

ESTUDO DE MANOBRAS EVASIVAS COM PERTURBAÇÕES ORBITAIS

Rafael Ribeiro de Sousa

Rafael Ribeiro de Sousa

ESTUDO DE MANOBRAS EVASIVAS COM PERTURBAÇÕES ORBITAIS

Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia do Campus de Guaratinguetá,
Universidade Estadual Paulista, para a
obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto

Co-orientador: Prof. Dr. Antônio Delson Conceição de Jesus

GUARATINGUETÁ

2015

S725e Sousa, Rafael Ribeiro de
Estudo de manobras evasivas com perturbações orbitais / Rafael
Ribeiro de Sousa. - Guaratinguetá, 2015
88 f. : il.
Bibliografia: f. 86-88

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2015.
Orientador: Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Co-orientador: Antônio Delson Conceição de Jesus

1. Satélites artificiais -- Orbitas 2. Perturbação (Astronomia) 3.
Veículos espaciais – Sistema de propulsão I. Título

CDU 629.783(043)

RAFAEL RIBEIRO DE SOUSA

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”**

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. ERNESTO VIEIRA NETO
Orientador / UNESP/FEG


OTHON CABO WINTER
UNESP/FEG


Prof. Dr. CRISTIANO FIORILO DE MELO
UFMG

Julho de 2015

DADOS CURRICULARES

RAFAEL RIBEIRO DE SOUSA

NASCIMENTO	06.04.1990 – Santo Antônio de Jesus- BA / Brasil
FILIAÇÃO	José Nilson de Sousa Nair Ribeiro de Sousa
2008/2013	Curso de Graduação em Bacharelado em Física Universidade Estadual de Feira de Santana-UEFS
2013/2015	Curso de Pós-Graduação em Física, Nivel de Mestrado Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá Universidade Estadual Paulista-UNESP

Dedico este trabalho a minha amada mãe que está sempre no meu coração.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela iluminação nos meus dias.

A minha mãe Nair por todos os conselhos que me guiou para a busca da sabedoria.

Ao meu pai Nilson que me apoia quando necessário.

Aos meus irmãos Lucas e Gabriela que são meus exemplos.

A minha namorada Simone por sempre me incentivar e está do meu lado me conduzindo a momentos felizes.

Aos meus orientadores Profº Dr. Ernesto, e Profº Dr. Antônio Delson pela boa amizade e sobretudo pela plena confiança no meu trabalho.

A todos os meus professores que me ensinaram tudo que eu sei.

A todos os meus amigos que me acolheram na Unesp e a transformou em um lar.

Este trabalho contou com o suporte financeiro da
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de
Nível Superior - **CAPES**

*‘But only in their dreams can men be truly free. Twas always
thus, and always thus will be’*

John Keating

SOUSA, R.R. Estudo de Manobras Evasivas com perturbações orbitais. 2015. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, UNESP, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o problema da viabilidade de missões espaciais em ambiente de detritos espaciais. Geralmente, um veículo espacial em curso de colisão com um detrito espacial é destruído ou danificado e tem sua missão prejudicada. A preservação destas missões depende da capacidade do satélite de evitar a colisão, como por exemplo, através de uma manobra orbital conhecida como manobra evasiva. Neste estudo, estabelecemos estratégias de manobras evasivas realizadas por um satélite através de um sistema de propulsão, cuja eficiência é medida por parâmetros tecnológicos. Os parâmetros tecnológicos são configurados no planejamento da missão, e descrevem a quantidade de combustível a bordo e a capacidade de expelir propelente do sistema de propulsor. As manobras evasivas foram estudadas para serem aplicadas de tal forma que o satélite escape do detrito espacial sem a evasão da sua órbita nominal de missão, e para este objetivo, incluímos uma propulsão de controle e tratamos o sistema de propulsão como uma perturbação na órbita do satélite. Também foi estabelecido, para realizar manobras evasivas econômicas, uma propulsão que é ligada em uma fração do tempo total disponível para a manobra. Esta fração de tempo é definida como um tempo de pulso de propulsão. As manobras evasivas são estudadas por simulações numéricas da dinâmica de um detrito e um veículo espacial sob a ação da força gravitacional da Terra e de perturbações orbitais oriundas de um sistema de propulsão e da atmosfera da Terra. Nestas simulações calculamos as condições de colisão do detrito e do satélite, que ocorrem ao redor da Terra, e utilizamos para criar catálogos de parâmetros tecnológicos acessíveis ao satélite para escapar destas colisões.

PALAVRAS-CHAVE: Detritos espaciais, Manobras evasivas, Sistema de propulsão, Perturbações, Arrasto atmosférico.

SOUSA, R.R. Study of evasive maneuvers considering orbital perturbations. 2015. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, UNESP, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

Abstract

We studied the problem of the viability of space missions in debris environment space. Generally, a space vehicle in collision course with a space debris is destroyed or damaged and has impaired their mission. The preservation of these missions depends on the satellite capacity to avoid the collision, for example by an orbital maneuver known as evasive maneuver. In this study, we established strategies evasive maneuvers performed by a satellite via a propulsion system, whose efficiency is measured by technological parameters. Technological parameters are set in the planning of the mission, and describe the amount of fuel on board and the ability to expel propellant propulsion system. The evasive maneuvers were studied to be applied in such a way that the satellite escape the space debris without evasion of its nominal orbit mission, and for this purpose, include a propulsion control and treat the propulsion system as a disturbance in the orbit of satellite. It has also been established, to perform evasive maneuvers driven, propulsion which is connected at a fraction of the total time available for the maneuver. This fraction of time is defined as a propulsion pulse time. The evasive maneuvers are studied by numerical simulations of the dynamics of a debris and a vehicle space under the action of the Earth's gravitational and orbital perturbations arising from a propulsion system and the Earth's atmosphere. In these simulations calculate the debris of the collision conditions and the satellite, which occur around the Earth, and used to create technological parameters catalogs accessible to the satellite to escape these collisions.

KEYWORDS: Debris, Evasive maneuvers, Propulsion system, Perturbations, Drag.

Lista de Figuras

3.1	Número de objetos catalogados por ano pela NASA.	25
3.2	Detritos espaciais que caíram no Brasil: à esquerda um detrito espacial de 3 kg, a queda do objeto aconteceu no estado de São Paulo em 2014, à direita um tanque de nitrogênio que caiu em Mato Grosso do Sul, em 2014.	26
4.1	Sistema de referência co-orbital posicionado no satélite, pelo qual o detrito espacial é observado.	30
4.2	Órbita do satélite no plano equatorial da Terra.	35
4.3	Acelerações atuantes no satélite em órbita circular ao redor da Terra.	38
5.1	Possibilidades de colisões por distribuição de velocidades iniciais relativas em LEO, MEO e GEO- I	51
5.2	Possibilidades de colisões por Distribuição de velocidades relativas em LEO, MEO e GEO- II	52
5.3	Possibilidades de colisões por distribuição de velocidades iniciais relativas – (III)	53
5.4	Acelerações atuantes no detrito e no satélite.	54
5.5	Razão entre as acelerações de propulsão e gravitacional para um satélite em LEO.	55
5.6	Análise da convergência da solução do movimento tangencial do satélite.	56
5.7	Acréscimo na velocidade angular do satélite.	57
5.8	Decréscimo na velocidade angular do satélite.	57
5.9	Aceleração de propulsão radial pelo tempo de manobra.	58
5.10	Variação da velocidade (m/s) devido ao sistema de propulsor.	60
5.11	Relação entre o empuxo e o impulso específico.	61
5.12	Aceleração de controle do satélite durante a ação do propulsor.	63
5.13	Dimensão dos objetos esféricos.	64
5.14	Representação de uma manobra contínua.	64
5.15	Dimensão dos objetos por fator de massa do propulsor.	65
5.16	Dimensão dos objetos por fator de massa do propulsor modelo Jesus et al. (2012).	66
5.17	Representação de uma manobra de evasão semi-contínua.	67

5.18	Dimensão dos objetos por tempo pulsado de uso do propulsor para fatores de potência de $1\text{E-}3$ $1/\text{s}$ e $1\text{E-}6$ $1/\text{s}$	68
5.19	Esquema de acelerações aplicadas ao satélite e o detrito espacial.	69
5.20	Comparação entre as trajetórias relativas com e sem arrasto atmosférico. . .	70
5.21	Comparação entre as trajetórias radiais do movimento com e sem arrasto atmosférico do detrito espacial no sistema geocêntrico.	71
5.22	Comparação entre as trajetórias numéricas e semi-analíticas do detrito-satélite com arrasto atmosférico.	72
5.23	Variação da aceleração radial de propulsão para o arrasto atmosférico. . . .	73
5.24	Trajétórias das partículas do PSO inicializadas com velocidades relativas aleatórias.	75
5.25	Trajétórias relativas do detrito e do satélite com a informação das partículas do PSO após algumas interações do método.	76
5.26	Trajétórias das partículas do PSO inicializadas no sistema geocêntrico. . .	77
5.27	Trajétórias das partículas do PSO inicializadas no sistema geocêntrico. . .	77
5.28	Partículas do PSO no espaço das velocidades iniciais relativas (I).	78
5.29	Partículas do PSO no espaço das velocidades iniciais relativas (II).	79
5.30	Partículas do PSO no espaço das velocidades iniciais relativas (III).	80
5.31	Trajétórias de colisão com e sem o arrasto atmosférico (I).	81
5.32	Trajétórias de colisão com e sem o arrasto atmosférico (II).	82

Lista de Tabelas

3.1	Riscos recentes de colisões de detrito espaciais com a Estação Espacial Internacional (ISS). Fonte: Adaptado de NASA/ The Orbital Debris Quarterly News, 2013.	27
5.1	Tabela das características da atmosfera e físicas do detrito e do satélite. . .	70
5.2	Comparação entre as velocidades relativas de colisão entre os objetos. . . .	78

Sumário

1	Introdução	16
1.1	Objetivos	18
1.2	Organização do trabalho	18
2	Revisão Bibliográfica	19
3	Conceitos Prévios	22
3.1	Manobras Orbitais	22
3.2	Detritos Espaciais	23
3.3	Manobras evasivas	25
3.4	Perturbações	27
4	Modelo Matemático	29
4.1	Equações de Clohessy-Wiltshire	29
4.2	Sistema de propulsão	30
4.3	Perturbação do Arrasto Atmosférico	33
4.4	Equação do movimento do satélite perturbado	38
4.5	Escrita das equações de Clohessy-Wiltshire com as perturbações	44
5	Resultados	48
5.1	Dinâmica colisional com gravidade (Modelo de Jesus et al 2012)	48
5.1.1	Mapas de condições iniciais	50
5.2	Manobras evasivas na região de LEO	53
5.2.1	Descrição da Manobra	54
5.2.2	Avaliação dos parâmetros tecnológicos	54
5.2.3	Parâmetros de performance do Sistema de Propulsão	59
5.2.4	A retropropulsão	62
5.2.5	Manobras de evasão com uso da propulsão contínua	62
5.2.6	Manobras de evasão com uso da propulsão semi-contínua	66
5.3	Dinâmica colisional com o Arrasto atmosférico	68
5.3.1	Aplicação do método do Particle Swarm Optimization	74

Capítulo 1

Introdução

Devido ao grande número de detritos espaciais em órbita da Terra, o perigo de colisão com um satélite operacional tem aumentado muito ao longo dos anos. De fato, desde 1996, tem sido relatadas colisões entre satélites e detritos espaciais, e nos anos de 1999 e 2000, houveram sérios alertas sobre a possibilidade de colisão com a constelação de satélites chamada de Iridium (Rossi et al., 1999, 2000). O caso mais dramático ocorreu em fevereiro de 2009 quando o satélite Iridium 33 colidiu com o Cosmos 2251, que já estava fora de operação. Este evento gerou uma nuvem de detritos espaciais incluindo cerca de 2000 fragmentos maiores que uns poucos centímetros (Jesus et al., 2012). Esse assunto é tão relevante que em outubro de 2013 foi apresentado o filme Gravidade. Esse filme conta a estória de um acidente em que astronautas, ao fazerem manutenção fora do ônibus espacial, são surpreendidos por restos de um satélite.

O Comando Estratégico Americano (*United States Strategic Command* – “USSTRATCOM”) possui um catálogo com cerca de 16 000 objetos que vão de 5 cm a 1 m de tamanho. Tais objetos estão orbitando em torno de mil quilômetros de altitude até as órbitas geo-estacionárias.. A partir deste catálogo e de outros serviços, é possível obter informações sobre aproximações perigosas que possam envolver um determinado satélite em operação, de forma que o operador do satélite pode decidir se faz, ou não, uma manobra evasiva para fugir da colisão.

Estudos mostram que nas faixas de altitude de 900 km a 1 400 km, a proliferação de detritos espaciais tem um caráter autossustentável, ou seja, mesmo que não sejam inseridos novos objetos na região, a colisão entre os objetos já existentes aumenta o número de detritos (Kessler, 1991; Rossi et al., 1994, 1997). Ou seja, é importante considerar, no estudo dos detritos espaciais, a fragmentação provocada pela colisão entre os próprios detritos espaciais.

Para entender o efeito de colisões em baixa gravidade e alta velocidade, podemos usar estudos sobre formação planetária a partir de planetesimais como o de Greenberg et al. (1978) e estudos sobre evolução colisional de asteroides como os de Farinella et al. (1992). O cinturão principal de asteroides do Sistema Solar é um bom exemplo de laboratório

para o estudo da evolução dos detritos espaciais. Podemos usar o trabalho de Bagatin and Petit (2001) para entender a distribuição de tamanhos gerados pela fragmentação dos satélites, guardando as devidas proporções de impacto e massas.

Devido ao crescente risco de colisão entre satélites e detritos espaciais nos próximos anos (Rossi et al., 2009), maneiras efetivas de remoção dos detritos, junto com o desenvolvimento de manobras evasivas, são práticas que vem se tornando cada vez mais importantes. Analisar o risco que os detritos espaciais representam aos veículos espaciais é ainda um desafio para ciência e tecnologia, visto que o rastreamento e detecção de detritos espaciais milimétricos é difícil ou impossível pelos radares e telescópios óticos das agências espaciais. Apenas a partir de dados extraídos de satélites LDEF (*Long Duration Exposure Facility*) expostos em órbita e depois recuperados, fornecem uma distribuição estatística da quantidade e da direção do fluxo de detritos espaciais que não são detectáveis por estes radares (Kessler and Cour-Palais, 1978).

Modelos de evolução da população de detritos espaciais devem levar em conta os fragmentos não catalogados e as forças dissipativas que agem sobre eles no ambiente de operação das missões espaciais. Estas forças podem ser o arrasto atmosférico, o achatamento da Terra, a perturbação da Lua e o efeito de maré planetário. Podemos identificar três regiões em que existem satélites em torno da Terra, a região de satélites de órbita baixa (LEO – *Low-altitude Earth Orbit*) cuja altitude vai de 160 km à 2 000 km, a região de satélites de órbitas médias (MEO – *Medium-altitude Earth Orbit*) cuja altitude vai 2 000 km até 35 800 km, e a região dos satélites geoestacionários (GEO – *Geostationary Earth Orbit*) com a altitude acima de 35 800 km (Vatalaro et al., 1995) até o fim da zona de influência do campo gravitacional da Terra. Satélites nessas regiões orbitais sofrem vários tipos de perturbações e, devido a distância da Terra, existem certas perturbações que são dominantes para cada região. Essas perturbações desviam o satélite de sua órbita nominal. E assim como os satélites, as partículas de detritos espaciais também estão sujeitas a estas perturbações.

A consequência desses efeitos nos detritos é que previsões de colisões podem ser calculadas erroneamente se não forem consideradas as perturbações específicas de cada região. Na região LEO, o arrasto atmosférico (Jacchia, 1960; Delhaise, 1991; Bezděk and Vokrouhlický, 2004; Colombo and McInnes, 2012) pode ser a maior perturbação, dependendo da altitude do satélite. Na região MEO, a perturbação devido a não esfericidade da Terra (Bertachini de Almeida Prado, 2003; Colombo and McInnes, 2012) provoca a maior perturbação. E na região GEO, a perturbação devido a Lua (Valk et al., 2009; Lara et al., 2012) é mais intensa no caso dos detritos espaciais. Como em cada uma dessas regiões a perturbação orbital é predominante diferente, os cálculos das manobras evasivas são diferenciados quando levado em conta cada uma dessas perturbações.

Neste trabalho, é proposto o estudo de manobras evasivas para evitar colisões de um ou mais detritos espaciais com um satélite em que ambos estão sob a ação de forças dissipa-

tivas presentes em suas órbitas. Na estratégia das manobras evasivas, estão envolvidas a força de um sistema de propulsão e da perturbação do arrasto atmosférico, com o objetivo de que o problema se torne mais realista do ponto de vista físico e que tenha uma solução mais segura.

1.1 Objetivos

O objetivo geral desse trabalho, é desenvolver manobras evasivas levando em conta perturbações orbitais, inclusive a força dissipativa mais relevante na região de operação espacial LEO. Especificamente, para este trabalho, vamos apresentar e utilizar a metodologia usada em Jesus et al. (2012) para realizar as manobras evasivas, levando em conta a força perturbativa do arrasto atmosférico. Além disso, avaliamos a possibilidade de tratar o sistema de propulsão como uma perturbação para a realização das manobras evasivas mais econômicas, e, aplicando um sistema de propulsão de controle, evitar a retirada do satélite de sua órbita circular de missão. Com uma modelagem mais próxima dos efeitos reais de um sistema, esperamos melhorar a aproximação do trabalho de Jesus et al. (2012).

1.2 Organização do trabalho

O trabalho é apresentado da seguinte forma: No Capítulo 1, apresentamos uma introdução geral sobre o tema de estudo, os objetivos gerais e específicos. No Capítulo 2, é apresentado um levantamento bibliográfico sobre as questões dos detritos espaciais, das manobras evasivas e da inclusão das perturbações na dinâmica relativa de dois objetos. No Capítulo 3, introduzimos os conceitos principais como a definição de manobras evasivas, de detritos espaciais e a preocupação das agências espaciais com o tema. No Capítulo 4, apresentamos a fundamentação matemática sobre a dinâmica relativa do satélite e do detrito espacial, de como tratar o sistema de propulsão como uma perturbação e como acrescentar a perturbação do arrasto atmosférico na dinâmica relativa destes objetos. No Capítulo 5, apresentamos os resultados das simulações numéricas, assim como a estratégia para a construção da dinâmica relativa de colisão com e sem o arrasto atmosférico. Também mostramos os resultados de manobras evasivas realizadas com o sistema de propulsor tratado como uma perturbação diante do risco de colisão iminente. Por fim, no Capítulo 6, está a conclusão.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

É imprescindível para o sucesso das manobras evasivas, que se conheça os objetos dos quais se deseja escapar, neste caso, os detritos espaciais. É importante conhecer como os detritos estão distribuídos no espaço ao redor da Terra, os seus tamanhos e a evolução da população. Estudos apontam para o aumento das colisões entre os detritos espaciais, em um tipo de reação em cadeia, correspondente a um crescimento exponencial de objetos orbitais não úteis (Kessler and Cour-Palais, 1978). Satélites de longa duração como o LDEF (Long Duration Exposure Facility), expostos em órbita e depois recuperados, fornecem uma distribuição estatística da quantidade e da direção do fluxo de detritos espaciais nas regiões orbitais.

Estes dados estimularam trabalhos numéricos com respeito a população dos detritos espaciais. Kessler e cooperadores foram pioneiros no ajuste de dados do LDEF e concluíram que existem milhares de objetos maiores que 10 cm, além de uma imensa quantidade de objetos menores (Kessler, 1989). Outros trabalhos mostraram que os micro detritos são predominantes e o fluxo de detritos espaciais chegam a uma população de 70.000 objetos em órbitas LEO (Kessler, 1991). Cordelli et al. (1998) criaram um modelo numérico da evolução da população de detritos espaciais de massas maiores que 1 mg e encontraram diversas faixas de crescimento de população, desde linear a exponencial (Cordelli et al., 1998).

Segundo Davis, o processo das colisões mútuas de altas velocidades perturba a evolução de longo alcance das distribuições por tamanho dos DE (Davis et al., 1989, 1994). O satélite francês Cerise em operação foi fortemente danificado quando colidiu com um fragmento do corpo do foguete Ariane. Além desse acidente, outros acidentes menores e muitos outros não catalogados têm ocorrido durante vários anos.

A energia cinética associada ao movimento de um detrito de poucas gramas, convertida no impacto desta com outro corpo, corresponde àquela de uma granada de mão e pode destruir uma espaçonave não protegida. Obviamente, a consequência destas colisões produziria uma nuvem com muito mais objetos resultados de uma reação em cadeia, fato que aumentaria a probabilidade de novas colisões. Simulações numéricas mostram que,

se a taxa de atividade espacial for mantida nos padrões atuais, a quantidade de detritos espaciais continuará crescendo, criando um cinturão de partículas em torno da terra, semelhante a um cinturão de asteroides, o que seria suficiente para desencadear uma reação em cadeia em torno de 2 ou 3 vezes a população atual dentro de 20 a 50 anos (Rossi et al., 1994). A Agência Espacial Europeia afirmou que “a produção de detritos espaciais auto-sustentável por colisões é de longo prazo. Contudo, corresponde maior parte do perigo de longo prazo que inviabilizará toda atividade espacial no mundo. Portanto, este mecanismo requer estudo ulterior e cuidadoso” (Debris, 1988).

As manobras espaciais com objetivo de escapar de iminentes colisões com objetos espaciais estão incluídas no contexto das manobras orbitais. Estas manobras são comumente utilizadas nas missões espaciais, envolvendo objetos operacionais (satélites, sondas, ônibus espaciais, estação espacial internacional, etc.) diante de uma provável colisão com objetos espaciais não operacionais (detritos espaciais). O estudo de manobras de evasão realizado tem uma abordagem muito singular no trabalho de Jesus et al. (2012).

Em Jesus et al. (2012), foi explorada a possibilidade de se fazer uma manobra rápida em um satélite operacional para evitar a colisão com um detrito espacial. Para cálculo do tempo de desvio, o trabalho leva em conta as equações de movimento relativo de Clohessy-Wiltshire e parâmetros tecnológicos, tais como velocidade de exaustão dos gases, fator de potência do motor foguete e do fator de massa do satélite. O trabalho mostra que há uma infinidade de possibilidades de colisão, mas que as características físicas e tecnológicas do fenômeno terminam limitando o conjunto de condições iniciais de colisão, que é infinito. Então, o trabalho mostra que é possível encontrar parâmetros tecnológicos que permitam a implementação de manobras evasivas de colisões com detritos de diversos tamanhos, chegando até a ordem de centímetros. Mostrou também que é possível controlar o gasto de combustível da missão espacial através desses parâmetros, viabilizando a missão. O trabalho de Clohessy e Wiltshire (1960) determinou as equações da dinâmica relativa entre dois objetos espaciais sujeitos ao campo gravitacional da Terra com a restrição da proximidade destes objetos e que um deles esteja em órbita circular (Clohessy, 1960), mais detalhes serão dados sobre este trabalho na seção do modelo matemático.

Nos trabalhos de Clohessy e Wiltshire e Jesus et al. (2012) não foram incluídas nenhuma força de perturbação. A inclusão das perturbações na dinâmica relativa de Clohessy e Wiltshire se iniciou com o trabalho de Leonard et al. (Leonard, 1986; Leonard et al., 1989) com a inclusão do arrasto atmosférico com o objetivo de avaliar o controle de formação de voo de dois satélites operacionais. Os trabalhos de Carter e Humi (Carter and Humi, 2002) aperfeiçoaram o modelo de Leonard e reescreveram uma forma fechada para as equações de Clohessy-Wiltshire devido as perturbações do arrasto atmosférico com diferentes modelos de densidade atmosférica. Baseado em algumas suposições a análise da dinâmica relativa com o arrasto atmosférico, é feita com a integração de simples equações diferenciais. Schweighart e Sedwick (2002) (Schweighart and Sedwick,

2002) também desenvolveram um conjunto de equações diferenciais para o movimento relativo, mas, agora, com a inclusão do achatamento da Terra incluído o efeito J2. A grande maioria destes trabalhos incluem os efeitos perturbativos para estudar a formação de voo de satélite ou para manobras de *rendezvous*. A preocupação com a realização das manobras evasivas só aumentou no início do século 21, com a ameaça da colisão com detritos espaciais cada vez mais presente. Desta forma, existe pouco material na literatura aberta publicado com respeito a este tema.

Capítulo 3

Conceitos Prévios

3.1 Manobras Orbitais

As missões espaciais realizadas por veículos operacionais requerem a implementação de manobras orbitais nas diversas regiões do espaço. Estas manobras são indispensáveis para se alcançar os objetivos da missão. Uma manobra orbital é a transferência de um veículo espacial de uma órbita para outra por meio de mudanças da sua velocidade orbital. Mais especificamente, dizemos que elas são realizadas pela atuação do sistema de propulsão que alterará o estado inicial de veículo espacial, definido pela sua posição, velocidade e massa $(\vec{r}_o, \vec{v}_o, m_o)$ num instante inicial, t_o , para outro estado, definido pelas suas respectivas variáveis de estado $(\vec{r}_f, \vec{v}_f, m_f)$ num instante final, $t_f > t_o$. Definidas desta forma, as manobras orbitais assumem a nomenclatura de transferências orbitais, as quais são realizadas para se atender a determinados objetivos. A dinâmica associada às manobras espaciais é definida pelas leis de Newton e de Kepler, geralmente, dando ênfase ao problema de dois corpos ideal ou perturbado, ao problema de três corpos com suas variações e ao problema de N-corpos. É uma dinâmica não linear que não oferece solução analítica para o problema perturbado, nem para o problema de N-corpos, mas que possui inúmeros caminhos da Física-Matemática que permitem abordagens semi-analíticas ou mesmo algébricas para o problema. Esta dinâmica que trata apenas do problema orbital é chamada de Dinâmica Orbital, que rege o movimento orbital dos objetos espaciais (artificiais, como veículos espaciais, por exemplo, e naturais, como planetas, detritos espaciais, etc.).

As aplicações destas manobras são diversas dentro das atividades espaciais, lidando com problemas desde as longas viagens interplanetárias (missões Voyager I e II, Pioneer, Galileo, etc., sondas dos programas norte americano, russo e japonês, etc.) até as pequenas correções de órbita de um satélite artificial da Terra. O posicionamento de satélites artificiais em órbitas geoestacionárias, o deslocamento de uma estação espacial, as missões de *rendezvous*, as missões de interceptação, etc. são também exemplos de aplicações das manobras orbitais.

No contexto brasileiro, podemos exemplificar o posicionamento, a operação e a manutenção em órbita dos satélites de Sensoriamento Remoto (SSR1, SSR2, entre outros), dos satélites Sino-Brasileiros de Recursos Terrestres (CBERS 1 a 4). Através dos serviços dos satélites, a sociedade mundial tem acesso a informações que permitem, por exemplo, a previsão do tempo, o sensoriamento remoto de grandes regiões, as telecomunicações (celular, internet, TV, etc.), o estudo de sistemas astronômicos, entre outros.

A Dinâmica Orbital é uma sub-área de conhecimento da Mecânica Celeste, pois trata da parte específica orbital dos objetos espaciais em torno da Terra e também da exploração espacial. É importante ser dito que desde a corrida espacial, iniciada com o lançamento do Sputnik em 1957, a Mecânica Celeste se fortaleceu com a criação de um grande cabedal teórico para aplicações nas manobras espaciais.

3.2 Detritos Espaciais

Veículos espaciais possuem tempo de vida operacional limitado. Na maioria dos casos, depois de cumprir o tempo previsto de sua vida útil, realizando a missão em órbita, o veículo espacial torna-se num artefato sem função útil. Em alguns casos, com a atuação de forças dissipativas o veículo perde altitude e com combustível interno faz manobras de correção. Com o uso completo do combustível, não há mais como corrigir a órbita e o veículo espacial perde a utilidade, tornando-se um detrito espacial. Além disso, ainda em órbita, a vida útil dos seus equipamentos internos também vai se esgotando ao longo do tempo da missão espacial. Depois de um tempo em órbita decrescente pela ação das forças dissipativas, em alguns casos, ocorre a sua reentrada na atmosfera que na maioria dos casos consome o corpo do veículo e, neste caso, não é um risco para a população da Terra. Isto porque se o corpo do detrito é consumido, não resta densidade suficiente do material para ameaçar a vida na Terra. As fontes principais de detritos espaciais são: 1) detritos produzidos pelo homem (*human debris*) e; 2) detritos produzidos pela natureza (*natural debris*); As fontes secundárias são as que geram detritos a partir de colisões entre eles, que produz fragmentos de detritos menores do que os originais, as explosões não induzidas de veículos espaciais e as colisões de detritos com veículos espaciais. Os detritos produzidos pelo homem são aqueles resultantes das atividades espaciais que geram partes e fragmentos de espaçonaves deixados para trás nos lançamentos, ferramentas e luvas perdidas em atividades extra-veiculares, estágios de foguetes, explosões induzidas de veículos, vazamentos de combustível, escape de tinta de fuselagem, atividade de satélites militares com armas anti-satélites, etc. Os detritos naturais são aqueles resultantes de processos naturais que aconteceram em épocas remotas e/ou acontecem atualmente no universo. Exemplos deste tipo de detritos são: poeira cósmica e gás deixado por passagem de cometas próximo da Terra (estes formam meteoroides), meteoros, partículas diversas do espaço sideral que são capturadas pelo campo gravitacional terrestre. Neste sentido,

consideramos todos os corpos e partículas capturados pelo campo gravitacional terrestre, como sendo detrito espacial.

Segundo a Agência Espacial Europeia (ESA), desde o lançamento do Sputnik, mais de 4.600 lançamentos deixaram em órbita cerca de 6.000 satélites, dos quais, atualmente, cerca de 800 estão em operação. Os demais são lixo espacial, distribuído em diversas camadas, entre elas, aquelas de operação das missões espaciais. Neste caso, as manobras e órbitas realizadas em missões espaciais podem interceptar as manobras destes detritos, o que possibilitaria a colisão entre os objetos espaciais. Os detritos movimentam-se com velocidades relativas grandes, o que lhes confere energia suficiente para gerar acidentes de grandes proporções com veículos espaciais e poderão ocasionar perdas de vidas da tripulação e cifras de milhares de dólares.

Analisar o risco que os detritos espaciais representam aos veículos espaciais em operação é ainda um desafio para a ciência, visto que o rastreamento e detecção de detritos de dimensões menores que 10 cm é difícil, ou quase impossível, pelos melhores radares e telescópios óticos. As Agências Espaciais internacionais mantêm centros de observações dos detritos maiores que 10 cm com observações exaustivas e diárias. Um exemplo importante é a operação do telescópio de detritos espaciais da agência espacial europeia (ESA Space Debris Telescope), que fornece dados dos detritos através de catálogos de observação que são utilizados para a validação de modelos de evolução da população dos detritos e para a avaliação de risco de colisão com veículos operacionais. Segundo estas observações, atualmente, existem cerca de 18.000 objetos maiores que 10 cm, 200.000 objetos entre 1 cm e 10 cm e mais de 330 milhões de objetos menores que 1 cm.

A grande preocupação das Agências Espaciais internacionais está na frequência das colisões detrito-detrito que geram detritos secundários menores. Ao aumentar a atividade espacial, aumenta-se a quantidade de detritos secundários em uma reação em cadeia e quando a taxa de deposição destes detritos for maior do que a taxa de entrada na atmosfera, uma espécie de cinturão artificial se forma ao redor da Terra, inviabilizando o espaço de valor operacional para as missões espaciais. A vida dos detritos espaciais em órbita depende das suas taxas de remoção e deposição. O principal meio de remoção dos detritos é o arrasto atmosférico da Terra, que os leva a reentrada na atmosfera e são, na maioria das vezes, destruídos pelo atrito. Porém, o arrasto atmosférico é limitado às órbitas do tipo LEO (Órbitas Baixas da Terra). Em órbitas médias (MEO) e grandes altitudes (GEO) os detritos levam centenas ou milhares de anos para reentrar na atmosfera da Terra. A taxa de criação devida aos lançamentos orbitais é altíssima e supera a taxa de remoção o que leva ao crescimento da população de detritos espaciais.

No gráfico da Figura (3.1), exibimos a distribuição de detritos espaciais por ano, desde o lançamento do Sputnik, em 1957. Verifica-se uma taxa crescente de detritos derivados de qualquer fonte das operações humanas catalogadas.

Devido à difração dos lasers dos telescópios, não é possível a detecção de detritos

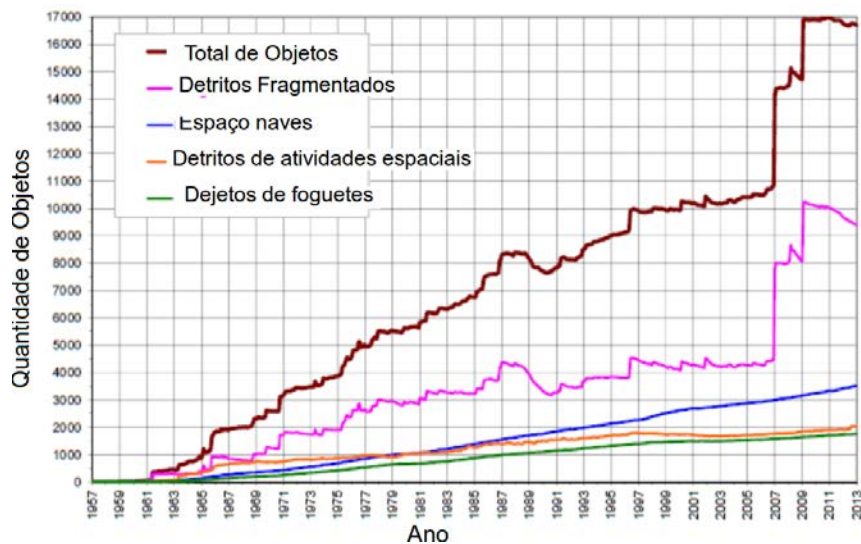


Figura 3.1: Número de objetos catalogados por ano pela NASA. Fonte: NASA/ The Orbital Debris Quarterly News, 2013. Os objetos catalogados em 2013 estão no total de 17000 objetos oriundos de fragmentação de outros detritos espaciais (curva rosa), oriundos de dejetos de espaço-naves (curva azul), de missões extra-veiculares de astronautas (curva laranja), e por último de restos de foguetes espaciais (curva verde).

menores do que 10 cm. Para se ter uma estatística da sua quantidade, usa-se placas detectoras acopladas aos veículos espaciais, com as quais ocorre colisão destes objetos menores. Depois, calcula-se o número de colisão por unidade de área, etc. É desta forma que se faz uma estimativa da ordem de centenas de milhões de detritos minúsculos existentes nas regiões em LEO. Outro aspecto importante que não pode ser desconsiderado é o risco de queda de detritos maiores em regiões habitadas da Terra. A Figura (3.2), mostram dois detritos espaciais que caíram no Brasil. Felizmente, não ocorreu um acidente com humanos, mas poderia acontecer, visto que as quedas destes objetos são muitos frequentes no globo terrestre.

Entendemos que se não houver um controle mais eficaz das atividades espaciais, atrelado a políticas de remoção ou de não deposição de detritos espaciais, em poucas décadas os detritos espaciais constituir-se-ão em mais uma fonte de risco para a vida humana na Terra. Atualmente, os detritos espaciais já interferem nas telecomunicações e em atividades outras de satélites espaciais.

3.3 Manobras evasivas

Manobras evasivas são especificamente implementadas através do sistema de propulsão do veículo espacial, frente a uma colisão iminente com um detrito espacial. Acidentes podem



Figura 3.2: **Detritos espaciais que caíram no Brasil:** à esquerda um detrito espacial de 3 kg, a queda do objeto aconteceu no estado de São Paulo, à direita um tanque de nitrogênio que caiu em Mato Grosso do Sul. Estes objetos quase não foram danificados na sua reentrada e poderiam ser um risco enorme para áreas populosas. Fonte: <http://g1.globo.com/>, 2014.

ser evitados com a implementação destas manobras e tudo isto depende da eficiência da manobra e da tecnologia associada à missão. Uma missão espacial nunca pode abrir mão de uma política de manobras evasivas, sob a pena de perder o veículo espacial, além de vidas humanas e não cumprir os objetivos da missão. Uma manobra evasiva pode ser realizada através da atuação do sistema de propulsão, que demandará consumo de combustível a bordo. As manobras evasivas implementadas através de um sistema propulsor podem ser de duas categorias. A primeira é aquela na qual os propulsores aplicam uma força num intervalo de tempo considerado muito pequeno em relação ao período da órbita e de grande magnitude. Esta manobra é dita ser impulsiva. A segunda é aquela na qual os propulsores aplicam uma força considerada não instantânea e de magnitude considerada não elevada, que opera ao longo do arco de queima. Esta manobra é dita ser contínua.

O Dr. Heiner Klinkrad especialista em detritos espaciais do Centro Europeu de Operações Espaciais (ESOC), Darmstadt, Alemanha diz: “É agora prática comum que os satélites que orbitam próximo da Terra transportem uma reserva de combustível apenas para efetuar as manobras de evasão durante a vida útil” (Klinkrad, 2005).

É neste contexto que o estudo do problema da realização das manobras evasivas é fundamental para as missões espaciais em ambientes de alto risco de colisão com detritos espaciais.

A tabela (3.1), mostra uma série de manobras evasivas que foram implementadas entre 2011 e 2012 para a Estação Espacial Internacional (ISS) frente a ameaças reais de colisão

com detritos decorrentes de outros objetos espaciais, que no passado, eram componentes de veículos espaciais em operação.

Tabela 3.1: Riscos recentes de colisões de detrito espaciais com a Estação Espacial Internacional (ISS). Fonte: Adaptado de NASA/ The Orbital Debris Quarterly News, 2013.

Data da Manobra ou do encontro próximo	Objeto Evitado
2 de Abril de 2011	Fragmento de detrito da Cosmos 2251
13 de Janeiro de 2012	Fragmento de detrito gerado na missão Iridium 33
28 de Janeiro de 2012	Detrito gerado a partir de Fengyun-1C
24 de Março de 2012	Fragmento de detrito da Cosmos 2251

3.4 Perturbações

A dinâmica de um corpo que está sujeito a força gravitacional da Terra é descrita pela solução do problema de dois corpos. A solução deste problema é a mais simples da dinâmica do sistema solar, e ela revela que as leis de Kepler são consistentes e que o movimento orbital do corpo pode ser qualquer uma das cônicas conhecidas: círculo, elipse, hipérbole e parábola. O que determina a forma, a orientação e o tamanho da órbita é a velocidade e a posição do corpo que estão relacionadas com seis constantes de integração conhecidas como elementos keplerianos da órbita. Estes elementos são: o semieixo maior, excentricidade, a inclinação, a longitude do nódo ascendente, o argumento do pericentro e o tempo de passagem no pericentro. Porém, para a descrição real do movimento orbital destes objetos é preciso incluir outras forças além da gravidade da Terra. Para um objeto ao redor da Terra, por exemplo, podemos listar alguns dos efeitos atuantes sobre ele (Roy, 1994): i) Achatamento da Terra, ii) A atração gravitacional do Sol, Lua e planetas e iii) A atmosfera da Terra.

Os objetos espaciais próximos à Terra têm como o maior controlador orbital o campo gravitacional da Terra. Porém, a Terra é achatada em seus polos e isso modifica a sua distribuição de massa causando também uma mudança no seu campo gravitacional. Consequentemente, os termos adicionais ao potencial gravitacional terrestre devido a forma irão causar mudanças na órbita dos objetos que orbitam a Terra.

Quando, o objeto é afastado da Terra torna-se mais próximos ao campo gravitacional da Lua, do Sol e outros planetas. E a influência gravitacional destes corpos devem ser acrescentas no estudo da dinâmica destes objetos. Sendo assim, o problema deixa de ser de dois corpos para um problema de N corpos que é só resolvido numericamente. Alguns estudos corroboram que objetos com altitudes menores que 1600 km, os efeitos do Sol e

da Lua são muito pequenos, porém, para altitudes maiores, as órbitas dos objetos sofrem modificações consideráveis (Roy, 1994).

Existe uma força chamada de arrasto atmosférico que é devida às colisões contínuas do objeto com as moléculas de ar, átomos e os íons que compõem a atmosfera. A intensidade da força de arrasto atmosférico depende da atitude e altitude do satélite. Para objetos que estão abaixo de 150 km esta força é muito intensa e ela age retirando o objeto da órbita e o conduzindo a superfície da Terra.

A inclusão de qualquer uma destas forças para o estudo da dinâmica do objeto em órbita da Terra oferece mais precisão e acurácia. Entretanto, a inclusão destas forças e a sua complexidade matemática, quebra a analiticidade que existe no problema de dois corpos e as órbitas não são as cônicas perfeitas. Embora, em determinadas condições estas forças são pequenas comparadas com a força gravitacional e a órbita do objeto é apenas perturbada por elas. Desta forma, pequenas mudanças nos elementos keplerianos da órbita destes objetos podem ser calculadas como consequência da atuação da perturbação.

Capítulo 4

Modelo Matemático

4.1 Equações de Clohessy-Wiltshire

As equações de Clohessy-Wiltshire (1960) modelam o movimento relativo entre dois objetos próximos que estão sob a ação gravitacional de um corpo principal e uma força de perturbação. Estas equações foram obtidas para a aplicação de uma manobra de *rendezvous* que consiste em dois veículos espaciais em que, hipoteticamente, se deseja o encontro ou interceptação com velocidade relativa nula. A manobra de *rendezvous* envolve a interceptação entre um veículo controle e o alvo com velocidade relativa estacionária. Neste trabalho, vamos assumir que o veículo interceptador é substituído por um detrito espacial e que o objetivo agora é realizar o inverso de uma manobra de *rendezvous*. Desta forma, o veículo de controle terá a mesma função, mas agora deverá ser capaz de agir com uma delicada propulsão para evitar a colisão com o detrito espacial, colisão que se caracteriza como um encontro com velocidade relativa dos objetos diferente de zero.

Na Figura (4.1), temos o sistema de referência geocêntrico com coordenadas (X, Y, Z) e um sistema de referência posto no satélite com coordenadas (x, y, z) . A posição do satélite é dado pelo vetor $\vec{R}$. O sistema de referência que tem origem no satélite é orientado de tal forma que o eixo x tem a mesma direção do vetor $\vec{R}$. O eixo y é orientado na direção tangencial ao movimento do satélite de tal forma que o plano orbital do satélite contém os eixos x e y . O eixo z é normal ao plano do satélite e paralelo ao seu momento angular. O vetor posição do detrito espacial é medido pelo vetor $\vec{r}$, chamado de vetor posição relativo. As equações de Clohessy-Wiltshire descrevem a variação das componentes da posição relativa e estas são (Clohessy, 1960):

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - 3\omega^2x = f_x^{De} - f_x^{Sat} \quad (4.1)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = f_y^{De} - f_y^{Sat} \quad (4.2)$$

$$\ddot{z} + \omega^2z = f_z^{De} - f_z^{Sat} \quad (4.3)$$

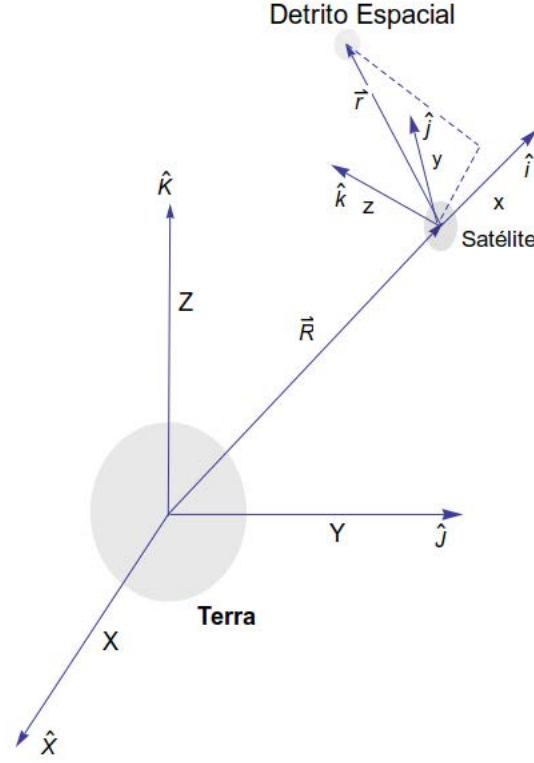


Figura 4.1: **Sistema de referência co-orbital posicionado no satélite, pelo qual o detrito espacial é observado.** O sistema de referência geocêntrico tem coordenadas (X, Y, Z) , o sistema de referência posto no satélite tem coordenadas (x, y, z) com suas direções radial, tangencial e normal à órbita do satélite. O vetor $\vec{R}$ é a posição do satélite medido no sistema geocêntrico, o vetor $\vec{r}$ é a posição do detrito em relação ao sistema de referência posto no satélite e este vetor representa a dinâmica relativa destes objetos.

Estas equações são ditas semi-analíticas, porque foram obtidas através de uma expansão em Taylor dos termos gravitacionais, na condição $r/R \ll 1$, o que indica matematicamente quanto o veículo e detrito devem estar próximos. Além disso, a velocidade angular do veículo espacial é definida como $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$, e neste caso é uma constante do movimento circular do veículo espacial. Os vetores acelerações $\vec{f}^{De}$ e $\vec{f}^{Sat}$ são geradas por uma força externa de perturbação que atuam no detrito e veículo espacial respectivamente.

4.2 Sistema de propulsão

Para realizar a manobra de evasão, o satélite precisa ser munido de um sistema capaz de modificar seu estado de movimento. O princípio fundamental de um sistema de propulsão nas missões espaciais é o de ejeção de gases pelos propulsores, e pela 2ª lei de Newton existe uma força que impulsiona o veículo espacial, tornando possível o seu movimento. Estes

propulsores podem ser usados tanto no sentido de reduzir ou aumentar a velocidade do veículo para ajustá-lo a alguma órbita desejada. Este sistema também é usado na correção de manobras, quando se aplica pequenos empuxos para se colocar o veículo de volta à sua órbita nominal. A força de propulsão por unidade de massa, atuante no veículo é dada pela equação vetorial a seguir (Jesus et al., 2012),

$$\vec{f}_p = -\frac{1}{M(t)}\vec{v}_e \frac{dM(t)}{dt} = -\vec{v}_e \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (4.4)$$

$M(t)$ é a massa total do veículo, que inclui a massa do combustível e $\vec{v}_e$ é a velocidade de exaustão dos gases. Para esta equação vetorial devemos escolher um modelo de variação de massa para o sistema de exaustão de combustível. Este modelo descreverá como a massa total decrescerá no tempo. A equação da massa total deve, portanto, ser escrita como:

$$M(t) = M + m(t) \quad (4.5)$$

Nesta equação, M é a massa do veículo sem combustível e $m(t)$ é a função que determina a queima do combustível em função do tempo. Neste trabalho, escolhemos o modelo exponencial, tal que a massa de combustível decresce exponencialmente no tempo com uma frequência constante (γ). Além disso, assumimos que a massa M é proporcional à massa inicial do combustível (m_o) por uma constante de proporcionalidade χ , tal que:

$$M = \chi m_o \quad (4.6)$$

A manobra evasiva é controlada a partir de parâmetros que dependem da tecnologia utilizada para a construção do sistema propulsor. Estes parâmetros tecnológicos são: 1) γ é o fator de potência do propulsor, medido em unidades de frequência. 2) χ é o fator de massa, que é a razão entre a massa do corpo do satélite pela massa inicial de combustível a bordo. 3) $\vec{v}_e$ é velocidade de exaustão de propelente. Portanto, a equação para a massa variando exponencialmente com o tempo é:

$$M(t) = m_o(\chi + e^{-\gamma t}) \quad (4.7)$$

Com a inclusão do sistema de propulsão as equações de Chohessy-Wiltshire são agora:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - 3\omega^2 x = -v_{ex} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (4.8)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = -v_{ey} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (4.9)$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = -v_{ez} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (4.10)$$

No modelo de Jesus et al. (2012), é apresentada uma solução analítica para as equações acima, assim:

$$x(t) = 2A \sin(\omega t) - 2B \cos(\omega t) + Et + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-n\gamma t} + G \quad (4.11)$$

$$y(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) - \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\gamma t} + D \quad (4.12)$$

$$z(t) = H \cos(\omega t) + I \sin(\omega t) - \sum_{n=1}^{\infty} J_n e^{-n\gamma t} \quad (4.13)$$

Todos os coeficientes destas equações dependem das condições iniciais e dos parâmetros tecnológicos, tal que podem ser escritos como uma função $L = L(\vec{r}_o, \vec{v}_o, \vec{v}_e, \gamma, \chi, \omega)$, e estes são:

$$A = \frac{2\dot{x}_o}{\omega} - 3y_o + \frac{2v_{ex}}{\omega} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left(\frac{2v_{ex}}{\omega} + \frac{n\gamma v_{ey}}{\omega^2}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (4.14)$$

$$B = \frac{\dot{y}_o}{\omega} + \frac{v_{ey}}{\omega} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left(\frac{2n\gamma v_{ex}}{\omega^2} + \frac{v_{ey}}{\omega}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (4.15)$$

$$E = 6\omega y_o - 3\dot{x}_o - 3v_{ex} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) \quad (4.16)$$

$$F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left(\frac{4v_{ex}}{n\gamma} + \frac{2v_{ey}}{\omega}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} - \frac{v_{ex}}{n\gamma} \quad (4.17)$$

$$G = 2\dot{y}_o\omega + x_o + \frac{2v_{ey}}{\omega} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\chi^n} \frac{3v_{ex}}{\omega} \quad (4.18)$$

$$C_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left(v_{ex} + \frac{n\gamma v_{ey}}{\omega^2}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (4.19)$$

$$D = 4y_o - \frac{2x_o}{\omega} - \frac{2v_{ex}}{\omega} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) \quad (4.20)$$

$$H = z_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} v_{ez} \gamma}{\chi^n \omega^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (4.21)$$

$$I = \frac{\dot{z}_o}{\omega} - \frac{v_{ez}}{\omega} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\chi^2\omega} v_{ez} \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (4.22)$$

$$J_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n\omega} v_{ez} \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (4.23)$$

Então com o controle destes coeficientes, com parâmetros tecnológicos apropriados, é possível distanciar os objetos diante de uma colisão com o detrito espacial. Há uma consequência do uso desta solução. Quando o propulsor é acionado, o satélite escapa da sua órbita nominal circular e cometemos um erro ao utilizar as equações de Chohessy-Wiltshire. Para melhorar esta aproximação, o sistema de propulsão pode ser tratado como

uma perturbação artificial, desde que a sua magnitude seja controlada por parâmetros tecnológicos definidos e que ela seja pequena comparada com a força gravitacional atuante no satélite. Além disso, é desejável que durante qualquer manobra orbital a missão do veículo espacial não seja prejudicada. Como por exemplo, determinados satélites de sensoriamento remoto que necessitam constante monitoramento da superfície terrestre em uma órbita nominal planejada pela missão e qualquer desvio pode deixá-los sem utilidade por horas ou até inviabilizá-los totalmente. Da mesma forma, com o passar do tempo, o efeito do arrasto atmosférico ou de outras perturbações gravitacionais irão retirar o satélite da sua órbita inicial, e, portanto, irá comprometer a missão. Entretanto, os satélites de hoje utilizam um sistema de propulsão para corrigir este decaimento com o objetivo de prolongar a vida útil e otimizar a missão espacial. Diante da frequente ameaça de colisão com detritos espaciais o satélite deve realizar várias manobras evasivas. Portanto, um critério importante é que as manobras de evasão sejam realizadas preservando a órbita nominal da missão. Com este objetivo vamos escolher parâmetros tecnológicos que sejam capazes de produzir uma força muito menor que a gravitacional de tal forma que possamos tratá-la como uma perturbação no movimento do satélite. A estratégia para realizar a manobra de evasão é aplicar a força de propulsão definida em (4.4) tangencialmente à órbita do satélite, de tal modo que a velocidade angular do satélite seja reduzida ou aumentada, com o objetivo de permitir a passagem do detrito espacial. Ao mesmo tempo, uma aceleração de propulsão radial é aplicada para estabilizar o satélite em sua órbita circular. No próximo capítulo, é apresentado uma representação gráfica e a execução desta estratégia.

4.3 Perturbação do Arrasto Atmosférico

Nesta seção, é apresentada a força de perturbação que atua sobre o satélite e o detrito espacial: o arrasto atmosférico. O arrasto atmosférico é uma perturbação natural mais forte nas regiões orbitais onde a atmosfera da Terra tem densidade suficiente para afetar as trajetórias destes objetos, como por exemplo, na região das órbitas LEO.

Um corpo que se move com velocidade relativa, $\vec{v}_{rel}$, a um ambiente com atmosfera está sujeito a uma aceleração, que pode ser escrita na forma, (David and McClain, 2007):

$$\vec{f}_{Drag} = -\frac{1}{2} \frac{C_D A}{m} \rho |\vec{v}_{rel}| \vec{v}_{rel} \quad (4.24)$$

ρ é a densidade da atmosfera, A é a área do objeto que está perpendicular a direção do seu movimento, e C_D é um parâmetro adimensional conhecido como coeficiente de arrasto atmosférico. Em geral, a densidade da atmosfera de um planeta pode mudar por um fator de 10 quando a distância do centro do planeta muda de 1 por cento (King-Hele, 1964) e portanto objetos que estão mais propícios a esta perturbação estão na região LEO, entre altitudes de 160 km a 2000 km. Os efeitos do arrasto são bem conhecidos em satélites

dentro destas altitudes e como principal consequência, a excentricidade diminui e eles retornam a atmosfera do planeta. O objetivo deste trabalho é estudar o efeito desta força de arrasto atmosférico na dinâmica relativa do satélite e do detrito espacial, estabilizando a possível queda do veículo espacial causada pelo arrasto atmosférico por meio de um sistema de propulsor.

Para a descrição da força de arrasto atmosférico fazemos algumas suposições:

- (a) Vamos assumir que a densidade atmosférica depende somente da distância R até o centro da Terra, conforme (Delhaise, 1991):

$$\rho = \rho_o \left(\frac{R - s}{R_o - s} \right)^\tau \quad (4.25)$$

Em que ρ_o é a densidade atmosférica inicial calculada no ponto do perigeu que tem distância R_o do centro da Terra, τ e s são parâmetros ajustáveis. Os parâmetros s e τ podem ser adaptados para estimar as observações das atividades solares e atualizar as constantes mudanças na dinâmica da atmosfera. Neste trabalho utilizamos $s = 0$, o que indica que não temos correções nas atividades solares e o valor de τ igual a -3 que representa o modelo de densidade exponencial frequentemente usado.

- (b) A atmosfera é simetricamente esférica e rotaciona com velocidade angular constante ω_E .
- (c) Não há mudanças na atmosfera durante a passagem dos dias e das noites, devido a influência solar.

A aceleração de arrasto atmosférico que atua no satélite:

$$\vec{f}_{DragSat} = -\frac{1}{2} \frac{C_{DSat} A_{Sat}}{m_{Sat}} \rho |\vec{v}_{relSat}| \vec{v}_{relSat} \quad (4.26)$$

Conforme (David and McClain, 2007), a velocidade do satélite relativa a atmosfera em rotação é calculada por:

$$\vec{v}_{relSat} = \vec{V} - \vec{\omega}_E \times \vec{R} \quad (4.27)$$

$\vec{V}$ e $\vec{R}$ são a velocidade e a posição do satélite em relação ao sistema de referência geocêntrico. Por simplicidade vamos considerar o satélite em uma órbita circular contida no plano do equador da Terra, ou seja, o satélite possui inclinação nula e sua órbita está contida no plano XY, conforme a Figura (4.2).

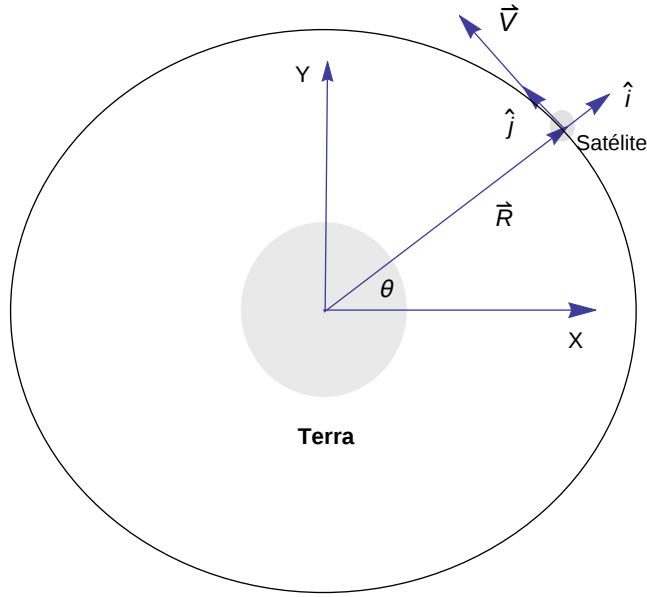


Figura 4.2: **Órbita do satélite no plano equatorial da Terra.** O plano XY é o plano orbital do satélite, o satélite está em órbita circular.

$$\vec{R} = R\hat{i} \quad (4.28)$$

$$\vec{V} = R\dot{\theta}\hat{\theta} = R\omega\hat{j} \quad (4.29)$$

O vetor $\vec{\omega}_E$ que representa a velocidade de rotação da Terra, de modulo igual a 7.2921150×10^{-5} rad/s, é escrito no sistema equatorial geocêntrico, (Reid, 2009) por:

$$\vec{\omega}_E = \omega_E \hat{k} \quad (4.30)$$

Utilizando as equações acima podemos escrever a velocidade relativa do satélite à atmosfera:

$$\vec{v}_{relSat} = R(\omega - \omega_E)\hat{j} \quad (4.31)$$

Como consequência, a aceleração de perturbação atmosférica atua tangencialmente ao satélite e pode ser escrita como:

$$\vec{f}_{DragSat} = -\frac{1}{2} \frac{C_{DSat} A_{Sat}}{m_{Sat}} \rho [R(\omega - \omega_E)]^2 \hat{j} \quad (4.32)$$

Para a inclusão do arrasto atmosférico no detrito espacial, adaptamos do trabalho de (Reid, 2009). A posição do detrito espacial é medida com respeito ao sistema posto no

satélite, e por isso devemos escrever a equação (4.24) neste sistema de referência. Se a Terra tem uma velocidade de rotação ω_E e ela transporta esta rotação da atmosfera, temos que calcular a velocidade relativa do detrito em relação a rotação da atmosfera :

$$\vec{V}_{DeRel} = \vec{V}_{De} - \vec{\omega}_E \times \vec{R}_{De} \quad (4.33)$$

$\vec{V}_{De}$ e $\vec{R}_{De}$ são a velocidade e a posição do detrito com respeito ao sistema geocêntrico. Como queremos obter a aceleração de arrasto atmosférico no sistema de referência do satélite , então temos que escrever a equação (4.33) neste sistema. A posição do detrito espacial em relação ao sistema geocêntrico pode ser escrita como:

$$\vec{R}_{De} = \vec{R} + \vec{r} \quad (4.34)$$

A velocidade do detrito com respeito ao sistema girante do satélite é expressa por:

$$\vec{V}_{De} = \vec{V}_{Sat} + \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (4.35)$$

$$\vec{V}_{De} = \begin{bmatrix} \dot{R} \\ R\omega \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y\omega \\ x\omega \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Com a ação de uma aceleração de controle radial no satélite, conforme definida em (4.89), podemos garantir que $\dot{R} = 0$ e a velocidade do detrito com respeito ao sistema fixo do satélite é escrita por:

$$\vec{V}_{De} = \begin{bmatrix} \dot{x} - y\omega \\ R\omega + \dot{y} + \omega x \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Agora, devemos escrever a velocidade angular de rotação da atmosfera definida pela equação (4.30) também com respeito ao sistema fixo do satélite. Devemos então realizar as rotações de Euler em uma sequência conhecida como 3->1->3, e então transformaremos do sistema geocêntrico equatorial da Terra para o sistema perifocal e finalmente para o sistema fixo do satélite. Para escrever a velocidade angular de rotação da atmosfera da Terra, no sistema fixo do satélite ($\vec{\omega}_{ESat}$), aplicamos o produto das matrizes de Euler:

$$\vec{\omega}_{ESat} = R_3(\theta)R_1(i)R_3(\Omega)\vec{\omega}_E \quad (4.38)$$

Em que θ , i , Ω é a posição angular, inclinação e nodo ascendente do sistema de referência do satélite, neste caso, do próprio veículo espacial. As matrizes $R_1(\delta)$, $R_3(\xi)$ são as matrizes de Euler:

$$R_1(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta) & \sin(\delta) \\ 0 & -\sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$R_3(\xi) = \begin{bmatrix} \cos(\xi) & \sin(\xi) & 0 \\ -\sin(\xi) & \cos(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Aplicando o produto (4.38), a velocidade angular da Terra escrita no sistema fixo do satélite é:

$$\vec{\omega}_E = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \sin(i) \\ \cos(\theta) \sin(i) \\ \cos(i) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Agora, voltando a equação (4.33) e aplicando as equações (4.37) e (4.41) podemos escrever a velocidade relativa do detrito espacial a atmosfera da Terra:

$$\vec{V}_{DeRel} = \begin{bmatrix} \dot{x} - y(\omega - w_E \cos(i)) - zw_E \cos(\theta) \sin(i) \\ \dot{y} + (R + x)(\omega - w_E \cos(i)) + zw_E \sin(\theta) \sin(i) \\ \dot{z} + (R + x)(w_E \cos(\theta) \sin(i)) - yw_E \sin(\theta) \sin(i) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Portanto a aceleração de arrasto atmosférico que atua no detrito espacial pode ser escrita:

$$\vec{f}_{DragDe} = -\frac{1}{2} \frac{C_D A_{De}}{m_{De}} \rho \vec{V}_{DeRel} |\vec{V}_{DeRel}| \quad (4.43)$$

Seguindo o trabalho de (Reid, 2009), a expressão da aceleração do arrasto atmosférico no detrito espacial na aproximação $R \gg r$ é:

$$\vec{f}_{DragDe} = -\frac{1}{2} \frac{C_D A_{De}}{m_{De}} \rho v_{oy} \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{oy} + 2v_{1y} \\ v_{oz} + v_{1z} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Em que:

$$v_{oy} = R(\omega - \omega_E \cos(i)) \quad (4.45)$$

$$v_{oz} = R(\omega_E \cos(\theta) \sin(i)) \quad (4.46)$$

$$v_{1x} = \dot{x} - y(\omega - \omega_E \cos(i)) - z\omega_E \cos(\theta) \sin(i) \quad (4.47)$$

$$v_{1y} = \dot{y} + x(\omega - \omega_E \cos(i)) + z\omega_E \sin(\theta) \sin(i) \quad (4.48)$$

$$v_{1z} = \dot{z} + x(\omega_E \cos(\theta) \sin(i)) - y\omega_E \sin(\theta) \sin(i) \quad (4.49)$$

4.4 Equação do movimento do satélite perturbado

Antes de tratar os objetos com sua dinâmica relativista, vamos estudar o movimento do satélite. Na Figura (4.3), o satélite está sob a ação da aceleração da gravidade da Terra ($\vec{f}_{gravSat}$), de uma aceleração de propulsão ($\vec{f}_p$), e da aceleração de perturbação do arrasto atmosférico ($\vec{f}_{DragSat}$).

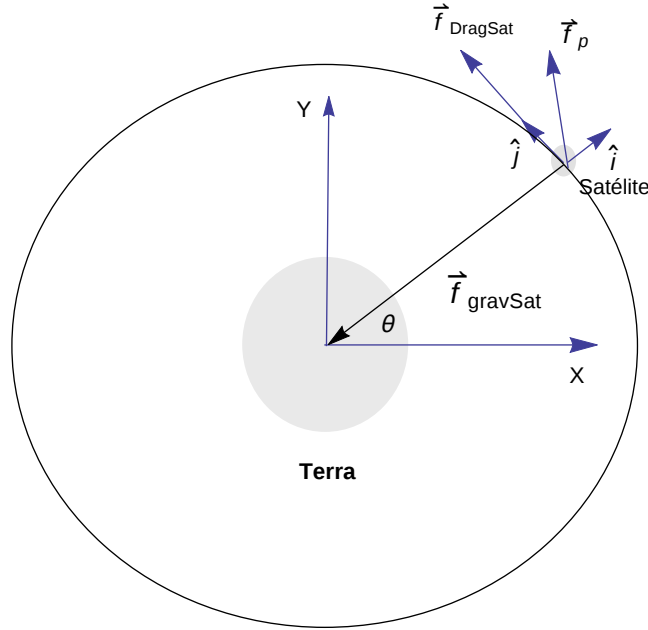


Figura 4.3: **Acelerações atuantes no satélite em órbita circular ao redor da Terra.** O satélite está sob a ação da aceleração da gravidade da Terra, da propulsão e da perturbação do arrasto atmosférico.

Aplicando a segunda lei de Newton, temos a aceleração absoluta do satélite dada por:

$$\ddot{\vec{R}} = -\mu \frac{\vec{R}}{R^3} + \vec{f}_p + \vec{f}_{DragSat} \quad (4.50)$$

Podemos escrever as acelerações de forma vetorial, no sistema do satélite:

$$\ddot{\vec{R}} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\hat{i} + \left(\frac{1}{R}\frac{d}{dt}(R\dot{\theta})\right)\hat{j} \quad (4.51)$$

$$\vec{f}_{gravSat} = -\frac{\mu}{R^2}\hat{i} \quad (4.52)$$

$$\vec{f}_p = f^\star\hat{i} - v_{e\theta}\frac{d}{dt}\ln(M(t))\hat{j} \quad (4.53)$$

$$\vec{f}_{DragSat} = -\frac{1}{2}\frac{C_{DSat}A_{Sat}}{m_{Sat}}\rho[R(\omega - \omega_E)]^2\hat{j} \quad (4.54)$$

Em que, $\mu = GM_E$ é o produto da constante gravitacional pela massa da Terra. Podemos decompor a aceleração do satélite em duas componentes:

$$\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{(R)^2} = f^\star \quad (4.55)$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dt}(R\dot{\theta}) = -v_{e\theta}\frac{d}{dt}\ln(M(t)) - \frac{1}{2}\frac{C_{DSat}A_{Sat}}{m_{Sat}}\rho[R(\omega - w_E)]^2 \quad (4.56)$$

Por definição, $\theta = \int \omega dt$, $\ddot{\theta}$ é a aceleração angular do satélite e $f^\star$ é a aceleração de propulsão radial para estabilizar o satélite em órbita circular. A aceleração $f^\star$ é um controle que deve ser igual a:

$$f^\star = -R\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{(R)^2} \quad (4.57)$$

Desta forma, a aceleração radial do satélite $\ddot{R}$ é sempre nula, e R é constante. Com este controle, podemos escrever a equação (4.56) na forma:

$$R\ddot{\theta} = -v_{e\theta}\frac{d}{dt}\ln(M(t)) - \frac{1}{2}\frac{C_{DSat}A_{Sat}}{m_{Sat}}\rho[R(\omega - w_E)]^2 \quad (4.58)$$

As equações (4.57) e (4.58) descrevem, respectivamente, o movimento radial e tangencial do satélite.

Para obter uma solução para o movimento tangencial do satélite, vamos utilizar o método de variação de parâmetros. Primeiramente, devemos calcular o movimento tangencial do satélite sem nenhuma perturbação:

$$\ddot{\theta} = 0 \quad (4.59)$$

E a solução é:

$$\theta = \omega_o t + \eta \quad (4.60)$$

Em que ω_o é a velocidade angular do satélite sem perturbação. O parâmetro η é uma constante arbitrária que deve variar lentamente devido a perturbação da propulsão tangencial do satélite. Derivando a equação (4.60), obtemos a velocidade angular do satélite:

$$\omega = \dot{\theta} = \omega_o + \dot{\eta} \quad (4.61)$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\eta} \quad (4.62)$$

A equação diferencial que representa o movimento tangencial perturbado do satélite é, agora:

$$\ddot{\eta} = -\frac{v_{e\theta}}{R} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) - \frac{1}{2} \frac{C_{DSat} A_{Sat}}{m_{Sat}} \rho R (\omega_o + \dot{\eta} - w_E)^2 \quad (4.63)$$

Ao estabilizar o satélite a uma distância fixa ao centro da Terra, utilizando a aceleração de controle, a densidade atmosférica em que está contido o satélite não deve variar ao longo da órbita do satélite. E, assim, podemos definir os termos $\psi = \frac{1}{2} \frac{C_{DSat} A_{Sat}}{m_{Sat}} \rho R$ e $\omega_l = \omega_o - \omega_E$ como constantes. Reescrevendo a equação (4.63):

$$\ddot{\eta} = -\frac{v_{e\theta}}{R} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) - \psi (\omega_l + \dot{\eta})^2 \quad (4.64)$$

$$\ddot{\eta} = -\frac{v_{e\theta}}{R} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) - \psi (\omega_l^2 + 2\omega_l \dot{\eta} + \dot{\eta}^2) \quad (4.65)$$

Por se tratar de uma perturbação, η varia muito lentamente no tempo e pode-se desprezar termos da ordem de $\dot{\eta}^2$, supondo que estes termos sejam pequenos. Então:

$$\ddot{\eta} = -\frac{v_{e\theta}}{R} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) - \psi (\omega_l^2 + 2\omega_l \dot{\eta}) \quad (4.66)$$

A solução da equação diferencial (4.66) resulta em um acréscimo na velocidade angular do satélite, ou seja, uma mudança na dinâmica do satélite devido as perturbações do sistema de propulsão e do arrasto atmosférico. Infelizmente, não encontramos uma solução analítica para esta equação diferencial quando as duas perturbações são inseridas. Porém, é importante para este trabalho resolver esta equação diferencial aplicando uma perturbação de cada vez, neste caso, tem solução analítica.

Primeiro iremos resolver a equação diferencial somente com a perturbação do sistema de propulsão e denotar o índice p para as variáveis que representam apenas a perturbação do sistema propulsor, ou seja, a equação diferencial é agora:

$$\ddot{\eta}_p = -\frac{v_{e\theta}}{R} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (4.67)$$

Integrando, temos:

$$\dot{\eta}_p = -\frac{v_{e\theta}}{R} \ln(M(t)) + C_1 \quad (4.68)$$

Com o modelo de massa exponencial apresentado na equação (4.7), escrevemos:

$$\dot{\eta}_p = -\frac{v_{e\theta}}{R} \ln(m_o(\chi + e^{-\gamma t})) + C_1 \quad (4.69)$$

Integrando novamente, obtemos:

$$\eta_p = -\frac{v_{e\theta}}{R} \int \ln(m_o(\chi + e^{-\gamma t})) dt + C_1 t + C_2 \quad (4.70)$$

A integral da equação acima pode ser escrita como:

$$\int \ln(m_o(\chi + e^{-\gamma t})) dt = \int \ln(m_o \chi) dt + \int \ln\left(1 + \frac{e^{-\gamma t}}{\chi}\right) dt \quad (4.71)$$

Realizando a expansão em série de Taylor:

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (4.72)$$

O limite de convergência é $|x| < 1$. Seja $x = \frac{e^{-\gamma t}}{\chi}$ podemos reescrever a integral:

$$\int \ln(m_o(\chi + e^{-\gamma t})) dt = \int \ln(m_o \chi) dt + \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{e^{-\gamma t}}{\chi}\right)^{n+1} dt \quad (4.73)$$

A solução desta integração nesta aproximação é:

$$\int \ln(m_o(\chi + e^{-\gamma t})) dt = \ln(m_o \chi) t - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 \gamma} \left(\frac{e^{-\gamma t}}{\chi}\right)^{n+1} \quad (4.74)$$

Assim,

$$\eta_p = -\frac{v_{e\theta}}{R} \left(\ln(m_o\chi)t - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2\gamma} \left(\frac{e^{-\gamma t}}{\chi} \right)^{n+1} \right) + C_1 t + C_2 \quad (4.75)$$

Retornando a equação (4.60), a perturbação do sistema de propulsão causa uma variação na posição angular do satélite descrita por:

$$\theta_p = \omega_o t - \frac{v_{e\theta}}{R} \left(\ln(m_o\chi)t - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2\gamma} \left(\frac{e^{-\gamma t}}{\chi} \right)^{n+1} \right) + C_1 t + C_2 \quad (4.76)$$

Consequentemente existe uma variação na velocidade angular do satélite que pode ser escrita como:

$$\omega_p = \dot{\theta} = \omega_o - \frac{v_{e\theta}}{R} \ln(m_o(\chi + e^{-\gamma t})) + C_1 \quad (4.77)$$

C_1 e C_2 são constantes de integração que podem ser determinadas pela condição que em $t = 0$, $w_p = w_o$ e $\theta_p = 0$ e não há perturbação.

Desta forma,

$$C_1 = \frac{v_{e\theta}}{R} \ln(m_o(\chi + 1)) \quad (4.78)$$

$$C_2 = -\frac{v_{e\theta}}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2\gamma} \left(\frac{1}{\chi} \right)^{n+1} \quad (4.79)$$

Determinado as constantes, temos a dinâmica angular do satélite com a perturbação do sistema de propulsão:

$$\theta_p = \left(\omega_o + \frac{v_{e\theta}}{R} \ln \left(\frac{\chi + 1}{\chi} \right) \right) t + \frac{v_{e\theta}}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2\gamma\chi^{n+1}} (e^{-\gamma(n+1)t} - 1) \quad (4.80)$$

$$\omega_p = \dot{\theta} = \omega_o + \dot{\eta} = \omega_o - \frac{v_{e\theta}}{R} \ln \left(\frac{\chi + e^{-\gamma t}}{\chi + 1} \right) \quad (4.81)$$

Assim, temos uma velocidade angular adicional ao satélite devido a perturbação de propulsão e utilizando os parâmetros tecnológicos, temos o controle desta grandeza para atingir os objetivos de escapar do detrito espacial.

Vamos agora retornar a equação (4.66) e tratá-la apenas com a perturbação atmosférica e fazendo a notação com o índice a para representar as variáveis que representa a dinâmica

com o arrasto atmosférico. Agora, desligando o sistema de propulsão a equação diferencial é:

$$\ddot{\eta}_a = -\psi(\omega_l^2 + 2\omega_l\dot{\eta}_a) \quad (4.82)$$

$$\ddot{\eta}_a + 2\psi\omega_l\dot{\eta}_a = -\psi\omega_l^2 \quad (4.83)$$

Esta equação diferencial possui solução analítica como mostrada abaixo:

$$\eta_a = C_3 e^{-2\psi\omega_l t} - \frac{\omega_l}{2}t + C_4 \quad (4.84)$$

$$\dot{\eta}_a = -2\psi\omega_l C_3 e^{-2\psi\omega_l t} - \frac{\omega_l}{2} \quad (4.85)$$

Determinadas as constantes C_3 e C_4 pela condição inicial que em $t=0$ o satélite não está sofrendo nenhuma perturbação de arrasto atmosférico. A dinâmica da posição e velocidade angular do satélite acrescidas pela perturbação do arrasto atmosférico são:

$$\theta_a = (\omega_o - \frac{\omega_l}{2})t - \frac{(e^{-2\psi\omega_l t} - 1)}{4\psi} \quad (4.86)$$

$$\omega_a = \dot{\theta} = \omega_o + \frac{\omega_l}{2}(e^{-2\psi\omega_l t} - 1) \quad (4.87)$$

Observamos na equação (4.87) que se ψ e w_l são grandezas sempre positivas, o arrasto atmosférico causa uma diminuição exponencial na velocidade angular do satélite, e, depois de um longo tempo, essa diminuição é constante e a velocidade angular do satélite atinge um valor médio de $(\omega_o + w_E)/2$.

Desta forma, podemos estudar os efeitos das perturbações separadamente através das mudanças na velocidade angular do satélite. A equação (4.81) representa a velocidade angular do satélite quando o sistema de propulsão é tratado como uma perturbação e vamos chama-la de w_p , já a equação (4.87) é a velocidade angular do satélite quando existe apenas a perturbação da atmosfera e a chamaremos de w_a .

Para manter o satélite em órbita circular é necessário que a altitude e a sua velocidade orbital sejam tais que haja um equilíbrio entre as forças centrífuga e a força de gravidade. Analisando o movimento na equação (4.57), o primeiro termo é a aceleração centrífuga e o segundo termo é a aceleração da gravidade. A aceleração radial de propulsão deve ser capaz de estabelecer o equilíbrio entre as acelerações da gravidade e centrífuga na

presença das perturbações. Sendo assim, para cada perturbação existe uma quantidade diferente desta força de propulsão radial. Para a perturbação do sistema de propulsor e do arrasto as forças radiais de propulsão para estabilizar o satélite são respectivamente:

$$f_{\star_p} = -R\omega_p^2 + \frac{\mu}{(R)^2} \quad (4.88)$$

$$f_{\star_a} = -R\omega_a^2 + \frac{\mu}{(R)^2} \quad (4.89)$$

4.5 Escrita das equações de Clohessy-Wiltshire com as perturbações

Como vimos com as perturbações a velocidade angular do satélite tem termos adicionais que dependem do tempo. Nesta seção mostramos como escrever as equações do movimento relativo e as consequências das perturbações. As equações do movimento relativo entre o satélite e o detrito no campo gravitacional da Terra são obtidas diretamente da 2a Lei de Newton, tratando-os como corpos isolados sofrendo ações das forças gravitacionais e das forças externas. A aceleração do satélite é portanto,

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{\mu}{R^3}\vec{R} + \vec{f}^{Sat} \quad (4.90)$$

Analogamente para o detrito espacial, temos:

$$\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{|\vec{R} + \vec{r}|^3}(\vec{R} + \vec{r}) + \vec{f}^{De} \quad (4.91)$$

Subtraindo as equações do movimento, (4.91) - (4.90) :

$$\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{R}} = -\frac{\mu}{|\vec{R} + \vec{r}|^3}(\vec{R} + \vec{r}) + \frac{\mu}{R^3}\vec{R} + \vec{f}^{De} - \vec{f}^{Sat} \quad (4.92)$$

A aceleração relativa entre eles é:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{|\vec{R} + \vec{r}|^3}(\vec{R} + \vec{r}) + \frac{\mu}{R^3}\vec{R} + \vec{f}^{De} - \vec{f}^{Sat} \quad (4.93)$$

A função $r(t)$, solução da equação acima, descreve a história da dinâmica relativa entre os objetos orbitantes da Terra. Nesta dinâmica encontramos a possibilidade de *rendez-vous* e/ou de colisão, além de um movimento relativo geral. A colisão entre o detrito e o veículo operacional será possível toda vez que esta grandeza for nula e sua primeira

derivada diferente de zero. Infelizmente, para estas equações, não encontramos solução analítica, tornando o problema mais difícil de ser resolvido com precisão. Contudo, é possível encontrar uma solução semi-analítica ou algébrica, mesmo para aplicações realistas no âmbito da ciência e tecnologia espaciais. Por exemplo, se considerarmos que a distância relativa entre os objetos espaciais seja muito menor do que a distância do veículo a Terra, poderemos expandir em série de Taylor o termo gravitacional $|\vec{R} + \vec{r}|^{-3}$ e este fato possibilitará uma solução fechada, contudo limitada a $\frac{|\vec{r}|}{|\vec{R}|} \ll 1$. Esta condição engloba diversos objetivos das missões espaciais e é completamente aplicável a elas. Desta forma, temos:

$$|\vec{R} + \vec{r}|^{-3} = R^{-3} \left(1 - 3 \frac{\vec{R} \bullet \vec{r}}{R^2} \right) + O(r^2) \quad (4.94)$$

Substituindo esta última equação na equação da aceleração relativa (4.93), temos:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{R^3} \left(1 - 3 \frac{\vec{R} \bullet \vec{r}}{R^2} \right) (\vec{R} + \vec{r}) + \frac{\mu}{R^3} \vec{R} + \vec{f}^{De} - \vec{f}^{Sat} \quad (4.95)$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{R^3} \left((\vec{R} + \vec{r}) - 3(\vec{R} + \vec{r}) \frac{\vec{R} \bullet \vec{r}}{R^2} \right) + \frac{\mu}{R^3} \vec{R} + \vec{f}^{De} - \vec{f}^{Sat} \quad (4.96)$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{R^3} \left((\vec{R} - \vec{R} + \vec{r}) - 3(\vec{R} + \vec{r}) \frac{\vec{R} \bullet \vec{r}}{R^2} \right) + \vec{f}^{De} - \vec{f}^{Sat} \quad (4.97)$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{R^3} \left(\vec{r} - 3 \frac{\vec{R} \bullet \vec{r}}{R^2} \vec{R} - 3 \frac{\vec{R} \bullet \vec{r}}{R^2} \vec{r} \right) + \vec{f}^{De} - \vec{f}^{Sat} \quad (4.98)$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{R^3} \left(\vec{r} - 3 \frac{\vec{R} \bullet \vec{r}}{R^2} \vec{R} \right) + \vec{f}^{De} - \vec{f}^{Sat} \quad (4.99)$$

Como foi dito, o sistema de referência no veículo espacial possui rotação não nula. Além disso, a velocidade angular do satélite tem uma dependência temporal devido às perturbações aplicadas ao satélite. Para escrever a posição relativa entre os objetos no sistema de referência animado de rotação devemos adicionar as acelerações fictícias definidas como:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \ddot{\vec{r}}_{rot} \quad (4.100)$$

ou,

$$\ddot{\vec{r}}_{rot} = \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{R}} - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \quad (4.101)$$

Aplicando estas equações ao satélite, com o satélite controlado em órbita circular, $\ddot{\vec{R}} = 0$, então:

$$\ddot{\vec{r}}_{rot} = \ddot{\vec{r}} - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \quad (4.102)$$

Aplicando a equação (4.99) na (4.102), temos:

$$\ddot{\vec{r}}_{rot} = -\frac{\mu}{R^3}(\vec{r} - 3\frac{\vec{R} \bullet \vec{r}}{R^2}\vec{R}) + \vec{f}^{De} - \vec{f}^{Sat} - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \quad (4.103)$$

Sendo:

$$\vec{R} = R\hat{i} \quad (4.104)$$

$$\vec{f}^{De} = f_x^{De}\hat{i} + f_y^{De}\hat{j} + f_z^{De}\hat{k} \quad (4.105)$$

$$\vec{f}^{Sat} = f_x^{Sat}\hat{i} + f_y^{Sat}\hat{j} + f_z^{Sat}\hat{k} \quad (4.106)$$

$$\ddot{\vec{r}}_{rot} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \quad (4.107)$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{k} \quad (4.108)$$

$$\omega_o^2 = \frac{\mu}{R^3} \quad (4.109)$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (4.110)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \quad (4.111)$$

Usando as equações acima, podemos calcular os produtos vetoriais e escalares dos termos da equação (4.103):

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \bullet \vec{r}) - \omega^2\vec{r} = \omega^2 z\hat{k} - \omega^2(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \quad (4.112)$$

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = -\omega\dot{y}\hat{i} + \omega\dot{x}\hat{j} \quad (4.113)$$

$$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = -\dot{\omega}y\hat{i} + \dot{\omega}x\hat{j} \quad (4.114)$$

$$\frac{\mu}{R^3}(\vec{r} - 3\frac{\vec{R} \bullet \vec{r}}{R^2}\vec{R}) = \omega_o^2(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} - 3x\hat{i}) \quad (4.115)$$

Introduzindo os resultados acima na equação (4.103) obtemos as novas acelerações, e portanto, a nova forma das equações de Chohessy-Wiltshire levando em conta as perturbações são:

$$\ddot{x} - x(\omega^2 + 2\omega_o^2) - 2\omega\dot{y} - \dot{\omega}y = f_x^{De} - f_x^{Sat} \quad (4.116)$$

$$\ddot{y} + y(\omega_o^2 - \omega^2) + 2\omega\dot{x} + \dot{\omega}x = f_y^{De} - f_y^{Sat} \quad (4.117)$$

$$\ddot{z} + \omega_o^2 z = f_z^{De} - f_z^{Sat} \quad (4.118)$$

Estas equações são análogas as equações de Schaub e Junkins (2003) que não restringem a excentricidade da órbita do satélite de referência (Schaub and Junkins, 2003). Entretanto, as equações acima são um caso especial, quando impomos a condição da distância do satélite a Terra uma constante. Se a velocidade angular do satélite é desprovida dos termos da perturbação do arrasto atmosférico e do sistema de propulsão, é fácil mostrar que retornarmos as equações de Chohessy-Wilthsire mostradas em (4.1). A principal modificação está na velocidade angular do satélite depender do tempo devido as perturbações do satélite. A depender da perturbação escolhida, a velocidade angular do satélite é descrita pela equação (4.81) ou (4.87). As equações diferenciais para o movimento no plano x e y são um sistema de equações diferenciais de segunda ordem não homogêneas com coeficientes que variam no tempo e não foi achada uma solução analítica. O movimento no eixo z é uma equação diferencial de segunda ordem em que na ausência de forças externas é uma equação de um oscilador harmonico, isto porque ambas perturbações que o satélite sofre são tangenciais ou radiais ao seu movimento e, portanto, o movimento sob o eixo z é governado apenas pela ação da força gravitacional da Terra. Com estas perturbações não encontramos uma solução analítica e a dinâmica relativa deve ser calculada com métodos numéricos. Neste trabalho as integrações numéricas são realizadas pelo Método de Runge Kutta de 4 ordem.

Capítulo 5

Resultados

5.1 Dinâmica colisional com gravidade (Modelo de Jesus et al 2012)

Na ausência de forças externas de perturbação, as equações diferenciais (4.1)-(4.3) possuem soluções analíticas, mostradas abaixo:

$$x(t) = \left(\frac{\dot{x}_o}{\omega_o}\right) \sin(\omega_o t) - \left(\frac{2\dot{y}_o}{\omega_o} + 3x_o\right) \cos(\omega_o t) + \left(4x_o + 2\frac{\dot{y}_o}{\omega_o}\right) \quad (5.1)$$

$$y(t) = \left(\frac{4\dot{y}_o}{\omega_o} + 6x_o\right) \sin(\omega_o t) + \left(\frac{2\dot{x}_o}{\omega_o}\right) \cos(\omega_o t) - (6\omega_o x_o + 3\dot{y}_o)t + \left(y_o - \frac{2\dot{x}_o}{\omega_o}\right) \quad (5.2)$$

$$z(t) = z_o \cos(\omega_o t) + \left(\frac{\dot{z}_o}{\omega_o}\right) \sin(\omega_o t) \quad (5.3)$$

Esta solução é obtida pelo problema do valor inicial, no qual as condições iniciais, tais como a posição relativa inicial (x_o, y_o, z_o) e a velocidade relativa inicial $(\dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o)$ são fornecidas no instante t_o . Sem considerar as forças externas de perturbação e com a solução analítica das equações de Clohessy-Wiltshire é possível encontrar condições iniciais de colisão que irão formar a dinâmica colisional detrito-veículo espacial com apenas a força gravidade (Jesus et al., 2012). Esta dinâmica é obtida, quando, para um tempo fixo, chamado tempo de colisão (t_c), impusermos a ela as “condições iniciais favoráveis à colisão” (CIC), dadas abaixo:

$$x(t_c) = 0, y(t_c) = 0, z(t_c) = 0 \Rightarrow r(t_c) = 0 \quad (5.4)$$

Resolvendo este sistema de equações descrito em (5.4), obtemos as componentes da velocidade inicial relativa que permitem a colisão:

$$\dot{y}_o = \frac{[6x_o(\omega_o t_c - \sin(\omega_o t_c)) - y_o] \omega_o \sin(\omega_o t_c) - [2\omega_o x_o(4 - 3\cos(\omega_o t_c))(1 - \cos(\omega_o t_c))]}{(4\sin(\omega_o t_c) - 3\omega_o t_c) \sin(\omega_o t_c) + 4(1 - \cos(\omega_o t_c))^2} \quad (5.5)$$

$$\dot{x}_o = -\frac{\omega_o x_o(4 - 3\cos(\omega_o t_c)) + 2(1 - \cos(\omega_o t_c))\dot{y}_o}{\sin(\omega_o t_c)} \quad (5.6)$$

$$\dot{z}_o = \frac{-z_o \omega_o \cos(\omega_o t_c)}{\sin(\omega_o t_c)} \quad (5.7)$$

A natureza das equações (5.5), (5.6) e (5.7) declara que o número de soluções para o conjunto CIC é infinito. Ou seja, para qualquer tempo de colisão diferente de zero, é possível encontrar as três componentes da velocidade inicial relativa. Contudo, devido a limitações tecnológicas, o número de soluções será reduzido consideravelmente. Uma das limitações está relacionada com a capacidade de detecção da posição inicial dos detritos em relação ao veículo espacial pelos radares. Outra condição é a distribuição de velocidades colisionais específicas (velocidades típicas) dos detritos espaciais nas regiões operacionais do espaço em torno da Terra. Para estabelecermos o conjunto CIC, aplicamos a metodologia de (Jesus et al., 2012) que segue os seguintes passos:

1-Fornecemos uma esfera de possibilidades de posições iniciais relativas para o detrito espacial, que constituem as informações colhidas no radar do satélite. Para isto, consideramos coordenadas esféricas com a varredura angular no plano $0 \leq \alpha < 360$ graus, no espaço $0 \leq \beta < 180$ graus e fixamos r_o , obtemos suas componentes (x_o, y_o, z_o) :

$$x_o = r_o \cos(\beta) \sin(\alpha) \quad (5.8)$$

$$y_o = r_o \sin(\beta) \sin(\alpha) \quad (5.9)$$

$$z_o = r_o \sin(\beta) \quad (5.10)$$

2- Fixamos diversos tempos de colisão no intervalo de $1 \leq t_c \leq 10^6$ segundos (11,57 dias), com passo de 1 segundo. Estes tempos são escolhidos, tais que sejam possíveis as manobras evasivas frente a colisões iminentes nas região orbitais de LEO, MEO e GEO.

3-Para definir a região orbital, fornecemos as altitudes das regiões orbitais, e calculamos o valor da velocidade angular do satélite em cada uma destas altitudes, aplicando a terceira lei de Kepler:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{\mu}{R^3}} \quad (5.11)$$

4-Com estas condições, podemos calcular as velocidades iniciais relativas para a colisão. A partir daí, filtramos aquelas velocidades que atendam a condição das velocidades relativas dos satélites com detritos espaciais. Sabemos que estas velocidades encontram-se na faixa entre 1 e 20 km/s (Kessler and Cour-Palais, 1978).

Nas simulações numéricas deste modelo, usamos um código em linguagem C. Encontramos as condições iniciais que atendem a estratégia acima. Na seção a seguir, exibimos os resultados encontrados.

5.1.1 Mapas de condições iniciais

Os resultados das simulações numéricas da solução das equações homogêneas da dinâmica relativa permitiram catalogar as condições iniciais favoráveis a colisão entre os objetos espaciais. Este conjunto de configurações é identificado como as configurações que o sistema colisional (detrito e veículo espacial) pode assumir. Isto é, elas são os estados que o sistema pode assumir em curso de colisão com as distâncias relativas entre os objetos na faixa entre 3 km e 500 km. O número de estados, chamamos de “Possibilidades de Colisão”. Nas Figuras (5.1) à (5.3), mostramos a distribuição do número de configurações colisionais relativas ao conjunto de condições iniciais CIC, definido na estratégia. Estas figuras dão uma ideia de como estão distribuídas o grande número de configurações colisionais que o sistema pode assumir durante um intervalo entre 1 a 10^6 segundos, em um total de 6×10^{10} possibilidades de colisão para cada região orbital.

Para efeito de discussão, nós dividimos a faixa de velocidades iniciais relativas como: 1) velocidades relativas baixas- entre 0 e 1,0 km/s; 2) velocidades relativas médias-entre 1,0 e 7,5 km/s; 3) velocidades relativas altas- entre 7,5 e 20,0 km/s.

Na Figura (5.1), os objetos estão separados inicialmente por 3 km. Para qualquer região orbital, na qual o veículo espacial se encontra, uma colisão com detritos espaciais são improváveis de acontecer com velocidades relativas médias ou altas. A maior concentração de possibilidades de colisão em velocidades relativas médias está presente quando o satélite se encontra na região orbital do tipo LEO com cerca de 0,13 % do número total de possibilidades, e com menos de 0,005 % do número total de possibilidades quando as velocidades relativas são altas.

Na Figura (5.2), notamos que quando aumentamos a separação inicial dos objetos para 50 km, a incidência de possibilidades de colisão com velocidades relativas baixas diminuem para qualquer região orbital. E existe um ligeiro aumento das possibilidades de colisão com velocidades relativas médias ou altas também para as três regiões orbitais simuladas. Este aumento é mais significativo em LEO que para velocidades relativas médias e apresentam

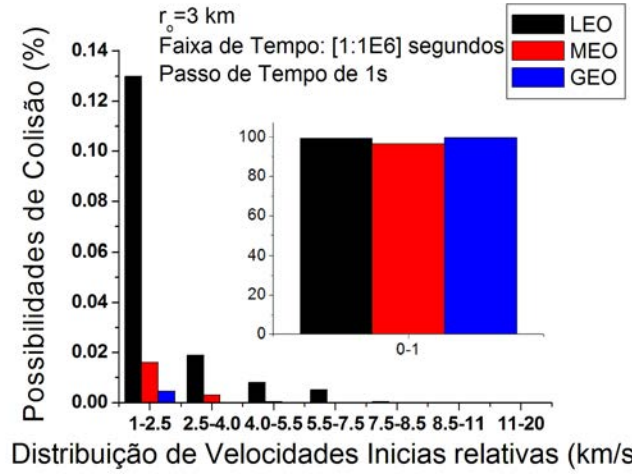


Figura 5.1: **Possibilidades de colisões por distribuição de velocidades iniciais relativas em LEO, MEO e GEO- I.** Este gráfico é muito significativo, porque mostra as possibilidades de colisões por cada faixa de velocidades iniciais, entre 0 e 20 km/s, desde que a separação inicial dos objetos (r_o) seja de 3 km. Além da faixa de velocidade inicial relativa, cada possibilidade de colisão é computada com a informação do tempo de colisão, entre 1 e 1×10^6 s, e a posição relativa dos objetos no sistema de coordenadas esféricas, ($3 \text{ km}, 0 \leq \alpha < 360^\circ, 0 \leq \beta < 180^\circ$). Com estas condições qualquer região operacional quase 100 % das possibilidades de colisão devem acontecer com velocidades relativas baixas entre 0 e 1 km/s.

agora 2,0% das possibilidades de colisão e cerca de 0,2 % para velocidades relativas altas. Em seguida, é mais provável possibilidades de colisões com velocidades relativas médias ou altas em MEO do que em GEO.

Na Figura (5.3), mostramos o aumento de possibilidades de colisão em velocidades relativas médias ou altas continua ao aumentarmos a separação inicial dos objetos, que neste caso é de 350 km. As velocidades relativas médias ou altas já passam de 2 % para as regiões orbitais de MEO e GEO, entretanto é bem mais provável ocorrer colisão com estas velocidades em orbitas do tipo LEO com cerca de 16 % das possibilidades de colisão.

Nesta seção, mostramos os resultados das simulações numéricas de um modelo de dinâmica orbital relativa para dois objetos colisionais, a partir das condições iniciais de colisão. A dinâmica dos objetos espaciais que satisfazem o conjunto CIC fornece possibilidades de colisão entre os objetos espaciais (detrito e veículo espacial) na região operacional de LEO. O conjunto CIC, derivado de uma estratégia estabelecida no modelo de Jesus, produz condições favoráveis para a ocorrência de colisões entre os objetos espaciais que se aproximam em diversas distâncias relativas. Este resultado é fundamental para o andamento do trabalho e, nas próximas seções, escolheremos algumas condições iniciais particulares das inúmeras possibilidades de colisão mostradas acima, das quais tomaremos soluções que

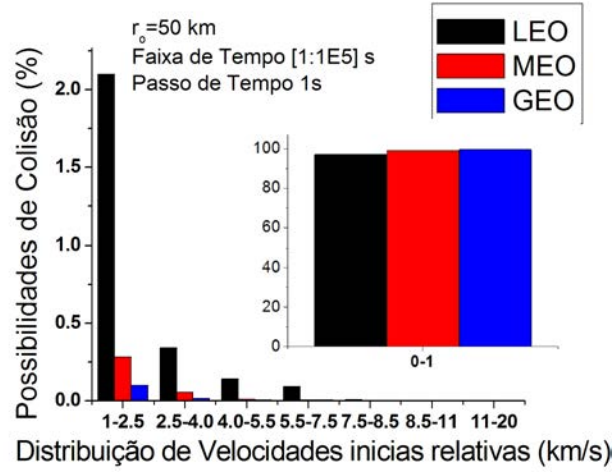


Figura 5.2: **Possibilidades de colisões por Distribuição de velocidades relativas em LEO, MEO e GEO- II.** Este gráfico também mostra as possibilidades de colisão por faixa de velocidade iniciais entre 0 e 20 km/s. Entretanto, mostramos aqui um número de possibilidades de colisão um pouco reduzido por motivo de tempo de processamento na simulação. Existem cerca de $6,6 \times 10^9$ possibilidades de colisão, e a separação inicial dos objetos (r_o) aqui é de 50 km. Cada possibilidade de colisão foi computada com a informação do tempo de colisão entre 1 e 10^5 segundos, e das posições iniciais no sistema de coordenadas esféricas (50 km, $0 \leq \alpha < 360^\circ$, $0 \leq \beta < 180^\circ$). A porcentagem de possibilidades de colisão aumentou em todas as velocidades relativas acima de 1 km/s, principalmente na região em LEO.

chamaremos de “soluções nominais”. É a partir destas soluções nominais que iremos realizar uma política de manobras evasivas com um sistema de propulsão do veículo espacial. Além disso vamos estudar como estas condições de colisão vão se modificar com a inclusão da perturbação do arrasto atmosférico.

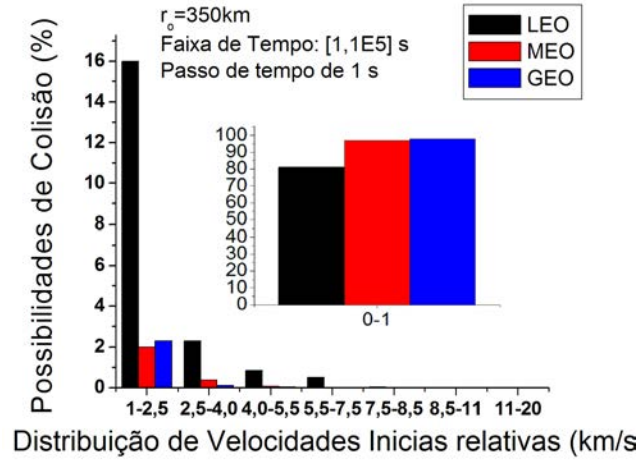


Figura 5.3: **Possibilidades de colisões por distribuição de velocidades iniciais relativas em LEO, MEO e GEO- III.** Este gráfico mostra a possibilidade de colisão por faixa de velocidade iniciais entre 0 e 20 km/s, mas agora com a separação inicial dos objetos (r_o) de 350 km. Dentro do total de $6,6 \times 10^9$ possibilidades de colisão, cerca de 16 % já estão presentes nas velocidades relativas entre 1 e 2,5 km/s na região LEO. Em geral, para as outras regiões, a tendência do aumento das possibilidades de colisão se confirma em todas as velocidades relativas acima de 1 km/s. Para obter as possibilidades de colisão computamos com a informação do tempo de colisão entre 1 e 10^5 segundos, e das posições iniciais relativas no sistema de coordenadas esféricas (350 km, $0 \leq \alpha < 360^\circ, 0 \leq \beta < 180^\circ$).

5.2 Manobras evasivas na região de LEO

Nesta seção, vamos usar a dinâmica relativa do satélite e do detrito espacial que agora é calculada numericamente com as equações (4.116), sendo a velocidade angular do satélite dada pela equação (4.61). Não há perturbações nem forças externas atuando no detrito espacial e as acelerações externas aplicadas ao satélite são:

$$\vec{f}^{Sat} = \begin{bmatrix} f_{\star_p} \\ -v_{e\theta} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

A figura (5.4) mostra o diagrama de forças atuantes no detrito e no satélite.

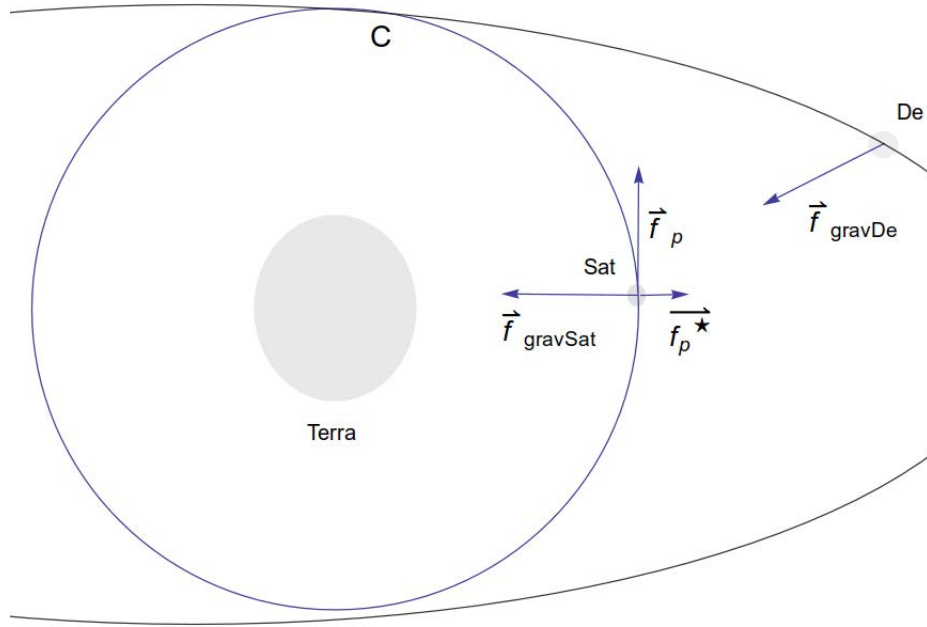


Figura 5.4: **Acelerações atuantes no detrito e no satélite.** As acelerações são as gravitacionais e a única força externa é a força de propulsão. O ponto C é a colisão prevista nos mapas de condições iniciais de colisão. Neste momento, acionamos a propulsão para atingir um decréscimo na velocidade angular do satélite de forma que o detrito espacial passe em C primeiro que o satélite evitando a colisão.

5.2.1 Descrição da Manobra

A manobra evasiva será realizada seguindo os passos:

- 1) O detrito espacial é localizado pelo radar do satélite e a sua posição e velocidade relativa é medida.
- 2) O computador de bordo, com o banco de dados dos mapas de condições iniciais de colisão da seção 5.1.1, calcula o tempo de colisão que é igual o tempo disponível para escapar.
- 3) A manobra de evasão é iniciada pela ação do sistema de propulsão.
- 4) Depois do escape, o satélite aplica uma retropropulsão para retornar ao seu estado inicial de movimento.

5.2.2 Avaliação dos parâmetros tecnológicos

Segundo Jesus et al. (2012), a escolha dos parâmetros tecnológicos deve ser feita levando em conta o limite de quantidade de combustível a bordo nos veículos espaciais. Os valores dos parâmetros tecnológicos utilizados em seu trabalho são a velocidade de exaustão de gases $v_e = 2,5 \text{ km/s}$ ($v_{e\theta} = v_e$), o fator de massa $\chi = 10$ e o fator de potência do motor $\gamma = 10^{-6} \text{ s}^{-1}$. Dados estes parâmetros tecnológicos, precisamos garantir que possamos tratar a propulsão como uma perturbação e para isso provar que a aceleração total de propulsão é menor que a aceleração da gravidade atuante no satélite. A aceleração total

de propulsão é o módulo do vetor $\vec{f}_p$, dado abaixo:

$$\vec{f}_p = f \star_p \hat{i} - v_{e\theta} \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \hat{j} = f \star_p \hat{i} + \frac{v_{e\theta} \gamma e^{-\gamma t}}{\chi + e^{-\gamma t}} \hat{j} \quad (5.13)$$

Na Figura (5.5), mostramos a razão entre as acelerações de propulsão e a de gravidade que atuam no satélite para diversos fatores de potência do motor em uma manobra de 3000 segundos (50 minutos). O satélite está em uma altitude de 220 km, e tomamos uma massa de combustível inicial m_o de 1 kg.

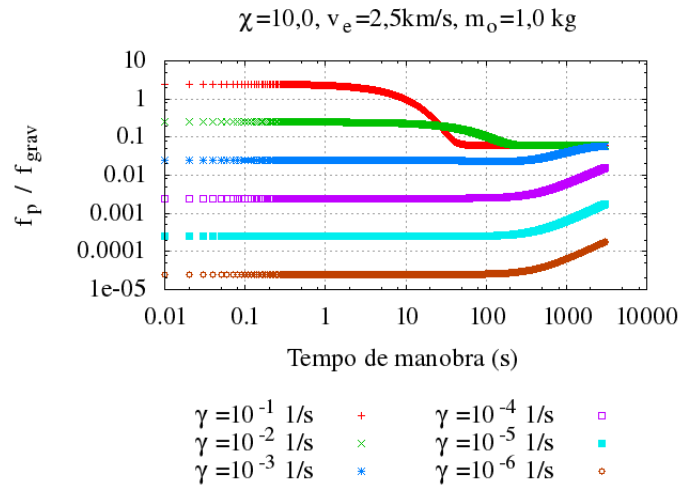


Figura 5.5: **Razão entre as acelerações de propulsão e gravitacional para o satélite em LEO.** As razões foram calculadas para uma manobra de 3000 segundos (50 minutos), com uma massa inicial de combustível fixa de $m_o = 1 \text{ kg}$, assim como o fator de massa $\chi = 10,0$ e a velocidade de ejeção de gases $v_e = 2,5 \text{ km/s}$. O estudo é realizado através do parâmetro de potência do motor γ com o objetivo de definir o seu valor para que a propulsão possa ser tratada como uma perturbação. Observarmos que para estas condições os fatores de $\gamma = 10^{-1}$ e $\gamma = 10^{-2}$ não podem ser utilizados para tratar a propulsão como uma perturbação.

As curvas com fatores de potência do motor de $\gamma = 10^{-3}$ a $\gamma = 10^{-6} \text{ 1/s}$ representam uma aceleração de propulsão de no mínimo duas ordens de grandeza menor que a aceleração de gravidade, e possivelmente podem ser escolhidos com o objetivo de tratar a propulsão como uma perturbação. Enquanto, as outras curvas chegam até serem 2,5 vezes mais poderosas que a aceleração da gravidade e não podem ser escolhidos para perturbar o movimento do satélite. A razão desta diferença está no fato de que o fator de potência do motor é ao mesmo tempo uma frequência de ejeção de massa do combustível do satélite. Quando este fator de potência é grande, como, por exemplo, para $\gamma = 10^{-1} \text{ 1/s}$, para os primeiros segundos da manobra ejeta-se uma grande quantidade de combustível,

o que representa uma força grande de propulsão. Entretanto, a ejeção de uma alta quantidade de combustível no início do movimento diminui a reserva de combustível para os segundos finais da manobra e isso faz com que a aceleração de propulsão diminua muito nestes instantes. Observe que, no final da manobra para este mesmo fator de potência a aceleração de propulsão é cerca de uma ordem de grandeza menor que a de gravidade.

Um outro aspecto importante para avaliar a escolha dos parâmetros tecnológicos, é a convergência da aproximação da integração realizada na equação (4.73). Neste caso, devemos satisfazer a condição $|\frac{e^{-\gamma t}}{\chi}| < 1$. Na Figura (5.6), mostramos que esta condição é satisfeita para todos os fatores de potência simulados.

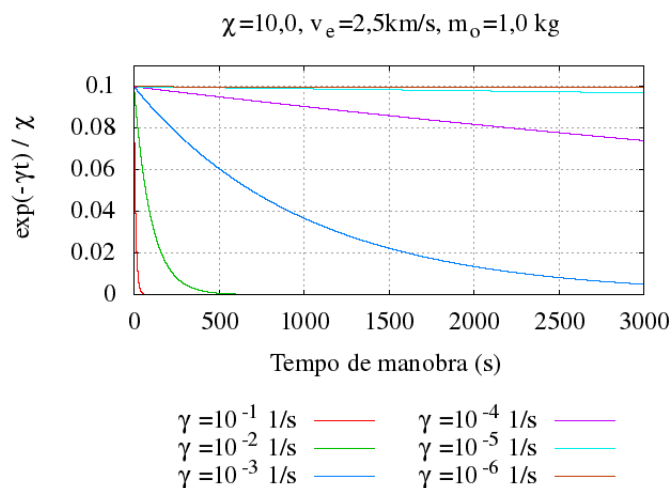


Figura 5.6: **Análise da convergência da solução do movimento tangencial do satélite.** Nesta simulações, durante os 3000 segundos (50 minutos), com uma massa inicial de combustível de $m_o = 1 \text{ kg}$, fator de massa $\chi = 10,0$ e a velocidade de ejeção de gases $v_e = 2,5 \text{ km/s}$ é calculada a razão $\frac{e^{-\gamma t}}{\chi}$. Para diferentes valores do fator de potência, a razão é menor que 1.

Na equação (4.81), mostramos que a escolha dos parâmetros tecnológicos pode diminuir ou aumentar a velocidade angular do satélite. E com esta possibilidade de variação da velocidade angular do satélite possibilita implementar a manobra de evasão com o detrito espacial. Um estudo do sinal da função $\dot{\eta}_p = -\frac{v_{e\theta}}{R} \ln\left(\frac{\chi + e^{-\gamma t}}{\chi + 1}\right)$, é possível inferir que, desde que γ e o tempo sejam grandezas positivas, desta forma, o que indica se ocorre um decréscimo ou aumento na velocidade angular do satélite é o sentido da velocidade de exaustão de gases.

Nas Figuras (5.7) e (5.8), mostramos respectivamente um acréscimo e uma diminuição na velocidade angular do satélite devido ao sinal oposto da velocidade de exaustão de gases.

Um outro aspecto é que a aceleração de propulsão radial $f_{\star p}$, aplicada para manter

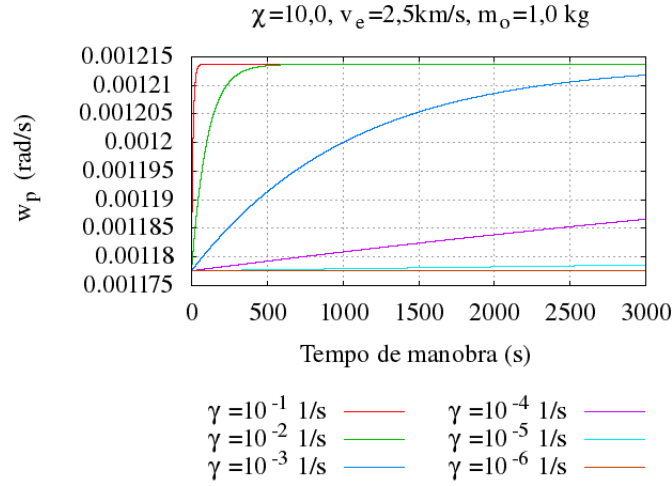


Figura 5.7: **Acréscimo na velocidade angular do satélite.** Para os parâmetros fixos, $m_o = 1 \text{ kg}$, o fator de massa $\chi = 10,0$ e a velocidade de ejeção de gases $v_e = 2,5 \text{ km/s}$ da tecnologia do propulsor. Durante uma manobra de 3000 segundos, mostramos que podemos ter um acréscimo na velocidade angular do satélite tomando a velocidade de ejeção de gases positiva.

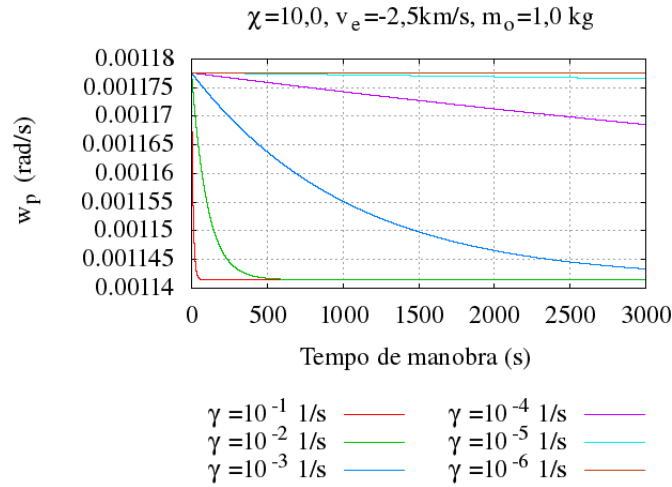


Figura 5.8: **Decréscimo na velocidade angular do satélite.** Para os parâmetros fixos, $m_o = 1 \text{ kg}$, o fator de massa $\chi = 10,0$ e a velocidade de ejeção de gases $v_e = -2,5 \text{ km/s}$ da tecnologia do propulsor. Durante uma manobra de 3000 segundos, mostramos que podemos ter um decréscimo na velocidade angular do satélite tomando a velocidade de ejeção de gases negativa.

a distância do satélite a terra fixa, não pode ser tão custosa. Na Figura (5.9), está o comportamento da aceleração de propulsão radial com o tempo de manobra para alguns

fatores de potência do motor.

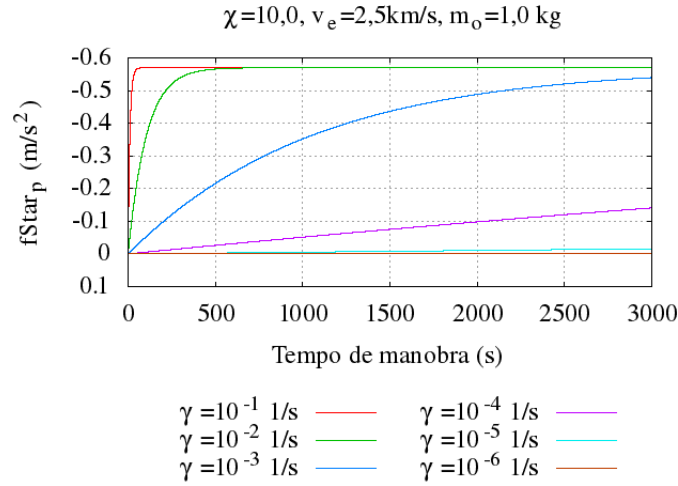


Figura 5.9: **Aceleração de propulsão radial pelo tempo de manobra.** A aceleração de propulsão radial é a aceleração de controle necessária para o satélite está em órbita circular ($f_{\star p}$). Com parâmetros fixos como $m_o = 1\text{ kg}$, o fator de massa $\chi = 10,0$ e a velocidade de ejeção de gases $v_e = 2,5\text{ km/s}$, mostramos que para o controle do satélite, em uma manobra de 3000 segundos, o gasto máximo é de uma aceleração de magnitude de aproximadamente $0,6\text{ m/s}^2$.

Para fatores de potência pequenos e intervalos curtos da manobra, não precisamos adicionar muita propulsão radial para manter o satélite em sua órbita circular. Porém, com o passar do tempo da manobra aumenta a necessidade de mais aceleração radial de propulsão. Ao contrário disso, o comportamento das curvas com os fatores de potência mais altos mostra que é necessário mais aceleração radial em tempos de manobra curtos.

5.2.3 Parâmetros de performance do Sistema de Propulsão

Nesta seção, vamos estudar a performance do sistema de propulsão proposto neste trabalho.

De acordo com a equação (4.4), a aceleração devida ao sistema de propulsão é:

$$\vec{f}_p = -\vec{v}_e \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (5.14)$$

Portanto,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v}_e \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (5.15)$$

Integrando a equação (5.15), em um instante $t_o = 0$ até um tempo $t > t_o$, temos:

$$\Delta\vec{v} = -\vec{v}_e \ln\left(\frac{M(t)}{M(0)}\right) \quad (5.16)$$

Com o modelo de variação de massa do satélite dado pela equação (4.7), podemos calcular:

$$\Delta\vec{v} = -\vec{v}_e \ln\left(\frac{\chi + e^{-\gamma t}}{\chi + 1}\right) \quad (5.17)$$

A equação acima mostra a dependência entre a massa necessária de propelente para atingir uma velocidade final do satélite. Utilizando esta equação, e para os parâmetros tecnológicos $v_e = 2,5$ km/s e $\chi = 10$, calculamos a componente tangencial do satélite do vetor $\Delta\vec{v}$, para alguns valores particulares do fator de potência, como mostrado na Figura (5.10).

O impulso específico é a razão entre o módulo do empuxo e o peso de combustível, ou seja:

$$I = \frac{|E|}{\dot{M}(t)g} \quad (5.18)$$

Em que g é a aceleração da gravidade na superfície da Terra e E é o empuxo dado por:

$$E = v_e \frac{dM(t)}{dt} \quad (5.19)$$

Para o sistema de propulsão deste trabalho, o empuxo é:

$$E = -\gamma v_e m_o e^{-\gamma t} \quad (5.20)$$

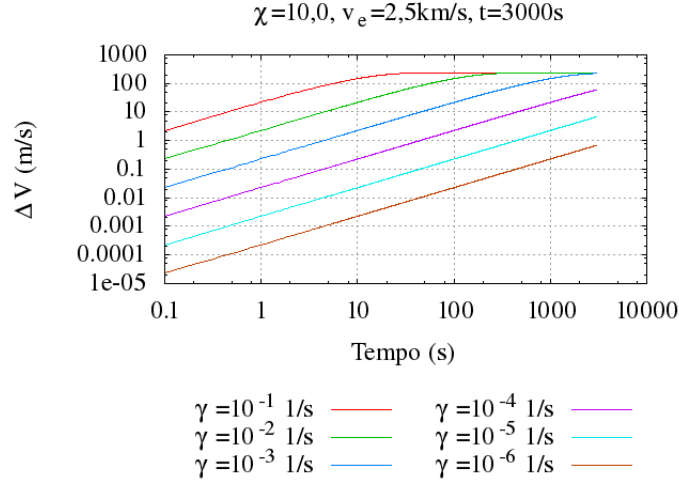
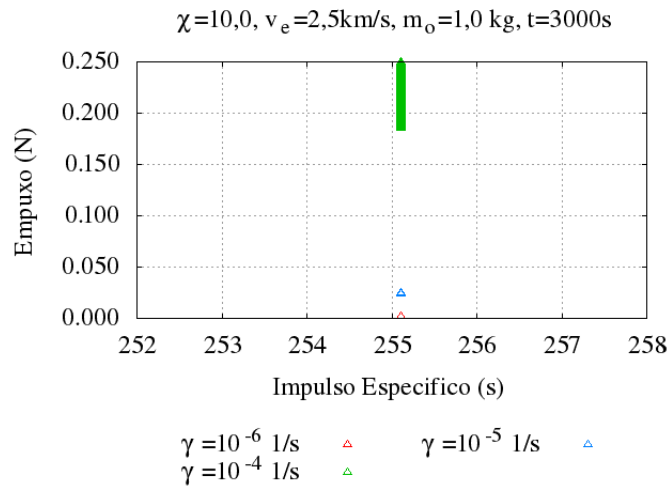


Figura 5.10: **Variação da velocidade Δv (m/s) devido ao sistema de propulsor.** O sistema de propulsão, com um $\gamma = 10^{-1}$ 1/s, é capaz de oferecer uma variação de velocidade de até 100 m/s. Mas, para um $\gamma = 10^{-6}$ 1/s, a variação na velocidade do satélite é de até 1 m/s.

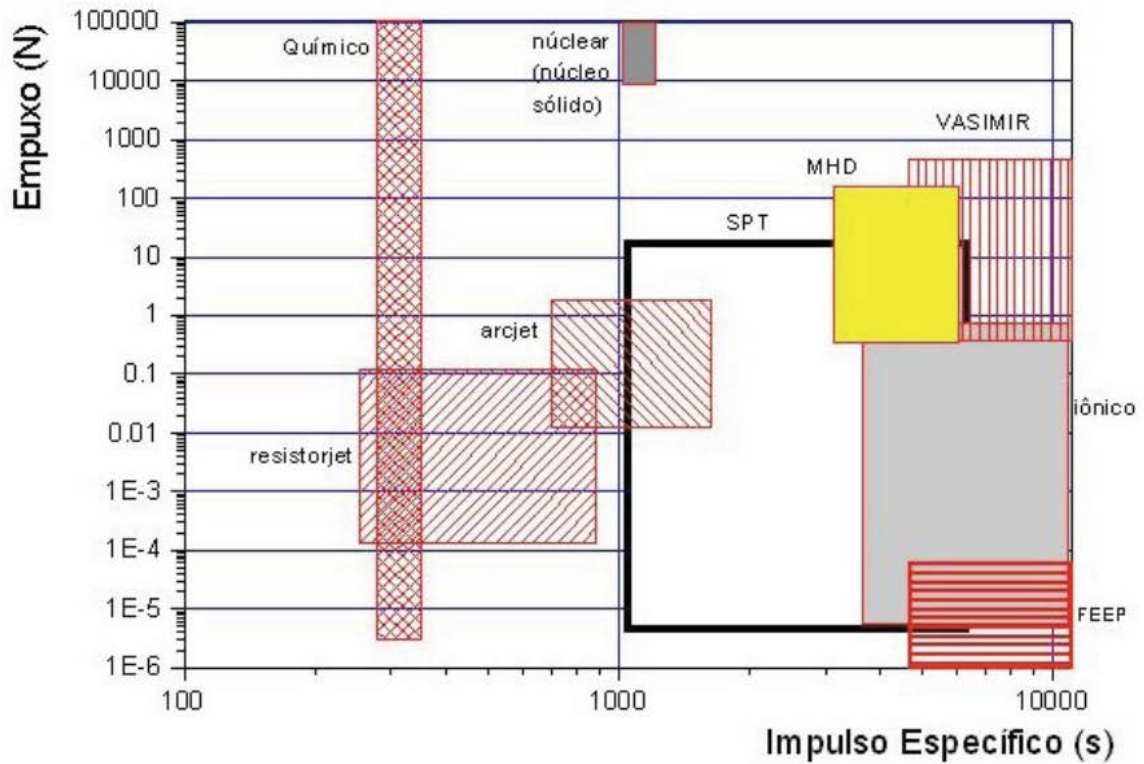
O impulso específico é, portanto:

$$I = \frac{|E|}{\dot{M}(t)g} \quad (5.21)$$

O impulso específico é o tempo para acelerar o satélite, com o uso de um determinado sistema de propulsão, na condição gravitacional da superfície da Terra. Na Figura (5.11), mostramos a relação entre o empuxo e o impulso específico, calculados com os parâmetros tecnológicos, tais que, são sugeridos neste trabalho. Na Figura (5.11(b)) está a relação entre o empuxo e o impulso específico para os tipos de propulsão que são usados atualmente, tais como o químico e o iônico. Podemos notar que o sistema de propulsor, sugerido neste trabalho, se ajusta à performance tecnológica de um sistema de propulsão químico. O propulsor químico fornece um impulso específico em torno de 250 segundos, e um empuxo da ordem de 10^{-5} até 10^5 N. O sistema de propulsor, deste trabalho, encontra-se nesta região, em torno de 250 segundos de impulso específico e de 10^{-2} até 10^{-1} N de empuxo.



(a) Sistema de propulsão deste trabalho.



(b) Sistemas de propulsão da literatura. Fonte: Cunha et al 2009.

Figura 5.11: **Relação entre o empuxo e o impulso específico.** A Figura (5.11(a)), está a relação entre estas grandezas para o sistema de propulsão sugerido neste trabalho, na Figura (5.11(b)), esta relação é calculada para diversos tipos de propulsão. Fonte: Cunha et al 2009.

5.2.4 A retropropulsão

Após o escape do detrito espacial, o satélite está com uma velocidade angular diferente da sua velocidade angular nominal. Para retornar a velocidade angular nominal, da sua órbita inicial, é preciso aplicar uma retropropulsão. Se a manobra de evasão for feita de tal modo que a velocidade de exaustão de propolente seja positiva, o satélite tem um aumento na velocidade angular do satélite. Para diminuir a velocidade angular do satélite é preciso aplicar uma retropropulsão, fazendo a velocidade de exaustão ser negativa.

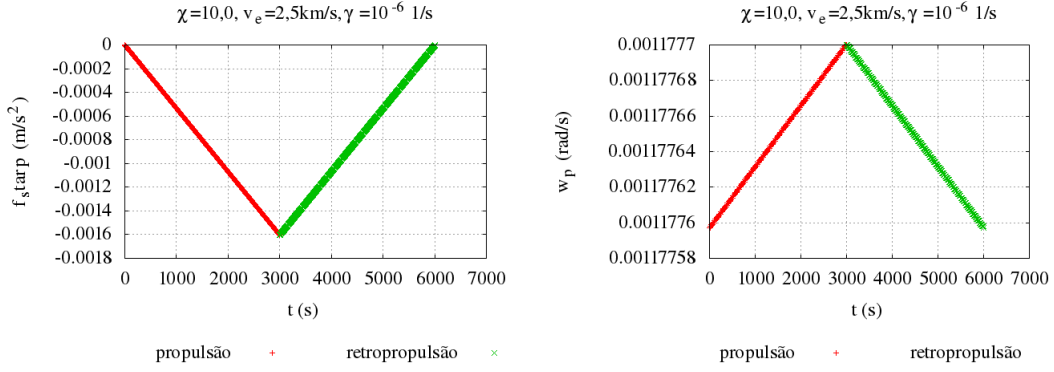
Nas Figuras (5.12) estão representadas, a aceleração de controle (5.12(a)) , a velocidade angular (5.12(b)) e a altitude do satélite (5.12(c)) em função do tempo da manobra, com a ação da propulsão e da retropropulsão. Mostramos que o tempo para a velocidade angular retornar ao seu valor inicial, utilizando a retropropulsão, é o dobro do tempo da manobra de evasão. Ao final da ação da retropropulsão, a aceleração de controle é nula e não é mais necessária. Na Figura (5.12(c)), a altitude do satélite é modificada, sem o uso do sistema de controle, curvas em azul e rosa. Durante a ação da propulsão, a altitude do satélite varia de aproximadamente 2 km, em relação a altitude inicial de 220 km, observe na curva em azul. A ação da retropropulsão modifica a altitude inicial do satélite, ainda mais, em 4 km, observe na curva em rosa. O sistema de controle não permite a variação na altitude do satélite, independente da ação dos propulsores, observe nas curvas em vermelho e verde.

5.2.5 Manobras de evasão com uso da propulsão contínua

Assim como adotado por Jesus et al. em 2012, vamos utilizar uma propulsão cuja a queima ocorre durante toda a manobra de evasão. Escolhendo uma solução nominal das condições iniciais de colisão, de uma maneira ad hoc, como:

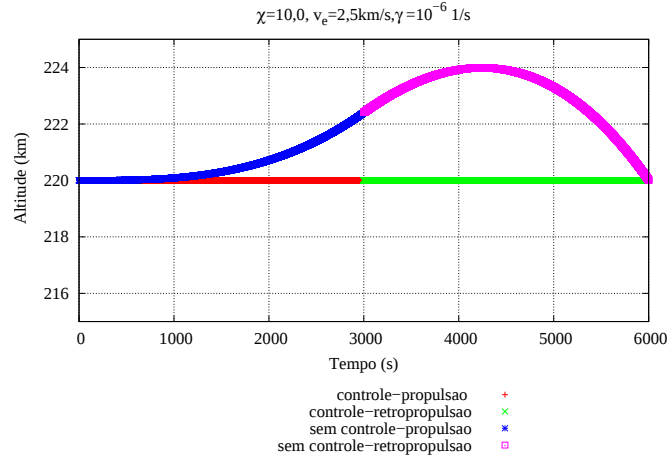
1. A posição angular do detrito espacial é $\alpha = 57^\circ$, $\beta = 68^\circ$ e os objetos estão a 3 km de distância;
2. Os dois objetos estão na região LEO, com altitudes iniciais de 220 km e 223 km para o satélite e o detrito, respectivamente;
3. O tempo de colisão é de 2667 segundos (44,45 minutos);

Consideramos a distância entre os dois objetos colisionais como sendo aquela que se estende pela linha que liga os seus centros de massa. Tomando o detrito espacial e o satélite como objetos esféricos com raios bem definidos, esta linha contém os raios das esferas e a distância entre as bordas das esferas. Neste modelo, o detrito espacial tem raio igual a r_D , o veículo espacial tem raio igual r_V e a distância entre as bordas das esferas destes objetos é r_b . Pela Figura (5.13), estas grandezas estão relacionadas pela equação:



(a) Aceleração de controle do satélite

(b) Velocidade angular do satélite



(c) Altitude do satélite

Figura 5.12: **Aceleração de controle do satélite durante a ação do propulsor.** Aqui estão representadas a aceleração de controle (5.12(a)), a velocidade angular (5.12(b)) e a altitude do satélite (5.12(c)), em função do tempo da manobra, com a ação da propulsão e da retropropulsão. Observamos que a altitude do satélite sofre modificações na ausência da aceleração de controle, tanto na propulsão ou retropropulsão. O controle permite ao satélite manter a sua altitude constante, conforme as leis das equações (4.55) e (4.57).

$$r = r_D + r_V + r_b \quad (5.22)$$

A colisão de fato acontece quando a distância entre as bordas das esferas é menor que zero, $r_b < 0$, temos:

$$r = r_D + r_b = D \quad (5.23)$$

Em que D é a dimensão dos dois objetos. A manobra de evasão será avaliada considerando as dimensões dos objetos e analisada no instante de colisão (t_c). Desta forma se a distância

relativa $r(t_c)$ é calculada com a perturbação do sistema de propulsão para não haver a colisão:

$$D \leq r(t_c) \quad (5.24)$$

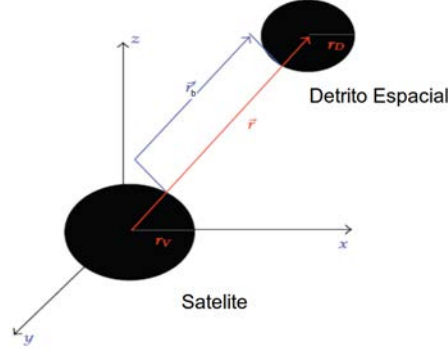


Figura 5.13: **Dimensão dos objetos esféricos.** Independente do formato real do detrito e do satélite, modelamos estes objetos como esferas. A distância relativa dos centros de massa contém o raio do veículo e do detrito espacial a colisão deve acontecer quando a soma destes raios é maior do que a distância relativa dos objetos.

A seguir, na Figura (5.14), apresentamos uma representação de uma manobra evasiva contínua.

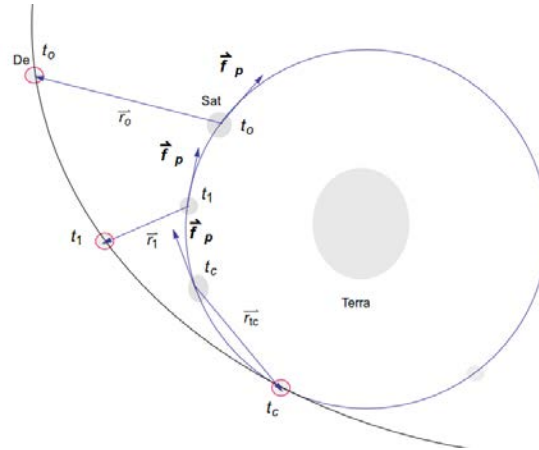


Figura 5.14: **Representação de uma manobra contínua.** Para $t_o < t_1 < t_c$, o satélite tem um decréscimo na sua velocidade angular devido ao uso contínuo de propulsão f_p . Na posição e no tempo de colisão t_c , o detrito espacial passa primeiro e a distância relativa neste instante é agora diferente de zero $r(t_c)$.

O gráfico da Figura (5.15), mostra a relação entre as dimensões dos detritos espaciais que o satélite pode escapar com o uso do fator de massa do propulsor. A velocidade de

exaustão de gases assume alguns valores particulares no intervalo de 0,1 km/s até 3,5 km/s e o fator de potência é de 10^{-6} 1/s. Com estes parâmetros, podemos escapar de objetos de até 0,7 m de raio. Ao aumentar o fator de potência para 10^{-3} 1/s podemos escapar de objetos de até 600 m de raio. Para o fator de massa igual a 10, já utilizado nas simulações anteriores é possível escapar de detritos espaciais de até 0,11 m de raio ou de 110 m ao aumentar o fator de potência.

É mais eficiente em termos de colisão com detritos espaciais grandes utilizar valores pequenos para o fator de massa e maiores valores para as velocidades de exaustão e fator de potência do propulsor. Entretanto, grandes valores do fator de massa torna a propulsão eficiente apenas para detritos espaciais pequenos independente dos valores de velocidade de exaustão e do fator de potência do propulsor. Isto mostra que o mais importante está na quantidade de combustível (m_o) que é levada a bordo na missão espacial.

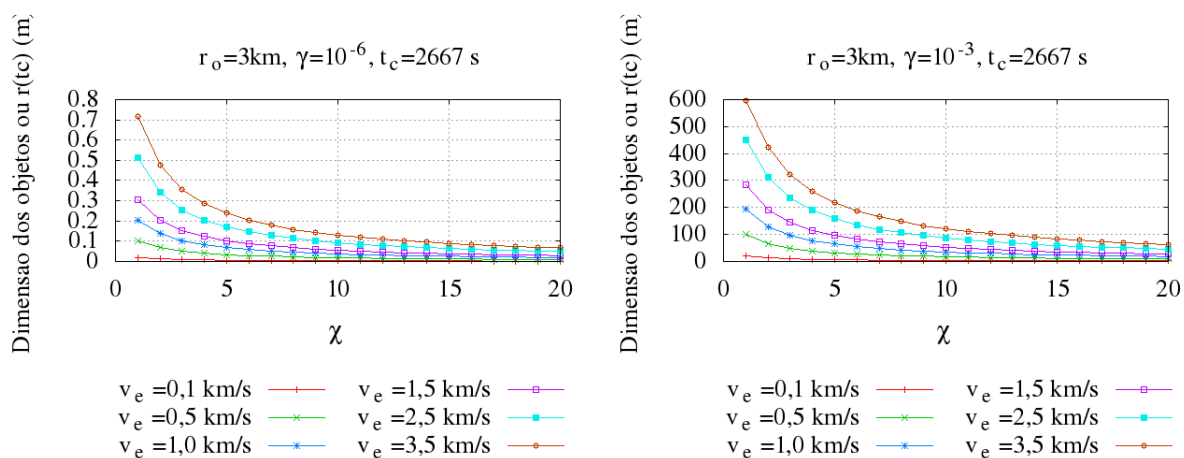


Figura 5.15: **Relação entre a dimensão dos objetos ou $r(t_c)$ com o fator de massa do propulsor.** Manobra de evasão é realizada conhecidos o tempo de colisão de 2667 s e a separação inicial dos objetos é de $r_o = 3$ km. Os parâmetros tecnológicos usados são os fatores de potência que para cada figura é, respectivamente, $\gamma = 10^{-6}$ 1/s e $\gamma = 10^{-3}$ 1/s, e com os outros dois avaliamos a eficiência desta manobra pela variação particular da velocidade de exaustão e do fator de massa χ . É mais eficiente uma manobra com menor valor de fator de massa e maior velocidade de exaustão porque nestes pontos apresentam os picos dos tamanhos dos objetos que podemos escapar.

Para efeito de comparação, na Figura (5.16) está a simulação realizada por Jesus et al. (2012) para as mesmas condições iniciais de colisão e os mesmos parâmetros tecnológicos. Comparando as duas figuras, a propulsão apresentada no modelo de Jesus et al. (2012) permite escapar de objetos maiores do que a propulsão tratada como perturbação. Portanto, escapar do detrito espacial com uma perturbação do sistema de propulsão é menos eficiente mas isso pode ser compensado quando garantimos que a órbita nominal do satélite é preservada.

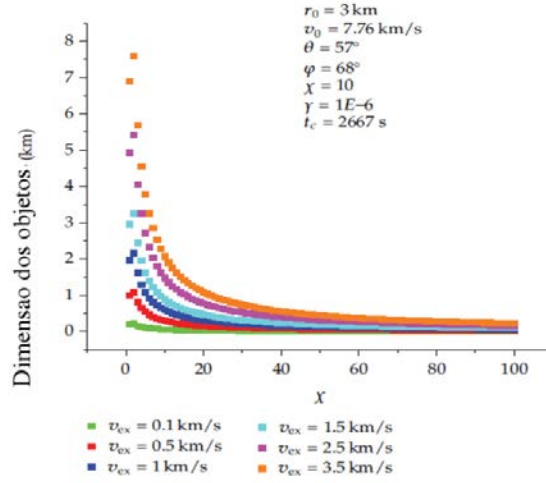


Figura 5.16: **Dimensão dos objetos por fator de massa do propulsor.** Fonte: **Jesus et al. (2012)**. A manobra de evasão é calculada diante de uma colisão em um tempo de 2667 s e uma separação inicial de 3 km entre os objetos, com os mesmos parâmetros tecnológicos usados neste trabalho a propulsão do modelo de Jesus é capaz de escapar de objetos de até 8 km.

5.2.6 Manobras de evasão com uso da propulsão semi-contínua

Na seção anterior a propulsão era contínua em toda a manobra. Porém, é possível economizar o uso de combustível com um tipo de propulsão semi-contínua em que o satélite liga a propulsão por um determinado tempo menor ao tempo total da manobra. A propulsão é ligada causando mudanças na velocidade do satélite apenas em um determinado pulso de tempo. Quando a propulsão é desligada o satélite é assistido pela gravidade da Terra, mas agora a velocidade do satélite é modificada pelo uso do pulso de propulsão e podemos escapar da ameaça, veja na figura (5.17). Para aplicar esta ideia para as manobras de evasão vamos seguir um conjunto de passos:

1. O primeiro passo, é que já conhecemos a dinâmica colisional do detrito e do satélite e, desta forma, conhecemos o tempo de colisão ou o tempo de manobra.
2. No segundo passo, com estas condições iniciais vamos aplicá-las à dinâmica com propulsão e definir quanto é o tempo pulsado de uso da propulsão
3. Em um terceiro passo, quando este tempo pulsado de uso da propulsão acabar o satélite terá novas condições de posição e velocidade.
4. Estas novas condições de posição e velocidade serão usadas como novas condições iniciais para a dinâmica colisional.

5. Com o sistema novamente assistido pela gravidade, calculamos a posição relativa dos objetos em um tempo igual ao tempo de colisão menos o tempo pulsado de uso da propulsão. Por esta posição relativa dos objetos, avaliamos se houve o escape ou se foi atingida uma margem de segurança.
6. Caso o escape não seja satisfeito aumentamos o tempo pulsado de uso da propulsão e voltamos ao segundo passo.

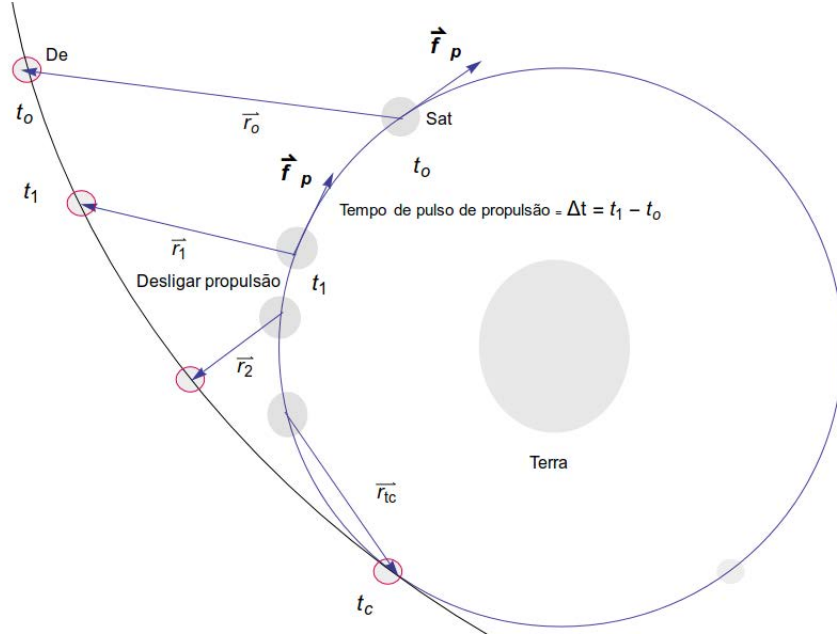


Figura 5.17: **Representação de uma manobra de evasão semi-contínua.** As acelerações atuantes no satélite, durante o intervalo de tempo $\Delta t = t_1 - t_0$, é a gravitacional da Terra e a aceleração de propulsão f_p , após este intervalo de tempo, a aceleração de propulsão é desligada, e o satélite está sujeito apenas a aceleração gravitacional. Entretanto, a propulsão ligada, durante o Δt , foi suficiente para mudar o estado de movimento do satélite e escapar da colisão, ocorrida em t_c com o detrito espacial. O intervalo de tempo Δt é o tempo de pulso de propulsão.

Aplicando estes passos, obtemos a relação da dimensão dos objetos que podemos escapar com o tempo pulsado de uso do propulsor nas Figuras (5.18).

Observamos nos gráficos da Figura (5.18), que independente da potência do motor e da velocidade de exaustão do propulsor, existe um tempo de pulso do propulsor que maximiza a capacidade do propulsor para escapar de detritos espaciais maiores. Além disso, este tempo de pulso é menor que o tempo da manobra, significando economia de combustível. Assim, a implementação de manobras evasivas por tempo pulsado para este caso simulado é mais eficiente do que aquela de queima contínua ao longo do intervalo de tempo de colisão.

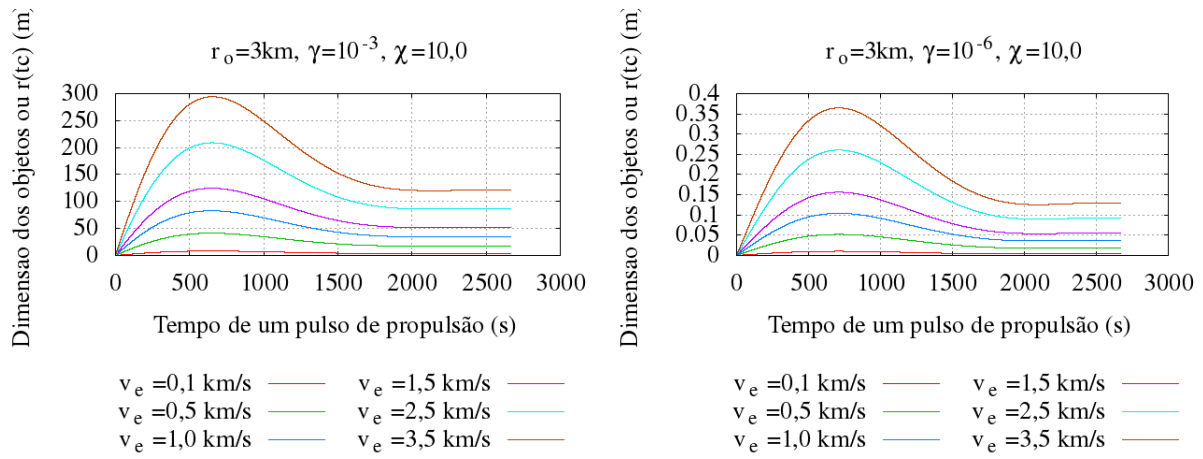


Figura 5.18: **Dimensão dos objetos ou $r(t_c)$ por tempo pulsado de uso do propulsor para $\gamma = 10^{-3} \text{ 1/s}$ e $\gamma = 10^{-6} \text{ 1/s}$ respectivamente.** A manobra contínua de evasão é feita no tempo de colisão de 2667 s, a separação inicial dos objetos é de 3 km, o parâmetro tecnológico fixo nesta simulação é o fator massa igual a 10. Para qualquer das variações do parâmetro de potência e de velocidade de exaustão, é possível notar que se ligarmos a propulsão por um pulso de tempo de 750 segundos e desligarmos, para que os outros 1917 segundos a dinâmica está assistida apenas pela gravidade, podemos escapar de objetos maiores de até 300 m. Entretanto, se ligarmos a propulsão por um pulso de tempo de 2667 s o que representa a propulsão o tempo todo ligada o satélite escapa de objetos de até 110 m.

5.3 Dinâmica colisional com o Arrasto atmosférico

Nesta seção, simulações numéricas são apresentadas com o objetivo de obter novas condições iniciais de colisão do satélite e do detrito espacial sob a influência da perturbação do arrasto atmosférico. Desta forma, as forças externas que atuam no satélite são: uma força radial de propulsão que cumprirá sua função de manter o satélite em órbita circular, e a força de arrasto atmosférico tangencial, veja o esquema de forças na figura (5.19).

$$\vec{f}^{Sat} = \begin{bmatrix} f_{\star a} \\ -\frac{1}{2} \frac{C_{DSat} A_{Sat}}{m_{Sat}} \rho [R(\omega - w_E)]^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Na ausência da força de propulsão tangencial a velocidade angular do satélite possui somente dois termos da equação (4.64), estes são:

$$\omega_a = \omega_o + \frac{\omega_l}{2} (e^{-2\psi\omega_l t} - 1) \quad (5.26)$$

A única força externa que atua no detrito espacial é a perturbação do arrasto atmosférico descrita na (4.44). Conhecidos, portanto, as forças externas que atuam nos objetos e a

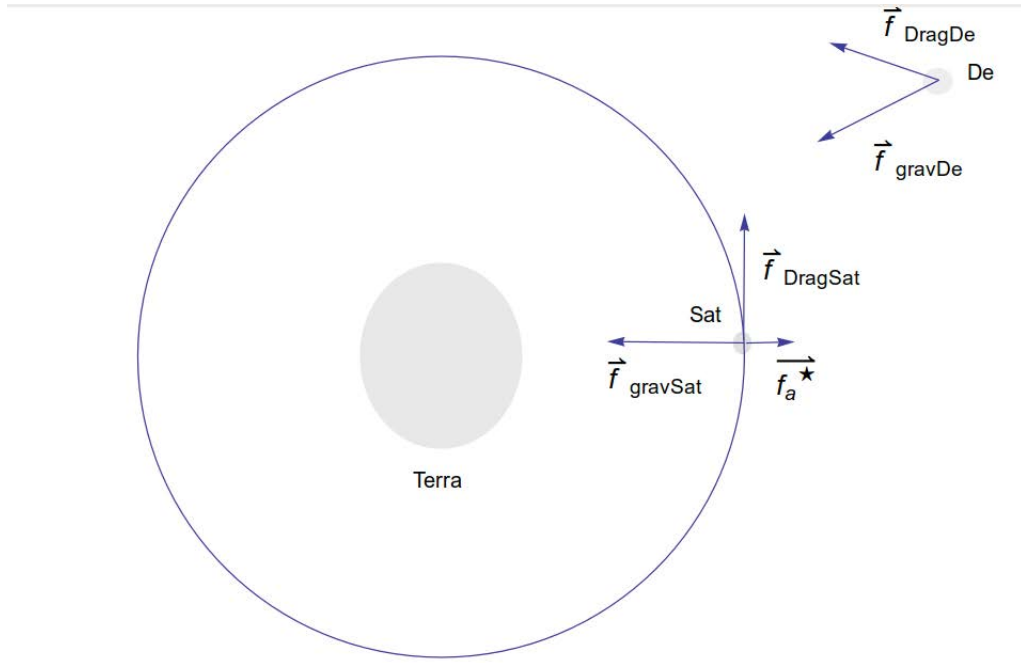


Figura 5.19: **Esquema de acelerações aplicadas ao satélite e o detrito espacial.** As acelerações atuantes no satélite são a gravitacional, a força de controle f_a^* , e a força tangencial do arrasto atmosférico. As acelerações que atuam no detrito espacial são a gravitacional e a do arrasto atmosférico.

velocidade angular do satélite, é possível integrar numericamente o sistema de equações (4.116) e modelar a dinâmica relativa do satélite e do detrito espacial com o arrasto atmosférico.

Neste caso, o satélite e o detrito espacial possuem diferentes características de ação de arrasto atmosférico, em outras palavras, cada um tem uma massa m , um coeficiente de arrasto C_D e uma área perpendicular a direção de movimento A . O detrito e o satélite estão relativamente próximos de tal modo que podemos considerar que o valor para a densidade atmosférica ρ não sejam tão diferentes.

Para uma primeira modelagem, vamos tomar os objetos com o mesmo valor do coeficiente de arrasto, a densidade atmosférica inicial calculada com a distância fixa do satélite a Terra ($R_o = \text{Raio da Terra} + \text{Altitude inicial do satélite}$), e com as características físicas descritas na Tabela (5.1).

Na Figura (5.20), existe um comparativo das trajetórias relativas sem e com o arrasto atmosférico. O detrito espacial está a uma distância inicial relativa ao satélite de 3 km, a ação do arrasto atmosférico causa uma aproximação do detrito espacial com o satélite até os 200 segundos do movimento relativo e depois ocorre um afastamento dos objetos. Em 500 segundos, o detrito espacial chega a estar 14 km afastado do satélite.

A transformação realizada anteriormente na equação (4.38), feita com o objetivo de

Tabela 5.1: Tabela das características atmosféricas e físicas do detrito e do satélite.

Dados	Satélite	Detrito
Massa(kg)	175.0	1e-3
Altitude inicial(km)	220	223
Área(m ²)	2.22	0.0078
Coefficiente de Arrasto	2.22	
ρ_o	2.789e-10 kg/m ³	
ω_E	7.29e-5 rad/s	

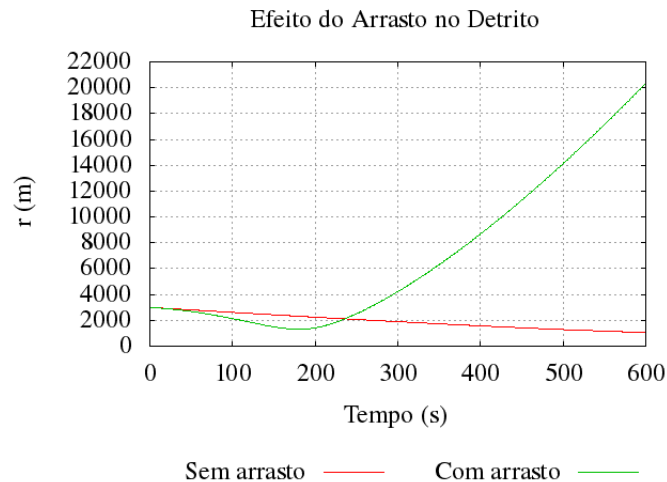


Figura 5.20: **Comparação entre as trajetórias relativas com e sem arrasto atmosférico.** As curvas representam as trajetórias relativas do detrito espacial e do satélite durante 600 segundos com as características da Tabela (5.1). A curva de vermelho representa a trajetória relativa dos objetos sem a perturbação do arrasto atmosférico. Entretanto, a curva de verde é a trajetória relativa dos objetos com a perturbação do arrasto atmosférico. Na curva verde, nos primeiros segundos os objetos se aproximam e depois eles se afastam muito rapidamente em relação a trajetória relativa puramente gravitacional.

escrever a velocidade angular da Terra do sistema equatorial geocêntrico para o sistema fixo do satélite é inversível e vale para qualquer outro vetor, é possível escrever a posição do detrito espacial e do satélite que está no sistema fixo do satélite para o sistema equatorial da Terra. Realizada esta transformação podemos ver o que acontece com os objetos na situação descrita na Figura (5.20), mas, agora, do ponto de vista de um observador na Terra.

Na Figura (5.21), existe uma comparação das trajetórias do detrito espacial com e sem arrasto atmosférico mas agora observada do sistema equatorial terrestre. A trajetória do detrito espacial é defletida sob a ação do arrasto atmosférico e decai rapidamente em direção a superfície da Terra e terminando em atingi-lá em torno dos 2000 segundos.

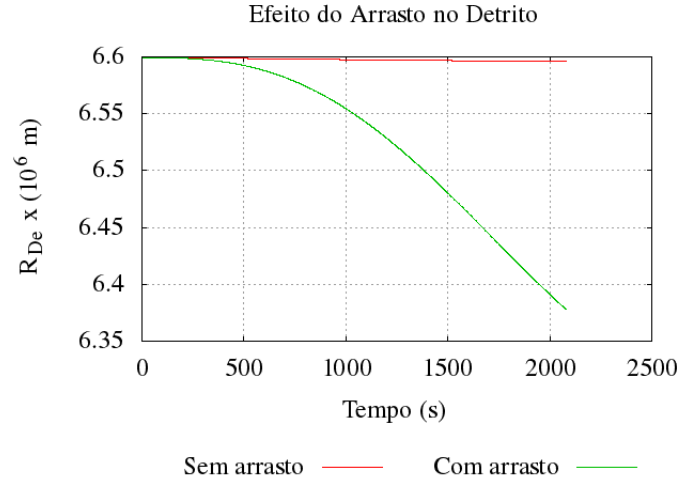


Figura 5.21: **Comparação entre as trajetórias radiais do movimento com e sem arrasto atmosférico do detrito espacial no sistema geocêntrico.** As curvas representam as trajetórias radiais do detrito espacial e do satélite durante os 2000 segundos com as características da Tabela (5.1). O detrito espacial atinge a superfície da Terra em torno dos 2000 segundos (curva verde), e nota-se que antes de atingir a superfície o seu movimento se afasta da sua trajetória puramente gravitacional (curva vermelha) muito rapidamente no passar do tempo.

Detritos espaciais com a razão de área e massa que simulamos não sobrevivem muito tempo em órbita da Terra.

Portanto, observando as Figuras (5.20) e (5.21), o detrito espacial se aproxima do satélite que está em uma altitude mais baixa e ao cruzar o plano do movimento orbital do satélite ele se afasta rapidamente no seu caminho em direção ao centro da Terra. Pela velocidade em que o detrito se afasta do satélite, pode comprometer a validade das equações diferenciais do movimento relativo já que seu domínio de validade é quando estes objetos estão próximos. A depender da razão área e massa do detrito espacial, o que determinará o seu decaimento em direção a Terra, é preciso escolher um intervalo de integração no qual as posições calculadas neste intervalo não prejudiquem a razão $r/R \ll 1$. A aplicação proposta neste trabalho não requer o estudo da evolução a longo prazo da dinâmica destes objetos e sim a curto prazo. A preocupação é com o risco de colisão com o satélite, em distância e tempos considerados ameaçadores à missão, o que geralmente são tempos curtos de integração, antes do decaimento do detrito na Terra e também dentro da distância permitida pelo radar do satélite.

Nesta abordagem, utilizamos aproximações nos termos gravitacionais para obter equações diferenciais que em parte são resolvidas de forma semi analítica. Com o objetivo de comparar a solução obtida neste trabalho com uma solução numérica, sem aproximações,

ou seja, sem expansão em termos de série de Taylor dos termos gravitacionais, realizamos a simulação descrita na Figura (5.22).

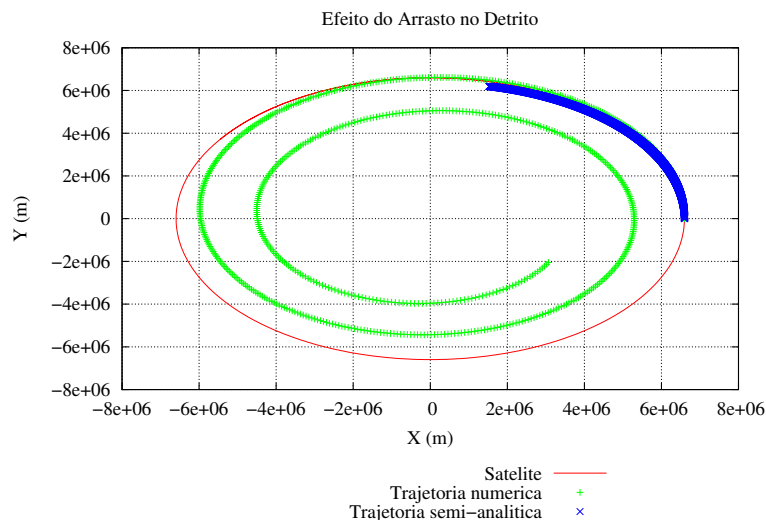


Figura 5.22: **Comparação entre as trajetórias numéricas e semi-analíticas do detrito-satélite com arrasto atmosférico.** Aqui, são apresentadas as trajetórias do satélite em vermelho, e do detrito espacial em verde e azul medidas no sistema geocêntrico. Ambos os objetos têm as mesmas características da tabela (5.1) e sofrem o arrasto atmosférico. A curva de vermelho é a órbita circular do satélite calculada numericamente, que é igual nas duas abordagens, a curva em verde é a solução numérica da trajetória do detrito espacial e a curva de azul é a trajetória do detrito espacial calculada com a abordagem semi-analítica deste trabalho.

Na Figura (5.22), as trajetórias do detrito espacial são coincidentes nos primeiros instantes do movimento e começam a divergir à medida que o detrito espacial vai em direção a superfície da Terra. A integração da trajetória do detrito espacial está programada para encerrar no momento em que o veículo e o detrito estão fora da aproximação $r/R < 1$, enquanto, a trajetória de verde mostra que o detrito espacial irá decair até atingir a superfície da Terra. Então, apenas nos primeiros instantes a solução semi-analítica revela ser uma boa aproximação, comparada com a solução puramente numérica, a razão está no fato do detrito espacial e o satélite, devido ao arrasto atmosférico, se distanciarem a medida que o detrito espacial decai para altitudes mais baixas.

Em relação a força radial de propulsão aplicada ao satélite para mantê-lo em órbita circular, na Figura (5.23), mostramos a sua variação com o tempo nas mesmas condições das simulações anteriores. Observamos que a magnitude desta aceleração é relativamente pequena, e o crescimento do módulo desta aceleração é explicado pela redução da velocidade angular do satélite, devido ao efeito do arrasto atmosférico.

É preciso, agora, encontrar a dinâmica colisional destes objetos com a perturbação do arrasto atmosférico. O procedimento é análogo ao que adotamos na seção da dinâmica

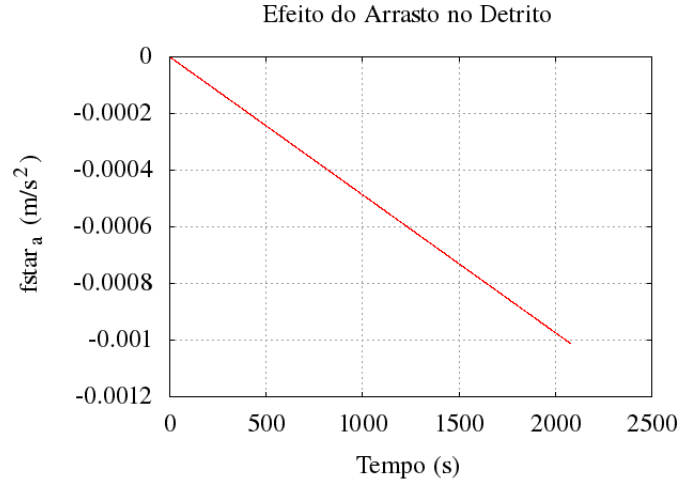


Figura 5.23: **Variação da aceleração radial de propulsão $f_{\star_a}$ no tempo.** A aceleração radial de propulsão é aceleração para controlar o satélite na sua órbita circular diante a perturbação do arrasto atmosférico calculada aqui até o tempo de decaimento do detrito espacial de cerca de 2000 segundos. A aceleração aplicada para manter o satélite é de no máximo de 0.0012 m/s em magnitude.

colisional gravitacional, entretanto, no caso perturbativo não temos funções temporais para as coordenadas cartesianas da posição relativa, o que exige um método numérico para encontrar a colisão dos objetos. Conforme a estratégia, temos um conjunto de posições iniciais relativas para o detrito espacial, ou seja, um conjunto dado de (x_o, y_o, z_o) . Também é fornecido um conjunto de tempos de colisão t_c [1 : 3000] com o passo de 1 segundo. Porém, não temos, com a inclusão do arrasto atmosférico, as velocidades iniciais relativas de colisão na forma analítica, como apresentamos nas equações (5.6), (5.5) e (5.7). Por outro lado, este problema equivale também a encontrar velocidades iniciais relativas que minimizem globalmente a distância relativa dos objetos. Pensando nisto, aplicamos um método de otimização conhecido como *Particle Swarm Optimization* (PSO) que está descrito a seguir.

5.3.1 Aplicação do método do Particle Swarm Optimization

Este método foi desenvolvido por James Kennedy e Russel C. Eberhart em 1995, e é baseado na observação da inteligência coletiva de uma população de indivíduos biológicos (Kennedy and Eberhart, 1995). O objetivo é a busca de variáveis no espaço de solução do problema que otimizam um objetivo particular. Uma população pode ser definida como indivíduos ou partículas que pertencem ao espaço de solução e que são todos candidatos a solução ótima desejada, estas partículas se movem com uma posição e velocidade dentro deste espaço. Dentro do método, estes indivíduos são inicializados de forma aleatória e possuem uma memória cognitiva que guarda a sua melhor posição e velocidade locais e esta informação flui para toda população. O processo de melhora acontece quando as partículas obtêm a informação da melhor solução entre todas elas, conhecida como melhor posição global ou melhor candidata global a solução, e ao passar esta informação para os vizinhos todos modificam sua posição e velocidade em direção a melhor posição individual e também a global, até atingir o alvo dado. Este processo pode ser resumido em três passos (Van den Bergh and Engelbrecht, 2001):

1. Inicializar o valor da posição e velocidade de cada partícula;
2. Atualizar a melhor posição individual e também a global;
3. Atualizar a velocidade e posição de cada partícula;

Para inicializar a posição e a velocidade, basta calcular o valor da função para cada um dos valores aleatórios gerados. O segundo passo é feito comparando os valores das posições gerados com o objetivo e guardando a melhor posição individual e também a global. A velocidade e a posição da i -ésima partícula é atualizada seguindo a equação (Blondin, 2009):

$$v_i(t+1) = wv_i(t) + c_1r_1[\hat{x}_i(t) - x_i(t)] + c_2r_2[g(t) - x_i(t)] \quad (5.27)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \quad (5.28)$$

Em que, $x_i(t)$ e $v_i(t)$ são a posição e a velocidade da partícula i em um tempo t , $\hat{x}_i(t)$ é a melhor posição individual ou local enquanto $g(t)$ é a melhor posição global dentro todas as partículas. r_1 e r_2 são números aleatórios que pertencem ao intervalo $[0 : 1]$, enquanto w , c_1 e c_2 são parâmetros fornecidos pelo usuário, $(0 \leq w \leq 1.2)$.

Em particular, neste trabalho, o módulo da posição relativa dos dois objetos é uma função do tipo $r(x_o, y_o, z_o, \dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o, t)$, mas, segundo a nossa estratégia, queremos minimizar esta função dados os valores de um conjunto de (x_o, y_o, z_o) e t_c e desta forma a função fica apenas dependente das velocidades iniciais relativas de colisão. Neste caso, temos uma função $r(\dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o)$ com três dimensões e são três parâmetros que vão envolver

a otimização e estes são as próprias velocidades iniciais relativas de colisão. É exatamente o que buscamos, as velocidades iniciais relativas que minimizam a distância do satélite e do detrito, ou seja, buscamos o mínimo global que irá representar a colisão.

Como uma primeira aplicação, e para a verificação da exatidão do método do *Particle Swarm Optimization*, vamos aplicá-lo para obter novamente as velocidades relativas iniciais de colisão da dinâmica colisional com gravidade. Para as simulações seguintes, utilizamos 1000 partículas do PSO, mas, para uma simples visualização gráfica, vamos exibir os resultados do método escolhendo apenas 5 partículas deste conjunto total.

A simplicidade das soluções analíticas da dinâmica relativa, somente com a gravidade da Terra, permite plotar as trajetórias relativas do satélite e do detrito espacial com as informações das partículas do *Swarm*. Verificamos que após algumas interações do método do PSO, as partículas encontram a informação das velocidades relativas iniciais que minimizam estas trajetórias. Portanto, após a interação do PSO, as trajetórias relativas migram para uma única trajetória de colisão entre o satélite e o detrito espacial, que é exatamente a prevista pelas equações da dinâmica colisional. Na simulação das Figuras (5.24) e (5.25), fornecemos o valor de 3 km da posição relativa inicial do satélite e do detrito espacial, e o tempo de colisão de 5000 segundos, e aplicamos o PSO para calcular as velocidades relativas de colisão destes objetos.

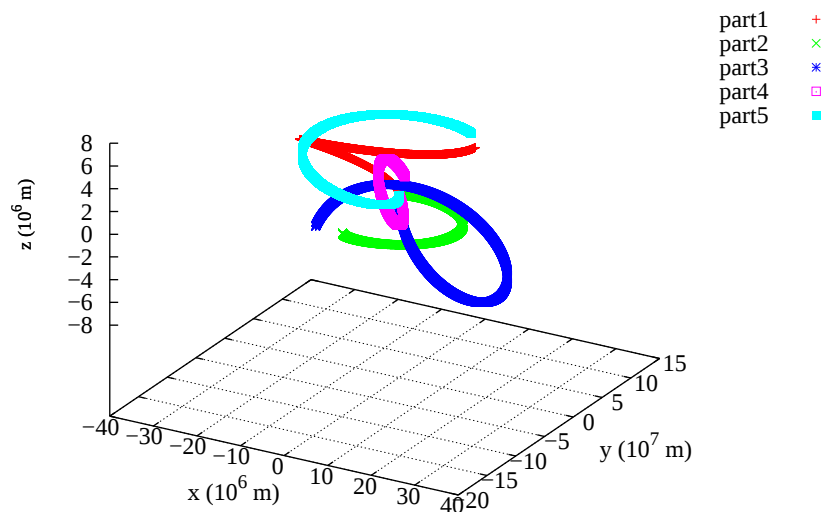


Figura 5.24: **Trajétorias relativas do satélite e do detrito espacial usando as partículas do PSO inicializadas com velocidades relativas aleatórias.** Trajetórias relativas do detrito e do satélite inicializadas com o uso de 5 partículas do método de otimização PSO. Estas partículas guardam a informação de velocidades iniciais relativas aleatórias somente na etapa de inicialização do método. Observamos que as trajetórias seguem caminhos diferentes para a informação de velocidade inicial relativa de cada partícula.

Na Figura (5.24), mostramos a etapa de inicialização aleatória do PSO quando plotamos as trajetórias relativas do satélite e do detrito espacial com a informação de 5 das 50 partículas do PSO. Observamos, nesta figura, que elas vão para direções que estão distantes do satélite, mas logo após algumas interações do método, todas as trajetórias relativas migram, com as informações das 5 partículas, para a trajetória mostrada na Figura (5.25). Esta trajetória relativa em comum para todas as partículas é mínima e representa a colisão do detrito espacial com satélite no tempo de colisão de 5000 segundos.

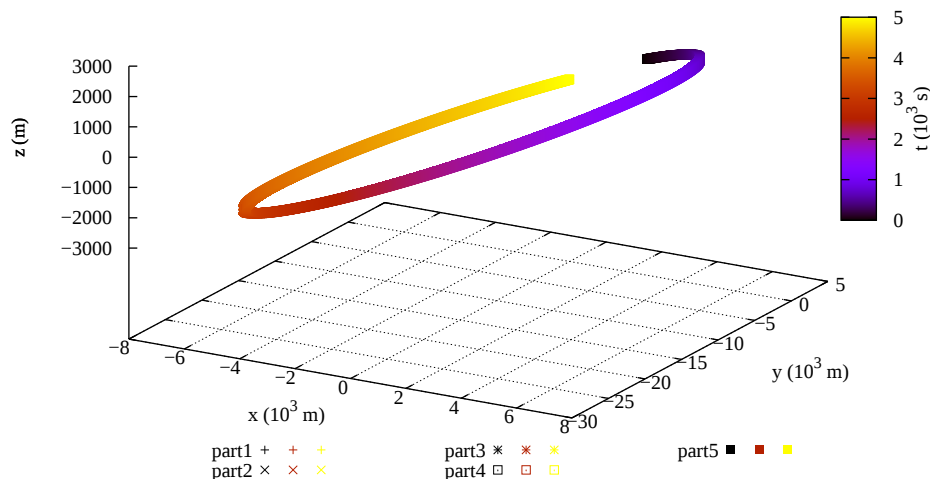


Figura 5.25: **Trajétorias relativas do detrito e do satélite com a informação das partículas do PSO após algumas interações do método.** Agora, as velocidades relativas trazidas pelas partículas não são mais aleatórias e são as que minimizam a distância relativa entre o satélite e o detrito espacial, a trajetória relativa de colisão.

Podemos ver esta mesma situação também do ponto de vista do sistema geocêntrico, na Figura (5.26), está a etapa de inicialização das partículas do PSO, de vermelho está a trajetória do satélite e as demais são as partículas do PSO inicializadas aleatoriamente. Já na Figura (5.27), após algumas interações com o PSO as partículas encontram a menor distância entre o satélite e o detrito e temos a trajetória de colisão com o satélite.

Retornando à solução numérica das equações diferenciais da dinâmica relativa com a perturbação do arrasto atmosférico, é possível obter mapas da ação do PSO de uma outra forma. Em ambas as Figuras (5.28) e (5.29), existe um espaço formado pelas velocidades iniciais relativas $(\dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o)$, em que os pontos são partículas do PSO que estão distribuídas segundo a função $r(\dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o)$. Nesta etapa, as partículas são inicializadas de forma aleatória dentro do intervalo de velocidades relativas de $[-10, 10]$ km/s, e cada a partícula leva informação de $r(\dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o)$ com valores entre $[0, 8 \times 10^6]$. Na figura (5.29), vimos que após algumas interações todas as partículas do PSO migram para minimizar a informação de $r(\dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o)$, e então, a partir da determinação cartesiana dos pontos de cor preta no espaço de velocidades iniciais, podemos encontrar quais são as velocidades de

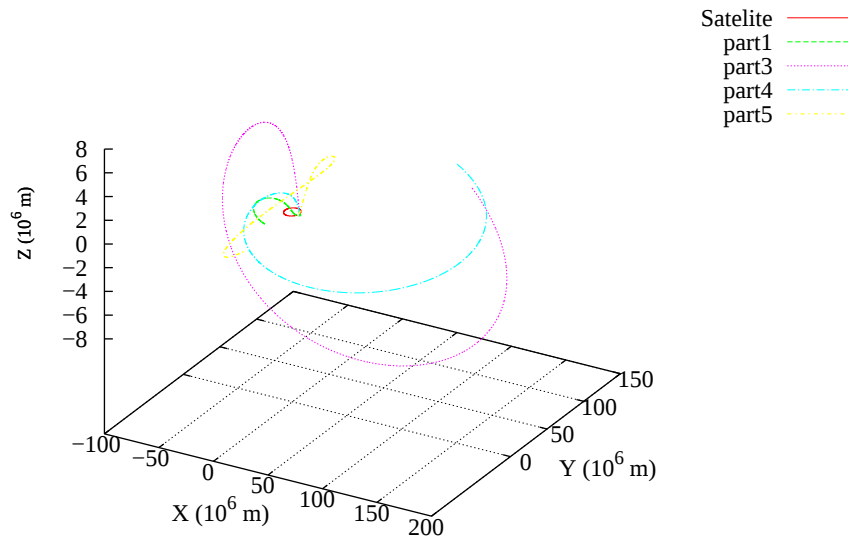


Figura 5.26: **Traj et rias do detrito espacial e do s at elite, com a informação da inicialização das partículas do PSO, no sistema geoc entrico.** O s at elite está em órbita circular representada em vermelho, as velocidades iniciais relativas de 4 partículas são inicializadas de forma aleatória e como consequência as trajetórias do detrito, com as cores verde, rosa, azul e amarelo, se afastam do s at elite.

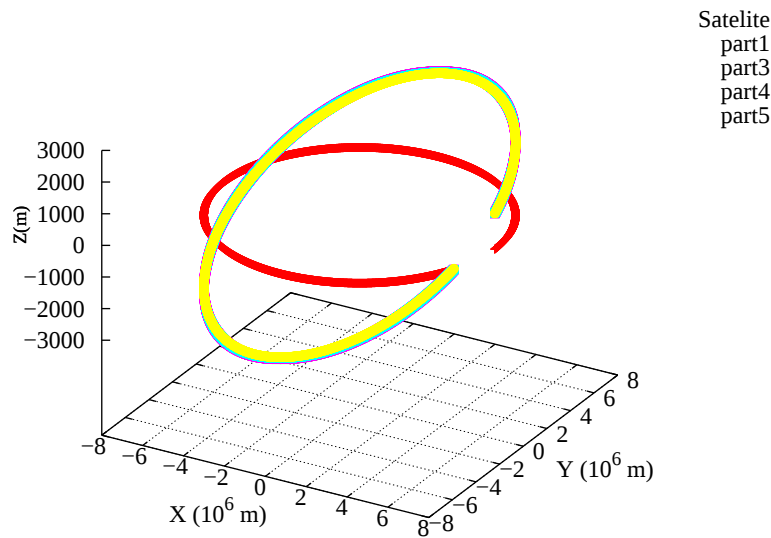


Figura 5.27: **Traj et rias do detrito espacial e do s at elite, com a informação da das partículas do PSO após algumas interações, no sistema geoc entrico.** O s at elite está em órbita circular representada na curva de vermelho, as velocidades iniciais relativas das 4 partículas minimizam a distância entre o s at elite e o detrito espacial. Portanto, as trajetórias do detrito, com as cores verde, rosa, azul e amarelo, tocam na órbita do s at elite e são comuns para todas as partículas do PSO.

colisão destes dois objetos. Estas são as primeiras velocidades relativas iniciais de colisão encontradas adicionando a perturbação do arrasto atmosférico. Na tabela da Figura (5.2), estão as velocidades relativas iniciais de colisão entre os objetos em um tempo de colisão de 500 segundos, para uma determinada posição angular e uma distância inicial relativa de 3 km . Na primeira linha estão as velocidades de colisão sem o arrasto atmosférico e em seguida com o arrasto atmosférico, o efeito do arrasto aumenta as velocidades de impacto dos objetos espaciais.

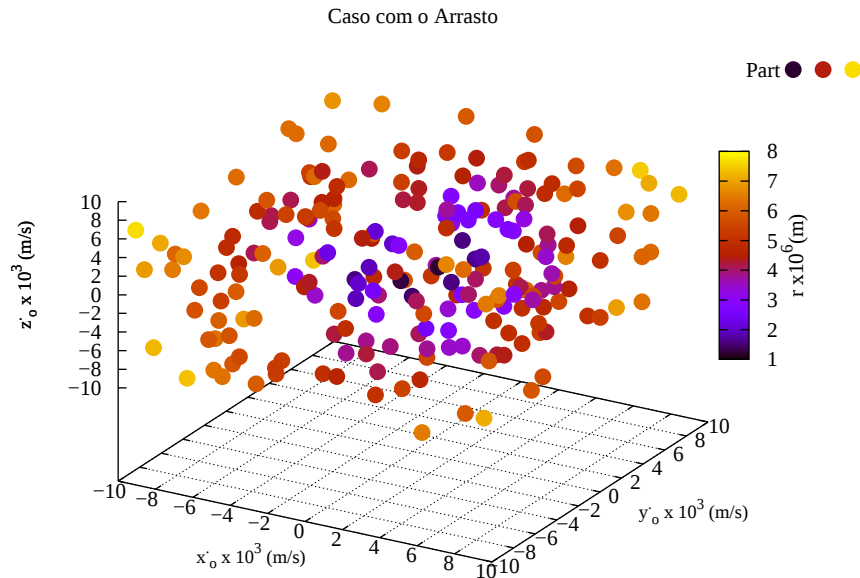


Figura 5.28: **Partículas do PSO no espaço das velocidades iniciais relativas (I).** Na figura, as partículas do PSO estão distribuídas de forma aleatória porque é a etapa de inicialização do método. Cada partícula carrega a informação das componentes da velocidade inicial relativa ($\dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o$) e as cores representam o valor da distância relativa entre o detrito e o veículo espacial (r).

Tabela 5.2: Comparação entre as velocidades relativas de colisão entre os objetos.

	$\dot{x}_o$	$\dot{y}_o$	$\dot{z}_o$
Sem Arrasto(m/s)	-1.135455	-6.084201	-1.976647
Com Arrasto(m/s)	-7.277459	24.872734	-1.991392

O que ocorre é uma deflexão da trajetória do detrito espacial em direção a Terra quando é acrescentado a perturbação do arrasto atmosférico. Na imagem acima na Figura (5.31), as trajetórias de colisão com a inclusão do arrasto atmosférico possuem uma curva mais acentuada. A Figura (5.32) representa as mesmas trajetórias de colisão do ponto de vista do sistema geocêntrico, os detritos espaciais atingidos pela perturbação do arrasto atmosférico são defletidos e colidem com o satélite segundo a curva de vermelho.

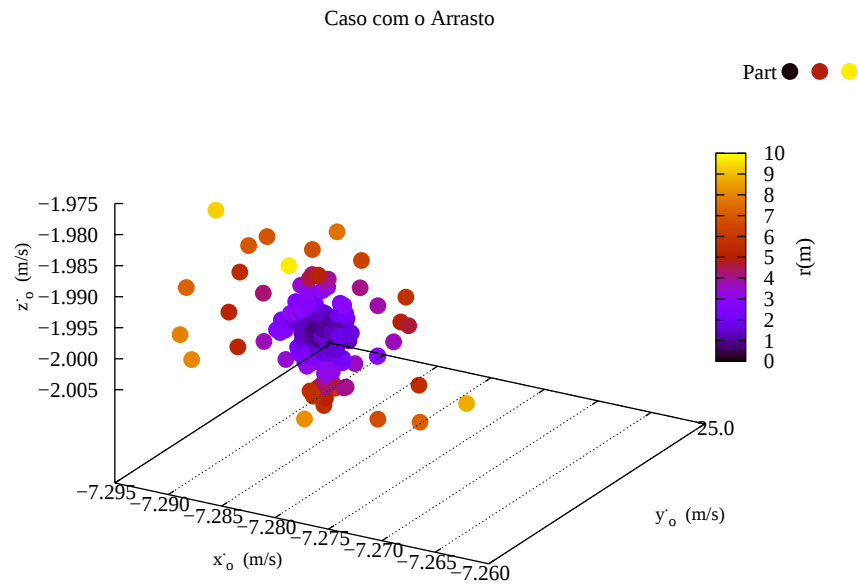


Figura 5.29: **Partículas do PSO no espaço das velocidades iniciais relativas (II).** Na figura, com algumas interações do método todas as partículas migram para minizar o valor da distância relativa, observe que as cores agora são violetas, próximas ou iguais ao $r=0$ (colisão).

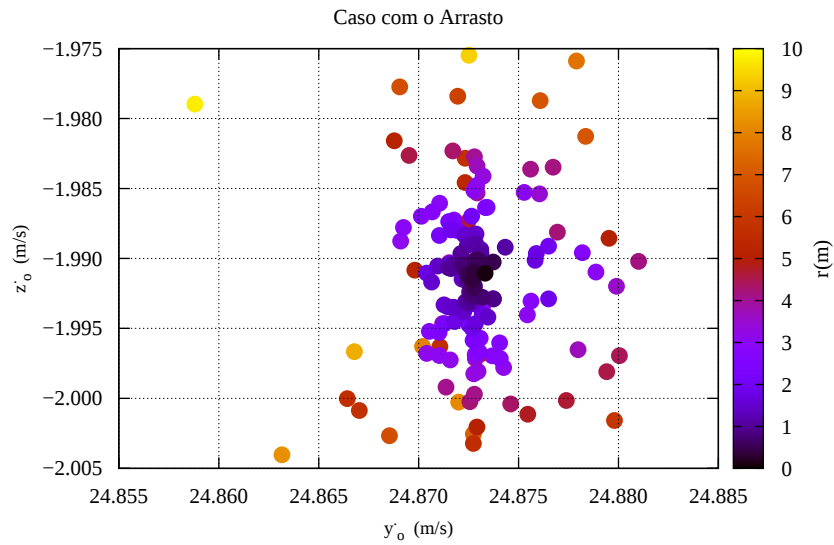
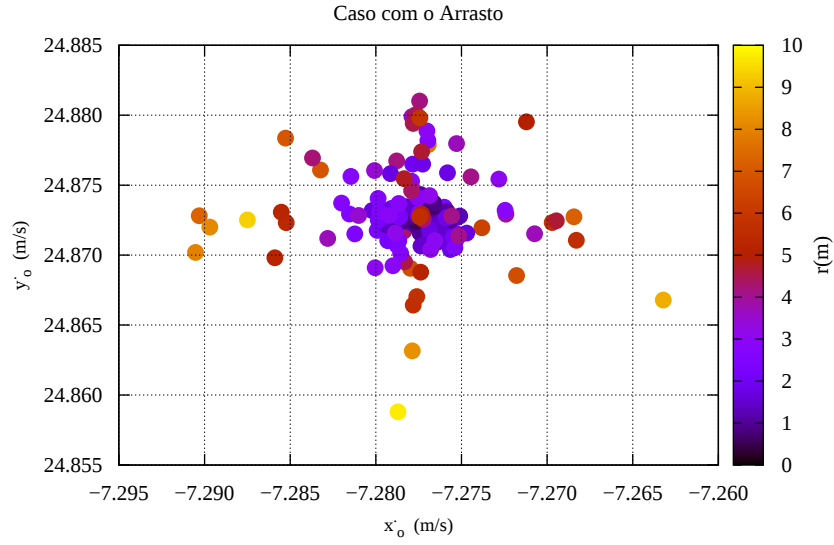


Figura 5.30: **Partículas do PSO no espaço das velocidades iniciais relativas (III).** Nestes gráficos são identificáveis as velocidades de colisão entre o satélite e o detrito espacial, com a perturbação do arrasto atmosférico, estas são: $\dot{x}_o = -7,277459$, $\dot{y}_o = 24.872734$ e $\dot{z}_o = -1.991392$.

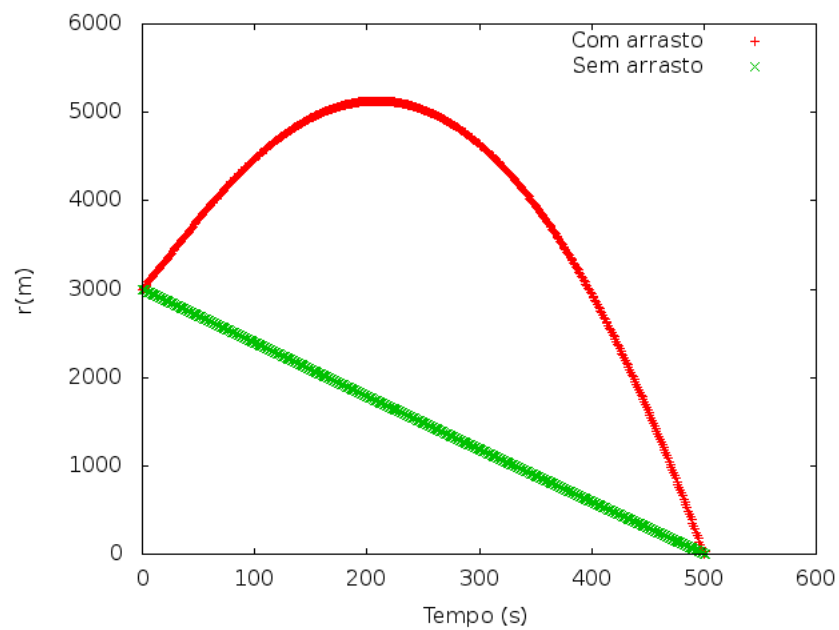


Figura 5.31: **Trajétorias de colisão com e sem o arrasto atmosférico (I)**. A figura, mostra duas trajetórias de colisão do satélite com o detrito espacial, inicialmente os objetos estão separados por uma distância de 3 km e eles se encontraram em 500 s. A curva de vermelho representa a colisão com a perturbação do arrasto atmosférico, e nota-se uma curva mais acentuada

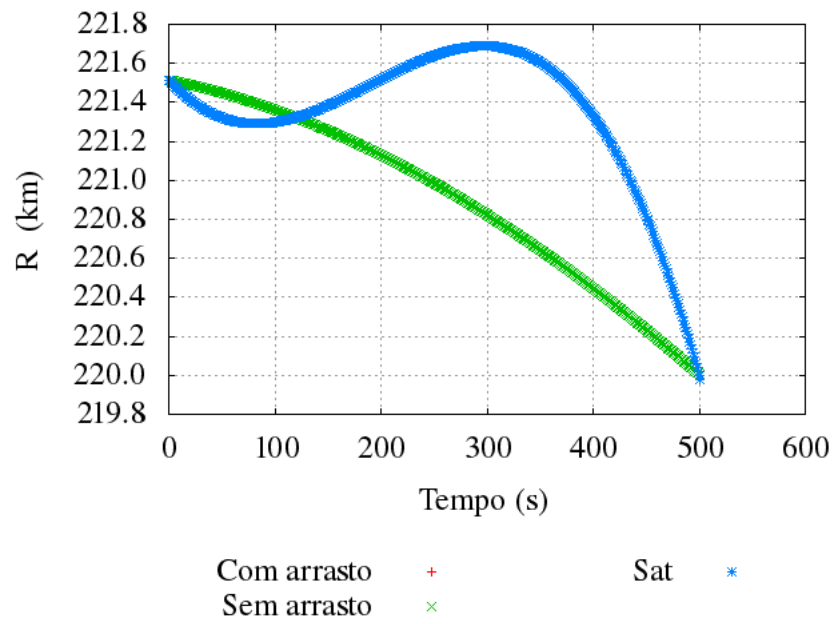


Figura 5.32: **Trajétoias de colisão com e sem o arrasto atmosférico (II)**. Na figura, temos as mesmas trajetórias da Figura (5.31) de colisão mas agora do ponto de vista geocêntrico, a curva de azul representa a trajetória do satélite, as de verde e vermelho são as trajetórias do detrito espacial. A curva de vermelho inclui a perturbação do arrasto atmosférico e portanto vemos uma deflexão causada pelo arrasto atmosférico.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho, foram dadas contribuições para o estudo de manobras orbitais evasivas em ambiente de detritos espaciais. Mostramos como realizar uma manobra de evasão de modo que o satélite não seja retirado da sua órbita de missão. Para isso utilizamos um sistema de propulsão em que a massa de combustível decai exponencialmente no tempo, caracterizando uma queima contínua de combustível, e esta ejeção é controlada por parâmetros tecnológicos tais como a velocidade de exaustão de gases, a razão de massa de combustível, e a frequência de ejeção de gases. Com a escolha apropriada dos valores destes parâmetros, as nossas simulações mostraram que a força de propulsão chega a ser muito menor que a força de gravidade que atua em um satélite em órbita LEO. Por exemplo, para um sistema de propulsor com velocidade de exaustão de gases de 2,5 km/s, com massa de combustível 10 vezes menor que a massa do corpo do satélite, com uma massa inicial de combustível de 1 kg e frequência de ejeção de combustível de 10^{-6} 1/s a aceleração de propulsão alcança até quatro ordens de grandeza menor do que a aceleração da gravidade de um satélite que está a 220 km de altitude e utiliza este propulsor durante 50 minutos (3000 segundos). Sendo assim, podemos tratar a força de propulsão como uma perturbação ao movimento do satélite.

Resolvendo as equações do movimento do satélite, mostramos que com a perturbação da força de propulsão a velocidade angular do satélite é modificada e esta pode ser controlada pelos próprios parâmetros do propulsor. Se desejarmos um acréscimo na velocidade angular do satélite basta fornecer uma velocidade de exaustão na mesma direção do movimento tangencial do satélite; o contrario é também válido. As acelerações centrífugas e centrípetas do satélite são mantidas em equilíbrio, mesmo com as perturbações, através de um controle realizado pelo próprio sistema de propulsão aplicado na direção radial ao movimento do satélite. Com as mesmas características do propulsor, citadas acima a aceleração radial de propulsão para estabilizar o satélite em sua órbita circular chega a ser próxima de zero se insistirmos no mesmo valor de frequência de ejeção de combustível mas pode chegar em modulo a $0,5 \text{ m/s}^2$ escolhida uma frequência de ejeção de combustível de 10^{-3} 1/s.

Nas manobras de evasão, escolhemos as condições iniciais de colisão com gravidade para simular a trajetória de colisão do satélite e do detrito espacial. Com este tipo de propulsão, é mostrado que este sistema de propulsão é capaz de escapar de detritos com raio maiores que 300 m para fatores de potência de 10^{-3} 1/s ou detritos muito menores com raios de 0,5 m para fatores de potências 4 ordens de grandeza menor. Em comparação ao propulsor utilizado pelo modelo de Jesus et al. (2012), que é capaz de escapar de objetos da ordem de quilômetros não é tão eficiente tratar o propulsor como uma perturbação. Porém, pode ser mais econômico por permitir que o satélite não escape da sua órbita nominal.

Também estabelecemos uma estratégia para economizar o uso do sistema de propulsão do satélite. Para isto realizamos manobras evasivas do tipo semi contínuas, ou seja, a propulsão é ligada continuamente, mas, em apenas um pulso de tempo menor do que o tempo disponível para escapar. Como por exemplo, para uma manobra em que o satélite tem que escapar antes do tempo de colisão de 2667 segundos, vimos que se o propulsor é utilizado durante seus primeiros 700 segundos, é possível escapar de objetos de até 200 m de raio, enquanto para o mesmo propulsor, mas agora ligado durante os 2667 segundos, é possível escapar de objetos de até 110 m de raio. Desta forma, o propulsor é ligado por menos tempo, e, portanto, favorece uma economia de combustível.

De uma forma análoga, incluímos a perturbação do arrasto atmosférico. Esta perturbação atua no satélite e no detrito espacial, e assim o efeito na dinâmica relativa é de uma análise mais complexa. Primeiro, tratamos o efeito do arrasto no satélite, e, no nosso modelo a velocidade angular do satélite sofre uma redução exponencial no tempo que depende das propriedades da atmosfera da Terra e do satélite. A frequência de decaimento da velocidade angular é determinada pelo produto dos parâmetros ψ e ω_l . ψ traz informação das características do satélite tais como sua área, massa e o coeficiente de arrasto, assim como informação da densidade atmosférica do local em que se encontra o satélite. O termo ω_l traz informação da atmosfera que gira com a velocidade de rotação da Terra. Também usamos um sistema de propulsão radial para equilibrar o satélite em sua órbita circular impedindo a sua reentrada a atmosfera, o valor para a aceleração do propulsor para manter o satélite em órbita circular durante 2000 segundos é de módulo de $0,001 \text{ m/s}^2$. Integrando numericamente as equações do movimento relativo, vimos que para o mesmo coeficiente de arrasto e valor inicial densidade atmosférica os detritos espaciais que têm área da ordem de centímetros quadrados e massa de 1 grama decaem em um tempo de 2000 segundos na região LEO. Sendo assim o raio relativo dos objetos cresce rapidamente enquanto o detrito se afasta do satélite em direção a Terra e faz a precisão das equações de Chohessy-Wiltshire ser perdida. Mesmo assim, mostramos que para pequenos tempos de integração, antes do detrito decair para Terra, a aproximação de Chohessy-Wiltshire traz resultados parecidos com a previsão do modelo numérico.

Depois do estudo do efeito do arrasto atmosférico na dinâmica relativa dos objetos é

preciso encontrar as condições de colisão, agora, com o efeito desta perturbação. A dificuldade é que não possuímos solução analítica para podermos aplicar a condição de colisão e obter expressões para as velocidades de colisão como fizemos na dinâmica relativa com a gravidade. Para encontrar as velocidades de colisão sem um alto custo computacional, buscamos o método de otimização conhecido como *Particle Swarm Optimization*. O novo objetivo era buscar as velocidades de colisão para minimizar a distância do satélite e do detrito espacial. Mostramos que o método funciona com poucas interações ao encontrar as mesmas velocidades de colisão da solução analítica para o caso gravitacional. Encontramos a velocidade inicial de colisão com a perturbação do arrasto atmosférico quando é dado um tempo de colisão de 500 segundos, uma distância relativa inicial de 3 km, em uma posição angular arbitrária. Os objetos adquirem uma velocidade de colisão maior na presença do arrasto atmosférico, comparada com as mesma condições mas sem arrasto atmosférico.

Referências Bibliográficas

- Bagatin, A. C. and Petit, J.-M. (2001). Effects of the geometric constraints on the size distributions of debris in asteroidal fragmentation. *Icarus*, 149(1):210–221.
- Bertachini de Almeida Prado, A. F. (2003). Third-body perturbation in orbits around natural satellites. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26(1):33–40.
- Bezděk, A. and Vokrouhlický, D. (2004). Semianalytic theory of motion for close-earth spherical satellites including drag and gravitational perturbations. *Planetary and Space Science*, 52(14):1233–1249.
- Blondin, J. (2009). Particle swarm optimization: A tutorial. *from site: http://cs.armstrong.edu/saad/csci8100/pso_tutorial.pdf*.
- Carter, T. and Humi, M. (2002). Clohessy-wiltshire equations modified to include quadratic drag. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(6):1058–1063.
- Clohessy, W. (1960). A terminal guidance system for satellite rendezvous. *Aerospace Sci.*, 29:653–658.
- Colombo, C. and McInnes, C. (2012). Orbit design for future spacechip swarm missions in a planetary atmosphere. *Acta Astronautica*, 75:25–41.
- Cordelli, A., Farinella, P., and Rossi, A. (1998). The influence of the fragmentation threshold on the long term evolution of the orbital debris environment. *Planetary and space science*, 46(6):691–699.
- David, A. V. and McClain, W. D. (2007). Fundamentals of astrodynamics and applications. *Hawthorne, Calif.*
- Davis, D. R., Ryan, E. V., and Farinella, P. (1994). Asteroid collisional evolution: Results from current scaling algorithms. *Planetary and Space Science*, 42(8):599–610.
- Davis, D. R., Weidenschilling, S. J., Farinella, P., Paolicchi, P., and Binzel, R. P. (1989). Asteroid collisional history-effects on sizes and spins. In *Asteroids II*, volume 1, pages 805–826.

- Debris, S. (1988). The report of the esa space debris working group. *ESA SP*, 1109.
- Delhaise, F. (1991). Analytical treatment of air drag and earth oblateness effects upon an artificial satellite. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 52(1):85–103.
- Farinella, P., Davis, D., Paolicchi, P., Cellino, A., and Zappalà, V. (1992). Asteroid collisional evolution-an integrated model for the evolution of asteroid rotation rates. *Astronomy and Astrophysics*, 253:604–614.
- Greenberg, R., Wacker, J. F., Hartmann, W. K., and Chapman, C. R. (1978). Planetesimals to planets: Numerical simulation of collisional evolution. *Icarus*, 35(1):1–26.
- Jacchia, L. G. (1960). A variable atmospheric-density model from satellite accelerations. *Journal of Geophysical Research*, 65(9):2775–2782.
- Jesus, A. D., Ribeiro, R. S., Rossi, A., and Veira Neto, E. (2012). Evasive maneuvers in space debris environment and technological parameters. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012.
- Kennedy, J. and Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. In *Neural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference on*, volume 4, pages 1942–1948. IEEE.
- Kessler, D. J. (1989). Orbital debris environment and data requirements.
- Kessler, D. J. (1991). Collisional cascading: The limits of population growth in low earth orbit. *Advances in Space Research*, 11(12):63–66.
- Kessler, D. J. and Cour-Palais, B. G. (1978). Collision frequency of artificial satellites: The creation of a debris belt. *Journal of Geophysical Research: Space Physics (1978–2012)*, 83(A6):2637–2646.
- King-Hele, D. G. (1964). *Theory of satellite orbits in an atmosphere*. Butterworths.
- Klinkrad, H. (2005). Detritos espaciais: Avaliar o risco.
- Lara, M., San-Juan, J. F., López, L. M., and Cefola, P. J. (2012). On the third-body perturbations of high-altitude orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 113(4):435–452.
- Leonard, C., Hollister, W., and Bergmann, E. (1989). Orbital formationkeeping with differential drag. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 12(1):108–113.
- Leonard, C. L. (1986). Formationkeeping of spacecraft via differential drag. *MS Thesis Draper (Charles Stark) Lab., Inc., Cambridge, MA.*, 1.

- Reid, T. (2009). *The Effect of Aerodynamic Drag Forces on the Formation Flying of Satellites*. PhD thesis, McGill University.
- Rossi, A., Anselmo, L., Pardini, C., Jehn, R., and Valsecchi, G. (2009). The new space debris mitigation (sdm 4.0) long term evolution code. In *Proceedings of the Fifth European Conference on Space Debris, ESA SP-672, CD-ROM, ESA Communication Production Office, Noordwijk, The Netherlands*.
- Rossi, A., Cordelli, A., Farinella, P., and Anselmo, L. (1994). Collisional evolution of the earth’s orbital debris cloud. *Journal of Geophysical Research: Planets (1991–2012)*, 99(E11):23195–23210.
- Rossi, A., Cordelli, A., Farinella, P., Anselmo, L., and Pardini, C. (1997). Long term evolution of the space debris population. *Advances in Space Research*, 19(2):331–340.
- Rossi, A., Valsecchi, G., and Farinella, P. (1999). Risk of collisions for constellation satellites. *Nature*, 399(6738):743–743.
- Rossi, A., Valsecchi, G., and Farinella, P. (2000). Collision risk for high inclination satellite constellations. *Planetary and Space Science*, 48(4):319–330.
- Roy, A. E. (1994). *Orbital motion*. CRC Press.
- Schaub, H. and Junkins, J. L. (2003). *Analytical mechanics of space systems*. Aiaa.
- Schweighart, S. A. and Sedwick, R. J. (2002). High-fidelity linearized j model for satellite formation flight. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(6):1073–1080.
- Valk, S., Lemaître, A., and Deleflie, F. (2009). Semi-analytical theory of mean orbital motion for geosynchronous space debris under gravitational influence. *Advances in Space Research*, 43(7):1070–1082.
- Van den Bergh, F. and Engelbrecht, A. P. (2001). Effects of swarm size on cooperative particle swarm optimisers.
- Vatalaro, F., Corazza, G. E., Caini, C., and Ferrarelli, C. (1995). Analysis of leo, meo, and geo global mobile satellite systems in the presence of interference and fading. *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, 13(2):291–300.