

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**ARGUMENTOS DE GORDON NO ESTUDO ESPECTRAL DE
OPERADORES DE SCHRÖDINGER UNIDIMENSIONAIS**

Vanderléa Rodrigues Bazão

Orientador: Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado

Co-orientador: Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

Presidente Prudente, fevereiro de 2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**ARGUMENTOS DE GORDON NO ESTUDO ESPECTRAL DE
OPERADORES DE SCHRÖDINGER UNIDIMENSIONAIS**

Vanderléa Rodrigues Bazão

Orientador: Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado

Co-orientador: Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

*Dissertação apresentada ao PósMAC da
Faculdade de Ciências e Tecnologia da
UNESP como parte dos requisitos para a
obtenção do título de mestre em Matemá-
tica Aplicada e Computacional.*

Presidente Prudente, fevereiro de 2012

B348a Bazão, Vanderléa Rodrigues.
Argumentos de Gordon no estudo espectral de operadores de Schrödinger unidimensionais / Vanderléa Rodrigues Bazão. - Presidente Prudente : [s.n], 2012
00 f.

Orientador: Roberto de Almeida Prado
Coorientador: Suetônio de Almeida Meira
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Operadores de Schrödinger. 2. Teoria Espectral de Operadores. 3. Argumentos de Gordon. 4. Matemática. I. Prado, Roberto de Almeida. II. Meira, Suetônio de Almeida. III. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. IV. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação – Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação - UNESP, Câmpus de Presidente Prudente.

BANCA EXAMINADORA

Roberto de Almeida Prado

Prof. Dr. ROBERTO DE ALMEIDA PRADO
ORIENTADOR

Cesar Rogério de Oliveira

Prof. Dr. CESAR ROGERIO DE OLIVEIRA
UFSCar

José Roberto Nogueira

Prof. Dr. JOSÉ ROBERTO NOGUEIRA
FCT/UNESP

Vanderlea Rodrigues Bazão

VANDERLEA RODRIGUES BAZÃO

PRESIDENTE PRUDENTE (SP), 28 DE FEVEREIRO DE 2012.

RESULTADO: *aprovada*

Aos meus pais Milton e Janete, dedico!

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a DEUS por iluminar minha vida, guiar meus passos em minhas escolhas e me abençoar com saúde e sabedoria para realizar este trabalho.

Aos meus pais Milton e Janete que são meu alicerce, pelo amor e dedicação em todos os momentos, sem os quais este sonho não seria possível.

Ao meu amor Gilson pelo carinho, compreensão e por estar sempre ao meu lado em pensamentos, sonhos e ideais.

Ao Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado pela orientação, dedicação e paciência que sempre teve comigo, pelo apoio e incentivo no desenvolvimento deste trabalho e na continuação de minha carreira acadêmica.

Ao Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira que além de co-orientar este trabalho me orientou desde os anos iniciais da graduação, agradeço pela confiança que teve em meu trabalho, pelos valiosos ensinamentos transmitidos, companherismo e amizade, pois sem esse apoio e incentivo tenho certeza que meu caminhar acadêmico seria menos fecundo.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional e do Departamento de Matemática em especial ao Prof. Dr. José Roberto Nogueira, pelos conhecimentos transmitidos.

Aos sete companheiros que junto a mim acreditaram e formaram a primeira turma de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da FCT-UNESP : Diego (um amigo nos momentos difíceis e alegres nesses dois anos de disciplinas e pesquisa), Marluce, Marluci, Marilaine, Marcelo, Claudio e Danilo (*in memoriam*) e aos amigos da segunda turma Larissa, Camila, Clóvis, Merejoli, Verri, Pedro, Patrícia e de um modo especial à Cristiane e Tatiane pela amizade e excelente companhia no período final de meu trabalho. Aos preciosos amigos Flávio, Thaís e Alex que apesar da distância física estiveram sempre presentes em minha vida acadêmica e também ao amigo Renan por sempre me ajudar quando precisei. Enfim, à todos que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação, em especial à Erynat pelo auxílio prestado no decorrer deste curso de mestrado.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP pelo apoio financeiro.

*“ Não serei o poeta de um mundo caduco.
Também não cantarei o mundo futuro.
Estou preso à vida e olho meus companheiros.
Estão taciturnos mas nutrem grandes esperanças.
Entre eles, considero a enorme realidade.
O presente é tão grande, não nos afastemos.
Não nos afastemos muito, vamos de mãos dadas...”*

Carlos Drummond de Andrade

Conteúdo

Resumo	viii
Abstract	ix
1 Introdução	1
2 Operadores de Schrödinger 1D	6
2.1 Família Ergódica	7
2.2 Substituições Primitivas e Rotações na S^1	12
2.3 Aplicação Traço	15
3 Argumentos de Gordon	20
3.1 Versões Discretas	20
3.2 Versão Contínua	27
4 Aplicações	34
4.1 Ausência de Espectro Pontual	35
4.1.1 Resultados Genéricos	36
4.1.2 Resultados q.t.p.	37
4.1.3 Resultados Uniformes	39
4.2 Espectro com medida de Lebesgue zero	50
4.3 Modelo Almost-Mathieu	52
4.4 Potenciais de Gordon Generalizados	54
5 Considerações Finais	58

Resumo

Neste trabalho fizemos um levantamento das diferentes versões discretas e contínuas dos argumentos de Gordon, utilizados no estudo espectral de operadores de Schrödinger unidimensionais. Estudamos como aproximações periódicas do potencial (caso contínuo) e ocorrências de estruturas repetitivas do potencial (caso discreto) permitem excluir o espectro pontual de tais operadores. No caso discreto, as aplicações dos argumentos de Gordon fornecem resultados genéricos, q.t.p. (quase toda parte) e uniformes sobre a ausência de espectro pontual para modelos de Schrödinger com potenciais gerados por substituições primitivas e rotações na circunferência. Parte dos resultados obtidos na demonstração desses argumentos podem ser usados para mostrar que o espectro dos operadores tem medida de Lebesgue zero. Conseqüentemente, com a ocorrência simultânea das propriedades “ausência de espectro pontual” e “espectro com medida zero”, obtemos operadores de Schrödinger com espectro puramente singular contínuo. No caso contínuo, as aplicações incluem operadores de Schrödinger gerados por potenciais de Gordon com frequências de Liouville, funções Hölder contínuas, funções escada e funções com singularidades locais.

Abstract

In this work review different versions of discrete and continuous Gordon's arguments, used in the spectral study of one-dimensional Schrödinger operators. We study periodic approximations of the potential (continuous case) and occurrences of repetitive structures of the potential (discrete case) that allow us to exclude the point spectrum of such operators. In the discrete case, the applications of Gordon's arguments supply generic results, almost sure and uniform on the absence of point spectrum for Schrödinger models with potentials generated by primitive substitutions and circle maps. Part of the results obtained in the demonstration of these arguments can be used to show that the spectrum of the operators has zero Lebesgue measure. Consequently, with the properties "absence of point spectrum" and "spectrum with zero measure", we obtain Schrödinger operators with purely singular continuous spectrum. In the continuous case, the applications include Schrödinger operators generated by Gordon potentials with Liouville frequencies, Hölder continuous functions, step functions and functions with power-type singularities.

Introdução

A teoria espectral de operadores de Schrödinger tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores, por se tratar de um assunto importante e relevante para a área de Física-Matemática. Dentro dessa teoria destacam-se os chamados “argumentos de Gordon”, que são ferramentas essenciais no estudo espectral de operadores de Schrödinger. Esses argumentos são usados para excluir o espectro pontual de tais operadores e, atualmente, existem algumas versões discretas e contínuas para operadores de Schrödinger unidimensionais.

Neste trabalho fizemos um levantamento dessas diferentes versões dos argumentos de Gordon existentes, e suas aplicações, para os operadores de Schrödinger

$$H = -\Delta + V \tag{1.1}$$

atuando sobre $l^2(\mathbb{Z})$ ou $L^2(\mathbb{R})$. No caso discreto, o Laplaciano Δ é o operador diferença finita $(\Delta\psi)(n) = -\psi(n+1) - \psi(n-1)$ e V é um potencial limitado, no caso contínuo $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ e V é um potencial real que pode não ser limitado.

Nos últimos anos o estudo de operadores H do tipo (1.1), com potenciais quase-periódicos, tem atraído grande interesse de pesquisadores, pois estes representam modelos físicos de estruturas quase-cristalinas unidimensionais. Além disso, esses potenciais quase-periódicos pertencem a uma classe intermediária que fica entre os potenciais V_p periódicos (que induzem espectro absolutamente contínuo para H (ver [6])) e os potenciais V_a aleatórios (que induzem espectro pontual para H (ver [5, 6])).

Matematicamente, o espectro do operador H , denotado por $\sigma(H)$, é definido como o complementar do conjunto resolvente

$$\rho(H) = \{E \in \mathbb{C} : (H - EI)^{-1} \text{ é um operador linear limitado}\}.$$

Os valores de E para os quais a solução de $H\psi = E\psi$ pertence ao espaço de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$ ou $L^2(\mathbb{R})$, são os autovalores de H , e o fecho do conjunto de autovalores é chamado espectro pontual de H , denotado por $\sigma_p(H)$. O restante do espectro é o espectro contínuo, denotado por $\sigma_c(H)$, que pode ser decomposto em espectro absolutamente contínuo $\sigma_{ac}(H)$ e espectro singular contínuo $\sigma_{sc}(H)$, de acordo com a decomposição de Lebesgue da parte contínua da medida espectral de H (veja [21]). Algo interessante é que na Física os níveis energéticos de um átomo ou de uma molécula são chamados de espectro, e estes podem ser teoricamente obtidos pelo espectro de certos operadores diferenciais (Schrödinger ou Dirac).

Nesta dissertação descrevemos algumas versões discretas e uma versão contínua dos argumentos de Gordon, juntamente com as aplicações para os operadores de Schrödinger do tipo (1.1) com potenciais quase-periódicos, tais como potenciais gerados por substituições primitivas, por rotações na circunferência \mathbb{S}^1 [10], o modelo Almost-Mathieu [7] (para o caso discreto) e potenciais de Gordon generalizados com frequências de Liouville [18] (para o caso contínuo).

Definição 1.1. *Um potencial limitado V sobre \mathbb{Z} ou \mathbb{R} é chamado potencial de Gordon se existem potenciais periódicos V^m , de período $T_m \rightarrow \infty$, tais que para todo $m \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{|x| \leq 2T_m} |V(x) - V^m(x)| \leq Cm^{-T_m}$$

sendo C uma constante apropriada.

Temos o resultado original de Gordon para operadores de Schrödinger, o qual foi mostrado em [23] (ver também [42]) que se V é um potencial de Gordon, então o correspondente operador H não tem autovalores.

Para operadores de Schrödinger discretos do tipo (1.1), certas variações do resultado original de Gordon foram estabelecidas por Delyon e Petritis [19] e por Sütö [45]. Eles obtiveram dois métodos para excluir autovalores do espectro de H , um deles com repetição de dois blocos do potencial, juntamente com a limitação do traço das matrizes de transferência, e outro com repetição de três blocos do potencial. Esses métodos estão descritos nos teoremas a seguir.

Seja $M_E(n) = M_{E,\omega}(n)$ ($\omega \in \Omega$ fixo e $E \in \mathbb{C}$) a matriz de transferência associada ao operador H (definida na seção 2.1).

Teorema 1.2. (*Argumento de Gordon 2-blocos*) *Suponha que existam uma sequência de valores positivos $n_k \rightarrow \infty$ e uma constante $1 \leq C < \infty$, tais que para todo k , tem-se*

1. $V(j) = V(j + n_k)$, $1 \leq j \leq n_k$;

2. $|\text{tr}(M_E(n_k))| \leq C$.

Então E não é um autovalor de H e nenhuma solução da equação $H\psi = E\psi$ tende a zero em $+\infty$.

Teorema 1.3. (*Argumento de Gordon 3-blocos*) *Suponha que exista uma sequência $n_k \rightarrow \infty$, tal que para todo k , tem-se*

$$V(j - n_k) = V(j) = V(j + n_k), \quad 1 \leq j \leq n_k.$$

Então E não é um autovalor de H e nenhuma solução da equação $H\psi = E\psi$ tende a zero em $\pm\infty$.

Usando os argumentos de Gordon descritos nos Teoremas 1.2 e 1.3, juntamente com outros argumentos específicos, estudamos (seção 4.1) a ausência de espectro pontual para modelos de Schrödinger gerados por rotações na circunferência e por substituições primitivas. Os resultados sobre a ausência de espectro pontual para esses modelos são obtidos sob três pontos de vista diferentes, em ordem crescente de generalidade, tais como genéricos (argumentos topológicos), q.t.p (argumentos de medida) e uniformes (argumentos combinatórios).

Aplicação 1.1: *Como uma aplicação para os argumentos de Gordon 2-blocos ou 3-blocos consideramos a família de operadores $(H_{\lambda,\alpha,\omega})$ do tipo (1.1), discretos, com potenciais Sturmianos da forma*

$$V_{\lambda,\alpha,\omega}(n) = \lambda \chi_{[1-\alpha,1)}(n\alpha + \omega \pmod{1}) \tag{1.2}$$

em que $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1)$ é um número de rotação irracional, $\omega \in \Omega = \mathbb{S}^1$ e χ denota a função característica. Assim, os operadores $(H_{\lambda,\alpha,\omega})$ possuem espectro pontual vazio, para todo $\omega \in \Omega$ e para todo λ , ou seja, temos um resultado uniforme para esse modelo.

A família de operadores $(H_{\lambda,\alpha,\omega})$ é usada como modelos de quase-cristais unidimensionais. Esta fornece uma generalização natural da família Fibonacci de operadores, que

corresponde ao número de rotação $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, chamado razão áurea. Na seção 4.1 vamos fazer um estudo mais detalhado desse modelo com potenciais Sturmianos.

No caso desses modelos Sturmianos ou modelos gerados por substituições primitivas, os traços das matrizes de transferência (argumento de Gordon 2-blocos) podem ser investigados estudando o sistema dinâmico chamado “aplicação traço” (veja seção 2.3).

Além disso, para esses modelos analisamos como a propriedade “espectro com medida de Lebesgue zero” pode ser obtida, usando parte dos resultados estabelecidos na demonstração do argumento de Gordon 2-blocos (Teorema 1.2). Neste sentido, a propriedade espectral “medida de Lebesgue zero” pode ser vista com uma consequência da demonstração da ausência de autovalores. Quando as propriedades “ausência de espectro pontual” e “espectro com medida de Lebesgue zero” são obtidas simultaneamente, para um modelo de Schrödinger, resulta que o espectro deste operador é puramente singular contínuo. Os modelos Sturmianos são exemplos de operadores de Schrödinger onde ocorrem essas propriedades espectrais.

A versão do argumento de Gordon para o caso discreto que foi reproduzida em [7] e aplicada ao operador de Schrödinger Almost-Mathieu, também permite concluir que este modelo possui espectro singular contínuo puro, para certas realizações do potencial.

No caso contínuo, Damanik e Stolz [18] desenvolveram uma versão contínua mais geral do argumento de Gordon, para potenciais de Gordon generalizados (que inclui os potenciais de Gordon originais). Eles mostraram que:

Teorema 1.4. *Suponha que V é um potencial de Gordon generalizado. Então, o correspondente operador de Schrödinger H possui espectro pontual vazio.*

As aplicações desse resultado são para potenciais quase-periódicos com frequências de Liouville. Como um modelo deste temos os potenciais gerados por funções Hölder contínuas, sendo que na seção 4.4 demonstramos o resultado abaixo:

Aplicação 1.2: *Seja H o operador definido por (1.1) sobre $L^2(\mathbb{R})$, com potenciais do tipo*

$$V(x) = V_1(x) + V_2(\alpha x + \theta),$$

em que V_1 é localmente integrável e possui período 1, V_2 é uma função Hölder contínua e $\alpha, \theta \in [0, 1)$, sendo α um número de Liouville. Então, o espectro pontual de H é vazio.

No segundo capítulo estudamos algumas propriedades básicas de uma família ergódica de operadores de Schrödinger discretos unidimensionais, gerada por modelos de substituições primitivas e por rotações na circunferência. No terceiro capítulo analisamos as

diferentes versões dos argumentos de Gordon para os casos discreto e contínuo, onde demonstramos os Teoremas 1.2, 1.3 e 1.4. No quarto capítulo estudamos as aplicações desses argumentos para operadores H do tipo (1.1), os quais permitem excluir o espectro pontual dos operadores em estudo.

Família Ergódica de Operadores de Schrödinger

No caso unidimensional os operadores de Schrödinger discretos, também denominados operadores *tight-binding*, com potenciais quase-periódicos assumindo um número finito de valores, tomam a forma

$$(H_\omega \psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V_\omega(n)\psi(n), \quad (2.1)$$

sendo $V_\omega \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ um potencial real, $\psi \in l^2(\mathbb{Z})$ e $\omega \in \Omega$ (*hull* de ω). Temos que H_ω é um operador auto-adjunto e limitado em $l^2(\mathbb{Z})$, e portanto seu espectro $\sigma(H_\omega)$ é um subconjunto compacto da reta.

Neste capítulo vamos realizar um estudo sobre a construção de uma família ergódica de operadores de Schrödinger (Definição 2.6), associados aos potenciais V_ω gerados por substituições primitivas ou rotações na circunferência \mathbb{S}^1 , que devido a teoria de Kotani ambas as famílias de operadores H_ω não possuem espectro absolutamente contínuo, ou seja, $\sigma(H_\omega) = \sigma_p(H_\omega) \cup \sigma_{sc}(H_\omega)$.

Como o principal objetivo do nosso trabalho é excluir o espectro pontual de H_ω , na última seção deste capítulo estudamos um sistema dinâmico chamado aplicação traço para os modelos de Schrödinger gerados por substituições primitivas e por potenciais Sturmianos. Entretanto, para não perdermos o foco principal de nosso trabalho, que é um levantamento de diferentes versões dos argumentos de Gordon, as demonstrações desses resultados serão omitidas, sendo que as referências onde é possível encontrar essas demonstrações estão indicadas no decorrer do texto.

2.1 Família Ergódica

Na primeira seção vamos apresentar definições e resultados básicos para uma família ergódica de operadores de Schrödinger, os quais são extremamente importantes para o desenvolvimento desse trabalho. Em particular, a teoria de Kotani é essencial nos resultados sobre a ausência de espectro absolutamente contínuo e na propriedade sobre o espectro com medida de Lebesgue nula, do operador em estudo.

Definição 2.1. *Sejam Ω um espaço métrico compacto e $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ um homeomorfismo.*

- i) O par (Ω, T) é chamado um sistema dinâmico topológico.*
- ii) Dado $\omega \in \Omega$, o conjunto $\mathcal{O}(\omega) = \{T^n\omega : n \in \mathbb{Z}\}$ é chamado a órbita de ω .*
- iii) Seja \mathcal{B} a σ -álgebra de Borel de Ω . Uma medida de probabilidade μ é chamada estacionária se $\mu(T(B)) = \mu(B)$, para cada $B \in \mathcal{B}$.*
- iv) Um conjunto de Borel B é chamado invariante se $T(B) = B$.*
- v) Uma medida estacionária é chamada ergódica se todo conjunto invariante tem medida 0 ou 1.*

Definição 2.2. *Dizemos que um sistema dinâmico topológico (Ω, T) é minimal se a órbita de todo $\omega \in \Omega$ é densa em Ω . Este é chamado unicamente ergódico se existe uma única medida ergódica, e dizemos que é estritamente ergódico se for minimal e unicamente ergódico.*

É um fato bem conhecido que se existe uma única medida estacionária, então a medida é necessariamente ergódica [47].

Exemplo 2.3. *Seja $\Omega = \mathbb{S}^1$ a circunferência unitária, o qual é um conjunto compacto e pode ser representado (identificado) pelo intervalo $[0, 1)$. Definimos a aplicação $T_\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ por*

$$T_\alpha\omega = \omega + \alpha \pmod{1}.$$

Para $\alpha \in (0, 1)$ irracional, temos que não existem órbitas periódicas e que a órbita de qualquer ponto é densa em \mathbb{S}^1 . Além disso, é bem conhecido que a medida de Lebesgue sobre \mathbb{S}^1 é uma medida unicamente estacionária, logo o sistema é unicamente ergódico. Como toda órbita é densa, temos que o sistema é minimal. Portanto, (Ω, T_α) é estritamente ergódico.

Definição 2.4. Seja $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_l\}$ um conjunto finito, chamado alfabeto. Dota-se \mathcal{A} com a topologia discreta.

- i) Os elementos a_i são chamados de símbolos ou letras.
- ii) Os elementos de $\mathcal{A}^* = \cup_{l \geq 1} \mathcal{A}^l$ são chamados de palavras, donde os conjuntos \mathcal{A}^l são formados por palavras que possuem l letras de \mathcal{A} .
- iii) Denotamos por $|v|$ o comprimento de uma palavra $v \in \mathcal{A}^*$, ou seja, $|v| = l$ se $v \in \mathcal{A}^l$.
- iv) Para $v, \omega \in \mathcal{A}^*$, $\#_v(\omega)$ denota o número de ocorrências de v em ω . (Por exemplo, $\#_{aa}(aabaaa) = 3$).

Definição 2.5. $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ denotam os conjuntos unilateral e bilateral de seqüências infinitas, chamadas palavras infinitas, sobre \mathcal{A} . Consideramos a topologia da convergência pontual dada pela métrica

$$d(\omega, v) = \sum_n \frac{D(\omega, v)}{2^{|n|}}, \quad \omega = (\omega_n), v = (v_n), \quad n \in \mathbb{N} \text{ ou } n \in \mathbb{Z},$$

sendo D a métrica discreta em \mathcal{A} . Logo, com essa métrica os espaços $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ são espaços métricos compactos.

Dada uma palavra ω finita ou infinita, se existem finitas ou infinitas palavras r, s tal que $\omega = rvs$, dizemos que a palavra finita v é chamada *subpalavra* ou *fator* de ω .

Definimos $F_\omega = \{y : y \text{ é um fator de } \omega\}$ e $F_\omega(n) = F_\omega \cap \mathcal{A}^n$, $n \in \mathbb{N}$. A função complexidade $p_\omega : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$, correspondente a ω , é dada por $p_\omega(n) = |F_\omega(n)|$, com $|\cdot|$ denotando a cardinalidade.

Definição 2.6. Dados um sistema dinâmico topológico (Ω, T) , uma medida ergódica μ e uma função mensurável $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, define-se para cada $\omega \in \Omega$ uma seqüência infinita bilateral $V_\omega : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ por $V_\omega(n) = g(T^n \omega)$. Esta seqüência gera o operador de Schrödinger discreto unidimensional H_ω sobre $l^2(\mathbb{Z})$, o qual atua sobre cada $\psi \in l^2(\mathbb{Z})$ por

$$(H_\omega \psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V_\omega(n) \psi(n). \quad (2.2)$$

A família $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$ é chamada uma família ergódica de operadores de Schrödinger.

Teorema 2.7. (Pastur, Kunz-Souillard) Seja $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$ uma família ergódica de operadores de Schrödinger. Então existem conjuntos $\Omega_0 \subseteq \Omega$, $\Sigma, \Sigma_p, \Sigma_{sc}, \Sigma_{ac} \subseteq \mathbb{R}$ tais que $\mu(\Omega_0) = 1$ e $\sigma(H_\omega) = \Sigma$, $\sigma_p(H_\omega) = \Sigma_p$, $\sigma_{sc}(H_\omega) = \Sigma_{sc}$, $\sigma_{ac}(H_\omega) = \Sigma_{ac}$, para cada $\omega \in \Omega_0$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [34, 38].

Definição 2.8. *Uma família ergódica de operadores de Schrödinger $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$ é chamada minimal se para cada par $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, a sequência V_{ω_1} é o limite pontual de transladados de V_{ω_2} .*

Observação: A minimalidade da família ergódica $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$ segue da minimalidade do sistema dinâmico (Ω, T) .

Teorema 2.9. *Seja $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$ uma família ergódica minimal de operadores de Schrödinger. Então, $\sigma(H_\omega) = \Sigma$ e $\sigma_{ac}(H_\omega) = \Sigma_{ac}$, para todo $\omega \in \Omega$.*

A demonstração de que o espectro independe de $\omega \in \Omega$ pode ser encontrada em [40]. Last e Simon [35] demonstraram que o espectro absolutamente contínuo é o mesmo para operadores com potenciais cujo hull associado é minimal. Consequentemente, dada uma família ergódica minimal, podemos escolher qualquer membro da família para estudarmos o espectro ou o espectro absolutamente contínuo, o que torna mais fácil o estudo espectral. Observamos que minimalidade da família ergódica não implica na constância de $\sigma_p(H_\omega)$ ou $\sigma_{sc}(H_\omega)$, como são explicitados em contra-exemplos [28].

Os resultados que serão descritos abaixo formam um núcleo da teoria sobre famílias ergódicas de operadores de Schrödinger 1D e fornecem uma base para mais resultados associados a diferentes tipos de potenciais.

Dada uma família ergódica $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$, considere a equação de autovalores

$$\psi(n+1) + \psi(n-1) + V_\omega(n)\psi(n) = E\psi(n), \quad (2.3)$$

onde $E \in \mathbb{C}$ e ψ é uma sequência bilateral.

Algumas das ferramentas mais utilizadas na teoria de operadores de Schrödinger unidimensionais são resultados que estabelecem uma ligação entre o comportamento de soluções de (2.3) e propriedades espectrais do operador H_ω .

Vamos definir as matrizes de transferência para a família de operadores $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$. Definimos a sequência $\Psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^2$ por

$$\Psi(n) = \begin{pmatrix} \psi(n+1) \\ \psi(n) \end{pmatrix}$$

e consideramos a matriz

$$T_{E,\omega}(n) = \begin{pmatrix} E - V_\omega(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos escrever a equação (2.3) na forma matricial

$$\Psi(n) = T_{E,\omega}(n) \Psi(n-1), \quad \forall n \geq 1.$$

Segue dessa relação de recorrência que, para todo $n \geq 1$,

$$\Psi(n) = T_{E,\omega}(n) T_{E,\omega}(n-1) \dots T_{E,\omega}(1) \Psi(0).$$

Para $n = 0$ é imediato que $\Psi(0) = I_2 \Psi(0)$, sendo I_2 a matriz identidade de ordem 2.

Agora para $n \leq -1$, segue da equação de autovalores que

$$\begin{pmatrix} \psi(n+1) \\ \psi(n) \end{pmatrix} = (T_{E,\omega}(n+1))^{-1} \begin{pmatrix} \psi(n+2) \\ \psi(n+1) \end{pmatrix},$$

onde $(T_{E,\omega}(n+1))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & E - V_\omega(n+1) \end{pmatrix}$. Assim, podemos escrever que:

$$\Psi(n) = (T_{E,\omega}(n+1))^{-1} \Psi(n+1), \quad \forall n \leq -1.$$

Segue dessa relação de recorrência que, para todo $n \leq -1$,

$$\Psi(n) = (T_{E,\omega}(n+1))^{-1} (T_{E,\omega}(n+2))^{-1} \dots (T_{E,\omega}(0))^{-1} \Psi(0).$$

Desse modo, definimos as *matrizes de transferência* como:

$$M_{E,\omega}(n) := \begin{cases} T_{E,\omega}(n) \dots T_{E,\omega}(1) & , \quad n \geq 1 \\ I_2 & , \quad n = 0 \\ (T_{E,\omega}(n+1))^{-1} \dots (T_{E,\omega}(0))^{-1} & , \quad n \leq -1. \end{cases}$$

Por conseguinte, temos que ψ é solução de $(H_\omega \psi)(n) = E\psi(n)$ se, e somente se, Ψ é solução de $\Psi(n) = M_{E,\omega}(n) \Psi(0)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Valem as seguintes propriedades:

1. O espaço vetorial das soluções de (2.3), para cada E fixo, possui dimensão 2.
2. $\det(M_{E,\omega}(n)) = 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, pois essas matrizes são produtos de matrizes de transferência elementares $T_{E,\omega}(n)$, as quais obviamente têm determinantes iguais a 1.

3. Considerando duas soluções ψ_1, ψ_2 de (2.3), com condições iniciais

$$\psi_1(0) = \psi_2(1) = 0, \quad \psi_1(1) = \psi_2(0) = 1,$$

obtemos que

$$M_{E,\omega}(n) = \begin{pmatrix} \psi_1(n+1) & \psi_2(n+1) \\ \psi_1(n) & \psi_2(n) \end{pmatrix}.$$

Agora, notamos que se tivermos limitação sobre $\|M_{E,\omega}(n)\|$ obteremos limitação sobre $\|\Psi(n)\|$ para toda solução da equação de autovalores. Para estudar o crescimento de $\|M_{E,\omega}(n)\|$, definimos

$$\gamma_{\omega,\pm}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|M_{E,\omega}(n)\|.$$

A existência desse limite segue do resultado abaixo (veja [22]).

Teorema 2.10. (*Furstenberg-Kesten*) Para cada $E \in \mathbb{C}$, existem $\Omega_E \subseteq \Omega$ e $\gamma(E) \in \mathbb{R}$ de modo que $\mu(\Omega_E) = 1$ e para cada $\omega \in \Omega_E$, $\gamma_{\omega,\pm}(E)$ existem e são iguais a $\gamma(E)$, isto é, $\gamma_{\omega,+}(E) = \gamma_{\omega,-}(E) = \gamma(E)$.

O número $\gamma(E)$ é chamado *expoente de Lyapunov*.

Teorema 2.11. (*Osceledec*) Suponha que para algum $E \in \mathbb{C}$, $\gamma(E) > 0$. Então, para todo $\omega \in \Omega_E$, existem soluções ψ_d^+, ψ_d^- de $H_\omega \psi = E\psi$ de modo que ψ_d^\pm decaem exponencialmente em $\pm\infty$, respectivamente, com taxa $-\gamma(E)$. Além disso, toda solução que é linearmente independente com ψ_d^+ (respectivamente, ψ_d^-) cresce exponencialmente para $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$) com taxa $\gamma(E)$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [35, 37]. Assim, no caso do expoente de Lyapunov positivo, temos uma compreensão completa do comportamento assintótico das soluções no infinito.

A teoria de Kotani estabelece uma ligação entre o expoente de Lyapunov e o espectro absolutamente contínuo. Defina

$$A = \{E \in \mathbb{R} : \gamma(E) = 0\}.$$

O fecho essencial $\overline{S}^{\text{ess}}$ de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ é definido por

$$\overline{S}^{\text{ess}} = \{E \in \mathbb{R} : \ell((E - \epsilon, E + \epsilon) \cap S) > 0 \quad \forall \epsilon > 0\},$$

onde ℓ denota a medida de Lebesgue. Em particular, $\overline{S}^{\text{ess}} = \emptyset$ para todo conjunto S de medida de Lebesgue zero.

Teorema 2.12. (*Ishii-Pastur-Kotani*) $\Sigma_{ac} = \overline{A}^{ess}$.

Para a demonstração deste resultado veja [27, 31, 38]. O próximo resultado pode ser encontrado em [32].

Teorema 2.13. (*Kotani*) *Se os potenciais V_ω são aperiódicos e assumem somente um número finito de valores, então $\ell(A) = 0$. Em particular, $\Sigma_{ac} = \emptyset$.*

Desse modo, se considerarmos uma família ergódica de operadores de Schrödinger $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$, definida por (2.2), sendo minimal e os potenciais V_ω aperiódicos assumindo um número finito de valores, então pelos resultados anteriores temos que

$$\sigma(H_\omega) = \sigma_p(H_\omega) \cup \sigma_{sc}(H_\omega).$$

Assim, quando estudamos o tipo espectral de H_ω , precisamos apenas analisar o espectro pontual e o espectro singular contínuo H_ω .

2.2 Substituições Primitivas e Rotações na \mathbb{S}^1

Seja \mathcal{A} um alfabeto. Uma substituição ζ é uma aplicação $\zeta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$. A substituição ζ possui extensões naturais, por concatenação, a \mathcal{A}^* e $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, sendo $\zeta(b_1 \cdots b_n) = \zeta(b_1) \cdots \zeta(b_n)$ e $\zeta(b_1, b_2 \cdots) = \zeta(b_1) \zeta(b_2) \cdots$.

Dizemos que ζ é primitiva se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $a \in \mathcal{A}$, $\zeta^k(a)$ contém todos os símbolos de \mathcal{A} . Exemplos importantes de substituições primitivas são dadas por:

i) Fibonacci:

$$\zeta_f(a) = ab \quad \zeta_f(b) = a$$

ii) Duplicação de Período:

$$\zeta_{dp}(a) = ab \quad \zeta_{dp}(b) = aa$$

iii) Binária não-Pisot:

$$\zeta_{bp}(a) = ab \quad \zeta_{bp}(b) = aaa$$

iv) Thue-Morse:

$$\zeta_{tm}(a) = ab \quad \zeta_{tm}(b) = ba$$

v) Rudin-Shapiro:

$$\zeta_{rs}(a) = ab \quad \zeta_{rs}(b) = ac$$

$$\zeta_{rs}(c) = db \quad \zeta_{rs}(d) = dc$$

Definição 2.14. *Uma sequência de substituição é um ponto fixo (se existir) de uma substituição ζ em $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, ou seja, um elemento $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ tal que $\zeta(u) = u$.*

A existência de um ponto fixo de uma substituição, sobre um alfabeto \mathcal{A} , é assegurada pelas seguintes condições (veja [39]):

- Existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $\zeta(a)$ começa com a letra a .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} |\zeta^n(a)| = +\infty, \forall a \in \mathcal{A}$.

Agora vamos usar essas sequências, com valores numéricos, para construir potenciais para os operadores de Schrödinger (2.2).

Podemos escrever $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^n(a)$, sendo u algum ponto fixo da substituição primitiva ζ . Estendendo u arbitrariamente para a esquerda, sendo $\tilde{u} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ e definindo Ω como o conjunto dos pontos de acumulação dos translados de \tilde{u} , com a respectiva convergência pontual,

$$\Omega = \left\{ \omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \omega = \lim_{n_i \rightarrow \infty} T^{n_i} \tilde{u} \right\}.$$

Dizemos que Ω é o *hull* de ω em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, sendo T o operador *shift* sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, definido por $(T\tilde{u})_n = \tilde{u}_{n+1}$, $\tilde{u} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Por definição, Ω é um subconjunto fechado de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ o qual é invariante sobre T . O sistema dinâmico (Ω, T) é chamado *sistema dinâmico de substituição associado a ζ* . Sendo ζ primitiva, este sistema possui propriedades bem conhecidas (veja em [39]), o qual é unicamente ergódico, isto é, existe somente uma medida de probabilidade ergódica invariante. Também, temos que este sistema é minimal, ou seja, a órbita de todo elemento $\omega \in \Omega$ é denso em Ω . Finalmente, toda palavra ocorrendo em algum $\omega \in \Omega$ ocorre em todo $\omega \in \Omega$.

Notemos que a σ -álgebra de Borel é gerada pelos conjuntos cilíndricos

$$[b_0 \dots b_{l-1}]_{[m, m+l-1]} = \{\omega \in \Omega : \omega_{m+i} = b_i, 0 \leq i \leq l-1\},$$

sendo $m \in \mathbb{Z}$, $l \geq 1$, $b_i \in \mathcal{A}$, $0 \leq i \leq l-1$. Temos que a única medida ergódica de Borel μ sobre Ω satisfaz

$$\mu \left([b_0 \dots b_{l-1}]_{[m, m+l-1]} \right) = d(b_0 \dots b_{l-1}),$$

onde $d(b_0 \dots b_{l-1})$ é a frequência da palavra $b_0 \dots b_{l-1}$ em u , isto é,

$$d(b_0 \dots b_{l-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{j \leq n : u_j \dots u_{j+l-1} = b_0 \dots b_{l-1}\},$$

a qual é sempre estritamente positiva. Escolhendo arbitrariamente uma função $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ e definindo $g(\omega) = f(\omega_0)$, obtemos os potenciais $V_\omega(n) = f(\omega_n)$.

Resumidamente, podemos dizer que supondo a substituição ζ primitiva, a sequência de substituição u não é periódica no final, e a função f assume no mínimo dois valores. Então a família induzida de operadores $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$ é ergódica e minimal.

Agora, vamos estudar a construção de uma família ergódica de operadores de Schrödinger (Definição 2.6), associados aos potenciais V_ω gerados por rotações na circunferência \mathbb{S}^1 . Um modelo de rotação na circunferência é parametrizado por três parâmetros:

1. um número de rotação irracional $\alpha \in (0, 1)$;
2. um comprimento de intervalo $\beta \in (0, 1)$;
3. uma constante de acoplamento não nula $\lambda \in \mathbb{R}$.

Existem duas maneiras para escolher Ω, T, g . A primeira maneira segue do Exemplo 2.3, sendo $\Omega = \mathbb{S}^1 \simeq [0, 1)$, e a aplicação $T_\alpha \omega = \omega + \alpha \pmod{1}$ para algum irracional $\alpha \in (0, 1)$, o qual (Ω, T_α) é estritamente ergódico. Definimos a função g como $g(\omega) = \lambda \cdot \chi_{[1-\beta, 1)}(\omega)$, e estes geram os potenciais

$$V_\omega(n) = g(T^n \omega) = \lambda \cdot \chi_{[1-\beta, 1)}(\alpha n + \omega \pmod{1}).$$

Outra possibilidade de obter uma família de potenciais é considerar a sequência $v_{\alpha, \beta}(n) = \chi_{[1-\beta, 1)}(\alpha n \pmod{1})$, $n \in \mathbb{N}$. Definindo o *hull* $\Omega = \Omega_{\alpha, \beta}$ por

$$\Omega_{\alpha, \beta} = \left\{ \omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : \omega = \lim T^{n_i} v_{\alpha, \beta}, n_i \rightarrow \infty \right\},$$

temos que o sistema dinâmico $(\Omega_{\alpha, \beta}, T)$ é estritamente ergódico, com uma única medida ergódica μ dada sobre conjuntos cilíndricos pela frequência das respectivas palavras [24]. A função g que gera os potenciais neste caso, é dada por $g(\omega) = f(\omega_0)$, onde $f(0) = 0$ e $f(1) = \lambda$, sendo $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.

Temos que ambas as maneiras de obter os potenciais de $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$ correspondentes aos parâmetros α, β, λ induz à famílias de operadores de Schrödinger ergódicas e minimais.

No caso de $\alpha = \beta$ escrevemos v_α e Ω_α , e obtemos o sistema dinâmico (Ω_α, T) com os resultantes potenciais *Sturmianos*. Algo extremamente interessante é que na substituição de Fibonacci o *hull* associado é equivalente ao *hull* Sturmiano correspondente a $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, sendo $a \mapsto 1$ e $b \mapsto 0$. Desse modo, as correspondentes famílias de operadores são equivalentes.

2.3 Aplicação Traço

A versão do argumento de Gordon 2-blocos sugere a investigação de estruturas repetitivas no potencial e a limitação do traço das matrizes de transferência associadas ao operador definido em (2.2).

No caso dos modelos Sturmianos ou modelos gerados por substituições primitivas, a limitação do traço das matrizes de transferência pode ser investigada através do estudo de um sistema dinâmico, chamado aplicação traço, o qual é induzido por estruturas repetitivas do correspondente potencial. Essas estruturas estão presentes nos potenciais gerados por substituições primitivas e sua presença no caso Sturmiano pode ser exibida usando a expansão em frações continuadas do número de rotação irracional associado ao potencial.

Neste estudo, vamos seguir os procedimentos de analisar uma sequência de palavras geradoras obedecendo as relações recursivas, considerar as matrizes de transferência associadas à palavras finitas em vez de sequências infinitas, estender as relações recursivas das palavras para o nível das matrizes de transferência e, conseqüentemente, passar essas relações para os traços dessas matrizes.

Para os modelos associados as substituições primitivas, temos que para cada E fixo, consideremos, por abuso de notação, a aplicação $M_E : \mathcal{A} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$, definida por

$$M_E(a) = \begin{pmatrix} E - f(a) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos denotar pelo mesmo símbolo a aplicação $M_E : \mathcal{A}^n \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$, definida por

$$M_E(\omega) = M_E(a_n) \cdots M_E(a_1), \quad (2.4)$$

sendo $\omega = (a_1 \cdots a_n)$. A aplicação M_E permite introduzir uma ação induzida de ζ sobre o conjunto imagem de M_E com $\zeta(M_E(\omega)) \equiv M_E(\zeta\omega)$, donde $\zeta^n(M_E(\omega)) = M_E(\zeta^n(\omega))$. Desse modo, devido a equação (2.4) temos que a ação de ζ define um sistema dinâmico sobre $SL(2, \mathbb{R})^{|\mathcal{A}|}$, desde que $M_E(\zeta^n(a))$ pode ser expressado como produto de matrizes $M_E(\zeta^{n-1}(a))$, $a \in \mathcal{A}$.

A análise desse sistema dinâmico, em princípio poderia produzir toda a informação desejada sobre o espectro do operador (2.2). Entretanto, na prática pode ser extremamente complicado trabalhar com este sistema diretamente, e existe a vantagem de se passar para um novo sistema dinâmico com base nos traços das matrizes $M_E(\zeta^n(a))$.

Definimos, para cada $\omega \in \mathcal{A}^*$, $x_E(\omega) = \text{tr}(M_E(\omega))$. Naturalmente, podemos escrever $x_E^n(\omega) = \text{tr}(M_E(\zeta^n\omega))$, e obviamente podemos estender a ação de ζ , como $\zeta(x_E^{n-1}(\omega)) =$

$x_E^n(\omega)$. No entanto, dessa vez não existe uma expressão imediata de $\zeta(x_E^{n-1}(a))$, como função de $x_E^{n-1}(a)$, ou seja, a realização dessa ação de ζ como um sistema dinâmico em $\mathbb{R}^{|\mathcal{A}|}$. Porém, quando isso não for possível sempre podemos encontrar um subconjunto finito $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}^*$ tal que para todo $\omega \in \tilde{\mathcal{A}}$, $x_E^n(\omega)$ pode ser expressado como uma função de $x_E^{n-1}(\omega)$, com $\omega \in \tilde{\mathcal{A}}$, ou seja, a realização de ζ como um sistema dinâmico sobre $\mathbb{R}^{|\tilde{\mathcal{A}}|}$. Tal sistema dinâmico é chamado de aplicação traço.

Exemplo 2.15. *No caso da substituição de Fibonacci, temos que*

$$\begin{aligned}\zeta_f^n(a) &= \zeta_f^{n-1}(ab) = \zeta_f^{n-1}(a)\zeta_f^{n-1}(b), \\ \zeta_f^n(b) &= \zeta_f^{n-1}(a).\end{aligned}$$

Para simplificar a notação, denotamos

$$\begin{aligned}x_n &= \text{tr}(M_E(\zeta_f^n(a))) \\ y_n &= \text{tr}(M_E(\zeta_f^n(b))) \\ z_n &= \text{tr}(M_E(\zeta_f^n(a))M_E(\zeta_f^n(b))).\end{aligned}$$

Temos que

$$x_n = \text{tr}(M_E(\zeta_f^{n-1}(a))M_E(\zeta_f^{n-1}(b))) = z_{n-1}$$

e

$$y_n = \text{tr}(M_E(\zeta_f^{n-1}(a))) = x_{n-1}.$$

Agora, usando que

$$\text{tr}(M_1M_2M_1M_3) = \text{tr}(M_1M_2)\text{tr}(M_1M_3) + \text{tr}(M_2M_3) - \text{tr}(M_2)\text{tr}(M_3),$$

sendo $M_i \in SL(2, \mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3$, obtemos que

$$\begin{aligned}z_n &= \text{tr}(M_E(\zeta_f^{n-1}(a))M_E(\zeta_f^{n-1}(b))M_E(\zeta_f^{n-1}(a))) \\ &= x_{n-1}x_n - x_{n-2}.\end{aligned}$$

Neste exemplo não é preciso ampliar o alfabeto já que $z_n = x_{n+1}$. Assim, temos a recursão equivalente $x_n = z_{n-1} = x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-3}$, envolvendo somente x -variáveis.

Exemplo 2.16. *No caso da substituição duplicação de período, temos que*

$$\begin{aligned}\zeta_{dp}^n(a) &= \zeta_{dp}^{n-1}(ab) = \zeta_{dp}^{n-1}(a)\zeta_{dp}^{n-1}(b), \\ \zeta_{dp}^n(b) &= \zeta_{dp}^{n-1}(aa) = \zeta_{dp}^{n-1}(a)\zeta_{dp}^{n-1}(a).\end{aligned}$$

Para simplificar a notação, denotamos

$$\begin{aligned}x_n &= \text{tr}(M_E(\zeta_{dp}^n(a))) \\ y_n &= \text{tr}(M_E(\zeta_{dp}^n(b)))\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Caley-Hamilton, obtemos que

$$\begin{aligned}y_n &= \text{tr}(M_E(\zeta_{dp}^{n-1}(a))^2) \\ &= \text{tr}(M_E(\zeta_{dp}^{n-1}(a)))\text{tr}(M_E(\zeta_{dp}^{n-1}(a))) - \text{tr}(I) \\ &= x_{n-1}^2 - 2.\end{aligned}$$

Agora, usando a identidade

$$\text{tr}(M_1M_2) = \text{tr}(M_1)\text{tr}(M_2) - \text{tr}(M_1M_2^{-1}),$$

sendo $M_i \in SL(2, \mathbb{R})$, $i = 1, 2$, obtemos que

$$\begin{aligned}x_n &= \text{tr}(M_E(\zeta_f^{n-1}(a))M_E(\zeta_f^{n-1}(b))) \\ &= \text{tr}(M_E(\zeta_f^{n-1}(a)))\text{tr}(M_E(\zeta_f^{n-1}(b))) - 2 \\ &= x_{n-1}y_{n-1} - 2.\end{aligned}$$

Logo, não é preciso ampliar o alfabeto sendo a recursão equivalente $x_n = x_{n-1}^3 - 2x_{n-1} - 2$, envolvendo somente x -variáveis.

Para o caso dos potenciais gerados por rotações na circunferência, vejamos algumas propriedades para o *hull* Sturmiano. Considere a expansão em frações continuadas de $\alpha \in (0, 1)$ irracional,

$$\alpha = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \quad (2.5)$$

sendo $a_n \in \mathbb{N}$ unicamente determinados.

A aproximação racional associada $\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}$ é definida pelas relações recursivas:

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, \quad p_1 = 1, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_0 &= 1, \quad q_1 = a_1, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Definimos as palavras s_n sobre o alfabeto $\{0, 1\}$ por

$$s_{-1} = 1, \quad s_0 = 0, \quad s_1 = s_0^{a_1-1} s_{-1}, \quad s_n = s_{n-1}^{a_n} s_{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (2.7)$$

Em particular, a palavra s_n possui comprimento q_n , $n \geq 2$. Desse modo, podemos definir uma sequência infinita unilateral da seguinte forma,

$$u = u_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

A seguinte proposição relaciona u_α , ou seja, as palavras s_n , com o *hull* Sturmiano Ω_α .

Proposição 2.17. v_α restrito para $\{1, 2, 3, \dots\}$ coincide com u_α .

A demonstração deste resultado encontra-se em [2].

Proposição 2.18. Para cada $n \geq 2$, $s_n s_{n+1} = s_{n+1} s_{n-1}^{a_n-1} s_{n-2} s_{n-1}$.

Demonstração. A demonstração segue diretamente da equação (2.7). De fato,

$$\begin{aligned} s_n s_{n+1} &= s_n s_n^{a_{n+1}} s_{n-1} = s_n^{a_{n+1}} s_n s_{n-1} = s_n^{a_{n+1}} s_{n-1}^{a_n} s_{n-2} s_{n-1} \\ &= s_{n+1} s_{n-1}^{a_n-1} s_{n-2} s_{n-1}. \end{aligned}$$

□

Escrevendo $s_n = s_n^1 \dots s_n^{q_n}$, definimos as matrizes de transferência $M_E(s_n)$ correspondentes as palavras s_n por

$$M_E(s_n) = \begin{pmatrix} E - \lambda s_n^{q_n} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} E - \lambda s_n^1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, uma questão natural para ser analisada é qual a relação do espectro com o conjunto das energias onde o traço das matrizes de transferência é limitado. Nesse sentido, Bellissard e outros demonstraram em [2] uma igualdade entre esses conjuntos para os modelos gerados por potenciais Sturmianos. Mais explicitamente,

Proposição 2.19. *Seja $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$ uma família ergódica de operadores de Schrödinger Sturmianos. Então para λ, α correspondentes, existe uma constante C_λ tal que*

$$\sigma(H_\omega) = \{E : |\operatorname{tr}(M_E(s_n))| \leq C_\lambda \quad \forall n\}.$$

Notando que se definimos $x_n = \operatorname{tr}(M_E(s_n))$, $y_n = \operatorname{tr}(M_E(s_{n-1}))$ e $z_n = \operatorname{tr}(M_E(s_n s_{n-1}))$, obtemos que

$$\max\{|x_n|, |y_n|, |z_n|\} \leq C_\lambda.$$

Bovier e Ghez [4] obtiveram para os modelos associados as substituições primitivas, incluindo Fibonacci, duplicação de período, binário não-Pisot e Thue-Morse, uma caracterização da aplicação traço com o espectro. Entretanto, notamos que não se obtém a limitação das órbitas de energias do espectro em seu contexto geral, mas sim a limitação para uma subsequência. Neste sentido, a aplicação traço associada a modelos de substituição primitiva exibem apenas uma analogia parcial à Proposição 2.19.

Argumentos de Gordon

Os argumentos de Gordon são métodos essenciais para excluir o espectro pontual dos operadores de Schrödinger 1D do tipo (1.1). Neste capítulo vamos analisar algumas versões discretas e uma versão contínua dos argumentos de Gordon, sendo que nosso objetivo consiste em estudar as demonstrações dos argumentos de Gordon 2-blocos e 3-blocos (Teoremas 1.2 e 1.3) e também uma versão discreta do argumento de Gordon, presente na referência [7].

Na segunda seção estudamos o caso contínuo onde analisamos o resultado de Damanik e Stolz [18] sobre uma versão contínua mais geral do argumento de Gordon, para potenciais de Gordon generalizados (Definição 3.4), o qual recupera os resultados originais dos potenciais de Gordon. Tal resultado garante que os operadores de Schrödinger 1D associados a potenciais de Gordon generalizados não possuem autovalores (Teorema 1.4).

3.1 Versões Discretas

Nesta seção estudamos a demonstração de resultados essenciais do nosso projeto, como os argumentos de Gordon 2-blocos e 3-blocos, sendo que esses dois métodos podem ser utilizados para excluir autovalores do espectro do operador de Schrödinger discreto 1D, o primeiro com repetição de dois blocos do potencial, juntamente com limitação do traço das matrizes de transferência, e o segundo com repetição de três blocos do potencial ([10]). Para a aplicação destes métodos vamos fixar um elemento da família ergódica $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$, e

para cada potencial limitado $V : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ associamos o operador de Schrödinger

$$(H\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V(n)\psi(n), \quad (3.1)$$

e a equação dos autovalores

$$(H\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V(n)\psi(n) = E\psi(n), \quad (3.2)$$

onde $E \in \mathbb{C}$. De modo análogo ao que foi feito para uma família ergódica de operadores de Schrödinger, definimos as matrizes de transferência $M_E(n) = M_{E,\omega}(n)$ ($\omega \in \Omega$ fixo). Temos que ψ é solução de $(H\psi)(n) = E\psi(n)$ se, e somente se, Ψ é solução de $\Psi(n) = M_E(n)\Psi(0)$, donde $\Psi(n) = \begin{pmatrix} \psi(n+1) \\ \psi(n) \end{pmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.1. *Seja $M_E(n)$ a matriz de transferência associada ao operador H e considere $\Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}^2$ uma sequência. Se*

$$\|\Psi(2n)\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \|\text{tr}(M_E(n))\Psi(n)\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

então

$$\max(\|\Psi(2n)\|, \|\Psi(n)\|) \geq \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{1}{|\text{tr}(M_E(n))|}\right).$$

Demonstração. Vamos supor que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\Psi(2n)\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \|\text{tr}(M_E(n))\Psi(n)\| \geq \frac{1}{2}.$$

Então

$$\max(\|\Psi(2n)\|, \|\Psi(n)\|) \geq \frac{1}{2}$$

ou

$$\max(\|\Psi(2n)\|, \|\Psi(n)\|) \geq \frac{1}{2|\text{tr}(M_E(n))|}.$$

Portanto,

$$\max(\|\Psi(2n)\|, \|\Psi(n)\|) \geq \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{1}{|\text{tr}(M_E(n))|}\right).$$

□

Agora, recordando o Teorema 1.2 (argumentos de Gordon 2-blocos, enunciado na Introdução), em que consideramos $M_E(n)$ a matriz de transferência, fixados um potencial

V e um escalar $E \in \mathbb{C}$ associados ao operador H definido por (3.1), onde temos a repetição de blocos do potencial para uma sequência $n_k \rightarrow \infty$ e uma limitação no traço das matrizes de transferência, então obtemos sob essas hipóteses, que E não é um autovalor de H , ou seja, o espectro pontual de H é vazio. Vejamos a demonstração desse resultado.

Demonstração.(Teorema 1.2) Fixe um escalar $E \in \mathbb{C}$ e uma função limitada (potencial) $V : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, associados ao operador H . Vamos supor que E é um autovalor de H , ou seja, existe $\psi \in l^2(\mathbb{Z}) - \{0\}$ tal que

$$(H\psi)(n) = E\psi(n).$$

Escrevendo esta equação em termos das matrizes de transferência, temos que

$$\Psi(n_k) = M_E(n_k)\Psi(0).$$

Como $M_E(n_k)$ é uma matriz quadrada de ordem 2, podemos escrever seu polinômio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(M_E(n_k))\lambda + 1.$$

Então, pelo Teorema de Cayley-Hamilton,

$$M_E(n_k)^2 - \text{tr}(M_E(n_k))M_E(n_k) + I = \mathbf{0}. \quad (3.3)$$

Agora, supondo que $V(j) = V(j + n_k)$, $1 \leq j \leq n_k$, devido a definição das matrizes de transferência,

$$M_E(n_k)^2 = M_E(2n_k),$$

e substituindo na equação (3.3) obtemos

$$M_E(2n_k) - \text{tr}(M_E(n_k))M_E(n_k) + I = \mathbf{0}.$$

Considerando o vetor inicial $\Psi(0)$, com $\|\Psi(0)\| = 1$, e aplicando-o na equação acima temos que

$$\Psi(0) = \text{tr}(M_E(n_k))\Psi(n_k) - \Psi(2n_k).$$

Desse modo, pela desigualdade triangular temos

$$1 \leq \|\text{tr}(M_E(n_k))\Psi(n_k)\| + \|\Psi(2n_k)\|.$$

Assim,

$$\|\operatorname{tr}(M_E(n_k))\Psi(n_k)\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \|\Psi(2n_k)\| \geq \frac{1}{2}.$$

Se $\operatorname{tr}(M_E(n_k)) = 0$, então $\|\Psi(2n_k)\| \geq \frac{1}{2}$, o que contradiz o fato de $\psi \in l^2(\mathbb{Z})$. Se $\operatorname{tr}(M_E(n_k)) \neq 0$, então pelo Lema 3.1 temos

$$\max(\|\Psi(2n_k)\|, \|\Psi(n_k)\|) \geq \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{1}{|\operatorname{tr}(M_E(n_k))|}\right).$$

Por hipótese $|\operatorname{tr}(M_E(n_k))| \leq C$, onde $1 \leq C < \infty$. Então

$$\min\left(1, \frac{1}{|\operatorname{tr}(M_E(n_k))|}\right) \geq \frac{1}{C}.$$

Logo,

$$\max(\|\Psi(2n_k)\|, \|\Psi(n_k)\|) \geq \frac{1}{2C}.$$

Mas, quando $n_k \rightarrow \infty$ temos que $\|\Psi(n_k)\| \rightarrow 0$, pois $\psi \in l^2(\mathbb{Z})$, e como o máximo é uma aplicação contínua segue que

$$\frac{1}{2C} \leq \lim_{n_k \rightarrow \infty} \max(\|\Psi(2n_k)\|, \|\Psi(n_k)\|) = 0,$$

o que é uma contradição.

Portanto, concluímos que E não pode ser um autovalor para H , e pelo mesmo absurdo nenhuma solução da equação $H\psi = E\psi$ pode tender a zero em $+\infty$. \square

Entretanto, em algumas situações pode ser uma tarefa complicada limitar o traço da matriz de transferência $M_E(n)$. Então, pode-se tentar encontrar uma repetição dos valores do potencial V à esquerda, donde temos o argumento de Gordon 3-blocos. Vejamos a demonstração do Teorema 1.3 (enunciado na Introdução).

Demonstração.(Teorema 1.3) De modo análogo a demonstração do Teorema 1.2, vamos supor que E é um autovalor de H , ou seja, existe $\psi \in l^2(\mathbb{Z}) - \{0\}$ tal que

$$(H\psi)(n) = E\psi(n).$$

Escrevendo esta equação em termos das matrizes de transferência, temos que

$$\Psi(n_k) = M_E(n_k)\Psi(0).$$

Da mesma forma que na demonstração do teorema anterior, obtemos

$$M_E(2n_k) - \text{tr}(M_E(n_k))M_E(n_k) + I = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Pela hipótese da repetição dos blocos sob o potencial V , temos que $M_E(n_k)M_E(-n_k) = I$. Aplicando $\Psi(-n_k)$ na equação (3.4), resulta que

$$\text{tr}(M_E(n_k))\Psi(0) = \Psi(n_k) + \Psi(-n_k).$$

Tomando $\|\Psi(0)\| = 1$, pela desigualdade triangular temos

$$|\text{tr}(M_E(n_k))| \leq \|\Psi(n_k)\| + \|\Psi(-n_k)\|. \quad (3.5)$$

Para os valores de n_k em que $|\text{tr}(M_E(n_k))| \geq 1$, por (3.5)

$$\|\Psi(n_k)\| + \|\Psi(-n_k)\| \geq 1,$$

então

$$\|\Psi(n_k)\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \|\Psi(-n_k)\| \geq \frac{1}{2}.$$

Agora, para os valores de n_k em que $|\text{tr}(M_E(n_k))| \leq 1$, aplicando $\Psi(0)$ na equação (3.4) segue que

$$1 = \|\Psi(0)\| \leq \|\Psi(2n_k)\| + \|\Psi(n_k)\|,$$

logo

$$\|\Psi(n_k)\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \|\Psi(2n_k)\| \geq \frac{1}{2}.$$

Portanto, para todo n_k ,

$$\max(\|\Psi(2n_k)\|, \|\Psi(n_k)\|, \|\Psi(-n_k)\|) \geq \frac{1}{2}.$$

Assim, quando $n_k \rightarrow \infty$ temos que $\|\Psi(n_k)\| \rightarrow 0$, pois $\psi \in l^2(\mathbb{Z})$. Como no teorema anterior isto nos leva a uma contradição, pois

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{n_k \rightarrow \infty} \max(\|\Psi(2n_k)\|, \|\Psi(n_k)\|, \|\Psi(-n_k)\|) = 0.$$

Dessa forma, concluímos que E não pode ser um autovalor para H , e que nenhuma solução da equação $H\psi = E\psi$ pode tender a zero em $\pm\infty$. \square

Agora, vejamos no teorema abaixo uma outra versão discreta dos argumentos de Gordon [7] para o operador H definido por (3.1), onde considera-se uma aproximação limitada e periódica do potencial V , sendo possível excluir os autovalores associados ao operador H .

Teorema 3.2. *Sejam $V(n)$ e $V_m(n)$, para $m \in \mathbb{N}$, sequências limitadas sobre \mathbb{Z} (isto é, $n \in \mathbb{Z}$). Suponhamos*

1. V_m periódica, com período $T_m \rightarrow \infty$;
2. $\sup_{m,n} |V_m(n)| < \infty$;
3. $\sup_{|n| \leq 2T_m} |V_m(n) - V(n)| \leq m^{-T_m}$.

Então qualquer solução $\psi \neq 0$ da equação dos autovalores (3.2) satisfaz

$$\limsup_{|n| \rightarrow \infty} \frac{|\psi(n+1)|^2 + |\psi(n)|^2}{|\psi(1)|^2 + |\psi(0)|^2} \geq \frac{1}{4}.$$

Como uma aplicação do Teorema 3.2 temos que o modelo Almost-Mathieu, para certas realizações do potencial, possui espectro pontual vazio (veja Seção 4.3).

Lema 3.3. *Seja $M \in SL(\mathbb{R}, 2)$ e x um vetor unitário. Então*

$$\max(\|Mx\|, \|M^2x\|, \|M^{-1}x\|, \|M^{-2}x\|) \geq \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Caley-Hamilton, temos que

$$M^2 - \text{tr}(M)M + I_2 = 0. \quad (3.6)$$

Assim, se $|\text{tr}(M)| \geq 1$, seja $K = \frac{1}{|\text{tr}(M)|}$. Então, aplicando M^{-1} e o vetor unitário x na equação (3.6), temos

$$x = K(Mx + M^{-1}x).$$

Desse modo,

$$1 = \|x\| \leq |K| (\|Mx\| + \|M^{-1}x\|) \quad (3.7)$$

$$\leq \|Mx\| + \|M^{-1}x\|. \quad (3.8)$$

Logo, $\|Mx\| \geq \frac{1}{2}$ ou $\|M^{-1}x\| \geq \frac{1}{2}$.

Agora, se $|\operatorname{tr}(M)| < 1$, aplicando x na equação (3.6) temos que

$$x = \operatorname{tr}(M) Mx - M^2x.$$

Consequentemente,

$$1 = \|x\| < \|Mx\| + \|M^2x\|.$$

Logo, $\|Mx\| \geq \frac{1}{2}$ ou $\|M^2x\| \geq \frac{1}{2}$. Portanto,

$$\max(\|Mx\|, \|M^2x\|, \|M^{-1}x\|, \|M^{-2}x\|) \geq \frac{1}{2}.$$

□

Demonstração.(Teorema 3.2) Sejam ψ e ψ_m soluções da equação de autovalores $H\psi = E\psi$, ambas com as mesmas condições iniciais satisfazendo $|\psi(1)|^2 + |\psi(0)|^2 = 1$. Como nos casos anteriores, consideremos as sequências

$$\Psi(n) = \begin{pmatrix} \psi(n+1) \\ \psi(n) \end{pmatrix}, \quad \Psi_m(n) = \begin{pmatrix} \psi_m(n+1) \\ \psi_m(n) \end{pmatrix}.$$

Então, utilizando as matrizes de transferência, podemos escrever a equação

$$\Psi(n) = M_E(n) \Psi(0).$$

De modo análogo, temos que $\Psi_m(n) = M_E^m(n) \Psi(0)$. Por indução sobre n é possível mostrar que

$$\|\Psi_m(n) - \Psi(n)\| \leq |n| C^{|n-1|} \sup_{n,m} |V(n) - V_m(n)| \|\Psi(0)\|,$$

sendo $C = \max_{|i|} (\|T_E(i)\|, \|T_E^m(i)\|); |i| = 1, \dots, n$. Logo, usando a hipótese (ii) temos

$$\begin{aligned} \sup_{|n| \leq 2T_m} \|\Psi_m(n) - \Psi(n)\| &\leq \sup_{|n| \leq 2T_m} |n| C^{|n-1|} m^{-T_m} \\ &\leq \sup_{|n| \leq 2T_m} |n| e^{C|n|} m^{-T_m} \\ &= 2T_m e^{2CT_m} m^{-T_m}. \end{aligned}$$

Então,

$$\max_{a=\pm 1, \pm 2} \|\Psi_m(aT_m) - \Psi(aT_m)\| \rightarrow 0, \quad (3.9)$$

quando $m \rightarrow \infty$. Agora, pela periodicidade do potencial V_m e pelo Lema 3.3

$$\max_{a=\pm 1, \pm 2} \|\Psi_m(aT_m)\| \geq \frac{1}{2}. \quad (3.10)$$

Então, pelas equações (3.9) e (3.10), concluimos que

$$\limsup_{|n| \rightarrow \infty} |\psi(n)|^2 + |\psi(n+1)|^2 \geq \limsup_{|n| \rightarrow \infty} \max_{a=\pm 1, \pm 2} \|\Psi(aT_m)\|^2 \geq \frac{1}{4}.$$

□

3.2 Versão Contínua

Nesta seção vamos estudar uma generalização do resultado de Gordon original para o operador de Schrödinger da forma

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad (3.11)$$

atuando sobre $L^2(\mathbb{R})$, com um potencial $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrável ($V \in L^1_{loc}$). Particularmente, estamos interessados em potenciais da forma

$$V(x) = V_1(x) + V_2(\alpha x + \theta), \quad (3.12)$$

onde V_1 e V_2 são localmente integráveis, possuem período 1 e $\alpha, \theta \in [0, 1)$.

Se $\alpha = \frac{p}{q}$ é racional, então o potencial V tem período q e H possui espectro absolutamente contínuo puro. Se α é irracional, então o potencial é quase-periódico, e o espectro tem tendência a ser singular contínuo. Particularmente, estamos interessados em métodos que permitem excluir os autovalores associados a H , ou seja, obtermos que o espectro pontual de H é vazio.

Gordon [23] demonstrou que o operador H não possui autovalores se V é um potencial de Gordon (Definição 1.1). Para o caso discreto estudamos nas seções anteriores a este capítulo alguns métodos que permitem excluir os autovalores associados ao operador de Schrödinger H . De maneira semelhante, vamos estudar uma generalização do resultado de Gordon, para operadores H da forma (3.11), com potenciais V definidos abaixo.

Definição 3.4. Dizemos que V é um potencial de Gordon generalizado se $V \in L^1_{loc, unif}(\mathbb{R})$,

isto é,

$$\|V\|_{1,unif} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+1} |V(x)| dx < \infty,$$

e existem potenciais V^m , de períodos $T_m \rightarrow \infty$, tais que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e^{CT_m} \int_{-T_m}^{2T_m} |V(x) - V^m(x)| dx = 0, \quad (3.13)$$

sendo C uma constante apropriada.

Claramente, todo potencial de Gordon é um potencial de Gordon generalizado, pois quando $m \rightarrow \infty$

$$e^{CT_m} \int_{-T_m}^{2T_m} |V(x) - V^m(x)| dx \leq \frac{e^{CT_m} 3CT_m}{m^{T_m}} \rightarrow 0.$$

Lema 3.5. *Suponha que $V \in L^1_{loc,unif}(\mathbb{R})$ e seja $H\psi = E\psi$ com $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Então,*

$$|\psi(x)|^2 + |\psi'(x)|^2 \rightarrow 0,$$

quando $|x| \rightarrow \infty$.

A demonstração deste lema segue dos teoremas C.3.1 e C.3.2 de [43].

Como no caso clássico [23], vamos mostrar que se V é um potencial de Gordon generalizado, então para toda energia E as soluções de

$$-\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (3.14)$$

não tendem a zero quando $|x| \rightarrow \infty$, ou seja,

$$|\psi(x_m)|^2 + |\psi'(x_m)|^2 \geq D$$

para uma constante $D > 0$ e uma sequência $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ a qual obedece $|x_m| \rightarrow \infty$ quando $m \rightarrow \infty$. Então, não existem soluções em $L^2(\mathbb{R})$, pois se $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ implicaria pelo Lema 3.5 que $|\psi(x_m)|^2 + |\psi'(x_m)|^2 \rightarrow 0$, quando $|x_m| \rightarrow \infty$.

Fixos dois potenciais $W_1 \in L^1_{loc,unif}(\mathbb{R})$, $W_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e uma energia E , consideremos as soluções ψ_1, ψ_2 :

$$\begin{aligned} -\psi_1''(x) + W_1(x)\psi_1(x) &= E\psi_1(x) \\ -\psi_2''(x) + W_2(x)\psi_2(x) &= E\psi_2(x), \end{aligned}$$

com as condições iniciais $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, $\psi'_1(0) = \psi'_2(0)$,

$$|\psi_1(0)|^2 + |\psi'_1(0)|^2 = |\psi_2(0)|^2 + |\psi'_2(0)|^2 = 1.$$

Lema 3.6. *Existe $C = C(\|W_1 - E\|_{1,unif})$ tal que para todo x , temos*

$$\left\| \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi'_1(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \psi_2(x) \\ \psi'_2(x) \end{pmatrix} \right\| \leq C e^{C|x|} \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} |W_1(t) - W_2(t)| |\psi_2(t)| dt. \quad (3.15)$$

Demonstração. Consideremos $x \geq 0$ (as modificações para $x < 0$ são óbvias). Temos

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \psi_1(x) - \psi_2(x) \\ \psi'_1(x) - \psi'_2(x) \end{pmatrix} = \int_0^x \begin{pmatrix} \psi'_1(t) - \psi'_2(t) \\ (W_1(t) - E)\psi_1(t) - (W_2(t) - E)\psi_2(t) \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^x \begin{pmatrix} 0 \\ (W_1(t) - W_2(t))\psi_2(t) \end{pmatrix} dt + \int_0^x \begin{pmatrix} \psi'_1(t) - \psi'_2(t) \\ (W_1(t) - E)(\psi_1(t) - \psi_2(t)) \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^x \begin{pmatrix} 0 \\ (W_1(t) - W_2(t))\psi_2(t) \end{pmatrix} dt + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ W_1(t) - E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(t) - \psi_2(t) \\ \psi'_1(t) - \psi'_2(t) \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} \psi_1(x) - \psi_2(x) \\ \psi'_1(x) - \psi'_2(x) \end{pmatrix} \right\| &\leq \int_0^x |W_1(t) - W_2(t)| |\psi_2(t)| dt \\ &+ \int_0^x \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ W_1(t) - E & 0 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} \psi_1(t) - \psi_2(t) \\ \psi'_1(t) - \psi'_2(t) \end{pmatrix} \right\| dt. \end{aligned}$$

Pelo lema de Gronwall [48] obtemos

$$\left\| \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi'_1(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \psi_2(x) \\ \psi'_2(x) \end{pmatrix} \right\| \leq e^{\int_0^x \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ W_1(t) - E & 0 \end{pmatrix} \right\| dt} \int_0^x |W_1(t) - W_2(t)| |\psi_2(t)| dt.$$

Desse modo, concluímos que existe um valor $C = C(\|W_1 - E\|_{1,unif})$ tal que a relação (3.15) é satisfeita. \square

No lema acima, observamos que podemos controlar a diferença de soluções em termos das condições de uma integral envolvendo a diferença dos potenciais. Outro fato importante para a demonstração do Teorema 1.4 é que para potenciais periódicos, temos conhecimento sobre a norma do vetor solução $(\psi(x), \psi'(x))^T$ em determinados pontos x ,

sendo isto feito no lema a seguir:

Lema 3.7. *Suponha W um potencial com período p e E uma energia arbitrária. Então toda solução de*

$$\psi''(x) + W(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (3.16)$$

normalizada no sentido que $|\psi(0)|^2 + |\psi'(0)|^2 = 1$, satisfaz a estimativa

$$\max \left(\left\| \begin{pmatrix} \psi(-p) \\ \psi'(-p) \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} \psi(p) \\ \psi'(p) \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} \psi(2p) \\ \psi'(2p) \end{pmatrix} \right\| \right) \geq \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Vamos considerar que ψ é uma solução de (3.16). Para $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, introduzimos para o caso contínuo a matriz de transferência $M_E(x, y)$, satisfazendo que

$$M_E(x, y) \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(y) \\ \psi'(y) \end{pmatrix}.$$

Temos que essa matriz depende somente da energia E e do potencial sobre o intervalo (x, y) . Então, como W possui período p , temos

$$M_E(-p, 0) = M_E(0, p) = M_E(p, 2p) := M_E. \quad (3.17)$$

Agora, usando o teorema de Caley-Hamilton, sendo $\det(M_E) = 1$ (veja a observação após essa demonstração), temos que

$$M_E^2 - \text{tr}(M_E)M_E + I = 0. \quad (3.18)$$

Se $|\text{tr}(M_E)| \leq 1$, aplicamos a equação acima no vetor $(\psi(0), \psi'(0))^T$, e pela relação (3.17) segue que

$$\begin{pmatrix} \psi(2p) \\ \psi'(2p) \end{pmatrix} - \text{tr}(M_E) \begin{pmatrix} \psi(p) \\ \psi'(p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi'(0) \end{pmatrix} = 0.$$

Desse modo, como estamos considerando $|\psi(0)|^2 + |\psi'(0)|^2 = 1$, obtemos

$$1 = \left\| \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi'(0) \end{pmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{pmatrix} \psi(p) \\ \psi'(p) \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} \psi(2p) \\ \psi'(2p) \end{pmatrix} \right\|.$$

Logo,

$$\max \left(\left\| \begin{pmatrix} \psi(p) \\ \psi'(p) \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} \psi(2p) \\ \psi'(2p) \end{pmatrix} \right\| \right) \geq \frac{1}{2}.$$

Se $|\operatorname{tr}(M_E)| > 1$, de maneira semelhante ao caso anterior, aplicamos a equação (3.18) no vetor $(\psi(-p), \psi'(-p))^T$, e pela relação (3.17)

$$\begin{pmatrix} \psi(p) \\ \psi'(p) \end{pmatrix} - \operatorname{tr}(M_E) \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi'(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi(-p) \\ \psi'(-p) \end{pmatrix} = 0.$$

Logo, como $|u(0)|^2 + |u'(0)|^2 = 1$, temos que

$$1 < |\operatorname{tr}(M_E)| \left\| \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi'(0) \end{pmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{pmatrix} \psi(p) \\ \psi'(p) \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} \psi(-p) \\ \psi'(-p) \end{pmatrix} \right\|.$$

Portanto,

$$\max \left(\left\| \begin{pmatrix} \psi(p) \\ \psi'(p) \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} \psi(-p) \\ \psi'(-p) \end{pmatrix} \right\| \right) \geq \frac{1}{2}.$$

□

Observação: Como no caso discreto, se considerarmos que ψ, φ são soluções da equação (3.16), para $x, y \in \mathbb{R}$ e para cada energia fixa E , temos que as matrizes de transferência $M_E(x, y)$ dadas por

$$M_E(x, y) \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(y) \\ \psi'(y) \end{pmatrix} \quad e \quad M_E(x, y) \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(y) \\ \varphi'(y) \end{pmatrix},$$

possuem colunas $\begin{pmatrix} \psi(y) \\ \psi'(y) \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \varphi(y) \\ \varphi'(y) \end{pmatrix}$, desde que as condições iniciais de ψ, φ em x sejam:

$$\begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que o Wronskiano das soluções ψ, φ da equação (3.16) é definido por

$$w(\psi, \varphi) = \psi(y) \varphi'(y) - \varphi(y) \psi'(y),$$

e esta expressão independe de y ; logo obtemos que $\det(M_E(x, y)) = 1$.

Finalmente, vamos fazer a demonstração do Teorema 1.4 enunciado na introdução.

Demonstração.(Teorema 1.4) Seja V um potencial de Gordon generalizado e sejam V^m aproximantes de período T_m , satisfazendo a relação (3.13). Fixando m , aplicando o

Lema 3.6 com $W_1 = V$ e $W_2 = V^m$ temos

$$\left\| \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi'(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \psi_m(x) \\ \psi'_m(x) \end{pmatrix} \right\| \leq C_1 e^{C_1|x|} \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} |V(t) - V^m(t)| |\psi_m(t)| dt, \quad (3.19)$$

onde ψ é solução de $-\psi''(x) + V(x)\psi(x) = Eu(x)$ e ψ_m é solução de $-\psi_m''(x) + V^m(x)\psi_m(x) = E\psi_m(x)$, sendo ambas as soluções normalizadas na origem e obedecem as mesmas condições de contorno. Temos pela equação (3.13) que $\|V^m\|_{1,unif}$ é limitado em m . Então, uma segunda aplicação do Lema 3.6 com $W_1 = V^m$ e $W_2 = 0$, notando que a constante em (3.15) depende somente da norma sobre $L^1_{loc,unif}$ de $W_1 - E$, temos que

$$\left\| \begin{pmatrix} \psi_m(x) \\ \psi'_m(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \psi_0(x) \\ \psi'_0(x) \end{pmatrix} \right\| \leq C_2 e^{C_2|x|} \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} |V^m(t)| |\psi_0(t)| dt,$$

donde C_2 não depende de m e ψ_0 é uma solução normalizada de $-\psi_0'' = E\psi_0$. Notando que ψ_0 é limitado exponencialmente, temos que

$$|\psi_m(x)| \leq C_3 e^{C_3|x|} \quad (3.20)$$

com C_3 independente de m (mais detalhes em [43]). Desse modo, substituindo (3.20) em (3.19) para todo x , com $-T_m \leq x \leq 2T_m$, temos

$$\left\| \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi'(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \psi_m(x) \\ \psi'_m(x) \end{pmatrix} \right\| \leq C e^{C|T_m|} \int_{-T_m}^{2T_m} |V(t) - V^m(t)| dt,$$

onde $C = \max\{2(C_1 + C_3), C_1 C_3\}$. Pela equação (3.13) temos que existe m_0 tal que para todo $m \geq m_0$, temos

$$\left\| \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi'(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \psi_m(x) \\ \psi'_m(x) \end{pmatrix} \right\| \leq \frac{1}{4} \quad (3.21)$$

para todo x , com $-T_m \leq x \leq 2T_m$. Como V^m tem período T_m , segue pelo Lema 3.7 que

$$\max \left(\left\| \begin{pmatrix} \psi_m(-T_m) \\ \psi'_m(-T_m) \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} \psi_m(T_m) \\ \psi'_m(T_m) \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} \psi_m(2T_m) \\ \psi'_m(2T_m) \end{pmatrix} \right\| \right) \geq \frac{1}{2}.$$

Desse modo, pela desigualdade acima e por (3.21) obtemos que

$$\max \left(\left\| \begin{pmatrix} \psi(-T_m) \\ \psi'(-T_m) \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} \psi(T_m) \\ \psi'(T_m) \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} \psi(2T_m) \\ \psi'(2T_m) \end{pmatrix} \right\| \right) \geq \frac{1}{16}.$$

Por conseguinte, temos que

$$|\psi(x_m)|^2 + |\psi'(x_m)|^2 \geq \frac{1}{4}$$

para uma sequência $x_m \in \{-T_m, T_m, 2T_m\}$ a qual obedece $|x_m| \rightarrow \infty$ quando $m \rightarrow \infty$.

Desse modo, pelo Lema 3.5 concluímos que o operador H não possui autovalores. \square

Em nosso trabalho estamos interessados em potenciais da forma (3.12), sendo $\alpha \in [0, 1)$ um número irracional. Temos que α pode ser decomposto em frações continuadas como em (2.5) e ser bem aproximado por números racionais que satisfazem as relações recursivas (2.6). Desse modo, se considerarmos as aproximações V^m de período q_m definidas como

$$V^m(x) = V_1(x) + V_2(x\alpha_m + \theta), \quad (3.22)$$

obtemos imediatamente o seguinte corolário para o Teorema 1.4:

Corolário 3.8. *Suponhamos que existe uma constante C tal que*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e^{Cq_m} \int_{-q_m}^{2q_m} |V_2(x\alpha + \theta) - V_2(x\alpha_m + \theta)| dx = 0.$$

Então V (dado por (3.12)) é um potencial de gordon generalizado e H (definido por (3.11)) possui espectro pontual vazio.

Aplicações

Neste capítulo vamos estudar algumas aplicações dos argumentos de Gordon analisados no capítulo anterior. Além disso, estudaremos propriedades tais como “espectro com medida de Lebesgue zero”, sendo que essa propriedade juntamente com a ausência de autovalores, para um operador de Schrödinger H , permitem concluir que o espectro deste operador é puramente singular contínuo.

As aplicações dos argumentos de Gordon 2-blocos e 3-blocos (Teoremas 1.2 e 1.3) são para uma família de operadores de Schrödinger 1D com potenciais gerados por substituições primitivas e por rotações na circunferência \mathbb{S}^1 , sendo que os resultados sobre a ausência de espectro pontual para esses modelos são obtidos sob três pontos de vista diferentes: resultados genéricos, *q.t.p* e uniformes, donde vamos analisar com um maior detalhamento os resultados uniformes para os modelos gerados por potenciais Sturmianos e pela substituição primitiva duplicação de período. Para a versão de Gordon estudada no Teorema 3.2 temos que o modelo de Schrödinger Almost-Mathieu, para certas realizações do potencial, possui espectro pontual vazio.

Os modelos de Schrödinger 1D contínuo associados com potenciais de Gordon generalizados não possuem autovalores (Teorema 1.4), sendo as aplicações desse resultado para potenciais quase-periódicos gerados por frequências de Liouville, os modelos obtidos por funções Hölder contínuas, funções do tipo escada e funções com singularidades locais.

4.1 Resultados sobre Ausência de Espectro Pontual

Nesta seção vamos estudar os resultados sobre a ausência de espectro pontual para os modelos gerados por substituições primitivas e rotações na circunferência. Praticamente todos os resultados conhecidos foram obtidos usando variantes dos métodos de Gordon, com uma exceção do trabalho de Hof e outros [25], que introduziram uma nova técnica para excluir autovalores baseada na ocorrência de palíndromos. Nas subseções seguintes, vamos mostrar como alguns métodos e ferramentas apresentados anteriormente podem ser combinados para produzir os resultados.

Dada uma família $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$ tal que o sistema dinâmico (Ω, T) é estritamente ergódico com uma única medida invariante μ , definimos

$$\Omega_c = \{\omega \in \Omega : \sigma_p(H_\omega) = \emptyset\}.$$

Definição 4.1. Dizemos que a ausência de autovalores para $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$ apresenta resultados:

- genéricos se Ω_c é um G_δ denso, isto é, uma interseção enumerável de conjuntos abertos que são densos em Ω ;
- quase toda parte (q.t.p) se Ω_c tem medida μ total;
- uniformes se $\Omega_c = \Omega$.

Vejam alguns argumentos gerais que são úteis para se obter esses resultados sobre a ausência de autovalores. Primeiramente, notemos que para estabelecer resultados genéricos, é suficiente excluir autovalores para apenas um $\omega \in \Omega$.

Proposição 4.2. Se Ω_c é não vazio, então Ω_c é um G_δ denso.

Demonstração. Simon [44] mostrou que Ω_c é um G_δ . Agora, se Ω_c é não-vazio, então ele contém uma órbita inteira que é densa por minimalidade. \square

Por invariância, Ω_c tem medida μ igual à 0 ou 1. A fim de estabelecer um resultado q.t.p, temos que é suficiente limitar inferiormente a medida de Ω_c por um número positivo.

Proposição 4.3. Suponha que $G(n)$, $n \in \mathbb{N}$, são conjuntos de Borel tais que

1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} G(n) \subseteq \Omega_c$,
2. $\limsup \mu(G(n)) > 0$.

Então, $\mu(\Omega_c) = 1$.

Demonstração. O resultado segue usando que

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} G(n)\right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(G(n)).$$

Pela hipótese (1) temos que

$$\mu(\Omega_c) \geq \mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} G(n)\right),$$

logo $\mu(\Omega_c) > 0$. Então, pela invariância de Ω_c , conclui-se que $\mu(\Omega_c) = 1$. \square

Entretanto, não se pode esperar uma forma geral para estabelecer a ausência uniforme de autovalores para os modelos estudados neste trabalho, devido a inspeção de um conjunto de ω 's que é estritamente menor que Ω . Assim, somos levados a considerar cada ω individualmente e aplicar métodos pontuais.

Algo interessante para se notar é que o estudo do problema de autovalores motiva três pontos de vista diferentes:

- argumentos topológicos para resultados genéricos;
- argumentos de medida para resultados q.t.p.;
- argumentos combinatórios para resultados uniformes.

Agora vamos combinar essas estratégias gerais com os critérios de Gordon estudados anteriormente, para tratarmos de resultados genéricos, q.t.p. e uniformes separadamente. Nas subseções seguintes, vamos fazer uma breve análise sobre os casos de resultados genéricos e q.t.p., indicando as referências onde esses podem ser encontrados, sendo que estudaremos com maior detalhamento os resultados uniformes, os quais são resultados mais fortes que generalizam os anteriores.

4.1.1 Resultados Genéricos

Como nossa primeira aplicação, deduzimos um critério para ausência genérica de autovalores.

Proposição 4.4. *Suponha que exista um $\omega \in \Omega$ tal que $V = V_\omega$ satisfaz o argumento de Gordon 2-blocos ou 3-blocos. Então, Ω_c é um G_δ denso.*

Demonstração. Supondo que $V = V_\omega$ satisfaz o argumento de Gordon 2-blocos ou 3-blocos, então o operador de Schrödinger H_ω não possui autovalores; logo $\omega \in \Omega_c$. Desse modo, pela Proposição 4.2 concluímos que Ω_c é um G_δ denso. \square

As simetrias do tipo Gordon foram encontradas no caso Fibonacci [45], no caso Sturmiano geral [2] e para uma classe de modelos de substituição duplicação de período [3]. Também deixamos como observação que o trabalho [25] fornece um método para demonstrar a ausência genérica de autovalores estudando estruturas palindrômicas nos potenciais. Entretanto, esse método parece ser restrito a conjuntos de medida nula [9], e assim não é capaz de estabelecer resultados q.t.p ou uniformes.

4.1.2 Resultados q.t.p.

Similarmente, vamos obter um critério para a ausência q.t.p. de autovalores. Começemos usando o argumento de Gordon 3-blocos. Defina

$$G(n) = \{\omega \in \Omega : V_\omega(k-n) = V_\omega(k) = V_\omega(k+n), \quad 1 \leq k \leq n\}.$$

Obviamente, os $G(n)$ são conjuntos de Borel, já que eles são uniões finitas de conjuntos cilíndricos.

Proposição 4.5. *Suponha que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(G(n)) > 0.$$

Então, $\mu(\Omega_c) = 1$.

Demonstração. Pelo argumento de Gordon 3-blocos, obtemos $\limsup G(n) \subseteq \Omega_c$. Daí, pela Proposição 4.3, concluímos que $\mu(\Omega_c) = 1$. \square

Também temos que $\mu(G(n))$ pode ser estimado através das frequências dos cubos, devido a equação

$$\mu(\{\omega \in \Omega : \omega_m \cdots \omega_{m+|v|-1} = v\}) = d(v).$$

Um critério que é muitas vezes utilizado para obter este resultado é o seguinte: suponha que existe uma quarta potência v^4 ocorrendo em u tal que $|v| = n$. Então $\mu(G(n)) \geq nd(v^4)$. Em particular, a hipótese da Proposição 4.5 é satisfeita se encontrarmos uma constante $B > 0$ e uma sequência de palavras v_k com $|v_k| = n_k \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$, tal que para todo k , $v_k^4 \in F_\psi$ e $d(v_k^4) \geq \frac{B}{n_k}$.

No sentido de satisfazer o critério acima, foi demonstrado [29] o seguinte teorema para modelos de rotação na circunferência:

Teorema 4.6. (*Kaminaga*) *Seja $\Omega_{\alpha,\beta}$ o hull para a rotação na circunferência. Suponha que os coeficientes a_n na expansão em frações continuadas de α satisfazem*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 4.$$

Então para toda constante de acoplamento λ , os autovalores são ausentes q.t.p, ou seja, $\mu(\Omega_c) = 1$.

Para modelos de substituição o resultado em [8] é o seguinte:

Teorema 4.7. *Seja u um ponto fixo de uma substituição primitiva ζ . Suponha que u tenha uma quarta potência como um fator. Então para a família de operadores $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$ associada, tem-se $\mu(\Omega_c) = 1$.*

Este critério aplica-se em particular para o caso da binária não-Pisot. Além disso, o argumento da demonstração pode ser modificado para incluir o caso duplicação de período; veja [9] para uma demonstração mais direta neste caso.

Retornando agora para o argumento de Gordon 2-blocos, podemos modificar os passos acima como segue. Defina para $n \in \mathbb{N}$ e $C < \infty$,

$$G'(n, C) = \{\omega \in \Omega : V_\omega(k) = V_\omega(k+n), 1 \leq k \leq n, |\text{tr}(M_{E,\omega}(n))| \leq C \ \forall E \in \Sigma\}.$$

Novamente temos que os $G'(n, C)$ são uniões finitas de conjuntos cilíndricos e, portanto, são conjuntos de Borel. Como no caso anterior, combinando o argumento de Gordon 2-blocos e Proposição 4.3 obtemos o seguinte resultado:

Proposição 4.8. *Suponha que existe $C < \infty$ tal que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(G'(n, C)) > 0.$$

Então, $\mu(\Omega_c) = 1$.

Temos o seguinte critério o qual é similar ao caso anterior: suponha que existe um cubo v^3 ocorrendo em u tal que $|v| = n$ e $|\text{tr}(M_{E,\omega}(n))| \leq C, \forall E \in \Sigma$. Então

$$\mu(G'(n, C)) \geq nd(v^3).$$

Em particular, a hipótese da Proposição 4.5 é satisfeita se encontrarmos constantes $B > 0$, $C < \infty$ e uma sequência de palavras v_k com $|v_k| = n_k \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$, tal que para todo k , $v_k^3 \in F_u$, $|\text{tr}(M_{E,\omega}(n))| \leq C$, $\forall E \in \Sigma$ e $d(v_k^3) \geq \frac{B}{n_k}$.

Este critério é particularmente útil no caso Sturmiano, pois pela Proposição 2.19 temos o traço limitado para cada λ fixo. Além disso, temos resultado que permite estimar frequências de s_n^3 usando $s_n s_{n+1} = s_{n+1} s_{n-1}^{a_n-1} s_{n-2} s_{n-1}$.

4.1.3 Resultados Uniformes

A ausência uniforme de autovalores foi demonstrada para todos os *hulls* Sturmianos, onde obteve-se o seguinte teorema:

Teorema 4.9. *Seja Ω_α um hull Sturmiano qualquer. Então para todo λ , $\Omega_\alpha = \Omega_c$. Ou seja, para todos os parâmetros λ, α, ω , o operador $H_{\lambda,\alpha,\omega}$ tem espectro pontual vazio.*

Para obter esse resultado é aplicado o argumento de Gordon 2-blocos, onde analisamos a ocorrência da repetição em blocos em cada caso que permite a construção do potencial V_ω [13]. Vejamos os resultados obtidos para o modelo de Schrödinger 1D gerado por potenciais Sturmianos, donde vamos fazer a demonstração do resultado uniforme (Teorema 4.9) o qual generaliza os demais.

Modelo Sturmiano: Vamos considerar a família ergódica de operadores de Schrödinger ($H_{\lambda,\alpha,\omega}$) do tipo (2.2) gerada por potenciais $V_{\lambda,\alpha,\omega}$ Sturmianos, definidos por

$$(H_{\lambda,\alpha,\omega}\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V_{\lambda,\alpha,\omega}(n)\psi(n), \quad (4.1)$$

onde os potenciais $V_{\lambda,\alpha,\omega}$ são do tipo (1.2), conforme definido na Aplicação 1.1. Relembremos a expansão de α em frações continuadas (2.5) e que este pode ser bem aproximado por números racionais que satisfazem as relações recursivas (2.6) (seção 2.2).

O trabalho de Belissard e outros [2], publicado em 1989, estuda o espectro do operador de Schrödinger com potenciais Sturmianos definidos acima. Nesse artigo encontra-se o seguinte lema:

Lema 4.10. *Seja $v(n) = \chi_{[1-\alpha]}(n\alpha \text{ mod } 1)$. Então*

$$i) \ v(n) = [(n+1)\alpha] - [n\alpha], \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$ii) \ v(q_n + k) = v(k), \ 1 \leq k < q_{n+1} - 1, \ n \neq -1.$$

$$iii) \ v(-n) = v(n-1).$$

Demonstração.

- i) Temos que $v(n) = 1 \Leftrightarrow n\alpha - [n\alpha] \in [1 - \alpha, 1) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}; m + 1 - \alpha \leq n\alpha < m + 1$, com $n\alpha < m + 1 < n\alpha + \alpha$, sendo $m = [n\alpha]$.

Por outro lado,

$$[(n + 1)\alpha] - [n\alpha] = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

pois

$$0 \leq [(n + 1)\alpha] - [n\alpha] \leq (n + 1)\alpha - [n\alpha] = \{n\alpha\} + \alpha < 2,$$

onde $\{\cdot\}$ denota a parte fracionária. Por fim, temos que

$$[(n + 1)\alpha] - [n\alpha] = 1 \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}; m + 1 - \alpha \leq n\alpha < m + 1, \text{ sendo } m = [n\alpha].$$

Portanto, concluímos a igualdade

$$v(n) = [(n + 1)\alpha] - [n\alpha], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

- ii) Temos que $q_n\alpha - p_n = (-1)^n \|q_n\alpha\|$ e $\|m\alpha\| > \|q_n\alpha\| \quad \forall m < q_{n+1}, m \neq q_n$, onde $\|x\| = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |x + n|$ é a distância de x a \mathbb{Z} (veja [1]). Logo, usando o item i) obtemos que

$$\begin{aligned} v(q_n + k) &= [(q_n + k + 1)\alpha] - [(q_n + k)\alpha] \\ &= [(k + 1)\alpha + q_n\alpha - p_n] - [k\alpha + q_n\alpha - p_n] \\ &= [(k + 1)\alpha] - [k\alpha] = v(k). \end{aligned}$$

- iii) Pelo item i) segue que

$$v(-n) = [(-n + 1)\alpha] - [-n\alpha] = [\alpha - n\alpha] + [n\alpha] = [n\alpha] - [(n - 1)\alpha] = v(n - 1).$$

□

Notamos que neste resultado consideramos o parâmetro $\omega = 0$, pois temos relações recursivas para a repetição do potencial e sobre o traço das matrizes de transferência associadas a este, sendo que o espectro do operador (4.1) independe do valor de ω [2].

Vamos fixar esse ω e desse modo, utilizando a Proposição 2.19 e pelo Lema 4.10 temos a limitação do traço das matrizes de transferência e a repetição do potencial, sendo que

o operador estudado satisfaz o argumento de Gordon 2-blocos, garantindo que para α, λ fixo, $\Omega_c \neq \emptyset$. Ou ainda, pelo Lema 4.10 temos a repetição no potencial a “direita” e a “esquerda”, logo satisfaz o argumento de Gordon 3-blocos, donde $\Omega_c \neq \emptyset$. Portanto pela Proposição 4.4, utilizando o argumento de Gorgon 2-blocos ou 3-blocos é possível obter resultados genéricos sobre a exclusão de autovalores.

Posteriormente ao resultado obtido acima em [2], Kaminaga [29] estendeu os resultados de Deylon e Petritis [19], onde considerou o conjunto

$$G(n) = \{\omega \in \Omega_\alpha : V_\omega(k - q_n) = V_\omega(k) = V(k + q_n), 1 \leq k \leq q_n\}$$

e demonstrou o Teorema 4.6. Desse modo, obteve o resultado principal de seu artigo que $\sigma_p(H_\omega) = \emptyset$, para quase todo ω com respeito a medida de Lebesgue. Logo temos resultados q.t.p sobre exclusão de autovalores para os modelos Sturmianos.

Em 1999 Damanik e Lenz publicaram em [14] o seguinte resultado (aplicação do Argumento de Gordon 2-Blocos): suponha $\limsup a_n \neq 2$, onde os a_n são os coeficientes da expansão de α em frações continuadas. Então, para todo λ e todo $\omega \in \Omega_\alpha$, o operador (4.1) possui $\sigma_p(H_\omega) = \emptyset$. Portanto, temos resultados uniformes, ou seja, a ausência de autovalores para todos os elementos ω do *hull* Ω_α , sob a condição enunciada acima. Por fim, em 2000 Damanik, Killip e Lenz demonstraram em [13] uma generalização do resultado obtido anteriormente, a qual obteve que para todos os parâmetros λ, α, ω , o operador $H_{\lambda, \alpha, \omega}$ tem espectro pontual vazio (Teorema 4.9).

Agora vamos analisar a demonstração do Teorema 4.9, a fim de obter um resultado uniforme sobre a ausência de autovalores para o operador de Schrödinger gerado por potenciais Sturmianos $H_{\lambda, \alpha, \omega}$. Primeiramente, notemos que as palavras s_n definidas em (2.7) podem ser relacionadas com as sequências $V_{\lambda, \alpha, \omega}$ da seguinte forma: para cada par (n, α) , a sequência $V_{\lambda, \alpha, \omega}$ pode ser particionada em palavras, com cada palavra sendo s_n ou s_{n-1} , notando que podemos considerar o alfabeto $\{0, \lambda\}$, sendo $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

Definição 4.11. *Seja $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ dado. Uma (n, α) -partição de uma função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, \lambda\}$ (com $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ fixado) é uma sequência de pares (I_j, z_j) , $j \in \mathbb{Z}$, tal que:*

- i) os conjuntos $I_j = \{d_j, d_j + 1, \dots, d_{j+1} - 1\} \subset \mathbb{Z}$ particionam \mathbb{Z} ;
- ii) $1 \in I_0$;
- iii) cada bloco $z_j \in \{s_n, s_{n-1}\}$; e
- iv) a restrição de f a I_j é z_j . Isto é, $f_{d_j} f_{d_j+1} \dots f_{d_{j+1}-1} = z_j$.

A propriedade de decomposição dos potenciais Sturmianos em palavras canônicas é dada pelo lema seguinte, que está demonstrado em [13].

Lema 4.12. *Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e todo $\omega \in [0, 1)$, existe uma única n -partição (I_j, z_j) de $V_{\lambda, \alpha, \omega}$. Além disso, se $z_j = s_{n-1}$, então $z_{j-1} = z_{j+1} = s_n$. Se $z_j = s_n$, então existe um intervalo $I = \{d, d+1, \dots, d+l-1\} \subset \mathbb{Z}$ contendo j e de comprimento $l \in \{a_{n+1}, a_{n+1}+1\}$ tal que $z_d = z_{d+1} = \dots z_{d+l-1} = s_n$ e $z_{d-1} = z_{d+l} = s_{n-1}$.*

Definição 4.13. *Uma palavra $w = w_1 \dots w_n$ é conjugado de uma palavra $v = v_1 \dots v_n$ se para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, temos*

$$w_1 \dots w_n = v_i \dots v_n v_1 \dots v_{i-1},$$

isto é, se w é obtido de v por uma permutação cíclica de seus símbolos.

Queremos estudar o comportamento das soluções da equação de autovalores. Para isso, vamos analisar o comportamento de $\psi \in l^2(\mathbb{Z})$ que pode ser investigado através de

$$\|\Psi\|_L = \left(\sum_{n=1}^L \|\Psi(n)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$L \in \mathbb{N}$, sendo que

$$\Psi(n) = (\psi(n+1), \psi(n))^T \quad \text{e} \quad \|\Psi(n)\|^2 = |\psi(n+1)|^2 + |\psi(n)|^2,$$

pois

$$\frac{1}{2} \|\Psi\|_L^2 \leq \|\psi\|_L^2 \leq \|\Psi\|_L^2.$$

Utilizando a limitação uniforme dos traços, vamos obter estimativas sobre o crescimento de $\|\Psi\|_L$ para energias no espectro e soluções normalizadas (no sentido que $|\psi(0)|^2 + |\psi(1)|^2 = 1$) da correspondente equação de autovalores.

Lema 4.14. *Fixe λ, α, ω . Suponha que $V_{\lambda, \alpha, \omega}(j) \dots V_{\lambda, \alpha, \omega}(j+2k-1)$ é conjugado de $(s_{n-1})^2, (s_n)^2$ ou $(s_{n-1}s_n)^2$ para algum $n \in \mathbb{N}$, $l \leq k$, e todo $j \in \{1, \dots, l\}$. Seja $E \in \sigma(H_{\lambda, \alpha, \omega})$. Então toda solução normalizada ψ de $(H_{\lambda, \alpha, \omega} - E)\psi = 0$ satisfaz*

$$\|\Psi\|_{l+2k} \geq D_\lambda \|\Psi\|_l$$

com $D_\lambda = \left(1 + \frac{1}{4C_\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, em que C_λ é dado pela Proposição 2.19.

Demonstração. Considere algum $j \in \{1, \dots, l\}$. Por definição, temos

$$\begin{aligned} \Psi(j+k) &= M(\lambda, E, V_{\lambda, \alpha, \omega}(j) \dots V_{\lambda, \alpha, \omega}(j+k-1))\Psi(j) \\ \text{e } \Psi(j+2k) &= M_E(V_{\lambda, \alpha, \omega}(j) \dots V_{\lambda, \alpha, \omega}(j+2k-1))\Psi(j). \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $V_{\lambda, \alpha, \omega}(j) \dots V_{\lambda, \alpha, \omega}(j+2k-1)$ é conjugado de $(s_{n-1})^2$, $(s_n)^2$ ou $(s_{n-1}s_n)^2$, temos

$$\Psi(j+2k) = [M_E(V_{\lambda, \alpha, \omega}(j) \dots V_{\lambda, \alpha, \omega}(j+k-1))]^2 \Psi(j).$$

Daí, aplicando o teorema de Cayley-Hamilton, vem

$$\Psi(j+2k) - \text{tr}[M(\lambda, E, V_{\lambda, \theta, \rho}(j) \dots V_{\lambda, \theta, \rho}(j+k-1))]\Psi(j+k) + \Psi(j) = 0. \quad (4.2)$$

Além disso, pela Proposição 2.19,

$$|\text{tr}[M_E(V_{\lambda, \alpha, \omega}(j) \dots V_{\lambda, \alpha, \omega}(j+k-1))]| \leq C_\lambda \quad (4.3)$$

para algum $C_\lambda > 1$. De (4.2) e (4.3) obtemos

$$\begin{aligned} 2C_\lambda \max\{\|\Psi(j+k)\|, \|\Psi(j+2k)\|\} &\geq \|\Psi(j+2k)\| + C_\lambda \|\Psi(j+k)\| \\ &\geq \|\Psi(j)\| \end{aligned}$$

para todo $1 \leq j \leq l$. Isto implica que

$$\begin{aligned} \|\Psi(j+k)\|^2 + \|\Psi(j+2k)\|^2 &\geq (\max\{\|\Psi(j+k)\|, \|\Psi(j+2k)\|\})^2 \\ &\geq \frac{1}{4C_\lambda^2} \|\Psi(j)\|^2 \end{aligned}$$

para todo $1 \leq j \leq l$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|\Psi\|_{l+2k}^2 &= \sum_{m=1}^{l+2k} \|\Psi(m)\|^2 \\
&= \sum_{m=1}^l \|\Psi(m)\|^2 + \sum_{m=l+1}^{l+2k} \|\Psi(m)\|^2 \\
&\geq \sum_{m=1}^l \|\Psi(m)\|^2 + \sum_{m=1}^l (\|\Psi(m+k)\|^2 + \|\Psi(m+2k)\|^2) \\
&\geq \sum_{m=1}^l \|\Psi(m)\|^2 + \frac{1}{4C_\lambda^2} \sum_{m=1}^l \|\Psi(m)\|^2 \\
&= \left(1 + \frac{1}{4C_\lambda^2}\right) \|\Psi\|_l^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\Psi\|_{l+2k} \geq D_\lambda \|\Psi\|_l$. □

Agora, usaremos os Lemas 4.12 e 4.14 para estimar o crescimento de $\|\Psi\|_L$, com energias no espectro e soluções normalizadas ($|\psi(0)|^2 + |\psi(1)|^2 = 1$) da equação de autovalores.

Lema 4.15. *Sejam λ, α, ω arbitrários, $E \in \sigma(H_{\lambda, \alpha, \omega})$ e ψ uma solução normalizada de $(H_{\lambda, \alpha, \omega} - E)\psi = 0$. Então, para todo $n \geq 8$, vale a desigualdade*

$$\|\Psi\|_{q_n} \geq D_\lambda \|\Psi\|_{q_{n-8}}$$

com $D_\lambda = \left(1 + \frac{1}{4C_\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Faremos uso das informações fornecidas pelo Lema 4.12 e exibiremos quadrados nos potenciais, no sentido que eles satisfazem as hipóteses do Lema 4.14. Para demonstrarmos o lema, mostraremos que

$$\|\Psi\|_{2(q_{n+1}+q_n)+q_{n-1}} \geq D_\lambda \|\Psi\|_{q_{n-4}}$$

para todos λ, α, ω , todo $E \in \sigma(H_{\lambda, \alpha, \omega})$, todas soluções ψ da equação de autovalores, e todo $n \geq 4$, pois $q_{n+4} \geq 2(q_{n+1} + q_n) + q_{n-1}$.

Fixe λ, α, ω e algum $n \geq 4$. Considere a n -partição de $V_{\lambda, \alpha, \omega}$. Como queremos exibir quadrados para a origem, consideremos os seguintes casos:

Caso 1. $z_0 = s_{n-1}$.

Pelo Lema 4.12, $z_1 = s_n$. Como s_{n-1} é um prefixo de s_n e $z_2 \in \{s_{n-1}, s_n\}$, então $z_2 = s_{n-1}a$,

sendo a uma palavra apropriada. Por (2.7) e pela Proposição 2.18, temos

$$\begin{aligned} z_0 z_1 z_2 &= s_{n-1} s_n s_{n-1} a \\ &= s_{n-1} s_{n-1}^{a_n} s_{n-2} s_{n-1} a \\ &= s_{n-1} s_{n-1}^{a_n} s_{n-1} s_{n-3}^{a_{n-2}-1} s_{n-4} s_{n-3} a \\ &= s_{n-1} s_{n-1}^2 s_{n-1}^{a_n-1} s_{n-3}^{a_{n-2}-1} s_{n-4} s_{n-3} a . \end{aligned}$$

Se $a_n \geq 2$ então $z_0 z_1 z_2 = s_{n-1} s_{n-1}^2 s_{n-1} s_{n-1}^{a_n-2} b = s_{n-1} s_{n-1}^2 s_{n-4} d$, com palavras apropriadas b, d . Se $a_n = 1$ então

$$z_0 z_1 z_2 = s_{n-1} s_{n-1}^2 s_{n-3}^{a_{n-2}-1} s_{n-4} s_{n-3} a,$$

e usando (2.7) obtemos (em qualquer um dos casos: $a_{n-2} = 1$ ou $a_{n-2} \geq 2$) que $z_0 z_1 z_2 = s_{n-1} s_{n-1}^2 s_{n-4} v$, com uma palavra apropriada v . Portanto, aplicando o Lema 4.14 com $l = q_{n-4}$ e $k = q_{n-1}$ obtemos

$$\|\Psi\|_{2(q_{n+1}+q_n)+q_{n-1}} \geq \|\Psi\|_{q_{n-4}+2q_{n-1}} \geq D_\lambda \|\Psi\|_{q_{n-4}}.$$

Caso 2. $z_0 = s_n$ e $z_1 = s_n$.

Se $z_2 = s_{n-1}$ então, pelo Lema 4.12, $z_3 = s_n$. Aplicando a Proposição 2.18 obtemos $z_0 z_1 z_2 z_3 = s_n s_n^2 s_{n-2}^{a_{n-1}-1} s_{n-3} s_{n-2}$, e de (2.7) vem que

$$z_0 z_1 z_2 z_3 = s_n s_n^2 s_{n-3} w,$$

com uma palavra apropriada w . Caso contrário, se $z_2 = s_n$ então como s_{n-1} é um prefixo de s_n e $z_3 \in \{s_{n-1}, s_n\}$, temos $z_0 z_1 z_2 z_3 = s_n s_n^2 s_{n-1} r$, sendo r uma palavra apropriada. Daí, por (2.7), $z_0 z_1 z_2 z_3 = s_n s_n^2 s_{n-3} s$, com uma palavra s . Portanto, aplicando o Lema 4.14 com $l = q_{n-3}$ e $k = q_n$ obtemos

$$\|\Psi\|_{2(q_{n+1}+q_n)+q_{n-1}} \geq \|\Psi\|_{q_{n-3}+2q_n} \geq D_\lambda \|\Psi\|_{q_{n-3}} \geq D_\lambda \|\Psi\|_{q_{n-4}}.$$

Caso 3. $z_0 = s_n$ e $z_1 = s_{n-1}$.

Sejam z'_j os blocos na $(n+1)$ -partição de $V_{\lambda, \alpha, \omega}$. Pela unicidade da n -partição temos $z'_0 = s_{n+1}$. Consideremos os seguintes subcasos:

Caso 3.1. $z'_1 = s_{n+1}$.

Analogamente ao caso 2, isto implica que $s'_0 s'_1$ é seguido por $s_{n+1} s_{n-2}$ e daí aplicando o

Lema 4.14 com $l = q_{n-2}$ e $k = q_{n+1}$ obtemos

$$\|\Psi\|_{2(q_{n+1}+q_n)+q_{n-1}} \geq \|\Psi\|_{q_{n-2}+2q_{n+1}} \geq D_\lambda \|\Psi\|_{q_{n-2}} \geq D_\lambda \|\Psi\|_{q_{n-4}}.$$

Caso 3.2. $z'_1 = s_n$.

Segue do Lema 4.12 que $z'_2 = s_{n+1}$. Novamente consideremos 2 subcasos.

Caso 3.2.1. $z'_3 = s_n$.

Note que este caso ocorre somente se $a_{n+2} = 1$. Pelo Lema 4.12, $z'_4 = s_{n+1}$. Como s_n é um prefixo de s_{n+1} e $z'_5 \in \{s_n, s_{n+1}\}$, por (eq:repetestur) temos

$$z'_0 z'_1 z'_2 z'_3 z'_4 z'_5 = s_{n+1} (s_n s_{n+1})^2 s_n w' = s_{n+1} (s_n s_{n+1})^2 s_{n-1} s_{n-1}^{a_n-1} s_{n-2} w'$$

com uma palavra apropriada w' . Aplicando o Lema 4.14 com $l = q_{n-1}$ e $k = q_n + q_{n+1}$ obtemos

$$\|\Psi\|_{q_{n-1}+2(q_n+q_{n+1})} \geq D_\lambda \|\Psi\|_{q_{n-1}} \geq D_\lambda \|\Psi\|_{q_{n-4}}.$$

Caso 3.2.2. $z'_3 = s_{n+1}$.

Considere as consequências deste caso particular para os blocos na n -partição. Temos

$$z_0 z_1 \dots z_{2a_{n+1}+4} = s_n s_{n-1} s_n s_n^{a_n+1} s_{n-1} s_n^{a_n+1} s_{n-1}.$$

Como s_n é um prefixo de s_{n+1} , este bloco deve ser seguido por s_n . Portanto, temos a sequência de blocos

$$s_n s_{n-1} s_n s_n^{a_n+1} s_{n-1} s_n^{a_n+1} s_{n-1} s_n. \quad (4.4)$$

Usando a Proposição 2.18 podemos reescrever (4.4) como

$$s_n s_{n-1} s_n s_n^{a_n+1} s_{n-1} s_n^{a_n+1} s_n s_{n-2}^{a_n-1-1} s_{n-3} s_{n-2},$$

o qual pode ser interpretado como

$$s_n s_{n-1} s_n s_n^{a_n+1} s_{n-1} s_n s_n^{a_n+1} s_{n-2}^{a_n-1-1} s_{n-3} s_{n-2}.$$

Agora, observe que $s_{n-1} s_n s_n^{a_n+1}$ é conjugado de $s_n s_{n+1} = s_n s_n^{a_n+1} s_{n-1}$. Assim, aplicando o Lema 4.14 com $l = q_{n-3}$ e $k = q_n + q_{n+1}$ obtemos

$$\|\Psi\|_{2(q_{n+1}+q_n)+q_{n-1}} \geq \|\Psi\|_{q_{n-3}+2(q_n+q_{n+1})} \geq D_\lambda \|\Psi\|_{q_{n-3}} \geq D_\lambda \|\Psi\|_{q_{n-4}}.$$

Como os casos 1, 2 e 3 cobrem todas as possíveis escolhas de z_0, z_1 , o lema está demons-

trado. □

Em particular, o Lema 4.15 permite excluir os autovalores do espectro de $H_{\lambda,\alpha,\omega}$, para todos os parâmetros λ, α, ω . Mais precisamente, temos

Demonstração. (Teorema 4.9) Sejam λ, α, ω arbitrários, $E \in \sigma(H_{\lambda,\alpha,\omega})$ e ψ uma solução normalizada de $(H_{\lambda,\alpha,\omega} - E)\psi = 0$. Então pelo Lema 4.15, temos

$$\|\Psi\|_{q_{8n}} \geq D_\lambda \|\Psi\|_{q_{8n-8}} \geq \dots \geq D_\lambda^n \|\Psi\|_{q_0} = D_\lambda^n \|\Psi\|_1 = D_\lambda^n, \quad \forall n \geq 1.$$

Isto implica que

$$\|\Psi\|_{l^2}^2 \geq \|\Psi\|_{q_{8n}}^2 \geq D_\lambda^{2n}, \quad \forall n \geq 1, \text{ com } D_\lambda > 1.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$\|\Psi\|_{l^2}^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|\Psi(m)\|^2 = \infty.$$

Assim, para todos os parâmetros λ, α, ω , não existe solução ψ em l^2 . Portanto, para todos os parâmetros λ, α, ω , o operador $H_{\lambda,\alpha,\omega}$ tem espectro pontual vazio. □

Modelo Duplicação de Período: Resultados sobre a ausência uniforme de autovalores também foram obtidos para a classe de potenciais duplicação de período em [11], o qual utiliza os argumentos de Gordon para obter este resultado.

Vamos analisar o modelo de Schrödinger H_ω da forma (2.2) gerado por potenciais duplicação de período, definido na seção 2.2. Considerando a substituição primitiva duplicação de período

$$\zeta_{dp}(a) = ab \quad \zeta_{dp}(b) = aa,$$

sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{a, b\}$, donde temos as seguintes extensões naturais por concatenação

$$\begin{aligned} \zeta_{dp}^n(a) &= \zeta_{dp}^{n-1}(ab) = \zeta_{dp}^{n-1}(a) \zeta_{dp}^{n-1}(b), \\ \zeta_{dp}^n(b) &= \zeta_{dp}^{n-1}(aa) = \zeta_{dp}^{n-1}(a) \zeta_{dp}^{n-1}(a). \end{aligned}$$

Vamos definir $s_n = \zeta_{dp}^n(a)$ e $t_n = \zeta_{dp}^n(b)$, donde temos as seguintes relações

$$s_n = s_{n-1}t_{n-1} \quad \text{e} \quad t_n = s_{n-1}s_{n-1}. \quad (4.5)$$

Verifica-se facilmente por indução sobre n , que as palavras s_n e t_n possuem tamanho 2^n . Também temos pela proposição abaixo que essas palavras são quase idênticas [8].

Proposição 4.16. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ as palavras s_n e t_n são as mesmas, exceto para sua respectiva última letra a direita.*

Demonstração. Definimos a aplicação $h : \mathcal{A}^l \rightarrow \mathcal{A}^{l-1}$ por $h(a_1 \dots a_l) = a_1 \dots a_{l-1}$, para $l > 1$.

Então, para demonstrar essa proposição basta verificar que $h(\zeta_{dp}^n(a)) = h(\zeta_{dp}^n(b))$. Com efeito, usando o princípio de indução sobre n , temos que para $n = 1$ o resultado é imediato. Agora, pela definição da aplicação h e pela hipótese de indução temos que

$$\begin{aligned} h(\zeta_{dp}^n(a)) &= h(\zeta_{dp}^{n-1}(a) \zeta_{dp}^{n-1}(b)) = \zeta_{dp}^{n-1}(a) h(\zeta_{dp}^{n-1}(a)) \\ &= h(\zeta_{dp}^{n-1}(a) \zeta_{dp}^{n-1}(a)) = h(\zeta_{dp}^n(b)). \end{aligned}$$

□

Temos o seguinte resultado sobre os traços das matrizes de transferência construídas pelo potencial gerado pela substituição duplicação de período.

Proposição 4.17. *Para todo $E \in \sigma(H_\omega)$ e todo $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$\min\{|x_n|, |x_{n+1}|\} \leq 2.$$

Consideremos o fato que para todo n , todo $\omega \in \Omega$ pode ser unicamente decomposto em produto infinito de blocos da forma s_n ou t_n . Chamamos esta decomposição de n -partição de ω . Resumimos as propriedades necessárias na proposição a seguir, cuja demonstração encontra-se em [11].

Proposição 4.18. *Para todo n , todo $\omega \in \Omega$ tem uma única n -partição. No produto desta representação, um t_n -bloco é sempre isolado e entre dois consecutivos t_n -blocos existe um ou três s_n -blocos.*

Teorema 4.19. *O operador de Schrödinger H_ω da forma (2.2), gerado por potenciais duplicação de período, possui espectro pontual vazio, para todo $\omega \in \Omega$.*

Demonstração. Fixe $\omega \in \Omega$, $E \in \sigma(H_\omega)$, e uma solução ψ de

$$(H_\omega - E)\psi = 0$$

satisfazendo $|\psi(0)|^2 + |\psi(1)|^2 = 1$.

Vamos mostrar que E não pode ser um autovalor para o operador H_ω , ou seja, verificar que ψ não pertence ao espaço $l^2(\mathbb{Z})$, e para isso basta verificar que para o operador H_ω

gerado por potenciais duplicação de período os argumentos de Gordon 2-blocos ou 3-blocos (Teoremas 1.2 ou 1.3) são satisfeitos em cada caso.

Com efeito, seja $k \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n \geq k$, e consideremos a n -partição de ω .

Caso 1. $\hat{s}_n s_n$.

Vamos considerar o caso de um s_n -bloco seguido a direita por um outro s_n -bloco, sendo que indicaremos como \hat{s}_n o bloco onde está localizada ponto $0 \in \mathbb{Z}$. Utilizando a Proposição 4.18 consideremos os seguintes casos:

Caso 1.1. $t_n s_n \hat{s}_n s_n t_n$.

Pela Proposição 4.16 as hipóteses do argumento de Gordon 3-blocos são satisfeitas.

Caso 1.2. $t_n \hat{s}_n s_n s_n t_n$.

Logo, se $|x_n| \leq 2$ temos que o resultado segue do Argumento de Gordon 2-blocos. Agora, se $|x_n| > 2$ segue da Proposição 4.17 que $|x_{n+1}| \leq 2$, então vamos considerar a $(n+1)$ -partição sendo que pela relação (4.5) temos a seguinte situação: $s_{n+1} \hat{t}_{n+1} s_{n+1}$. Assim, pela Proposição 4.18 consideraremos os casos:

Caso 1.2.1. $s_{n+1} s_{n+1} \hat{t}_{n+1} s_{n+1}$.

Aplicando a Proposição 4.16 as hipóteses do argumento de Gordon 2-blocos são satisfeitas (refletindo à esquerda a localização do ponto de origem).

Caso 1.2.2. $t_{n+1} s_{n+1} \hat{t}_{n+1} s_{n+1}$.

Passando para a $(n+2)$ -partição, por (4.5) temos a situação: $s_{n+2} \hat{s}_{n+2}$. Logo, pela Proposição 4.18 temos os casos:

Caso 1.2.2.1. $s_{n+2} s_{n+2} \hat{s}_{n+2} t_{n+2}$.

Usando a Proposição 4.16, refletindo a posição da origem a esquerda, podemos aplicar o argumento de Gordon 3-blocos.

Caso 1.2.2.2. $t_{n+2} s_{n+2} \hat{s}_{n+2} s_{n+2} t_{n+2}$.

Usando a Proposição 4.16, podemos aplicar o argumento de Gordon 3-blocos. Desse modo, encerramos o Caso 1.

Caso 2. $s_n \hat{s}_n$.

Temos que essa n -partição coincide com o *Caso 1.2.2.*, e o resultado segue analogamente.

Caso 3. $t_n \hat{s}_n t_n$.

Neste caso, consideramos a $(n+1)$ -partição sendo que pela relação (4.5) passamos para o caso: $s_{n+1} \hat{s}_{n+1}$. Desse modo, o resultado segue como no *Caso 1.2.2.*

Caso 4. \hat{t}_n .

Temos que na $(n+1)$ -partição, pela relação (4.5) obtemos o caso: \hat{s}_{n+1} . Logo, o resultado pode ser obtido como nos *Casos 1, 2, 3*.

Portanto, os *Casos 1, 2, 3, 4* cobrem todas as possíveis escolhas na construção de um

potencial gerado pela substituição duplicação de período, donde aplicando os argumentos de Gordon 2-blocos ou 3-blocos concluímos que o operador H_ω associado a este potencial possui espectro pontual vazio, para todo $\omega \in \Omega$, ou seja, obtemos um resultado uniforme para este modelo. □

Na tabela 4.1 abaixo resumimos os resultados conhecidos sobre a ausência de espectro pontual, com referências para os casos demonstrados e mencionamos os casos em abertos.

Tabela 4.1: Ausência de Espectro Pontual.

Modelo	Genérico	q.t.p	Uniforme
Rotação no Círculo $(\lambda, \alpha, \beta = \alpha)$	[2]	[29]	[14], [13]
Rotação no Círculo $(\lambda, \beta, \alpha \text{ q.t.p})$	[19]	[19]	Aberto
Rotação no Círculo (λ, α, β)	[25]	Aberto	Aberto
Substituição de Fibonacci	[45]	[29]	[14]
Substituição Duplicação de Período	[3]	[9]	[11]
Substituição Binária não-Pisot	[25]	[8]	Aberto
Substituição Thue-Morse	[20]	Aberto	Aberto
Substituição Rudin-Shapiro	[33]	Aberto	Aberto

4.2 Espectro com medida de Lebesgue zero

Nesta seção vamos mostrar que o fato do espectro ter medida de Lebesgue nula, pode ser provado usando alguns resultados obtidos quando foi estabelecida a ausência de autovalores. Nesse sentido, a propriedade "espectro de medida nula" é apenas um corolário da demonstração de ausência de autovalores, se esta é baseada no argumento de Gordon 2-blocos.

Na verdade este tipo de argumento praticamente recupera todos os resultados conhecidos sobre espectro de medida nula. Uma discussão mais detalhada deste simples, porém surpreendente, resultado é abordado em [17].

Relembremos que $A = \{E \in \mathbb{R} : \gamma(E) = 0\}$, e que este conjunto, pelo Teorema de Kotani (Teorema 2.13), possui medida de Lebesgue zero para os operadores H_ω em estudo. Uma forma padrão para mostrar que o espectro possui medida de Lebesgue nula é verificar que

$$\sigma(H_\omega) \subseteq A.$$

Com efeito, supondo que $E \in \sigma(H_\omega)$, então pelo Teorema 2.10 existe $\Omega_E \subseteq \Omega$ e $\gamma(E) \in \mathbb{R}$

tal que $\mu(\Omega_E) = 1$, e para todo $\omega \in \Omega_E$ o expoente de Lyapunov está bem definido. Supondo que $\omega \in \Omega_E$ satisfaz o argumento de Gordon 2-blocos, então a equação dos autovalores

$$(H_\omega)\psi = E\psi \quad (4.6)$$

não possui solução decaindo em $+\infty$. Desse modo, a energia E deve pertencer ao conjunto A , pois caso contrário, $\gamma(E) > 0$ e pelo teorema de Osceledec para todo $\omega \in \Omega_E$, existe uma solução ψ^+ da equação (4.6) que decai exponencialmente em $+\infty$, o que seria um absurdo.

Notamos que acima consideramos para $E \in \Omega$, $\Omega_E \subseteq \Omega$. Mas, na verdade já foi mostrado que $\Omega_E = \Omega$ para todo modelo de substituição [24] e todo modelo Sturmiano [15].

Desse modo, o argumento de Gordon 2-blocos pode ser aplicado para obter que o espectro possui medida de Lebesgue nula para os modelos Sturmianos, donde recupera os principais resultados de [2], e também é possível aplicar esse método em [3] e [4] para os modelos de substituição como duplicação de período, Thue-Morse e binária não-Pisot. Quando as propriedades “ausência de espectro pontual” e “espectro com medida de Lebesgue zero” ocorrem simultaneamente, para um modelo de Schrödinger H , resulta que o espectro deste operador é puramente singular contínuo.

Resumimos, na tabela 4.2 a seguir, os resultados conhecidos sobre espectro com medida de Lebesgue zero, com referências para os casos demonstrados e mencionamos os casos em aberto.

Tabela 4.2: Espectro com medida de Lebesgue zero.

Modelo	Espectro com medida zero
Rotação no Círculo (quaisquer $\lambda, \alpha, \beta = \alpha$)	[2]
Rotação no Círculo (quaisquer $\lambda, \alpha, \beta \neq \alpha$)	Aberto
Substituição de Fibonacci	[46]
Substituição Duplição de Período	[3]
Substituição Binária não-Pisot	[4]
Substituição Thue-Morse	[20]
Substituição Rudin-Shapiro	Aberto

4.3 Modelo Almost-Mathieu

Nesta seção vamos analisar o exemplo unidimensional do operador de Schrödinger discreto, gerado pelo potencial quase-periódico

$$V_\omega(n) = \lambda \cos[2\pi(\alpha n + \omega)],$$

sendo $\omega \in [0, 1] \simeq$ o *hull* de V_ω . Nesse caso o correspondente operador de Schrödinger H_ω é chamado de “Almost-Mathieu”.

Teorema 4.20. *Se α é um número irracional, então o expoente de Lyapunov $\gamma(E)$ correspondente ao potencial*

$$V_\omega(n) = \lambda \cos[2\pi(\alpha n + \omega)]$$

satisfaz $\gamma(E) \geq \ln\left(\frac{|\lambda|}{2}\right)$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que

$$\begin{aligned} V_\omega(n) &= \lambda \cos[2\pi(\alpha n + \omega)] \\ &= \frac{\lambda}{2} (e^{2\pi i \alpha n} e^{2\pi i \omega} + e^{-2\pi i \alpha n} e^{-2\pi i \omega}) \\ &= \frac{\lambda}{2} (e^{2\pi i \alpha n} z + e^{-2\pi i \alpha n} z^{-1}), \end{aligned}$$

sendo $z = e^{2\pi i \omega}$. Para cada valor fixo de E , escrevemos as matrizes de transferência como

$$M_{E,z}(n) = T_{E,z}(n) T_{E,z}(n-1) \cdots T_{E,z}(1)$$

sendo $T_{E,z}(n) = \begin{pmatrix} E - \frac{\lambda}{2} (e^{2\pi i \alpha n} z + e^{-2\pi i \alpha n} z^{-1}) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Definimos

$$F_n(z) = z^n M_{E,z}(n) = \prod_{k=1}^n z T_{E,z}(k),$$

donde a função $F_n(z)$ é analítica no plano complexo, e satisfaz

$$\|F_n(z)\| = \|M_{E,z}(n)\|, \quad (4.7)$$

para quaisquer $z = e^{2\pi i \omega}$.

Como a função $F_n(z)$ é analítica, a função $\ln \|F_n(z)\|$ é subharmônica (veja [30]).

Então

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \|F_n(e^{i\omega})\| d\omega \geq \ln \|F_n(0)\| = n \ln \left(\frac{|\lambda|}{2} \right). \quad (4.8)$$

Como α é um número irracional, temos que a família de operadores de Schrödinger é ergódica para quase todo ω (vide [7]), e então segue das equações (4.7), (4.8) que

$$\begin{aligned} \gamma(E) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|M_{E,z}(n)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \ln \|M_{E,z}(n)\| \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \ln \|F_n(e^{i\omega})\| \frac{d\omega}{2\pi} \\ &\geq \ln \left(\frac{|\lambda|}{2} \right). \end{aligned}$$

□

Observação: O resultado acima, juntamente com o teorema 9.13 de [7] permite concluir que o operador H definido por (2.1) não possui espectro absolutamente contínuo *q.t.p* se α é um valor irracional e $|\lambda| > 2$.

Definição 4.21. Um número $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é chamado número de Liouville se, para todo $k \in \mathbb{N}$ existem $p_k, q_k \in \mathbb{N}$, tais que

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq k^{-q_k}.$$

Um número de Liouville é um número irracional que é extremamente bem aproximado por racionais. O conjunto dos números de Liouville é pequeno do ponto de vista de Análise, pois possui medida de Lebesgue zero. Mas, do ponto de vista da Topologia é grande, sendo um conjunto G_δ denso (lembrando que um conjunto G_δ é a interseção enumerável de conjuntos abertos).

Teorema 4.22. Seja α um número de Liouville, $|\lambda| > 2$ e

$$V_\omega(n) = \lambda \cos [2\pi(\alpha n + \omega)].$$

Então o correspondente operador de Schrödinger H_ω , definido por (2.1), não possui autovalores.

Demonstração. Como α é um número de Liouville, assumimos que ele é bem aproximado

por números racionais $\frac{p_k}{q_k}$ como na definição anterior. Escolhendo uma subsequência $\frac{p_{k'}}{q_{k'}}$ de $\frac{p_k}{q_k}$ podemos assumir que

$$\left| \alpha - \frac{p_{k'}}{q_{k'}} \right| \leq q_{k'}^{-1} k^{-q_k}.$$

Consideremos o potencial

$$V_\omega^k(n) = \lambda \cos \left[2\pi \left(n \frac{p_{k'}}{q_{k'}} + \omega \right) \right].$$

Logo, V_ω^k é um potencial com período $T_k = q_{k'}$. Agora, como uma consequência do Teorema do Valor Médio temos

$$\begin{aligned} \sup_{|n| \leq 2q_{k'}} |V_\omega^k(n) - V_\omega(n)| &= \sup_{|n| \leq 2q_{k'}} \left| \cos \left[2\pi \left(\frac{p_{k'}}{q_{k'}} n + \omega \right) \right] - \cos [2\pi (\alpha n + \omega)] \right| \\ &\leq \sup_{|n| \leq 2q_{k'}} 2\pi |n| \left| \alpha - \frac{p_{k'}}{q_{k'}} \right| \\ &\leq 4\pi k^{-T_k}. \end{aligned}$$

Portanto, as hipóteses do Teorema 3.2 são satisfeitas, e assim concluímos que o operador de Schrödinger H_ω não possui autovalores, ou seja, o espectro pontual de H_ω é vazio. \square

Corolário 4.23. *Seja α um número de Liouville, $|\lambda| > 2$ e*

$$V_\omega(n) = \lambda \cos [2\pi (\alpha n + \omega)].$$

Então o operador de Schrödinger H_ω , definido por (2.1), possui espectro singular contínuo para quase todo ω .

Demonstração. Pelo Teorema 4.20 temos que o operador H_ω do tipo (2.1) não possui espectro absolutamente contínuo para quase todo ω , e como pelo teorema anterior o espectro pontual de H_ω é vazio, concluímos que esse operador possui espectro singular contínuo puro para quase todo ω . \square

4.4 Potenciais de Gordon Generalizados

Vamos estudar exemplos de funções V_2 satisfazendo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e^{Cq_m} \int_{-q_m}^{2q_m} |V_2(x\alpha + \theta) - V_2(x\alpha_m + \theta)| dx = 0, \quad (4.9)$$

para frequências de Liouville α (ver Definição 4.21), as quais induzem funções quase-periódicas por $V(x) = V_1(x) + V_2(x\alpha + \theta)$, que são potenciais de Gordon generalizados. Para estes serão incluídas as funções Hölder contínuas, funções do tipo escada e funções com singularidades locais.

Obviamente, temos que para α, θ fixos, a classe de funções V_2 obedecendo a relação (4.9) é um espaço vetorial, ou seja, fechado com relação a soma e multiplicação por escalar.

Teorema 4.24. *Seja H o operador de Schrödinger contínuo 1D com potenciais do tipo*

$$V(x) = V_1(x) + V_2(\alpha x + \theta),$$

onde V_1 é localmente integrável e possui período 1, V_2 é uma função de período 1 satisfazendo um dos itens:

- i) V_2 é uma função Hölder contínua;
- ii) V_2 é uma função escada;
- iii) $V_2(x) = |x|^{-1/2}$, para $-1/2 \leq x \leq 1/2$,

sendo $\alpha, \theta \in [0, 1)$ e α um número de Liouville. Então, o espectro pontual de H é vazio.

Demonstração.

- i) Temos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser Hölder contínua se existem constantes $D, \delta > 0$ tais que

$$|f(z) - f(y)| \leq D |z - y|^\delta,$$

para quaisquer $z, y \in \mathbb{R}$. Fixando o escalar C , temos

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} e^{Cq_m} \int_{-q_m}^{2q_m} |V_2(x\alpha + \theta) - V_2(x\alpha_m + \theta)| dx \leq \\ & \leq \lim_{m \rightarrow \infty} e^{Cq_m} D |\alpha - \alpha_m|^\delta \int_{-q_m}^{2q_m} |x|^\delta dx \\ & \leq \lim_{m \rightarrow \infty} e^{Cq_m} D \frac{|q_m|^{\delta+1} + |2q_m|^{\delta+1}}{\delta + 1} m^{-q_m} = 0. \end{aligned}$$

Desse modo, se as funções V_2 são Hölder contínuas então pelo Corolário 3.8 o operador de Schrödinger do tipo (3.11) gerados por potenciais da forma (3.12) não possui autovalores. Assim, temos verificado a Aplicação 1.2.

- ii) Considerando que V_2 é uma função escada, temos que existe uma partição $-q_m = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2q_m$ sendo possível escrever

$$V_2(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x),$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$, χ é a função característica e $A_i = [x_{i-1}, x_i]$ são intervalos disjuntos da reta. Como α é um número de Liouville, temos que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$|\alpha x - \alpha_m x| \leq \frac{1}{m^{q_m}} |x| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Desse modo, considerando um m suficientemente grande de maneira que se $\alpha x \in A_i$ temos que $\alpha_m x \in A_i$, então

$$|V_2(\alpha x) - V_2(\alpha_m x)| = \left| \sum_{i=1}^n a_i (\chi_{A_i}(\alpha x) - \chi_{A_i}(\alpha_m x)) \right| = 0.$$

Logo a expressão (4.9) segue imediatamente. Portanto, concluímos que se os potenciais V_2 são funções escada, então o operador de Schrödinger do tipo (3.11) gerados por potenciais da forma (3.12) possui espectro pontual vazio.

- iii) Fixando o escalar C , temos

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} e^{Cq_m} \int_{-q_m}^{2q_m} |V_2(x\alpha + \theta) - V_2(x\alpha_m + \theta)| dx = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} e^{Cq_m} \frac{|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha_m}|}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha_m}} \int_{-q_m}^{2q_m} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} e^{Cq_m} \frac{(2 + 2\sqrt{2})\sqrt{q_m}|\alpha_m - \alpha|}{\sqrt{\alpha_m}\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha_m} + \sqrt{\alpha})} \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} e^{Cq_m} \frac{(2 + 2\sqrt{2})\sqrt{q_m}}{\sqrt{\alpha_m}\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha_m} + \sqrt{\alpha})} m^{-q_m} = 0. \end{aligned}$$

Logo, a relação (4.9) é satisfeita. Desse modo, concluímos pelo Corolário 3.8 que o operador de Schrödinger do tipo (3.11) possui espectro pontual vazio. \square

Observação: No item *iii*) acima obtemos um resultado análogo, se considerarmos a função V_2 de período 1, definida por $V_2(x) = |x|^{-\gamma}$, para $-1/2 \leq x \leq 1/2$, sendo $0 < \gamma < 1$ (veja [18]).

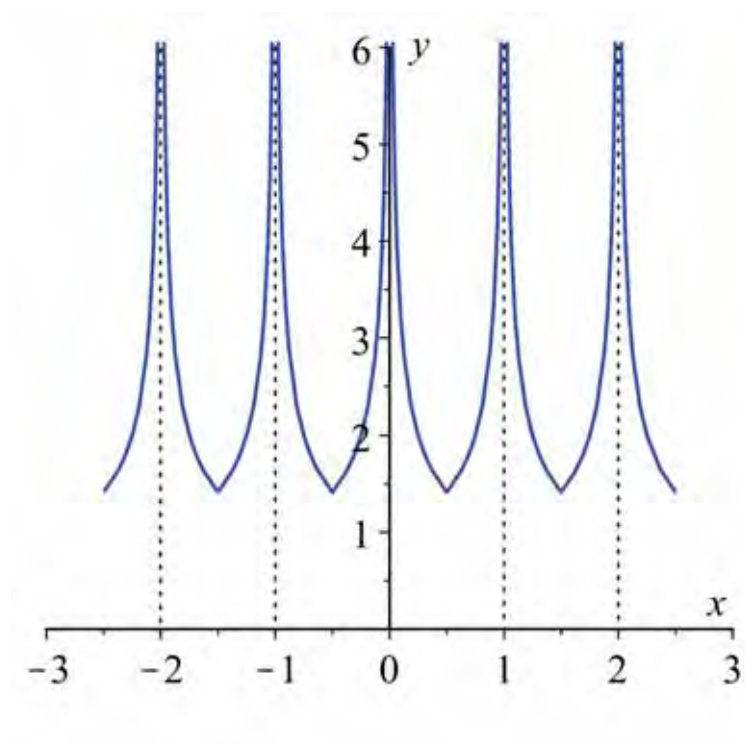


Figura 4.1: Função $y = |x|^{-1/2}$, $-1/2 \leq x \leq 1/2$, periódica de período 1.

Considerações Finais

Neste capítulo, além de realizarmos as considerações finais do nosso trabalho, vamos analisar um pouco da história no desenvolvimento da pesquisa para o uso dos argumentos de Gordon no estudo espectral de operadores de Schrödinger unidimensionais H da forma (1.1) gerado por potenciais quase-periódicos. Esta análise histórica começa em 1976 quando Alexander Gordon publicou [23] que se o operador de Schrödinger unidimensional H for gerado por potenciais de Gordon (Definição 1.1), então este operador possui espectro pontual vazio. Como aplicação para este resultado temos o modelo de Schrödinger Almost Mathieu, para certas realizações do potencial [7, 42].

A descoberta de estruturas quase-cristalinas, em 1984, por Shechtman e outros [41] tem motivado o estudo de físicos e matemáticos em modelos adequados que descrevem essas estruturas, sendo que uma classe de modelos que tem atraído especial atenção neste contexto é fornecido pelos operadores de Schrödinger unidimensionais H da forma (2.2) com potenciais gerados pelas seqüências de substituições primitivas e por rotações na circunferência. Observamos como uma conquista importante, que a descoberta dos quase-cristais a aproximadamente vinte e oito anos atrás, propiciou o Prêmio Nobel da Química de 2011 ao pesquisador israelense Daniel Shechtman.

O primeiro modelo proposto foi o operador de Schrödinger gerado pelo potencial de Fibonacci. Simulações numéricas baseadas na aplicação traço, indicavam para esse modelo espectro de Cantor (fechado, com interior vazio e sem pontos isolados) com medida de Lebesgue zero, sendo que em 1989 foi demonstrado por Sütö [46] que tal operador possui espectro singular contínuo puro, com medida de Lebesgue zero. Temos que este

trabalho foi baseado principalmente nos resultados de Kotani [32] que garantem a ausência de espectro absolutamente contínuo para quase todo elemento no hull, de um potencial aperiódico assumindo um número finito de valores, e em propriedades particulares do potencial e na limitação uniforme para a aplicação traço e, dessa maneira, introduzir a técnica conhecida como Argumento de Gordon 2-blocos, usada para excluir autovalores.

Uma generalização do resultado de Sütö para potenciais Sturmianos, sendo o potencial de Fibonacci um caso particular, foi obtido no mesmo ano por Bellissard e outros [2]. Com esses exemplos de operadores com espectro singular contínuo puro, vários outros casos de operadores com potenciais quase-periódicos foram estudados, como os modelos gerados por substituições primitivas [3, 20]. Bovier e Ghez [4] (1993) generalizaram os resultados de Sütö [46] para algumas substituições primitivas, obtendo mais uma série de exemplos de operadores com espectro singular contínuo puro.

As únicas técnicas conhecidas para excluir autovalores dos operadores que estamos tratando, eram os argumentos Gordon 2-blocos e 3-blocos [19, 45] (Teoremas 1.2 e 1.3 estudados no terceiro capítulo desta dissertação), até que no ano de 1995 Hof e outros [25] introduziram uma nova técnica para excluir autovalores baseada na ocorrência de palíndromos, sendo que essa nova técnica permite excluir autovalores para um conjunto genérico no hull, entretanto não é possível obter resultados mais fortes como os resultados q.t.p e uniforme, os quais podem ser obtidos aplicando os métodos de Gordon 2-blocos e 3-blocos.

No ano de 2000 foram obtidos resultados uniformes para potenciais Sturmianos [13] e em 2001 para substituições primitivas do tipo duplicação de período [11], sendo esses resultados estudados na Seção 4.1. Apesar de não explorarmos neste trabalho, temos conhecimento que foram obtidos resultados uniformes para potenciais Quase-Sturmianos [16] e também para modelos gerados por uma substituição não-primitiva estudado em [36].

Recentemente, foi publicado em [12], que este operador de Schrödinger 1D quando gerado por determinadas funções em um conjunto G_δ denso, possui espectro singular contínuo com medida de Lebesgue zero, sendo que para obter este resultado foi utilizada a versão original dos argumentos de Gordon, entretanto não analisamos tal resultado, pois neste artigo não estão claras as aplicações para o modelo estudado.

Para o caso contínuo, pelo que sabemos existe somente uma generalização do resultado de Gordon [23], a qual inclui este resultado original. Essa generalização para os potenciais de Gordon [18] publicada no ano de 2000 permite excluir o espectro pontual do operador de Schrödinger contínuo definido como (3.11) com potenciais gerados por funções Hölder

contínuas, funções do tipo escada e funções com singularidades locais.

Por fim, nesta dissertação estudamos versões discretas e contínuas dos argumentos de Gordon que são ferramentas importantíssimas para excluir o espectro pontual de operadores de Schrödinger unidimensionais do tipo (1.1) gerado por potências quase-periódicos, sendo que estes representam modelos físicos de estruturas quase-cristalinas, os chamados quase-cristais, o qual tem atraído grande interesse na pesquisa científica. Do ponto vista matemático, estes operadores possuem a tendência de ter espectro singular contínuo puro suportado sobre um conjunto de medida de Lebesgue zero, donde ainda existem problemas em aberto como os mencionados nas tabelas 4.1 e 4.2.

Bibliografia

- [1] ANDRADE, E. X. L., BRACCIALI, C. F.: *Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações*, São Carlos: SBMAC, São Paulo (2005).
- [2] BELLISSARD, J., IOCHUM, B., SCOPPOLA, E. e TESTARD, D.: Spectral Properties of One-Dimensional Quasicrystals, *Commun. Math. Phys.* 125, 527-543 (1989).
- [3] BELLISSARD, J., BOVIER, A. e GHEZ, J.-M.: Spectral Properties of a Tight Binding Hamiltonian with Period Doubling Potential, *Commun. Math. Phys.* 135, 379-399 (1991).
- [4] BOVIER, A. e GHEZ, J.-M.: Spectral Properties of One-Dimensional Schrödinger Operators with Potentials generated by Substitutions, *Commun. Math. Phys.* 158, 45-66 (1993).
- [5] CARMONA, R., KLEIN, A. e MARTINELLI, F.: Anderson Localization for Bernoulli and Other Singular Potentials, *Commun. Math. Phys.* 108, 41-66 (1987).
- [6] CARMONA, R. e LACROIX, J.: *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators*, Birkhäuser, Boston (1990).
- [7] CYCON, H. L., FROESE, R., KIRSCH, W. e SIMON, B.: *Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*, Springer, Berlin (1987).
- [8] DAMANIK, D.: Singular Continuous Spectrum for a Class of Substitution Hamiltonians, *Lett. Math. Phys.* 46, 303-311 (1998).
- [9] DAMANIK, D.: Singular Continuous Spectrum for the Period Doubling Hamiltonian on a set of full measure, *Commun. Math. Phys.* 196, 477-483 (1998).

- [10] DAMANIK, D.: Gordon-Type Arguments in the Spectral Theory of One-Dimensional Quasicrystals; Directions in Mathematical Quasicrystals, 277-305, CRM Monogr. Ser. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2000).
- [11] DAMANIK, D.: Uniform singular continuous spectrum for the period doubling Hamiltonian. *Ann. Henri Poincaré* 2 (1), 101-108 (2001).
- [12] DAMANIK, D. e GAN, Z.: Spectral properties of limit-periodic Schrödinger operators, *Commun. Pure Appl. Anal.* 10, no. 3, 859-871 (2011).
- [13] DAMANIK, D., KILLIP, R. e LENZ, D.: Uniform Spectral properties of One-Dimensional Quasicrystals, III. α -Continuity, *Commun. Math. Phys.* 212, 191-204 (2000).
- [14] DAMANIK, D. e LENZ, D.: Uniform Spectral Properties of One-Dimensional Quasicrystals, I. Absence of Eigenvalues, *Commun. Math. Phys.* 207, 687-696 (1999).
- [15] DAMANIK, D. e LENZ, D.: Uniform spectral properties of one-dimensional quasicrystals, II. The Lyapunov exponent, *Lett. Math. Phys.* 50, no. 4, 245-257 (1999).
- [16] DAMANIK, D. e LENZ, D.: Uniform spectral properties of one dimensional quasicrystals, IV. Quasi-Sturmian Potentials. *J. Anal. Math.* 90, 115-139 (2003).
- [17] DAMANIK, D. e LENZ, D.: Half-line Eigenfunction Estimates and purely Singular Continuous Spectrum of zero Lebesgue measure, *Forum Math.* 16, 109-128 (2004).
- [18] DAMANIK, D. e STOLZ, G.: A Generalization of Gordon's Theorem and Applications to Quasiperiodic Schrödinger Operators, *Electron. J. Differential Equations*, n. 55 (2000).
- [19] DELYON, F. e PETRITIS, D.: Absence of Localization in a Class of Schrödinger Operators with Quasiperiodic Potential, *Commun. Math. Phys.* 103, 441-444 (1986).
- [20] DELYON, F. e PEYRIÈRE, J.: Recurrence of the Eigenstates of a Schrödinger Operator with Automatic Potential, *J. Stat. Phys.* 64, 363-368 (1991).
- [21] DE OLIVEIRA, C. R.: Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics; Birkhäuser, Basel, v. 54, Progress in Mathematical Physics (2008).
- [22] FURSTENBERG, H. e KESTEN H.: Products of random matrices, *Ann. Math. Stat.* 31, 457-469 (1960).

- [23] GORDON, A.: On the Point Spectrum of the One-Dimensional Schrödinger Operator, *Usp. Math. Nauk.* 31, 257-258 (1976).
- [24] HOF, A.: Some remarks on discrete aperiodic Schrödinger operators, *J. Stat. Phys.* 72 (1993), 1353-1374.
- [25] HOF, A., KNILL, O. e SIMON, B. : Singular Continuous Spectrum for Palindromic Schrödinger Operators, *Commun. Math. Phys.* 174, 149-159 (1995).
- [26] HOFFMAN, K. e KUNZE R.: Álgebra Linear, Primeira Edição, Editora da USP, São Paulo (1971).
- [27] ISHII, K.: Localization of eigenstates and transport phenomena in the one dimensional disordered system, *Supp. Progr. Theor. Phys.* 53, 77-138 (1973).
- [28] JITOMIRSKAYA, S. e SIMON, B.: Operators with singular continuous spectrum: III. Almost periodic Schrödinger operators, *Commun. Math. Phys.* 165, 201-205 (1994).
- [29] KAMINAGA, M.: Absence of Point Spectrum for a Class of Discrete Schrödinger Operators with Quasiperiodic Potential, *Forum Math.* 8, 63-69 (1996).
- [30] KATZNELSON, Y.: An Introduction to Harmonic Analysis, 2^{ed}, Springer, New York (2002).
- [31] KOTANI, S.: Ljapunov indices determine absolutely continuous spectra of stationary random one-dimensional Schrödinger operators, in: *Stochastic Analysis* (Katata/Kyoto, 1982), Ed. K. Itô, North Holland, Amsterdam, pp. 225-247 (1984).
- [32] KOTANI, S.: Jacobi matrices with random potentials taking finitely many values, *Rev. Math. Phys.* 1, 129-133 (1989).
- [33] KROON, L. e RIKLUND, R.: Absence of localization in a model with correlation measure as a random lattice, *Physical Review B.* 69, 094204 (2004).
- [34] KUNZ, H. e SOUILLARD B.: Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires, *Commun. Math. Phys.* 78, 201-246 (1980).
- [35] LAST, Y. e SIMON, B.: Eigenfunctions, transfer matrices, and absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators, *Invent. Math.* 135, 329-367 (1999).

- [36] LIMA, M. V. A.: Espectro de Operadores de Schrödinger Não-Primitivos, Tese de Doutorado, DM-UFSCar (2001).
- [37] OSCELEDEC, V.: A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.* 19, 197-231 (1968).
- [38] PASTUR, L.: Spectral properties of disordered systems in the one-body approximation, *Commun. Math. Phys.* 75, 179-196 (1980).
- [39] QUEFFÉLEC, M.: Substitution Dynamical Systems - Spectral Analysis, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1284, Springer, Berlin (1987).
- [40] REED, M. e SIMON B.: *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis*, 2nd ed., Academic Press, New York (1980).
- [41] SHECHTMAN, D., BLECH, I., GRATIAS, D. e CAHN, J. V.: Metallic phase with longrange orientational order and no translational symmetry, *Phys. Rev. Lett.* 53, , 1951-1953 (1984).
- [42] SIMON, B.: Almost Periodic Schrödinger Operators: A Review, *Adv. Appl. Math.* 3, 463-490 (1982).
- [43] SIMON, B.: Schrödinger Semigroups, *Bull. Am. Math. Soc.* 7, 447-526 (1982).
- [44] SIMON, B.: Operators with singular continuous spectrum: I. General operators, *Ann. of Math.* 141, 131-145 (1995).
- [45] SÜTO, A.: The Spectrum of a Quasiperiodic Schrödinger Operator, *Commun. Math. Phys.* 111, 409-415 (1987).
- [46] SÜTO, A.: Singular Continuous Spectrum on a Cantor Set of zero Lebesgue measure for the Fibonacci Hamiltonian, *J. Stat. Phys.* 56, 525-531 (1989).
- [47] WALTERS P.: *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer, New York (1982).
- [48] WALTER W.: *Ordinary Diferential Equations*, *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 182, Springer, New York (1998)