

FUNÇÕES QUASECONFORMES

José Benedito Jorge Maricato

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Uma Abordagem para classificação de funções K -quaseconformes

José Benedito Jorge Maricato¹

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. José Marcio Machado

São José do Rio Preto
16 de Dezembro de 2005

¹contato:josemaricato@yahoo.com.br

Á Deus.

À minha família.

Aos meus amigos, professores e especialmente à

Profa.Dra.Ângela Maria Sitta,

Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto

e Prof. Dr. José Márcio Machado.

Dedico

Prefácio

Esse trabalho aborda em sua quase totalidade o estudo de funções do tipo $f(z) = z^n$, para z imaginário, complexo ou hipercomplexo, preocupando-nos em visualizar seus mapeamentos (ou imaginar, já que estamos em 4 dimensões).

Por analogia com o que se passa no espaço euclidiano ordinário E_3 , em que uma transformação

$$OM' = K.OM$$

representa um giro do espaço em torno de O , seguido de uma dilatação K , Hamilton estendeu ao espaço E_4 a interpretação do E_3 , dizendo que o produto de dois quatérnios xy representa um giro seguido de uma distensão, fixa a origem.

O cardióide gerado pelo mapeamento de $f(z) = z^2$, para z complexo e, estrategicamente, colocado sobre o *eixo* x provoca uma analogia em z hipercomplexo, quando z está na fronteira de uma bola de raio r e centro z_0 . "Cardioides" e "cardioides degenerados" são obtidos em dimensão $n = 3$ e, muito provavelmente, para $n = 4$, a ser desenvolvido no Capítulo 8 dessa dissertação.

No Capítulo 1, introdutório, definimos o anel dos quatérnios e funções de quatérnios a fim de estruturar os elementos fundamentais para o desenvolvimento da proposta que é a de calcular as dilatações lineares das funções quaterniônicas do tipo $f(z) = z^n$.

No Capítulo 2, apresentamos formalmente o primeiro resultado, isto é, a generalização de z^n , em que z é um hipercomplexo, propiciando a troca de tabelas

de multiplicação por fórmulas simples.

Os números hipercomplexos, quando potenciados, provocam uma combinação grande de índices, e por isso, são escritos em coordenadas esféricas, a serem apresentadas no Capítulo 3.

Os fundamentos centrais da proposta desse trabalho encontram-se desenvolvidas no Capítulo 4, em que a distância $|f(y) - f(x)|$ obtida para $f(z) = z$, $f(z) = z^2$, ..., $f(z) = z^6$, necessita de uma generalização. Por esse pressuposto faz-se um uso grande de binomiais e propriedades, o que enriqueceu ao que inicialmente nos propunhamos, a partir da possibilidade de abrangência de todas as funções do tipo $f(z) = z^n$. Já no Capítulo 5, centramos o seu desenvolvimento na definição de Transformações: Transformações Complexas Conformes em um domínio D , e Transformações Hipercomplexas.

Nos três Capítulos finais há a definição de quaseconformidade, e a apresentação computacional dessa situação. Também analiticamente é apresentado o valor de $K(x_1, x_2, x_3, x_4)$ e, no último Capítulo, é possível o mapeamento das funções z^n , a partir de cortes realizados em hipersuperfícies geradas por essas funções, a serem observadas em \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 .

São José do Rio Preto

Novembro de 2005

José Benedito Jorge Maricato.

Resumo

As funções hipercomplexas do tipo z^n , n natural, têm uma dilatação linear K uniformemente limitada em um domínio simplesmente conexo D , então podem ser classificadas de funções K -quaseconformes.

Procuramos aqui quantificar K e verificar suas dependências.

Para tanto, as generalizações de z^n foram necessárias e obtidas, originando para z escrito em coordenadas esféricas, polinômios em função de um raio r .

Palavras-chave: funções quaseconformes, mapeamentos, hipercomplexos.

Abstract

The hypercomplex functions of z^n type, natural n , have a linear dilatation K , uniformly limited in a connected domain D , so they can be classified in K -quasiconformal functions.

We try here to quantify K and check its dependancy.

To enable this, the generalizations of z^n were necessary and obtained beforehand, originating for z written in spherical coordenates, polynomial according to a radial r .

Keywords: quasiconformal functions, mappings, hypercomplex

Sumário

1	Introdução	1
1.1	O anel dos quatérnios	1
1.2	Funções de Quatérnios	3
2	Os coeficientes de $f(x) = x^n$	5
2.1	O desenvolvimento de x^n	5
2.2	Fator h_x^{2k} e aplicações	6
3	Coordenadas Esféricas n-dimensionais	9
3.1	Coordenadas Esféricas	9
3.2	Jacobianos	11
4	O desenvolvimento de $f(y) - f(x)$ para $f(z) = z^n$	14
4.1	Estudos de $ f(y) - f(x) $ para $f(z) = z^n$	14
4.1.1	A expressão de $ f(y) - f(x) $ para $f(z) = z^2$	15
4.1.2	A expressão de $ f(y) - f(x) $ para $f(z) = z^3$	17
4.1.3	A expressão de $ f(y) - f(x) $ para $f(z) = z^4$	20
4.2	A generalização $ f(y) - f(x) $, para $f(z) = z^n$	22
4.3	Dedução de f_{m+q}	23
4.4	Dedução de $f_{(2k,t)}$	25
4.5	Dedução de $F = \sum f_t r^t$	27

4.6	Dedução de $F_i = \sum f_{it}r^t$, $F_j = \sum f_{jt}r^t$ e $F_k = \sum f_{kt}r^t$	30
4.7	Conclusão de $ f(y) - f(x) = (\sum A_s^{(n)}r^s)^{1/2}$	33
5	Transformações	39
5.1	Introdução	39
5.1.1	Derivada	39
5.1.2	Função Analítica	39
5.1.3	Transformações	40
5.1.4	Mapeamentos	40
5.2	Transformação Hipercomplexa	41
5.3	Transformações Conformes	42
5.3.1	Teorema Fundamental de Conformidade	42
6	Transformação Quaseconforme	44
6.1	Definição métrica	44
6.1.1	A 1-quaseconformidade:	45
6.1.2	Fator de expansão da função	46
6.1.3	A função Identidade	47
6.1.4	Resultado para $f(z) = z^2$	47
7	Cálculo da K-quaseconformidade computacionalmente	51
7.1	O cálculo de K computacionalmente	52
7.1.1	Seja $f(z) = z^2$, $z = (a, b, c, d)$ centro da hipersfera de raio r	52
7.1.2	Seja $f(z) = z^3$, $z = (a, b, c, d)$ centro da hipersfera de raio r	52
7.1.3	Seja $f(z) = z^4$, $z = (a, b, c, d)$ centro da hipersfera de raio r	53
8	Mapeamentos	55
8.1	Mapeamentos com curvas de nível	56
8.2	Mapeamento de $f(z) = z^2$	58
8.3	Mapeamento de $f(z) = z^3$	60

<i>Sumário</i>	ix
8.4 Ilustrações	62
Referências Bibliográficas	84

Capítulo 1

Introdução

A álgebra dos números quatérnios foi iniciada pelo físico irlandês Willian Rowan Hamilton, no século *XIX*. A seguir apresentamos esses números e as funções de quatérnios, vistas nos dias de hoje.

1.1 O anel dos quatérnios

Definimos o conjunto dos quatérnios como

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \text{tal} \quad \text{que} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\},$$

sendo que se $x \in H$, pode ser escrito como

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$$

onde i, j e k são unidades imaginárias que respeitam as seguintes leis de multiplicação

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, ji = -k, ki = j, ik = -j, jk = i, kj = -i$$

que podem ser visualizados pela tabela:

.	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

então não são comutativos, visto que $ij \neq ji$, por exemplo.

Por outro lado, as quádruplas $0 = (0, 0, 0, 0)$ e $1 = (1, 0, 0, 0)$ são respectivamente o zero e a unidade do anel.

Também podemos associar H com o conjunto

$$\beta = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

pois,

$$\begin{aligned} x &= x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 \\ &= (x_1, 0, 0, 0)(1, 0, 0, 0) + (x_2, 0, 0, 0)(0, 1, 0, 0) \\ &\quad + (x_3, 0, 0, 0)(0, 0, 1, 0) + (x_4, 0, 0, 0)(0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

onde x_1 denominamos de parte real escalar $Re(x)$ e $h_x = ix_2 + jx_3 + kx_4$ a sua parte vetorial imaginária $I(x)$.

Ainda, temos

$$H = \mathbb{R} \oplus V,$$

onde \mathbb{R} é o corpo dos reais e V espaço euclidiano tridimensional.

Podemos verificar que H satisfaz os axiomas de um anel, ou seja $H(+, \cdot)$ satisfaz as propriedades associativa e distributiva da adição e multiplicação, sendo

comutativa apenas a operação de adição, e, como não satisfaz a propriedade comutativa na multiplicação, não é um corpo.

Definição 1.1. A norma $|x|$ de um quaternário $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ é o número real

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

Definição 1.2. O quaternário conjugado \bar{x} de $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ é dado por

$$\bar{x} = (x_1, -x_2, -x_3, -x_4).$$

Se $x, y \in H$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, enunciamos as operações:

• *Adição:*

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \\ &= (x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2) + j(x_3 + y_3) + k(x_4 + y_4) \end{aligned}$$

• *Multiplicação:*

$$\begin{aligned} xy &= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4, x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3, \\ &\quad x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2, x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1) \end{aligned}$$

• *Divisão:*

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{x}{y} \cdot \frac{\bar{y}}{\bar{y}} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} + i \frac{-x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 + x_4y_3}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} \\ &\quad + j \frac{-x_1y_3 + x_2y_4 + x_3y_1 - x_4y_2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} + k \frac{-x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} \end{aligned}$$

1.2 Funções de Quatérnios

Sejam D e D' domínios no espaço euclidiano quadri-dimensional \mathbb{R}^4 , $D \subset H$, $D' \subset H$. Uma função

$$f : D \longrightarrow D'$$

é uma função quaterniônica se f é um mapeamento que faz corresponder a cada $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in H$ um $y = f(x)$, $y \in D' \subset H$, ou seja

$$f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

Sendo f uma função quaterniônica, podemos decompô-la em parte escalar $f_1(x) = \phi(x)$ e parte vetorial $if_2(x) + jf_3(x) + kf_4(x) = \varphi(x)$, ou seja

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) + jf_3(x) + kf_4(x) = \phi(x) + \varphi(x),$$

onde $f_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções coordenadas de valores reais para $i = 1, 2, 3, 4$. Conseqüentemente,

$$|f(x)| = \sqrt{f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + f_3(x)^2 + f_4(x)^2},$$

é a sua norma.

Informações sobre analiticidade, diferenciação e integração, verificar [3] e [4].

Capítulo 2

Os coeficientes de $f(x) = x^n$

Tendo como objetivo o cálculo das distâncias $|f(y) - f(x)|$ para funções hipercomplexas do tipo $f(x) = x^n$ com domínio $D \subset H$ e estudar a dilatação $H(x) \leq K < \infty$ provocadas pelo quociente entre o máximo e mínimo dessas distâncias, teve-se inicialmente a necessidade de obter uma generalização de x^n , $x \in H$, usando as relações de De Moivre's em

$$x^n = (x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4)^n. \quad (2.1)$$

2.1 O desenvolvimento de x^n

Seja

$$x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 = x_1 + h_x, \quad (2.2)$$

h_x é a parte vetorial dada por

$$h_x = ix_2 + jx_3 + kx_4, \quad (2.3)$$

usando as leis de multiplicação temos

$$h_x^2 = -x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \quad (2.4)$$

como um número real.

Para $n \in \mathbb{N}$, h_x^2 é real e $h_x^{2n+1} = h_x h_x^{2n} = h_x^{2n} h_x$ imaginário da forma $h_x^{2n}(ix_2 + jx_3 + kx_4) = ix_2 h_x^{2n} + jx_3 h_x^{2n} + kx_4 h_x^{2n}$. Assim

$$h_x^{2n+1} = ix_2 h_x^{2n} + jx_3 h_x^{2n} + kx_4 h_x^{2n} \quad (2.5)$$

Então

$$x^n = (x_1 + h_x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_1^{n-k} h_x^k \quad (2.6)$$

$$= \binom{n}{0} x_1^n h_x^0 + \binom{n}{2} x_1^{n-2} h_x^2 + \dots + \binom{n}{2k} x_1^{n-2k} h_x^{2k} +$$

$$\binom{n}{1} x_1^{n-1} h_x^1 + \binom{n}{3} x_1^{n-3} h_x^3 + \dots + \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k+1}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{2k \leq n} \binom{n}{2k} x_1^{n-2k} h_x^{2k}}_{\text{Real}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k+1}}_{\text{Imaginário}}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{2k \leq n} \binom{n}{2k} x_1^{n-2k} h_x^{2k}}_{\text{Real}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} h_x}_{\text{Coeficiente da parte vetorial}} \quad (2.7)$$

$$= \text{Re}(x^n) + I(x^n) \quad (2.8)$$

2.2 Fator h_x^{2k} e aplicações

O fator h_x^{2k} pode ser calculado da forma

$$h_x^{2k} = (h_x^2)^k = [-x_2^2 + (-x_3^2 - x_4^2)]^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-x_2)^{k-p} (-x_3^2 + (-x_4^2))^p$$

$$= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-x_2)^{k-p} \left[\sum_{l=0}^p \binom{p}{l} (-x_3^2)^{p-l} (-x_4^2)^l \right] \quad (2.9)$$

Exemplo 2.1. *Seja obter x^2 , $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + h_x$*

Usando tabela, temos

$x^2 = x.x$	x_1	ix_2	jx_3	kx_4
x_1	x_1^2	ix_1x_2	jx_1x_3	kx_1x_4
ix_2	ix_1x_2	$-x_2^2$		
jx_3	jx_1x_3		$-x_3^2$	
kx_4	kx_1x_4			$-x_4^2$

Pela fórmula

$$Re(x^2) = \sum_{k=0}^{2k \leq 2} \binom{2}{2k} x_1^{2-2k} h_x^{2k} = x_1^2 + h_x^2, \quad e$$

$$I(x^2) = h_x \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq 2} \binom{2}{2k+1} x_1^{2-(2k+1)} h_x^{2k} \right] = 2x_1 h_x,$$

logo $x^2 = x_1^2 + h_x^2 + 2x_1 h_x.$

Exemplo 2.2. *Seja obter x^3 , $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + h_x$*

Usando tabela, temos

$x^3 = x^2.x$	x_1	ix_2	jx_3	kx_4
x_1^2	x_1^3	$ix_1^2x_2$	$jx_1^2x_3$	$kx_1^2x_4$
$-x_2^2$	$-x_1x_2^2$	$-ix_2^3$	$-jx_2^2x_3$	$-kx_2^2x_4$
$-x_3^2$	$-x_1x_3^2$	$-ix_2x_3^2$	$-jx_3^3$	$-kx_3^2x_4$
$-x_4^2$	$-x_1x_4^2$	$-ix_2x_4^2$	$-jx_3x_4^2$	$-kx_4^2$
$2ix_1x_2$	$2ix_1^2x_2$	$-2x_1x_2^2$		
$2jx_1x_3$	$2jx_1^2x_3$		$-2x_1x_3^2$	
$2kx_1x_4$	$2kx_1^2x_4$			$-2x_1x_4^2$

Pela fórmula

$$Re(x^3) = \sum_{k=0}^{2k \leq 3} \binom{3}{2k} x_1^{3-2k} h_x^{2k} = x_1^3 + 3x_1 h_x^2, \quad e$$

$$I(x^3) = h_x \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq 3} \binom{3}{2k+1} x_1^{3-(2k+1)} h_x^{2k} \right] = (3x_1^2 + h_x^2) h_x,$$

logo $x^3 = x_1^3 + 3x_1 h_x^2 + (3x_1^2 + h_x^2) h_x.$

Capítulo 3

Coordenadas Esféricas

n -dimensionais

Nesse capítulo explicitamos o processo que nos leva a escrever bolas *quadri*-dimensionais $\bar{B}(x, r)$ em coordenadas esféricas, com a finalidade de calcularmos a distância $|f(y) - f(x)|$, em que x é o centro da hipersuperfície de raio r e y é um ponto de sua fronteira.

3.1 Coordenadas Esféricas

Consideremos uma hiperesfera de raio r e dimensão n , centrada na origem, e as seguintes notações:

$$\cos\theta_i = c_i, \quad \sin\theta_i = s_i, \quad \operatorname{tg}\theta_i = t_i \quad (3.1)$$

Agora considerando

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = rc_1c_2 \dots c_{n-2}c_{n-1}, & 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi, \\
 x_2 = rc_1c_2 \dots c_{n-2}s_{n-1}, & -\frac{1}{2}\pi \leq \theta_{n-2} \leq \frac{1}{2}\pi, \\
 x_3 = rc_1c_2 \dots s_{n-2}, & -\frac{1}{2}\pi \leq \theta_{n-3} \leq \frac{1}{2}\pi, \\
 \dots & \dots \\
 x_j = rc_1 \dots c_{n-j}s_{n-j+1}, & \dots \\
 \dots & \dots \\
 x_n = rs_1, & -\frac{1}{2}\pi \leq \theta_1 \leq \frac{1}{2}\pi,
 \end{array}$$

como as coordenadas de um ponto na casca dessa esfera, podemos notar que:

Se $n = 2$, temos a já conhecida representação dada por

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 & 0 \leq r < \infty, & 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, \\ x_2 = r\sin\theta_1 \end{cases}$$

com $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ e Jacobiano dado por

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \theta_1)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -r\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & r\cos\theta_1 \end{vmatrix} = r$$

Se $n = 3$, temos

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1\cos\theta_2, & 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi, \\ x_2 = r\cos\theta_1\sin\theta_2, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ x_3 = r\sin\theta_1, & 0 \leq r < \infty, \end{cases}$$

com $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ e Jacobiano dado por

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \theta_1, \theta_2)} = \begin{vmatrix} c_1c_2 & -rs_1c_2 & -rc_1s_2 \\ c_1s_2 & -rs_1s_2 & rc_1c_2 \\ s_1 & rc_1 & 0 \end{vmatrix} = -r^2c_1 = -r^2\cos\theta_1,$$

Se $n = 4$, que nos interessa na maior parte deste trabalho temos

$$\begin{cases} x_1 = rc_1c_2c_3, & 0 \leq r < \infty \\ x_2 = rc_1c_2s_3, & 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi, \\ x_3 = rc_1s_2, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}, \\ x_4 = rs_1, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

com $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2$ e Jacobiano dado por

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3)} = \begin{vmatrix} c_1 c_2 c_3 & -r s_1 c_2 c_3 & -r c_1 s_2 c_3 & -r c_1 c_2 s_3 \\ c_1 c_2 s_3 & -r s_1 c_2 s_3 & -r c_1 s_2 s_3 & r c_1 c_2 c_3 \\ c_1 s_2 & -r s_1 s_2 & r c_1 c_2 & 0 \\ s_1 & r c_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -r^2 c_1^2 c_2$$

3.2 Jacobianos

Um método para calcular os Jacobianos pode ser deduzido a partir do seguinte exemplo:

Seja calcular

$$J = \begin{vmatrix} c_1 c_2 c_3 & -r s_1 c_2 c_3 & -r c_1 s_2 c_3 & -r c_1 c_2 s_3 \\ c_1 c_2 s_3 & -r s_1 c_2 s_3 & -r c_1 s_2 s_3 & r c_1 c_2 c_3 \\ c_1 s_2 & -r s_1 s_2 & r c_1 c_2 & 0 \\ s_1 & r c_1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

então

$$J = r^3 (c_1 c_2 c_3) (c_1 c_2 s_3) (c_1 s_2) (s_1) \begin{vmatrix} 1 & -t_1 & -t_2 & -t_3 \\ 1 & -t_1 & -t_2 & t_3^{-1} \\ 1 & -t_1 & t_2^{-1} & 0 \\ 1 & t_1^{-1} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

que com algumas manipulações de filas obtemos

$$J = r^3 (c_1 c_2 c_3) (c_1 c_2 s_3) (c_1 s_2) (s_1) \begin{vmatrix} 1 & -t_1 & -t_2 & -t_3 \\ 0 & 0 & 0 & t_3 + t_3^{-1} \\ 0 & 0 & t_2 + t_2^{-1} & t_3 \\ 0 & t_1 + t_1^{-1} & t_2 & t_3 \end{vmatrix},$$

então

$$J = -r^3 (c_1 c_2 c_3) (c_1 c_2 s_3) (c_1 s_2) (s_1) \left(t_1 + \frac{1}{t_1}\right) \left(t_2 + \frac{1}{t_2}\right) \left(t_3 + \frac{1}{t_3}\right),$$

mas

$$\left(t_j + \frac{1}{t_j}\right) = \frac{1}{s_j c_j}, \quad \text{logo} \quad J = -r^3 c_1^2 c_2$$

O sinal do Jacobiano é dado por $J > 0$ se $n = 4q + 1$ ou $n = 4q + 2$, e $J < 0$ se $n = 4q + 3$ ou $n = 4q$, q :natural.

Seja agora

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 = x_1 + h_x$$

o centro de uma bola de raio r em um domínio D simplesmente conexo contido em H , H é o espaço hipercomplexo, e

$$y \in \overline{B}(x, r) \subset D, \quad |x - y| = r > 0$$

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4 = y_1 + h_y$$

então

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 + (y_4 - x_4)^2 = r^2$$

Escrevendo y em coordenadas (r, θ) , temos

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 = x_1 + r c_1 c_2 c_3 = x_1 + r c \\ y_2 = x_2 + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 = x_2 + r c_1 c_2 s_3 \\ y_3 = x_3 + r \cos \theta_1 \sin \theta_2 = x_3 + r c_1 s_2 \\ y_4 = x_4 + r \sin \theta_1 = x_4 + r s_1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Temos que se

$$h_x = ix_2 + jx_3 + kx_4,$$

elevando ao quadrado obtemos

$$h_x^2 = -x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, \quad e$$

$$h_y^2 = -y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = -[(x_2 + r c_1 c_2 s_3)^2 + (x_3 + r c_1 s_2)^2 + (x_4 + r s_1)^2]$$

$$= -[x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2rc_1c_2s_3 + 2x_3rc_1s_2 + 2x_4rs_1 + r^2(c_1^2c_2^2s_3^2 + c_1^2s_2^2 + s_1^2)]$$

como

$$c_1^2c_2^2s_3^2 + c_1^2s_2^2 + s_1^2 = -c_1^2c_2^2c_3^2 + 1 = -c^2 + 1 = -s^2 \quad (3.3)$$

e denominando

$$\Pi = x_2c_1c_2s_3 + x_3c_1s_2 + x_4s_1 \quad (3.4)$$

temos

$$h_y^2 = h_x^2 - 2r\Pi + r^2(c^2 - 1) \quad (3.5)$$

Logo, temos em (3.2) a representação de uma hiperfície no \mathbb{R}^4 .

Capítulo 4

O desenvolvimento de

$|f(y) - f(x)|$ para $f(z) = z^n$

Nesse capítulo desenvolvemos os fundamentos centrais desse trabalho. Demonstramos que a expressão $|f(y) - f(x)|^2$ para $f(z) = z^n$, quando $x, y \in H$, escritos em coordenadas esféricas, é um polinômio na variável r e de grau $2n$ da forma

$$A_2^{(n)} r^2 + A_3^{(n)} r^3 + \dots + A_{2n}^{(n)} r^{2n} \quad (4.1)$$

Para tanto, dividimos o capítulo em seções, em que cada uma mostra o desenvolvimento das funções que compõem cada coeficiente $A_s^{(n)}$.

4.1 Estudos de $|f(y) - f(x)|$ para $f(z) = z^n$

Esses estudos tem a finalidade de obter a real expressão de $|f(y) - f(x)|$, $f(z) = z^n$, $n = 2, 3, \dots$, bem como induzir às próximas seções com esses cálculos. Para a compreensão das próximas seções, essa é fundamental, pois nela as funções componentes dos coeficientes $A_s^{(n)}$ começam a ser introduzidas e deduzidas.

4.1.1 A expressão de $|f(y) - f(x)|$ para $f(z) = z^2$

Consideremos $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ o centro da bola *quadri*-dimensional de raio r , e, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ um ponto de sua fronteira parametrizado por

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + r\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 = x_1 + rc_1c_2c_3 = x_1 + rc \\ y_2 = x_2 + r\cos\theta_1\cos\theta_2\sen\theta_3 = x_2 + rc_1c_2s_3 \\ y_3 = x_3 + r\cos\theta_1\sen\theta_2 = x_3 + rc_1s_2 \\ y_4 = x_4 + r\sen\theta_1 = x_4 + rs_1, \end{cases}$$

e, queremos calcular $|f(y) - f(x)|$ para $f(z) = z^2$.

Então

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |(y_1 + h_y)^2 - (x_1 + h_x)^2| \\ &= |y_1^2 - x_1^2 + h_y^2 - h_x^2 + 2y_1h_y - 2x_1h_x| \\ &= |y_1^2 - x_1^2 + h_y^2 - h_x^2 \\ &\quad + (2y_1y_2 - 2x_1x_2)i + (2y_1y_3 - 2x_1x_3)j + (2y_1y_4 - 2x_1x_4)k| \\ &= |F + iF_i + jF_j + kF_k|, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} F &= y_1^2 - x_1^2 + h_y^2 - h_x^2, & F_i &= 2y_1y_2 - 2x_1x_2, \\ F_j &= 2y_1y_3 - 2x_1x_3 & e & \quad F_k = 2y_1y_4 - 2x_1x_4 \end{aligned}$$

Escrevendo $F = y_1^2 - x_1^2 + h_y^2 - h_x^2 = f_0^{(2)} + f_2^{(2)}$, para $f_0^{(2)} = y_1^2 - x_1^2 = (y_1 - x_1)(y_1 + x_1) = rc_1c_2c_3(2x_1 + rc_1c_2c_3) = 2x_1rc_1c_2c_3 + r^2c_1^2c_2^2c_3^2$ e $f_2^{(2)} = h_y^2 - h_x^2 = -2r\Pi + r^2(c^2 - 1)$, temos

$$F = 2(x_1c - \Pi)r + (2c^2 - 1)r^2,$$

e, analogamente, obtemos os desenvolvimentos de

$$F_i = f_{i0}^{(2)} = (2y_1y_2 - 2x_1x_2) = (2x_1c_1c_2s_3 + 2x_2c)r + 2cc_1c_2s_3r^2,$$

$$F_j = f_{j0}^{(2)} = (2y_1y_3 - 2x_1x_3) = (2x_1c_1s_2 + 2x_3c)r + 2cc_1s_2r^2 \quad e$$

$$F_k = f_{k0}^{(2)} = (2y_1y_4 - 2x_1x_4) = (2x_1s_1 + 2x_4c)r + 2cs_1r^2.$$

Considerando, então

$$F = f_1r^1 + f_2r^2 \quad \text{para} \quad f_1 = 2(x_1c - \Pi) \quad e \quad f_2 = 2c^2 - 1,$$

$$F_i = f_{i1}r^1 + f_{i2}r^2 \quad \text{para} \quad f_{i1} = 2x_1c_1c_2s_3 + 2x_2c \quad e \quad f_{i2} = 2cc_1c_2s_3,$$

$$F_j = f_{j1}r^1 + f_{j2}r^2 \quad \text{para} \quad f_{j1} = 2x_1c_1s_2 + 2x_3c \quad e \quad f_{j2} = 2cc_1s_2,$$

$$F_k = f_{k1}r^1 + f_{k2}r^2 \quad \text{para} \quad f_{k1} = 2x_1s_1 + 2x_4c \quad e \quad f_{k2} = 2cs_1$$

temos que

$$F^2 = f_1^2r^2 + 2f_1f_2r^3 + f_2^2r^4,$$

$$F_i^2 = f_{i1}^2r^2 + 2f_{i1}f_{i2}r^3 + f_{i2}^2r^4,$$

$$F_j^2 = f_{j1}^2r^2 + 2f_{j1}f_{j2}r^3 + f_{j2}^2r^4,$$

$$F_k^2 = f_{k1}^2r^2 + 2f_{k1}f_{k2}r^3 + f_{k2}^2r^4,$$

logo, se

$$|f(y) - f(x)| = |F + iF_i + jF_j + kF_k| = \sqrt{F^2 + F_i^2 + F_j^2 + F_k^2},$$

temos

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt{A_2^{(2)}r^2 + A_3^{(2)}r^3 + A_4^{(2)}r^4},$$

onde

$$A_2^{(2)} = f_1^2 + f_{i1}^2 + f_{j1}^2 + f_{k1}^2 = 4(x_1^2 - h_x^2c + \Pi^2),$$

$$A_3^{(2)} = 2f_1f_2 + 2f_{i1}f_{i2} + 2f_{j1}f_{j2} + 2f_{k1}f_{k2} = 4(x_1c + \Pi),$$

$$A_4^{(2)} = f_2^2 + f_{i2}^2 + f_{j2}^2 + f_{k2}^2 = 1$$

Em resumo

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt{4(x_1^2 - h_x^2c^2 + \Pi^2)r^2 + 4(x_1c + \Pi)r^3 + 1r^4} \quad (4.2)$$

4.1.2 A expressão de $|f(y) - f(x)|$ para $f(z) = z^3$

Consideremos $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ o centro da bola *quadri*-dimensional de raio r , e, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ um ponto de sua fronteira parametrizado por

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 & = x_1 + r c_1 c_2 c_3 & = x_1 + r c \\ y_2 = x_2 + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 & = x_2 + r c_1 c_2 s_3 \\ y_3 = x_3 + r \cos \theta_1 \sin \theta_2 & = x_3 + r c_1 s_2 \\ y_4 = x_4 + r \sin \theta_1 & = x_4 + r s_1, \end{cases}$$

e, queremos calcular $|f(y) - f(x)|$ para $f(z) = z^3$.

Então

$$f(x) = x^3 = x_1^3 + 3x_1 h_x^2 + (3x_1^2 + h_x^2) h_x, \quad f(y) = y^3 = y_1^3 + 3y_1 h_y^2 + (3y_1^2 + h_y^2) h_y$$

e

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |y_1^3 - x_1^3 + 3(y_1 h_y^2 - x_1 h_x^2) + (3y_1^2 + h_y^2) h_y - (3x_1^2 + h_x^2) h_x| \\ &= \left| y_1^3 - x_1^3 + 3(y_1 h_y^2 - x_1 h_x^2) + i[(3y_1^2 + h_y^2) y_2 - (3x_1^2 + h_x^2) x_2] + \right. \\ &\quad \left. j[(3y_1^2 + h_y^2) y_3 - (3x_1^2 + h_x^2) x_3] + k[(3y_1^2 + h_y^2) y_4 - (3x_1^2 + h_x^2) x_4] \right| \\ &= \left| F + iF_i + jF_j + kF_k \right|, \end{aligned}$$

onde

$$F = y_1^3 - x_1^3 + 3(y_1 h_y^2 - x_1 h_x^2) = f_0^{(3)} + f_2^{(3)},$$

sendo

$$f_0^{(3)} = y_1^3 - x_1^3 = (x_1 + rc)^3 - x_1^3 = 3x_1^2 cr + 3x_1 c^2 r^2 + c^3 r^3 = f_{(0,1)} r^1 + f_{(0,2)} r^2 + f_{(0,3)} r^3,$$

com

$$f_{(0,1)} = 3x_1^2 c, \quad f_{(0,2)} = 3x_1 c^2, \quad f_{(0,3)} = c^3,$$

e

$$f_2^{(3)} = 3(y_1 h_y^2 - x_1 h_x^2) = 3[(x_1 + rc)(h_x^2 - 2r\Pi + r^2 s^2) - x_1 h_x^2]$$

$$= (-6x_1\Pi + 3h_x^2c)r + (3x_1s^2 - 6c\Pi)r^2 + 3cs^2r^3 = f_{(2,1)}r^1 + f_{(2,2)}r^2 + f_{(2,3)}r^3,$$

com

$$= f_{(2,1)} = -6x_1\Pi + 3h_x^2c, \quad f_{(2,2)} = 3x_1s^2 - 6c\Pi, \quad f_{(2,3)} = 3cs^2.$$

Façamos, então

$$F = f_0^{(3)} + f_2^{(3)} = f_1r^1 + f_2r^2 + f_3r^3,$$

para

$$f_1 = f_{(0,1)} + f_{(2,1)} = 3c(x_1^2 + h_x^2) - 6x_1\Pi,$$

$$f_2 = f_{(0,2)} + f_{(2,2)} = 3x_1(2c^2 - 1) - 6c\Pi \quad e \quad f_3 = f_{(0,3)} + f_{(2,3)} = 4c^3 - 3c.$$

Agora

$$F_i = (3y_1^2 + h_y^2)y_2 - (3x_1^2 + h_x^2)x_2 = 3(y_1^2y_2 - x_1^2x_2) + (y_2h_y^2 - x_2h_x^2) = f_{i0}^{(3)} + f_{i2}^{(3)},$$

$$f_{i0}^{(3)} = 3(y_1^2y_2 - x_1^2x_2) = (3x_1^2c_1c_2s_3 + 6x_1x_2c)r + (6x_1cc_1c_2s_3 + 3x_2c^2)r^2 + 3c^2c_1c_2s_3r^3,$$

ou

$$f_{i0}^{(3)} = f_{i(0,1)}r^1 + f_{i(0,2)}r^2 + f_{i(0,3)}r^3,$$

coeficientes respectivos, e

$$f_{i2}^{(3)} = y_2h_y^2 - x_2h_x^2 = (x_2 + rc_1c_2s_3)(h_x^2 - 2r\Pi + s^2r^2) - x_2h_x^2$$

$$= (h_x^2c_1c_2s_3 - 2x_2\Pi)r + (x_2s^2 - 2\Pi c_1c_2s_3)r^2 + s^2c_1c_2s_3r^3 = f_{i(2,1)}r^1 + f_{i(2,2)}r^2 + f_{i(2,3)}r^3,$$

então

$$F_i = f_{i0}^{(3)} + f_{i2}^{(3)} = f_{i1}r^1 + f_{i2}r^2 + f_{i3}r^3,$$

com

$$f_{i1} = f_{i(0,1)} + f_{i(2,1)} = (3x_1^2 + h_x^2)c_1c_2s_3 + 2x_2(3x_1c - \Pi)$$

$$f_{i2} = f_{i(0,2)} + f_{i(2,2)} = x_2(4c^2 - 1) + 2c_1c_2s_3(3x_1c - \Pi), \quad e \quad f_{i3} = (4c^2 - 1)c_1c_2s_3$$

Agora

$$F_j = (3y_1^2 + h_y^2)y_3 - (3x_1^2 + h_x^2)x_3 = 3(y_1^2y_3 - x_1^2x_3) + (y_3h_y^2 - x_3h_x^2) = f_{j0}^{(3)} + f_{j2}^{(3)},$$

$$f_{j0}^{(3)} = 3(y_1^2 y_3 - x_1^2 x_3) = (3x_1^2 c_1 s_2 + 6x_1 x_3 c)r + (6x_1 c c_1 s_2 + 3x_3 c^2)r^2 + 3c^2 c_1 s_2 r^3,$$

ou

$$f_{j0}^{(3)} = f_{j(0,1)}r^1 + f_{j(0,2)}r^2 + f_{j(0,3)}r^3,$$

coeficientes respectivos, e

$$\begin{aligned} f_{j2}^{(3)} &= y_3 h_y^2 - x_3 h_x^2 = (x_3 + r c_1 s_2)(h_x^2 - 2r\Pi + s^2 r^2) - x_3 h_x^2 \\ &= (h_x^2 c_1 s_2 - 2x_3 \Pi)r + (x_3 s^2 - 2\Pi c_1 s_2)r^2 + s^2 c_1 s_2 r^3 = f_{j(2,1)}r^1 + f_{j(2,2)}r^2 + f_{j(2,3)}r^3, \end{aligned}$$

então

$$F_j = f_{j0}^{(3)} + f_{j2}^{(3)} = f_{j1}r^1 + f_{j2}r^2 + f_{j3}r^3,$$

com

$$\begin{aligned} f_{j1} &= f_{j(0,1)} + f_{j(2,1)} = (3x_1^2 + h_x^2)c_1 s_2 + 2x_3(3x_1 c - \Pi) \\ f_{j2} &= f_{j(0,2)} + f_{j(2,2)} = x_3(4c^2 - 1) + 2c_1 s_2(3x_1 c - \Pi), \quad e \quad f_{j3} = (4c^2 - 1)c_1 s_2. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$F_k = f_{k0}^{(3)} + f_{k2}^{(3)} = f_{k1}r^1 + f_{k2}r^2 + f_{k3}r^3,$$

com

$$\begin{aligned} f_{k1} &= f_{k(0,1)} + f_{k(2,1)} = (3x_1^2 + h_x^2)s_1 + 2x_4(3x_1 c - \Pi) \\ f_{k2} &= f_{k(0,2)} + f_{k(2,2)} = x_4(4c^2 - 1) + 2s_1(3x_1 c - \Pi) \quad e \quad f_{k3} = (4c^2 - 1)s_1. \end{aligned}$$

Se

$$\begin{aligned} F &= f_1 r^1 + f_2 r^2 + f_3 r^3 + f_4 r^4, & F_i &= f_{i1} r^1 + f_{i2} r^2 + f_{i3} r^3 + f_{i4} r^4, \\ F_j &= f_{j1} r^1 + f_{j2} r^2 + f_{j3} r^3 + f_{j4} r^4, & F_k &= f_{k1} r^1 + f_{k2} r^2 + f_{k3} r^3 + f_{k4} r^4, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F^2 &= f_1^2 r^2 + 2f_1 f_2 r^3 + (f_2^2 + 2f_1 f_3)r^4 + 2f_2 f_3 r^5 + f_3^2 r^6, \\ F_i^2 &= f_{i1}^2 r^2 + 2f_{i1} f_{i2} r^3 + (f_{i2}^2 + 2f_{i1} f_{i3})r^4 + 2f_{i2} f_{i3} r^5 + f_{i3}^2 r^6, \\ F_j^2 &= f_{j1}^2 r^2 + 2f_{j1} f_{j2} r^3 + (f_{j2}^2 + 2f_{j1} f_{j3})r^4 + 2f_{j2} f_{j3} r^5 + f_{j3}^2 r^6, \end{aligned}$$

$$F_k^2 = f_{k1}^2 r^2 + 2f_{k1}f_{k2}r^3 + (f_{k2}^2 + 2f_{k1}f_{k3})r^4 + 2f_{k2}f_{k3}r^5 + f_{k3}^2 r^6,$$

então se

$$|f(y) - f(x)| = |F + iF_i + jF_j + kF_k| = \sqrt{F^2 + F_i^2 + F_j^2 + F_k^2},$$

temos

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt{A_2^{(3)}r^2 + A_3^{(3)}r^3 + A_4^{(3)}r^4 + A_5^{(3)}r^5 + A_6^{(3)}r^6} \quad (4.3)$$

com

$$\begin{aligned} A_2^{(3)} &= f_1^2 + f_{i1}^2 + f_{j1}^2 + f_{k1}^2 \\ &= 9x_1^4 + (-24h_x^2c^2 + 6h_x^2 + 24\Pi^2)x_1^2 - 8h_x^2\Pi^2 + (8c^2 + 1)h_x^4, \\ A_3^{(3)} &= 2(f_1f_2 + f_{i1}f_{i2} + f_{j1}f_{j2} + f_{k1}f_{k2}) \\ &= 18x_1^3c + 18x_1^2\Pi + (6h_x^2 + 24\Pi^2 - 24h_x^2c^2)x_1c - (8c^2 + 10)h_x^2\Pi + 8\Pi^3, \\ A_4^{(3)} &= f_2^2 + f_{i2}^2 + f_{j2}^2 + f_{k2}^2 + 2(f_1f_3 + f_{i1}f_{i3} + f_{j1}f_{j3} + f_{k1}f_{k3}) \\ &= 3(x_1^2 - h_x^2) + 12(x_1c_1c_2c_3 + \Pi)^2, \\ A_5^{(3)} &= 2(f_2f_3 + f_{i2}f_{i3} + f_{j2}f_{j3} + f_{k2}f_{k3}) = 6(x_1c_1c_2c_3 + \Pi), \\ A_6^{(3)} &= f_3^2 + f_{i3}^2 + f_{j3}^2 + f_{k3}^2 = 1, \end{aligned}$$

que foram calculados separadamente.

4.1.3 A expressão de $|f(y) - f(x)|$ para $f(z) = z^4$

Consideremos $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ o centro da bola *quadri*-dimensional de raio r , e, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ um ponto de sua fronteira parametrizado por

$$\left\{ \begin{array}{lll} y_1 = x_1 + r\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 & = x_1 + rc_1c_2c_3 & = x_1 + rc \\ y_2 = x_2 + r\cos\theta_1\cos\theta_2\sen\theta_3 & = x_2 + rc_1c_2s_3 \\ y_3 = x_3 + r\cos\theta_1\sen\theta_2 & = x_3 + rc_1s_2 \\ y_4 = x_4 + r\sen\theta_1 & = x_4 + rs_1, \end{array} \right.$$

e, queremos calcular $|f(y) - f(x)|$ para $f(z) = z^4$.

Então

$$f(x) = x^4 = \left[\binom{4}{0} x_1^4 + \binom{4}{2} x_1^2 h_x^2 + \binom{4}{4} h_x^4 \right] + \left[\binom{4}{1} x_1^3 + \binom{4}{3} x_1 h_x^2 \right] h_x,$$

$$f(y) = y^4 = \left[\binom{4}{0} y_1^4 + \binom{4}{2} y_1^2 h_y^2 + \binom{4}{4} h_y^4 \right] + \left[\binom{4}{1} y_1^3 + \binom{4}{3} y_1 h_y^2 \right] h_y,$$

e

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= \left| (y_1^4 - x_1^4) + \binom{4}{2} (y_1^2 h_y^2 - x_1^2 h_x^2) + (h_y^4 - h_x^4) + \right. \\ &\quad i \left[\left(\binom{4}{1} y_1^3 + \binom{4}{3} y_1 h_y^2 \right) y_2 - \left(\binom{4}{1} x_1^3 + \binom{4}{3} x_1 h_x^2 \right) x_2 \right] + \\ &\quad j \left[\left(\binom{4}{1} y_1^3 + \binom{4}{3} y_1 h_y^2 \right) y_3 - \left(\binom{4}{1} x_1^3 + \binom{4}{3} x_1 h_x^2 \right) x_3 \right] + \\ &\quad \left. k \left[\left(\binom{4}{1} y_1^3 + \binom{4}{3} y_1 h_y^2 \right) y_4 - \left(\binom{4}{1} x_1^3 + \binom{4}{3} x_1 h_x^2 \right) x_4 \right] \right| \\ &= \sqrt{A_2^{(4)} r^2 + A_3^{(4)} r^3 + \dots + A_8^{(4)} r^8} \end{aligned}$$

onde, por exemplo

$$A_2^{(4)} = f_1^2 + f_{i1}^2 + f_{j1}^2 + f_{k1}^2,$$

dadas por

$$\begin{aligned} f_1 &= 4(x_1^3 c - 3x_1^2 \Pi + 3x_1 h_x^2 c - h_x^2 \Pi), \\ f_{i1} &= 4 \left[x_1^3 c_1 c_2 s_3 + 3x_1^2 x_2 c + (h_x^2 c_1 c_2 s_3 - 2x_2 \Pi) x_1 + x_2 h_x^2 c \right], \\ f_{j1} &= 4 \left[x_1^3 c_1 s_2 + 3x_1^2 x_3 c + (h_x^2 c_1 s_2 - 2x_3 \Pi) x_1 + x_3 h_x^2 c \right], \\ f_{k1} &= 4 \left[x_1^3 s_1 + 3x_1^2 x_4 c + (h_x^2 s_1 - 2x_4 \Pi) x_1 + x_4 h_x^2 c \right], \end{aligned}$$

que foram calculadas separadamente.

4.2 A generalização $|f(y) - f(x)|$, para $f(z) = z^n$

Consideremos $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ o centro da bola *quadri*-dimensional de raio r , e, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ um ponto de sua fronteira parametrizado por

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 & = x_1 + r c_1 c_2 c_3 & = x_1 + r c \\ y_2 = x_2 + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 & = x_2 + r c_1 c_2 s_3 \\ y_3 = x_3 + r \cos \theta_1 \sin \theta_2 & = x_3 + r c_1 s_2 \\ y_4 = x_4 + r \sin \theta_1 & = x_4 + r s_1, \end{cases}$$

e, queremos calcular $|f(y) - f(x)|$ para $f(z) = z^n$.

Temos que

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= \\ |Re(y^n) - Re(x^n) + I(y^n) - I(x^n)| &= \\ \left| \sum_{k=0}^{2k \leq n} \binom{n}{2k} (y_1^{n-2k} h_y^{2k} - x_1^{n-2k} h_x^{2k}) \right. \\ &+ i \left\{ \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} \right] y_2 - \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] x_2 \right\} \\ &+ j \left\{ \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} \right] y_3 - \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] x_3 \right\} \\ &+ k \left\{ \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} \right] y_4 - \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] x_4 \right\} \Big| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^{2k \leq n} \binom{n}{2k} (y_1^{n-2k} h_y^{2k} - x_1^{n-2k} h_x^{2k}) \right. \\ &+ i \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (y_2 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_2 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k}) \right] \\ &+ j \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (y_3 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_3 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k}) \right] \\ &+ k \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (y_4 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_4 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k}) \right] \Big| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |F + iF_i + jF_j + kF_k| \\
&= \sqrt{F^2 + F_i^2 + F_j^2 + F_k^2},
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde

$$F = \sum_{k=0}^{2k \leq n} \binom{n}{2k} (y_1^{n-2k} h_y^{2k} - x_1^{n-2k} h_x^{2k}), \tag{4.5}$$

$$F_i = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (y_2 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_2 x_1^{n-(2k-1)} h_x^{2k}), \tag{4.6}$$

$$F_j = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (y_3 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_3 x_1^{n-(2k-1)} h_x^{2k}), \tag{4.7}$$

$$F_k = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (y_4 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_4 x_1^{n-(2k-1)} h_x^{2k}), \tag{4.8}$$

então, mostremos que

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt{F^2 + F_i^2 + F_j^2 + F_k^2} = \sqrt{\sum_{s=2}^{2n} A_s^{(n)} r^s} \tag{4.9}$$

4.3 Dedução de $f_{m+q=}$

Nosso objetivo é de obter separadamente os coeficientes do polinômio em r , derivado do fator h_y^{2k} que aparece nas equações (4.5)..(4.8), para que ao distribuirmos esse polinômio com os outros fatores, possamos escrever F , F_i , F_j e F_k como um polinômio normal em função de r .

Como $h_y^{2k} = (h_y^2)^k$, $(0 \leq 2k \leq n)$, então

$$\begin{aligned}
h_y^{2k} &= (h_x^2 + (-2r\Pi + (rs)^2))^k = \\
&\binom{k}{0} (h_x^2)^k (-2r\Pi + (rs)^2)^0 + \\
&+ \binom{k}{1} (h_x^2)^{k-1} (-2r\Pi + (rs)^2)^1 + \\
&+ \binom{k}{2} (h_x^2)^{k-2} (-2r\Pi + (rs)^2)^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots \\
 & + \binom{k}{m} (h_x^2)^{k-m} (-2r\Pi + (rs)^2)^m + \\
 & \dots\dots \\
 & + \binom{k}{k} (h_x^2)^{k-k} (-2r\Pi + (rs)^2)^k, \quad (0 \leq m \leq k)
 \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}
 h_y^{2k} &= \binom{k}{0} (h_x^2)^k + \\
 & \binom{k}{1} (h_x^2)^{k-1} \left[\binom{1}{0} (-2r\Pi)^{1-0} (r^2 s^2)^0 + \binom{1}{1} (-2r\Pi)^{1-1} (r^2 s^2)^1 \right] + \\
 & \binom{k}{2} (h_x^2)^{k-2} \left[\binom{2}{0} (-2r\Pi)^{2-0} (r^2 s^2)^0 + \binom{2}{1} (-2r\Pi)^{2-1} (r^2 s^2)^1 + \binom{2}{2} (-2r\Pi)^{2-2} (r^2 s^2)^2 \right] + \\
 & \dots\dots \\
 & \binom{k}{m} (h_x^2)^{k-m} \left[\binom{m}{0} (-2r\Pi)^{m-0} (r^2 s^2)^0 + \right. \\
 & \binom{m}{1} (-2r\Pi)^{m-1} (r^2 s^2)^1 + \binom{m}{2} (-2r\Pi)^{m-2} (r^2 s^2)^2 + \dots \\
 & \left. + \binom{m}{q} (-2r\Pi)^{m-q} (r^2 s^2)^q + \dots + \right. \\
 & \left. \binom{m}{m} (-2r\Pi)^{m-m} (r^2 s^2)^m \right] + \\
 & \dots\dots\dots \\
 & + \binom{k}{k} (h_x^2)^{k-k} \left[\binom{k}{0} (-2r\Pi)^{k-0} (r^2 s^2)^0 + \right. \\
 & \binom{k}{1} (-2r\Pi)^{k-1} (r^2 s^2)^1 + \binom{k}{2} (-2r\Pi)^{k-2} (r^2 s^2)^2 + \dots \\
 & \left. + \binom{k}{k} (-2r\Pi)^{k-k} (r^2 s^2)^k \right], \quad (0 \leq q \leq m \leq k)
 \end{aligned}$$

Separando o fator r de cada termo, temos

$$\begin{aligned}
 h_y^{2k} &= \left[\binom{k}{0} (h_x^2)^k \right] r^0 + \\
 & \left[\binom{k}{1} (h_x^2)^{k-1} \binom{1}{0} (-2\Pi)^{1-0} (s^2)^0 \right] r^1 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\binom{k}{1} (h_x^2)^{k-1} \binom{1}{1} (-2\Pi)^{1-1} (s^2)^1 + \binom{k}{2} (h_x^2)^{k-2} \binom{2}{0} (-2\Pi)^{2-0} (s^2)^0 \right] r^2 + \\
 & \left[\binom{k}{2} (h_x^2)^{k-2} \binom{2}{1} (-2\Pi)^{2-1} (s^2)^1 + \binom{k}{3} (h_x^2)^{k-3} \binom{3}{0} (-2\Pi)^{3-0} (s^2)^0 \right] r^3 + \\
 & \left[\binom{k}{2} (h_x^2)^{k-2} \binom{2}{2} (-2\Pi)^{2-2} (s^2)^2 + \binom{k}{3} (h_x^2)^{k-3} \binom{3}{1} (-2\Pi)^{3-1} (s^2)^1 + \right. \\
 & \quad \left. \binom{k}{4} (h_x^2)^{k-4} \binom{4}{0} (-2\Pi)^{4-0} (s^2)^0 \right] r^4 + \\
 & \quad \dots\dots\dots + \\
 & \quad \left[f_{m+q=} \right] r^{m+q} + \\
 & \quad \dots\dots\dots + (s^2)^k r^{2k},
 \end{aligned}$$

onde $f_{m+q=}$ será definida como

$$\begin{aligned}
 f_{m+q=} &= \left[\binom{k}{m} \binom{m}{q} (h_x^2)^{k-m} (-2\Pi)^{m-q} (s^2)^q + \right. \\
 & \binom{k}{m+1} \binom{m+1}{q-1} (h_x^2)^{k-(m+1)} (-2\Pi)^{m-q+2} (s^2)^{q-1} + \dots \\
 & \left. + \binom{k}{m+q} \binom{m+q}{0} (h_x^2)^{k-(m+q)} (-2\Pi)^{m+q} (s^2)^0 \right], \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

satisfazendo $0 \leq m+q \leq 2k$, $0 \leq q \leq m \leq k$ e $f_{m+q=} = 0$ se $m > k$. Então

$$h_y^{2k} = \sum_{m+q=0}^{2k} f_{m+q=} r^{m+q} \tag{4.11}$$

4.4 Dedução de $f_{(2k,t)}$

Nosso objetivo é de obter o coeficiente de r^t para cada t fixado em

$$F = \sum_{k=0}^{2k \leq n} \binom{n}{2k} (y_1^{n-2k} h_y^{2k} - x_1^{n-2k} h_x^{2k})$$

Seja, então

$$f_{2k}^{(n)} = \binom{n}{2k} (y_1^{n-2k} h_y^{2k} - x_1^{n-2k} h_x^{2k}),$$

então

$$\begin{aligned}
 f_{2k}^{(n)} &= \binom{n}{2k} \left\{ \left(x_1 + rc \right)^{n-2k} \left(\sum_{m+q=0}^{2k} f_{m+q} r^{m+q} \right) - x_1^{n-2k} h_x^{2k} \right\} \\
 &= \binom{n}{2k} \left\{ \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} (rc)^0 + \binom{n-2k}{1} x_1^{n-2k-1} (rc)^1 + \dots + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \binom{n-2k}{p} x_1^{n-2k-p} (rc)^p + \dots + \binom{n-2k}{n-2k} x_1^0 (rc)^{n-2k} \right] \right. \\
 &\quad \left. \left[f_{m+q=0} r^0 + f_{m+q=1} r^1 + \dots + f_{m+q=2k} r^{2k} \right] - x_1^{n-2k} h_x^{2k} \right\} \\
 &= \binom{n}{2k} \left\{ \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=0} \right] r^0 + \right. \\
 &\quad \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=1} + \binom{n-2k}{1} x_1^{n-2k-1} c^1 f_{m+q=0} \right] r^1 + \\
 &\quad \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=2} + \binom{n-2k}{1} x_1^{n-2k-1} c^1 f_{m+q=1} + \binom{n-2k}{2} x_1^{n-2k-2} c^2 f_{m+q=0} \right] r^2 \\
 &\quad + \dots + \\
 &\quad \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=t} + \dots + \binom{n-2k}{p} x_1^{n-2k-p} c^p f_{m+q=t-p} + \dots + \binom{n-2k}{t} x_1^0 c^t f_{m+q=0} \right] r^t \\
 &\quad + \dots + \\
 &\quad \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=n} + \dots + \binom{n-2k}{n-2k} x_1^0 c^{n-2k} f_{m+q=2k} \right] r^n \\
 &\quad \left. - x_1^{n-2k} h_x^{2k} \right\}
 \end{aligned}$$

Simplificando o primeiro com o último termo, temos

$$\begin{aligned}
 f_{2k}^{(n)} &= \binom{n}{2k} \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=1} + \binom{n-2k}{1} x_1^{n-2k-1} c^1 f_{m+q=0} \right] r^1 + \\
 &\quad \binom{n}{2k} \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=2} + \binom{n-2k}{1} x_1^{n-2k-1} c^1 f_{m+q=1} + \binom{n-2k}{2} x_1^{n-2k-2} c^2 f_{m+q=0} \right] r^2 + \\
 &\quad + \dots + \\
 &\quad \binom{n}{2k} \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=n} + \dots + \binom{n-2k}{n-2k} x_1^0 c^{n-2k} f_{m+q=2k} \right] r^n.
 \end{aligned}$$

Definimos então

$$f_{(2k,t)} = \binom{n}{2k} \left[\sum_{p=0}^t \binom{n-2k}{p} x_1^{n-2k-p} c^p f_{m+q=t-p} \right] \quad (4.12)$$

e escrevemos

$$f_{2k}^{(n)} = \sum_{t=1}^n f_{(2k,t)} r^t \quad (4.13)$$

4.5 Dedução de $F = \sum f_t r^t$

Temos que

$$\begin{aligned} F &= \binom{n}{0} (y_1^n - x_1^n) + \binom{n}{2} (y_1^{n-2} h_y^2 - x_1^{n-2} h_x^2) + \dots \\ &= f_0^{(n)} + f_2^{(n)} + \dots + f_{2k}^{(n)} = \sum_{k=0}^{2k \leq n} f_{2k}^{(n)}, \end{aligned}$$

mas $f_{2k}^{(n)} = \sum_{t=1}^n f_{(2k,t)} r^t$, então $F = \sum_{k=0}^{2k \leq n} \left(\sum_{t=1}^n f_{(2k,t)} r^t \right)$ ou de outra forma,

$$\begin{aligned} F &= f_{(0,1)} r^1 + f_{(0,2)} r^2 + \dots + f_{(0,t)} r^t + \\ &\quad f_{(2,1)} r^1 + f_{(2,2)} r^2 + \dots + f_{(2,t)} r^t + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad f_{(2k,1)} r^1 + f_{(2k,2)} r^2 + \dots + f_{(2k,t)} r^t \\ &= \sum_{k=0}^{2k \leq n} f_{(2k,1)} r^1 + \sum_{k=0}^{2k \leq n} f_{(2k,2)} r^2 + \dots + \sum_{k=0}^{2k \leq n} f_{(2k,t)} r^t \end{aligned}$$

Definimos então

$$f_t = \sum_{k=0}^{2k \leq n} f_{(2k,t)}, \quad (1 \leq t \leq n) \quad (4.14)$$

e obtemos

$$F = \sum_{t=1}^n f_t r^t, \quad (4.15)$$

sendo $f_{(2k,t)}$ deduzida anteriormente.

Exemplo 4.1. Em $f(z) = z^2$, temos

$$F = \sum_{t=1}^2 f_t r^t = f_1 r^1 + f_2 r^2,$$

como

$$f_1 = \sum_{k=0}^{2k \leq 2} f_{(2k,1)} = f_{(0,1)} + f_{(2,1)},$$

e

$$f_{(0,1)} = \binom{2}{0} \left[\binom{2}{0} x_1^2 c^0 f_{m+q=1} + \binom{2}{1} x_1^1 c^1 f_{m+q=0} \right] = x_1^2 0 + 2x_1 c 1 = 2x_1 c_1 c_2 c_3,$$

e

$$f_{(2,1)} = \binom{2}{2} \left[\binom{0}{0} x_1^0 c^0 f_{m+q=1} \right] = \binom{1}{1} \binom{1}{0} (h_x^2)^0 (-2\Pi)^1 (s^2)^0 = -2\Pi,$$

então

$$f_1 = 2(x_1 c_1 c_2 c_3 - \Pi).$$

Como

$$f_2 = \sum_{k=0}^{2k \leq 2} f_{(2k,2)} = f_{(0,2)} + f_{(2,2)},$$

e

$$f_{(0,2)} = \binom{2}{0} \left[\binom{2}{0} x_1^2 c^0 f_{m+q=2} + \binom{2}{1} x_1^1 c^1 f_{m+q=1} + \binom{2}{2} x_1^0 c^2 f_{m+q=0} \right],$$

$$f_{(0,2)} = x_1^2 0 + 2x_1 c 0 + c^2 1 = c^2 = c_1^2 c_2^2 c_3^2,$$

$$f_{(2,2)} = \binom{2}{2} \left[\binom{0}{0} x_1^0 c^0 f_{m+q=2} \right] = \binom{1}{1} \binom{1}{1} (h_x^2)^0 (-2\Pi)^0 (s^2)^1 = s^2,$$

então

$$f_2 = c^2 + s^2 = c_1^2 c_2^2 c_3^2 + (c_1^2 c_2^2 c_3^2 - 1) = 2c_1^2 c_2^2 c_3^2 - 1$$

logo

$$F = 2(x_1 c_1 c_2 c_3 - \Pi) r^1 + (2c_1^2 c_2^2 c_3^2 - 1) r^2$$

Exemplo 4.2. Em $f(z) = z^3$, temos

$$F = \sum_{t=1}^3 f_t r^t = f_1 r^1 + f_2 r^2 + f_3 r^3,$$

como

$$f_1 = \sum_{k=0}^{2k \leq 2} f_{(2k,1)} = f_{(0,1)} + f_{(2,1)},$$

e

$$\begin{aligned} f_{(0,1)} &= \binom{3}{0} x_1^3 c^0 f_{m+q=1} + \binom{3}{1} x_1^2 c^1 f_{m+q=0} = x_1^3 0 + 3x_1^2 c 1 = 3x_1^2 c_1 c_2 c_3, \\ f_{(2,1)} &= \binom{3}{2} \left[\binom{1}{0} x_1^1 c^0 f_{m+q=1} + \binom{1}{1} x_1^0 c^1 f_{m+q=0} \right] \\ &= 3 \left[x_1 \binom{1}{1} \binom{1}{0} (h_x^2)^0 (-2\Pi)^1 (s^2)^0 + c^1 \binom{1}{0} \binom{0}{0} (h_x^2)^1 \right] = -6x_1 \Pi + 3h_x^2 c, \end{aligned}$$

então

$$f_1 = 3(x_1^2 + h_x^2)c - 6x_1 \Pi,$$

e como

$$f_2 = \sum_{k=0}^1 f_{(2k,2)} = f_{(0,2)} + f_{(2,2)},$$

e

$$\begin{aligned} f_{(0,2)} &= \binom{3}{0} \left[\binom{3}{0} x_1^3 c^0 f_{m+q=2} + \binom{3}{1} x_1^2 c^1 f_{m+q=1} + \binom{3}{2} x_1^1 c^2 f_{m+q=0} \right], \\ f_{(0,2)} &= x_1^3 0 + 3x_1^2 c 0 + 3x_1 c^2 1 = 3x_1^2 c^2, \\ f_{(2,2)} &= \binom{3}{2} \left[\binom{1}{0} x_1^1 c^0 f_{m+q=2} + \binom{1}{1} x_1^0 c^1 f_{m+q=1} \right], \\ f_{(2,2)} &= 3 \left[x_1 (s^2) + c \binom{1}{1} \binom{1}{0} (h_x^2)^0 (-2\Pi)^1 (s^2)^0 \right] = 3x_1 s^2 - 6\Pi c \end{aligned}$$

então

$$f_2 = 3x_1(2c_1^2 c_2^2 c_3^2 - 1) - 6\Pi c_1 c_2 c_3,$$

Analogamente, $f_3 = 4c_1^3 c_2^3 c_3^3 - 3c_1 c_2 c_3$. Assim,

$$\begin{aligned} F &= [3(x_1^2 + h_x^2)c_1 c_2 c_3 - 6x_1 \Pi] r^1 + \\ &[3(x_1(2c_1^2 c_2^2 c_3^2 - 1) - 6\Pi c_1 c_2 c_3)] r^2 + \\ &[4c_1^3 c_2^3 c_3^3 - 3c_1 c_2 c_3] r^3 \end{aligned}$$

4.6 Dedução de $F_i = \sum f_{it}r^t$, $F_j = \sum f_{jt}r^t$

e $F_k = \sum f_{kt}r^t$

Se

$$F_i = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} \left\{ y_2 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_2 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right\}$$

e

$$f_{i2k}^{(n)} = \binom{n}{2k+1} \left\{ y_2 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_2 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right\},$$

então

$$\begin{aligned} f_{i2k}^{(n)} &= \binom{n}{2k+1} \left\{ y_2 \left[x_1 + rc \right]^{n-(2k+1)} \left[\sum_{m+q=0}^{2k} f_{m+q} r^{m+q} \right] - x_2 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right\} \\ &= \binom{n}{2k+1} \left\{ y_2 \left[\binom{n-(2k+1)}{0} x_1^{n-(2k+1)} (rc)^0 + \binom{n-(2k+1)}{1} x_1^{n-(2k)} (rc)^1 + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} (rc)^p + \dots + \binom{n-(2k+1)}{n-(2k+1)} x_1^0 (rc)^{n-(2k+1)} \right] \right. \\ &\quad \left. \left[f_{m+q=0} r^0 + f_{m+q=1} r^1 + \dots + f_{m+q=2k} r^{2k} \right] - x_2 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right\} \\ &= \binom{n}{2k+1} \left\{ (x_2 + rc_1 c_2 s_3) \left[\left(\binom{n-(2k+1)}{0} x_1^{n-(2k+1)} (c)^0 f_{m+q=0} \right) r^0 + \right. \right. \\ &\quad \left(\binom{n-(2k+1)}{0} x_1^{n-(2k+1)} (c)^0 f_{m+q=1} + \binom{n-(2k+1)}{1} x_1^{n-(2k)} (c)^1 f_{m+q=0} \right) r^1 + \\ &\quad \left(\binom{n-(2k+1)}{0} x_1^{n-(2k+1)} (c)^0 f_{m+q=2} + \dots + \binom{n-(2k+1)}{2} x_1^{n-(2k+1)-2} (c)^2 f_{m+q=0} \right) r^2 + \dots \\ &\quad \dots + \left(\sum_{p=0}^{t-1} \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-(p+1)} \right) r^{t-1} + \\ &\quad \left(\sum_{p=0}^t \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p} \right) r^t + \dots + \\ &\quad \left. \left. \binom{n-(2k+1)}{n-(2k+1)} x_1^0 c^{n-(2k+1)} f_{m+q=2k} r^{n-1} \right] - x_2 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right\}, \end{aligned}$$

Como $f_{m+q=0} = h_x^{2k}$, temos que

$$f_{i2k}^{(n)} = \binom{n}{2k+1} \left\{ \left[x_2 \sum_{p=0}^1 \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=1-p} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. c_1 c_2 s_3 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] r^1 + \\
 & \left[x_2 \sum_{p=0}^2 \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=2-p} + \right. \\
 & \left. c_1 c_2 s_3 \sum_{p=0}^1 \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=2-p} \right] r^2 + \dots \\
 & \left[x_2 \sum_{p=0}^t \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p} + \right. \\
 & \left. c_1 c_2 s_3 \sum_{p=0}^{t-1} \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p-1} \right] r^t + \dots \\
 & \left. + \left[c_1 c_2 s_3 \binom{n-(2k+1)}{n-(2k+1)} x_1^0 c^{n-(2k+1)} f_{m+q=2k} \right] r^n \right\}.
 \end{aligned}$$

Assim

$$f_{i2k}^{(n)} = \sum_{t=1}^n f_{i(2k,t)} r^t, \quad (4.16)$$

sendo $f_{i(2k,t)}$ definida como

$$\begin{aligned}
 f_{i(2k,t)} = & \binom{n}{2k+1} \left[x_2 \sum_{p=0}^t \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p} + \right. \\
 & \left. c_1 c_2 s_3 \sum_{p=0}^{t-1} \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p-1} \right] \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

Do mesmo modo definimos

$$\begin{aligned}
 f_{j(2k,t)} = & \binom{n}{2k+1} \left[x_3 \sum_{p=0}^t \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p} + \right. \\
 & \left. c_1 s_2 \sum_{p=0}^{t-1} \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p-1} \right] \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

$$f_{k(2k,t)} = \binom{n}{2k+1} \left[x_4 \sum_{p=0}^t \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p} + \right.$$

$$s_1 \left[\sum_{p=0}^{t-1} \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p-1} \right] \quad (4.19)$$

Seja então

$$F_i = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} \left\{ y_2 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_2 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{i2k}^{(n)} = f_{i0}^{(n)} + f_{i2}^{(n)} + \dots + f_{i2k}^{(n)}, \quad f_{i2k}^{(n)} = \sum_{t=1}^n f_{i(2k,t)} r^t$$

Então

$$F_i = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \left(\sum_{t=1}^n f_{i(2k,t)} r^t \right),$$

ou

$$F_i = \left\{ f_{i(0,1)} r^1 + f_{i(0,2)} r^2 + \dots + f_{i(0,t)} r^t + \right.$$

$$\left. + f_{i(2,1)} r^1 + f_{i(2,2)} r^2 + \dots + f_{i(2,t)} r^t + \right.$$

$$\left. \dots \dots \dots \right.$$

$$\left. f_{i(2k,1)} r^1 + f_{i(2k,2)} r^2 + \dots + f_{i(2k,t)} r^t \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{i(2k,1)} r^1 + \dots + \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{i(2k,t)} r^t$$

Definimos então

$$f_{it} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{i(2k,t)}, \quad (1 \leq t \leq n) \quad (4.20)$$

Assim ,

$$F_i = \sum_{t=1}^n f_{it} r^t. \quad (4.21)$$

Analogamente, definimos

$$F_j = \sum_{t=1}^n f_{jt} r^t, \quad F_k = \sum_{t=1}^n f_{kt} r^t \quad (4.22)$$

com

$$f_{jt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{j(2k,t)} \quad e \quad f_{kt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{k(2k,t)} \quad \text{dadas.} \quad (4.23)$$

Exemplo 4.3. Em z^2 ,

$$F_i = \sum_{t=1}^2 f_{it}r^t = f_{i1}r^1 + f_{i2}r^2,$$

onde

$$f_{it} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq 2} f_{i(2k,t)} = f_{i(0,t)},$$

e

$$\begin{aligned} f_{i1} = f_{i(0,1)} &= \binom{2}{1} \left(x_2 \sum_{p=0}^1 \binom{1}{p} x_1^{1-p} c^p f_{m+q=1-p} + c_1 c_2 s_3 \sum_{p=0}^0 \binom{1}{0} x_1 c^0 f_{m+q=0} \right) \\ &= 2x_2c + 2x_1c_1c_2s_3 = 2x_2c_1c_2c_3 + 2x_1c_1c_2s_3, \\ f_{i2} = f_{i(0,2)} &= \binom{2}{1} \left(x_2 \sum_{p=0}^2 \binom{1}{p} x_1^{1-p} c^p f_{m+q=2-p} + c_1 c_2 s_3 \binom{1}{1} x_1^0 c^1 f_{m+q=0} \right) \\ &= 2c_1c_2s_3c = 2c_1^2c_2^2c_3s_3, \end{aligned}$$

logo

$$F_i = (2x_2c_1c_2c_3 + 2x_1c_1c_2s_3)r + 2c_1^2c_2^2c_3s_3r^2.$$

Analogamente,

$$F_j = (2x_3c_1c_2c_3 + 2x_1c_1s_2)r + 2c_1^2c_2s_2c_3r^2$$

e

$$F_k = (2x_4c_1c_2c_3 + 2x_1s_1)r + 2c_1s_1c_2c_3r^2.$$

4.7 Conclusão de $|f(y) - f(x)| = (\sum A_s^{(n)} r^s)^{1/2}$

Considerando então,

$$F = \sum_{t=1}^n f_t r^t, \quad F_i = \sum_{t=1}^n f_{it} r^t, \quad F_j = \sum_{t=1}^n f_{jt} r^t \quad e \quad F_k = \sum_{t=1}^n f_{kt} r^t,$$

temos

$$\begin{aligned} F^2 &= (f_1r^1 + f_2r^2 + \dots + f_n r^n)^2 \\ &= a_2r^2 + a_3r^3 + \dots + a_{2n}r^{2n} = \sum_{s=2}^{2n} a_s r^s \end{aligned} \tag{4.24}$$

sendo

$$a_s = \begin{cases} \sum_{p=1}^{s-1} f_p f_{s-p}, & \text{se } 2 \leq s \leq n+1 \text{ e} \\ \sum_{k=0}^{n-p} f_{p+k} f_{n-k}, & \text{se } s = n+p, \quad p > 1 \end{cases} \quad (4.25)$$

Analogamente, faremos

$$F_i^2 = \sum_{s=2}^{2n} a_{is} r^s, \quad (4.26)$$

com

$$a_{is} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{s-1} f_{ip} f_{i(s-p)}, & \text{se } 2 \leq s \leq n+1 \text{ e} \\ \sum_{k=0}^{n-p} f_{i(p+k)} f_{i(n-k)}, & \text{se } s = n+p, \quad p > 1, \end{cases} \quad (4.27)$$

e

$$F_j^2 = \sum_{s=2}^{2n} a_{js} r^s, \quad (4.28)$$

com

$$a_{js} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{s-1} f_{jp} f_{j(s-p)}, & \text{se } 2 \leq s \leq n+1 \text{ e} \\ \sum_{k=0}^{n-p} f_{j(p+k)} f_{j(n-k)}, & \text{se } s = n+p, \quad p > 1, \end{cases} \quad (4.29)$$

e

$$F_k^2 = \sum_{s=2}^{2n} a_{ks} r^s, \quad (4.30)$$

com

$$a_{ks} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{s-1} f_{kp} f_{k(s-p)}, & \text{se } 2 \leq s \leq n+1 \text{ e} \\ \sum_{k=0}^{n-p} f_{k(p+k)} f_{k(n-k)}, & \text{se } s = n+p, \quad p > 1. \end{cases} \quad (4.31)$$

Então

$$F^2 + F_i^2 + F_j^2 + F_k^2 = \sum_{s=2}^{2n} (a_s + a_{is} + a_{js} + a_{ks}) r^s = \sum_{s=2}^{2n} A_s^{(n)} r^s$$

com

$$A_s^{(n)} = a_s + a_{is} + a_{js} + a_{ks} \quad (4.32)$$

Assim, se

$$|f(y) - f(x)| = |F + iF_i + jF_j + kF_k|,$$

temos

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt{F^2 + F_i^2 + F_j^2 + F_k^2} = \sqrt{\sum_{s=2}^{2n} A_s^{(n)} r^s} \quad (4.33)$$

Exemplo 4.4. Em $f(z) = z^2$, temos $n = 2$, e

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt{\sum_{s=2}^{2n} A_s^{(2)} r^s} = \sqrt{A_2^{(2)} r^2 + A_3^{(2)} r^3 + A_4^{(2)} r^4}.$$

Seja então, obter $A_2^{(2)}$. Ora $A_2^{(2)} = a_2 + a_{i2} + a_{j2} + a_{k2}$, e $a_2 = f_1 f_1 = f_1^2$, $a_{i2} = f_{i1}^2$, $a_{j2} = f_{j1}^2$, $a_{k2} = f_{k1}^2$. Logo

$$A_2^{(2)} = f_1^2 + f_{i1}^2 + f_{j1}^2 + f_{k1}^2$$

Agora

$$f_t = \sum_{k=0}^{2k \leq n} f_{(2k,t)}, \quad \text{assim} \quad f_1 = f_{(0,1)} + f_{(2,1)}, \quad e$$

$$f_{it} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{i(2k,t)}, \quad \text{assim} \quad f_{i1} = f_{i(0,1)}, \quad e$$

$$f_{jt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{j(2k,t)}, \quad \text{assim} \quad f_{j1} = f_{j(0,1)}, \quad e$$

$$f_{kt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{k(2k,t)}, \quad \text{assim} \quad f_{k1} = f_{k(0,1)}.$$

Se

$$f_{(2k,t)} = \binom{n}{2k} \left[\sum_{p=0}^t \binom{n-2k}{p} x_1^{n-2k-p} c^p f_{m+q=t-p} \right],$$

temos

$$f_{(0,1)} = \binom{2}{0} \left[\sum_{p=0}^1 \binom{2}{p} x_1^{2-p} c^p f_{m+q=1-p} \right] = 2x_1 c,$$

e

$$f_{(2,1)} = \binom{2}{2} \left[\sum_{p=0}^1 \binom{0}{p} x_1^{-p} c^p f_{m+q=1-p} \right] = -2\Pi,$$

logo

$$f_1 = 2x_1 c - 2\Pi.$$

Agora,

$$f_{i(2k,t)} = \binom{n}{2k+1} \left[x_2 \sum_{p=0}^t \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p} + c_1 c_2 s_3 \sum_{p=0}^{t-1} \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p-1} \right],$$

assim

$$f_{i(0,1)} = \binom{2}{1} \left[x_2 \sum_{p=0}^1 \binom{1}{p} x_1^{1-p} c^p f_{m+q=1-p} + c_1 c_2 s_3 \binom{1}{0} x_1^1 c^0 f_{m+q=0} \right],$$

logo $f_{i(0,1)} = 2(x_1 c_1 c_2 s_3 + x_2 c)$, e analogamente, $f_{j(0,1)} = 2(x_1 c_1 s_2 + x_3 c)$ e $f_{k(0,1)} = 2(x_1 s_1 + x_4 c)$, então voltando em $A_2^{(2)}$, temos

$$A_2^{(2)} = [2(x_1 c - \Pi)]^2 + [2(x_1 c_1 c_2 s_3 + x_2 c)]^2 + [2(x_1 c_1 s_2 + x_3 c)]^2 + [2(x_1 s_1 + x_4 c)]^2$$

Exemplo 4.5. Em $f(z) = z^3$, temos $n = 3$, e

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt{\sum_{s=2}^{2n} A_s^{(3)} r^s} = \sqrt{A_2^{(3)} r^2 + A_3^{(3)} r^3 + A_4^{(3)} r^4 + A_5^{(3)} r^5 + A_6^{(3)} r^6}.$$

Seja então, obter $A_2^{(3)}$. Ora $A_2^{(3)} = a_2 + a_{i2} + a_{j2} + a_{k2}$, e $a_2 = f_1 f_1 = f_1^2$, $a_{i2} = f_{i1}^2$, $a_{j2} = f_{j1}^2$ e $a_{k2} = f_{k1}^2$, logo

$$A_2^{(3)} = f_1^2 + f_{i1}^2 + f_{j1}^2 + f_{k1}^2,$$

obtidos a seguir.

Temos que

$$f_t = \sum_{k=0}^{2k \leq n} f_{(2k,t)}, \quad \text{assim} \quad f_1 = f_{(0,1)} + f_{(2,1)}, \quad e$$

$$f_{it} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{i(2k,t)}, \quad \text{assim} \quad f_{i1} = f_{i(0,1)} + f_{i(2,1)}, \quad e$$

$$f_{jt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{j(2k,t)}, \quad \text{assim} \quad f_{j1} = f_{j(0,1)} + f_{j(2,1)}, \quad e$$

$$f_{kt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{k(2k,t)}, \quad \text{assim} \quad f_{\mathbf{k1}} = f_{k(0,1)} + f_{k(2,1)}.$$

Se

$$f_{(2k,t)} = \binom{n}{2k} \left[\sum_{p=0}^t \binom{n-2k}{p} x_1^{n-2k-p} c^p f_{m+q=t-p} \right],$$

temos

$$f_{(0,1)} = \binom{3}{0} \left[\sum_{p=0}^1 \binom{3}{p} x_1^{3-p} c^p f_{m+q=1-p} \right] = 1 \left[\binom{3}{0} x_1^3 c^0 f_{m+q=1} + \binom{3}{1} x_1^2 c^1 f_{m+q=0} \right] = 3x_1^2 c$$

$$\begin{aligned} f_{(2,1)} &= \binom{3}{2} \left[\sum_{p=0}^1 \binom{1}{p} x_1^{1-p} c^p f_{m+q=1-p} \right] = 3 \left[\binom{1}{0} x_1^1 c^0 f_{m+q=1} + \binom{1}{1} x_1^0 c^1 f_{m+q=0} \right] \\ &= 3 \left[x_1 \binom{1}{1} \binom{1}{0} (h_x^2)^0 (-2\Pi)^1 (s^2)^0 + c \binom{1}{0} (h_x^2)^1 \right] = 3h_x^2 c - 6x_1 \Pi, \end{aligned}$$

logo

$$f_1 = 3(x_1^2 + h_x^2)c - 6x_1 \Pi.$$

Agora

$$\begin{aligned} f_{i(2k,t)} &= \binom{n}{2k+1} \left[x_2 \sum_{p=0}^t \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p} + \right. \\ &\quad \left. c_1 c_2 s_3 \sum_{p=0}^{t-1} \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p-1} \right], \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} f_{i(0,1)} &= \binom{3}{1} \left[x_2 \sum_{p=0}^1 \binom{2}{p} x_1^{2-p} c^p f_{m+q=1-p} + c_1 c_2 s_3 \binom{2}{0} x_1^2 c^0 f_{m+q=0} \right], \\ f_{i(0,1)} &= 3 \left\{ x_2 \left[\binom{2}{0} x_1^2 f_{m+q=1} + \binom{2}{1} x_1^1 c^1 f_{m+q=0} \right] + x_1^2 c_1 c_2 s_3 \right\} = \\ &= 3 \left\{ x_2 \left[0 + 2x_1 c \right] + x_1^2 c_1 c_2 s_3 \right\} = 6x_1 x_2 c + 3x_1^2 c_1 c_2 s_3, \end{aligned}$$

e

$$f_{i(2,1)} = \binom{3}{3} \left[x_2 \sum_{p=0}^1 \binom{0}{p} x_1^{-p} c^p f_{m+q=1-p} + c_1 c_2 s_3 \sum_{p=0}^0 \binom{0}{p} x_1^{-p} c^p f_{m+q=-p} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ x_2 \left[f_{m+q=1} \right] + c_1 c_2 s_3 f_{m+q=0} \right\} = \\
&= \left\{ x_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (h_x^2)^0 (-2\Pi)^1 \right] + c_1 c_2 s_3 (h_x^2)^1 \right\} = -2x_2 \Pi + h_x^2 c_1 c_2 s_3,
\end{aligned}$$

então

$$f_{i1} = (3x_1^2 + h_x^2) c_1 c_2 s_3 + 2x_2 (3x_1 c - \Pi),$$

e da mesma forma

$$f_{j1} = (3x_1^2 + h_x^2) c_1 s_2 + 2x_3 (3x_1 c - \Pi) \quad e \quad f_{k1} = (3x_1^2 + h_x^2) s_1 + 2x_4 (3x_1 c - \Pi).$$

Capítulo 5

Transformações

5.1 Introdução

Nesse capítulo exibimos os conceitos de transformação complexa, conformidade e analiticidade, bem com o de transformação hipercomplexa. Não procuramos uma associação entre transformações conformes e quaseconformes (a serem definidas mais adiante), já que as definições delas são distintas.

5.1.1 Derivada

Uma função $f(z)$ é derivável em $z \in D$, D é uma região do plano z dos complexos se

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (5.1)$$

existe, e independa de como Δz tenda a zero.

5.1.2 Função Analítica

Uma função $f(z)$ é analítica (ou regular) em $z_0 \in D$, se existe $\delta > 0$ tal que $f'(z)$ existe para todo z com $|z - z_0| < \delta$.

5.1.3 Transformações

Suponhamos o sistema

$$S : \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (5.2)$$

que relaciona pontos do plano $z = (x, y)$ com pontos do plano $w = (u, v)$. Dizemos que S associa ou transforma pontos do plano z em pontos do plano w .

Se a transformação S é biunívoca, existe

$$S^{-1} : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (5.3)$$

Considerando nos complexos $z = (x_1, x_2) = x_1 + ix_2$, $i = \sqrt{-1}$ e $f(z) = w = u_1 + iu_2 = (u_1, u_2)$, temos então

$$S : \begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2) \\ u_2 = u_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Exemplo 5.1. Seja $f(z) = z^2 = (x_1 + ix_2)^2 = x_1^2 - x_2^2 + i2x_1x_2$ então

$$S : \begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \\ u_2 = u_2(x_1, x_2) = 2x_1x_2, \quad f(z) = w = u_1 + iu_2 \end{cases}$$

5.1.4 Mapeamentos

Teorema de Bieberbach [9]

Teorema 5.1. *Se há uma dada região D simplesmente conexa estando inteiramente numa parte finita do z - plano e tendo uma fronteira simples δD . Se δD consiste de um número finito de arcos de curvas que são contínuos e diferenciáveis. Se a função $w = f(x)$ é regular e se $|f(x)| \leq k < \infty$. Se a curva δD é mapeada 1-1 sobre $\delta D'$, isto é, não se intercepta. Então a função $w = f(x)$ mapeia a região D 1-1 sobre uma região simples e finita D' com fronteira $\delta D'$.*

Exemplo 5.2. A função f dada por

$$f(z) = z^2, \quad z \in \lambda : (x_1 - r)^2 + x_2^2 = r^2, \quad (r > 0)$$

mapeia λ no cardióide

$$\lambda' : (u^2 + v^2)^2 - 4r^2u(u^2 + v^2) - 4r^4v^2 = 0$$

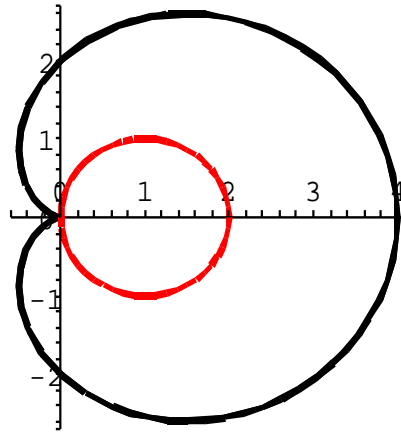


Figura 5.1: Cardióide

5.2 Transformação Hipercomplexa

Se $z = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ e $f(z) = w = u_1 + iu_2 + ju_3 + ku_4$, temos:

$$S : \begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ u_4 = u_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{cases} \quad f(z) = w = u_1 + iu_2 + ju_3 + ku_4$$

Considerando então coordenadas esféricas (r, θ) no \mathbb{R}^n , temos para

$$n = 4, \quad 0 \leq r < \infty, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1, \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi, \quad (5.4)$$

$$S : \begin{cases} x_1 = x_1(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \\ x_2 = x_2(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \\ x_3 = x_3(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = r \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \\ x_4 = x_4(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = r \operatorname{sen} \theta_1 \end{cases} \quad (5.5)$$

que para maior simplicidade escreveremos como

$$S : \begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 = r c_1 c_2 c_3 \\ x_2 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 = r c_1 c_2 s_3 \\ x_3 = r \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 = r c_1 s_2 \\ x_4 = r \operatorname{sen} \theta_1 = r s_1 \end{cases} \quad (5.6)$$

Na expressão $\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3$ usaremos algumas vezes $c_1 c_2 c_3 = c$, assim como para $c_1^2 c_2^2 c_3^2$ denotaremos por c^2 e $c^2 - 1 = s^2$.

5.3 Transformações Conformes

As transformações $w = f(z)$ que preservam ângulos entre curvas num ponto $z_0 \in z$, são ditas conforme com ângulo de giro $\gamma = \operatorname{arg} f'(z_0)$.

Como exemplos de funções conformes podemos citar as translações $w = z + \beta$, as rotações $w = e^{i\theta} z$, entre muitas outras[8].

5.3.1 Teorema Fundamental de Conformidade

Teorema 5.2. *Para z complexo, se $f(z)$ é analítica com $f'(z) \neq 0$ numa região D , então a transformação $w = f(z)$ é conforme em todos os pontos [8] de D .*

Como consequência do teorema temos as equações de *Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (5.7)$$

Se as derivadas parciais de $f(z)$ são contínuas em D , então as equações de *Cauchy-Riemann* são também condições suficientes para que $f(z)$ seja analítica [8] em D .

Sabemos que nos complexos, a translação, a dilatação, rotação e a inversão são mapeamentos conformes.

Nos hipercomplexos temos as equações *Cauchy-Riemann Generalizadas*,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_4}{\partial x_4}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_4} = \frac{\partial u_4}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_4} = -\frac{\partial u_4}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_4}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2}. \quad (5.8)$$

mas o conceito de analiticidade não é o mesmo, e as transformações [2] conformes têm restrições.

Capítulo 6

Transformação Quaseconforme

O moderno desenvolvimento dessa teoria começa por volta de 1950, com os trabalhos de Ahlfors, e, hoje tem crescido enormemente o interesse por esse assunto pelas possibilidades de conexões com outros campos da matemática.

Grötzsch, por volta de 1920, foi o primeiro a considerar mapeamentos quaseconformes para $n = 2$ em seus estudos sobre domínios planos simples [6]. Porém, os estudos para dimensões $n \geq 3$, foram desenvolvidos por Lavrent'ev, com registros de 1938.

O passo mais importante foi dado por Teichmüller com [10] mapeamentos quaseconformes em superfícies de Riemann, levando a uma conexão com diferenciais quadráticas holomorfas.

Há muitas maneiras de definir função quaseconforme, usaremos aqui a que achamos mais simples.

6.1 Definição métrica

Se \mathbb{D} e \mathbb{D}' são domínios no n -espaço Euclidiano \mathbb{R}^n com $n \geq 2$ e seja

$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ um homeomorfismo (contínua, bijetora e preserva topologia).

Para $x \in \mathbb{D}$ e $r > 0$, considere $\overline{B}(x, r)$ a bola fechada (com centro em x) em \mathbb{D} .

Seja

$$L(x, r) = \max_{|x-y|=r} |f(y) - f(x)|, \quad l(x, r) = \min_{|x-y|=r} |f(y) - f(x)|, \quad (6.1)$$

$$H(x, r) = \frac{L(x, r)}{l(x, r)} \quad e \quad H(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} H(x, r), \quad (6.2)$$

então dizemos que a função f é quaseconforme se a dilatação linear $H(x)$ é uniformemente limitada em $\mathbb{D}[6]$. Por conveniência, definimos f sendo K -quaseconforme com $1 \leq K < \infty$ se f é quaseconforme e

$$H(x) \leq K \quad \text{quase sempre.} \quad (6.3)$$

6.1.1 A 1-quaseconformidade:

Seja o complexo $z = x_1 + ix_2$, e a função

$$w = f(z) = e^{i\theta_0} z, \quad w = u_1 + iu_2$$

e

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2) = x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ u_2 = u_2(x_1, x_2) = x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{cases}$$

com Jacobiano

$$J = \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad (\forall \theta)$$

logo, continuamente diferenciável para $z \neq 0$, seu ponto crítico. Como $f(z)$ satisfaz as equações de *Cauchy – Riemann*

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \cos \theta = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \sin \theta = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2},$$

é conforme [2]. Mostremos que é 1-quaseconforme.

Se

$$\begin{aligned} L(z_0, r) &= \max_{|z_0-z|=r} |f(z) - f(z_0)| \\ &= \max_{|z_0-z|=r} |e^{i\theta_0} z - e^{i\theta_0} z_0| \end{aligned}$$

$$= e^{i\theta_0} r = l(z_0, r) = \min_{|z_0 - z| = r} |f(z) - f(z_0)|$$

então

$$H(z_0, r) = \frac{L(z_0, r)}{l(z_0, r)} = 1 = \limsup_{r \rightarrow 0} H(z_0)$$

Poderíamos, então, procurar fatores ou situações que provoquem a K -quaseconformidade, para $1 < K < \infty$, então consideremos

6.1.2 Fator de expansão da função

Seja $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$ nos complexos, $r > 0$, $f(z) = w = z^2$ e $\overline{B}(x, r) \subset \mathbb{D}$, se $x = (x_0, y_0) : \text{fixado}$ e $y \in \overline{B}(x, r)$ tal que y está na "casca" de \overline{B} , então para $y = (x_1, y_1)$ temos

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + r \cos \theta \\ y_1 = y_0 + r \sin \theta \end{cases}$$

Como $|x - y| = r$, temos $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = r^2$ e

$$f(x) = x^2 = x_0^2 - y_0^2 + i2x_0y_0, \quad f(y) = y^2 = x_1^2 - y_1^2 + i2x_1y_1 \quad e$$

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |x_1^2 - x_0^2 - y_1^2 + y_0^2 + i(2x_1y_1 - 2x_0y_0)| \\ &= r \sqrt{r^2 + 4r(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) + 4(x_0^2 + y_0^2)}, \end{aligned}$$

notamos que o

$$\lim_{r \rightarrow 0} [r^2 + 4r(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) + 4(x_0^2 + y_0^2)] = 4(x_0^2 + y_0^2)$$

é constante, que denominamos de $A_2 = 4(x_0^2 + y_0^2)$, o fator de expansão da função.

Então, no cálculo da K -quaseconformidade, obtemos

$$H(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} H(x, r) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{L(x, r)}{l(x, r)},$$

assim

$$H(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\max r \sqrt{r^2 + 4r(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) + 4(x_0^2 + y_0^2)}}{\min r \sqrt{r^2 + 4r(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) + 4(x_0^2 + y_0^2)}} = 1$$

De uma forma mais geral, podemos mostrar que com complexos escritos na forma $z = re^{i\theta}$, a potenciação $f(z) = z^n$ é 1-quaseconforme, pois $z^n = r^n e^{in\theta}$, então $L = l = r^n e^{in\theta}$, logo $H(x) = 1$

Poderemos observar mais adiante que se o fator de expansão, por nós denominados de

$$A_2^{(n)} \tag{6.4}$$

não for constante, a função será K -quaseconforme com $1 < K < \infty$.

6.1.3 A função Identidade

A função identidade para os números hipercomplexos $f(z) = z = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ é conforme pois satisfaz as equações de *Cauchy-Riemann generalizadas* [2], visto que

$$S : \begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \\ u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \\ u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3 \\ u_4 = u_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4, \end{cases} \quad e \quad J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad (\forall z \neq 0)$$

Na investigação de funções K -quaseconformes, chegamos ao estudo de funções do tipo $f(z) = z^n$, $n = 2, 3, ..$ e z hipercomplexo da forma $z = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ e obtivemos os resultados a seguir:

6.1.4 Resultado para $f(z) = z^2$

Seja $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ e $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4$, onde $x \in \mathbb{D} \subset \mathbb{H}$, $r > 0$ tal que $\overline{B}(x, r) \subset \mathbb{D}$ e $y \in \overline{B}(x, r)$, $|x - y| = r$, então:

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 + (y_4 - x_4)^2 = r$$

Em coordenadas (r, θ) temos

$$S : \begin{cases} y_1 = x_1 + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 = x_1 + r c_1 c_2 c_3 \\ y_2 = x_2 + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 = x_1 + r c_1 c_2 s_3 \\ y_3 = x_3 + r \cos \theta_1 \sin \theta_2 = x_1 + r c_1 s_2 \\ y_4 = x_4 + r \sin \theta_1 = x_1 + r s_1 \end{cases} \quad (6.5)$$

Assim

$$f(x) = x^2 = x_1^2 + h_x^2 + 2x_1 h_x, \quad h_x = ix_2 + jx_3 + kx_4, \quad h_x^2 = -x_4^2 - x_3^2 - x_2^2$$

$$f(y) = y^2 = y_1^2 + h_y^2 + 2y_1 h_y, \quad h_y = iy_2 + jy_3 + ky_4, \quad h_y^2 = h_x^2 - 2r\Pi + r^2 s^2$$

com as notações $\Pi = x_2 c_1 c_2 s_3 + x_3 c_1 s_2 + x_4 s_1$ e $s^2 = c^2 - 1 = c_1^2 c_2^2 c_3^2 - 1$, logo

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |y_1^2 - x_1^2 + h_y^2 - h_x^2 + 2y_1 h_y - 2x_1 h_x| \\ &= \left| 2(x_1 c_1 c_2 c_3 - \Pi)r + (2c^2 - 1)r^2 + i[(2x_2 c_1 c_2 c_3 + 2x_1 c_1 c_2 s_3)r + 2c c_1 c_2 s_3 r^2] \right. \\ &\quad \left. + j[(2x_3 c_1 c_2 c_3 + 2x_1 c_1 s_2)r + 2c c_1 s_2 r^2] + k[(2x_4 c_1 c_2 c_3 + 2x_1 s_1)r + 2c s_1 r^2] \right| \\ &= \left| F + iF_i + jF_j + kF_k \right| = \sqrt{F^2 + F_i^2 + F_j^2 + F_k^2}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} F &= f_1 r + f_2 r^2, & f_1 &= 2(x_1 c_1 c_2 c_3 - \Pi), & f_2 &= (2c^2 - 1), \\ F_i &= f_{i1} r + f_{i2} r^2, & f_{i1} &= 2x_2 c_1 c_2 c_3 + 2x_1 c_1 c_2 s_3, & f_{i2} &= 2c c_1 c_2 s_3, \\ F_j &= f_{j1} r + f_{j2} r^2, & f_{j1} &= 2x_3 c_1 c_2 c_3 + 2x_1 c_1 s_2, & f_{j2} &= 2c c_1 s_2, \\ F_k &= f_{k1} r + f_{k2} r^2, & f_{k1} &= 2x_4 c_1 c_2 c_3 + 2x_1 s_1, & f_{k2} &= 2c s_1. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} F^2 &= f_1^2 r^2 + 2f_1 f_2 r^3 + f_2^2 r^4, & F_i^2 &= f_{i1}^2 r^2 + 2f_{i1} f_{i2} r^3 + f_{i2}^2 r^4, \\ F_j^2 &= f_{j1}^2 r^2 + 2f_{j1} f_{j2} r^3 + f_{j2}^2 r^4 & e & \quad F_k^2 = f_{k1}^2 r^2 + 2f_{k1} f_{k2} r^3 + f_{k2}^2 r^4, \end{aligned}$$

temos

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt{A_2 r^2 + A_3 r^3 + A_4 r^4},$$

onde

$$A_4 = f_2^2 + f_{i2}^2 + f_{j2}^2 + f_{k2}^2 = 1,$$

$$A_3 = 2f_1 f_2 + 2f_{i1} f_{i2} + 2f_{j1} f_{j2} + 2f_{k1} f_{k2} = 4(x_1 c + \Pi)$$

e

$$A_2 = f_2^2 + f_{i2}^2 + f_{j2}^2 + f_{k2}^2 = 4(x_1^2 - h_x^2 c^2 + \Pi^2)$$

ou

$$A_2 = 4[x_1^2 + (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)c_1^2 c_2^2 c_3^2 + (x_2 c_1 c_2 s_3 + x_3 c_1 s_2 + x_4 s_1)^2]$$

Note que A_2 não é constante, e

$$H(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} H(x, r) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{L(x, r)}{l(x, r)} = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\max \sqrt{A_2 r^2 + A_3 r^3 + A_4 r^4}}{\min \sqrt{A_2 r^2 + A_3 r^3 + A_4 r^4}},$$

$$H(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\max r \sqrt{A_2 + A_3 r + A_4 r^2}}{\min r \sqrt{A_2 + A_3 r + A_4 r^2}} = \frac{\max \sqrt{A_2}}{\min \sqrt{A_2}} = \sqrt{\frac{\max A_2}{\min A_2}}$$

Nesse caso podemos tentar prever o valor de $H(x)$, estudando o $\max A_2$ e o $\min A_2$.

Fazendo $x_i = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, |x_4|\}$, então se

$$\Pi = x_2 c_1 c_2 s_3 + x_3 c_1 s_2 + x_4 s_1 \leq 3x_i, \quad \text{temos} \quad 0 \leq \Pi^2 \leq 9x_i^2 \quad \text{e}$$

$$0 \leq (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)c_1^2 c_2^2 c_3^2 \leq 3x_i^2, \quad \text{assim temos dois casos a considerar,}$$

Primeiro: Se $x_1 \neq 0$, para $A_2 = 4(x_1^2 - h_x^2 c^2 + \Pi^2)$ temos

$$A_2 \leq 4(x_1^2 + 3x_i^2 + 9x_i^2) = 52x_i^2, \quad \text{logo} \quad \max A_2 = 52x_i^2$$

e, se

$$c_2 = 0 \longrightarrow \Pi = x_3 c_1 + x_4 s_1, \quad \text{que pode ser zero,}$$

então $\min A_2 = 4x_1^2$, logo se $H(x) = K(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$1 \leq K(x_1, x_2, x_3, x_4) \leq \frac{x_i}{x_1} \sqrt{13} \quad (6.6)$$

Segundo: Se $x_1 = 0$, então $\max A_2 = 48x_i^2$ e $\min A_2$ pode ser infinitamente pequeno fazendo

$$K(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \text{tender} \quad \text{ao} \quad \text{infinito}.$$

A seguir calcularemos alguns valores de $K(x_1, x_2, x_3, x_4) = K(a, b, c, d)$ computacionalmente, usando o programa *Mathemática*, em que nos preocupamos apenas com os coeficientes $A_2^{(n)}$, $n = 2, 3, \dots$, dados por

$$A_2^{(n)} = a_2 + a_{i2} + a_{j2} + a_{k2},$$

sendo, por exemplo

$$A_2^{(2)} = 4(x_1^2 - h_x^2 c^2 + \Pi^2),$$

$$A_2^{(3)} = 9x_1^4 + (-24h_x^2 c^2 + 6h_x^2 + 24\Pi^2)x_1^2 - 8h_x^2 \Pi^2 + (8c^2 + 1)h_x^4,$$

$$A_2^{(4)} = \left[4(x_1^3 c - 3x_1^2 \Pi + 3x_1 h_x^2 c - h_x^2 \Pi) \right]^2 +$$

$$\left[4[x_1^3 c_1 c_2 s_3 + 3x_1^2 x_2 c + (h_x^2 c_1 c_2 s_3 - 2x_2 \Pi)x_1 + x_2 h_x^2 c] \right]^2 +$$

$$\left[4[x_1^3 c_1 s_2 + 3x_1^2 x_3 c + (h_x^2 c_1 s_2 - 2x_3 \Pi)x_1 + x_3 h_x^2 c] \right]^2 +$$

$$\left[4[x_1^3 s_1 + 3x_1^2 x_4 c + (h_x^2 s_1 - 2x_4 \Pi)x_1 + x_4 h_x^2 c] \right]^2$$

Capítulo 7

Cálculo da K -quaseconformidade computacionalmente

Usando o fato que

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt{\sum_{s=2}^{2n} A_s^{(n)} r^s}, \quad (7.1)$$

e de posse da definição métrica

$$L(x, r) = \max_{|x-y|=r} |f(y) - f(x)|, \quad l(x, r) = \min_{|x-y|=r} |f(y) - f(x)|, \quad (7.2)$$

$$H(x, r) = \frac{L(x, r)}{l(x, r)} \quad e \quad H(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} H(x, r), \quad (7.3)$$

temos que

$$H(x) = \sqrt{\frac{\max A_2^{(n)}}{\min A_2^{(n)}}} \quad (7.4)$$

Então, na investigação de $H(x) \leq K$, precisamos apenas da maximização e da minimização de A_2^n , $n=1,2,3..$, que são os coeficientes de r^2 em (7.1). Tais coeficientes, denominamos de fator de expansão, na qual para funções conformes são constantes. O caminho computacional para o cálculo de K pelo programa Mathemática foi:

1. Digite $A_2^{(n)}$
2. Maximize $A_2^{(n)} = a$
3. Minimize $A_2^{(n)} = b$

4. Faça $\sqrt{\frac{a}{b}} = K$

7.1 O cálculo de K computacionalmente

7.1.1 Seja $f(z) = z^2$, $z = (a, b, c, d)$ centro da hiperesfera de raio r

Com o comando $:A_2^{(2)} = 4[a^2 + (b^2 + c^2 + d^2)(\cos x)^2(\cos y)^2(\cos z)^2 + (b\cos x\cos y\sin z + c\cos x\sin y + d\sin x)^2]$, $-\frac{\pi}{2} \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq z \leq 2\pi$, a, b, c, d não todos nulos, obtivemos as seguintes K -quaseconformidade, $K(a, b, c, d)$ tais

$$K(1, 1, 1, 1) = 1.99998$$

$$K(15, 15, 15, 15) = 1.99998$$

$$K(1, 0, 0, 0) = 1$$

$$K(15, 1, 1, 1) = 1.00664$$

$$K(15, 0.1, 0.1, 0.1) = 1.00007$$

$$K(0.1, 1, 1, 1) = 17.3434$$

$$K(0, 1, 1, 1) = 674.021,$$

Observe que esses números foram previstos na secção anterior.

7.1.2 Seja $f(z) = z^3$, $z = (a, b, c, d)$ centro da hiperesfera de raio r

Com o comando $:A_2^{(3)} = [3(a^2 - b^2 - c^2 - d^2)\cos x\cos y\cos z - 6a(b\cos x\cos y\sin z + c\cos x\sin y + d\sin x)]^2 + [(3a^2 - b^2 - c^2 - d^2)\cos x\cos y\sin z + 2b(3a\cos x\cos y\cos z - b\cos x\cos y\sin z - c\cos x\sin y - d\sin x)]^2 + [(3a^2 - b^2 - c^2 - d^2)\cos x\sin y + 2c(3a\cos x\cos y\cos z - b\cos x\cos y\sin z - c\cos x\sin y - d\sin x)]^2 + [(3a^2 - b^2 - c^2 - d^2)\sin x + 2d(3a\cos x\cos y\cos z -$

$[bcosxcosysinz - ccosxsiny - dsinx]^2$, $-\frac{\pi}{2} \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq z \leq 2\pi$, a, b, c, d não todos nulos, obtivemos as seguintes K -quaseconformidade, $K(a, b, c, d)$ tais

$$K(1, 1, 1, 1) = 674.021$$

$$K(15, 15, 15, 15) = 674.021$$

$$K(1, 0, 0, 0) = 1$$

$$K(15, 1, 1, 1) = 1.01786$$

$$K(15, 0.1, 0.1, 0.1) = 1.00018$$

$$K(0.1, 1, 1, 1) = 3.04035$$

$$K(0, 1, 1, 1) = 2.99994,$$

7.1.3 Seja $f(z) = z^4$, $z = (a, b, c, d)$ centro da hiperesfera de raio r

Com o comando $A_2^{(4)} = [4(a^3 \cos x \cos y \cos z - 3a^2(b \cos x \cos y \sin z + c \cos x \sin y + d \sin x) + 3a(-b^2 - c^2 - d^2) \cos x \cos y \cos z - (-b^2 - c^2 - d^2)(b \cos x \cos y \sin z + c \cos x \sin y + d \sin x))]^2 + [4(a^3 \cos x \cos y \sin z + 3a^2 b \cos x \cos y \cos z + ((-b^2 - c^2 - d^2) \cos x \cos y \sin z - 2b(b \cos x \cos y \sin z + c \cos x \sin y + d \sin x))a + b(-b^2 - c^2 - d^2) \cos x \cos y \cos z]^2 + [4(a^3 \cos x \sin y + 3a^2 c \cos x \cos y \cos z + ((-b^2 - c^2 - d^2) \cos x \sin y - 2c(b \cos x \cos y \sin z + c \cos x \sin y + d \sin x))a + c(-b^2 - c^2 - d^2) \cos x \cos y \cos z]^2 + [4(a^3 \sin x + 3a^2 d \cos x \cos y \cos z + ((-b^2 - c^2 - d^2) \sin x - 2d(b \cos x \cos y \sin z + c \cos x \sin y + d \sin x))a + d(-b^2 - c^2 - d^2) \cos x \cos y \cos z]^2$, $-\frac{\pi}{2} \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq z \leq 2\pi$, a, b, c, d não todos nulos, obtivemos as seguintes K -quaseconformidade, $K(a, b, c, d)$ tais

$$K(1, 1, 1, 1) = 3.99989$$

$$K(15, 15, 15, 15) = 3.99989$$

$$K(1, 0, 0, 0) = 1$$

$$K(15, 1, 1, 1) = 1.03385$$

$$K(15, 0.1, 0.1, 0.1) = 1.00033$$

$$K(0.1, 1, 1, 1) = 17.4594$$

$$K(0, 1, 1, 1) = 674.021,$$

que podem ser comparados pela tabela:

	z^2	z^3	z^4
$K(1, 1, 1, 1)$	1.99998	674.021	3.99989
$K(15, 15, 15, 15)$	1.99998	674.021	3.99989
$K(1, 0, 0, 0)$	1.00000	1.00000	1.00000
$K(15, 1, 1, 1)$	1.00664	1.01786	1.03385
$K(15, 0.1, 0.1, 0.1)$	1.00007	1.00018	1.00033
$K(0.1, 1, 1, 1)$	17.3434	3.04035	17.4594
$K(0, 1, 1, 1)$	674.021	2.99994	674.021

Concluimos que se \bar{B}' é o mapeamento obtido pela função quaterniônica

$$f : \bar{B} \mapsto \bar{B}' \tag{7.5}$$

então bolas $\bar{B}(x, r)$, r tendendo a zero, são transformadas em hipersuperfícies das mais variadas em função do centro $x = (a, b, c, d)$, que a K -quaseconformidade depende de x . É de nosso interesse, então, localizar e visualizar essa deformação, com o procedimento de fixar uma ou duas das quatro coordenadas, como se segue.

Capítulo 8

Mapeamentos

Seja $\bar{B} = \bar{B}(x, r)$ uma bola com centro em $x = (a, b, c, d)$ e raio r , mapeada pela função quaterniônica

$$f : \bar{B} \mapsto \bar{B}', \quad (8.1)$$

então \bar{B}' é uma hipersuperfície tal que

$$\bar{B}' = f(\bar{B}(x, r)). \quad (8.2)$$

Se $y \in \bar{B}(x, r)$ com $|y - x| = r$ e $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ sendo escrito em coordenadas esféricas como

$$\bar{B} : \begin{cases} y_1 = x_1 + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \\ y_2 = x_2 + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ y_3 = x_3 + r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ y_4 = x_4 + r \sin \theta_1 \end{cases} \quad (8.3)$$

então $\bar{B}' = f(y)$, ou seja

$$\bar{B}' : \begin{cases} y'_1 = f_1(y) \\ y'_2 = f_2(y) \\ y'_3 = f_3(y) \\ y'_4 = f_4(y) \end{cases} \quad (8.4)$$

8.1 Mapeamentos com curvas de nível

Seja \overline{B}' a hipersuperfície quadridimensional dada por

$$\overline{B}' : \begin{cases} y'_1 = f_1(y) \\ y'_2 = f_2(y) \\ y'_3 = f_3(y) \\ y'_4 = f_4(y) \end{cases} \quad (8.5)$$

Das infinitas curvas de nível possíveis, faremos o encaminhamento apenas para aquelas paralelas a cada eixo coordenado. Para tanto, usaremos a seguinte analogia dos cortes de uma esfera. Seja a esfera

$$\overline{B}'(x_1, x_2, x_3) : \begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ x_2 = r \cos \theta_1 \sin \theta_2, & 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi \\ x_3 = r \sin \theta_1, & r \quad \text{dado.} \end{cases} \quad (8.6)$$

• Corte um : Fazendo $\theta_1 = 0$ e anulando a terceira coordenada teremos a projeção da esfera nos eixos $x_1 - x_2$, equivalente ao sistema

$$\overline{B}'(x_1, x_2) : \begin{cases} x_1 = r \cos \theta_2, \\ x_2 = r \sin \theta_2, & 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi \end{cases} \quad (8.7)$$

• Corte dois : Fazendo $\theta_2 = 0$ e anulando a segunda coordenada teremos a projeção da esfera nos eixos $x_1 - x_3$, equivalente ao sistema

$$\overline{B}'(x_1, x_3) : \begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1, \\ x_3 = r \sin \theta_1, & 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi \end{cases} \quad (8.8)$$

• Corte três : Fazendo $\theta_2 = \pi/2$ e anulando a primeira coordenada teremos a projeção da esfera nos eixos $x_2 - x_3$, equivalente ao sistema

$$\overline{B}'(x_2, x_3) : \begin{cases} x_2 = r \cos \theta_1, \\ x_3 = r \sin \theta_1, & 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi \end{cases} \quad (8.9)$$

Seja então \overline{B}' a hipersuperfície quadridimensional obtida em função de $r, \theta_1, \theta_2, \theta_3$, ou seja

$$\overline{B}' : \begin{cases} y'_1 = f_1(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3), \\ y'_2 = f_2(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3), & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1, \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \\ y'_3 = f_3(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3), & 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi \\ y'_4 = f_4(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3), & r \quad \text{dado.} \end{cases} \quad (8.10)$$

Faremos então apenas quatro curvas de nível, perpendiculares aos eixos coordenados provocadas por $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0$ e $\theta_3 = \pi/2$, para obtermos superfícies no \mathbb{R}^3 , à saber $\overline{B}'(x_1, x_2, x_3), \overline{B}'(x_1, x_2, x_4), \overline{B}'(x_1, x_3, x_4)$ e $\overline{B}'(x_2, x_3, x_4)$, ou mais explicitamente dadas por

$$\overline{B}'(x_1, x_2, x_3) : \begin{cases} y'_1 = f'_1(r, \theta_2, \theta_3), & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \\ y'_2 = f'_2(r, \theta_2, \theta_3), & 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi \\ y'_3 = f'_3(r, \theta_2, \theta_3), & r \quad \text{dado,} \end{cases} \quad (8.11)$$

$$\overline{B}'(x_1, x_2, x_4) : \begin{cases} y'_1 = f'_1(r, \theta_1, \theta_3), & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ y'_2 = f'_2(r, \theta_1, \theta_3), & 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi \\ y'_4 = f'_4(r, \theta_1, \theta_3), & r \quad \text{dado,} \end{cases} \quad (8.12)$$

$$\overline{B}'(x_1, x_3, x_4) : \begin{cases} y'_1 = f'_1(r, \theta_1, \theta_2), & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ y'_3 = f'_3(r, \theta_1, \theta_2), & 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi \\ y'_4 = f'_4(r, \theta_1, \theta_2), & r \quad \text{dado,} \end{cases} \quad (8.13)$$

e finalmente,

$$\overline{B}'(x_2, x_3, x_4) : \begin{cases} y'_2 = f'_2(r, \theta_1, \theta_2), & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ y'_3 = f'_3(r, \theta_1, \theta_2), & 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi \\ y'_4 = f'_4(r, \theta_1, \theta_2), & r \quad \text{dado.} \end{cases} \quad (8.14)$$

Para cada superfície \overline{B}' , podemos obter $\overline{B}'m$ como um corte meridional, fazendo para cada θ_i com variação de 0 a 2π , a variação $0 \leq \theta_i \leq \pi$, por exemplo

$$\overline{B}'m(x_1, x_2, x_3) : \begin{cases} y'_1 = f'_1(r, \theta_2, \theta_3), & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \\ y'_2 = f'_2(r, \theta_2, \theta_3), & 0 \leq \theta_3 \leq \pi \\ y'_3 = f'_3(r, \theta_2, \theta_3), & r \quad \text{dado,} \end{cases} \quad (8.15)$$

e opcionalmente usaremos

$$\overline{B}'h(x_1, x_2, x_3) : \begin{cases} y'_1 = f'_1(r, \theta_2, \theta_3), & -\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq 0 \\ y'_2 = f'_2(r, \theta_2, \theta_3), & 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi \\ y'_3 = f'_3(r, \theta_2, \theta_3), & r \quad \text{dado,} \end{cases} \quad (8.16)$$

para cortes hemisféricos. Seja agora $\overline{B}'(x_i, x_j, x_k)$ a superfície obtida no \mathbb{R}^3 . Podemos obter sua projeção no \mathbb{R}^2 fazendo em analogia dos cortes da esfera, zerando uma das coordenadas, obter $\overline{B}'(x_i, x_j)$, $\overline{B}'(x_i, x_k)$ e $\overline{B}'(x_j, x_k)$. Para os mapeamentos que seguem, considere $y \in \overline{B}(x, r)$ com $|y-x| = r$ e $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ sendo escrito em coordenadas esféricas como

$$\overline{B} : \begin{cases} y_1 = a + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \\ y_2 = b + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sen \theta_3 \\ y_3 = c + r \cos \theta_1 \sen \theta_2 \\ y_4 = d + r \sen \theta_1 \end{cases} \quad (8.17)$$

onde $x = (a, b, c, d)$ é o centro da bola quadridimensional e raio r dado.

8.2 Mapeamento de $f(z) = z^2$

Se $f(z) = z^2 = (y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4)^2$, temos

$$\overline{B}' : \begin{cases} y'_1 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2, \\ y'_2 = 2y_1y_2 \\ y'_3 = 2y_1y_3 \\ y'_4 = 2y_1y_4, \end{cases} \quad (8.18)$$

que parametrizada fica

$$\overline{B}' : \begin{cases} y'_1 = (a + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3)^2 - (b + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sen \theta_3)^2 \\ \quad - (c + r \cos \theta_1 \sen \theta_2)^2 - (d + r \sen \theta_1)^2 \\ y'_2 = 2(a + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3)(b + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sen \theta_3) \\ y'_3 = 2(a + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3)(c + r \cos \theta_1 \sen \theta_2), \\ y'_4 = 2(a + r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3)(d + r \sen \theta_1), \end{cases} \quad (8.19)$$

satisfazendo $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1, \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$. O corte dado por $\theta_1 = 0$ produz no \mathbb{R}^3 a superfície $\overline{B}'(x_1, x_2, x_3)$ dada por

$$\overline{B}'(x_1, x_2, x_3) : \begin{cases} y'_1 = (a + r\cos\theta_2\cos\theta_3)^2 - (b + r\cos\theta_2\sin\theta_3)^2 \\ -(c + r\sin\theta_2)^2 - d^2 \\ y'_2 = 2(a + r\cos\theta_2\cos\theta_3)(b + r\cos\theta_2\sin\theta_3) \\ y'_3 = 2(a + r\cos\theta_2\cos\theta_3)(c + r\sin\theta_2), \end{cases} \quad (8.20)$$

com $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$, com corte meridional dado por

$$\overline{B}'_m(x_1, x_2, x_3) : \begin{cases} y'_1 = (a + r\cos\theta_2\cos\theta_3)^2 - (b + r\cos\theta_2\sin\theta_3)^2 \\ -(c + r\sin\theta_2)^2 - d^2 \\ y'_2 = 2(a + r\cos\theta_2\cos\theta_3)(b + r\cos\theta_2\sin\theta_3) \\ y'_3 = 2(a + r\cos\theta_2\cos\theta_3)(c + r\sin\theta_2), \end{cases} \quad (8.21)$$

quando $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta_3 \leq \pi$. Para obtermos os cortes de $\overline{B}'(x_1, x_2, x_3)$ no \mathbb{R}^2 fazemos $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = 0$ e $\theta_3 = \pi/2$ e obtemos respectivamente

$$\overline{B}'(x_1, x_2) : \begin{cases} y'_1 = (a + r\cos\theta_3)^2 - (b + r\sin\theta_3)^2 - c^2 - d^2 \\ y'_2 = 2(a + r\cos\theta_3)(b + r\sin\theta_3), \quad 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi \end{cases} \quad (8.22)$$

$$\overline{B}'(x_1, x_3) : \begin{cases} y'_1 = (a + r\cos\theta_2)^2 - b^2 - (c + r\sin\theta_2)^2 - d^2 \\ y'_3 = 2(a + r\cos\theta_2)(c + r\sin\theta_2), \quad 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi \end{cases} \quad (8.23)$$

e finalmente

$$\overline{B}'(x_2, x_3) : \begin{cases} y'_2 = 2a(b + r\cos\theta_2) \\ y'_3 = 2a(c + r\sin\theta_2), \quad 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi. \end{cases} \quad (8.24)$$

Os cortes de $\overline{B}'(x_1, x_2, x_4)$ e $\overline{B}'(x_1, x_3, x_4)$ por originarem figuras semelhantes, omitimos aqui. Agora, para obtermos o corte $\overline{B}'(x_2, x_3, x_4)$ façamos em (8.19) $\theta_3 = \pi/2$ cujo mapeamento é dado por

$$\overline{B}'(x_2, x_3, x_4) : \begin{cases} y'_2 = 2a(b + r\cos\theta_1\cos\theta_2) \\ y'_3 = 2a(c + r\cos\theta_1\sin\theta_2) \\ y'_4 = 2a(d + r\sin\theta_1), \end{cases} \quad (8.25)$$

com $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta_2 \leq \pi$, e projeções no \mathbb{R}^2 dadas por

$$\overline{B}'(x_2, x_3) : \begin{cases} y'_2 = 2a(b + r \cos \theta_2) \\ y'_3 = 2a(c + r \sin \theta_2), \end{cases} \quad 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi, \quad (8.26)$$

$$\overline{B}'(x_2, x_4) : \begin{cases} y'_2 = 2a(b + r \cos \theta_1) \\ y'_4 = 2a(d + r \sin \theta_1), \end{cases} \quad 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, \quad (8.27)$$

e

$$\overline{B}'(x_3, x_4) : \begin{cases} y'_3 = 2a(c + r \cos \theta_1) \\ y'_4 = 2a(d + r \sin \theta_1), \end{cases} \quad 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, \quad (8.28)$$

onde podemos notar que $\overline{B}'(x_2, x_3)$, $\overline{B}'(x_2, x_4)$ e $\overline{B}'(x_3, x_4)$ representam circunferências, já que $\overline{B}'(x_2, x_3, x_4)$ é uma esfera.

Alguns desses cortes foram ilustrados na secção (8.4) para $x = (a, b, c, d)$ e raio r indicados.

8.3 Mapeamento de $f(z) = z^3$

Seguindo o roteiro anterior, sabemos que se $w = f(z) = z^3$, isto é

$$w = (y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4)^3 \quad (8.29)$$

então

$$\overline{B}' : \begin{cases} y'_1 = y_1^3 + 3y_1h_y^2 \\ y'_2 = (3y_1^2 + h_y^2)y_2 \\ y'_3 = (3y_1^2 + h_y^2)y_3 \\ y'_4 = (3y_1^2 + h_y^2)y_4, \end{cases} \quad (8.30)$$

ou equivalentemente, em coordenadas esféricas, dado por

$$\overline{B}' : \begin{cases} y'_1 = (a + r\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3)^3 - 3(a + r\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3) \\ ((b + r\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3)^2 + (c + r\cos\theta_1\sin\theta_2)^2 + (d + r\sin\theta_1)^2) \\ y'_2 = [3(a + r\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3)^2 - (b + r\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3)^2 \\ -(c + r\cos\theta_1\sin\theta_2)^2 - (d + r\sin\theta_1)^2](b + r\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3) \\ y'_3 = [3(a + r\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3)^2 - (b + r\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3)^2 \\ -(c + r\cos\theta_1\sin\theta_2)^2 - (d + r\sin\theta_1)^2](c + r\cos\theta_1\sin\theta_2) \\ y'_4 = [3(a + r\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3)^2 - (b + r\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3)^2 \\ -(c + r\cos\theta_1\sin\theta_2)^2 - (d + r\sin\theta_1)^2](d + r\sin\theta_1) \end{cases} \quad (8.31)$$

para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1, \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$. Fazendo $\theta_1 = 0$ para obtermos o corte $\overline{B}'(x_1, x_2, x_3)$, temos

$$\overline{B}'(x_1, x_2, x_3) : \begin{cases} y'_1 = (a + r\cos\theta_2\cos\theta_3)^3 - 3(a + r\cos\theta_2\cos\theta_3) \\ ((b + r\cos\theta_2\sin\theta_3)^2 + (c + r\sin\theta_2)^2 + d^2) \\ y'_2 = [3(a + r\cos\theta_2\cos\theta_3)^2 - (b + r\cos\theta_2\sin\theta_3)^2 \\ -(c + r\sin\theta_2)^2 - d^2](b + r\cos\theta_2\sin\theta_3) \\ y'_3 = [3(a + r\cos\theta_2\cos\theta_3)^2 - (b + r\cos\theta_2\sin\theta_3)^2 \\ -(c + r\sin\theta_2)^2 - d^2](c + r\sin\theta_2), \end{cases} \quad (8.32)$$

para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$, e para obtermos $\overline{B}'m(x_1, x_2, x_3)$, fazemos $0 \leq \theta_3 \leq \pi$. Curvas de nível no \mathbb{R}^2 são obtidas para $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = 0$ e $\theta_3 = \pi/2$ que são respectivamente

$$\overline{B}'(x_1, x_2) : \begin{cases} y'_1 = (a + r\cos\theta_3)^3 - 3(a + r\cos\theta_3)[(b + r\sin\theta_3)^2 + c^2 + d^2] \\ y'_2 = [3(a + r\cos\theta_3)^2 - (b + r\sin\theta_3)^2 - c^2 - d^2](b + r\sin\theta_3), \\ 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi, \end{cases} \quad (8.33)$$

$$\overline{B}'(x_1, x_3) : \begin{cases} y'_1 = (a + r\cos\theta_2)^3 - 3(a + r\cos\theta_2)[b^2 + (c + r\sin\theta_2)^2 + d^2] \\ y'_3 = [3(a + r\cos\theta_2)^2 - b^2 - (c + r\sin\theta_2)^2 - d^2](c + r\sin\theta_2), \\ 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi, \end{cases} \quad (8.34)$$

e

$$\overline{B}'(x_2, x_3) : \begin{cases} y'_2 = [3a^2 - (b + r \operatorname{sen}\theta_2)^2 - (c + r \operatorname{sen}\theta_2)^2 - d^2](b + r \operatorname{cos}\theta_2) \\ y'_3 = [3a^2 - (b + r \operatorname{cos}\theta_2)^2 - (c + r \operatorname{sen}\theta_2)^2 - d^2](c + r \operatorname{sen}\theta_2), \\ 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi, \end{cases} \quad (8.35)$$

Alguns desses cortes foram listados na secção (8.4) para $x = (a, b, c, d)$ e raio r indicados.

As projeções escolhidas foram as que mais nos chamaram a atenção e acreditamos ser o suficiente para dar um parâmetro dessas hipersuperfícies. Com esse roteiro podemos obter muitas outras situações. como por exemplo, se realizarmos cortes em ângulos diferentes dos citados.

8.4 Ilustrações

Os cortes apresentados a seguir foram os mais interessantes pelo seu formato. Foram selecionados aleatoriamente para valores do centro da hiperesfera $x = (a, b, c, d)$ e raio r indicados em cada figura, assim como as letras m e h para cortes meridionais e hemisféricos respectivamente.

Acreditamos na suficiência desses exemplos.

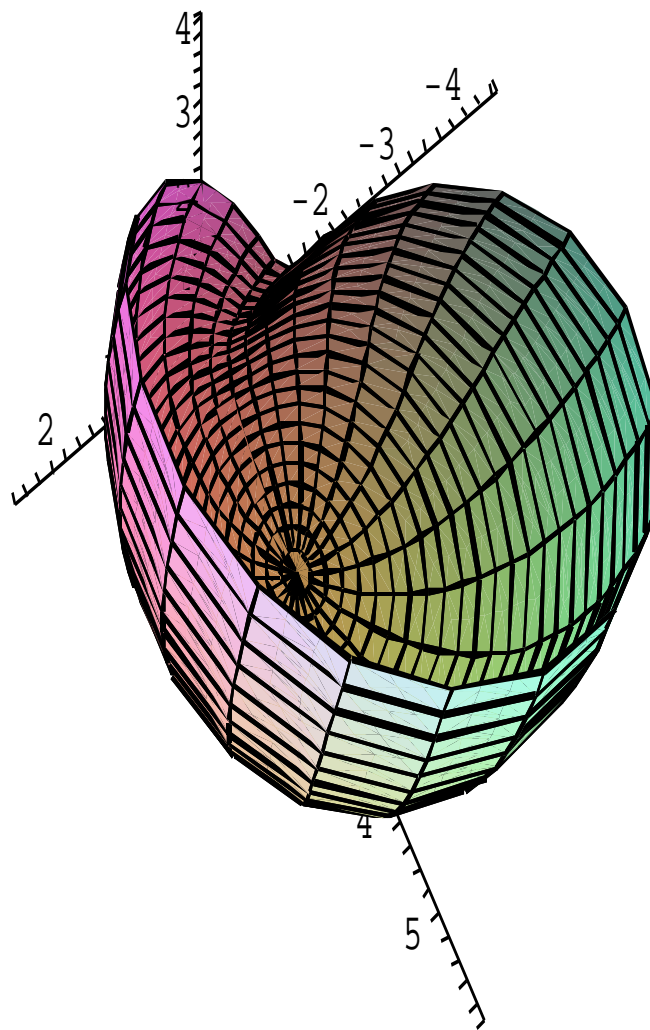


Figura 8.1: $B^h(x_1, x_2, x_3)$, $x = (1, 1, 1, 0)$, $r=1$ e $f(z) = z^2$

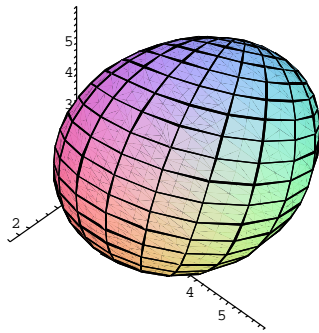


Figura 8.2: $B'(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, 1, 1, 0)$, $r=1$ e $f(z) = z^2$

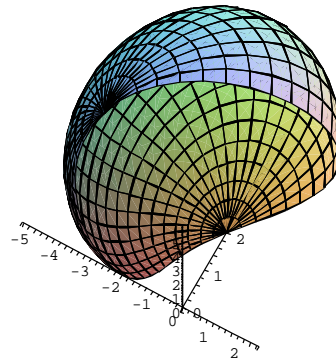


Figura 8.3: $B^m(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, 1, 1, 0)$, $r=1$ e $f(z) = z^2$

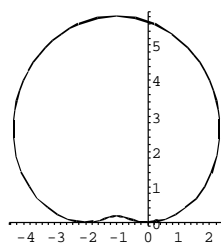


Figura 8.4: $B'(x_1, x_2)$, $x = (1, 1, 1, 0)$, $r=1$ e $f(z) = z^2$

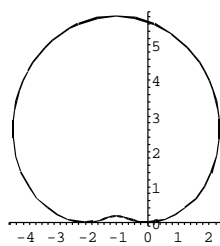


Figura 8.5: $B'(x_1, x_3)$, $x = (1, 1, 1, 0)$, $r=1$ e $f(z) = z^2$

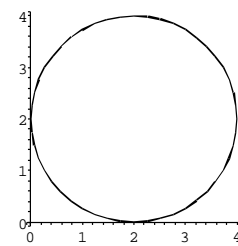


Figura 8.6: $B'(x_2, x_3)$, $x = (1, 1, 1, 0)$, $r=1$ e $f(z) = z^2$

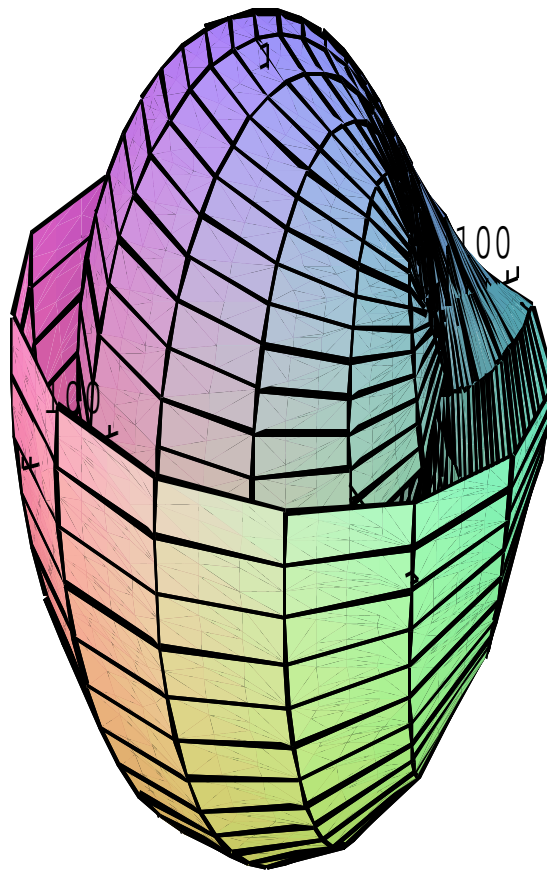


Figura 8.7: $B^h(x_1, x_2, x_3)$, $x = (1, 1, 1, 0)$, $r=10$ e $f(z) = z^2$

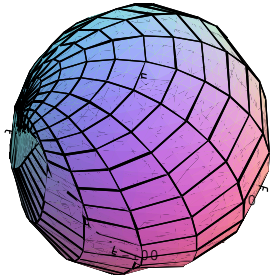


Figura 8.8: $B'(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, 1, 1, 0)$, $r=10$ e $f(z) = z^2$

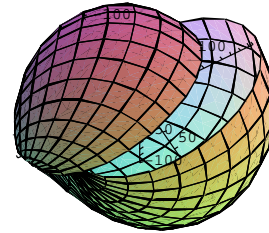


Figura 8.9: $B^m(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, 1, 1, 0)$, $r=10$ e $f(z) = z^2$

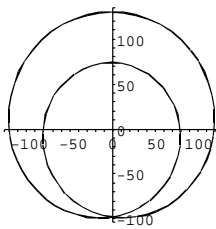


Figura 8.10: $B'(x_1, x_2)$, $x = (1, 1, 1, 0)$, $r=10$ e $f(z) = z^2$

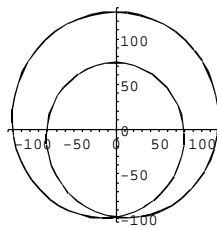


Figura 8.11: $B'(x_1, x_3)$, $x = (1, 1, 1, 0)$, $r=10$ e $f(z) = z^2$

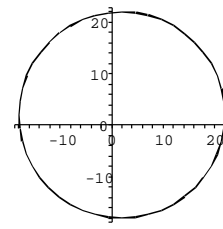


Figura 8.12: $B'(x_2, x_3)$, $x = (1, 1, 1, 0)$, $r=10$ e $f(z) = z^2$

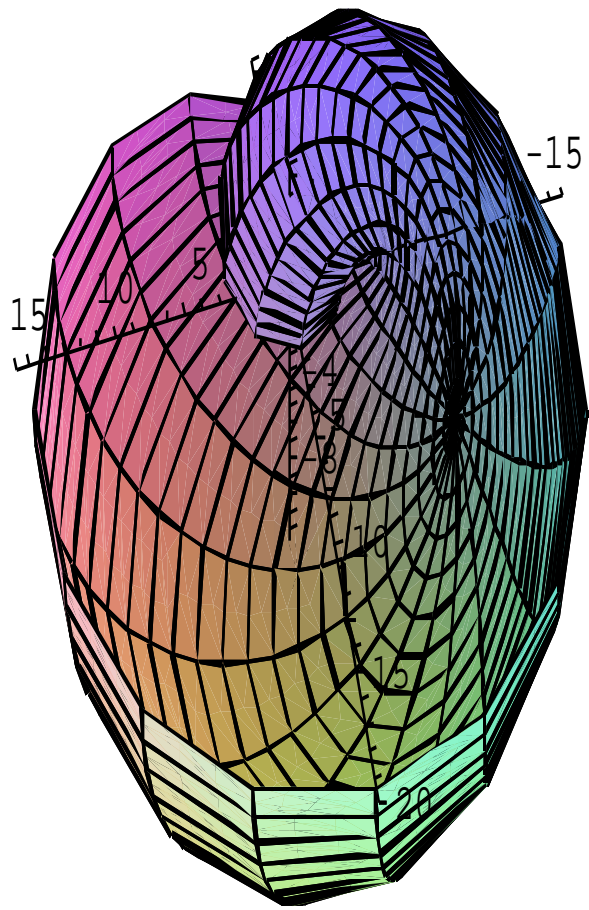


Figura 8.13: $B^h(x_1, x_2, x_3)$, $x = (1, 1, 0, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

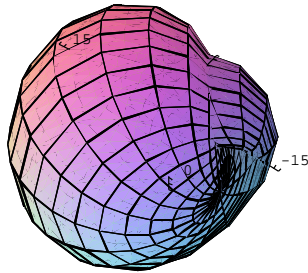


Figura 8.14: $B'(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, 1, 0, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

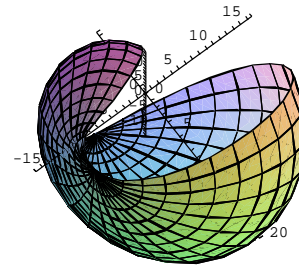


Figura 8.15: $B^m(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, 1, 0, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

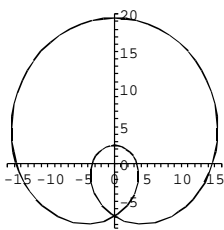


Figura 8.16: $B'(x_1, x_2)$, $x = (1, 1, 0, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

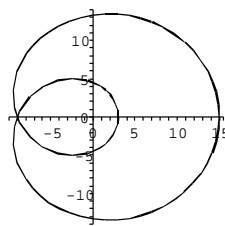


Figura 8.17: $B'(x_1, x_3)$, $x = (1, 1, 0, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

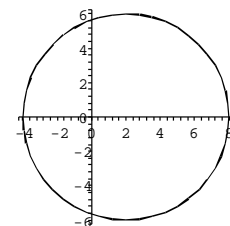


Figura 8.18: $B'(x_2, x_3)$, $x = (1, 1, 0, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

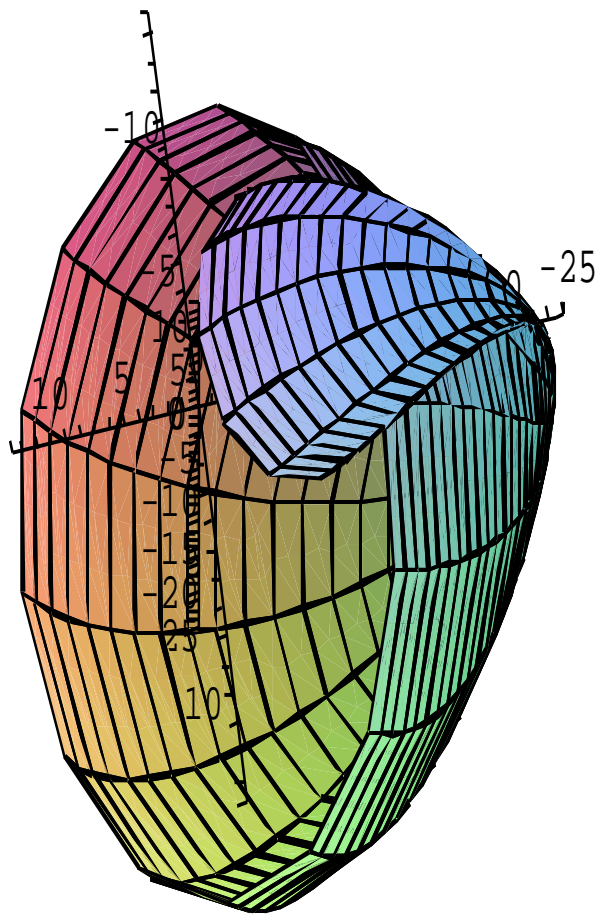


Figura 8.19: $B'h(x_1, x_2, x_3)$, $x = (1, 0, -2, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

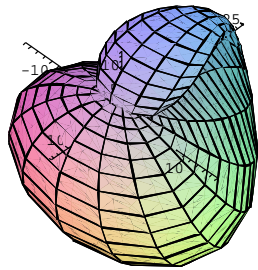


Figura 8.20: $B'(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, 0, -2, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

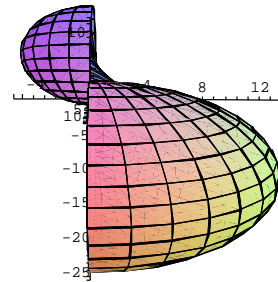


Figura 8.21: $B'm(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, 0, -2, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

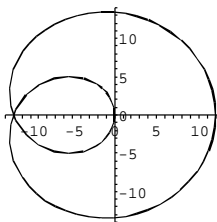


Figura 8.22: $B'(x_1, x_2)$, $x = (1, 0, -2, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

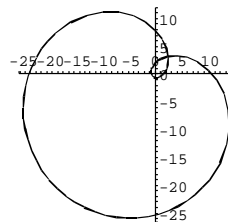


Figura 8.23: $B'(x_1, x_3)$, $x = (1, 0, -2, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

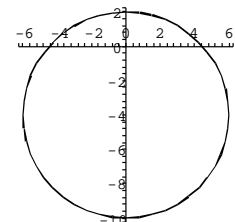


Figura 8.24: $B'(x_2, x_3)$, $x = (1, 0, -2, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

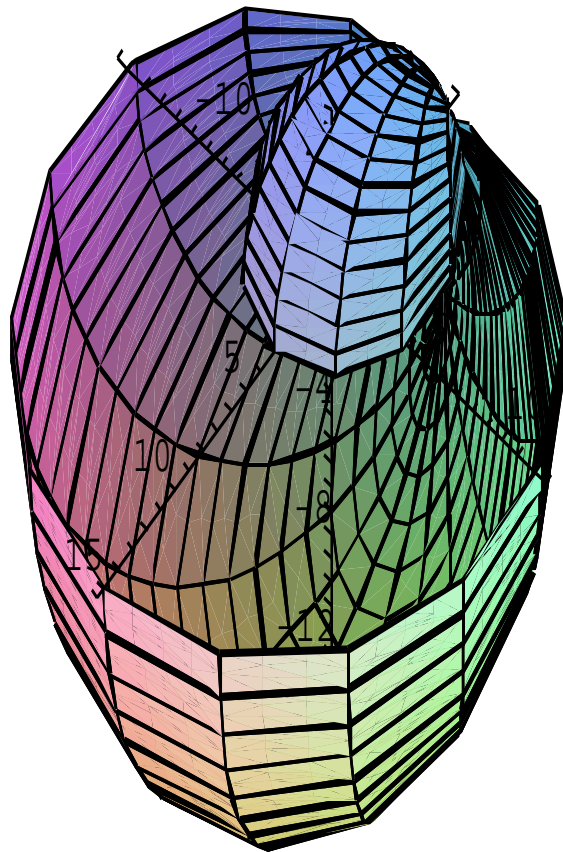


Figura 8.25: $B^1h(x_1, x_2, x_3)$, $x = (1, 0, 0, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

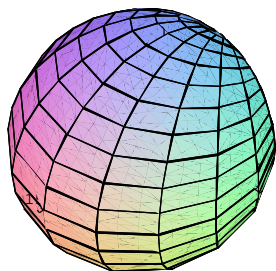


Figura 8.26: $B'(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, 0, 0, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

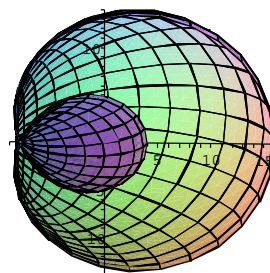


Figura 8.27: $B^m(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, 0, 0, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

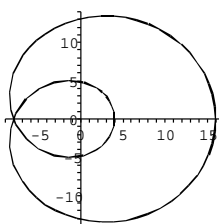


Figura 8.28: $B'(x_1, x_2)$, $x = (1, 0, 0, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

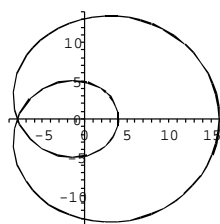


Figura 8.29: $B'(x_1, x_3)$, $x = (1, 0, 0, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

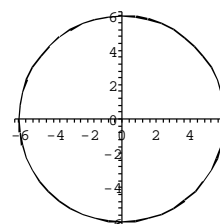


Figura 8.30: $B'(x_2, x_3)$, $x = (1, 0, 0, 0)$, $r=3$ e $f(z) = z^2$

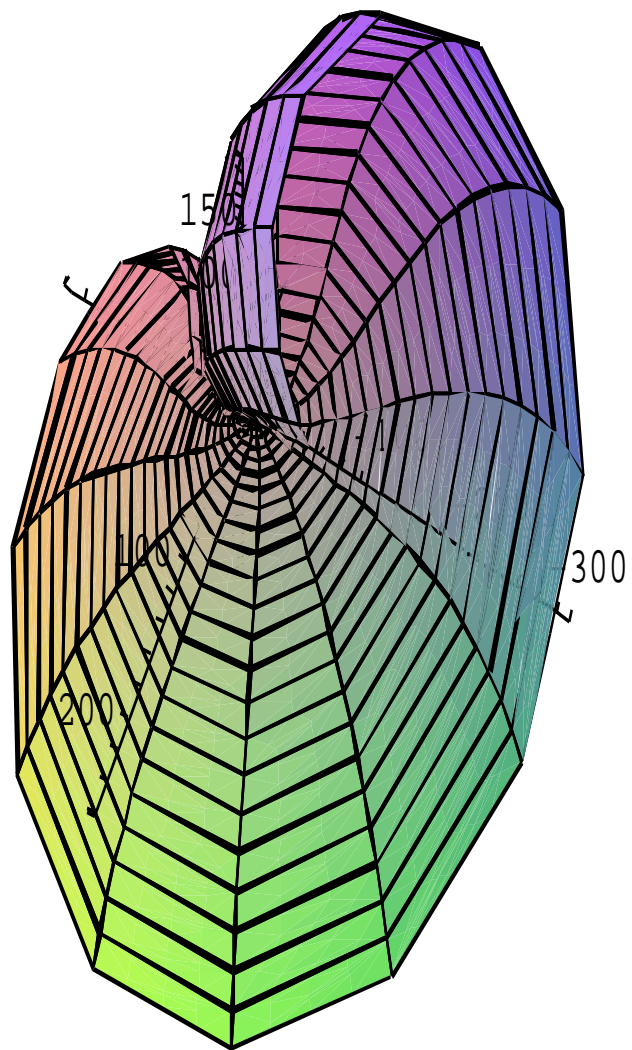


Figura 8.31: $B'h(x_1, x_2, x_3)$, $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=4$ e $f(z) = z^2$

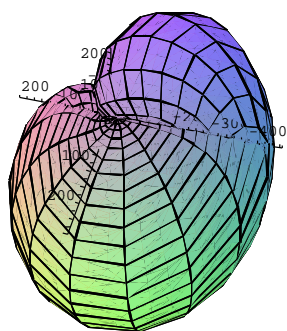


Figura 8.32: $B'(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=4$ e $f(z) = z^2$

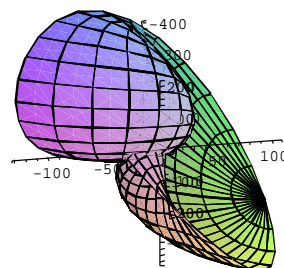


Figura 8.33: $B'm(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=4$ e $f(z) = z^2$

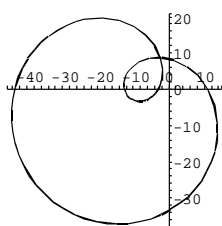


Figura 8.34: $B'(x_1, x_2)$, $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=4$ e $f(z) = z^2$

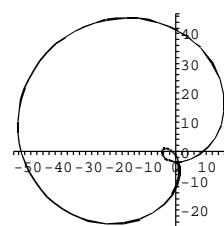


Figura 8.35: $B'(x_1, x_3)$, $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=4$ e $f(z) = z^2$

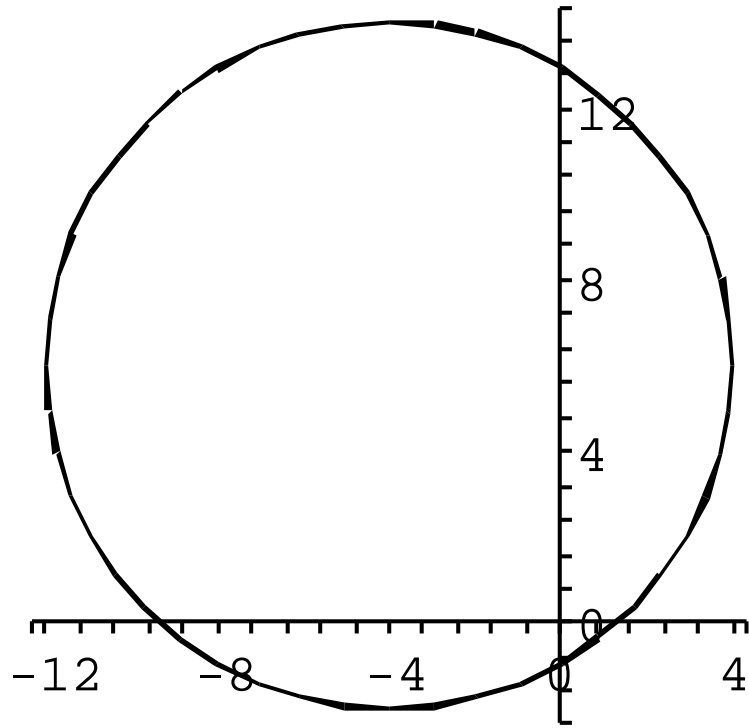


Figura 8.36: $B'(x_2, x_3)$, $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=4$ e $f(z) = z^2$

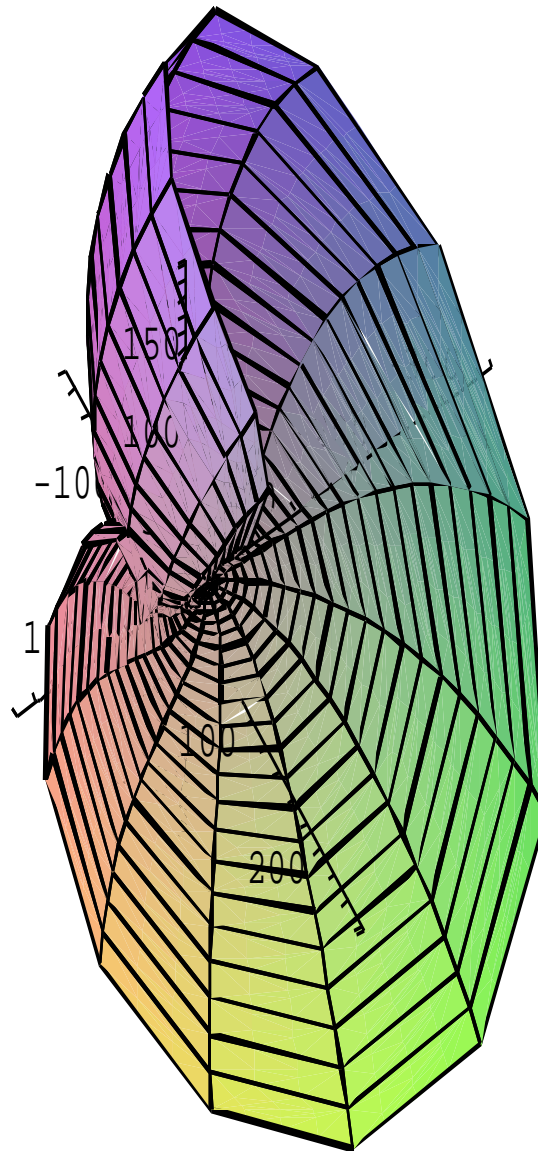


Figura 8.37: $B'h(x_1, x_2, x_3)$, $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=4$ e $f(z) = z^3$

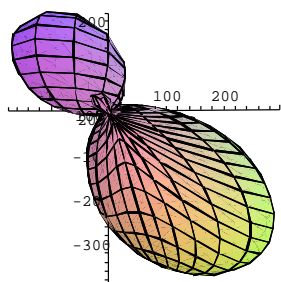


Figura 8.38: $B'(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=4$ e $f(z) = z^3$

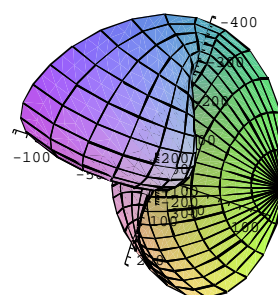


Figura 8.39: $B^m(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=4$ e $f(z) = z^3$

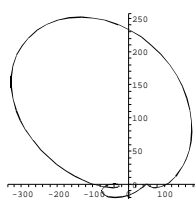


Figura 8.40: $B'(x_1, x_2)$, $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=4$ e $f(z) = z^3$

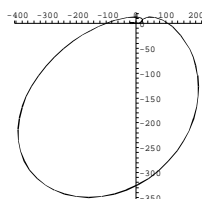


Figura 8.41: $B'(x_1, x_3)$, $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=4$ e $f(z) = z^3$

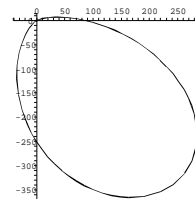


Figura 8.42: $B'(x_2, x_3)$, $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=4$ e $f(z) = z^3$

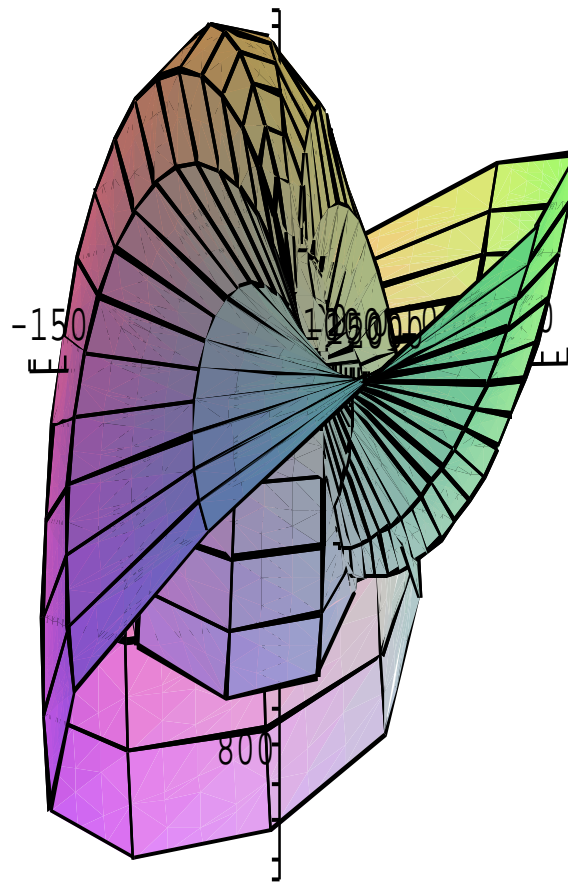


Figura 8.43: $B^h(x_1, x_2, x_3)$, $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=10$ e $f(z) = z^3$

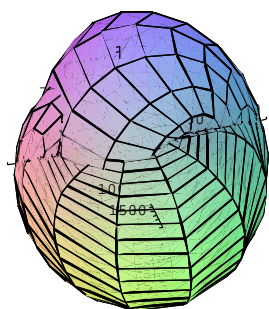


Figura 8.44: $B'(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=10$ e $f(z) = z^3$

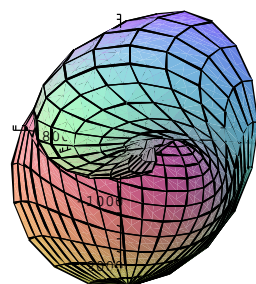


Figura 8.45: $B^m(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=10$ e $f(z) = z^3$

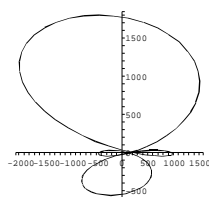


Figura 8.46: $B'(x_1, x_2)$, $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=10$ e $f(z) = z^3$

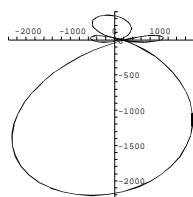


Figura 8.47: $B'(x_1, x_3)$, $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=10$ e $f(z) = z^3$

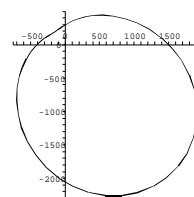


Figura 8.48: $B'(x_2, x_3)$, $x = (1, -2, 3, 0)$, $r=10$ e $f(z) = z^3$

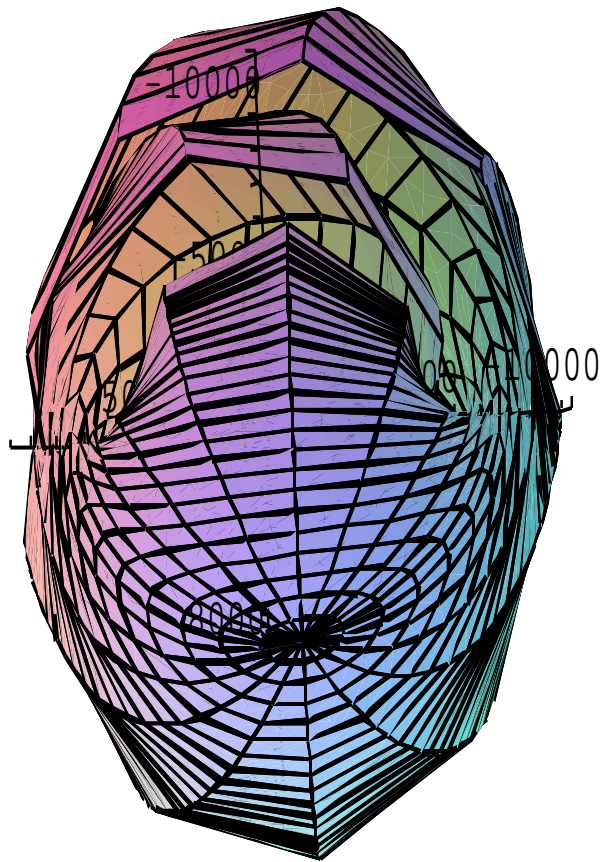


Figura 8.49: $B^h(x_1, x_2, x_3)$, $x = (1, -2, 0, 0)$, $r=20$ e $f(z) = z^3$

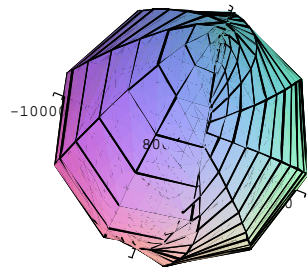


Figura 8.50: $B'(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, -2, 0, 0)$, $r=20$ e $f(z) = z^3$

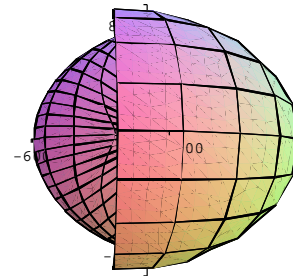


Figura 8.51: $B'm(x_1, x_2, x_3)$, quando $x = (1, -2, 0, 0)$, $r=20$ e $f(z) = z^3$

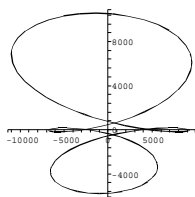


Figura 8.52: $B'(x_1, x_2)$, $x = (1, -2, 0, 0)$, $r=20$ e $f(z) = z^3$

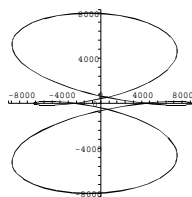


Figura 8.53: $B'(x_1, x_3)$, $x = (1, -2, 0, 0)$, $r=20$ e $f(z) = z^3$

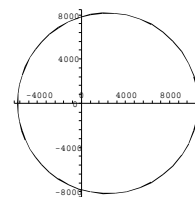


Figura 8.54: $B'(x_2, x_3)$, $x = (1, -2, 0, 0)$, $r=20$ e $f(z) = z^3$

Conclusão

Com o objetivo inicial, meramente numérico, de obter dilatações lineares K de bolas $\overline{B}(x, r)$ para números x hipercomplexos, tivemos a necessidade de traçar paralelos com os números complexos, para comparação e a compreensão do comportamento do mapeamento de funções aplicadas aos números hipercomplexos.

Não se teve aqui a felicidade de obter uma notação simplificada para x , como a $z = e^{i\theta}$ obtida por Gauss, muito provavelmente por termos mais de um ângulo envolvido, então usamos para escrever x^n os binomiais. Aliás, a exploração de desenvolvimentos binomiais enriqueceu esse trabalho.

Conseguido no capítulo 3 a expressão característica de $|f(y) - f(x)|$, um salto muito grande foi dado, pois a partir desse aspecto, precisaríamos apenas de testes numéricos, visto que a K -quaseconformidade procurada dependia apenas de um dos coeficientes dessa expressão.

A partir de uma possibilidade não pensada até então, a K -quaseconformidade dependia da posição do centro da bola x , em $\overline{B}(x, r)$. Então, pelo paralelo traçado com os complexos, notamos que as deformações eram a eles similares, apesar de estarmos em dimensões maiores.

Entendemos que, em linguagem figurativa, se a potenciação nos complexos provocavam uma dilatação e um giro, isso também deveria acontecer nos hipercomplexos, obviamente na direção de um novo argumento, onde o expoente n seria um fator de alteração de θ_1 , θ_2 e θ_3 .

Temos então, apenas dois casos a considerar. Se o centro da bola x coincide com a origem do sistema de coordenadas, então o mapeamento é simplesmente uma hiperesfera dilatada em r^n , enquanto que se não coincidir, obviamente os elementos mais distantes desta (a origem) sofrerão transformações

maiores que os mais próximos, podendo até acontecer involuções, dependendo do raio considerado. Esse comportamento pode ser verificado também nos complexos, em que, no texto, usamos o termo "cardióide degenerado" para explicarmos o formato do mapeamento. Esse argumento condiz também com os valores obtidos por K , já que é obtido por um quociente em que o denominador pode tender a zero, fazendo K tender ao infinito.

E, finalmente, no capítulo 8 pudemos verificar visualmente no \mathbb{R}^3 o comportamento dessas funções e acreditamos ter cumprido o nosso propósito.

Problemas como analiticidade, diferenciação, integração e até mesmo uma notação mais simplificada para estes números não foram pensadas aqui, fatos considerados suficientes para que esse material tenha uma continuação.

Referências Bibliográficas

- [1] CALIXTO, A.P. ; *Operador quaterniônico de Klein-Gordon-Dirac*, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, UNESP(IBILCE), São José do Rio Preto, 2002.
- [2] LEAL, JANILSON MODESTO; *Mapeamentos Conformes em Funções Hipercomplexas*, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, UNESP(IBILCE), São José do Rio Preto, 2003.
- [3] CARVALHO, TÂNIA MARIA MACHADO DE.; *Análise das propriedades de funções que satisfazem as relações generalizadas de Cauchy-Riemann*, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, UNESP(IBILCE), São José do Rio Preto, 2003.
- [4] GODOY JUNIO, ANTENOR DE; *Relações de conformidade e Fatorização em Quatérnios*, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, UNESP(IBILCE), São José do Rio Preto, 2003.
- [5] DEAVOURS, C.A; *The Quaternion Calculus*, Amer.math.monthly 80(1983), 995-1008.
- [6] RICKMAN, SEPPO; *Quasiconformal Mappings*, Annales Ac. Scientiarum Fennicae, Séries A. I. Math., Volumen 13, (1988), 371-385.

- [7] MACHADO, J.M.; BORGES, M.F; *New Remarks on the differentiability of hipercomplex functions*, International Journal of Applied Mathematics, 8:(1)85-101(2002).
- [8] SPIEGEL, MURRAY RALPH; : *Variáveis Complexas*. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil; 1973 (Coleção Schaum).
- [9] BIEBERBACH, L. : *Conformal mapping*. Chelsea Publishing Company. New York. 1953.
- [10] TEICHMÜLLER, O. : *Extremale quasiconforme Abbildungen and quadratische Differentiale* .-Abh.Preuss. Akad. Wiss. 22, 1940, 1-197.