



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Isabela Mendes Cassio

**Métodos Variacionais e Aplicações em
Equações Elípticas Semilineares**

São José do Rio Preto

2019

Isabela Mendes Cassio

**Métodos Variacionais e Aplicações em
Equações Elípticas Semilineares**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPQ.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves.

São José do Rio Preto

2019

C345m	Cassio, Isabela Mendes Métodos Variacionais e Aplicações em Equações Elípticas Semilineares / Isabela Mendes Cassio. -- São José do Rio Preto, 2019 94 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto Orientador: Sérgio Leandro Nascimento Neves 1. Análise Matemática. 2. Métodos Variacionais. 3. Equações Elípticas. I. Título.
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Isabela Mendes Cassio

**Métodos Variacionais e Aplicações em
Equações Elípticas Semilineares**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPQ.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves.

UNESP- Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador.

Prof^a. Dr^a. Juliana Conceição Precioso Pereira.

UNESP- Câmpus de São José do Rio Preto.

Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto.

UFSCAR- São Carlos.

São José do Rio Preto

22 de julho de 2019

Agradecimentos

Nos últimos seis anos, tenho sido abençoada com a presença de amigos e professores, que foram indispensáveis para minha chegada até aqui.

Em especial, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves, pela dedicação e paciência.

Agradeço aos professores Andréa e Maria Gorete, por todo apoio durante minha graduação.

Agradeço ao meu melhor amigo, Plínio, cuja companhia foi em muitas ocasiões, essencial para que eu não tenha desistido.

Agradeço à minha família. Pai, mãe e minhas irmãs, por sempre acreditar em mim.

Agradeço ao CNPQ pelo suporte financeiro, o qual foi essencial para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho vamos falar do poder e elegância do método variacional para equações diferenciais. Nosso problema modelo é uma equação elíptica semilinear com não linearidade homogênea de grau p em um domínio limitado. Vamos utilizar a teoria dos espaços de Sobolev, cujas características geométricas e topológicas facilitam os argumentos variacionais. Para isso, é necessário recuperar conceitos básicos do Cálculo Diferencial, como diferenciabilidade e regra dos multiplicadores de Lagrange que são estendidos a espaços de dimensão infinita.

Foi estudado também a teoria “minimáx”, uma técnica complexa e sofisticada, que fornece meios de provar existência de pontos críticos de funcionais mesmo quando eles deixam de ser limitados inferiormente e superiormente.

Como aplicação, estudamos o problema de Dirichlet subcrítico e com o teorema do passo da montanha, temos o resultado de existência de solução não trivial.

Finalmente estudamos o caso crítico e concluímos através de exemplos, que para este caso em particular, a topologia do domínio escolhido influencia fortemente no resultado de existência de solução não trivial.

Palavras-chaves: Métodos Variacionais, Equações Elípticas Semilineares, Espaços de Sobolev, Métodos minimáx.

Abstract

In this work we will talk about the power and elegance of the variational method for differential equations. Our model problem is a semilinear elliptical equation with homogeneous nonlinearity of degree p in a limited domain. For this, we will use the theory of the spaces of Sobolev, whose geometric and topological characteristics facilitate variational arguments. To study semilinearity, it is necessary to retrieve basic concepts of differential calculus, as differentiability and Lagrange's rule multimers that are extended to infinite dimension spaces.

The "Minimax" theory was also studied, a complex and sophisticated technique, which provides means to prove the existence of critical functional points even when they cease to be limited inferiorly and superiorly. As an application, we study the problem of subcritical Dirichlet and with the mountain pass theorem, we have the result of existence of a non-trivial solution.

Finally we study the critical case and conclude through examples, which for this particular case, the topology of the chosen domain, strongly influences the result of the existence of a non-trivial solution.

Key words: Variational Methods, Semilinear Elliptical equations, Spaces of Sobolev, Minimax Methods.

Sumário

Sumário	7
Introdução	9
1 Preliminares	13
1.1 Cálculo Diferencial	13
1.2 Espaços de Funções	14
1.3 Operadores de Nemytskii	16
1.4 Equações Elípticas	19
1.4.1 Autovalores do problema de Dirichlet	20
1.4.2 Regularidade	21
2 Métodos variacionais	23
2.1 Funcionais e Pontos Críticos	23
2.2 Gradiente	25
2.3 Existência de Extremo	29
2.3.1 Autovalor Linear	32
3 Variedades Diferenciais	34
3.1 Pontos Críticos com Restrição.	37
3.2 Variedades de Codimensão um	38
4 A procura por Pontos Críticos.	42
4.1 Princípio Variacional de Ekeland.	42
4.2 A condição de Palais-Smale.	47
4.3 O lema da deformação.	55

4.4	O Princípio Minimax e o Lema do Passo da Montanha	61
4.5	Aplicação ao problema modelo.	67
5	O caso crítico.	73
5.1	Resultado de não existência de Pohozaev	73
5.2	O Efeito da Topologia.	79
	Referências	93

Introdução

Embora o Cálculo de Variações seja visto como uma extensão do Cálculo Diferencial em espaços euclidianos, ambos surgiram ao mesmo tempo.

I. Newton, G. W. Leibniz e outros, resolveram em 1696 o problema da braquistócrona:

“dados dois pontos, qual é a curva sobre qual uma partícula desliza (sem atrito), do repouso e somente sob ação da gravidade, de um ponto a outro em tempo mínimo?”. A resposta é uma cicloide, mas chegar a este resultado, não é uma tarefa simples.

O estudo deste tipo de problema se iniciou em 1750 por L. Euler, ao descobrir, que em diversas situações, para que uma função fosse um mínimo para um funcional, era necessário que ela satisfizesse uma certa equação diferencial ordinária - a dita “equação de Euler”. Essa condição é o análogo variacional a uma aplicação de uma variável real ter derivada zero em um ponto.

Notou-se então, em meados do século 19, que não só um problema de minimização podia ser substituído por uma equação diferencial, mas também percebeu-se que a recíproca também era significativa.

Um exemplo disso foi o “método de Dirichlet”, em homenagem a G. P. L. Dirichlet, mas que também era conhecido a C. F. Gauss, G. Green e B. Riemann. Este consistia em resolver o problema a valores de fronteira para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $n \geq 2$, e f é uma função contínua, minimizando a energia do funcional

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

com $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e tal que $u(x) = f(x)$ em $\partial\Omega$.

Claro que, se u é solução deste problema de minimização, então

$$J(u) \leq J(u + t\varphi)$$

para $t > 0$, e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Integrando por partes, e usando o Teorema da divergência, temos:

$$\begin{aligned} J(u) &\leq J(u + t\varphi) \\ &= J(u) + t \int_{\Omega} \nabla \varphi(x) \nabla u(x) dx + t^2 J(\varphi) \\ &= J(u) - t \int_{\Omega} \varphi(x) \Delta u(x) dx + t^2 J(\varphi) \end{aligned}$$

Subtraindo $J(u)$, dividindo por t e tomando o limite quando $t \rightarrow 0$, obtemos:

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \Delta u(x) dx \leq 0.$$

Se trocarmos φ por $-\varphi$, obtemos a desigualdade oposta, de onde segue a igualdade:

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \Delta u(x) dx = 0,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Podemos então concluir, usando o lema fundamental

do cálculo de variações que $\Delta u \equiv 0$, mostrando assim que u é solução do problema proposto.

Gauss, Green e Dirichlet justificavam que o minimizador u sempre existia, uma vez que tal equação modela (dentre outros fenômenos) o potencial eletrostático em uma região e, por argumentos metafísicos a natureza sempre minimizaria a energia J .

Em 1870, K. Weierstrass notou que problemas matemáticos de minimização (mesmo limitados inferiormente) podiam ser insolúveis, fazendo com que o método de Dirichlet saísse de vista.

No século 20, D. Hilbert, estendeu a noção de solução para um contexto em que o método variacional se aplicava de modo simples, mas rigoroso; e, por fim, deduziu que tal solução generalizada, sob ligeiras condições de regularidade, era também uma solução clássica. Apesar de tal argumento não produzir resultados ótimos para a equação de Laplace, podia ser facilmente generalizado e usado para estudar problemas de natureza não linear.

O objetivo deste trabalho é estudar o método variacional do ponto de vista de Hilbert. Iniciamos com preliminares que se fazem necessárias, como a definição de derivada utilizada e a apresentação dos espaços de Sobolev.

Em seguida, apresentaremos o método variacional e variedades diferenciáveis, partimos do lema da deformação, o qual é demonstrado como em [Rabinowitz [12]], com este e o método “minimax”, demonstramos o teorema do passo da montanha de Ambrosetti-Rabinowitz. Como aplicação, estudamos o problema modelo

$$-\Delta u = u^p \quad \text{em } \Omega,$$

em que $1 \leq p < \frac{2n}{n-2}$, para o qual podemos garantir a existência de solução para qualquer domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Por fim, trataremos do caso crítico. Neste, temos como problema modelo

$$\begin{cases} -\Delta u(x) &= u(x) + u|u|^{2^*-2}, & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

no qual vemos o efeito da topologia do domínio nos resultados de existência de solução não trivial. Para o caso onde Ω é estritamente estrelado, estudamos o resultado de não existência de Phoezaev. Por fim, quando Ω é do tipo anel, ou seja, contém um “buraco”, demonstramos a existência de solução não trivial seguindo a idéia usada em [Coron, J.M. [5]].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Cálculo Diferencial

Sejam X, Y espaços de Banach e $\mathcal{L}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y, \text{ linear e contínua}\}$. O espaço $\mathcal{L}(X, Y)$ munido da norma $\|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup\{\|fx\|_Y : x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ é Banach. Se $\mathcal{U} \subset X$ aberto, denotamos $C(\mathcal{U}, Y) = \{f : \mathcal{U} \rightarrow Y, \text{ contínua}\}$.

Definição: Dizemos que $f: \mathcal{U} \rightarrow Y$ é diferenciável a Fréchet em $u \in \mathcal{U}$ com $Df(u) \in \mathcal{L}(X, Y)$ se

$$f(u + h) = f(u) + Df(u)[h] + o(\|h\|) \quad \text{com } h \rightarrow 0,$$

em que $o(\|h\|)$ representa o resto e $o(\|h\|) \rightarrow 0$ se $\|h\| \rightarrow 0$. f é diferenciável em $\mathcal{U}$ se é diferenciável para cada $u \in \mathcal{U}$. Segue desta definição que se f é diferenciável em u , então é contínua em u .

Para encontrar a derivada de f , pode-se considerar para todo $h \in X$, o limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(u + \epsilon h) - f(u)}{\epsilon} = Df(u)[h].$$

Se $Df(u) \in \mathcal{L}(X, Y)$, e se a aplicação $u \mapsto Df(u)$ é contínua de $\mathcal{U}$ em $\mathcal{L}(X, Y)$, então f é diferenciável em u e neste caso, $f \in C^1(\mathcal{U}, Y)$. Podemos

também denotar $Df(u)$ por $f'(u)$.

Analogamente, podemos definir que f é k -diferenciável em $\mathcal{U}$ e a aplicação $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{L}_k(X, Y)$, em que $\mathcal{L}_k(X, Y)$ é o espaço das aplicações k -lineares de X em Y , $u \mapsto D^k f(u)$ é contínua, então dizemos que $f \in C^k(\mathcal{U}, Y)$. [Veja Ambrosetti, A. , Malchiodi, A. [1].]

Se

$$\sup \left[\frac{\|f(u) - f(v)\|_Y}{\|u - v\|_X^\alpha} : u, v \in \mathcal{U}, u \neq v \right] < \infty$$

para algum $\alpha \in (0, 1]$, dizemos que $f \in C^{0,\alpha}(\mathcal{U}, Y)$. Se $\alpha < 1$, respectivamente $\alpha = 1$, então f é *Hölder* contínua com constante α , respectivamente Lipschitz contínua.

1.2 Espaços de Funções

No que segue, a menos que seja especificado, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado. Trabalharemos com os seguintes espaços de funções:

- $L^p(\Omega)$, espaço de Lebesgue com a norma $\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$;
- $H^{k,p}(\Omega)$, espaço de Sobolev com a norma $\|u\|_{H^{k,p}} = \left(\sum_{\alpha \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$;
- $C_0^\infty(\Omega)$, espaço das funções $u \in C^\infty(\Omega)$, com suporte compacto em Ω ;
- $H_0^1(\Omega)$, fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^{1,2}(\Omega)$.

Para as funções em $H_0^1(\Omega)$, temos a desigualdade de Poincaré:

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq c \int_\Omega |\nabla u|^2 dx,$$

em que $c=c(\Omega)$ é uma constante possivelmente dependente de Ω , mas independente de u . [Ver [6], Cap 5, seção 6, Teorema 3.]

Temos, como consequência da desigualdade de Poincaré que

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

é uma norma equivalente a norma usual $\|u\|_{H_0^1}$.

Teorema 1.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e limitado com $\partial\Omega$ Lipschitz, e seja $k \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$.*

i) Se $kp < n$, então $H^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q \leq \frac{np}{n-kp}$. Essa imersão é compacta para $1 \leq q < \frac{np}{n-kp}$.

ii) Se $kp = n$, então $H^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < \infty$, e essa imersão é compacta.

iii) Se $kp > n$, então $H^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$, em que

$$\alpha = \begin{cases} k - \frac{n}{p} & \text{se } k - \frac{n}{p} < 1 \\ 1 & \text{se } k - \frac{n}{p} > 1 \end{cases}$$

Se $k - \frac{n}{p} = 1$, então temos a imersão para todo $\alpha \in [0, 1)$.

Demonstração. Ver [3], Cap 9, corolário 9.13. □

Para lidar com o espaço $H_0^1(\Omega)$, a condição de que $\partial\Omega$ é Lipschitz não é necessária.

No que segue, considere a notação

$$2^* = \begin{cases} \frac{2n}{n-2} & \text{se } n > 2 \\ +\infty & \text{se } n = 2 \end{cases}.$$

Teorema 1.2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, com $\partial\Omega$ Lipschitz.*

i) Se $n > 2$, então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q \leq 2^$. Essa imersão é compacta para $1 \leq q < 2^*$.*

ii) Se $n = 2$, então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \infty$.

iii) Se $n < 2$ então $H_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$ onde $\alpha = 1 - \frac{n}{2}$.

1.3 Operadores de Nemytskii

Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável com valores reais, podemos considerar a aplicação $u \mapsto f(u)$, em que $f(u)$ é uma função com valores reais definida em Ω por

$$f(u)(x) = f(x, u(x)).$$

Essa aplicação é chamada operador de Nemytskii associada a f .

Teorema 1.3.1. *Sejam $p, q \geq 1$. Suponha que $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz*

(f.0) *$f(x, t)$ é mensurável com relação a $x \in \Omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e é contínua com relação a $t \in \mathbb{R}$ para quase todo $x \in \Omega$.*

E que existam $a_1 \in L^q(\Omega)$ e $a_2 > 0$ tais que

$$|f(x, u(x))| \leq a_1(x) + a_2|u(x)|^{\frac{p}{q}} \quad \forall (x, u(x)) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad (p, q \geq 1). \quad (1.1)$$

Então o operador de Nemytskii é contínuo de $L^p(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$.

Demonstração. Ver [2], Cap 1, seção 1.2, Teorema 2.2 □

A condição (f.0) é chamada condição de Caratheodory e a função $f(x, t)$ satisfazendo (f.0) é chamada função de Caratheodory. Na maioria das aplicações deste trabalho lidaremos com o espaço $H_0^1 = H_0^1(\Omega)$.

Neste caso, suponhamos que f satisfaz a seguinte condição:

(f.1) *existe $a_1 \in \mathbb{R}$ e $a_2 > 0$ tal que*

$$|f(x, u(x))| \leq a_1 + a_2|u(x)|^p \quad \forall (x, u(x)) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad (1.2)$$

em que $p < 2^* - 1$. Em alguns casos, podemos incluir $p = 2^* - 1$ na condição anterior.

Observação 1.3.1. *A classe das funções f localmente contínua a Hölder e que satisfazem (f.1) será denotada por $\mathbb{F}_p$.*

Considere $n > 2$, e seja f satisfazendo (1.2), então pelo Teorema 1.3.1

$$f \in C(L^{2^*}, L^{\frac{2n}{n+2}}). \quad (1.3)$$

Além disso, se

$$F(x, u(x)) = \int_0^u (x)_0 f(x, s) ds,$$

então, segue que

$$|F(x, u(x))| \leq a_1 |u(x)| + a_2 |u(x)|^{p+1},$$

com $p+1 \leq 2^*$. Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ então $F(\cdot, u(\cdot)) \in L^1$ e a aplicação $\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx \quad (1.4)$$

está bem definida.

Teorema 1.3.2. *Suponha que $f \in \mathbb{F}_p$ com $1 < p \leq \frac{n+2}{n-2}$, e seja Φ definida como antes em $H_0^1(\Omega)$, então $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Além disso, se $f \in \mathbb{F}_p$ com $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ então Φ é fracamente contínua, com $D\Phi$ compacto.*

Demonstração. Considere $\Phi(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx$ como antes e observe que pelo Teorema fundamental do cálculo, podemos escrever

$$\Phi(u+h) - \Phi(u) = \int_{\Omega} \int_0^1 f(x, (u+th)(x)) h(x) dt dx,$$

então, pela desigualdade de Hölder com q expoente conjugado de p , e pelo

Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
\left| \Phi(u+h) - \Phi(u) - \int_{\Omega} f(x, u)h(x)dx \right| &= \\
&= \left| \int_0^1 \int_{\Omega} [f(x, u+th) - f(x, u)]h(x)dxdt \right| \leq \\
&\leq \int_0^1 \int_{\Omega} |f(x, u+th) - f(x, u)||h(x)|dxdt \leq \\
&\leq \int_0^1 \|f(x, u+th) - f(x, u)\|_q \|h\|_p dt \leq \\
&\leq c \int_0^1 \|f(x, u+th) - f(x, u)\|_q \|h\|_{H_0^1} dt.
\end{aligned}$$

Dividindo por $\|h\|_{H_0^1}$ e usando que o operador de Nemytskii é contínuo (Teorema 1.3.1), concluímos que $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Suponha agora que $f \in \mathbb{F}_p$ com $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$, e seja $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Como $p+1 < 2^*$, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ é compacta e então $u_n \rightarrow u$ em $L^{p+1}(\Omega)$.

Com isso, $\Phi(u_n) \rightarrow \Phi(u)$, e portanto Φ é fracamente contínua.

Usando a hipótese, concluímos que $f(\cdot, u_n) \rightarrow f(\cdot, u)$ em L^α com $\alpha = \frac{p+1}{p}$.

Da desigualdade de Hölder, concluímos que

$$\begin{aligned}
|D\Phi(u_n)[v] - D\Phi(u)[v]| &\leq \left(\int_{\Omega} |f(x, u_n) - f(x, u)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{\Omega} |v|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&= \|f(\cdot, u_n) - f(\cdot, u)\|_{L^\alpha} \|v\|_{L^{p+1}}.
\end{aligned}$$

Como $p+1 < 2^*$, então $\|v\|_{p+1} \leq c\|v\|_{H_0^1}$, onde $c > 0$, constante. E então substituindo acima, temos que

$$|D\Phi(u_n)[v] - D\Phi(u)[v]| \leq c\|f(\cdot, u_n) - f(\cdot, u)\|_{L^\alpha} \|v\|_{H_0^1}$$

e finalmente,

$$\|D\Phi(u_n) - D\Phi(u)\| \leq c\|f(\cdot, u_n) - f(\cdot, u)\|_{L^\alpha}$$

o que garante que $D\Phi$ é um operador compacto. $\square$

1.4 Equações Elípticas

Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = h(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}, \quad (1.5)$$

em que h é uma função dada em Ω . Se $h \in L^2(\Omega)$, então uma solução fraca de (1.5) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} h v dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Teorema 1.4.1. *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ domínio limitado.*

i) *Se $h \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, então (1.5) tem uma única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega)$ tal que*

$$\|u\|_{H^{2,p}} \leq c\|h\|_p.$$

ii) *(Estimativa de Schauder) Se Ω é de classe $C^{2,\alpha}$ e $h \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ então $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é solução clássica de (1.5) e*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq c\|h\|_{C^{0,\alpha}}.$$

Demonstração. Ver [6], cap 6, seção 6.3, Teorema 6.14 $\square$

A afirmação i) acima, nos permite definir um operador linear auto-adjunto $K : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, o qual é compacto de $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$. K é chamado de operador de Green de $(-\Delta)$ em $H_0^1(\Omega)$.

Analogamente, podemos considerar K como um operador em $C^{0,\alpha}(\Omega)$. Então de ii) segue que $K(C^{0,\alpha}(\Omega)) \subset \{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ e o Teorema de Arzelá-Ascoli garante que K é compacto.

1.4.1 Autovalores do problema de Dirichlet

Considere o problema linear de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.6)$$

Do que foi dito anteriormente, segue que as soluções de (1.6) são equivalentes a $u = \lambda K(u)$, com $u \in L^2(\Omega)$ ou $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Tendo em mente a teoria de Riesz-Fredholm [ver Brezis [3]], podemos aplicá-la para o operador $A_\lambda = I - \lambda K$, onde K é o operador de Green de $(-\Delta)$, com condição de fronteira 0.

Definição 1.4.1. *Um número real λ tal que $\text{Ker}(A_\lambda) \neq 0$ é um autovalor de (1.6). O maior inteiro m tal que $\text{Ker}(A^k) = \text{Ker}(A^{k+1})$, $\forall k \geq m$ é chamado multiplicidade de λ . Se $m=1$, dizemos que o autovalor é simples.*

Teorema 1.4.2.

i) A equação (1.6) tem uma sequência de autovalores λ_k tais que

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \nearrow +\infty.$$

Por simplicidade, ficam ordenados e repetidos os autovalores de acordo com suas multiplicidades. O autovalor λ_1 é simples e corresponde a uma autofunção que não muda de sinal em Ω . Além disso, λ_1 é o único autovalor com essa propriedade.

Denotaremos por ϕ_1 a autofunção correspondente a λ_1 , tal que $\phi_1 > 0$ e $\|\phi_1\|_2 = 1$.

Denotaremos também por ϕ_i a autofunção correspondente a λ_i , tal que

$$\int_{\Omega} \phi_h \phi_k dx = \begin{cases} 1 & \text{se } h = k \\ 0 & \text{se } h \neq k \end{cases}$$

ii) Temos

$$\lambda_1 = \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx : u \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} u^2 dx = 1 \right\}$$

iii) Definindo $W_k = \{u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi_h dx = 0\}$ para $h=1, \dots, k-1$. temos que

$$\lambda_k = \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx : u \in W_k, \int_{\Omega} u^2 dx = 1 \right\}$$

As propriedades (ii) e (iii) são características variacionais dos autovalores. Podemos também deduzir, a partir de (ii), uma forma mais precisa para a desigualdade de Poincaré

$$\lambda_1 \int_{\Omega} u^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \quad (1.7)$$

1.4.2 Regularidade

É um fato que a solução fraca do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.8)$$

é solução clássica, se $f \in \mathbb{F}_p$, com $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$

Teorema 1.4.3. *Seja $\partial\Omega$ suave, e suponha que $f \in \mathbb{F}_p$, com $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$. Então, cada $u \in H_0^1(\Omega)$ que é solução fraca de (1.8) é uma solução C^2 de (1.8).*

Demonstração. Inicialmente usaremos o argumento chamado bootstrap para mostrar que u é Hölder contínua em $\overline{\Omega}$.

Seja $n > 2$ e seja $\kappa p = \frac{n+2}{n-2}$. Note que $\kappa > 1$.

Passo 1: Pelo Teorema de Sobolev, segue que $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}$.

Passo 2: Usando o Teorema 1.3.1 com $q = \frac{2^*}{p}$ temos que $f(x, u) \in L^\beta$, com $\beta = \frac{2^*}{p} = \frac{\kappa 2n}{n+2}$.

Passo 3: Como $-\Delta u = f(x, u)$. O Teorema 1.4.1, (i) garante que $u \in H^{2,\beta}(\Omega)$.

Se $2\beta > n$, então $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Caso contrário, repete-se os passos 1-3:

i) Pelo Teorema da imersão de Sobolev, concluímos que $u \in L^{q'}$, com

$$q' = \frac{n\beta}{n-2\beta} > \kappa \frac{2n}{n-2},$$

onde a última desigualdade é equivalente a $\kappa > 1$.

ii) Usando o Teorema 1.3.1 segue que $f(x, u) \in L^{\beta'}$, com $\beta' = \frac{q'}{p} > \kappa\beta$.

iii) o Teorema 1.4.1 garante que $u \in H^{2,\beta'}$.

Afirmamos que, após um número finito de repetições, concluímos que $u \in H^{2,\gamma}(\Omega)$, com $\gamma > \frac{n}{2}$.

De fato, sendo $\beta^{(m)} = \frac{q^{(m)}}{p}$ isso ocorre pois $(\beta^{(m)} - \beta^{(m-1)}) > \kappa^m(\kappa - 1)\frac{2n}{n+2} \rightarrow \infty$, quando $m \rightarrow \infty$, já que $\kappa > 1$.

Finalmente, o Teorema da imersão de Sobolev garante que $H^{2,\gamma}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, com $\alpha \leq 1$.

Por fim, da hipótese sobre f e do Teorema 1.4.1 temos que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e é solução clássica de (1.8).

□

Observação 1.4.1. O Teorema de regularidade acima, mantém-se quando $p = \frac{n+2}{n-2}$, [Ver [4]].

Capítulo 2

Métodos variacionais

2.1 Funcionais e Pontos Críticos

Seja E um espaço de Banach. Um funcional em E é uma aplicação $J : E \rightarrow \mathbb{R}$. Em geral, o domínio de J será um aberto de E , por simplicidade, vamos considerar $\text{Dom}(J)=E$, salvo quando especificado.

Definição 2.1.1. *Um ponto crítico de $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ é um ponto $z \in E$ tal que J é diferenciável em z e $DJ(z) \equiv 0$. Um nível crítico de J é um $c \in \mathbb{R}$ tal que existe $z \in E$ ponto crítico de J e $J(z)=c$.*

Ou seja, um ponto crítico z satisfaz,

$$DJ(z)[v] = 0 \quad \forall v \in E.$$

Vamos ver um primeiro exemplo que associa pontos críticos de funcionais a soluções de equações diferenciais.

Exemplo 2.1.1. *Sejam $E = H_0^1((0, 1))$ e $J : E \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$J(u) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^4 \right) dt$$

Temos que $J \in C^\infty(E, \mathbb{R})$ e

$$DJ(u)[v] = \int_0^1 (u'v' + uv - u^3v) dt.$$

De fato, note que

$$J(u+h) - J(u) = \int_0^1 (u'h' + uh - u^3h) dt + \int_0^1 \left(\frac{(h')^2}{2} + \frac{h^2}{2} - \frac{3}{2}u^2h^2 + uh^3 - \frac{h^4}{4} \right) dt$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \frac{|J(u+h) - J(u) - DJ(u)[h]|}{\|h\|_{H_0^1}} = \\ &= \frac{1}{\|h\|_{H_0^1}} \left| \int_0^1 \left(\frac{(h')^2}{2} + \frac{h^2}{2} - \frac{3}{2}u^2h^2 + uh^3 - \frac{h^4}{4} \right) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\|h\|_{H_0^1}} \int_0^1 \left(\left| \frac{h'^2}{2} \right| + \left| \frac{h^2}{2} \right| + \frac{3}{2}|u^2h^2| + |uh^3| + \left| \frac{h^4}{4} \right| \right) dt \\ &\leq \frac{1}{\|h\|_{H_0^1}} \left(\frac{1}{2}\|h\|_{H_0^1}^2 + \frac{c}{2}\|h\|_{H_0^1}^2 + c\|u\|_{H_0^1}^2\|h\|_{H_0^1}^2 + c\|u\|_{H_0^1}^2\|h\|_{H_0^1}^3 + M\|h\|_{H_0^1}^4 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\|h\|_{H_0^1} + \frac{c}{2}\|h\|_{H_0^1} + c\|u\|_{H_0^1}^2\|h\|_{H_0^1} + c\|u\|_{H_0^1}^2\|h\|_{H_0^1}^2 + M\|h\|_{H_0^1}^3 \right), \end{aligned}$$

em que c, M são constantes positivas. Logo, $o(\|h\|) \rightarrow 0$, se $\|h\|_{H_0^1} \rightarrow 0$.

Assim, um ponto crítico de J é $z \in E$ tal que

$$\int_0^1 (z'v' + zv - z^3v) dt = 0, \quad \forall v \in H_0^1((0, 1))$$

Agora, usando integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 z'v' dt + \int_0^1 zv dt - \int_0^1 z^3v dt \\
&= z'v \Big|_0^1 - \int_0^1 vz'' dt + \int_0^1 zv dt - \int_0^1 z^3v dt \\
&= \int_0^1 (-vz'' + zv - z^3v) dt \\
&= \int_0^1 v(-z'' + z - z^3) dt, \quad \forall v \in H_0^1((0,1)).
\end{aligned}$$

Ou seja, z satisfaz a seguinte E.D.O

$$\begin{cases} z'' - z + z^3 = 0 \\ z(0) = z(1) = 0 \end{cases}.$$

2.2 Gradiente

Seja $J \in C^1(E, \mathbb{R})$, se E é um espaço de Hilbert, então pelo lema da representação de Riesz, existe um unico $J'(u) \in E$ tal que

$$DJ(u)[v] = \langle J'u, v \rangle \quad \forall v \in E.$$

$J'(u)$ é o gradiente de J . Com essa notação, um ponto crítico de J é solução da equação $J'(u) = 0$. De modo similar, $D^2J(u)$ é uma aplicação bilinear simétrica, e então podemos definir $D^2J(u) : E'' \rightarrow E$

$$D^2J(u)[v, w] = \langle J''(u)v, w \rangle \quad \forall v, w \in E.$$

Exemplo 2.2.1. *i) Se $J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u \rangle$, em que $A : E \rightarrow E$ é linear e simétrica, então*

$$DJ(u)[v] = \langle Au, v \rangle$$

De fato,

$$\begin{aligned} |J(u+h) - J(u) - \langle Au, h \rangle| &= \left| \frac{1}{2} \langle A(u+h), u+h \rangle - \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \langle Au, h \rangle \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle \right| \leq \frac{1}{2} \|Ah\| \|h\| \leq \|A\| \|h\|^2, \end{aligned}$$

dividindo por $\|h\|$ e fazendo $\|h\| \rightarrow 0$, concluímos que $\frac{|\frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle|}{\|h\|} \rightarrow 0$.

Logo, $DJ(u)[v] = \langle Au, v \rangle$. Na notação anterior, temos:

$$\langle J'u, v \rangle = \langle Au, v \rangle \Leftrightarrow \langle (J' - A)u, v \rangle = 0, \quad \forall v \in E \Leftrightarrow J' = A.$$

Em particular, se $J(u) = \frac{1}{2} \langle u, u \rangle$, então $A = I$ e logo $J' = I$.

ii) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira suave e seja $E = L^2(\Omega)$.

Dado $h \in E$, considere o funcional

$$J(u) = \int_{\Omega} hu \, dx.$$

Então, $J \in C^\infty(E, \mathbb{R})$ e

$$DJ(u)[v] = \int_{\Omega} hv \, dx.$$

De fato,

$$|J(u+\bar{h}) - J(u) - DJ(u)[\bar{h}]| = \left| \int_{\Omega} (u+\bar{h})h \, dx - \int_{\Omega} uh \, dx - \int_{\Omega} h\bar{h} \, dx \right| \equiv 0$$

De modo análogo, usando que J é linear podemos verificar que $J \in C^\infty(E, \mathbb{R})$.

Com isso, temos:

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_{\Omega} hv \, dx$$

Logo, $J'(u) = h$.

iii) Considere novamente o funcional $J(u) = \int_{\Omega} h u dx$, definido agora no conjunto $E = H_0^1(\Omega)$, com os respectivos produto interno e norma

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx,$$

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx.$$

Ou seja, novamente $J'(u) = w$ satisfaz

$$\langle w, v \rangle = \langle J'(u), v \rangle = \int_{\Omega} h v \, dx,$$

logo, usando o produto interno acima temos:

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dx = \int_{\Omega} h v \, dx$$

ou ainda, se $w \in C^2(\Omega)$,

$$-\int_{\Omega} v \Delta w \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} v \, dx = \int_{\Omega} h v \, dx.$$

Então,

$$0 = \int_{\Omega} v(\Delta w + h) \, dx \quad \forall v \in E.$$

Assim, pelo lema fundamental do cálculo de variações concluímos que

$$\begin{cases} -\Delta w = h, & \text{em } \Omega \\ w = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Em outras palavras, se K é o operador de Green de $(-\Delta)$ em $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} K : L^2(\Omega) &\rightarrow L^2(\Omega) \\ h &\longmapsto w \end{aligned}$$

então $w = J'(u) = K(h)$.

iv) Seja $f \in \mathbb{F}_p$ e considere

$$\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto \Phi(u) = \int_{\Omega} F(x, u) \, dx = \int_{\Omega} \int_0^{u(x)} f(x, \tau) \, d\tau \, dx$$

temos que $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\Phi'(u)[v] = \int_{\Omega} f(x, u(x))v(x) \, dx.$$

De fato, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} |\Phi(u+h) - \Phi(u) - \Phi'(u)[h]| &= \left| \int_0^1 \int_{\Omega} (f(x, u+th) - f(x, u))h(x) \, dx \, dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|f(x, u+th) - f(x, u)\|_q \|h\|_p \, dt. \end{aligned}$$

A conclusão se dá pelo fato de que o operador de Nemytskii é contínuo.

Ou seja,

$$\langle \Phi'(u), v \rangle = \int_{\Omega} f(x, u(x))v(x) \, dx.$$

Além disso, se considerarmos

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 - \Phi(u),$$

então $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$DJ(u)[v] = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - f(x, u(x))v(x)) \, dx.$$

Logo, os pontos críticos de J em $C^2(\Omega)$ satisfazem

$$0 = \int_{\Omega} (-\Delta u - f(x, u))v dx, \quad \forall v \in H_0^1.$$

isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}.$$

2.3 Existência de Extremo

Definição 2.3.1. Dizemos que $z \in E$ é um mínimo (máximo) local de $J \in C(E, \mathbb{R})$ se existir uma vizinhança $\mathcal{N}$ de z tal que $J(z) \leq J(u)$ ($J(z) \geq J(u)$), $\forall u \in \mathcal{N}$.

Se as desigualdades acima forem estritas, dizemos que z é mínimo (máximo) local estrito. Se $\mathcal{N}$ puder ser todo E , dizemos que z é mínimo (máximo) global. É fácil ver que se z é mínimo (máximo) local e J é diferenciável, então $DJ[u][z] = 0$.

Definição 2.3.2. Seja $J : E \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que:

- i) J é coercivo se, $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} J(u) = \infty$.
- ii) J é fracamente semicontínuo inferiormente (f.s.c.i.) se para toda $\{u_n\} \subset E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$, então $J(u) \leq \liminf J(u_n)$.

Lema 2.3.1. Seja E um espaço de Banach reflexivo, e $J : E \rightarrow \mathbb{R}$, coercivo e f.s.c.i., então J é limitado inferiormente, isto é, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq J(u)$, $\forall u \in E$.

Demonstração. Suponha por absurdo que não existe $a \in \mathbb{R}$ nessas condições, então existe uma sequência $\{u_n\} \in E$ tal que $J(u_n) \rightarrow -\infty$. Mais ainda, como J é coercivo então existe $R > 0$ tal que $\|u_n\| \leq R$. Logo, a menos de uma subsequência $u_n \rightharpoonup u$ para algum $u \in E$.

Assim,

$$-\infty \leq J(u) \leq \liminf J(u_n) = -\infty$$

ou seja, $J(u) \equiv -\infty$. Absurdo. Portanto, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq J(u) \quad \forall u \in E$. $\square$

Observação 2.3.1. *O mesmo argumento mostra que se J é f.s.c.i., então J é limitado inferiormente em toda bola $\overline{B}_r = \{u \in E; \|u\| \leq r\}$.*

Teorema 2.3.1. *Seja E um espaço de Banach reflexivo, e $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ coercivo e f.s.c.i. Então J atinge um mínimo global, isto é, existe $z \in E$ tal que $J(z) = \min\{J(u); u \in E\}$. Se J é diferenciável, então $DJ(z) = 0$.*

Demonstração. Pelo lema anterior, sabemos que existe $m = \inf\{J(u); u \in E\}$ finito. Seja $\{u_n\} \subset E$ tal que $J(u_n) \rightarrow m$. Novamente, devemos ter $\|u_n\| \leq R'$ e então existe $z \in E$ tal que $u_n \rightarrow z$, a menos de uma subsequência. Logo, como J é f.s.c.i.

$$J(z) \leq \liminf J(u_n) = m$$

ou seja, $J(z) = m$. $\square$

Observação 2.3.2. *Dizemos que z é máximo de J se, z é mínimo de $(-J)$, com isso, provamos um resultado similar para a existência de máximo, usando que $(-J)$ é coercivo e f.s.c.i.*

Observação 2.3.3. *Seja E um espaço de Hilbert, pela observação 2.3.1 e os argumentos usados anteriormente, mostra-se que qualquer funcional J f.s.c.i. atinge um mínimo em $\overline{B}_r$. Vale ressaltar que se $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ e se o mínimo é atingido em $S_r = \partial B_r$, então z não é necessariamente um ponto crítico, mas existe $\lambda \leq 0$ tal que $J'z = \lambda z$.*

Na verdade, z é um ponto crítico de J restrito a S_r , já que $j(t) = J(tz)$, $t \in [0, 1]$ tem mínimo em $t = 1$, e então

$$j'(1) = \langle J'(z), z \rangle \leq 0,$$

e então $\lambda = \langle J'(z), z \rangle \leq 0$. O mesmo vale para o máximo de $(-J)$. Em particular, se J é fracamente contínuo, tanto o máximo quanto o mínimo são atingidos.

Vamos agora estudar uma aplicação. Consideremos E um espaço de Hilbert e

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \Phi(u). \quad (2.1)$$

Teorema 2.3.2. *Seja J definido acima, e $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ fracamente contínuo satisfazendo*

$$|\Phi(u)| \leq a_1 + a_2\|u\|^\alpha \quad a_1, a_2 > 0 \quad e \quad \alpha < 2.$$

Então, J admite mínimo global em algum $z \in E$, no qual $DJ(z) = 0$, ou seja $\Phi'(z) = z$.

Demonstração. Como $\frac{1}{2}\|u\|^2$ e $\Phi(u)$ por hipótese são fracamente contínuos, então J é f.s.c.i. Mais ainda

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - a_1 - a_2\|u\|^\alpha$$

ou seja,

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} J(u) \geq \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\|u\|^2 - a_1 - a_2\|u\|^\alpha \right) = \infty.$$

Então, pelo Teorema 2.3.1 existe $z \in E$ mínimo global de J e $DJ(z) = 0$, isto é, $\Phi'(z) = z$. $\square$

Este Teorema pode ser usado no seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}.$$

Teorema 2.3.3. *Suponha J definido como no Exemplo 2.2.1, item (iv), com $0 < p < 1$, então o problema acima possui solução.*

Demonstração. Já vimos que $J \in C^1(E, \mathbb{R})$, logo J é f.s.c.i. Mais ainda, usando que $f \in \mathbb{F}_p$, temos

$$|\Phi(u)| \leq a_3\|u\|_2 + a_4\|u\|_{p+1}^{p+1}, \quad a_3, a_4 \in \mathbb{R}.$$

Como $p+1 < 2$, então J é coercivo e, assim, pelo Teorema 2.3.1, J admite mínimo z , o qual $\Phi'(z) = z$, o que nos dá uma solução do problema dado. $\square$

2.3.1 Autovalor Linear

Nesta seção vamos discutir o problema de autovalor linear

$$Au = \mu u \quad u \in E, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

com E um espaço de Hilbert e $A \in L(E)$ simétrico. Definimos a seguinte forma quadrática $J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u \rangle$, já vimos que $J' = A$.

Lema 2.3.2. *Suponha que A é compacto e positivo definido, isto é $\langle Au, u \rangle > 0$ se $u \neq 0$. Então, J atinge máximo, denotado por z , na esfera $S = \{u \in E; \|u\| = 1\}$ com $\|z\| = 1$ e $\mu = \max\{\langle Au, u \rangle; u \in \overline{B}_1\} = \langle Az, z \rangle > 0$.*

Demonstração. Inicialmente, note que como A é compacto, então J é fracamente contínuo, e portanto J é f.s.c.i. e limitado em $\overline{B}_1$. Então J atinge máximo em $\overline{B}_1$, denotado por z . Se $\|z\| < 1$, então $0 = J'(z) = Az$, e assim $J(z) = 0$, o que é um absurdo. Portanto, $\|z\| = 1$ e $J'(z) = \lambda z$, em que $\lambda = \langle J'(z), z \rangle = \langle Az, z \rangle$, ou seja,

$$J'(z) = Az = \langle Az, z \rangle z.$$

Afirmção: $\langle Az, z \rangle = \max\{\langle Au, u \rangle; u \in \overline{B}_1\}$.

De fato, como $z \in \overline{B}_1$, então $\langle Az, z \rangle \leq \max\{\langle Au, u \rangle; u \in \overline{B}_1\}$. Por outro lado, como z é o ponto de máximo de J então

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u \rangle \leq \frac{1}{2}\langle Az, z \rangle,$$

ou seja, $\langle Au, u \rangle \leq \langle Az, z \rangle$, $\forall u \in E$, o que nos leva a desigualdade oposta. $\square$

Observação 2.3.4. *Como $\mu = \max\{\langle Au, u \rangle; u \in \overline{B}_1\}$, é imediato que μ é o maior autovalor de A , chamado de autovalor principal de A .*

Exemplo 2.3.1. *Sejam $E = H_0^1(\Omega)$, $A=K$, onde K é o operador de Green de $(-\Delta)$, definido no Exemplo 2.2.1, item (iii), e $J(u) = \frac{1}{2}\langle Ku, u \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx$. O lema anterior garante a existência de $\mu_1 > 0$ e $z = \phi_1 \in E$ com $\|\phi_1\| = 1$ tal que*

$$K(\phi_1) = \mu_1 \phi_1,$$

ou seja, se $\lambda_1 = \mu_1^{-1}$, então

$$\begin{cases} -\Delta \phi_1 &= \lambda_1 \phi_1, & \Omega \\ \phi_1 &= 0, & \partial\Omega \end{cases},$$

disso concluímos que λ_1 e ϕ_1 são autovalor e autofunção de $(-\Delta)$, e mais, λ_1 é o menor autovalor de $(-\Delta)$.

Podemos então concluir que λ_1 é um autovalor simples e ϕ_1 pode ser tomada positiva (pois não muda de sinal).

Observação 2.3.5. *i) Pela teoria de regularidade, Seção 1.4.2, as autofunções são suaves, ou seja, $\phi \in C^\infty(\Omega)$.*

$$ii) \frac{1}{\lambda_1} = \max \left\{ \frac{\int_{\Omega} |u|^2 dx}{\|u\|_{H_0^1}^2}; u \in H_0^1 - \{0\} \right\}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{1}{\lambda_1} \geq \frac{\int_{\Omega} |u|^2 dx}{\|u\|_{H_0^1}^2} \Rightarrow \int_{\Omega} |u|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Essa é chamada desigualdade de Poincaré.

iii) Podemos substituir $(-\Delta)$ por qualquer operador uniformemente elíptico de segunda ordem na forma divergente e com coeficientes constantes e obter os mesmos resultados.

Capítulo 3

Variedades Diferenciais

Definição 3.0.1. *Sejam X um espaço de Hilbert e I um conjunto de índices. Um espaço topológico M é uma variedade de Hilbert de classe C^k modelada em X se existem $\{U_i\}_{i \in I}$ abertos de M e uma família $\Psi_i : U_i \rightarrow X$ satisfazendo:*

- $V_i = \Psi_i(U_i)$ é aberto em X e $\Psi_i : U_i \rightarrow V_i$ é homeomorfismo;
- $\Psi_j \circ \Psi_i^{-1} : \Psi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \Psi_j(U_i \cap U_j)$ é de classe C^k .

Cada par (U_i, Ψ_i) é dito uma carta. Se $p \in U_i$, então (U_i, Ψ_i) é uma carta em p . A aplicação $\Psi_j \circ \Psi_i^{-1}$ é chamada mudança de cartas. O par (V_i, Ψ_i^{-1}) é uma parametrização local de M . Se $X = \mathbb{R}^n$, dizemos que M é n -dimensional. Por fim, se X for um espaço de Banach, dizemos que M é uma variedade de Banach modelada em X .

Neste texto, é suficiente considerar $M \subset E$, com E um espaço de Hilbert e M modelada em $X \subset E$ onde X é um subespaço vetorial de E .

Suponha que, para cada $p \in M$, existam

- $\tilde{U} \subset E$ aberto tal que $p \in \tilde{U}$;
- $\tilde{V} \subset E$;
- $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ de classe C^k tal que $V = \tilde{V} \cap X$, $U = \tilde{U} \cap M$ e $\varphi = \tilde{\varphi}|_V$, temos $x := \varphi^{-1}(p) \in V$ e $\varphi(V) = U$.

O par (V, φ) é uma parametrização local de M .

Definição 3.0.2. O espaço tangente $T_p M$ de M em p é definido como a imagem de X pela aplicação linear $D\tilde{\varphi}(x) \in \mathcal{L}(X, E)$,

$$T_p M = D\tilde{\varphi}(x)[X].$$

Para justificar essa definição, devemos mostrar que $T_p M$ não depende da escolha da parametrização local. Para isso, seja (V_1, φ_1) e (V_2, φ_2) parametrizações locais em p , e considere o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} M \subset E & \simeq & M \subset E \\ \uparrow \tilde{\varphi}_1 & & \uparrow \tilde{\varphi}_2 \\ \tilde{V}_1 \subset E & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1} & \tilde{V}_2 \subset E. \end{array}$$

$$\tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1(x) = \tilde{\varphi}_2^{-1}(p) = x, \quad x \in \tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2$$

Logo, $\tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1 = Id \Big|_{\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2}$.

Assim,

$$\begin{aligned} Id &= D(\tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1)(x)[X] = \\ &= D\tilde{\varphi}_2^{-1}(\tilde{\varphi}_1(x))[X] \cdot D\tilde{\varphi}_1(x)[X] \\ &\Leftrightarrow D\tilde{\varphi}_2[X] = D\tilde{\varphi}_1[X]. \end{aligned}$$

Dessa definição é imediato que $T_p M$ é um espaço de Hilbert homeomorfo a X .

Antecipamos que $T_p M$ coincide com o espaço dos “vetores tangentes” das curvas diferenciáveis de M em p . Além disso, se $M = G^{-1}(c)$ em que $G \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $G'(u) \neq 0$, $\forall u \in M$ então

$$T_p M = \{v \in E; \langle G'(p), v \rangle = 0\}$$

De fato, se $v \in T_p M$, então $v = \alpha'(t_0)$ para alguma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\alpha(t_0) = p$, usando que $G(x) = c$ para todo $x \in M$, segue que:

$$G(\alpha(t_0)) = c$$

Derivando, temos:

$$DG(\alpha(t_0)).\alpha'(t_0) = 0$$

$$\langle G'(p), v \rangle = 0$$

Portanto, $v \in \{v \in E; \langle G'(p), v \rangle = 0\}$. Ou seja, $T_p M \subset \{v \in E; \langle G'(p), v \rangle = 0\}$. A outra inclusão é imediata.

Seja $M_i \subset E_i$, $i = 1, 2$, variedades de Hilbert C^1 , modeladas em $X_i \subset E_i$. Queremos definir o diferencial de uma aplicação $f : M_1 \rightarrow M_2$, antes disso, vamos supor que existam

- $U_1 \subset E_1$ aberto tal que $M_1 \subset U_1$;
- $\tilde{f} : U_1 \rightarrow E_2$ diferenciável tal que $\tilde{f}|_{M_1} = f$.

Seja $p \in M$, é fácil ver que se $\hat{f}$ é outra aplicação diferenciável que coincide com f em M_1 , então $D\tilde{f}_p(v) = D\hat{f}_p(v)$, $\forall v \in T_p M_1$. Com isso, podemos definir :

Definição 3.0.3. *O diferencial de $f : M_1 \rightarrow M_2$ é a restrição em $T_p M_1$ da aplicação linear $D\tilde{f}_p \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$.*

Notação: $D_{M_1} f(p)$.

Dizemos que $f : M_1 \rightarrow M_2$ é diferenciável em M_1 se for diferenciável em cada ponto de M_1 , e dizemos que $f \in C^1(E, \mathbb{R})$, se f é diferenciável e $Df : M_1 \rightarrow \mathcal{L}(T_p M_1, E_2)$.

Exemplo 3.0.1. *Considere o funcional diferenciável $J : E \rightarrow \mathbb{R}$. Nesse caso, $d_M J(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, como feito antes, $D_M J(p)$ define o gradiente de J em p , como sendo*

$$\langle \nabla_M J(p), v \rangle = D_M J(p)[v] \quad \forall v \in T_p M.$$

Ou seja, $\nabla_M J(p)$ nada mais é que a projeção de $J'(p)$ em $T_p M$.

Observação 3.0.1. Considere uma curva diferenciável $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ com $a < 0 < b$ e $\gamma(0) = p$. De acordo com a discussão anterior, $d\gamma(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, T_{\gamma(t)}M)$. Como de costume, identificamos $\mathcal{L}(\mathbb{R}, T_{\gamma(t)}M)$ com $T_{\gamma(t)}M$ e escrevemos $d\gamma(t)[1] = \gamma'(t)$. O vetor $\gamma'(t)$ é chamado vetor tangente à curva γ em t . Em particular, para qualquer curva diferenciável, o vetor $\gamma'(0) \in T_p M$. Por outro lado, vamos mostrar que para cada $v \in T_p M$, existe uma curva diferenciável γ tal que $\gamma'(0) = v$. Para isso, seja (V, φ) uma parametrização local de M em p com $\varphi^{-1}(p) = 0$ e seja $w = D\tilde{\varphi}^{-1}(p)[v]$. Considere a reta $t \mapsto tw$, e a curva $\gamma(t) = \tilde{\varphi}(tw)$, então γ é diferenciável e $\gamma(0) = \tilde{\varphi}(0) = p$ e $\gamma'(0) = D\tilde{\varphi}(0)[w] = D\tilde{\varphi}(0)(D\tilde{\varphi}^{-1}(p)[v]) = v$.

Logo, concluímos que $T_p M$ é o espaço dos vetores tangentes a curvas diferenciáveis em M .

3.1 Pontos Críticos com Restrição.

Definição 3.1.1. Seja $J : E \rightarrow M$ um funcional diferenciável e $M \subset E$ uma variedade de Hilbert C^1 . Um ponto crítico de J restrito a M é um ponto $z \in M$ tal que $D_M J(z) = 0$, ou seja,

$$DJ(z)[v] = 0 \quad \forall v \in T_z M.$$

Como $\langle \nabla_M J(z), v \rangle = \langle J'(z), v \rangle = 0$, $\forall v \in T_z M$, temos que z é um ponto crítico de J restrito a M sempre que $J'(z)$ for ortogonal a $T_z M$.

Observação 3.1.1. Seja $\gamma : [-a, a] \rightarrow M$, $a > 0$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = z$ e considere a função real $\phi(t) = J(\gamma(t))$, temos:
 $\phi'(0) = J'(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = J'(z) \cdot [\gamma'(0)]$, em que $\gamma'(0) \in T_z M$. Assim, se z é um ponto crítico de J em M , então $t=0$ é um ponto crítico de $\phi(t) = J(\gamma(t))$, para qualquer γ diferenciável em M .

Por outro lado, seja φ uma parametrização local de M tal que $\varphi(0) = z$ e seja $v \in T_z M$. Então, existe $w \in X$ tal que $v = D\varphi(0)[w]$. Fazendo $\gamma(t) = \varphi(tw)$ e $\phi(t) = J(\gamma(t))$, temos:

$$\phi'(0) = J'(\gamma(0))[\gamma'(0)] = J'(z)[v].$$

Portanto, se $t = 0$ é um ponto crítico de $\phi(t) = J(\gamma(t))$ para toda γ em M , então $J'(z)[v] = 0$, $\forall v \in T_z M$, ou seja, z é um ponto crítico de J em M .

Definição 3.1.2. Seja $M \subset E$ uma variedade suave modelada em um espaço de Hilbert $X \subset E$ e seja $J \in C(E, \mathbb{R})$. Dizemos que $z \in M$ é *mínimo* (*máximo*) local de J restrito a M , se existir $\mathcal{V}$ uma vizinhança de z em E tal que

$$J(z) \leq J(u) \quad (J(z) \geq J(u)), \quad \forall u \in \mathcal{V} \cap M.$$

Seja φ uma parametrização local de M com $\varphi(0) = z$. Essa definição é equivalente a dizer que existe $\mathcal{N} \subset X$ uma vizinhança de $0 \in X$ tal que

$$J(z) = J(\varphi(0)) \leq J(\varphi(\xi)) \quad (J(z) = J(\varphi(0)) \geq J(\varphi(\xi))), \quad \forall \xi \in \mathcal{N}.$$

Disso segue que $0 \in X$ é um ponto crítico de $(J \circ \varphi)$, ou seja,

$$D(J \circ \varphi)(0)[\xi] = DJ(z)[D(\varphi(0))[\xi]] = 0 \quad \forall \xi \in X.$$

Logo, $DJ(z)[v] = 0$, $\forall v \in T_z M$, e então z é um ponto crítico de J restrito a M .

3.2 Variedades de Codimensão um

Definição 3.2.1. Se a variedade $M \subset E$ é modelada em um subespaço de codimensão um em E , dizemos que M é uma variedade de codimensão um.

Para o nosso propósito, o caso $M = G^{-1}(0)$, em que $G \in C^1(E, \mathbb{R})$, E um espaço de Hilbert e $G'(u) \neq 0$, $\forall u \in M$ é particularmente interessante.

Exemplo 3.2.1. Se $G(u) = \|u\|^2 - r^2$, então $M = G^{-1}(0) = \{u \in E; \|u\|^2 = r^2\} = \{u \in E; \|u\| = r\} = S_r$.

Seja $p \in M$, considere o subespaço $X_p = \{v \in E; \langle G'(p), v \rangle = 0\}$.
 Se $w = \|G'(p)\|^{-2} \cdot G'(p)$, então $E = X_p \oplus \langle w \rangle$.

De fato, $X_p \oplus \langle w \rangle \subset E$ é imediato.

Por outro lado, seja $u \in E$, então $\langle G'(p), u \rangle = 0$ ou $\langle G'(p), u \rangle \neq 0$.
 Se $\langle G'(p), u \rangle = 0$, então $u \in X_p$.
 Se $\langle G'(p), u \rangle \neq 0$, então $\langle G'(p), u \rangle = \lambda$, com $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Agora, observe que

$$\langle G'(p), \lambda \|G'(p)\|^{-2} \cdot G'(p) \rangle = \lambda = \langle G'(p), u \rangle \Rightarrow \langle G'(p), u - \lambda \|G'(p)\|^{-2} \cdot G'(p) \rangle = 0.$$

Então, $v = u - \lambda \|G'(p)\|^{-2} \cdot G'(p) \in X_p$. Assim, $u = v + \lambda \|G'(p)\|^{-2} \cdot G'(p) = v + \lambda w \Rightarrow u \in X_p \oplus \langle w \rangle$. Com isso, concluímos que $E = X_p \oplus \langle w \rangle$.

Definimos, então, a aplicação $\Psi : E \rightarrow E$ por

$$\Psi(u) = u - p - \langle G'(p), u - p \rangle w + G(u)w.$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle G'(p), \Psi(u) \rangle &= \langle G'(p), u - p - \langle G'(p), u - p \rangle w + G(u)w \rangle \\ &= \langle G'(p), u - p \rangle - \langle G'(p), u - p \rangle \langle G'(p), w \rangle + G(u) \langle G'(p), w \rangle \\ &= G(u). \end{aligned}$$

Assim, $\Psi(u) \in X_p \Leftrightarrow u \in M$.

Além disso, $\Psi(p) = 0$, $\Psi \in C^1$ e $D\Psi(p) = Id$.

De fato, $\Psi(p) = 0$, $\Psi \in C^1$ é imediato. Mais ainda,

$$\begin{aligned} |\Psi(p+h) - \Psi(p) - Id(h)| &= |w| |G(p+h) - G(p) - \langle G'(p), h \rangle| = \\ &= |w| O(\|h\|^2). \end{aligned}$$

Portanto, $D\Psi(p) = Id$.

Disso segue que Ψ é difeomorfismo de uma vizinhança $\tilde{U}$ de p em uma vizinhança $\tilde{V}$ de 0. Então, se $\varphi = \Psi^{-1}|_{\tilde{V}}$ segue que M é C^1 , com parametrização local em p dada por (V, φ) , com $V \subset X_p$. Vamos também salientar que

$$T_p M = D\Psi^{-1}(0)[X_p] = X_p.$$

Seja $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. Como $T_p M = \{v \in E; \langle G'(p), v \rangle = 0\}$, um ponto crítico restrito de J em M é $z \in M$ tal que

$$\langle J'(z), v \rangle = 0, \quad \forall v \in E, \text{ com } \langle G'(z), v \rangle = 0.$$

Isto é, $\langle J'(z), v \rangle = 0, \forall v \in X_z$. Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $J'(z) = \lambda G'(z)$. Isso é simplesmente a extensão da regra dos multiplicadores de Lagrange.

O gradiente restrito (que é a projeção de $J'(u)$ em X_p) tem a forma

$$\nabla_M J(u) = J'(u) - \frac{\langle J'(u), G'(u) \rangle}{\|G'(u)\|^2} G'(u).$$

Assim, se $z \in M$ é ponto crítico de J , então $\nabla_M J(z) = 0$, e logo $J'(z) = \lambda G'(z)$, em que $\lambda = \frac{\langle J'(u), G'(u) \rangle}{\|G'(u)\|^2}$.

Exemplo 3.2.2. 1) Seja $J : E \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 e M a esfera unitária em E , em que E é um espaço de Hilbert, então o ponto crítico de J em M é a solução do problema de autovalor $J'(u) = \lambda u$, com $\|u\| = 1$.

De fato, se $G(u) = \|u\|^2 - 1$, então $G^{-1}(0) = M$. Segue então, pelo que foi demonstrado, que

$$J'(u) = \lambda G'(u) = \lambda u,$$

já que $G'(u)[v] = 2\langle u, v \rangle$.

Se z é um ponto crítico, então $\lambda = \langle J'(z), z \rangle$. Em particular, se $J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle$, em que A é simétrica e linear, os pontos críticos de J restritos a esfera, são soluções do problema de autovalor $Au = \lambda u$.

2) Seja $E = H_0^1(\Omega)$, $M = \{u \in E; \|u\| = 1\}$ e $J(u) = \frac{1}{2} \langle Ku, u \rangle$, em que K é o operador de Green de $(-\Delta)$ em E .

A solução z de $J'(u) = \lambda u$ satisfaz $Kz = \lambda z$ (isso pois $J' = K$), ou seja, $-\lambda \Delta z = z$, com $\|z\| = 1$ e $\lambda = \int_{\Omega} z^2 > 0$. Então, $\frac{1}{\lambda}$ é o autovalor correspondente a autofunção z do problema de Dirichlet do Laplaciano.

3) Novamente seja $E = H_0^1(\Omega)$, $M = \{u \in E; \|u\| = 1\}$ e $\Phi(u) = \int_{\Omega} F(x, u) dx$, $\partial_u F = f$. Um ponto crítico de Φ restrito a M é $z \in M$ tal que $\Phi'(z) = \lambda z$, ou seja,

$$\langle \Phi'(z), v \rangle = \langle \lambda z, v \rangle,$$

ou ainda,

$$\int_{\Omega} f(x, z) v dx = \lambda \int_{\Omega} \nabla z \nabla v dx, \quad \forall v \in E.$$

Portanto, z é solução de

$$\begin{cases} -\lambda \Delta u = f(x, u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}.$$

Fica observado que, se z é solução do problema acima e $f(x, \cdot)$ é p -homogênea, então $v(x) = \lambda^{\frac{-1}{p+1}} z(x)$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta v = f(x, v), & \Omega \\ v = 0, & \partial\Omega \end{cases}.$$

Capítulo 4

A procura por Pontos Críticos.

4.1 Princípio Variacional de Ekeland.

Teorema 4.1.1. (P.V.E.) *Seja (E, d) um espaço métrico completo e $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente em E . Seja $c = \inf_E J$, então para todo $\epsilon > 0$ existe $u_\epsilon \in E$ tal que*

$$\begin{cases} c \leq J(u_\epsilon) \leq c + \epsilon \\ \forall u \in E, u \neq u_\epsilon, J(u) - J(u_\epsilon) + \epsilon d(u, u_\epsilon) > 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Observação 4.1.1. *i) Note que o P.V.E. nessa forma, só é interessante se não sabemos se o mínimo é atingido ou não. De fato, se sabemos que há um mínimo, basta tomar tal ponto para u_ϵ e, então, (4.1) é satisfeita para todo $\epsilon > 0$.*

ii) O conjunto dos pontos $(u, a) \in E \times \mathbb{R}$ tais que $a > J(u_\epsilon) - \epsilon d(u, u_\epsilon)$, pode ser visualizado como o complemento de um “cone” de declive $-\epsilon$ no espaço $E \times \mathbb{R}$. O teorema diz que o epigráfico de J está inteiramente contido nesse conjunto, exceto o ponto $(u_\epsilon, J(u_\epsilon))$.

Demonstração. Nesta demonstração, seguimos o que foi feito em [Le Dret, H. [9] Capítulo 7, Seção 7.2, Teorema 7.1].

Seja $\text{Epi}(J) = \{(u, a) \in E \times \mathbb{R}; J(u) \leq a\}$ o epigráfico de J , que é o

conjunto dos pontos de $E \times \mathbb{R}$ situados acima do gráfico de J . Segue do fato de J ser semicontínuo inferiormente que $\text{Epi}(J)$ é um conjunto fechado.

Dado $\epsilon > 0$, considere a relação $(u, a) \leq_\epsilon (v, b) \Leftrightarrow \epsilon d(u, v) \leq b - a$. É fácil ver que esta é uma relação de ordem na qual $E \times \mathbb{R}$ é parcialmente ordenado. Vamos construir um subconjunto de $E \times \mathbb{R}$ totalmente ordenado.

Seja $u_1 \in E$ e $a_1 = J(u_1)$, tal que $c \leq J(u_1) \leq c + \epsilon$. Definimos $A_1 = \{(u, a) \in \text{Epi}(J); (u, a) \leq_\epsilon (u_1, a_1)\}$. Temos que A_1 é fechado, e não vazio. Com isso definimos P a projeção canônica de $E \times \mathbb{R}$ em E , então se $u \in P(A_1)$ temos que $c \leq J(u) \leq c + \epsilon$. De fato,

$$c \leq J(u) \leq a \leq a_1 - \epsilon d(u, u_1) \leq a_1 = J(u_1) \leq c + \epsilon.$$

Seguiremos a demonstração por indução. Suponha que contruamos uma sequência (u_i, a_i) , $i = 1, \dots, n$, tal que os conjuntos $A_i = \{(u, a) \in \text{Epi}(J); (u, a) \leq_\epsilon (u_i, a_i)\}$ são fechados e não vazios e satisfazem:

- $A_{i+1} \subset A_i$, $\forall i = 1, \dots, n-1$.
- $0 \leq a_i - c_i \leq 2^{1-i}(a_1 - c_1)$.

em que $c_i = \inf_{P(A_i)} J$, $a_i = J(u_i)$. Note que para $n = 1$ a hipótese acima é válida. Vamos separar em dois casos:

Caso 1 : $c_n < a_n$

Nesse caso, tomamos $u_{n+1} \in P(A_n)$ tal que

$$0 \leq J(u_{n+1}) - c_n \leq \frac{1}{2}(a_n - c_n),$$

que existe pela definição de ínfimo e seja $a_{n+1} = J(u_{n+1})$, então:

- $A_{n+1} \neq \emptyset$, pois $(u_{n+1}, a_{n+1}) \in A_{n+1}$.
- A_{n+1} é fechado.

- $A_{n+1} \subset A_n$.

Mais ainda, sabemos que $c \leq c_n \leq c_{n+1}$ e, então,

$$0 \leq a_{n+1} - c_{n+1} \leq a_{n+1} - c_n \leq \frac{1}{2}(a_n - c_n) \leq \frac{1}{2^n}(a_1 - c_1).$$

Portanto, vale a hipótese para todo n , o que encerra o caso 1.

Caso 2: $c_n = a_n$.

Nesse caso, tome $u_{n+1} = u_n$ e $a_{n+1} = a_n$ e então a hipótese de indução é claramente satisfeita.

Afirmção 1: $\text{diam } A_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

De fato, seja $(u, a), (v, b) \in A_n$. Como $c_n \leq a$, pela definição da relação de ordem, segue que

$$\epsilon d(u, u_n) \leq a_n - a \leq a_n - c_n \leq 2^{1-n}(a_1 - c_1)$$

e então

$$\epsilon d(u, v) \leq \epsilon d(u, u_n) + \epsilon d(v, u_n) \leq 2^{2-n}(a_1 - c_1) = 2^{2-n}(a_1 - c_1) \rightarrow 0$$

se $n \rightarrow \infty$.

Além disso, como $c_n \leq a, b \leq a_n$, temos também que

$$|b - a| \leq 2^{2-n}(a_1 - c_1) \rightarrow 0, \text{ se } n \rightarrow \infty.$$

Logo, construímos uma família enumerável decrescente de subconjuntos fechados, não vazios de $E \times \mathbb{R}$ cujo diâmetro tende a 0, ou seja, como E e $\mathbb{R}$ são completos

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{(u_\epsilon, a_\epsilon)\},$$

então, $c \leq J(u_\epsilon) \leq c + \epsilon$.

Afirmção 2: (u_ϵ, a_ϵ) é mínimo em $\text{Epi}(J)$, para a relação $\leq_\epsilon$.

De fato, seja $(v, b) \in \text{Epi}(J)$ tal que $(v, b) \leq_\epsilon (u_\epsilon, a_\epsilon)$. Por construção, $\{(u_n, a_n)\}$ é totalmente ordenado.

Como $(u_\epsilon, a_\epsilon) \in A_n, \forall n$, então $(u_\epsilon, a_\epsilon) \leq_\epsilon (u_n, a_n), \forall n$. Logo

$$(v, b) \leq_\epsilon (u_n, a_n), \quad \forall n,$$

ou seja, $(v, b) \in A_n, \forall n$, e consequentemente, $(v, b) = (u_\epsilon, a_\epsilon)$, o que prova a afirmação. Mais ainda, se $u \neq u_\epsilon$, então $\epsilon d(u, u_\epsilon) > a_\epsilon - J(u) \geq J(u_\epsilon) - J(u)$. $\square$

Observação 4.1.2. Como $u_n \rightarrow u_\epsilon$ e $a_n \rightarrow a_\epsilon$, em que $a_n = J(u_n)$ segue que $a_\epsilon \geq J(u_\epsilon)$, pois J é semicontínuo inferiormente.

Mas, se $a_\epsilon > J(u_\epsilon)$, então a minimalidade de (u_ϵ, a_ϵ) seria contradita.

Logo, $a_\epsilon = J(u_\epsilon)$, isso diz que o mínimo está no gráfico de J .

Se $J \in C^1$ está definido em um espaço de Banach, o Princípio de Ekeland tem uma forma mais forte.

Corolário 4.1.1. Seja $J \in C^1$ definido em E , limitado inferiormente, em que E é um espaço de Banach e seja $c = \inf_E J$. Então $\forall \epsilon > 0, \exists u_\epsilon \in E$ tal que

$$\begin{cases} c \leq J(u_\epsilon) \leq c + \epsilon \\ \|DJ(u_\epsilon)\|_{E'} \leq \epsilon. \end{cases}$$

Demonstração. Nesse caso, a segunda relação de (4.1) pode ser escrita como

$$J(u) - J(u_\epsilon) + \epsilon \|u - u_\epsilon\|_E > 0, \quad \forall u \neq u_\epsilon.$$

Tomando $u = u_\epsilon + tv$, com $\|v\|_E = 1$ e $t > 0$, temos:

$$\begin{aligned} J(u_\epsilon + tv) - J(u_\epsilon) > -\epsilon t &\Leftrightarrow -\frac{J(u_\epsilon + tv) - J(u_\epsilon)}{t} < \epsilon \\ &\Rightarrow -DJ(u_\epsilon)[v] \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Analogamente, para $-v$, obtemos:

$$DJ(u_\epsilon)[v] \leq \epsilon.$$

Logo, $|DJ(u_\epsilon)[v]| \leq \epsilon$, e então

$$\|DJ(u_\epsilon)\| \leq \epsilon.$$

□

Observação 4.1.3. *i) $J \in C^1$ não é necessário, é suficiente considerar J Gateaux diferenciável.*

ii) Existe uma versão local dos resultados anteriores.

Corolário 4.1.2. *Seja (E, d) um espaço métrico completo e $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente e limitado em E . Seja $c = \inf_E J$. Considere $u_\epsilon \in E$ tal que $c \leq J(u_\epsilon) \leq c + \epsilon$, então existe $\bar{u}_\epsilon \in E$ tal que*

$$\left\{ \begin{array}{l} c \leq J(\bar{u}_\epsilon) \leq c + \epsilon \\ d(\bar{u}_\epsilon, u_\epsilon) \leq 2\sqrt{\epsilon} \\ \forall u \in E, u \neq \bar{u}_\epsilon, J(u) - J(\bar{u}_\epsilon) + \sqrt{\epsilon}d(u, \bar{u}_\epsilon) > 0. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Demonstração. Prosseguimos exatamente como na primeira versão de P.V.E., agora com

$$(u, a) \leq_\epsilon (v, b) \Leftrightarrow \sqrt{\epsilon}d(u, v) \leq b - a.$$

Com isso e pequenas alterações algébricas, podemos concluir os itens (1) e (3) de (4.2). Para garantir o item (2), basta observar que

$$\sqrt{\epsilon}d(\bar{u}_\epsilon, u_n) \leq 2^{1-n}\epsilon \quad \text{e} \quad \sqrt{\epsilon}d(u_n, u_\epsilon) \leq 2(1 - 2^{-n})\epsilon.$$

□

Corolário 4.1.3. *Seja E um espaço de Banach, $J \in C^1$ limitado inferiormente em um subconjunto $F \subset E$ fechado, e seja $c = \inf_F J$. Seja $u_\epsilon \in F$ tal que $c \leq J(u_\epsilon) \leq c + \epsilon$, então existe $\bar{u}_\epsilon \in F$ tal que*

$$\left\{ \begin{array}{l} c \leq J(\bar{u}_\epsilon) \leq c + \epsilon \\ \|\bar{u}_\epsilon - u_\epsilon\|_E \leq 2\sqrt{\epsilon} \\ \forall u \in E, u \neq \bar{u}_\epsilon, J(u) - J(\bar{u}_\epsilon) + \sqrt{\epsilon}\|u - \bar{u}_\epsilon\|_E > 0. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Demonstração. Este resultado é uma combinação dos resultados anteriores. □

Observação 4.1.4. *O corolário anterior mostra que se nos é dado u_ϵ em que J é quase minimizado por $\epsilon > 0$, então existe muito próximo a este ponto, a uma distância no máximo $\sqrt{\epsilon}$, outro ponto $\bar{u}_\epsilon$ em que J é quase minimizado, na verdade tendo um valor menor, e onde DJ quase se anula.*

4.2 A condição de Palais-Smale.

Definição 4.2.1. *Seja E um espaço de Banach e $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional C^1 . Dizemos que J satisfaz a condição de Palais-Smale (PS), no nível c , se dado qualquer sequência $\{u_n\}_{n=0}^\infty \subset E$ tal que*

$$J(u_n) \rightarrow c \quad \text{em } \mathbb{R} \quad \text{e} \quad DJ(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{em } E',$$

podemos extrair uma subsequência convergente.

Observação 4.2.1. *i) A condição (PS) não prevê a existência de um valor crítico, ou a existência de tal sequência. Apenas diz que se existe uma sequência (PS) então a pré imagem desta é relativamente compacta.*

ii) As duas hipóteses de (PS) são independentes.

De fato, mesmo se $c = \inf_E J$, podemos facilmente ter uma sequência minimizante $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ tal que $DJ(u_n) \not\rightarrow 0$.

Como um exemplo, considere $E = \mathbb{R}$, $J(u) = \sin(u^2)$ e $c = -1$, se $u_n = \sqrt{\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n + \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)}$ então

$$\begin{aligned} J(u_n) &= \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n + \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) + \\ &+ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) = -\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) \rightarrow -1. \end{aligned}$$

Por outro lado, $DJ(u) = 2u \cos(u^2)$, então

$$DJ(u_n) = 2\sqrt{\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n + \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n + \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) \rightarrow 2.$$

Da mesma forma, é fácil construir um exemplo em que $DJ(u_n) = 0$ e $J(u_n)$ não converge.

Teorema 4.2.1. *Seja E um espaço de Banach, $J : E \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 e limitado inferiormente satisfazendo (PS), então J tem mínimo.*

Demonstração. Essa demonstração é quase imediata, tomamos $\epsilon = \frac{1}{n}$, então o Corolário (4.1.1) garante a existência de uma sequência $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que

$$\|DJ(u_n)\| \leq \frac{1}{n},$$

ou seja, $DJ(u_n) \rightarrow 0$ em E e

$$c \leq J(u_n) \leq c + \frac{1}{n},$$

então, $J(u_n) \rightarrow 0$.

Assim, por (PS), $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente, e esta converge para um ponto de mínimo de J , já que $J(u_n) \rightarrow c$ e c foi tomado como o ínfimo de J . $\square$

Vejamos agora um exemplo interessante no contexto de E.D.P.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e K o operador de Green de $(-\Delta)$, definido no Exemplo 2.2.1, item (iii), isto é $K = (-\Delta)^{-1}$, então existe uma sequência λ_k com $\lambda_1 > 0$, $\lambda_k \rightarrow \infty$ tal que para $\lambda \neq \lambda_k$ e $\lambda \neq 0$, o operador $T_\lambda = K - \frac{1}{\lambda}Id$ é isomorfismo de L^2 . Isso segue do Teorema da Alternativo de Fredholm [Ver [3]], pois

$$T_\lambda h = 0 \Leftrightarrow (-\Delta)^{-1}h = \frac{1}{\lambda}h \Leftrightarrow h = -\frac{1}{\lambda}\Delta h \Leftrightarrow -\Delta h = \lambda h \Leftrightarrow h = 0, \text{ se } \lambda \neq 0$$

ou seja, T_λ é isomorfismo. Disso segue que a restrição $T_\lambda \Big|_{H_0^1}$ é injetora. Mais ainda, T_λ é sobrejetor em $H_0^1(\Omega)$.

Com isso, e o fato de que T_λ em $L^2(\Omega)$ ser contínuo, segue que $T_\lambda \Big|_{H_0^1}$ é isomorfismo.

Proposição 4.2.1. *Para toda $f \in L^2(\Omega)$, o funcional definido em $H_0^1(\Omega)$*

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u) dx - \int_{\Omega} f u dx$$

satisfaz (PS), para todo nível c se $\lambda \neq \lambda_k$ e não satisfaz para $c = 0$ e $f = 0$ se $\lambda = \lambda_k$ para algum k dado.

Demonstração. Note inicialmente que

$$\langle DJ(u), v \rangle = DJ(u)[v] = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - \lambda uv) dx - \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1$$

Isso é equivalente a

$$\int_{\Omega} (\nabla DJ(u) \nabla v) dx = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - \lambda uv) dx - \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1$$

isto é,

$$-\Delta(DJ(u)) = -\Delta u - \lambda u - f$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} DJ(u) &= u - \lambda(-\Delta)^{-1}u - (-\Delta)^{-1}f \\ &= u - \lambda Ku - Kf. \end{aligned}$$

Considere $\{u_n\}_{n=0}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $DJ(u_n) \rightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$.
Se $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq \lambda_k$, temos:

$$\begin{aligned} DJ(u_n) &= u_n - \lambda(-\Delta)^{-1}u_n - (-\Delta)^{-1}f \\ &= -\lambda((-\Delta)^{-1}u_n - \frac{u_n}{\lambda}) - (-\Delta)^{-1}f \\ &= -\lambda T_\lambda u_n - (-\Delta)^{-1}f. \end{aligned}$$

Assim, usando que T_λ é isomorfismo em $H_0^1(\Omega)$, temos:

$$u_n = -\frac{1}{\lambda}T_\lambda^{-1}(DJ(u_n) + (-\Delta)^{-1}f) \rightarrow -\frac{1}{\lambda}T_\lambda^{-1}((-\Delta)^{-1}f),$$

ou seja, u_n converge e (PS) é satisfeita.

Se $\lambda = 0$, então,

$$u_n = DJ(u_n) + (\Delta)^{-1}f \rightarrow (-\Delta)^{-1}f$$

e assim (PS) também é satisfeita.

Agora, se $\lambda = \lambda_k$ para algum k , então, sem perda de generalidade, suponha que $f = 0$, sabemos que existe $\varphi_k \in H_0^1(\Omega)$ autofunção não nula tal que $-\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$. E mais, a sequência $u_n = n\varphi_k$ é tal que

$$J(u_n) = \frac{1}{2}\|n\varphi_k\|^2 - \lambda_k n^2 \int_\Omega \varphi_k^2 = n^2 \left(\frac{1}{2}\|\varphi_k\|^2 - \lambda_k \int_\Omega \varphi_k^2 dx \right) = 0.$$

e $DJ(u_n) = 0$, e certamente $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ não admite subsequência convergente. $\square$

Observação 4.2.2. Note que se $\lambda > \lambda_1$, então J não é limitado inferior-

mente em H_0^1 , e isso não impede que satisfaça (PS).

Proposição 4.2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto e limitado, $1 < p < \frac{d+2}{d-2}$ para $d \geq 3$ e $1 < p < \infty$ para $d \leq 2$. Então o funcional em $H_0^1(\Omega)$*

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx$$

satisfaz (PS) em todo nível.

Demonstração. Inicialmente note que J está bem definido, $J \in C^1$ e também

$$DJ(u)[v] = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} |u|^{p-1} uv dx$$

e, então,

$$DJ(u) = -\Delta u + |u|^{p-1}u.$$

Seja $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $J(u_n) \rightarrow c$, para algum $c \in \mathbb{R}$, e $DJ(u_n) \rightarrow 0$. Temos:

$$DJ(u_n)[u_n] = \|u_n\|_{H_0^1}^2 + \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx = (p+1)J(u_n) - \frac{p}{2}\|u_n\|_{H_0^1}^2.$$

Por definição de norma em H^{-1} ,

$$|DJ(u_n)[u_n]| \leq \|DJ(u_n)\|_{H^{-1}} \|u_n\|_{H_0^1}$$

e disso segue que

$$\frac{p}{2}\|u_n\|_{H_0^1}^2 \leq (p+1)J(u_n) + \|DJ(u_n)\|_{H^{-1}} \|u_n\|_{H_0^1}.$$

Assim, para n suficientemente grande e $\epsilon = 1$ temos que $J(u_n) \leq c + 1$ e $\|DJ(u_n)\|_{H^{-1}} \leq 1$. Logo,

$$\frac{p}{2}\|u_n\|_{H_0^1}^2 \leq (p+1)(c+1) + \|u_n\|_{H_0^1}. \quad (4.4)$$

Isso implica que $\{u_n\}$ é limitada, pois a equação (4.4) é uma parábola concava para cima. Mais ainda, como $p < 2^*$, pelo Teorema de Sobolev,

$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ compactamente. Ou seja, a menos de subsequência, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u$ em $L^{p+1}(\Omega)$.

Observe agora que se $v \in L^{p+1}(\Omega)$ então $|v|^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Logo, $|u_n|^{p-1}u_n \rightarrow |u|^{p-1}u$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$.

De fato, usando a seguinte desigualdade,

$$||a|^{p-1} - |b|^{p-1}| \leq \begin{cases} |a - b|^{p-1}, & 1 \leq p \leq 2 \\ c_p(|a|^{p-2}|a - b| + |a - b|^{p-1}), & p > 2 \end{cases}$$

temos,

$$\begin{aligned} ||u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u||_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} &= \int_{\Omega} ||u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u|^{\frac{p+1}{p}} dx \\ &= \int_{\Omega} ||u_n|^{p-1}u_n - |u_n|^{p-1}u + |u_n|^{p-1}u - |u|^{p-1}u|^{\frac{p+1}{p}} dx \\ &= \int_{\Omega} ||u_n|^{p-1}(u_n - u) + u(|u_n|^{p-1} - |u|^{p-1})|^{\frac{p+1}{p}} dx \\ &\leq c_p \int_{\Omega} |u_n|^{(p-1)\frac{(p+1)}{p}} |u_n - u|^{\frac{p+1}{p}} + |u|^{\frac{p+1}{p}} ||u_n|^{p-1} - |u|^{p-1}|^{\frac{p+1}{p}} dx \\ &\leq c_p \int_{\Omega} |u_n|^{(p-1)\frac{(p+1)}{p}} |u_n - u|^{\frac{p+1}{p}} + |u|^{\frac{p+1}{p}} (|u|^{(p-2)\frac{p+1}{p}} |u_n - u|^{\frac{p+1}{p}} + |u_n - u|^{(p-1)\frac{p+1}{p}}) dx \\ &\leq c_p \left[\left(\int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx \right)^{\frac{p+1}{p}} \left(\int_{\Omega} |u_n - u|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |u_n - u|^{p+1} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Agora, como o expoente conjugado de $(p+1)$ é $\frac{p+1}{p}$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, segue que $(L^{p+1})' \hookrightarrow (H_0^1)'$, isto é $L^{\frac{p+1}{p}} \hookrightarrow H^{-1}$ e

$$-\Delta u_n = DJ(u_n) - |u_n|^{p-1}u_n \rightarrow |u|^{p-1}u \quad \text{em} \quad H^{-1}.$$

Ou seja,

$$u_n = (-\Delta)^{-1}(DJ(u_n) - |u_n|^{p-1}u_n) \rightarrow (-\Delta)^{-1}(-|u|^{p-1}u)$$

e então (PS) é satisfeita. $\square$

Observação 4.2.3. *A proposição acima pode nos levar a pensar que tenhamos resolvido o problema $-\Delta u = -|u|^{p-1}u$. Infelizmente este não é o caso, pois falta garantir que $u \neq 0$. Claro que isso pode ser difícil, já que este funcional em particular é estritamente convexo, e portanto tem um valor crítico em 0 e um ponto crítico em $u = 0$. Então, essa proposição é apenas para mostrar o passo a passo para garantir que uma sequência satisfaz (PS). Em particular, note que um dos ingredientes cruciais na prova acima é como $J(u_n)$ e $DJ(u_n)$ se relacionam e como isso pode implicar as estimativas para uma sequência (PS).*

Definição 4.2.2. *Seja E um espaço de Banach e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. Dizemos que $v \in E$ é pseudo-gradiente de J em u se*

$$i) \|v\|_{E'} \leq 2\|DJ(u)\|_{E'}$$

$$ii) DJ(u)[v] \geq \|DJ(u)\|_{E'}^2$$

Seja E_r o conjunto dos pontos regulares de J . A aplicação $v : E_r \rightarrow E$ é um campo pseudo-gradiente para J se for localmente Lipschitz e $\forall u \in E_r$, $v(u)$ é pseudo-gradiente de J em u .

Lema 4.2.1. *Seja E um espaço de Banach e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. Então existe um campo pseudo-gradiente para J .*

Demonstração. Seja $u \in E_r$, vamos mostrar a existência de $v(u)$ pseudo-gradiente em u . Para isso, note que pela definição de norma no espaço dual, $\|DJ(u)\|_{E'} = \sup\{\langle DJ(u), v \rangle; \|v\| = 1\} \neq 0$. Então, existe $w_u \in E$ tal que $\|w_u\| = 1$ e $\langle DJ(u), w_u \rangle > \frac{2}{3}\|DJ(u)\|_{E'}$.

Defina $v_u = \frac{3}{2}\|DJ(u)\|_{E'}w_u$, disso segue que $\|v_u\|_{E'} = \frac{3}{2}\|DJ(u)\|_{E'} < 2\|DJ(u)\|_{E'}$ e

$$\langle DJ(u), v_u \rangle = \langle DJ(u), \frac{3}{2}\|DJ(u)\|_{E'}w_u \rangle = \frac{3}{2}\|DJ(u)\|_{E'}\langle DJ(u), w_u \rangle > \|DJ(u)\|_{E'}^2.$$

Como ambas as desigualdades acima são estritas, segue da continuidade de DJ que existe $U_u \subset E$ aberto, tal que $\forall z \in U_u$, $\|v_u\|_{E'} \leq 2\|DJ(z)\|_{E'}$ e $\langle DJ(z), v_u \rangle \geq \|DJ(z)\|_{E'}^2$.

Em outras palavras, v_u é pseudo-gradiente em qualquer $z \in U_u$. Observe que, como $v_u \neq 0$, $U_u \subset E_r$.

Construímos então uma cobertura de $E_r = \bigcup_{u \in E_r} U_u$, onde para cada $u \in E_r$, existe um pseudo-gradiente v_u constante em U_u . A questão agora é colar esses vetores constantes para construir um campo localmente Lipschitz. Usamos então, o fato que todo espaço métrico é paracompacto, isto é, cada cobertura aberta admite subcobertura aberta localmente finita. No nosso contexto, isso se traduz como a existência de outra cobertura de E_r , $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tal que para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $u_\lambda \in E_r$ tal que $W_\lambda \subset U_{u_\lambda}$, e que para qualquer $u \in E_r$ existe uma vizinhança aberta $\mathcal{O}$ de u tal que $\mathcal{O} \cap W_\lambda = \emptyset$, exceto para um número finito de índices $\lambda \in \Lambda$.

Em seguida, definimos $\Psi_\lambda(u) = d(u, E_r \setminus W_\lambda)$. Temos que Ψ_λ é Lipschitz, $\text{supp } \Psi_\lambda = \overline{W}_\lambda$ e Ψ_λ é localmente limitada inferiormente por um número estritamente positivo em W_λ , pois se $B(u, r) \subset W_\lambda$, então $\Psi_\lambda \geq r$ em $B(u, r)$. Além disso, a soma $\sum_{\mu \in \Lambda} \Psi_\mu$ é localmente finita, e portanto localmente Lipschitz, e limitada inferiormente por um número estritamente positivo, devido ao fato que $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é cobertura de E_r .

Definimos em E_r

$$\Theta_\lambda = \frac{\Psi_\lambda}{\sum_{\mu \in \Lambda} \Psi_\mu},$$

então, $0 \leq \Theta_\lambda \leq 1$, $\sum_{\mu \in \Lambda} \Theta_\mu = 1$, $\text{supp } \Theta_\lambda = \overline{W}_\lambda$ e Θ_λ é localmente Lipschitz.

Podemos finalmente definir

$$v(u) = \sum_{\mu \in \Lambda} \Theta_\lambda(u) v_{u_\lambda}.$$

Essa soma é localmente finita, logo está bem definida e é localmente Lipschitz. Em cada ponto u , seu valor é uma combinação convexa de um número finito de pseudo-gradientes em u . De fato, $\Theta_\lambda(u) > 0 \Leftrightarrow u \in W_\lambda$, com $W_\lambda \subset U_{u_\lambda}$, conjunto no qual v_{u_λ} é pseudo-gradiente constante. Agora, é claro que qualquer combinação convexa de pseudo-gradiente, é um pseudo-gradiente e então a demonstração está completa. $\square$

4.3 O lema da deformação.

Definição 4.3.1. *Seja $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. Definimos $A_c = \{u \in E; J(u) \leq c\}$, $\hat{A}_c = \{u \in E; J(u) \geq c\}$ e $K_c = \{u \in E; J(u) = c \text{ e } J'(u) = 0\}$.*

Lema 4.3.1. *Seja $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo (PS). Se $c \in \mathbb{R}$ e $\bar{\epsilon} > 0$ e $\mathcal{O}$ é uma vizinhança de K_c , então existe $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ e $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$ tal que*

- 1) $\eta(0, u) = u \quad \forall u \in E$.
- 2) $\eta(t, u) = u \quad \forall t \in [0, 1]$, se $J(u) \notin [c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]$.
- 3) $\eta(t, u)$ é homeomorfismo de E em E , para cada $t \in [0, 1]$.
- 4) $\|\eta(t, u) - u\| \leq 1, \forall t \in [0, 1]$ e $u \in E$.
- 5) $J(\eta(t, u)) \leq Ju, \forall t \in [0, 1]$ e $u \in E$.
- 6) $\eta(1, A_{c+\epsilon} \setminus \mathcal{O}) \subset A_{c-\epsilon}$.
- 7) Se $K_c = \emptyset$ então $\eta(1, A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon}$.
- 8) Se $J(u)$ é par, então $\eta(t, u)$ é ímpar.

Demonstração. A função η será construída como solução de um adequado fluxo de J . De (PS), sabemos que K_c é relativamente compacto, mas ainda

como $J \in C^1$, então K_c é fechado, e logo K_c é compacto.

Seja $N_\delta = \{u \in ; \|u - K_c\| < \delta\}$, para δ suficientemente pequeno, temos que $N_\delta \subset \mathcal{O}$. Logo, para provar 6, é suficiente considerar N_δ . Note também que se $K_c = \emptyset$, então $N_\delta = \emptyset$ e, assim, concluímos 7.

Afirmção 1: Existem constantes $b, \hat{\epsilon} > 0$, tais que

$$\|J'(u)\| \geq b, \quad \forall u \in A_{c+\hat{\epsilon}} \setminus (A_{c-\hat{\epsilon}} \cup N_{\frac{\delta}{8}}). \quad (4.5)$$

De fato, suponha por absurdo que não vale esta afirmação, então existem $b_n \rightarrow 0$, $\hat{\epsilon}_n \rightarrow 0$ e $u_n \in A_{c+\hat{\epsilon}_n} \setminus (A_{c-\hat{\epsilon}_n} \cup N_{\frac{\delta}{8}})$ tal que $\|J'(u)\| \rightarrow 0$ e $J(u_n) \rightarrow c$, com $\{u_n\} \subset N_{\frac{\delta}{8}}^c$. Logo, por (PS), $\{u_n\}$ a menos de subsequência converge para algum u , e como $J \in C^1$, temos:

$$\|J'(u)\| = 0 \quad e \quad J(u) = c,$$

com $u \in N_{\frac{\delta}{8}}$.

Assim, $u \in K_c \cap N_{\frac{\delta}{8}}^c = \emptyset$. O que é um absurdo, e portanto vale (4.5).

Observe que se $\hat{\epsilon}$ diminui, (4.5) ainda está garantida, e podemos então supor que

$$0 < \hat{\epsilon} < \min \left(\hat{\epsilon}, \frac{b\delta}{32}, \frac{b^2}{2}, \frac{1}{8} \right). \quad (4.6)$$

Tome $\epsilon \in (0, \hat{\epsilon})$, definimos $A = \{u \in E ; J(u) \leq c - \hat{\epsilon}\} \cup \{u \in E ; J(u) \geq c + \hat{\epsilon}\}$ e $B = \{u \in E ; c - \epsilon \leq J(u) \leq c + \epsilon\}$. Temos:

- $A \cap B = \emptyset$.
- A , B e N_δ são simétricos se J é par.

Definimos também em E , as funções $g(x) = \frac{\|x - A\|}{\|x - A\| + \|x - B\|}$ e

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \in N_{\frac{\delta}{8}} \\ 1 & \text{for } x \in N_{\frac{\delta}{4}}^c \end{cases}$$

Então,

- $0 \leq g, f \leq 1$.
- f e g são localmente Lipschitz.
- f e g são funções pares.
- $g|_A = 0$ e $g|_B = 0$.

Definimos agora $h(s) = \begin{cases} 1 & \text{for } s \in [0, 1] \\ \frac{1}{s} & \text{for } s \geq 1 \end{cases}$. Como $J \in C^1(E, \mathbb{R})$, sabemos pelo lema anterior que existe V campo pseudo-gradiente para J em $\tilde{E} = \{u \in E; J'(u) \neq 0\}$. Mais ainda, podemos supor que V é ímpar, pois J é par.

Finalmente, considere

$$W(x) = \begin{cases} -f(x)g(x)h(\|V(x)\|)V(x) & \text{for } x \in \tilde{E} \\ 0 & \text{for } x \notin \tilde{E}. \end{cases}$$

Então, por construção temos:

- W é localmente Lipschitz.
- $0 \leq \|W(x)\| \leq 1$.
- W é ímpar.

Considere agora o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = W(\eta) \\ \eta(0, u) = u \end{cases}. \quad (4.7)$$

Pelo Teorema de existência e unicidade, para cada $u \in E$, (4.7) tem uma única solução no intervalo $(t^-(u), t^+(u))$.

Afirmção 2: $t^+(u) = +\infty$ e $t^-(u) = -\infty$.

De fato, se $t^+(u) < +\infty$, então seja $t_n \rightarrow t^+(u)$ com $t_n < t^+(u)$, usando a desigualdade do valor médio temos

$$\|\eta(t_{n+1}, u) - \eta(t_n, u)\| \leq \left\| \frac{d\eta}{dt} \right\| |t_{n+1} - t_n| = \|W(\eta)\| |t_{n+1} - t_n| \leq |t_{n+1} - t_n|.$$

Agora, como $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ converge, então é Cauchy, e da desigualdade acima, temos que $\{\eta(t_n, u)\}_{n=0}^\infty$ também é Cauchy, e assim converge para algum $\bar{u}$ quando $t_n \rightarrow t^+(u)$.

Então (4.7) com problema inicial $\bar{u}$, nos dá uma extensão de $\eta(t, u)$ para $t > t^+(u)$, o que é um absurdo. Logo, $t^+(u) = +\infty$. Analogamente, concluimos que $t^-(u) = -\infty$.

A dependencia contínua das soluções de (4.7) no dado inicial u , implica que $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$. Mais ainda, (4.7) garante 1. Como $\bar{\epsilon} > \hat{\epsilon}$, então $J(u) \notin [c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]$ o que implica $u \in A$, e como $g|_A = 0$ (4.7) torna-se:

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = 0 \\ \eta(0, u) = u \end{cases}.$$

Portanto, $\eta(t, u) = u$, $\forall t \in [0, 1]$, o que garante 2.

Uma propriedade de semigrupo para as soluções de (4.7) garante 3.

$$\|\eta(t, u) - u\| = \|\eta(t, u) - \eta(0, u)\| = \left\| \int_0^t \frac{d\eta}{dt} dt \right\| = \|W(\eta)\| \leq 1,$$

o que nos dá 4.

Como J é par e W é ímpar, de (4.7) concluimos que η é ímpar, o que nos dá 8.

Agora, se $W(u) = 0$, então $\eta(t, u) = u$ e segue 5. Mas, se $W(u) \neq 0$,

$u \in \tilde{E}$, então

$$\begin{aligned}
\frac{DJ(\eta(t, u))}{dt} &= J'(\eta(t, u)) \frac{d\eta(t, u)}{dt} \\
&= \langle J'(\eta(t, u)), -f(\eta(t, u))g(\eta(t, u))h(\|V(\eta(t, u))\|)V(\eta(t, u)) \rangle \\
&= -f(\eta(t, u))g(\eta(t, u))h(\|V(\eta(t, u))\|)\langle J'(\eta(t, u)), V(\eta(t, u)) \rangle \\
&\leq -f(\eta(t, u))g(\eta(t, u))\|J'(\eta(t, u))\|^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Logo, J não é crescente em $\eta(t, u)$ e portanto vale 5.

Finalmente, para verificar 6, temos:

Se $u \in A_{c-\epsilon}$ então, por 5 $J(\eta(t, u)) \leq c - \epsilon$. Portanto, resta garantir que se $u \in Y := A_{c+\epsilon} \setminus (A_{c-\epsilon} \cup N_\delta)$, então $\eta(1, u) \in A_{c-\epsilon}$.

De fato, seja $u \in Y$, sabemos que $\frac{DJ(\eta(t, u))}{dt} \leq 0$. Como $g|_A = 0$ e $A_{c-\epsilon} \subset A$, então $\eta(t, u)$ não passa por $A_{c-\epsilon}$. Pois se $J(\eta(t, u)) \leq c - \hat{\epsilon} \leq c - \epsilon$, então $J(\eta(t, u)) \leq c - \epsilon$, e $g|_A = 0$ implica que $\eta(t, u) = u$ e assim $J(u) \leq c - \epsilon$, ou seja $u \in A_{c-\epsilon}$, o que é absurdo.

Logo,

$$J(\eta(0, u)) - J(\eta(t, u)) = J(u) - J(\eta(t, u)) \leq c + \epsilon - (c - \hat{\epsilon}) = \epsilon + \hat{\epsilon} < 2\hat{\epsilon} \quad (4.8)$$

para todo $t \geq 0$.

Suponha agora que $\eta(s, u) \in Z := A_{c+\epsilon} \setminus (A_{c-\epsilon} \cup N_{\frac{\delta}{2}})$ para algum $s \in [0, t]$ com t pequeno, então para este s , $\eta(s, u) \in \tilde{E}$ e $f(\eta(s, u)) = g(\eta(s, u)) = 1$.

De (4.8), temos:

$$\begin{aligned}
2\hat{\epsilon} &> J(\eta(0, u)) - J(\eta(t, u)) \\
&\geq \int_t^0 -h(\|V(\eta(s, u))\|) \langle J'(\eta(s, u)), V(\eta(s, u)) \rangle ds \\
&= \int_0^t h(\|V(\eta(s, u))\|) \langle J'(\eta(s, u)), V(\eta(s, u)) \rangle ds \\
&\geq \int_0^t h(\|V(\eta(s, u))\|) \|J'(\eta(s, u))\|^2 ds \\
&\geq b \int_0^t h(\|V(\eta(s, u))\|) \|J'(\eta(s, u))\| ds \\
&\geq \frac{b}{2} \int_0^t h(\|V(\eta(s, u))\|) \|V(\eta(s, u))\| ds \\
&\geq \frac{b}{2} \left\| \int_0^t h(\|V(\eta(s, u))\|) V(\eta(s, u)) ds \right\| \\
&\geq \frac{b}{2} \left\| \int_0^t W(\eta(s, u)) ds \right\| = \frac{b}{2} \|\eta(t, u) - u\|,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\eta(t, u) - u\| \leq \frac{4\hat{\epsilon}}{b} < \frac{\delta}{8}.$$

Logo, $\eta(t, u)$ não pode sair de Z e entrar em $N_{\frac{\delta}{2}}$. Consequentemente, se $\eta(t, u) \notin Z$, então $\eta(t, u) \in A_{c-\epsilon}$.

Claro que isso ocorre para algum $t \in (0, 1)$. Se não, $\eta(t, u) \in Z$, para todo $t \in (0, 1)$ e das desigualdades acima

$$\frac{DJ(\eta(t, u))}{dt} \leq -h(\|V(\eta(t, u))\|) \|J'(\eta(t, u))\|^2.$$

Se para algum $t \in (0, 1)$, $\|V(\eta(t, u))\| \leq 1$ então $h(\|V(\eta(t, u))\|) = 1$, e assim

$$\frac{DJ(\eta(t, u))}{dt} \leq -\|J'(\eta(t, u))\|^2 \leq -b^2.$$

Por outro lado, se para algum $t \in (0, 1)$, $\|V(\eta(t, u))\| > 1$, então

$$h(\|V(\eta(t, u))\|) = \frac{1}{\|V(\eta(t, u))\|}, \text{ e daí}$$

$$\frac{DJ(\eta(t, u))}{dt} \leq -\frac{\|J'(\eta(t, u))\|^2}{\|J'(\eta(t, u))\|} \leq -\frac{1}{4}\|V(\eta(t, u))\| \leq -\frac{1}{4}.$$

Com isso, temos, $\forall t \in (0, 1)$,

$$\frac{DJ(\eta(t, u))}{dt} \leq \min(-\frac{1}{4}, -b^2) < -\min(\frac{1}{4}, b^2).$$

Assim,

$$\min(\frac{1}{4}, b^2) \leq J(u) - J(\eta(1, 0)) < 2\hat{\epsilon},$$

ou seja, $\hat{\epsilon} > \min(\frac{1}{4}, b^2)$, o que é absurdo. $\square$

4.4 O Princípio Minimax e o Lema do Passo da Montanha

O lema da deformação permite assim uma caracterização topológica de valores regulares que se baseia apenas nos valores tomados pelo próprio funcional e não por sua diferencial. É usado no contexto de encontrar pontos críticos via o seguinte princípio minimax.

Para todo $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon_0 > 0$, nós introduzimos um conjunto de homeomorfismo de E .

$$D_c^{\epsilon_0} = \{\eta; \forall u \in \{J \leq c - \epsilon_0\} \cup \{J \geq c + \epsilon_0\}, \eta(u) = u\}.$$

Teorema 4.4.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos não vazios de E , e seja*

$$c = \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{u \in A} J(u).$$

Suponha que $c \in \mathbb{R}$ e $J \in C^1$ satisfaz (PS) no nível c , suponha também que

existe α tal que A é estável sob $D_c^{\epsilon_0}$ para todo $\alpha \geq \epsilon_0 > 0$, ou seja, se $A \in \mathcal{A}$, então $\eta(A) \in \mathcal{A}$, $\forall \eta \in D_c^{\epsilon_0}$. Então, c é valor crítico de J .

Demonstração. Suponha por absurdo que c é valor regular de J . Seja ϵ_0 dado pelo lema da deformação, tal que $\epsilon_0 < \alpha$, e tome $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Pela definição de infímo, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$\sup_{u \in A} J(u) \leq c + \epsilon,$$

ou seja, existe $A \subset A_{c+\epsilon}$, e pelo lema da deformação, existe $\eta \in D_c^{\epsilon_0}$ tal que $\eta(A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon}$. Logo, $A' = \eta(A) \subset \eta(A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon}$.

O que implica que

$$\sup_{u \in A'} J(u) \leq c - \epsilon.$$

Assim, como por hipótese, $A' \in \mathcal{A}$, então a expressão acima contradiz o fato de c ser infímo. $\square$

Observação 4.4.1. *i) Se J satisfaz (PS), então $(-J)$ também satisfaz. Portanto, temos um resultado similar com*

$$d = \sup_{A \in \mathcal{A}} \inf_{u \in A} J(u).$$

ii) Se tomarmos $\mathcal{A} = \{\{u\}; u \in E\}$, então recuperamos o fato que um funcional que satisfaz (PS), e é limitado inferiormente atinge infímo. E pela observação acima, se é limitado superiormente, atinge supremo.

iii) O uso do princípio minimáx baseia-se em escolhas específicas para $\mathcal{A}$. Esta é geralmente tomada como uma classe de subconjuntos que compartilham de um invariante topológico, que é conservado por η .

Damos agora uma primeira aplicação, conhecida como o lema do passo da montanha.

Teorema 4.4.2. *Seja $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo (PS) tal que*

i) $J(0)=0$.

ii) $\exists R > 0$ e $a > 0$ tal que, se $\|u\|_E = R$, então $J(u) \geq a$.

iii) $\exists v \in E$, $\|v\|_E > R$ tal que $J(v) < a$.

Então, J admite valor crítico $c \geq a$.

A condição (iii) é conhecida como condição de Ambrosetti-Rabinowitz, que foram os autores do Teorema do Passo da Montanha.

Demonstração. Vamos aplicar o princípio minimax, com $\mathcal{A}$ escolhida da forma, $\mathcal{A} = \{A_\gamma = \gamma([0, 1]) \in C^0([0, 1]); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}$, e tome $\alpha = \frac{1}{2} \min(a, a - J(v)) > 0$.

Seja γ um caminho ligando 0 a v , e $A_\gamma = \gamma([0, 1]) \in \mathcal{A}$. Como a função $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Phi(t) = \|\gamma(t)\|_E$ é contínua e $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = \|v\|_E$, então pelo Teorema do valor intermediário, existe $s \in (0, 1)$ tal que $\Phi(s) = \|\gamma(s)\|_E = R$. Como, $\sup_{u \in A} J(u) \geq J(u)$, $\forall u \in A$, em particular para $u = \gamma(s)$, então, $\sup_{u \in A} J(u) \geq J(\gamma(s)) \geq a$. Assim,

$$c = \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{u \in A} J(u) \geq a.$$

Mais ainda, $c < +\infty$, pois $\gamma([0, 1]) \subset E$ é compacto, $\forall \gamma$, então $J(\gamma([0, 1])) = J(A_\gamma)$ é compacto. E, portanto, $\sup_{u \in A_\gamma} J(u) < +\infty$.

Seja $\epsilon_0 \in (0, \alpha]$, temos que $D_c^{\epsilon_0} \subset D_c^\alpha$, pois se $\eta \in D_c^{\epsilon_0}$, então $\eta(u) = u$, $\forall u \in A_{c-\epsilon_0} \cup \{u \in E; J(u) \geq c + \epsilon_0\}$. Agora, como $\epsilon_0 \leq \alpha$, então $J(u) \leq c - \alpha \Rightarrow J(u) \leq c - \epsilon_0$, e se $J(u) \geq c + \alpha \Rightarrow J(u) \geq c + \epsilon_0$. Ou seja, $A_{c-\alpha} \cup \{u \in E; J(u) \geq c + \alpha\} \subset A_{c-\epsilon_0} \cup \{u \in E; J(u) \geq c + \epsilon_0\}$.

Assim, $\eta(u) = u$, $\forall u \in A_{c-\alpha} \cup \{u \in E; J(u) \geq c + \alpha\}$, e então $\eta \in D_c^\alpha$.

Considere então, η homeomorfismo em D_c^α . Por construção, temos:

$$\begin{cases} J(0) = 0 \leq a - \alpha \leq c - \alpha \\ J(v) = a + J(v) - a \leq a - \alpha \leq c - \alpha \end{cases},$$

e da definição de D_c^α , temos:

$$\begin{cases} \eta(0) = 0 \\ \eta(v) = v \end{cases}.$$

Ou seja,

$$\begin{cases} (\eta \circ \gamma)(0) = 0 \\ (\eta \circ \gamma)(v) = v \end{cases},$$

e como $(\eta \circ \gamma)$ é contínua, $\eta(A_\gamma \in \mathcal{A})$, isto é, $\mathcal{A}$ é estável em $D_c^{\epsilon_0}$, $\forall \epsilon_0 \in (0, \alpha]$.

Logo, pelo princípio minimax, c é valor crítico de J . □

Observação 4.4.2. *i) A expressão “passo da montanha” é melhor compreendida se interpretarmos as condições i)-iii) geometricamente no caso $E = \mathbb{R}^2$. As condições i)-ii) significam que a origem está localizada em uma tigela cercada por montanhas que são todas, pelo menos, tão altas quanto a . A condição iii) significa que além dessas montanhas, existe um ponto mais baixo v , digamos em um vale. Parece intuitivamente claro, que se quisermos ir continuamente de 0 a v , devemos passar pelo desfiladeiro da montanha, que certamente existirá.*

De fato, a construção minimax nos diz o que fazer. Olhar para a altitude máxima atingida em cada caminho, e encontrar um caminho que minimize essa altitude máxima. Se o caminho atingir o mínimo das altitudes dos pontos mais elevados de todos os caminhos, então a altitude é um valor crítico e estamos num passo da montanha.

ii) O lema do passo da montanha é verdadeiro sem (PS), quando $E = \mathbb{R}$, isso vem do Teorema do valor intermediário e do Teorema de Rolle. O lema

falha sem (PS) para E com dimensão > 2 . Pode não existir passagem da montanha, por que o máximo da altitude não é atingido.

Exemplo 4.4.1. *Considere*

$$J(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^4,$$

então

$$DJ(x, y) = (2x(1 + y)^3, 4y^3 + 3x^2(1 + y)^2).$$

Assim,

$$DJ(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1 + y)^3 \\ 4y^3 + 3x^2(1 + y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Ou seja, $(0, 0)$ é o único ponto crítico de J , e $J(0, 0) = 0$. Este ponto é mínimo local estrito, pois $J(x, y) \approx x^2 + y^4$ em uma vizinhança de $(0, 0)$.

A origem está portanto, realmente situada em uma tigela cercada por montanhas. É possível ir ainda mais baixo, por fora da tigela, já que $\inf J = -\infty$. Esse é um exemplo de função que tem mínimo local e não tem mínimo global.

Como não há outro ponto crítico além do mínimo local, significa que não existe passagem da montanha para sair da tigela e descer para o vale além. Isso pode acontecer se os caminhos de minimização forem infinitos. Isso está diretamente ligado ao fato de J não satisfazer (PS) no nível minimax.

Se olharmos o que está acontecendo nas curvas $(x, y) = \left(\pm \frac{2|y|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3(1+y)}}, y\right)$, com $-1 < y \leq 0$, vemos que $x \rightarrow \pm\infty$, $DJ(x, y)w \rightarrow 0$ e $J \rightarrow 1$, quando $y \rightarrow -1$.

Andando ao longo dessas curvas, podemos construir sequências (PS) no nível $c = 1$, que não são relativamente compactas, por exemplo, se $y_n = -1 + \frac{1}{n}$. Além disso, é possível verificar que o nível $c = 1$ é precisamente o

inf-máx de J em caminhos saindo da “tigela”.

Corolário 4.4.1. *Seja J como no Teorema anterior, tirando a condição ii), e tal que 0 é mínimo local estrito. Então, a hipótese ii) do Teorema anterior é satisfeita.*

Demonstração. Como 0 é mínimo local estrito, e $J(0)=0$, então existe $r > 0$ tal que $\forall u \in B(0, r) \setminus \{0\}$ temos $J(u) > 0$. Seja $S_{\frac{r}{2}}$ a esfera de raio $\frac{r}{2}$. Suponha por absurdo que $\inf_{S_{\frac{r}{2}}} J = 0$, então existe uma sequência $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S_{\frac{r}{2}}$ e $J(v_n) \leq \frac{r^2}{16n^2}$, pelo corolário 4.1.3, com $F = \overline{B(0, r)}$, existe $\{\bar{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $J(\bar{v}_n) \leq \frac{r^2}{16n^2}$ e $\|v_n - \bar{v}_n\| \leq \frac{r}{2n}$.

Além disso, para $n > 1$, temos:

$$\|\bar{v}_n\| \leq \|v_n - \bar{v}_n\| + \|v_n\| \leq \frac{r}{2n} + \frac{r}{2} = \frac{r}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq r,$$

ou seja, $\{\bar{v}_n\}_{n=2}^{\infty} \subset \text{int } F$, e logo $\|DJ(v_n)\| \leq \frac{r}{2n}$.

Isto é, $\{\bar{v}_n\}_{n=2}^{\infty}$ satisfaz (PS), e logo admite subsequência convergente a $\bar{v} \in S_{\frac{r}{2}}$, pois

$$\|v_n\| \leq \|\bar{v} - \bar{v}_n\| + \|\bar{v}_n - v_n\| + \|\bar{v}\| \Rightarrow \|v_n\| - \|\bar{v} - \bar{v}_n\| - \|\bar{v}_n - v_n\| \leq \|\bar{v}\|,$$

ou seja,

$$\frac{r}{2} - \|\bar{v} - \bar{v}_n\| - \frac{r}{2n} \leq \|\bar{v}\| \leq \frac{r}{2n} + \frac{r}{2}.$$

Logo, se $n \rightarrow +\infty$, temos que $\|\bar{v}\| = \frac{r}{2}$. Com isso, temos também que $J(\bar{v}) = 0$. Assim, existe $\bar{v} \neq 0$ tal que $J(\bar{v}) = 0$, o que é absurdo.

Logo, $\inf_{S_{\frac{r}{2}}} J = a > 0$, ou ainda, existe $R = \frac{r}{2} > 0$ e $a = \inf_{S_{\frac{r}{2}}} J$ tal que se $\|u\| = R$, então $a = \inf_{S_{\frac{r}{2}}} J \leq J(u)$. $\square$

Um corolário imediato disso é que se J tem dois mínimos locais estritos e satisfaz (PS), então J admite um terceiro ponto crítico. Aplicamos agora

o Teorema do passo da montanha a um exemplo de problema semilinear.

4.5 Aplicação ao problema modelo.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto e limitado, $d \geq 3$ e $\lambda_1 > 0$ primeiro autovalor de $(-\Delta)$ em $H_0^1(\Omega)$. Dado $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e G uma primitiva de g , tal que

- i) $g(0)=0$ e $G(0)=0$.
- ii) $\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{g(s)}{s} < \lambda_1$.
- iii) $\exists \theta > 2, R > 0$ tal que $0 < \theta G(s) \leq sg(s)$, para $|s| \geq R$.
- iv) $\frac{g(s)}{|s|^{\frac{d+2}{d-2}}} \rightarrow 0$ se $s \rightarrow \pm\infty$.

Vamos tentar encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{em } \Omega. \quad (4.9)$$

Claro que este problema sempre tem solução trivial $u = 0$. Vamos então procura uma solução não trivial.

Para isso, prosseguiremos com uma sequência de lemas, em que C e C' denotarão constantes estritamente positivas.

Primeiramente, daremos algumas propriedades elementares da função g , derivadas das hipóteses i)-iv).

Lema 4.5.1. *Seja g satisfazendo i)-iv) acima. Então*

a) $\forall \epsilon, \exists C(\epsilon) \geq 0$ tal que

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad |g(s)| < \epsilon |s|^{\frac{d+2}{d-2}} + C(\epsilon)$$

b) $\forall |s| \geq R$, temos:

$$c|s|^\theta \leq |G(s)| \leq C'|s|^{2^*}$$

$$c) \theta \leq 2^* = \frac{2d}{d-2}$$

$$d) \forall |s| \geq R, |g(s)| \geq C|s|^{\theta-1}.$$

Demonstração. a) Da hipótese iv) sabemos que $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ tal que se $|s| \geq M \Rightarrow \frac{|g(s)|}{|s|^{\frac{d+2}{d-2}}} < \epsilon \Rightarrow |g(s)| < \epsilon |s|^{\frac{d+2}{d-2}}$, para todo $|s| \geq M$.

$$\text{Defina } C(\epsilon) = \left| \max_{[-M, M]} (|g(s)| - \epsilon |s|^{\frac{d+2}{d-2}}) \right|, \text{ então se } |s| \leq M$$

$$|g(s)| - \epsilon |s|^{\frac{d+2}{d-2}} < C(\epsilon),$$

ou seja, $\forall s \in \mathbb{R}$

$$|g(s)| < \epsilon |s|^{\frac{d+2}{d-2}} + C(\epsilon).$$

b) Sabemos de a) que para $\epsilon = 1$, existe $c > 0$ tal que $|g(s)| < |s|^{\frac{d+2}{d-2}} + C(1)$.

Assim, se $|s| \geq R$, temos

$$\begin{aligned} |G(s)| &= \left| \int_0^s g(t) dt \right| \leq \int_0^s |g(t)| dt \leq \int_0^s (|t|^{\frac{d+2}{d-2}} + C(1)) dt = \\ &= \frac{|s|^{2^*}}{2^*} + C(1)s \leq \left(\frac{1}{2^*} + C(1) \right) |s|^{2^*} = C' |s|^{2^*}. \end{aligned}$$

Por outro lado, de iii) temos que se $|s| \geq R, 0 < \theta G(s) \leq sg(s)$. Então, se $s \geq R$

$$(s^{-\theta} G(s))' = s^{-\theta} g(s) - \theta s^{-\theta-1} G(s) = s^{-\theta-1} (sg(s) - \theta G(s)) \geq 0.$$

Logo, $s^{-\theta} G(s) \geq R^{-\theta} G(R) \Rightarrow G(s) \geq R^{-\theta} s^{\theta} G(R) > 0$, desde que $G(R) > 0$.

Ou seja, $|G(s)| \geq c|s|^{\theta}$.

Se $s \leq -R$, então

$$(|s|^{-\theta} G(s))' = |s|^{-\theta-2} [s^2 g(s) - \theta s G(s)] = |s|^{-\theta-2} s [sg(s) - \theta G(s)] < 0.$$

Logo, $|s|^{-\theta} G(s) \geq |R|^{-\theta} G(R) > 0$. Ou seja, $|G(s)| \geq c|s|^{\theta}$.

c) Segue do fato de que, para s suficientemente grande, temos $cs^\theta \leq c's^{2^*}$, então $\theta \leq 2^* = \frac{2d}{d-2}$.

d) Segue de ii) e b), pois

$$c|s|^\theta \leq |G(s)| \leq |\theta G(s)| \leq |sg(s)| = |s||g(s)|.$$

Logo, $C|s|^{\theta-1} \leq |g(s)|$, $\forall |s| \leq R$. $\square$

Como $\theta > 2$, dizemos que G tem crescimento super-quadrático no infinito, e g é super-linear.

Usando essas propriedades e o mesmo tipo de argumento já usado neste trabalho, é fácil ver que o problema (4.9) é equivalente a encontrar pontos críticos de

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} G(u(x)) dx$$

o qual está bem definido e é C^1 em H_0^1 , e cuja derivada é

$$DJ(u) = -\Delta u - g(u)$$

em $H^{-1}(\Omega)$, na notação acima, vemos a derivada no sentido das distribuições. Vamos a um primeiro resultado de compacidade.

Lema 4.5.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto e limitado, $g \in C^0(\mathbb{R})$, $Q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ tal que $\frac{|g(s)|}{Q(s)} \rightarrow 0$, se $s \rightarrow \pm\infty$. Dada uma sequência de funções $u_n \rightarrow u$ q.t.p. e tal que $\int_{\Omega} Q(u_n)^p dx \leq C$, para algum $p \geq 1$, então $g(u_n) \rightarrow g(u)$ em L^p .*

Demonstração. Pelo Teorema de Egorov, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \Omega_\epsilon \subset \Omega$ mensurável tal que $\mu(\Omega \setminus \Omega_\epsilon) \leq \epsilon$ e $u_n \rightarrow u$ uniformemente em Ω_ϵ .

Como $|g(s)|^p \leq \epsilon^p Q(s) + C(\epsilon')$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{(\Omega \setminus \Omega_\epsilon)} |g(u_n) - g(u)|^p dx &\leq 2^{p-1} \int_{(\Omega \setminus \Omega_\epsilon)} (|g(u_n)|^p + |g(u)|^p) dx \\
&\leq 2^{p-1} \int_{(\Omega \setminus \Omega_\epsilon)} (\epsilon'^p Q(u_n) + C(\epsilon') + \epsilon'^p Q(u) + C(\epsilon')) dx \\
&= 2^{p-1} \epsilon'^p \int_{(\Omega \setminus \Omega_\epsilon)} (Q(u_n) + Q(u)) dx + 2^p C(\epsilon') \mu(\Omega \setminus \Omega_\epsilon) \\
&\leq C \epsilon'^p + \epsilon C(\epsilon')^p, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Escolhendo ϵ' e ϵ suficientemente pequenos, temos

$$\int_{(\Omega \setminus \Omega_\epsilon)} (|g(u_n)|^p + |g(u)|^p) dx < \hat{\epsilon}.$$

Mais ainda,

$$\int_{\Omega_\epsilon} |g(u_n) - g(u)|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow \infty$$

$\forall \epsilon$, pois $u_n \rightarrow u$ uniformemente Ω_ϵ . □

Lema 4.5.3. *O funcional J satisfaz (PS) em todo nível.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência tal que $J(u_n) \rightarrow c$ e $DJ(u_n) \rightarrow 0$ em $H^{-1}(\Omega)$.

Note que $\theta G(s) \leq sg(s) + C$ para todo s , e algum C , obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle DJ(u_n), u_n \rangle &= \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\Omega} g(u_n) u_n dx \\
&\leq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \theta \int_{\Omega} G(u_n) dx + C\mu(\Omega) \\
&= \theta J(u_n) - \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + C\mu(\Omega)
\end{aligned}$$

Como $\theta > 2$, segue como na prova da Proposição 4.2.2 que $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ é uniformemente limitada em $H_0^1(\Omega)$. Então, podemos extrair uma subsequência,

ainda denotada por u_n e encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad e \quad u_n \rightarrow u \text{ q.t.p em } \Omega$$

Definimos então $Q(s) = |s|^{\frac{d+2}{d-2}}$ e $p = \frac{2d}{d+2} \geq 1$, temos:

$$\int_{\Omega} Q^p(u_n) dx = \int_{\Omega} |u_n|^{\frac{2d}{d-2}} dx \leq C,$$

pela imersão de Sobolev. Pelo lema anterior, segue que $g(u_n) \rightarrow g(u)$ em $L^p(\Omega)$. Assim, como o conjugado de 2^* é nada menos que $\frac{2d}{d+2}$, segue que $L^p(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$.

Finalmente, concluímos que

$$-\Delta(u_n) = DJ(u_n) + g(u_n) \rightarrow g(u) \quad \text{em } H^{-1}(\Omega).$$

Ou seja, usando que $(-\Delta)^{-1}$ é isomorfismo de $H^{-1}(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$, temos que

$$u_n \rightarrow (-\Delta)^{-1}(g(u))$$

e então (PS) é satisfeita. □

Lema 4.5.4. *O funcional J satisfaz as hipóteses do lema do passo da montanha.*

Demonstração. Inicialmente, note que $J(0) = 0$. Como λ_1 é o primeiro autovalor de $(-\Delta)$, temos que $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \lambda_1 \|u\|_2^2$, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Pela hipótese (ii) listada no exemplo, temos que existe $\mu < \lambda_1$ tal que $\frac{g(s)}{s} < \mu$ em uma vizinhança de 0. Além disso, em uma vizinhança do infinito, temos que $|g(s)| \leq C|s|^{\frac{d+2}{d-2}}$. Podemos, portanto, escrever $g(s) \leq s\mu + C|s|^{\frac{d+2}{d-2}}$ para $s \geq 0$ e $g(s) \geq s\mu - C|s|^{\frac{d+2}{d-2}}$, para $s \leq 0$.

Em ambos os casos, integrando a partir de 0, temos:

$$G(s) \leq \mu \frac{s^2}{2} + C|s|^{\frac{2d}{d-2}}.$$

Afim de majorar J inferiormente, escolhemos $\epsilon > 0$ tal que $(1 - \epsilon)\lambda_1 - \mu \geq 0$, e então note que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{(1 - \epsilon)\lambda_1 - \mu}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx - C \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx \\ &\geq \frac{\epsilon}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 - C \|u\|_{2^*}^{2^*} \\ &\geq \frac{\epsilon}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 - C \|u\|_{H_0^1}^{2^*} \geq C \|u\|_{H_0^1}^2 \end{aligned}$$

em uma vizinhança de 0 em $H_0^1(\Omega)$, já que $2^* > 2$. Isso garante a condição (ii) do lema do passo da montanha.

Finalmente, seja $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ autofunção de $(-\Delta)$ associada ao autovalor λ_1 , normalizada e não negativa, sem perda de generalidade. Para todo $\sigma \geq 0$ temos

$$J(\sigma\phi_1) = \frac{\sigma^2\lambda_1}{2} - \int_{\Omega} G(\sigma\phi_1) dx.$$

Agora, como g é super-linear no infinito, existe $\alpha > \lambda_1$ tal que $g(s) \geq \alpha s$ para s suficientemente grande, então $g(s) \geq \alpha s - C$ para todo $s \geq 0$. Consequentemente, temos $G(s) \geq \frac{\alpha s^2}{2} - C$, para todo $s \geq 0$. Disso, segue que

$$J(\sigma\phi_1) \leq \frac{\sigma^2(\lambda_1 - \alpha)}{2} + C.$$

Portanto, existe $\sigma \geq 0$ tal que $J(\sigma\phi_1) < 0$, o que nos dá a condição (iii) do lema do passo da montanha. $\square$

Teorema 4.5.1. *O problema (4.9) admite solução não trivial.*

Demonstração. Aplicamos o lema do passo da montanha, que garante a existência de um valor crítico c estritamente positivo. Existe portanto, pelo menos um ponto crítico correspondente u , e este é não nulo, já que $J(0) = 0 < c = J(u)$. $\square$

Capítulo 5

O caso crítico.

5.1 Resultado de não existência de Pohozaev

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$. Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u|u|^{2^*-2} & , \quad \Omega \\ u > 0 & , \quad \Omega \\ u = 0 & , \quad \partial\Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

Podemos tentar encontrar soluções deste problema, minimizando o funcional

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda|u|^2) dx$$

na esfera unitária em $L^{2^*}(\Omega)$,

$$M = \{u \in H_0^1(\Omega) ; \|u\|_{2^*} = 1\}.$$

Ou equivalentemente, minimizar

$$S_\lambda(u; \Omega) = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda|u|^2) dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}$$

em $H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$.

Note que, para $\lambda = 0$,

$$S(\Omega) = \inf_{H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} S_0(u; \Omega)$$

é a melhor constante de Sobolev da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.

Lema 5.1.1. $S(\Omega) = S$ independe de Ω .

Demonstração. Inicialmente, considere o “scaling”

$$u \mapsto u_R(x) = R^{-\frac{n}{2}} u(x/R)$$

com R constante. Temos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_R(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla R^{-\frac{n}{2}} u(x/R)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} R^{-n} |\nabla u(x/R)|^2 dx$$

usando a mudança de variável $y = \frac{x}{R}$ e substituindo na integral acima temos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} R^{-n} |\nabla u(x/R)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)|^2 dy.$$

Ou seja, a norma em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n); \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ é invariante por “scaling”.

Mais ainda, dada $u \in C_0^\infty(\Omega)$, estenda $u \equiv 0$ fora de Ω . Considerando que $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $D^{1,2}(\Omega) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$S(\Omega) = \inf(\|u\|_{D^{1,2}}; u \in D^{1,2}(\Omega) \text{ e } \|u\|_2 = 1) \geq S(\mathbb{R}^n).$$

Por outro lado, seja $u_m \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ uma sequência minimizante para $S(\mathbb{R}^n)$, com $\|u_m\|_2 = 1$. Por densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, podemos supor $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. A menos de translação, podemos supor também que $0 \in \Omega$. Novamente usando o “scaling”

$$u \mapsto u_{R_m}(x) = R_m^{-\frac{n}{2}} u(x/R_m)$$

para R_m suficientemente pequeno, temos que $v_m = (u_m)_{R_m} \in C_0^\infty(\Omega)$. Pela invariância mostrada acima, concluímos que

$$S(\Omega) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|v_m\|_{D^{1,2}}^2 = S(\mathbb{R}^n).$$

Logo, $S(\Omega) = S(\mathbb{R}^n) = S$. □

Teorema 5.1.1. *S nunca é atingido se $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que S é atingido para algum $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, então existe $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $S = S(\mathbb{R}^n)$, ou seja, u é solução fraca de

$$-\Delta u = \lambda u + u|u|^{2^*-2} \text{ em } \mathbb{R}^n$$

com $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, o que contradiz o princípio do máximo forte, [veja Tolksdorf [15]]. □

Lema 5.1.2. (Id de Pohozaev): *Sejam $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, $G(u) = \int_0^u g(v)dv$, e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \quad (5.2)$$

em $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$. Então,

$$\frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - n \int_{\Omega} G(u) dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu d\sigma = 0,$$

em que ν é a normal exterior em Ω .

Demonstração. Inicialmente, note que se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$, então

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\nabla u(x \cdot \nabla u)) &= \operatorname{div} \left(\nabla u \left(\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i} \right) \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (u_{x_k} \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}) \\
&= \sum_{k=1}^n \left[u_{x_k x_k} \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i} + u_{x_k} \left[u_{x_k} + \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i x_k} \right] \right] \\
&= \Delta u(x \cdot \nabla u) + |\nabla u|^2 + x \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da divergência, temos:

$$\int_{\partial\Omega} (x \cdot \nabla u)(\nabla u \cdot \nu) d\sigma = \int_{\Omega} \left(\Delta u(x \cdot \nabla u) + |\nabla u|^2 + x \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right) \right) dx$$

Usando que $u \equiv 0$ em $\partial\Omega$, temos que $\nabla u = u_\nu \nu$, onde $u_\nu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$.

Assim, a equação acima, torna-se

$$\int_{\Omega} \Delta u(x \cdot \nabla u) dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} x \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right) dx = \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu d\sigma. \quad (5.3)$$

Analogamente, usando que

$$\operatorname{div} \left(x \frac{|\nabla u|^2}{2} \right) = \frac{n}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} |\nabla u|^2$$

e aplicando o Teorema da divergência, temos:

$$\frac{n}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu d\sigma \quad (5.4)$$

Substituindo (5.4) em (5.3), obtemos

$$\int_{\Omega} \Delta u(x \cdot \nabla u) dx + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu d\sigma \quad (5.5)$$

Agora, para a primeira integral de (5.5), usamos o fato de que u é solução

de (5.2), e então

$$-\int_{\Omega} \Delta u (x \cdot \nabla u) dx = \int_{\Omega} g(u) (x \cdot \nabla u) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} G(u) dx.$$

Integrando por partes, temos

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} G(u) dx = -n \int_{\Omega} G(u) dx$$

e portanto,

$$\int_{\Omega} \Delta u (x \cdot \nabla u) dx = n \int_{\Omega} G(u) dx.$$

Finalmente, concluimos que

$$\frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - n \int_{\Omega} G(u) dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu d\sigma = 0.$$

□

Observação 5.1.1. *Existe uma identidade de Pohozaev mais geral, que pode ser encontrada em Yan Yan Li [10], Teorema 1.1.*

Teorema 5.1.2. *Suponha $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, domínio suave, possivelmente ilimitado, estritamente estrelado em relação a origem em $\mathbb{R}^n$ e seja $\lambda \leq 0$. Então qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$ solução do problema (5.1) é identicamente nula.*

Demonstração. Seja $g(u) = \lambda u + u|u|^{2^*-2}$, com primitiva

$$G(u) = \frac{\lambda|u|^2}{2} + \frac{1}{2^*}|u|^{2^*}.$$

Sabemos, [ver Struwe, 13, apêndice B], que qualquer solução de (5.1) é suave

em $\bar{\Omega}$. Então, pela identidade de Pohozaev, temos:

$$\begin{aligned} \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - n \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda |u|^2}{2} + \frac{1}{2^*} |u|^{2^*} \right) dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu d\sigma &= 0 \Leftrightarrow \\ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{n}{n-2} \int_{\Omega} \lambda |u|^2 dx - \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx + \frac{1}{n-2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu d\sigma &= 0 \Leftrightarrow \\ \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - |u|^{2^*}) dx - \frac{\lambda n}{n-2} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{n-2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu d\sigma &= 0. \end{aligned}$$

Usando que u é solução de (5.1), temos

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 - |u|^{2^*}) dx = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx - \frac{\lambda n}{n-2} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{1}{n-2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu d\sigma &= 0 \Leftrightarrow \\ -2\lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu d\sigma &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu d\sigma = 2\lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx \leq 0.$$

Por outro lado, como Ω é estritamente estrelado, temos que $x \cdot \nu > 0$, e então

$$0 \leq \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu d\sigma \leq 0.$$

Assim,

$$\int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu d\sigma = 0 \Rightarrow \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0.$$

E logo, pelo princípio da continuação única [ver Heinz [8]], concluímos que $u \equiv 0$. $\square$

5.2 O Efeito da Topologia.

Novamente, considerando o problema (5.1), note que podemos caracterizar suas soluções $u \in H_0^1(\Omega)$, como sendo os pontos críticos do funcional em $H_0^1(\Omega)$, definido por

$$E_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx.$$

Lema 5.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado, $n \geq 3$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, qualquer sequência $\{u_m\}_{m=0}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$E_\lambda(u_m) \rightarrow \beta < \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}}, \quad DE_\lambda(u_m) \rightarrow 0,$$

quando $m \rightarrow \infty$, é relativamente compacta.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} o(1)(1 + \|u_m\|_{H_0^1}) + \frac{2}{n} S^{\frac{n}{2}} &\geq 2E_\lambda(u_m) - \langle DE_\lambda(u_m), u_m \rangle \\ &= (1 - \frac{2}{2^*}) \int_{\Omega} |u_m|^{2^*} dx \geq c \left(\int_{\Omega} |u_m|^2 dx \right)^{\frac{2^*}{2}}, \end{aligned}$$

em que $o(1) \rightarrow 0$ se $m \rightarrow \infty$, e $c > 0$.

Assim,

$$\|u_m\|_{H_0^1}^2 = 2E_\lambda(u_m) + \lambda \int_{\Omega} |u_m|^2 dx + \frac{2}{2^*} \int_{\Omega} |u_m|^{2^*} dx \leq c + o(1) \|u_m\|_{H_0^1},$$

ou seja, $\{u_m\}_{m=0}^\infty$ é limitada.

Consequentemente, existe $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que $u_m \rightharpoonup u$.

Dado $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos:

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \langle DE_\lambda(u_m), \psi \rangle &= \int_{\Omega} (\nabla u_m \nabla \psi - \lambda u_m \psi - u_m |u_m|^{2^*-2} \psi) dx \\ &\rightarrow \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \psi - \lambda u \psi - u |u|^{2^*-2} \psi) dx = \langle dE_\lambda(u), \psi \rangle, \end{aligned}$$

ou seja, u é solução fraca da equação em (5.1). Além disso, tomando $\psi = u$, obtemos:

$$0 = \langle DE_\lambda(u), u \rangle = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 - |u|^{2^*}) dx.$$

Logo,

$$E_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx = \frac{1}{n} \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx \geq 0.$$

Para prosseguir, note que pelo Teorema de Vitali,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla(u_m - u)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + o(1) \quad (5.6)$$

$$\int_{\Omega} |u_m|^{2^*} dx = \int_{\Omega} |u_m - u|^{2^*} dx + \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx + o(1), \quad (5.7)$$

em que $o(1) \rightarrow 0$, se $m \rightarrow \infty$. Logo,

$$E_\lambda(u_m) = E_\lambda(u_m) + E_0(u_m - u) + o(1).$$

Similarmente, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_m |u_m|^{2^*-2} (u_m - u) dx &= \int_{\Omega} (|u_m|^{2^*} - |u|^{2^*}) dx + o(1) \\ &= \int_{\Omega} |u_m - u|^{2^*} dx + o(1). \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle DE_\lambda(u_m), u_m - u \rangle = \langle DE_\lambda(u_m) - DE_\lambda(u), u_m - u \rangle = \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla(u_m - u)|^2 - |u_m - u|^{2^*}) dx + o(1). \end{aligned}$$

Em particular,

$$E_0(u_m - u) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} |\nabla(u_m - u)|^2 dx + o(1).$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} E_0(u_m - u) &= E_{\lambda}(u_m) - E_{\lambda}(u) + o(1) \\ &\leq E_{\lambda}(u_m) + o(1) \leq c < \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

para m suficientemente grande. Portanto,

$$\|u_m - u\|_{H_0^1}^2 = \int_{\Omega} |\nabla(u_m - u)|^2 dx \leq c < S^{\frac{n}{2}},$$

para m suficientemente grande. Pela imersão de Sobolev, temos que $\|u_m - u\|_{2^*}^2 \leq S^{-1} \|u_m - u\|_{H_0^1}^2$, e portanto,

$$\|u_m - u\|_{H_0^1}^2 (1 - S^{-\frac{2^*}{2}} \|u_m - u\|_{H_0^1}^{2^*-2}) \leq \int_{\Omega} (|\nabla(u_m - u)|^2 - |u_m - u|^{2^*}) dx = o(1),$$

mostrando, então, que $u_m \rightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Lema 5.2.2. *Suponha que $\{v_m\}_{m=0}^{\infty}$ é uma sequência satisfazendo (PS) de $E = E_0$ em $H_0^1(\Omega)$ tal que $v_m \rightarrow 0$. Então, existe uma sequência de pontos $\{x_m\}_{m=0}^{\infty} \subset \Omega$ e uma sequência de raios $\{R_m\}_{m=0}^{\infty}$, com $R_m \rightarrow \infty$, uma solução v^0 de*

$$-\Delta u = u|u|^{2^*-2} \quad \text{em } \mathbb{R}^n \tag{5.8}$$

e $\{\omega_m\}_{m=0}^{\infty}$ sequência (PS) de E_0 em $H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de uma sub-sequência de $\{v_m\}_{m=0}^{\infty}$ temos:

$$\omega_m = v_m - R_m^{\frac{n-2}{2}} v^0(R_m(\cdot - x_m)) + o(1),$$

em que $o(1) \rightarrow 0$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n); \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Em particu-

lar, $\omega_m \rightarrow 0$. Portanto,

$$E_0(\omega_m) = E_0(v_m) - E_0(v^0) + o(1).$$

Além disso,

$$R_m d(x_m, \partial\Omega) \rightarrow \infty.$$

Finalmente, se $E_0(v_m) \rightarrow \beta < \beta^* = \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}$, a sequência $\{v_m\}_{m=0}^\infty$ é relativamente compacta e portanto $v_m \rightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$, e $E_0(v_m) \rightarrow \beta = 0$.

Demonstração. Inicialmente note que se $E_0(v_m) \rightarrow \beta < \beta^*$, então pelo lema anterior, $\{v_m\}_{m=0}^\infty$ é relativamente compacta, e daí, a menos de subsequência, $v_m \rightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$.

Assim,

$$E_0(v_m) \rightarrow E_0(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0.$$

Podemos então, supor que $E_0(v_m) \rightarrow \beta \geq \beta^*$ e com isso, temos:

$$\frac{1}{n} \int_{\Omega} |\nabla v_m|^2 dx = E_0(v_m) - \frac{1}{2^*} \langle dE_0(v_m), v_m \rangle \rightarrow \beta \geq \beta^* = \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}.$$

Logo,

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla v_m|^2 dx = n\beta \geq S^{\frac{n}{2}}. \quad (5.9)$$

Estenda $v_m \equiv 0$ fora de Ω e defina a função concentração de v_m ,

$$Q_m(r) = \sup_{\Omega} \int_{B(x,r)} |\nabla v_m|^2 dx.$$

Escolha $x_m \in \Omega$ e considere o “scaling”

$$v_m \mapsto \tilde{v}_m = R_m^{\frac{n-2}{2}} v_m \left(\frac{x}{R_m} + x_x \right),$$

tal que

$$\tilde{Q}_m(1) = \sup_{\mathbb{R}^n} \int_{B(x,1)} |\nabla \tilde{v}_m|^2 dx = \int_{B(0,1)} |\nabla \tilde{v}_m|^2 dx = \frac{1}{2L} S^{\frac{n}{2}},$$

em que L é o número de bolas de raio 1 que cobrem $B(0, 2)$. Claro que, por (5.9), temos que $R_m \geq R_0 > 0$ uniformemente em m .

Seja $\tilde{\Omega}_m = \{x \in \mathbb{R}^n; \frac{x}{R_m} + x_m \in \Omega\}$, podemos supor que $\tilde{\Omega}_m \rightarrow \tilde{\Omega}_\infty \subset \mathbb{R}^n$.

Como,

$$\|\tilde{v}_m\|_{D^{1,2}}^2 = \|v_m\|_{D^{1,2}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_m|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla v_m|^2 dx \rightarrow n\beta < \infty,$$

então, existe v^0 em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{v}_m \rightharpoonup v^0$. Usando a densidade de $C_0^\infty(\tilde{\Omega}_\infty)$ em $D^{1,2}(\tilde{\Omega}_\infty)$, podemos encontrar $\tilde{v}_m^0 \in H_0^1(\Omega_m)$ tal que $v^0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{v}_m^0$ em $D^{1,2}(\tilde{\Omega}_\infty)$. É claro que $\tilde{v}_m^0 \rightarrow v^0$ em $H_0^1(\Omega')$, para todo $\Omega' \subset \subset \mathbb{R}^n$. É suficiente considerar $\Omega' = B(x_0, 1)$, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ qualquer.

Seja $B_r := B(x_0, r)$, escolha funções cut-off $\varphi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$, tais que

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad |x| \geq \frac{3}{2} \end{cases}, \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| < \frac{3}{2} \\ 0 & , \quad |x| \geq 2 \end{cases}.$$

Então, seja $\tilde{\omega}_m^i = (\tilde{v}_m - \tilde{v}_m^0)\varphi_i \in H_0^1(\tilde{\Omega}_m)$, temos:

$$\|\tilde{\omega}_m^i\|_{H_0^1}^1 = \|(\tilde{v}_m - \tilde{v}_m^0)\|_{H_0^1} \|\varphi_i\|_{H_0^1} \leq c < \infty.$$

Além disso, $\text{supp } \tilde{\omega}_m^1 \subset B_{\frac{3}{2}}$ e $\text{supp } \tilde{\omega}_m^2 \subset B_2$, lembrando que $(\tilde{v}_m - \tilde{v}_m^0) \rightharpoonup 0$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. A restrição dessas funções a B_2 implica que $(\tilde{v}_m - \tilde{v}_m^0) \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(B_2) \hookrightarrow L^p(B_2)$ compactamente para $p < 2^*$, então $(\tilde{v}_m - \tilde{v}_m^0) \rightarrow 0$ em $L^p(B_2)$, para $p < 2^*$.

Usando argumentos parecidos com os do Lema (5.2.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
o(1) &= \langle DE_0(\tilde{v}_m; \tilde{\Omega}_m), \tilde{\omega}_m^1 \varphi_1 \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \tilde{v}_m \nabla \tilde{\omega}_m^1 - \tilde{v}_m |\tilde{v}_m|^{2^*-2} \tilde{\omega}_m^1) \varphi_1 dx + o(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla(\tilde{v}_m - \tilde{v}_m^0)|^2 - |\tilde{v}_m - \tilde{v}_m^0|^{2^*}) \varphi_1^2 dx + o(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla(\tilde{v}_m - \tilde{v}_m^0)|^2 \varphi_1^2 - |\tilde{v}_m - \tilde{v}_m^0|^{2^*} \varphi_1^2 \varphi_2^{2^*-2}) dx + o(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla \tilde{\omega}_m^1|^2 - |\tilde{\omega}_m^1|^2 |\tilde{\omega}_m^2|^{2^*-2}) dx + o(1) \\
&\geq \|\tilde{\omega}_m^1\|_{D^{1,2}}^2 (1 - S^{\frac{-2^*}{2}} \|\tilde{\omega}_m^2\|_{D^{1,2}}^{2^*-2}) + o(1),
\end{aligned}$$

em que $o(1) \rightarrow 0$, se $m \rightarrow \infty$. Mas, note que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tilde{\omega}_m^2|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\tilde{v}_m - \tilde{v}_m^0)|^2 \varphi_2^2 dx + o(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla \tilde{v}_m|^2 - |\nabla \tilde{v}_m^0|^2) \varphi_2^2 dx + o(1) \\
&\leq \int_{B_2} |\nabla \tilde{v}_m|^2 dx + o(1) \leq L \tilde{Q}_m(1) + o(1) = \frac{1}{2} S^{\frac{n}{2}} + o(1).
\end{aligned}$$

Logo, para m suficientemente grande,

$$S^{\frac{-2^*}{2}} \|\tilde{\omega}_m^2\|_{D^{1,2}}^{2^*-2} \leq c < 1,$$

com isso, concluímos que $\tilde{\omega}_m^1 \rightarrow 0$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $\tilde{v}_m \rightarrow v^0$ em H_0^1 .

Em particular,

$$\int_{B(0,1)} |\nabla v^0|^2 dx = \frac{1}{2L} S^{\frac{n}{2}} > 0 \quad \text{e} \quad v^0 \neq 0.$$

Como $v_m \rightharpoonup 0$, então $R_m \rightarrow \infty$ e $\tilde{\Omega}_\infty = \mathbb{R}^n$ ou $\tilde{\Omega}_\infty = \mathbb{R}_+^n$. Separamos em casos:

- 1) $R_m d(x_m, \partial\Omega) \leq c < \infty$. Nesse caso $\tilde{\Omega}_\infty = \mathbb{R}_+^n$.

2) $R_m d(x_m, \partial\Omega) \rightarrow \infty$. Nesse caso $\tilde{\Omega}_\infty = \mathbb{R}^n$

Em ambos os casos, se $\varphi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega}_\infty)$ então $\varphi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega}_m)$, para m suficientemente grande, e então:

$$\langle DE_0(v^0; \tilde{\Omega}_\infty), \varphi \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle DE_0(\tilde{v}_m; \tilde{\Omega}_m), \varphi \rangle \leq \|\varphi\| \|DE_0(v_m)\|_{H^{-1}} = 0$$

para todo φ , e então $v^0 \in H_0^1$ é solução fraca de

$$-\Delta u = u|u|^{2^*-2} \quad \text{em } \tilde{\Omega}_\infty.$$

Se $\tilde{\Omega}_\infty = \mathbb{R}_+^n$, então $v^0 \equiv 0$, o que é um absurdo. Portanto, vale o caso 2, e então podemos escolher uma sequência $\bar{R}_m$ tal que $\tilde{R}_m = R_m \bar{R}_m^{-1} \rightarrow \infty$, com $\bar{R}_m d(x_m, \partial\Omega) \rightarrow \infty$.

Para concluir a prova, dado $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad |x| \geq 2 \end{cases},$$

seja $\omega_m(x) = v_m(x) - R_m^{\frac{n-2}{2}} v^0(R_m(x - x_m)) \varphi(\bar{R}_m(x - x_m)) \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\tilde{\omega}_m = \tilde{v}_m(x) - v^0(x) \varphi_m(x),$$

em que $\varphi_m(x) = \varphi(\frac{x}{\tilde{R}_m})$. Note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(v^0(\varphi_m - 1))|^2 dx &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v^0|^2 |\varphi_m - 1|^2 dx + c \int_{\mathbb{R}^n} |v^0|^2 |\nabla(\varphi_m - 1)|^2 dx \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \tilde{R}_m)} |\nabla v^0|^2 dx + c \tilde{R}_m^{-2} \int_{B(0, 2\tilde{R}_m) \setminus B(0, \tilde{R}_m)} |v^0|^2 dx \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \tilde{R}_m)} |\nabla v^0|^2 dx + c \left(\int_{B(0, 2\tilde{R}_m) \setminus B(0, \tilde{R}_m)} |v^0|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{\omega}_m = \tilde{v}_m - v^0 + o(1)$, com $o(1) \rightarrow 0$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

Assim,

$$E_0(\omega_m) = E_0(\tilde{\omega}_m) = E_0(\tilde{v}_m) - E_0(v^0) + o(1) = E_0(v_m) - E_0(v^0) + o(1).$$

Similarmente, para qualquer função teste $\psi_m \in H_0^1(\tilde{\Omega}_m)$ com $\|\psi_m\| \leq 1$, com $o(1) \rightarrow 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle DE_0(\tilde{\omega}_m, \tilde{\Omega}_m), \psi_m \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \tilde{v}_m \nabla \psi_m - \tilde{v}_m |\tilde{v}_m|^{2^*-2} \psi_m) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla v^0 \nabla \psi_m - v^0 |v^0|^{2^*-2} \psi_m) dx + o(1) \\ &= \langle DE_0(\tilde{v}_m, \tilde{\Omega}_m), \psi_m \rangle - \langle DE_0(v^0, \mathbb{R}^n), \psi_m \rangle + o(1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|DE_0(\omega_m, \Omega)\|_{H^{-1}} &= \|DE_0(\tilde{\omega}_m, \tilde{\Omega}_m)\|_{H^{-1}} \\ &\leq \|DE_0(\tilde{v}_m, \tilde{\Omega}_m)\|_{H^{-1}} + \|DE_0(v^0, \mathbb{R}^n)\|_{H^{-1}} + o(1) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.2.1. *Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, suave e limitado, seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\{u_m\}_{m=0}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$ sequência (PS) de E_λ . Então, existe $k \in \mathbb{N}$, $\{R_m^j\}$, $\{x_m^j\}$, $1 \leq j < k$, com $R_m^j \rightarrow \infty$ e $\{x_m^j\} \subset \Omega$, $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u|u|^{2^*-2} & , \quad \Omega \\ u = 0 & , \quad \partial\Omega \end{cases} \quad (5.10)$$

e $u^j \in D^{1,2}$, $1 \leq j < k$ soluções não triviais de (5.8) tais que a menos de uma subsquência

$$\left\| u_m - u^0 - \sum_{j=1}^k u_m^j \right\|_{D^{1,2}} \rightarrow 0,$$

em que $u_m^j = (R_m^j)^{\frac{n-2}{2}} u^j(R_m^j(x - x_m^j))$, $1 \leq j < k$ e $m \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$E_\lambda(u_m) \rightarrow E_\lambda(u^0) + \sum_{j=1}^k E_0(u^j).$$

Demonstração. Inicialmente, lembre-se que, como feito na demonstração do Lema (5.2.1), qualquer sequência (PS) de E_λ é limitada. Então, podemos supor que $u_m \rightharpoonup u^0$ em $H_0^1(\Omega)$ para algum u^0 , e mais u^0 é solução de (5.10), já que dada $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos:

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \langle DE_\lambda(u_m), \psi \rangle &= \int_\Omega (\nabla u_m \nabla \psi - \lambda u_m \psi - u_m |u_m|^{2^*-2} \psi) dx \\ &\rightarrow \int_\Omega (\nabla u^0 \nabla \psi - \lambda u^0 \psi - u^0 |u^0|^{2^*-2} \psi) dx = \langle DE_\lambda(u^0), \psi \rangle. \end{aligned}$$

Além disso, seja $v_m = u_m - u^0$, então $v_m \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$ e como antes,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v_m|^2 dx &= \int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u^0|^2 dx + o(1) \\ \int_\Omega |v_m|^{2^*} dx &= \int_\Omega |u_m|^{2^*} dx - \int_\Omega |u^0|^{2^*} dx + o(1), \end{aligned}$$

em que $o(1) \rightarrow 0$.

Em particular, temos:

$$\begin{aligned} E_\lambda(u_m) &= \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u_m|^2 - \lambda |u_m|^2) dx + \frac{1}{2^*} \int_\Omega |u_m|^{2^*} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_\Omega |\nabla v_m|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u^0|^2 dx \right) - \frac{1}{2} \lambda \left(\int_\Omega |v_m|^2 dx + \int_\Omega |u^0|^2 dx \right) \\ &\quad + \frac{1}{2^*} \left(\int_\Omega |v_m|^{2^*} dx + \int_\Omega |u^0|^{2^*} dx \right) + o(1) \\ &= E_0(v_m) + E_\lambda(u^0) = o(1), \end{aligned}$$

e também

$$DE_\lambda(u_m) = DE_0(v_m) + DE_\lambda(u^0) + o(1) = DE_0(v_m) + o(1),$$

em que $o(1) \rightarrow 0$.

Usando o lema anterior na sequência $v_m^1 = u_m - u^0$, $v_m^j = u_m - u^0 - \sum_{i=1}^{j-1} u_m^i$,

em que $u_m^i = (R_m^i)^{\frac{n-2}{2}} u^i(R_m^i(x - x_m^i))$ então,

$$\begin{aligned} E_0(u_m^j) &= E_0(u_m - u^0) - \sum_{i=1}^{j-1} E_0(u^i) + o(1) = E_0(v_m) - \sum_{i=1}^{j-1} E_0(u^i) + o(1) \\ &= E_\lambda(u_m) - E_\lambda(u^0) - \sum_{i=1}^{j-1} E_0(u^i) + o(1) \leq E_\lambda(u_m) - (j-1)\beta^* + o(1). \end{aligned}$$

Se $j \rightarrow \infty$, a desigualdade acima nos diz que $E_0(v_m^j) \rightarrow -\infty$, o que contradiz o lema anterior.

Logo, a indução terminará com algum $k \geq 0$.

Mais ainda,

$$v_m^{k+1} = u_m - u^0 - \sum_{j=1}^k u_m^j \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$$

e

$$E_\lambda(u_m) - E_\lambda(u^0) - \sum_{j=1}^k E_0(u^j) \rightarrow 0.$$

□

Observação 5.2.1. Se Ω é limitado e $u_m \geq 0$ então $u^j \geq 0$ será radialmente simétrica em algum ponto x^j , e então terá a forma $u^j = u_\epsilon^*(\cdot - x^j)$, para algum ϵ , onde

$$u_\epsilon^*(x) = \frac{[n(n-2)\epsilon^2]^{\frac{n-2}{4}}}{[\epsilon^2 + |x|^2]^{\frac{n-2}{2}}}$$

e (PS) será válida para todo nível β que não é da forma

$$\beta = \beta_0 + k\beta^*,$$

em que $\beta^* = \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}}$ e $\beta_0 = E_\lambda(u^0)$.

Teorema 5.2.2. Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, limitado tal que $\exists 0 < R_1 < R_2 <$

∞ com

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x \in \mathbb{R}^n; R_1 < |x| < R_2\} \subset \Omega \\ \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R_1\} \not\subset \overline{\Omega} \end{array} \right. .$$

Então, se $\frac{R_2}{R_1}$ é suficientemente grande, o problema (5.10) com $\lambda = 0$, admite solução positiva $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Considere a esfera $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$. Para $\sigma \in \Sigma$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq t < 1$, seja

$$u_t^\sigma(x) = \left[\frac{1-t}{(1-t)^2 + |x-t\sigma|^2} \right]^{\frac{n-2}{2}} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n).$$

Note que S é atingido em qualquer uma dessas funções e que u_t^σ se concentra em σ se $t \rightarrow 1$. Além disso, se $t \rightarrow 0$, então

$$u_t^\sigma \rightarrow u_o = \left[\frac{1}{1+|x|^2} \right]^{\frac{n-2}{2}}, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Escolha uma função radialmente simétrica $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ em Ω e

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \frac{1}{2} < |x| < 2 \\ 0 & , \quad \frac{1}{4} \geq |x| \quad \text{ou} \quad |x| \geq 4 \end{cases} .$$

Dado $R \geq 1$, defina

$$\varphi_R(x) = \begin{cases} \varphi(Rx) & , \quad 0 \leq |x| < \frac{1}{R} \\ 1 & , \quad \frac{1}{R} \leq |x| < R \\ \varphi(\frac{x}{R}) & , \quad R \leq |x| \end{cases}$$

e seja $\omega_t^\sigma = u_t^\sigma \varphi_R$ e $\omega_0 = u_0 \varphi_R \in H_0^1(\Omega)$.

Note que,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\omega_t^\sigma - u_t^\sigma)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u_t^\sigma(\varphi_R - 1))|^2 dx \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_t^\sigma|^2 |\varphi_R - 1|^2 + |u_t^\sigma|^2 |\nabla(\varphi_R - 1)|^2) dx \\
&= c \int_{B(0, \frac{1}{2R})} |\nabla u_t^\sigma|^2 dx + c \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, 2R)} |\nabla u_t^\sigma|^2 dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} |u_t^\sigma|^2 |\nabla(\varphi_R - 1)|^2 dx = c \int_{(\mathbb{R}^n \setminus B(0, 2R)) \cup B(0, \frac{1}{2R})} |\nabla u_t^\sigma|^2 dx \\
&\quad + \int_{(\mathbb{R}^n \setminus B(0, R)) \cup B(0, \frac{1}{R})} |u_t^\sigma|^2 |\nabla(\varphi_R - 1)|^2 dx \\
&\leq c \int_{(\mathbb{R}^n \setminus B(0, 2R)) \cup B(0, \frac{1}{2R})} |\nabla u_t^\sigma|^2 dx \\
&\quad + cR^2 \int_{B(0, \frac{1}{2R})} |u_t^\sigma|^2 dx + cR^{-2} \int_{B(0, 4R) \setminus B(0, 2R)} |u_t^\sigma|^2 dx \rightarrow 0
\end{aligned}$$

uniforme para $\sigma \in \Sigma$, $t \in [0, 1)$, quando $R \rightarrow \infty$.

Considere agora, essas funções normalizadas $v_t^\sigma = \frac{\omega_t^\sigma}{\|\omega_t^\sigma\|_{2^*}}$, $v^0 = \frac{\omega^0}{\|\omega^0\|_{2^*}}$. Como $\|\omega_t^\sigma - u_t^\sigma\|_{D^{1,2}} \rightarrow 0$, se $R \rightarrow \infty$ e $\|u_t^\sigma\|_{D^{1,2}} = \|u^0\|_{D^{1,2}} > 0$, temos:

$$S(v_t^\sigma; \Omega) = S(\omega_t^\sigma; \Omega) \rightarrow S(u_t^\sigma; \mathbb{R}^n) = S,$$

se $R \rightarrow \infty$ uniformemente, para $\sigma \in \Sigma$ e $0 \leq t < 1$.

Em particular, se $R \geq 1$ suficientemente grande,

$$\sup_{\sigma, t} S(v_t^\sigma; \Omega) < S_1 < 2^{\frac{2}{n}} S,$$

para algum $S_1 \in \mathbb{R}$ constante. Fixe então esse R e suponha que $R_2 = 4R = R_1^{-1}$. Defina,

$$M = \{u \in H_0^1(\Omega); \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx = 1\}$$

e se $u \in M$, definimos a função centro de massa

$$F(u) = \int_{\Omega} x |\nabla u|^2 dx.$$

Suponha por absurdo que (5.10) não admite solução positiva, isso é equivalente a dizer que

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx$$

não admite ponto crítico $u > 0$. Por outro lado, pela observação anterior, E satisfaz (PS) em todo nível β tal que $\frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}} < \beta < \frac{2}{n} S^{\frac{n}{2}}$. Equivalentemente, $S_0(\cdot; \Omega)$ satisfaz (PS) em M para todo nível $S < \beta < 2^{\frac{2}{n}} S$. Além disso, $S_0(\cdot, \Omega)$ não admite um valor crítico neste intervalo.

Pelo lema da deformação, para cada β existe $\epsilon > 0$ e $\eta : [0, 1] \times M \rightarrow M$ tal que

$$\eta(1, M_{\beta+\epsilon}) \subset M_{\beta-\epsilon},$$

em que $M_{\beta} = \{u \in M : S(u, \Omega) < \beta\}$.

Dado $\delta > 0$, podemos cobrir o intervalo $[S + \delta, S_1]$ por ϵ -intervalos, e compor as deformações correspondentes para obter um fluxo $\Phi : [0, 1] \times M \rightarrow M$ tal que

$$\Phi(1, M_{S_1}) \subset M_{S+\delta}.$$

Além disso, podemos supor que $\Phi(t, u) = u$, para todo u tal que $S(u; \Omega) \leq S + \frac{\delta}{2}$. Em outras palavras, dado U vizinhança de $\bar{\Omega}$, existe $\delta > 0$ tal que $F(M_{S+\delta}) \subset U$.

De fato, suponha que não vale esta afirmação, então para cada $m \in \mathbb{N}$, existe u_m tal que $u_m \in M_{S+\frac{1}{m}}$ e $F(u_m) \in U^c$. Segue de [Lions, P. L.[11], cap 3, Lema I.1] que a menos de uma subsequência

$$|u_m|^{2^*} \rightarrow \delta_{x^0} \quad \text{e} \quad |\nabla u_m|^2 \rightarrow S \delta_{x^0}$$

para algum $x^0 \in \overline{\Omega}$. A primeira condição acima, nos diz que u_m se concentra em um ponto $x^0 \in U$. Já a segunda condição e o fato de que $F(u_m) \in U^c$, nos diz que u_m se concentra em um ponto de U^c , o que é um absurdo!

Como Ω é suave, escolhemos U vizinhança de $\overline{\Omega}$ tal que, qualquer $p \in U$ tem um vizinho próximo, $q = \pi(p) \in \overline{\Omega}$, onde π é projeção contínua.

Seja $\delta > 0$, determinado pela vizinhança U , e seja $\Phi : [0, 1] \times M \rightarrow M$ seu fluxo correspondente. A aplicação $h : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \overline{\Omega}$, dada por $h(\sigma, t) = \pi(F(\Phi(1, v_t^\sigma)))$ está bem definida, é contínua e satisfaz

$$\begin{aligned} h(\sigma, 0) &= \pi(F(\Phi(1, v^0))) := x_0 \in \overline{\Omega} \\ h(\sigma, 1) &= \sigma, \end{aligned}$$

$\forall \sigma \in \Sigma$.

Logo, h é uma contração de Σ em $\overline{\Omega}$, o que é uma contradição. $\square$

Referências

- [1] Ambrosetti, A. ; Malchiodi, A. , **Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems**, Cambridge University Press, 2007.
- [2] Ambrosetti, A. ; Prodi, G., **A Primer of Nonlinear Analysis**, Cambridge University Press , 1993.
- [3] Brezis, H. **Functional Analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations**, Springer, New York, 2010.
- [4] Brezis, H. ; Kato, T. **J. Math. Pures Appl.** **58** (1979), 137-151.
- [5] Coron, J.M. **Topologie et cas limite des injections de Sobolev**, C.R. Acad. Sc. Paris, t.299, Série I, n°7,(1984).
- [6] Evans, L. C., **Partial Differential Equations**, Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, Providence RI, 1998.
- [7] Gilbarg D. ; Trudinger N. S., **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, Springer, New York, 1998.
- [8] Heinz, E., **Über die Eindeutigkeit beim Cauchyschen Anfangswertproblem einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen** **1** (1955) 1 – 12.
- [9] Le Dret, H. **Nonlinear Elliptic Differential Equations**, Springer, 2018.
- [10] Li, Yan Yan. **Prescribing Scalar Curvature and Related Problems, Part 1.**

- [11] Lions, P. L., **The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. Part 1**, Rev. Mat. Iberoamericano 1.1 (1985) 145–201.
- [12] Nariyoshi, J. F. **Introdução aos Métodos Variacionais**, Universidade de São Paulo, 2014.
- [13] Rabinowitz, P. H. , **Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations** , American Mathematical Society Providence , 1984.
- [14] Struwe, M. **Variational Methods**, Edição 4, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [15] Tolksdorf, P. **On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points**. Commun. P.D.E. 8 (1983) 773–817