmente agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

*“ Alguns dos axiomas devemos admitir;
se admitimos poucos mais dos estritamente
necessários, o dano não é grande.
O essencial é aprender a raciocinar com os
axiomas uma vez admitidos. ”*

*A audiência em um teatro aceita
voluntariamente todos os postulados
impostos no início, mas uma vez que a cortina
é levantada é inexorável na incisão de lógica.
Bem, isto é justo o mesmo em matemática”.*

H. Poincaré

Resumo

Neste trabalho teórico em Equações Diferenciais Parciais Elípticas, iremos apresentar uma abordagem diferente e mais geral na busca de solução positiva da equação de Schrödinger assintoticamente linear no infinito

$$-\Delta u + \lambda u = a(x)f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

para $N \geq 3$ e $\lambda > 0$.

Métodos variacionais são usados para o estudo da existência das soluções fracas positivas sobre um apropriado subconjunto da variedade de Pohozaev associado ao problema, sob certas condições na não-linearidade.

Palavras-Chave: *assintoticamente linear; identidade de Pohozaev; compacidade e concentração; sequência de Cerami; baricentro.*

Abstract

In this theoretical work in Elliptic Partial Differential Equation, we will present a different and more general approach in the search of positive solution of asymptotically linear Schrödinger equation

$$-\Delta u + \lambda u = a(x)f(u) \text{ in } \mathbb{R}^N,$$

for $N \geq 3$ and $\lambda > 0$.

Variational methods are used to study the existence of the weak positive solutions on an appropriate subset of Pohozaev manifold associated with the problem, under certain assumptions on the nonlinearity.

Keywords: *Asymptotically linear; Pohozaev identity; Concentration compactness; Cerami sequence; Baricenter* .

Índice de Notações

- $|A|$ é a medida de Lebesgue de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^N$;
- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N; u \text{ é continuamente } k \text{ vezes diferenciável}\}$;
- $C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k; \text{supp}(u) \text{ é compacto}\}$;
- $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$;
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$;
- $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c \geq 0; |\{x \in \Omega; |u(x)| \leq c\}| > 0\}$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}$;
- $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m\}$, onde α é um multi-índice;
- $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}$;
- $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, onde o fecho é tomado com respeito à norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$;
- $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$;
- $H_0^m(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, onde o fecho é tomado com respeito à norma $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Sumário

Resumo	5
Abstract	7
Índice de Notações	9
1 Introdução	13
2 Preliminares	17
2.1 Distribuições	17
2.2 Espaços de Sobolev	19
2.2.1 Imersões contínuas e compactas de Sobolev	22
2.3 Uma versão do Teorema do Passo da Montanha	23
3 A identidade e variedade de Pohozaev	29
3.1 Identidade e variedade de Pohozaev	29
4 Resultados de não-existência	35
5 Existência de uma solução positiva	49
6 Considerações Finais	67
A Um problema modelo de (1.1)	69
B Regularidade da função I e J	73
Referências	77

Introdução

No trabalho de P. Rabinowitz [18], o autor trata a equação de Schrödinger não-linear

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi - \gamma|\psi|^{p-1}\psi,$$

onde $x \in \mathbb{R}^N$ e $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$. Procurando por solução da forma $\psi(x, t) = \exp(-iEt/\hbar)u(x)$, temos a seguinte equação diferencial parcial elíptica

$$-\Delta u + b(x)u = f(x, u) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

com condições sobre "b" e "f". Uma das condições sobre f é que $t^{-1}zf(x, tz)$ seja crescente para todo $t > 0$ e $z \neq 0$, o qual permite restringir este problema à variedade de Nehari, definida por:

$$\mathcal{N} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; I'(u)u = 0\},$$

onde I é o funcional energia associado ao problema.

Logo P. Rabinowitz mostra que o nível min-max do Passo da Montanha coincide com o ínfimo do funcional I restrito à variedade de Nehari $\mathcal{N}$ e além disso, este é um valor crítico para o funcional. Depois deste trabalho A. Maia e R. Lehrer [15] abordam a equação de Schrödinger assintoticamente linear no infinito,

$$-\Delta u + \lambda u = a(x)f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad (1.1)$$

para $N \geq 3$ e $\lambda > 0$.

As autoras A. Maia e R. Lehrer [15] consideram uma condição mais geral que $\frac{f(s)}{s}$, para $s > 0$, seja crescente. Uma pergunta natural seria se o problema (1.1) pode ser tratado utilizando a variedade de Nehari, mas a resposta é negativa pois no trabalho de D.Costa e H. Tehrani em [8](Proposition 2.2), é provado que se $\frac{f(s)}{s}$ para $s \geq 0$ é crescente e $f(s)$ é assintoticamente linear no infinito, o caminho $\gamma(t) := I(tu)$ não pode intersectar a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ para uma única $t > 0$. Esta é a principal razão pela qual A. Maia e R. Lehrer [15] procuram uma abordagem diferente, usando a Identidade de Pohozaev e sua variedade. A variedade de Pohozaev $\mathcal{P}$ permite-lhes encontrar uma solução positiva nos níveis maiores de energia. Para lograr isto as autoras se inspiraram nos trabalhos recentes de Jeanjean e K. Tanaka [12] e A. Azzollini e A. Pomponio [2] dos quais os primeiros mostram sem a monotocidade de $\frac{f(s)}{s}$ para $s > 0$, que o nível min-max

do Passo da Montanha é o ínfimo do funcional I restrito à variedade de Pohozaev, e que este é um valor crítico para o funcional I . No segundo trabalho, mostram que o ínfimo do funcional I restrito à variedade de Pohozev, não é atingido e que a variedade de Pohozev é um vínculo natural para I .

Neste trabalho, se realizará um estudo detalhado do artigo [15], onde sua principal tarefa foi mostrar que todas as funções de $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ podem ser projetadas na variedade de Pohozev, e para encontrar uma solução positiva foi suficiente minimizar o funcional I sobre um subconjunto de $\mathcal{P}$.

Uma importante observação a respeito do trabalho de A. Maia e R. Lehrer [15] é que não é possível aplicar o Teorema do Passo da Montanha com a condição de Palais-Smale (PS) para este problema, pois a não linearidade é assintoticamente linear no infinito, logo não satisfaz a condição de Ambrosetti e Rabinowitz. Por isso substitui-se esta condição de compacidade pela condição de Cerami [7]:

(Ce) O funcional I satisfaz a condição de Cerami se, para qualquer sequência (u_n) em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $I(u_n)$ é limitada e $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|) \rightarrow 0$, então existe uma subseqüência de (u_n) convergente.

Assume-se as seguintes condições sobre a função a :

- (A1) $a \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$, com $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} a(x) > 0$;
- (A2) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = a_\infty > \lambda$;
- (A3) $\nabla a(x) \cdot x \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ com a desigualdade estrita para um subconjunto de medida de Lebesgue positiva de $\mathbb{R}^N$;
- (A4) $a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} < a_\infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$;
- (A5) $a(x) + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, onde H representa a matriz hessiana da função a .

Mais tarde neste trabalho assumiremos outra condição (A6), a qual requiere que o supremo de $|a_\infty - a(x)|$ não seja grande (ver o Lema 25).

Além disso consideremos as seguintes hipóteses sobre a função f :

- (f1) $f \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} = 0$;
- (f2) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = 1$;
- (f3) se $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ e $Q(s) = \frac{1}{2}f(s)s - F(s)$, então existe uma constante $D \geq 1$ tal que:

$$0 < Q(s) \leq DQ(t), \text{ para todo } 0 < s \leq t \text{ e } \lim_{s \rightarrow \infty} Q(s) = \infty.$$

Com tudo isto estabeleceremos o seguinte resultado de existência.

Teorema 1 *Assumindo (A1) – (A6) e (f1) – (f3), então a equação (1.1) possui solução positiva $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Além disso, também vamos provar o seguinte teorema de não existência.

Teorema 2 *Suponha válidas (A1) – (A4) e (f1) – (f3). Então, $p = \inf_{u \in P} I(u)$ não é um nível crítico para o funcional I , em particular, o ínfimo não é atingido.*

Observação 1 *As condições (A2), (A3) e (A4) implicam que*

$$\nabla a(x) \cdot x \rightarrow 0, \text{ se } |x| \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

Observação 2 *Um problema modelo de (1.1) é*

$$-\Delta u + \lambda u = a(x) \frac{u^3}{1 + u^2}, \text{ em } \mathbb{R}^N$$

com $a(x) = a_\infty - \frac{1}{|x|+k}$, $k > \frac{1}{a_\infty}$ e $a_\infty > \lambda$ constantes positivas. Pode facilmente ser verificado que $a(x)$ e $f(s) = \frac{s^3}{1+s^2}$ satisfazem as hipóteses anteriores (ver Apêndice). Estes problemas aparecem na óptica não-linear e mais detalhes podem ser vistos em [22], [23] e suas referências.

Observação 3 *Uma vez que estamos à procura de soluções positivas, tomamos como de costume $f(s)$ definido em todo $s \in \mathbb{R}$, tornando $f(s) = 0$ se $s \leq 0$.*

Observação 4 *As condições (f1) e (f2) implicam que, dado $\epsilon > 0$ e $2 \leq p \leq 2^*$, existe uma constante positiva $C = C(\epsilon, p) > 0$ tal que para todo $s \in \mathbb{R}$,*

$$|F(s)| \leq \frac{\epsilon}{2} |s|^2 + C |s|^p. \quad (1.3)$$

Nossa proposta é apresentar o texto [15], de uma maneira que o torne mais acessível a um iniciante na área.

No início deste trabalho, foi necessário um estudo prévio de vários resultados abstratos de Análise Não-Linear como a teoria das distribuições, espaços de Sobolev e uma versão do Teorema do Passo da Montanha com a sequência de Cerami ver [3]. Estes resultados serão apresentados no Capítulo 2.

Preliminares

Neste capítulo inicialmente estudaremos a Teoria das Distribuições e os Espaços de Sobolev, e concluiremos com uma versão do Teorema do Passo da Montanha, que mostra a existência de uma sequência de Cerami em um nível min-max(ver [3]).

2.1 Distribuições

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ .

Definição 1 Chama-se suporte de ϕ ao fecho do conjunto nos quais ϕ não se anula, denotado por $\text{supp}(\phi)$, isto é,

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}}.$$

Se este conjunto é compacto, então diz-se que ϕ tem suporte compacto.

Definição 2 O espaço das funções ϕ de classe C^∞ com suporte compacto contido em Ω é um espaço vetorial denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$, cujos elementos chamamos de funções teste.

Agora definimos a convergência de sequências em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é.

Definição 3 Uma sequência de funções $\{\phi_m\}$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, é dita convergente para 0, se existe um conjunto compacto fixo $K \subset \Omega$ tal que $\text{supp}(\phi_m) \subset K$ para todo m , com ϕ_m e todas suas derivadas convergindo uniformemente para 0 em K .

Definição 4 Seja $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear. T é uma distribuição em Ω se para toda $\phi_m \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, tivermos que $T(\phi_m) \rightarrow 0$.

O espaço das distribuições é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Se $\Omega = \mathbb{R}^N$, denotamos $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) = \mathcal{D}'$.

Exemplo 1 Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrável, isto é, tal que para qualquer conjunto compacto $K \subset \Omega$,

$$\int_K |f| < +\infty.$$

Dada f localmente integrável, então o seguinte funcional linear define uma distribuição

$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$T_f(\phi) = \int_{\Omega} f \phi.$$

Observação 5 Se $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$ então T_f é uma distribuição.

Exemplo 2 (Distribuição de Dirac) O funcional linear $\delta : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta(\phi) = \phi(0)$, é uma distribuição.

Observação 6 δ não é gerada por uma função localmente integrável (ver [13] Exemplo 1.2.4).

Definição 5 Seja $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Um multi-índice é n -upla de números inteiros não negativos

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N).$$

Além disso, associado ao multi-índice α , temos os seguintes símbolos

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_N \\ \alpha! &= \alpha_1! \dots \alpha_N! \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N} \end{aligned}$$

e se α e β são multi-índices, $\alpha \leq \beta$ se $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Finalmente denotamos por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Definição 6 Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, onde Ω é um conjunto aberto. Para qualquer multi-índice α , definimos a derivada de ordem α de T por:

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi), \text{ para todo } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemplo 3 Consideremos a função de Heaviside em $\mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

a qual é localmente integrável, e portanto define uma distribuição T_H . Seja $\phi \in \mathcal{D}$ então

$$\frac{d}{dx} T_H(\phi) = -T_H\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = - \int_{\mathbb{R}} H \frac{\partial \phi}{\partial x} = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi(0) = \delta(\phi).$$

Assim temos que

$$\frac{d}{dx} T_H = \delta.$$

Definição 7 O gradiente da distribuição T , denotado por ∇T e definido por

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial x_N} \right),$$

e o Laplaciano de T é dado por

$$\Delta T = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}.$$

Observação 7 No caso em que uma distribuição é gerada por uma função $u \in L^p(\Omega)$, com $p \geq 1$, denotaremos o gradiente da distribuição por:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right),$$

e seu laplaciano, por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

2.2 Espaços de Sobolev

Definição 8 Seja $m > 0$ um inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo } |\alpha| \leq m\},$$

com norma

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \quad (2.1)$$

e seminorma

$$|u|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Observação 8 i) Se $p = 2$ então denotaremos esse espaço como $H^m(\Omega)$. Isto é,

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

e para $u \in H^m(\Omega)$, denotamos sua norma por $\|u\|_{m,\Omega}$, isto é,

$$\|u\|_{m,\Omega} = \|u\|_{m,2,\Omega}.$$

ii) A norma $\|u\|_{m,p,\Omega}$ no espaço $H^m(\Omega)$ é induzida pelo seguinte produto interno

$$\langle u, v \rangle_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v, \text{ para } u, v \in H^m(\Omega).$$

iii) No espaço $W^{1,p}(\Omega)$ a função

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \in (L^p(\Omega))^{n+1}$$

é uma isometria.

iv) O espaço $(L^p(\Omega))^{n+1}$ tem norma,

$$\|u\| = \sum_{i=1}^{n+1} |u_i|_{0,p,\Omega} \quad \text{ou} \quad \|u\| = \left(\sum_{i=1}^{n+1} |u_i|_{0,p,\Omega}^p \right)^{1/p}$$

para $u = (u_i) \in (L^p(\Omega))^{n+1}$. Com isto obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3 *Seja $1 \leq p \leq \infty$, o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. Se $1 < p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo.*

Demonstração. Seja $\{u_m\}$ uma sequência de Cauchy em $W^{1,p}(\Omega)$. Então pela norma definida em (2.1), temos que $\{u_m\}$ e $\{\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\}$ quando $1 \leq i \leq N$ são sequências de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ é completo, então $u_m \rightarrow u$ e $\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightarrow v_i$ em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq i \leq N$. A completude do espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é provado se mostramos $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$ no sentido das distribuições, pois

$$\|u_m - u\|_{1,p,\Omega}^p = |u_m - u|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^p(\Omega)}^p \rightarrow 0 \quad \text{quando } m \rightarrow \infty.$$

Seja $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então como $u_m \in W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_{u_m}(\phi) = T_{S_i}(\phi), \quad S_i \in L^p(\Omega).$$

e em seguida considerando $S_i = \frac{\partial u_m}{\partial x_i}$ com $1 \leq i \leq N$, temos

$$-\int_{\Omega} u_m \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \phi. \quad (2.2)$$

Desde que $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\phi \in L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q \leq \infty$, quando $m \rightarrow +\infty$ em (2.2), temos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_u(\phi) = -\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_{\Omega} v_i \phi = T_{v_i}(\phi)$$

o que significa que $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ q.t.p em Ω . Logo $u_m \rightarrow u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Assim $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço completo.

Agora como $(L^p(\Omega))^{n+1}$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e como $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço completo, imagem de $W^{1,p}(\Omega)$ pela isometria da Observação (8), então é um subespaço fechado de $(L^p(\Omega))^{n+1}$. Logo $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo. ■

Agora definimos $W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p,\Omega}} \subset W^{m,p}(\Omega)$ e temos o seguinte resultado.

Teorema 4 *Seja $1 \leq p < \infty$. Então para qualquer inteiro $m \geq 0$,*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração.

Passo 1: Seja $\{\rho_\varepsilon\}$ a família de Mollifiers. Então se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, temos $\rho_\varepsilon * u \rightarrow u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Agora seja ϕ uma função contínua com suporte compacto tal que

$$|\phi - u|_{0,p,\mathbb{R}^N} < \delta/3,$$

onde δ é um número escolhido anteriormente. Em seguida escolhemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$|\phi * \rho_\varepsilon - \phi|_{0,p,\mathbb{R}^N} < \delta/3.$$

Assim,

$$|u - u * \rho_\varepsilon|_{0,p,\mathbb{R}^N} \leq |u - \phi|_{0,p,\mathbb{R}^N} + |\phi - \rho_\varepsilon * \phi|_{0,p,\mathbb{R}^N} + |\rho_\varepsilon * \phi - u * \rho_\varepsilon|_{0,p,\mathbb{R}^N} < \delta,$$

pois $|(u - \phi) * \rho_\varepsilon|_{0,p,\mathbb{R}^N} \leq |\rho_\varepsilon|_{0,1,\mathbb{R}^N} |u - \phi|_{0,p,\mathbb{R}^N} < \delta/3$.

Passo 2: Agora, se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, então $u * \rho_\varepsilon \in C^\infty$ e $D^\alpha(u * \rho_\varepsilon) = D^\alpha u * \rho_\varepsilon = u * D^\alpha \rho_\varepsilon$ para qualquer múlti-índice. Pelo Passo 1, $D^\alpha(u * \rho_\varepsilon) = \rho_\varepsilon * D^\alpha u \rightarrow D^\alpha u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Assim $u * \rho_\varepsilon \rightarrow u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Passo 3: Seja ς uma função em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varsigma \leq 1$ e $\varsigma = 1$ em $B_1(0)$ e $\text{supp}(\varsigma) \subset B_2(0)$. Em seguida consideremos a sequência $\{\varsigma_k\}$ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, definida por

$$\varsigma_k(x) = \varsigma(x/k).$$

Agora seja $\varepsilon_k \rightarrow 0$, definimos $u_k = \rho_{\varepsilon_k} * u$ que é infinitamente diferenciável, e pelo Passo 2, temos $u_k \rightarrow u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Logo definimos $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ por

$$\phi_k(x) = \varsigma_k(x)u_k(x),$$

e mostremos que $\phi_k \rightarrow u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. De fato, desde que $\varsigma_k = 1$ em $B_k(0)$ temos $u_k = \phi_k$ em $B_k(0)$ e

$$\begin{aligned} |u_k - \phi_k|_{0,p,\mathbb{R}^N} &= \left(\int_{|x| \geq k} |u_k(x) - \phi_k(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{|x| \geq k} 2^p \max\{|u_k|^p, |\phi_k|^p\} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2 \left(\int_{|x| \geq k} |u_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

pois, $|\phi_k| = |\varsigma_k u_k| \leq 1 |u_k| = |u_k|$. Assim

$$|u - \phi_k|_{0,p,\mathbb{R}^N} \leq |u - u_k|_{0,p,\mathbb{R}^N} + |u_k - \phi_k|_{0,p,\mathbb{R}^N} \leq |u - u_k|_{0,p,\mathbb{R}^N} + 2 \left(\int_{|x| \geq k} |u_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

e consequentemente $\phi_k \rightarrow u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Similarmente, desde que $\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$ em $B_k(0)$ e

$$\left| \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right|_{0,p,\mathbb{R}^N} = \left(\int_{|x| \geq k} \left| \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2 \left(\int_{|x| \geq k} \left| \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \right|^p + \int_{|x| \geq k} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$. Daí temos que $\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Portanto $\phi_k \rightarrow u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. ■

Teorema 5 (*Friedrichs*) *Seja $1 \leq p < \infty$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então existe uma sequência $\{u_m\}$ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_m \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$ e $\frac{\partial u_m}{\partial x_i}|_{\Omega'} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}|_{\Omega'}$ em $L^p(\Omega')$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $\Omega' \subset \subset \Omega$.*

Teorema 6 (*Desigualdade de Poincaré*) *Seja Ω um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^N$. Então existe $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que*

$$|u|_{0,p,\Omega} \leq C|u|_{1,p,\Omega} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular $u \mapsto |u|_{1,p,\Omega}$ define uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ a qual é equivalente a $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$.

2.2.1 Imersões contínuas e compactas de Sobolev

As imersões contínuas e compactas de Sobolev estabelecem certas desigualdades úteis. Portanto enunciaremos algumas propriedades destas imersões.

Teorema 7 (*Desigualdade de Sobolev*) *Seja $1 \leq p < N$, então existe uma constante $C = C(p, N) > 0$, tal que*

$$|u|_{0,p^*,\mathbb{R}^N} \leq C|u|_{1,p,\mathbb{R}^N}.$$

Em particular, temos a imersão contínua

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

onde $p^* = \frac{Np}{N-p}$

Corolário 1 *Se $1 \leq p < N$. Então temos a imersão contínua*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \text{ para todo } q \in [p, p^*].$$

Demonstração. Seja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $p \leq q \leq p^*$. Então podemos escolher $\alpha \in [0, 1]$ tal que

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}$$

e $|u|^{\alpha q} \in L^{p/\alpha q}(\mathbb{R}^N)$, também $|u|^{(1-\alpha)q} \in L^{p^*/(1-\alpha)q}(\mathbb{R}^N)$, assim pela Desigualdade de Hölder, temos

$$|u|_{0,q,\mathbb{R}^N} \leq |u|_{0,p,\mathbb{R}^N}^\alpha |u|_{0,p^*,\mathbb{R}^N}^{1-\alpha} \leq \alpha |u|_{0,p,\mathbb{R}^N} + (1-\alpha) |u|_{0,p^*,\mathbb{R}^N} \leq C \|u\|_{1,p,\mathbb{R}^N},$$

donde também usamos a Desigualdade de Sobolev. Assim $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ com $p \leq q \leq p^*$. ■

Observação 9 Temos que $H^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [2, 2^*]$.

Corolário 2 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então $u \in L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, p^*]$ e existe $C = C(p, N) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |u|_{0,p^*,\Omega} &\leq C |u|_{1,p,\Omega}, \\ |u|_{0,q,\Omega} &\leq C \|u\|_{1,p,\Omega}, \end{aligned}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 8 (Rellich- Kondrachov). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado de classe C^1 . Então as seguintes são imersões compactos:

- (i) Se $p < N$, $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < p^*$,
- (ii) Se $p = N$, $W^{1,N}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$,
- (iii) Se $p > N$, $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow C(\bar{\Omega})$.

2.3 Uma versão do Teorema do Passo da Montanha

Definição 9 Seja X um espaço de Banach. $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e

$$\tilde{X} = \{u \in X; I'(u) \neq 0\}$$

o conjunto dos pontos regulares de I . Dizemos que a função $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X$ é um campo pseudo-gradiente para I quando φ é localmente lipschitziana e

- a) $\|\varphi(u)\|_X \leq 2\|I'(u)\|_{X'}$
- b) $I'(u)\varphi(u) \geq \|I'(u)\|_{X'}^2$.

Proposição 1 Se $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ então existe um campo pseudo-gradiente para I .

A demonstração desta proposição pode se encontrada no apêndice de [17].

Lema 1 (Lema de Deformação). Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$(1 + \|u\|) \|I'(u)\| \geq 8\varepsilon, \quad \text{para todo } u \in I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]).$$

Então existe $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$ verificando :

- (i) $\eta(t, u) = u$, se $t = 0$ ou se $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$,
- (ii) $I(\eta(\cdot, u))$ é não-crescente em $[0, 1]$ e
- (iii) $\eta(1, I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$.

Demonstração. No que segue considere os seguintes subconjuntos de X ,

$$\begin{aligned} A &= \{u \in X; c - 2\varepsilon \leq I(u) \leq c + 2\varepsilon\} \\ B &= \{u \in X; c - \varepsilon \leq I(u) \leq c + \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Usando A e B , definimos a função $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi(u) = \frac{\text{dist}(u, X \setminus A)}{\text{dist}(u, X \setminus A) + \text{dist}(u, B)},$$

a qual é localmente lipschitziana pois $\text{dist}(\cdot, A)$ é lipschitziana. Além disso note que ψ esta bem definida em X . Caso contrário suponha que o denominador seja zero, isto é, existe $u \in X$ tal que

$$\text{dist}(u, X \setminus A) + \text{dist}(u, B) = 0,$$

então $\text{dist}(u, X \setminus A) = 0$ e $\text{dist}(u, B) = 0$, daí $u \in (\overline{X \setminus A}) \cap B$. Logo, existe uma sequência $(u_n) \subset X \setminus A$ tal que $u_n \rightarrow u$ em X , ou seja,

$$I(u_n) < c - 2\varepsilon \text{ ou } I(u_n) > c + 2\varepsilon.$$

Passando o limite quando $n \rightarrow +\infty$ nas últimas desigualdades e da continuidade do funcional I , encontramos

$$I(u) \leq c - 2\varepsilon \text{ ou } I(u) \geq c + 2\varepsilon.$$

o que contradiz ao fato de que $u \in B$. Portanto ψ está bem definida. Observemos também que $\psi = 1$ em B e $\psi = 0$ em $X \setminus A$.

Além disso, desde que a função $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, pela Proposição 1, existe um campo pseudo-gradiente $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ para I e definimos a função

$$W(u) = \begin{cases} -\psi(u) \frac{\phi(u)}{\|\phi(u)\|_X^2} & , \text{ se } u \in A \cap \tilde{X} \\ 0 & , \text{ se } u \in X \setminus A \cap \tilde{X}. \end{cases}$$

Note que W é localmente lipschitziana e

$$\|W(u)\| \leq \frac{1}{\|\phi(u)\|} \leq \frac{1}{\|I'(u)\|} \leq \frac{1 + \|u\|}{8\varepsilon} \quad (2.3)$$

para todo $u \in X$.

Assim, para cada $u \in X$, o problema de Cauchy com as condições sobre W

$$\begin{cases} \sigma_t(t, u) = W(\sigma(t, u)) \text{ para } t \geq 0, \\ \sigma(0, u) = u, \end{cases}$$

possui uma única solução $\sigma(t, u)$, definida para todo $t \geq 0$. Além disso, $\sigma(t, u)$ é contínua em $\mathbb{R} \times X$. Desta forma fica bem definida a função contínua $\eta : [0, 1] \times X \rightarrow X$ por

$$\eta(t, u) = \sigma(8\varepsilon t, u),$$

que satisfaz $\eta(0, u) = u$.

Agora se $u \notin A$, defina $\bar{\sigma}(t, u) = u$. Note que

$$\bar{\sigma}_t(t, u) = 0 = W(\bar{\sigma}(t, u)) \text{ e } \bar{\sigma}(0, u) = u.$$

Segue da unicidade da solução do problema de Cauchy que

$$\bar{\sigma}(t, u) = \sigma(t, u) = u \quad \forall u \notin A,$$

mostrando (i). Vejamos agora, que $I(\eta(\cdot, u))$ é não crescente em $[0, 1]$. De fato, notemos que

$$I_t(\sigma(t, u)) = I'(\sigma(t, u))\sigma_t(t, u) \quad (2.4)$$

$$= I'(\sigma(t, u))W(\sigma(t, u)) = 0, \quad (2.5)$$

para todo $\sigma(t, u) \in X \setminus A$.

Para $\sigma(t, u) \in A$, encontramos

$$\begin{aligned} I_t(\sigma(t, u)) &= I'(\sigma(t, u))\sigma_t(t, u) \\ &= I'(\sigma(t, u))W(\sigma(t, u)) \\ &= -I'(\sigma(t, u))\psi(\sigma(t, u)) \frac{\phi(\sigma(t, u))}{\|\phi(\sigma(t, u))\|_X}, \end{aligned}$$

e desde que ϕ é um campo Pseudo-Gradiente para I , por b), temos que

$$I_t(\sigma(t, u)) \leq -\psi(\sigma(t, u)) \frac{\|I'(\sigma(t, u))\|_{X'}^2}{\|\phi(\sigma(t, u))\|_X} \leq 0, \quad (2.6)$$

e por (3.3) e (3.4), temos que $I(\sigma(\cdot, u))$ é não decrescente em $t \geq 0$. Com isto provamos (ii).

Agora considerando que $u \in I^{c+\varepsilon}$, se existir $t_0 \in [0, 1]$ tal que $I(\sigma(t_0, u)) < c - \varepsilon$ ou equivalentemente se existir $t_1 \in [0, 1]$ tal que

$$I(\sigma(8\varepsilon t_1, u)) < c - \varepsilon$$

e usando a monotonicidade da função $I(\sigma(\cdot, u))$, temos que

$$I(\eta(1, u)) = I(\sigma(8\varepsilon, u)) \leq I(\sigma(8\varepsilon t_1, u)) < c - \varepsilon,$$

mostrando que $\eta(1, u) \in I^{c-\varepsilon}$. Por outro lado, se

$$c - \varepsilon \leq I(\sigma(8\varepsilon t_1, u)), \quad \forall 0 \leq t \leq 1,$$

então

$$c - \varepsilon \leq I(\sigma(8\varepsilon t, u)) \leq I(\sigma(0, u)) = I(u) \leq c + \varepsilon,$$

o qual implica que

$$\eta(t, u) = \sigma(8\varepsilon t, u) \in B \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

Assim

$$\begin{aligned} I(\eta(1, u)) &= I(\sigma(8\varepsilon, u)) = I(\sigma(0, u)) + \int_0^{8\varepsilon} I_s(\sigma(s, u))ds \\ &= I(u) + \int_0^{8\varepsilon} I'(\sigma(s, u))W(\sigma(s, u))ds \\ &= I(u) - \int_0^{8\varepsilon} I'(\sigma(s, u)) \frac{\psi(\sigma(s, u))\phi(\sigma(s, u))}{\|\phi(\sigma(s, u))\|^2} ds \\ &\leq I(u) - \int_0^{8\varepsilon} \frac{\|I'(\sigma(t, u))\|_{X'}^2}{\|\phi(\sigma(t, u))\|_X} dt \\ &\leq c + \varepsilon - \frac{1}{4} \int_0^{8\varepsilon} ds = c - \varepsilon \end{aligned}$$

donde usamos o item a) e b) da definição de campo Pseudo-Gradiente e $\psi(\sigma(s, u)) = 1$ quando $\sigma(s, u) \in B$. Portanto em ambos casos temos

$$\eta(1, u) \in I^{c-\varepsilon}.$$

■

Agora enunciaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha (ver [3]).

Teorema 9 *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que existem $\alpha, \rho > 0$ tais que*

(M1) $I(u) \geq \alpha > 0$ para todo $u \in X$ com $\|u\| = \rho$,

(M2) existe $e \in X$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) < 0$.

Então para cada $\epsilon > 0$ existe $u_\epsilon \in X$ tal que

$$(a) \quad c - 2\epsilon \leq I(u_\epsilon) \leq c + 2\epsilon$$

$$(b) \quad (1 + \|u_\epsilon\|) \|I'(u_\epsilon)\| < 8\epsilon,$$

onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) > 0,$$

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração. Primeiro mostremos que c é positivo. De fato, desde que $\gamma(0) = 0 \in B_\rho(0)$, $\gamma(1) = e \in X \setminus \overline{B_\rho(0)}$ e $\gamma([0, 1])$ é conexo, temos que

$$\gamma([0, 1]) \cap \partial B_\rho(0) \neq \emptyset.$$

Logo da hipótese (M1), temos

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha.$$

Portanto $c > 0$.

Agora suponhamos que para algum $\epsilon_0 > 0$ as condições (a) e (b) não ocorram, ou seja, para todo $u \in X$

$$(c) \quad I(u) < c - 2\epsilon_0 \text{ ou } I(u) > c + 2\epsilon_0 \text{ ou}$$

$$(d) \quad (1 + \|u\|) \|I'(u)\| \geq 8\epsilon.$$

Analisando o primeiro caso (c), temos que não pode ocorrer pois existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$c - 2\epsilon_0 < c \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) < c + 2\epsilon_0.$$

Logo, podemos supor para $c - 2\epsilon_0 \leq I(u) \leq c + 2\epsilon_0$, temos que

$$(1 + \|u\|) \|I'(u)\| \geq 8\epsilon_0.$$

Desde que $c > 0$ e diminuindo $\epsilon_0 > 0$ se for necessário, obtemos

$$I(e) < I(0) = 0 < c - 2\epsilon_0. \tag{2.7}$$

Assim do Lema da Deformação, existe $\eta \in C([0, 1] \times X; X)$ e pela condição (i), temos

$$\eta(t, 0) = 0 \text{ e } \eta(t, e) = e,$$

pois $0, e \notin I^{-1}([c - 2\epsilon_0, c + 2\epsilon_0])$. Da definição de c que existe $\bar{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0, 1]} I(\bar{\gamma}(t)) \leq c + \epsilon_0.$$

Consideremos $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ definido por

$$\hat{\gamma} = \eta(1, \bar{\gamma}(t)).$$

Note que

$$\hat{\gamma}(0) = \eta(1, \bar{\gamma}(0)) = 0, \quad \hat{\gamma}(1) = \eta(1, \bar{\gamma}(1)) = e,$$

logo $\hat{\gamma} \in \Gamma$. Novamente do Lema da Deformação pela condição (ii), temos que

$$\hat{\gamma}(t) = \eta(1, \bar{\gamma}(t)) \in I^{c-\epsilon_0},$$

daí

$$c \leq \max_{t \in [0, 1]} I(\hat{\gamma}(t)) \leq c - \epsilon_0 < c.$$

O que é um absurdo, logo o teorema é provado. ■

A identidade e variedade de Pohozaev

3.1 Identidade e variedade de Pohozaev

Antes de enunciar a identidade de Pohozev consideremos as seguintes notações a ser usadas no resto deste trabalho.

A norma no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ é dado por:

$$\|u\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx \text{ para todo } u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $\|\cdot\|_\lambda$ é equivalente a $\|\cdot\|_{1,\mathbb{R}^N}$. Por simplicidade denotaremos a norma no espaço $L^p(\mathbb{R}^N)$ por $\|\cdot\|_p$, isto é,

$$\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|\cdot\|_{0,p,\mathbb{R}^N}.$$

O funcional associado ao problema (1.1) é dado por:

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u)dx,$$

que é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ (ver o Apêndice B.1).

Proposição 2 *Seja $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ uma solução da equação $-\Delta u = g(x, u)$ em Ω e $G(x, u) = \int_0^u g(x, s)ds$ tal que $G(\cdot, u(\cdot))$ e $x_i G_{x_i}(\cdot, u(\cdot))$ estão em $L^1(\Omega)$, então u satisfaz :*

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \eta dS_x = 2N \int_{\Omega} G(x, u) dx + 2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} x_i G_{x_i}(x, u) dx - (N-2) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

onde Ω é um domínio regular em $\mathbb{R}^N$ e η denota o vetor unitário e normal exterior a $\partial\Omega$.

Além disso, se $\Omega = \mathbb{R}^N$, então

$$2N \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx + 2 \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} x_i G_{x_i}(x, u) dx = (N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad (3.1)$$

Demonstração. Segue da Teoria de Regularidade Elíptica que $u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ e daí multiplicando $-\Delta u = g(x, u)$ por $x \cdot \nabla u$ e calculando cada lado da equação, obtemos

$$\Delta u(x \cdot \nabla u) = \operatorname{div} \left(\nabla u(x \cdot \nabla u) - x \frac{|\nabla u|^2}{2} \right) + \frac{N-2}{2} |\nabla u|^2.$$

Pelo Teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u (x \cdot \nabla u) dx &= \int_{\Omega} \left(\operatorname{div}(\nabla u (x \cdot \nabla u)) - x \frac{|\nabla u|^2}{2} \right) + \frac{N-2}{2} |\nabla u|^2 dx \\ &= \int_{\partial\Omega} (\nabla u (x \cdot \nabla u) - x \frac{|\nabla u|^2}{2}) \cdot \eta dS_x + \frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$- \int_{\Omega} \Delta u (x \cdot \nabla u) dx = - \int_{\partial\Omega} (\nabla u (x \cdot \nabla u) - x \frac{|\nabla u|^2}{2}) \cdot \eta dS_x - \frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \quad (3.2)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} g(x, u) x \cdot \nabla u &= G(x, u) N + \sum_{i=1}^N x_i G_{x_i}(x, u) \\ &= \operatorname{div}(x G(x, u)) - N G(x, u) - \sum_{i=1}^N x_i G_{x_i}(x, u), \end{aligned}$$

e novamente aplicando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\int_{\Omega} g(x, u) x \cdot \nabla u dx = \int_{\partial\Omega} x G(x, u) \cdot \eta dS_x - N \int_{\Omega} G(x, u) dx - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} x_i G_{x_i}(x, u) dx. \quad (3.3)$$

Igualando (3.2) e (3.3), temos que

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\Omega} (\nabla u (x \cdot \nabla u) - x \frac{|\nabla u|^2}{2}) \cdot \eta dS_x - \frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &= \int_{\partial\Omega} x G(x, u) \cdot \eta dS_x - N \int_{\Omega} G(x, u) dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} x_i G_{x_i}(x, u) dx \end{aligned}$$

Mas desde que $u \equiv 0$ em $\partial\Omega$, temos $G(x, u) = 0$ em $\partial\Omega$ e $\nabla u = (\nabla u \cdot \eta) \eta$ implica que

$$\begin{aligned} (\nabla u (x \cdot \nabla u) - x \frac{|\nabla u|^2}{2}) \cdot \eta &= (\nabla u (x \cdot \nabla u)) \cdot \eta - x \cdot \eta \frac{|\nabla u|^2}{2} \\ &= (\nabla u \cdot \eta) (x \cdot \nabla u) - x \cdot \eta \frac{|\nabla u|^2}{2} \\ &= (\nabla u \cdot \eta) (x \cdot (\nabla u \cdot \eta) \eta) - x \cdot \eta \frac{|\nabla u|^2}{2} \\ &= (\nabla u \cdot \eta)^2 (x \cdot \eta) - x \cdot \eta \frac{|\nabla u|^2}{2} = |\nabla u|^2 (x \cdot \eta) - x \cdot \eta \frac{|\nabla u|^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \cdot \eta, \end{aligned}$$

e substituindo isto, nas integrais anteriores, temos que

$$\begin{aligned} - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \eta dS_x - \frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &= \int_{\partial\Omega} x G(x, u) \cdot \eta dS_x - N \int_{\Omega} G(x, u) dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} x_i G_{x_i}(x, u) dx, \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \eta dS_x = 2N \int_{\Omega} G(x, u) dx + 2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} x_i G_{x_i}(x, u) dx - (N-2) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Agora consideremos Ω não limitado. Então, dado $R > 0$ o conjunto $D_R = \Omega \cap B_R(0)$ é limitado. Logo de maneira análoga aos cálculos anteriores, temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_R} |\nabla u|^2 x \cdot \eta dS_x &= 2N \int_{D_R} G(x, u) dx + 2 \sum_{i=1}^N \int_{D_R} x_i G_{x_i}(x, u) dx \\ &\quad - (N-2) \int_{D_R} |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial D_R} G(x, u) x \cdot \eta dS_x. \end{aligned}$$

Finalmente, dos seguintes fatos:

$$\begin{aligned} \int_{D_R} |\nabla u|^2 dx &\rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \text{ quando } R \rightarrow \infty; \\ \int_{D_R} G(x, u) dx &\rightarrow \int_{\Omega} G(x, u) dx \text{ quando } R \rightarrow \infty; \\ \int_{\partial D_R} |\nabla u|^2 \eta \cdot x dx &\rightarrow \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \eta \cdot x dx \text{ quando } R \rightarrow \infty; \\ \sum_{i=1}^N \int_{D_R} x_i G_{x_i}(x, u) dx &\rightarrow \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} x_i G_{x_i}(x, u) dx \text{ e} \\ \int_{\partial D_R} G(x, u) \eta \cdot x dx &\rightarrow 0 \text{ quando } R \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

temos que

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \eta dS_x = 2N \int_{\Omega} G(x, u) dx + 2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} x_i G_{x_i}(x, u) dx - (N-2) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

quando $R \rightarrow \infty$. Daí, se $\Omega = \mathbb{R}^N$ segue-se (3.1) ■

Aplicando a Proposição 2 ao Problema (1.1), vemos que a identidade d Pohozaev assume a seguinte forma

$$\frac{(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx \quad (3.4)$$

onde $G(x, u) = a(x)F(u) - \frac{\lambda u^2}{2}$. Além disso, definimos a variedade de Pohozaev associado ao problema (1.1) por

$$\mathcal{P} = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; \frac{(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx \right\}.$$

Lema 2 *Seja o funcional $J : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:*

$$J(u) = \frac{(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx.$$

Então,

- (a) $u \equiv 0$ é um ponto isolado de $J^{-1}(\{0\})$.
- (b) $\mathcal{P} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; J(u) = 0\}$ é fechado.
- (c) $\mathcal{P}$ é uma variedade de classe C^1 .
- (d) Existe $\sigma > 0$ tal que $\|u\|_\lambda > \sigma$ para todo $u \in \mathcal{P}$.

Demonstração.

(a) De fato ,

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx \\ &= \frac{(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) F(u) - \frac{\lambda u^2}{2} \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx \\ &= \frac{(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left(a(x) - \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) F(u) - \frac{\lambda u^2}{2} \right) dx \\ &> \frac{(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a_\infty F(u) - \frac{\lambda u^2}{2} \right) dx \\ &= \frac{(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx - N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a_\infty F(u) - \frac{\lambda u^2}{2} \right) dx - \frac{(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda u^2 dx \\ &\geq \frac{(N-2)}{2} \|u\|_\lambda^2 - N \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) dx \end{aligned}$$

Agora dado $\varepsilon > 0$ e $2 \leq p \leq 2^*$ por (1.3), existe $C = C(\varepsilon, p) > 0$ tal que temos

$$-N \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) dx \geq -\frac{Na_\infty \varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx - Na_\infty C \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx.$$

Como a norma em $H^1(\mathbb{R}^N)$ é dada por

$$\|u\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx,$$

então

$$\|u\|_\lambda^2 \geq \int_{\mathbb{R}^N} \lambda u^2 dx \Rightarrow -\frac{N\varepsilon a_\infty}{2\lambda} \|u\|_\lambda^2 \leq -\frac{N\varepsilon a_\infty}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda u^2 dx.$$

E também das imersões contínuas de Sobolev existe uma constante $K > 0$ tal que

$$-Na_\infty C \int_{\mathbb{R}^N} u^p \geq -Na_\infty CK \|u\|_\lambda^p.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J(u) &> \frac{(N-2)}{2} \|u\|_\lambda^2 - \frac{N\epsilon a_\infty}{2\lambda} \|u\|_\lambda^2 - Na_\infty CK \|u\|_\lambda^p \\ &= \frac{1}{2} \left(N-2 - \frac{N\epsilon a_\infty}{2\lambda} \right) \|u\|_\lambda^2 - Na_\infty CK \|u\|_\lambda^p. \end{aligned}$$

Se consideramos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $\lambda(N-2) - N\epsilon a_\infty > 0$, se $\|u\|_\lambda = \rho$, $2 \leq p \leq 2^*$ e ρ for tal que

$$\frac{1}{4Na_\infty CK} \left(N-2 - \frac{N\epsilon a_\infty}{\lambda} \right) \rho^2 > \rho^p,$$

então,

$$J(u) > \frac{1}{4} \left(N-2 - \frac{N\epsilon a_\infty}{\lambda} \right) \rho^2 > 0.$$

Logo $J(u) > 0$ se $0 < \|u\|_\lambda < \rho$. Daí concluímos que existe $\rho > 0$ tal que:

$$B_\rho(0) \cap J^{-1}(0) = \{0\}.$$

Portanto $u = 0$ é um ponto isolado de $J^{-1}(\{0\})$.

- (b) Como $J(u)$ é um funcional de classe C^1 (ver Apêndice Proposição B.2), então $J^{-1}(\{0\})$ é um conjunto fechado. Mas $J^{-1}(\{0\}) = \mathcal{P} \cup \{0\}$ e como já foi mostrado que $u = 0$ é um ponto isolado de $J^{-1}(\{0\})$ então $\mathcal{P}$ é um conjunto fechado pois contém todos seus pontos de acumulação.
- (c) Definimos o funcional $\tilde{J} := J|_{H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}}$ de classe C^1 com a propriedade $\tilde{J}^{-1}(\{0\}) = \mathcal{P}$. Assim para mostrar que $\mathcal{P}$ é uma variedade basta mostrar que 0 é um valor regular para o funcional $\tilde{J}$, o que é equivalente a mostrar que $\tilde{J}'(u) = J'(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathcal{P}$. Consideremos a derivada de J em u , aplicado em u , isto é,

$$J'(u)u = (N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} (a(x)f(u)u - \lambda u^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x f(u) u dx. \quad (3.5)$$

Desde que $u \in \mathcal{P}$ segue que

$$(N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = 2N \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx \quad (3.6)$$

e usando (3.6) em (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned}
J'(u)u &= 2N \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx - N \int_{\mathbb{R}^N} (a(x)f(u)u - \lambda u^2) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x f(u) u dx \\
&= 2N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx - 2N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) \frac{f(u)u}{2} dx \\
&= 2N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) \left(F(u) - \frac{1}{2} f(u)u \right) dx < 0
\end{aligned}$$

onde temos usado (A1), (A3) e (f3). Portanto se $u \in \mathcal{P}$, então $J'(u)u \neq 0$. Isto mostra que $\mathcal{P}$ é uma variedade C^1 .

- (d) No item (a) podemos considerar $J(u) > 0$ se $0 < \|u\|_\lambda \leq \rho$. Assim, se $u \in \mathcal{P}$ temos que $\|u\|_\lambda > \rho$.

■

Resultados de não-existência

Neste capítulo vamos apresentar as principais relações entre a variedade de Pohozaev $\mathcal{P}$ associada com o problema não autônomo (1.1), e a variedade de Pohozaev $\mathcal{P}_\infty$ associada com o problema autônomo no infinito

$$-\Delta u + \lambda u = a_\infty f(u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (4.1)$$

dado por

$$\mathcal{P}_\infty = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; J_\infty(u) = 0\},$$

onde

$$J_\infty(u) = \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx$$

e $G_\infty(u) := a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2}{2}$. Para os nossos propósitos, é preciso considerar o funcional associado a (4.1), dada por:

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) dx,$$

e o conjunto de caminhos,

$$\Gamma_\infty(u) = \{\gamma \in C([0, 1], H^1(\mathbb{R}^N)) | \gamma(0) = 0, I_\infty(\gamma(1)) < 0\},$$

para definir

$$c_\infty := \inf_{\gamma \in \Gamma_\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} I_\infty(\gamma(t)) > 0.$$

A existência do conjunto de caminhos e o nível min-max do Passo Da Montanha serão justificados no Lema 3. Nosso objetivo neste capítulo será mostrar que:

$$p := \inf_{u \in \mathcal{P}} I(u) = c_\infty,$$

e que o nível p não é atingido na variedade de Pohozaev $\mathcal{P}$, o que significa que p não é nível crítico para o funcional I . Este fato motiva nossa busca por soluções em níveis maiores de energia do funcional I . Mais precisamente, no seguinte capítulo mostraremos que existe um ponto crítico do funcional no intervalo de energia $(c_\infty, 2c_\infty)$. Este método foi devido às pesquisadoras A. Maia e R. Lehrer em [15] que foram inspiradas por argumentos aplicados à equação

$$-\Delta u + V(x)u = g(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

desenvolvido por A. Azzollini e A. Pomponio em [2].

Lema 3 *O funcional I_∞ satisfaz a primeira e segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha.*

Demonstração.

Primeira Geometria. Da propriedade (1.3) e das imersões contínuas de Sobolev segue-se:

$$\begin{aligned} I_\infty(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 - \frac{\epsilon a_\infty}{2\lambda} \|u\|_\lambda^2 - a_\infty C \|u\|_\lambda^p \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon a_\infty}{\lambda}\right) \|u\|_\lambda^2 - a_\infty C \|u\|_\lambda^p. \end{aligned}$$

Assim, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\lambda - a_\infty \epsilon > 0$ e escolhendo $\rho > 0$ tal que

$$\frac{1}{4\lambda a_\infty C} (\lambda - \epsilon a_\infty) \rho^2 > \rho^p$$

e se $\|u\|_\lambda = \rho$, temos que

$$I_\infty(u) > \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda - a_\infty \epsilon}{\lambda} \right) \rho^2 > 0.$$

Portanto existem $\rho > 0$ e $\alpha = \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda - a_\infty \epsilon}{\lambda} \right) \rho^2 > 0$ tal que

$$I_\infty(u) \geq \alpha > 0 \text{ para todo } \|u\|_\lambda = \rho.$$

Afirmção. Existe um $\zeta > 0$ tal que $G_\infty(\zeta) > 0$.

De fato, como pelo Teorema do Valor Médio, existe $s^* \in (0, s)$ tal que $F(s) = f(s^*)s$. Logo usando la Regra de L'Hospital, temos que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F(s)}{s^2} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{2s} = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{G_\infty(s)}{s^2} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(a_\infty \frac{F(s)}{s^2} - \frac{\lambda}{2} \right) = \frac{a_\infty}{2} - \frac{\lambda}{2} > \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Assim existe um úmero positivo $\zeta > 0$ tal que $G_\infty(\zeta) > 0$.

Segunda Geometria. Consideremos a função W_R definida por:

$$W_R(x) = \begin{cases} \zeta & , \text{ se } |x| \leq R \\ \zeta(R+1-r) & , \text{ se } r = |x| \in [R, R+1] \\ 0 & , \text{ se } |x| \geq R+1. \end{cases}$$

Se $|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue e $V(w) = \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(w) dx$, então

$$V(W_R) \geq G_\infty(\zeta) |B_R| - |B_{R+1} \setminus B_R| \left(\max_{s \in [0, \zeta]} |G_\infty(s)| \right).$$

Logo existem $C, C' > 0$, tais que

$$V(W_R) \geq CR^N - C'R^{N-1}.$$

Assim para R suficientemente grande, $V(W_R) > 0$. Seja R_0 suficientemente grande tal que $V(W_{R_0}) > 0$. Definimos $W := W_{R_0}$. Avaliando I_∞ em $W(\cdot/\theta)$, temos que

$$I_\infty(W(\cdot/\theta)) = \frac{\theta^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W|^2 dx - \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(W) dx.$$

Portanto, para θ suficientemente grande temos que $I_\infty(W(\cdot/\theta)) < 0$.

Logo pelo Teorema do Passo da Montanha de Willem (ver [24]), temos que está bem definida

$$c_\infty := \inf_{\gamma \in \Gamma_\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} I_\infty(\gamma(t)) > 0,$$

onde

$$\Gamma_\infty = \{ \gamma \in C([0, 1], H^1(\mathbb{R}^N)) \mid \gamma(0) = 0, I_\infty(\gamma(1)) < 0 \}.$$

■

Note que as hipóteses (A3), (A4) e da definição de F , implicam que $I_\infty(u) \leq I(u)$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato,

$$\begin{aligned} I_\infty(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(u) dx \\ &= I(u). \end{aligned}$$

Lema 4 *Suponha que $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0$. Então existem únicos $\theta_1, \theta_2 > 0$ tais que $u(\frac{\cdot}{\theta_1}) \in \mathcal{P}_\infty$ e $u(\frac{\cdot}{\theta_2}) \in \mathcal{P}$.*

Demonstração. Primeiro mostremos a projeção sobre $\mathcal{P}_\infty$, para isso definimos a função

$$\begin{aligned} \psi_\infty(\theta) &:= I_\infty(u(\cdot/\theta)) = \frac{\theta^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx \\ &= \frac{\theta^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a_\infty F(u) - \frac{\lambda u^2}{2} \right) dx, \end{aligned}$$

com derivada

$$\psi'_\infty(\theta) = \frac{(N-2)\theta^{N-3}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\theta^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx.$$

Então $\psi'_\infty(\theta) = 0$ se, e somente se $\theta = 0$ ou

$$\theta^2 = \frac{(N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{2N \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx}.$$

Logo existe um único $\theta_1 > 0$ tal que $\psi'_\infty(\theta_1) = 0$, e com isto $u(\frac{\cdot}{\theta_1}) \in \mathcal{P}_\infty$.

Agora para mostrar a projeção sobre $\mathcal{P}$, definimos também

$$\begin{aligned}\psi(\theta) &:= I(u(\cdot/\theta)) = \frac{\theta^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u(x/\theta)) dx \\ &= \frac{\theta^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(u(x/\theta)) - \lambda \frac{u^2(x/\theta)}{2} dx \\ &= \frac{\theta^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} a(\theta x) F(u(x)) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} dx.\end{aligned}$$

Derivando $\psi(\theta)$ e recordando que estamos considerando $N \geq 3$, temos que:

$$\begin{aligned}\psi'(\theta) &= \frac{N-2}{2} \theta^{N-3} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \theta^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} a(\theta x) F(u(x)) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} dx \\ &\quad - \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta x) \cdot (\theta x) F(u(x)) dx \\ &= \theta^{N-3} \left\{ \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} a(\theta x) F(u(x)) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} dx \right. \\ &\quad \left. - \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta x) \cdot (\theta x) F(u(x)) dx \right\}.\end{aligned}$$

Logo observamos que $u(\frac{\cdot}{\theta}) \in \mathcal{P}$ se, e somente se $\psi'(\theta) = 0$ para algum $\theta > 0$. Adicionalmente note que pela condição (A2) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(\theta x) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx.$$

De fato, por (A2) temos que

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} a(\theta x) = a_\infty.$$

Também, se $\theta_n \rightarrow \infty$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(\theta_n x) = a_\infty.$$

Portanto,

$$a(\theta_n x) F(u(x)) - \lambda \frac{u(x)^2}{2} \rightarrow a_\infty F(u(x)) - \lambda \frac{u(x)^2}{2} \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$\begin{aligned}\left| a(\theta_n x) F(u(x)) - \lambda \frac{u(x)^2}{2} \right| &\leq |a(\theta_n x) F(u(x))| + \lambda \frac{u(x)^2}{2} \\ &\leq a_\infty |F(u(x))| + \lambda \frac{u(x)^2}{2} \\ &\leq \frac{a_\infty \epsilon |u(x)|^2}{2} + a_\infty C |u(x)|^p + \lambda \frac{u(x)^2}{2} = h(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,\end{aligned}$$

com

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) < \infty.$$

Logo, pelo Teorema do Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(\theta_n x) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx.$$

Agora como $\theta_n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(\theta x) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx.$$

Por outro lado, usando (1.2) e o Teorema do Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta x) \cdot (\theta x) F(u) dx = 0.$$

Portanto, se $\theta > 0$ é suficientemente grande, temos

$$\psi'(\theta) = \theta^{N-3} \left\{ \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\theta^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx + o_\theta(1) \right) \right\},$$

mas desde que $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0$, segue-se que $\psi'(\theta) < 0$ para $\theta > 0$ suficientemente grande. Por outro lado pela condição (A4), temos que

$$\begin{aligned} \psi'(\theta) &= \frac{N-2}{2} \theta^{N-3} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\theta^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(\theta x) + \frac{\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx \\ &\geq \frac{N-2}{2} \theta^{N-3} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\theta^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx, \end{aligned}$$

Assim, tomando θ suficientemente pequeno, temos que $\psi'(\theta) > 0$. Desde que ψ' é continua, existe ao menos $\theta_2 = \theta_2(u) > 0$, tal que $\psi'(\theta_2) = 0$ o que significa que $u(\cdot/\theta_2) \in \mathcal{P}$.

Para mostrar a unicidade de θ_2 , note que $\psi'(\theta) = 0$ implica

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(a(\theta x) + \frac{\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right] dx$$

com $\theta > 0$, ou equivalentemente

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\theta^2 \varphi(\theta)$$

onde

$$\varphi(\theta) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(a(\theta x) + \frac{\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right] dx.$$

Tomando a derivada de φ e usando as propriedades das funções envolvidas, temos que

$$\varphi'(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x) + \frac{(\theta x) \cdot H(\theta x) \cdot (\theta x) dx}{N} + \frac{\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} \right] F(u) dx,$$

e das hipóteses (A3) e (A5), com as condições sobre a F , implicam que $\varphi'(\theta) > 0$. Portanto, $\varphi(\theta)$ é uma função crescente de θ e daí existe um único $\theta > 0$ tal que

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\theta^2 \varphi(\theta).$$

Assim a unicidade de θ_2 é verificada, e o lema é provado. ■

Observação 10 Note que a hipótese (A5) foi usada no lema anterior somente para mostrar a unicidade de θ_2 .

Lema 5 Seja $\mathcal{O} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0\}$. A função $\theta_1 : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $u \mapsto \theta_1(u)$, tal que $u(\cdot/\theta_1(u)) \in \mathcal{P}$, é contínua.

Demonstração. Consideremos $(u_n) \subset \mathcal{O}$ tal que $u_n \rightarrow u \in \mathcal{O}$. Mostraremos que $\theta_1(u_n) \rightarrow \theta_1(u)$. Primeiro note que $\theta_1(u_n)$ é limitado. De fato, considere a expressão $\psi'(\theta) = 0$ na prova do lema anterior aplicado a u_n e $\theta_1(u_n)$,

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx = N \theta_1^2(u_n) \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(a(\theta_1(u_n)x) + \frac{\nabla a(\theta_1(u_n)x) \cdot (\theta_1(u_n)x)}{N} \right) F(u_n) - \lambda \frac{u_n^2}{2} \right] dx, \quad (4.2)$$

e suponha por contradição que $\theta_1(u_n) \rightarrow +\infty$. Como $u_n \rightarrow u \in \mathcal{O}$, pelas imersões contínuas de Sobolev, temos $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 \leq p \leq 2^*$. Logo pelo Teorema de Vainberg (ver [6] Teorema 4.9), temos que:

$$\begin{aligned} u_n(x) &\rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \\ \text{e existe } h &\in L^p(\mathbb{R}^N) \text{ tal que } |u_n| \leq h(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Daí, pela condição (A2), (1.2) e a continuidade da F , temos que

$$\left(a(\theta_1(u_n)x) + \frac{\nabla a(\theta_1(u_n)x) \cdot (\theta_1(u_n)x)}{N} \right) F(u_n) - \lambda \frac{u_n(x)^2}{2} \rightarrow a_\infty F(u(x)) - \lambda \frac{u(x)^2}{2}, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Também por (A4) e (1.3), temos

$$\begin{aligned} \left| \left(a(\theta_1(u_n)x) + \frac{\nabla a(\theta_1(u_n)x) \cdot (\theta_1(u_n)x)}{N} \right) F(u_n) - \lambda \frac{u_n(x)^2}{2} \right| &\leq a_\infty |F(u_n)| + \frac{\lambda}{2} |u_n(x)| \\ &\leq a_\infty \left(\frac{\epsilon}{2} h^2(x) + Ch^p(x) \right) + \frac{\lambda}{2} h^2(x) \\ &= \frac{1}{2} (a_\infty \epsilon + \lambda) h^2(x) + a_\infty Ch^p(x) = \hat{h}(x), \end{aligned}$$

onde

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}(x) dx < \infty.$$

Logo do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(a(\theta_1(u_n)x) + \frac{\nabla a(\theta_1(u_n)x) \cdot (\theta_1(u_n)x)}{N} \right) F(u_n) - \lambda \frac{u_n(x)^2}{2} \right] dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0$$

Assim, o lado direito de (4.2) tende a $+\infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Entretanto o lado esquerdo converge para $\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$ que é fixo, o que gera uma contradição. Portanto concluímos que $(\theta_1(u_n))$ é uma sequência limitada e assim, a menos de uma subsequência, temos que $\theta_1(u_n) \rightarrow \bar{\theta}_1$. Usando de novo o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(\theta_1(u_n)x) F(u_n) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} a(\bar{\theta}_1 x) F(u) dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla a(\theta_1(u_n)x) \cdot (\theta_1(u_n)x)}{N} F(u_n) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla a(\bar{\theta}_1 x) \cdot (\bar{\theta}_1 x)}{N} F(u) dx.$$

Como $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos que

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\bar{\theta}_1^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[a(\bar{\theta}_1 x) \frac{\nabla a(\bar{\theta}_1 x) \cdot (\bar{\theta}_1 x)}{N} F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right] dx.$$

Assim $\bar{\theta}_1$ é tal que $u(\frac{\cdot}{\bar{\theta}_1}) \in \mathcal{P}$. Pela unicidade da projeção em $\mathcal{P}$, temos que $\bar{\theta}_1 = \theta_1(u)$. Logo $\theta_1(u_n) \rightarrow \theta_1(u)$. ■

Lema 6 Se $u \in \mathcal{P}_\infty$ então existe $\theta > 0$ tal que $u(\frac{\cdot}{\theta}) \in \mathcal{P}$ e $\theta > 1$.

Demonstração. Se $u \in \mathcal{P}_\infty$, então $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0$ e pelo Lema 4 existe um único θ tal que $u(\frac{\cdot}{\theta}) \in \mathcal{P}$. Agora mostraremos que $\theta > 1$. De fato, avaliando J em $u(\frac{\cdot}{\theta})$ obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{N-2}{2} \theta^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\theta^N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(\theta x) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right) dx - \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta x) \cdot (\theta x) F(u) dx \\ &= \theta^{N-2} \left\{ \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\theta^2 \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(a(\theta x) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} F(u) dx \right] \right\}, \end{aligned}$$

e desde que $\theta > 0$, segue-se do anterior que

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(a(\theta x) + \frac{\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right] dx.$$

Agora pela condição (A4), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx &< N\theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx \\ &= N\theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx, \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$(2^*)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx < \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx.$$

Mas desde que $u \in \mathcal{P}_\infty$, temos que $(2^*)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx < \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx$$

e portanto $\theta > 1$. ■

Lema 7 Se $u \in \mathcal{P}$ então existe $\theta > 0$ tal que $u(\frac{\cdot}{\theta}) \in \mathcal{P}_\infty$ e $\theta < 1$.

Demonstração. Primeiro verifiquemos que se $u \in \mathcal{P}$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0.$$

De fato, se $u \in \mathcal{P}$ então u satisfaz :

$$\begin{aligned} \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx &= N \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right] dx \\ &< N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right) dx \\ &= N \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx, \end{aligned}$$

onde temos utilizado a condição (A4). E desde que $u \neq 0$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos $\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx > 0$ e, portanto $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0$. A existência de uma única $\theta > 0$ tal que $u(\frac{\cdot}{\theta}) \in \mathcal{P}_\infty$ é garantida pelo Lema 4. A fim de mostrar que $\theta < 1$, notamos que:

$$\frac{N-2}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx < \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx.$$

Entretanto, se $u(\cdot/\theta) \in \mathcal{P}_\infty$ então θ satisfaz:

$$\theta^2 = \frac{(2^*)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx} < \frac{\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx}{\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx} = 1.$$

Portanto $\theta < 1$ e o lema é provado. ■

Observação 11 Uma consequência imediata dos lemas anteriores é que $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ pode ser projetada em $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_\infty$ se, e somente se $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0$.

Lema 8 Se $u \in \mathcal{P}_\infty$, então $u(\cdot - y) \in \mathcal{P}_\infty$ para todo $y \in \mathbb{R}^N$. Além disso, existe $\theta_y > 1$ tal que $u(\frac{\cdot - y}{\theta_y}) \in \mathcal{P}$, e

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \theta_y = 1$$

Demonstração. Se $u \in \mathcal{P}_\infty$. Segue-se a partir da invariância sob traslação de J_∞ que $u(\cdot - y) \in \mathcal{P}_\infty$, para todo $y \in \mathbb{R}^N$. Além disso, do Lema 6 existe $\theta_y > 1$ tal que $u(\frac{\cdot - y}{\theta_y}) \in \mathcal{P}$. Suponha agora, por contradição, que exista uma sequência $|y_n| \rightarrow \infty$ tal que $\theta_{y_n} \rightarrow A > 1$ ou $\theta_{y_n} \rightarrow \infty$. Agora vamos definir

$$K(\theta_{y_n} x + y_n) := a(\theta_{y_n} x + y_n) + \frac{\nabla a(\theta_{y_n} x + y_n) \cdot (\theta_{y_n} x + y_n)}{N}$$

e pela condição (A4) e (1.3), temos que

$$\begin{aligned} \left| K(\theta_{y_n} x + y_n) F(u) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} \right| &\leq a_\infty |F(u)| + \lambda \frac{u^2(x)}{2} \\ &\leq a_\infty C u^2(x). \end{aligned}$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos:

$$\lim_{\theta_{y_n} \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(K(\theta_{y_n} x + y_n) F(u) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u(x)) dx. \quad (4.3)$$

Mas para cada y_n segue-se que $u(\frac{\cdot - y_n}{\theta_{y_n}}) \in \mathcal{P}$ com $\theta_{y_n} > 1$, isto é,

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N \theta_{y_n}^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left(K(\theta_{y_n} x + y_n) F(u) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} \right) dx. \quad (4.4)$$

Agora o lado direito de (4.4) vai para o infinito ou $NA^2 \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u(x)) dx$, entretanto, o lado esquerdo é fixado em $\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$. Desde que $u \in \mathcal{P}_\infty$ e $A > 1$ ou $+\infty$ chegamos a uma contradição. ■

Lema 9 $\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \theta_y = \bar{\theta}$ e $\bar{\theta} > 1$.

Demonstração. Do lema anterior, dado $\epsilon = 1$, existe $R > 0$ tal que $|\theta| \leq 2$, se $|y| > R$. Vamos mostrar que existe $M > 0$ tal que $\sup_{0 \leq |y| \leq R} \theta_y \leq M$. Suponha que este supremo não exista, ou equivalentemente, que exista uma sequência $y_n \in \mathbb{R}^N$ com $|y_n| \in [0, R]$ tal que $\theta_{y_n} \rightarrow \infty$. Como no lema anterior, mas agora com $\theta_{y_n} \rightarrow \infty$, temos que

$$\lim_{\theta_{y_n} \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(K(\theta_{y_n} x + y_n) F(u) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u(x)) dx.$$

Portanto, segue-se de (4.4) a igualdade

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N \theta_{y_n}^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx + o_{y_n}(1) \right).$$

Mas, desde que $\theta_{y_n} \rightarrow \infty$ e o lado esquerdo é um número fixo, isto é um absurdo. Assim o lema é provado. ■

Lema 10 Existe um número real $\hat{\sigma} > 0$ tal que $\inf_{u \in \mathcal{P}} \|\nabla u\|_2 \geq \hat{\sigma}$.

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{P}$ então u satisfaz (3.4) e pela condição (A4), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx &= N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx \\ &= N \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right] dx \\ &< N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} \right) dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, da condição (1.3), com $p = 2^*$ e dado $0 < \epsilon < \frac{\lambda}{a_\infty}$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^*} \|\nabla u\|_2^2 &< \int_{\mathbb{R}^N} \left[a_\infty \left(\frac{\epsilon}{2} |u|^2 + C |u|^{2^*} \right) - \lambda \frac{u^2}{2} \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty \left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\lambda}{2a_\infty} \right) |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty C |u|^{2^*} dx. \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\frac{1}{2^*} \|\nabla u\|_2^2 < a_\infty C \|u\|_{2^*}^{2^*},$$

e usando o Teorema Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (ver [6, Teorema 9.9]) obtemos:

$$0 < \frac{1}{2^* a_\infty C} < \|\nabla u\|_2^{2^*-2}.$$

Logo podemos concluir que $\inf_{u \in \mathcal{P}} \|\nabla u\|_2 \geq \hat{\sigma}$, com $\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{2^* a_\infty C} \right)^{\frac{1}{2^*-2}}$. ■

Lema 11 $p := \inf_{u \in \mathcal{P}_\infty} I_\infty(u) = c_\infty$

Demonstração. Seguimos as ideias encontradas em [12]. Seja ω uma solução de menor energia do problema autônomo no infinito (4.1), isto é,

$$I_\infty(\omega) = \inf \{ I_\infty(u); u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus 0; \text{ é uma solução de (4.1)} \},$$

e também consideremos $L > 1$, e $\nu \in \Gamma_\infty$ definido por:

$$\nu(t)(x) = \begin{cases} \omega(x/Lt) & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Então é claro que para $t = \frac{1}{L} < 1$, $\omega \in \nu([0, 1])$. Avaliando o funcional I_∞ em $\nu(t)$, temos que

$$I_\infty(\nu(t)) = \frac{(Lt)^{N-2}}{2} \|\nabla \omega\|_2^2 - (Lt)^N \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(\omega) dx,$$

com derivada,

$$\frac{dI_\infty(\nu(t))}{dt} = \frac{(N-2)L^{N-2}t^{N-3}}{2} \|\nabla \omega\|_2^2 - NL^N t^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(\omega) dx.$$

Daí para $0 < t < 1/L$ temos que $\frac{dI_\infty(\nu(t))}{dt} > 0$ e para $1/L < t < 1$, $\frac{dI_\infty(\nu(t))}{dt} < 0$. Logo $\max_{t \in [0,1]} I_\infty(\nu(t)) = I_\infty(\omega)$. E como $I_\infty(\omega) = \inf_{u \in \mathcal{P}_\infty} I_\infty(u)$, (ver o Lema 3.1 em [12]) temos que

$$c_\infty \leq \inf_{u \in \mathcal{P}_\infty} I_\infty(u).$$

Por outro lado, para qualquer $\gamma_\infty \in \Gamma_\infty$, temos $\gamma_\infty(0) = 0$. Ainda

$$J_\infty(\gamma_\infty(1)) = NI_\infty(\gamma_\infty(1)) - \|\nabla u\|_2^2 \leq NI_\infty(\gamma_\infty(1)) < 0,$$

e também existe $\sigma_\infty > 0$ tal que $0 < \|u\|_\lambda \leq \sigma_\infty$ implica $J_\infty(u) > 0$ (o que se prova analogamente a d) no Lema 2). Logo existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $J_\infty(\gamma_\infty(t_0)) = 0$ e portanto,

$$c_\infty \geq \inf_{u \in \mathcal{P}_\infty} I_\infty(u).$$

Isto completa a prova. ■

Observação 12 Se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0$ e $\theta > 0$ é tal que $u(\cdot/\theta) \in \mathcal{P}_\infty$, então podemos escrever

$$I_\infty(u(\cdot/\theta)) = \frac{\theta^{N-2}}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx. \quad (4.5)$$

De fato, como $u(\cdot/\theta) \in \mathcal{P}_\infty$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u(x/\theta)) - \frac{\lambda u(x/\theta)^2}{2} dx = \frac{N-2}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x/\theta)|^2 dx,$$

substituindo isto no funcional I_∞ , temos a afirmação feita.

Lema 12 $\inf_{u \in \mathcal{P}} I(u) = c_\infty$.

Demonstração. Seja $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma solução de menor energia de (4.1). Pelo lema anterior temos que $I_\infty(w) = c_\infty$. Dado qualquer $y \in \mathbb{R}^N$, definimos $w_y := w(\cdot - y)$. Da invariância sob translação das integrais, obtemos $w_y \in \mathcal{P}_\infty$ e $I_\infty(w_y) = c_\infty$. Agora do

Lema 8, para qualquer $y \in \mathbb{R}^N$, existe $\theta_y > 1$ tal que $\tilde{w}_y = w_y(\cdot/\theta_y) \in \mathcal{P}$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
|I(\tilde{w}_y) - c_\infty| &= |I(\tilde{w}_y) - I_\infty(w_y)| \\
&= \left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{w}_y|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, \tilde{w}_y) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_y|^2 dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(w_y) dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{2} \theta_y^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_y|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, \tilde{w}_y) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_y|^2 dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(w_y) dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{2} (\theta_y^{N-2} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_y|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(\tilde{w}_y) - \lambda \frac{\tilde{w}_y^2}{2} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(w_y) - \frac{\lambda w_y^2}{2} dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{2} (\theta_y^{N-2} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx - \theta_y^N \int_{\mathbb{R}^N} a(x\theta_y + y) F(w) - \lambda \frac{w^2}{2} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(w) - \frac{\lambda w^2}{2} dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{2} (\theta_y^{N-2} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx - (\theta_y^N - 1) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda w^2}{2} dx \right. \\
&\quad \left. - \theta_y^N \int_{\mathbb{R}^N} a(x\theta_y + y) F(w) dx + \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(w) dx \right| \\
&\leq \frac{|\theta_y^{N-2} - 1|}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx + |\theta_y^N - 1| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda w^2}{2} dx + \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^N} |F(w)| |a_\infty - \theta_y^N a(x\theta_y + y)| dx.
\end{aligned}$$

e desde que $\theta_y \rightarrow 1$ quando $|y| \rightarrow \infty$, segue que

$$|I(\tilde{w}_y) - c_\infty| \leq o_y(1) + o_y(1) + \int_{\mathbb{R}^N} |a_\infty - \theta_y^N a(x\theta_y + y)| |F(w)| dx.$$

Como $a(x + y) \rightarrow a_\infty$, temos

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} I(\tilde{w}_y) = c_\infty.$$

Portanto como, $p = \inf_{u \in \mathcal{P}} I(u) \leq I(\tilde{w}_y)$, fazendo $|y| \rightarrow \infty$, temos que $p \leq c_\infty$.

Por outro lado, considere $u \in \mathcal{P}$ e $0 < \theta < 1$ tal que $u(\cdot/\theta) \in \mathcal{P}_\infty$ (pelo Lema 7). Desde que $u \in \mathcal{P}$, então u satisfaz:

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx \\
&> \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{\theta^{N-2}}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\
&= I_\infty(u(x/\theta)) \geq c_\infty,
\end{aligned}$$

onde usamos (4.5) e (A3). Assim, para qualquer $u \in \mathcal{P}$, $I(u) > c_\infty$ e portanto $\inf_{u \in \mathcal{P}} I(u) \geq c_\infty$. Por isto, podemos concluir que $p = c_\infty$. ■

Agora estamos prontos para provar o Teorema 1.2, o qual é o principal resultado desta seção.

Demonstração. (Prova do Teorema 1.2) Suponha, por contradição, que exista $z \in H^1(\mathbb{R}^N)$ um ponto crítico do funcional I no nível p . Em particular, considere $z \in \mathcal{P}$ e $I(z) = p$. Seja $\theta \in (0, 1)$ tal que $z(x/\theta) \in \mathcal{P}_\infty$. Então

$$\begin{aligned} p &= I(z) \\ &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z|^2 dx + \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(z) dx \\ &> \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z|^2 dx \geq \frac{\theta^{N-2}}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z|^2 dx \\ &= I_\infty(z(\cdot/\theta)) \geq c_\infty, \end{aligned}$$

portanto $p > c_\infty$ o que contradiz o lema anterior ■

Lema 13 *Suponha (A1), (A5) e (f1), então, $\mathcal{P}$ é um vínculo natural do problema (1.1), isto é, se $u \in \mathcal{P}$ for um ponto crítico de $I|_{\mathcal{P}}$, então $I'(u) = 0$.*

Demonstração. Esta prova é baseada em argumentos encontrados em [19], onde um lema semelhante é provado para uma equação autônoma. Seja $u \in \mathcal{P}$ e definimos o espaço tangente de $\mathcal{P}$ em u por:

$$T_u \mathcal{P} := \{v \in H^1(\mathbb{R}^N); J'(u)v = 0\},$$

e também definimos a norma da derivada restrita de I para $\mathcal{P}$ por:

$$\|I'(u)\|_* = \sup_{v \in T_u \mathcal{P}, \|v\|=1} I'(u)v.$$

Agora, se para $v \in T_u \mathcal{P}$ temos

$$I'(u)v = I'(u)v + J'(u)v,$$

e pelo teorema de Hanh-Banach, existe um funcional $\tilde{f}$ que estende a $I'(u)$, o qual é igual a $I'(u)$ no conjunto $T_u \mathcal{P}$, isto é,

$$\tilde{f}(v) = I'(u)v, \text{ para todo } v \in T_u \mathcal{P}.$$

Portanto $\ker(\tilde{f} - I'(u)) \subset T_u \mathcal{P} = \ker J'(u)$. Assim, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{f} = I'(u) + \mu J'(u).$$

Novamente pelo Teorema de Hanh-Banach, temos que

$$\|I'(u) + \mu J'(u)\| = \|I'(u)\|_*.$$

Agora, se consideramos a u como ponto crítico de I restrito a $\mathcal{P}$, isto é, $I'(u)v = 0$ para todo $v \in T_u \mathcal{P}$. Então

$$I'(u) + \mu J'(u) = 0.$$

Mostraremos que $\mu = 0$. Avaliando o funcional lineal anterior em $u \in \mathcal{P}$, obtemos que:

$$I'(u)u + \mu J'(u)u = 0 \tag{4.6}$$

o que equivalente a

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) f(u) u dx \\ + \mu \left((N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) f(u) u - \lambda u^2 dx \right).$$

Esta expressão pode ser associada com a equação,

$$-\Delta u + \lambda u - a(x) f(u) + \mu \left(-(N-2) \Delta u + \lambda N u - N \left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) f(u) \right) = 0,$$

que pode ser reescrita como:

$$-(1 + \mu(N-2)) \Delta u + \lambda(1 + \mu N) u = [(1 + \mu N) a(x) + \mu \nabla a(x) \cdot x] f(u) \quad (4.7)$$

Além disso, as soluções da equação satisfazem uma identidade Pohozaev e tem uma variedade de Pohozaev associada definida por $\tilde{P}^{-1}(\{0\})$, onde

$$\tilde{P}(u) = \frac{(1 + \mu(N-2))(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G^*(x, u) dx - \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} G_{x_i}^* x_i dx,$$

com

$$G^*(x, u) = ((1 + \mu N) a(x) + \mu \nabla a(x) \cdot x) F(u) - \lambda \frac{(1 + \mu N)}{2} u^2,$$

e

$$\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} x_i G_{x_i}^*(x, u) dx = \int_{\mathbb{R}^N} ((1 + \mu N) \nabla a(x) \cdot x + \mu x \cdot H(x) \cdot x) F(u) dx.$$

Portanto, $\tilde{P}$ pode ser visto como

$$\begin{aligned} \tilde{P}(u) &= \frac{(1 + \mu(N-2))(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} ((1 + \mu N) a(x) + \mu \nabla a(x) \cdot x) F(u) - \lambda \frac{(1 + \mu N)}{2} u^2 dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} ((1 + \mu N) \nabla a(x) \cdot x + \mu x \cdot H(x) \cdot x) F(u) dx \\ &= \frac{(1 + \mu(N-2))(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad - N(1 + \mu N) \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx \\ &\quad - N\mu \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx. \end{aligned}$$

Mas recordando que $u \in \mathcal{P}$ e substituindo (3.7) na equação acima, segue-se que

$$\begin{aligned} \tilde{P}(u) &= \frac{(1 + \mu(N-2))(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - (1 + \mu N) \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad - N\mu \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx \\ &= -\mu(N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad - N\mu \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, u é uma solução da equação (4.7) e assim satisfaz $\tilde{P}(u) = 0$. Logo,

$$-\mu(N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\mu \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx.$$

Da observação 3 e da hipóteses (A5), temos que o lado direito da equação é sempre não negativo, enquanto o lado esquerdo é sempre negativo, se $\mu > 0$ (ou vice-versa, se $\mu < 0$), a menos que $\mu = 0$. Portanto pela equação (4.6), temos que

$$I'(u) = 0.$$

Assim u é um ponto crítico para o funcional I . ■

Existência de uma solução positiva

Neste capítulo mostraremos a existência de uma solução positiva da equação (1.1). Como vimos anteriormente, o ínfimo c_∞ restrito a variedade de Pohozaev $\mathcal{P}$ não é atingido. Assim procuramos por soluções que possuam níveis de energia maior que c_∞ . Para isto aplicaremos ideias semelhantes às empregadas por A. Ambrosetti, G. Cerami e D. Ruiz em [1], onde um argumento de "linking" é utilizado em um sistema de equações não linear de Schrödinger, restrito sobre a variedade de Nehari, o qual foi feita a partir da construção da função *baricentro* (ver também [20], [21]).

Começaremos este capítulo mostrando que I satisfaz a geometria Teorema do Passo da Montanha.

Lema 14 *O funcional $I : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (1.1), satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha.*

Demonstração.

Para a primeira hipótese geométrica, veja que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(u) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) dx. \end{aligned}$$

Pelo crescimento da função F para $\epsilon > 0$ e $2 \leq p \leq 2^*$, temos que

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{a_\infty \epsilon}{2} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty C |u|^p dx.$$

Pelas imersões contínuas de Sobolev, existem $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$, tais que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 - \frac{a_\infty \epsilon c_1}{2} \|u\|_\lambda^2 - a_\infty C c_2 \|u\|_\lambda^p \\ &= \frac{1}{2} (1 - a_\infty \epsilon c_1) \|u\|_\lambda^2 - a_\infty C c_2 \|u\|_\lambda^p. \end{aligned}$$

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno $1 - a_\infty \epsilon c_1 > 0$ e se $\|u\|_\lambda = \rho$ com $\left(\frac{1 - a_\infty \epsilon c_1}{2 a_\infty C c_2} \right)^{\frac{1}{p-2}} > \rho$, temos que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}(1 - a_\infty \epsilon c_1)\rho^2 - a_\infty C c_2 \rho^p > 0.$$

Portanto existe $\alpha = \alpha(\epsilon, \rho) = \frac{1}{2}(1 - a_\infty \epsilon c_1)\rho^2 - a_\infty C c_2 \rho^p > 0$, tal que

$$I(u) \geq \alpha > 0.$$

Para a segunda hipótese geométrica do Teorema do Passo da Montanha, seja w uma solução de menor energia para o problema autônomo no infinito (4.1) (para a existência ver [5]). Se $w \in \mathcal{P}_\infty$ então $w(\cdot - y) \in \mathcal{P}_\infty$, para todo $y \in \mathbb{R}^N$. Além disso, consideremos $t > 0$ e definamos $z_1 := w(\frac{\cdot - y}{t})$. Logo avaliando I em $z_1 = w(\frac{\cdot - y}{t})$, temos

$$\begin{aligned} I(z_1) &= \frac{1}{2} \left\| w\left(\frac{\cdot - y}{t}\right) \right\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F\left(w\left(\frac{x - y}{t}\right)\right) dx \\ &= \frac{t^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx - t^N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(tx + y) F(w) - \lambda \frac{w^2}{2} \right) dx. \end{aligned}$$

Da condição (A2), para $|y|$ suficientemente grande, temos que

$$I(z_1) < \frac{t^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx - \frac{t^N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(w) dx.$$

Assim para $t > 0$ suficientemente grande, temos

$$I(z_1) < 0.$$

Além disso $\|z_1\| > \rho$, pois caso contrario $\|z_1\|_\lambda \leq \rho$ e assim concluiríamos que $I(z_1) > 0$, o que é uma contradição. ■

Defina o nível min-max

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) > 0,$$

onde

$$\Gamma := \{ \gamma \in C([0, 1], H^1(\mathbb{R}^N)) | \gamma(0) = 0, I(\gamma(1)) < 0 \}.$$

Lema 15 $c_\infty = c$

Demonstração. Considere os conjuntos de caminhos Γ_∞ e Γ , tal como definimos anteriormente. Tomemos $\gamma \in \Gamma$. Desde que $I_\infty \leq I$, note que $I_\infty(\gamma(1)) < 0$. Portanto, $\gamma \in \Gamma_\infty$ e assim $\Gamma \subset \Gamma_\infty$. Segue-se também de $I_\infty \leq I$, que se $\gamma \in \Gamma$, então

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I_\infty(\gamma(t)) \leq \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)),$$

e daí

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I_\infty(\gamma(t)) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)).$$

Além disso, da inclusão $\Gamma \subset \Gamma_\infty$, obtemos

$$c_\infty = \inf_{\gamma \in \Gamma_\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} I_\infty(\gamma(t)) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I_\infty(\gamma(t)) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) = c$$

e assim $c_\infty \leq c$. Para mostrar que $c \leq c_\infty$, seja $\epsilon > 0$ arbitrário e tomemos $\gamma \in \Gamma_\infty$ tal que $I_\infty(\gamma(t)) \leq \max_{0 \leq t \leq 1} I_\infty(\gamma(t)) < c_\infty + \epsilon$. Tomemos $y \in \mathbb{R}^N$ e façamos a translação

$\tau_y(\gamma(t)) := \gamma(t)(\cdot - y)$. Logo para y suficientemente grande, obtemos $\tau_y(\gamma(t)) \in \Gamma$. De fato, é claro que $\tau_y(\gamma(0)) = 0$ mostremos que $I(\tau_y(\gamma(1))) < 0$

$$\begin{aligned} I(\tau_y(\gamma(1))) &= \frac{1}{2} \|\tau_y(\gamma(1))\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(\tau_y(\gamma(1))) dx \\ &= \frac{1}{2} \|\gamma(1)\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x+y) F(\gamma(1)) dx. \end{aligned}$$

Da condição (A2), para $\epsilon < \frac{-I_\infty(\gamma(1))}{\int_{\mathbb{R}^N} F(\gamma(1)) dx}$ e $|y|$ suficientemente grande, temos que

$$I(\tau_y(\gamma(1))) < I_\infty(\gamma(1)) + \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} F(\gamma(1)) dx < 0.$$

Portanto $\tau_y(\gamma(t)) \in \Gamma$. Agora se t_0 é tal que $I(\tau_y(\gamma(t_0)))$ é o máximo valor no caminho, então

$$c_\infty + \epsilon > I_\infty(\gamma(t_0)) = \lim_{|y| \rightarrow \infty} I(\tau_y(\gamma(t_0))) \geq c.$$

Logo $c_\infty \geq c$ e a igualdade é provada. ■

Lema 16 $p = c$.

Demonstração. Definimos $p_\infty := \inf_{u \in \mathcal{P}_\infty} I_\infty(u)$. Nós já sabemos que $p_\infty = c_\infty$ para I_∞ . Além disso, no Lema 12 mostramos que $p = c_\infty$. Portanto, pelo Lema 15 $p = c_\infty = c$. ■

Agora vamos provar a seguinte propriedade da Variedade de Pohozaev $\mathcal{P}$ em relação aos caminhos do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 17 Para qualquer $\gamma \in \Gamma$, existe $s \in (0, 1)$ tal que $\gamma(s)$ intersecta a $\mathcal{P}$.

Demonstração. De Lema 2(a) existe $\rho > 0$ tal que, se $0 < \|u\|_\lambda < \rho$, então $J(u) > 0$. Além disso, observe que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx \\ &= NI(u) - \|\nabla u\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx. \end{aligned}$$

Da condição (A3), segue-se que

$$J(u) < NI(u).$$

Agora, se $\gamma \in \Gamma$ então $J(\gamma(1)) < NI(\gamma(1)) < 0$. Desde que $\gamma([0, 1])$ é conexo então existe $s \in (0, 1)$, tal que $\|\gamma(s)\|_\lambda > \rho$ o qual implica que $J(\gamma(s)) = 0$ ou $J(\gamma(s)) \neq 0$, no segundo caso pelo Teorema do Valor Intermediário existe $r \in (0, 1)$ tal que $J(\gamma(r)) = 0$. Assim $\gamma(s)$ intersecta a variedade de Pohozaev $\mathcal{P}$ para algum $s \in (0, 1)$. ■

Lembramos que uma sequência (u_n) é dita ser uma sequência de Cerami para o funcional I no nível d , denotada por $(Ce)_d$, se $I(u_n) \rightarrow d$ e $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \rightarrow 0$. Agora mostramos que, se $d > 0$, então qualquer sequência de Cerami $(Ce)_d$ para o funcional I é limitado.

Lema 18 Se (u_n) é uma sequência de Cerami $(Ce)_d$ com $d > 0$, então (u_n) é uma sequência limitada.

Demonstração. Desde que (u_n) é uma sequência de Cerami $(Ce)_d$ e $\|u_n\|_\lambda^2 = \|u_n^+\|_\lambda^2 + \|u_n^-\|_\lambda^2$, temos

$$|I'(u_n)u_n^-| \leq \|I'(u_n)\| \|u_n^-\|_\lambda \leq \|I'(u_n)\| (\|u_n\|_\lambda + 1) \rightarrow 0.$$

Logo

$$o_n(1) = I'(u_n)u_n^- = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u_n^- + \lambda u_n u_n^- dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) f(u_n) u_n^- dx = \|u_n^-\|_\lambda,$$

daí (u_n^-) é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Agora mostremos que (u_n^+) é uma sequência limitada. De fato, suponha que $\|u_n^+\| \rightarrow +\infty$. Seja $\hat{u}_n := \frac{u_n^+}{\|u_n^+\|}$ e note que $(\hat{u}_n)$ é limitada. Assim, e a menos de subsequências $\hat{u}_n \rightharpoonup \hat{u}$. Além disso, das imersões contínuas de Sobolev, existe $K > 0$ tal que $\|\hat{u}_n\|_2 \leq K \|\hat{u}_n\|_\lambda = K$ e consequentemente, temos que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{u}_n|^2 dx \leq K.$$

Logo, um dos casos abaixo deve ocorrer:

$$\text{Caso 1: } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{u}_n|^2 dx > 0,$$

$$\text{Caso 2: } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{u}_n|^2 dx = 0.$$

Suponhamos que o Caso 2 ocorre, e seja $L > 1$. Então

$$I\left(\frac{L}{\|u_n^+\|_\lambda} u_n^+\right) = \frac{1}{2} L^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F\left(\frac{L}{\|u_n^+\|_\lambda} u_n^+\right) dx.$$

Dado $\epsilon > 0$ e $2 \leq p \leq 2^*$ e por (1.3), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F\left(\frac{L}{\|u_n^+\|_\lambda} u_n^+\right) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\epsilon}{2\lambda} L^2 a(x) (\lambda \hat{u}_n^2) dx + CL^p \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \hat{u}_n^p dx \\ &< a_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\epsilon}{2\lambda} L^2 (\lambda \hat{u}_n^2) dx + KL^p \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}_n^p dx. \end{aligned}$$

Como, a menos de subsequência

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{u}_n|^2 dx = 0,$$

e pelo Lema de Lions (Lema 1.21 em [24]), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}_n^p dx \rightarrow 0.$$

Ainda,

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}_n^2 dx \leq \|\hat{u}_n\|_\lambda^2 = 1.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x) F\left(\frac{L}{\|u_n^+\|_\lambda} u_n^+\right) dx < \frac{\epsilon a_\infty}{2\lambda} L^2 + o_n(1).$$

Tomando $\epsilon = \frac{\lambda}{2a_\infty}$, obtemos

$$I\left(\frac{L}{\|u_n^+\|_\lambda} u_n^+\right) > \frac{L^2}{2} - \left(\frac{L^2}{4} + o_n(1)\right) = \frac{L^2}{4} - o_n(1).$$

A suposição $\|u_n^+\|_\lambda \rightarrow +\infty$ implica que $\frac{L}{\|u_n^+\|_\lambda} \in (0, 1)$ para n suficientemente grande. Consequentemente

$$\max_{t \in [0,1]} I(tu_n^+) \geq I\left(\frac{L}{\|u_n^+\|_\lambda} u_n^+\right) > \frac{L^2}{4} - o_n(1).$$

Seja $t_n \in (0,1]$ tal que $I(t_n u_n^+) = \max_{t \in [0,1]} I(tu_n^+)$. Então

$$I(t_n u_n^+) > \frac{L^2}{4} - o_n(1). \quad (5.1)$$

Mas, desde que $t_n \leq 1$, usando (f3) obtemos

$$\begin{aligned} I(t_n u_n^+) &= I(t_n u_n^+) - \frac{1}{2} I'(t_n u_n^+)(t_n u_n^+) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \left(\frac{1}{2} f(t_n u_n^+)(t_n u_n^+) - F(t_n u_n^+) \right) dx \\ &\leq D \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \left(\frac{1}{2} f(u_n^+)(u_n^+) - F(u_n^+) \right) dx \\ &= D \left(I(u_n^+) - \frac{1}{2} I'(u_n^+) u_n^+ \right) \\ &\leq D \left(I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n^+) u_n^+ \right) \\ &= Dd + o_n(1). \end{aligned}$$

ou seja,

$$I(t_n u_n^+) \leq Dd + o_n(1). \quad (5.2)$$

Juntando (5.1) e (5.2), temos

$$\frac{L^2}{4} - o_n(1) < I(t_n u_n^+) \leq Dd + o_n(1).$$

Tomando $L > 0$ suficientemente grande, chegamos a uma contradição. Logo o Caso 2 não pode ocorrer.

Por outro lado, suponha o Caso 1 ocorre, isto é,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{u}_n|^2 dx = \delta > 0.$$

Seja então (y_n) uma sequência tal que

$$\int_{B_1(y_n)} |\hat{u}_n|^2 dx > \frac{\delta}{2} \quad (5.3)$$

Suponhamos inicialmente que $|y_n| \rightarrow \infty$. Considerando que $\hat{u}_n(\cdot + y_n) \rightarrow \bar{u}(\cdot)$ e fazendo $n \rightarrow \infty$ em (5.3), obtemos

$$\int_{B_1(0)} |\hat{u}_n(x + y_n)|^2 dx > \frac{\delta}{2}.$$

Assim,

$$\int_{B_1(0)} |\bar{u}(x)|^2 dx \geq \frac{\delta}{2}$$

pois $\hat{u}_n(\cdot + y_n) \rightarrow \bar{u}(\cdot)$ em $L^2(B_1(0))$ a menos de subsequência. Logo $\bar{u} \neq 0$ e então, existe $\Omega \subset B_1(0)$ com $|\Omega| > 0$ tal que

$$0 < |\bar{u}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{u}_n(x + y_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n^+(x + y_n)|}{\|u_n^+\|_\lambda} \quad \forall x \in \Omega.$$

Novamente usando a hipótese $\|u_n^+\|_\lambda \rightarrow +\infty$, segue-se que

$$u_n^+(x + y_n) \rightarrow +\infty \quad \forall x \in \Omega \subset B_1(0).$$

Agora, pela condição (f3) e o Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(u_n^+(x + y_n)) u_n^+(x + y_n) - F(u_n^+(x + y_n)) \right) dx \\ & \geq \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} f(u_n^+(x + y_n)) u_n^+(x + y_n) - F(u_n^+(x + y_n)) \right) dx \\ & = +\infty, \end{aligned}$$

ou seja

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(u_n^+(x + y_n)) u_n^+(x + y_n) - F(u_n^+(x + y_n)) \right) dx \rightarrow +\infty. \quad (5.4)$$

Por outro lado, temos que

$$|I'(u_n^+) u_n^+| = |I'(u_n) u_n^+| \leq \|I'(u_n)\| \|u_n^+\|_\lambda \leq \|I'(u_n)\| (\|u_n\|_\lambda + 1) \rightarrow 0,$$

logo $I'(u_n^+) u_n^+ = o_n(1)$.

Pela condição (A1) com $\sigma = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} a(x)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \sigma \left(\frac{1}{2} f(u_n^+(x + y_n)) u_n^+(x + y_n) - F(u_n^+(x + y_n)) \right) dx & \leq \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \left(\frac{1}{2} f(u_n^+) u_n^+ - F(u_n^+) \right) dx \\ & = I(u_n^+) - \frac{1}{2} I'(u_n^+) u_n^+ \\ & \leq I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n^+) u_n^+ < d + 1 \end{aligned}$$

para n suficientemente grande. O que contradiz (5.4).

Agora, se (y_n) é limitada, $|y_n| \leq R$, $R > 1$, obtemos

$$\frac{\delta}{2} \leq \int_{B_1(0)} |\hat{u}_n(x + y_n)|^2 dx \leq \int_{B_{2R}(0)} |\hat{u}_n(x + y_n)|^2 dx,$$

e desde que $\hat{u}_n(\cdot + y_n) \rightarrow \bar{u}$ em $L^2(B_{2R}(0))$, segue-se que

$$\frac{\delta}{2} \leq \int_{B_1(0)} |\bar{u}|^2 dx.$$

Analogamente ao caso anterior, existe $\Omega \subset B_1(0)$ com $|\Omega| > 0$ tal que

$$0 \neq |\bar{u}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{u}_n(x + y_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n^+(x + y_n)|}{\|u_n^+\|_\lambda}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Segue o argumento como anteriormente para o caso em que $|y_n| \rightarrow \infty$ e chegamos a uma contradição. Portanto, nenhum dos dois casos acontece, logo (u_n^+) é limitado, e o Lema esta provado. ■

O seguinte passo é mostrar a existência de uma sequência de Cerami para o funcional I no nível min-max c .

Lema 19 *Seja c como em (4.1), então existe uma sequência $(C\epsilon)_c$ para I , $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Vamos utilizar o Teorema Ghoussoub-Preiss (Teorema 6 em [9], com $X = H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\phi = I$, ver também [10]). Inicialmente consideremos $z_0 = 0$ e z_1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$, tal que $I(z_1) < 0$. A existência de tal z_1 é garantida pelas hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha para funcional I . Também consideramos a variedade de Pohozaev $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; J(u) = 0\}$$

o qual é um conjunto fechado.

Afirmção $\mathcal{P}$ separa z_0 e z_1 .

De fato, observamos que $z_0 = 0 \notin \mathcal{P}$ e $z_1 \notin \mathcal{P}$, pois como na demonstração do Lema 14 $J(z_1) < NI(z_1) < 0$. Além disso, da prova do Lema 2(a), existe $\rho > 0$ tal que, se $0 < \|u\| < \rho$, então $J(u) > 0$. Podemos pensar $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{P}$ como $\{0\} \cup \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) | J(u) > 0\} \cup \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) | J(u) < 0\}$. Assim, existe uma bola $B_\alpha(0)$, com centro em z_0 em uma componente conexa C_1 de $\{0\} \cup \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) | J(u) > 0\}$, isto é, $B_\alpha(0) \subset C_1$. Por outro lado, claramente z_1 pertence à componente conexa de $\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) | J(u) < 0\}$.

Agora, como $\inf_{u \in \mathcal{P}} I(u) = c$ pelo Lema 16, temos

$$\mathcal{P} \cap \{u \in H^1(\mathbb{R}^N); I(u) \geq c\} = \mathcal{P}.$$

Logo pelo Teorema Ghoussoub-Preiss, temos garantida a existência de uma sequência $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que se δ denota a métrica geodésica em $H^1(\mathbb{R}^N)$, definida por

$$\delta(u, v) = \inf \left\{ \int_0^1 \frac{\|h'(t)\|}{1 + \|h(t)\|} dt : h \in C^1([0, 1], H^1(\mathbb{R}^N)), h(0) = u, h(1) = v \right\}.$$

Então

$$\delta(u_n, \mathcal{P}) \rightarrow 0, \tag{5.5}$$

$$I(u_n) \rightarrow c, \tag{5.6}$$

e

$$\|I'(u_n)\| (1 + \|u_n\|_\lambda) \rightarrow 0. \tag{5.7}$$

■

Lema 20 (*Splitting*). *Seja $u_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada tal que*

$$I(u_n) \rightarrow d \text{ e } \|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \rightarrow 0.$$

Substituindo por uma subsequência, se for necessário, existe uma solução $\bar{u}$ de (1.1), um número k natural, k funções $u^1, u^2, \dots, u^k$ e k sequências de pontos $(y_n^j) \in \mathbb{R}^N, 1 \leq j \leq k$, satisfazendo:

(a) $u_n \rightarrow \bar{u}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ ou simultaneamente ocorre os seguintes fatos:

(b1) u^j são soluções não triviais de (4.1);

(b2) $|y_n^j| \rightarrow \infty$ e $|y_n^j - y_n^i| \rightarrow \infty, i \neq j$;

(b3) $u_n - \sum_{i=1}^k u^i(x - y_n^i) \rightarrow \bar{u}$;

(b4) $I(u_n) \rightarrow I(\bar{u}) + \sum_{i=1}^k I_\infty(u^i)$.

Observação 13 *A prova deste lema pode ser encontrada na tese de R. Lehrer em que é usado uma versão do Princípio de Concentração e Compacidade de P.L. Lions [16].*

Corolário 3 *Se $I(u_n) \rightarrow c_\infty$ e $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \rightarrow 0$, então ou (u_n) é relativamente compacto ou o Lema Splitting se estabelece com $k = 1$ e $\bar{u} = 0$.*

Lema 21 *O funcional I satisfaz a condição de Cerami (Ce) no nível $d \in (c_\infty, 2c_\infty)$.*

Demonstração. *Seja uma sequência $(u_n) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $I(u_n) \rightarrow d$ e $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \rightarrow 0$. Pelo Lema 18 (u_n) é limitada. Logo aplicando o Lema 20, a menos de subsequência, temos*

$$u_n - \sum_{j=1}^k u^j(x - y_n^j) \rightarrow \bar{u} \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde u^j é uma solução fraca do problema autônomo no infinito (4.1), $|y_n^j| \rightarrow \infty$ e $\bar{u}$ é uma solução fraca da equação (1.1). Além disso,

$$I(u_n) = I(\bar{u}) + \sum_{j=1}^k I_\infty(u_j) + o_n(1).$$

Desde que $d < 2c_\infty$, então $k < 2$. De fato fazendo $n \rightarrow \infty$ na igualdade anterior temos

$$2c_\infty > d = I(\bar{u}) + \sum_{j=1}^k I_\infty(u_j) \geq I(\bar{u}) + kc_\infty \geq kc_\infty$$

daí

$$(2 - k)c_\infty > 0,$$

implica que $k < 2$. Assim se $k = 1$, temos dois casos para distinguir

(1) $\bar{u} \neq 0$, o qual implica $I(\bar{u}) \geq c_\infty$ e consequentemente $I(u_n) \geq 2c_\infty$. Daí, como $I(u_n) \rightarrow d < 2c_\infty$, se gera uma contradição.

(2) $\bar{u} = 0$, o qual implica que $I(u_n) \rightarrow I_\infty(u_1) = d$.

Afirmção $I_\infty(u_1) = c_\infty$

De fato, como u_1 é solução não trivial do problema autônomo no infinito (4.1), então

$$\begin{aligned}
 0 = I'_\infty(u_1)(u_1^-) &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_1 \nabla u_1^- + \lambda u_1 u_1^- dx - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty f(u_1) u_1^- dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_1^+ + u_1^-) \nabla u_1^- + \lambda(u_1^+ + u_1^-) u_1^- dx - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty f(u_1^+ + u_1^-) u_1^- dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_1^- \nabla u_1^- + \lambda u_1^- u_1^- dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1^-|^2 + \lambda(u_1^-)^2 dx \\
 &= \|u_1^-\|_\lambda^2,
 \end{aligned}$$

onde $u_1^- := \min\{u_1, 0\}$. Assim, necessariamente temos que $u_1 \geq 0$ e pelo Princípio do Máximo $u_1 > 0$. Também pela Unicidade de Solução Positiva do problema autônomo no infinito (ver [14]) e o Lema 3.1 em [12], temos que

$$I_\infty(u_1) = c_\infty.$$

Esta afirmação gera uma contradição ao caso (2). Portanto em ambos casos chegamos a uma contradição com o fato $d \in (c_\infty, 2c_\infty)$. Assim $k = 0$ e a menos de subsequência $u_n \rightarrow \bar{u}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. ■

Lema 22 Se $I(u_n) \rightarrow d > 0$ e $(u_n) \subset \mathcal{P}$, então a sequência (u_n) é limitada.

Demonstração. $I(u_n) \rightarrow d$ implica que $(I(u_n))$ é limitada em $\mathbb{R}$. Agora, se $u_n \in \mathcal{P}$ então

$$I(u_n) \geq \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx,$$

e para n suficientemente grande, temos

$$d + 1 \geq I(u_n) \geq \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx,$$

portanto $(\|\nabla u_n\|_2)$ é limitado. Pelo Teorema de Sobolev, Glagliardo e Nirenberg (ver [6], Teorema 9.9), segue-se que $(\|u_n\|_{2^*})$ também é limitado.

Agora pela desigualdade (1.3) com $0 < \epsilon < \frac{\lambda}{a_\infty}$, temos

$$\begin{aligned}
 \int a(x) F(u_n) &\leq \int a(x) \left(\frac{\epsilon}{2} |u_n|^2 + c(\epsilon) |u|^{2^*} \right) \\
 &\leq a_\infty \frac{\epsilon}{2} \|u_n\|_2^2 + C(\epsilon) \|u_n\|_{2^*}^{2^*}.
 \end{aligned}$$

Substituindo isto na expressão de I ,

$$\begin{aligned}
 d + 1 &\geq I(u_n) \\
 &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u_n\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|u_n\|_2^2 - a_\infty \frac{\epsilon}{2} \|u_n\|_2^2 - C(\epsilon) \|u_n\|_{2^*}^{2^*} \\
 &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u_n\|_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - a_\infty \frac{\epsilon}{2} \right) \|u_n\|_2^2 - C(\epsilon) \|u_n\|_{2^*}^{2^*} \\
 &\geq \left(\frac{\lambda}{2} - a_\infty \frac{\epsilon}{2} \right) \|u_n\|_2^2 - C(\epsilon) \|u_n\|_{2^*}^{2^*}.
 \end{aligned}$$

Desde que $(\frac{\lambda}{2} - a_\infty \frac{\epsilon}{2}) > 0$, se $\|u_n\|_2 \rightarrow \infty$ daria uma contradição. Portanto (u_n) é limitada no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. ■

Em seguida, apresentamos a função baricentro, a qual será crucial para provar a existência de uma solução do problema (1.1), antes definir tal função consideremos o seguinte. Seja $u \neq 0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ definimos:

$$\mu(u)(x) := \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x)} |u(y)| dy,$$

onde $\mu(u) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e μ é uma função contínua. Seguidamente, tomamos

$$\hat{u}(x) = \left[\mu(u)(x) - \frac{1}{2} \max \mu(u) \right]^+.$$

Note que $\hat{u} \in C_0(\mathbb{R}^N)$.

Definição 10 *O baricentro de $u \neq 0$ é*

$$\beta(u) = \frac{1}{\|\hat{u}\|_1} \int_{\mathbb{R}^N} x \hat{u}(x) dx \in \mathbb{R}^N.$$

Desde que $\hat{u}$ têm suporte compacto, por definição, $\beta(u)$ está bem definido. A função *baricentro* β satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) β é uma função contínua em $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$.
- (b) Se u é radial, então $\beta(u) = 0$.
- (c) Dado $y \in \mathbb{R}^N$ e definindo $u_y(x) := u(x - y)$, então $\beta(u_y) = \beta(u) + y$.

Agora definimos

$$b := \inf \{I(u); u \in \mathcal{P} \text{ e } \beta(u) = 0\},$$

onde é claro que $b \geq c_\infty$. Além disso, o seguinte resultado é verdadeiro.

Lema 23 $b > c_\infty$.

Demonstração. Suponha por contradição, que $b = c_\infty$. Pela definição de b existe um sequência $(u_n) \subset \{I(u); u \in \mathcal{P} \text{ e } \beta(u) = 0\}$ tal que

$$I(u_n) < b + \frac{1}{n}.$$

Logo pelo Lema 22, (u_n) é limitada. Note que, pelo Lema 15 e Lema 16 $b = p$. Então (u_n) é também uma sequência minimizante de I em $\mathcal{P}$. Logo pelo Princípio Variacional de Ekeland (Teorema 8.5 em [24]) existe outra sequência $(\tilde{u}_n) \subset \mathcal{P}$ tal que:

- $I(\tilde{u}_n) \rightarrow p$;
- $I'|_{\mathcal{P}}(\tilde{u}_n) \rightarrow 0$;
- $\|\tilde{u}_n - u_n\|_\lambda \rightarrow 0$.

Agora, desde que a variedade de Pohozaev é um vínculo natural para o funcional I , temos que $I'(\tilde{u}_n) \rightarrow 0$. Além disso $(\tilde{u}_n)$ é limitada, pois

$$\|\tilde{u}_n\|_\lambda \leq \|\tilde{u}_n - u_n\| - \lambda + \|u_n\|_\lambda.$$

Também como $\beta(u_n) = 0$ e β é uma função contínua em u_n e $\|\tilde{u}_n - u_n\| \rightarrow 0$, temos

$$|\beta(\tilde{u}_n) - \beta(u_n)| \rightarrow 0,$$

e daí $\beta(\tilde{u}_n)$ é limitada.

Consequentemente, a sequência $(\tilde{u}_n)$ satisfaz as hipóteses do Corolário 3 e desde que $p = c_\infty$ não é atingido, então o Lema de Splitting se estabelece com $k = 1$ e $\bar{u} = 0$. Logo

$$\tilde{u}_n - u^1(\cdot - y_n) \rightarrow 0,$$

onde $|y_n| \rightarrow \infty$ e u^1 é solução do problema autônomo no infinito (4.1). Por translação, obtemos

$$\tilde{u}_n(\cdot + y_n) \rightarrow u^1(\cdot).$$

Desde que o baricentro β é contínua, temos

$$\beta(\tilde{u}_n(\cdot + y_n)) \rightarrow \beta(u^1(\cdot)).$$

Por outro lado,

$$|\beta(\tilde{u}_n(\cdot + y_n))| = |\beta(\tilde{u}_n) - y_n| \geq |y_n| - |\beta(\tilde{u}_n)|.$$

Daí, se $n \rightarrow \infty$ temos que $|\beta(\tilde{u}_n(\cdot + y_n))| \rightarrow \infty$, o que é uma contradição. Assim $b > c_\infty$.

■

Agora consideremos novamente a solução de menor energia positiva e simetricamente radial $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ do problema autônomo no infinito (4.1). Definimos o operador $\Pi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}$ por

$$\Pi[y](x) = w\left(\frac{x - y}{\theta_y}\right),$$

onde θ_y é exatamente o número real θ no qual $w(\cdot - y)$ se projeta na variedade de Pohozaev $\mathcal{P}$.

Afirmção II é uma função contínua de y .

De fato, a composição $y \mapsto w(\cdot - y) \mapsto \theta_y(w(\cdot - y))$ é contínua, desde que $(\cdot - y)$, w e θ_y são contínuos. Consequentemente a nova composição

$$\Pi[y] = w\left(\frac{\cdot - y}{\theta_y}\right)$$

é contínua.

Verifiquemos algumas propriedades do operador Π :

Lema 24 $\beta(\Pi[y](x)) = y$.

Demonstração. Seja $v(x) = w\left(\frac{x-y}{\theta_y}\right)$, então

$$\begin{aligned}\mu(v(\cdot))(x) &= \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x)} |v(z)| dz \\ &= \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x)} \left| w\left(\frac{x-y}{\theta_y}\right) \right| dz \\ &= \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x-y)} \left| w\left(\frac{\xi}{\theta_y}\right) \right| dz \\ &= \mu\left(w\left(\frac{\cdot}{\theta_y}\right)\right)(x-y)\end{aligned}$$

e ainda mais, que $\hat{v}(x) = \hat{w}\left(\frac{\cdot}{\theta_y}\right)(x-y)$. Avaliando β em v , e pelo fato que a norma em $L^1(\mathbb{R}^N)$ é invariante sobre translação, obtemos

$$\begin{aligned}\beta(v) &= \frac{1}{\|\hat{v}\|_1} \int_{\mathbb{R}^N} x \hat{v}(x) dx \\ &= \frac{1}{\|\hat{v}\|_1} \int_{\mathbb{R}^N} x \hat{w}\left(\frac{\cdot}{\theta_y}\right)(x-y) dx \\ &= \frac{1}{\|\hat{v}\|_1} \int_{\mathbb{R}^N} (z+y) \hat{w}\left(\frac{\cdot}{\theta_y}\right)(z) dz \\ &= \frac{1}{\|\hat{v}\|_1} \int_{\mathbb{R}^N} z \hat{w}\left(\frac{\cdot}{\theta_y}\right)(z) dz + \frac{1}{\|\hat{v}\|_1} \int_{\mathbb{R}^N} y \hat{w}\left(\frac{\cdot}{\theta_y}\right)(z) dz \\ &= \beta\left(w\left(\frac{\cdot}{\theta_y}\right)\right) + \frac{y}{\|\hat{v}\|_1} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{v}(y+z) dz \\ &= 0 + y = y,\end{aligned}$$

onde também usamos $\beta(u) = 0$ se u é simétrico radialmente. ■

Lema 25 $I(\Pi[y]) \rightarrow c_\infty$ quando $|y| \rightarrow \infty$.

Demonstração. De fato, $\Pi[y] \in \mathcal{P}$, e em $\mathcal{P}$ o funcional pode ser escrito como

$$I(\Pi[y]) = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla w\left(\frac{x-y}{\theta_y}\right) \right|^2 dx + \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F\left(w\left(\frac{x-y}{\theta_y}\right)\right) dx. \quad (5.8)$$

Além disso, como $w \in \mathcal{P}_\infty$, temos

$$I_\infty(w) = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx.$$

Fazendo uma mudança de variáveis em (5.8), obtemos

$$I(\Pi[y]) = \frac{\theta_y^{N-2}}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx + \frac{\theta_y^N}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta_y x + y) \cdot (\theta_y x + y) F(w) dx \quad (5.9)$$

$$= \theta_y^{N-2} I_\infty(w) + \frac{\theta_y^N}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta_y x + y) \cdot (\theta_y x + y) F(w) dx. \quad (5.10)$$

Pela condição (1.2) e $\theta_y \rightarrow 1$, quando $|y| \rightarrow \infty$, temos

$$\nabla a(\theta_y x + y) \cdot (\theta_y x + y) F(w(x)) \rightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Agora, se $|y_n| \rightarrow \infty$ então

$$\nabla a(\theta_{y_n} x + y_n) \cdot (\theta_{y_n} x + y_n) F(w(x)) \rightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

e também para $\epsilon > 0$, $2 \leq p \leq 2^*$ e usando a condição (A4) e (1.3), obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla a(\theta_{y_n} x + y_n) \cdot (\theta_{y_n} x + y_n) F(w(x))| &\leq N a_\infty |F(w(x))| \\ &\leq \frac{N a_\infty \epsilon}{2} |w(x)|^2 + N a_\infty C |w(x)|^p := h(x), \end{aligned}$$

com

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) dx < \infty.$$

Assim pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta_y x + y) \cdot (\theta_y x + y) F(w(x)) dx \rightarrow 0 \text{ quando } |y| \rightarrow +\infty.$$

Consequentemente fazendo $|y| \rightarrow +\infty$ em (5.10), se $|y| \rightarrow +\infty$, temos $I(\Pi[y]) \rightarrow c_\infty$. ■

Lema 26 *Suponha que*

$$(A6) \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |a_\infty - a(x)| < \frac{2a_\infty c_\infty}{\bar{\theta}^N \|w\|_\lambda^2},$$

onde $\bar{\theta} = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \theta_y$. Então $I(\Pi[y]) < 2c_\infty$.

Demonstração. Observamos inicialmente que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(\Pi[y]) dx = \int_{\mathbb{R}^N} F\left(w\left(\frac{x-y}{\theta_y}\right)\right) dx = \theta_y^N \int_{\mathbb{R}^N} F(w) dx.$$

Como $w \in \mathcal{P}_\infty$, temos

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(w) - \lambda \frac{w^2}{2} dx$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} N \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(w) dx &= \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda w^2 dx \\ &< \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda w^2 dx \\ &= \frac{N}{2} \|w\|_\lambda^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(w) dx < \frac{1}{2a_\infty} \|w\|_\lambda^2$$

e assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(\Pi[y]) dx < \frac{\theta_y^N}{2a_\infty} \|w\|_\lambda^2. \quad (5.11)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} I_\infty(\Pi[y]) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla w \left(\frac{x-y}{\theta_y} \right) \right|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F \left(w \left(\frac{x-y}{\theta_y} \right) \right) - \frac{\lambda}{2} w^2 \left(\frac{x-y}{\theta_y} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla w \left(\frac{x}{\theta_y} \right) \right|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F \left(w \left(\frac{x}{\theta_y} \right) \right) - \frac{\lambda}{2} w^2 \left(\frac{x}{\theta_y} \right) dx \\ &= I_\infty(w(\cdot/\theta_y)) < I_\infty(w) = c_\infty, \end{aligned}$$

pois o máximo da função $t \mapsto I_\infty(w(\cdot/t))$ é atingido em $t = 1$ e $\theta_y > 1$. Logo,

$$I_\infty(\Pi[y]) < c_\infty \quad (5.12)$$

De (5.11) e (5.12), temos que

$$\begin{aligned} I(\Pi[y]) &= I_\infty(\Pi[y]) + (I(\Pi[y]) - I_\infty(\Pi[y])) \\ &< c_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} (a_\infty - a(x)) F(\Pi[y]) dx \\ &< c_\infty + \frac{2a_\infty c_\infty}{\theta^N \|w\|_\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^N} F(\Pi[y]) dx \\ &< c_\infty + \frac{2a_\infty c_\infty}{\theta^N \|w\|_\lambda^2} \frac{\theta_y^N}{2a_\infty} \|w\|_\lambda^2 \leq 2c_\infty. \end{aligned}$$

Assim, temos que $I(\Pi[y]) < 2c_\infty$. ■

Vamos agora apresentar uma versão do Teorema de Linking para sequências de Cerami (ver o Teorema 2.3 em [4]).

Definição 11 *Seja S um subconjunto fechado de um espaço de Banach X , e seja Q uma subvariedade de X com fronteira relativa ∂Q . Dizemos que S e ∂Q "link" se:*

- (1) $S \cap \partial Q = \emptyset$;
- (2) para qualquer $h \in C^0(X, X)$ tal que $h|_{\partial Q} = id$, vale $h(Q) \cap S \neq \emptyset$.

Ainda, se S e ∂Q são como acima e B é um subconjunto de $C^0(X, X)$, então S e ∂Q "link" com respeito à B , se (1) vale e se (2) vale para qualquer $h \in B$.

Teorema 10 (Linking) *Suponha que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ seja um funcional que satisfaz a condição (Ce). Considere S um subconjunto fechado de X e uma subvariedade $Q \subset X$ com fronteira ∂Q . Suponha também que*

- S e ∂Q "link";
- $\alpha = \inf_{u \in S} I(u) > \sup_{u \in \partial Q} I(u) = \alpha_0$;
- $\sup_{u \in Q} I(u) < +\infty$.

Se $B = \{h \in C^0(X, X); h|_{\partial Q} = id\}$, então $l = \inf_{h \in B} \sup_{u \in Q} I(h(u))$ define um valor crítico de I , com $l \geq \alpha$

Demonstração do Teorema 1.1. Como $\Pi[y] \in \mathcal{P}$ então $I_\infty(\Pi[y]) < I(\Pi[y])$, para qualquer $y \in \mathbb{R}^N$. Pelo Lema 25 e do fato de que $b > c_\infty$, existe $\bar{\rho} > 0$ tal que para todo $\rho \geq \bar{\rho}$,

$$c_\infty \leq \max_{|y|=\rho} I(\Pi[y]) < b.$$

Na verdade,

$$c_\infty < \max_{|y|=\rho} I(\Pi[y]).$$

De fato, suponha que

$$c_\infty = \max_{|y|=\rho} I(\Pi[y]),$$

então

$$c_\infty = I(w) = I(\Pi[y_0]) \quad \text{para algum } |y_0| = \bar{\rho}.$$

Logo,

$$0 > \frac{1}{N}(1 - \theta_{y_0}^{N-2}) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx = \frac{\theta^N}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(w) dx > 0,$$

o que é uma contradição. Portanto

$$c_\infty < \max_{|y|=\rho} I(\Pi[y]) < b \tag{5.13}$$

Para poder usar o Teorema do Linking, definimos

$$Q := \Pi \left(\overline{B_{\bar{\rho}}(0)} \right) \text{ e } S := \{u \in \mathcal{P}; \beta(u) = 0\}.$$

Mostremos que ∂Q e S "link". De fato, pelo Lema 24, temos $\beta(\Pi[y]) = y$ e então

$$\partial Q \cap S = \emptyset.$$

De fato, se $u \in \partial Q \cap S$ então $u \in \partial Q$ e $u \in S$. Logo existe $|y_0| = \bar{\rho}$ tal que

$$\beta(u) = \beta(\Pi[y_0]) = y_0 \tag{5.14}$$

pelo Lema 24. Por outro lado, como $u \in S$ então $\beta(u) = 0$ o qual contradiz (5.14).

Mostremos agora que $h(Q) \cap S \neq \emptyset$, para qualquer $h \in \mathcal{H}$, onde

$$\mathcal{H} = \{h \in C(Q, \mathcal{P}); h|_{\partial Q} = id\}.$$

Dada $h \in \mathcal{H}$, definimos $T : \overline{B_{\bar{\rho}}(0)} \rightarrow \mathbb{R}^N$ por

$$T(y) = \beta \circ h \circ \Pi[y].$$

A função T é continua, pois é composição de funções contínuas. Além disso, para qualquer $|y| = \bar{\rho}$ temos que $\Pi[y] \in \partial Q$. Então $h(\Pi[y]) = \Pi[y]$ pois $h|_{\partial Q} = id$ e, pelo Lema 24, $T(y) = y$.

Afirmção. Existe um $\tilde{y} \in B_{\bar{\rho}}$ tal que $T(\tilde{y}) = 0$.

De fato, suponha que $T(y) \neq 0$ para todo $y \in \bar{B}_{\bar{\rho}}$, então defina $M : \overline{B_{\bar{\rho}}(0)} \rightarrow \overline{B_{\bar{\rho}}(0)}$ por

$$M(x) = -\frac{\bar{\rho}T(y)}{\|T(y)\|}.$$

Note que M verifica $M(\overline{B_{\bar{\rho}}(0)}) \subset \overline{B_{\bar{\rho}}(0)}$, pois $\|M(y)\| = \bar{\rho}$. Além disso M é contínua pois T é contínua. Portanto pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, a função M tem ponto fixo em $\overline{B_{\bar{\rho}}}$. Seja y_0 tal ponto fixo de M , isto é, $M(y_0) = y_0$. Desta forma

$$\|y_0\| = \|M(y_0)\| = \bar{\rho} > 0.$$

Por outro lado,

$$\bar{\rho}^2 = \langle y_0, M(y_0) \rangle = \left\langle y_0, -\frac{\bar{\rho}T(y_0)}{\|T(y_0)\|} \right\rangle = -\frac{\bar{\rho}}{\|T(y_0)\|} \langle y_0, y_0 \rangle < 0$$

o que é uma contradição. Assim existe $\tilde{y} \in \overline{B_{\bar{\rho}}(0)}$ tal que $T(\tilde{y}) = 0$. Em particular $\tilde{y} \in B_{\bar{\rho}}(0)$ o que implica que $h(\Pi[\tilde{y}]) \in S$. Portanto, ∂Q e S "link".

Ainda, das definições de b e Q e a desigualdade (5.13), podemos escrever

$$b = \inf_S I > \max_{\partial Q} I.$$

Definimos

$$d = \inf_{h \in \mathcal{H}} \max_{u \in Q} I(h(u)),$$

o qual esta bem definida, pois desde que

$$Q = \overline{B_{\bar{\rho}}(0)}$$

é compacto e $h(u) \in \mathcal{P}$, então

$$\max_{u \in Q} I(h(u)) \geq c_\infty$$

e então

$$\inf_{h \in \mathcal{H}} \max_{u \in Q} I(h(u)) \geq c_\infty.$$

Além disso, temos que $d \geq b$. Com efeito, como $h(Q) \cap S \neq \emptyset$, para toda $h \in \mathcal{H}$, existe $w \in S$ tal que w também pertence à $h(Q)$, isto é, existe $v \in \Pi(\overline{B_{\bar{\rho}}(0)})$ tal que $w = h(v)$. Assim,

$$I(h(v)) = I(w) \geq \inf_{u \in S} I(u) = b$$

o que implica que

$$d = \inf_{h \in \mathcal{H}} \max_{u \in Q} I(h(u)) \geq b.$$

Em particular, temos que $d > c_\infty$, pois $b > c_\infty$ pelo Lema 23. Ainda, se tomamos $h = id$, temos

$$d = \inf_{h \in \mathcal{H}} \max_{u \in Q} I(h(u)) \leq \max_{u \in Q} I(u) < 2c_\infty,$$

onde usamos o Lema 26. Logo $d \in (c_\infty, 2c_\infty)$. Portanto, temos pelo Lema 21 que a condição de Cerami é satisfeita no nível d e assim podemos aplicar o Teorema de Linking e concluir que d é um valor crítico para o funcional I . Logo, é garantida a existência de

uma solução não nula u para a equação (1.1). Além disso, u é uma solução positiva da equação (1.1). Com efeito

$$\begin{aligned} 0 = I'(u)(u^-) &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u^- + \lambda u u^- dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) f(u) u^- dx \\ &= \|u_1^-\|_\lambda^2, \end{aligned}$$

onde $u^- := \min\{u, 0\}$. Logo $u \geq 0$. Colocando a equação (1.1) em u na forma

$$\Delta u - \lambda u = -a(x)f(u) \leq 0,$$

e usando o Princípio do Máximo Fraco(Teorema 3.5 em [11]), temos que $u > 0$.

Considerações Finais

Neste trabalho foi estudado uma versão estacionária da equação de Schrödinger não-linear assintoticamente linear no infinito e o objeto principal do estudo foi artigo de A. Maia e R. Lehrer em [15]. Este tipo de problemas são recentes e vem sendo tratado na área de Equações Diferenciais Parciais.

No capítulo introdutório é enunciado o Teorema 1.1 e o Teorema 1.2 que são os objetivos deste trabalho, onde o primeiro mostra a existência de uma solução positiva para o problema (1.1) e o segundo mostra a não existência de solução para este problema. No segundo capítulo foi apresentado estudos preliminares indispensáveis para abordar as técnicas necessárias a fim de se obter soluções da equação, resultados de Análise Não-Linear compõem o capítulo como uma versão do Teorema do Passo da Montanha. No terceiro foi enunciado a identidade e variedade de Pohozaev para o problema (1.1). Já no quarto Capítulo demonstra-se o Teorema 1.2, que mostra a não existência de solução do problema (1.1) restrito à variedade de Pohozev $\mathcal{P}$. Finalmente no quinto Capítulo demonstra-se o Teorema 1.1, o qual mostra a existência de uma solução positiva para o problema (1.1) sobre um subconjunto da variedade de Pohozev $\mathcal{P}$, onde foi usado o Teorema de Linking e a função *baricentro*.

No desenvolvimento do trabalho tive a oportunidade de aprimorar o meus conhecimentos aprendidos em aula, além de conhecer vários outros trabalhos visando este assunto, onde diferentes técnicas são utilizadas, me proporcionando assim uma certa familiaridade com as formas de abordagem das Equações Diferenciais Parciais Elípticas. Tal familiaridade julgo ser fundamental para dar continuidade aos meus estudos em nível de doutorado, quer seja nesta área ou em outras áreas da Matemática.

Um problema modelo de (1.1)

Consideremos o problema

$$-\Delta u + \lambda u = a(x) \frac{u^3}{1 + u^2}, \text{ em } \mathbb{R}^N$$

com $a(x) = a_\infty - \frac{1}{|x|+k}$, $k > \frac{1}{a_\infty}$ e $a_\infty > \lambda$ constantes positivas. A função $a(x)$ satisfaz (A1)-(A5) e a função $f(s) = \frac{s^3}{1+s^2}$ satisfaz (f1) – (f3). De fato,

(A1) $a \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ pois é a diferença de duas funções de classe C^∞ . Também, temos que

$$a(x) = a_\infty - \frac{1}{|x|+k} > a_\infty - \frac{1}{k} > 0.$$

Daí

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} a(x) > a_\infty - \frac{1}{k} > 0;$$

(A2)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(a_\infty - \frac{1}{|x|+k} \right) = a_\infty > \lambda;$$

$$(A3) \quad \nabla a(x) \cdot x = \frac{|x|}{(|x|+k)^2} \geq 0$$

$$(A4) \quad a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} < a_\infty.$$

De fato

$$a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} = a_\infty - \frac{1}{|x|+k} + \frac{|x|}{N(|x|+k)^2} = a_\infty + \frac{(1-N)|x| - Nk}{N(|x|+k)^2} < a_\infty;$$

$$(A5) \quad a(x) + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \geq 0.$$

Com efeito, primeiro observemos que

$$\begin{aligned}
 x \cdot H(x) \cdot x &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N x_i x_j \frac{\partial^2 a(x)}{\partial x_j \partial x_i} \\
 &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i^2}{|x|(|x|+k)^2} - \frac{x_i^4}{|x|^3(|x|+k)^2} - \frac{2x_i^4}{|x|^2(|x|+k)^3} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2x_i^2 x_j^2}{|x|^3(|x|+k)^2} - \frac{4x_i^2 x_j^2}{|x|^2(|x|+k)^3} \right) \\
 &= \frac{|x|}{(|x|+k)^2} - \frac{|x|^4}{|x|^3(|x|+k)^2} - \frac{2|x|^2}{(|x|+k)^3} \\
 &= -\frac{2|x|^2}{(|x|+k)^3}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} &= \frac{|x|}{(|x|+k)^2} - \frac{2|x|^2}{(|x|+k)^3} \\
 &= \frac{Nk|x| + (N-2)|x|^2}{N(|x|+k)^3} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Também a função $f(s) = \frac{s^3}{1+s^2}$ satisfaz as hipóteses (f1) – (f3). De fato,

(f1) $f \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, pois $f(s)$ é uma função racional e $f(s) = \frac{s^3}{1+s^2} > 0$ para todo $s > 0$.

Também se verifica que, $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{s^3}{1+s^2}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{1+s^2} = 0$;

(f2) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{1+s^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{s^2}+1} = 1$;

(f3) Se $F(s) = \int_0^s f(t)dt = \int_0^s \frac{t^3}{1+t^2} = \frac{s^2}{2} - \ln(s^2 + 1)$ então

$$Q(s) = \frac{1}{2}f(s)s - F(s) = \frac{1}{2} \frac{s^4}{1+s^2} - \frac{s^2}{2} + \ln(s^2 + 1) = \frac{-s^2}{2(1+s^2)} + \ln(s^2 + 1), \quad \text{para todo } s > 0.$$

De fato, se $s > 0$ então $1 + s^2 > 1$. Daí, fazendo uma mudança de variável $t = 1 + s^2 > 1$, temos

$$R(t) = \frac{1-t}{2t} + \frac{1}{2} \ln t$$

derivando esta nova função, obtemos

$$R'(t) = \frac{2t-2}{4t^2} > 0.$$

Logo R é uma função crescente. Em particular, $R(t) > 0$ para todo $t > 1$. Consequentemente $Q(s) > 0$ para todo $s > 0$. Agora, antes de mostrar que existe um $D \geq 1$ tal que

$$Q(s) \leq DQ(t) \quad \text{para todo } 0 < s \leq t,$$

mostremos a seguinte afirmação.

Afirmção: Se f é diferenciável, então $\frac{f(s)}{s}$ é não decrescente para $s > 0$ se, e somente se $Q(s)$ é não decrescente para $s > 0$.

De fato, derivando $\frac{f(s)}{s}$, temos

$$\left(\frac{f(s)}{s}\right)' = \frac{f'(s)s - f(s)}{s^2} \geq 0.$$

Por outro lado, derivando $Q(s)$ obtemos

$$Q'(s) = \frac{1}{2} (f'(s)s - f(s)) = \left(\frac{f(s)}{s}\right)' s^2 \geq 0.$$

Logo, $\frac{f(s)}{s}$ é não decrescente se, e somente se $Q(s)$ é não decrescente para todo $s > 0$.

Assim, pela afirmação feita, basta mostrar que $\frac{f(s)}{s} = \frac{s^2}{1+s^2}$ seja não decrescente para todo $s > 0$, para estabelecer que existe $D = 1$ tal que $Q(s) \leq DQ(t)$ para todo $0 < s \leq t$.

De fato,

$$\left(\frac{f(s)}{s}\right)' = \frac{2s}{(1+s^2)^2} > 0.$$

Finalmente, temos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Q(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \frac{s^4}{1+s^2} - \frac{s^2}{2} + \ln(s^2 + 1) \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{-s^2}{2(1+s^2)} + \ln(s^2 + 1) \right) = +\infty$$

Regularidade da função I e J

Proposição B.1 *O funcional associado com o problema (1.1) é dado por*

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(u) dx$$

é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Demonstração. De fato, inicialmente vamos a calcular a derivada de Gateux DI .

$$\frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u \nabla v + \lambda uv + \frac{t}{2} (|\nabla v|^2) + \frac{\lambda t}{2} v^2 \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \left[\frac{F(u + tv) - F(u)}{t} \right] dx.$$

Definimos a função

$$g(\theta) := F(u + \theta tv) \text{ para todo } \theta \in [0, 1].$$

Note que g é contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $(0, 1)$, logo pelo Teorema do Valor Meio existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$F(u + tv) - F(u) = f(u + \alpha tv)tv.$$

Assim,

$$\frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v + \lambda uv + \frac{t}{2} (|\nabla v|^2) + \frac{\lambda t}{2} v^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) f(u + \alpha tv) v dx.$$

Agora, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue na anterior igualdade e fazendo $t \rightarrow 0$, temos que a derivada de Gateux de I é

$$DI(u)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda uv) dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) f(u) v dx.$$

Seguidamente, mostremos que o operador DI é contínuo em $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, seja (u_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightarrow u$ e seja $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\| \leq 1$, então

$$\begin{aligned}
|[DI(u_n) - DI(u)]v| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla v + \lambda u_n v) dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) f(u_n) v dx - \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \lambda u v) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} a(x) f(u) v dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla(u_n - u) \nabla v + \lambda(u_n - u)v) dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)(f(u_n) - f(u))v dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(u_n - u)| |\nabla v| + \lambda |u_n - u| |v|) dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |f(u_n) - f(u)| |v| dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} \lambda (u_n - u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \lambda v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{a_\infty}{\sqrt{\lambda}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n) - f(u)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \lambda v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u_n - u\|_\lambda \|v\|_\lambda + \|u_n - u\|_\lambda \|v\|_\lambda + \frac{a_\infty}{\sqrt{\lambda}} \|f(u_n) - f(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|v\|_\lambda.
\end{aligned}$$

Por outro lado das imersões contínuas de Sobolev,

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } L^p(\mathbb{R}^N) \quad \text{com } 2 \leq p \leq 2^*.$$

do Teorema do Vainberg (ver o Teorema 4.9 em [6]), existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_{n_j}(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$|u_{n_j}(x)| \leq g(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Desde que f é uma função contínua, temos

$$|f(u_{n_j}(x)) - f(u(x))|^2 \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e como as condições $(f1)$ e $(f2)$, implicam que

$$|f(s)| \leq M|s| \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.1})$$

Logo

$$\begin{aligned}
|f(u_{n_j}(x)) - f(u(x))|^2 &\leq 4(|f(u_{n_j}(x))|^2 + |f(u(x))|^2) \\
&\leq M^2 |u_{n_j}(x)|^2 + M^2 |u(x)|^2 \\
&\leq M^2 g^2(x) + M^2 g^2(x) = 2M^2 g^2(x),
\end{aligned}$$

com

$$\int_{\mathbb{R}^N} 2M^2 g^2(x) < \infty.$$

Assim, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\|f(u_n) - f(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|DI(u_{n_j}) - DI(u)\| &= \sup_{\|v\| \leq 1} |[DI(u_n) - DI(u)]v| \\ &\leq \|u_n - u\|_\lambda + \|u_n - u\|_\lambda + \frac{a_\infty}{\sqrt{\lambda}} \|f(u_n) - f(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = o_n(1). \end{aligned}$$

Agora, suponha que exista $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que

$$DI(u_{n_k}) \not\rightarrow DI(u),$$

então fazendo todo o anterior para o caso $u_{n_k} \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos a menos de subsequência que

$$DI(u_{n_k}) \rightarrow DI(u),$$

o gera uma contradição à suposição feita. Portanto

$$DI(u_n) \rightarrow DI(u),$$

consequentemente $DI(u) = I'(u)$ e $I \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. ■

Proposição B.2 *O funcional associado a identidade de Pohozaev de (1.1) é dado por*

$$J(u) = \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - N \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u)$$

com $G(x, u) = a(x)F(u) - \lambda \frac{u^2}{2}$, é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Demonstração. Como na anterior demonstração vamos primeiramente a calcular a derivada de Gateux DJ .

$$\begin{aligned} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} &= (N-2) \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u \nabla v + \frac{t}{2} |\nabla v|^2 \right) dx + N \int_{\mathbb{R}^N} \lambda uv + \frac{\lambda t}{2} v^2 dx \\ &\quad - N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} dx. \end{aligned}$$

Definimos a função

$$\bar{g}(\theta) := F(u + \theta tv) \text{ para todo } \theta \in [0, 1].$$

Note que $\bar{g}$ é continua em $[0, 1]$ e diferenciável em $(0, 1)$, logo pelo Teorema do Valor Meio existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$F(u+tv) - F(u) = f(u + \alpha tv)tv.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} &= (N-2) \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u \nabla v + \frac{t}{2} |\nabla v|^2 \right) dx + N \int_{\mathbb{R}^N} \lambda uv + \lambda tv^2 dx \\ &\quad - N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) f(u + \alpha tv) v dx, \end{aligned}$$

e fazendo $t \rightarrow 0$, temos que a derivada de Gateux de J é

$$DJ(u)v = (N-2) \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx - N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) f(u)v - \lambda uv dx.$$

Agora, mostremos que o operador DJ é contínuo em $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, seja (u_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightarrow u$ e seja $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\| \leq \lambda$, então

$$\begin{aligned} |[DJ(u_n) - DJ(u)]v| &= \left| (N-2) \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla v - N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) f(u_n)v - \lambda u_n v dx \right. \\ &\quad \left. - (N-2) \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v + N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) f(u)v - \lambda uv dx \right| \\ &= \left| (N-2) \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u) \nabla v dx - N \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) (f(u_n) - f(u))v dx \right. \\ &\quad \left. - N \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(u_n - u)v dx \right| \\ &\leq (N-2) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(u_n - u)| |\nabla v|) dx + N \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty |f(u_n) - f(u)| |v| dx \\ &\quad + N \int_{\mathbb{R}^N} \lambda |u_n - u| |v| dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{a_\infty}{\sqrt{\lambda}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n) - f(u)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \lambda v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + N \left(\int_{\mathbb{R}^N} \lambda (u_n - u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \lambda v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \|u_n - u\|_\lambda \|v\|_\lambda + \frac{a_\infty}{\sqrt{\lambda}} \|f(u_n) - f(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|v\|_\lambda. \end{aligned}$$

Além disso, das imersões contínuas de Sobolev,

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } L^p(\mathbb{R}^N) \text{ com } 2 \leq p \leq 2^*.$$

Do Teorema do Vainberg, existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_{n_j}(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$|u_{n_j}(x)| \leq g(x) \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Desde que f é uma função contínua, temos

$$|f(u_{n_j}(x)) - f(u(x))|^2 \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

e como

$$\begin{aligned} |f(u_{n_j}(x)) - f(u(x))|^2 &\leq 4(|f(u_{n_j}(x))|^2 + |f(u(x))|^2) \\ &\leq M^2|u_{n_j}(x)|^2 + M^2|u(x)|^2 \\ &\leq M^2g^2(x) + M^2g^2(x) = 2M^2g^2(x). \end{aligned}$$

Logo do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\|f(u_n) - f(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|DJ(u_{n_j}) - DJ(u)\| &= \sup_{\|v\| \leq 1} |[DJ(u_n) - DJ(u)]v| \\ &\leq 2\|u_n - u\|_\lambda + \frac{a_\infty}{\sqrt{\lambda}}\|f(u_n) - f(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = o_n(1) \end{aligned}$$

e consequentemente

$$DJ(u_n) \rightarrow DJ(u)$$

e $DJ(u) = J'(u)$ com $J \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. ■

Referências

- [1] A. Ambrosetti; G. Cerami; D. Ruiz. Solitons of linearly coupled systems of semilinear non-autonomous equations on $\mathbb{R}^N$. *Journal of Functional Analysis*, 254(11):2816–2845, 2008.
- [2] A. Azzollini; A. Pomponio. On the Schrodinger equation in $\mathbb{R}^N$ under the effect of a general nonlinear term. *arXiv preprint arXiv:0802.1844*, 2008.
- [3] K. C. Barroso. Existência de soluções homoclínicas para uma classe de sistemas hamiltonianos. pages 1–120, 2011.
- [4] P. Bartolo; V. Benci; D. Fortunato. Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 7(9):981–1012, 1983.
- [5] H. Berestycki; P. L. Lions . Nonlinear scalar field equations. i: Existence of infinitely many solutions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 82,(1):313–345, 1983.
- [6] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [7] D. G. Costa; C. A. Magalhães. Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 23(11):1401–1412, 1994.
- [8] D. G. Costa; H. Tehrani. On a class of asymptotically linear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$. *Journal of Differential Equations*, 173(2):470–494, 2001.
- [9] I. Ekeland. *Convexity methods in Hamiltonian mechanics*, volume 19. Springer Science & Business Media, 2012.
- [10] N. Ghoussoub; D. Preiss. A general mountain pass principle for locating and classifying critical points. In *Annales de l’IHP Analyse non linéaire*, volume 6, pages 321–330, 1989.
- [11] D. Gilbarg; N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. springer, 2015.
- [12] L. Jeanjean; K. Tanaka. A remark on least energy solutions in $\mathbb{R}^n$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, pages 2399–2408, 2003.
- [13] S. Kesavan. Topics in functional analysis and applications. 1989.
- [14] M. K. Kwong. Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 105(3):243–266, 1989.

- [15] R. Lehrer; L. A. Maia. Positive solutions of asymptotically linear equations via Pohozaev manifold. *Journal of Functional Analysis*, 266(1):213–246, 2014.
- [16] P. L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 1. In *Annales de l'IHP Analyse non linéaire*, volume 1, pages 109–145, 1984.
- [17] P. H. Rabinowitz. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, volume 65. American Mathematical Society, 1984.
- [18] P. H. Rabinowitz. On a class of nonlinear Schrödinger equations. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 43(2):270–291, 1992.
- [19] J. Shatah. Unstable ground state of nonlinear Klein-Gordon equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 701–710, 1985.
- [20] G. S. Spradlin. Existence of solutions to a hamiltonian system without convexity condition on the nonlinearity. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2004(21), 2004.
- [21] G. S. Spradlin. Interacting near-solutions of a hamiltonian system. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 22(4):447–464, 2004.
- [22] C. A. Stuart. Guidance properties of nonlinear planar waveguides. *Archive for rational mechanics and analysis*, 125(2):145–200, 1993.
- [23] C. A. Stuart; Huan-Song Zhou. Applying the mountain pass theorem to an asymptotically linear elliptic equation on $\mathbb{R}^n$. *Communications in Partial Differential Equations*, 24(9-10):1731–1758, 1999.
- [24] M. Willem. *Minimax theorems*, volume 24. Springer Science & Business Media, 1997.