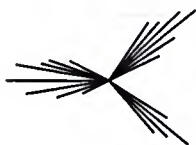


UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JULIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

SÉRGIO M. ANTUNES

ESTUDO DE SISTEMAS HADRÔNICOS NO LIMITE DE ACOPLAMENTO
FORTE DA QCD: SIMETRIA QUIRAL A DENSIDADES
E TEMPERATURAS FINITAS

São Paulo
2009



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.004/2009

Estudo de Sistemas Hadrônicos no Limite de Acoplamento Forte da QCD :
Simetria Quiral a Densidades e Temperaturas Finitas

Sérgio M. Antunes

Orientador

Dr. Gastão Inácio Krein



Maio de 2009

Agradecimentos

É realmente uma tarefa difícil fazer agradecimentos a todos aqueles que influenciaram de maneira positiva, direta ou indiretamente, nestes meus longos anos de doutorado.

Correndo um risco imenso em ser injusto com aqueles que me ajudaram mas não serão lembrados aqui, começo por agradecer imensamente ao meu orientador, Prof. Dr. Gastão Krein, pela orientação, pela escolha do tema e, principalmente, pela paciência que teve comigo nestes anos.

Agradeço a minha família pelo estímulo dado nas horas mais difíceis. Sem eles nada disso seria possível.

Agradeço a todo o corpo administrativo do Instituto de Física Teórica pela inestimável colaboração.

Agradeço aos meus *amigos* Leandro, Victor, Alexandre e Wanderson pela companhia ao longo destes anos *incríveis*.

Agradeço, de forma especial, à minha esposa Eliete e a ela dedico esse trabalho. Agradeço por trazer sentido e felicidade à minha vida.

Agradeço, enfim, à Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro.

*Aos meus entes queridos que não estão mais entre nós: meu Avô, Sr. Sebastião;
Sr. Joaquim e Sra. Santana; Sr. Geraldo e Sra. Elenice e os pequenos Natália e
Vinicius.*

"... I can live with doubt and uncertainty and not knowing. I think it is much more interesting to live not knowing than to have answers that might be wrong. I have approximate answers and possible beliefs and different degrees of certainty about different things, but I am not absolutely sure of anything and there are many things I do not know anything about, such as whether it means anything to ask 'why are we here?' I do not have to know an answer. I do not feel frightened by not knowing things, by being lost in a mysterious universe without any purpose, which is as far as I can tell. It does not frighten me."

-Richard P. Feynman

Resumo

Desenvolvemos um formalismo para estudar a quebra dinâmica da simetria quiral na matéria hadrônica em que os quarks e gluons estão confinados no interior dos hádrons. O formalismo emprega as técnicas tradicionais da teoria quântica de muitos corpos em conjunção com a representação Fock-Tani, em que os estados ligados hadrônicos são descritos em termos de operadores de campos que satisfazem regras de comutação canônicas em um espaço de Fock estendido. Empregamos um modelo de quarks inspirado na Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb que confina quarks e gluons e realiza a quebra dinâmica da simetria quiral. Resultados numéricos foram obtidos para a equação de gap para os quarks num meio hadrônico formado por nucleons a temperatura zero. Como aplicação do formalismo estimamos os efeitos da densidade bariônica sobre o potencial de interação entre mésons charmosos D com nucleons obtido com a representação Fock-Tani dentro do mesmo modelo de quarks.

Palavras Chaves:

Cromodinâmica quântica, simetria quiral, confinamento de quarks e gluons, estrutura hadrônica, interações hadrônicas, matéria hadrônica

Áreas do conhecimento: Teoria de Partículas e Campos; Física Nuclear

Abstract

We have developed a formalism to study dynamical chiral symmetry breaking in hadronic matter where quarks and gluons are confined within hadrons. The formalism employs the traditional techniques of the quantum many body theory in conjunction with the Fock-Tani representation in which the hadronic bound states are described in terms of field operators that satisfy canonical commutation relations in an extended Fock space. We have employed a quark model inspired in the QCD Hamiltonian in Coulomb gauge that confines quarks and gluons and realizes dynamical chiral symmetry breaking. Numerical results are obtained for the gap equation in a hadronic medium formed by nucleons at zero temperature. As an application of the formalism we have estimated the effects of the barionic density on the interaction potential of charmed D mesons with nucleons obtained with the Fock-Tani representation within the the same quark model.

Índice

1	Introdução	1
2	O modelo de quarks e a cromodinâmica quântica	9
2.1	Origens: A busca de uma teoria para as forças nucleares	9
2.2	A cromodinâmica quântica	15
2.3	Quebra dinâmica da simetria quiral num modelo simples	22
3	A QCD no calibre de Coulomb e a quebra dinâmica da simetria quiral	25
3.1	Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb	26
3.2	Formalismo de Szczepaniak e Swanson para a estrutura do vácuo da QCD	30
3.3	Quebra dinâmica da simetria quiral no vácuo – formalismo de Schwinger-Dyson	33
3.4	Quebra dinâmica da simetria quiral a temperaturas e densidades bariônicas finitas – formalismo de Schwinger-Dyson	39
3.5	Equação de gap no vácuo - formalismo de muitos corpos	45
3.6	Um modelo de quarks constituintes	51
4	O Formalismo da representação Fock-Tani.	58
4.1	Representação Fock-Tani para mésons	59
4.1.1	Transformação Fock-Tani para Bárions.	67
4.2	Transformação Fock-Tani generalizada	69
5	Simetria quiral na matéria hadrônica	74
5.1	Equação de gap para quarks confinados	75
5.2	Distribuições de quarks e antiquarks confinados na matéria hadrônica	78
5.3	Fator de forma bariônico do núcleon	83
6	Resultados numéricos	85
6.1	Resultados para a equação de gap no vácuo	86

6.2	Resultados para a equação de gap a densidade finita	93
6.3	Resultados para massas e tamanhos hadrônicos a densidade finita . .	97
6.4	Resultados para a interação de mésons D com núcleons a densidade finita	99
7	Conclusões e Perspectivas	104
A	Cálculo das somas de Matsubara	108
B	Funções de spin e sabor do nucleon e dos mesons D .	111
C	Derivação das massas dos barions e dos mesons	114
C.1	A massa dos barions	115
C.2	A massa dos mesons	121
D	Expressões explícitas para o potencial V_{DN}	124
	Referências	127

Capítulo 1

Introdução

Em condições extremas de temperatura e densidade, espera-se a formação de um novo estado da matéria em que os hádrons se dissolvem em seus constituintes, corriqueiramente conhecido como *Plasma de Quarks e Glúons*. Conjectura-se que um estado tal possa ser produzido em laboratório através de colisões entre íons pesados a altíssimas energias. Em princípio, as propriedades desse plasma devem ser descritas pela cromodinâmica quântica (QCD) [1], a teoria fundamental das interações fortes. A QCD é uma teoria de calibre não Abelianiana cujos graus de liberdade fundamentais são os quarks e glúons, descritos respectivamente por campos espinoriais de spin $1/2$ e vetoriais de spin 1 . O grupo de simetria é o grupo $SU(3)$ de *cor*, onde os quarks aparecem na representação fundamental e os glúons na representação adjunta desse grupo. Uma das características distintas dessa teoria não Abelianiana é a auto-interação entre os campos de glúons, a qual é responsável, entre outras, pela propriedade de *liberdade assintótica* [2]. Essa prevê que as interações entre os quarks e glúons tornam-se mais fracas a curtas distâncias. Em virtude disso, métodos perturbativos de primeiros princípios podem ser aplicados para a descrição de processos que envolvem grandes momentos e energias transferidos. As previsões para processos dessa natureza, obtidas através de cálculos analíticos elaborados, estão em perfeito acordo com os dados experimentais. Por outro lado, progressos mais lentos têm sido observados no estudo de processos e sistemas hadrônicos para os quais a QCD perturbativa não se aplica. O espectro hadrônico e a estrutura da matéria hadrônica a baixas energias de excitação são problemas típicos que requerem o emprego de técnicas não perturbativas. Associado a esses problemas não perturbativos está um dos mais desafiadores fenômenos da Física contemporânea, o *confinamento dos quarks e glúons*. Esse refere-se ao fato experimental de que estados *coloridos* tais como de dois qq ou quatro $qqqq$ quarks, por exemplo, não aparecem no espectro, i.e. aparentemente somente os estados *singletos de cor* do grupo $SU(3)$

são observáveis.

Um outro fenômeno não perturbativo marcante da QCD refere-se à quebra dinâmica da simetria quiral. A simetria quiral é uma simetria aproximada da Lagrangiana da QCD no setor dos quarks leves u e d da teoria – a simetria seria exata se as massas que aparecem na Lagrangiana, denominadas de *massas de corrente*, fossem nulas, o que implicaria numa invariância da Lagrangiana frente à troca entre os campos fermiônicos de quarks de mão direita e de mão esquerda. Devido ao valor dessas massas – 10 MeV – serem muito menores do que as massas dos hádrons – 1000 MeV – que eles compõem, diz-se que a simetria quiral é uma simetria aproximada. Em geral, uma simetria da Lagrangiana (ou Hamiltoniana) deve, em princípio, se manifestar no espectro da teoria na forma de multipletos degenerados em massa. Sob esse ponto de vista, uma simetria quiral exata implicaria na existência uma partícula como a mesma massa do próton, mas de paridade oposta à paridade do próton. Como a simetria não é exata, mas aproximada, sob esse mesmo ponto de vista esperaria-se que existisse no espectro hadrônico uma partícula com uma massa *aproximadamente* igual à massa do próton, mas de paridade oposta – de forma similar à simetria de isospin, que é uma simetria aproximada das interações fortes e que implica no fato das massas do próton e do nêutron serem muito parecidas. Esse fato da ausência de multipletos degenerados de paridade oposta é explicada pela hipótese de que a que a simetria quiral na QCD é quebrada dinamicamente, como conjecturado inicialmente por Nambu [3] muito antes do nascimento da QCD. No caso de uma simetria quebrada dinamicamente, a simetria do vácuo não é a mesma da Lagrangiana (ou Hamiltoniana), mas ela se manifesta pela presença de bósons de Goldstone que carregam os números quânticos do gerador da simetria quebrada [4]. Como a massa dos quarks leves não é exatamente nula mas muito pequena, tem-se então uma partícula bosônica de paridade negativa com massa não nula, identificada como sendo o méson π . De fato, a massa do pión é muito menor que as massas hadrônicas típicas e, como tal, poderia ser identificado como sendo um pseudo-bóson de Goldstone. Uma outra consequência da quebra dinâmica da simetria quiral é a geração de massa para os quarks. Isto é, as interações da QCD levam a um propagador para os quarks que contém um termo de massa, mesmo na ausência de um termo de massa na Lagrangiana original. Esse termo de massa gerado pelas interações quebra a simetria quiral. Uma outra maneira de se colocar esse fato é que as interações da QCD criam um condensado de quarks no vácuo, i.e. elas levam a um valor esperado não nulo para a densidade escalar de quarks no vácuo – caso a simetria do vácuo fosse igual à simetria da Lagrangiana, esse valor esperado deveria ser nulo.

O fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral é de enorme importância para

a compreensão dos bem sucedidos modelos não relativísticos de quarks que foram introduzidos na era pré-QCD [5]. Nesses, um próton, por exemplo, é descrito por um estado ligado de três quarks *constituintes* com massas de aproximadamente 300 MeV. Com o advento da QCD, cujas massas de corrente são da ordem de 10 MeV, esses modelos só podem ser entendidos no contexto dessa teoria através do fenômeno da quebra dinâmica da simetria, o qual, como dito, geram os quarks constituintes com massas de 300 MeV. No entanto, assim como o confinamento dos quarks e glúons, a quebra dinâmica da simetria quiral também não foi explicada a partir de primeiros princípios a partir das equações da QCD devido ao caráter não-perturbativo destes fenômenos.

Da mesma forma que no caso do confinamento dos quarks e glúons, o fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral é sensível a efeitos de temperatura e densidade. Mais especificamente, em um sistema hadrônico a temperatura ou densidade finitas estão presentes excitações que modificam as propriedades das partículas que compõem esse sistema, como as suas massas e seus tamanhos. Essas excitações, como em qualquer outro sistema de muitos corpos em que ocorre um fenômeno de quebra de simetria, induzem mudanças no ordenamento do sistema que, no presente caso, se refere ao condensado de quarks no vácuo. Essas mudanças são na direção da diminuição do ordenamento e, portanto, no caso da QCD, espera-se uma diminuição do valor do condensado de quarks no vácuo com o aumento da temperatura e/ou da densidade do sistema. Assim como em outros sistemas de muitos corpos, existe uma temperatura ou densidade crítica para a qual a simetria é restaurada, i.e. para a qual o condensado desaparece – como a simetria é apenas aproximada, o condensado não desaparece completamente, mas seu valor diminui drasticamente perto de uma temperatura (e/ou densidade) característica. Há um grande esforço experimental em curso para o estudo de efeitos de temperatura e densidade tanto sobre o confinamento quanto sobre a quebra dinâmica da simetria quiral. Por exemplo, os experimentos realizados e em curso no RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) [6], bem como aqueles planejados para o LHC (Large Hadron Collider) [7], têm o objetivo principal de investigar efeitos de temperatura, enquanto os planejados no FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research), estão voltados a densidade finita, principalmente aqueles das colaborações PANDA (Antiproton Annihilation at Darmstadt) e CBM (Compressed Baryonic Matter) [8].

A única maneira de tratar a QCD não perturbativa a partir de primeiros princípios é através da QCD na rede (LattQCD) [9]. A formulação tradicional da LattQCD é em termos de um formalismo Lagrangiano empregando integrais de trajetória em tempos imaginários. A integral de trajetória é calculada integrando formalmente a parte fermiônica da ação, o que leva a um determinante da matriz do propagador dos

férmions acoplado ao campo de calibre bosônico. A integral remanescente envolve somente variáveis bosônicas e é efetuada numericamente empregando métodos de Monte Carlo. No entanto, para tratar sistemas a densidade bariônica finita (potencial químico diferente de zero), esta formulação apresenta problemas devido ao fato de o determinante fermiônico tornar-se complexo, o que praticamente inviabiliza o emprego dos algoritmos Monte Carlo tradicionais. Uma alternativa natural para contornar este problema é um formalismo Hamiltoniano, no qual o potencial químico é real. A formulação da QCD com um formalismo Hamiltoniano é particularmente vantajosa no calibre de Coulomb, em vista do fato de que técnicas tradicionais da teoria de muitos corpos podem ser diretamente implementadas para o estudo de sistemas hadrônicos. Em particular, no calibre de Coulomb a Hamiltoniana pode ser escrita inteiramente em termos de graus de liberdade físicos, não necessitando a introdução de campos de fantasmas. Nesse formalismo, é possível definir quantidades como a função de onda do vácuo e estados de muitas partículas num espaço de Fock, os quais podem ser escritos em termos de operadores de criação e aniquilação. Isto é especialmente importante para o desenvolvimento de modelos efetivos para o regime de acoplamento forte da QCD, principalmente para o estudo da estrutura dos hádrons e suas interações, como também da matéria nuclear a baixas energias de excitação.

Apesar destas vantagens, o formalismo Hamiltoniano no calibre de Coulomb também apresenta dificuldades na sua implementação. Uma das principais dificuldades está no fato de que a forma da Hamiltoniana em termos dos campos físicos ser muito complicada e aproximações, muitas vezes drásticas, precisam ser feitas para extrair um formalismo tratável de maneira semi-analítica. Uma outra dificuldade tem a ver com a própria natureza de uma formulação Hamiltoniana, a saber, o formalismo exige a definição de um plano de quantização a um dado tempo fixo, o que implica numa formulação não explicitamente covariante. No entanto, para o desenvolvimento de uma intuição a respeito do acoplamento forte da QCD e a consequente construção de modelos hadrônicos efetivos que vão além dos modelos de quarks puramente fenomenológicos, a formulação Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb parece ser muito apropriada e vem sendo amplamente empregada e novos métodos de cálculo têm sido desenvolvidos nesse contexto. Um exemplo de particular importância para a presente tese pode ser encontrado na Ref. [11].

A principal finalidade dessa tese é desenvolver um método de cálculo baseado na teoria quântica de muitos corpos no contexto de um modelo de quarks inspirado na Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb para estudar de maneira semi-analítica o comportamento da simetria quiral na matéria hadrônica. O estudo da matéria hadrônica é complicado por várias razões. Além das dificuldades usuais

de se tratar um problema de muitos corpos fortemente acoplados, há complicações adicionais devido à possibilidade da presença simultânea no sistema de partículas compostas (os hádrons) e constituintes (quarks e glúons). A complicação surge devido ao fato de que a descrição matemática da formação e a dissociação destes estados ligados no decorrer da transição para um estado de quarks e glúons desconfiados envolve operadores de campos compostos, que são produtos de operadores de campo de partículas elementares. As técnicas usuais da teoria quântica de muitos corpos [12] empregam operadores de campo que representam partículas elementares, i.e. que satisfazem regras de comutação ou anticomutação canônicas, mas a presença de estados ligados descritos por operadores de campo compostos, que *não* satisfazem regras de comutação ou anticomutação canônicas, complica enormemente o tratamento matemático do problema.

A estratégia que será empregada na presente tese para tratar o problema da matéria hadrônica, que a altas temperaturas e densidades se caracteriza pela possibilidade de apresentar compostos (hádrons) e seus constituintes (quarks, antiquarks e glúons) simultaneamente presentes no sistema, é empregar o formalismo da representação Fock-Tani (RFT), a qual foi originalmente desenvolvida para problemas de Física Atômica [13], e recentemente adaptada [14, 15, 16, 17] para problemas hadrônicos. A RFT consiste em uma técnica de mapeamento em que os estados de um hádron composto de quarks e glúons são mapeados através de um operador unitário em estados de um *hádron elementar*. Os estados de um hádron são dados no espaço de Fock em termos de um operador composto de hádron escrito em termos de operadores de campo de quarks, antiquarks e glúons. Enquanto os operadores de quarks, antiquarks e glúons satisfazem relações de comutação ou anticomutação canônicas, os de hádrons compostos não satisfazem regras canônicas de comutação ou anticomutação. A não canonicidade dos operadores compostos é devida à estrutura interna dos hádrons. No entanto, os operadores de hádrons elementares que são introduzidos, por definição, satisfazem regras canônicas de comutação ou anticomutação. Os efeitos físicos da estrutura interna dos hádrons compostos são transferida para a Hamiltoniana ou outros operadores dinâmicos (como as densidades e correntes) na nova representação. Em particular, a transformação através do operador unitário da Hamiltoniana de quarks e glúons, originalmente definida num espaço de Fock físico, leva a uma Hamiltoniana efetiva num espaço de Fock estendido que descreve todos os possíveis processos de interação entre hádrons e quarks e glúons. Processos típicos tais como o confinamento de quarks e glúons são naturalmente incorporados pela Hamiltoniana efetiva. A grande vantagem da RFT é que todos os operadores de campo nesse espaço de Fock estendido satisfazem regras canônicas de comutação e anticomutação.

O interesse da presente tese está nos aspectos de baixas energias da QCD. Mais especificamente, o objetivo da tese é empregar um modelo de quarks constituintes para a estrutura e as interações dos hádrons, tendo como base a QCD formulada no calibre de Coulomb, o qual confina quarks e glúons e realiza a quebra dinâmica da simetria quiral [18, 19, 20]. Nesse modelo de quarks os bárions e mésons a baixas energias de excitação são estados ligados respectivamente de três quarks e um quark e antiquark com massas de aproximadamente 300 MeV. Essas massas são geradas pelo fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral, pela mesma interação empregada para obter as funções de onda dos bárions e mésons. Uma vez obtidas as massas dos quarks e antiquarks e as funções de onda dos hádrons, a representação Fock-Tani permite obter uma Hamiltoniana escrita em termos de graus de liberdade hadrônicos apenas, a qual descreve as interações entre hádrons. A Hamiltoniana hadrônica assim obtida não possui novos parâmetros, todas as suas propriedades são geradas a partir do modelo microscópico de quarks.

Especificamente, na presente tese vamos desenvolver um formalismo para estudar a simetria quiral na matéria hadrônica a temperatura e densidade bariônica finitas. O problema da simetria quiral na matéria hadrônica tem sido investigado extensivamente na literatura, principalmente no contexto de modelos esquemáticos como o de Nambu–Jona-Lasinio [21], que será objeto de atenção no Capítulo 2 – uma lista completa de referências pode ser encontrada nos artigos de revisão das Refs. [22, 23, 24, 25] – como também em modelos baseados na QCD no calibre de Coulomb [26, 27, 29, 28]. Essa extensa literatura considera o meio hadrônico como sendo um sistema de quarks desconfinados. Um sistema de quarks desconfinados provavelmente existe no interior de estrelas superdensas, como também, muito provavelmente, na região central de uma colisão de íons pesados a altas energias. No entanto, é praticamente impossível extrair informações experimentais diretas sobre as propriedades dos quarks constituintes no interior de uma estrela de nêutrons ou de um meio hadrônico altamente excitado produzido numa colisão de íons pesados, já que esses quarks não são observáveis diretamente. No entanto, a matéria altamente excitada produzida numa colisão de íons pesados se expandirá e, conseqüentemente, se resfriará e os quarks não permanecerão desconfinados, mas sim, voltarão a se recombinar em hádrons que levam informações sobre esses quarks constituintes. Muitos desses hádrons ainda estarão sujeitos às excitações do meio e terão suas massas, tamanhos e interações com outros hádrons no meio alteradas. Esses efeitos podem em princípio ser detetados através de produtos de decaimentos e rearranjos hadrônicos devidos às interações entre os hádrons enquanto ainda no meio. No entanto, para o tratamento matemático das modificações das propriedades quirais dos quarks constituintes no meio e suas conseqüências para os

hádrons requer um formalismo diferente daquele usado para tratar quarks desconfiados. É precisamente nesse contexto que a presente tese se insere, introduzindo um novo formalismo através da representação Fock-Tani para investigar a quebra dinâmica da simetria quiral num meio hadrônico em que os quarks estão confinados no interior dos hádrons. O formalismo desenvolvido é de aplicabilidade a diferentes sistemas hadrônicos para estudar os efeitos de temperatura e densidade bariônica sobre o fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral para um meio hadrônico formado por bárions e mésons. No entanto, as aplicações do formalismo desenvolvido serão restritas a um meio formado por núcleons a temperatura zero. Uma outra aplicação do formalismo é uma investigação da dependência com a densidade bariônica da interação efetiva DN - mais especificamente, $\bar{D}^0 N$ e $D^- N$. A interação DN no espaço livre foi investigada no contexto do modelo de quarks constituintes baseado no calibre de Coulomb nas Refs. [18, 19]. Esses processos são de grande interesse atual, com a perspectiva dos experimentos que estão sendo planejados pelas colaborações PANDA e CBM do laboratório FAIR na Alemanha [8].

A tese está organizada da seguinte maneira. No próximo Capítulo vamos fazer uma breve revisão histórica sobre o desenvolvimento da QCD e vamos discutir os fenômenos do confinamento dos quarks e glúons e a quebra dinâmica da simetria quiral na QCD. No Capítulo 3 discutiremos a formulação Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb. Vamos revisar o formalismo variacional de Szczepaniak e Swanson [11], o qual permite obter uma interação entre cargas de cor do tipo confinante. Vamos ainda revisar o formalismo das equações de Schwinger-Dyson para o propagador dos quarks, considerando efeitos de temperatura e densidade bariônica para um sistema de quarks desconfiados. Por fim, vamos discutir um modelo de quarks constituintes inspirado na Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb [18] para a estrutura e as interações dos hádrons, tendo como base uma interação microscópica que confina a cor e realiza a quebra dinâmica da simetria quiral. No Capítulo 4 será feita uma revisão do formalismo da representação Fock-Tani. A discussão será limitada para os aspectos relevantes para a presente tese. O Capítulo 5 desenvolve um formalismo geral para estudar a simetria quiral na matéria hadrônica a temperatura e densidade bariônica finitas, em que os quarks estão confinados no interior de hádrons. A discussão é geral, mas os resultados finais desse Capítulo serão restritos a um meio hadrônico formado por núcleons apenas, para o qual serão apresentados resultados numéricos explícitos no Capítulo 6. Nesse último, vamos inicialmente discutir a solução numérica da equação de gap no vácuo. A seguir, investigamos os efeitos da densidade bariônica na função de massa dos quarks constituintes. Logo após, vamos apresentar resultados para os tamanhos e massas dos núcleons e mésons $\bar{D}$ e as interações efetivas entre esses mésons charmosos

e núcleons no meio hadrônico. Conclusões e Perspectivas serão apresentadas no Capítulo 7. A tese ainda contém quatro Apêndices, onde colecionamos resultados que são usados nos diferentes capítulos da tese.

Capítulo 2

O modelo de quarks e a cromodinâmica quântica

Neste Capítulo vamos fazer uma pequena revisão histórica sobre a Cromodinâmica Quântica (QCD). Vamos começar com as tentativas iniciais de se estabelecer uma teoria para as forças nucleares em analogia com a Eletrodinâmica Quântica (QED), o que deu origem ao modelo de troca de mésons de Yukawa. Logo após vamos discutir a hipótese dos quarks como constituintes básicos dos hádrons (as partículas que interagem através da força forte), a descoberta dos *sabores* de quarks e das simetrias unitárias e, finalmente, a necessidade de um número quântico adicional aos sabores, denominado *cor*. A seguir, vamos discutir a proposta de uma teoria de campos invariante sobre transformações locais de calibre para as interações fortes, a QCD. Os campos vetoriais de calibre – os glúons – são os transmissores de força entre as cargas de cor dos quarks, de maneira similar aos fótons da QED que propagam a força entre cargas elétricas mas, contrariamente aos fótons, os glúons carregam a carga de cor. Vamos discutir os fenômenos do confinamento dos quarks e glúons e a quebra dinâmica da simetria quiral na QCD.

2.1 Origens: A busca de uma teoria para as forças nucleares

O sucesso da QED em explicar uma ampla gama de fenômenos eletromagnéticos, tais como o momento magnético anômalo do elétron ou o Lamb-shift, estimulou os teóricos a buscar nas teorias quânticas de campos explicações para fenômenos envolvendo as outras forças da natureza. As primeiras experiências de Física Nuclear, tais como o espalhamento de partículas α por núcleos leves e o estudo das vidas médias de decaimentos α , mostraram que as forças nucleares eram tais que o raio do núcleo (com A núcleons) era

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad (2.1)$$

com $r_0 \simeq 1.1 \times 10^{-13}$ cm, de modo que a densidade nuclear (núcleons por unidade de volume) como sendo uma constante independente de A . Com forças de longo alcance,

tais como as forças eletrostáticas, haveria $A(A - 1)/2$ ligações entre núcleons e esperava-se que, nesse caso, a densidade aumentasse com A , já que a energia cinética aumenta apenas linearmente com A . Desse modo, a constância da densidade nuclear sugeria fortemente a existência de forças de curto alcance, cuja ordem de grandeza era dada em MeV, no lugar de eV, que é a ordem de grandeza típica para interações eletromagnéticas, mostrando, dessa forma, que tais forças de curto alcance tinham que ser significativamente mais fortes dos que as forças eletromagnéticas.

Em 1935, procurando por mecanismos que dessem lugar a tais forças, Yukawa [30] propôs uma *teoria mesônica das forças nucleares*, nos moldes da QED, ou seja, uma teoria quântica de campos para as interações nucleares. O que Yukawa sugeriu em seu trabalho seminal foi a existência de um campo mesônico, em analogia com o campo eletromagnético, cujos quanta - *mésons* - possuíam massa finita (sugerindo assim uma força de curto alcance) e que se acoplava a prótons e nêutrons como no caso do acoplamento de fótons com partículas eletricamente carregadas. No esquema proposto por Yukawa a troca desses “quanta” seria a responsável pela interação entre núcleons, sugerindo assim um mecanismo único para a explicação de interações tão diferentes como o eletromagnetismo e as forças nucleares. Dessa forma todo o arsenal teórico desenvolvido na QED para se efetuar cálculos quantitativos precisos poderia ser utilizado para o caso das forças nucleares. No entanto, o acoplamento entre férmions e escalares nesta teoria

$$\mathcal{L} = g\bar{\psi}\tau^a\psi\phi^a, \quad (2.2)$$

sendo τ^a uma matriz de Pauli e g uma constante adimensional, assume o valor

$$\frac{g_{\pi N}^2}{4\pi} \simeq 14, \quad (2.3)$$

o que impossibilita o emprego de técnicas perturbativas nos moldes da QED. Portanto, novos métodos ou novas teorias eram necessárias para explicar o espectro hadrônico conhecido.

Com o advento dos aceleradores de partículas a situação experimental na década de 60 começou a assumir aspectos alarmantes para a teoria física. Cada vez mais *partículas fundamentais*, em forma de ressonâncias, eram encontradas a medida que maiores energias eram alcançadas nos aceleradores, e a única teoria para as interações nucleares disponível era inaplicável, como dissemos acima. Então a questão que surgiu neste período foi a de como explicar esta ampla gama de partículas descobertas nos experimentos.

Um importante aspecto observado à época foi que a existência de ressonâncias normalmente indica a presença de estados ligados, dessa forma foi postulado [31] que

hádrons pudessem ser considerados como estados compostos, construídos a partir das partículas conhecidas na época, ou seja, que fossem combinações de prótons (p), nêutrons (n) e lâmbdas (Λ). Em um trabalho posterior [32] foi sugerido que este “triplete” de partículas deveriam se transformar como a representação fundamental do grupo de simetria $SU(3)$. Neste trabalho foi dito corretamente que os mésons poderiam ser contruídos como estados ligados do produto direto entre elementos da representação fundamental grupo $SU(3)$ e de sua conjugada. Em linguagem de teoria de grupos (séries de Clebsch-Gordan) podemos escrever:

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}, \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{8}$ e $\mathbf{1}$ são as representações irredutíveis de $SU(3) \otimes SU(3)$. No entanto esse modelo falhou por não descrever o espectro total de partículas descobertas.

Logo a seguir, no ano de 1961, as suposições corretas sobre a relação das partículas descobertas com o grupo de simetria $SU(3)$ foram encontradas por Gell-Mann [33] e Ne’eman [34]. Estes postularam que os bárions e mésons poderiam ser arrançados em uma forma que foi denominada por eles como “The Eightfold Way” [35]. A seguir, Gell-Mann [36] e Zweig [37] propuseram que as propriedades do grupo $SU(3)$ poderiam ser utilizadas para a explicação do espectro caso fossem postulados a existência de novos constituintes, que Gell-Mann chamou de “quarks”, que transformam-se como um triplete $\mathbf{3}$, sob $SU(3)$. Como todas as representações de um grupo $SU(N)$ podem ser geradas tomando-se múltiplos produtos da representação fundamental, que tem dimensão N , as representações de dimensões mais altas podem ser obtidas começando com os quarks.

Resumindo o desenvolvimento histórico, o espectro mesônico observado na época era composto por três “pions”, dois “kaons”, dois “anti-kaons” e uma partícula denominada “eta”. Para explicar este espectro observado Gell-Mann supôs que estes oito mésons poderiam ser imaginados como sendo a base para uma representação adjunta complexa do grupo de simetria $SU(3)$ – isto é, uma representação de dimensão 8 do espaço de Hilbert complexo. Assim foram postuladas as existências de três partículas que formariam a base padrão:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

sendo que tais novas partículas foram denominadas “quarks”, que aparecem na teoria em três tipos (ou “sabores”): quark “up” (u), quark “down” (d) e quark “strange” (s). Os “anti-quarks” aparecem na base dual

$$\bar{\mathbf{u}} = (1 \ 0 \ 0), \quad \bar{\mathbf{d}} = (0 \ 1 \ 0), \quad \bar{\mathbf{s}} = (0 \ 0 \ 1), \quad (2.6)$$

e os mésons seriam compostos por quarks e anti-quarks. Por exemplo, o pión positivo, π^+ , seria representado, na base adjunta, na forma:

$$\pi^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

que é o resultado do produto direto

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (0 \ 1 \ 0) = u \otimes \bar{d}, \quad (2.8)$$

e todos os outros mésons observados podem ser construídos a partir das bases de quarks e anti-quarks.

Os quarks u e d formam o dubleto padrão de isospin $SU(2)$. A necessidade de um terceiro quark surgiu porque foi observado que um novo número quântico, além do isospin, era conservado por processos hadrônicos. A este novo número quântico foi dado o nome de “estranheza”, sendo que tal número quântico pode ser explicado em termos de $SU(3)$. Portanto, suas representações são denominadas por dois números, a saber, a terceira componente de isospin T_3 e também um novo número quântico Y , chamado de *hipercarga*. Estes novos números quânticos podem ser relacionados pela conhecida fórmula de Gell-Mann-Nishijima:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

onde $Y = B + S$, sendo B o número bariônico, S o número quântico de estranheza, T_3 é a terceira componente de isospin e Q é a carga.

Os bárions, dentro deste esquema teórico, surgem pela decomposição do produto direto $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$ na soma de suas respectivas representações irredutíveis, na forma:

$$\text{Barion} = \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}. \quad (2.10)$$

Para reproduzir-se as cargas elétricas conhecidas dos mésons e dos bárions foi necessário postular-se que as cargas elétricas dos quarks assumissem valores fracionários:

$$Q_u = \frac{2}{3}e; \quad Q_d = -\frac{1}{3}e; \quad Q_s = -\frac{1}{3}e, \quad (2.11)$$

de modo que o próton e o nêutron, como exemplos, são descrito pelos estados $p = uud$ e $n = udd$, respectivamente.

O modelo a quarks obteve grande sucesso na predição de novos estados hadrônicos e em explicar a intensidade das transições eletromagnética e fraca entre hádrons diferentes. Em particular, o modelo a quarks incorpora naturalmente as relações de simetria mais importantes entre partículas que interagem fortemente. Se assumirmos que os quarks u e d possuam massas idênticas, o grupo $SU(2)$, que atua como uma rotação unitária entre os estados u e d ,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

deve ser um grupo de simetria das interações fortes. Na verdade, tanto na física nuclear como na física de partículas, os estados quânticos formam multipletos dessa simetria, denominada simetria de *isospin*. Da mesma maneira, supondo que o quark s tem a mesma massa que os quarks u e d (na verdade ele é bem mais pesado), fazia sentido considerar uma simetria por transformações unitárias do triplete (u, d, s) . Foi exatamente isso que Gell-Mann e Ne'eman mostraram com o modelo que descrevemos acima.

No entanto, a despeito do grande sucesso do modelo de quarks original, este possuía dois problemas fundamentais. O primeiro deles é o fato de que partículas livres com cargas fracionárias nunca terem sido observadas até aquela ocasião (na verdade ainda não foram observadas, mas existem fortíssimas evidências que apontam da direção da validade desse argumento). O segundo está relacionado ao fato de que o espectro de bárions exige a suposição de que a função de onda de três quarks seja totalmente simétrica sobre a troca de números quânticos de spin e sabor, contradizendo a hipótese de que quarks, que possuem spin $1/2$, devam obedecer a estatística de Fermi-Dirac. A necessidade dessa simetria é mais claramente demonstrada quando consideramos que um dos estados excitados mais leves de um núcleon é uma partícula de spin $3/2$ com carga elétrica $+2$, a partícula Δ^{++} . Tal partícula é interpretada como um estado ligado uuu , com momento angular orbital nulo e todos os spins dos quarks alinhados paralelamente. Para que o modelo a quarks ainda pudesse descrever corretamente o espectro bariônico físicos como Nambu, Greemberg e Gell-Mann propuseram que os quarks deveriam carregar um número quântico adicional “não observado”, que foi denominado número quântico de cor. Foi então introduzida a suposição de que as funções de onda dos bárions, simétricas em spin/sabor, devessem ser totalmente anti-simétricas nos números quânticos de cor, o que fornecia uma função de onda globalmente anti-simétrica, de acordo com a estatística de Fermi-Dirac (caso a função de onda seja anti-simétrica em spin/sabor,

ela seria simétrica em cor).

O modelo mais simples que incorpora a *cor* é aquele onde os quarks são transformados pela representação fundamental de uma nova simetria interna. O grupo de simetria deve ser o grupo $SU(3)$, dado que são necessárias três *cores* para tornar a função de onda bariônica totalmente anti-simétrica nos casos necessários*. Suprimindo, por clareza, os números quânticos de spin e sabor, podemos representar quarks por q_i , onde $i = 1, 2, 3$ representa o índice de cor. Dessa forma os quarks se transformam pela representação fundamental do grupo $SU(3)$, $\mathbf{3}$. Os anti-quarks, $\bar{q}_i$, transformam-se na representação conjugada $\bar{\mathbf{3}}$ de forma que o produto interno de $\mathbf{3}$ e $\bar{\mathbf{3}}$ é um invariante de $SU(3)$.

Assim como o modelo a quarks original a hipótese de cor foi um grande sucesso fenomenologicamente, no entanto novas questões surgiram: Por que os quarks devem possuir estes novos números quânticos aparentemente inúteis e qual deve ser o mecanismo que deve assegurar que as funções de onda hadrônicas sejam singletos de cor? Ou seja, por que estados tais como qq ou $qqqq$ não fazem parte do espectro hadrônico? Por que os quarks não são observados experimentalmente? Estes quarks são de fatos partículas elementares reais ou apenas um *truque* matemático útil para a descrição da física das interações fortes? Admitindo a realidade dos quarks, qual deve ser a força que, efetivamente, os mantém unidos dentro do núcleon? À época alguns teóricos acreditavam que os transmissores da força forte deveriam ser partículas representadas por um campo vetorial (como o fóton da eletrodinâmica). No entanto o problema com essa descrição era que, para obter-se uma teoria renormalizável, seria necessário que esse campo vetorial fosse sem massa e isso estava em contradição com o fato de que campos sem massa são responsáveis por interações de longo alcance (como a gravidade e o eletromagnetismo) e as interações fortes apresentava uma aparência de interação de curto alcance. Como resolver este aparente paradoxo?

A resposta para estas questões não surgiu da espectroscopia hadrônica, mas sim com a descoberta em 1971 de 't Hooft [38] de que teorias de calibre não Abelianas eram teorias renormalizáveis. Essa descoberta foi o ponto de partida para a construção de uma teoria de calibre para as interações fortes, como veremos na próxima seção.

*Note que aqui o grupo $SU(3)$ representa uma nova simetria que não pode ser confundida com a simetria de *sabor* $SU(3)$, sobre o tripleto (u, d, s) .

2.2 A cromodinâmica quântica

Na seção anterior vimos que o modelo a quarks como proposto por Gell-Mann e Zweig conseguiu explicar uma ampla gama de fenômenos físicos relativos à física hadrônica. No entanto, junto com o sucesso na parte fenomenológica, surgiram, também, uma série de problemas conceituais, como descritos no final daquela seção. Após um longo tempo de confusão, foi proposta a seguinte densidade Lagrangeana para a teoria das interações fortes,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{i=1}^6 \bar{\psi}_i (i \not{D} - m_i) \psi_i \quad (2.13)$$

onde

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \\ \not{D} &= \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu \partial_\mu, \\ (D_\mu)_{cc'} &= \delta_{cc'} \partial_\mu - ig \frac{1}{2} (\lambda^a)_{cc'} A_\mu^a, \end{aligned} \quad (2.14)$$

sendo que o campo de Yang-Mills, A_μ^a , é não massivo e carrega forças de *cor* SU(3) (que não devem ser confundidos com a simetria SU(3) de sabor). Na equação acima os índices gregos $\mu, \nu = 0, \dots, 3$, representam índices vetoriais de Lorentz; os índices $a, b, c = 1, \dots, 8$ são índices da representação adjunta do grupo SU(3); $c, c' = 1, \dots, 3$ são índices de cor da representação fundamental do mesmo grupo, e os m_i são as massas dos quarks com sabor i , sendo que os quarks estão na representação fundamental do grupo SU(6) de sabor[†].

Vale a pena uma breve discussão a respeito destes inúmeros novos índices que surgem na teoria. O índice de sabor não representa uma simetria de calibre, mas sim uma simetria global. Entretanto, os quarks devem carregar novos índices, c , e os glúons carregam índices a , que estão relacionados à simetria de calibre da teoria. Essa simetria de calibre é uma simetria *local* o que significa que os parâmetros das transformações de calibre devem ser funções do espaço-tempo, x_μ . Como na QED, essa simetria será a responsável pelo acoplamento entre os campos de matéria e os campos de calibre. Dessa forma os quarks surgem possuindo seis sabores e três cores possíveis, no entanto apenas o índice de calibre é participante da simetria de

[†]Como vimos, na seção anterior, o modelo a quarks postulava a existência de três sabores de quarks para explicar o espectro hadrônico conhecido. Aqui já temos seis sabores de quarks! Claro, a necessidade dos últimos três surgiu devido ao aumento das energias disponíveis nos aceleradores de partículas com a consequente descoberta de novas ressonâncias que o SU(3) de sabor não podia explicar. Temos agora o SU(6) de sabor que cobre o espectro hadrônico conhecido - a simetria SU(6), no entanto, não é exata - como também não era a simetria SU(3) - como veremos a seguir.

calibre local. À primeira vista, do ponto de vista da QCD, os índices de sabor, que foram muito importantes para a fenomenologia hadrônica nas décadas de 60 e 70 está relegado, agora, a uma posição secundária pois toda a teoria é explicada por forças de cor, invariantes por transformações de calibre, que efetivamente *colam* os quarks dentro dos hádrons sendo ainda que a força forte não “enxerga” o sabor das partículas interagentes, ou seja, a QCD é invariante por transformações globais $SU(6)$ – no limite em que as massas dos seis quarks são iguais.

Uma importante característica da QCD é que os campos responsáveis pela transmissão das interações fortes, denominados *glúons*, são auto interagentes, diferentemente do caso da QED, onde não existe interação entre fótons. Essa interação entre estes bósons vetoriais pode ser vista imediatamente no termo

$$gf^{abc}A_{\mu}^bA_{\nu}^c \quad (2.15)$$

da relação

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_{\mu}A_{\nu}^a - \partial_{\nu}A_{\mu}^a + gf^{abc}A_{\mu}^bA_{\nu}^c. \quad (2.16)$$

Um fato experimental importante da QCD, relacionado às auto interações entre os glúons, é que estados *coloridos* tais como qq ou $qqqq$, por exemplo, não aparecem no espectro. Esse fato levou à hipótese de que qualquer estado da QCD para ser um observável deve ser um *singlete* do grupo $SU(3)$ de cor. Da mesma forma, estados que não são singletos de cor envolvendo somente glúons não fazem parte do espectro físico. O fato de que quarks e glúons não são observados experimentalmente de maneira isolada, existindo somente *confinados* dentro dos hádrons observados ou, de maneira mais geral, que não existem estados ligados de quarks e glúons coloridos, ainda é tema de intensas pesquisas. Essa propriedade, denominada *confinamento da cor*, ainda não pode ser demonstrada de maneira precisa e inequívoca a partir das equações da QCD. O motivo para isso é que o confinamento é uma propriedade da QCD que envolve distâncias relativas grandes e baixas energias de excitação. Esse limite é um *regime de acoplamento forte* porque, nessas circunstâncias, a constante de acoplamento g da teoria assume valores grandes. Esse limite é o oposto daquele alcançado em processos que envolvem curtas distâncias e altas energias (como em espalhamentos de elétrons por prótons a altíssimas energias), onde a propriedade de liberdade assintótica [2] da teoria garante que a constante de acoplamento g é pequena. Essa propriedade marcante da QCD de liberdade assintótica permite realizar cálculos precisos e sistemáticos usando os bem estabelecidos métodos da teoria de perturbação. Por outro lado, num regime de acoplamento forte, não existem métodos analíticos suficientemente desenvolvidos que permitem fazer cálculos de maneira precisa e sistemática em teorias quânticas de campos relativísticas, como a

QCD. O único método atualmente existente para tratar problemas não perturbativos na QCD, é a QCD na rede [9], conforme mencionado na Introdução. Esse é um método numérico baseado em técnicas de Monte Carlo e que exige grandes recursos computacionais. Intensas pesquisas em QCD na rede indicam que realmente a QCD é uma teoria que exhibe essa propriedade de confinamento, no entanto, não são ainda conhecidos os mecanismos físicos microscópicos que levam ao confinamento da cor – dito de outra forma, não se entende ainda porque a QCD confina!

Um outro fenômeno não perturbativo marcante da QCD, que é um dos assuntos principais que a presente tese vai tratar, é o da quebra dinâmica da simetria quiral. A simetria quiral é uma simetria aproximada da QCD no setor dos quarks com sabor u e d , e até certo ponto, no setor do quark s também. A simetria quiral é uma simetria exata da QCD no limite (fictício) em que as massas dos quarks, que aparecem na Lagrangeana da QCD, são nulas.

As massas m_i dos quarks que aparecem na Lagrangeana da QCD, dada na Eq. (2.13), são denominadas historicamente de *massas de corrente* pois o valor obtido para as massas destes quarks, no setor u , d e s , foram obtidas a partir dos modelos denominados “Álgebra de Correntes”. As massas de corrente dos quarks u , d e s são comparativamente pequenas em relação às massas dos hádrons que eles compõem ($\simeq 1$ GeV). Vamos considerar, para o momento, que as massas de todos os seis sabores de quark sejam nulas. Nesse caso, a Lagrangeana da QCD toma a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{i=1}^6 \bar{\psi}_i (i \not{D}) \psi_i. \quad (2.17)$$

A parte que envolve os campos fermiônicos dessa Lagrangeana possui uma simetria $SU_V(6) \otimes SU_A(6)$ – na verdade, possui mais outras simetrias não relacionadas à simetria quiral, tais como simetrias $U(1)$, associadas ao número bariônico e ao que se conhece como anomalias. A simetria $SU_V(6) \otimes SU_A(6)$ está associada às transformações dos campos de quarks

$$\psi \rightarrow e^{i\lambda^a \theta_V^a} \psi, \quad \psi \rightarrow e^{i\gamma_5 \lambda^a \theta_A^a} \psi, \quad (2.18)$$

onde θ_V^a e θ_A^a são constantes e λ^a , $a = 1, \dots, 35$ são as matrizes 6×6 geradoras do grupo $SU(6)$.

Para observarmos isso mais claramente e entendermos porque a simetria se manifesta somente para os casos onde a massa seja nula, vamos inicialmente considerar um sistema mais simples, o de uma Lagrangeana de Dirac para um único sabor de quarks

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi. \quad (2.19)$$

Para um único sabor de quarks, as transformações dadas em 2.18 podem ser escritas como

$$\psi \rightarrow e^{i\theta_V} \psi; \quad \psi \rightarrow e^{i\theta_A \gamma^5} \psi. \quad (2.20)$$

É trivial mostrar que a Lagrangeana de Dirac é invariante pelo primeiro tipo de transformação. Considerando o segundo tipo de transformação, denominado *transformação quiral*, vemos que

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi &\rightarrow i\psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu e^{i\alpha\gamma^5}\psi \\ &= i\psi^\dagger\gamma^0 e^{i\alpha\gamma^5}\gamma^\mu\partial_\mu e^{i\alpha\gamma^5}\psi \\ &= i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu e^{-i\alpha\gamma^5} e^{i\alpha\gamma^5}\partial_\mu\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi, \end{aligned} \quad (2.21)$$

pois $[\gamma^5, \gamma^0\gamma^\mu] = 0$, e para o termo de massa, procedemos da mesma maneira,

$$\begin{aligned} m\bar{\psi}\psi &\rightarrow m\psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^0 e^{i\alpha\gamma^5}\psi \\ &= m\psi^\dagger\gamma^0 e^{i\alpha\gamma^5} e^{i\alpha\gamma^5}\psi \\ &= m\bar{\psi}e^{2i\alpha\gamma^5}\psi \\ &\neq m\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dessa forma vemos claramente que a Lagrangeana de Dirac só será invariante por transformações quirais se o termo de massa não aparecer, ou seja, se $m = 0$. Uma outra maneira de verificarmos esse fato é escrevendo as correntes vetorial e axial geradas respectivamente pelas transformações acima (e obtidas através do teorema de Noether)

$$j^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x), \quad j_5^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x). \quad (2.23)$$

Computando as divergências destas correntes teremos,

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ &= (im\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(-im\psi) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_5^\mu &= (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\gamma_5\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi \\ &= im\bar{\psi}\gamma_5\psi + im\bar{\psi}\gamma_5\psi \\ &= 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Nessas, usamos as equações de Dirac, obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m) = 0. \quad (2.26)$$

Portanto, a corrente axial j_5^μ só será conservada se $m = 0$ – dito de outra forma, a carga quiral, $Q^5 = \int d^3x j_5^0$, é uma constante se $m = 0$.

Para o caso de seis sabores, como a QCD, a única diferença é que as correntes envolvem as matrizes λ^a de sabor,

$$V^{(a)\mu}(x) = \bar{\psi}_i^c(x) \gamma^\mu (T^a)^{ij} \psi_j^c(x), \quad A^{(a)\mu}(x) = \bar{\psi}_i^c(x) \gamma^\mu \gamma_5 (T^a)^{ij} \psi_j^c(x), \quad (2.27)$$

onde $T^a = \lambda/2$, com $i = (u, d, s, c, b, t)$ sendo índices de sabor, e $c = 1, 2, 3$ são os índices na representação fundamental de $SU(3)$ de cor. Usando um procedimento análogo ao caso anterior mostra-se que

$$\begin{aligned} \partial_\mu V^{(a)\mu}(x) &= 0, \\ \partial_\mu A^{(a)\mu}(x) &= 2im_i \bar{\psi}_i^c \gamma_5 (T^a)^{ij} \psi_j^c(x), \end{aligned} \quad (2.28)$$

de modo que para $m_i = 0$ (o chamado *limite de simetria quiral*) a corrente (e a carga) axial vetorial é conservada. As cargas vetorial e axial-vetorial são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} Q^{(a)} &= \int d^3x V^{(a)0}(x) = \int d^3x \psi_i^{c\dagger}(x) (T^a)^{ij} \psi_j^c(x), \\ Q_5^{(a)} &= \int d^3x A^{(a)0}(x) = \int d^3x \psi_i^{c\dagger}(x) \gamma_5 (T^a)^{ij} \psi_j^c(x). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Dessa forma, todos os aspectos da conservação ou não da simetria quiral está relacionada ao termo de massa dos quarks que aparece na Lagrangeana (ou da Hamiltoniana) da teoria.

Para explicarmos como o problema da quebra dinâmica da simetria quiral surge na teoria, vamos considerar somente o setor de $SU(2)$ de sabor, com os quarks u e d – que é o setor relevante para esse fenômeno, como veremos mais tarde. Nesse caso, $\lambda^a = \tau^a$, $a = 1, 2, 3$, são as matrizes de Pauli, e verifica-se que a Lagrangiana (ou Hamiltoniana) da QCD é invariante sob o grupo de transformações $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ [10] cujos geradores são combinações lineares apropriadas das cargas vetorial e axial de isospin, dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} Q^a(t) &= \int d^3x \psi_i^{c\dagger}(x) \left(\frac{\tau^a}{2} \right)^{ij} \psi_j^c(x), \\ Q^{5a}(t) &= \int d^3x \psi_i^{c\dagger}(x) \gamma_5 \left(\frac{\tau^a}{2} \right)^{ij} \psi_j^c(x). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Usando as combinações lineares

$$\begin{aligned} Q_L^a &= \frac{1}{2} (Q^a - Q^{5a}), \\ Q_R^a &= \frac{1}{2} (Q^a + Q^{5a}), \end{aligned} \quad (2.31)$$

podemos mostrar que esses operadores obedecem em separado à álgebra do grupo $SU(2)$, ou seja

$$\begin{aligned} [Q_L^a(t), Q_L^b(t)] &= i\epsilon^{abc}Q_L^c(t), \\ [Q_R^a(t), Q_R^b(t)] &= i\epsilon^{abc}Q_R^c(t), \\ [Q_L^a(t), Q_R^b(t)] &= 0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde ϵ^{abc} é o tensor totalmente antissimétrico com $a, b, c = 1, 2, 3$ e $\epsilon^{123} = 1$. Devido a forma de (2.31), que possui a estrutura $(1 \pm \gamma^5)$ sendo, portanto, auto-estado do operador quiralidade, a denominação específica de tal simetria é $SU(2) \otimes SU(2)$ quiral.

Esta simetria do Hamiltoniano da QCD (H_{QCD}) deve, em princípio implicar em importantes consequências para o espectro hadrônico. Para demonstrar esse fato, vamos considerar $|h\rangle$ um determinado auto-estado de H_{QCD} representando, por exemplo, um hádron em repouso de massa m . Dessa forma temos que

$$H_{QCD}|h\rangle = M_h|h\rangle, \quad (2.33)$$

onde M_h é a massa do hádron. A invariância do Hamiltoniano sob o grupo de simetria $SU(2)_L$ e $SU(2)_R$ implica que este comute com os geradores destes grupo, ou seja:

$$\begin{aligned} H_{QCD}Q^a|h\rangle &= Q^aH_{QCD}|h\rangle = M_hQ^a|h\rangle, \\ H_{QCD}Q^{5a}|h\rangle &= Q^{5a}H_{QCD}|h\rangle = M_hQ^{5a}|h\rangle. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Este fato implica que os estados $Q^a|h\rangle$ e $Q^{5a}|h\rangle$ são degenerados com o estado $|h\rangle$, isto é, esses estados têm a mesma massa que o estado $|h\rangle$. Agora, indicando por $\mathcal{P}$ o operador paridade é trivial mostrar que

$$\mathcal{P}Q^a\mathcal{P}^{-1} = Q^a; \quad \mathcal{P}Q^{5a}\mathcal{P}^{-1} = -Q^{5a}, \quad (2.35)$$

o que implica que, juntamente com a Eq. (2.34), hádrons devem se manifestar em multipletos de isospin e que para cada multipletto haja o correspondente multipletto de paridade oposta. No entanto verifica-se que apenas os multipletos de massas aproximadamente degeneradas são observados experimentalmente, ou seja, não existe correspondente manifestação de hádrons em dubletos de paridade.

Tecnicamente dizemos que a manifestação de uma simetria de um determinado Hamiltoniano através de multipletos degenerados é conhecida como realização a la Wigner. Dessa maneira a discussão acima pode ser resumida dizendo que a simetria quiral da QCD não se manifesta no modo de Wigner.

Assim o estado $Q^{5a}|h\rangle$ não pode ser interpretado como o estado de um hádron de mesma massa que o hádron h , mas de paridade oposta. No entanto, este mesmo estado pode ser interpretado como um estado contendo um pión mais um hádron h . Como estes estados são degenerados o pión deve possuir massa nula. Este argumento, com h substituído pelo vácuo, implica que a carga quiral não aniquile o vácuo:

$$Q^{5a}|0\rangle \neq 0. \quad (2.36)$$

Diz-se, dessa maneira, que a simetria quiral foi dinamicamente quebrada: ainda que o Hamiltoniano seja invariante sob o grupo de simetria, esta não se reflete no espectro de auto-estados. Os estados gerados pela aplicação dos geradores de simetria $Q^{5a}|h\rangle$ podem ser associados aos píons de massa e momentum nulos. Este fato representa, em essência, a manifestação do Teorema de Goldstone, o qual associa partículas de massa nula à quebra dinâmica de uma simetria contínua, sendo que as partículas de massa nula carregam os números quânticos do gerador de simetria quebrada [4].

A manifestação, no espectro, de uma simetria da maneira como discutida no parágrafo anterior é conhecida como realização a la Nambu-Goldstone.

Portanto, o fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral está associado ao setor de quarks leves u e d da teoria, pois esses quarks têm massas (da ordem de 10 MeV) muito menores que a escala de massa típica hadrônica, que é da ordem de 1 GeV – nesse sentido, o quark s , cuja massa é da ordem de 150 MeV poderia ser considerado leve. Esse ponto será retomado logo a seguir, na próxima seção.

Apesar desta discussão, sobre quebra dinâmica de simetria e aparecimento de bósons de massa nula, ter sido propositadamente eurística, todos os aspectos discutidos qualitativamente podem ser demonstrados formal e precisamente [10]. No entanto, a demonstração de que este fenômeno realmente ocorre na QCD ainda não foi feita de maneira explícita usando as equações da QCD. Uma das razões para tal, como dito no início da presente seção, é o caráter não-perturbativo deste fenômeno, que impede o emprego das tradicionais e bem desenvolvidos métodos da teoria quântica de campos baseados na teoria de perturbação. Por este motivo, para fazer progresso no assunto e entender os mecanismos que são responsáveis por esse fenômeno, é necessário o emprego de modelos e tratamentos aproximados.

No Capítulo seguinte, um modelo desta natureza, baseado na formulação da QCD no calibre de Coulomb, será empregado. No entanto, antes de encerrar o presente Capítulo, com o objetivo de ilustrar através de um modelo mais simples que o do próximo Capítulo, na próxima seção iremos discutir um modelo que incorpora todas as características de uma realização *a la* Nambu-Goldstone, o modelo Nambu-Jona

Lasinio (NJL). Trata-se de um modelo de teoria quântica de campos para férmions auto-interagentes, originalmente construído em termos de graus de liberdade de núcleons [21]. Agora, com o advento da QCD, o mesmo modelo é formulado em graus de liberdade de quarks.

2.3 Quebra dinâmica da simetria quiral num modelo simples

Para descrevermos a realização da simetria quiral na QCD vamos utilizar o modelo NJL, formulado em termos de graus de liberdade de quarks. Tal modelo exhibe as mesmas simetrias da QCD e é um bom laboratório para estudos qualitativos a respeito da quebra da simetria quiral. Considerando, por simplicidade, apenas o setor $SU(2)$, a densidade Hamiltoniana do modelo, é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{NJL} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} \\ &= \bar{\psi}(x)(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla})\psi - G\left[\left(\bar{\psi}(x)\psi(x)\right)^2 - \left(\bar{\psi}(x)\gamma^5\tau^a\psi(x)\right)^2\right],\end{aligned}\quad (2.37)$$

onde G representa a constante de acoplamento entre os quarks. Note que não explicitamos os índices dos números quânticos de cor e sabor, portanto fica subentendido aqui que cada espinor ψ , tem, além das quatro componentes no espaço de Dirac, mais duas componentes no espaço (interno) de sabor e três componentes no espaço (interno) de cor.

Mostra-se trivialmente que essa Hamiltoniana é invariante por transformações $SU(2) \otimes SU(2)$. Para tal é fundamental a ausência de um termo de massa de corrente do tipo $H_m = -m\bar{\psi}\psi$, como pode ser visto em (2.22). A questão que queremos responder aqui é saber se a simetria manifesta em $\mathcal{H}_{NJL}$ é quebrada dinamicamente. A sugestão de Nambu e Jona-Lasinio [21] era a de encontrar o propagador dos férmions, já que a massa se manifesta com um pólo no propagador $S(p)$. Em encontrando tal propagador a simetria estaria quebrada se (1) o propagador contiver um termo de massa e, (2) se a energia do vácuo calculada com esse propagador com termo de massa for menor que a energia calculada com o propagador com o termo sem massa. A questão consiste, dessa maneira, em como calcular o propagador dos férmions que, para o nosso caso, são os quarks.

A estratégia adotada por NJL foi a seguinte: como a geração de massa é o resultado dos efeitos de auto-interação entre os férmions, a informação da geração de massa deve estar contida na auto-energia dos férmions, $\Sigma(p)$, definida por:

$$S^{-1}(p) = S^{(0)-1}(p) - \Sigma(p), \quad (2.38)$$

sendo $S^{(0)-1}(p)$ o inverso do propagador referente a $\mathcal{H}_0$, dado por

$$S^{(0)-1}(q) = \not{q}. \quad (2.39)$$

Como é sabido não é possível gerar massa em teoria de perturbação, pois considerando que, em primeira ordem, temos a auto-energia na forma

$$\Sigma^{(1)}(p) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \text{Tr} \left[S^{(0)}(q) \right] - S^{(0)}(q) - \gamma_5 \text{Tr} \left[S^{(0)}(q) \gamma_5 \right] + \gamma_5 S^{(0)}(q) \gamma_5, \right\} \quad (2.40)$$

teremos, devido à Eq. (2.39),

$$\Sigma^{(1)}(p) = 0. \quad (2.41)$$

Dessa forma o propagador em primeira ordem na teoria de perturbação, $S^{(1)}(p)$, será simplesmente

$$S^{(1)}(p) = \frac{1}{\not{p}} = S^{(0)}(p). \quad (2.42)$$

Agora, vamos calcular a auto-energia em ordens mais altas significa simplesmente iterar o resultado da ordem imediatamente inferior à desejada, é fácil concluir que a auto-energia continuará sendo identicamente nula em todas as ordens em teoria de perturbação, dessa forma o método perturbativo não serve aos nossos propósitos ficando evidente a necessidade da criação de métodos não perturbativos.

A idéia de Nambu e Jona-Lasinio foi a adicionar um termo de massa na forma $\mathcal{H}_m = M\bar{\psi}\psi$ ao Hamiltoniano de interação $\mathcal{H}_{int}$, desde que o interesse reside na geração de um termo de massa, e subtrair esse mesmo termo em $\mathcal{H}_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{NJL} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} \\ &= (\mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_m) + (\mathcal{H}_{int} + \mathcal{H}_m) \\ &= \mathcal{H}'_0 + \mathcal{H}'_{int}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

A seguir diagonaliza-se $H'_0 = \int d^3x \mathcal{H}'_0$ e trata-se $H'_{int} = \int d^3x \mathcal{H}'_{int}$ como uma perturbação. Desta maneira o vácuo torna-se auto-estado de H'_0 e não invariante por transformações quirais, embora o $\mathcal{H}_{NJL}$ ainda o seja. Dessa maneira M pode ser determinada exigindo que a auto-energia correspondente à nova interação H'_{int} seja igual a zero. De fato, este procedimento nos leva à uma equação autoconsistente para M , chamada de equação de “gap” de massa, dada pela expressão:

$$M = \frac{26G}{(2\pi^3)^3} \int^\Lambda d^3k \frac{M}{\sqrt{M^2 + k^2}}, \quad (2.44)$$

onde Λ é um momentum de corte, o qual é necessário devido ao fato de o modelo não ser renormalizável. Agora, é possível mostrar [21] que (1) há uma solução diferente de zero para M tal que

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - M + i\epsilon} \quad (2.45)$$

para um valor de $G\Lambda^2$ maior que um valor crítico, (2) a densidade de energia calculada com este propagador é menor que a correspondente densidade de energia

calculada com $S^{(0)}$, e (3) que existem partículas pseudoescalares de massa nula no espectro (os bósons de Goldstone).

A massa M , que foi gerada dinamicamente, é chamada de *massa dos quarks constituintes*. O significado de *constituante* é que são essas massas que entram num modelo de quarks não relativístico para descrever os estados hadrônicos. Nesses modelos, a massa do próton, por exemplo, é aproximadamente $M_p \simeq 3M$, o que significa que $M \simeq 300$ MeV. Isto significa que o fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral gerou massas da ordem de 300 MeV. Caso tivéssemos empregado uma massa de corrente m não nula, a simetria quiral não é mais exata e não teríamos um bóson de Goldstone. Mas, se a massa de corrente m for muito menor que 1 GeV, ainda seria gerada uma massa constituinte M da ordem de 300 MeV (usando os mesmos valores de G e Λ acima) e, ao invés de um bóson pseudoescalar de massa zero, teríamos um de massa da ordem de 100 MeV. Ou seja, entende-se o fato de que a massa dos mésons π serem muito menores que qualquer outro hádron formado de quarks u e d como consequência de uma *simetria quiral aproximada*, que não é exata, mais ainda se manifesta de maneira importante no espectro hadrônico. Agora, como será mostrado mais adiante nessa tese, se tivéssemos empregado massas de correntes, como a massa do quark c charm, o fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral não seria tão dramático. Isso é, partindo de massas de corrente muito maiores que zero, a massa constituinte não será dramaticamente maior que a massa de corrente.

Capítulo 3

A QCD no calibre de Coulomb e a quebra dinâmica da simetria quiral

O objetivo do presente Capítulo é empregar a formulação Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb* para obter um modelo de quarks que simultaneamente confine os quarks e glúons e realize a quebra dinâmica da simetria quiral.

A formulação da QCD no calibre de Coulomb possui algumas características muito importantes para a construção de um modelo de quarks dessa natureza. Dentre algumas destas características podemos citar o fato de que tal formalismo trata com quarks e glúons reais, sem graus de liberdade espúrios, como fantasmas, estados de métrica negativa, que surgem quando são utilizados calibres covariantes. Além disso, uma Hamiltoniana escrita em termos de graus de liberdade físicos somente permite a construção de um espaço de Fock em que operadores e estados de muitas partículas são escritos de maneira muito parecida como nos modelos quanto-mecânicos de quarks constituintes, i.e., em termos de operadores de criação e aniquilação. Outra característica fundamental do trato com a QCD neste calibre particular é a possibilidade de uma compreensão física transparente de um dos aspectos mais obscuros da QCD - o confinamento da cor. No ambiente da QCD no calibre de Coulomb, obtem-se: 1) a ausência dos bósons vetoriais (glúons) no espectro de estados físicos, e 2) um potencial atrativo entre fontes que carregam cor. Estes dois aspectos não são bem descritos em calibres covariantes. No calibre de Coulomb, ao contrário, estes dois aspectos podem coexistir: as forças de longo alcance são representadas por uma interação Coulombiana instantânea que cresce no limite $|\vec{q}|^2 \rightarrow 0$, enquanto que o propagador físico (transversal) do glúon é suprimido, refletindo assim a ausência de estados coloridos no espectro físico.

Uma última característica importante da QCD neste cenário é a possibilidade de tratar a restauração e a quebra dinâmica da simetria quiral para quarks leves (u ,

*Lembrando que, como a QCD é uma teoria invariante por transformações de calibre, a escolha de um calibre particular não afeta o resultado do cálculo de quantidades físicas.

d) confinados no interior dos hádrons, que é o objetivo principal desta tese.

Na próxima Seção, vamos brevemente revisar o formalismo Hamiltoniano da QCD no calibre de Coulomb. A seguir, vamos revisar o formalismo de Szczepaniak e Swanson [11] para o vácuo gluônico. Como já discutido anteriormente, esse é um formalismo não perturbativo que permite obter uma interação entre cargas de cor do tipo confinante. Essa interação, quando considerada no setor de quarks, leva ao fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral. Esse assunto será discutido logo após, na Seção 3.3, empregando o formalismo de Schwinger-Dyson. A seguir, na Seção 3.4, vamos considerar efeitos de temperatura e densidade bariônica no fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral, ainda no formalismo de Schwinger-Dyson.

No próximo Capítulo vamos apresentar o formalismo da representação Fock-Tani. Como já dito anteriormente, esse formalismo foi desenvolvido para tratar sistemas de muitas partículas compostas – no presente contexto, hádrons que são estados ligados de quarks e antiquarks. O formalismo parte de um modelo de quarks constituintes para os hádrons em que os estados são escritos em termos de operadores de campo. O modelo de quarks que será desenvolvido mais adiante na presente tese tem as características principais de que somente estados singletos de cor têm energia finita e os quarks constituintes são gerados dinamicamente através da quebra dinâmica da simetria quiral, a qual é obtida com interações também geradas dinamicamente. Ainda mais, empregando as mesmas interações microscópicas que confinam os quarks e glúons, pode-se obter, através do formalismo de Fock-Tani, interações efetivas entre hádrons e, ainda, investigar propriedades da quebra dinâmica da simetria quiral num meio formado pelos hádrons que foram obtidos como estados ligados empregando essas mesmas interações microscópicas.

3.1 Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb

A Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb, apesar de ser da mesma estrutura da correspondente Hamiltoniana da QED, tem uma aparência mais complicada devido ao caráter não-Abeliano da teoria. Apesar de não fazermos uso explícito desta Hamiltoniana nesta tese, vamos discutir brevemente o aparecimento dos seus diversos termos. O intuito desta discussão é tornar o assunto menos obscuro, de maneira a motivar com mais clareza o modelo que será extraído desta Hamiltoniana mais completa. Esta discussão seguirá de muito próximo a notação e os argumentos da Ref. [11].

Uma Hamiltoniana no calibre de Coulomb, como é usual, é dada em termos de campos vetoriais $\vec{A}^a$ e $\vec{\Pi}^a$ transversais, i.e. campos com divergência zero. O campo

$\vec{\Pi}^a$ é o momento canônico conjugado ao campo $\vec{A}^a$. O campo cromo-elétrico é dado por

$$\vec{E}^a = -\frac{\partial \vec{A}^a}{\partial t} - \vec{\nabla} A^{0a} + g f^{abc} A^{0b} \vec{A}^c, \quad (3.1)$$

e satisfaz a lei de Gauss,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a + g f^{abc} \vec{A}^b \cdot \vec{E}^c = g \rho_q^a, \quad (3.2)$$

onde

$$\rho_q^a = \psi^\dagger (\lambda^a/2) \psi, \quad (3.3)$$

é a densidade de carga de cor dos quarks. Esta equação pode ser re-escrita como (empregamos a convenção de que existe uma soma implícita sobre índices repetidos)

$$\vec{D}^{ab} \cdot \vec{E}^b = g \rho_q^a, \quad (3.4)$$

onde $\vec{D}^{ab}$ é a derivada covariante na representação adjunta, dada por

$$\vec{D}^{ab} = \delta^{ab} \vec{\nabla} + ig T_{ab}^c \vec{A}^c, \quad (3.5)$$

com $T_{ab}^c = i f^{cab}$. Agora, se escrevermos o campo elétrico em termos de componentes transversa (i.e. com divergência zero) e longitudinal

$$\vec{E}^a \equiv \vec{E}_{tr}^a - \vec{\nabla} \phi^a, \quad (3.6)$$

então a Eq. (3.4) fornece

$$-(\vec{D}^{ab} \cdot \vec{\nabla}) \phi^b = g \rho_q^a, \quad (3.7)$$

com

$$\rho^a = \rho_q^a + f^{abc} \vec{E}_{tr}^b \cdot \vec{A}^c \quad (3.8)$$

$$= \rho_q^a + \rho_g^a, \quad (3.9)$$

onde $\rho_g^a = f^{abc} \vec{E}_{tr}^b \cdot \vec{A}^c$ é a densidade de cor de glúons transversos. Note que o campo ϕ^a pode ser eliminado formalmente em termos da densidade total de carga ρ^a como

$$\phi^a = -g \left(\frac{1}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} \right)^{ab} \rho^b. \quad (3.10)$$

Da mesma forma, a componente zero do potencial vetor, A^{0a} , pode ser eliminada do problema fazendo uso da equação para o campo elétrico,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a = -\vec{\nabla} \cdot \vec{D}^{ab} A^{0b} = -\nabla^2 \phi^a, \quad (3.11)$$

a qual leva a

$$A^{0a} = g \left[\frac{1}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} \right]^{ab} \rho^b, \quad (3.12)$$

onde foi usada a E. (3.10) para ϕ^a .

A evolução temporal do potencial vetor $\vec{A}^a$ é determinado pelo campo transversal $\vec{\Pi}^a$ da seguinte forma:

$$\vec{\Pi}^a \equiv -\vec{E}_{tr}^a = \dot{\vec{A}}^a + g(1 - \vec{\nabla}^{-2} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) f^{abc} A^{0b} \vec{A}^c. \quad (3.13)$$

Quando procedermos a quantização canônica, o campo transversal $\vec{\Pi}^a$ torna-se o momento conjugado do potencial vetor transversal $\vec{A}^a$.

Quando fazemos uma transformada de Legendre para irmos da Lagrangeana para a Hamiltoniana, iremos produzir termos proporcionais a $(\vec{\nabla} \phi)^2$, que surge das componentes longitudinais do campo cromoeletrico $\vec{E}^2$, termos proporcionais $g\rho_q A^0$ do vértice quark-gluon, $g\bar{\psi}\gamma^0 A^{0a}\lambda^a/2\psi$ e ainda termos proporcionais a $g\Pi^a \cdot \vec{A}^b A^{0c} f^{abc}$ do termo $\vec{E}_{tr} \cdot \vec{A}_{tr}$ que são originados de $\vec{E}^2$. Combinando todas estas contribuições e substituindo a expressão para A^0 da Eq. (3.12) teremos uma interação instantânea Coulombiana do tipo não-Abeliano,

$$H_C = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \rho^a(\mathbf{x}) K_{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \vec{A}) \rho^b(\mathbf{y}), \quad (3.14)$$

onde

$$K_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \vec{A}) \equiv \langle \vec{x}, a | \frac{g}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} (-\vec{\nabla}^2) \frac{g}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} | \vec{y}, b \rangle, \quad (3.15)$$

e ρ^a é a densidade de carga de cor completa,

$$\rho^a(\vec{x}) = \rho_q^a(\vec{x}) + \rho_g^a(\vec{x}) = \psi^\dagger(\vec{x}) \frac{\lambda^a}{2} \psi(\vec{x}) + f^{abc} \vec{A}^b(\vec{x}) \cdot \vec{\Pi}^c(\vec{x}). \quad (3.16)$$

O momento gluônico conjugado transversal $\vec{\Pi}^a$ satisfaz à seguinte relação de comutação:

$$[A^{a,i}(\vec{x}), \Pi^{b,j}(\vec{y})] = i\delta^{ab} \left(\delta^{ij} - \frac{\nabla^i \nabla^j}{\nabla^2} \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \equiv i\delta^{ab} \delta_T(\hat{\vec{\nabla}})_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.17)$$

Seguindo [39], utilizaremos a notação $\langle \vec{x}, a | \cdots | \vec{y}, b \rangle$ para representar os “kernels” dos operadores integrais,

$$\langle \vec{x}, a | \vec{D} | \vec{y}, b \rangle = \left[\delta^{ab} \vec{\nabla}_{\vec{x}} + g f^{acb} \vec{A}^c(\vec{x}) \right] \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.18)$$

No caso Abeliano, temos, $\vec{D} \rightarrow \vec{\nabla}$, $K \rightarrow -g^2 \langle \vec{x}, a | 1/\vec{\nabla}^2 | \vec{y}, b \rangle = g^2 \delta^{ab}/4\pi |\vec{x} - \vec{y}|$ (pois os campos de gauge comutam no caso abeliano) de forma que a interação coulombiana é obtida naturalmente.

Uma derivação da Hamiltoniana quântica da QCD no calibre de Coulomb pode ser encontrada na Ref. [39]. Em outro texto, Zwanziger [40] mostrou como derivar a Hamiltoniana no calibre de Coulomb fazendo uso da teoria de campos na rede. A Hamiltoniana quântica pode ser derivada fazendo-se uma transformação que nos leve da forma canônica $A^0 = 0$ para o calibre de Coulomb. A Hamiltoniana onde $A^0 = 0$ corresponde a um certo tipo de “coordenadas cartesianas”, enquanto que a restrição imposta pelo calibre de Coulomb induz uma “curvatura” na estrutura de calibre, introduzindo, assim, uma métrica não trivial na teoria. Na Ref. [39] é mostrado que a medida associada com essa métrica é proporcional ao determinante de Faddeev-Popov

$$\mathcal{J} = \det(\nabla \cdot D). \quad (3.19)$$

Além disso, a Hamiltoniana conterá fatores do tipo $\mathcal{J}$ que são fatores análogos ao operadores de Laplace-Beltrami que surgem quando fazemos a primeira quantização utilizando coordenadas curvilíneas em problemas de mecânica quântica de uma partícula. O determinante de Faddeev-Popov pode ser removido da medida trabalhando com uma Hamiltoniana modificada

$$H \rightarrow \mathcal{J}^{1/2} H \mathcal{J}^{-1/2}, \quad (3.20)$$

que é Hermitiana com respeito a $(\Phi|\Psi) = \int \mathcal{D}\vec{A} \Phi^*(\vec{A}) \Psi(\vec{A})$. Dessa forma o resultado final para a Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb será dada pela expressão

$$H = H_q + H_g + H_{gg} + H_C, \quad (3.21)$$

onde

$$H_q = \int d\vec{x} \psi^\dagger \left(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi, \quad (3.22)$$

$$H_g = \frac{1}{2} \int d\vec{x} \left(\mathcal{J}^{-1/2} \vec{\Pi} \mathcal{J} \cdot \vec{\Pi} \mathcal{J}^{-1/2} + \vec{B} \cdot \vec{B} \right), \quad (3.23)$$

$$H_{gg} = -g \int d\vec{x} \psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{A} \psi, \quad (3.24)$$

e

$$H_C = \frac{1}{2} \int d\vec{x} d\vec{y} \mathcal{J}^{-1/2} \rho^a(x) \mathcal{J}^{1/2} K_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \vec{A}) \mathcal{J}^{1/2} \rho^b(y) \mathcal{J}^{-1/2}, \quad (3.25)$$

Para compararmos com as regras de Feynman e o formalismo da integral de trajetória usuais, é conveniente que façamos um ordenamento dos operadores, conhecido como ordenamento de Weyl, o qual corresponde a uma quantização por integrais de trajetória com discretização de ponto médio. Este procedimento resulta naquilo

que se conhece como “termos de Schwinger-Christ-Lee”, V_1 e V_2 – ver Ref. [39] para detalhes. Aqui não faremos uma discussão detalhada sobre isso, porque tal discussão nos tiraria do objetivo principal desta Tese. Vamos simplesmente escrever o resultado final, que surge com um ordenamento tal em que os termos de Schwinger-Christ-Lee não aparecem

$$H = \frac{1}{2} \int d\vec{x} [\mathcal{J}^{-1} \vec{\Pi}^a \cdot \mathcal{J} \vec{\Pi}^a + \vec{B}^a \vec{B}^a] + \int d\vec{x} \psi^\dagger [-i\vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla} - igA^a T^a) + \beta m] \psi + \frac{g^2}{2} \int d\vec{x} d\vec{y} \mathcal{J}^{-1} \rho^a(\vec{x}) K_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \vec{A}) \mathcal{J} \rho^a(\vec{y}), \quad (3.26)$$

onde $K_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \vec{A})$ é o kernel de Coulomb dado na Eq.(3.15), e a quantidade $\mathcal{J}$ é o determinante de Fadeev-Popov, dado acima na Eq. (3.19).

3.2 Formalismo de Szczepaniak e Swanson para a estrutura do vácuo da QCD

Aqui vamos revisar de maneira sucinta o formalismo de Szczepaniak e Swanson (SS). Esse formalismo é baseado numa aproximação de campo médio para o estado de vácuo da teoria. No primeiro passo, os quarks não são considerados, esses serão objeto de discussão na próxima Seção. O formalismo inicia com um “ansatz” Gaussiano para o estado de vácuo da teoria, dado como

$$\Psi_0[\vec{A}] = \mathcal{J}^{-r} \exp \left[-\frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{A}^a(\vec{k}) \omega_g(k) \vec{A}^a(-\vec{k}) \right], \quad (3.27)$$

onde $\omega_g(k)$ é a energia dos glúons e r é um número. No trabalho original de SS, o termo $\mathcal{J}^{-r}$ na Eq. (3.27) não estava presente. Este termo, em princípio, deve estar presente num ansatz para funções de onda em coordenadas curvilíneas [41]. $\mathcal{J}$ é equivalente ao Jacobiano da transformação de coordenadas retangulares para coordenadas curvilíneas no espaço de coordenadas ordinário que aparece usualmente na medida de integração; $r = 1/2$ é o valor usualmente usado no método variacional na Mecânica Quântica. $\mathcal{J}$ aparece no presente contexto porque, conforme já dito na seção acima, o calibre de Coulomb é o equivalente, no espaço das configurações de campos gluônicos, ao sistema de coordenadas esféricas, enquanto que o calibre axial $A_0 = 0$, é equivalente ao sistema de coordenadas retangulares.

A energia dos glúons é o “parâmetro variacional”, determinada minimizando a densidade de energia do vácuo:

$$\frac{\delta}{\delta \omega_g} \langle \omega_g | H | \omega_g \rangle = 0. \quad (3.28)$$

Aqui, $|\omega_g\rangle$ foi usado para indicar o estado de vácuo $\Psi_0[\vec{A}]$. A função $\omega_g(k)$ será chamada de “função de gap”, pois o espectro de energias de glúons, como será visto a seguir, exibirá um pequeno salto (gap) em relação ao valor perturbativo da energia de um glúon.

Pode-se mostrar que este procedimento variacional é formalmente equivalente à denominada aproximação de Hartree-Fock–Bogoliubov e, portanto, $\omega_g(k)$ poderia ser determinada através de uma transformação canônica escolhida de forma conveniente. Esse procedimento não será seguido aqui porque o procedimento variacional é mais simples. No entanto, no Capítulo 5, quando serão tratados os quarks, esse formalismo se mostrará bastante útil para discutir o fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral num meio em que os quarks estão confinados no interior dos hádrons e será discutido em detalhes naquela oportunidade.

Para prosseguir com a discussão do princípio variacional, expande-se os operadores de campo $\vec{A}^c(\vec{x})$ e $\vec{\Pi}^c(\vec{x})$ em termos de operadores de criação e aniquilação de glúons $\alpha^\dagger$ e α ,

$$\begin{aligned}\vec{A}^c(\vec{x}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_g(k)}} \left[\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \alpha(\vec{k}, \lambda, c) + \vec{\epsilon}^*(\vec{k}, \lambda) \alpha^\dagger(-\vec{k}, \lambda, c) \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \\ \vec{\Pi}^c(\vec{x}) &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_g(k)}{2}} \left[\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \alpha(\vec{k}, \lambda, c) - \vec{\epsilon}^*(\vec{k}, \lambda) \alpha^\dagger(-\vec{k}, \lambda, c) \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (3.29)\end{aligned}$$

Os operadores de aniquilação α aniquilam o vácuo não perturbativo, i.e.

$$\alpha(\vec{k}, \lambda, c) |\omega_g(k)\rangle = 0. \quad (3.30)$$

Agora, a obtenção da equação de gap para $\omega_g(k)$ não é nada trivial. Isto é devido ao fato de que a forma da Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb induz complicações muito grandes para cálculo da densidade de energia do estado fundamental. Isto ocorre porque o potencial de interação depende da escolha de um vácuo particular. O “kernel” K , dado na Eq. (??) é função dos campos que, por sua vez, dependem da equação de gap. Dessa forma a função de gap é determinada por um conjunto de equações acopladas que descrevem a densidade de energia do vácuo e as interações que são usadas para obter esta densidade de energia.

Não vamos apresentar a obtenção dessas equações integrais acopladas [11, 41], pois isso não iria servir para os desenvolvimentos futuros da presente tese. No entanto, o que é importante para nós nesta tese são as soluções que são obtidas do procedimento variacional, as quais usaremos para discutir a quebra dinâmica da simetria quiral e a construção do modelo de quarks constituintes. As soluções são obtidas no espaço dos momentos, tanto para $\omega(k)$ como também para $V_C(k) \equiv$

$K_{ab}(k)$, onde $K_{ab}(k)$ é o kernel de Coulomb no espaço dos momentos. O kernel $V_C(k) = K_{ab}(k)$ é um potencial para a interação entre as cargas de cor.

No trabalho original de SS, o parâmetro r foi tomado como sendo $r = 0$. A solução numérica para $V_C(k)$ nesse caso pode ser parametrizada como a soma de dois termos, um de longo alcance $V_l(k)$ e outro de curto alcance $V_s(k)$,

$$V_C(k) = V_l(k) + V_s(k), \quad (3.31)$$

de maneira que $V_l(k)$ é dada por

$$V_l(k) = \frac{(3.50)^2}{k^2} \left(\frac{m_g}{k} \right)^{1.93}, \quad k \leq m_g, \quad (3.32)$$

e $V_s(k)$ é dada como

$$V_s(k) = \frac{8.07}{k^2} \frac{1}{\left[\ln \left(\frac{k^2}{m_g^2} + 1.41 \right) \right]^{0.8} \left[\ln \left(\frac{k^2}{m_g^2} + 0.82 \right) \right]^{0.62}}, \quad k \geq m_g. \quad (3.33)$$

A quantidade m_g é uma escala de massa que é gerada pelo processo de renormalização e é determinada fenomenologicamente. SS fixaram m_g ajustando o potencial entre duas cargas de cor estáticas extraído de simulações de QCD na rede, o que levou a um valor estimado que poderia variar entre $530 \text{ MeV} \leq m_g \leq 720 \text{ MeV}$, dependendo da escala adotada nas simulações de QCD na rede para fixar o valor da tensão da corda (*string tension*).

Para o caso de $r = 1/2$, a solução numérica pode ser parametrizada [42] como acima, i.e., $V_C(k) = V_l(k) + V_s(k)$, mas com a parte de longo alcance dada como

$$V_l(k) = \frac{8\pi\sigma}{k^4}, \quad (3.34)$$

e a parte de curto alcance como

$$V_s(k) = \frac{4\pi\alpha(k)}{k^2}, \quad (3.35)$$

com

$$\alpha(k) = \frac{4\pi Z}{\left[\beta \ln \left(c + \frac{k^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right) \right]^{3/2}}, \quad \beta = \frac{(11N_c)^2}{36N_c} = \frac{121}{12}, \quad (3.36)$$

onde $N_c = 3$ é o número de cores. Note que no presente caso, o ajuste é a soma direta de dois termos, i.e. ela não é dada como a soma de dois termos, um para k menor e outro para k maior que um certo número, como no caso anterior. A especificação dos valores das constantes Λ_{QCD} , σ , c e Z será discutida no Capítulo 6, quando discutiremos resultados numéricos.

Tudo o que necessitamos do formalismo SS foi discutido acima. A principal motivação para o estudo desse formalismo foi a obtenção do potencial para curtas e longas distâncias que nos possibilitará obter a realização da quebra dinâmica da simetria quiral para gerar as massas dos quarks constituintes dentro do nosso modelo. Nesta tese vamos dar preferência para a solução mais recente com $\alpha = 1/2$, pois conforme argumentam os autores da Ref. [41], esse ansatz contendo o fator de Fadeev-Popov é o mais correto, pois ele leva em conta a curvatura do espaço das configurações de gauge. No entanto, por completeza e para comparar resultados, vamos também mostrar resultados numéricos para a solução antiga, com $\alpha = 0$.

Na próxima seção vamos introduzir o formalismo de Schwinger-Dyson da Teoria Quântica de Campos e estudaremos como a quebra dinâmica da simetria quiral é realizada dentro desse procedimento. Para não perdermos a linha de raciocínio lembramos que a nossa intenção final será a de obter um formalismo em segunda quantização equivalente ao formalismo mais geral da Teoria Quântica de Campos (Schwinger-Dyson) que nos possibilite estudar hádrons em interação.

3.3 Quebra dinâmica da simetria quiral no vácuo – formalismo de Schwinger-Dyson

Para iniciar, vamos considerar uma Hamiltoniana contendo apenas uma interação do tipo Coulomb (mais adiante, vamos considerar também a parte de interação devido a gluons transversos). O Hamiltoniano será escrito como

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x})(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla})\psi(\vec{x}) \\ & + \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \psi^\dagger(\vec{x})T^a\psi(\vec{x})V_C(\vec{x} - \vec{y})\psi^\dagger(\vec{y})T^a\psi(\vec{y}), \end{aligned} \quad (3.37)$$

com $T^a = \lambda^a/2$, $a = 1, \dots, 8$. Note que esta Hamiltoniana corresponde à Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb, onde foram considerados apenas os graus de liberdade de quarks e o kernel de Coulomb K_{ab} foi substituído por V_C , $K_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \vec{A}) \rightarrow V_C(\vec{x} - \vec{y})$. Note também que as massas de corrente foram desprezadas, i.e. estamos trabalhando no limite de simetria quiral exata.

Para verificar a ocorrência da quebra dinâmica da simetria quiral com a Hamiltoniana acima, vamos analisar o propagador do quark – se esse propagador contiver um termo de massa, então a simetria quiral foi quebrada dinamicamente, como discutido no Capítulo anterior, quando foi discutido o modelo de Nambu–Jona-Lasinio. Aqui vamos seguir de muito próximo a Ref. [28]. De forma geral, o propagador do

quark pode ser escrito em termos da autoenergia $\Sigma(p)$ como

$$S(p)^{-1} = \gamma^\mu p_\mu - \Sigma(p). \quad (3.38)$$

Para encontrar a auto-energia, vamos fazer uso da equação de Schwinger-Dyson para o propagador na aproximação *rainbow*, ou Hartree-Fock. Essa consiste em usar para a função de vértice completa da teoria, a correspondente função *bare* que, para a Hamiltoniana acima, é simplesmente dada pela matriz de Dirac γ^0 . Portanto, fazendo uso do fato que o propagador do quark é diagonal e independente de cor, $S(k)_{c,c'} = S(k)\delta_{c,c'}$, o termo de Hartree se anula e somente o termo de Fock sobrevive – o diagrama de Fock está mostrado na figura abaixo.

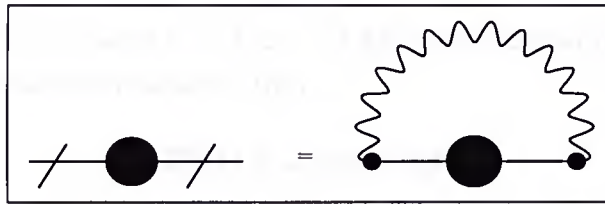


Figura 3.1: Aproximação Rainbow.

A equação de Schwinger-Dyson para a auto-energia do quark na aproximação *rainbow* é dada pela equação integral

$$\Sigma(\vec{p}) = \frac{4}{3} i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} V_C(\vec{p} - \vec{k}) \gamma_0 S(k) \gamma^0. \quad (3.39)$$

Considerando a simetria de Lorentz e a invariância por transformações de paridade podemos decompor a função $\Sigma(p)$ em um termo escalar e outro vetorial como

$$\Sigma(p) = \Sigma^S(p) + \vec{\gamma} \cdot \hat{p} \Sigma^V(p), \quad (3.40)$$

onde $\hat{p} = \vec{p}/p$ e $p = |\vec{p}|$. Inserindo (3.40) em (3.38) podemos escrever o propagador na forma

$$S(p_0, \vec{p}) = \frac{p_0 \gamma_0 - \vec{\gamma} \cdot \hat{p} (p + \Sigma^V(p)) + \Sigma^S(p)}{p_0^2 - \left[(p + \Sigma^V(p))^2 + (\Sigma^S(p))^2 \right]^{1/2}}. \quad (3.41)$$

Note que o termo escalar da autoenergia é um termo de massa (para o modelo de Nambu–Jona-Lasinio na aproximação de campo médio, $\Sigma^S(p) = M$, i.e. o termo escalar da autoenergia é uma constante e igual à massa dos quarks constituintes). O termo vetorial é uma função que renormaliza o termo $\gamma^\mu p_\mu$ e fornece a normalização da função de onda (para o modelo de Nambu–Jona-Lasinio na aproximação de campo médio, $\Sigma^V(p) = 0$). De uma maneira mais formal, se o propagador do

quark contém um termo escalar $\Sigma^S(p)$, a teoria não é invariante sob a transformação quiral discutida acima. O termo vetorial é invariante quiral.

Inserindo o resultado da Eq. (3.41) na Eq. (3.39) e integrando na variável temporal, obteremos o conjunto de equações integrais não lineares acopladas para a autoenergia do quark em suas componentes escalar e vetorial, dado por

$$\Sigma^S(p) = \frac{2}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V_C(\vec{p} - \vec{k}) \frac{\Sigma^S(k)}{\left[(k + \Sigma^V(k))^2 + (\Sigma^S(k))^2 \right]^{1/2}}; \quad (3.42)$$

$$\Sigma^V(p) = \frac{2}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V_C(\vec{p} - \vec{k}) \frac{k + \Sigma^V(k) \hat{p} \cdot \hat{k}}{\left[(k + \Sigma^V(k))^2 + (\Sigma^S(k))^2 \right]^{1/2}}. \quad (3.43)$$

As formas das equações dadas em (3.42) e (3.43) sugerem uma parametrização para as componentes escalar e vetorial do tipo:

$$\Sigma^S(p) = \omega_q(p) \sin \phi(p) \quad (3.44)$$

e,

$$p + \Sigma^V(p) = \omega_q(p) \cos \phi(p), \quad (3.45)$$

introduzindo assim a variável $\omega_q(p)$ e a variável angular $\phi(p)$ – esta última, muitas vezes chamada de *ângulo quiral*. Escrevendo o propagador em termos destas novas variáveis teremos

$$S(p_0, \vec{p}) = \frac{\gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \cdot \hat{p} \omega_q(p) \cos \phi(p) + \omega_q \sin \phi(p)}{p_0^2 - \omega_q(p)^2}, \quad (3.46)$$

o que sugere que a variável $\omega_q(p)$ possa ser interpretada como a energia do quark. Com relação a estas mesmas variáveis, as Eqs. (3.42) e (3.43) serão dadas por:

$$\omega_q(p) \sin \phi(p) = \frac{2}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V_C(\vec{p} - \vec{k}) \sin \phi(k), \quad (3.47)$$

$$\omega_q(p) \cos \phi(p) - p = \frac{2}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V_C(\vec{p} - \vec{k}) \hat{p} \cdot \hat{k} \cos \phi(k) \quad (3.48)$$

Multiplicando a primeira destas pelo termo $\cos \phi(p)$ e a segunda por $\sin \phi(p)$ e subtraindo ambas teremos a seguinte equação:

$$p \sin \phi(p) = \frac{2}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V_C(\vec{p} - \vec{k}) \left[\sin \phi(k) \cos \phi(p) - \hat{p} \cdot \hat{k} \cos \phi(k) \sin \phi(p) \right], \quad (3.49)$$

que é uma equação integral auto-consistente para a variável $\phi(p)$. Uma vez determinada essa variável, todas as outras quantidades podem ser obtidas.

Uma importante quantidade para a análise da quebra da simetria quiral é o condensado quiral, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, que é dado em termos do ângulo quiral $\phi(p)$ pela expressão

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{3}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \sin \phi(k). \quad (3.50)$$

Esta expressão mostra claramente que se a solução da Eq. (3.49), conhecida como a *equação de gap* para os quarks, for tal que $\sin \phi(k) = 0$, então o condensado de quarks será nulo. O que significa isso? Se $\sin \phi(k) = 0$, então o termo escalar da autoenergia, $\Sigma^S(p)$, será nulo. Como o termo escalar é o termo de massa dos quarks, temos então que a Hamiltoniana somente quebra dinamicamente a simetria quiral se $\phi \neq 0$. O condensado de quarks funciona como um parâmetro de ordem, isto é, ele indica se a simetria foi quebrada ou não – como no caso da magnetização num ferromagneto.

A equação de gap, Eq. (3.49), somente pode ser resolvida numericamente e, para tal, é importante conhecer os limites assintóticos das suas soluções. Vamos empregar potenciais que se anulam para momentos grandes e, portanto, $\phi(p)$ deve satisfazer a seguinte condição de contorno no ultravioleta

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \phi(p) \rightarrow 0. \quad (3.51)$$

No infravermelho, assumindo que a quebra de simetria quiral é máxima para partículas em repouso, temos que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \phi(p) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.52)$$

Vamos inicialmente analisar a equação (3.49) tomando o limite $p \rightarrow \infty$. Em vista da condição de contorno no ultravioleta acima, temos

$$\sin \phi(p) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \cos \phi(p) \rightarrow 1, \quad (3.53)$$

e, portanto, o primeiro termo de (3.49), a saber,

$$\frac{2}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\vec{p} - \vec{k}) \sin \phi(k) \cos \phi(q), \quad (3.54)$$

é convergente no limite ultravioleta. No entanto, dependendo da forma do potencial V_C , pode haver divergência no segundo termo da equação de gap. Por exemplo, se considerarmos um potencial Coulombiano na forma $V(r) \sim -1/r$ no espaço de coordenadas, ou $V(q) \sim 1/q^2$ no espaço dos momentos, a divergência comporta-se como

$$\int d^3k \frac{1}{k^2} \sim \int dk k^2 \frac{1}{k^2}. \quad (3.55)$$

Em geral a equação de gap é divergente no regime ultravioleta para potenciais que *caem* mais fracamente que o potencial de Coulomb. Para quantificar isso, vamos considerar um potencial da forma geral dado por $V = V(|\vec{p} - \vec{k}|^2)$. A expansão de Taylor dessa função leva a

$$V(|\vec{p} - \vec{k}|^2) = V(k^2) - 2 \frac{\partial V(k^2)}{\partial(k^2)} \vec{p} \cdot \vec{k} + \dots, \quad (3.56)$$

o que, inserindo no termo divergente da equação de gap, leva a

$$\frac{2}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V(|\vec{p} - \vec{k}|^2) \hat{p} \cdot \hat{k} \sin \phi(p). \quad (3.57)$$

Vemos, então, após fazer a integração angular, que o termo possivelmente divergente fornece a contribuição

$$\int d^3 k \frac{\partial V(k^2)}{\partial(k^2)} k. \quad (3.58)$$

Para um potencial que possua um comportamento, no limite ultravioleta, da forma

$$V(q^2) |_{q \rightarrow \infty} \sim (q^2)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad (3.59)$$

podemos calcular a Eq. (3.58) trivialmente, obtendo o resultado $k^{-2\alpha+2}/(-2\alpha+2)$, que, dessa forma, exibe uma divergência para $\alpha \leq 1$. Isso significa que precisamos renormalizar a equação de gap nesse caso.

Escrevendo

$$Z - 1 = -\frac{4}{9} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\partial V(k^2)}{\partial(k^2)} k, \quad (3.60)$$

vemos que a parte divergente da equação de gap, Eq. (3.57) acima, pode ser colocado na forma

$$\text{divergencia} = (Z - 1) p \sin(\phi(p)). \quad (3.61)$$

Notamos que essa expressão possui exatamente a forma que aparece no lado esquerdo da equação de gap sugerindo, dessa maneira, que a divergência ultravioleta pode ser compensada pela introdução na Hamiltoniana de um contra-termo do tipo

$$\Delta \hat{H} = (Z - 1) \int d^3 x \psi^\dagger(\vec{x}) (-i \vec{\alpha} \cdot \nabla) \psi(\vec{x}). \quad (3.62)$$

Com uma prescrição desse tipo as divergências ultravioletas podem ser tratadas sem ambiguidades.

Agora, o comportamento ultravioleta das equações para a energia, Eqs. (3.47) e (3.48), é finito, dado que para $k \rightarrow \infty$ temos $\phi(k) \rightarrow 0$. Isso significa que somente precisamos fazer uma única renormalização, a de função de onda.

Vamos agora analisar o comportamento infravermelho. Começando com a análise da equação de gap vamos considerar, novamente, a equação (3.49). Expandindo o termo entre colchetes nesta equação em torno do ponto $k = p$, ou seja

$$\sin \phi(k) \cos \phi(p) - \hat{p} \cdot \hat{k} \cos \phi(k) \sin \phi(p) = (\vec{p} - \vec{k}) \cdot \hat{p} \phi'(p) + \mathcal{O}((\vec{p} - \vec{k})^2), \quad (3.63)$$

e, se fizermos a transformação de variáveis, $\vec{q} = \vec{p} - \vec{k}$ no integrando da equação de gap, podemos isolar a possível divergência como sendo na forma

$$\text{divergencia} \sim \frac{2}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V_C(\vec{q}) \mathcal{O}(q^2). \quad (3.64)$$

Dessa forma, para um potencial confinante do tipo $V(r) \sim r$ ou, no espaço de momentos, $V(q) \sim 1/q^4$, este termo toma a forma

$$\int d^3 q \frac{1}{q^4} \mathcal{O}(q^2) \sim \int dq q^2 \frac{1}{q^4} \mathcal{O}(q^2) \sim \int dq \quad (3.65)$$

que é finito no limite infra-vermelho. Portanto a equação de gap é não singular no limite infra-vermelho. Também é o caso quando consideramos um potencial quadraticamente confinante, ou seja, para $V(r) \sim r^2$.

Por outro lado, a equação para ω_q é divergente no infravermelho. Consideremos as Eqs. (3.47) e (3.48), que fornecem a energia do quark

$$\omega_q(p) = \frac{2}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V_C(|\vec{p} - \vec{k}|) \frac{\sin \phi(k)}{\cos \phi(p)} = \frac{2}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V_C(k) \frac{\sin \phi(|\vec{p} - \vec{k}|)}{\cos \phi(p)}. \quad (3.66)$$

A estrutura de divergência no limite infra-vermelho surge quando expandimos a função *seno* em torno do ponto $\vec{k} = \vec{p}$. O termo dominante que representa a parte divergente de $\omega_q(p)$, $\text{PD}\omega_q(p)$, será:

$$\text{PD}\omega_q(p) \sim \frac{2}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} V_C(k). \quad (3.67)$$

Para $V_C(k) \sim 1/k^\alpha$,

$$\text{PD}\omega_q(p) \sim \frac{2}{3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^4} \sim \int dk \frac{1}{k^{\alpha-2}}. \quad (3.68)$$

Portanto, para $\alpha \geq 3$, ω_q é divergente no infravermelho.

A divergência infravermelha é reflexo do confinamento dos quarks, significando que eles não podem se propagar assintoticamente. Como veremos a seguir, essa divergência infravermelha cancela em estados singletos. No entanto, essa divergência causa problemas para sistemas a temperaturas e densidades bariônicas finitas. Esse será o assunto da próxima seção.

3.4 Quebra dinâmica da simetria quiral a temperaturas e densidades bariônicas finitas – formalismo de Schwinger-Dyson

Nessa seção vamos obter a equação de gap dos quarks para temperaturas T e/ou densidades bariônicas ρ diferentes de zero na formulação da Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb. Em analogia com o caso $T = 0$, a equação de gap pode ser obtida através de diferentes métodos. Aqui vamos proceder como no caso para $T = 0$, empregando o formalismo das equações de Schwinger-Dyson. Mais adiante na tese, vamos empregar um outro procedimento, baseado em métodos da teoria quântica de muitos corpos, que se mostra mais adequado para o caso em que quarks estão confinados no interior dos hádrons. O objetivo de empregar métodos diferentes é mostrar a generalidade dos resultados, bem como para motivar a dificuldade de empregar a formulação baseada nas equações de Schwinger-Dyson para um sistema de quarks confinados.

A partir desse momento vamos modificar um pouco a notação que estamos empregando. Vamos discretizar o espaço em um reticulado tridimensional de n^3 pontos, em que o espaçamento entre os pontos desse reticulado é denotado por a . Dessa maneira, temos que

$$\int d^3x \rightarrow a^3 \sum_{\vec{x}}, \quad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{(an)^3} \sum_{\vec{k}}. \quad (3.69)$$

Fazemos esta escolha simplesmente para maior clareza em todos os cálculos que serão efetuados a seguir. Nossa derivação seguirá de perto o trabalho da Ref. [29]. Aqui vamos generalizar a Hamiltoniana da Ref. [29], em que apenas o termo de Coulomb é considerado, incluindo também uma interação de glúons transversos. A Hamiltoniana pode ser escrita de maneira compacta como

$$H = \sum_{\vec{x}} \psi^\dagger(x) (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m_q) \psi(x) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{x}, \vec{y}} J_\mu^a(\vec{x}) D_{ab}^{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}) J_\nu^a(\vec{y}), \quad (3.70)$$

onde $J_\mu^a(\vec{x}) = \bar{\psi}(\vec{x}) T^a \gamma_\mu \psi(\vec{x})$, com $T^a = \lambda^a/2$, e $D^{00}(\vec{x}, \vec{y}) = V_C(\vec{x} - \vec{y})$ e $D^{ij}(\vec{x}, \vec{y})$ tem a forma geral

$$D^{ij}(\vec{x}) = \left(\delta^{ij} - \frac{\nabla^i \nabla^j}{\nabla^2} \right) V_T(\vec{x}). \quad (3.71)$$

Como no caso para $T = 0$, a equação de gap é obtida a partir da equação de Schwinger-Dyson na aproximação de Hartree-Fock para a auto-energia $\Sigma(p)$ do quark. Para tratar o problema a temperatura finita, vamos empregar o formalismo

de tempo imaginário [12]. No ensemble grand canônico, temos que a autoenergia é dada por

$$\Sigma(p) = -\frac{C_F}{\beta} \frac{1}{(an)^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\vec{q}} D^{\mu\nu}(p-q) \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} S(q) \frac{\lambda^b}{2} \gamma_\nu, \quad (3.72)$$

onde C_F é o operador de Casimir na representação fundamental do grupo $SU(N)$ de cor – para $SU(3)$, $C_F = 4/3$, e como antes, $S(q)$ é o propagador do quark

$$S(q) = S(\vec{q}, \omega_n) = \frac{1}{\gamma_\mu q^\mu - \Sigma(q)}, \quad (3.73)$$

onde

$$q_0 = i\omega_n + \mu, \quad (3.74)$$

μ é o potencial químico dos quarks, e

$$\omega_n = (2n+1)\frac{\pi}{\beta}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.75)$$

são as frequências de Matsubara e β é o inverso da temperatura T . Na expressão para Σ empregamos os fatos que tanto o propagador do glúon como o do quark são diagonais nos índices de cor, de maneira que a auto energia Σ também é diagonal. Explicitamente, temos que

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\beta}^{ij} &\sim D_{\mu\nu}^{ab}(\gamma^\mu)_{\alpha\gamma} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{ik} S_{\gamma\delta}^{kl} \left(\frac{\lambda^b}{2}\right)^{lj} (\gamma^\nu)_{\delta\beta} \\ &= \delta^{ab} \delta^{kl} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{ik} \left(\frac{\lambda^b}{2}\right)^{lj} D_{\mu\nu}(\gamma^\mu)_{\alpha\gamma} S_{\gamma\delta}(\gamma^\nu)_{\delta\beta}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

e, notando que

$$\delta^{ab} \delta^{kl} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{ik} \left(\frac{\lambda^b}{2}\right)^{lj} = \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{ik} \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^{kj} = C_F \delta^{ij}, \quad (3.77)$$

obtemos

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{ij} \sim \delta^{ij} C_F D_{\mu\nu}(\gamma^\mu S \gamma^\nu)_{\alpha\beta} = \delta^{ij} \Sigma_{\alpha\beta}. \quad (3.78)$$

Notamos que na presente seção deixamos de empregar o subíndice q nas energias dos quarks para não sobrecarregar demais a notação.

O propagador do quark é dado no ensemble grand canônico como

$$\begin{aligned} S \rightarrow S_{\alpha\beta}^{ij}(\vec{x}\vec{x}'|\tau\tau') &= -\text{Tr} \left[\rho T_\tau [\psi_\alpha^i(\vec{x}\tau) \bar{\psi}_\beta^j(\vec{x}'\tau')] \right] \\ &= \delta^{ij} S_{\alpha\beta}(\vec{x}\vec{x}'|\tau\tau'), \end{aligned} \quad (3.79)$$

onde

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}, \quad Z = \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}, \quad (3.80)$$

e T_τ representa o ordenamento temporal das variáveis de campo, ou seja,

$$T_\tau = \theta(\tau - \tau') \psi_\alpha^i(\vec{x}\tau) \bar{\psi}_\beta^j(\vec{x}'\tau') - \theta(\tau' - \tau) \bar{\psi}_\beta^j(\vec{x}'\tau') \psi_\alpha^i(\vec{x}\tau). \quad (3.81)$$

Dessa forma, a expressão para a auto energia do quark dada em (3.72), pode ser reescrita na forma:

$$\Sigma(p) = -C_F \frac{1}{(an)^3} \sum_{\vec{q}} D^{\mu\nu}(\vec{p} - \vec{q}) \gamma^\mu \left[\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(\vec{q}|\omega) \right] \gamma^\nu, \quad (3.82)$$

onde aqui usamos o fato de termos interações estáticas, ou seja, $D^{\mu\nu}(p - q) \rightarrow D^{\mu\nu}(\vec{p} - \vec{q})$. Agora temos que efetuar as somas de “Matsubara”, que surgem do termo

$$\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(\vec{q}|\omega), \quad (3.83)$$

na expressão para a auto energia. Uma consequência do fato que as interações são estáticas é que a autoenergia $\Sigma(p)$ é independente de ω_n e, portanto, as somas sobre as frequências na Eq. (3.82) podem ser facilmente executadas.

No referencial de repouso do banho térmico, a forma mais geral para a auto energia $\Sigma(p)$ pode ser colocada na seguinte maneira

$$\Sigma(p) = a_p + b_p \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + c_p \gamma^0, \quad (3.84)$$

em que a_p , b_p e c_p dependem de $|\vec{p}|$. Na Eq. (3.72), aparece a transformada de Fourier do propagador a tempos iguais. Uma definição conveniente para o propagador a tempos iguais é

$$S_{\alpha\beta}(x, x') = -\frac{1}{2} \langle [\psi_\alpha(x\tau), \bar{\psi}_\beta(x'\tau')] \rangle_{\tau \rightarrow \tau'}. \quad (3.85)$$

Fazendo a transformada de Fourier dessa equação, encontraremos

$$S(\vec{p}) = -\frac{1}{2\beta} \sum_n [e^{-i\omega_n\eta} S(p|\omega_n) + e^{i\omega_n\eta} S(p|\omega_n)], \quad (3.86)$$

pois, partindo da equação (3.85), vemos que

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}(x, x') &= -\frac{1}{2} \langle [\psi_\alpha(x, \tau), \bar{\psi}_\beta(x', \tau')] \rangle_{\tau \rightarrow \tau'} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\langle \psi_\alpha(x, \tau) \bar{\psi}_\beta(x', \tau') \rangle - \langle \bar{\psi}_\beta(x', \tau') \psi_\alpha(x, \tau) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[S_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}' | \tau > \tau') + S_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}' | \tau' > \tau) \right] \end{aligned} \quad (3.87)$$

Agora, usando a seguinte transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}(\vec{p}, \tau - \tau') &= a^3 \sum_{\vec{q}} e^{-i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} S_{\alpha\beta}(x, x') = \frac{1}{2} \left[S_{\alpha\beta}(\vec{p}, \tau > \tau') + S_{\alpha\beta}(\vec{p}, \tau' > \tau) \right] \\ &= \frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-i\omega_n(\tau - \tau')} \Big|_{\tau > \tau'} + e^{-i\omega_n(\tau - \tau')} \Big|_{\tau < \tau'} \right] S_{\alpha\beta}(\vec{p} | \omega_n). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Definindo as quantidades

$$\omega_p = [a^2 + (1 + b_p)^2 p^2]^{1/2}, \quad \nu_p = \mu - c_p, \quad H_p = \gamma^0 a_p + (1 + b_p) \gamma^0 \vec{p} \cdot \vec{\gamma}, \quad (3.89)$$

e usando as Eqs. (3.73) e (3.84), podemos expressar o propagador da seguinte forma:

$$S(\vec{p} | \omega_n) = \frac{(i\omega_n + \nu_p) \gamma^0 + H_p \gamma^0}{(i\omega_n + \nu_p)^2 + \omega_p^2}. \quad (3.90)$$

Fazendo uso agora das somas (veja Apêndice A)

$$\sum_n e^{i\omega_n \eta} \frac{1}{i\omega_n - x} = \frac{\beta}{e^{\beta x} + 1}, \quad (3.91)$$

e

$$\sum_n e^{-i\omega_n \eta} \frac{1}{i\omega_n - x} = -\frac{\beta}{e^{-\beta x} + 1}, \quad (3.92)$$

o propagador toma a seguinte forma

$$S(\vec{p}) = \frac{H_p}{2\omega_p} \gamma^0 (1 - n_p - \bar{n}_p) - \frac{\gamma^0}{2} (n_p - \bar{n}_p), \quad (3.93)$$

onde

$$n_p = \frac{1}{e^{\beta(\omega_p - \nu_p)} + 1}, \quad (3.94)$$

e

$$\bar{n}_p = \frac{1}{e^{\beta(\omega_p + \nu_p)} + 1}, \quad (3.95)$$

são os números de ocupação para férmions e antiférmions, respectivamente.

Com estes resultados, a equação de Schwinger-Dyson pode ser escrita como

$$a_p + b_p \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + \gamma^0 c_p = \frac{C_F}{2} a^3 \sum_{\vec{q}} D_{\mu\nu}(\vec{p} - \vec{q}) \gamma^\mu \left[\frac{H_q}{\omega_q} (1 - n_q - \bar{n}_q) \gamma^0 - \gamma^0 (n_q - \bar{n}_q) \right] \gamma^\nu. \quad (3.96)$$

Agora, separando as contribuições das partes Coulombiana e de glúons transversais da expressão da auto energia acima como

$$D_{\mu\nu}(\vec{p} - \vec{q}) \gamma^\mu S(\vec{q}) \gamma^\nu = V_C(\vec{p} - \vec{q}) \gamma^0 \left[\frac{H_q}{\omega_q} (1 - n_q - \bar{n}_q) \gamma^0 - \gamma^0 (n_q - \bar{n}_q) \right] \gamma^0$$

$$\begin{aligned}
 & + D_{ij}(\vec{p}-\vec{q})\gamma^i \left[\frac{H_q}{\omega_q} (1 - n_q - \bar{n}_q) \gamma^0 - \gamma^0 (n_q - \bar{n}_q) \right] \gamma^j \\
 & = V_C(\vec{p}-\vec{q}) \left\{ \frac{F_q}{\omega_q} [a_q + (1 + b_q) \vec{q} \cdot \vec{\gamma}] - (n_q - \bar{n}_q) \gamma^0 \right\} \\
 & + 2V_T \left\{ -\frac{a_q}{\omega_q} F_q - \frac{1 + b_q}{\omega_q} F_q \left[\frac{\vec{q} \cdot (\vec{p}-\vec{q}) (\vec{p}-\vec{q}) \cdot \vec{\gamma}}{(p-q)^2} \right] \right. \\
 & \left. - (n_q - \bar{n}_q) \gamma^0 \right\}, \tag{3.97}
 \end{aligned}$$

onde

$$F_p = 1 - n_p - \bar{n}_p. \tag{3.98}$$

Cada componente de $\Sigma(p)$ pode ser determinada usando as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 a_p &= \frac{1}{4} \text{Tr} \Sigma(\vec{p}), \\
 c_p &= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma^0 \Sigma(\vec{p})], \\
 b_p &= -\frac{1}{4p} \text{Tr} [\vec{\gamma} \cdot \vec{p} \Sigma(\vec{p})]. \tag{3.99}
 \end{aligned}$$

Substituindo (3.97) em (3.96) e usando as relações acima obteremos:

$$a_p = \frac{C_F}{2} \frac{1}{(an)^3} \sum_{\vec{q}} F_q \frac{a_q}{\omega_q} \left[V(\vec{p}-\vec{q}) - 2D_T(\vec{p}-\vec{q}) \right], \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}
 p(1 + b_p) &= p + \frac{1}{2} \frac{C_F}{(an)^3} \sum_{\vec{q}} F_q \frac{(1 + b_q)q}{\omega_q} \\
 &\times \left\{ V(\vec{p}-\vec{q}) \hat{p} \cdot \hat{q} + \frac{2}{pq} \left[\frac{(\vec{p} \cdot \vec{q} - q^2)(\vec{p} \cdot \vec{q} - p^2)}{(\vec{p}-\vec{q})^2} \right] D_T(\vec{p}-\vec{q}) \right\} \tag{3.101}
 \end{aligned}$$

$$c_p = -\frac{C_F}{2} \frac{1}{(an)^3} \sum_{\vec{q}} \left[V(\vec{p}-\vec{q}) + 2D_T(\vec{p}-\vec{q}) \right] (n_q - \bar{n}_q). \tag{3.102}$$

Por fim, notamos que o fator de Fermi global $F_p = 1 - n_p - \bar{n}_p$, como função de T e μ , possui os limites a seguir

$$F(0, 0) = 1, \tag{3.103}$$

$$F(T, 0) = \tanh(\beta\omega_p/2), \tag{3.104}$$

$$F(0, \mu) = \theta(\omega_p - \nu_p). \tag{3.105}$$

O primeiro limite nos leva aos resultados da seção anterior, fato que pode ser verificado facilmente, pois $c_p = 0$.

Podemos novamente reexpressar a equação de gap em termos do ângulo quiral $\phi(p)$. Definindo

$$a_p = \omega_p \sin \phi_p, \quad (1 + b_p)p = \omega_p \cos \phi_p, \tag{3.106}$$

podemos reescrever a equação de gap como

$$p \sin \phi_p = \frac{C_F}{2} \frac{1}{(an)^3} \sum_{\vec{q}} F_q \left\{ V_C(\vec{p} - \vec{q}) (\cos \phi_p \sin \phi_q - \sin \phi_p \cos \phi_q \hat{p} \cdot \hat{q}) \right. \\ \left. + 2V_T(\vec{p} - \vec{q}) \left[\cos \phi_p \sin \phi_q - \sin \phi_p \cos \phi_q \frac{(q\hat{p} \cdot \hat{q} - p)(p\hat{p} \cdot \hat{q} - q)}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \right] \right\} \quad (3.107)$$

Tomando o limite do contínuo, fazendo uso da segunda equação em 3.69, e tomando $F_q = 1$ para $T = 0$ e $\mu = 0$, obtemos a equação de gap da seção anterior (para o caso de $V_T = 0$). Da mesma forma, obtemos para a anergia dos quarks a expressão

$$\omega_p = p \cos \phi_p + \frac{C_F}{2} \frac{1}{(an)^3} \sum_{\vec{q}} F_q \left\{ V_C(\vec{p} - \vec{q}) (\sin \phi_p \sin \phi_q + \cos \phi_p \cos \phi_q \hat{p} \cdot \hat{q}) \right. \\ \left. + 2V_T(\vec{p} - \vec{q}) \left[\cos \phi_p \cos \phi_q - \sin \phi_p \sin \phi_q \frac{(q\hat{p} \cdot \hat{q} - p)(p\hat{p} \cdot \hat{q} - q)}{|\vec{p} - \vec{q}|^2} \right] \right\}, \quad (3.108)$$

a qual também colapsa para a expressão da seção anterior no limite contínuo e tomando $F_q = 1$.

Obtivemos, portanto, a equação de gap para os quarks no ensemble gran canônico. Uma constatação imediata a partir do resultado acima é que os efeitos de T e μ são levados em conta pelas distribuições de Fermi-Dirac para quarks e antiquarks *desconfinados*. Essas distribuições aparecem, em última análise, devido às frequências de Matsubara na Eq. (3.75) que envolvem a energia dos quarks. Para uma situação em que os quarks estão confinados no interior de hádrons, as energias que deveriam aparecer são as relacionadas aos quarks confinados. A formulação do problema nessa linguagem nos parece altamente não trivial e, por isso, vamos empregar mais adiante uma formulação baseada na teoria quântica de muitos corpos que trata explicitamente a presença de estados ligados. Essa formulação é a representação Fock-Tani.

Um outro problema, muito mais sério, que aparece a temperatura $T \neq 0$ é que a energia dos quarks continua sendo divergente para interações confinantes – como pode ser facilmente verificado, pois o fator 1 em F_q continua levando a divergência infravermelha. Portanto, as distribuições de Fermi-Dirac não estão bem definidas no infravermelho. A origem do problema não é muito transparente na formulação com as equações de Schwinger-Dyson. Conforme explicado na Ref. [27], o problema é devido ao fato de que na formulação termodinâmica do problema não foi levado em conta que somente excitações térmicas que respeitem a neutralidade da cor devem ser consideradas. Excitações que não são singletos de cor obviamente têm energia infinita e isso se manifesta na inconsistência de que nas distribuições de Fermi-Dirac aparecem energias divergentes no infravermelho. A solução dada na Ref. [27], para o sistema de quarks desconfinados, consiste em levar em conta

somente excitações termodinâmicas que sejam singlete de cor. A equação de gap resultante desse processo é muito complicada e não há registro na literatura de que outros autores tenham adotado esse procedimento. Outros estudos [28] têm empregado prescrições *ad hoc*, como empregar nas distribuições de Fermi-Dirac a expressão $\omega_p - \omega_{p=0}$ ao invés de ω_p . Na presente tese o problema não vai aparecer porque vamos estudar quarks confinados em estados singletos de cor e, portanto, naturalmente aparecerão excitações termodinâmicas de estados hadrônicos, as quais são singlete de cor. Agora, a formulação do problema nesses termos somente é possível com um formalismo que trata explicitamente os estados ligados do problema, como é o caso da representação Fock-Tani.

Para encaminhar a discussão no próximo Capítulo, vamos a seguir reobter a equação de gap empregando um formalismo baseado nos métodos tradicionais da teoria quântica de muitos corpos, em que os operadores de campos são expressos em operadores de criação e aniquilação de quarks e antiquarks. A partir dessa formulação vamos extrair um modelo de quarks constituintes.

3.5 Equação de gap no vácuo - formalismo de muitos corpos

Nesta seção vamos rederivar a equação de gap para os quarks no vácuo empregando um formalismo de muitos corpos baseado em técnicas de segunda quantização. No Capítulo 5 vamos empregar esse formalismo para estudar a quebra da simetria quiral num sistema de quarks confinados no interior de hádrons fazendo uso da representação Fock-Tani.

O ponto de partida é a especificação da Hamiltoniana, a qual, na presente tese é dada pela Eq. (3.70). Para o que segue é conveniente escrevê-la numa forma ainda mais que esquemática que na Eq. (3.70), a saber

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{\vec{x}} \psi^\dagger(x) \left(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m_0 \right) \psi(x) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{x}, \vec{y}} J_\mu^a(\vec{x}) D_{ab}^{\mu\nu}(\vec{x}, \vec{y}) J_\nu^a(\vec{y}) \\
 &= \sum_{\vec{x}} \psi^\dagger(\vec{x}) K(\vec{x}) \psi + \frac{1}{2} \sum_{\vec{x}, \vec{y}} [\psi^\dagger(\vec{x}) \Gamma_\mu^a \psi_\beta(\vec{x})] D_{ab}^{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{y}) [\psi^\dagger(\vec{y}) \Gamma_\nu^a \psi(\vec{y})] \\
 &\equiv \psi^\dagger K \psi + \frac{1}{2} \psi^\dagger \Gamma \psi \cdot D \cdot \psi^\dagger \Gamma \psi,
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

onde

$$K = -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m_0, \tag{3.110}$$

$$\Gamma_0^a = T^a, \quad D^{00}(\vec{x} - \vec{y}) = V_C(\vec{x} - \vec{y}), \tag{3.111}$$

$$\Gamma_i^a = T^a \alpha_i, \quad D^{ij}(\vec{x} - \vec{y}) = \left(\delta^{ij} - \frac{\nabla^i \nabla^j}{\nabla^2} \right)_x V_T(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.112)$$

O próximo passo consiste em expandir o campo ψ em operadores de criação e aniquilação no espaço dos momentos como

$$\psi_\alpha^{cf}(\vec{x}) = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{\vec{k}, s} \left[u_{\alpha, s}^f(\vec{k}) q_s^{cf}(\vec{k}) + v_{\alpha, s}^f(\vec{k}) \bar{q}_s^{cf\dagger}(-\vec{k}) \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (3.113)$$

onde os índices c e f são índices de cor e sabor, e α é o índice espinorial de Dirac. Os operadores de campo ψ e $\psi^\dagger$ satisfazem as relações de anticomutação a tempos iguais

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha^{cf}(\vec{x}), \psi_\beta^{c'f'\dagger}(\vec{y})\} &= \delta^{cc'} \delta^{ff'} \delta_{\vec{x}, \vec{y}}, \\ \{\psi_\alpha^{cf}(\vec{x}), \psi_\beta^{c'f'}(\vec{y})\} &= \{\psi_\alpha^{cf\dagger}(\vec{y}), \psi_\beta^{c'f'\dagger}(\vec{y})\} = 0. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Uma escolha conveniente para os espinores $u_{\alpha, s}^f(\vec{k})$ e $v_{\alpha, s}^f(\vec{k})$ é a seguinte

$$u_s(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \sin \phi_k)}} \begin{pmatrix} 1 + \sin \phi_k \\ \cos \phi_k \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \end{pmatrix} \chi_s, \quad (3.115)$$

$$v_s(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \sin \phi_k)}} \begin{pmatrix} -\cos \phi_k \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ 1 + \sin \phi_k \end{pmatrix} \chi_s^c, \quad (3.116)$$

onde $\chi_s^c = -i \sigma^2 \chi_s^*$, e χ_s é um espinor de Pauli, e a função ϕ é uma função arbitrária do momento, que será determinada por uma equação de gap, como mostraremos no que segue. Para o caso de uma partícula de Dirac livre com massa m_0 , temos que $\sin \phi_k$ e $\cos \phi_k$ são dadas por

$$\sin \phi_k = \frac{m_0}{E_0(k)}, \quad \cos \phi_k = \frac{k}{E_0(k)}, \quad E_0(k) = (k^2 + m_0^2)^{1/2}. \quad (3.117)$$

Usando as formas explícitas dos espinores dados nas Eqs. (3.115) e (3.116), pode-se mostrar que as relações de anticomutação da Eq. (3.114) acima implicam nas seguintes relações de anticomutação para os operadores q e $\bar{q}$

$$\begin{aligned} \{q_s^{cf}(\vec{k}), q_{s'}^{c'f'\dagger}(\vec{k}')\} &= \{\bar{q}_s^{cf}(\vec{k}), \bar{q}_{s'}^{c'f'\dagger}(\vec{k}')\} = \delta^{cc'} \delta^{ff'} \delta_{s, s'} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \\ \{q_s^{cf}(\vec{k}), q_{s'}^{c'f'}(\vec{k}')\} &= \{\bar{q}_s^{cf}(\vec{k}), \bar{q}_{s'}^{c'f'}(\vec{k}')\} = 0, \\ \{q_s^{cf}(\vec{k}), \bar{q}_{s'}^{c'f'}(\vec{k}')\} &= \{q_s^{cf}(\vec{k}), \bar{q}_{s'}^{c'f'\dagger}(\vec{k}')\} = 0. \end{aligned} \quad (3.118)$$

O próximo passo consiste em escrever a Hamiltoniana numa forma ordenada usando ordenamento de Wick – i.e. ordem normal de todas as contrações de Wick.

O ordenamento é feito com relação aos operadores de criação e aniquilação de quarks $q^\dagger$, q e de antiquarks $\bar{q}^\dagger$, $\bar{q}$. Os operadores de aniquilação q e $\bar{q}$ aniquilam um estado de vácuo não perturbativo, o qual denotamos por $|0\rangle$,

$$q_s^{cf}(\vec{k})|0\rangle = \bar{q}_s^{cf}(\vec{k})|0\rangle = 0. \quad (3.119)$$

É importante notar que esse vácuo *não* é o vácuo aniquilado por operadores para quarks e antiquarks livres de massa m_0 . A Hamiltoniana ordenada vai ser denotada por

$$H = H_0 + H_2 + H_4, \quad (3.120)$$

onde H_0 é um *c-number*, a energia do vácuo, H_2 contém dois operadores de campo ordenados e H_4 contém quatro operadores ordenados. Especificamente, cada um desses termos é dado por

$$\begin{aligned} H_0 &= \overline{\psi^\dagger K \psi} + \overline{\psi^\dagger \Gamma \psi V \cdot \psi^\dagger \Gamma \psi}, \\ H_2 &= : \psi^\dagger K \psi : + : \psi^\dagger \Gamma \psi \cdot D \cdot \psi^\dagger \Gamma \psi : + : \overline{\psi^\dagger \Gamma \psi \cdot D \cdot \psi^\dagger \Gamma \psi} :, \\ H_4 &= : \psi^\dagger \Gamma \psi \cdot D \cdot \psi^\dagger \Gamma \psi : \end{aligned} \quad (3.121)$$

onde as barras sobre os operadores significam contrações de Wick. Isto é,

$$\begin{aligned} \overline{\psi_\alpha^{cf}(\vec{x}) \psi_\beta^{c'f'\dagger}(\vec{y})} &= \frac{1}{n^3} \sum_{s,s'} \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \left[u_{\alpha,s}^f(k) u_{\beta,s'}^{f'\dagger}(\vec{k}') \langle 0 | q_s^{cf}(\vec{k}) q_{s'}^{c'f'\dagger}(\vec{k}') | 0 \rangle \right. \\ &\quad \left. + v_{\alpha,s}^f(\vec{k}) v_{\beta,s'}^{f'\dagger}(\vec{k}') \langle 0 | \bar{q}_s^{cf\dagger}(\vec{k}) \bar{q}_{s'}^{c'f'}(k') | 0 \rangle \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\vec{k}' \cdot \vec{y}} \\ &= \delta^{cc'} \delta^{ff'} \frac{1}{n^3} \sum_{\vec{k}} \left[\sum_s u_{\alpha,s}^f(\vec{k}) u_{\beta,s}^{f\dagger}(\vec{k}) \right] e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\ &= \delta^{cc'} \delta^{ff'} \frac{1}{n^3} \sum_{\vec{k}} \left[\Lambda_+^f(\vec{k}) \right]_{\alpha\beta} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}, \\ \overline{\psi_\beta^{cf\dagger}(\vec{y}) \psi_\alpha^{c'f'}(\vec{x})} &= \delta^{cc'} \delta^{ff'} \frac{1}{n^3} \sum_{\vec{k}} \left[\sum_s v_{\alpha,s}^f(\vec{k}) v_{\beta,s}^{f\dagger}(\vec{k}) \right] e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\ &= \delta^{cc'} \delta^{ff'} \frac{1}{n^3} \sum_{\vec{k}} \left[\Lambda_-^f(\vec{k}) \right]_{\alpha\beta} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}, \end{aligned} \quad (3.122)$$

onde foram definidas as quantidades

$$\left[\Lambda_+^f(\vec{k}) \right]_{\alpha\beta} = \sum_s u_{\alpha,s}^f(\vec{k}) u_{\beta,s}^{f\dagger}(\vec{k}) = \frac{1}{2} \left[1 + \sin \phi_k^f \beta + \cos \phi_k^f \alpha \cdot \hat{k} \right]_{\alpha\beta}, \quad (3.123)$$

$$\left[\Lambda_-^f(\vec{k}) \right]_{\alpha\beta} = \sum_s v_{\alpha,s}^f(\vec{k}) v_{\beta,s}^{f\dagger}(\vec{k}) = \frac{1}{2} \left[1 - \sin \phi_k^f \beta - \cos \phi_k^f \alpha \cdot \hat{k} \right]_{\alpha\beta}. \quad (3.124)$$

Dadas as contrações, podemos então escrever para H_0 , H_2 e H_4 as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
 H_0 &= 3 \sum_{\vec{k}} \left\{ \text{Tr}[(\alpha \cdot \vec{k} + m_0^f) \Lambda_-^f(\vec{k})] + 4 \frac{1}{(an)^3} \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}'} \left\{ V_C(\vec{k} - \vec{k}') \text{Tr}[\Lambda_+^f(\vec{k}) \Lambda_-^f(\vec{k}')] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + V_T(\vec{k} - \vec{k}') \delta_T^{ij}(\vec{k} - \vec{k}') \text{Tr}[\alpha^i \Lambda_+^f(\vec{k}) \alpha^j \Lambda_-^f(\vec{k}')] \right\} \right\}, \\
 H_2 &= \sum_{\vec{x}} : \psi^{f\dagger}(\vec{x}) \left(-i\alpha \cdot \vec{\nabla} + m_0^f \right) \psi^f(\vec{x}) : \\
 &\quad + \frac{4}{3} \frac{1}{n^3} \frac{1}{2} \sum_{\vec{x}, \vec{y}} : \psi^{f\dagger}(\vec{x}) \sum_{\vec{k}} \left\{ V_C(\vec{x} - \vec{y}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} [\Lambda_+^f(\vec{k}) - \Lambda_-^f(\vec{k})] \right. \\
 &\quad \left. + D^{ij}(\vec{x} - \vec{y}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} [\alpha^i (\Lambda_+^f(\vec{k}) - \Lambda_-^f(\vec{k})) \alpha^j] \right\} \psi^f(\vec{y}) :, \\
 H_4 &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{x}, \vec{y}} : [\psi^{f\dagger}(\vec{x}) \Gamma_\mu^a \psi_\beta^f(\vec{x})] D_{ab}^{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{y}) [\psi^{f'\dagger}(\vec{y}) \Gamma^a \psi^{f'}(\vec{y})] :, \tag{3.125}
 \end{aligned}$$

onde não indicamos os índices (da representação fundamental) de cor, mas deixamos indicados os índices de sabor para maior clareza. Nas expressões acima, a notação (operadores) : significa ordem normal (operadores de criação à esquerda e aniquilação à direita), e

$$\delta_T^{ij}(\vec{k}) = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2}. \tag{3.126}$$

Também, foi usada a transformada de Fourier dos potenciais V_C e V_T usando a definição

$$V(\vec{k}) = a^3 \sum_{\vec{x}} V(\vec{x}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \tag{3.127}$$

O objetivo de se ter feito o ordenamento de Wick é para se obter parte da Hamiltoniana numa forma diagonal nos operadores de criação e aniquilação. Essa parte da Hamiltoniana é precisamente H_2 . Essa técnica foi empregada por Bogoliubov para a teoria da supercondutividade, onde os operadores que aniquilam o vácuo não perturbativo são as quase-partículas (estados correlacionados de dois elétrons), ou os pares de Cooper – aqui no presente contexto $q^\dagger$, $\bar{q}^\dagger$, q e $\bar{q}$ são os operadores. H_4 descreve a interação entre as quase-partículas.

A expressão explícita para H_0 não é relevante para a presente tese. Vamos então manipular um pouco mais a expressão para H_2 . Inicialmente, precisamos da diferença $\Lambda_+(\vec{k}) - \Lambda_-(\vec{k})$, que é dada por

$$\Lambda_+(\vec{k}) - \Lambda_-(\vec{k}) = \sin \phi_k \beta + \cos \phi_k \vec{\alpha} \cdot \hat{k}. \tag{3.128}$$

Após, substituímos na expressão para H_2 a expansão da ψ dada na Eq. (3.113) e efetuamos as integrações espaciais. Com isso, H_2 pode ser escrita como a soma de dois termos,

$$H_2 = H_2^{diag} + H_2^{anom}, \quad (3.129)$$

onde H_2^{diag} é diagonal nos operadores de criação e aniquilação,

$$H_2^{diag} = \sum_{\vec{k}} \sum_{c,s,f} \omega_k^f \left[q_s^{cf\dagger}(\vec{k}) q_s^{cf}(\vec{k}) + \bar{q}_s^{cf\dagger}(\vec{k}) \bar{q}_s^{cf}(\vec{k}) \right], \quad (3.130)$$

onde $\omega_q(k)$ é dado por

$$\begin{aligned} \omega_k &= k \cos \phi_k + m_0 \sin \phi_k \\ &+ \frac{2}{3} \frac{1}{(an)^3} \sum_{\vec{q}} \left\{ V_C(\vec{k} - \vec{q}) \left(\sin \phi_k \sin \phi_q + \cos \phi_k \cos \phi_q \hat{k} \cdot \hat{q} \right) \right. \\ &\left. + 2V_T(\vec{k} - \vec{q}) \left[\cos \phi_k \cos \phi_q - \sin \phi_k \sin \phi_q \frac{(q\hat{k} \cdot \hat{q} - k)(k\hat{k} \cdot \hat{q} - q)}{|\vec{k} - \vec{q}|^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.131)$$

O termo H_2^{anom} é conhecido como termo anômalo de Bogoliubov, e deve ser anulado para que H_2 fique na forma diagonal. Como acima para o termo diagonal, fazendo uso das expressões para $\Lambda_{\pm}$ e da expansão da ψ dada na Eq. (3.113) e efetuando integrações espaciais, obtemos para H_2^{anom} a expressão

$$H_2^{anom} = \sum_k \sum_{c f s s'} \left[G_{ss'}^f(\vec{k}) q_s^{cf\dagger}(k) \bar{q}_{s'}^{cf\dagger}(k) + \text{h.c.} \right], \quad (3.132)$$

onde

$$\begin{aligned} G_{ss'}(\vec{k}) &= u_s^\dagger(k) \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m_0 \right) v_{s'}(\vec{k}) \\ &+ \frac{2}{3} \frac{1}{(an)^3} \sum_{\vec{q}} \left\{ V_C(\vec{k} - \vec{q}) u_s^\dagger(\vec{k}) [\sin \phi_q \beta + \cos \phi_q \vec{\alpha} \cdot \hat{q}] v_{s'}(\vec{k}) \right. \\ &\left. + D^{ij}(\vec{k} - \vec{q}) u_s^\dagger(\vec{k}) \alpha^i [\sin \phi_q \beta + \cos \phi_q \vec{\alpha} \cdot \hat{q}] \alpha^j v_{s'}(\vec{k}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Usando as Eqs. (3.115) e (3.116) para os espinores $u_s(\vec{k})$ e $v_s(\vec{k})$, podemos mostrar facilmente que

$$u_s^\dagger(\vec{k}) v_{s'}(\vec{k}) = 0, \quad (3.134)$$

$$u_s^\dagger(\vec{k}) \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m_0 \right) v_s(\vec{k}) = (-m_0 \cos \phi_k + k \sin \phi_k) M_{ss'}(\hat{k}), \quad (3.135)$$

$$u_s^\dagger(\vec{k}) \left(\sin \phi_{k'} \beta + \cos \phi_{k'} \vec{\alpha} \cdot \hat{k}' \right) v_{s'}(\vec{k}) = (-\cos \phi_k \sin \phi_{k'})$$

$$+ \sin \phi_k \cos \phi_{k'} \hat{k} \cdot \hat{k}') M_{ss'}(\hat{k}), \quad (3.136)$$

$$u_s^\dagger(\vec{k}) \alpha^i \left(\sin \phi_{k'} \beta + \cos \phi_{k'} \vec{\alpha} \cdot \hat{k}' \right) \alpha^j v_{s'}(\vec{k}) = 2[-\delta^{ij} \cos \phi_k \sin \phi_{k'} \\ + \sin \phi_k \cos \phi_{k'} (\delta^{ij} \hat{k} \cdot \hat{k}' - \hat{k}^i \hat{k}'^j)] M_{ss'}(\hat{k}), \quad (3.137)$$

onde $M_{ss'}(\hat{k}) = \chi_s^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \hat{k}) \chi_{s'}$. Também, na última equação acima levamos em conta o fato de que aquela expressão será multiplicada por D^{ij} , que é simétrica nos índices i e j . Com isso, temos que $G_{ss'}(\vec{k})$ é dado por

$$G_{ss'}(\vec{k}) = \left\{ k \sin \phi_k - m_0 \cos \phi_k + \frac{2}{3} \frac{1}{(an)^3} \sum_{\vec{q}} V_C(\vec{k} - \vec{q}) (-\cos \phi_k \sin \phi_q \right. \\ + \sin \phi_k \cos \phi_q \hat{k} \cdot \hat{q}) + \frac{2}{3} \frac{1}{(an)^3} \sum_{\vec{q}} 2V_T(\vec{k} - \vec{q}) \left[-\cos \phi_k \sin \phi_q \right. \\ \left. \left. + \sin \phi_k \cos \phi_q \frac{(q\hat{k} \cdot \hat{k} - p)(k\hat{k} \cdot \hat{q} - q)}{|\vec{k} - \vec{q}|^2} \right] \right\} M_{ss'}(\hat{k}). \quad (3.138)$$

Portanto, para diagonalizar H_2 , temos que ter $G_{ss'}(\vec{k}) = 0$, o que implica na equação de gap

$$k \sin \phi_k = m_0 \cos \phi_k + \frac{2}{3} \frac{1}{(an)^3} \sum_{\vec{q}} \left\{ V_C(\vec{k} - \vec{q}) (\cos \phi_k \sin \phi_q - \sin \phi_k \cos \phi_q \hat{k} \cdot \hat{q}) \right. \\ \left. + 2V_T(\vec{k} - \vec{q}) \left[\cos \phi_k \sin \phi_q - \sin \phi_k \cos \phi_q \frac{(q\hat{k} \cdot \hat{q} - k)(k\hat{k} \cdot \hat{q} - q)}{|\vec{k} - \vec{q}|^2} \right] \right\} \quad (3.139)$$

Portanto obtivemos, com o presente formalismo, os mesmos resultados para a energia de um quark w_p e para a equação de gap que aqueles obtidos com o formalismo das equações de Schwinger-Dyson. Conforme dito acima, o objetivo de termos empregado os dois formalismos para obter os mesmos resultados não foi somente para mostrar a universalidade do resultado, mas sim para generalizar o formalismo para a situação em que os quarks estão confinados no interior de hádrons. Esse assunto será discutido no Capítulo 5, após discutirmos a representação Fock-Tani no próximo Capítulo.

Para finalizar a presente seção, para o que vem a seguir, vamos reescrever as expressões para ω_k e a equação de gap mudando de variáveis, ao invés de $\sin \phi_k$ e $\cos \phi_k$ vamos empregar as funções de massa M_k e de energia E_k dos quarks constituintes, definidas como

$$\sin \phi_k = \frac{M_k}{E_k}, \quad \cos \phi_k = \frac{k}{E_k}. \quad (3.140)$$

Note a similaridade dessas definições com a Eq. (3.117). Com as definições acima, temos que $E_k = (k^2 + M_k^2)^{1/2}$ e que os espinores u_s e v_s das Eqs. (3.115) e (3.116) podem ser reescritos como

$$u_k(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E_k + M_k}{2E_k}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E_k + M_k} \end{pmatrix} \chi_s, \quad (3.141)$$

$$v_s(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E_k + M_k}{2E_k}} \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E_k + M_k} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_s^c. \quad (3.142)$$

Como dito acima, a função M_k é a massa dos quarks constituintes que, no caso do modelo de Nambu–Jona-Lasinio ela era independente de k . Em termos dessas novas variáveis, a equação de gap pode ser reescrita como

$$M_k = m_0 + \frac{2}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left\{ V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) \left[\frac{M_q}{E_q} - \frac{M_k}{E_k} \frac{q}{k} \hat{k} \cdot \hat{q} \right] + 2 V_T(|\vec{k} - \vec{q}|) \left[\frac{M_q}{E_q} + \frac{M_k}{E_k} \frac{q}{k} \frac{(\vec{k} \cdot \vec{q} - k^2)(\vec{k} \cdot \vec{q} - q^2)}{kq|\vec{k} - \vec{q}|^2} \right] \right\}, \quad (3.143)$$

e a energia dos quarks constituintes como

$$\omega_k = \frac{k^2 + m_0 M_k}{E_k} + \frac{2}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left\{ V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) \left[\frac{M_k M_q}{E_k E_q} + \frac{\vec{k}}{E_k} \cdot \frac{\vec{q}}{E_q} \right] + 2 V_T(|\vec{k} - \vec{q}|) \left[\frac{M_k M_q}{E_k E_q} + \frac{1}{E_k E_q} \frac{(\vec{k} \cdot \vec{q} - k^2)(\vec{k} \cdot \vec{q} - q^2)}{|\vec{k} - \vec{q}|^2} \right] \right\}. \quad (3.144)$$

3.6 Um modelo de quarks constituintes

Antes de considerar a formulação da representação Fock-Tani no próximo Capítulo, vamos a seguir discutir um modelo de quarks constituintes inspirado na Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb. Para tal, vamos seguir de muito próximo a apresentação feita na tese de doutorado de Victor E. Vizcarra [18].

O objetivo é obter um modelo de quarks constituintes para a estrutura e as interações dos hádrons, tendo como base uma interação microscópica que confina a cor e realiza a quebra dinâmica da simetria quiral. Nesse modelo de quarks os bárions e mésons a baixas energias de excitação são estados ligados respectivamente de três quarks e um quark e antiquark com massas de aproximadamente 300 MeV. Essas massas são geradas pelo fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral, pela mesma interação empregada para obter as funções de onda dos bárions

e mésons. Uma vez obtidas as massas dos quarks e antiquarks e as funções de onda dos hádrons, a representação Fock-Tani permite obter uma Hamiltoniana escrita em termos de graus de liberdade hadrônicos apenas, a qual descreve as interações entre hádrons. É importante ressaltar que essa Hamiltoniana hadrônica não possui novos parâmetros, todas as suas propriedades são geradas a partir do modelo microscópico de quarks.

A equação de gap fornece a função de massa M_k , uma vez especificadas as interações V_C e V_T . O formalismo de Szczepaniak e Swanson, discutido acima, fornece uma expressão para a interação V_C e, em princípio, poderia ser aplicado para obter V_T . No entanto, até o momento não foi realizado nenhum estudo para a obtenção de V_T . Uma das razões é que o trabalho computacional envolvido para a obtenção de um potencial tal é muito pesado. Nem mesmo estudos de QCD na rede têm fornecido parametrizações para esse potencial. O que tem sido feito em estudos de QCD na rede no gauge de Coulomb, como nas Refs. [43, 44, 45, 46], é apresentar resultados para a quantidade $D^{tr}(\vec{k})$, definida como [43]

$$D_{ij}^{tr}(\vec{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) D^{tr}(\vec{k}), \quad (3.145)$$

sendo $D_{ij}^{tr}(\vec{k})$ a transformada de Fourier da função de correlação

$$D_{ij}^{tr}(\vec{x} - \vec{y}) = \langle A_i^{tr}(\vec{x}, t) A_j^{tr}(\vec{y}, t) \rangle. \quad (3.146)$$

Em ordem zero (i.e., sem correções de loops), $\Delta_T^{tr}(\vec{k})$ no formalismo de Szczepaniak e Swanson seria dado em termos de um propagador de glúons transversos $\Delta_T(k)$ como

$$D^{tr}(\vec{k}) = \int \frac{dk_4}{2\pi} \Delta_T(k) = \int \frac{dk_4}{2\pi} \frac{1}{k_4^2 + \omega_g^2} = \frac{1}{2\omega_g(k)}, \quad (3.147)$$

onde $\omega_g^2(k) = k^2 + m_g^2$, com m_g sendo a escala de massa gerada no processo de renormalização da teoria. Note que a forma de $\omega_g(k)$ indica que o propagador de glúons transversos *não* diverge para $k \rightarrow 0$, como é o caso do propagador do glúon *bare* na QCD. Portanto, dada uma parametrização para os resultados numéricos para $\Delta(k)$, poderia-se empregá-la para definir[†] $V_T(k)$ na aproximação estática (que estamos empregando na tese) como $V_T(k) = 4\pi\alpha(k) D_T(\vec{k})$, onde $\alpha(k)$ é a constante de acoplamento *running*, a qual também pode ser obtida em simulações de QCD na rede. No entanto, os resultados de QCD na rede diferem muito entre si, o que

[†]Essa é a definição usual de um potencial em termos de um propagador e a constante de acoplamento. Por exemplo, o potencial de Yukawa para a troca de um méson de massa m é dado pelo produto da constante de acoplamento g^2 e o propagador $\Delta(k) = 1/(k^2 + m^2)$, i.e. $V_{Yuk}(k) = g^2/(k^2 + m^2) = 4\pi\alpha/(k^2 + m^2)$.

inviabiliza a utilização dessa forma para $V_T(k)$ diretamente. O que pode ser feito é postular parametrizações para V_T de maneira que características importantes dos estudos na rede sejam incluídas, como o fato de que para $\lim_{k \rightarrow 0} \omega_g \neq 0$ o propagador de gluons transversos não diverge na origem, fato que é corroborado pelas simulações existentes [43, 44, 45, 46]. Além de incorporar esses fatos qualitativos, é importante que a parametrização seja flexível o suficiente para que não leve a desacordos com a fenomenologia quiral. Essa atitude foi tomada nas Ref. [18, 19, 20, 47], a saber, o comportamento no ultravioleta de V_T foi tomado igual à interação $V_s(k)$ de Szczepaniak e Swanson, e a parte de longo alcance foi tomada como sendo da forma de uma interação de Yukawa. Na presente tese, vamos seguir essa mesma atitude e escrevemos V_T na forma

$$V_T(k) = -\frac{4\pi\alpha_T}{(k^2 + \mu_0^2) \ln^\lambda(\tau + k^2/k_0^2)}. \quad (3.148)$$

Aqui, α_T , μ_0^2 e τ são parâmetros ajustáveis, e os parâmetros λ e k_0 são dados pelo comportamento assintótico das soluções com $r = 0$ e $r = 1/2$ para V_C de Szczepaniak e Swanson. Especificamente, para a solução com $r = 0$, $\lambda = 1.42$ e $k_0 = m_g$, e para a solução com $r = 1/2$, $\lambda = 3/2$ e $k_0 = \Lambda_{QCD}$. Conforme será discutido no Capítulo 6, apesar de serem ajustáveis, não há grande liberdade de variação nos parâmetros α_T , μ_0^2 e τ para observáveis quirais tenham valores aceitáveis fisicamente.

Para obter as funções de onda dos estados ligados de um hádron vamos empregar o método variacional. Isto é, empregamos uma forma Gaussiana para essas funções de onda, em que as larguras das Gaussianas são obtidas minimizando o valor esperado da Hamiltoniana nos estados de um hádron. Para simplificar a apresentação das extensas fórmulas, bem como para preparar a notação para o próximo Capítulo, inicialmente escrevemos a parte da Hamiltoniana relevante para a obtenção dos estados ligados numa notação compacta como

$$H_{qq} \equiv H_2 + H_4 = T(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu) \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \quad (3.149)$$

$$+ \frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma, \quad (3.150)$$

onde os índices μ, ν, σ e ρ identificam conjuntamente os números quânticos espaciais, cor, spin e sabor dos quarks e antiquarks, $\mu = \{\vec{k}, c, s, f\}$. Está implícita uma integral ou soma sobre índices repetidos. As expressões para $T(\mu)$, V_{qq} , $V_{q\bar{q}}$ e $V_{\bar{q}\bar{q}}$ são dadas em termos das interações V_C e V_T e dos espinores $u_s^f(\vec{k})$ e $v_s^f(\vec{k})$, as quais serão apresentadas mais a seguir. Em termos dessa notação compacta, as relações de anticomutação dos operadores de quark e antiquark dadas na Eq. (3.118) podem

ser escritas como

$$\begin{aligned}\{q_\mu, q_\nu^\dagger\} &= \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu\nu}, \\ \{q_\mu, q_\nu\} &= \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu\} = 0, \\ \{q_\mu, \bar{q}_\nu\} &= \{q_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = 0.\end{aligned}\quad (3.151)$$

O estado de um bárion e o estado de um méson são escritos em termos de operadores de criação $B_\alpha^\dagger$ e $M_\alpha^\dagger$ como

$$|\alpha\rangle = B_\alpha^\dagger |0\rangle, \quad (3.152)$$

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger |0\rangle, \quad (3.153)$$

onde $B_\alpha^\dagger$ e $M_\alpha^\dagger$ são os operadores de criação de um bárion e de um méson, escritos em termos dos operadores de criação de quarks e antiquarks constituintes como

$$B_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3!}} \Psi_\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3} q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger, \quad (3.154)$$

$$M_\alpha^\dagger = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger. \quad (3.155)$$

Nessas definições, $|0\rangle$ é o estado de vácuo em que a simetria quiral está quebrada dinamicamente, e $\Psi_\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3}$ e $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ são as amplitudes no espaço de Fock do bárion e do méson, respectivamente. O índice α representa conjuntamente os números quânticos espaciais e de spin e sabor do hádron, $\alpha = \{\vec{P}, spin, sabor\}$, onde $\vec{P}$ é o momento do centro de massa do hádron. Empregando as relações de anticomutação da Eq. (3.151), obtemos que

$$\langle\alpha|\alpha'\rangle = \langle 0|B_\alpha B_{\alpha'}^\dagger|0\rangle = \Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_{\alpha'}^{\mu_1\mu_2\mu_3}, \quad (3.156)$$

$$\langle\alpha|\alpha'\rangle = \langle 0|M_\alpha M_{\alpha'}^\dagger|0\rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_{\alpha'}^{\mu\nu}. \quad (3.157)$$

É conveniente empregar amplitudes ortonormalizadas, i.e.

$$\Psi_\beta^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_{\beta'}^{\mu_1\mu_2\mu_3} = \delta_{\beta\beta'}, \quad (3.158)$$

$$\Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_{\alpha'}^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (3.159)$$

Essas amplitudes podem ser escritas como

$$\Psi_\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3}(\vec{P}_\alpha) = \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \frac{\epsilon^{c_1c_2c_3}}{\sqrt{6}} \frac{T_\alpha^{I_1I_2I_3}}{\sqrt{18}} \varphi_{\vec{P}}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) \quad (3.160)$$

e

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu}(\vec{P}_\alpha) = \frac{\delta^{c_1c_2}}{\sqrt{3}} \chi_\alpha^{I_1I_2} \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) \phi(\vec{k}_1, \vec{k}_2). \quad (3.161)$$

Nessas expressões, $\vec{P}$ é o momento do centro-de-massa do hádron, e T_α são coeficientes de Clebsch-Gordan de spin-sabor, em que $I = \{s, f\}$ denota conjuntamente índices de spin e sabor dos quarks – ver Apêndice B. Da mesma forma $\epsilon^{c_1 c_2 c_3}$ (tensor de Levi-Civita) e $\delta^{c_1 c_2}$ (delta de Kronecker) são os coeficientes de Clebsch-Gordan de cor.

Explicitamente, o ansatz Gaussiano para a amplitude $\varphi_{\vec{P}}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)$ pode ser escrito como

$$\varphi_{\vec{P}}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) = \left(\frac{3}{\pi^2 \alpha^4} \right)^{3/4} \exp \left[- \sum_{i=1}^3 \frac{(\vec{k}_i - \vec{P}/3)^2}{2\alpha^2} \right], \quad (3.162)$$

e o correspondente ansatz para $\phi(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ é

$$\phi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \left(\frac{1}{\pi \beta^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{k_{rel}^2}{8\beta^2} \right), \quad (3.163)$$

onde

$$\vec{k}_{rel} = M_1 \vec{k}_1 - M_2 \vec{k}_2, \quad (3.164)$$

com

$$M_1 = \frac{2M_{\bar{q}}}{M_q + M_{\bar{q}}}, \quad M_2 = \frac{2M_q}{M_q + M_{\bar{q}}}. \quad (3.165)$$

Note que a combinação acima de massas e momentos é a definição usual de momento relativo para o caso de massas diferentes. Nestas expressões, os parâmetros α e β são parâmetros variacionais, determinados tais que a massa de um hádron no estado $|\alpha\rangle$

$$M_\alpha = \frac{\langle \alpha | (H_2 + H_4) | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \Big|_{\vec{P}_\alpha=0}. \quad (3.166)$$

seja um mínimo em relação ao parâmetro da Gaussiana correspondente.

Conforme já mencionado, o modelo para a estrutura e interações hadrônicas que empregamos nessa tese é um modelo de baixas energias de excitação. Essencialmente estamos interessados em estados ligados em seu estado fundamental. Para esses estados, as amplitudes φ e ϕ são dominadas pelas componentes de baixos momentos, pois suas propriedades são determinadas essencialmente pela parte de confinamento de $V_C(k)$, a qual é dominada por momentos $q \simeq 0$ – V_T é importante para a equação de gap e as interações entre hádrons. Essa dominância dos momentos baixos nas amplitudes φ e ϕ significa que elas decaem muito rapidamente para altos momentos e, portanto, nas integrais envolvendo os espinores $u_s(\vec{k})$ e $v_s(\vec{k})$, as componentes de altos momentos são fortemente suprimidas. Essa observação nos permite fazer uma aproximação que, apesar de não ser essencial nem fundamental, nos permite derivar

uma grande variedade de resultados analiticamente. A aproximação consiste em expandir a função de massa constituinte M_k como

$$M_k = M - M_1 k - M_2 k^2 + \mathcal{O}(k^3), \quad (3.167)$$

e reter nos espinores $u_s(\vec{k})$ e $v_s(\vec{k})$ somente termos $\mathcal{O}(k^2/M^2)$. Isso leva às seguintes expressões para os espinores

$$u_s(\vec{k}) \approx \left(1 - \frac{k^2}{8M^2} \right) \chi_s, \quad (3.168)$$

e

$$v_s(k) \approx \left(\begin{array}{c} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{2M} \\ 1 - \frac{k^2}{8M^2} \end{array} \right) \chi_s^c. \quad (3.169)$$

Substituindo estas expressões na expressão para H_4 , as interações V_{qq} , $V_{q\bar{q}}$ e $V_{\bar{q}\bar{q}}$ resultam numa forma como a da Hamiltoniana de Breit da QED, com o potencial $1/k^2$ da QED substituído pelas interações $V_C(k)$ na parte de Coulomb, e $V_T(k)$ na parte transversa. A interação de Breit contém uma série termos que dependem somente do momento transferido $q = k_\mu - k_\sigma$, termos que dependem dos operadores de spin – spin-spin, tensorial e spin-órbita – e termos que dependem do inverso do produto das massas dos quarks na forma $q^2/M_\mu M_\nu$, $(\vec{q} \cdot \vec{k}_\mu)(\vec{q} \cdot \vec{k}_\nu)/q^2 M_\mu M_\nu$ e $(\vec{k}_\mu \cdot \vec{k}_\nu)/q^2 M_\mu M_\nu$. Para os objetivos nessa tese, somente os termos dependentes de $q = k_\mu - k_\sigma$ e spin-spin são relevantes, os outros termos, ou não contribuem porque estamos interessados nos estados fundamentais (esfericamente simétricos), ou são suprimidos em integrais angulares.

Nesta aproximação, as massas dos núcleons ($m_u = m_d$) e dos mésons chamados ($u\bar{c}$) são dadas respectivamente por

$$M_N \simeq 3m_u + 3 \frac{1}{M_u} \left(1 - \frac{m_u}{M_u} \right) \alpha^2 - 2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V_C(q) \left[e^{-q^2/2\alpha^2} - \frac{M_u(q)}{E_u(q)} \right], \quad (3.170)$$

$$M_D = m_u + m_c + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{M_u} \left(1 - \frac{m_u}{M_u} \right) + \frac{1}{M_c} \left(1 - \frac{m_c}{M_c} \right) \right] \beta^2 - \frac{2}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V_C(q) \left[e^{-q^2/4\beta^2} - \frac{M_u(q)}{E_u(q)} - \frac{M_c(q)}{E_c(q)} \right], \quad (3.171)$$

onde explicitamos o sabor dos quarks. Algumas observações são necessárias aqui. Inicialmente, é importante notar que a divergência infravermelha devida ao confinamento que está presente tanto na energia de um quark ω_k e como na interação

quark-quark, cancela exatamente nos integrandos acima, pois para $q \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(q) \left[e^{-aq^2} - \frac{M_q}{E_q} \right] = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dq q^2 V_C(q) \left(e^{-aq^2} - \frac{M_q}{E_q} \right) \\
 & \rightarrow \int_0^\infty dq q^2 \frac{1}{q^4} \left[1 - aq^2 + \frac{a^2}{2}q^4 + \mathcal{O}(q^3) - 1 + \frac{3M_1^2}{2M^2}q^2 + \mathcal{O}(q^3) \right] \\
 & \rightarrow \int_0^\infty dq \mathcal{O}(q),
 \end{aligned} \tag{3.172}$$

onde $a = 1/2\alpha^2$ ou $a = 1/4\beta^2$. Uma outra observação é sobre os termos M_q/E_q , que vêm dos termos que dependem de V_C e V_T na Eq. (3.144) para a energia de um quark. Esses termos não vêm multiplicados pelas amplitudes Gaussianas e, portanto, não pode ser expandido como os outros termos que vêm multiplicados por essas amplitudes. No entanto, o termo proporcional a V_C pode ser colocado na forma simples como aparece nas Eqs. (3.171) e (3.171), mas o termo envolvendo V_T não pode ser tratado da mesma forma. Como a contribuição da interação V_T não é importante no infravermelho[†], ela foi desprezada nas equações para M_N e M_D . Claramente, toda essa discussão surge simplesmente por causa da expansão em baixos momentos, a qual, como dito acima não é essencial, mas simplifica muito os cálculos. Por outro lado, esses termos que não vêm multiplicados pelas amplitudes Gaussianas são irrelevantes para a obtenção de α e β . Como será visto mais adiante, α e β é que são os parâmetros realmente importantes tanto para o comportamento da quebra dinâmica da simetria quiral no meio hadrônico, como também para as interações efetivas hádron-hádron.

No próximo Capítulo vamos discutir o formalismo da representação Fock-Tani, tendo como base a Hamiltoniana da Eq. (3.150) e os estados hadrônicos escritos como nas Eqs. (3.153) e (3.153).

[†]Em geral, em termos de estrutura hadrônica V_T , é importante para descrever os desdobramentos hiperfinos dos estados hadrônicos [47]. No entanto, para obter uma massa constituinte da ordem de $M_{k=0} = 300$ MeV e para as interações hádrons, V_T é importante, como será visto mais adiante.

Capítulo 4

O Formalismo da representação Fock-Tani.

O objetivo do presente Capítulo é revisar o formalismo da representação Fock-Tani (RFT). A motivação para o emprego deste formalismo está relacionada com o fato de o emprego da teoria quântica de campos (TQC) ser de muito difícil aplicação para sistemas de muitas partículas compostas – como a matéria hadrônica. Conforme já dito anteriormente, as técnicas usuais da TQC – como funções de Green, ordenamentos normais e contrações de Wick, diagramas de Feynman, etc – estão baseadas em operadores de campos que satisfazem relações de comutação ou anticomutação canônicas. No entanto, operadores de campos que representam partículas compostas *não* satisfazem relações de comutação canônicas. A idéia geral do método da RFT é fazer um mapeamento do espaço de Hilbert físico para um espaço de Hilbert *ideal*, onde as partículas compostas são representadas por operadores de campo *ideais* que obedecem regras de comutação ou anticomutação canônicas. Toda a informação sobre a estrutura interna é transferida para uma Hamiltoniana efetiva que envolve explicitamente os operadores de campo ideais. A RFT foi inspirada no trabalho de S. Tani [48], o qual tratou o problema do espalhamento por um estado ligado. O trabalho de Tani foi generalizado por M.D. Girardeau [13] empregando o formalismo de segunda quantização, tendo em vista aplicações em problemas de Física Atômica. A generalização do formalismo para problemas de Física Hadrônica foi implementada nas Refs. [14, 15, 16, 17].

Nas Seções a seguir vamos revisar o formalismo da RFT. Nossa apresentação está fortemente baseada na Ref. [17]. Por motivos didáticos vamos, primeiramente, discutir a implementação do formalismo para um sistemas de mésons, a seguir faremos a discussão para um sistema formado por bárions e finalizaremos o presente capítulo com uma discussão do formalismo da RFT para o caso geral.

4.1 Representação Fock-Tani para mésons

Conforme dito acima, a idéia da RFT está baseada numa troca de representação, de tal forma que os operadores associados a hádrons sejam redescritos em termos de operadores de hádrons ideais que satisfazem relações de comutação ou anticomutação canônicas. Os efeitos relacionados à estrutura interna dos hádrons são transferidos para um Hamiltoniano efetivo.

A mudança de representação consiste na troca do estado de um méson

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger |0\rangle \rightarrow m_\alpha^\dagger |0\rangle, \quad (4.1)$$

onde $M_\alpha^\dagger$ é o operador de criação de um méson físico e $m_\alpha^\dagger$ é o operador de criação de um *méson ideal*. Os operadores de criação e aniquilação ideais $m_\alpha^\dagger$ e m_α satisfazem, por definição relações de comutação canônicas

$$\begin{aligned} [m_\alpha, m_\beta] &= [m_\alpha^\dagger, m_\beta^\dagger] = 0, \\ [m_\alpha, m_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A notação que estamos empregando foi introduzida na Seção 3.6, em que os índices $\alpha, \beta, \dots$ indicam coletivamente todos os números quânticos necessários para especificar o estado de um méson, como a energia e o momento do centro-de-massa do méson, e números quânticos de spin e isospin (sabor). A discussão na presente Seção será limitada para o caso em que $M_\alpha^\dagger$ é dado como na Eq. (3.155), i.e. para o caso de mésons compostos por um quark e um antiquark. Os operadores de quark e antiquark satisfazem as relações de anticomutação canônicas, dadas na Eq. (3.151). Para estados como esses, os operadores de criação e aniquilação $M_\alpha^\dagger$ e M_α satisfazem as seguintes relações de comutação *não canônicas*

$$\begin{aligned} [M_\alpha, M_\beta] &= [M_\alpha^\dagger, M_\beta^\dagger] = 0, \\ [M_\alpha, M_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

com

$$\Delta_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu + \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\rho\nu} q_\rho^\dagger q_\mu, \quad (4.4)$$

onde as amplitudes $\Phi_\beta^{\rho\nu}$ são ortonormalizadas – Eq. (3.159). Adicionalmente temos as relações de comutação

$$\begin{aligned} [q_\mu, M_\alpha] &= [\bar{q}_\nu, M_\alpha] = 0, \\ [q_\mu, M_\alpha^\dagger] &= \delta_{\mu\mu'} \Phi_\alpha^{\mu'\nu} \bar{q}_\mu^\dagger, \quad [\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger] = -\delta_{\nu\nu'} \Phi_\alpha^{\mu\nu'} \bar{q}_\mu^\dagger. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Precisamente por causa dessas relações de comutação não canônicas é que os métodos usuais da TQC não são diretamente aplicáveis aos operadores $M_\alpha^\dagger$ e M_α . O $\Delta_{\alpha\beta}$ na Eq.(4.4) representa a manifestação da natureza composta e da estrutura interna dos mésons e é o responsável pelas complicações mencionadas.

Como dito, a idéia da RFT é mudar de representação, em que os operadores de hádrons são redescritos por operadores que satisfazem relações de comutação canônicas. As características principais da RFT são*:

1. A transformação é implementada por um operador unitário U , tal que,

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &\longrightarrow |\Omega\rangle = U^{-1}|\Omega\rangle, \\ O &\longrightarrow O_{\text{FT}} = U^{-1}OU, \end{aligned} \quad (4.6)$$

em que $|\Omega\rangle$ é um estado arbitrário e O é um operador arbitrário, ambas quantidades expressas em termos de operadores de quark e antiquark $q, q^\dagger, \bar{q}, \bar{q}^\dagger$, e $|\Omega\rangle$ e O_{FT} são as quantidades correspondentes na RFT. Uma vez que U é unitário, temos que

$$\begin{aligned} \langle\Omega|\Omega\rangle &= (\Omega|\Omega), \\ \langle\Omega|O|\Omega\rangle &= (\Omega|O_{\text{FT}}|\Omega). \end{aligned} \quad (4.7)$$

2. A transformação é definida tal que um estado de um méson $|\alpha\rangle$ é redescrito como na Eq. (4.1), i.e.

$$|\alpha\rangle \longrightarrow U^{-1}|\alpha\rangle \equiv |\alpha\rangle = m_\alpha^\dagger|0\rangle, \quad (4.8)$$

em que os operadores ideais satisfazem a Eq. (4.2). O estado $|0\rangle$ é o estado de vácuo tanto dos operadores q e m na RFT - uma definição precisa de $|0\rangle$ será dada logo a seguir. Também, na nova representação os operadores $q^\dagger$ e q são cinematicamente independentes dos operadores $m_\alpha^\dagger$ e m_α , i.e.

$$[q_\mu, m_\alpha] = [q_\mu, m_\alpha^\dagger] = 0. \quad (4.9)$$

Compare com a Eq. (4.5).

3. Um estado de n -mésons, $|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle$, construído com pacotes de onda que não se superpõem entre si é transformado num estado de n mésons ideais $|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle$:

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle \rightarrow U^{-1}|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = m_{\alpha_1}^\dagger \dots m_{\alpha_n}^\dagger|0\rangle. \quad (4.10)$$

*Como dito, vamos seguir de perto a discussão da Ref. [17].

Esta propriedade é particularmente importante para espalhamentos méson-méson, pois os estados assintóticos não se superpõem. Obviamente, para o caso em que as estruturas internas dos mésons se superpõem consideravelmente, a Eq. (4.10) não é válida.

4. Dada a Hamiltoniana em termos de operadores de quark e antiquark, como por exemplo na Eq. (3.150), o Hamiltoniano transformado na RFT pode ser escrito genericamente como

$$H \rightarrow H_{\text{FT}} = U^{-1} H U \equiv H_{\text{FT}}^{(o)} + V_{\text{FT}}. \quad (4.11)$$

Aqui, $H_{\text{FT}}^{(o)}$ é a parte não interagente, i.e. ela contém a energia de um quark e um antiquark da Hamiltoniana original, e a energia de um méson (que descreve a propagação dos mésons no espaço livre). V_{FT} descreve as interações entre os mésons e os quarks. A parte de interação entre os quarks e antiquarks em V_{FT} não é capaz de ligar essas partículas num méson, a energia de ligação de um quark e antiquark num estado de um méson está descrita em $H_{\text{FT}}^{(o)}$.

A construção do operador unitário U é feita da seguinte maneira. Seja $\mathcal{F}$ o espaço de Fock físico, gerado por todas as combinações lineares de estados construídos a partir de produtos de operadores $q^\dagger$ e $\bar{q}^\dagger$ na forma

$$q_{\mu_1}^\dagger \cdots q_{\mu_l}^\dagger \bar{q}_{\nu_1}^\dagger \cdots \bar{q}_{\nu_m}^\dagger |0\rangle, \quad (4.12)$$

com l e m arbitrários, e $|0\rangle$ é o estado de vácuo definido pela Eq. (3.119). Agora introduz-se um outro espaço de Hilbert, independente de $\mathcal{F}$, denotado por $\mathcal{H}$ e denominado de *espaço de hádron ideal*. O espaço $\mathcal{H}$ é formado por todas as combinações lineares de estados construídos a partir de produtos de operadores de mésons ideais $m^\dagger$ na forma

$$m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{H}}, \quad (4.13)$$

onde $|0\rangle_{\mathcal{H}}$ é o estado de vácuo de $\mathcal{H}$,

$$m_\alpha |0\rangle_{\mathcal{H}} = 0. \quad (4.14)$$

A seguir, defini-se o *espaço ideal de estados* como sendo o produto direto do espaço de Fock $\mathcal{F}$ e o espaço de hadron ideal $\mathcal{H}$, i.e. $\mathcal{I} = \mathcal{F} \times \mathcal{H}$. Como dito acima, os operadores de quarks e antiquarks e mésons ideais são cinematicamente independentes, satisfazendo a Eq. (4.9) em $\mathcal{I}$. As relações de anticomutação da Eq. (3.151) e de comutação da Eq. 4.3), definidas inicialmente no espaço $\mathcal{F}$, e aquelas da Eq. (4.2),

inicialmente definidas em $\mathcal{H}$, são também válidas em $\mathcal{I}$. O estado de vácuo do espaço $\mathcal{I}$ é o produto direto dos estados de vácuo de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H}$. Para simplificar a notação, empregamos o símbolo $|0\rangle$ para denotar o produto

$$|0\rangle \equiv |0\rangle \times |0\rangle_{\mathcal{H}}. \quad (4.15)$$

Assim, o estado $|0\rangle$ é o estado de vácuo tanto dos operadores de quark e antiquark como dos operadores de mésons ideais

$$q_\mu|0\rangle = \bar{q}_\mu|0\rangle = m_\alpha|0\rangle = 0, \quad (4.16)$$

em que os operadores de quark e antiquark atuam sobre $|0\rangle$ e os operadores de mésons ideais operam sobre $|0\rangle_{\mathcal{H}}$.

O próximo passo agora é estabelecer uma correspondência um-a-um entre os estados de partículas compostas em $\mathcal{F}$ e os estados ideais de um subespaço de $\mathcal{I}$. Em $\mathcal{I}$, existe um subespaço que é isomórfico[†] a $\mathcal{F}$, a saber, o espaço $\mathcal{I}_0$ consistindo daqueles estados $|\Omega\rangle$ sem mésons ideais,

$$m_\alpha|\Omega\rangle = 0. \quad (4.17)$$

O significado disso é que os mésons ideais são *modos redundantes* em $\mathcal{I}_0$ – a Eq. (4.17) acima é uma condição de vínculo que deve ser imposta para que não haja dupla contagem de graus de liberdade.

Dadas essas definições um tanto formais, cabe a pergunta: qual é a forma do operador U ? Na formulação original [13], U era dado por

$$U = \exp\left(-\frac{\pi}{2}F\right) \quad (4.18)$$

com

$$F = \sum_{\alpha} (m_{\alpha}^{\dagger} M_{\alpha} - M_{\alpha}^{\dagger} m_{\alpha}). \quad (4.19)$$

Com U nessa forma, pode-se mostrar facilmente que a transformação implementada por U possui as características 1) a 4) acima. Note que U atua em $\mathcal{I}$, mas sua atuação não está definida em $\mathcal{F}$, pois os graus de liberdade de mésons ideais que aparecem no operador F da Eq. (4.19) não estão definidos em $\mathcal{F}$. No entanto, a atuação de U está definida sobre estados em $\mathcal{I}_0$, que é isomórfico a $\mathcal{F}$. A imagem $\mathcal{F}_{\text{FT}} = U^{-1}\mathcal{I}_0$ de $\mathcal{I}_0$ é o subespaço de $\mathcal{I}$ que consiste de todos os estados $|\Omega\rangle$ na nova representação, relacionados aos estados $|\Omega\rangle$ de $\mathcal{I}_0$ através da transformação da Eq. (4.6)

$$|\Omega\rangle = U^{-1}|\Omega\rangle. \quad (4.20)$$

[†]Isomórfico significa *essencialmente o mesmo*.

No subespaço $\mathcal{F}_{\text{FT}}$, a equação de vínculo da Eq. (4.17) é transformada em

$$U^{-1}m_\alpha U|\Omega\rangle = 0. \quad (4.21)$$

Com isso, qualquer cálculo no espaço de Fock original $\mathcal{F}$ é equivalente a um cálculo no espaço Fock-Tani $\mathcal{F}_{\text{FT}}$, desde que a Eq. (4.21) seja satisfeita.

Resumindo: a idéia é trabalhar no espaço $\mathcal{F}_{\text{FT}}$, onde todos os operadores de campo – de quarks, antiquarks e de mésons ideais – satisfazem relações de comutação e anticomutação canônicas. O problema fundamental é identificar quais são os estados relevantes em $\mathcal{F}_{\text{FT}}$ para um dado problema em questão. Por exemplo, para problemas de espalhamento, em que a matriz S é construída a partir de estados assintóticos em que os pacotes de onda das partículas compostas não se superpõem, os estados relevantes são como os da Eq. (4.10), e obviamente satisfazem a equação de vínculo da Eq. (4.17). Da mesma forma, estados da forma

$$|\Omega\rangle = m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle, \quad (4.22)$$

também satisfazem a Eq. (4.17). Note que nesse caso, o estado correspondente no espaço de Fock $\mathcal{F}$, $|\Omega\rangle = U|\Omega\rangle$, as funções de onda dos mésons compostos podem ter superposição considerável.

Para efetuar um cálculo na prática, precisamos agora obter os operadores de quark na nova representação, i.e. em $\mathcal{F}_{\text{FT}}$. Isso é necessário porque os operadores tais como a Hamiltoniana, densidades de carga, etc em $\mathcal{F}$ são dados em termos dos operadores $q, \bar{q}, q^\dagger$ e $\bar{q}^\dagger$ e, por isso, é preciso conhecê-los no espaço $\mathcal{F}_{\text{FT}}$, onde os cálculos serão efetuados. Ou seja, precisamos calcular

$$q_{\text{FT}} = U^{-1} q U, \quad \bar{q}_{\text{FT}} = U^{-1} \bar{q} U. \quad (4.23)$$

Em geral, não é possível obter expressões fechadas para q_{FT} e $\bar{q}_{\text{FT}}$. No entanto, é possível escrevê-las como uma expansão em potências das amplitudes $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ e truncar essa expansão em alguma ordem. Termos de alta ordem levam a forças de muitos corpos quando as expansões de q_{FT} e $\bar{q}_{\text{FT}}$ são substituídos na Hamiltoniana, por exemplo. Forças de muitos corpos são importantes em sistemas a altas densidades, para os quais a superposição entre as partículas compostas é significativa. Para sistemas a densidades relativamente baixas, como as que vamos considerar na presente tese, o truncamento da expansão da Eq. (4.23) tal que a Hamiltoniana contenha somente forças de dois corpos é suficiente. Há diferentes técnicas para calcular essa expansão, como a de múltiplos-comutadores, em que a exponencial que define U é expandida em potências de F , o que resulta numa série de múltiplos-comutadores [13]. No entanto, essa técnica não é prática quando termos de ordem

mais alta na expansão são necessários, como a que é necessária para obter interações hádron-hádron que estamos interessados nessa tese. Uma técnica alternativa, mais prática e sistemática, é conhecida como *técnica das equações de movimento* [13, 17]. Nessa, para qualquer operador $\mathcal{O}$, define-se

$$\mathcal{O}_{\text{FT}} = \exp(-tF) \mathcal{O} \exp(tF) = \mathcal{O}(t), \quad (4.24)$$

em que t é uma parâmetro. Diferenciando a Eq. (4.24) com relação a t , obtem-se uma *equação de movimento* para $\mathcal{O}$,

$$\frac{d\mathcal{O}(t)}{dt} = [\mathcal{O}(t), F], \quad (4.25)$$

com a *condição inicial*

$$\mathcal{O}(0) = 0. \quad (4.26)$$

Os operadores transformados são, então, obtidos a partir da solução das Eqs. (4.25) e (4.26) para $t = -\pi/2$:

$$\mathcal{O}_{\text{FT}} = U^{-1} \mathcal{O} U = \mathcal{O}(-\pi/2). \quad (4.27)$$

Em particular, para os operadores de quark e antiquark q e $\bar{q}$, temos

$$\frac{dq_\mu(t)}{dt} = [q_\mu(t), F] = -\delta_{\mu\mu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \bar{q}_\nu^\dagger(t) m_\alpha(t), \quad (4.28)$$

$$\frac{d\bar{q}_\nu(t)}{dt} = [\bar{q}_\nu(t), F] = \delta_{\nu\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} q_\mu^\dagger(t) m_\alpha(t). \quad (4.29)$$

Estas, por sua vez, envolvem $m_\alpha(t)$. Portanto, precisamos da equação de movimento para $m_\alpha(t)$, a qual é obtida da definição de F na Eq. (4.18):

$$\frac{dm_\alpha(t)}{dt} = [m_\alpha(t), F] = M_\alpha(t). \quad (4.30)$$

Para fechar o sistema de equações, precisa-se ainda da equação para $M_\alpha(t)$, a qual é dada por

$$\frac{dM_\alpha(t)}{dt} = [O_\alpha(t), F] = -[\delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}(t)] m_\beta(t). \quad (4.31)$$

Essas equações, juntamente com as equações para os operadores hermiteano-conjugados, são resolvidas iterativamente: partindo de uma aproximação de ordem zero, em que todos os efeitos de superposição entre os hádrons é desprezada (i.e. desprezamos os termos contendo $\Delta_{\alpha\beta}$ e $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ nas Eqs. (4.28), (4.29) e (4.31)), prossegue-se colecionando termos de mesma ordem nas amplitudes Φ_α e Φ_α^* . Escreve-se para

cada expansão as séries

$$\begin{aligned} q_\mu(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} q_\mu^{(i)}(t), & \bar{q}_\mu(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{q}_\mu^{(i)}(t), \\ m_\alpha(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} m_\alpha^{(i)}(t), & M_\alpha(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} M_\alpha^{(i)}(t). \end{aligned} \quad (4.32)$$

O índice i denota a potência com que aparecem as Φ_α e Φ_α^* em cada termo. Para obter um critério consistente de contagem de potências [13], as amplitudes Φ_α e Φ_α^* que entram implicitamente na definição do operador $M_\alpha^\dagger$, Eq. (4.1), não são contadas.

Em ordem zero, temos então as seguintes equações:

$$\frac{dq_\mu^{(0)}(t)}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{q}_\nu^{(0)}(t)}{dt} = 0, \quad (4.33)$$

$$\frac{dM_\alpha^{(0)}(t)}{dt} = -m_\alpha^{(0)}(t), \quad (4.34)$$

$$\frac{dm_\alpha^{(0)}(t)}{dt} = M_\alpha^{(0)}(t). \quad (4.35)$$

Usando a Eq. (4.26), obtem-se que as soluções dessas equação são dadas por

$$\begin{aligned} q_\mu^{(0)}(t) &= q_\mu, \\ \bar{q}_\nu^{(0)}(t) &= \bar{q}_\nu, \\ m_\alpha^{(0)}(t) &= m_\alpha \cos t + M_\alpha \sin t, \\ M_\alpha^{(0)}(t) &= M_\alpha \cos t - m_\alpha \sin t. \end{aligned} \quad (4.36)$$

A essa ordem, os operadores de mésons compostos se comportam como operadores de mésons elementares, pois a transformação de M_α a m_α tem a interpretação de uma rotação de $\pi/2$ no espaço $\mathcal{I}$. As equações em primeira ordem são dadas por

$$\frac{dq_\mu^{(1)}(t)}{dt} = -\delta_{\mu\mu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t), \quad (4.37)$$

$$\frac{d\bar{q}_\nu^{(1)}(t)}{dt} = \delta_{\nu\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} q_{\mu_1}^{\dagger(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t), \quad (4.38)$$

$$\frac{dM_\alpha^{(1)}(t)}{dt} = -m_\alpha^{(1)}(t), \quad (4.39)$$

$$\frac{dm_\alpha^{(1)}(t)}{dt} = M_\alpha^{(1)}(t). \quad (4.40)$$

A partir das Eqs. (4.26) e Eq. (4.32), e usando o fato que a condição inicial já foi empregada na solução de ordem zero, obtem-se

$$q_\mu^{(i)}(t=0) = \bar{q}_\mu^{(i)}(t=0) = m_\alpha^{(i)}(t=0) = M_\alpha^{(i)}(t=0) = 0, \text{ for } i \geq 1. \quad (4.41)$$

Com isso, obtem-se que as soluções em primeira ordem são dadas por

$$q_\mu^{(1)}(t) = -\delta_{\mu\mu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger [m_\alpha \sin t + M_\alpha (1 - \cos t)], \quad (4.42)$$

$$\bar{q}_\nu^{(1)}(t) = \delta_{\nu\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} q_{\mu_1}^\dagger [m_\alpha \sin t + M_\alpha (1 - \cos t)], \quad (4.43)$$

$$m_\alpha^{(1)}(t) = 0, \quad M_\alpha^{(1)}(t) = 0. \quad (4.44)$$

Uma dificuldade com esse procedimento iterativo é que as soluções a partir da segunda ordem dão origem a termos seculares – termos que envolvem polinômios em t – além das funções trigonométricas. Esses termos introduzem problemas, como a discrepância *post-prior* em problemas de espalhamento, i.e. a amplitude de espalhamento não é simétrica quando se troca a ordem das partículas compostas nos estados inicial e final. A origem dos termos seculares está na assimetria das equações de movimento para $m_\alpha(t)$ e $M_\alpha(t)$ dadas pelas Eqs. (4.30) e (4.31): o termo proporcional a $\Delta_{\alpha\beta}$ torna as equações assimétricas. Uma das soluções ao problema consiste [49] em generalizar o gerador F como

$$F = \sum_\alpha (m_\alpha^\dagger O_\alpha - O_\alpha^\dagger m_\alpha), \quad (4.45)$$

em que o operador O_α é uma função dos operadores de quark e antiquark, escolhido de maneira que

$$[O_\alpha, O_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.46)$$

Isso leva a equações simétricas para m_α e O_α :

$$\frac{dm_\alpha(t)}{dt} = [m_\alpha(t), F] = O_\alpha(t), \quad (4.47)$$

$$\frac{dO_\alpha(t)}{dt} = [O_\alpha(t), F] = -m_\alpha(t), \quad (4.48)$$

com soluções dadas por

$$m_\alpha(t) = O_\alpha \sin t + m_\alpha \cos t, \quad (4.49)$$

$$O_\alpha(t) = O_\alpha \cos t - m_\alpha \sin t. \quad (4.50)$$

Claramente, os operadores transformados envolvem apenas funções trigonométricas de t , como pode ser visto na Ref. [17]. Nessa mesma referência são obtidos explicitamente ordem-a-ordem os operadores O_α .

Para o que se segue na presente tese, não precisaremos ir adiante na discussão da representação Fock-Tani para mésons. Na próxima Seção vamos apresentar os resultados para um sistema contendo somente bárions. Na Seção 4.2 vamos apresentar uma generalização da representação Fock-Tani para estados hadrônicos genéricos, contendo um número arbitrário de constituintes fermiônicos e bosônicos (como glúons). Essa generalização também é necessária para discutir a interação entre bárions e mésons, como a interação de núcleons com mésons D .

4.1.1 Transformação Fock-Tani para Bárions.

Da mesma forma que para mésons, a RFT para bárions tem como ponto de partida o estado de um bárion em termos de quarks. Na presente Seção, vamos considerar o operador de criação de um bárion como dado na Eq. (3.154), com as amplitudes no espaço de Fock ortonormalizadas como na Eq. (3.159). Empregando as relações de anticomutação dos operadores de quarks, pode-se mostrar facilmente que

$$\begin{aligned}\{B_\alpha, B_\beta\} &= \{B_\alpha^\dagger, B_\beta^\dagger\} = 0, \\ \{B_\alpha, B_\beta^\dagger\} &= \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta},\end{aligned}\tag{4.51}$$

com

$$\Delta_{\alpha\beta} = 3\Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu_3}q_{\nu_3}^\dagger q_{\mu_3} - \frac{3}{2}\Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\nu_2\nu_3}q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3}.\tag{4.52}$$

Também pode-se mostrar de maneira muito fácil que

$$\{q_\mu, B_\alpha^\dagger\} = \sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\alpha^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger, \quad \{q_\mu, B_\alpha\} = 0.\tag{4.53}$$

Da mesma forma que no caso de mésons, o operador $\Delta_{\alpha\beta}$ é manifestação da estrutura interna dos bárions. A transformação unitária é definida tal que um estado de um único bárion composto $|\alpha\rangle$ é transformado em um estado de *bárion ideal*

$$|\alpha\rangle = B_\alpha^\dagger|0\rangle \longrightarrow U^{-1}|\alpha\rangle \equiv |\alpha\rangle = b_\alpha^\dagger|0\rangle,\tag{4.54}$$

onde, por definição

$$\begin{aligned}\{b_\alpha, b_\beta\} &= \{b_\alpha^\dagger, b_\beta^\dagger\} = 0, \\ \{b_\alpha, b_\beta^\dagger\} &= \delta_{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{4.55}$$

Como no caso anterior, $|0\rangle$ é o estado de vácuo tanto dos graus de liberdade de quarks como dos bárions ideais na nova representação, como também os operadores de quark operators $q^\dagger$ e q são cinematicamente independentes dos operadores $b_\alpha^\dagger$ e b_α , i.e.

$$\{q_\mu, b_\alpha\} = \{q_\mu, b_\alpha^\dagger\} = 0.\tag{4.56}$$

O gerador F da transformação unitária é definido como

$$F = \sum_\alpha (b_\alpha^\dagger O_\alpha - O_\alpha^\dagger b_\alpha).\tag{4.57}$$

Para os objetivos do cálculo que será realizado no Capítulo 5 da presente tese, vamos precisar dos operadores de quark na nova representação até a segunda ordem nas

amplitudes Ψ e Ψ^* . Em vista dessa necessidade, vamos repetir aqui a derivação desses operadores até a ordem desejada. Inicialmente, precisamos do operador O_α , o qual é construído, como dito acima iterativamente, tal que ordem a ordem ele deve satisfazer

$$\{O_\alpha, O_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.58)$$

Até a segunda ordem, esse operador é dado por

$$O_\alpha = B_\alpha + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}B_\beta. \quad (4.59)$$

Com isso, podemos agora obter os operadores de quark na nova representação.

Inicialmente, temos que as equações de movimento dos operadores $b_\alpha(t)$ e $O_\alpha(t)$ são manifestamente simétricas, pois

$$\begin{aligned} \frac{db_\alpha(t)}{dt} &= [b_\alpha(t), F] = O_\alpha(t), \\ \frac{dO_\alpha(t)}{dt} &= [O_\alpha(t), F] = -b_\alpha(t), \end{aligned} \quad (4.60)$$

cujas soluções são

$$b_\alpha(t) = O_\alpha \sin t + b_\alpha \cos t, \quad (4.61)$$

$$O_\alpha(t) = O_\alpha \cos t - b_\alpha \sin t. \quad (4.62)$$

Por outro lado, a equação de movimento para os operadores de quark, até a segunda ordem, é dada por

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu(t)}{dt} &= [q_\mu(t), F] \\ &= -\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^\dagger(t)q_{\mu_3}^\dagger(t)b_\beta(t) \\ &\quad - \frac{3}{2}\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu} [b_\gamma^\dagger(t)q_{\mu_3}(t)B_\beta(t) - B_\gamma^\dagger(t)q_{\mu_3}(t)b_\beta(t)] \\ &\quad + \frac{3}{2}\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\nu_2\mu} [b_\gamma^\dagger(t)q_{\nu_2}^\dagger(t)q_{\mu_2}(t)q_{\mu_3}(t)B_\beta(t) \\ &\quad - B_\gamma^\dagger(t)q_{\nu_2}^\dagger(t)q_{\mu_2}(t)q_{\mu_3}(t)b_\beta(t)]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Em ordem zero, que consiste em desprezar todas as potências de Ψ , essa equação torna-se

$$\frac{dq_\mu^{(0)}(t)}{dt} = 0. \quad (4.64)$$

Usando a condição inicial $q_\mu(0) = q_\mu$, encontra-se

$$q_\mu^{(0)}(t) = q_\mu. \quad (4.65)$$

A equação de primeira ordem é obtida a partir da Eq. (4.63) desprezando as contribuições com potências em Ψ maiores que a unidade, i.e.

$$\frac{dq_\mu^{(1)}(t)}{dt} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^{\dagger(0)}(t)q_{\mu_3}^{\dagger(0)}(t)b_\beta^{(0)}(t). \quad (4.66)$$

A solução dessa equação é dada por

$$q_\mu^{(1)}(t) = -\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger \left[b_\beta \sin t + B_\beta(1 - \cos t) \right]. \quad (4.67)$$

A equação de segunda ordem, seguindo o mesmo procedimento, é dada por

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu^{(2)}(t)}{dt} = & -\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3} \left[q_{\mu_2}^{\dagger(0)}(t)q_{\mu_3}^{\dagger(1)}(t) + q_{\mu_2}^{\dagger(1)}(t)q_{\mu_3}^{\dagger(0)}(t) \right] b_\beta^{(0)}(t) \\ & - \frac{3}{2}\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu} \left[b_\gamma^{\dagger(0)}(t)q_{\mu_3}^{(0)}(t)B_\beta^{(0)}(t) - B_\gamma^{\dagger(0)}(t)q_{\mu_3}^{(0)}(t)b_\beta^{(0)}(t) \right] \\ & + \frac{3}{2}\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\nu_2\mu} \left[b_\gamma^{\dagger(0)}(t)q_{\nu_2}^{\dagger(0)}(t)q_{\mu_2}^{(0)}(t)q_{\mu_3}^{(0)}(t)B_\beta^{(0)}(t) \right. \\ & \left. - B_\gamma^{\dagger(0)}(t)q_{\nu_2}^{\dagger(0)}(t)q_{\mu_2}^{(0)}(t)q_{\mu_3}^{(0)}(t)b_\beta^{(0)}(t) \right]. \end{aligned} \quad (4.68)$$

A integração dessa leva à solução

$$\begin{aligned} q_\mu^{(2)}(t) = & \frac{3}{2}\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu} \left[-b_\gamma^\dagger q_{\mu_3} B_\beta \sin t \cos t + b_\gamma^\dagger q_{\mu_3} b_\beta \sin^2 t \right. \\ & \left. + 2B_\gamma^\dagger q_{\mu_3} B_\beta(1 - \cos t - \frac{1}{2}\sin^2 t) + 2B_\gamma^\dagger q_{\mu_3} b_\beta(\sin t - \frac{1}{2}\sin t \cos t) \right] \\ & - \frac{3}{2}\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\nu_2\mu} \left[-b_\gamma^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} B_\beta \sin t \cos t + b_\gamma^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} b_\beta \sin^2 t \right. \\ & \left. + 2B_\gamma^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} B_\beta(1 - \cos t - \frac{1}{2}\sin^2 t) \right. \\ & \left. + 2B_\gamma^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} b_\beta(\sin t - \frac{1}{2}\sin t \cos t) \right]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Esses resultados são suficientes para as necessidades do Capítulo 5. Ao final, para obter os operadores transformados, precisamos tomar $t = -\pi/2$.

As derivações nas duas últimas Seções são adequadas quando se trata sistemas contendo ou somente mésons, ou somente bárions. Para o caso em que tanto mésons quanto bárions estejam presentes no sistema, como é o caso da interação de núcleons com mésons D , que será objeto de nossa consideração no Capítulo 6, vamos precisar generalizar o gerador F . Isso será feito na próxima Seção.

4.2 Transformação Fock-Tani generalizada

A transformação generalizada [50] é para estados hadrônicos no espaço de Fock físico $\mathcal{F}$ escritos como

$$|\alpha\rangle = A_\alpha^\dagger|0\rangle, \quad (4.70)$$

onde o operador de criação $A_\alpha^\dagger$ é dado em termos de operadores de criação de quark $q^\dagger$, antiquark $\bar{q}^\dagger$ e glúons $g^\dagger$ como

$$A_\alpha^\dagger = \sum_{n_q n_{\bar{q}} n_g}^{\infty} (n_q! n_{\bar{q}}! n_g!)^{-1/2} \Phi_\alpha^{\mu_1 \dots \mu_{n_q} \nu_1 \dots \nu_{n_{\bar{q}}} \sigma_1 \dots \sigma_{n_g}} q_{\mu_1}^\dagger \dots q_{\mu_{n_q}}^\dagger \bar{q}_{\nu_1}^\dagger \dots \bar{q}_{\nu_{n_{\bar{q}}}}^\dagger g_{\sigma_1}^\dagger \dots g_{\sigma_{n_g}}^\dagger, \quad (4.71)$$

onde Φ é a componente da amplitude no espaço de Fock com n_q quarks, $n_{\bar{q}}$ antiquarks e n_g glúons. Como sempre, as amplitudes Φ são tomadas ortonormalizadas e antisimétricas nos índices de quark e antiquark e simétricas nos índices de glúons. Como antes, a convenção de soma implícita sobre índices repetidos está sendo usada.

Isso significa que o operador $A^\dagger$ cria um estado hadrônico genérico, podendo ser um bárion, ou um méson, ou ainda um estado exótico, i.e. contendo glúons constituintes. É importante notar que o estado hadrônico não é composto por uma única amplitude no espaço de Fock como nos estados hadrônicos considerados na duas Seções anteriores, mas sim por uma soma de amplitudes com diferentes números de constituintes. Exemplos são os seguintes [15]

$$A_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3!}} \Phi_\alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger + \frac{1}{\sqrt{4!}} \Psi_\alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \nu} q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger q_{\mu_4}^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger, \quad (4.72)$$

e

$$A_\alpha^\dagger = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger + \Psi_\alpha^{\mu\nu\sigma} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger g_\sigma^\dagger. \quad (4.73)$$

Na Ref. [15] foram considerados operadores de mésons exóticos, como o da Eq. (4.73). Na presente tese não vamos empregar nenhum operador desse tipo, mas quando mésons e bárions ordinários – como os que temos tratado até o momento – estão presentes, o gerador F precisa ser generalizado para levar em conta que os operadores de quark transformados na nova representação devem levar em conta os estados de mésons e bárions no sistema.

Para simplificar a notação para os comutadores ou anticomutadores dos operadores hadrônicos, a Ref. [50] empregou a notação de produtos de Lie [51], i.e. um comutador ou anticomutador de dois operadores A e B é denotado por

$$A \cdot B \equiv \begin{cases} [A, B] = AB - BA & \text{para } A \text{ e } B \text{ bosônicos,} \\ \{A, B\} = AB + BA & \text{para } A \text{ e } B \text{ fermiônicos.} \end{cases} \quad (4.74)$$

Em termos desse produto de Lie, os operadores de criação e aniquilação $A^\dagger$ e A de hádrons satisfazem

$$A_\alpha \cdot A_{\alpha'}^\dagger = \delta_{\alpha\alpha'} + C_{\alpha\alpha'}, \quad A_\alpha \cdot A_{\alpha'} = A_\alpha^\dagger \cdot A_{\alpha'}^\dagger = 0, \quad (4.75)$$

Aqui, os operadores $C_{\alpha\alpha'}$ são os equivalentes aos $\Delta_{\alpha\beta}$ das Seções anteriores e, como lá, refletem a estrutura interna dos hádrons. Em geral, $C_{\alpha\alpha'}$ pode ser decomposto como

$$C_{\alpha\alpha'} = C_{\alpha\alpha'}^0 + C_{\alpha\alpha'}^+ + C_{\alpha\alpha'}^- , \quad (4.76)$$

onde as componentes $C_{\alpha\alpha'}^0$, $C_{\alpha\alpha'}^+$ e $C_{\alpha\alpha'}^-$ são definidas implicitamente pelas seguintes propriedades de simetria e propriedades de aniquilação do estado de vácuo:

$$\begin{aligned} (C_{\alpha\alpha'}^0)^\dagger &= C_{\alpha'\alpha}^0, \quad (C_{\alpha\alpha'}^+)^\dagger = C_{\alpha'\alpha}^-, \quad (C_{\alpha\alpha'}^-)^\dagger = C_{\alpha'\alpha}^+ \\ C_{\alpha\alpha'}^0|0\rangle &= C_{\alpha\alpha'}^-|0\rangle = 0, \quad C_{\alpha\alpha'}^+|0\rangle \neq 0. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Essas propriedades seguem-se do comportamento do produto de Lie sob conjugação Hermiteana e do fato que as diferentes componentes de Fock no operador $A_\alpha^\dagger$ contêm diferentes números de partículas. A construção do espaço ideal de hádron segue-se como antes, i.e. introduzimos o espaço ideal de hádron $\mathcal{H}$ com graus de liberdade descritos por operadores de hádrons ideais a_α e $a_\alpha^\dagger$ que, por definição, satisfazem

$$a_\alpha \cdot a_{\alpha'}^\dagger = \delta_{\alpha\alpha'}, \quad a_\alpha \cdot a_{\alpha'} = a_\alpha^\dagger \cdot a_{\alpha'}^\dagger = 0. \quad (4.78)$$

Esses operadores (anti)comutam com os operadores de quarks, antiquarks e glúons. A seguir, define-se o produto direto de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H}$: $\mathcal{F} \times \mathcal{H} \equiv \mathcal{I}$. Introdz-se um estado de vácuo $|0\rangle$ que é o produto dos vácuos de $\mathcal{F}$ e de $\mathcal{H}$. A condição de vínculo é, como antes, tal que os estados físicos $|\psi\rangle$ devem satisfazer a condição

$$a_\alpha|\psi\rangle = 0, \quad (4.79)$$

a qual garante que os estados permitidos constituem um subespaço isomórfico ao espaço de Fock original.

A transformação unitária U é definida, como nos casos anteriores, de maneira que os estados de um hádron $|\alpha\rangle = A_\alpha^\dagger|0\rangle$ são transformados em um estado de hádron ideal $|\alpha\rangle = a_\alpha^\dagger|0\rangle$:

$$|\alpha\rangle = U|\alpha\rangle, \quad |\alpha\rangle = U^{-1}|\alpha\rangle = U^\dagger|\alpha\rangle. \quad (4.80)$$

Os elementos de matriz no espaço de Fock de qualquer operador O entre estados $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$ são iguais aos do operador transformado $U^{-1}OU$ entre os estados $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$. Como na Ref. [50], definindo

$$U^{-1}a_\alpha U = D_\alpha, \quad (4.81)$$

a condição de vínculo da Eq. (4.79) é transformada na nova representação em

$$D_\alpha|\psi\rangle = 0. \quad (4.82)$$

O operador U é da mesma forma que nos casos anteriores, a saber

$$U = \exp\left(-\frac{\pi}{2}F\right). \quad (4.83)$$

onde F é um produto de operadores de quark, antiquark, gluon e hádrons ideais em ordem normal,

$$F = a_\alpha^\dagger O_\alpha - O_\alpha^\dagger a_\alpha, \quad (4.84)$$

onde os operadores O_α são tais que

$$O_\alpha \cdot O_{\alpha'}^\dagger = \delta_{\alpha\alpha'}, \quad O_\alpha \cdot O_{\alpha'} = O_\alpha^\dagger \cdot O_{\alpha'}^\dagger = 0. \quad (4.85)$$

Reiteramos que estamos usando a convenção que há uma soma implícita sobre índices repetidos. A construção de O_α segue o mesmo procedimento iterativo que o das seções anteriores. Até a terceira ordem nas amplitudes de Fock Φ_α , o operador O_α é dado por [50]:

$$O_\alpha = A_\alpha + \left(C_{\alpha\alpha'}^+ + \frac{1}{2}C_{\alpha\alpha'}^0\right) A_{\alpha'} + (-1)^{NN'} A_{\alpha'}^\dagger \left[A_\alpha \cdot \left(C_{\alpha'\alpha''}^- + \frac{1}{2}C_{\alpha'\alpha''}^0\right)\right] A_{\alpha''}. \quad (4.86)$$

Para os propósitos de construir uma interação efetiva méson-báron somente é necessário o operador O_α até essa ordem.

Para obter os operadores q e $\bar{q}$ na nova representação, no caso em que os operadores de bárions compostos $B_\alpha^\dagger$ e mésons compostos $M_\alpha^\dagger$ são dados como nas Eqs. (3.154) e (3.155), é mais prático [52] separar o gerador F como

$$F = F_B + F_M, \quad (4.87)$$

com

$$F_B = b_\alpha^\dagger O_\alpha^B - O_\alpha^{B\dagger} b_\alpha, \quad F_M = m_\alpha^\dagger O_\alpha^M - O_\alpha^{M\dagger} m_\alpha, \quad (4.88)$$

onde

$$\begin{aligned} O_\alpha^M &= M_\alpha + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}^M M_\beta - \frac{1}{2}M_\beta^\dagger [\Delta_{\beta\gamma}^M, M_\alpha] M_\gamma - \frac{1}{2}[M_\alpha, B_\beta^\dagger] B_\beta \\ &- \frac{1}{2}B_\beta^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\beta\gamma}^B] B_\gamma + \frac{1}{2}M_\beta^\dagger [M_\alpha, [M_\beta, B_\gamma^\dagger]] B_\gamma \\ &- \frac{1}{2}B_\beta^\dagger [B_\beta, \Delta_{\alpha\gamma}^M] M_\gamma, \end{aligned} \quad (4.89)$$

e

$$\begin{aligned} O_\alpha^B &= B_\alpha + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}^B B_\beta - \frac{1}{2}B_\beta^\dagger [\Delta_{\beta\gamma}^B, B_\alpha] B_\gamma + \frac{1}{2}[M_\beta^\dagger, B_\alpha] M_\beta \\ &- \frac{1}{2}M_\beta^\dagger [B_\alpha, \Delta_{\beta\gamma}^M] M_\gamma - \frac{1}{2}M_\beta^\dagger [M_\beta, \Delta_{\gamma\alpha}^B] B_\gamma. \end{aligned} \quad (4.90)$$

A partir daqui, apesar de trabalhoso, não é difícil derivar as equações de movimento para q e $\bar{q}$ – não vamos reproduzi-las aqui para não tornar a apresentação muito massante; expressões explícitas podem ser obtidas na Ref. [52]. De posse dos operadores de quark transformados, pode-se obter a interação efetiva bárion-méson na nova representação. Para uma interação microscópica como a que estamos empregando nessa tese, dada na Eq. (3.150), a interação bárion-méson pode ser escrita como [52, 53]

$$V_{BM} = \sum_{i=1}^4 V_i(\alpha\beta; \alpha'\beta') m_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}^{\dagger} m_{\beta'} b_{\alpha'}, \quad (4.91)$$

onde

$$\begin{aligned} V_1(\alpha\beta; \alpha'\beta') &= -3 \Psi_{\beta}^{*\nu\mu_2\mu_3} \Phi_{\alpha}^{*\mu\lambda} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha'}^{\rho\lambda} \Psi_{\beta'}^{\sigma\mu_2\mu_3}, \\ V_2(\alpha\beta; \alpha'\beta') &= -3 \Psi_{\beta}^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_{\alpha}^{*\mu_1\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha'}^{\sigma\rho} \Psi_{\beta'}^{\mu_1\mu_2\mu_3}, \\ V_3(\alpha\beta; \alpha'\beta') &= -6 \Psi_{\beta}^{*\mu_1\nu\mu_3} \Phi_{\alpha}^{*\mu\lambda} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha'}^{\mu_1\lambda} \Psi_{\beta'}^{\sigma\rho\mu_3}, \\ V_4(\alpha\beta; \alpha'\beta') &= -6 \Psi_{\beta}^{*\mu_1\mu\mu_3} \Phi_{\alpha}^{*\lambda\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_{\alpha'}^{\mu_1\rho} \Psi_{\beta'}^{\lambda\sigma\mu_3}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

A expressão acima é idêntica à obtida através do *Resonating Group Method*, método que foi empregado nas Refs. [54, 55, 18]. Isso significa que para os propósitos de derivar uma interação bárion-méson somente, a representação Fock-Tani não é estritamente necessária. No entanto, é importante notar que a relevância desse formalismo está precisamente na possibilidade de estudar essa interação efetiva conjuntamente com as propriedades de um sistema hadrônico a temperaturas e densidades bariônicas finitas, como será visto no próximo Capítulo. Uma situação tal não poderia ser estudada com o resonating group method, pois esse método é eficiente somente para sistemas duas partículas compostas, principalmente para estados de espalhamento.

Capítulo 5

Simetria quiral na matéria hadrônica

Este é um dos Capítulos centrais desta tese, onde vamos desenvolver um formalismo para estudar a simetria quiral na matéria hadrônica a temperatura e densidade bariônica finitas. No Capítulo 3 o problema de efeitos de temperatura e densidade finitas foi formulado para um sistema de quarks desconfinados. Como mencionado lá, um sistema de quarks desconfinados provavelmente existe no interior de estrelas superdensas. Também, na região central de uma colisão de íons pesados a altas energias, espera-se a formação de um estado em que os quarks e glúons estejam desconfinados. A existência de um estado de tal natureza, se realmente for produzido nestas colisões, certamente tem um tempo de vida muito curto. Esta matéria altamente excitada se expandirá e, conseqüentemente, se resfriará e os quarks não permanecerão livres, mas sim confinados em hádrons. Estes hádrons estarão sujeitos a temperaturas e densidades moderadas, mas com suas propriedades – como massas, tamanhos e suas interações com outros hádrons – provavelmente alteradas. Obviamente, estas modificações são resultado das alterações nas propriedades dos quarks no interior destes hádrons. Como foi visto no Capítulo 3, as propriedades dos quarks constituintes são sensíveis a efeitos de temperatura e densidade. Como as propriedades dos hádrons são determinadas por estes quarks e suas interações, parece razoável esperar mudanças em suas propriedades.

A grande dificuldade para tratar este problema da mudança nas propriedades hadrônicas, no entanto, como já mencionado várias vezes nesta tese, é que os métodos tradicionais da teoria quântica de campos, como aquele empregado no Capítulo 3, são adequados para sistemas de partículas “elementares”. Isto é, aqueles métodos fazem uso de campos que satisfazem regras de (anti) comutação canônicas. Mas, como vimos, operadores de campos para partículas compostas, como os hádrons, não satisfazem estas regras canônicas. É precisamente neste ponto que propomos o emprego da representação Fock-Tani para tratar este problema. No entanto, como vimos no Capítulo 4, a aplicação desta representação requer um formalismo

em termos de operadores de criação e aniquilação e, portanto, o tratamento empregado no Capítulo 3, baseado nas equações integrais de Schwinger-Dyson, não é adequado. No entanto, o formalismo discutido na Seção 3.5, empregado em conjunção com a representação Fock-Tani, permite tratar a situação em discussão, a de quarks confinados em hádrons.

5.1 Equação de gap para quarks confinados

Nessa Seção vamos obter a equação de gap para temperatura e densidades finitas para um sistema em que os quarks estão confinados em hádrons. Vamos seguir os mesmos passos que os empregados na Seção 3.5, mas generalizando o formalismo para um sistema genérico a temperatura e densidades finitas. Isso implicará numa certa repetição de fórmulas e argumentos que, no entanto, julgamos necessária para clareza de apresentação. Como vimos na Seção 3.5, o ponto de partida é o emprego da técnica de contração de Wick na Hamiltoniana do modelo. O termo da Hamiltoniana contraída que contém as excitações elementares do sistema e leva à equação de gap é H_2 , o qual é dado, em detalhe, como

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \sum_x \psi^{i\dagger}(\vec{x}) (-i\alpha \cdot \nabla + \beta m_0) \psi^i(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{x}, \vec{y}} D^{\mu\nu}(|\vec{x} - \vec{y}|) (\Gamma_\mu^a)^{ij}_{\alpha\alpha'} (\Gamma_\nu^a)^{mn}_{\beta\beta'} \\
 &\times \left\{ \psi_\alpha^{i\dagger}(\vec{x}) \left[\overline{\psi_{\alpha'}^j(\vec{x}) \psi_\beta^{m\dagger}(\vec{y})} \right] \psi_{\beta'}^n(\vec{y}) - \psi_\beta^{m\dagger}(\vec{y}) \left[\overline{\psi_\alpha^{i\dagger}(\vec{x}) \psi_{\beta'}^n(\vec{y})} \right] \psi_\alpha^j(\vec{x}) \right\}, \\
 &= \sum_x \psi^{i\dagger}(\vec{x}) (-i\alpha \cdot \nabla + \beta m_0) \psi^i(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{x}, \vec{y}} D^{\mu\nu}(|\vec{x} - \vec{y}|) (\Gamma_\mu^a)^{ij}_{\alpha\alpha'} (\Gamma_\nu^a)^{mn}_{\beta\beta'} \\
 &\times \psi_\alpha^{i\dagger}(\vec{x}) \left[\overline{\psi_{\alpha'}^j(\vec{x}) \psi_\beta^{m\dagger}(\vec{y})} - \overline{\psi_\beta^{m\dagger}(\vec{y}) \psi_{\alpha'}^j(\vec{x})} \right] \psi_{\beta'}^n(\vec{x}), \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

onde as quantidades Γ e D foram definidas na Eq. (3.112). Por simplicidade de apresentação, estamos omitindo os índices de sabor. Os operadores de campo são expandidos em termos de operadores de criação e aniquilação de quarks e antiquarks constituintes no espaço dos momentos como na Eq. (3.113),

$$\psi_\alpha^i(\vec{x}) = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{\vec{k}, s} \left[u_{\alpha, s}(\vec{k}) q_s^i(\vec{k}) + v_{\alpha, s}(\vec{k}) \bar{q}_s^{i\dagger}(-\vec{k}) \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \tag{5.2}$$

Com isto, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \overline{\psi_\alpha^j(\vec{x}) \psi_\beta^{m\dagger}(\vec{y})} &= \frac{1}{n^3} \sum_{s, s'} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \left[u_{\alpha, s}(\vec{k}) u_{\beta, s'}^\dagger(\vec{k}') \langle \Omega | q_s^j(\vec{k}) q_{s'}^{m\dagger}(\vec{k}') | \Omega \rangle \right. \\
 &\quad \left. + v_{\alpha, s}(\vec{k}) v_{\beta, s'}^\dagger(\vec{k}') \langle \Omega | \bar{q}_s^{j\dagger}(\vec{k}) \bar{q}_{s'}^m(\vec{k}') | \Omega \rangle \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\vec{k}' \cdot \vec{y}}, \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

onde $|\Omega\rangle$ é um estado de muitos quarks e antiquarks (confinados em hádrons ou não confinados). Temos, portanto,

$$\langle \Omega | q_s^j(\vec{k}) q_{s'}^{m\dagger}(\vec{k}') | \Omega \rangle = \delta^{jm} \delta_{s's} \delta_{\vec{k}'\vec{k}} (1 - n_k), \quad (5.4)$$

$$\langle \Omega | \bar{q}_s^{j\dagger}(\vec{k}) \bar{q}_{s'}^m(\vec{k}') | \Omega \rangle = \delta^{jm} \delta_{s's} \delta_{\vec{k}'\vec{k}} \bar{n}_k, \quad (5.5)$$

onde n_k e $\bar{n}_k$ são as distribuições de quarks e antiquarks no meio - omitimos o índice de cor nessas distribuições. Então, temos que a contração acima pode ser escrita como

$$\overline{\psi_\alpha^j(\vec{x}) \psi_\beta^{m\dagger}(\vec{y})} = \delta^{jm} \frac{1}{n^3} \sum_{\vec{k}} \left\{ [\Lambda_+(\vec{k})]_{\alpha\beta} (1 - n_k) + [\Lambda_-(\vec{k})]_{\alpha\beta} \bar{n}_k \right\} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}, \quad (5.6)$$

onde, empregando as formas explícitas para os espinores $u_{\alpha,s}(\vec{k})$ e $v_{\alpha,s}(\vec{k})$ dadas respectivamente nas Eqs. (3.115) e (3.116), as quais repetimos aqui por completeza

$$[\Lambda_+(\vec{k})]_{\alpha\beta} = \sum_s u_{\alpha,s}(\vec{k}) u_{\beta,s}^\dagger(\vec{k}) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \phi(k) \beta + \sin \phi(k) \alpha \cdot \hat{k} \right]_{\alpha\beta}, \quad (5.7)$$

$$[\Lambda_-(\vec{k})]_{\alpha\beta} = \sum_s v_{\alpha,s}(\vec{k}) v_{\beta,s}^\dagger(\vec{k}) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \phi(k) \beta - \sin \phi(k) \alpha \cdot \hat{k} \right]_{\alpha\beta}. \quad (5.8)$$

Da mesma forma, temos que

$$\overline{\psi_\beta^{m\dagger}(\vec{y}) \psi_\alpha^j(\vec{x})} = \delta^{mj} \frac{1}{n^3} \sum_{\vec{k}} \left\{ [\Lambda_+(\vec{k})]_{\alpha\beta} n_k + [\Lambda_-(\vec{k})]_{\alpha\beta} (1 - \bar{n}_k) \right\} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}. \quad (5.9)$$

Substituindo estas expressões para as contrações na Eq. (5.1) e fazendo uso das deltas de Kronecker, obtemos para H_2

$$\begin{aligned} H_2 &= \sum_x \psi^{i\dagger}(\vec{x}) (-i\alpha \cdot \nabla + \beta m_0) \psi^i(\vec{x}) + \frac{1}{2} \frac{1}{n^3} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{x}, \vec{y}} D^{\mu\nu}(|\vec{x} - \vec{y}|) (\Gamma_\mu^a)_{\alpha\alpha'}^{ij} (\Gamma_\nu^a)_{\beta\beta'}^{jn} \\ &\times \psi_\alpha^{i\dagger}(\vec{x}) \left\{ [\Lambda_+(k)]_{\alpha\beta} (1 - 2n_k) - [\Lambda_-(k)]_{\alpha\beta} (1 - 2\bar{n}_k) \right\} \psi_{\beta'}^n(\vec{x}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Usando agora as Eqs. (3.123) e (3.124) nessa equação, obtemos

$$\begin{aligned} H_2 &= \sum_x : \psi^{i\dagger}(\vec{x}) (-i\alpha \cdot \nabla + \beta m_0) \psi^i(\vec{x}) : + \frac{1}{2} \frac{1}{n^3} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{x}, \vec{y}} D^{\mu\nu}(|\vec{x} - \vec{y}|) (\Gamma_\mu^a)_{\alpha\alpha'}^{ij} (\Gamma_\nu^a)_{\beta\beta'}^{jn} \\ &\times : \psi_\alpha^{i\dagger}(\vec{x}) \left\{ - (n_k - \bar{n}_k) \delta_{\alpha\beta} \right. \\ &\left. + (1 - n_k - \bar{n}_k) \left[\sin \phi(k) \beta + \cos \phi(k) \alpha \cdot \hat{k} \right]_{\alpha\beta} \right\} \psi_{\beta'}^n(\vec{x}) : e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Como vimos na Seção 3.5, ao substituir as expansões de ψ e $\psi^\dagger$ na expressão acima, obtemos termos proporcionais a $q^\dagger q$, $\bar{q}^\dagger \bar{q}$, $q^\dagger \bar{q}^\dagger$, e $\bar{q} q$. Enquanto os dois primeiros

termos são diagonais nos operadores de criação e aniquilação, os dois últimos não são diagonais – o termo anômalo de Bogoliubov. Tudo agora prossegue como anteriormente. A diferença com relação à Seção 3.5 são os termos que envolvem as distribuições de quarks e antiquarks, n_k e $\bar{n}_k$. É importante notar que essas distribuições *não* necessariamente correspondem a quarks desconfinados, elas foram definidas de maneira geral nas Eqs. (5.4) e (5.5), em que o estado $|\Omega\rangle$ é um estado genérico de muitos quarks (confinados ou não confinados em hádrons).

Anulando o termo anômalo de Bogoliubov, obtemos a equação de gap, dada explicitamente por

$$k \sin \phi_k = m_0 \cos \phi_k + \frac{2}{3} \frac{1}{(an)^3} \sum_{\vec{q}} F_q \left\{ V_C(\vec{k} - \vec{q}) \left(\cos \phi_k \sin \phi_q - \sin \phi_k \cos \phi_q \hat{k} \cdot \hat{q} \right) + 2V_T(\vec{k} - \vec{q}) \left[\cos \phi_k \sin \phi_q - \sin \phi_k \cos \phi_q \frac{(q\hat{k} \cdot \hat{q} - k)(k\hat{k} \cdot \hat{q} - q)}{|\vec{k} - \vec{q}|^2} \right] \right\}, \quad (5.12)$$

e H_2 fica na forma diagonal,

$$H_2^{diag} = \sum_{\vec{k}} \sum_{c,s,f} \omega_k^f \left[q_s^{cf\dagger}(\vec{k}) q_s^{cf}(\vec{k}) + \bar{q}_s^{cf\dagger}(\vec{k}) \bar{q}_s^{cf}(\vec{k}) \right], \quad (5.13)$$

com $\omega_q(k)$ agora envolvendo o fator F_q ,

$$\begin{aligned} \omega_k &= k \cos \phi_k + m_0 \sin \phi_k \\ &+ \frac{2}{3} \frac{1}{(an)^3} \sum_{\vec{q}} F_q \left\{ V_C(\vec{k} - \vec{q}) \left(\sin \phi_k \sin \phi_q + \cos \phi_k \cos \phi_q \hat{k} \cdot \hat{q} \right) \right. \\ &\left. + 2V_T(\vec{k} - \vec{q}) \left[\cos \phi_k \cos \phi_q - \sin \phi_k \sin \phi_q \frac{(q\hat{k} \cdot \hat{q} - k)(k\hat{k} \cdot \hat{q} - q)}{|\vec{k} - \vec{q}|^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Esse fator de Fermi F_k também entra no cálculo do condensado de quarks $\langle \Omega | \bar{\psi}(x) \psi(x) | \Omega \rangle$ no meio hadrônico, o qual, empregando a Eq. (5.2) para o operador de campo, é dado por

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \bar{\Psi}(x) \Psi(x) | \Omega \rangle &= -\frac{1}{(an)^3} \sum_{\vec{k}} \frac{M_k}{E_k} \sum_{c,s} \left[1 - \langle \Omega | \bar{q}_s^{c\dagger}(\vec{k}) \bar{q}_s^c(\vec{k}) | \Omega \rangle - \langle \Omega | q_s^{c\dagger}(\vec{k}) q_s^c(\vec{k}) | \Omega \rangle \right] \\ &= -6 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} F_k \frac{M_k}{E_k}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Como vemos, chegamos a estas equações sem especificar o estado de muitas partículas $|\Omega\rangle$. Toda a informação sobre este estado está contida na função F_k , que

depende das distribuições de quarks e antiquarks n_k e $\bar{n}_k$ no meio. Obviamente, quando $|\Omega\rangle$ é o estado de vácuo, $n_k = \bar{n}_k = 0$, $F_k = 1$ e obtemos as conhecidas equações no vácuo. Para um sistema de quarks e antiquarks em que o termo H_4 do Hamiltoniano não é considerado, n_k e $\bar{n}_k$ são as distribuições de Fermi-Dirac para quarks e antiquarks, dadas por

$$n_k = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}, \quad (5.16)$$

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k + \mu)} + 1}. \quad (5.17)$$

Para um sistema de quarks e antiquarks confinados em hádrons, as distribuições de quark devem refletir a estrutura interna dos hádrons. Através da representação Fock-Tani, é possível obter estas distribuições de maneira elegante e transparente.

5.2 Distribuições de quarks e antiquarks confinados na matéria hadrônica

Nesta seção vamos obter a equação de gap num meio quente e denso em que os quarks e antiquarks se encontram confinados no interior de núcleons e antinúcleons. Para tal, é necessário obter as distribuições n_k e $\bar{n}_k$. Estas serão obtidas usando a representação Fock-Tani. Vamos começar discutindo a densidade de quarks n_k . A distribuição de antiquarks $\bar{n}_k$ pode ser obtida trivialmente de n_k pela troca do sinal do potencial químico associado ao número bariônico.

Vamos começar então considerando o elemento de matriz

$$\langle \Omega | q_\mu^\dagger q_\nu | \Omega \rangle, \quad (5.18)$$

onde μ , como dito anteriormente, representa todos os números quânticos do quark, $\mu = \{c_\mu, I_\mu, k_\mu\}$. Para calcular este elemento de matriz vamos fazer uso da transformação de Fock-Tani,

$$\begin{aligned} \langle \Omega | q_\mu^\dagger q_\nu | \Omega \rangle &= \langle \Omega | U U^{-1} q_\mu^\dagger U U^{-1} q_\nu U U^{-1} | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | (U^{-1} q_\mu^\dagger U) (U^{-1} q_\nu U) | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | q_\mu^{\dagger FT} q_\nu^{FT} | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde os operadores de quarks e o estado $|\Omega\rangle$ estão no espaço de estados $\mathcal{F}_{FT}$. Para um meio contendo somente quarks confinados, temos que

$$q_\mu | \Omega \rangle = B_\alpha | \Omega \rangle = 0. \quad (5.20)$$

Na representação Fock-Tani, as quantidades físicas são obtidas como uma expansão em série de potências das amplitudes de estados ligados Ψ . Para a distribuição de quarks n_μ , a ordem mais baixa numa expansão tal é $\mathcal{O}(\Psi^2)$. Portanto, precisamos, em princípio, considerar a expansão dos operadores q_μ^{FT} e $q_\nu^{\dagger FT}$ até segunda ordem

$$q_\mu^{FT} = q_\mu^{(0)} + q_\mu^{(1)} + q_\mu^{(2)} + \dots, \quad (5.21)$$

$$q_\mu^{\dagger FT} = q_\mu^{\dagger(0)} + q_\mu^{\dagger(1)} + q_\mu^{\dagger(2)} + \dots. \quad (5.22)$$

Cada um dos termos nesta expansão é dado por

$$q_\mu^{(0)} = q_\mu, \quad q_\mu^{\dagger(0)} = q_\mu^\dagger, \quad (5.23)$$

$$q_\mu^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\alpha^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger (b_\alpha - B_\alpha), \quad (5.23)$$

$$q_\mu^{\dagger(1)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} (b_\alpha^\dagger - B_\alpha^\dagger) q_{\mu_3} q_{\mu_2}, \quad (5.24)$$

$$q_\mu^{(2)} = \frac{3}{2} \Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu} (b_\gamma^\dagger q_{\mu_3} b_\beta + B_\gamma^\dagger q_{\mu_3} B_\beta - 2B_\gamma^\dagger q_{\mu_3} b_\beta) - \frac{3}{2} \Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu} \times (b_\gamma^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} b_\beta + B_\gamma^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} B_\beta - 2B_\gamma^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} b_\beta), \quad (5.25)$$

$$q_\mu^{\dagger(2)} = \frac{3}{2} \Psi_\beta^{*\mu_1\mu_2\mu} \Psi_\gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3} (b_\beta^\dagger q_{\mu_3}^\dagger b_\gamma + B_\beta^\dagger q_{\mu_3}^\dagger B_\gamma - 2b_\beta^\dagger q_{\mu_3}^\dagger B_\gamma) - \frac{3}{2} \Psi_\beta^{*\mu_1\mu_2\mu} \Psi_\gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3} \times (b_\beta^\dagger q_{\mu_3}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\nu_2} b_\gamma + B_\beta^\dagger q_{\mu_3}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\nu_2} B_\gamma - 2b_\beta^\dagger q_{\mu_3}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\nu_2} B_\gamma). \quad (5.26)$$

Com estas expressões, obtemos então que a expansão para a densidade de quarks até a segunda ordem é dada por,

$$\begin{aligned} (\Omega | q_\mu^{\dagger FT} q_\nu^{FT} | \Omega) &= (\Omega | (q_\mu^{\dagger(0)} + q_\mu^{\dagger(1)} + q_\mu^{\dagger(2)} + \dots) (q_\nu^{(0)} + q_\nu^{(1)} + q_\nu^{(2)} + \dots) | \Omega) \\ &= (\Omega | q_\mu^{\dagger(1)} q_\nu^{(1)} | \Omega). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Todas as outras combinações $q_\mu^{\dagger(i)} q_\nu^{(j)}$ com $i \neq 1$ e $j \neq 1$ são zero, devido a Eq. (5.20). Substituindo as expressões para $q_\mu^{\dagger(1)}$ e $q_\mu^{(1)}$ dadas pelas Eqs. (5.23) e (5.24) na expressão (5.27) para n_μ , obtemos

$$\begin{aligned} (\Omega | q_\mu^{\dagger(1)} q_\nu^{(1)} | \Omega) &= \frac{3}{2} \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\nu\nu_2\nu_3} (\Omega | (b_\alpha^\dagger - B_\alpha^\dagger) q_{\mu_2} q_{\mu_3} q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger (b_\beta - B_\beta) | \Omega) \\ &= \frac{3}{2} \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\nu\nu_2\nu_3} (\Omega | b_\alpha^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger b_\beta | \Omega) \\ &= \frac{3}{2} \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\nu\nu_2\nu_3} (\delta_{\mu_3\nu_3} \delta_{\mu_2\nu_2} - \delta_{\mu_3\nu_2} \delta_{\mu_2\nu_3}) (\Omega | b_\alpha^\dagger b_\beta | \Omega) \\ &= 3 \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\nu\nu_2\mu_3} (\Omega | b_\alpha^\dagger b_\beta | \Omega) = 3 \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\alpha^{\nu\mu_2\mu_3} (\Omega | b_\alpha^\dagger b_\alpha | \Omega) \\ &= 3 \delta_{\mu\nu} \Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\alpha^{\mu\mu_2\mu_3} n_B(\alpha), \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde $n_B(\alpha)$ é a distribuição de bárions no estado $|\Omega\rangle$,

$$n_B(\alpha) = (\Omega|b_\alpha^\dagger b_\alpha|\Omega). \quad (5.29)$$

Portanto, obtemos para a distribuição de quarks a expressão

$$n(\mu) = 3 \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_{\alpha}^{\mu\mu_2\mu_3} n_B(\alpha), \quad (5.30)$$

onde, para maior clareza, mostramos explicitamente a soma sobre o índice α . Deve ficar claro que nesta equação *não* há uma soma sobre o índice μ .

Para prosseguir, precisamos das Ψ 's acima, que são as amplitudes de Fock empregadas na definição da transformação unitária da representação Fock Tani. Para o modelo que apresentamos na Seção 3.6, a Ψ é dada pela Eq. (3.160), a qual pode também ser escrita como

$$\Psi_{\alpha}^{\mu_1\mu_2\mu_3} = \frac{N(\vec{P}_{\alpha})}{\sqrt{3!18}} \epsilon^{c_1 c_2 c_3} T_{\alpha}^{I_1 I_2 I_3} \phi(\vec{k}_1) \phi(\vec{k}_2) \phi(\vec{k}_3) \delta(\vec{P}_{\alpha} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3), \quad (5.31)$$

onde

$$\phi(\vec{k}) = \left(\frac{1}{\pi\alpha^2} \right)^{3/4} e^{-k^2/2\alpha^2}, \quad (5.32)$$

e $N(\vec{P}_{\alpha})$ é um fator de normalização dado por

$$N(\vec{P}) = (3\pi\alpha^2)^{3/4} e^{P^2/6\alpha^2}. \quad (5.33)$$

Notamos que essa é a *mesma* função que a dada na Eq. (3.160), ela foi escrita nessa forma por conveniência para o que segue. Precisamos escrever o produto das funções de onda Ψ 's, como aparece na Eq.(5.28), dessa forma utilizando a Eq.(5.31) acima, teremos explicitamente,

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha}^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_{\alpha}^{\nu\mu_2\mu_3} &= \frac{N^2(\vec{P}_{\alpha})}{3!18} \epsilon^{c_{\mu} c_2 c_3} \epsilon^{c_{\nu} c_2 c_3} T_{\alpha}^{*I_{\mu} I_2 I_3} T_{\alpha}^{I_{\nu} I_2 I_3} \\ &\times \phi^*(\vec{k}_{\mu}) \phi^*(\vec{k}_2) \phi^*(\vec{k}_3) \delta(\vec{P}_{\alpha} - \vec{k}_{\mu} - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \\ &\times \phi(\vec{k}_{\mu}) \phi(\vec{k}_2) \phi(\vec{k}_3) \delta(\vec{P}_{\alpha} - \vec{k}_{\nu} - \vec{k}_2 - \vec{k}_3). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Lembrando da convenção de soma sob índices repetidos discretos e integração sob índices contínuos a expressão acima pode ser escrita na forma,

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha}^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_{\alpha}^{\nu\mu_2\mu_3} &= \frac{N^2(\vec{k}_{\alpha})}{3!18} \sum_{c_2 c_3} \epsilon^{c_{\mu} c_2 c_3} \epsilon^{c_{\nu} c_2 c_3} \sum_{I_2 I_3} T_{\alpha}^{*I_{\mu} I_2 I_3} T_{\alpha}^{I_{\nu} I_2 I_3} \\ &\times |\phi(\vec{k}_{\mu})|^2 |\delta(\vec{k}_{\mu} - \vec{k}_{\nu})| \int d^3 k_2 d^3 k_3 |\phi(\vec{k}_2)|^2 |\phi(\vec{k}_3)|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{k}_\mu - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \\
& = \frac{N^2(\vec{P}_\alpha)}{3!18} \sum_{c_2 c_3} \epsilon^{c_\mu c_2 c_3} \epsilon^{c_\nu c_2 c_3} \sum_{I_2 I_3} T_\alpha^{*I_\mu I_2 I_3} T_\alpha^{I_\nu I_2 I_3} \delta(\vec{k}_\mu - \vec{k}_\nu) \\
& \times |\phi(\vec{k}_\mu)|^2 \int d^3 k_2 |\phi(\vec{k}_2)|^2 |\phi(\vec{P}_\alpha - \vec{k}_\mu - \vec{k}_2)|^2.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Agora, lembrando que

$$\sum_{c_2 c_3} \epsilon^{c_\mu c_2 c_3} \epsilon^{c_\nu c_2 c_3} = 2\delta^{c_\mu c_\nu}, \tag{5.36}$$

e, usando o fato que para matéria de núcleons simétrica, i.e. igual número de prótons e nêutrons,

$$\sum_\alpha \sum_{I_2 I_3} T_\alpha^{*I_\mu I_2 I_3} T_\alpha^{I_\nu I_2 I_3} = 18 \delta_{I_\mu I_\nu}, \tag{5.37}$$

teremos, empregando as funções Gaussianas para $\phi(k)$ descritas na seção (3.6) e integrando na variável k_2 , obtemos o seguinte resultado

$$\Psi_\alpha^{*\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\alpha^{\mu\mu_2\mu_3} = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2\pi\alpha^2} \right)^{3/2} e^{-3(\vec{k}_\mu - \vec{P}_\alpha/3)^2/2\alpha^2} \tag{5.38}$$

Com esse resultado, temos que a distribuição de quarks de uma dada cor e um dado sabor no meio hadrônico é dada por

$$n_k = \left(\frac{3}{2\pi\alpha^2} \right)^{3/2} \int d^3 P e^{-3(\vec{k} - \vec{P}/3)^2/2\alpha^2} n_B(P) \tag{5.39}$$

Para um meio em equilíbrio térmico, $n_B(\vec{P})$ é a distribuição de Fermi-Dirac

$$n_B(P) = \frac{1}{e^{\beta[E_P - \mu_B]} + 1}, \tag{5.40}$$

onde E_P é a energia dos núcleons no meio e μ_B é o potencial químico bariônico de núcleons.

A distribuição de antiquarks $\bar{n}_k$ é obtida de n_k dada na Eq. (5.39) substituindo μ_B por $-\mu_B$. Com isso, temos então que o fator de Fermi $F_k(\mu_B, T)$ é dado por

$$F_k(T, \mu_B) = 1 - \left(\frac{3}{2\pi\alpha^2} \right)^{3/2} \int d^3 P e^{-3(\vec{k} - \vec{P}/3)^2/2\alpha^2} [n_B(P) + \bar{n}_B(P)], \tag{5.41}$$

onde

$$\bar{n}_B(P) = \frac{1}{e^{\beta[E_P + \mu_B]} + 1}, \tag{5.42}$$

Os limites de F_k em função de T e μ , similares aos da Eq. (3.105), são os seguintes. Para $T = 0$ e $\mu_B = 0$, temos $n_B(P) = 0$ e $\bar{n}_B(P) = 0$ e, portanto,

$$F_k(0, 0) = 1, \tag{5.43}$$

que leva ao resultado do vácuo. Para $\mu_B = 0$, obtemos

$$F_k(T, 0) = 1 - \left(\frac{3}{2\pi\alpha^2} \right)^{3/2} \int d^3P e^{-3(\vec{k}-\vec{P}/3)^2/2\alpha^2} \frac{2}{e^{\beta E_P} + 1}. \quad (5.44)$$

Por fim, para $T = 0$ temos que $\bar{n}_B(P) = 0$ e $n_B(P) = \theta(E_{P_F} - E_P)$, onde E_{P_F} é a energia de Fermi dada em termos do momento de Fermi P_F como $E_{P_F} = (P_F^2 + M_N^2)^{1/2}$, e, portanto

$$\begin{aligned} F_k(0, \mu_B) &= 1 - \left(\frac{3}{2\pi\alpha^2} \right)^{3/2} \int d^3P e^{-3(\vec{k}-\vec{P}/3)^2/2\alpha^2} \theta(E_{P_F} - E_P) \\ &= 1 - \left(\frac{3}{2\pi\alpha^2} \right)^{3/2} \int_0^{P_F} d^3P e^{-3(\vec{k}-\vec{P}/3)^2/2\alpha^2}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Para calcular explicitamente F_k para T e μ_B finitos, é necessário obter o parâmetro α e a massa do núcleon M_N no meio. Para o caso de temperatura $T = 0$, para o qual obteremos resultados numéricos explícitos no próximo Capítulo, somente é necessário o parâmetro α , o qual parametriza as amplitudes no espaço de Fock Ψ que são empregadas na definição da transformação unitária da representação Fock-Tani. Conforme mencionado anteriormente, há um limite de validade para a aplicação da presente fórmula para F_k , que depende do tamanho dos núcleons e da densidade bariônica do meio. Esse limite é tal que o tamanho dos núcleons não pode ser muito grande para que a individualidade dos núcleons não seja perdida. Isto é, os núcleons não podem se sobrepor apreciavelmente no meio nuclear, senão a aproximação de núcleons independentes não seria válida.

Como será visto no próximo Capítulo, o parâmetro α é o inverso do raio quadrático médio da distribuição de matéria bariônica no núcleon, $r_B \equiv \sqrt{\langle r^2 \rangle_B}$. Portanto, para que a aproximação de núcleons independentes seja válida, temos que ter

$$\frac{4\pi r_B^3}{3} \rho_B \leq 1. \quad (5.46)$$

Nessa, $4\pi r_B^3/3$ é o volume do núcleon e ρ_B é o número de núcleons por unidade de volume. Portanto, a desigualdade acima diz que para que tenhamos um sistema de nucleons independentes é que sobre o volume de um núcleon somente podemos ter um núcleon. Obviamente essa relação *não* significa que não há superposição entre as funções de onda dos núcleons no meio, mas sim que *em média*, no sentido de localização quântica, não há superposição apreciável entre as funções de onda. Esse limite de aplicabilidade de um modelo de partículas independentes e o tamanho dos núcleons foi estudado há algum tempo no contexto da validade do modelo de camadas nuclear [56, 57].

A densidade bariônica da matéria nuclear é $\rho_B = 0.17 \text{ fm}^{-3}$. O momento de Fermi P_F está relacionado a ρ_B como $\rho_B = 2P_F^3/3\pi^2$, o que leva a $P_F = 1.36 \text{ fm}^{-1}$. Portanto, a desigualdade da Eq. (5.46) implica que

$$r_B P_F \leq \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3},$$

$$P_F = 1.36 \text{ fm}^{-1} \rightarrow r_B = \frac{1}{\alpha} \leq 1.12 \text{ fm} \therefore \alpha > 180 \text{ MeV}. \quad (5.47)$$

Dessa discussão vemos que o tamanho do núcleon desempenha um papel importante na fenomenologia da simetria quiral no meio nuclear. Para finalizar o presente Capítulo, na próxima seção vamos apresentar, por completeza, a derivação do fator de forma bariônico do núcleon, a partir do qual pode-se extrair o raio quadrático médio da distribuição da matéria bariônica no núcleon.

5.3 Fator de forma bariônico do núcleon

A partir do fator de forma de um hádron é possível obter o raio quadrático médio desse hádron, $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$. Por exemplo, a partir do fator de forma bariônico $F_B(q^2)$, temos

$$\langle r^2 \rangle_B = -6 \left. \frac{dF_B(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0}, \quad (5.48)$$

sendo o fator de forma é definido através de

$$\delta(\vec{P}'_\alpha - \vec{P}_\alpha - \vec{q}) F_B(q^2) = \int d^3x e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \langle \vec{P}'_\alpha | \hat{\rho}_B(\vec{x}) | P_\alpha \rangle, \quad (5.49)$$

onde

$$\langle \vec{P}'_\alpha | \hat{\rho}_B(\vec{x}) | P_\alpha \rangle = \frac{1}{3} \sum_{c,f} \langle \vec{P}'_\alpha | \psi^{cf\dagger}(\vec{x}) \psi^{cf}(\vec{x}) | \vec{P}_\alpha \rangle. \quad (5.50)$$

Usando a invariância translacional, obtemos

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \langle \vec{P}'_\alpha | \hat{\rho}_B(\vec{x}) | P_\alpha \rangle &= \int d^3x e^{i(\vec{q}-\vec{P}_\alpha+\vec{P}'_\alpha)\cdot\vec{x}} \langle \vec{P}'_\alpha | \hat{\rho}_B(0) | \vec{P}_\alpha \rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{P}_\alpha + \vec{P}'_\alpha) \langle \vec{P}'_\alpha | \hat{\rho}_B(0) | P_\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Agora, empregando a expansão dos operadores de campo em termos de operadores de criação e aniquilação (tomado o limite do contínuo), obtemos para o modelo de nucleon que estamos empregando, em que os estados $|\vec{P}_\alpha\rangle$ são estados ligados de três quarks e os espinores são dados por suas expressões de baixos momentos das Eqs. (3.168) e (3.169), a seguinte expressão para o elemento de matriz acima

$$\langle \vec{P}'_\alpha | \hat{\rho}_B(0) | P_\alpha \rangle = \frac{1}{3} \sum_{cf} \sum_{s,s'} \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3} u_{s'}^{f\dagger}(\vec{k}') u_s^f(\vec{k}) \langle \vec{P}'_\alpha | q_{s'}^{cf\dagger}(\vec{k}') q_s^{cf}(\vec{k}) | P_\alpha \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \left(1 - \frac{q^2}{8M^2}\right) \int d^3k d^3k' d^3k_2 d^3k_3 \delta(\vec{P}' - \vec{k}' - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \\
&\times \delta(\vec{P} - \vec{k} - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \varphi_{\vec{P}'}(\vec{k}', \vec{k}_2, \vec{k}_3) \varphi_{\vec{P}}(\vec{k}, \vec{k}_2, \vec{k}_3). \quad (5.52)
\end{aligned}$$

Portanto, o fator de forma bariônico é dado por

$$\begin{aligned}
F_B(q^2) &= \left(1 - \frac{q^2}{8M^2}\right) \int d^3k d^3k' d^3k_2 d^3k_3 \delta(\vec{P} + \vec{q} - \vec{k}' - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \\
&\times \delta(\vec{P} - \vec{k} - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \varphi_{\vec{P}'}(\vec{k}', \vec{k}_2, \vec{k}_3) \varphi_{\vec{P}}(\vec{k}, \vec{k}_2, \vec{k}_3). \quad (5.53)
\end{aligned}$$

Empregando a forma explícita das amplitudes $\varphi_{\vec{P}}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)$, obtemos finalmente

$$F_B(q^2) = \left(1 - \frac{q^2}{8M^2}\right) e^{-q^2/6\alpha^2}. \quad (5.54)$$

Dessa expressão, obtemos então

$$\langle r^2 \rangle_B = \frac{1}{\alpha^2} \left(1 + \frac{3\alpha^2}{4M^2}\right). \quad (5.55)$$

O termo $-q^2/8M^2$ é uma correção relativística ao resultado não relativístico

$$F_B^{NR}(q^2) = e^{-q^2/6\alpha^2}, \quad (5.56)$$

do qual obtemos o resultado familiar

$$\langle r^2 \rangle_B^{NR} = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (5.57)$$

Capítulo 6

Resultados numéricos

No presente Capítulo vamos apresentar resultados numéricos para as diferentes quantidades físicas derivadas anteriormente. Todas as derivações feitas até aqui têm validade geral, isto é, elas são independentes do modelo para as interações V_C e V_T , como também do modelo ou aproximações empregados para descrever o meio hadrônico. Conforme já dito em diferentes pontos nessa tese, um dos objetivos principais da tese era derivar um formalismo para estudar os efeitos de temperatura e densidade bariônica sobre o fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral para um meio hadrônico formado por bárions e mésons. Esse objetivo foi alcançado no Capítulo 5, onde foram empregados formalismos de muitos corpos baseados em operadores de criação e aniquilação de quarks para derivar a equação de gap para a função de massa dos quarks constituintes. Especificamente, após especificado a Hamiltoniana microscópica para os quarks, foram empregados conjuntamente o tradicional método do ordenamento de Wick dessa Hamiltoniana e a representação Fock-Tani. O emprego simultâneo desses dois formalismos é original e representa um avanço considerável no estudo da simetria quiral num meio com quarks confinados em hádrons. Para finalizar a tese e ilustrar a aplicação do formalismo desenvolvido, vamos obter resultados numéricos para algumas quantidades físicas relacionadas a situações de interesse atual, a saber propriedades de mésons charmosos e suas interações no meio nuclear. A motivação para especializarmos a aplicação do formalismo nesse caso foi discutida na Introdução. Portanto, todos os resultados numéricos nessa tese serão para $T = 0$ somente.

Especificamente, inicialmente vamos discutir a solução numérica da equação de gap no vácuo. Logo após, vamos investigar os efeitos da densidade bariônica na função de massa M_k dos quarks constituintes. Para isso é necessário especificar a função F_k , a qual depende das amplitudes no espaço de Fock Ψ empregadas para definir a transformação unitária da representação Fock-Tani. Para tal, conforme dito anteriormente, vamos empregar o modelo discutido na Seção 3.6. Uma vez obtida a

função M_k como função da densidade bariônica, vamos apresentar resultados para os tamanhos e massas dos núcleons e mésons $\bar{D}$ e as interações efetivas entre esses mésons charmosos e núcleons no meio hadrônico.

6.1 Resultados para a equação de gap no vácuo

A equação que deve ser resolvida é a Eq. (5.12). Para tal, como dito acima, precisamos da função F_k , a qual é dada pela Eq. (5.45). Ela depende somente de P_F , o momento de Fermi dos núcleons no meio nuclear e de α , o parâmetro relacionado ao tamanho dos núcleons α . É importante notar que o efeito de F_k é o de diminuir o efeito da quebra dinâmica da simetria quiral, conforme pode ser verificado na Eq. (5.15) para o condensado de quarks, pois $F_k \leq 1$. Antes de entrar no estudo detalhado do efeito de F_k sobre a quebra dinâmica da simetria quiral, vamos resolver a equação de gap no vácuo para as interações $V_C(k)$ e $V_T(k)$ especificadas no Capítulo 3.

A equação de gap no vácuo é dada pela Eq. (3.143), a qual envolve as interações $V_C(k)$ e $V_T(k)$. As expressões explícitas para essas interações que empregaremos nessa tese foram discutidas nas Seções 3.2 e 3.6, sendo dadas pelas Eqs. (3.31)-(3.36) e (3.148). Há uma dificuldade numérica para resolver a equação de gap para interações que divergem muito fortemente no infravermelho $k \rightarrow 0$, como as que vamos empregar, as quais divergem como

$$V_C(k) \rightarrow \frac{1}{k^\alpha}, \quad (6.1)$$

onde α é dado por $\alpha = 3.93$ ou $\alpha = 4$, dependendo de qual solução de Szczepaniak e Swanson usarmos. Apesar de $V_C(k)$ ser fortemente divergente para $k \rightarrow 0$, a equação de gap é finita nesse limite, porque há um cancelamento de dois termos divergentes na equação. A dificuldade mencionada é precisamente controlar numericamente esse cancelamento empregando alguma forma de regularização. Aqui vamos empregar o método de regularização das Refs. [58, 18], o qual consiste em “subtrair um zero conveniente” da equação de gap, isto é, subtraímos da Eq. (3.143) uma integral que é identicamente nula*

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) \frac{M_k}{E_k} \frac{1}{k} \hat{k} \cdot (\vec{k} - \vec{q}). \quad (6.2)$$

*Para ver que essa integral é realmente nula, basta remover do integrando o termo $\hat{k}(M_k/kE_k)$, que independe da variável de integração, o que leva à integral $\int d^3q V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) (\vec{k} - \vec{q})$. Fazendo a troca de variáveis $\vec{k} - \vec{q} \rightarrow \vec{q}$, leva a $\int d^3q V_C(|\vec{q}|) \vec{q}$, a qual é zero por paridade.

Assim, com a subtração dessa integral nula, a parte da equação de gap que depende de V_C fica sendo dada por

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{f_1(\vec{k}, \vec{q}) V_C(|\vec{k} - \vec{q}|)}{E_q} &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) \frac{1}{E_q} \left(M_q - M_k \frac{q}{k} \hat{k} \cdot \hat{q} \right) \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) \left[\left(\frac{M_q}{E_q} - \frac{M_k}{E_q} \right) - \left(\frac{q}{k} \hat{q} \cdot \hat{k} - 1 \right) \left(\frac{M_k}{E_q} - \frac{M_k}{E_k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Notamos que isso resulta numa integral que envolve a subtração de dois termos em que cada um desses se anula independentemente para $\vec{q} \rightarrow \vec{k}$. Ainda mais, o anulamento de cada termo é independente da integral sobre os ângulos.

Resolvemos a equação de gap (regularizada) por iteração: (1) a partir de um ansatz inicial para M_k , as integrais sobre $\vec{q}$ são efetuadas numericamente para cada k ; (2) a equação não linear resultante para cada k é então resolvida empregando a sub-rotina FIXPDF (<http://www.netlib.org/hompack/index.html>); (3) obtemos assim uma nova M_k , a qual é então empregada no item (1) acima, e o processo é repetido até que a M_k de entrada seja igual à M_k de saída para cada k , dentro de uma precisão menor do que 10^{-6} .

Conforme dito na Seção 3.2, nesta tese vamos dar preferência por empregar $V_C(k)$ resultante da solução com $r = 1/2$ no ansatz da Eq. (3.27). Como dito lá, a razão para tal é que esse ansatz incorpora corretamente a curvatura do espaço das configurações de gauge e, como tal, deve ser o mais adequado. No entanto, para comparar os efeitos entre as duas soluções com $r = 0$ e $r = 1/2$ na função de massa dos quarks constituintes, vamos empregar as duas soluções discutidas na Seção 3.2. A interação $V_C(k)$ resultante da solução com $r = 1/2$ no ansatz da Eq. (3.27), os parâmetros envolvidos no fitting são Λ_{QCD} , σ , c e Z . Os valores desses parâmetros são dados por [42]

$$\Lambda_{QCD} = 250 \text{ MeV}, \quad \sigma = 3.84 \Lambda_{QCD}^2, \quad Z = 5.94, \quad c = 40.68. \quad (6.4)$$

Na Fig. 6.1 – gráfico superior – mostramos os resultados para M_k no limite quiral ($m_0 = 0$) para as duas formas de $V_C(k)$. Denominamos como Modelo 1 os resultados com V_C para $r = 0$, e Modelo 2 para os resultados com $V_C(k)$ para $r = 1/2$. Observa-se que o comportamento qualitativo é essencialmente o mesmo, com uma leve tendência de um efeito maior na quebra de simetria para o Modelo 2. Isso é devido ao fato do valor de $V_C(k)$ nesse modelo ser maior que o do Modelo 1 na região importante no espaço de momentos, i.e. na região de baixos momentos $k \leq 1 \text{ GeV}$. Essa característica está ilustrada no gráfico inferior da Fig. 6.1, que mostra a razão $V_C^{(2)}(k)/V_C^{(1)}(k)$ onde os índices superiores (1) e (2) referem-se respectivamente a Modelo 1 e Modelo 2.

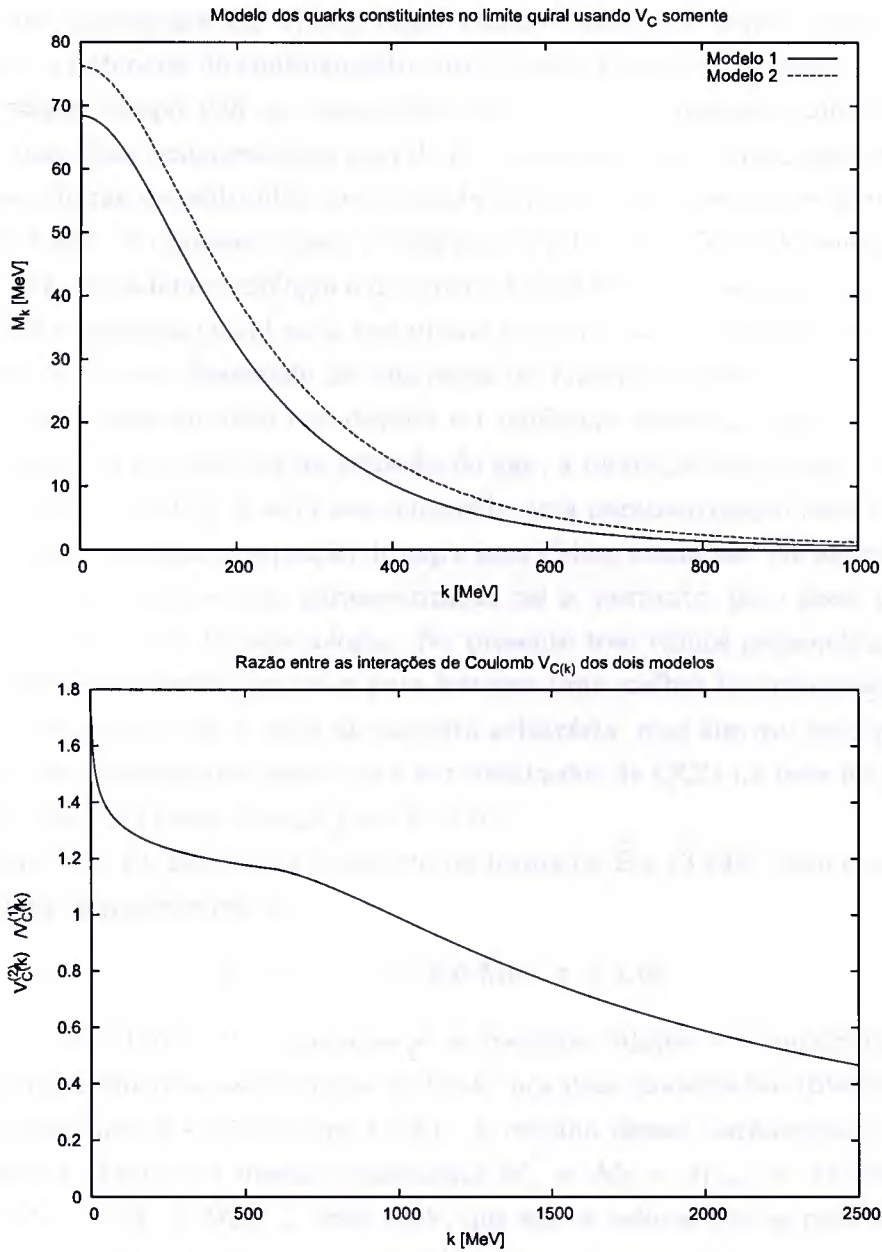


Figura 6.1: Gráfico superior: A função M_k como função do momento no limite quiral ($m_0 = 0$) usando somente $V_C(k)$ na equação de gap. A curva sólida é para $V_C(k)$ dado pelas Eqs. (3.31)-(3.33) – Modelo 1 – e a curva tracejada é para $V_C(k)$ dado pelas Eqs. (3.34)-(3.36) – Modelo 2. Gráfico inferior: Razão entre as interações $V_C(k)$ do Modelo 1 e do Modelo 2.

Notamos também na Fig. 6.1 que o valor de $M = M_{k=0}$ é menor que 100 MeV. Um valor tão baixo para a massa dos quarks constituintes leves é consequência dos parâmetros empregados em $V_C(k)$, cujos valores numéricos foram ajustados para reproduzir o potencial de confinamento entre quarks pesados. No entanto, é conhecido de algum tempo [59] que potenciais dessa natureza não são suficientes para fornecer uma boa fenomenologia quiral, i.e. eles fornecem baixos valores para a massa dos quarks constituintes, como também para o condensado de quarks, dado pela Eq. (5.15). No presente caso, $(-\langle 0|\bar{\psi}(x)\psi(x)|0\rangle)^{1/3} \approx 150$ MeV, enquanto que o valor extraído da fenomenologia é da ordem de 250 MeV. Uma outra consequência ainda é que a simetria quiral seria restaurada para um valor da densidade bariônica muito menor do que densidade de saturação da matéria nuclear, $\rho_0 = 0.17 \text{ fm}^{-3}$. Por outro lado, isso também não deveria ser nenhuma surpresa, pois $V_C(k)$ não é a única interação que contribui na equação de gap, a interação de glúons transversos $V_T(k)$ também contribui. Caso fosse conhecida uma parametrização para $V_T(k)$, ela poderia ser incorporada na equação de gap e seus efeitos avaliados. No entanto, como já dito antes, não existe uma parametrização tal e, portanto, para fazer progresso é necessário recorrer à fenomenologia. Na presente tese vamos parametrizar $V_T(k)$ em que parâmetros serão ajustados para fornecer uma melhor fenomenologia quiral. Essa parametrização não é feita de maneira arbitrária, mas sim vai incorporar um dos fatos mais importantes observados em simulações de QCD na rede no gauge de Coulomb, que $V_T(k)$ não diverge para $k \rightarrow 0$.

Nas Ref. [18, 19, 20], $V_T(k)$ foi escrito na forma da Eq. (3.148), com os seguintes valores para os parâmetros α_T , μ_0^2 e

$$\alpha_T = 0.5, \quad \mu = 300 \text{ MeV} \quad \tau = 1.05. \quad (6.5)$$

Para $V_C(k)$ do Modelo 2, empregamos os mesmos valores – é importante notar que os comportamentos assintóticos de $V_T(k)$ nos dois modelos são diferentes, pois eles são iguais aos dos respectivos $V_C(k)$. A escolha desses parâmetros foi guiada de maneira a obter uma massa constituinte $M_u = M_d = M_{k=0} \simeq 300$ MeV para $m_0 = 10$ MeV, e $M_c = M_{k=0} \simeq 1660$ MeV, que são os valores típicos para as massas dos quarks constituintes leves e com sabor charm num modelo não relativístico de quarks. A Fig. 6.2 mostra os resultados para M_k para os dois modelos para diferentes valores da massa de corrente m_0 . Nota-se claramente na figura que o efeito da massa m_0 no fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral é que esse diminui à medida que m_0 aumenta. Especificamente, temos que o efeito é muito mais forte para m_0 pequeno (quebra explícita da simetria é pequena), enquanto que para $m_0 = 10$ MeV obtemos $M_{k=0} = 310$ MeV, um aumento por um fator 30, para $m_0 = 850$ MeV, $M_{k=0} = 1660$ MeV, o aumento é apenas por um fator 2

apenas.

A inclusão de $V_T(k)$ eleva também o valor da integral para o condensado de quarks, para a qual fornece para $(-\langle 0|\bar{\psi}(x)\psi(x)|0\rangle)^{1/3}$ o valor de 300 MeV para o Modelo 1 e 350 MeV para o Modelo 2. Aqui é necessário fazer alguns comentários com relação ao condensado. Na QCD, é conhecido que a expressão do condensado é divergente – para uma discussão didática, ver a Ref. [60]. Vamos ilustrar isso dentro do contexto do presente modelo [18], analisando o comportamento ultravioleta da integral da Eq. (5.15), cortando a integral em um valor muito grande Λ , i.e. $\Lambda \gg \Lambda_{QCD}$,

$$\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle_\Lambda = -\frac{3}{\pi^2} \int^\Lambda dk k^2 \frac{M_k}{\sqrt{k^2 + M_k^2}}. \quad (6.6)$$

Usando a equação de gap (no limite quiral), não é difícil mostrar que

$$M_k \rightarrow \frac{2}{3} [V_C(k) + 2V_T(k)] \int^k \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{M_q}{E_q}. \quad (6.7)$$

Para interações com comportamento ultravioleta da forma

$$V(k) \rightarrow \frac{4\pi\alpha_s}{k^2 \ln^\lambda(k^2)}, \quad (6.8)$$

onde $\lambda \neq 1$ e α_s são constantes (como é o caso das interações empregadas na presente tese), temos que o comportamento ultravioleta da função M_k é da forma

$$M_k \rightarrow \frac{1}{k^2 \ln^\lambda(k^2)}. \quad (6.9)$$

Substituindo isso na Eq. (6.6), temos

$$\begin{aligned} \langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle_\Lambda &\sim - \int^\Lambda dk k^2 \frac{1}{k^3 \ln^\lambda(k^2)} = -\frac{1}{2} \int^\Lambda d(k^2) \frac{1}{k^2 \ln^\lambda(k^2)} \\ &\sim \ln^{1-\lambda}(\Lambda^2). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Portanto, para as interações V_C e V_T que estamos empregando, para as quais $\lambda > 1$, a integral do condensado é finita (no limite quiral). Para $m_0 \neq 0$, a repetição da análise acima mostra que a integral é divergente.

Por outro lado, na QCD, a propriedade de liberdade assintótica diz que $\lambda = 1$, e a análise acima deve ser refeita. Especificamente, na QCD temos, além de $\lambda = 1$, que $\alpha_s = d\pi$, com $d = 12/(33 - 2N_f)$ onde N_f é o número de sabores de quarks, e que a integral do condensado diverge logaritmicamente [60]. Nesse caso, define-se

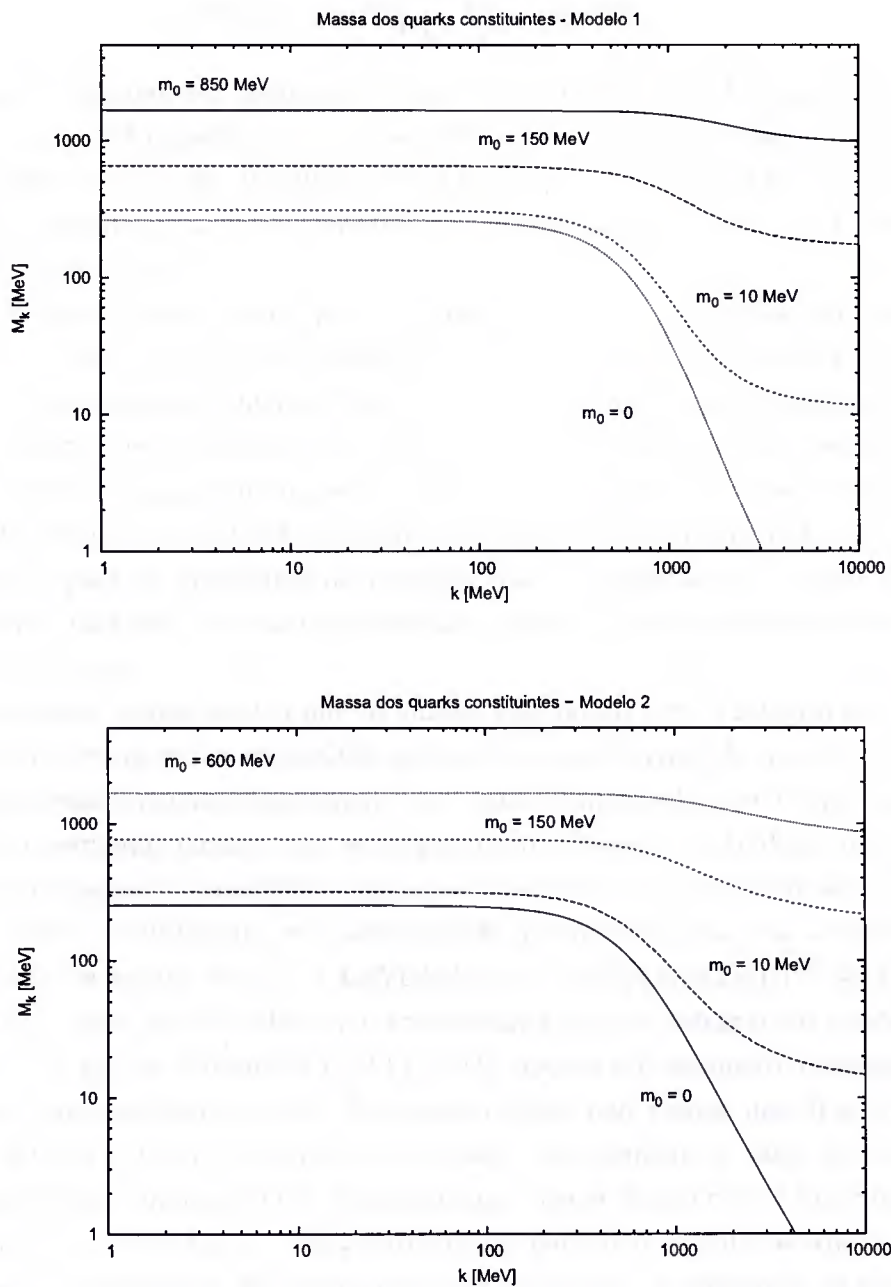


Figura 6.2: A função M_k como função do momento para diferentes valores da massa de corrente m_0 . Gráfico superior é para o Modelo 1 e o inferior para o Modelo 2.

um condensado “running”, i.e. o condensado passa a depender de uma escala de momento μ na forma

$$\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle_\mu = \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) \right]^{-d} \langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle_\Lambda. \quad (6.11)$$

Na prática, calcula-se o condensado usando a integral cortada num valor grande para Λ e o valor do condensado é então obtido para um dado μ usando a Eq. (6.11). Na verdade, quando se diz que $(-\langle 0|\bar{\psi}(x)\psi(x)|0\rangle)^{1/3} \approx 250 \text{ MeV}$, isso significa $(-\langle 0|\bar{\psi}(x)\psi(x)|0\rangle_{\mu=1\text{GeV}})^{1/3} \approx 250 \text{ MeV}$, onde a escolha da escala $\mu = 1 \text{ GeV}$ é uma escolha convencional.

Agora, para o caso de $m_0 \neq 0$, no limite de $k \rightarrow \infty$, a função M_k tem como limite m_0 . Nesse caso, independentemente do valor de λ , não é possível definir um condensado e a solução é invocar o fato que na realidade a massa de corrente também é uma quantidade “running”, i.e. $m_0(\mu)$. Na presente tese não iremos discutir esses aspectos [†], pois, sem empregar interações consistentes com a propriedade de liberdade assintótica da QCD, essa discussão seria um tanto estéril. Conforme já dito acima, para os propósitos da presente tese, o importante é o valor da massa constituinte na região de baixos momentos, o qual é determinado pela interação a momentos baixos.

A discussão acima mostra que os valores calculados com a integral que define o condensado devem ser considerados apenas como indicativos de que uma interação suficientemente forte no infravermelho está sendo empregada – se o valor da integral for muito pequeno, mesmo que se empregue interações que tenham um comportamento ultravioleta consistente com aquele previsto pela liberdade assintótica da QCD, o valor de $\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle_\Lambda$ não seria grande o suficiente para que se obtenha um condensado na escala de $\mu = 1 \text{ GeV}$ dado por $(-\langle 0|\bar{\psi}(x)\psi(x)|0\rangle)^{1/3} \approx 250 \text{ MeV}$. Portanto, o valor de 350 MeV que encontramos para a integral do condensado é indicativo de que as interações $V_C(k)$ e $V_T(k)$ podem ser realmente adequadas para uma boa fenomenologia quiral. Por essas razões, não vamos nos deter na tentativa de ajustar o valor preciso do condensado, mas somente o valor de $M_{k=0}$, pois essa quantidade é independente do comportamento de $V_C(k)$ e $V_T(k)$ no ultravioleta profundo, i.e. $k \gg \Lambda_{QCD}$. Uma outra razão para não tentarmos ajustar o comportamento ultravioleta das interações $V_C(k)$ e $V_T(k)$ é a economia de parâmetros ajustáveis. Em princípio, esse comportamento ultravioleta pode ser obtido no formalismo de Szczepaniak e Swanson, mas para tal seria necessário um estudo do ultravioleta profundo, o que não foi feito até o momento. Para o fim de estudarmos efeitos da densidade sobre a estrutura dos hádrons e suas interações a baixas

[†]A Ref. [60] apresenta uma discussão detalhada sobre esse assunto.

energias, não é necessário empregar interações com um comportamento ultravioleta preciso, pois vamos nos restringir a densidades relativamente baixas, muito aquém das densidades que levam ao desconfinamento dos quarks e glúons e à restauração da simetria quiral.

6.2 Resultados para a equação de gap a densidade finita

Finalizada a discussão dos resultados para a equação de gap no vácuo, vamos agora analisar resultados para densidade finita. Os efeitos do meio na equação de gap aparecem através da função de F_k na Eq. (5.12), que depende de dois parâmetros, α e P_F . O parâmetro α vem das amplitudes Ψ_α que definem o operador de criação de bárions $B_\alpha^\dagger$ dado na Eq. (3.153), o qual, por sua vez, é empregado na definição do operador unitário da transformação de Fock-Tani. A transformação é usada para obter uma Hamiltoniana em termos de operadores de criação e aniquilação de hádrons, a qual descreve as interações entre hádrons. A forma dessa Hamiltoniana como a derivada nessa tese depende do fato que as amplitudes Ψ e Φ sejam autoestados da Hamiltoniana microscópica no espaço livre. As propriedades dos hádrons no meio nuclear, por sua vez, deveriam então ser determinadas, por exemplo, através do estudo do seus propagadores no meio empregando as técnicas usuais da teoria quântica de muitos corpos [12]. Na presente tese não vamos seguir essa rota, mas sim vamos empregar uma aproximação no espírito das aproximações de campo médio. Nessas aproximações os efeitos do meio são incorporados na massa e na energia dos quarks somente, sem levar em conta efeitos de *loops* mesônicos e correlações de curto alcance. Dentro desse espírito, no contexto da presente tese, o efeito do meio se manifesta na massa dos quarks através da função F_k . Com isso, torna-se natural definir parâmetros α e β no meio minimizando as expressões para M_N e M_D dadas nas Eqs. (3.171) e (3.171), mas empregando para M_k as soluções da equação de gap no meio. Com isso, temos então um problema de autoconsistência: para determinar as soluções M_k da equação de gap no meio, precisamos de F_k , a qual, por sua vez precisa de α , que, por sua vez precisa de M_N , a qual precisa de M_k no meio. Para resolver o problema empregamos um procedimento de iteração: (1) iniciamos resolvendo a equação de gap como no espaço livre, com o fator F_k calculado para o valor de α no espaço livre; (2) empregamos a solução da equação de gap para obter M_N e a partir desse M_N obtemos um novo α ; (3) com esse α , calculamos um novo F_k e com esse F_k resolvemos novamente a equação de gap; (4) e o processo é repetido até que o valor de α não mude mais dentro de uma precisão de uma parte em um milhão.

Antes de discutir as soluções da equação de gap no meio, seria instrutivo estu-

dar o comportamento dessa função variando arbitrariamente α e ρ_B . Na Fig. 6.3 mostramos F_k para diferentes valores de α e duas densidades bariônicas típicas. Nota-se claramente que para uma densidade baixa e um tamanho de hádron r_B pequeno – $r_B = 1/\alpha$ – o efeito do bloqueio de Pauli é praticamente zero. Portanto, nesse caso $F_k \simeq 1$, o meio não deve ter efeito no fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral. Por outro lado, para uma densidade grande e nucleons grandes, F_k se aproxima daquele de um gás de Fermi de quarks desconfinados, i.e. $F_k \simeq 1 - \theta(P_F - k) = \theta(k - P_F)$.

Para resolver a equação de gap no meio encontramos a mesma dificuldade numérica que no espaço livre relacionada ao comportamento extremamente singular da interação $V_C(k)$ no infravermelho. A subtração do “zero conveniente” como no caso do vácuo não vai funcionar no presente caso devido ao fator F_q no integrando da Eq. (5.12). No entanto, um procedimento similar pode ser empregado, em que a integral identicamente nula que é subtraída da equação da Eq. (5.12) envolve necessariamente F_k , a saber

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) F_k \frac{M_k}{E_k} \frac{1}{k} \hat{k} \cdot (\vec{k} - \vec{q}). \quad (6.12)$$

Ao invés da Eq. (6.3), obtemos agora para a parte da equação de gap que depende de $V_C(k)$ o seguinte

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} F_q \frac{f_1(\vec{k}, \vec{q}) V_C(|\vec{k} - \vec{q}|)}{E_q} &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) \frac{1}{E_q} \left(M_q - M_k \frac{q}{k} \hat{k} \cdot \hat{q} \right) \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(|\vec{k} - \vec{q}|) \left[\left(\frac{M_q}{E_q} - \frac{M_k}{E_q} \right) F_q \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{q}{k} \hat{q} \cdot \hat{k} - 1 \right) \left(\frac{M_k}{E_q} F_q - \frac{M_k}{E_k} F_k \right) \right], \end{aligned} \quad (6.13)$$

a qual, como na Eq. (6.3), é uma integral que envolve a subtração de dois termos em que cada um desses se anula independentemente para $\vec{q} \rightarrow \vec{k}$, e em que o anulamento de cada termo é independente da integral sobre os ângulos.

Vamos agora discutir os resultados para M_k como função de P_F . Como discutido acima, temos um problema autoconsistente: a equação de gap envolve a função F_k , a qual depende de P_F e α ; mas α é determinado variacionalmente minimizando a massa do nucleon que, por sua vez, depende de M_k . O problema foi resolvido por iteração, partindo do valor para α que minimiza a massa do nucleon no espaço livre, como explicado acima. Para $\Lambda_{QCD} = 250$ MeV e $m_0 = 10$ MeV, os valores no espaço livre das quantidades de interesse são :

$$M_u = M_d = 320 \text{ MeV}, \quad M_c = 1675 \text{ MeV}, \quad (6.14)$$

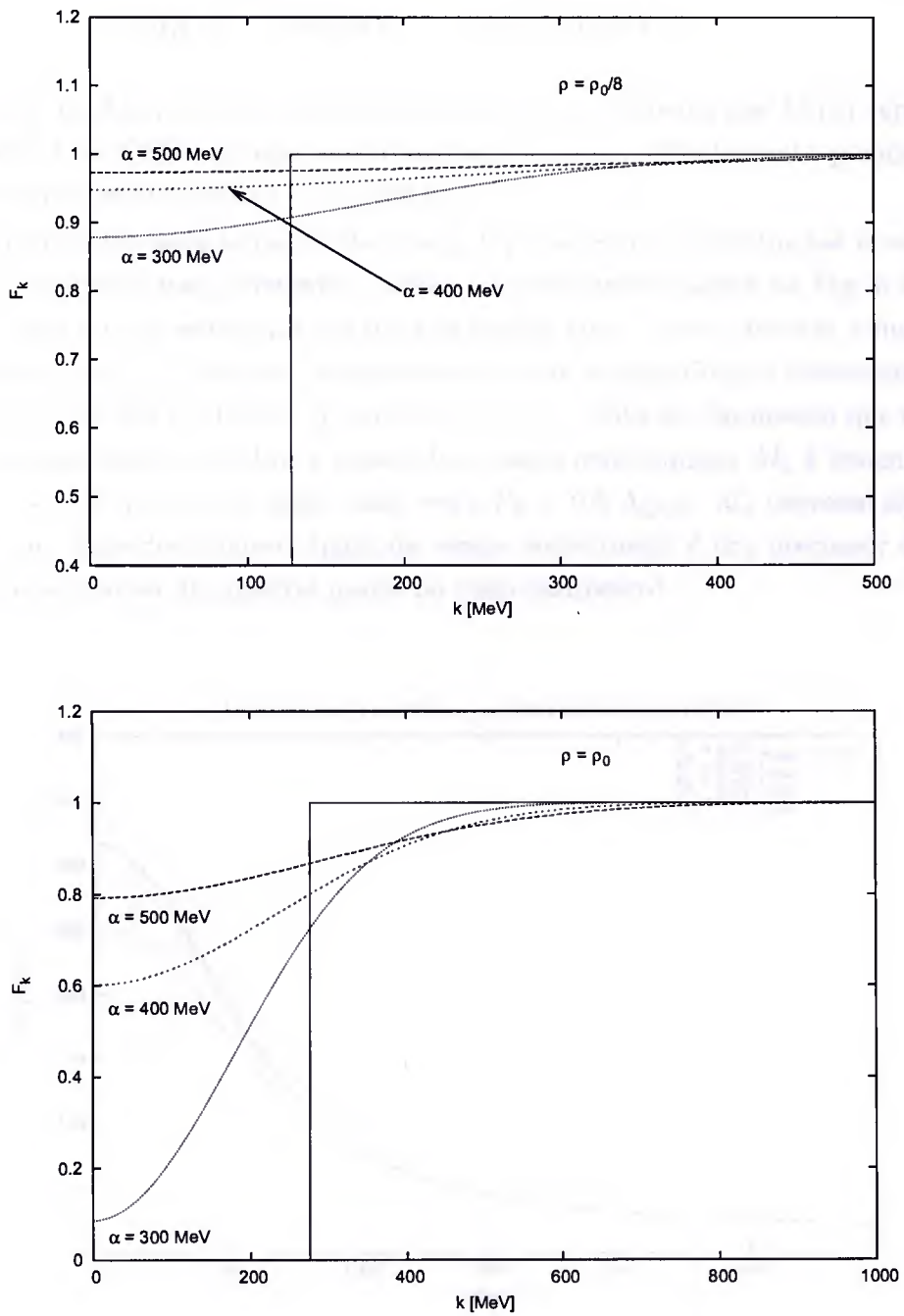


Figura 6.3: A função F_k como função do momento para diferentes valores de α . O gráfico superior é para uma densidade igual a $\rho_B = \rho_0/8$ e o inferior para $\rho_B = \rho_0$. Também está mostrada nos gráficos a correspondente função para o caso de um gás de Fermi de quarks desconfinados (linha sólida).

$$M_N = 1120 \text{ MeV}, \quad \alpha = 335 \text{ MeV}, \quad (6.15)$$

$$M_D = 1700 \text{ MeV}, \quad \beta = 315 \text{ MeV}. \quad (6.16)$$

Esse valor de Λ_{QCD} foi determinado na Ref. [42] de maneira que $V_C(k)$ reproduza o potencial da QCD na rede para duas cargas de cor infinitamente pesadas, que implica numa *string tension* $\sigma = 0.204 \text{ GeV}^2$.

Os resultados para a função de massa M_k dos quarks constituintes leves u e d como função de k para diferentes valores P_F estão apresentados na Fig. 6.4. Para deixar claro que os resultados são para os quarks leves, vamos denotar a função de massa como $M_u(k)$. Também, apresentamos todas as quantidades dimensionais em unidades da escala intrínseca do problema, Λ_{QCD} . Nota-se claramente que o efeito da densidade bariônica sobre a massa dos quarks constituintes M_u é insignificante para $P_F < 0.5 \Lambda_{QCD}$. Por outro lado, para $P_F > 0.5 \Lambda_{QCD}$, M_u decresce significativamente. Esse decréscimo rápido da massa constituinte é um precursor de uma restauração parcial da simetria quiral no meio hadrônico[†].

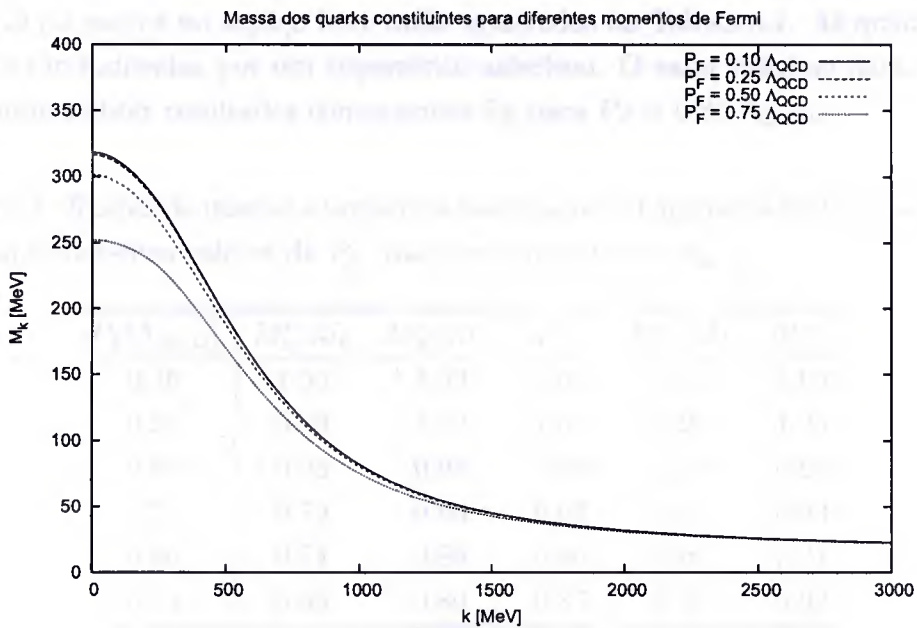


Figura 6.4: A função M_k como função do momento para diferentes valores de P_F .

[†]Estritamente, uma restauração da simetria quiral ocorreria somente quando $m_0 = 0$; quando $m_0 \neq 0$, para densidades muito altas – muito além das que vamos discutir na presente tese – o máximo de “restauração” é $M_k \rightarrow m_0$.

6.3 Resultados para massas e tamanhos hadrônicos a densidade finita

A diminuição da massa constituinte M_u no meio implica em mudanças em outras quantidades envolvidas diretamente no problema, como a massa dos núcleon e o seu tamanho α . Uma diminuição no valor da massa dos quarks M_u implica numa maior energia cinética dos quarks no interior dos núcleons e, por isso, o tamanho desses deve aumentar. O aumento do tamanho do núcleon no meio tem um efeito realimentador na restauração da simetria quiral através da função F_k que entra na equação de gap; à medida que o tamanho do núcleon $-\langle r^2 \rangle_N \sim 1/\alpha^2$ aumenta, a função F_k exclui cada vez mais os estados de momentos que contribuem de maneira significativa na integral da equação de gap para M_k . Além do efeito sobre os núcleons no meio, a diminuição da massa M_u também afeta outros hádrons que venham a se propagar no meio, como os mésons D , os quais são de interesse nessa tese. Como esses mésons contêm somente um quark leve, suas propriedades devem ser menos afetados que as propriedades dos núcleons ou as de outros mésons leves que contenham somente quarks leves. Resultados para as razões entre massas e tamanhos do núcleon e méson D no meio e no espaço livre estão mostrados na Tabela 6.1. As quantidades no meio são indicadas por um superscrito asterisco. O valor máximo para P_F que conseguimos obter resultados convergentes foi para $P_F = 0.85 \Lambda_{QCD}$.

Tabela 6.1: Razões de massas e tamanhos hadrônicos a densidades finitas e no espaço livre para diferentes valores de P_F (dado em unidades de Λ_{QCD}).

$P_F[\Lambda_{QCD}]$	M_u^*/M_u	M_N^*/M_N	α^*/α	M_D^*/M_D	β^*/β
0.10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.25	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00
0.50	0.95	0.98	0.98	1.00	0.98
0.75	0.79	0.90	0.92	1.00	0.93
0.80	0.74	0.86	0.90	0.99	0.91
0.85	0.66	0.80	0.87	0.99	0.88

Verifica-se na tabela que o efeito na massa dos núcleons é realmente muito maior que para a massa dos mésons D , de acordo com os argumentos qualitativos que expostos acima. Para $P_F = 0.85 \Lambda_{QCD}$, a massa do núcleon no meio M_N^* é 20% menor que seu valor M_N no espaço livre, e o α^* é 13% menor que o α no espaço livre, isso implica em $r_N^* = 1.15 r_N$, onde $r_N = \sqrt{\langle r^2 \rangle_N}$. O valor da massa dos

mésons D no meio M_D^* praticamente não muda em relação ao seu valor M_D no espaço livre, apesar da mudança de β no meio ser praticamente igual à de α .

Notamos que para $\Lambda_{QCD} = 250$ MeV, temos que $P_F = 0.85 \Lambda_{QCD} = 1.08 \text{ fm}^{-1}$ e $r_N^* = 0.7$ fm. Esse valor de r_N^* é ainda um tanto menor que o valor crítico de $r_N = 1.12$ fm, dado pela Eq. (5.47), para a validade da aproximação de quasi-partículas independentes que está sendo empregada nessa tese. Essa condição sobre o raio crítico foi derivada supondo o núcleon uma esfera de raio r_N em que a matéria hadrônica em seu interior está uniformemente distribuída sobre seu volume. O fato de obtermos uma restauração parcial significativa para um valor relativamente baixo do momento de Fermi – $P_F = 1.08 \text{ fm}^{-1}$ corresponde a uma densidade bariônica $\rho_B = \rho_0/2$ – está associado ao fato de empregarmos funções Gaussianas para as funções de onda dos núcleons, as quais não representam muito bem o comportamento assintótico das funções de onda de um potencial confinante que cresce linearmente com a distância[§]. Isso significa que, mesmo que a distância média entre dois núcleons seja razoavelmente grande, como é o caso para uma densidade bariônica $\rho_B = \rho_0/2$, as caudas Gaussianas das funções de onda implicam numa superposição apreciável das estruturas de quarks de núcleons diferentes. Essa superposição é a reponsável pela forte supressão de Pauli em F_k para essas densidades relativamente baixas. No entanto, é interessante notar que a restauração parcial da simetria quiral obtida aqui ainda é muitíssimo menor que a obtida em estudos anteriores, em que a simetria quiral é restaurada em um sistema de quarks desconfinados a uma densidade bariônica ρ_B da ordem de um centésimo [29, 61] da densidade normal da matéria nuclear ρ_0 !

Funções de onda mais realistas podem ser obtidas empregando expansões em um conjunto finito de funções com um comportamento assintótico consistente com o potencial confinante linear. Isso requer a diagonalização da matriz Hamiltoniana com elementos de matriz calculados nessa conjunto de funções. Uma estratégia tal implica num aumento considerável do esforço computacional. No entanto, eventualmente, quando os parâmetros e as formas funcionais das interações microscópicas $V_C(k)$ e $V_T(k)$ estiverem mais bem estabelecidos, tal esforço deverá ser empreendido.

[§]A transformada de Fourier de um potencial $V(k) = 8\pi\sigma/k^4$, como o que estamos empregando nessa tese, é $V(r) = \sigma r$.

6.4 Resultados para a interação de mésons D com núcleons a densidade finita

Para finalizar, vamos investigar a dependência com a densidade bariônica da interação efetiva DN - mais especificamente, $\bar{D}^0 N$ e $D^- N$. A interação DN no espaço livre foi investigada no contexto do presente modelo nas Refs. [18, 19]. Resultados preliminares da dependência com a densidade para seções de choque e deslocamentos de fase dessa interação foram publicados na Ref. [20]. Aqui vamos apresentar resultados para o potencial de interação (no espaço de coordenadas), que é o ingrediente principal para qualquer cálculo para mudanças nas propriedades de propagação de um méson D no meio nuclear [62]. Conforme já dito anteriormente, vamos nos concentrar nesse processo em vista de seu grande interesse atual, com a perspectiva dos experimentos que estão sendo planejados pelas colaborações $\bar{P}$ ANDA e CBM do laboratório FAIR na Alemanha. O processo físico relevante é a produção de mésons charmosos através da aniquilação de antiprótons em alvos nucleares. Os mésons produzidos propagam-se no meio nuclear e suas interações com os núcleons no meio devem ser diferentes do que as interações no espaço livre – nesse último caso os antiprótons seriam aniquilados no deuteron.

Como vimos anteriormente, dada a interação microscópica e as funções de onda dos hádrons ao nível dos quarks, a representação Fock-Tani (ou o Resonating Group Method) permite obter uma interação efetiva hádron-hádron. Para o caso particular do potencial efetivo V_{DN} , as derivações explícitas aparecem nas Refs. [54] e [18]. Em geral, esse potencial é obtido no espaço dos momentos, e depende dos momentos inicial $\vec{p}$ e final $\vec{p}'$ no sistema centro de massa dos hádrons, $V_{DN}(\vec{p}, \vec{p}')$, ou seja, o potencial é não local, i.e. ele não depende somente do momento transferido $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$, mas depende também do momento $\vec{P} = (\vec{p} + \vec{p}')/2$. Com o objetivo de melhor apresentar e discutir os efeitos da densidade, vamos considerar uma aproximação local e fazer uma transformada de Fourier para o espaço de coordenadas. Isso vai nos permitir discutir os resultados em termos de mudanças na intensidade e no alcance desse potencial devido a mudanças nas massas dos quarks e no tamanho dos hádrons envolvidos.

Por completeza e para tornar a leitura da tese mais fácil, vamos transcrever da Ref. [18] a forma final do potencial $V_{DN}(\vec{p}, \vec{p}')$. O potencial é o resultado da troca de quarks e gluons entre os hádrons – essa troca é conhecida como *quark-gluon interchange mechanism*. Esse mecanismo está representado de forma pictórica na

Fig. 6.5. Explicitamente, o potencial pode ser escrito como [18]

$$V_{DN}(\vec{p}, \vec{p}') = \sum_{i=1}^4 [I_i(\vec{p}, \vec{p}') + I_i(\vec{p}', \vec{p})] / 2, \quad (6.17)$$

os subíndices $i = 1, \dots, 4$ referem-se a cada um dos gráficos da Fig. 6.5.

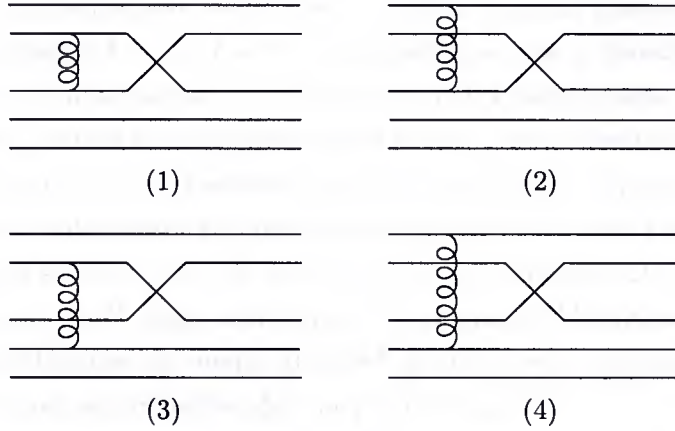


Figura 6.5: Representação pictórica das quatro contribuições que compõem $V_{DN}(\vec{p}, \vec{p}')$.

As funções $I_i(\vec{p}, \vec{p}')$ na Eq. (6.17) podem ser escritas como

$$I_i(\vec{p}, \vec{p}') = \left[\frac{3g}{(3+2g)\pi\alpha^2} \right]^{3/2} I(a_i, b_i) \exp \left(-c_i \vec{p}^2 - d_i \vec{p}'^2 + e_i \vec{p} \cdot \vec{p}' \right), \quad (6.18)$$

com

$$I(a_i, b_i) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[\omega_i^C V_C(q) + \omega_i^T \frac{2}{3} \frac{q^2}{M_u^2} \delta_i V_T(q) \right] \exp \left(-a_i q^2 + \vec{b}_i \cdot \vec{q} \right), \quad (6.19)$$

onde $g = \alpha^2/\beta^2$, com α e β sendo os parâmetros variacionais das funções de onda do núcleon e do méson D , respectivamente, e os fatores ω_i^C e ω_i^T contém fatores combinatórios e o resultado das somas sobre índices de cor e spin-sabor dos quarks, cujos valores podem ser encontrados no Apêndice D. As expressões explícitas para os fatores $a_i, \vec{b}_i, c_i, d_i$ e δ_i também são apresentadas no Apêndice D.

Introduzindo as variáveis $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$ e $\vec{P} = (\vec{p} + \vec{p}')/2$, temos que $V_{DN}(\vec{p}, \vec{p}') \rightarrow V_{DN}(\vec{q}, \vec{P})$. Como dito acima, a variável $\vec{q}$ é o momento transferido no sistema centro de massa, e fazendo a transformada de Fourier com relação a esse momento, obtemos um potencial no espaço de configuração. No entanto, esse potencial ainda depende do momento $\vec{P}$ – diz-se que um potencial não local é equivalente a um potencial local

que depende da energia. A aproximação local consiste em desprezar a dependência em $\vec{P}$ do potencial, pois pode-se verificar que essa dependência em $\vec{P}$ é fraca. Com isso, obtemos um potencial no espaço de configuração $V_{DN}(r)$. É importante notar que a transformada de Fourier precisa ser efetuada numericamente, pois as integrais $I(a_i, b_i)$ da Eq. (6.19) não têm solução analítica para as interações $V_C(q)$ e $V_T(q)$ que estamos empregando nessa tese.

Na Fig. 6.6 apresentamos resultados numéricos para os potenciais $V_{DN}(r)$ para os estados com isospin $I = 1$ e $I = 0$. A dependência com a densidade vem através dos tamanhos α e β dos hádrons e da massa do quark constituinte M_u . Essa última dependência vem interação de glúons transversos, como mostrado na Eq. (6.19). Antes de prosseguir com a discussão com os resultados, é importante chamar à atenção que o que está sendo analisado aqui é o efeito de uma restauração parcial da simetria quiral sobre a parte de curto alcance da interação DN , a qual é gerada pelo mecanismo de *quark-gluon interchange mechanism*. Além dessa parte de curto alcance, há contribuições de médio alcance[¶] geradas pelo mecanismo da troca de mésons [54], que não são considerados na presente tese.

Como antecipado, são dois os efeitos das mudanças no meio dos tamanhos dos hádrons e da massa do quark constituinte leve M_u no potencial $V_{DN}(r)$: tanto o alcance como a intensidade dos potenciais em ambos canais aumentam. Desses aumentos, o mais significativo é o da intensidade, que é da de 20% nos dois canais. Uma das razões principais para esse aumento é o fator envolvendo M_u no denominador da interação de glúons transversos na Eq. (6.19) – essa interação contribui com um fator proporcional a $1/M_u^2$ nos gráficos (1) e (3), e com $1/M_u M_c$ nos gráficos (2) e (4) da Fig. 6.5 (note que para os gráficos (2) e (4) o fator δ_i é dado por $\delta_2 = \delta_4 = M_u/M_c$, como pode ser visto no Apêndice D). O alcance aumenta devido ao aumento no parâmetro α no meio. Agora, é importante notar que se não fosse pela dependência com a massa M_u da contribuição dos glúons transversos, a interação no meio na realidade diminuiria! Isso é devido ao fato que um aumento na extensão das funções de onda dos hádrons *desfavorece* o mecanismo de *quark-gluon interchange*, pois a intensidade desse mecanismo depende do grau de superposição entre as funções de onda dos hádrons. Como a normalização das funções de onda não muda no meio, um aumento na extensão dessas funções de onda implica numa diminuição no valor delas na origem, o que, por sua vez, implica numa diminuição nas amplitudes de probabilidade de superposição das estruturas de quarks dos dois hádrons envolvidos na interação.

[¶]Como não há contribuições de troca de um pión, não há componente de longo alcance na interação DN .

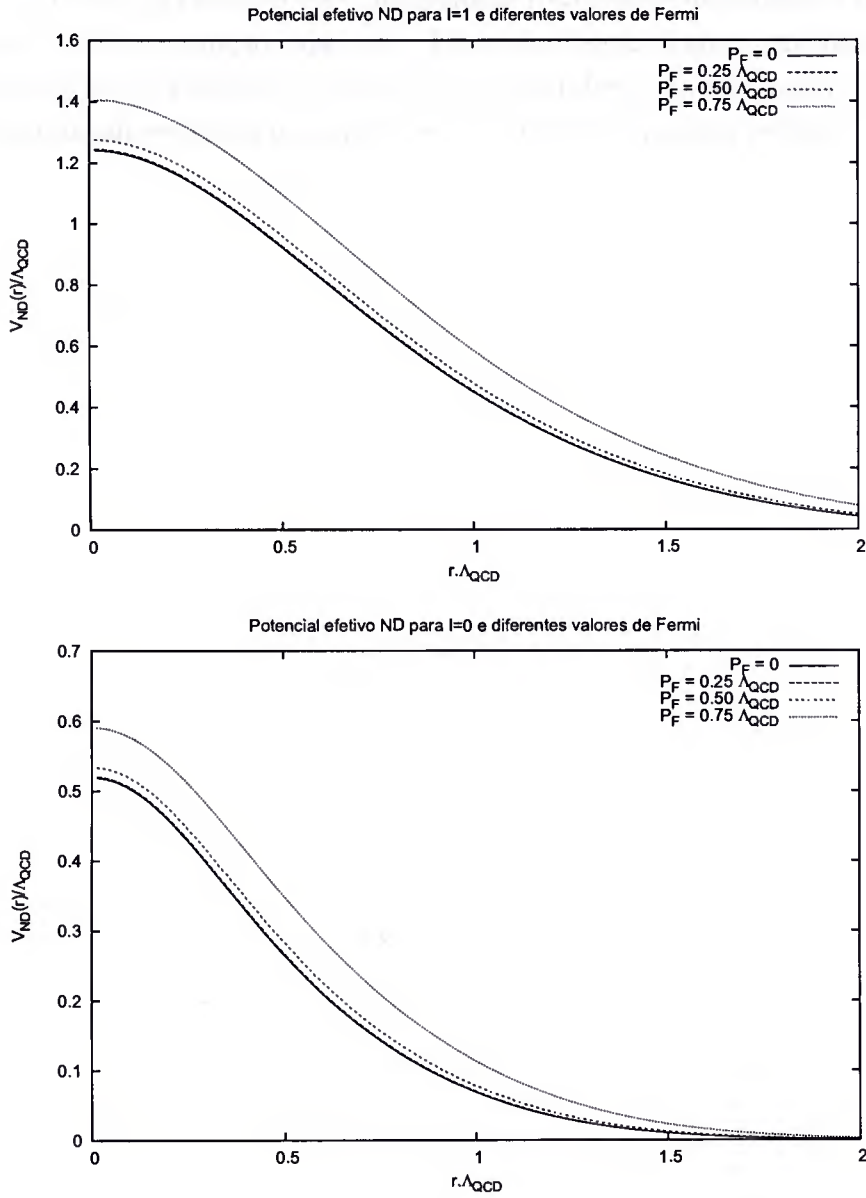


Figura 6.6: Os potenciais locais $V_{DN}(r)$ para os estados de isospin $I = 1$ e $I = 0$.

Para finalizar, as implicações dessas mudanças do potencial $V_{DN}(r)$ em observáveis requer um estudo detalhado das propriedades espectrais do propagador do méson D no meio nuclear [62]. Um estudo dessa natureza requer um conhecimento das interações do méson com os núcleons do meio. As propriedades espectrais no meio envolvem as partes reais e imaginárias (largura de decaimento) do pólo do propagador e de sua função espectral. Essas mudanças podem, em princípio, ser observadas através da análise dos decaimentos eletrofracos desses mésons, pois esses dependem crucialmente das propriedades espectrais dos mésons no meio.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

A tese teve como objetivo desenvolver um formalismo geral para estudar a simetria quiral na matéria hadrônica em que os quarks e gluons estão confinados no interior dos hádrons. A motivação principal para desenvolver um formalismo dessa natureza é o fato que eventuais sinais sobre uma restauração parcial da simetria quiral em experimentos de laboratório devem ser acessíveis através de produtos de decaimentos e rearranjos hadrônicos devidos às interações entre os hádrons enquanto ainda no meio. Como vimos, o meio hadrônico induz modificações nas propriedades dos quarks constituintes que compõem os hádrons do meio. Uma mudança nas propriedades dos quarks constituintes têm efeito nas massas e nos tamanhos dos hádrons. Essas mudanças nas propriedades dos hádron modificam observáveis físicos como fatores de forma, interações entre hádrons e decaimentos no meio. Na grande maioria dos estudos sobre efeitos da temperatura e densidade bariônica sobre a simetria quiral a matéria hadrônica tem sido modelada como sendo um sistema de quarks desconfinados. Um sistema de quarks desconfinados deve existir no interior de estrelas superdensas, como também deve ser produzido na região central de uma colisão de íons pesados a altas energias. Apesar do efeito da temperatura e densidade sobre a quebra da simetria quiral ser mais forte nessas situações de quarks desconfinados, há de se reconhecer que é praticamente impossível extrair sinais sobre esses efeitos nessas situações. Por esses motivos, na presente tese o fenômeno da restauração parcial da simetria quiral foi estudado de maneira a levar em conta explicitamente o confinamento dos quarks e gluons em hádrons.

Uma das dificuldades principais para tratar efeitos de temperatura e densidade sobre quarks que estão confinados no interior de hádrons está na necessidade de levar em conta os estados ligados num sistema de muitos corpos. A grande dificuldade está no fato que os tradicionais métodos da teoria quântica de campos foram desenvolvidos para sistemas de partículas “elementares”, isto é, esses métodos fazem uso de campos que satisfazem regras de (anti) comutação canônicas. No en-

tanto, estados ligados, como os hádrons, são descritos por operadores compostos, os quais não satisfazem regras canônicas de (anti) comutação. O formalismo da representação Fock-Tani que empregamos na tese é particularmente adequado para esses propósitos. Esse formalismo, originalmente desenvolvida para problemas de Física Atômica, tem se mostrado útil na derivação de interações efetivas entre hádrons no contexto de modelos de quarks.

Idealmente, o estudo da quebra dinâmica da simetria quiral, tanto no vácuo como na matéria hadrônica, deveria ser realizado diretamente com as equações da QCD. No entanto, como mencionado muitas vezes nessa tese, o fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral é um fenômeno de baixas energias e, como tal, é de natureza não perturbativa, como também é o confinamento dos quarks e gluons. Apesar dos métodos de primeiros princípios da QCD na rede serem adequados para problemas não perturbativos, esses são formulados no espaço Euclidiano, o que inviabiliza seu uso direto em problemas a densidades bariônicas finitas. Apesar de truques e aproximações terem sido inventados para tratar problemas a densidade finita, esses ainda não são eficientes o suficiente para fazer contato com dados experimentais sobre interações hadrônicas num meio nuclear. Portanto, para se fazer progresso e ganhar intuição sobre esses problemas não perturbativos, é necessário empregar métodos de aproximação e modelos efetivos. Dentro desse contexto, empregamos a formulação da QCD no calibre de Coulomb dentro de um formalismo Hamiltoniano. Uma das principais motivações para empregar um formalismo dessa natureza é o fato de que as técnicas tradicionais da teoria de muitos corpos podem ser diretamente implementadas para o estudo de sistemas hadrônicos. Em particular, no calibre de Coulomb a Hamiltoniana pode ser escrita inteiramente em termos de graus de liberdade físicos, não necessitando a introdução de campos de fantasmas. Nesse formalismo, é possível definir quantidades como a função de onda do vácuo e estados de muitas partículas num espaço de Fock, os quais podem ser escritos em termos de operadores de criação e aniquilação. Essas características da formulação Hamiltoniana da QCD no calibre de Coulomb permitem extrair um modelo efetivo em que quarks e gluons são confinados em estados ligados singletos de cor, e em que a simetria quiral é quebrada dinamicamente. Com base nesse modelo de quarks é possível descrever as interações entre hádrons, como também obter um sistema de muitos hádrons a temperatura e densidade finitas, sem a necessidade de introduzir novos parâmetros. Mais especificamente, o modelo empregado é um modelo para a estrutura hadrônica a baixas energias, em que os bárions e mésons são estados ligados respectivamente de três quarks e um quark e antiquark com massas de aproximadamente 300 MeV. Essas massas são geradas pelo fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral, pela mesma interação empregada para obter as funções

de onda dos bárions e mésons. Uma vez obtidas as massas dos quarks e antiquarks e as funções de onda dos hádrons, a representação Fock-Tani permite obter uma Hamiltoniana escrita em termos de graus de liberdade hadrônicos apenas, a qual descreve as interações entre hádrons. A Hamiltoniana hadrônica assim obtida não possui novos parâmetros, todas as suas propriedades são geradas a partir do modelo microscópico de quarks.

O formalismo desenvolvido na tese é de aplicabilidade a diferentes sistemas hadrônicos, e é adequado para estudar efeitos de temperatura e densidade bariônica sobre o fenômeno da quebra dinâmica da simetria quiral para um meio hadrônico formado por bárions e mésons. Aplicações desse formalismo, com resultados numéricos explícitos, se limitaram a um meio formado por núcleons a temperatura zero. Foram discutidas soluções numéricas da equação de gap no vácuo e no meio hadrônico formado por nucleons. Também foram obtidos resultados numéricos para os efeitos da densidade bariônica sobre os tamanhos e as massas dos núcleons e mésons $\bar{D}$. Por fim, os efeitos dessas mudanças nos tamanhos e massas dos hádrons sobre as interações efetivas entre mésons $\bar{D}^0$ e D^- com nucleons foram investigados no contexto de um potencial local derivado a partir do mesmo modelo microscópico de quarks empregado para obter as funções de onda desses hádrons.

É importante salientar que o emprego da representação Fock-Tani não é imprescindível para obter os resultados que foram obtidos na presente tese. Por exemplo, um formalismo de funções de Green em que estados ligados são levados em conta explicitamente [63] é igualmente adequado, apesar de ser muito mais complicado e menos transparente que o formalismo que empregamos. Ainda mais, a representação Fock-Tani pode tratar sistemas em que hádrons e quarks e gluons desconfiados estão simultaneamente presentes no sistema. Uma situação dessas acontece a temperaturas e densidades mais altas que as empregadas na presente tese, quando os potenciais V_C e V_T podem sofrer mudanças substanciais em vista da blindagem de Debye, i.e. o potencial linear torna-se blindado pelos quarks do meio. No entanto, no limite em que o número de cores N_c é muito grande, a dependência da blindagem de Debye com N_c é da forma $1/N_c$, significando que o potencial não muda substancialmente no meio a densidade finita [64] – claramente esse é um argumento válido para N_c grande, como $N_c = 3$ no mundo real, fica em aberto a questão de quanto o potencial de confinamento muda no meio a densidade finita. Essa é uma questão muito interessante e que poderá ser investigada com o formalismo desenvolvido na presente tese.

O presente formalismo pode ser melhorado em muitas direções. Uma das mais importantes refere-se à aproximação de baixos momentos e o ansatz de uma única Gaussiana para as amplitudes de Fock dos estados ligados de hádrons [18]. Esses

podem ser melhorados simplesmente não empregando a expansão de baixos momentos e usando uma combinação do método variacional e diagonalização de matriz. As amplitudes são expandidas numa base Gaussiana com parâmetros variacionais e a matriz Hamiltoniana calculada nessa base diagonalizada. Obviamente que isso vai implicar no emprego de um método Monte Carlo para as integrais de momento, pois quando a aproximação de baixos momentos é relaxada, não é possível fazer integrações analiticamente. Uma saída [18] é fitar as componentes superior e inferior dos espinores de Dirac por Gaussianas.

Apêndice A

Cálculo das somas de Matsubara

As somas de frequência que aparecem nas Eqs.(3.91) e (3.92) são típicas de problemas de física de muitos corpos e por isso vamos explicitar de forma sucinta como são calculadas tais frequências neste Apêndice.

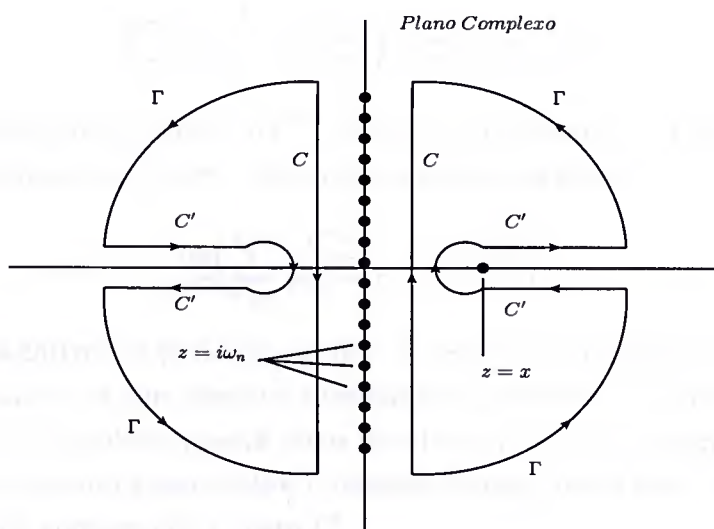


Figura A.1: Contorno de integração para o cálculo das somas de frequências.

Vamos considerar, inicialmente, o caso de bosons, onde a soma das frequências toma seguinte forma:

$$\sum_n \frac{e^{i\omega_n \eta}}{i\omega_n - x} \quad (\text{A.1})$$

com $\omega_n = 2n\pi/\beta\hbar$. A equação acima diverge logaritmicamente sem o fator de convergência de tal forma que η deve permanecer positivo até que a soma seja efetuada.

A forma mais direta de efetuar tal soma é usar os métodos de integração de contorno, que exige uma função meromórfica com pólos em números inteiros pares.

Uma possível escolha seria uma função do tipo $\beta\hbar(e^{\beta\hbar z} - 1)^{-1}$, cujos pólos encontram-se em $z = 2n\pi i/\beta\hbar = i\omega_n$, cada um com resíduo unitário. Considere um contorno C sobre o eixo imaginário (figura), então a integral de contorno

$$\frac{\beta\hbar}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{e^{\beta\hbar z} - 1} \frac{e^{\eta z}}{z - x} \quad (\text{A.2})$$

que reproduz exatamente a soma dada na Eq.(A.1) dada acima, pois o integrando possui uma sequência infinita de pólos simples em $i\omega_n$ com resíduo $(\beta\hbar)^{-1} e^{i\omega_n \eta} (i\omega_n - x)^{-1}$. Agora deformamos o contorno para C' e Γ (figura). Se $|z| \rightarrow \infty$, com a condição $\text{Re } z > 0$, então o integrando é de ordem $|z|^{-1} \exp [-(\beta\hbar - \eta)\text{Re } z]$; se $|z| \rightarrow \infty$, com a condição $\text{Re } z < 0$, então o integrando é de ordem $|z|^{-1} \exp [\eta \text{Re } z]$. Desde que $\beta\hbar > \eta > 0$ o Lema de Jordan assegura que as contribuições dos arcos Γ de raio R se anulam quando $R \rightarrow \infty$ e ficamos só com as contribuições provenientes ao longo do caminho C' ,

$$\sum_n \frac{e^{i\omega_n \eta}}{i\omega_n - x} = \frac{\beta\hbar}{2\pi i} \int_{C'} \frac{dz}{e^{\beta\hbar z} - 1} \frac{e^{\eta z}}{z - x}. \quad (\text{A.3})$$

A única singularidade incluída em C' é um pólo simples em $z = x$ de tal forma que, aplicando o teorema de Cauchy, obtemos o seguinte resultado

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{n \text{ par}} \frac{e^{i\omega_n \eta}}{i\omega_n - x} = \frac{-\beta\hbar}{e^{\beta\hbar x} - 1}, \quad (\text{A.4})$$

onde o sinal negativo surge devido ao fato de estarmos integrando ao longo de C' no sentido negativo, o que possibilita tomarmos o limite $\eta \rightarrow 0$. Embora a função $-\beta\hbar(e^{-\beta\hbar z} - 1)^{-1}$ também possua pólos simples em $z = i\omega_n$ com resíduo unitário, as contribuições da integração sobre Γ deverão divergir neste caso, o que impediria a deformação do contorno de C para C' .

Uma análise similar pode ser feita para o caso fermiônico, onde $\omega_n = (2n + 1)\pi/\beta\hbar$. A função $-\beta\hbar(e^{-\beta\hbar z} - 1)^{-1}$ possui pólos em números inteiros ímpares $z = i\omega_n$, com resíduos unitários, e a série pode ser reescrita na forma

$$\sum_{n \text{ impar}} \frac{e^{i\omega_n \eta}}{i\omega_n - x} = \frac{-\beta\hbar}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{e^{\beta\hbar z} + 1} \frac{e^{\eta z}}{z - x}, \quad (\text{A.5})$$

onde C é o mesmo contorno apresentado na figura. O Lema de Jordan novamente nos permite deformar os contornos de integração de C para C' porque $\beta\hbar > \eta > 0$ e o pólo simples em $z = x$ produzirá o resultado a seguir:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{n \text{ impar}} \frac{e^{i\omega_n \eta}}{i\omega_n - x} = \frac{\beta\hbar}{e^{\beta\hbar x} + 1}. \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, combinando os dois resultados (para bosons e fermions) teremos as expressões para as somas de Matsubara dadas na forma

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_n \frac{e^{i\omega_n \eta}}{i\omega_n - x} = \mp \frac{\beta \hbar}{e^{\beta \hbar x} \mp 1}. \quad (\text{A.7})$$

Apêndice B

Funções de spin e sabor do nucleon e dos mesons D.

Neste Apêndice vamos apresentar as funções de spin e sabor dos nucleons e dos mesons D . Vamos começar discutindo o nucleon. O spin do nucleon é $1/2\hbar$ e o seu isospin é $1/2$. A projeção $1/2$ do isospin é o próton e a projeção $-1/2$ é o nêutron. Para construirmos estes estados vamos considerar um modelo de quarks não relativístico, como fizemos em toda esta tese. No limite de simetria quiral exata de sabor, onde $(m_u = m_d)$, o estado de spin-sabor deve ser simétrico para os estados fundamentais dos nucleons. Isto acontece devido ao fato de que a função de onda de cor para os nucleons deve ser totalmente anti-simétrica, pois este forma o único estado de simetria $SU(3)$ com cor nula, e a parte espacial da função de onda deve ser simétrica (pois estamos interessados nos estados fundamentais). A construção de um estado de spin-sabor totalmente simétrico é conseguida a partir do uso de estados de spin e sabor com simetria mista, i.e., estados com simetria definida (estado simétrico ou anti-simétrico) sob a troca de duas partículas, mas sem simetria definida com relação às trocas das duas primeiras com a terceira partícula. Especificamente,

$$|p \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_{MS}(\uparrow)\eta_{MS}(u) + \chi_{MA}(\uparrow)\eta_{MA}(u)], \quad (B.1)$$

$$|p \downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_{MS}(\downarrow)\eta_{MS}(u) + \chi_{MA}(\downarrow)\eta_{MA}(u)], \quad (B.2)$$

$$|n \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_{MS}(\uparrow)\eta_{MS}(d) + \chi_{MA}(\uparrow)\eta_{MA}(d)], \quad (B.3)$$

$$|n \downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_{MS}(\downarrow)\eta_{MS}(d) + \chi_{MA}(\downarrow)\eta_{MA}(d)], \quad (B.4)$$

onde

$$\chi_{MS}(\uparrow) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\chi_{10}\alpha - \sqrt{2}\chi_{11}\beta), \quad \chi_{MA}(\uparrow) = \chi_{00}\alpha, \quad (B.5)$$

$$\chi_{MS}(\downarrow) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\chi_{10}\beta - \sqrt{2}\chi_{1-1}\alpha), \quad \chi_{MA}(\downarrow) = \chi_{00}\beta, \quad (B.6)$$

e

$$\eta_{MS}(u) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\eta_{10}u - \sqrt{2}\eta_{11}d), \quad \eta_{MA}(u) = \eta_{00}u, \quad (\text{B.7})$$

$$\eta_{MS}(d) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\eta_{10}d - \sqrt{2}\eta_{1-1}u), \quad \eta_{MA}(d) = \eta_{00}d, \quad (\text{B.8})$$

 com α e β sendo autoestados da matriz de Pauli de spin σ_3 com autovalores ± 1 , e

$$\begin{aligned} \chi_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\beta - \beta\alpha) & \chi_{1-1} &= \beta\beta \\ \chi_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\beta + \beta\alpha) & \chi_{11} &= \alpha\alpha \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

e

$$\begin{aligned} \eta_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du) & \eta_{1-1} &= dd \\ \eta_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du) & \eta_{11} &= uu. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

 Podemos escrever agora as funções de spin e sabor para o proton e para o neutron com projeções $\pm 1/2$ na forma

$$\begin{aligned} |p \uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} \left[2u_{\uparrow}(1)d_{\downarrow}(2)u_{\uparrow}(3) + 2d_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)u_{\uparrow}(3) + 2u_{\uparrow}(1)u_{\uparrow}(2)d_{\downarrow}(3) \right. \\ &\quad - u_{\downarrow}(1)d_{\uparrow}(2)u_{\uparrow}(3) - u_{\uparrow}(1)d_{\uparrow}(2)u_{\downarrow}(3) - d_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2)u_{\uparrow}(3) \\ &\quad \left. - d_{\uparrow}(1)u_{\uparrow}(2)u_{\downarrow}(3) - u_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2)d_{\uparrow}(3) - u_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)d_{\uparrow}(3) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} |p \downarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} \left[-2u_{\downarrow}(1)d_{\uparrow}(2)u_{\downarrow}(3) - 2d_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2)u_{\downarrow}(3) - 2u_{\downarrow}(1)u_{\downarrow}(2)d_{\uparrow}(3) \right. \\ &\quad + u_{\uparrow}(1)d_{\downarrow}(2)u_{\downarrow}(3) + u_{\downarrow}(1)d_{\downarrow}(2)u_{\uparrow}(3) + d_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)u_{\downarrow}(3) \\ &\quad \left. + d_{\downarrow}(1)u_{\downarrow}(2)u_{\uparrow}(3) + u_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)d_{\downarrow}(3) + u_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2)d_{\downarrow}(3) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

e

$$\begin{aligned} |n \uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} \left[-2u_{\downarrow}(1)d_{\uparrow}(2)d_{\uparrow}(3) - 2d_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2)d_{\uparrow}(3) - 2d_{\uparrow}(1)d_{\uparrow}(2)u_{\downarrow}(3) \right. \\ &\quad + u_{\uparrow}(1)d_{\downarrow}(2)d_{\uparrow}(3) + u_{\uparrow}(1)d_{\uparrow}(2)d_{\downarrow}(3) + d_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)d_{\uparrow}(3) \\ &\quad \left. + d_{\uparrow}(1)u_{\uparrow}(2)d_{\downarrow}(3) + d_{\uparrow}(1)d_{\downarrow}(2)u_{\uparrow}(3) + d_{\downarrow}(1)d_{\uparrow}(2)u_{\uparrow}(3) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} |n \downarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} \left[2u_{\uparrow}(1)d_{\downarrow}(2)d_{\downarrow}(3) + 2d_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)d_{\downarrow}(3) + 2d_{\downarrow}(1)d_{\downarrow}(2)u_{\uparrow}(3) \right. \\ &\quad - u_{\downarrow}(1)d_{\uparrow}(2)d_{\downarrow}(3) - u_{\downarrow}(1)d_{\downarrow}(2)d_{\uparrow}(3) - d_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2)d_{\downarrow}(3) \\ &\quad \left. - d_{\downarrow}(1)u_{\downarrow}(2)d_{\uparrow}(3) - d_{\uparrow}(1)d_{\downarrow}(2)u_{\downarrow}(3) - d_{\downarrow}(1)d_{\uparrow}(2)u_{\downarrow}(3) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

A partir dessas expressões pode-se obter diretamente os fatores $T_{\alpha}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ que entram na definição do operador de criação de um barion. Por exemplo, usando as convenções:

$$\begin{aligned}\alpha = 1 &\rightarrow p \uparrow, & \alpha = 2 &\rightarrow p \downarrow \\ \alpha = 3 &\rightarrow n \uparrow, & \alpha = 4 &\rightarrow n \downarrow,\end{aligned}\tag{B.15}$$

e

$$\begin{aligned}\alpha_i = 1 &\rightarrow u \uparrow, & \alpha_i = 2 &\rightarrow u \downarrow \\ \alpha_i = 3 &\rightarrow d \uparrow, & \alpha_i = 4 &\rightarrow d \downarrow,\end{aligned}\tag{B.16}$$

temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{18}T_1^{141} &= \frac{1}{18}T_1^{114} = \frac{1}{18}T_1^{411} = 2 \\ \frac{1}{18}T_1^{231} &= \frac{1}{18}T_1^{213} = \frac{1}{18}T_1^{123} = \frac{1}{18}T_1^{132} = \frac{1}{18}T_1^{312} = \frac{1}{18}T_1^{321} = -1.\end{aligned}\tag{B.17}$$

Os outros $T_i^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ são obtidos da mesma forma.

Por fim escreveremos a estrutura de spin e sabor para os mesons D:

$$|\overline{D}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\beta - \beta\alpha)u\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{\uparrow}\bar{c}_{\downarrow} - u_{\downarrow}\bar{c}_{\uparrow}),\tag{B.18}$$

$$|D^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\beta - \beta\alpha)d\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(d_{\uparrow}\bar{c}_{\downarrow} - d_{\downarrow}\bar{c}_{\uparrow}),\tag{B.19}$$

donde podemos extrair facilmente os coeficientes $\chi_{\alpha}^{\alpha_1\alpha_2}$ que entram na definição do operador de criação de um meson D.

Apêndice C

Derivação das massas dos barions e dos mesons

Neste apêndice vamos apresentar a derivação das expressões para as massas dos barions e dos mesons. O presente Apêndice está incluído aqui por completeza e está baseado na derivação original feita na Ref. [18]. Vamos empregar como ansatz as funções Gaussianas dadas no Capítulo 3. Necessitamos da energia de partícula única ω_k , dada pela Eq. (3.144). Conforme mencionado anteriormente, ω_k recebe uma contribuição de autoenergia dependente de V_C e V_T . Essa contribuição de autoenergia é divergente no infravermelho devido a V_C , que é uma interação confinante. Para os estados singlete de cor, como o barion e o meson que estamos considerando, essa divergência torna-se crucial para o cancelamento da divergência infravermelha vinda do termo H_4 .

Por outro lado, a aproximação de baixos momentos introduz artificialmente uma divergência ultravioleta nesse termo de autoenergia. O problema está na integral sobre a variável q , a dependência na variável k não causa problema pois no fim do cálculo ela será integrada com uma função de onda que se anula rapidamente com o aumento de k . A integral sobre a variável q não será atenuada desta forma por uma função de onda e o problema persistirá. No caso onde não se utiliza a aproximação de baixos momentos a integral sobre a variável q é finita. Para evitarmos este problema, simplesmente não faremos a aproximação de baixos momentos para o termo que M_q/E_q na Eq. (3.144) proporcional a $V_C(q)$ – no entanto, essa mesma aproximação não é boa para o termo proporcional a $V_T(q)$ porque outros termos na Eq. (3.144) devem ser levados em conta, o que levaria a mais uma integral que não pode ser feita analiticamente. Com isso, temos então

$$\omega_k = m_f + \left(1 - \frac{m_f}{2M_f}\right) + \frac{2}{3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_C(q) \frac{M_q}{E_q}. \quad (\text{C.1})$$

C.1 A massa dos barions

Definimos a massa de um barion com spin-sabor α (no caso de um nucleon $\alpha = \{M_s, M_t\}$, com $M_s = 1/2$ para spin e $M_t = 1/2$ para isospin) na forma

$$M_b = M_{B_\alpha} \equiv E_{\alpha\beta}(\vec{0}, \vec{0}) \Big|_{\beta=\alpha}, \quad (C.2)$$

onde

$$E_{\alpha\beta}(\vec{P}, \vec{P}') \equiv \frac{\langle \alpha \vec{P} | H | \beta \vec{P}' \rangle}{\langle \alpha \vec{P} | \beta \vec{P}' \rangle} \quad (C.3)$$

com

$$|\alpha \vec{P}\rangle = B_\alpha^\dagger(\vec{P})|\Omega\rangle, \quad (C.4)$$

sendo $B_\alpha^\dagger(\vec{P})$ o operador de criação do barion e $\vec{P}$ seu momento do centro de massa. Como dito na tese $|\Omega\rangle$ é o vácuo com a simetria quiral quebrada dinamicamente. A representação explícita do operador de criação de um barion, com todos os termos explicitados, é dado por

$$\begin{aligned} B_\alpha^\dagger(\vec{P}) &= \frac{1}{\sqrt{3!}} \frac{\epsilon^{c_1 c_2 c_3}}{\sqrt{3!}} \frac{T_\alpha^{f_1 s_1 f_2 s_2 f_3 s_3}}{\sqrt{18}} \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \Phi_{\vec{P}}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \\ &\times q_{s_1}^{\dagger c_1 f_1}(\vec{p}_1) q_{s_2}^{\dagger c_2 f_2}(\vec{p}_2) q_{s_3}^{\dagger c_3 f_3}(\vec{p}_3), \end{aligned} \quad (C.5)$$

onde $\Phi_{\vec{P}}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ é a amplitude no espaço de Fock no espaço de momentos. Note que, em princípio, $\Phi_{\vec{P}}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ também carrega um índice α que, por simplicidade, foi omitido. Para o estado fundamental do barion $T_\alpha^{f_1 s_1 f_2 s_2 f_3 s_3}$ e $\Phi_{\vec{P}}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ são completamente simétricos em seus índices. A amplitude no espaço dos momentos pode ser escrita na forma

$$\Phi_{\vec{P}}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \Phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3). \quad (C.6)$$

Como fizemos na Tese, para manipularmos de forma simplificada as expressões, vamos utilizar a notação abreviada, onde colocamos todos os índices dos quarks (momento, cor, spin e sabor) em um único índice na forma

$$\mu \equiv \{\vec{p}, c, s, f\}, \quad (C.7)$$

e da mesma forma para o índice do barion

$$\alpha \equiv \{\vec{P}, \alpha\} \quad (C.8)$$

deve ficar claro no contexto que α indica a projeção de spin-sabor quando os índices forem feitos explícitos e indicará spin-sabor na notação abreviada. Desta maneira podemos escrever a Eq.(C.5) na seguinte forma

$$B_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3!}} \Psi_\alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger. \quad (C.9)$$

É importante notar que $\Psi_\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3}$ é completamente antissimétrica nos índices $\mu_1\mu_2\mu_3$ devido aos índices de cor contidos nessa forma abreviada. Deve ficar claro também que estamos usando a convenção de que há uma soma ou integral sobre os índices repetidos, a menos que seja indicado o contrário.

Na notação abreviada, o hamiltoniano de partícula única pode ser escrito como (aqui só estamos considerando a parte de quarks da hamiltoniana por ser a parte relevante no processo)

$$H_K = \int d^3k \epsilon_f(\vec{k}) q_s^{\dagger cf}(\vec{k}) q_s^{cf}(\vec{k}) \equiv \epsilon(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu. \quad (C.10)$$

Da mesma maneira, a interação V_{qq} de H_4 pode ser escrita na forma abreviada

$$V_{qq} = \frac{1}{2} V(\mu\nu\sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma. \quad (C.11)$$

Com todos estes ingredientes em mãos podemos iniciar os cálculos para a obtenção da massa dos barions. Para iniciarmos vamos calcular

$$E_{\alpha\beta}^K(\vec{P}, \vec{P}') \equiv \frac{\langle \alpha \vec{P} | H_K | \beta \vec{P}' \rangle}{\langle \alpha \vec{P} | \beta \vec{P}' \rangle}. \quad (C.12)$$

O numerador da equação acima será dado por

$$\langle \alpha | H_K | \beta \rangle = \frac{1}{3!} \Psi_\alpha^*{}^{\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\nu_1\nu_2\nu_3} \epsilon(\mu) \langle 0 | q_{\mu_3} q_{\mu_2} q_{\mu_1} q_\mu^\dagger q_\mu q_{\nu_1}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger | 0 \rangle. \quad (C.13)$$

Após efetuarmos as contrações entre os operadores de criação e aniquilação e utilizarmos o fato de que as amplitudes Ψ são completamente antissimétricas em seus índices, obteremos o resultado

$$\langle 0 | q_{\mu_3} q_{\mu_2} q_{\mu_1} q_\mu^\dagger q_\mu q_{\nu_1}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger | 0 \rangle \rightarrow 18 \delta_{\mu\nu_1} \delta_{\mu_1\mu} \delta_{\mu_2\nu_2} \delta_{\mu_3\nu_3}. \quad (C.14)$$

A flecha indica que esta expressão será verdadeira somente se estiver vinculada aos índices da amplitude Ψ . Desta forma teremos

$$\langle \alpha | H_K | \beta \rangle = 3 \Psi_\alpha^*{}^{\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\nu_1\nu_2\nu_3} \epsilon(\mu) \delta_{\mu\nu_1} \delta_{\mu_1\mu} \delta_{\mu_2\nu_2} \delta_{\mu_3\nu_3}. \quad (C.15)$$

Usando as funções delta teremos

$$\langle \alpha | H_K | \beta \rangle = 3 \Psi_\alpha^*{}^{\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu_3} \epsilon(\mu_1). \quad (C.16)$$

Reinserindo os índices a expressão acima, em sua forma completa, será dada por

$$\begin{aligned} \langle \alpha \vec{P} | H_K | \beta \vec{P}' \rangle &= 3 \frac{1}{3!} \epsilon^{c_1 c_2 c_3} \epsilon^{c_1 c_2 c_3} \frac{1}{18} T_\alpha^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} T_\beta^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \epsilon(\vec{p}_1) \\ &\times \delta(\vec{P} - \vec{p}_3 - \vec{p}_2 - \vec{p}_1) \delta(\vec{P}' - \vec{p}_3 - \vec{p}_2 - \vec{p}_1) |\Phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)|^2 \end{aligned} \quad (C.17)$$

Note que no último passo supusemos que $\epsilon(\mu) = \epsilon(\vec{k})$ é a mesma para todos os sabores (o que é aproximadamente verdade quando consideramos nucleons). Da normalização teremos

$$\frac{1}{18} T_{\alpha}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} T_{\beta}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \delta_{\alpha\beta} \quad (C.18)$$

e

$$\frac{1}{3!} \epsilon^{c_1 c_2 c_3} \epsilon^{c_1 c_2 c_3} = 1. \quad (C.19)$$

Com estes resultados poderemos escrever

$$\langle \alpha \vec{P} | H_K | \beta \vec{P}' \rangle = \delta(\vec{P}' - \vec{P}) \delta_{\alpha\beta} K_{\alpha}(\vec{P}) \quad (C.20)$$

onde

$$K_{\alpha}(\vec{P}) = 3 \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \epsilon(\vec{p}_1) \delta(\vec{P}' - \vec{p}_3 - \vec{p}_2 - \vec{p}_1) |\Phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)|^2. \quad (C.21)$$

Aqui introduzimos um índice α no K devido ao fato que Φ , em princípio, depende desse índice, como indicado.

O termo do denominador em (C.12), $\langle \alpha \vec{P} | \beta \vec{P}' \rangle$, é obtido facilmente,

$$\begin{aligned} \langle \alpha \vec{P} | \beta \vec{P}' \rangle &= \frac{1}{3!} \epsilon^{c_1 c_2 c_3} \epsilon^{c_1 c_2 c_3} \frac{1}{18} T_{\alpha}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} T_{\beta}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \delta(\vec{P} - \vec{P}') \\ &\times \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \delta(\vec{P}' - \vec{p}_3 - \vec{p}_2 - \vec{p}_1) |\Phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)|^2 \\ &= \delta(\vec{P} - \vec{P}') \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (C.22)$$

Assim o resultado final para a Eq.(C.12) será

$$E_{\alpha\beta}^K(\vec{P}, \vec{P}') = \delta_{\alpha\beta} K_{\alpha}(\vec{P}). \quad (C.23)$$

Da Eq.(C.2) temos que a contribuição do hamiltoniano de partícula única para a massa do barion no estado de spin-sabor α , que denotamos por M_{α}^K , é dado por

$$\begin{aligned} M_B^K &= K_{\alpha}(\vec{0}) \\ &= 3 \int d^3 p_1 d^3 p_2 \epsilon(\vec{p}_1) |\Phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2)|^2 \\ &= 3 \int d^3 p_1 \epsilon(\vec{p}_1) \int d^3 p_2 |\Phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2)|^2. \end{aligned} \quad (C.24)$$

A seguir vamos considerar a contribuição da parte de interação do hamiltoniano

$$E_{\alpha\beta}^I(\vec{P}, \vec{P}') \equiv \frac{\langle \alpha \vec{P} | H_I | \beta \vec{P}' \rangle}{\langle \alpha \vec{P} | \beta \vec{P}' \rangle}. \quad (C.25)$$

Temos que

$$\begin{aligned} \langle \alpha | H_I | \beta \rangle &= \frac{1}{2} V(\mu\nu\sigma\rho) \frac{1}{3!} \Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\nu_1\nu_2\nu_3} \\ &\times \langle 0 | q_{\mu_3} q_{\mu_2} q_{\mu_1} q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma q_{\nu_1}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (C.26)$$

onde

$$\begin{aligned} V(\mu\nu\sigma\rho) &= \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_4 c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \frac{q}{(2\pi)^3} \tilde{V}_\Gamma(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \\ &\times \delta^{f_4 f_2} \delta^{f_3 f_1} [u_\alpha^{\dagger\mu}(\vec{p}_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^\sigma(\vec{p}_2)] [u_\gamma^{\dagger\nu}(\vec{p}_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\delta^\rho(\vec{p}_1)]. \end{aligned} \quad (C.27)$$

Para calcular o termo $\langle 0 | q_{\mu_3} q_{\mu_2} q_{\mu_1} q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma q_{\nu_1}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger | 0 \rangle$ precisamos efetuar a contração dos operadores de criação e aniquilação, cujo resultado final é dado por

$$\langle 0 | q_{\mu_3} q_{\mu_2} q_{\mu_1} q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma q_{\nu_1}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\nu_3}^\dagger | 0 \rangle \rightarrow 36 \delta_{\sigma\nu_1} \delta_{\rho\nu_2} \delta_{\mu_1\mu} \delta_{\mu_2\nu} \delta_{\mu_3\nu_3}. \quad (C.28)$$

Considerando este resultado teremos

$$\begin{aligned} \langle \alpha | H_I | \beta \rangle &= \frac{6}{2} V(\mu\nu\sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\nu_1\nu_2\nu_3} \delta_{\sigma\nu_1} \delta_{\rho\nu_2} \delta_{\mu_1\mu} \delta_{\mu_2\nu} \delta_{\mu_3\nu_3} \\ &= \frac{6}{2} V(\mu\nu\sigma\rho) \Psi_\alpha^{*\mu\nu\mu_3} \Psi_\beta^{\sigma\rho\nu_3}. \end{aligned} \quad (C.29)$$

Agora, usando as funções delta e explicitando o potencial $V(\mu\nu\sigma\rho)$, e as amplitudes $\Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3}$ e $\Psi_\beta^{\nu_1\nu_2\nu_3}$, obteremos

$$\begin{aligned} \langle \alpha | H_I | \beta \rangle &= \frac{6}{3!} \frac{1}{2} \epsilon^{c_4 c_3 c} \epsilon^{c_2 c_1 c} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_4 c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \delta^{f_4 f_2} \delta^{f_3 f_1} \\ &\times \int \frac{d^3 k d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^3} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_4 - \vec{p}_3 - \vec{k}) \\ &\times \delta(\vec{p}_\beta - \vec{p}_2 - \vec{p}_1 - \vec{k}) \frac{1}{18} T_\alpha^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha'} [u_\alpha^{\dagger f_4}(\vec{p}_4, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_2}(\vec{p}_2, s_2)] \\ &\times [u_\gamma^{\dagger f_3}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\gamma^{f_1}(\vec{p}_1, s_1)] T_\beta^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha'} \tilde{V}_\Gamma(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \\ &\times \Phi^*(\vec{p}_4, \vec{p}_3, \vec{k}) \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, \vec{k}) \\ &= \frac{6}{3!} \frac{1}{2} \epsilon^{c_4 c_3 c} \epsilon^{c_2 c_1 c} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_4 c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \delta^{f_4 f_2} \delta^{f_3 f_1} \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\beta) \\ &\times \int \frac{d^3 k d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^3} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \frac{1}{18} T_\alpha^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha'} \\ &\times [u_\alpha^{\dagger f_4}(\vec{p}_4, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_2}(\vec{p}_2, s_2)] [u_\gamma^{\dagger f_3}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\delta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1)] \\ &\times T_\beta^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha'} \tilde{V}_\Gamma(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \Phi^*(\vec{p}_4, \vec{p}_3, \vec{p}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\ &\times \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2). \end{aligned} \quad (C.30)$$

Lembramos aqui que não deve haver confusão pelo fato de estarmos usando os mesmos símbolos α e β para os índices de barions e índices espinoriais de Dirac;

o significado de cada um deve ser claro no contexto em que surgem nas equações. Com isto obteremos para $M_\alpha^I \equiv E_{\alpha\alpha}^I(\vec{0}, \vec{0})$ o resultado a seguir

$$\begin{aligned}
 M_b^I &= \frac{6}{3!} \frac{1}{2} \epsilon^{c_4 c_3 c} \epsilon^{c_2 c_1 c} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_4 c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \delta^{f_4 f_2} \delta^{f_3 f_1} \\
 &\times \int \frac{d^3 k \, d^3 p_1 \, d^3 p_2 \, d^3 p_3 \, d^3 p_4}{(2\pi)^3} \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \frac{1}{18} T_\alpha^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha} \\
 &\times [u_\alpha^{\dagger f_4}(\vec{p}_4, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_2}(\vec{p}_2, s_2)] [u_\gamma^{\dagger f_3}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\delta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1)] \\
 &\times T_\beta^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha} \tilde{V}_\Gamma(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \Phi^*(\vec{p}_4, \vec{p}_3, \vec{p}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\
 &\times \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2). \tag{C.31}
 \end{aligned}$$

A função delta no resultado acima nos mostra que $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$. Fazendo uma mudança de variáveis $\vec{q} = \vec{p}_3 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_4$ podemos escrever $\vec{p}_3 = \vec{p}_1 + \vec{q}$ e $\vec{p}_4 = \vec{p}_2 - \vec{q}$ e, usando as deltas de sabor poderemos escrever

$$\begin{aligned}
 M_b^I &= \frac{6}{3!} \frac{1}{2} \epsilon^{c_4 c_3 c} \epsilon^{c_2 c_1 c} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_4 c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \int \frac{d^3 q \, d^3 p_1 \, d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{18} T_\alpha^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha} \\
 &\times [u_\alpha^{\dagger f_2}(\vec{p}_2 - \vec{q}, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_2}(\vec{p}_2, s_2)] [u_\gamma^{\dagger f_1}(\vec{p}_1 + \vec{q}, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\delta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1)] T_\beta^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha} \\
 &\times \tilde{V}_\Gamma(\vec{q}) \Phi^*(\vec{p}_2 - \vec{q}, \vec{p}_1 + \vec{q}, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2). \tag{C.32}
 \end{aligned}$$

Calculando o fator de cor e como

$$\epsilon^{c_4 c_3 c} \epsilon^{c_2 c_1 c} = \delta_{c_4 c_2} \delta_{c_3 c_1} - \delta_{c_4 c_1} \delta_{c_3 c_2} \tag{C.33}$$

obteremos

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{c_4 c_3 c} \epsilon^{c_2 c_1 c} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_4 c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} &= \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_2 c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1 c_1} - \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1 c_2} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_2 c_1} \\
 &= \left[\text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right) \right] \left[\text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right) \right] - \left[\text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^a}{2} \right) \right] \\
 &= -4. \tag{C.34}
 \end{aligned}$$

Com esse resultado podemos escrever a contribuição do termo de interação para massa na forma

$$\begin{aligned}
 M_b^I &= -2 \int \frac{d^3 q \, d^3 p_1 \, d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{18} T_\alpha^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha} [u_\alpha^{\dagger f_2}(\vec{p}_2 - \vec{q}, s_4) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_2}(\vec{p}_2, s_2)] \\
 &\times [u_\gamma^{\dagger f_1}(\vec{p}_1 + \vec{q}, s_3) \Gamma_{\gamma\delta} u_\delta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1)] T_\beta^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha} \tilde{V}_\Gamma(\vec{q}) \\
 &\times \Phi^*(\vec{p}_2 - \vec{q}, \vec{p}_1 + \vec{q}, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2). \tag{C.35}
 \end{aligned}$$

Estas expressões são exatas, ou seja, não envolvem as aproximações de baixos momentos para os espiniores.

Utilizando a expressão para energia dos quarks dada na Eq. (C.1) podemos escrever para M_b^K

$$\begin{aligned}
 M_b^K &= 3 \int d^3 p_1 \epsilon(\vec{p}_1) \int d^3 p_2 |\phi_\alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2)|^2 \\
 &= 3m_f + 3 \left(1 - \frac{m_f}{2M_f}\right) + \int d^3 p_1 d^3 p_2 \frac{p_1^2}{M_f} |\phi_\alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2)|^2 \\
 &\times 2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V_C(q) \frac{M_q}{E_q}. \tag{C.36}
 \end{aligned}$$

Para o termo M_b^I , empregando a aproximação de baixos momentos, obteremos a expressão

$$\begin{aligned}
 M_b^I &= -2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{18} T_\alpha^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha} \left[\delta_{s_3 s_1} \delta_{s_4 s_2} V_C(q) \right] T_\beta^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha} \\
 &\times \int d^3 p_1 d^3 p_2 \Phi^*(\vec{p}_2 - \vec{q}, \vec{p}_1 + \vec{q}, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\
 &= -2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V_C(q) \\
 &\times \int d^3 p_1 d^3 p_2 \Phi^*(\vec{p}_2 - \vec{q}, \vec{p}_1 + \vec{q}, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2). \tag{C.37}
 \end{aligned}$$

Para calcular as integrais vamos utilizar o ansatz gaussiano discutido no texto principal da Tese, ou seja,

$$\Phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = \frac{3}{\pi^2 \alpha^4} e^{-[(\vec{p}_1)^2 + (\vec{p}_2)^2 + (\vec{p}_3)^2]/(2\alpha^2)}, \tag{C.38}$$

para a qual teremos

$$\int d^3 p_2 |\Phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2)|^2 = \left(\frac{3}{\pi^2 \alpha^4} \right)^{(3/2)} e^{-3p_1^2/(2\alpha^2)} \tag{C.39}$$

$$\int d^3 p_1 d^3 p_2 \Phi^*(\vec{p}_2 - \vec{q}, \vec{p}_1 + \vec{q}, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \Phi(\vec{p}_2, \vec{p}_1, -\vec{p}_1 - \vec{p}_2) = e^{-q^2/(2\alpha^2)} \tag{C.40}$$

Juntando todas as partes poderemos agora escrever a equação que fornece a massa do barion:

$$\begin{aligned}
 M_b &= M_\alpha^K + M_\alpha^I \\
 &= 3m_f + 3 \left(1 - \frac{m_f}{2M_f}\right) \left(\frac{3}{2\pi\alpha^2} \right)^{3/2} \int d^3 p_1 \frac{p_1^2}{M_f} e^{-3p_1^2/(2\alpha^2)} \\
 &- 2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V_C(q) \left[e^{-q^2/(2\alpha^2)} - \frac{M_q}{E_q} \right] \\
 &\simeq 3m_f + \frac{2\alpha^2}{M_f} - 2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V_C(q) \left[e^{-q^2/(2\alpha^2)} - \frac{M_q}{E_q} \right], \tag{C.41}
 \end{aligned}$$

onde desprezamos o termo $m_f/2M_f \simeq 0.01$.

C.2 A massa dos mesons

De maneira análoga ao caso da massa dos barions definimos a massa de um meson com projeção de spin-sabor α como

$$M_{m_\alpha} \equiv E_{\alpha\beta}(\vec{0}, \vec{0}) \Big|_{\beta=\alpha}, \quad (C.42)$$

onde

$$E_{\alpha\beta}(\vec{P}, \vec{P}') \equiv \frac{\langle \alpha \vec{P} | H | \beta \vec{P}' \rangle}{\langle \alpha \vec{P} | \beta \vec{P}' \rangle}, \quad (C.43)$$

com

$$|\alpha \vec{P}\rangle = M_\alpha^\dagger(\vec{P})|\Omega\rangle, \quad (C.44)$$

onde $M_\alpha^\dagger(\vec{P})$ é o operador de criação do estado de um meson e $\vec{P}$ é o momento do centro de massa do meson. Como acima, $|\Omega\rangle$ representa o estado de vácuo com a simetria quiral quebrada dinamicamente. A representação explícita do operador de criação em termos dos operadores de criação de quark e antiquark é dada por

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger(\vec{P})|\Omega\rangle = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger |\Omega\rangle, \quad (C.45)$$

com $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ normalizada como

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_\alpha \delta_\beta. \quad (C.46)$$

O valor esperado do Hamiltoniano no estado de um meson é dado por

$$\langle \alpha | H | \beta \rangle = \langle \alpha | H_K | \beta \rangle + \langle \alpha | H_I | \beta \rangle \quad (C.47)$$

com

$$\langle \alpha | H_K | \beta \rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} T(\mu) \Phi_\beta^{\mu\nu} + \Phi_\alpha^{*\mu\nu} T(\nu) \Phi_\beta^{\mu\nu}, \quad (C.48)$$

e

$$\langle \alpha | H_I | \beta \rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\beta^{\mu\nu}. \quad (C.49)$$

Para $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$ escreveremos

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = \frac{\delta^{c_\mu c_\nu}}{\sqrt{3}} \chi_\alpha^{\mu\nu} \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu) \phi_\alpha(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \quad (C.50)$$

Utilizando esta forma na Eq.(C.48) obteremos, para as contribuições dos termos de um quark e um antiquark do Hamiltoniano para a massa do meson:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | H_K | \beta \rangle &= \frac{1}{3} \delta^{c_1 c_2} \delta^{c_1 c_2} \chi^{\mu_1 \nu} \chi^{\mu_1 \nu} \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \delta(\vec{P}_\beta - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\ &\times \epsilon_{f_1}(\vec{p}_1) \phi_\alpha^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \phi_\beta(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \\ &+ \frac{1}{3} \delta^{c_1 c_2} \delta^{c_1 c_2} \chi^{\mu_1 \nu_2} \chi^{\mu_1 \nu_2} \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \delta(\vec{P}_\beta - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\ &\times \epsilon_{f_2}(\vec{p}_2) \phi_\alpha^*(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \phi_\beta(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \\ &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{P}_\beta - \vec{P}_\alpha) M_m^K, \end{aligned} \quad (C.51)$$

onde, para $\vec{P}_\alpha = 0$, M_m^K é dado por

$$M_m^K = \int d^3p_1 \epsilon_{f_1}(\vec{p}_1) |\phi(\vec{p}_1, -\vec{p}_1)|^2 + \int d^3p_2 \epsilon_{f_2}(\vec{p}_2) |\phi(-\vec{p}_2, \vec{p}_2)|^2. \quad (C.52)$$

Considerando agora o termo $\langle \alpha | H_I | \beta \rangle$, teremos

$$\begin{aligned} \langle \alpha | H_I | \beta \rangle &= \frac{1}{3} \delta^{c_3 c_4} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_3 c_1} \delta^{c_1 c_2} \chi_\alpha^{\alpha_1 \alpha_2} \chi_\beta^{\alpha_1 \alpha_2} \\ &\times \int \frac{d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 d^3p_4}{(2\pi)^3} V_\Gamma(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \\ &\times [u_\alpha^{\dagger f_1}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1)] [v_\gamma^{\dagger f_2}(-\vec{p}_2, s_2) \Gamma_{\gamma\delta} v_\delta^{f_2}(-\vec{p}_4, s_4)] \\ &\times \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(\vec{P}_\beta - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \phi^*(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \\ &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{P}_\beta) M_m^I, \end{aligned} \quad (C.53)$$

onde para $\vec{P}_\alpha = 0$, M_n^I será dado por

$$\begin{aligned} M_n^I &= -\frac{4}{3} \int \frac{d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 d^3p_4}{(2\pi)^3} V_\Gamma(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) [u_\alpha^{\dagger f_1}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1)] \\ &\times [v_\gamma^{\dagger f_2}(-\vec{p}_2, s_2) \Gamma_{\gamma\delta} v_\delta^{f_2}(-\vec{p}_4, s_4)] \delta(\vec{p}_3 + \vec{p}_4) \phi^*(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \\ &= -\frac{4}{3} \int \frac{d^3p_1 d^3p_3}{(2\pi)^3} V_\Gamma(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) [u_\alpha^{\dagger f_1}(\vec{p}_3, s_3) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1)] \\ &\times [v_\gamma^{\dagger f_2}(\vec{p}_1, s_2) \Gamma_{\gamma\delta} v_\delta^{f_2}(\vec{p}_3, s_4)] \phi^*(\vec{p}_3, -\vec{p}_3) \phi(\vec{p}_1, -\vec{p}_1) \\ &= -\frac{4}{3} \int \frac{d^3p_1 d^3q}{(2\pi)^3} V_\Gamma(\vec{q}) [u_\alpha^{\dagger f_1}(\vec{p}_1 + \vec{q}, s_3) \Gamma_{\alpha\beta} u_\beta^{f_1}(\vec{p}_1, s_1)] \\ &\times [v_\gamma^{\dagger f_2}(\vec{p}_1, s_2) \Gamma_{\gamma\delta} v_\delta^{f_2}(\vec{p}_1 + \vec{q}, s_4)] \phi^*(\vec{p}_1 + \vec{q}, -\vec{p}_1 - \vec{q}) \phi(\vec{p}_1, -\vec{p}_1), \end{aligned} \quad (C.54)$$

sendo que o fator $-4/3$ surge do cálculo do fator de cor que é calculado da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \delta^{c_3 c_4} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_3 c_1} \delta^{c_1 c_2} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \left(-\frac{\lambda^{aT}}{2} \right)^{c_3 c_1} \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_3 c_1} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^{c_1 c_3} \\ &= -\frac{1}{3} \text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^a}{2} \right) \\ &= -\frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (C.55)$$

Até aqui não foi feita nenhuma aproximação de baixos momentos dos espinores u e v .

Para as contribuições vindas de $\epsilon_f(k)$ de um quark e um antiquark para massa do meson obtemos

$$\begin{aligned} M_m^K &= m_{f_1} + m_{f_2} + \frac{2}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V_C(q) \left(\frac{M_q^{f_1}}{E_q^{f_1}} + \frac{M_q^{f_2}}{E_q^{f_2}} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{M_{f_1}} + \frac{1}{M_{f_2}} \right) \int d^3 p p^2 |\phi(p, -p)|^2, \end{aligned} \quad (C.56)$$

e para contribuição da interação quark-antiquark

$$\begin{aligned} M_m^I &= -\frac{4}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V_C(q) \\ &\times \int d^3 p_1 \phi^*(\vec{q} + \vec{p}_1, -\vec{q} - \vec{p}_1) \phi(\vec{p}_1, -\vec{p}_1). \end{aligned} \quad (C.57)$$

O ansatz gaussiano para as amplitudes ϕ é dado por

$$\phi(p_1, p_2) = \left(\frac{1}{\pi\beta^2} \right)^{3/4} e^{(-m_1\vec{p}_1 - m_2\vec{p}_2)^2/8\beta^2}, \quad (C.58)$$

onde

$$m_1 = \frac{2m_{\bar{q}}}{m_q + m_{\bar{q}}} \quad m_2 = \frac{2m_q}{m_q + m_{\bar{q}}}. \quad (C.59)$$

Desta forma teremos

$$\int d^3 p p^2 |\phi(p, -p)|^2 = \frac{3}{2} \beta^2 \quad (C.60)$$

$$\int d^3 p_1 \phi^*(\vec{q} + \vec{p}_1, -\vec{q} - \vec{p}_1) \phi(\vec{p}_1, -\vec{p}_1) = e^{-q^2/4\beta^2}. \quad (C.61)$$

Somando as contribuições dos dois termos M_m^K e M_m^I teremos finalmente a expressão para a massa do meson:

$$\begin{aligned} M_m &= m_{f_1} + m_{f_2} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{M_{f_1}} + \frac{1}{M_{f_2}} \right) \beta^2 \\ &- \frac{2}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V_C(q) \left[2 e^{-q^2/4\beta^2} - \frac{M_q^{f_1}}{E_q^{f_1}} - \frac{M_q^{f_2}}{E_q^{f_2}} \right]. \end{aligned} \quad (C.62)$$

Apêndice D

Expressões explícitas para o potencial V_{DN}

Aqui vamos apresentar as expressões explícitas de quantidades que aparecem nas Eqs. (6.17)-(6.19) que definem o potencial $V_{DN}(\vec{p}, \vec{p}')$. Iniciamos com os valores dos fatores ω_i^C e ω_i^T que aparecem na Eq. (6.19), mostrados na Tabela D.1.

Tabela D.1: Os coeficientes ω_i^C e ω_i^T da Eq. (6.19) para os processos envolvendo os sistemas D^-N e $\bar{D}^0N$ e para os estados acoplados de isospin $I = 0$ and $I = 1$.

Processo	ω_1^C	ω_1^T	ω_2^C	ω_2^T	ω_3^C	ω_3^T	ω_4^C	ω_4^T
$p \bar{D}^0 \rightarrow p \bar{D}^0$	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/18	1/3	1/18
$n D^- \rightarrow n D^-$	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/18	1/3	1/18
$p D^- \rightarrow p D^-$	1/3	1/6	1/3	1/6	1/3	1/9	1/3	1/9
$n \bar{D}^0 \rightarrow n \bar{D}^0$	1/3	1/6	1/3	1/6	1/3	1/9	1/3	1/9
$p D^- \rightarrow n \bar{D}^0$	1/3	1/6	1/3	1/6	1/3	-1/18	1/3	-1/18
$I = 0$	0	0	0	0	0	-1/6	0	-1/6
$I = 1$	-4/9	-1/3	+4/9	-1/3	+4/9	-1/18	-4/9	-1/18

Nessa tabela estão mostrados os fatores ω_i^C e ω_i^T tanto para os estados de carga D^-N e $\bar{D}^0N$ e também para os estados acoplados de isospin $I = 0$ e $I = 1$, os quais são dados em termos dos estados de carga D^-N e $\bar{D}^0N$ através das relações

$$|I = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|p\rangle, |D^-\rangle + |n\rangle, |\bar{D}^0\rangle] \quad (D.1)$$

e

$$|I = 1, M = 1\rangle = |p\rangle |\bar{D}^0\rangle \quad (D.2)$$

$$|I = 1, M = 1\rangle = |n\rangle |D^-\rangle \quad (D.3)$$

$$|I = 1, M = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|p\rangle, |D^-\rangle - |n\rangle, |\bar{D}^0\rangle] \quad (D.4)$$

A seguir, apresentamos as expressões para os fatores $a_i, \vec{b}_i, c_i, d_i$ e $\delta_i, i = 1, \dots, 4$ que aparecem nas Eqs. (6.18) e (6.19). Os subíndices $i = 1, \dots, 4$ referem-se a cada gráfico da Fig. 6.5. As expressões explícitas são [18]:

Diagrama (1):

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{3g}{(3+2g)\alpha^2}, \\
 b_1 &= -\frac{g(1+4\rho)(p+p')}{(3+2g)(1+\rho)\alpha^2}, \\
 c_1 &= \frac{3g^2 + 3(1+\rho)^2 + g(7+8\rho+10\rho^2)}{6(3+2g)(1+\rho)^2\alpha^2}, \\
 d_1 &= c_1, \\
 e_1 &= \frac{g^2 + (1+\rho)^2 - 2g(-1+\rho^2)}{(3+2g)(1+\rho)^2\alpha^2}, \\
 \delta_1 &= 1.
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

Diagrama (2):

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{g(3+g)}{2(3+2g)\alpha^2}, \\
 b_2 &= \frac{g[(2+g+2\rho)p - (1+g-2\rho)p']}{(3+2g)(1+\rho)\alpha^2}, \\
 c_2 &= \frac{3g^2 + 3(1+\rho)^2 + g(7+8\rho+10\rho^2)}{6(3+2g)(1+\rho)^2\alpha^2}, \\
 d_2 &= c_2, \\
 e_2 &= \frac{g^2 + (1+\rho)^2 - 2g(-1+\rho^2)}{(3+2g)(1+\rho)^2\alpha^2}, \\
 \delta_2 &= \rho.
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

Diagrama (3):

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{6+7g}{4(3+2g)\alpha^2}, \\
 b_3 &= \frac{-3[1+g+(1+2g)\rho]p + [3+g+(3-2g)\rho]p'}{2(3+2g)(1+\rho)\alpha^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_3 &= \frac{3g^2 + 3(1 + \rho)^2 + g(7 + 8\rho + 10\rho^2)}{6(3 + 2g)(1 + \rho)^2\alpha^2}, \\
 d_3 &= c_3, \\
 e_3 &= e_1, \\
 \delta_3 &= 1.
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

Diagrama (4):

$$\begin{aligned}
 a_4 &= \frac{2 + g}{4\alpha^2}, \\
 b_4 &= \frac{-(1 + g + \rho)(p - p')}{2(1 + \rho)\alpha^2}, \\
 c_4 &= c_1, \\
 d_4 &= d_1, \\
 e_4 &= e_1, \\
 \delta_4 &= \rho.
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

Nestas expressões, as quantidades g e ρ são definidas como

$$g = \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \quad \rho = \frac{M_u}{M_c}. \tag{D.9}$$

Referências

- [1] M. Kaku, *Quantum Field Theory - A modern introduction*, Oxford University Press (1993).
- [2] D.J. Gross e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973); H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [3] Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. **4**, 180 (1960).
- [4] J. Goldstone, Nuovo Cim. **19**, 15 (1961).
- [5] F.E. Close, *An introduction to Quarks and Partons*, Academic Press, Londres, 1979.
- [6] Informações sobre os experimentos no RHIC podem ser encontradas no link: <http://www.bnl.gov/rhic/>.
- [7] O link <http://lhc.web.cern.ch/lhc/> apresenta informações gerais sobre o LHC. Informações sobre o experimento ALICE dedicado a colisões de íons pesados no LHC podem ser encontrados no link <http://aliceinfo.cern.ch/Collaboration/>.
- [8] O site <http://www.gsi.de/fair/> apresenta informações o laboratório FAIR. Informações a respeito dos experimentos PANDA e CBM encontram-se respectivamente nos links <http://www-panda.gsi.de/html/panda.htm> e <http://www.gsi.de/fair/experiments/CBM/>.
- [9] I. Montvay e G. Muenster, *Quantum fields on a lattice*, Cambridge University Press (1994).
- [10] T. P. Cheng e L. F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particles Physics*, Oxford University Press, N. Y. (1988).
- [11] A. P. Szczepaniak e E. S. Swanson, Phys. Rev. D **65**, 025012 (2002) [arXiv:hep-ph/0107078].

- [12] A. L. Fetter e J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill Book Comp, (1971).
- [13] M. D. Girardeau, Phys. Rev. Lett. **27**, 1416 (1971); J. Math Phys. **16**, 1901 (1971).
- [14] D. Hadjimichef, *Formalismo de Fock-Tani para a Física Hadrônica*, Tese de Doutorado, IFT, 1995.
- [15] S. Szpigel, *Interação méson-méson na representação Fock-Tani*, Tese de Doutorado, USP, 1995.
- [16] D. Hadjimichef, G. Krein, S. Szpigel e J. S. da Veiga, Phys. Lett B **367**, 317 (1996).
- [17] D. Hadjimichef, G. Krein, S. Szpigel e J. S. da Veiga, Ann. Phys. (NY) **268**, 105 (1998).
- [18] V.E. Vizcarra, Excitações gluônicas e quebra dinâmica da simetria quiral nas interações hádron-hádron, Tese de Doutorado, IFT, 2008.
- [19] G. Krein e V.E. Vizcarra, Pos (Confinement8) 100.
- [20] S.M. Antunes e G. Krein, PoS (Confinement) 120.
- [21] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); **124**, 246 (1961).
- [22] U. Vogl e W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. **27**, 195 (1991).
- [23] S. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64**, (1992) 649.
- [24] T. Hatsuda e T. Kunihiro, Phys. Rep. **247** (1994), 221
- [25] M. Buballa, Phys. Rep. **407**, 205 (2005).
- [26] R. Alkhofer e P. A. Amundsen, Nucl. Phys. B **306**, 305 (1988).
- [27] A. Le Yaouanc, L. Oliver, O, Pène, J. C. Raynal, Phys. Rev. D **39**, 924 (1989).
- [28] Th. Wilke e S. P. Klevanski, Ann. Phys. (NY) **258**, 81 (1997).
- [29] A. Kocić, Phys. Rev. D **33**, 1785 (1998).
- [30] H. Yukawa, Prog. Phys. Math. Soc. of Japan **117**, 48 (1935).
- [31] S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **16**, 686 (1956).

- [32] M. Ikeda, S. Ogawa e Y. Ohnuki Prog. Theor. Phys. **22**, 715 (1959).
- [33] M. Gell Mann, 1961 (não publicado); Phys. Rev. **125**, 1067 (1962).
- [34] Y. Ne'eman, Nucl. Phys. **26**, 222 (1961).
- [35] M. Gell Mann e Y. Ne'eman, *The Eightfold Way*, W. Benjamin, (1964).
- [36] M. Gell Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [37] G. Zweig, CERN Reports 8182/TH 401 e 8419/TH 412, (Não publicado).
- [38] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **33**, 173; **35**, 167 (1971).
- [39] T.D.Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Contemporary Concepts in Physics, Volume 1 (1981).
- [40] D. Zwanziger, Nucl. Phys. B **485**, 185 (1997).
- [41] D. Epple, H. Reinhardt, W. Schleifenbaum e A. P. Szczepaniak, Phys. Rev. D **77**, 085007 (2008).
- [42] P. Guo, A. P. Szczepaniak, G. Galata, A. Vassallo and E. Santopinto, Phys. Rev. D **77**, 056005 (2008) [arXiv:0707.3156 [hep-ph]].
- [43] A. Cucchieri and D. Zwanziger, Phys. Rev. D **65**, 014001 (2001).
- [44] Y. Nakagawa, H. Toki, A. Nakamura e T. Saito PoS LAT2007:319,2007
- [45] A. Voigt, E.-M. Ilgenfritz, M. Müller-Preussker e A. Sterbeck, Phys. Rev. D **78**, 014501 (2008); *ibid* PoS LAT2007:338,2007.
- [46] G. Burgio, M. Quandt and H. Reinhardt, Phys. Rev. Lett. **102**, 032002 (2009) [arXiv:0807.3291 [hep-lat]].
- [47] F. J. Llanes-Estrada, S. R. Cotanch, A. P. Szczepaniak and E. S. Swanson, Phys. Rev. C **70**, 035202 (2004) [arXiv:hep-ph/0402253].
- [48] S. Tani, Phys. Rev. **117**, 252 (1960).
- [49] C. Lo e M.D. Girardeau, Phys. Rev. A **41**, 158 (1990).
- [50] M.D. Girardeau, G. Krein e D. hadjimichef, Mod. Phys. Lett. A **11**, 1121 (1996).
- [51] M.D. Girardeau e J.D. Gilbert, Physica **97 A**, 42 (1979).

- [52] D. Hadjimichef, *Meson baryon interaction in the quark gluon exchange framework*, nucl-th/9912022.
- [53] D. Hadjimichef, J. Haidenbauer and G. Krein, Phys. Rev. C **66**, 055214 (2002) [arXiv:nucl-th/0209026].
- [54] J. Haidenbauer, G. Krein, U. G. Meissner and A. Sibirtsev, Eur. Phys. J. A **33**, 107 (2007) [arXiv:0704.3668 [nucl-th]].
- [55] J. Haidenbauer, G. Krein, U. G. Meissner and A. Sibirtsev, Eur. Phys. J. A **37**, 55 (2008) [arXiv:0803.3752 [hep-ph]].
- [56] G. Krein e Th. A. J. Maris, Phys. Rev. C **36**, 365 (1987).
- [57] M. Betz, G. Krein e Th. A. J. Maris, Nucl. Phys. A **437**, 509 (1985).
- [58] S. M. Antunes, G. Krein and V. E. Vizcarra, Braz. J. Phys. **37**, 265 (2007).
- [59] A. Kocic, Phys. Rev. D **33**, 1785 (1986).
- [60] A.G. Williams, G. Krein e C.D. Roberts, Ann. Phys. (NY) **210**, 464 (1991).
- [61] L. Y. Glozman and R. F. Wagenbrunn, Phys. Rev. D **77**, 054027 (2008) [arXiv:0709.3080 [hep-ph]].
- [62] L. Tolos, A. Ramos and T. Mizutani, Phys. Rev. C **77**, 015207 (2008) [arXiv:0710.2684 [nucl-th]].
- [63] W. D. Kraeft, D. Kremp, W. Ebeling e G. Roepke, *Quantum Statistics of Charged Particle Systems*, Plenum, 1986.
- [64] L. McLerran e R.D. Pisarski, Nucl. Phys. A **796**, 83 (2007).

