

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA
FILHO

Danilo Silva Rando

**CONVERGÊNCIA PARA ESTADOS ASSINTÓTICOS EM
MAPEAMENTOS UNIDIMENSIONAIS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Física do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
da Universidade Estadual Paulista, câmpus
Rio Claro, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Edson Denis Leonel

Rio Claro - SP
2016

517.39 Rando, Danilo Silva
R192c Convergência para estados assintóticos em mapeamentos
unidimensionais / Danilo Silva Rando. - Rio Claro, 2017
35 f. : il., figs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Edson Denis Leonel

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Leis de escala. 3.
Dinâmica não linear. 4. Caos. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Danilo Silva Rando

**CONVERGÊNCIA PARA ESTADOS ASSINTÓTICOS EM
MAPEAMENTOS UNIDIMENSIONAIS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Física do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
da Universidade Estadual Paulista, câmpus
Rio Claro, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel
Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira
Profa. Dra. Ana Paula Mijolaro

Rio Claro - Dezembro, 2016

Resultado:

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por tornar tudo isso possível. Agradeço à minha mãe por todo o amor, carinho e dedicação até onde lhe foi possível, mas que infelizmente não está mais presente, agradeço ao meu pai por me apoiar em todas as decisões, nos momentos mais difíceis, e me fornecer todo o auxílio que precisei, agradeço a Maria por todo carinho e dedicação desses anos.

Agradeço às minhas tias, Celeide, Clarice, Janete, Leandra, Leonice e Nilsa, aos meus tios, Amilton, Ilson, Márcio, Onivaldo, Zeca, por tudo que fizeram por mim desde criança e principalmente quando eu não tinha mais a minha mãe, uma lembrança em especial para a Tia Nice, que infelizmente nos deixou recentemente, e que fez tanto por toda a família. Agradeço às minhas primas, Fabiana, Gabriela, Sabrina, aos meus primos, João Gabriel, Igor, Raphael, Rodrigo e Vitor, por toda amizade, brincadeiras e etc; durante toda minha vida.

Agradeço à minha namorada Ana Laura Boscolo, e toda sua família pelo carinho e preocupação durante esse tempo.

Agradeço ao professor e amigo Edson Denis Leonel, por toda ajuda e paciência nessa jornada de iniciação científica e mestrado.

Agradeço aos amigos, Alan, Caio, Paulo, Chacal, Juliano, Wander, Mexicans, Raphael, Shermi, Palmero e tantos outros de Votuporanga e Rio Claro, por toda amizade e zueiras.

Agradeço a todo o pessoal do grupo de Caos de Rio Claro, a todos os professores da UNESP que contribuíram de alguma forma na minha formação profissional, e funcionários da UNESP, pela ajuda quando precisei.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram ou me ajudaram de alguma forma durante todos esses anos.

"You should enjoy the little detours, to the fullest, Because that's you'll find the things more important than what you want".

Resumo

Neste trabalho investigaremos o comportamento do decaimento e relaxação para os pontos de equilíbrio, em especial em pontos de bifurcação, para uma família de mapeamentos discretos unidimensionais do tipo **logístico-like**. Faremos uma análise para três tipos de bifurcação: (i) transcítica; (ii) forquilha e; (iii) duplicação de período. Discutiremos algumas hipóteses de escala que conduzem a uma lei de escala envolvendo três expoentes críticos. Próximo ao ponto fixo, a variável dinâmica varia muito lentamente. Essa propriedade permite transformar uma equação de diferenças, natural do mapeamento discreto, em uma equação diferencial ordinária (EDO). Resolvemos esta equação que fornece a evolução para o estado estacionário. Nossas simulações numéricas confirmam a previsão teórica e valida a aproximação acima mencionada.

Abstract

In this work we investigate the behavior of the decay and relaxation to the equilibrium, especially at the bifurcation, for a family of one-dimensional discrete mappings, logistic-like. Our investigation consider three types of bifurcation: (i) transcritical; (ii) pitchfork and; (iii) period doubling. We discuss some scaling hypotheses leading to a scaling law involving three critical exponents. Near the fixed points, the dynamical variable varies very slowly. This property allows us to transform the equation of differences, hence natural from discrete mappings, into an ordinary differential equation (ODE). We solve such equation which furnishes the evolution towards the stationary state. Our numerical simulations confirm the theoretical results validating the above mentioned approximation.

SUMÁRIO

1	Introdução	7
2	Propriedades dinâmicas do mapa logístico	10
2.1	Pontos Periódicos	10
2.2	Diagrama de Órbita	13
2.3	Expoente de Lyapunov	14
3	Convergência para o estado estacionário no mapa <i>logistic-like</i>	16
3.1	Escalas no <i>logistic-like</i>	16
4	Estudo analítico dos expoentes críticos	23
4.1	Mapa <i>logistic-like</i> com $\mu = 0$ em $R=1$	23
4.2	Mapa <i>logistic-like</i> com o caso de $\mu \neq 0$ na primeira bifurcação	25
4.3	Mapa <i>logistic-like</i> com o caso de $\mu = 0$ na bifurcação de duplicação de período	26
4.4	Mapa <i>logistic-like</i> com o caso de $\mu \neq 0$ na bifurcação de duplicação de período	30
5	Conclusões e Perspectivas	32

Capítulo 1

Introdução

Desde que o mundo teve físicos que investigavam as leis da natureza, sofreu-se também de um desconhecimento especial sobre a desordem na atmosfera, sobre o mar turbulento, as variações das populações de animais, as oscilações do coração e do cérebro. O lado irregular da natureza, o lado descontínuo e incerto, têm sido enigmas para a ciência, ou pior: monstruosidades. Na década de 1970, porém, alguns cientistas nos Estados Unidos e na Europa começaram a encontrar um caminho em meio a essa desordem. Eram físicos, matemáticos, biólogos, químicos, todos eles buscando ligação entre diferentes tipos de irregularidade. Os fisiologistas descobriram uma surpreendente ordem no caos que desenvolve no coração humano, causa principal da morte súbita e inexplicada. Os ecologistas exploraram a ascensão e queda da população das mariposas. Os economistas desenterraram velhas cotações e tentaram um novo tipo de análise. As compreensões daí resultantes levaram diretamente ao mundo natural - às formas das nuvens, aos caminhos percorridos pelos relâmpagos, às interligações microscópicas dos casos sanguíneos, às aglomerações estelares galáticas(Gleick,1989).

O caos se tornou uma abreviatura para um movimento que cresce rapidamente e que está reformulando a estrutura do sistema científico. Conferências e publicações sobre o caos são numerosas. O caos criou técnicas especiais de uso dos computadores e tipos especiais de imagens gráficas, fotos que apreendem uma fantástica e delicada estrutura subjacente à complexidade. A nova ciência gerou sua linguagem própria, um elegante jargão de fractais e bifurcações, intermitências e periodicidades, difeomorfismo *folded-towel* e mapas *smooth noodle*. São os novos elementos do movimento, tal como na física tradicional, quarks e glúons, bóson de higgs são os novos elementos da matéria. Para alguns físicos o caos é antes uma ciência de processo do que de estado, de vir-a-ser do que de ser(Gleick,1989).

Agora que a ciência está atenta, o caos parece estar por toda a parte. Uma coluna ascendente de fumaça de cigarro se decompõe em anéis desordenados. Uma bandeira drapeja de uma lado para outro ao vento. Uma torneira gotejante passa de um ritmo constante para outro, aleatório. O caos surge no comportamento das condições do tempo,

no comportamento de um avião em voo, no comportamento dos carros que se agrupam numa auto estrada, no comportamento do petróleo que flui em tubos subterrâneos. Qualquer que seja o meio, o comportamento obedece às mesmas leis recém descobertas. A percepção desse fato começou a modificar a maneira pela qual os executivos tomam decisões sobre seguros, os astrônomos vêem o sistema solar, e os teóricos e políticos falam sobre as tensões que provocam conflitos(Gleick,1989).

O caos rompe as fronteiras que separam as disciplinas científicas. Por ser uma ciência da natureza global dos sistemas, reuniu pensadores de campos que estavam muito separados. Há um tempo atrás a ciência se encaminhava para uma crise de especialização crescente, dramaticamente essa tendência para a especialização foi revertida em virtude do caos. Os mais ardentes defensores da nova ciência chegam ao ponto de dizer que a ciência do século XX será lembrada apenas por três coisas: a relatividade, mecânica quântica e o caos. O caos, dizem eles, tornou-se a terceira grande revolução do século nas ciências físicas, modificando muitos dos postulados de Newton. O estudo do caos surgiu de uma área marginal dentro da própria física, cuja corrente principal vem sendo, durante a maior parte desde século a física das partículas, que explora os blocos de construção da matéria a energias cada vez maiores, em escalas cada vez menores, em tempos cada vez mais curtos. Da física das partículas surgiram teorias sobre as forças fundamentais da natureza e sobre a origem do universo, contudo, para alguns o progresso parecia ficar mais lento, com o advento do caos cientistas julgaram ver o início de uma nova modificação para toda a física(Gleick,1989).

Com o curso da revolução no caos, os melhores físicos estão se voltando, para os fenômenos em escala humana, estudam não apenas galáxias, mas as nuvens, as mais importantes revistas publicam artigos sobre a estranha dinâmica de uma bola que repica sobre a mesa, ao lado de artigos sobre a física quântica. Os sistemas mais simples criam, como hoje se acredita, os mais difíceis problemas de previsibilidade. Não obstante, a ordem surge espontaneamente nesses sistemas, o caos e a ordem, juntos. Só um novo tipo de ciência poderia começar a atravessar o grande abismo entre o conhecimento daquilo que uma coisa faz, uma molécula de água, uma célula de tecido cardíaco, um neurônio, e o que milhões deles fazem(Gleick,1989).

O estudo da transição ordem-caos em sistemas dissipativos levou à identificação de sequências de bifurcações, incluindo certos aspectos universais, que puderam ser verificados experimentalmente numa grande variedade de situações e em diferentes áreas do conhecimento. Embora a tradição dos estudos em sistemas dinâmicos remonte a Henri Poincaré, que, inspirado por problemas em Mecânica Celeste (Poincaré, 1899), percebeu a utilidade do estudo de estruturas topológicas no espaço de fases de trajetórias dinâmicas, com importantes contribuições posteriores de Birkhoff (Birkhoff, 1950) que fortaleceram as bases teóricas legadas por Poincaré.

O estudo das rotas possíveis para o caos tem suas raízes no estudo geral de equações

diferenciais determinísticas (teoria das bifurcações) e constitui a chamada teoria geométrica do caos (Seydel, 1988, Couillet, 1980). À medida que um ou mais parâmetros de controle varia para os quais ocorre mudança de regime assintótico, são chamados pontos de bifurcação. O cenário de Feigenbaum (Feigenbaum, 1979) para o caos é o cenário de co-dimensão-1 mais conhecido e estudado e é o que apresenta maior número de evidências experimentais. Esse cenário é constituído por uma cascata de bifurcações do tipo duplicação de período (Seydel, 1988).

Mapeamentos discretos são frequentemente utilizados para caracterizar a evolução temporal de diversos sistemas dinâmicos. Um mapeamento discreto bastante conhecido é o mapa logístico. O mapa foi estudado por Robert May (May, 1974) com o intuito de descrever a dinâmica de populações. O mapeamento tem uma série de comportamentos dinâmicos relevantes, dentre os quais incluem-se regularidade, diversos tipos de bifurcações, assim como rotas para o caos via cascata de duplicação de período. Ao longo das bifurcações de duplicação de período, existem dois expoentes conhecidos como expoentes de Feigenbaum (Feigenbaum, 1979) que descrevem comportamentos de escala conduzindo a uma universalidade. Nas proximidades das bifurcações, a dinâmica exibe um comportamento crítico. No ponto de bifurcação, uma órbita evolui para o ponto de equilíbrio, a partir de uma lei de potência em n , onde n é o número de iterações. Ligeiramente distante do ponto de bifurcação, a órbita evolui para o ponto de equilíbrio de forma exponencial, com um tempo de relaxação descrito por uma lei de potência no parâmetro de controle (Oliveira, 2013).

Estudamos neste trabalho, o mapa *logistic-like* cuja equação é dada por $x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma)$ onde R corresponde ao parâmetro de controle, x é a variável dinâmica e $\gamma \geq 1$ é um parâmetro de controle. Nosso objetivo é investigar a dinâmica de relaxação para o equilíbrio no mapa *logistic-like* para três tipos de bifurcação: (i) transcítica; (ii) forquilha e; (iii) duplicação de período. Consideramos em nosso estudo diversos valores de γ e duas descrições distintas. Uma delas é fenomenológica, utilizando simulações numéricas e outra um pouco mais formal e rigorosa.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 discutimos algumas propriedades do mapa logístico unidimensional. Apresentamos o conceito de ponto fixo e definimos o conceito de estabilidade. O Capítulo 3 e 4 traz a descrição da convergência para os pontos fixos utilizando um argumento matemático juntamente com a confirmação numérica. Por fim nossas conclusões e perspectivas são apresentadas no Capítulo 5.

Capítulo 2

Propriedades dinâmicas do mapa logístico

Nesse capítulo serão apresentados os conceitos de ponto fixo, sua estabilidade, diagrama de órbita e expoente de Lyapunov.

2.1 Pontos Periódicos

O mapeamento logístico é definido pela equação

$$x_{n+1} = F(x_n) = Rx_n(1 - x_n), \quad (2.1)$$

onde R é o parâmetro de controle podendo assumir qualquer valor real embora a região que tenha interesse encontra-se no intervalo $R \in [0, 4]$. Sendo assim, a variável x fica limitada a assumir valores em $[0, 1]$, de modo que a aplicação de $F(x)$ é fechada, pois $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. O mapeamento é estudado pelo processo iterativo, de modo que dado um ponto inicial x_0 , encontra-se $x_1 = F(x_0)$, $x_2 = F(x_1) = F^2(x_0), \dots$, $x_n = F^n(x_0)$. Aqui $F^2(x_0)$ indica a segunda iteração do mapeamento, ou seja $F(F(x_0))$. A órbita ou trajetória de x_0 é a sequência de pontos (Ferrara, 1995)

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots \quad (2.2)$$

Ela representa a evolução do sistema a partir da condição inicial x_0 . Se o sistema evolui de tal maneira que permanece sempre no mesmo valor de x tem-se um ponto fixo. Os pontos fixos são encontrados resolvendo-se a seguinte equação

$$F(x^*) = x^*. \quad (2.3)$$

Então, para a equação (2.1) encontra-se soluções dadas por

$$x_1^* = 0, \quad (2.4)$$

$$x_2^* = \frac{R-1}{R}. \quad (2.5)$$

Um ponto fixo x^* é dito ser estável (instável) caso a evolução da condição inicial $x^* + \epsilon_0$, onde ϵ_0 é pequeno, se aproximar (afastar) de x^* . Isso é caracterizado pela derivada de $F(x)$ em relação a x , ou seja $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$. Considerando $x_0 = x^* + \epsilon_0$ e mantendo termos de ordem ϵ_0 , a primeira iteração fornece

$$x_1 = F(x_0) = x^* + \epsilon_0 F'(x^*). \quad (2.6)$$

Observando que $\epsilon_1 = \epsilon_0 F'(x^*)$, pode-se iterar a equação anterior, bastando trocar ϵ_0 por ϵ_1 . Assim obtém-se para a n -ésima iteração que

$$x_n = F^n(x_0) = x^* + \epsilon_0 [F'(x^*)]^n. \quad (2.7)$$

Portanto, quando $F'(x)$ tiver módulo menor que 1 o ponto fixo é dito ser estável, se for maior que 1 é instável e caso seja exatamente 1 tem-se que considerar derivadas de ordem superiores. Para o caso específico do mapeamento logístico tem-se que (Ferrara, 1995)

$$F'(x^*) = R(1 - 2x^*). \quad (2.8)$$

O ponto fixo $x^* = 0$ é estável para $0 < R < 1$, tornando-se instável a partir de $R > 1$. Em $R = 1$ o ponto fixo dado pela equação (2.5) tem o valor 0 e o módulo da derivada de $F(x)$ é igual a 1. Para R entre 1 e 3, esse ponto fixo é estável e para $R > 3$ é instável. Para $R > 3$ o sistema apresenta novo tipo de comportamento, onde o ponto fixo (2.5) é instável e surge um novo ponto periódico: uma órbita de período 2 ou um ciclo 2. Isso significa que assintoticamente o sistema apresenta a órbita $\dots, x_1, x_2, x_1, x_2, \dots$. A mudança de comportamento que ocorre em $R = 3$, quando um ponto fixo desestabiliza-se, surge uma órbita de período 2, classificada como uma bifurcação de duplicação de período. Quando a órbita de período 2 fica instável, nova bifurcação de duplicação de período ocorre e surge uma órbita de período 4 e esse processo continua até ocorrência de caos. Órbitas de períodos maiores são definidas analogamente. Assim num ciclo 3 o sistema oscila entre 3 valores x_1, x_2, x_3 . Um ponto fixo corresponde a um ciclo 1. Semelhante a obtenção do ponto fixo, os pontos x_1 e x_2 associados a órbita de período 2 são obtidos resolvendo-se a equação de ponto fixo para $F^2(x)$, ou seja

$$F^2(x^*) = x^*. \quad (2.9)$$

Para o mapeamento logístico, a expressão para $F^2(x)$ é dada por:

$$F^2(x) = (R^2x - R^2x^2) - (1 - Rx + Rx^2). \quad (2.10)$$

Os pontos fixos são obtidos fazendo-se $F(x^*) = x^*$, são também soluções de $F^2(x^*) = x^*$, portanto pode-se simplificar a relação definindo uma função

$$G(x^*) = \frac{F^2(x^*) - x^*}{F(x^*) - x^*}. \quad (2.11)$$

ou de forma simplificada

$$G(x) = Rx^2 - (R^2 + R)x + R + 1. \quad (2.12)$$

As soluções de $G(x)$ são

$$x_1^* = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}\sqrt{R^2 - 2R - 3}\right), \quad (2.13)$$

$$x_2^* = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{R} - \frac{1}{R}\sqrt{R^2 - 2R - 3}\right). \quad (2.14)$$

Estas soluções são reais somente se $R^2 - 2R - 3 \geq 0$, o que leva a obter

$$R_1 \geq 3, \quad (2.15)$$

$$R_2 \leq -1. \quad (2.16)$$

A solução R_2 não é de interesse, pois $R \in [0, 4]$. Com o resultado acima, tem-se que R_1 é o valor que determina o início da região de ciclo 2, enquanto que o valor que determina o término da região de estabilidade do ciclo 2 será obtido por meio do estudo da estabilidade deste ciclo. Necessita-se avaliar agora $(F^2(x_2))'$. Através da regra da cadeia mostra-se que

$$(F^2(x_2))' = F'(x_1)F'(x_2). \quad (2.17)$$

Caso $|F^2(x)'| < 1$, a solução é estável. Se $|F^2(x)'| > 1$ a solução é instável. Usando x_1 e x_2 das relações (2.13) e (2.14), obtém-se

$$(F^2(x_2))' = R^2((1 - 2x_1)(1 - 2x_2)), \quad (2.18)$$

que simplificando leva a

$$(F^2(x_2))' = -R^2 + 2R + 4. \quad (2.19)$$

Daqui tira-se que $| (F^2x)' | \geq 1$ se

$$R_3 \geq 1 + \sqrt{6}, \quad (2.20)$$

$$R_4 \leq 4 - \sqrt{6}, \quad (2.21)$$

mas $R_4 < 0$ é sem interesse, já que $R \in [0, 4]$. Com esse resultado encontrado para R_3 , concluí-se que a região de período 2 fica completamente especificada para qualquer $x_0 \in (0, 1)$, desde que $R \in [3, 1 + \sqrt{6}]$, sendo este último intervalo, o indicador da região de ciclo 2 estável. Generalização imediata é feita para a obtenção dos pontos pertencentes a ciclos de ordem n , onde a equação é da forma

$$F^n(x^*) = x^*. \quad (2.22)$$

A estabilidade agora é verificada por

$$| F^n(x^a)' | = | F'(x^1)F'(x^2)F'(x^3)...F'(x^n) | \leq 1, \quad (2.23)$$

onde a assume qualquer valor inteiro entre 1 e n .

2.2 Diagrama de Órbita

Agora que é conhecido o procedimento para a obtenção dos pontos fixos e ciclos de ordem n , pode-se introduzir o diagrama de órbita. O diagrama de órbita mostra o comportamento assintótico de uma trajetória a partir de uma dada condição inicial x_0 para cada valor do parâmetro de controle. A região do espaço de fase para onde trajetórias convergem assintoticamente é dita ser um atrator. No mapeamento logístico, quando $1 < R < 3$, as trajetórias convergem para o ponto fixo estável dado pela equação (2.5) desde que a condição inicial $x_0 \in (0, 1)$. Dessa forma, o ponto fixo x_2^* é o atrator. Para $3 \leq R \leq 1 + \sqrt{6}$ o atrator é um ciclo 2, definido pelos pontos cujas equações são (2.13) e (2.14). Dessa forma, a partir da condição inicial x_0 , a trajetória evolui convergindo para os pontos x_1^*, x_2^* estabelecendo o ciclo 2 estável. Na figura 2.1 tem-se um diagrama típico, onde o eixo horizontal representa o parâmetro de controle e no eixo vertical é representado a variável x . O procedimento utilizado na obtenção deste diagrama é o seguinte. Como condição inicial x_0 escolhe-se ($x_0 = \frac{1}{2}$). A seguir itera-se o mapeamento dado pela equação (2.1) 100.000 vezes salvando apenas os últimos 100 pontos. O eixo horizontal foi dividido em 800 partes igualmente espaçadas.

2.3 Expoente de Lyapunov

Quando estudamos um sistema dinâmico, uma das questões mais frequentes que se coloca é a da existência de caos em tal sistema. Existem muitas definições de caos, mas a maioria delas concorda no que diz respeito à presença de sensibilidade nas condições iniciais. Para medir a taxa de divergência de trajetórias e portanto quantificar a dependência sensível às condições iniciais, utilizam-se os expoentes característicos de Lyapunov (Ferrara, 1995). Seja a evolução temporal de um sistema dinâmico a partir de suas condições iniciais próximas, x_0 e $x_0 + \epsilon$. Decorrido um intervalo de tempo t temos que a distância entre as trajetórias é

$$d(t) \sim \epsilon e^{(\lambda t)}. \quad (2.24)$$

onde o expoente de Lyapunov λ fornece a taxa média de divergência das trajetórias. Para um tempo t finito, o expoente de Lyapunov depende de x_0 .

No caso de mapas unidimensionais o cálculo do expoente de Lyapunov é obtido de

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |F'(x_i)|, \quad (2.25)$$

onde $x_i = F^{(i)}(x_0)$ é o resultado da i -ésima iteração do mapa F a partir da condição inicial x_0 e $F'(x_i) = (dF/dx)_{(x_i)}$. No limite de N tendendo ao infinito o expoente de Lyapunov não deve mais depender da condição inicial x_0 . Na prática trabalhamos com N finito, então é necessário calcular o expoente para várias condições iniciais e fazer uma média dos valores obtidos.

A função F que define o mapa depende geralmente de um parâmetro de controle R . Então o valor de λ também dependerá desse parâmetro, $\lambda = \lambda(R)$. Ao construir o gráfico da dependência desse parâmetro, identifica-se quais os valores de R tem-se dependência em relação as condições iniciais ($\lambda > 0$) e, portanto, sob quais condições o sistema apresenta comportamento caótico (figura 2.2).

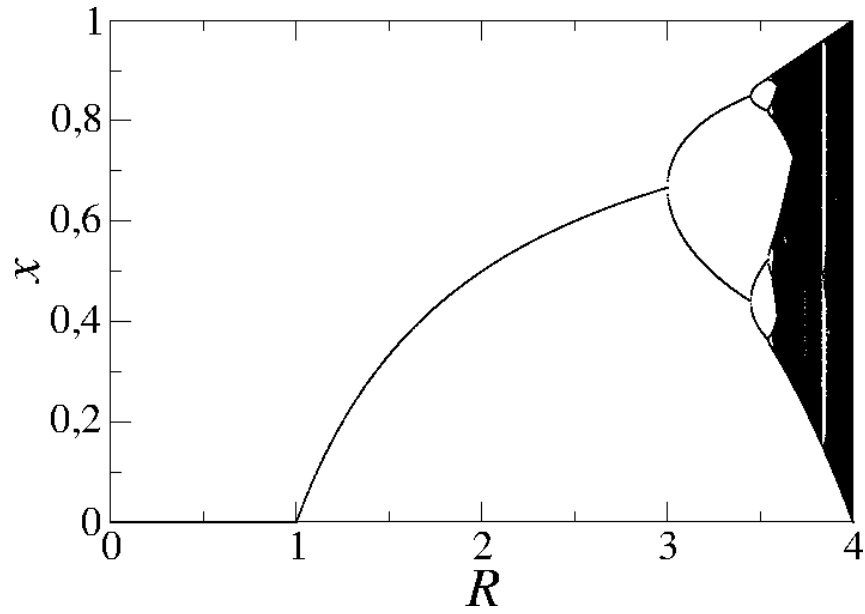


Figura 2.1: Diagrama de órbita para o mapa logístico. No eixo horizontal tem-se o parâmetro de controle enquanto que no eixo vertical é representada a variável x . A condição inicial usada foi $x_0 = \frac{1}{2}$.

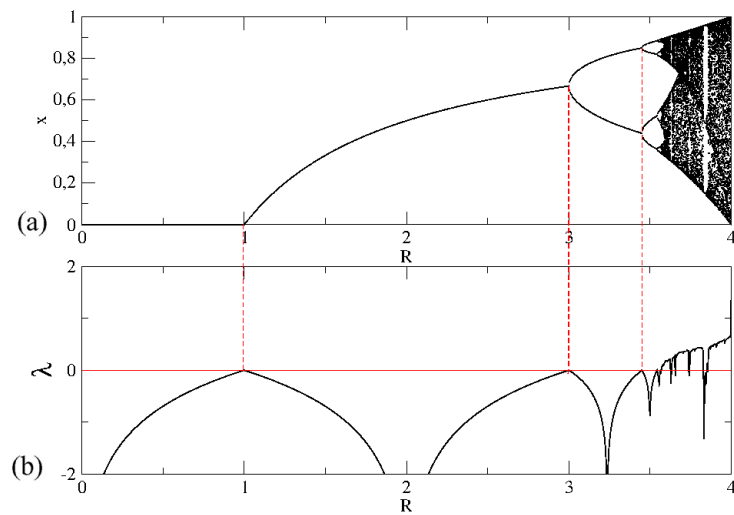


Figura 2.2: (a) Diagrama de órbita para o mapa logístico. (b) Expoente de Lyapunov referente ao diagrama de órbita mostrado em (a).

Capítulo 3

Convergência para o estado estacionário no mapa *logistic-like*

Discutiremos, neste capítulo, a convergência para o estado estacionário em uma família de mapeamentos discretos unidimensionais.

3.1 Escalas no *logistic-like*

Considerando o mapeamento

$$x_{(n+1)} = Rx_n(1 - x_n^\gamma), \quad (3.1)$$

onde $\gamma \geq 1$ e $R \geq 0$ é um parâmetro de controle. Os pontos fixos são obtidos de

$$x_{(n+1)} = Rx(1 - x^\gamma) = x, \quad (3.2)$$

o primeiro ponto fixo é dado por

$$x = 0, \quad (3.3)$$

ao passo que o segundo é obtido por

$$R(1 - x^\gamma) = 1, \quad (3.4)$$

conduzindo a

$$x = \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (3.5)$$

onde γ pode ser ímpar, racional ou irracional e

$$x = \pm \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (3.6)$$

onde γ é par. Das expressões dos pontos fixos determinamos as suas estabilidades fazendo

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x^*} < 1, \quad (3.7)$$

onde

$$f = Rx(1 - x^\gamma), \quad (3.8)$$

logo temos

$$\frac{df}{dx} = R(1 - x^\gamma(1 + \gamma)). \quad (3.9)$$

Analizando agora a estabilidade do ponto fixo $x = 0$

$$\frac{df}{dx}|_{x=0} = R, \quad (3.10)$$

temos como resultado que esse ponto fixo é assintoticamente estável para

$$-1 < R < 1. \quad (3.11)$$

Como $R \geq 0$, o ponto fixo fica assintoticamente estável para $R \in (0, 1)$. Para continuar consideraremos o caso que γ é ímpar racional ou irracional.

$$x = [1 - \frac{1}{R}]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (3.12)$$

logo temos

$$\frac{df}{dx} = R[1 - x^\gamma(1 + \gamma)], \quad (3.13)$$

que quando analisada no ponto fixo leva a

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x^*} = 1 + \gamma - \gamma R. \quad (3.14)$$

Para ser assintoticamente estável

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x^*} < 1, \quad (3.15)$$

logo

$$-1 < 1 + \gamma - \gamma R < 1, \quad (3.16)$$

$$-1 - (1 + \gamma) < -\gamma R < 1 - (1 - \gamma), \quad (3.17)$$

$$-2 - \gamma < -\gamma R < -\gamma, \quad (3.18)$$

$$\frac{2 + \gamma}{\gamma} > R > 1, \quad (3.19)$$

então $x = [1 - \frac{1}{R}]^{\frac{1}{\gamma}}$ é assintoticamente estável para

$$R \in \left(1, \frac{2+\gamma}{\gamma}\right). \quad (3.20)$$

Em $R = 1$ ocorre a troca de estabilidade entre $x = 0$ e $x = [1 - \frac{1}{R}]^{\frac{1}{\gamma}}$, o que caracteriza uma bifurcação transcítica. Para γ ímpar, racional ou irracional os pontos fixos são: $x = 0$, assintoticamente estável para $R \in [0, 1]$ e $x = [1 - \frac{1}{R}]^{\frac{1}{\gamma}}$, assintoticamente estável para $R \in [1, \frac{2+\gamma}{\gamma}]$, em $R = 1$ ocorre uma bifurcação transcítica.

Considerando agora o caso de γ par temos que os pontos fixos são

$$x = \pm[1 - \frac{1}{R}]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (3.21)$$

estudando a estabilidade desses pontos fixos temos

$$\frac{df}{dx} = R[1 - x^\gamma(1 + \gamma)], \quad (3.22)$$

finalmente chegamos em

$$\frac{df}{dx}|_{x^*} = 1 + \gamma - \gamma R. \quad (3.23)$$

Para ser assintoticamente estável devemos ter

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x^*} < 1, \quad (3.24)$$

logo

$$-1 < 1 + \gamma - \gamma R < 1, \quad (3.25)$$

$$\frac{2+\gamma}{\gamma} > R > 1, \quad (3.26)$$

então $x = [1 - \frac{1}{R}]^{\frac{1}{\gamma}}$ é assintoticamente estável para

$$R \in \left(1, \frac{2+\gamma}{\gamma}\right). \quad (3.27)$$

Em $R = 1$ ocorre uma bifurcação de forquilha. Cada ponto fixo positivo ou negativo é visitado conforme valor da condição inicial. O ponto fixo $x = [1 - \frac{1}{R}]^{\frac{1}{\gamma}}$ perde estabilidade em $R = \frac{2+\gamma}{\gamma}$. Nesta circunstância, $F'(x^*) = -1$, o que caracteriza um ponto flip incipiente marcando assim o nascimento de uma bifurcação de duplicação de período. Vamos agora considerar a convergência para o ponto de equilíbrio em duas situações distintas, a primeira sendo no ponto de bifurcação e a segunda sendo imediatamente antes do ponto de bifurcação.

A variável relevante para a descrição é a distância do ponto de equilíbrio e que é escrita como uma função de n, x_0 e $\mu = R_c - R$, onde R_c identifica o ponto de bifurcação ($R_c = 1$

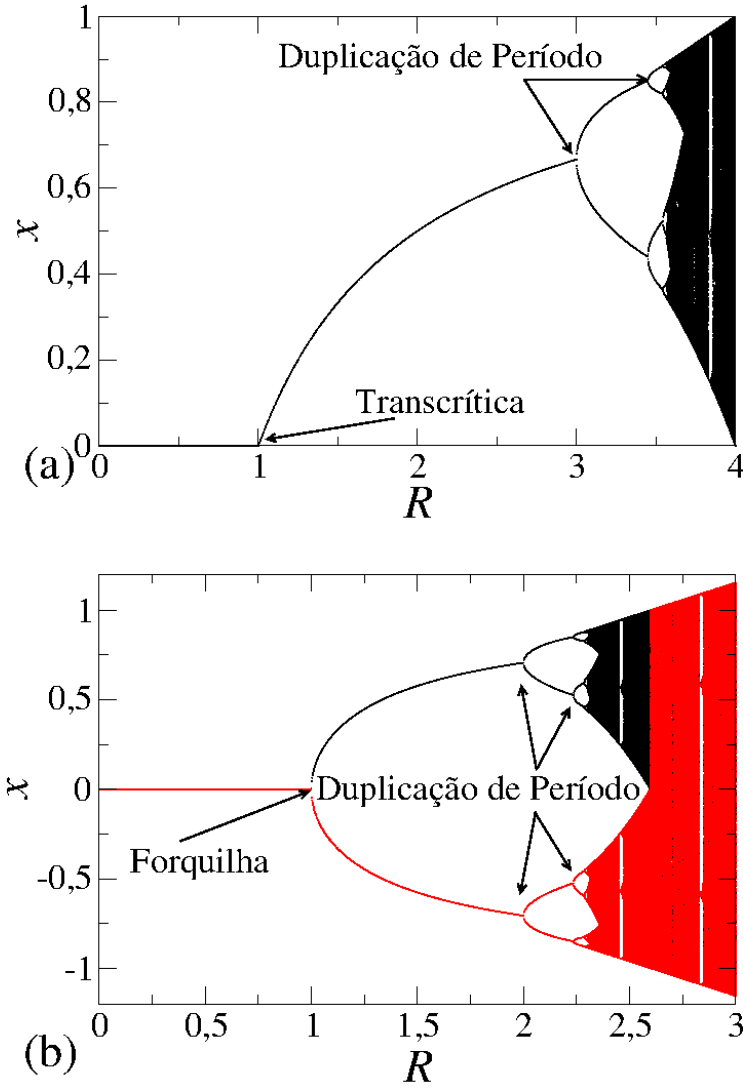


Figura 3.1: (a) Ilustração das bifurcações do tipo transcritical e duplicação de período. (b) Ilustração das bifurcações do tipo forquilha e duplicação de período.

na bifurcação transcritical) e $R < R_c$. Se $\mu = 0$ então $R = R_c$, estamos exatamente na bifurcação. Neste caso a evolução dinâmica para o ponto fixo deve ser dada por uma função homogênea generalizada de suas variáveis, ou seja:

$$X(x_0, n) = lX(l^a x_0, l^b n), \quad (3.28)$$

onde l é um fator de escala, a e b são expoentes característicos. Para $\mu \neq 0$, $R < R_c$, a convergência para o ponto fixo é dada por

$$X(x, \mu) \sim e^{\frac{-n}{\tau}}, \quad (3.29)$$

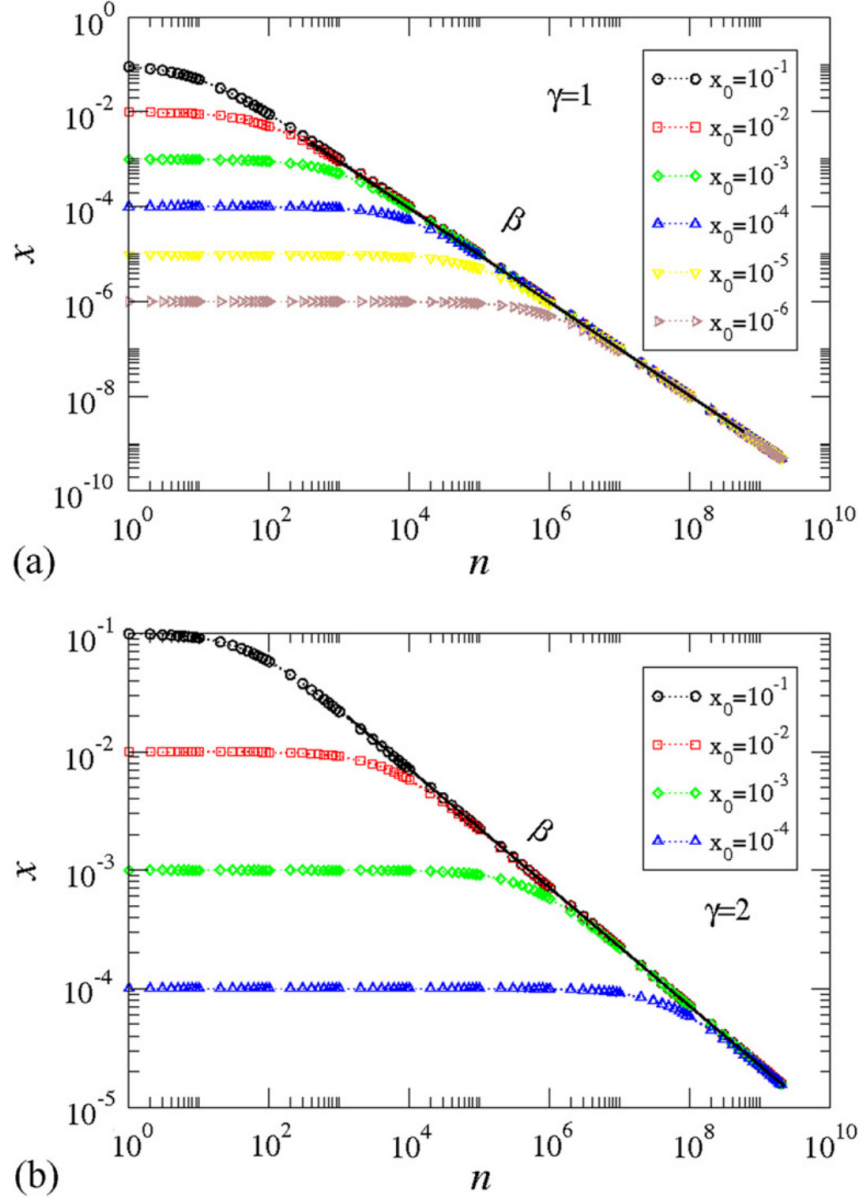


Figura 3.2: Evolução de x vs. n para diversos valores de x_0 considerando: (a) $\gamma = 1$ e (b) $\gamma = 2$.

onde $\tau \sim \mu^\delta$ sendo δ um expoente crítico.

Vamos começar com o caso 1, onde $\mu = 0$. Uma descrição fenomenológica baseada na figura 3.1 pode ser feita. Propomos três hipóteses, onde

1. $x(n) \sim x_0^\alpha$, para $n \ll n_x$
2. $x(n) \sim n^\beta$, para $n \gg n_x$
3. $n_x \sim x_0^z$

onde n_x define o número de iterações de crossover que marca a mudança do platô constante para o decaimento em lei de potência n^β . Com base nas três hipóteses de escala e da função homogênea generalizada, podemos relacionar os expoentes característicos com os expoentes críticos.

Escolhendo $l^a x_0 = 1$, temos $l = x_0^{\frac{1}{a}}$, logo

$$x(x_0, n) = x_0^{-1/a} x(1, x_0^{\frac{-b}{a}}). \quad (3.30)$$

Assumindo que $x(1, x_0^{\frac{-b}{a}})$ como constante para $n \ll n_x$, e comparando com a hipótese 1 temos que $x_0^{\frac{-1}{a}} = x_0^\alpha$, logo

$$\alpha = \frac{-1}{a}. \quad (3.31)$$

Escolhendo agora $l^b n = 1$, $l = n^{\frac{-1}{b}}$,

$$x(x_0, n) = n^{\frac{-1}{b}} x(n^{\frac{-a}{b}} x_0, 1). \quad (3.32)$$

Assumindo que $x(n^{\frac{-a}{b}} x_0, 1)$ constante para $n \gg n_x$, e comparando com a segunda hipótese temos que

$$n^{\frac{-1}{b}} = n^\beta, \text{ assim } \beta = \frac{-1}{b}. \quad (3.33)$$

Utilizando agora as duas expressões de l temos

$$n^\beta = x_0^\alpha, \text{ logo } n_x = x_0^{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (3.34)$$

Comparando a equação (3.34) com a hipótese 3, temos

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (3.35)$$

Esta relação define uma lei de escala, conhecendo quaisquer dois expoentes o terceiro é determinado pela relação acima (figura 3.1). Fazendo algumas simulações numéricas com $\mu = 0$, obtivemos alguns dos expoentes citados anteriormente, como exemplo, no caso da bifurcação transcítica, para $\gamma = 1$, encontramos, $\alpha = -1$, $\beta = -0,9668(4)$, $z = -1$, como um exemplo de bifurcação pitchfork, usamos $\gamma = 2$, e obtemos $\alpha = -1$, e $\beta = -0,4970(5)$, $z = -2$ (tabela 3.1) e por último caso temos a bifurcação de duplicação de período, que obtemos $\alpha = -1$, $\beta = -0,4951(6)$, $z = -2$, fazendo agora uma simulação com $\mu \neq 0$, chegamos em um $\delta = -0,994(1)$. O expoente δ é obtido da seguinte forma. Evoluímos uma condição inicial nas vizinhanças do ponto fixo para um parâmetro de controle próximo da bifurcação. Medimos o número de iterações que a trajetória gasta até atingir uma distância menor que 10^{-9} do ponto fixo. Quando essa condição era atingida, o número de iterações gasto até aquele ponto era salvo em um arquivo de saída e uma nova simulação era iniciada com outro valor de parâmetro de controle. Variamos μ entre $[10^{-4}, 10^{-2}]$ e nossos resultados computacionais levam a crer que $\delta \cong -1$, conforme discutido em [10].

Tabela 3.1: Resultados numéricos de β e z para distintos valores de γ .

γ	1	2	3	4	5	6
z	-1,0002(3)	-2,0001(2)	-3,0002(4)	-4,0002(1)	-5,0001(3)	-6,0003(1)
β	-0,9992(4)	-0,4995(3)	-0,3336(3)	-0,2503(1)	-0,1995(4)	-0,1662(3)

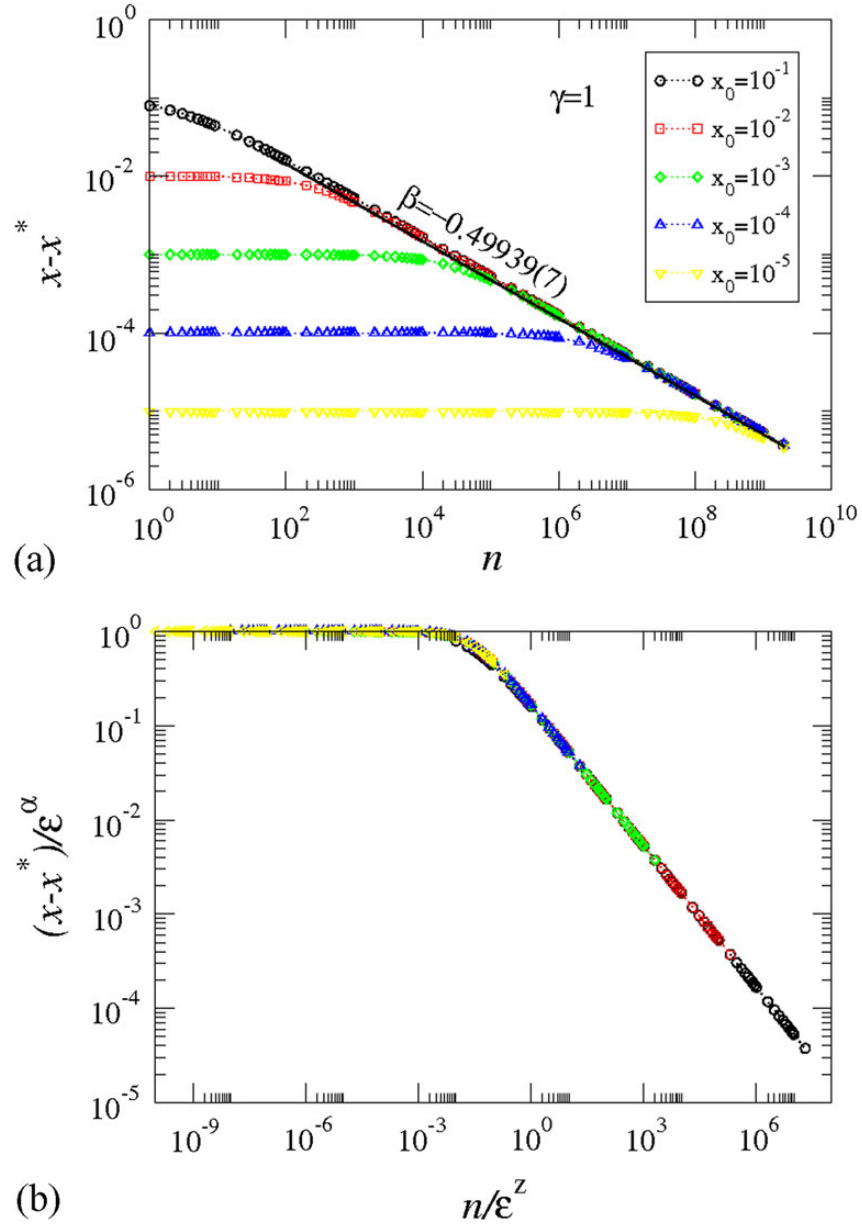


Figura 3.3: (a) Convergência para o ponto fixo $x^* = 2/3$ para $\gamma = 1$ considerando $R = 3$. (b) Convergência de todas as curvas de (a) em uma curva universal.

Capítulo 4

Estudo analítico dos expoentes críticos

Neste capítulo vamos determinar analiticamente os expoentes críticos que encontramos numericamente no capítulo anterior.

4.1 Mapa *logistic-like* com $\mu = 0$ em $R=1$

Para o primeiro caso começaremos com a expressão do mapeamento

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma). \quad (4.1)$$

No ponto de bifurcação, $R = 1$, o mapeamento fica escrito como

$$x_{n+1} = x_n - x_n^{\gamma+1}. \quad (4.2)$$

Podemos fazer a seguinte aproximação

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} \cong \frac{dx}{dn} = -x^{\gamma+1}. \quad (4.3)$$

Muito próximo do ponto fixo, consideramos que a dinâmica da variável x é praticamente contínua, com isso chegamos em uma EDO de primeira ordem, Fazendo separação de variáveis, temos,

$$\frac{dx}{x^{\gamma+1}} = -dn, \quad (4.4)$$

integrando de os ambos os lados

$$\int_{x_0}^{x(n)} \frac{1}{x^{\gamma+1}} dx = - \int_0^n dn, \quad (4.5)$$

e rearranjando os termos encontramos

$$x(n) = \frac{x_0}{(x_0^\gamma \gamma n + 1)^{\frac{1}{\gamma}}}. \quad (4.6)$$

Interpretando a equação acima:

Se

$$(x_0^\gamma \gamma n) \ll 1, \text{ para } (n \ll n_x), \quad (4.7)$$

logo

$$x(n) \sim x_0^1. \quad (4.8)$$

Comparando com a primeira hipótese de escala que fizemos no capítulo anterior, temos que

$$\alpha = 1. \quad (4.9)$$

Para o caso

$$(x_0^\gamma \gamma n) \gg 1, \text{ para } (n \gg n_x), \quad (4.10)$$

$$x(n) \sim n^{\frac{-1}{\gamma}}. \quad (4.11)$$

Comparando com a segunda hipótese do capítulo anterior, temos

$$\beta = \frac{-1}{\gamma}. \quad (4.12)$$

Para o caso

$$(x_0^\gamma \gamma n) = 1, \quad (4.13)$$

logo

$$n_x \sim x_0^{-\gamma}. \quad (4.14)$$

Comparando com a terceira hipótese do capítulo anterior temos

$$z = -\gamma. \quad (4.15)$$

Os resultados obtidos aqui, confirmam a validade da nossa hipótese de lei de escala do capítulo anterior.

Da lei de escala temos que

$$z = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (4.16)$$

Entretanto obtemos que

$$\alpha = 1, \quad (4.17)$$

$$\beta = \frac{-1}{\gamma}, \quad (4.18)$$

$$z = -\gamma. \quad (4.19)$$

Levando α e β na expressão de z temos

$$z = \frac{1}{-\frac{1}{\gamma}} = -\gamma. \quad (4.20)$$

Confirmando o resultado acima.

4.2 Mapa *logistic-like* com o caso de $\mu \neq 0$ na primeira bifurcação

Vamos agora considerar a dinâmica nas vizinhanças do ponto de bifurcação, ou seja $R < R_c$, onde $R_c = 1$.

Da expressão do mapeamento temos

$$x_{n+1} = Rx_n - Rx_n^{\gamma+1}. \quad (4.21)$$

Reescrevendo a expressão acima de forma conveniente temos

$$x_{n+1} - x_n = Rx_n - x_n - Rx_n^{\gamma+1}. \quad (4.22)$$

Da mesma forma resolvido anteriormente

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} \cong \frac{dx}{dn}, \quad (4.23)$$

$$\frac{dx}{dn} = x(R - 1) - Rx^{\gamma+1}. \quad (4.24)$$

É importante mencionar que para $\gamma > 1$ e no regime de x suficientemente próximo ao ponto fixo, $x = 0$, $x^{\gamma+1}$ vai a zero mais rapidamente que x , portanto a equação acima pode ser aproximada por

$$x_{n+1} - x_n \sim x_n(R - 1), \quad (4.25)$$

$$\frac{dx}{dn} = -x(1 - R), \quad (4.26)$$

chamando

$$1 - R = \mu, \quad (4.27)$$

temos

$$\frac{dx}{x} = -\mu dn, \quad (4.28)$$

logo

$$\int_{x_0}^{x(n)} \frac{1}{x} dx = -\mu \int_0^n dn. \quad (4.29)$$

Portanto

$$\ln \left[\frac{x(n)}{x_0} \right] = -\mu n, \quad (4.30)$$

$$x(n) = x_0 e^{-\mu n}. \quad (4.31)$$

Do estudo fenomenológico temos que

$$x(n, \mu) \sim e^{\frac{-n}{\tau}}, \quad (4.32)$$

e que

$$\tau \sim \mu^\delta. \quad (4.33)$$

Portanto, temos que

$$e^{-\mu n} = e^{\frac{-n}{\tau}}, \quad (4.34)$$

então

$$\tau = \mu^{-1}, \quad (4.35)$$

$$\delta = -1. \quad (4.36)$$

4.3 Mapa *logistic-like* com o caso de $\mu = 0$ na bifurcação de duplicação de período

No ponto de bifurcação, o decaimento para o ponto fixo obedece a uma função homogênea generalizada com expoentes críticos bem definidos, o objetivo é determinar tais expoentes.

Próximo ao ponto de bifurcação, o decaimento é exponencial e o tempo de relaxação é dado por uma lei de potência em

$$\mu = R - R_c, \quad R < R_c. \quad (4.37)$$

Tentaremos uma abordagem dinâmica próximo ao ponto fixo de tal forma que

$$x = x^* + y \quad e \quad R = R_c + \mu, \quad (4.38)$$

onde y é a distância do ponto fixo.

Da segunda iterada do mapeamento, temos

$$x_{n+2} = F_R^{(2)}(x_n) = R[Rx_n(1 - x_n^\gamma)][1 - [Rx_n(1 - x_n^\gamma)]^\gamma]. \quad (4.39)$$

Assim devemos expandir $F_R^{(2)}(x)$ em série de Taylor em torno de $x = x^* + y$ e $R = R_c + \mu$.

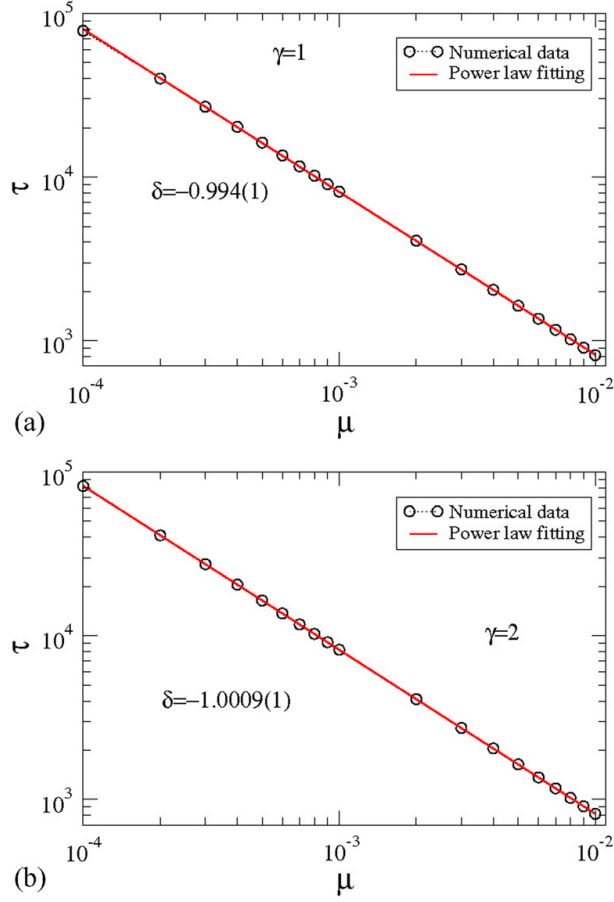


Figura 4.1: Relaxação para os pontos fixos como uma função de μ no mapa **logistic-like** para os expoentes: (a) $\gamma = 1$ e; (b) $\gamma = 2$.

Logo, temos:

$$\begin{aligned}
 F_R^{(2)} &= F^{(2)}(R_c, x^*) + (x - x^*) \frac{dF^{(2)}}{dx} \Big|_{x^*, R_c} + (R - R_c) \frac{dF^{(2)}}{dR} \Big|_{x^*, R_c} + (x - x^*)^2 \frac{1}{2} \frac{d^2 F^{(2)}}{dx^2} \Big|_{x^*, R_c} + \\
 &+ (R - R_c)^2 \frac{1}{2} \frac{d^2 F^{(2)}}{dR^2} \Big|_{x^*, R_c} + (x - x^*)(R - R_c) \frac{d^2 F^{(2)}}{dx dR} \Big|_{x^*, R_c} + \\
 &+ (x - x^*)^3 \frac{1}{6} \frac{d^3 F^{(2)}}{dx^3} \Big|_{x^*, R_c} + (R - R_c)^3 \frac{1}{6} \frac{d^3 F^{(2)}}{dR^3} \Big|_{x^*, R_c} + \\
 &+ (x - x^*)^2 (R - R_c) \frac{1}{2} \frac{d^3 F^{(2)}}{dx^2 dR} \Big|_{x^*, R_c} + (x - x^*)(R - R_c)^2 \frac{1}{2} \frac{d^3 F^{(2)}}{dx dR^2} \Big|_{x^*, R_c} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Precisamos então determinar as expressões de

$$j_0 = F^{(2)}(R_c, x^*) = \left[\frac{2}{2 + \gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{4.41}$$

$$j_1 = \frac{dF^{(2)}}{dx} \Big|_{x^*} = 1, \tag{4.42}$$

$$j_2 = \frac{dF^{(2)}}{dR} \Big|_{x^*} = 0, \tag{4.43}$$

$$j_3 = \frac{1}{2} \frac{d^2 F^{(2)}}{dx^2} \Big|_{x^*} = 0, \quad (4.44)$$

$$j_4 = \frac{1}{2} \frac{d^2 F^{(2)}}{dR^2} \Big|_{x^*, R_c}, \quad (4.45)$$

$$j_5 = \frac{d^2 F^{(2)}}{dx dR} \Big|_{x^*, R_c} = 2\gamma \quad (4.46)$$

$$j_6 = \frac{1}{6} \frac{d^3 F^{(2)}}{dx^3} \Big|_{x^*, R_c}, \quad (4.47)$$

$$j_7 = \frac{1}{6} \frac{d^3 F^{(2)}}{dR^3} \Big|_{x^*, R_c}, \quad (4.48)$$

$$j_8 = \frac{1}{2} \frac{d^3 F^{(2)}}{dx^2 dR} \Big|_{x^*, R_c}, \quad (4.49)$$

$$j_9 = \frac{1}{2} \frac{d^3 F^{(2)}}{dx dR^2} \Big|_{x^*, R_c} = \gamma^2. \quad (4.50)$$

As expressões de j_4, j_6, j_7, j_8 , são extensas e não precisam ser apresentadas. Em vez disso, fizemos uma simulação numérica de seu comportamento em função de γ , e percebemos que eles são bem definidos e suaves. A partir daí, chamando $y = x - x^*$, e $\mu = R - R_c$, temos

$$G(y, \mu) = F_R^{(2)}(x) - F^{(2)}(R_c, x^*), \quad (4.51)$$

temos

$$G(y, \mu) = y + \mu^2 j_4 + 2\gamma y \mu + y^3 j_6 + \mu^3 j_7 + y^2 \mu j_8 + y \mu^2 \gamma^2. \quad (4.52)$$

Estamos interessados na investigação de quando $\mu = 0$, logo:

$$G(y, 0) = y + y^3 j_6. \quad (4.53)$$

Fazendo a aproximação

$$G(y) - y = \frac{dy}{dn}, \quad (4.54)$$

$$\frac{dy}{dn} = y^3 j_6, \quad (4.55)$$

assim temos que

$$\frac{dy}{y^3} = j_6 dn, \quad (4.56)$$

integrando de ambos os lados, temos

$$\int_{y_0}^{y(n)} y^{-3} dy = \int_0^n j_6 dn, \quad (4.57)$$

$$y^2 = \frac{y_0^2}{1 - 2j_6 n y_0^2}, \quad (4.58)$$

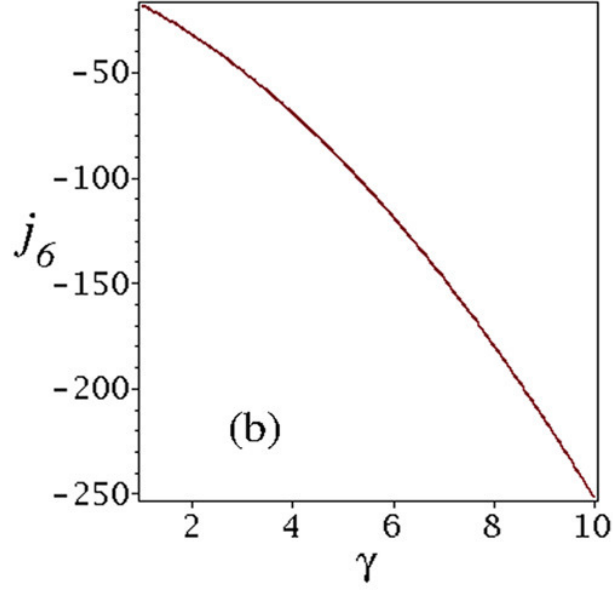


Figura 4.2: Comportamento de j_6 para diferentes valores de γ .

Parece estranho o sinal negativo no denominador, entretando $j_6 < 0$, como pode ser visto na figura 4.1, o que permite que a expressão acima seja escrita como

$$y(n) = \frac{y_0}{\sqrt{1 + 2|j_6|y_0^2 n}}, \quad (4.59)$$

Podemos concluir que para

$$2|j_6|y_0^2 n \ll 1, \quad (4.60)$$

então

$$y(n) \sim y_0^1. \quad (4.61)$$

Da primeira hipótese de escala

$$y \sim y_0^\alpha, \quad n \ll n_x, \quad (4.62)$$

logo

$$\alpha = 1. \quad (4.63)$$

Considerando agora

$$2|j_6|y_0^2 n \gg 1, \quad (4.64)$$

então

$$y(n) \sim \frac{y_0}{\sqrt{y_0 2|j_6|n}}, \quad (4.65)$$

$$y(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2|j_6|}} n^{\frac{1}{2}}. \quad (4.66)$$

Da hipótese de escala

$$y \sim n^\beta \quad n \gg n_x, \quad (4.67)$$

$$\beta = -\frac{1}{2}. \quad (4.68)$$

E o último caso

$$2|j_6|y_0^2 n = 1, \quad (4.69)$$

temos

$$n = \frac{1}{2|j_6|y_0^2}, \quad (4.70)$$

logo

$$n \sim y_0^{-2}, \quad (4.71)$$

Da hipótese de escala

$$n_x \sim y_0^z, \quad (4.72)$$

$$z = -2. \quad (4.73)$$

4.4 Mapa *logistic-like* com o caso de $\mu \neq 0$ na bifurcação de duplicação de período

Vamos agora descrever o decaimento para $\mu \neq 0$. Para tal consideraremos apenas o termo linear em μ , os demais serão desprezados. Assim encontramos

$$G(y, \mu) = y + 2\gamma y \mu + j_6 y^3, \quad (4.74)$$

$$G(y, \mu) - y = \frac{dy}{dn}, \quad (4.75)$$

$$\frac{dy}{dn} = y(2\gamma\mu + j_6 y^2), \quad (4.76)$$

$$\frac{dy}{y(2\gamma\mu + j_6 y^2)} = dn. \quad (4.77)$$

Integrando de ambos os lados obtemos

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y(2\gamma\mu + j_6 y^2)} = \int_0^n dn, \quad (4.78)$$

Aplicando os limites e reagrupando apropriadamente encontramos

$$y^2 = \frac{2\mu\gamma y_0^2}{|j_6|y_0^2 + (2\mu\gamma - |j_6|y_0^2)e^{-4\mu\gamma n}}. \quad (4.79)$$

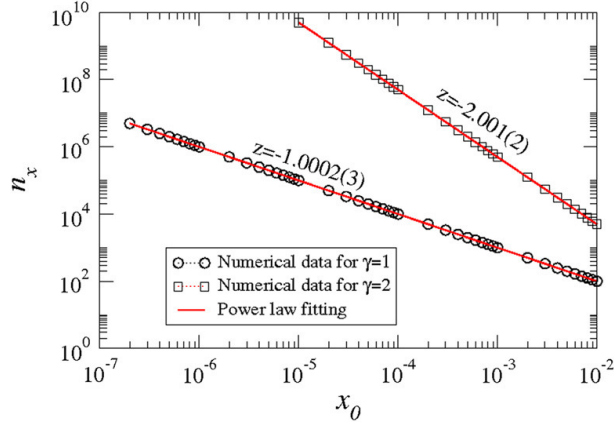


Figura 4.3: Gráfico de número de iterações de crossover(n_x) e a condição inicial(x_0) para $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$.

Tirando a raiz dos dois lados, temos

$$y(n) = \sqrt{\frac{2\mu\gamma y_0^2}{|j_6|y_0^2 + (2\mu\gamma - |j_6|y_0^2)e^{-4\mu\gamma n}}}, \quad (4.80)$$

o que conduz a

$$y(n) = \sqrt{\frac{2\mu\gamma}{|j_6|}} \left[1 + \left(\frac{2\mu\gamma}{y_0^2|j_6|} - 1 \right) e^{-4\mu\gamma n} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.81)$$

Expandindo em série de Taylor o último termo, temos

$$y(n) = \sqrt{\frac{2\mu\gamma}{|j_6|}} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\mu\gamma}{y_0^2|j_6|} - 1 \right) e^{-4\mu\gamma n} \right], \quad (4.82)$$

$$y(n) = \sqrt{\frac{2\mu\gamma}{|j_6|}} - \frac{\mu\gamma}{y_0^2|j_6|} \sqrt{\frac{2\mu\gamma}{|j_6|}} e^{-4\mu\gamma n} + \sqrt{\frac{\mu\gamma}{2|j_6|}} e^{-4\mu\gamma n}, \quad (4.83)$$

logo temos

$$y(n) - \sqrt{\frac{2\mu\gamma}{|j_6|}} = \sqrt{\frac{\mu\gamma}{2|j_6|}} e^{-4\mu\gamma n}. \quad (4.84)$$

Com isso a relaxação para o equilíbrio é dada por

$$y(n) \sim e^{-4\mu\gamma n}, \quad (4.85)$$

das hipóteses de escala

$$y(n) \sim e^{\frac{-n}{\tau}}, \quad (4.86)$$

$$\tau \sim \mu^z. \quad (4.87)$$

Aqui provamos que $z = -1$, conforme mostrado anteriormente.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Investigamos neste trabalho o decaimento para o ponto de equilíbrio em uma família de mapeamentos do tipo logístico-like escrita como

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma). \quad (5.1)$$

Estudamos algumas propriedades dinâmicas desse mapeamento como, seus pontos fixos, diagrama de órbita em particular, investigamos o comportamento da convergência para o ponto de equilíbrio utilizando uma função homogênea generalizada com argumentos (x_0, n) .

Para o mapa logístico-like, considerando a bifurcação transcítica, provamos que o decaimento para o ponto fixo é dado por uma lei de potência em n com expoente

$$\beta = \frac{-1}{\gamma}, \quad (5.2)$$

Nas proximidades das bifurcações mostramos que a não linearidade do mapa não influencia na relaxação para o equilíbrio e a lei de escala que rege este comportamento é dada por

$$\tau = \mu^\delta, \quad (5.3)$$

com

$$\delta = -1. \quad (5.4)$$

Analizamos também o comportamento da dinâmica nas bifurcações de duplicação de período. Neste caso observamos que tanto na bifurcação ou próximo à ela, o decaimento e a relaxação obedecem uma lei de escala com um expoente α igual à -1 . Estes resultados originaram um paper publicado na Physics Letters A[10], e um addendum[11].

Como perspectiva deste trabalho, pretendemos em um futuro próximo estudar o comportamento do decaimento e da relaxação para mapas com mais de uma dimensão, ten-

tando fazer uma analogia para obter uma solução que satisfaça mapas com quaisquer dimensões.

Bibliografia

- [1] J. Gleick, *Caos, A criação de uma nova ciência*, 18 edição, Rio de Janeiro, Elsevier, (1989).
- [2] H. Poincaré, *Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, vols 1-3., Paris, Gauthier-Villas, (1899).
- [3] G. D. Birkhoff, *Collected Mathematical Papers*, vols. 1-3. American Physical Society, Providence (1950); *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*(2), 4, 267 (1935); *Collected Mathematical Papers*, vol. 2, pp. 466-505.
- [4] R. Seydel, *From Equilibrium to Chaos-Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Elsevier, New York (1988).
- [5] P. Couillet e C. Tresser, *J. Physique* **C5**, 25 (1978); *J. Physique Letters* 41, L-255 (1980).
- [6] M. J Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 25 (1978); *J. Stat. Phys.* **21**, 669 (1979).
- [7] R. May, Biological populations with non overlapping generations: Stable points, a stable cycles and chaos. *Science* **86**, 645 (1974).
- [8] J. A. de Oliveira, E. R. Papesso e E. D. Leonel. Relaxation to fixed points in the Logistic Maps: Analytical and Numerical Investigation. *Entropy* **15**, 4310 (2013).
- [9] N. F. Ferrara, C. P. C. do Prado, *Caos, uma introdução*, Blucher, São Paulo (1995).
- [10] Rivania M.N. Teixeira, Danilo S. Rando, Felipe C. Geraldo, R.N. Costa Filho , Juliano A. de Oliveira, Edson D. Leonel, Convergence towards asymptotic state in 1-D mappings: A scaling investigation, *Physics Letters A* 379 (2015) 1246–1250.
- [11] Edson D. Leonel, Rivania M.N. Teixeira, Danilo S. Rando, R.N. Costa Filho, Juliano A. de Oliveira, Addendum to: “Convergence towards asymptotic state in 1-D mappings: A scaling investigation” [*Phys. Lett. A* 379 (2015) 1246], *Physics Letters A* 379 (2015) 1796–1798.