

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

DIEGO SÁ DE LIMA

Teorias duais massivas de $spin-3/2$ em $D=2+1$

Guaratinguetá
2018

Diego Sá de Lima

Teorias duais massivas de $spin-3/2$ em $D=2+1$

Dissertação apresentada ao Conselho de Curso de Pós Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Mestre em Física na área de partículas de campos.

Orientador: Prof^o Dr. Elias Leite Mendonça
Coorientador: Prof^o Dr. Alessandro L. R. dos Santos

Guaratinguetá
2018

L732t Lima, Diego Sá de
Teorias duais massivas de spin-3/2 em $D=2+1$ / Diego Sá de Lima –
Guaratinguetá, 2017
66 f. : il.
Bibliografia: f. 64

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2017.
Orientador: Prof. Dr. Elias Leite Mendonça
Coorientador: Prof. Dr. Alessandro L. R. dos Santos

1. Campos de calibre (Física). 2. Movimento rotacional. 3. Dualidade
(Física nuclear). I. Título

CDU 539.12(043)

Pâmella Benevides Gonçalves
Pâmella Benevides Gonçalves

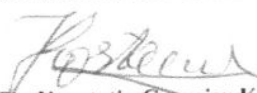
Bibliotecária CRB/8: 9203

DIEGO LIMA DE SÁ

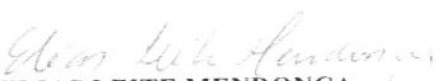
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Konstatin Georgiev Kostov
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
Orientador / UNESP/FEG


Prof. Dr. DENIS DALMAZI
UNESP/FEG


Prof. Dr. ALYSSON FÁBIO FERRARI
UFABC

Fevereiro de 2018

DADOS CURRICULARES

DIEGO SÁ DE LIMA

NASCIMENTO 16 de novembro de 1988 - São Paulo / SP

FILIAÇÃO Nelson Tadeu de Lima
Ana Cristina José de Sá

2011 / 2015 Bacharelado em Física
Universidade Estadual Paulista "Júlio de
Mesquita Filho- UNESP

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe Ana Cristina por não medir esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida, agradeço aos meus irmãos e familiares pelo apoio, com amor agradeço à Leticia Bittencourt pelo companheirismo durante este processo, agradeço à Elias Mendonça pela amizade e orientação, também agradeço à Alessandro Ribeiro pela enorme ajuda e a todos os professores e amigos.

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade:

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior

RESUMO

Nesta dissertação serão analisados os dois modelos conhecidos na literatura que descrevem partículas massivas de spin $3/2$ em $D = 2 + 1$ dimensões. Essa análise será feita, assim como nos trabalhos relacionados aos bósons (spin 1, spin 2 e spin 3), via procedimento de Imersão de Calibre de Noether (ICN), Solda generalizada, análise de vínculos e condições de Fierz-Pauli. Através de argumentos de simetria, via ICN, apresentaremos uma forma de relacionar os dois modelos e mostraremos que é possível construir um novo modelo de terceira ordem em derivadas. Apresentaremos um modelo de dubleto de segunda ordem em derivadas de onde é possível obter os demais modelos auto-duais da teoria. A partir da aplicação da ICN no modelo de dubleto construiremos um novo modelo, de quarta ordem em derivadas, análogo a versão linearizada da chamada "New Massive Gravity".

PALAVRAS-CHAVE: Auto-dual. Imersão de Calibre de Noether. spin-3/2, dualidade.

ABSTRACT

In this master's thesis we will analyze the two known models in the literature which describe massive spin $3/2$ particles in $D = 2 + 1$ dimensions. This analysis will be done, as was previously done on works related to the bosons (spin- 1, spin- 2 and spin- 3), via Noether gauge embedment (NGE) procedure, generalized soldering, hamiltonian constraints analysis and Fierz-Pauli conditions. Through symmetry arguments, by NGE, we will present a way of relating the two models and show that it is possible to construct a new model in third order derivatives. We will show a second order derivative doublet-model whence it is possible to obtain the other self-dual models of the theory. From the application of NGE in the doublet model we will construct a new model, which has a fourth-order derivative term, analogue to the linearized version of the so-called "New Massive Gravity".

KEYWORDS: Self-dual. Noether gauge embedding. spin $3/2$, duality.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Relação entre os modelos de singletos e dubletos para spin 1	12
Figura 2	Relação entre os modelos de singletos e dubletos para spin 2	13
Figura 3	Modelos auto-duais de primeira e segunda ordem	14
Figura 4	Ilustração das relações entre os modelos de singletos para spin3/2 obtido no capítulo 2	48
Figura 5	Ilustração das relações entre os modelos de singletos e do modelo de dublete para spin3/2 proposto no capítulo 3	49
Figura 6	Ilustração completa das relações entre os modelos de singletos e dubletos para spin3/2 em D=2+1 dimensões	50

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	MODELOS DE SINGLETOS PARA SPIN 3/2 EM D=2+1	15
2.1	Modelo auto-dual de primeira ordem	15
2.2	Condições de Fierz-Pauli	17
2.3	Análise dos vínculos: via algoritmo de Dirac-Bergmann	21
2.3.1	Vínculos primários	21
2.3.2	Densidade de Hamiltoniana Canônica	22
2.3.3	Condições de consistência	22
2.3.4	Contagem de vínculos	25
2.4	Imersão de Calibre de Noether	26
2.4.1	De $S_{AD}^{(1)}$ para $S_{AD}^{(2)}$	27
2.4.2	$S_{AD}^{(2)}$ para $S_{AD}^{(3)}$	28
3	MODELOS DE DUBLETOS PARA SPIN 3/2 EM D=2+1	31
3.1	Condições de Fierz-Pauli	32
3.2	Análise de vínculos: via Algoritmo de Dirac-Bergmann	33
3.3	Obtenção do modelo auto-dual de primeira ordem	35
3.4	Imersão de Calibre de Noether para o modelo de dubleto	37
4	FORMALISMO DE SOLDA GENERALIZADA	39
4.1	Solda dos modelos de segunda ordem com massas distintas	39
4.2	Solda dos modelos de terceira ordem com massas distintas	44
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	48
	REFERÊNCIAS	52
	APÊNDICE A – IDENTIDADES DAS MATRIZES DE DIRAC	55
A.1	Identities em D=2+1 dimensões	55
A.2	Identities em D=3+1 dimensões	56
	APÊNDICE B – SISTEMAS HAMILTONIANOS VINCULADOS E O ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN	57

B.0.1	Algoritmo de Dirac-Bergmann	59
B.0.2	Transformações de calibre e Contagem do Número de Graus de Liberdade	60
	APÊNDICE C – REPRESENTAÇÃO DOS ESPINORES DE DI- RAC E MAJORANA	62
C.0.1	Equação de Dirac	62
C.0.2	Soluções da equação de Dirac	63
C.0.3	Férmion de Majorana	65
C.0.4	Conjugação de carga	66

1 INTRODUÇÃO

Modelos distintos que descrevem o mesmo fenômeno físico, como o caso da dualidade onda-partícula, desempenham um papel importante na interpretação física também no contexto da teoria quântica de campos. O fato é que características não aparentes em determinada descrição podem ser evidentes na versão dual. Isso ilustra e resume a importância do estudo das relações de dualidade. Aqui, a partir de uma visão construtivista da física - no sentido de construir cada novo modelo a partir de um já concebido - e também em analogia aos casos bosônicos, restringimos o estudo das dualidades para teorias de gauge massivas em mundos planares com $D = 2 + 1$ dimensões. Fato conhecido é que modelos massivos em $D = 2 + 1$ estão associados a modelos não massivos em $D = 3 + 1$ dimensões e também que os modelos massivos em $D = 2 + 1$ fazem o papel de "building blocks" de teorias massivas em dimensões mais altas e teorias de supergravidade, no entanto, podemos também apresentar como motivação para restrição deste estudo em $D = 2 + 1$ a dificuldade técnica em trabalhar em dimensões mais altas.

Uma das motivações igualmente importante no estudo dos modelos de spin $3/2$, mesmo não sendo o principal foco deste trabalho, é a descrição da partícula conhecida como gravitino no contexto da supergravidade, sendo um férmion de Majorana¹, descrita pela equação de Rarita Schwinger e parceira supersimétrico do gráviton (spin 2), que é a partícula associada ao campo gravitacional. Desta forma a supergravidade (SUGRA), sendo a combinação da teoria supersimétrica com a relatividade geral, assim como as relações de dualidade, criam um terreno fértil para o florescer deste estudo.

Começando pelo spin-1, observamos que parece haver uma relação do tipo $2s^2$ para o número de modelos distintos auto-duais que descrevem a mesma partícula, sendo s o valor do spin. O primeiro modelo, denominado auto-dual (AD), obtido em (TOWNSEND; PILCH; NIEUWENHUIZEN, 1984) descreve um singlete massivo em $D = 2 + 1$. Tal modelo não possui simetria devido ao termo de massa de Proca, que quebra a invariância sob a transformação $\delta A_\mu = \partial_\mu \phi$. O segundo modelo, conhecido como modelo de Maxwell-Chern-Simons (MCS) (DESER; JACKIW; TEMPLETON, 1982), é invariante sob a transformação anterior. Este modelo pode ser obtido a partir do modelo auto-dual via Imersão de Calibre de Noether (ICN). A equivalência entre esses dois modelos em nível quântico é demonstrada em (GOMES; MALACARNE; SILVA, 1998), acoplados com um

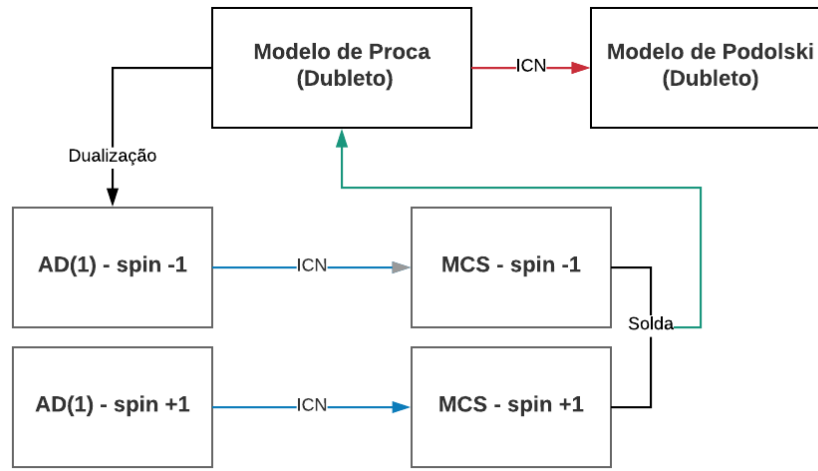
¹ Um breve resumo é apresentado no apêndice C

² A princípio esta relação entre o número de modelos auto-duais e o valor do spin, parece ser apenas uma coincidência.

campo fermiônico, (FERRARI et al., 2009) para o caso supersimétrico acoplado com um campo fermiônico, e em (DALMAZI; MENDONCA, 2006) acoplados com um campo escalar. Via imersão podemos relacioná-los da seguinte maneira:

$$S_{AD}^{(1)} \xrightarrow{\delta A_\mu = \partial_\mu \phi} S_{MCS} \quad (1.1)$$

Figura 1 – Relação entre os modelos de singletos e dubletos para spin 1



fonte: Produção do próprio autor.

Uma vez que parece não existir uma nova transformação de calibre que quebre a invariância do modelo de MCS, concluímos que aparentemente existem apenas os dois modelos auto-duais para spin 1, sendo o modelo AD de primeira e o MCS de segunda ordem nas derivadas. A partir da aplicação do formalismo de solda nos modelos de singletos de MCS, obtemos o modelo de Proca, que descreve um dubleto de spin 1 massivo. Aplicando a técnica de imersão no modelo de Proca obtemos o modelo de Podolsky³. Essas relações podem ser vistas na Figura 1.

No caso das teorias de spin-2 temos quatro modelos auto-duais, sendo a ação $S_{AD2}^{(1)}$ de primeira, $S_{AD2}^{(2)}$ de segunda, $S_{AD2}^{(3)}$ de terceira e $S_{AD2}^{(4)}$ de quarta ordem em derivadas, fazendo valer também uma relação do tipo $2s$. Esses modelos são conectados via técnica de ICN e ação mestra (DALMAZI; MENDONCA, 2009d)(DALMAZI; MENDONCA, 2009a), onde é possível demonstrar a equivalência entre os quatro modelos a nível clássico e quântico,

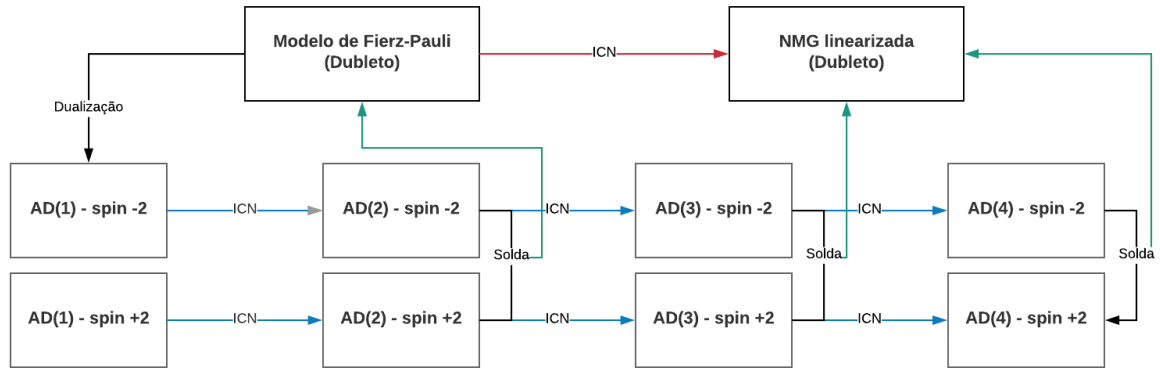
³ Pode-se verificar através da análise do resíduo do propagador que esse modelo contém fantasmas.

respectivamente, segundo as relações:

$$S_{AD}^{(1)} \xrightarrow{\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu} S_{AD}^{(2)} \xrightarrow{\delta h_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha} \Lambda^\alpha} S_{AD}^{(3)} \xrightarrow{\delta h_{\mu\nu} = \phi \eta_{\mu\nu}} S_{AD}^{(4)} \quad (1.2)$$

No caso das teorias de spin-2, temos um duplo interesse pelo fato de estarem relacionadas com versões linearizadas dos modelos gravitacionais. Em (DALMAZI; MENDONCA, 2009c)(DALMAZI; MENDONCA, 2009b) por exemplo, através do procedimento de solda generalizada, que mistura as helicidades de dois singletos num modelo de dubleto com ordem igual ou superior em derivadas, foi obtida a versão linearizada do modelo conhecido como "New Massive Gravity"(BERGSHOEFF; HOHM; TOWNSEND, 2009). Na Figura 2 podemos observar as conexões entre os modelos.

Figura 2 – Relação entre os modelos de singletos e dubletos para spin 2



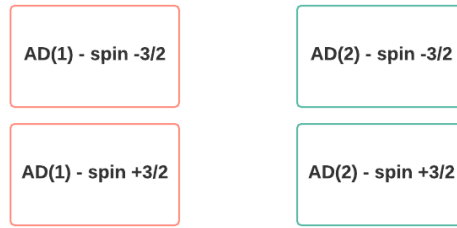
fonte: Produção do próprio autor.

Contudo a relação $2s$ parece falhar para spin-3, pois temos apenas quatro modelos conhecidos (MENDONCA, 2012), sendo de primeira a quarta ordem em derivadas sucessivamente. Assim como nos casos anteriores, esses modelos podem ser conectados via argumentos de simetria dados por:

$$S_{AD}^{(1)} \xrightarrow{\delta \omega_{\mu(\nu\alpha)} = \partial_\mu \xi_{(\nu\alpha)}} S_{AD}^{(2)} \xrightarrow{\delta \omega_{\mu(\nu\alpha)} = \varepsilon_{\mu\alpha\rho} \Lambda_\nu^\rho + \varepsilon_{\mu\nu\rho} \Lambda_\alpha^\rho} S_{AD}^{(3)} \xrightarrow{\delta \phi_{\mu\nu\alpha} = \partial_\mu \xi_{(\nu\alpha)}} S_{AD}^{(4)} \quad (1.3)$$

Novas transformações de simetria estão sendo investigadas para spin 3, que permita alcançar os modelos $S_{AD}^{(5)}$ e $S_{AD}^{(6)}$, caso venham a existir. Pode-se observar que até este ponto o assunto é restrito ao caso bosônico. Neste trabalho, no entanto, generalizaremos os argumentos aplicados nos casos bosônicos para os modelos auto-duais massivos de spin-3/2 em $D = 2 + 1$ (DESER; KAY, 1983).

Figura 3 – Modelos auto-duais de primeira e segunda ordem



fonte: Produção do próprio autor.

No contexto dos modelos de spin $3/2$, temos a princípio o caso representado pela Figura 3, onde os modelos de primeira e segunda ordem não estão conectados. Começaremos aplicando as condições de Fierz-Pauli no modelo de primeira ordem, contando o número de graus de liberdade descrito pelo modelo e comparando com o resultado obtido através da análise da estrutura de vínculos via algoritmo de Dirac-Bergmann. Mostraremos ainda no capítulo 2 que o modelo auto-dual de primeira ordem pode ser conectado ao modelo de segunda ordem e que uma relação do tipo $2s$ pode ser verificada através da existência de um terceiro modelo.

No capítulo 3, obteremos a partir da proposta de um novo modelo de dubleto, via procedimento de dualização, o modelo auto-dual de primeira ordem, sendo possível verificar uma relação análoga entre os modelos ao que se tem para spin-2. No capítulo 4, ainda em analogia a teoria spin-2, aplicaremos o procedimento de solda no modelo de segunda e terceira ordem, mostrando que é possível obter um modelo de quarta ordem nas derivadas análogo à versão linearizada da New Massive Gravity. Parte destes resultados se encontram na publicação (MENDONCA; SANTOS; LIMA, 2017).

2 MODELOS DE SINGLETOS PARA SPIN 3/2 EM D=2+1

2.1 MODELO AUTO-DUAL DE PRIMEIRA ORDEM

O modelo auto-dual de primeira ordem nas derivadas em $D = 2 + 1$ dimensões, que descreve um singlete de spin $3/2$, ou seja, descreve apenas um modo de propagação, sendo a helicidade $3/2$ ou $-3/2$ dependendo do sinal atribuído ao termo de massa, fora concebido em ((DESER; KAY, 1983)) e é dado por:

$$-i\mathcal{L}_{AD} = \mathcal{L}^{(1)} = -\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\psi}_\mu\partial_\nu\psi_\alpha + m\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\psi_\alpha, \quad (2.1)$$

ou em termos da ação:

$$S_{AD}^{(1)} = \int d^3x (-\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\psi}_\mu\partial_\nu\psi_\alpha + m\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\psi_\alpha). \quad (2.2)$$

Durante este trabalho adotaremos a assinatura da métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +)$. Os campos $\bar{\psi}_\mu$ e ψ_μ são espinores vetores de Majorana de duas componentes, sendo $\bar{\psi}_\mu$ o adjunto de ψ_μ . Os índices gregos são relacionados a componentes do espaço-tempo, enquanto os componentes espinoriais são omitidos para não sobrecarregar o texto. As matrizes gama são dadas em $D = 2 + 1$ por: $\gamma_0 = \sigma_3$, $\gamma_1 = i\sigma_1$ e $\gamma_2 = i\sigma_2$, sendo σ_1 , σ_2 e σ_3 as matrizes de pauli.¹

O modelo fermiônico acima apresenta uma série de similaridades com os modelos auto-duais bosônicos, por exemplo, em ambos os casos temos uma descrição de apenas um modo propagante e uma ausência de simetria com relação a transformação² $\delta\psi_\mu = \partial_\mu\Lambda$ e $\delta\bar{\psi}_\mu = \partial_\mu\bar{\Lambda}$, sendo $\bar{\Lambda}$ e Λ espinores arbitrários que dependem do espaço e do tempo.

A partir da equação de movimento podemos obter uma equação de Klein-Gordon, Dirac e como veremos, por meio de dois métodos distintos, obteremos o número adequado de graus de liberdade. A contagem do número de graus de liberdade pode ser feita, através de um estudo sistemático da estrutura de vínculos da teoria, utilizando o algoritmo de Dirac-Bergmann. Uma abordagem alternativa, consiste em encontrar um conjunto de vínculos a partir das equações de movimento, conhecidas como condições de Fierz-Pauli. Para uma teoria bosônica de spin s , essas condições são dadas por:

¹ As matrizes gama são apresentadas de forma explícita no apêndice A

² Na seção 2.3 construiremos um modelo invariante sob essa transformação de calibre a partir da técnica de Imersão de Calibre de Noether.

$$\phi^{[\mu_1, \dots, \mu_s]} = 0 \quad (2.3)$$

$$\partial_\mu \phi^{\mu_1, \dots, \mu_s} = 0 \quad (2.4)$$

$$\eta_{\mu_1 \mu_2} \phi^{\mu_1, \dots, \mu_s} = 0 \quad (2.5)$$

$$(\square - m^2) \phi^{\mu_1, \dots, \mu_s} = 0 \quad (2.6)$$

Na contrapartida, para o caso fermiônico, essas condições são substituídas por³:

$$\psi^{[\mu_1, \dots, \mu_s]} = 0 \quad (2.7)$$

$$\partial_\mu \psi^{\mu_1, \dots, \mu_s} = 0 \quad (2.8)$$

$$\eta_{\mu_1 \mu_2} \psi^{\mu_1, \dots, \mu_s} = 0 \quad (2.9)$$

$$(\square - m^2) \psi^{\mu_1, \dots, \mu_s} = 0 \quad (2.10)$$

$$(\not{\partial} - m) \psi^{\mu_1, \dots, \mu_s} = 0 \quad (2.11)$$

$$\gamma_\mu \psi^{\mu_1, \dots, \mu_s} = 0 \quad (2.12)$$

Uma formulação lagrangiana para os campos massivos de spin- s foi obtida pela primeira vez em 1974 por Singh e Hagen (SINGH; HAGEN, 1974a)(SINGH; HAGEN, 1974b). Nota-se a necessidade de campos auxiliares de spin mais baixo, tais como $s-2$, $s-3$, ... de tal forma a remover os graus de liberdade espúrios, que por vezes poderiam ser fantasmas. Em 1978 Fronsda (FANG; FRONSDAL, 1978) investigou também a contrapartida não-massiva. No limite não massivo notou-se que uma condição extra chamado de duplo traço nulo deve completar as condições de Fierz-Pauli, pois campos de posto $s-2$ permaneciam acoplados à teoria e desta forma teríamos no caso bosônico de spin $s > 3$ a condição:

$$\eta_{\mu_1 \mu_2} \eta_{\mu_3 \mu_4} \phi^{\mu_1, \dots, \mu_s} = 0. \quad (2.13)$$

Da mesma forma Fang e Fronsda (BOUATTAA; COMPERE; SAGNOTTI, 2004) adaptaram o resultado bosônico para o caso fermiônico, onde teríamos a condição de triplo gama traço nulo, dada por:

$$\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \psi^{\mu_1, \dots, \mu_s} = 0. \quad (2.14)$$

³ As expressões $\phi^{[\mu_1, \dots, \mu_s]} = 0$ e $\psi^{[\mu_1, \dots, \mu_s]} = 0$ indicam que os campos devem ser inteiramente simétricos.

2.2 CONDIÇÕES DE FIERZ-PAULI

Através das condições de Fierz-Pauli, que podem ser usadas como método alternativo na contagem do número de graus de liberdade, vamos analisar os vínculos a partir das equações de movimento. Para o modelo de primeira ordem:

$$-i\mathcal{L}_{AD} = \mathcal{L}^{(1)} = -\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \bar{\psi}_\mu \partial_\nu \psi_\alpha + m\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \psi_\alpha.$$

Tendo em vista que os procedimentos aplicados num campo podem ser igualmente reproduzido em seu conjugado, as condições serão apresentadas para apenas um dos campos, sendo no nosso caso $\bar{\psi}_\mu$. Para este campo a equação de movimento é expressa da seguinte maneira:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \bar{\psi}_\mu + m\varepsilon^{\mu\nu\rho} \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu = 0. \quad (2.15)$$

A partir das equação de movimento, obteremos duas das condições de Fierz-Pauli, que são dadas pela transversalidade da derivada e do vínculo denominado gama traço-nulo. Aplicando ∂_ρ na eq. (2.15), obtemos:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\rho \partial_\nu \bar{\psi}_\mu + m\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\rho \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu = 0, \quad (2.16)$$

e utilizando $\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\rho \partial_\nu = 0$, encontramos:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\rho \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu = 0. \quad (2.17)$$

Guardando esse resultado e aplicando γ_ρ na eq. (2.15), ficamos com:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \bar{\psi}_\mu \gamma_\rho + m\varepsilon^{\mu\nu\rho} \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho = 0. \quad (2.18)$$

É importante notar que o primeiro termo dessa equação é nulo devido a eq. (2.17), e utilizando a expressão⁴ $\gamma_\nu \gamma_\rho = \eta_{\nu\rho} + \varepsilon_{\nu\rho\lambda} \gamma^\lambda$, escrevemos:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} \bar{\psi}_\mu (\eta_{\nu\rho} + \varepsilon_{\nu\rho\lambda} \gamma^\lambda) = 0 \quad (2.19)$$

Sabendo que $\varepsilon^{\mu\nu\rho} \eta_{\nu\rho} = 0$ e $\varepsilon^{\mu\nu\rho} \varepsilon_{\nu\rho\lambda} = 2\delta_\lambda^\rho$, determinamos então a condição gama traço-nulo para γ^λ :

$$\bar{\psi}_\lambda \gamma^\lambda = 0. \quad (2.20)$$

⁴ Vide o apêndice A.

Aplicando $\gamma_\nu \gamma_\rho = \eta_{\nu\rho} + \varepsilon_{\nu\rho\lambda} \gamma^\lambda$, podemos reescrever a eq. (2.15) na forma dada por:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \bar{\psi}_\mu + m \bar{\psi}_\mu (\eta^{\mu\rho} - \gamma^\mu \gamma^\rho) = 0 \quad (2.21)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \bar{\psi}_\mu + m \bar{\psi}^\rho = 0. \quad (2.22)$$

Aplicando então ∂_ρ na eq.(2.22) :

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\rho \partial_\nu \bar{\psi}_\mu + m \partial_\rho \bar{\psi}^\rho = 0, \quad (2.23)$$

$$\partial_\rho \bar{\psi}^\rho = 0. \quad (2.24)$$

Deste modo, sabemos que o campo é transverso e gama-traço nulo.

Equação de Klein-Gordon

Todo campo relativístico massivo deve satisfazer a equação de Klein-Gordon. Para o nosso caso, utilizando a equação (2.22), podemos aplicar $\varepsilon_{\rho\lambda\beta} \partial^\beta$ e obter :

$$\varepsilon_{\rho\lambda\beta} \varepsilon^{\rho\mu\nu} \partial^\beta \partial_\nu \bar{\psi}_\mu + m \varepsilon_{\rho\lambda\beta} \partial^\beta \bar{\psi}^\rho = 0, \quad (2.25)$$

$$\partial^\nu \partial_\nu \bar{\psi}_\lambda - \partial^\mu \partial_\lambda \bar{\psi}_\mu + m \varepsilon_{\rho\lambda\beta} \partial^\beta \bar{\psi}^\rho = 0. \quad (2.26)$$

Utilizando a restrição de transversalidade, temos o segundo termo da equação (2.26) nulo, e utilizando a equação (2.22):

$$(\square - m^2) \bar{\psi}_\lambda = 0. \quad (2.27)$$

Com o mesmo procedimento encontramos essa relação para o campo ψ_λ .

Equação de Majorana

Aplicando $\varepsilon_{\rho\lambda\beta} \gamma^\beta$ na equação de movimento (2.15), obtemos:

$$-\varepsilon^{\mu\nu\rho} \bar{\psi}_\mu \partial_\nu \varepsilon_{\rho\lambda\beta} \gamma^\beta + m \varepsilon^{\mu\nu\rho} \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \varepsilon_{\rho\lambda\beta} \gamma^\beta = 0, \quad (2.28)$$

que pode ser reescrita na expressão:

$$\bar{\psi}_\lambda \partial_\beta \gamma^\beta + m \bar{\psi}_\lambda \gamma_\beta \gamma^\beta - m \bar{\psi}_\beta \gamma_\lambda \gamma^\beta = 0, \quad (2.29)$$

$$\bar{\psi}_\lambda \partial_\beta \gamma^\beta + 3m\bar{\psi}_\lambda - m\bar{\psi}_\beta \gamma_\lambda \gamma^\beta = 0. \quad (2.30)$$

Com a utilização de $\gamma^\alpha \gamma_\lambda + \gamma_\lambda \gamma^\alpha = 2\delta_\lambda^\alpha$ em (2.30), enfim obtemos a equação de Majorana:

$$\bar{\psi}_\lambda (\gamma^\beta \partial_\beta - m) = 0. \quad (2.31)$$

Completando desta maneira o conjunto de condições de Fierz-Pauli para o campo fermiônico.

Contagem do número de graus de liberdade

Sendo satisfeitas todas as condições necessárias para a descrição de partículas massivas de spin $3/2$, podemos levar a cabo a contagem do número de graus de liberdade total da teoria.

A eliminação dos graus de liberdade espúrios deve levar em conta, com a devida atenção, que estamos trabalhando com um espinor vetor com duas componentes. Neste caso a transversalidade $\partial_\mu \psi^\mu = 0$, com os índices contraídos, retira o caráter vetorial do espinor e nos leva à eliminação de dois graus de liberdade, que se referem as duas componentes espinoriais restantes. Para a condição gama traço-nulo $\gamma_\mu \psi^\mu = 0$ temos a mesma situação, ficando com o cenário geral dado por:

- $\partial_\mu \psi^\mu = 0$ elimina dois graus de liberdade,
- $\gamma_\mu \psi^\mu = 0$ elimina dois graus de liberdade.

Precisamos de outra condição para reproduzir o resultado encontrado através da utilização do algoritmo de Dirac-Bergmann, pois chegamos no valor $N = 6 - 2 - 2 = 2$ para o número de graus de liberdade de cada campo. A condição subsidiária vem por meio da relação de Pauli-Lubanski:

$$[(P.J)^{\mu\nu} + sm\eta^{\mu\nu}] \tilde{\psi}_\nu = 0, \quad (2.32)$$

onde P é o operador momento, J a parte de spin do gerador de rotações de Lorentz e s o spin, ou no nosso caso a helicidade. É importante notar que essa equação só é válida para um campo transverso, gama traço-nulo, que pode ser identificado pelo til sobre a representação do campo. Essa condição elimina um grau de liberdade, nos deixando com apenas um modo propagante para cada campo, o que é coerente com o resultado

encontrado através do algoritmo de Dirac-Bergmann.

Faz-se então necessário obter o "gerador de spin" para partículas massivas de spin $3/2$. Esse resultado pode ser adaptado do trabalho (KOENIGSTEIN; GIACOSA; RISCHKE, 2016), onde os autores fornecem uma expressão para o momento angular orbital total, o qual compreende a parte de spin. Uma vez que no grupo $SO(3)$ esse objeto é um tensor anti-simétrico de rank-2, podemos usar do fato que em $D = 2 + 1$ dimensões todo tensor anti-simétrico pode ser escrito como:

$$I_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha} J^\alpha, \quad (2.33)$$

onde J^α que é precisamente o objeto que procuramos, é dado por:

$$(J^\alpha)^{\mu\nu} = i\varepsilon^{\mu\alpha\nu} + i\frac{\gamma^\alpha}{2}\eta^{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

Nota-se com isso, do trabalho (BINEGAR, 1982) que nosso resultado é então a soma dos geradores de spin 1 e $1/2$. Com isso é natural que satisfaça uma álgebra de Lie:

$$[J_\mu, J_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\alpha} J^\alpha, \quad (2.35)$$

uma vez que é sabido que os geradores de spin 1 e $1/2$ satisfazem. Bom, se recordarmos da equação de movimento (2.15) notamos que, usando a condição de gama-traço nulo ela pode ser colocada da seguinte forma:

$$-\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\nu \psi_\alpha + m\psi^\mu = 0. \quad (2.36)$$

Como esperamos um valor de spin $s = 3/2$, é conveniente reescrever a equação (2.36) da seguinte maneira:

$$-\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\nu \psi_\alpha - \frac{m}{2}\psi^\mu + \frac{3m}{2}\psi^\mu = 0. \quad (2.37)$$

Usando agora a eq. de Rarita-Schwinger obtida em (2.31), temos:

$$-\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\nu \psi_\alpha - \frac{\gamma^\alpha \partial_\alpha}{2}\psi^\mu + \frac{3m}{2}\psi^\mu = 0, \quad (2.38)$$

que é precisamente a equação de Pauli-Lubanski (2.32) com o uso de (2.34). De maneira similar, em $D = 2 + 1$ dimensões, se nós trabalharmos com férmions de spin $1/2$ representados por espiniores de duas componentes, cuja as matrizes gama são 2×2 , obedecendo $[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha} \gamma^\alpha$ e operadores de spin $S_\mu = \frac{\gamma_\mu}{2}$ satisfazem uma álgebra de Lie, a equação de Dirac $\bar{\psi}(i\not{\partial} \mp m)\psi = 0$ pode ser escrita como $(S_\mu P^\mu \mp m/2)\psi = 0$, garantindo dessa

maneira que os férmions de duas componentes possuem helicidade $\mp 1/2$ em $D = 2 + 1$ dimensões, como foi apontado em (JACKIW; NAIR, 1991) e também na nota de rodapé de (DALMAZI; DUTRA, 2007).

2.3 ANÁLISE DOS VÍNCULOS: VIA ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN

Uma breve revisão sobre sistemas hamiltonianos vinculados e algoritmo de Dirac-Bergmann será apresentada no apêndice B, com a finalidade de obter o número de graus de liberdade descrito pelo modelo auto-dual de primeira ordem.

Com o arcabouço teórico do algoritmo de Dirac-Bergmann⁵ em mãos, podemos aplicá-lo no modelo auto-dual de primeira ordem. Faremos a análise hamiltoniana dos vínculos contando os graus de liberdade do sistema e comparando com o valor teórico esperado. Para conhecimento, a densidade de lagrangiana é expressa da seguinte maneira:

$$-i\mathcal{L}_{AD} = \mathcal{L}^{(1)} = -\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \bar{\psi}_\mu \partial_\nu \psi_\alpha + m\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \psi_\alpha, \quad (2.39)$$

ou separando as componentes espaciais das componentes temporais:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} = & \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_i \dot{\psi}_j - \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_0 \partial_i \psi_j - \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_i \partial_j \psi_0 \\ & + m\varepsilon^{ij} \bar{\psi}_0 \gamma_i \psi_j - m\varepsilon^{ij} \bar{\psi}_i \gamma_0 \psi_j + m\varepsilon^{ij} \bar{\psi}_i \gamma_j \psi_0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde definimos $\varepsilon^{ij} \equiv \varepsilon^{0ij}$.

2.3.1 Vínculos primários

O algoritmo é usado em sistemas vinculados, logo se faz necessário encontrar esses vínculos. Sabemos que os vínculos primários são obtidos, sem a necessidade do uso das equações de movimento, a partir dos momentos canonicamente conjugados. Esses momentos são dados por:

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \dot{\psi}_0} = 0 \quad , \quad \bar{\pi}^0 = \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_0} = 0 \quad (2.41)$$

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \dot{\psi}_i} = 0 \quad , \quad \bar{\pi}^i = \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_i} = -\varepsilon^{ji} \bar{\psi}_j \quad (2.42)$$

⁵ Um breve resumo é apresentado no apêndice B.

Podemos ver que não é possível escrever π^μ em termos de $\dot{\psi}_\mu$ e $\bar{\pi}^\mu$ em termos de $\dot{\bar{\psi}}_\mu$. Encontramos então dois grupos de vínculos do tipo $\phi(\pi, \psi) \approx 0$ e $\phi(\bar{\pi}, \bar{\psi}) \approx 0$, dados por:

$$\phi^0 = \pi^0 \approx 0 \quad (2.43)$$

$$\bar{\phi}^0 = \bar{\pi}^0 \approx 0 \quad (2.44)$$

$$\phi^i = \pi^i \approx 0 \quad (2.45)$$

$$\bar{\phi}^i = \bar{\pi}^i - \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_j \approx 0 \quad (2.46)$$

Esses vínculos são denominados primários, ainda não sendo possível determinar se são de primeira ou segunda classe.

2.3.2 Densidade de Hamiltoniana Canônica

Devemos, por conta do algoritmo, trabalhar com a hamiltoniana e não com a lagrangiana. A partir do uso da transformada de Legendre, encontramos a expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{\bar{\psi}}_\mu \pi^\mu - \bar{\pi}^\mu \dot{\psi}_\mu - \mathcal{L}^{(1)} \\ &= \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_0 \partial_i \psi_j + \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_i \partial_j \psi_0 - m \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_0 \gamma_i \psi_j + m \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_i \gamma_0 \psi_j - m \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_i \gamma_j \psi_0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

A hamiltoniana total no nosso caso é dada por:

$$H = \int d^2x [\mathcal{H} + \bar{\lambda}_\mu \phi^\mu + \bar{\phi}^\mu \lambda_\mu], \quad (2.48)$$

onde $\mathcal{H}$ é a densidade de hamiltoniana canônica em (2.47) e λ_μ e $\bar{\lambda}_\mu$ os multiplicadores de Lagrange. A densidade de lagrangiana utilizada possui dois campos independentes, implicando em dois conjuntos de vínculos, logo, como visto em (2.48), necessitamos também de dois conjuntos de multiplicadores.

2.3.3 Condições de consistência

Para obtermos todos os vínculos do modelo auto-dual de spin-3/2 vamos aplicar o algoritmo de Dirac-Bergamnn. Para isso será necessário conhecermos os parênteses de Poisson entre os campos fermiônicos ψ_μ e $\bar{\psi}_\mu$ e os seus respectivos momentos conjugados $\bar{\pi}^\mu$ e π^μ :

$$\begin{aligned}
\{\psi_\mu(y), \psi_\nu(x)\} &= \{\bar{\psi}_\mu(y), \bar{\psi}_\nu(x)\} = \{\pi^\mu(y), \pi^\nu(x)\} = \{\bar{\pi}^\mu(y), \bar{\pi}^\nu(x)\} = 0, \\
\{\psi_\mu(y), \pi^\nu(x)\} &= \{\bar{\psi}_\mu(y), \bar{\pi}^\nu(x)\} = 0, \\
\{\psi_\mu(y), \bar{\pi}^\nu(x)\} &= -\delta_{\mu\nu} \delta^2(x-y) = \{\bar{\psi}_\mu(y), \pi^\nu(x)\}.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Como condição necessária para aplicação da formulação, os vínculos primários devem ser preservados no tempo; então olhando primeiramente para o conjunto de vínculos ϕ^i , temos:

$$0 = \dot{\phi}^i(y) \approx \int d^2x \left[\{\phi^i(y), \mathcal{H}(x)\} - \bar{\lambda}_\mu(x) \{\phi^i(y), \phi^\mu(x)\} + \{\phi^i(y), \bar{\phi}^\mu(x)\} \lambda_\mu(x) \right], \tag{2.50}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
\{\phi^i, \mathcal{H}\} &= [-\varepsilon^{ij} \partial_j \psi_0 - m \varepsilon^{ij} \gamma_0 \psi_j + m \varepsilon^{ij} \gamma_j \psi_0] \delta^2(x-y) \\
\{\phi^i, \bar{\phi}^j\} &= -\varepsilon^{ij} \delta^2(x-y),
\end{aligned} \tag{2.51}$$

com os demais parênteses de Poisson entre os vínculos nulos. Somos capazes de determinar o multiplicador de Lagrange λ_i substituindo (2.51) em (2.50).

$$\lambda_i \approx -\partial_i \psi_0 - m \gamma_0 \psi_i + m \gamma_i \psi_0. \tag{2.52}$$

Da mesma maneira, aplicando a condição de consistência para $\bar{\phi}^i$:

$$0 = \dot{\bar{\phi}}^i(y) \approx \int d^2x \left[\{\bar{\phi}^i(y), \mathcal{H}(x)\} - \bar{\lambda}_\mu(x) \{\bar{\phi}^i(y), \phi^\mu(x)\} + \{\bar{\phi}^i(y), \bar{\phi}^\mu(x)\} \lambda_\mu(x) \right], \tag{2.53}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
\{\bar{\phi}^i, \mathcal{H}\} &= [-\varepsilon^{ij} \bar{\psi}_0 \partial_j^{(x)} + m \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_0 \gamma_j - m \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_j \gamma_0] \delta^2(x-y) \\
\{\bar{\phi}^i, \phi^j\} &= \varepsilon^{ij} \delta^2(x-y),
\end{aligned} \tag{2.54}$$

e os demais parênteses entre os vínculos nulos, obtemos o multiplicador de Lagrange $\bar{\lambda}_i$:

$$\bar{\lambda}_i \approx \partial_i \bar{\psi}_0 + \bar{\psi}_0 \gamma_i - m \bar{\psi}_i \gamma_0. \quad (2.55)$$

Substituindo os multiplicadores λ_i e $\bar{\lambda}_i$ e seus respectivos vínculos em H obtemos

$$H = \int d^2x [\mathcal{H}' + \bar{\lambda}_0 \phi^0 + \bar{\phi}^0 \lambda_0], \quad (2.56)$$

onde $\mathcal{H}'$ é a densidade de hamiltoniana canônica redefinida, dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' = & \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_0 \partial_i \psi_j - m \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_0 \gamma_i \psi_j + \partial_i \bar{\psi}_0 \pi^i - \bar{\pi}^i \partial_i \psi_0 + m \bar{\psi}_0 \gamma_i \pi^i - m \bar{\psi}_i \gamma_0 \pi^i \\ & - m \bar{\pi}^i \gamma_0 \psi_i + m \bar{\pi}^i \gamma_i \psi_0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Redefinir a densidade de hamiltoniana canônica, incluindo λ_i e $\bar{\lambda}_i$ e seus respectivos vínculos, pode por muitas vezes nos ajudar na contagem final dos vínculos do modelo, evitando assim vínculos redundantes que podem levar a uma contagem errada do número de graus de liberdade.

Para a condição de consistência para ϕ^0 , temos:

$$0 = \dot{\phi}^0(y) \approx \int d^2x \left[\{ \phi^0(y), \mathcal{H}'(x) \} - \bar{\lambda}_0(x) \{ \phi^0(y), \phi^0(x) \} + \{ \phi^0(y), \bar{\phi}^0(x) \} \lambda_0(x) \right]. \quad (2.58)$$

Sendo:

$$\{ \phi^0, \mathcal{H}' \} = [-\varepsilon^{ij} \partial_j \psi_j + m \varepsilon^{ij} \gamma_i \psi^j - \pi^i \partial_i^{(x)} - m \gamma_i \pi^i] \delta^2(x-y), \quad (2.59)$$

e os demais parênteses entre os vínculos nulos, obtemos diferentemente dos dois casos anteriores um vínculo secundário, dado por:

$$\chi = \partial_i \pi^i - m \gamma_i \pi^i - \varepsilon^{ij} \partial_i \psi_j + m \varepsilon^{ij} \gamma_i \psi_j \approx 0. \quad (2.60)$$

Notemos, porém, que o vínculo (2.45) nos permite usar $\pi^i = \phi^i$ em (2.60). Mas $\phi^i \approx 0$, de modo que o vínculo secundário pode ser reescrito como:

$$\chi = -\varepsilon^{ij} \partial_i \psi_j + m \varepsilon^{ij} \gamma_i \psi_j \approx 0, \quad (2.61)$$

para a condição de consistência para $\bar{\phi}^0$, temos:

$$0 = \dot{\bar{\phi}}^0(y) \approx \int d^2x \left[\{ \bar{\phi}^0(y), \mathcal{H}'(x) \} - \bar{\lambda}_0(x) \{ \bar{\phi}^0(y), \phi^0(x) \} + \{ \bar{\phi}^0(y), \bar{\phi}^0(x) \} \lambda_0(x) \right]. \quad (2.62)$$

Sendo:

$$\{ \bar{\phi}^0, \mathcal{H}' \} = [-\bar{\pi}^i \partial_i^{(x)} + m \bar{\pi}^i \gamma_i] \delta^2(x-y), \quad (2.63)$$

e os demais parênteses entre os vínculos nulos, obtemos assim como no caso anterior, um novo vínculo secundário dado por:

$$\bar{\chi} = \partial_i \bar{\pi}^i + m \bar{\pi}^i \gamma_i \approx 0. \quad (2.64)$$

De (2.46) temos que $\bar{\pi}^i = \bar{\phi}^i + \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_j$. Substituindo em (2.64) e usando o fato que $\bar{\phi}^i \approx 0$ obtemos:

$$\bar{\chi} = \varepsilon^{ij} \partial_i \bar{\psi}_j - m \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_i \gamma_j \approx 0. \quad (2.65)$$

Continuando com o algoritmo, aplicando as condições de consistência aos vínculos secundários χ e $\bar{\chi}$ obtemos, respectivamente, os seguintes vínculos terciários:

$$\Omega = -m \varepsilon^{ij} \gamma_0 \partial_i \psi_j - m^2 \varepsilon^{ij} \gamma_0 \gamma_i \psi_j - m^2 \varepsilon^{ij} \gamma_i \gamma_j \psi_0 \approx 0 \quad (2.66)$$

e

$$\bar{\Omega} = -m \varepsilon^{ij} \partial_i \bar{\psi}_j \gamma_0 - m^2 \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_0 \gamma_i \gamma_j - m^2 \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_i \gamma_j \gamma_0 \approx 0. \quad (2.67)$$

Ao aplicar as condições de consistência aos vínculos terciários Ω e $\bar{\Omega}$ determinamos, respectivamente, os multiplicadores de Lagrange λ_0 e $\bar{\lambda}_0$, uma vez que

$$\{ \psi, \bar{\phi}^0 \} = \{ \bar{\psi}, \phi^0 \} = m^2 \varepsilon^{ij} \gamma_i \gamma_j \delta^2(x-y). \quad (2.68)$$

Termina-se então o algoritmo de Dirac-Bergmann, com todos os vínculos do modelo determinados.

2.3.4 Contagem de vínculos

A contagem final dos vínculos, tendo sido determinados todos os multiplicadores de Lagrange, é dada da seguinte maneira:

- 6 vínculos primários de segunda classe;
- 2 vínculos secundários de segunda classe;
- 2 vínculos terciários de segunda classe.

Como nossos campos espinoriais são independentes, tendo ψ_μ e $\bar{\psi}_\mu$ duas componentes cada, e $\mu = 0, 1, 2$ em $D = 2 + 1$, obtemos um total de 12 graus de liberdade, sem a eliminação dos graus espúrios. Para calcular o número de graus de liberdade total da teoria, no espaço de fase, utilizamos a seguinte expressão:

$$N_F = D - N_2 = 12 - 10 = 2, \quad (2.69)$$

sendo N_F o número de graus de liberdade no espaço de fase, D a soma do número de coordenadas independentes dos dois campos e N_2 o número de vínculos de segunda classe. Esse resultado concorda com o esperado em (DESER; KAY, 1983), onde temos um modo propagante para cada campo independente ($\bar{\psi}_\mu$ e ψ_μ) da lagrangiana auto-dual.

2.4 IMERSÃO DE CALIBRE DE NOETHER

A Imersão de Calibre de Noether é uma das ferramentas utilizadas na construção de um novo modelo a partir de um já existente, possuindo esse novo modelo ordem superior em derivadas e sendo invariante por um número maior de transformações de simetrias que o primeiro. A equivalência entre os modelos conectados via imersão está garantida no caso clássico, ficando a cargo do método da ação mestra a garantia da equivalência a nível quântico. Temos exemplos de conexão dos modelos auto-duais via ICN para teorias de spin 1 em (MENDONCA, 2009), spin 2 em (DALMAZI; MENDONCA, 2009d) e spin 3 em (MENDONCA, 2012).

É de conhecimento que o modelo $S_{AD}^{(1)}$ de spin 3/2 (2.1) não é invariante, devido o termo de massa, pelas transformações de simetrias locais $\delta\psi_\mu = \partial_\mu\Lambda$ e $\delta\bar{\psi}_\mu = \partial_\mu\bar{\Lambda}$. Caso semelhante é observado para spin 1, onde o termo de massa no modelo auto-dual quebra a simetria de calibre que existe no modelo de Maxwell-Chern-Simons. A partir do método de ICN obteremos um novo modelo invariante de calibre com o conteúdo físico do modelo original preservado, porém de segunda ordem nas derivadas. Esse novo modelo será chamado de $S_{AD}^{(2)}$.

2.4.1 De $S_{AD}^{(1)}$ para $S_{AD}^{(2)}$

A técnica de Imersão de Calibre de Noether (ANACLETO et al., 2001) consiste basicamente em transformar nosso modelo numa teoria invariante sob as transformações de simetrias locais para as quais o modelo original não é invariante. Para isso pode-se reescrever a ação $S_{AD}^{(1)}$ acoplada a fontes externas da seguinte maneira:

$$S_{AD}^{(1)} = \int d^3x (-\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \bar{\psi}_\mu \partial_\nu \psi_\alpha + m \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \psi_\alpha + \bar{\psi}_\mu j^\mu + \bar{j}^\mu \psi_\mu). \quad (2.70)$$

As fontes externas são de grande importância, uma vez que, através delas obteremos os mapeamentos duais entre os modelos que queremos relacionar, ou seja, poderemos observar a equivalência entre eles. A partir da ação (2.70), podemos definir os espinores-vetores de Euler:

$$K_\mu \equiv \frac{\delta S_{AD}^{(1)}}{\delta \bar{\psi}_\mu} = -\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\nu \psi_\alpha + m \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \gamma_\nu \psi_\alpha + j^\mu, \quad (2.71)$$

$$\bar{K}_\mu \equiv \frac{\delta S_{AD}^{(1)}}{\delta \psi_\mu} = -\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\nu \bar{\psi}_\alpha + m \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \bar{\psi}_\nu \gamma_\alpha + \bar{j}^\mu. \quad (2.72)$$

Para garantirmos que as equações de movimento do modelo $S_{AD}^{(1)}$ estejam imersas no novo modelo invariante, devemos seguir alguns passos, a começar pela primeira iteração da ação proposta da seguinte forma:

$$S_1 = S_{AD}^{(1)} + \int d^3x (\bar{a}_\mu K^\mu + \bar{K}^\mu a_\mu), \quad (2.73)$$

onde $\bar{a}_\mu$ e a_μ são campos auxiliares. Exigindo que as transformações dos campos auxiliares arbitrários sejam $\delta a_\mu = -\delta \psi_\mu = -\partial_\mu \Lambda$ e $\delta \bar{a}_\mu = -\delta \bar{\psi}_\mu = -\partial_\mu \bar{\Lambda}$, chegamos na seguinte expressão para a variação da ação S_1 :

$$\delta S_1 = \int d^3x \delta (-m \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \bar{a}_\mu \gamma_\nu a_\alpha). \quad (2.74)$$

Queremos que a variação da ação transformada seja nula, ou seja invariante pelas transformações de simetria, logo a segunda iteração pode ser escrita como:

$$S_2 = S_{AD}^{(1)} + \int d^3x (\bar{a}_\mu K^\mu + \bar{K}^\mu a_\mu + m \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \bar{a}_\mu \gamma_\nu a_\alpha). \quad (2.75)$$

A ação (2.75) garante que $\delta S_2 = 0$. No entanto a nova ação não deve depender de

campos auxiliares, desta forma devemos invertê-los em termos dos espinores-vetores de Euler na forma:

$$a^\mu = -\frac{\gamma_\nu \gamma^\mu K^\nu}{2m}; \quad \bar{a}^\mu = -\frac{\bar{K}^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu}{2m}. \quad (2.76)$$

Logo S_2 pode ser reescrito como:

$$S_2 = S_{AD}^{(1)} - \int d^3x \left(\frac{\bar{K}^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu K^\nu}{2m} \right). \quad (2.77)$$

Substituindo os espinores-vetores de Euler e a ação $S_{AD}^{(1)}$, obtemos:

$$S_{AD}^{(2)} = \int d^3x \left[\epsilon_{\mu\nu\alpha} \bar{\psi}_\mu \partial_\nu \psi_\alpha - \frac{1}{2m} \bar{f}^\mu(\psi) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\psi) + \bar{F}_\mu j^\mu + \bar{j}^\mu F_\mu \right], \quad (2.78)$$

onde definimos $\bar{f}^\mu(\psi) = \epsilon^{\mu\rho\alpha} \partial_\rho \bar{\psi}_\alpha$ e $f^\nu(\psi) = \epsilon^{\nu\theta\lambda} \partial_\theta \psi_\lambda$. Se estivéssemos falando de spin 1, esse seria exatamente o modelo M.C.S. O modelo auto-dual de segunda ordem que obtivemos aqui é precisamente o modelo que aparece em (DESER; KAY, 1983). Podemos verificar que ele é de fato invariante pela simetria de calibre $\delta\psi_\mu = \partial_\mu \Lambda$ e $\delta\bar{\psi}_\mu = \partial_\mu \bar{\Lambda}$, e que $F_\mu = \frac{\gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu}{2m}$ e $\bar{F}_\mu = \frac{\bar{f}^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu}{2m}$ fazem o mapeamento dual entre os dois modelos. Em (MENDONCA; SANTOS; LIMA, 2017) mostramos explicitamente que os mapeamentos $\psi_\mu \rightarrow F_\mu$ e $\bar{\psi}_\mu \rightarrow \bar{F}_\mu$ transformam as equações de movimento do modelo $AD(1)$ nas equações de movimento do modelo $AD(2)$. Em (DESER; KAY, 1983) já é demonstrada a relação $AD(1)$ e $AD(2)$ via ação mestra. Não sabemos porém, se existem outros modelos auto-duais de ordem superior nas derivadas que venham em sequência aos dois primeiros já conhecidos. Na próxima seção notaremos que existe uma simetria extra, a qual pode ser usada para a obtenção de um modelo de terceira ordem nas derivadas.

2.4.2 $S_{AD}^{(2)}$ para $S_{AD}^{(3)}$

A partir da análise das teorias bosônicas, verificou-se que o número de modelos duais que pode ser obtido aparentemente depende do valor do spin, pelo menos para spin 1 e 2 segundo a relação $2s$, sendo então compreensível a busca por um terceiro modelo para spin $3/2$. O modelo de segunda ordem $S_{AD}^{(2)}$ não é invariante, por conta do termo de primeira ordem, segundo a transformação de simetria dada por (DESER; KAY, 1983):

$$\delta\psi_\mu = \gamma_\mu \xi; \quad \delta\bar{\psi}_\mu = \gamma_\mu \bar{\xi}. \quad (2.79)$$

Aplicaremos a mesma técnica utilizada no modelo $S_{AD}^{(1)}$, porém introduzindo agora as simetrias dadas em (2.79). Os espinores-vetores de Euler encontrados são:

$$K^\mu = \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha \psi_\beta - \frac{1}{2m} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \varepsilon^{\nu\lambda\sigma} \gamma_\nu \gamma_\beta \partial_\alpha \partial_\lambda \psi_\sigma + \frac{1}{2m} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \gamma_\nu \gamma_\beta \partial_\alpha j^\nu, \quad (2.80)$$

$$\bar{K}^\mu = \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{\psi}_\beta - \frac{1}{2m} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \varepsilon^{\nu\lambda\sigma} \partial_\alpha \partial_\lambda \bar{\psi}_\sigma \gamma_\nu \gamma_\beta + \frac{1}{2m} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{j}^\nu \gamma_\nu \gamma_\beta. \quad (2.81)$$

A primeira iteração é dada por:

$$S_1^{(2)} = S_{AD}^{(2)} + \int d^3x (\bar{a}_\mu K^\mu + \bar{K}^\mu a_\mu). \quad (2.82)$$

Escolhendo adequadamente as transformações $\delta a_\mu = -\delta \psi_\mu$ e $\delta \bar{a}_\mu = -\delta \bar{\psi}_\mu$, pode-se escrever a segunda iteração como:

$$S_2^{(2)} = S_1^{(2)} + \int d^3x (\varepsilon^{\mu\alpha\beta} \bar{a}_\mu \partial_\alpha a_\beta). \quad (2.83)$$

Inverter o campo auxiliar em termos dos espinores-vetores nesse caso pode ser uma tarefa bastante complicada, sendo para o nosso caso mais fácil notar que $K^\mu = \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi_\beta$ e $\bar{K} = \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{\Phi}_\beta$, com :

$$\Phi_\beta = \psi_\beta - \frac{1}{2m} \varepsilon^{\nu\lambda\beta} \gamma_\nu \gamma_\beta \partial_\lambda \psi_\sigma + \frac{1}{2m} \gamma_\nu \gamma_\beta j^\nu, \quad (2.84)$$

$$\bar{\Phi}_\beta = \bar{\psi}_\beta - \frac{1}{2m} \varepsilon^{\nu\lambda\beta} \partial_\lambda \bar{\psi}_\sigma \gamma_\nu \gamma_\beta + \frac{1}{2m} \bar{j}^\nu \gamma_\nu \gamma_\beta. \quad (2.85)$$

Deste modo podemos reescrever a eq. (2.83) segundo:

$$S_2^{(2)} = S_1^{(2)} + \int d^3x [\varepsilon^{\mu\alpha\beta} (\bar{a}_\mu + \bar{\Phi}_\mu) \partial_\alpha (a_\beta + \Phi_\beta) - \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \bar{\Phi}_\mu \partial_\alpha \Phi_\beta]. \quad (2.86)$$

Essa ação pode ser desacoplada redefinindo $\bar{a}_\mu \rightarrow \bar{a}_\mu - \bar{\Phi}_\mu$ e $a_\mu \rightarrow a_\mu - \Phi_\mu$. Substituindo as equações (2.84) e (2.85) na equação (2.86), e descartando o termo com o campo

auxiliar, encontramos o resultado:

$$S_{AD}^{(3)} = \int d^3x \left[\frac{1}{2m} \bar{f}^\mu(\psi) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\psi) - \frac{1}{4m^2} \varepsilon_{\alpha\lambda\beta} \bar{f}^\mu(\psi) \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta \partial_\lambda f^\nu(\psi) + \bar{G}_\mu j^\mu + \bar{j}^\mu G_\mu \right], \quad (2.87)$$

com $S_{AD}^{(3)}$ invariante sob as transformações $\delta \bar{\psi}_\mu = \partial_\mu \bar{\Lambda} + \gamma_\mu \bar{\xi}$ e $\delta \psi_\mu = \partial_\mu \Lambda + \gamma_\mu \xi$. Este modelo é exatamente a parte fermiônica do modelo denominado "*New Topologically Massive Supergravity*" obtido em (ANDRINGA et al., 2010). Comparando as notações utilizadas naquele trabalho, pode-se verificar que $f^\mu(\psi) = \mathcal{R}_{(lin)}^\mu$, e o termo de segunda ordem na equação (2.87) é dado por $\bar{\psi}_\mu \mathcal{C}_{(lin)}^\mu$, onde define-se o "Tensor de Cottino" $\mathcal{C}_{(lin)}^\mu = \gamma^\mu \partial_\mu \mathcal{R}_{(lin)}^\mu + \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\nu \mathcal{R}_{(lin)}^\mu$. Com essas definições, podemos demonstrar que o termo de terceira ordem é dado por $\bar{\psi}_\mu (\gamma^\mu \partial_\mu) \mathcal{C}_{(lin)}^\mu$. $\bar{G}_\mu$ e G_μ cumprem o papel de fazer o mapeamento dual $\psi_\alpha \rightarrow G_\alpha$ e $\bar{\psi}_\alpha \rightarrow \bar{G}_\alpha$, garantindo assim a equivalência no nível das equações de movimento, sendo dados por:

$$G_\alpha(\chi) = \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\rho \varepsilon^{\rho\theta\sigma} \partial_\theta f^\beta(\chi), \quad (2.88)$$

$$\bar{G}_\alpha(\chi) = \partial_\theta \bar{f}^\beta(\chi) \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\rho \varepsilon^{\rho\theta\sigma}. \quad (2.89)$$

O termo de segunda ordem na eq. (2.87) pode ser interpretado como um análogo do termo de Maxwell ou Einstein-Hilbert para o caso bosônico. Já o termo de terceira ordem é o análogo ao termo de Chern-Simons gravitacional ($s = 2$) (DALMAZI; MENDONCA, 2009d), o qual também é de terceira ordem nas derivadas.

Uma vez que, ambos os termos são invariantes pelo mesmo conjunto de simetrias e que não conhecemos novas simetrias para fazer a imersão, concluímos dessa forma que não é possível a obtenção de um quarto modelo auto-dual. Parece-nos então que a regra 2s pode ser verificada no caso das teorias duais de spin 3/2.

É interessante notar que os modelos auto-duais que na literatura estavam desconectados puderam aqui ser obtido de maneira sistemática e então conectados. Ressaltamos também o caráter construtivista do método de ICN, uma vez que a forma exata do termo de terceira ordem foi obtida direta e sistematicamente.

Uma exploração da teoria de terceira ordem acoplada à gravitação já é conhecida em (ANDRINGA et al., 2010) (Supergravidade).

3 MODELOS DE DUBLETOS PARA SPIN 3/2 EM D=2+1

Neste capítulo nós sugerimos um modelo de segunda ordem em derivadas para dubletos de spin 3/2 massivos em $D = 2 + 1$, similar ao modelo de Proca para spin 1 massivo e ao modelo de Fierz-Pauli para spin 2 massivo. A ação deste modelo é expressa da seguinte maneira

$$S_d = \int d^3x \left[-\frac{1}{4} \bar{f}^\mu(\psi) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\psi) + \frac{m^2}{2} \bar{\psi}_\mu \epsilon^{\mu\nu\beta} \gamma_\nu \psi_\beta \right]. \quad (3.1)$$

No modelo de Proca o termo de massa quebra a simetria com respeito a transformação $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$. Ao utilizar o procedimento de imersão de calibre somos levados ao modelo de Podolsky (PODOLSKY, 1942), que é de quarta ordem em derivadas e possui simetria sob a transformação de calibre mencionada anteriormente. Entretanto, o modelo de Podolsky possui fantasmas em seu conteúdo físico. Para o caso de spin-2 massivo em $D = 2 + 1$, o modelo de Fierz-Pauli não é invariante sob reparametrização linearizada $\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu$ devido ao seu termo de massa. Porém, ao utilizarmos a técnica de ICN encontramos a versão linearizada do modelo chamado New Massive Gravity (ANDRINGA et al., 2010), que é invariante sob reparametrização linearizada. Este modelo, ao contrário do modelo de Podolsky, não possui fantasmas em seu conteúdo de partículas. O fato do modelo de Podolsky (em $D = 2 + 1$) possuir fantasmas, diferentemente da New Massive Gravity, pode ser explicado pelo fato do termo não massivo do modelo de Proca (termo de Maxwell) possuir conteúdo físico (mesmo em $D = 2 + 1$), enquanto o termo não massivo de Fierz-Pauli (termo de Einstein-Hilbert linearizado) não possui conteúdo físico em $D = 2 + 1$. Esta explicação fica mais clara se recorrermos a técnica de ação mestra, onde os termos utilizados para misturar os campos devem possuir a simetria que se deseja implementar ao novo modelo, e não possuir conteúdo físico. Normalmente utiliza-se os termos de Einstein-Hilbert, no caso de spin 2, e de Maxwell, no caso de spin 1. Entretanto, este último possui dinâmica, o que leva ao aparecimento de fantasmas no modelo de Podolsky.

No modelo que propomos acima, o termo cinético não possui conteúdo físico, como pode ser verificado via análise hamiltoniana. Neste caso, esse modelo se assemelha mais ao modelo de Fierz-Pauli do que ao modelo de Proca. Isso nos sugere a viabilidade de usar a ICN para obtermos um modelo dual de ordem superior em derivadas e que seja invariante sob as transformações $\delta \psi_\mu = \partial_\mu \Lambda + \gamma_\mu \xi$ e $\delta \bar{\psi}_\mu = \partial_\mu \bar{\Lambda} + \bar{\xi} \gamma_\mu$.

Assim como foi feito para o modelo auto-dual de primeira ordem, a demonstração que de fato o modelo (3.1) é um modelo que descreve as helicidades $+3/2$ e $-3/2$ pode ser feita através da contagem dos graus de liberdade pela aplicação das condições de Fierz-Pauli ou via algoritmo de Dirac-Bergmann.

3.1 CONDIÇÕES DE FIERZ-PAULI

Tomando a equação de movimento para um dos campos, dada por:

$$\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\varepsilon^{\nu\lambda\sigma}\gamma_\nu\gamma_\beta\partial_\alpha\partial_\lambda\psi_\sigma - 2m^2\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\gamma_\alpha\psi_\beta = 0. \quad (3.2)$$

Aplicando ∂_μ em (3.2), temos:

$$-2m^2\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\mu\gamma_\alpha\psi_\beta = 0. \quad (3.3)$$

Podemos ainda aplicar γ_μ em (3.2):

$$\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\varepsilon^{\nu\lambda\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta\partial_\alpha\partial_\lambda\psi_\sigma - 2m^2\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\gamma_\mu\gamma_\alpha\psi_\beta = 0, \quad (3.4)$$

e verificar que a condição gama-traço nulo $\gamma_\mu\psi^\mu = 0$ é satisfeita utilizando a equação (3.3). De forma similar, reescrevendo a equação 3.3, na forma:

$$2m^2(\gamma^\mu\gamma^\beta - \eta^{\mu\beta})\partial_\mu\psi_\beta = 0, \quad (3.5)$$

e utilizando a condição gama-traço nulo, satisfazemos a condição de transversalidade $\partial_\mu\psi^\mu = 0$. Reescrevendo a equação de movimento (3.2):

$$\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\varepsilon^{\nu\lambda\sigma}(2\eta_{\beta\nu} - \gamma_\beta\gamma_\nu)\partial_\alpha\partial_\lambda\psi_\sigma - 2m^2(\gamma^\mu\gamma^\beta - \eta^{\mu\beta})\psi_\beta = 0, \quad (3.6)$$

podemos satisfazer a equação de Klein-Gordon:

$$(\square - m^2)\psi^\mu = 0, \quad (3.7)$$

$$(3.8)$$

encontrando um total de dois graus de liberdade para cada campo independente do modelo. A partir deste resultado, concluímos que de fato a equação (3.1) descreve um dublete massivo de spin-3/2.

3.2 ANÁLISE DE VÍNCULOS: VIA ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN

Assim como no caso do modelo auto-dual de primeira ordem, para a análise de vínculos do modelo de dubleto serão utilizados os mesmos detalhes técnicos apresentados no apêndice B das notações para o caso fermiônico: derivada definida pela esquerda, ordenamento da velocidade a esquerda do momento canônico na descrição da hamiltoniana canônica e utilização dos parênteses de Berezin. Para facilitar alguns cálculos, podemos reescrever nossa lagrangiana na expressão:

$$\mathcal{L} = -\bar{f}^\mu(\psi)\gamma_\nu\gamma_\mu f^\nu(\psi) + 2m^2\bar{\psi}_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha}\gamma_\nu\psi_\alpha, \quad (3.9)$$

ou separando as componentes espaciais das temporais:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\dot{\bar{\psi}}_i\gamma_j\gamma_i\dot{\psi}_j + \dot{\bar{\psi}}_i\gamma_j\gamma_i\partial_j\psi_0 - \dot{\bar{\psi}}_i\gamma_0\gamma_j\partial_i\psi_j + \partial_i\bar{\psi}_0\gamma_j\gamma_i\dot{\psi}_j - \partial_i\bar{\psi}_j\gamma_j\gamma_0\dot{\psi}_i \\ & + \partial_i\bar{\psi}_j\partial_i\psi_j - \partial_i\bar{\psi}_j\partial_j\psi_i - \partial_i\bar{\psi}_0\gamma_j\gamma_i\partial_j\psi_0 - \partial_i\bar{\psi}_0\gamma_0\gamma_j\partial_j\psi_i + \partial_i\bar{\psi}_0\gamma_0\gamma_j\partial_i\psi_j \\ & - \partial_i\bar{\psi}_j\gamma_i\gamma_0\partial_j\psi_0 + \partial_i\bar{\psi}_j\gamma_j\gamma_0\partial_i\psi_0 + 2m^2\epsilon^{ij}\bar{\psi}_0\gamma_i\psi_j - 2m^2\epsilon^{ij}\bar{\psi}_i\gamma_0\psi_j + 2m^2\epsilon^{ij}\bar{\psi}_i\gamma_j\psi_0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A partir disto, podemos definir os momentos canônicos:

$$\pi^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}_0} = 0, \quad (3.11)$$

$$\bar{\pi}^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_0} = 0, \quad (3.12)$$

$$\pi^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}_i} = -\gamma_j\gamma_i\dot{\psi}_j + \gamma_j\gamma_i\partial_j\psi_0 - \gamma_0\gamma_j\partial_i\psi_j, \quad (3.13)$$

$$\bar{\pi}^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_i} = \dot{\bar{\psi}}_j\gamma_i\gamma_j - \partial_j\bar{\psi}_0\gamma_i\gamma_j + \partial_i\bar{\psi}_j\gamma_j\gamma_0, \quad (3.14)$$

e observar que (3.11) e (3.12) configuram vínculos primários, dado que os momentos não podem ser escritos em termos das velocidades. No entanto, nota-se que se aplicarmos γ_i pela esquerda em (3.13) e pela direita em (3.14), e usarmos a identidade $\gamma_i\gamma_j\gamma_i = 0$ (Vide Apêndice A) obtemos respectivamente:

$$\gamma_i\pi^i = -\gamma_i\gamma_0\gamma_j\partial_i\psi_j, \quad (3.15)$$

$$\bar{\pi}^i \gamma_i = \partial_i \bar{\psi}_j \gamma_j \gamma_0 \gamma_i. \quad (3.16)$$

Tais relações resultarão em outros vínculos primários para o modelo. Temos então os seguintes vínculos primários:

$$\phi^0 = \pi^0 \approx 0, \quad (3.17)$$

$$\bar{\phi}^0 = \bar{\pi}^0 \approx 0, \quad (3.18)$$

$$\phi = \gamma_i \pi^i + \gamma_i \gamma_0 \gamma_j \partial_i \psi_j \approx 0, \quad (3.19)$$

$$\bar{\phi} = \bar{\pi}^i \gamma_i - \partial_i \bar{\psi}_j \gamma_j \gamma_0 \gamma_i \approx 0. \quad (3.20)$$

Apresentando os cálculos de forma mais direta, lembrando que a hamiltoniana canônica é dada no caso fermiônico, por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\bar{\pi}^0 \dot{\psi}_0 + \dot{\bar{\psi}}_0 \pi^0 - \bar{\pi}^i \dot{\psi}_i + \dot{\bar{\psi}}_i \pi^i - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \bar{\pi}^i \pi^i - \frac{1}{2} \bar{\pi}^i \gamma_j \gamma_i \partial_j \psi_0 + \frac{1}{2} \bar{\pi}^i \gamma_0 \gamma_j \partial_i \psi_j + \frac{1}{2} \partial_i \bar{\psi}_0 \gamma_j \gamma_i \pi^j - \frac{1}{2} \partial_i \bar{\psi}_j \gamma_j \gamma_0 \pi^i \\ &\quad + \partial_i \bar{\psi}_j \partial_j \psi_i - \frac{1}{2} \partial_i \bar{\psi}_j \gamma_k \gamma_j \partial_i \psi_k - \frac{1}{2} \partial_i \bar{\psi}_0 \gamma_i \gamma_j \gamma_0 \gamma_k \partial_j \psi_k - \frac{1}{2} \partial_i \bar{\psi}_j \gamma_j \gamma_0 \gamma_i \gamma_k \partial_k \psi_0 \\ &\quad + \partial_i \bar{\psi}_0 \gamma_0 \gamma_j \partial_j \psi_i + \partial_i \bar{\psi}_j \gamma_i \gamma_0 \partial_j \psi_0 - 2m^2 \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_0 \gamma_i \psi_j + 2m^2 \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_i \gamma_0 \psi_j - 2m^2 \varepsilon^{ij} \bar{\psi}_i \gamma_j \psi_0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

e a hamiltoniana total:

$$H = \int d^2x (H_c + \bar{\lambda}_0 \phi^0 + \bar{\phi}^0 \lambda_0 + \bar{\lambda}_i \phi^i + \bar{\phi}^i \lambda_i), \quad (3.22)$$

temos após a manutenção no tempo dos vínculos primários os seguintes vínculos secundários:

$$\xi = \frac{1}{2} \gamma_j \gamma_i \partial_i \pi^j + \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_i \gamma_k \gamma_j \partial_i \partial_j \psi_k + 2m^2 \varepsilon_{0ij} \gamma_i \psi_j, \quad (3.23)$$

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2} \partial_j \bar{\pi}^i \gamma_j \gamma_i - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j \bar{\psi}_k \gamma_j \gamma_k \gamma_i \gamma_0 - 2m^2 \varepsilon_{0ij} \bar{\psi}_i \gamma_j, \quad (3.24)$$

$$\Omega = \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_j\gamma_i\partial_i\pi^j - \frac{1}{2}\gamma_i\gamma_k\gamma_j\partial_i\partial_j\psi_k + 2m^2\epsilon_{0ij}\gamma_i\gamma_0\psi_j, \quad (3.25)$$

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2}\partial_i\bar{\pi}^j\gamma_i\gamma_j\gamma_0 + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j\bar{\psi}_k\gamma_j\gamma_k\gamma_i - 2m^2\epsilon_{0ij}\bar{\psi}_i\gamma_0\gamma_j \quad (3.26)$$

A condição de consistência para os vínculos secundários ξ , $\bar{\xi}$, Ω e $\bar{\Omega}$ nos permite determinar, respectivamente, os multiplicadores de Lagrange λ , $\bar{\lambda}$, λ_0 e $\bar{\lambda}_0$, devido aos parênteses de Poisson não-nulos:

$$\{\chi, \bar{\varphi}\} = \{\xi, \bar{\varphi}^0\} = -\{\bar{\chi}, \varphi\} = -\{\bar{\xi}, \varphi^0\} = -2m\epsilon^{ij}\gamma_i\gamma_j\delta^2(x-y); \quad (3.27)$$

$$\{\xi, \bar{\varphi}\} = -\{\bar{\xi}, \varphi\} = 4m^2\epsilon^{ij}\gamma_0\gamma_i\gamma_j\delta^2(x-y), \quad (3.28)$$

caracterizando assim todos os vínculos do modelo como de segunda classe. A contagem, no espaço de fase, é dada por oito vínculos no total, sendo quatro primários e quatro secundários. Para cada campo temos seis graus de liberdade, totalizando doze. Logo, para a contagem final dos graus de liberdade, temos $12 - 8 = 4$, sendo dois graus de liberdade para cada campo independente, provando também através do algoritmo de Dirac-Bergmann que o modelo proposto de fato descreve um dubleto massivo de spin 3/2.

3.3 OBTENÇÃO DO MODELO AUTO-DUAL DE PRIMEIRA ORDEM

A partir do modelo de dubleto proposto devemos ser capazes de obter os modelos auto-duais já conhecidos. Temos exemplos da separação dos modos propagantes através dois métodos: para spin 1 temos o procedimento apresentado em (TOWNSEND; PILCH; NIEUWENHUIZEN, 1984) chamado de extrair a raiz quadrada, e o que vamos utilizar nesta seção, apresentado em (MENDONCA, 2009), para spin 1 e spin 2. O procedimento consiste basicamente em reduzir a ordem nas derivadas com o auxílio de um campo auxiliar, para em seguida promover uma rotação de 45 graus no espaço dos campos de tal forma a desacoplar as helicidades. Dada a ação:

$$S_d = \int d^3x \left[-\frac{1}{4}\bar{f}^\mu(\psi)\gamma_\nu\gamma_\mu f^\nu(\psi) + \frac{m^2}{2}\bar{\psi}_\mu\epsilon^{\mu\nu\beta}\gamma_\nu\psi_\beta \right]. \quad (3.29)$$

Podemos reescrever o termo de segunda ordem, com a ajuda dos campos auxiliares $\bar{\chi}_\mu$

e χ_μ , baixando sua ordem em derivadas da seguinte forma:

$$-\frac{1}{4}\bar{f}^\mu(\psi)\gamma_\nu\gamma_\mu f^\nu(\psi) = -\frac{m}{2}\bar{\chi}_\mu f^\mu(\psi) - \frac{m}{2}\bar{f}^\mu(\psi)\chi_\mu + \frac{m^2}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\chi}_\mu\gamma_\nu\chi_\alpha. \quad (3.30)$$

Devemos através dessa escolha ser capazes de recuperar o termo de segunda ordem original. Para isso tomamos a equação de movimento para $\bar{\chi}_\mu$:

$$\frac{m}{2}f^\mu(\psi) = \frac{m^2}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\gamma_\nu\chi_\alpha, \quad (3.31)$$

que pode ser reescrita, como em (DESER, 1984), na forma:

$$\chi_\mu = \frac{1}{2m}\gamma_\nu\gamma_\mu f^\nu(\psi), \quad (3.32)$$

e a equação de movimento para χ_μ :

$$\frac{m}{2}\bar{f}^\alpha(\psi) = \frac{m^2}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\chi}_\mu\gamma_\nu, \quad (3.33)$$

ou:

$$\bar{\chi}_\mu = \frac{1}{2m}\bar{f}^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu. \quad (3.34)$$

Substituindo (3.32) e (3.34) em (3.30), temos:

$$-\frac{m}{2}\bar{\chi}_\mu f^\mu(\psi) - \frac{m}{2}\bar{f}^\mu(\psi)\chi_\mu + \frac{m^2}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\chi}_\mu\gamma_\nu\chi_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{f}^\mu(\psi)\gamma_\nu\gamma_\mu f^\nu(\psi). \quad (3.35)$$

O procedimento que acabamos de usar equivale a completar quadrado integrando nos campos auxiliares. Com esse resultado e com a ajuda de um campo auxiliar, podemos reduzir a ordem das derivadas do modelo de dubleto através da seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{m^2}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\chi}_\mu\gamma_\nu\chi_\alpha - \frac{m}{2}\bar{\chi}_\mu f^\mu(\psi) - \frac{m}{2}\bar{f}^\mu(\psi)\chi_\mu + \frac{m^2}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\psi_\alpha. \quad (3.36)$$

Fazendo apropriadamente as seguintes substituições:

$$\bar{\chi}_\mu = \frac{1}{\sqrt{m}}(\tilde{\chi}_\mu + \tilde{\psi}_\mu) \quad \chi_\mu = \frac{1}{\sqrt{m}}(\tilde{\chi}_\mu - \tilde{\psi}_\mu), \quad (3.37)$$

$$\bar{\psi}_\mu = \frac{1}{\sqrt{m}}(\tilde{\psi}_\mu - \tilde{\chi}_\mu) \quad \psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{m}}(-\tilde{\psi}_\mu - \tilde{\chi}_\mu), \quad (3.38)$$

e substituindo em (3.36), chegamos na expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{m^2}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \frac{1}{\sqrt{m}}(\tilde{\chi}_\mu + \tilde{\psi}_\mu) \gamma_\nu \frac{1}{\sqrt{m}}(\tilde{\chi}_\alpha - \tilde{\psi}_\alpha) - \frac{m}{2} \frac{1}{\sqrt{m}}(\tilde{\chi}_\mu + \tilde{\psi}_\mu) f^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{m}}(-\tilde{\psi} - \tilde{\chi}) \right) \\ & - \frac{m}{2} \bar{f}^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{m}}(\tilde{\psi} - \tilde{\chi}) \right) \frac{1}{\sqrt{m}}(\tilde{\chi}_\mu - \tilde{\psi}_\mu) + \frac{m^2}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \frac{1}{\sqrt{m}}(\tilde{\psi}_\mu - \tilde{\chi}_\mu) \gamma_\nu \frac{1}{\sqrt{m}}(-\tilde{\psi}_\alpha - \tilde{\chi}_\alpha), \end{aligned} \quad (3.39)$$

que pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = [\tilde{\chi}_\mu f^\mu(\tilde{\chi}) + m \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \tilde{\chi}_\mu \gamma_\nu \tilde{\chi}_\alpha] + [\tilde{\psi}_\mu f^\mu(\tilde{\psi}) - m \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \tilde{\psi}_\mu \gamma_\nu \tilde{\psi}_\alpha] \quad (3.40)$$

$$= \mathcal{L}_{AD+} + \mathcal{L}_{AD-}. \quad (3.41)$$

Podemos verificar através do sinal nos dois termos em (3.41) que os modos propagantes, referentes a $3/2$ e $-3/2$, foram separados. A partir do modelo de dubleto, que sabemos ser não invariante por transformações de calibre devido à presença do termo de massa, podemos na próxima seção retomar nosso programa de ICN e implementar o processo de imersão, em completa analogia aos casos de spin 1 e 2.

3.4 IMERSÃO DE CALIBRE DE NOETHER PARA O MODELO DE DUBLETO

Sabendo que as simetrias dadas por $\delta \bar{\psi}_\beta = \partial_\beta \bar{\Lambda}$ e $\delta \psi_\beta = \partial_\beta \Lambda$, são quebradas pelo termo de massa no modelo de dubleto, e que o procedimento neste caso será o mesmo utilizado nos modelos auto-duais estudados anteriormente, iremos escrever de forma mais direta os resultados obtidos através do procedimento de imersão de calibre para este caso. Sendo assim, temos:

$$K^\beta = \frac{1}{4} \varepsilon^{\beta\mu\lambda} \gamma_\nu \gamma_\mu \partial_\lambda f^\nu(\psi) - \frac{m^2}{2} \varepsilon^{\beta\mu\lambda} \gamma_\mu \psi_\lambda + j^\beta; \quad (3.42)$$

$$\bar{K}^\beta = \frac{1}{4} \varepsilon^{\beta\mu\lambda} \gamma_\nu \gamma_\mu \partial_\lambda \bar{f}^\nu(\psi) - \frac{m^2}{2} \varepsilon^{\beta\mu\lambda} \gamma_\mu \bar{\psi}_\lambda + \bar{j}^\beta, \quad (3.43)$$

onde K^β e $\bar{K}^\beta$ são os espinores-vetores de Euler. Para a primeira iteração da ação, temos:

$$S^{(1)} = S_d + \int d^3x (\bar{a}_\mu K^\mu + \bar{K}^\mu a_\mu). \quad (3.44)$$

Considerando as transformações $\delta a_\mu = -\delta\psi_\mu$ e $\delta \bar{a}_\mu = -\delta\bar{\psi}_\mu$, encontramos:

$$\delta S^{(1)} = \int d^3x \delta \left(\frac{m^2}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \bar{a}_\mu \gamma_\nu a_\alpha \right), \quad (3.45)$$

e desta forma podemos escrever uma nova ação, invariante sob as transformações de simetria, da seguinte maneira:

$$S^{(2)} = S^{(1)} - \int d^3x \left(\frac{m^2}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \bar{a}_\mu \gamma_\nu \delta a_\alpha \right), \quad (3.46)$$

Com o mesmo procedimento adotado para o caso dos modelos singletos $S_{AD}^{(1)}$, $S_{AD}^{(2)}$ e $S_{AD}^{(3)}$, podemos inverter os campos auxiliares em termos dos espinores-vetores de Euler e então escrever $S^{(2)}$ como segue:

$$S^{(2)} = \int d^3x \left[-\frac{1}{16m^2} \partial_\lambda \bar{f}^\mu(\psi) \varepsilon^{\lambda\nu\alpha} \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\rho \varepsilon^{\rho\theta\sigma} \partial_\theta f^\beta(\psi) \right. \quad (3.47)$$

$$\left. + \frac{1}{4} \bar{f}^\mu(\psi) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\psi) + \frac{1}{2m^2} \bar{j}_\mu G^\mu(\psi) - \frac{1}{2m^2} \bar{G}^\mu(\psi) j_\mu \right], \quad (3.48)$$

com o mapeamento dual dado por $\psi_\alpha \rightarrow G_\alpha(\psi)$ e $\bar{\psi}_\alpha \rightarrow \bar{G}_\alpha(\psi)$, onde:

$$G_\alpha(\psi) = \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\rho \varepsilon^{\rho\theta\sigma} \partial_\theta f^\beta(\psi), \quad (3.49)$$

$$\bar{G}_\alpha(\psi) = \partial_\lambda \bar{f}^\mu(\psi) \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\alpha \varepsilon^{\lambda\nu\sigma}. \quad (3.50)$$

O curioso neste caso é que partindo de um modelo inspirado em Proca, podemos interpretar o modelo de dubleto de segunda ordem para spin 3/2 como um modelo análogo ao de Fierz-Pauli, tendo em vista que o modelo de quarta ordem (3.48) resultante pode ser visto como uma versão de spin 3/2 para a versão linearizada da New Massive Gravity. Em (DESER; KAY, 1983) os autores afirmam que o termo de segunda ordem não possui conteúdo físico. Sendo assim, temos por certo que o modelo de quarta ordem encontrado aqui de fato é livre de fantasmas e constitui um análogo perfeito da NMG para spin 3/2.

4 FORMALISMO DE SOLDA GENERALIZADA

A soma direta de dois bósons quirais de quiralidades opostas em $D = 1 + 1$ não nos fornece como resultado um campo escalar sem massa. Da mesma forma a soma de dois bósons vetoriais de helicidade ∓ 1 em $D = 2 + 1$ através dos modelos de MCS não produziram um dubleto de helicidade representado pelo modelo de Proca. O fato é que um termo de interferência é necessário para a obtenção dos modelos desejados. O método da solda generalizada é capaz de sistematicamente gerar esse termo de interferência, em ambos os casos bosônicos de $D = 1 + 1$ e $D = 2 + 1$ dimensões. Aqui pela primeira vez estamos explorando o método da solda generalizada para a solda de singletos fermiônicos de helicidades $3/2$ e $-3/2$.

Temos ainda uma outra motivação para tentar fazer isso, a New Massive Gravity é um modelo de quarta ordem em derivadas que descreve um dubleto massivo de spin 2 em $D = 2 + 1$ dimensões. O modelo é invariante por simetrias de calibre, e livre de fantasmas mesmo sendo de ordem superior nas derivadas. Tal modelo, quando no nível linear, pode ser obtido via procedimentos de dualização que relacionam modelos auto-duais. Verificou-se por exemplo via o procedimento de solda generalizada (DALMAZI; MENDONÇA, 2009c) que, ao soldar dois modelos auto-duais de terceira ordem nas derivadas com helicidades distintas obtém-se a versão linearizada da NMG (que se obtém fazendo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$). O mesmo resultado se repete quando soldamos dois modelos auto-duais de quarta ordem nas derivadas com helicidades distintas. Não menos interessante a solda de modelos auto-duais de segunda ordem nas derivadas resulta no modelo de Fierz-Pauli linearizado (equivalente dual da NMG linearizada).

Investigaremos nesse capítulo a solda generalizada dos modelos auto-duais de segunda e terceira ordem nas derivadas para spin $3/2$.

4.1 SOLDA DOS MODELOS DE SEGUNDA ORDEM COM MASSAS DISTINTAS

Nesta seção será apresentada a solda de dois modelos auto-duais de segunda ordem nas derivadas com massas e helicidades distintas de spins $+3/2$ e $-3/2$ em $D = 2 + 1$ dimensões, dadas pelas seguintes densidades de lagrangiana:

$$\mathcal{L}^+ = -\frac{1}{4}\bar{f}^\mu(\psi)\gamma_\nu\gamma_\mu f^\nu(\psi) + \frac{m_+}{2}\bar{\psi}_\mu f^\mu(\psi), \quad (4.1)$$

$$\mathcal{L}^- = -\frac{1}{4}\bar{f}^\mu(\chi)\gamma_\nu\gamma_\mu f^\nu(\chi) - \frac{m_-}{2}\bar{\chi}_\mu f^\mu(\chi), \quad (4.2)$$

definindo:

$$\bar{f}^\mu(\psi) = \varepsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\bar{\psi}_\beta, \quad (4.3)$$

$$f^\mu(\psi) = \varepsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\psi_\beta. \quad (4.4)$$

O sinal do termo de massa indica o sinal do valor correspondente de cada helicidade. Para o nosso caso, a equação (4.1) descreve uma partícula de spin $+3/2$ e massa m_+ , enquanto (4.2) descreve uma partícula de com spin $-3/2$ e massa m_- .

A variação da ação referente à equação (4.1), pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \delta S^+ = \int d^3x \left[-\frac{1}{4}\bar{f}^\mu(\delta\psi)\gamma_\nu\gamma_\mu f^\nu(\psi) + \frac{m_+}{2}\delta\bar{\psi}_\mu f^\mu(\psi) \right. \\ \left. -\frac{1}{4}\bar{f}^\mu(\psi)\gamma_\nu\gamma_\mu f^\nu(\delta\psi) + \frac{m_+}{2}\bar{\psi}_\mu f^\mu(\delta\psi) \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pode-se verificar que as equações (4.1) e (4.2) são invariantes sob as transformações de simetria dadas por:

$$\delta\psi_\mu = \Lambda_\mu \quad \delta\bar{\psi}_\mu = \bar{\Lambda}_\mu, \quad (4.6)$$

$$\delta\chi_\mu = \alpha\Lambda_\mu \quad \delta\bar{\chi}_\mu = \alpha\bar{\Lambda}_\mu, \quad (4.7)$$

Nas expressões anteriores Λ e $\bar{\Lambda}$ são funções arbitrárias, e α é uma constante que relaciona os dois campos, e que a princípio também é arbitrária. Reescrevendo a variação da ação de S^+ em termos das transformações de simetria, temos:

$$\begin{aligned} \delta S^+ = \int d^3x \left[-\frac{1}{4}\bar{f}^\mu(\Lambda)\gamma_\nu\gamma_\mu f^\nu(\psi) + \frac{m_+}{2}\bar{\psi}_\mu f^\mu(\Lambda) \right. \\ \left. -\frac{1}{4}\bar{f}^\mu(\psi)\gamma_\nu\gamma_\mu f^\nu(\Lambda) + \frac{m_+}{2}\bar{f}^\mu(\Lambda)\psi_\mu \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Da mesma forma variamos a ação S^- e ficamos com:

$$\delta S^- = \int d^3x \left[-\frac{1}{4} \bar{f}^\mu(\alpha\Lambda) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\chi) - \frac{m_-}{2} \bar{\chi}_\mu f^\mu(\alpha\Lambda) - \frac{1}{4} \bar{f}^\mu(\chi) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\alpha\Lambda) - \frac{m_-}{2} \bar{f}^\mu(\alpha\Lambda) \chi_\mu \right] \quad (4.9)$$

A intenção do procedimento é misturar as duas helicidades, e para isso tomaremos a soma das duas ações:

$$\delta(S^+ + S^-) = \int d^3x \bar{f}^\mu(\Lambda) \left[-\frac{1}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu \bar{f}^\nu(\psi + \alpha\chi) + \frac{1}{2} (m_+ \psi_\mu - m_- \alpha \chi_\mu) \right] + \left[-\frac{1}{4} \bar{f}^\mu(\psi + \alpha\chi) \gamma_\nu \gamma_\mu + \frac{1}{2} (m_+ \bar{\psi}_\nu - m_- \alpha \bar{\chi}_\nu) \right] f^\nu(\Lambda). \quad (4.10)$$

Podemos reescrever (4.10), na forma:

$$\delta(S^+ + S^-) = \int d^3x [\bar{f}^\mu(\Lambda) J_\mu + \bar{J}_\mu f^\mu(\Lambda)], \quad (4.11)$$

sendo $\bar{J}_\mu$ e J_μ as correntes de solda de Noether. Definindo os campos auxiliares:

$$\delta \bar{H}^\mu \equiv \bar{f}^\mu(\Lambda) \quad \delta H^\mu \equiv f^\mu(\Lambda), \quad (4.12)$$

que com a apropriada transformação nos ajudarão na tarefa de garantir que a variação da soma das ações seja nula e invariante sob as transformações de simetrias (4.6) e (4.7). Com a sua utilização a expressão acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\delta(S^+ + S^-) = \int d^3x [\delta \bar{H}^\mu J_\mu + \bar{J}_\mu \delta H^\mu]. \quad (4.13)$$

Reescrevendo a expressão de forma a explicitar a variação das correntes de solda, temos:

$$\delta[S^+ + S^- - \int d^3x (\bar{H}^\mu J_\mu + \bar{J}_\mu H^\mu)] = - \int d^3x (\bar{H}^\mu \delta J_\mu + \delta \bar{J}_\mu H^\mu). \quad (4.14)$$

Sabendo quem são as correntes, podemos tomar as variações:

$$\delta J_\mu = -\frac{(1 + \alpha^2)}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu \delta H^\nu + \frac{1}{2} (m_+ - m_- \alpha^2) \Lambda_\mu, \quad (4.15)$$

$$\delta \bar{J}_\mu = -\frac{(1+\alpha^2)}{4} \delta \bar{H}^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu + \frac{1}{2} (m_+ - m_- \alpha^2) \Lambda_\mu, \quad (4.16)$$

e fazer $\alpha^2 = \frac{m_+}{m_-}$ para eliminar os termos de massa e desta forma poder escrever δJ apenas em termos de δH .

$$\delta J_\mu = -\frac{(1+\alpha^2)}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu \delta H^\nu, \quad (4.17)$$

$$\delta \bar{J}_\mu = -\frac{(1+\alpha^2)}{4} \delta \bar{H}^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu. \quad (4.18)$$

Substituindo (4.17) e (4.18) em (4.16), temos:

$$\delta \left[S^+ + S^- - \int d^3x \left(\bar{H}^\mu J_\mu + \bar{J}_\mu H^\mu + \frac{(1+\alpha^2)}{4} \bar{H}^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu H^\nu \right) \right] = 0. \quad (4.19)$$

Definimos então a ação de solda, que carrega dentro de si as equações de movimento do modelo original sendo por construção invariante pelas transformações (4.6) e (4.7), da seguinte maneira:

$$S_{solda} = S^+ + S^- - \int d^3x \left(\bar{H}^\mu J_\mu + \bar{J}_\mu H^\mu + \frac{(1+\alpha^2)}{4} \bar{H}^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu H^\nu \right). \quad (4.20)$$

A ação de solda não deve ser escrita em termos de um campo auxiliar, e sim das variáveis originais. Para isso, devemos encontrar as equações de movimento para H^μ e $\bar{H}^\mu$ e então inverter os campos auxiliares em termos das correntes.

Extraindo as equações de movimento para os campos auxiliares a partir das relações $\frac{\delta S_s}{\delta \bar{H}} = 0$ e $\frac{\delta S_s}{\delta H} = 0$, obtemos:

$$J_\mu + \frac{(1+\alpha^2)}{4} \gamma_\nu \gamma_\mu H^\nu = 0, \quad (4.21)$$

$$\bar{J}_\mu + \frac{(1+\alpha^2)}{4} \bar{H}^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu = 0. \quad (4.22)$$

A partir destas equações, podemos inverter H e $\bar{H}$ em termos de J e $\bar{J}$ e substituir na ação de solda, ficando com:

$$S_{solda} = S^+ + S^- + \frac{2}{(1+\alpha^2)} \int d^3x [\bar{J}_\mu J^\mu - \bar{J}_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu J_\nu]. \quad (4.23)$$

Fazendo $\psi + \alpha\chi \equiv h_+$, $m_+\psi - m_-\alpha\chi \equiv h_-$ e $(1 + \alpha^2) = a$ como modo de simplificar a escrita, temos:

$$\begin{aligned} \bar{J}_\mu J^\mu - \bar{J}_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu J_\nu &= \frac{1}{16} \bar{f}^\mu(h_+) [\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma^\nu - \gamma_\mu \gamma_\alpha] f^\alpha(h_+) \\ &- \frac{1}{8} \bar{f}^\mu(h_+ [\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu] h_-^\nu) - \frac{1}{8} \bar{h}_{-\nu} [\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu] f_\nu(h_+) \\ &+ \frac{1}{4} \bar{h}_{-\nu} [\eta^{\nu\mu} - \gamma^\nu \gamma^\mu] h_{-\mu}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

ao mesmo tempo a soma $S^+ + S^-$ é dada por:

$$\begin{aligned} S^+ + S^- &= -\frac{1}{4} \bar{f}^\mu(\psi) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\psi) + \frac{m_+}{2} \bar{\psi}_\mu f^\mu(\psi) \\ &- \frac{1}{4} \bar{f}^\mu(\chi) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\chi) - \frac{m_-}{2} \bar{\chi}_\mu f^\mu(\chi). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Neste ponto é interessante definir um campo, que seja combinação dos campos originais, de tal forma que a ação de solda resultante não seja escrita em termos de quatro campos distintos em (4.1) e (4.2). Para isso podemos definir $F \equiv \alpha\psi - \chi$, que é invariante sob as transformações iniciais de simetria nos levando a $\delta F = 0$, e então reescrever:

$$h_- = \alpha m_- F, \quad (4.26)$$

$$h_+ = a\psi - \alpha F, \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} S_{solda} &= -\frac{1}{4} \bar{f}^\mu(\psi) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\psi) + \frac{m_+}{2} \bar{\psi}_\mu f^\mu(\psi) \\ &+ \frac{m_- \alpha}{2} \bar{\psi}_\mu f^\mu(F) + \frac{m_- \alpha}{2} \bar{F}_\mu f^\mu(F) - \frac{m_-}{2} \bar{F}_\mu f^\mu(F) \\ &- \frac{1}{4} \bar{f}^\mu(\alpha\psi - F) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\alpha\psi - F) - \frac{m_-}{2} (\alpha \bar{\psi} \bar{F}_\mu) f^\mu(\alpha\psi - F) \\ &+ \frac{1}{4a} \bar{f}^\mu(a\psi - \alpha F) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(a\psi - \alpha F) - \frac{m_- \alpha}{2a} \bar{f}^\mu(a\psi - \alpha F) F_\mu \\ &- \frac{m_- \alpha}{2a} \bar{F}_\mu f^\mu(a\psi - \alpha F) + \frac{m_-^2 \alpha^2}{2a} \bar{F}_\mu \epsilon^{\mu\nu\beta} \gamma_\nu F_\beta. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Eliminando os termos cruzados, a partir das propriedades das matrizes gama e após alguns cálculos, ficamos com a expressão:

$$\begin{aligned}
S_{solda} = & -\frac{1}{4a} \bar{f}^\mu(F) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(F) + \frac{m_+ m_-}{2a} \bar{F}_\mu \varepsilon^{\mu\nu\beta} \gamma_\nu F_\beta \\
& + \frac{(m_+ - m_-)}{2a} \bar{F}^\mu f_\mu(F)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Nosso resultado é exatamente o modelo de dubleto proposto no capítulo anterior, fazendo $m_+ = m_-$, e como esperado completamente análogo ao modelo MCS-Proca obtido em (BANERJEE; KUMAR, 1999), onde os autores soldaram dois modelos de MCS com massas e helicidades distintas. No contexto das teorias de spin 1, o modelo de MCS é o modelo auto-dual de ordem mais alta possível nas derivadas e sem fantasmas.

No caso das teorias de spin 2 temos quatro modelos auto-duais livres de fantasmas, sendo eles de primeira, segunda, terceira e quarta ordem nas derivadas. Ao soldar dois modelos auto-duais de segunda ordem nas derivadas, como acontece aqui, obtemos um modelo de dubleto, que consiste da soma de um termo de segunda ordem (Einstein-Hilbert linearizado), um de primeira ordem (do tipo Chern-Simons) e de um termo de massa (Fierz-Pauli). Ao soldar dois modelos auto-duais de terceira e quarta ordem nas derivadas, o modelo de dubleto que é obtido é exatamente a versão linearizada da NMG.

Isso então nos leva ao questionamento natural: o que resultaria da solda de dois modelos auto-duais de terceira ordem nas derivadas para spin 3/2.

4.2 SOLDA DOS MODELOS DE TERCEIRA ORDEM COM MASSAS DISTINTAS

A partir de uma análise da aplicação do formalismo de solda para os casos estudados anteriormente, isto é, os modelos de singletos bosônicos e, levando em conta o resultado obtido na seção anterior, os fermiônicos; podemos notar que ao soldar dois modelos de segunda ordem, em geral obtemos um modelo de dubleto também de segunda ordem. Quando aplicamos num modelo de terceira ou quarta, como acontece para spin 2, obtemos um modelo de dubleto de quarta ordem. Logo, para spin 3/2 esperamos que o modelo, resultante da solda de dois singletos de terceira ordem nas derivadas, tenha ordem igual ou superior a três. Tomando a densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m} \bar{f}^\mu(\chi) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\chi) - \frac{1}{4m^2} \varepsilon^{\alpha\lambda\beta} \bar{f}^\mu(\chi) \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta \partial_\lambda f^\nu(\chi), \tag{4.30}$$

podemos escrever, separando os dois modos de propagação da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_+ = \bar{f}^\mu(\chi) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\chi) + \frac{1}{2m_+} \varepsilon^{\alpha\lambda\beta} \bar{f}^\mu(\chi) \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta \partial_\lambda f^\nu(\chi), \tag{4.31}$$

$$\mathcal{L}_- = \bar{f}^\mu(\psi) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\psi) - \frac{1}{2m_-} \varepsilon^{\alpha\lambda\beta} \bar{f}^\mu(\psi) \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta \partial_\lambda f^\nu(\psi). \quad (4.32)$$

A partir deste ponto utilizaremos as seguintes notações:

$$\varepsilon^{\alpha\lambda\beta} \partial_\lambda = E^{\alpha\beta} \quad \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta = \Delta_{\alpha\mu\nu\beta}. \quad (4.33)$$

Desta forma podemos escrever a variação das ações S_+ e S_- da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta S_+ = \int d^3x \left[\bar{f}^\mu(\delta\chi) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\chi) - \frac{1}{2m_+} \bar{f}^\mu(\delta\chi) \Delta_{\alpha\mu\nu\beta} E^{\alpha\beta} f^\nu(\chi) \right. \\ \left. + \bar{f}^\mu(\chi) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\delta\chi) - \frac{1}{2m_+} \bar{f}^\mu(\chi) \Delta_{\alpha\mu\nu\beta} E^{\alpha\beta} f^\nu(\delta\chi) \right], \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \delta S_- = \int d^3x \left[\bar{f}^\mu(\delta\psi) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\psi) + \frac{1}{2m_+} \bar{f}^\mu(\delta\psi) \Delta_{\alpha\mu\nu\beta} E^{\alpha\beta} f^\nu(\psi) \right. \\ \left. + \bar{f}^\mu(\psi) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\delta\psi) + \frac{1}{2m_+} \bar{f}^\mu(\psi) \Delta_{\alpha\mu\nu\beta} E^{\alpha\beta} f^\nu(\delta\psi) \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Fazendo as transformações:

$$\delta\psi_\mu = \Lambda_\mu \quad \delta\bar{\psi}_\mu = \bar{\Lambda}_\mu, \quad (4.36)$$

$$\delta\chi_\mu = \alpha\Lambda_\mu \quad \delta\bar{\chi}_\mu = \alpha\bar{\Lambda}_\mu, \quad (4.37)$$

e fatorando $\bar{f}^\mu(\Lambda)$ e $f^\nu(\Lambda)$, obtemos uma ação onde as correntes de solda são apresentadas de forma explicita na expressão:

$$\begin{aligned} \delta(S_+ + S_-) = \int d^3x \bar{f}^\mu(\Lambda) \left[\gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(\psi + \alpha\chi) + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\mu\nu\beta} E^{\alpha\beta} f^\nu \left(\frac{\psi}{m_-} - \frac{\alpha\chi}{m_+} \right) \right] \\ + \left[\bar{f}^\mu(\psi + \alpha\chi) \gamma_\nu \gamma_\mu + \frac{1}{2} \bar{f}^\mu \left(\frac{\psi}{m_-} - \frac{\alpha\chi}{m_+} \right) \Delta_{\alpha\mu\nu\beta} E^{\alpha\beta} \right] f^\nu(\Lambda), \end{aligned} \quad (4.38)$$

sendo que a ação pode ser reescrita, representando as correntes a partir de $\bar{J}$ e J , como:

$$\delta(S_+ + S_-) = \int d^3x [\bar{f}^\mu(\Lambda) J_\mu + \bar{J}_\nu f^\nu(\Lambda)] \quad (4.39)$$

Definindo neste ponto os campos auxiliares $\bar{f}^\mu(\Lambda) = \delta\bar{H}^\mu$ e $f^\nu(\Lambda) = \delta H^\nu$, temos:

$$\delta(S_+ + S_-) = \int d^3x [\delta(\bar{H}^\mu J_\mu + \bar{J}_\nu H^\nu) - (\bar{H}^\mu \delta J_\mu + \delta \bar{J}_\nu H^\nu)], \quad (4.40)$$

ou com o objetivo de ter a variação das correntes do lado direito da equação:

$$\delta[(S_+ + S_-) - \int d^3x (\bar{H}^\mu J_\mu + \bar{J}_\nu H^\nu)] = - \int d^3x (\bar{H}^\mu \delta J_\mu + \delta \bar{J}_\nu H^\nu). \quad (4.41)$$

Tomando a variação de $\bar{J}$ e J , temos:

$$\delta J_\mu = \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu (\Lambda + \alpha^2 \Lambda) + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\mu\nu\beta} E^{\alpha\beta} f^\nu \left(\frac{\Lambda}{m_-} - \alpha^2 \frac{\Lambda}{m_+} \right), \quad (4.42)$$

$$\delta \bar{J}_\nu = \bar{f}^\mu (\Lambda + \alpha^2 \Lambda) \gamma_\nu \gamma_\mu + \frac{1}{2} \bar{f}^\mu \left(\frac{\Lambda}{m_-} - \alpha^2 \frac{\Lambda}{m_+} \right) \Delta_{\alpha\mu\nu\beta} E^{\alpha\beta}, \quad (4.43)$$

onde a partir da escolha de $\alpha = \sqrt{\frac{m_+}{m_-}}$ e $a = 1 + \alpha^2$, eliminamos o termo de massa ficando com as expressões:

$$\delta J_\mu = a \gamma_\nu \gamma_\mu \delta H^\nu \quad \delta \bar{J}_\nu = a \delta \bar{H}^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu. \quad (4.44)$$

E então podemos definir a ação de solda S , em termos dos campos auxiliares, como segue:

$$\delta \left[(S_+ + S_-) - \int d^3x (\bar{H}^\mu J_\mu + \bar{J}_\nu H^\nu - a \bar{H}^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu H^\nu) \right] = 0. \quad (4.45)$$

Tomando a equação de movimento com respeito a $\bar{H}$ e H , temos:

$$J_\mu - a \gamma_\nu \gamma_\mu H^\nu = 0 \quad \bar{J}_\nu - a \bar{H}^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu = 0 \quad (4.46)$$

Substituindo (4.46) em (4.45), temos:

$$S = (S_+ + S_-) + \frac{1}{2a} \int d^3x (\bar{J}^\mu J_\mu - \bar{J}_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu J_\nu) \quad (4.47)$$

Substituindo S_+ , S_- , $\bar{J}$, J e definindo um campo auxiliar dado por $F = \alpha\psi - \chi$ encontramos a expressão final para a ação de solda:

$$S = \frac{1}{2(1+\alpha^2)} \int d^3x \left[\bar{f}^\mu(F) \gamma_\nu \gamma_\mu f^\nu(F) + \frac{(m_+ - m_-)}{2(m_+ m_-)} \bar{f}^\mu(F) \Delta_{\alpha\mu\nu\beta} E^{\alpha\beta} f^\nu(F) \right. \\ \left. - \frac{1}{4(m_+ m_-)} \bar{f}^\mu(F) E^{\alpha\beta} \gamma_\alpha \Delta_{\mu\theta\beta\tau} \gamma_\omega E^{\theta\omega} f^\tau(F) \right]. \quad (4.48)$$

Esse resultado é o mesmo encontrado, fazendo $m_+ = m_-$, a partir da imersão de calibre aplicada no modelo de dubleto de segunda ordem dado pela equação (3.48). Ao que parece, fechamos a lista de relações envolvendo os modelos auto-duais para spin 3/2 em D=2+1 dimensões.

Notamos mais uma vez o caráter construtivista do método de dualização que estamos estudando, pois o termo de massa do tipo $m^2 \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \psi_\alpha$ foi produzido de forma natural e sistemáticos quando soldamos dois modelos auto-duais de segunda ordem. Da mesma forma o modelo de dubleto de quarta ordem foi recuperado, via um método distinto em (4.48) quando eliminamos o termo de interferência fazendo $m_+ = m_-$.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

No contexto do estudo dos modelos auto-duais de spin-3/2 em $D = 2 + 1$, de primeira e segunda ordem até o início do capítulo 2, pôde-se traçar uma série de similaridades com os resultados obtidos a partir das teorias bosônicas, mais precisamente à análise dos modelos de spin 1 e spin 2. Para o modelo auto-dual de primeira ordem em derivadas, verificou-se, através de dois métodos distintos, sendo eles: a análise hamiltoniana de vínculos via algoritmo de Dirac-Bergmann, encontrando vínculos primários, secundários e terciários, todos de segunda classe, e também através das condições de Fierz-Pauli, que este modelo, fazendo uso da contagem do número de graus de liberdade, descreve de fato um singlete de helicidade $+3/2$ ou $-3/2$, dependendo do sinal relativo ao termo de massa, para cada campo independente encontrado na ação.

Ao termo de massa atribuímos o sinal do valor da helicidade e a quebra de simetria pelas transformações $\delta\chi_\mu = \partial_\mu\Lambda$ e $\delta\tilde{\chi}_\mu = \partial_\mu\bar{\Lambda}$. Nesse contexto, através da técnica de Imersão de Calibre de Noether, o modelo invariante obtido foi justamente o modelo auto-dual de segunda ordem em derivadas conhecido na literatura. Por sua vez o modelo de segunda ordem, que também é um singlete, é invariante sob as transformações anteriores, mas não sob as transformações dadas por $\delta\chi_\mu = \gamma_\mu\xi$ e $\delta\tilde{\chi}_\mu = \gamma_\mu\bar{\xi}$. A aplicação da técnica de ICN neste caso nos levou a um modelo de terceira ordem em derivadas, que também já era estabelecido de forma implícita¹ na literatura a partir de outros métodos. A Figura 4 ilustra esse resultado.

Figura 4 – Ilustração das relações entre os modelos de singletos para spin3/2 obtido no capítulo 2



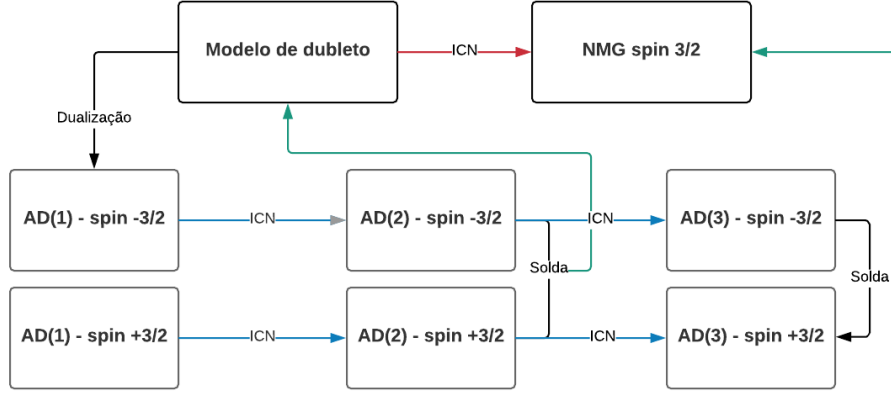
fonte: Produção do próprio autor.

Um modelo de segunda ordem nas derivadas foi proposto inspirado no modelo de Proca no capítulo 3 sendo, por meio da análise dos vínculos através da aplicação das condições

¹ Implícita pois o modelo de terceira ordem em derivadas encontrado é na realidade a parte fermiônica de um modelo supersimétrico

Todas essas relações são ilustradas na Figura 6.

Figura 6 – Ilustração completa das relações entre os modelos de singletos e dubletos para spin 3/2 em D=2+1 dimensões



fonte: Produção do próprio autor.

O foco da dissertação foi trabalhar com modelos auto-duais em D=2+1 dimensões, no entanto, como forma de buscar perspectivas futuras para o assunto, aplicamos a imersão de calibre para o modelo complexo de Rarita-Schwinger em D=3+1 (RARITA; SCHWINGER, 1941), não invariante sob as transformações $\psi_\mu \rightarrow \psi_\mu + \partial_\mu \varepsilon$ e $\bar{\psi}_\mu \rightarrow \bar{\psi}_\mu + \partial_\mu \bar{\varepsilon}$ expresso em notação moderna (RAKIBUR, 2009) por:

$$S_{R.S} = iS = \int d^4x [\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \psi_\rho + m \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu] \quad (5.1)$$

A partir desta ação podemos extrair os espinores-vetores de Euler:

$$R^\mu = \gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \psi_\rho + m \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu, \quad (5.2)$$

$$\bar{R}^\rho = -\partial_\nu \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} + m \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\rho}, \quad (5.3)$$

e com a ajuda de campos auxiliares, determinar o novo modelo invariante dado por:

$$\begin{aligned} S_{R.S.I} &= S_{R.S} - \frac{1}{m} \int d^4x \left(\frac{1}{3} \bar{\psi}^\nu \gamma_\nu \gamma_\mu R^\mu - \bar{R}^\mu R_\mu \right) \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{m} \left(\frac{1}{3} \bar{\psi}_\alpha \gamma^{\alpha\beta\mu} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^{\nu\lambda\rho} \partial_\beta \partial_\lambda \psi_\rho - \bar{\psi}_\alpha \gamma^{\alpha\beta\mu} \gamma_{\mu\lambda\rho} \partial_\beta \partial^\lambda \psi^\rho \right) \right. \\ &\quad \left. - \bar{\psi}_\alpha \gamma^{\alpha\beta\rho} \partial_\beta \psi_\rho \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Utilizando a notação $\bar{\psi}_\alpha \gamma^{\alpha\beta\mu} \partial_\beta = f^\mu(\bar{\psi})$ e $\gamma^{\nu\lambda\rho} \partial_\lambda \psi_\rho = f^\nu(\psi)$, podemos reescrever (5.4) na expressão:

$$S_{R.S.I} = \int d^4x \left[\frac{1}{m} \left(\frac{1}{3} f^\mu(\bar{\psi}) \gamma_\mu \gamma_\nu f^\nu(\psi) - f^\mu(\bar{\psi}) f_\nu(\psi) \right) - \bar{\psi}_\mu f^\mu(\psi) \right] \quad (5.5)$$

A ação (5.5) é análoga ao modelo New Massive Gravity em $D = 2 + 1$, no entanto, o termo de primeira ordem é o termo de Rarita-Schwinger não massivo, o qual em $D = 3 + 1$ possui conteúdo físico descrevendo uma partícula não massiva de helicidade $3/2$ e $-3/2$. Desta forma, consultando a literatura do método da ação mestra, deduzimos que usando este termo, como termo de mistura na construção de uma ação mestra interpolando entre a teoria de primeira ordem de Rarita-Schwinger e a teoria de segunda ordem obtida em (5.5), a teoria final terá fantasmas exatamente como acontece se insistirmos em usar o termo de Maxwell ou o termo de Einstein-Hilbert em $D = 3 + 1$ para obter modelos de dubleto de ordem superior duais aos originais. O fato é que para a construção de ações mestras que interpolem entre modelos saudáveis (sem fantasmas no espectro) os termos de mistura não devem possuir conteúdo físico.

REFERÊNCIAS

- ANACLETO, M. et al. Dual equivalence between selfdual and maxwell-chern-simons models coupled to dynamical $u(1)$ charged matter. **Physics Letters B**, v. 504, n. 3, p. 268–274, 2001.
- ANDRINGA et al. Massive 3d supergravity. **Classical and Quantum Gravity**, v. 27, n. 2, 2010.
- BANERJEE, R.; KUMAR, S. Self duality and soldering in odd dimensions. **Physical Review D**, v. 60, n. 8, 1999.
- BERGSHOEFF, E.; HOHM, O.; TOWNSEND, P. Massive gravity in three dimensions. **Physical Review Letters**, v. 102, n. 20, 2009.
- BINEGAR, B. Relativistic field theories in three dimensions. **Journal of Mathematical Physics**, v. 23, n. 151, 1982.
- BOUATTAA, N.; COMPERE, G.; SAGNOTTI, A. An introduction to free higher-spin fields. **arXiv:hep-th/0409068v1**, 2004.
- DALMAZI, D.; MENDONCA, E. Quantum equivalence between the self-dual and the maxwell-chern-simons models nonlinearly coupled to $u(1)$ scalar. **Journal of Physics**, A39, n. 29, p. 9355–9363, 2006.
- DALMAZI, D.; MENDONCA, E. Dual descriptions of spin two massive particles in $d=2+1$ via master actions. **Physical Review D**, v. 79, n. 4, 2009.
- DALMAZI, D.; MENDONCA, E. Duality of parity doublets of helicity 2 in $d = 2 + 1$. **Physical Review D**, v. 82, n. 10, 2009.
- DALMAZI, D.; MENDONCA, E. Generalized soldering of 2 helicity states in $d = 2 + 1$. **Physical Review D**, v. 80, n. 2, 2009.
- DALMAZI, D.; MENDONCA, E. A new spin-2 self-dual model in $d=2+1$. **Journal of High Energy Physics**, v. 2009, n. 11, 2009.
- DALMAZI, D. D.; DUTRA, A. Multiflavor soldering. **Physics Letter B**, v. 656, n. 1-3, p. 158–163, 2007.
- DAS, A. **Lectures on quantum field theory**. New York, USA: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.
- DESER, S. Massive spin $3/2$ theories in 3 dimensions. **Physics Letters B**, v. 140, n. 5, p. 321–323, 1984.
- DESER, S.; JACKIW, R.; TEMPLETON, S. Topologically massive gauge theories. **Annals Phys**, v. 281, n. 140, p. 372–411, 1982.

DESER, S.; KAY, J. Topologically massive supergravity. **Physics Letters B**, v. 120B, p. 706–709, 1983.

DIRAC, P. The quantum theory of the electron. **Proceedings of the Royal Society of London**, v. 117, n. 778, 1928.

DIRAC, P. **Lectures on quatum mechanics**. New York, USA: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964.

FANG, J.; FRONSDAL, C. Massless fields with half-integral spin. **Physical Review D**, v. 18, n. 10, p. 3630, 1978.

FERRARI, A. et al. Equivalence between supersymmetric self-dual and maxwell-chermsimons models coupled to a matter spinor superfield. **Physics Letters B**, v. 678, n. 2, p. 233–239, 2009.

GOMES, M.; MALACARNE, L.; SILVA, A. On the equivalence of the self-dual and maxwell-chermsimons models coupled to fermions. **Physics Letter B**, v. 439, n. 1-2, p. 137–141, 1998.

HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. **Quantization of gauge systems**. New Jersey, USA: Princeton University Press, 1994.

ITZYKSON, C.; ZUBER, J. **Quantum field theory**. Mineola, New York, USA: McGraw-Hill International Book Co., 1980.

JACKIW, R.; NAIR, V. Relativistic wave equation for anyons. **Physical Review D**, v. 43, n. 6, p. 1933, 1991.

KOENIGSTEIN, A.; GIACOSA, F.; RISCHKE, D. Classical and quantum theory of the massive spin-two field. **Annals of Physics**, v. 368, p. 16–55, 2016.

LEMONS, N. **Mecânica Analítica**. Sao Paulo, Brasil: Editora Livraria da Física, 2007.

MENDONCA, E. **Teorias duais massivas de spin 2 em D= 2+1: via ação mestra e imersão de Neother**. Guaratingueta, Sao Paulo, Brasil: [s.n.], 2009.

MENDONCA, E. **Teorias duais massivas de spin-3 em D=2+1**. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratingueta, Universidade Estadual Paulista, Guaratingueta, Sao Paulo, Brasil, 2012.

MENDONCA, E.; SANTOS, A.; LIMA, D. Massive spin-3/2 models in d=2+1. **Physics Letters B**, v. 775, p. 147–151, 2017.

PALASH, B. Dirac, majorana and weyl fermions. **American Journal of Physics**, v. 79, n. 485, 2011.

PODOLSKY, B. A generalized electrodynamics part i-non-quantum. **Physical Review**, v. 62, n. 1-2, p. 68–71, 1942.

RAKIBUR, M. **Interacting Massive Higher Spin Fields**. Tese (Doutorado) — New York University, New York, USA, 2009.

RARITA, W.; SCHWINGER, J. On a theory of particles with half-integral spin. **Physical Review**, v. 60, n. 1, p. 61, 1941.

SINGH, L.; HAGEN, C. Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. the boson case. **Physical Review D**, v. 9, n. 4, p. 898, 1974.

SINGH, L.; HAGEN, C. Lagrangian formulation for arbitrary spin. 2. the fermion case. **Physical Review D**, v. 9, n. 4, p. 910–920, 1974.

TOWNSEND, P.; PILCH, K.; NIEUWENHUIZEN, P. v. Selfduality in odd dimensions. **Physics Letters B**, v. 136B, n. 38, 1984.

APÊNDICE A – IDENTIDADES DAS MATRIZES DE DIRAC

Demonstraremos neste apêndice as identidades utilizadas ao longo desta dissertação com respeito as matrizes de Dirac.

A.1 IDENTIDADES EM D=2+1 DIMENSÕES

Em D=2+1, que é a dimensão estudada ao longo de praticamente todo o trabalho, adotamos a assinatura da métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +)$, com às matrizes dadas por (DESER; JACKIW; TEMPLETON, 1982):

$$\gamma_0 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma_1 = i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma_2 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Partindo das equações abaixo:

$$\frac{1}{2}\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \eta_{\mu\nu} \quad \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \varepsilon_{\mu\nu\alpha}\gamma^\alpha, \quad (\text{A.4})$$

podemos facilmente demonstrar que:

$$\frac{1}{2}\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} + \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu\alpha}\gamma^\alpha \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu\alpha}\gamma^\alpha. \quad (\text{A.6})$$

A partir do anti-comutador (A.4), temos:

$$\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma_\mu\} = \eta^\mu_\mu, \quad (\text{A.7})$$

logo:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 3I_3, \quad (\text{A.8})$$

sendo I_3 a matriz identidade. A partir do resultado (A.8), podemos demonstrar que:

$$\gamma^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = 2\gamma^\nu \eta_{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma_\nu \gamma_\mu = -\gamma_\mu, \quad (\text{A.9})$$

ou para as componentes espaciais, tendo em vista que $\gamma^i \gamma_i = 2I_3$:

$$\gamma^i \gamma_j \gamma_i = 2\gamma^i \eta_{ji} - \gamma^i \gamma_i \gamma_j = 0, \quad (\text{A.10})$$

Podemos ainda escrever:

$$\gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\nu = -\gamma_\alpha \gamma^\nu \gamma_\beta \gamma_\nu + 2\eta_\alpha^\nu \gamma_\beta \gamma_\nu = 4\eta_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta, \quad (\text{A.11})$$

e

$$\gamma_i \gamma_j \gamma_k \gamma_i = 2\gamma_k \gamma_j, \quad (\text{A.12})$$

fechando assim o quadro geral de identidades das matrizes gama, em $D = 2 + 1$ dimensões, utilizadas neste trabalho.

A.2 IDENTIDADES EM D=3+1 DIMENSÕES

Em $D = 3 + 1$ adotamos a assinatura $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -)$, fazendo uso dos resultados apresentados em (ITZYKSON; ZUBER, 1980), onde as principais identidades são dadas, a partir de:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = 2i\sigma_{\mu\nu} \quad (\text{A.13})$$

por:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4 \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = -2\gamma_\mu \quad (\text{A.15})$$

$$\gamma^\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu = 4g_{\mu\alpha} \quad (\text{A.16})$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} - i\sigma_{\mu\nu} \quad (\text{A.17})$$

APÊNDICE B – SISTEMAS HAMILTONIANOS VINCULADOS E O ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN

Vínculos¹ são encontrados na maior parte dos sistemas hamiltonianos de interesse físico, e em particular na física das partículas elementares. A análise de vínculos é importante teoria quântica de campos para a correta contagem dos graus de liberdade descritos por certos modelos, bem como para uma análise de positividade da hamiltoniana. No entanto, para um melhor entendimento do assunto, será interessante abordar o tema a partir da mecânica clássica. Para que a transição da formulação lagrangiana para a hamiltoniana seja unicamente satisfeita, temos necessariamente que garantir que cada velocidade generalizada tenha um único representante no espaço de fase (LEMOS, 2007), ou seja, possam ser descritas em termos dos momentos canônicos. Basicamente, a transição é dada por uma transformação de Legendre:

$$L(q, \dot{q}) \rightarrow H(q, p) = \dot{q}p - L(q, \dot{q}), \quad (\text{B.1})$$

onde $\dot{q}$ é a velocidade generalizada e p o momento canonicamente conjugado, definido por $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. A transição é unicamente satisfeita se a matriz hessiana, que pode ser interpretada como o jacobiano dessa transformação, for não-singular, ou seja, $\det \mathbb{W} \neq 0$.

Podemos obter a matriz hessiana a partir das equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (\text{B.2})$$

Desta feita assumimos que o sistema possui N componentes linearmente independentes. A equação de movimento pode ser expressa, tomando a derivada total do primeiro termo, da seguinte forma:

$$\ddot{q}_m \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_m \partial \dot{q}_n} + \dot{q}_m \frac{\partial^2 L}{\partial q_m \partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Vemos que as acelerações $\ddot{q}_m$ podem ser determinadas unicamente em função dos $\dot{q}_n$ e q_n se e somente se a matriz hessiana $\mathbb{W}_{mn}$, cujos elementos são:

$$\mathbb{W}_{mn} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_m \partial \dot{q}_n}, \quad (\text{B.4})$$

¹ Esta seção é fortemente baseada no trabalho do Dirac (DIRAC, 1964) sobre sistemas hamiltonianos vinculados e também no livro de mecânica analítica do Nivaldo Lemos (LEMOS, 2007).

for inversível. Quando $\det \mathbb{W} = 0$, não é possível escrever todas as velocidades generalizadas $\dot{q}_n$ em termos dos momentos canônicos e consequentemente encontrar todas $\ddot{q}_m$'s. Sendo assim, o formalismo hamiltoniano apresenta vínculos primários, ou seja, as equações que definem esses momentos não são independentes. Esses vínculos são funções que podem ser escritas na seguinte forma:

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (B.5)$$

onde assumimos a presença de um número M de vínculos. A palavra primário, nesse caso, tem relação apenas com a ordem em que esses vínculos aparecem no processo que veremos durante esse capítulo. Tais vínculos(e os outros que poderão aparecer) definem uma hipersuperfície imersa no espaço de fase completo. Nesses casos, as hamiltonianas são modificadas de forma a incorporá-los podendo ser expressas da seguinte maneira:

$$H_T = H_c + \sum_{m=1}^M \lambda_m \phi_m \quad (B.6)$$

onde H_T representa a hamiltoniana total, H_c a hamiltoniana canônica e λ_m os multiplicadores de Lagrange. Nesse ponto é importante ter em mente a noção de igualdade fraca e igualdade forte. Uma variável dinâmica $F(q, p)$ é dita ser fracamente nula, $F(q, p) \approx 0$, se ela se anula somente na hipersuperfície definida pelos vínculos. Por outro lado, ela é fortemente nula se, além de se anular sobre a hipersuperfície, sua derivada com relação a p e q também se anular. Uma vez que os vínculos se anulam somente na hipersuperfície, e $\frac{\partial \phi_m}{\partial p} = \delta_{mn}$, então devemos escrevê-los como igualdades fracas: $\phi_m \approx 0$. Os parênteses de Poisson entre duas variáveis dinâmicas $F(q, p)$ e $G(q, p)$ é definido por:

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i}. \quad (B.7)$$

Segue daí os parênteses de Poisson fundamentais entre as coordenadas e momentos canônicos:

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\} \quad (B.8)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} = -\{p_i, q_j\} \quad (B.9)$$

Utilizando a notação $\dot{p} = \{p, H\}$, podemos escrever a evolução temporal de uma variável canônica qualquer em termos da hamiltoniana total na seguinte forma:

$$\dot{F} = \{F, H_c\} + \sum_m \lambda_m \{F, \phi_m\} + \sum_m \{\lambda_m, F\} \phi_m \approx \{F, H_T\}$$

Como na hipersuperfície os vínculos são nulos, temos que $\{\lambda_m, F\} \phi_m \approx 0$, e então podemos reescrever como:

$$\dot{F} = \{F, H_c\} + \sum_m \lambda_m \{F, \phi_m\} \approx \{F, H_T\} \quad (\text{B.10})$$

Esta última equação deve ser entendida como a evolução temporal da função F .

B.0.1 Algoritmo de Dirac-Bergmann

O algoritmo de Dirac-Bergmann foi proposto inicialmente por Dirac em 1964 (DIRAC, 1964), com o título "Hamiltonian Method", no qual ele trabalha com sistemas hamiltonianos vinculados. Já como parte integrante da teoria proposta, por consistência, os vínculos primários devem ser conservados no tempo, isto é: $\dot{\phi}_m = 0$. Essa é a primeira condição na execução do algoritmo. Logo, a equação (B.10) pode ser reescrita, levando em conta a condição de consistência e com os vínculos no lugar de F . Obtemos a expressão:

$$\{\phi_n, H_c\} + \sum_n \lambda_n \{\phi_n, \phi_m\} \approx 0 \quad (\text{B.11})$$

Essa condição sobre os vínculos primários pode levar a três casos distintos:

1. A condição é identicamente satisfeita. Neste caso não surge novo vínculo e o multiplicador permanece indeterminado. A dinâmica do sistema terá funções arbitrárias do tempo.
2. Os multiplicadores são determinados univocamente. Para que todos os multiplicadores sejam determinados pelos vínculos primários é necessário que a matriz P gerada pelos parênteses de Poisson de todos os vínculos

$$P_{mn} = \{\phi_m, \phi_n\} \quad (\text{B.12})$$

seja não singular, isto é, $\det P \neq 0$.

3. A condição de consistência leva a novos vínculos denominados secundários

$$\chi_s(p, q) \approx 0 \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (\text{B.13})$$

Devemos então impor condições de consistências sobre os vínculos secundários. Se

recair nos casos 1 ou 2 o processo termina. Se recair no caso 3 o processo continua, até que todos os vínculos do sistema sejam determinados.

A distinção entre os vínculos primários, secundário, terciários, etc é pouco importante para a teoria final, de modo que podemos denotar todos os vínculos da teoria por:

$$\Phi_i \approx 0 \quad i = 1, 2, \dots, M + S \quad (\text{B.14})$$

B.0.2 Transformações de calibre e Contagem do Número de Graus de Liberdade

Uma classificação muito importante para os vínculos é a seguinte:

1. Vínculos de primeira classe: Seus parênteses de Poisson com todos os demais vínculos são fracamente nulos.
2. Vínculos de segunda classe: tem pelo menos um parênteses de Poisson não-nulo com os demais vínculos.

Os vínculos primários de primeira classe, cuja evolução não permite determinar os multiplicadores de Lagrange, nos levam a funções arbitrárias do tempo nas equações de movimento, fazendo com que as condições iniciais, ou seja, os p 's e q 's, não determinem univocamente a evolução das variáveis dinâmicas, necessitando de mais restrições para descrever o comportamento do sistema em tempos futuros.

O estado físico não deve depender da escolha das funções arbitrárias do tempo que surgiram durante o processo, sendo esse caso típico de teorias com simetria de calibre. Segundo (LEMOS, 2007): "*Os vínculos primários de primeira classe geram transformações de calibre, isto é, transformações canônicas infinitesimais que mudam os p 's e q 's mas não alteram o estado físico do sistema*"

É importante frisar que este postulado é válido para vínculos primários de primeira classe, não se estendendo necessariamente aos vínculos secundários de primeira classe, embora estes também possam gerar transformações de calibre, vide discussão em (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1994).

A contagem dos graus de liberdade do sistema físico pode ser analisada da seguinte forma: visto que um vínculo, que relaciona duas ou mais variáveis canônicas no espaço de fase, está associado ao seu multiplicador na hamiltoniana total, um vínculo de segunda classe por si só elimina um grau de liberdade. Já no caso de existência de vínculos primários de primeira classe, a exigência da fixação de calibre, que dá conta das funções arbitrárias do tempo, obtendo então uma teoria somente com vínculos de segunda classe,

nos leva a eliminação de dois graus de liberdade do sistema. A contagem pode ser expressa na seguinte maneira (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1994):

$$N = \frac{D - N_2 - 2N_1}{2} \quad (\text{B.15})$$

onde N é o número de graus de liberdade do sistema no espaço de configuração, D é a dimensão do espaço de fase, N_1 o número de vínculos de primeira classe que geram transformações de calibre e N_2 o número de vínculos de segunda classe.

Variáveis de Grassmann

É importante enfatizar que estamos tratando q_i (e consequentemente p_i) como variáveis que comutam, ou seja, $q_i q_j = q_j q_i$. Por outro lado, se o sistema lagrangiano é descrito por variáveis anti-comutantes θ_μ (Variáveis de Grassmann), em que $\theta_\mu \theta_\nu = -\theta_\nu \theta_\mu$, a hamiltoniana canônica será definida por:

$$H(\theta, \Pi) = \dot{\theta}_\mu \Pi^\mu - L(\theta, \dot{\theta}) = -\Pi^\mu \dot{\theta}_\mu - L(\theta, \dot{\theta}), \quad (\text{B.16})$$

onde $\Pi^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\mu}$. Na definição da transformada de Legendre acima, $\dot{\theta}_\mu$ é posicionado à esquerda de Π^μ devido a convenção que adotamos aqui de tomar derivadas em relação às variáveis de Grassmann pela esquerda, vide (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1994) (DAS, 2008)

O parêntese de Poisson entre duas variáveis dinâmicas de Grassmann $P(\theta, \Pi)$ e $Q(\theta, \Pi)$, também conhecido como parêntese de Berezin, é dado por:

$$\{P, Q\} = - \left(\frac{\partial P}{\partial \theta_\mu} \frac{\partial Q}{\partial \Pi^\mu} + \frac{\partial P}{\partial \Pi^\mu} \frac{\partial Q}{\partial \theta_\mu} \right). \quad (\text{B.17})$$

Assim, os parênteses de Poisson fundamentais entre as coordenadas e momentos canônicos são:

$$\{\theta_\mu, \theta_\nu\} = \{\Pi^\mu, \Pi^\nu\} = 0 \quad (\text{B.18})$$

$$\{\theta_\mu, \Pi^\nu\} = \{\Pi^\mu, \theta_\nu\} = -\delta_{\mu\nu} \quad (\text{B.19})$$

APÊNDICE C – REPRESENTAÇÃO DOS ESPINORES DE DIRAC E MAJORANA

Neste apêndice será apresentada uma visão geral ¹ do aparato matemático e das representações dos espinores dentro da teoria de Dirac e Majorana.

Começaremos fazendo um breve resumo sobre a obtenção da equação de Dirac e verificaremos que essa equação não dá conta de descrever uma partícula de spin 3/2, pelo fato de tal partícula não possuir carga elétrica e exigir uma função de onda real. Esse problema tem solução no formalismo desenvolvido por Majorana, que construiu sua teoria de forma que as soluções da equação de Dirac se encontrassem no campo das funções reais.

C.0.1 Equação de Dirac

Na tentativa de descrever o comportamento do elétron, Dirac buscou alternativas para preservar a relação da energia de Einstein e não encontrar uma densidade de probabilidade negativa. A busca por esse objetivo passava pelo desafio de escrever uma equação linear no tempo e no espaço. A partir da equação:

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (\text{C.1})$$

queremos poder escrever uma equação, já transformados os observáveis em operadores, na seguinte forma:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = [\vec{\alpha} \cdot (-i\nabla) + \beta m]\psi(x) \quad (\text{C.2})$$

Para que isso seja possível, é necessário que α e β sejam matrizes 4x4 dadas por:

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

$$\alpha = \gamma^0 \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

¹ Para uma descrição detalhada sugiro as referências indicadas durante esse capítulo.

e que as matrizes γ satisfaçam a álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I} \quad (\text{C.5})$$

onde $\mathbb{I}$ é uma matriz identidade, σ são as matrizes de Pauli e $\{, \}$ é o anticomutador dado por:

$$\{A, B\} = AB + BA \quad (\text{C.6})$$

Desta forma obtemos:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = [-i\gamma^0\gamma.\nabla + m\gamma^0]\psi(x). \quad (\text{C.7})$$

Multiplicando os dois lados por γ^0 , sabendo que $\gamma^0\gamma_0 = \mathbb{I}$, podemos escrever de forma compacta:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi = 0. \quad (\text{C.8})$$

Essa é a conhecida equação de Dirac que descreve o comportamento do elétron e que foi concebida no artigo (DIRAC, 1928) "The Quantum Theory of the Electron" publicado em 1928.

C.0.2 Soluções da equação de Dirac

As soluções encontradas por Dirac, apesar de resolvido o problema da densidade de probabilidade negativa, tinha uma peculiaridade não observada quando se tratava de um sistema quântico não-relativístico, que foi interpretada e posteriormente verificada como antipartícula. No caso do elétron, a antipartícula é conhecida como pósitron, que é uma partícula com a mesma massa do elétron, porém valor oposto da carga.

Sendo γ uma matriz 4x4, $\psi(x)$ deve obrigatoriamente possuir quatro componentes e spin (DAS, 2008), que de fato é verificado no elétron. Essa função de onda pode ser escrita como uma matriz da seguinte forma:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

Sendo a onda plana uma solução para a equação de Dirac, podemos escreve-la na forma matricial da seguinte maneira:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} = e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \\ u_4(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.10})$$

ou na forma mais compacta:

$$\psi_\alpha(x) = e^{-ip \cdot x} u_\alpha(x), \quad (\text{C.11})$$

com $\alpha = 1, 2, 3, 4$. O objeto matemático spinor $u_\alpha(x)$, que obedece a algebra de Clifford, aparece nas soluções e pode ser descrito de uma forma não tão aprofundada, como escrito em (PALASH, 2011) "*The word spinor will be used to denote any column-like function of energy and momentum which, when multiplied by a factor $e^{ip \cdot x}$ or $e^{-ip \cdot x}$, becomes a solution of the Dirac equation.*"

As quatro componentes da função de onda se referem ao fato da energia poder assumir valor positivo e negativo, peculiaridade que não era observada nos casos não-relativísticos. Podemos escrever então o spinor da seguinte forma:

$$u(x) = \begin{pmatrix} \tilde{v}(x) \\ \tilde{u}(x) \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

Com:

$$\tilde{v}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

$$\tilde{u}(x) = \begin{pmatrix} u_3(x) \\ u_4(x) \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

Nesse caso $\tilde{v}(x)$ da conta da energia positiva com $u_1(x)$ e $u_2(x)$ sendo os dois valores possíveis de spin e $\tilde{u}(x)$ o análogo para o caso da energia negativa, também com dois valores possíveis de spin.

Chamamos de primeira quantização o que foi feito em (C.2), ou seja, transformar os observáveis da equação de energia em operadores, no entanto, na área de teoria de campos o que se tem é a chamada segunda quantização, onde o que é evoluído a operador é o próprio campo da teoria. Nesse caso, podemos expandir nossa função de onda em

termos dos operadores de criação e aniquilação, que atuarão no espaço de Fock, como uma expansão de Fourier, na forma:

$$\psi(x) = \sum_r \int_p (a_r(p) u_r(p) e^{-p \cdot x} + a_r^\dagger u_r^*(p) e^{p \cdot x}) \quad (\text{C.15})$$

C.0.3 Férmion de Majorana

O objetivo da introdução da equação de Dirac no texto é, na realidade lançar uma luz sobre o objeto de estudo desse trabalho: o férmion de Majorana. Cronologicamente, o férmion de Weyl foi proposto em 1930, após a teoria de Dirac, com o objetivo de descrever o neutrino, que era uma tentativa de explicar o espectro contínuo de energia para o decaimento beta. A principal característica do férmion de Weyl se dá no fato da equação não possuir massa. O neutrino não deveria possuir carga elétrica e por sua vez, deveria ser sua própria antipartícula, condições estas que poderiam ser satisfeitas através da teoria descrita por Majorana em 1937.

Na realidade, por muito tempo ficou estabelecido que o neutrino era um férmion de Weyl, e essa situação só mudou na década de sessenta com pesquisas relacionadas a hipótese dessa partícula possuir uma massa pequena porém diferente de zero (PALASH, 2011), abrindo assim uma série de discussões relacionadas à teoria descrita por Majorana.

Uma forma de fazer da equação de Dirac uma equação real é construir as matrizes de gama puramente imaginárias. Majorana desenvolveu sua teoria modificando diretamente as matrizes de Pauli, obtendo $\psi = \psi^*$. No entanto, são relacionadas via matrizes unitárias de transformação quaisquer duas possíveis construções das matrizes de Dirac que satisfaçam a álgebra de Clifford. Para o caso das representações de Dirac e Majorana, temos:

$$\gamma^\mu = U \tilde{\gamma}^\mu U^\dagger, \quad (\text{C.16})$$

sendo γ^μ as matrizes de Dirac, $\tilde{\gamma}^\mu$ as matrizes na representação de Majorana e U a matrizes unitária de transformação. Para as soluções da equação, os espinores podem ser relacionados da seguinte maneira:

$$\psi = U \tilde{\psi}, \quad (\text{C.17})$$

sendo ψ o espinor de Dirac e $\tilde{\psi}$ o de Majorana. Podemos, assim como no caso de Dirac, escrever o espinor de Majorana como uma expansão de Fourier na forma:

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_r \int_p (a_r(p) \tilde{u}_r(p) e^{-p \cdot x} + a_r^\dagger \tilde{u}_r^*(p) e^{p \cdot x}), \quad (\text{C.18})$$

ou reescrever a equação (C.17), que representa o espinor de Dirac como:

$$\psi(x) = \sum_r \int_p (a_r(p) U \tilde{u}_r(p) e^{-p \cdot x} + a_r^\dagger U \tilde{u}_r^*(p) e^{p \cdot x}) \quad (\text{C.19})$$

É importante frisar que apesar das diferenças nas representações, ambas são invariantes sob transformações de Lorentz. Devo novamente esclarecer que esse capítulo não tem como objetivo uma apresentação aprofundada dos aspectos de cada uma das representações. Logo, para maiores dúvidas, sugiro a leitura do texto (PALASH, 2011).

C.0.4 Conjugação de carga

Dizemos que o campo de Majorana é simétrico por conjugação de carga, isto é, sua ação é invariante pela substituição do espinor por seu complexo conjugado. Essa operação pode ser escrita, para a representação de Majorana, na forma:

$$\mathcal{C} \psi \mathcal{C}^{-1} = \eta_C \psi \quad (\text{C.20})$$

onde $\mathcal{C}^2$ é o operador conjugação de carga e η_C uma fase. Para um caso geral, essa operação é importante pois troca uma partícula por sua antipartícula. Para um férmion de Majorana, devido sua invariância sob essa operação, podemos dizer que ele é um auto-estado desse operador, ou em outras palavras, que essa partícula é sua própria antipartícula. Esse aspecto tem um grande valor no que diz respeito a parceiros supersimétricos dentro da supergravidade.

² Sendo que a forma explícita de $\mathcal{C}$ depende da escolha de representação das matrizes gamma