

Anderson dos Santos Gonzaga

**Simetria e quebra de simetria para problemas do tipo Hénon
envolvendo o operador 1-Laplaciano**

São José do Rio Preto
2021

Anderson dos Santos Gonzaga

**Simetria e quebra de simetria para problemas do tipo Hénon
envolvendo o operador 1-Laplaciano**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira
Pimenta

São José do Rio Preto
2021

G642s Gonzaga, Anderson dos Santos
Simetria e quebra de simetria para problemas do tipo Hénon
envolvendo o operador 1-Laplaciano / Anderson dos Santos Gonzaga.
-- São José do Rio Preto, 2021
72 f.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio
Preto
Orientador: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

1. Matemática. 2. Análise matemática. 3. Equação do tipo Hénon. 4.
Quebra de simetria. 5. Operador 1-Laplaciano. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Anderson dos Santos Gonzaga

**Simetria e quebra de simetria para problemas
do tipo Hénon envolvendo o operador 1-Laplaciano**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
UNESP - Presidente Prudente
Orientador

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
UnB - Universidade de Brasília

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
UFScar - Universidade Federal de São Carlos

Presidente Prudente

09 de Junho de 2021

Aos meus pais Francisco e Helena e aos meus irmãos
Adriano e Andréia.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmãos, Francisco e Helena e Adriano e Andréia, por todo o amor e suporte emocional que me deram nessa extensa caminhada.

Aos meus amigos do Posmac: Élide, Juan, Marcos, Paulo e Rafael, muito obrigado pelo acolhimento em minha retornada a Presidente Prudente.

À PPG-Mat que me proporcionou ter o privilégio de conhecer: Ana Livia, Camila, Carol, Eduardo, Harison, Heloísa, Junior, Laura, Kumon, Otávio, Rodrigo, Samuel, Willian.

Aos meus amigos de república André, Eli e Pedro pelos momentos de descontração em que tive incontáveis horas de conversa.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta pelos ensinamentos, paciência e dedicação.

A todos os professores e funcionários do IBILCE que tive o prazer de conhecer.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (CAPES)- Código de Financiamento 001.

“A persistência é o caminho do êxito.”
Charles Chaplin (1997. p. 118)

RESUMO

Neste trabalho, estudamos uma classe de equações do tipo Hénon que envolvem o operador 1-Laplaciano na bola unitária. Com algumas condições sobre a não-linearidade, prova-se a existência de soluções radiais e, para um parâmetro em uma determinada faixa, prova-se a existência de quebra de simetria pela presença de soluções não radiais. Nossa abordagem é baseada em um esquema de aproximação onde uma análise completa das soluções dos problemas envolvendo o operador p -Laplaciano associados é necessária.

Palavras-chave: Equação do tipo Hénon. Quebra de simetria. Operador 1-Laplaciano. Espaço de funções de variação limitada.

ABSTRACT

In this work, we study a class of Hénon-type equations which involve the 1-Laplacian operator in the unit ball. With some conditions on the non-linearity, it is proved the existence of radial solutions and, for a parameter in a certain range, it is proved the existence of symmetry breaking through the presence of non-radial solutions. The approach is based on an approximation scheme, where a thorough analysis of the solutions of problems involving the associated p -Laplacian operator is necessary.

Keywords: Hénon-type equation. Symmetry breaking. 1-Laplacian operator. Space of functions of bounded variation.

Lista de Símbolos

$\mathcal{L}^N$	Denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$.
$ \Omega $	Denota a medida de Lebesgue do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
$\mathcal{H}^{N-1}$	Denota a medida de Hausdorff de dimensão $N - 1$.
$\partial\Omega$	Denota a fronteira do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
$\Omega' \subset\subset \Omega$	Denota o conjunto $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, com $\overline{\Omega'}$ compacto.
BV	Denota o espaço das funções com variação limitada.
Du	Denota a derivada distribucional de primeira ordem de u em BV .
$ Du $	Denota a variação total da medida de u em BV .
$\Delta_p u$	$\Delta_p u = \operatorname{div}(\nabla u ^{p-2} \nabla u)$.
$\Delta_1 u$	$\Delta_1 u = \operatorname{div}\left(\frac{Du}{ Du }\right)$.
p^*	$p^* = \begin{cases} \frac{pN}{N-p}, & \text{se } p < N \\ +\infty, & \text{se } p \geq N. \end{cases}$
p_α^*	$p_\alpha^* = \begin{cases} \frac{p(N+\alpha)}{N-p}, & \text{se } p < N \text{ e } \alpha > 0 \\ +\infty, & \text{se } p \geq N. \end{cases}$
$\operatorname{sign}(v)$	$\operatorname{sign}(v) = \begin{cases} \frac{v}{ v }, & \text{se } v \neq 0 \\ 0, & \text{se } v = 0. \end{cases}$
$[a]$	Parte inteira de $a \in \mathbb{R}^N$.
$p^*(N)$	$p^*(N) = \begin{cases} \frac{(N+2)p}{N-2p+2}, & \text{se } N \text{ é par} \\ \frac{\left(\left[\frac{N}{2}\right]+2\right)p}{\left[\frac{N}{2}\right]-p+2}, & \text{se } N \text{ é ímpar.} \end{cases}$
p_l	$p_l = \frac{(l+1)p}{l+1-p}, \text{ se } p < l+1.$
q_l	$q_l = \frac{pN + (l-1)(l+1-p)}{l+1}.$
c_α^p	$c_\alpha^p := \inf_{u \in W_{0,rad}^{1,p}(B) - \{0\}} \frac{\int_B \nabla u ^p dx}{\left(\int_B x ^\alpha u ^q dx\right)^{\frac{p}{q}}}.$

$$m_{\alpha,l}^p \qquad m_{\alpha,l}^p := \inf_{u \in W_{0,l}^{1,p}(B) - \{0\}} \frac{\int_B |\nabla u|^p dx}{\left(\int_B |x|^\alpha |u|^q dx\right)^{\frac{p}{q}}}.$$

$$c_\alpha^1 \qquad c_\alpha^1 := \liminf_{p \rightarrow 1^+} c_\alpha^p.$$

$$m_{\alpha,l}^1 \qquad m_{\alpha,l}^p := \limsup_{p \rightarrow 1^+} m_{\alpha,l}^p.$$

Sumário

1	Introdução	11
2	Simetria e imersões do espaço $BV(\Omega)$	17
2.1	Espaço das funções de variação limitada	17
2.2	Teoria de Anzellotti	22
2.3	Simetria e imersões de Sobolev	23
2.4	Resultados de densidade em BV_l	30
3	Problemas do tipo Hénon com o operador 1-Laplaciano	37
3.1	Existência de solução radial para uma equação tipo Hénon envolvendo o operador p -Laplaciano	38
3.2	Solução do problema envolvendo o operador 1-Laplaciano	44
4	Quebra de simetria para a equação de Hénon envolvendo o operador 1-Laplaciano	57
4.1	Resultados de existência	57
4.2	Demonstração do Teorema 4.1	63
	Referências	70

1 Introdução

Diversos autores, no decorrer do últimos anos, têm estudado problemas que envolvem o operador 1-Laplaciano, ou seja:

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde o operador Δ_1 é formalmente definido por $\Delta_1 u := \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right)$ com a função f satisfazendo condições adequadas. Entre os primeiros artigos envolvendo o operador que foi citado anteriormente temos os de autoria dos pesquisadores F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles e JM Mazón, sendo os principais artigos [2, 3, 4]. Esses deram origem à monografia [5]. Esses autores perceberam que o espaço adequado para o estudo envolvendo o problema (1.1) deveria ser o espaço formado pelas funções de variação limitada, espaço esse, denotado por $BV(\Omega)$. Diante do que foi falado, percebemos que ao lidarmos com o operador 1-Laplaciano temos algumas dificuldades, sendo a primeira delas quando tentamos definir o quociente $\frac{Du}{|Du|}$, onde Du é apenas uma medida de Radon. Esta dificuldade é superada através da *Pairing Theory de G. Anzellotti* em [6]. Foi possível, usando essa teoria, determinar precisamente a expressão da equação de Euler-Lagrange associada a problemas envolvendo o operador 1-Laplaciano. Por exemplo, temos que segundo essa teoria podemos dizer que $u \in BV(\Omega)$ é solução de (1.1), se existe um campo vetorial $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que, $\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1$ e

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{z}) &= f(x, u) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ (\mathbf{z}, Du) &= |Du| \text{ como medida,} \\ [\mathbf{z}, \nu] &\in \operatorname{sign}(u) \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

com $(\mathbf{z}, Du)$ e $[\mathbf{z}, \nu]$ sendo definidos na Seção 2.2.

Além do mais, entre os primeiros trabalhos sobre este assunto, citamos o de Kawohl em [27] que apresenta o problema de torção com $f(x, u) = 1$ em (1.1). Em [17], Demengel usou a simetria do domínio para obter soluções nodais para problemas envolvendo o operador 1-Laplaciano e uma não-linearidade com crescimento crítico, o que foi feito tomando o limite de problemas envolvendo o operador p -Laplaciano.

Em [32], Anna Mercaldo, Sergio Segura de León e Cristina Trombetti estudaram o problema

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto aberto, limitado com fronteira Lipschitz e $N \geq 2$. Os autores procuraram soluções de (1.3), tomando o limite da família de problemas envolvendo o operador p -Laplaciano. Para isso, eles consideraram a função f em diversos casos, sendo o caso mais geral o que considera $f \in W^{-1,\infty}(\Omega)$, onde $W^{-1,\infty}(\Omega)$ é o dual de $W_0^{1,1}(\Omega)$. Esses mesmos autores estudaram em [31] a existência de soluções para o problema (1.3), novamente tomando o limite de problemas envolvendo o operador p -Laplaciano, considerando, porém, $f \in L^1(\Omega)$. Chegaram ainda à conclusão de que (1.3) admite solução, desde que $\|f\|_{W^{-1,\infty}(\Omega)} \leq 1$.

Em [30], os autores estudaram o seguinte problema de Neumann para o operador 1-Laplaciano,

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = 0 & \text{em } \Omega \\ \left[\frac{Du}{|Du|}, \nu \right] = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde ν é o vetor normal exterior a fronteira de Ω , com $g \in L^\infty(\partial\Omega)$ tal que $\int_{\partial\Omega} g d\mathcal{H}^{N-1} = 0$. Os autores consideraram uma família de problemas envolvendo o operador p -Laplaciano, mostrando que quando $p \rightarrow 1^+$ as soluções destes convergem para uma função mensurável u . Provaram ainda que as propriedades de u dependem da limitação da função g através de uma norma adequada, ou seja, que se g for pequeno o suficiente então, u é uma função de variação limitada, entretanto se g for grande o suficiente então, u assume o valor infinito em um conjunto de medida positiva.

Em [28], M. Latorre, F. Oliva, F. Petitta, e S. Segura estudaram o problema de Dirichlet para uma equação elíptica envolvendo o operador 1-Laplaciano, a saber:

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = h(u)f(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5)$$

onde Ω é um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^N$ com fronteira lipschitziana, $f \in L^1(\Omega)$, $f(x) \geq 0$ para $x \in \Omega$ e h sendo uma função real contínua que pode ser singular em zero. Com o intuito de garantir a existência, a não-existência e a singularidade de soluções não-negativas, os autores procuraram investigar os intervalos ideais para tais hipóteses.

Conforme [35], Molino e Segura estudaram o seguinte problema de Dirichlet para o operador 1-Laplaciano

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = |u|^{q-2}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) é um aberto limitado com fronteira lipschitziana e $0 < q < \frac{1}{N-1}$. Visto que existem algumas dificuldades em lidar com o operador 1-Laplaciano, eles encontraram, então, soluções não triviais u_p para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{q-2}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.7)$$

com $0 < q < p^* - 1$ onde $p^* = \frac{pN}{N-p}$. Essas soluções foram obtidas através do *Teorema do Passo da Montanha* de Ambrosetti e Rabinowitz. Depois, foi possível mostrar que o limite $u = \lim_{p \rightarrow 1} u_p$ é uma solução não-trivial para (1.6).

Figueiredo e Pimenta em [22], foram os primeiros a usarem argumentos de tipo Nehari a fim de obter soluções de variação limitada para o operador 1-Laplaciano, isto é, eles conseguiram provar resultados de existência de minimizantes para funcionais localmente lipschitzianos, sobre um conjunto cuja definição é inspirada na variedade de Nehari. Estes autores definiram o funcional energia do problema, $I : BV(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$I(u) := \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_{\Omega} F(u) dx,$$

onde $I(u)$ é escrito como $I_1(u) - I_2(u)$, com o funcional $I_1(u) = \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1}$ sendo convexo e localmente lipschitziano e $I_2(u) = \int_{\Omega} F(u) dx$, com $I_2 \in C^1(BV(\Omega))$. Assim, os autores mostraram que o ínfimo do funcional I sobre o conjunto

$$\mathcal{N} = \{u \in BV(\Omega) \setminus \{0\} ; I'_1(u)u = I'_2(u)u\}$$

é alcançado e é um ponto crítico. Consequentemente, obtiveram uma solução não-trivial do tipo ground-state para o problema envolvendo o operador 1-Laplaciano. Podemos, ainda, citar os trabalhos recentes [20, 21] que são dos próprios autores que obtiveram soluções positivas e nodais, respectivamente, para problemas semelhantes.

Em 1973, Hénon propôs em [25], o seguinte problema

$$-\Delta u = |x|^{\alpha} |u|^{q-2} u \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad (1.8)$$

para estudar a estabilidade dos aglomerados globulares, que são agrupamentos de estrelas aproximadamente esféricos, em astrofísica. De fato, os anos de 1960 a 1975, os astrofísicos começaram a se dedicar de forma intensiva para conseguirem entender e detectar a existência de buracos negros em aglomerados globulares. É de se destacar que por mais que existam teorias e hipóteses quanto ao que ocorre nessas regiões do espaço, não há qualquer prova concreta que aponte o que de fato acontece dentro de um buraco negro. Na verdade, suspeita-se que as leis universais da física perdem seu valor tanto dentro quanto no horizonte de eventos desses buracos.

Além da aplicação supracitada para a equação de Hénon, podemos citar os artigos [11, 9, 10], onde é estudada a existência de modelos de dinâmica estelar estacionários equivalentes à equação (1.8) para $N = 3$.

Consideremos o seguinte problema de Dirichlet relativo à equação de Hénon

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^{\alpha} |u|^{q-2} u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.9)$$

Em 1982, Ni em [34] foi capaz de mostrar a existência de uma solução radial do problema (1.9), quando $q \in (2, 2_{\alpha}^*)$, utilizando o Teorema do Passo da Montanha. Foi usado ainda o fato de que o espaço $H_{0,rad}^1(\Omega) := \{u \in H_0^1(\Omega) : u(x) = u(|x|)\}$ está imerso compactamente em $L_{\alpha}^q(\Omega)$, para q no intervalo acima. Ainda nesta linha, conforme [16], Clément, de Figueiredo e Mitidieri estudaram o problema

$$\begin{cases} -Lu = |x|^{\alpha} |u|^{q-2} u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.10)$$

onde $Lu = \operatorname{div}(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. Por meio de uma redução a um problema unidimensional e usando o Teorema do Passo da Montanha, eles provaram a existência de soluções radiais de (1.10) para $p < q < \frac{p(N+\alpha)}{N-p(a+1)}$, estendendo o resultado de Ni em [34] para este operador mais geral. Observe que p -Laplaciano Δ_p é um caso particular deste operador L .

Motivados por [34], no Capítulo 3, estudaremos a existência de solução radial para o seguinte problema do tipo Hénon envolvendo o operador 1-Laplaciano:

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = |x|^\alpha f(u) & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad (1.11)$$

em que $B = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $\alpha > 0$ e f é uma função localmente Hölder contínua onde $f(s) \geq 0$ se $s > 0$ e que satisfaz:

(f_1) existe $a > 0$ tal que

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{|s|^a} = 0, \text{ uniformemente em } x \in B,$$

(f_2) existem $C > 0$ e $q \in (0, 1_\alpha^* - 1)$ tal que

$$|f(s)| \leq C(1 + |s|^q), \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

$$\text{onde } 1_\alpha^* = \frac{N+\alpha}{N-1},$$

(f_3) existe $\kappa > 1$ tal que

$$0 < \kappa F(s) \leq f(s)s,$$

para todo $s > 0$, onde $F(t) = \int_0^t f(s)ds$.

O resultado principal desse capítulo é o seguinte.

Teorema 1.1. *Supondo $N \geq 2$ e que f satisfaz as condições (f_1) – (f_3), então existe uma solução não-negativa $u \in BV_{rad}(B)$ de (1.11).*

O primeiro passo é aplicar as ideias introduzidas em [34] para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |x|^\alpha f(u) & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad (1.12)$$

encontrando assim uma solução radial $u_p \in W_{0,rad}^{1,p}(B)$ para (1.11), no nível do Passo da Montanha. Depois, usamos alguns argumentos de [35] para mostrarmos que (u_p) converge para u , quando $p \rightarrow 1^+$ onde $u \in BV_{rad}(B)$ satisfaz (1.11). Assim, uma grande dificuldade, é assegurar que as constantes que aparecerão na prova não dependam de p . Outra grande dificuldade que precisamos superar é a verificação de que a função limite u não é trivial. Vale a pena ressaltar que a condição de contorno de Dirichlet não é satisfeita no sentido usual, sendo que uma formulação mais fraca deve ser introduzida.

Na argumentação para a demonstração do Teorema 1.1, foi necessário estabelecermos as imersões de BV_{rad} em $L_\alpha^q(B)$, em analogia ao que se faz em [18] com o $W_{0,rad}^{1,p}(B)$. Tal resultado mostrou-se desafiador e acreditamos que seja interessante por si só. Temos, então, o seguinte resultado para imersão radial que se encontra no Capítulo 2, em que apresentamos definições e resultados fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Teorema 1.2. *Seja $\alpha > 0$, então a imersão*

$$BV_{rad}(B) \hookrightarrow L^r_\alpha(B)$$

*é contínua para $1 \leq r \leq 1^*_\alpha = \frac{N+\alpha}{N-1}$ e compacta para $1 \leq r < 1^*_\alpha = \frac{N+\alpha}{N-1}$.*

Ao mostramos que o problema (1.11) possui solução radial, surge a questão acerca da existência de uma solução não-radial para tal problema.

Por meio de algoritmos computacionais, Chen, Ni e Zhou, em [15], obtiveram soluções numéricas não-radiais de (1.7) em $\mathbb{R}^2$. Com isso, foi possível sugerir que as soluções de ground-state deste problema, não são radialmente simétricas. Este fato foi confirmado posteriormente quando, em [36], Smets, Su e Willem provaram que para q subcrítico e α suficientemente grande, existem soluções não-radiais com menores níveis de energia quando comparadas com aquela encontrada por Ni.

Em [13], Carrião, de Figueiredo e Miyagaki provaram resultados sobre a existência e multiplicidade de soluções não-radiais para a classe de problemas elípticos quasilineares com termos singulares como no problema (1.10). Em sua argumentação foi essencial a imersão compacta dos espaços de funções com uma certa simetria (esférica ou cilíndrica) em espaços de Lebesgue com peso. Foi muito importante ainda a comparação entre

$$c_\alpha^p := \inf_{u \in W_{0,rad}^{1,p}(B) - \{0\}} \frac{\int_B |\nabla u|^p dx}{\left(\int_B |x|^\alpha |u|^q dx \right)^{\frac{p}{q}}}$$

e

$$m_{\alpha,l}^p := \inf_{u \in W_{0,l}^{1,p}(B) - \{0\}} \frac{\int_B |\nabla u|^p dx}{\left(\int_B |x|^\alpha |u|^p dx \right)^{\frac{p}{q}}}.$$

Com efeito, eles mostraram que, para α suficientemente grande, $m_{\alpha,l}^p < c_\alpha^p$, o que implica na existência de soluções não-radiais.

No Capítulo 4, abordamos a questão de estender os resultados de [13] ao operador 1-Laplaciano. Estudamos, mais especificamente, o problema:

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = |x|^\alpha |u|^{q-2} u & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases} \quad (1.13)$$

Antes de mencionar o resultado principal deste capítulo, devemos definir

$$p^*(N) := \begin{cases} \frac{(N+2)p}{N-2p+2} & \text{se } N \text{ é par;} \\ \left(\left[\frac{N}{2} \right] + 2 \right) p & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ \left[\frac{N}{2} \right] - p + 2 & \end{cases}$$

onde $[a]$ denota a parte inteira $a \in \mathbb{R}$ e $p \geq 1$.

O resultado principal é o seguinte.

Teorema 1.3. *Suponha $N \geq 4$ e $q \in (1, 1^*(N))$, então existe $\alpha_0 > 0$ tal que, o problema (1.13) tem uma solução de variação limitada não-trivial e não-radial, para $\alpha > \alpha_0$.*

Para a prova desse resultado, tal como na do Teorema 1.2, é necessário estudar resultados de imersão no espaço $BV_l(B)$ em $L_\alpha^r(B)$, onde

$$BV_l(B) = \{u \in BV(B) : u(y, z) = u(|y|, |z|), \forall x = (y, z) \in B\},$$

onde $2 \leq N - l \leq l$ e $p \geq 1$. Mais especificamente, provamos o resultado.

Teorema 1.4. *Sejam l, N, p_l, q_l e α como no Teorema 2.31, então a imersão $BV_l(B) \hookrightarrow L_\alpha^q(B)$ é contínua se $1 \leq q \leq 1_l$ e compacta se $1 \leq q < 1_l$.*

Acreditamos que tal resultado, o que também é inédito, também tenha interesse por si só e que possa ainda ser visto como uma extensão de [18][Corolário 1.5].

A argumentação para a demonstração do Teorema 1.3 se baseia em um análise cuidadosa dos minimizantes de c_α^p e $m_{\alpha,l}^p$, os quais são atingidos por funções que, depois de reescalados, são soluções de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |x|^\alpha |u|^{q-2} u & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases} \quad (1.14)$$

Além disso é necessário garantir que, quando $p \rightarrow 1^+$, os limites de c_α^p e $m_{\alpha,l}^p$, não se colapsem. Por fim, vale mencionar que foi necessário desenvolver novos argumentos que nos permitissem demonstrar que as soluções do problema (1.14), de fato constituíam uma família limitada em $BV_l(B)$. Tal dificuldade surgiu da natureza de tais soluções, as quais não têm caracterização minimax como em [35] e tampouco eram minimizantes sobre um conjunto do tipo Nehari, como em [20].

2 Simetria e imersões do espaço $BV(\Omega)$

Neste capítulo, apresentamos propriedades básicas do espaço das funções de variação limitada. Posteriormente, apresentamos alguns resultados da *pairing theory* de G. Anzellotti em [6], os quais dão sentido ao produto de campos vetoriais com baixa regularidade, pela derivada distribucional de funções de BV . Por fim, mas não menos importante, mostramos alguns resultados de imersão entre os espaços de funções de variação limitada com simetria radial e parcial e os espaços L^p com peso, sendo estes resultados de extrema importância para o que abordamos nesse trabalho.

2.1 Espaço das funções de variação limitada

Vamos apresentar, nesta seção, resultados básicos sobre o espaço das funções de variação limitada $BV(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ é um aberto com fronteira lipschitziana. Tais resultados podem ser encontrados em [7, 23]. Para tanto, apresentamos inicialmente a definição de medida de Radon.

Definição 2.1. Seja μ uma medida de Borel em Ω e $E \subset \Omega$ um boreliano. Dizemos que μ é regular externa em $E \subset \Omega$, se

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(A) : A \supset E, A \text{ é aberto de } \Omega \}.$$

Dizemos que μ é regular interna em $E \subset \Omega$, se

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(K) : K \subset E, K \text{ é compacto de } \Omega \}.$$

Definição 2.2. Dizemos que uma medida μ é uma medida de Radon em Ω , se é uma medida de Borel que é finita em compactos, regular externa em todos os borelianos e regular interna em abertos cujo espaço é denotado por $\mathcal{M}(\Omega)$.

Definição 2.3. Uma medida ν é dita absolutamente contínua com respeito a medida μ , denotando-se $\nu \ll \mu$, se $\nu(E) = 0$, para todo $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = 0$. Duas medidas μ e ν em $(\Omega, \mathcal{M})$ são singulares, denotando-se $\nu \perp \mu$, se existem $E, F \in \mathcal{M}$ tais que $E \cap F = \emptyset$, $E \cup F = \Omega$ e $\mu(E) = \nu(F) = 0$.

Vamos definir, a seguir, o espaço de funções com o qual trabalharemos nesta tese.

Definição 2.4. Uma função $u \in L^1(\Omega)$ é chamada uma função de variação limitada se suas derivadas distribucionais de primeira ordem são geradas por medidas de Radon. Denotamos por $BV(\Omega)$ o conjunto de tais funções, isto é,

$$BV(\Omega) = \{ u \in L^1(\Omega) : Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N) \}.$$

Do fato de que $\mathcal{M}(\Omega)$ é igual ao dual topológico de $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ e como $C_c^1(\Omega, \mathbb{R})$ é denso em $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ com respeito à norma uniforme, o teorema a seguir fornece uma caracterização quantitativa para os elementos de $BV(\Omega)$.

Proposição 2.5. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) $u \in BV(\Omega)$;
- ii) $u \in L^1(\Omega)$ e $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{M}(\Omega)$, para todo $i = 1, \dots, N$;
- iii) $u \in L^1(\Omega)$ e $\|Du\| := \sup \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \psi D_i u; \psi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^N), |\psi|_{\infty} \leq 1 \right\} < +\infty$;
- iv) $u \in L^1(\Omega)$ e $\int_{\Omega} |Du| := \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \psi dx; \psi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), |\psi|_{\infty} \leq 1 \right\} < +\infty$.

O resultado anterior é encontrado na seção 10.1 da referência [7] como uma definição equivalente para o espaço BV. Além disso, pelo Teorema de Representação de Riesz-Alexandroff (ver [7], Teorema 2.4.6)

$$\|Du\| = \int_{\Omega} |Du|. \quad (2.1)$$

Observação 2.6. Dado $u \in BV(\Omega)$, do Teorema de Radon-Nikodym (ver [7] [Teorema 4.2.1]) podemos decompor sua derivada distribucional como

$$Du = D^a u + D^s u,$$

onde $D^a u$ é absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue $\mathcal{L}^N$ em $\mathbb{R}^N$, enquanto $D^s u$ é singular com relação à mesma medida. Além disso, denotamos a variação total de Du como $|Du|$.

O espaço $BV(\Omega)$ é um espaço de Banach quando dotado da norma

$$|u|_{BV} := \int_{\Omega} |Du| + \int_{\Omega} |u| dx.$$

Da Observação 2.6 segue que $W^{1,1}(\Omega)$ é um subespaço de $BV(\Omega)$ e que a norma $\|\cdot\|_{BV}$ é uma extensão da norma usual em $W^{1,1}(\Omega)$, ou seja, dado $u \in W^{1,1}(\Omega)$, tem-se que

$$|u|_{BV} = \int_{\Omega} |Du| + \int_{\Omega} |u| dx = \int_{\Omega} |\nabla u| dx + \int_{\Omega} |u| dx = |u|_{W^{1,1}(\Omega)}.$$

Proposição 2.7. $W^{1,1}(\Omega)$ é um subespaço próprio de $BV(\Omega)$.

Demonstração. Mostremos que de fato $W^{1,1}(\Omega) \subsetneq BV(\Omega)$. Seja $E \subset \mathbb{R}^N$ aberto com fronteira suave tal que $\mathcal{H}^{N-1}(\partial E) < +\infty$. Notamos que $\chi_E \in L^1(\mathbb{R}^N)$, onde χ_E representa a função característica em E . Notemos ainda que, pelo Teorema da Divergência

$$\int_{\Omega} \chi_E \operatorname{div}(\psi) dx = \int_E \operatorname{div}(\psi) dx = \int_{\partial E} \psi \cdot \nu \mathcal{H}^{N-1} \leq \mathcal{H}^{N-1}(\partial E) < +\infty,$$

para cada $\psi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, com $\|\psi\|_{\infty} \leq 1$, onde $\nu(x)$ denota o vetor normal exterior em $x \in \partial E$. Assim, pela Proposição 2.5, temos que $\chi_E \in BV(\Omega)$. Porém, $\chi_E \notin W^{1,1}(\Omega)$, pois

$$D\chi_E = -\nu \cdot \mathcal{H}^{N-1}|_{\partial E},$$

de forma que $D\chi_E$, por consistir em uma medida singular com respeito à de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$, não é gerada por uma função de $L^1(\Omega)$.

□

Pela maneira com o qual o espaço $BV(\Omega)$ foi definido, não é possível afirmar que este contém $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ como um subconjunto denso com respeito à topologia da norma. Disso surge a necessidade de introduzir uma noção de convergência que torne o espaço $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ denso em $BV(\Omega)$ com respeito à topologia induzida.

Definição 2.8. Dizemos que $(u_n) \subset BV(\Omega)$ converge para $u \in BV(\Omega)$ no sentido da convergência estrita, se

$$u_n \rightarrow u, \quad \text{em } L^1(\Omega)$$

e

$$\int_{\Omega} |Du_n| \rightarrow \int_{\Omega} |Du|,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

O próximo teorema refere-se a semicontinuidade inferior da norma em $BV(\Omega)$ com respeito à topologia de $L^1(\Omega)$.

Lema 2.9. Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ uma sequência limitada e tal que $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, então $u \in BV(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |Du| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Du_n|. \quad (2.2)$$

Demonstração. Seja $\psi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ de modo que $|\psi|_{\infty} \leq 1$. Da convergência $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$ e por [12] [Teorema 9.9], existe $h \in L^1(\Omega)$, de forma que a menos de subsequência,

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{em quase todo ponto } x \in \Omega,$$

e

$$|u_n(x)| \leq h(x), \quad \text{em quase todo ponto } x \in \Omega.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_n(x) \operatorname{div} \psi(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \psi(x) dx. \quad (2.3)$$

Do fato de que $(u_n) \subset BV(\Omega)$, então pela Proposição 2.5,

$$\int_{\Omega} u_n \operatorname{div} \psi dx \leq \int_{\Omega} |Du_n|.$$

Assim, tomando o $\liminf$ em ambos lados da última desigualdade e usando (2.3) obtemos

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \psi dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |Du_n| \quad (2.4)$$

Como $\psi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ é arbitrário, tomando o supremo sobre tais $|\psi|_{\infty} \leq 1$ na desigualdade acima, pela Proposição 2.5 tem-se que $u \in BV(\Omega)$ e (2.2) é satisfeita.

□

Teorema 2.10. *O espaço $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ é denso em $BV(\Omega)$ equipado com a convergência estrita. Consequentemente, $C^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $BV(\Omega)$ com a convergência estrita.*

Demonstração. Ver [7][Teorema 10.1.2]. $\square$

Como consequência desse resultado, para todo $u \in BV(\Omega)$ existe uma sequência (u_n) em $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^1(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} |\nabla u_n| dx \longrightarrow \int_{\Omega} |Du|.$$

Teorema 2.11. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto com fronteira lipschitziana. Então a imersão $BV(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua para $q \in [1, 1^*]$ e compacta para $q \in [1, 1^*)$, onde $1^* = \frac{N}{N-1}$.*

Demonstração. Ver [7][Teorema 10.1.3, Teorema 10.1.4]. $\square$

Em [1] está bem definido um operador de imersão $BV(\Omega) \hookrightarrow L^1(\partial\Omega)$, de forma que a norma

$$\|u\|_{BV(\Omega)} := \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1},$$

é equivalente à norma $|u|_{BV(\Omega)}$, conforme mostra o próximo lema.

Lema 2.12. *A norma $\|u\|_{BV(\Omega)}$ é equivalente à norma $|u|_{BV(\Omega)}$.*

Demonstração. De [7][Teorema 10.2.1] existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \leq C |u|_{BV(\Omega)},$$

assim

$$\begin{aligned} \|u\|_{BV(\Omega)} &= \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\leq \int_{\Omega} |Du| + C |u|_{BV(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} |Du| + C \int_{\Omega} |Du| + C \int_{\Omega} |u| \\ &\leq (1 + C) \left(\int_{\Omega} |Du| + \int_{\Omega} |u| \right) \\ &= (1 + C) |u|_{BV(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por outro lado, pela Desigualdade de Poincaré (ver [33][Proposição 2]) tem-se:

$$\begin{aligned} |u|_{BV(\Omega)} &= \int_{\Omega} |Du| + \int_{\Omega} |u| dx \\ &\leq \int_{\Omega} |Du| + C \left(\int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \right) \\ &= (1 + C) \int_{\Omega} |Du| + C \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\leq (1 + C) \left(\int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \right) \\ &= (1 + C) \|u\|_{BV(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

De (2.5) e (2.6) temos a equivalência entre as normas $\|u\|_{BV(\Omega)}$ e $|u|_{BV(\Omega)}$.

□

Enunciamos, no próximo resultado, uma versão da Fórmula de Green para funções em $BV(\Omega)$.

Teorema 2.13. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira lipschitziana, então existe um operador linear e contínuo $\gamma : BV(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ tal que:*

i) $\gamma(w) = w|_{\partial(\Omega)}$, para toda $w \in C(\overline{\Omega}) \cap BV(\Omega)$;

ii) para todo $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ vale a seguinte versão generalizada da fórmula de Green:

$$\int_{\Omega} w \operatorname{div}(\varphi) dx + \int_{\Omega} \varphi Dw = \int_{\partial\Omega} \gamma(w) \varphi \cdot \nu d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Demonstração. Ver [7] [Teorema 10.2.1].

□

Por fim, como um consequência do Lema 2.9 temos o seguinte resultado.

Lema 2.14. *Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ uma sequência limitada e tal que $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, então $u \in BV(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |Du_n| + \int_{\partial\Omega} |u_n| d\mathcal{H}^{N-1} \right). \quad (2.7)$$

Demonstração. De fato, seja $B \subset \mathbb{R}^N$, uma bola tal que $\Omega \subset\subset B$. Para cada $v \in BV(\Omega)$, consideremos

$$\bar{v}(x) = \begin{cases} v(x), & \text{se } x \in \Omega \\ 0, & \text{se } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Então $\bar{v} \in BV(B)$ e ainda

$$\int_B |D\bar{v}| = \int_{\Omega} |Dv| + \int_{\partial\Omega} |v| d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Ainda, note que, se $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, então $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ em $L^1(B)$. Assim, pela semicontinuidade inferior da norma em $BV(B)$ com respeito à topologia de $L^1(B)$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} &= \int_B |D\bar{u}| \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_B |D\bar{u}_n| \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} |Du_n| + \int_{\partial\Omega} |u_n| d\mathcal{H}^{N-1} \right). \end{aligned}$$

□

2.2 Teoria de Anzellotti

Apresentamos nesta seção algumas definições e resultados da *pairings theory* desenvolvida por Anzellotti em [6], pois em vários argumentos que usamos neste trabalho, é preciso ter uma espécie de *fórmula de Green* para expressões como $w \operatorname{div}(\mathbf{z})$, onde $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\operatorname{div}(\mathbf{z})$ é uma medida limitada e $w \in BV(\Omega)$. Para isso temos que lidar de alguma forma com um tipo de produto entre $\mathbf{z}$ e Dw .

Definição 2.15. Seja $X_\mu(\Omega) := \{\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N); \operatorname{div}(\mathbf{z}) \in \mathcal{M}(\Omega)\}$. Definimos $\langle \mathbf{z}, w \rangle : X_\mu(\Omega) \times (BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap C(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle \mathbf{z}, w \rangle_{\partial\Omega} := \int_{\partial\Omega} \mathbf{z}(x) \cdot \nu(x) w(x) d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Teorema 2.16. *Seja Ω domínio limitado e ν o campo normal exterior a $\partial\Omega$. Então existe uma aplicação bilinear $\langle \mathbf{z}, w \rangle : X_\mu(\Omega) \times (BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap C(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

- (i) $\langle \mathbf{z}, w \rangle_{\partial\Omega} := \int_{\partial\Omega} \mathbf{z}(x) \cdot \nu(x) w(x) d\mathcal{H}^{N-1}$ para todo $\mathbf{z} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e
- (ii) $|\langle \mathbf{z}, w \rangle|_{\partial\Omega} \leq \|\mathbf{z}\|_{\infty, \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} |w| d\mathcal{H}^{N-1}$ para todo $\mathbf{z} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $w \in (BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap C(\Omega))$.

Demonstração. Ver [6][Teorema 1.1].

□

Para definir um análogo da Fórmula de Green, também é necessário descrever o traço fraco de $\mathbf{z}$.

Teorema 2.17. *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$. Então existe uma aplicação linear $\gamma : X_\mu(\Omega) \rightarrow L^\infty(\partial\Omega)$ tal que*

- (i) $\|\gamma_{\mathbf{z}}\|_{\infty, \partial\Omega} \leq \|\mathbf{z}\|_{\infty, \Omega}$;
- (ii) $\langle \mathbf{z}, \nu \rangle = \int_{\Omega} \gamma_{\mathbf{z}}(x) w(x) d\mathcal{H}^{N-1}$ para todo $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap C(\Omega)$;
- (iii) $\gamma_{\mathbf{z}}(x) = \mathbf{z}(x) \cdot \nu(x)$ em $\partial\Omega$ quando $\mathbf{z} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Ver [6] [Teorema 1.2].

□

A função $\gamma_{\mathbf{z}}(x)$ é o traço fraco definido sobre $\partial\Omega$, da componente normal de $\mathbf{z}$, a qual denotamos por $[\mathbf{z}, \nu]$.

Definição 2.18. Para todo $A \subset\subset \Omega$, seja $\mathbf{z} \in X_\mu(\Omega)$ e $w \in (BV(A) \cap L^\infty(A) \cap C(A))$, definimos a distribuição $(\mathbf{z}, Dw) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ como

$$\langle (\mathbf{z}, Dw), \varphi \rangle := - \int_{\Omega} w \varphi \operatorname{div}(\mathbf{z}) dx - \int_{\Omega} w \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx.$$

Por Anzellotti [6][Teorema 1.5, Corolário 1.6], tem-se que, para todo aberto $A \subset\subset \Omega$ e todo $\varphi \in C_0^\infty(A)$,

$$|\langle (\mathbf{z}, Dw), \varphi \rangle| \leq \sup |\varphi| \|\mathbf{z}\|_{\infty, A} \int_A |Dw|.$$

Assim, a função $(\mathbf{z}, Dw)$ é uma medida Radon em Ω . Além disso, as medidas $(\mathbf{z}, Dw)$ e $|(\mathbf{z}, Dw)|$ são absolutamente contínuas com respeito a $|Dw|$ em Ω e vale ainda

$$|\langle (\mathbf{z}, Dw), \varphi \rangle| \leq |\varphi|_\infty |\mathbf{z}|_{\infty, A} \int_A |Dw|,$$

para todo conjunto de Borel B e para todo aberto $A \subset\subset \Omega$ tal que $B \subset A \subset \Omega$.

Com essas definições, é possível enunciar a seguinte versão da fórmula de Green.

Proposição 2.19. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ com fronteira Lipschitz e seja $w \in (BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap C(\Omega))$ e $\mathbf{z} \in X(\Omega)_\mu$. Então*

$$\int_\Omega w \operatorname{div}(\mathbf{z}) dx + \int_\Omega (\mathbf{z}, Dw) = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z}, \nu] w d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Demonstração. Ver [6] [Teorema 1.9].

□

2.3 Simetria e imersões de Sobolev

Seja B a bola unitária, $N \geq 2$. Sejam $W_{0,rad}^{1,p}(B) := \{u \in W_{0,rad}^{1,p}(B) : u(x) = u(|x|)\}$ e $L_\alpha^q(B) := \{u : B \rightarrow \mathbb{R} : \int_B |x|^\alpha |u|^q dx < +\infty\}$.

Lema 2.20. *O operador $T : W_{0,rad}^{1,p}(B) \rightarrow L_\alpha^q(B)$ com $1 \leq p < N$ e $\alpha > 0$ definido por $T(u) = |x|^\alpha u$, é contínuo para $1 \leq q \leq p_\alpha^* = \frac{p(N+\alpha)}{N-p}$ e compacto para $1 \leq q < p_\alpha^* = \frac{p(N+\alpha)}{N-p}$.*

Demonstração. Pelo Lema Radial (ver [18][Teorema 1.1]) temos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |T(u)|_{L_\alpha^q(B)}^q &= \int_B |x|^\alpha |u|^q dx \\ &\leq \int_B \frac{|x|^\alpha C_1^q \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^q}{|x|^{\frac{(N-p)q}{p}}} dx \\ &\leq C_1^q \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^q \int_B |x|^{\alpha - \frac{(N-p)q}{p}} dx \\ &= C_1^q \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^q \left(\omega_n \int_0^1 r^{\alpha - \frac{(N-p)q}{p}} r^{N-1} dr \right) \\ &= C_2 \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^q \int_0^1 r^{\alpha - \frac{(N-p)q}{p} + N-1} dr, \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde $C_2 = C_1^q \omega_n$, com ω_n sendo a área da superfície da bola unitária em $\mathbb{R}^N$. Notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^{\alpha - \frac{(N-p)q}{p} + N-1} dr &= \left[r^{\alpha - \frac{(N-p)q}{p} + N} \right]_0^1 < +\infty \Leftrightarrow \alpha - \frac{(N-p)q}{p} + N \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha + N \geq \frac{(N-p)q}{p} \\ &\Leftrightarrow \frac{p(N+\alpha)}{N-p} \geq q. \end{aligned}$$

Então, de (2.8)

$$|T(u)|_{L_\alpha^q(B)} \leq C \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}, \quad (2.9)$$

onde $C = \left(C_2 \int_0^1 r^{\alpha - \frac{(N-p)q}{p}} N^{-1} dr \right)^{\frac{1}{q}}$. Portanto, T é um operador contínuo.

Provemos agora que T é um operador compacto. De fato, inicialmente consideremos $a \in (0, 1)$. Pela Desigualdade de Hölder, deduzimos

$$\begin{aligned} \int_B |x|^\alpha |u|^q dx &= \int_B |u|^a |x|^\alpha |u|^{q-a} dx \\ &\leq \left[\int_B (|u|^a)^{\frac{1}{a}} dx \right]^a \left[\int_B (|x|^\alpha |u|^{q-a})^{\frac{1}{1-a}} dx \right]^{1-a} \\ &= \left(\int_B |u| dx \right)^a \left(\int_B |x|^{\frac{\alpha}{1-a}} |u|^{\frac{q-a}{1-a}} dx \right)^{1-a}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Precisamos mostrar que

$$\left(\int_B |x|^{\frac{\alpha}{1-a}} |u|^{\frac{q-a}{1-a}} dx \right) \leq C \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^{\frac{q-a}{1-a}}, \quad (2.11)$$

onde a constante $C > 0$ é dada em (2.9). Porém, por (2.9) temos que (2.11) se verifica, se

$$1 \leq \frac{q-a}{1-a} \leq \frac{p}{N-p} \left(N + \frac{\alpha}{1-a} \right). \quad (2.12)$$

Porém,

$$\begin{aligned} \frac{q-a}{1-a} \leq \frac{p}{N-p} \left(\frac{N - Na + \alpha}{1-a} \right) &\Leftrightarrow a(N - p - Np) \geq Nq - pq - pN - p\alpha \\ &\Leftrightarrow a \leq \frac{Nq - pq - pN - p\alpha}{N - p - Np} = \frac{pq + pN + p\alpha - Nq}{(N+1)p - N}. \end{aligned}$$

Mas tal escolha de a , é possível, desde que

$$\frac{pq + pN + p\alpha - Nq}{(N+1)p - N} > 0.$$

Para isso, basta que

$$q < \frac{p(N + \alpha)}{N - p}.$$

Como por hipótese, $q < p_\alpha^*$, segue que (2.12) se verifica e portanto também (2.11). Substituindo (2.11) em (2.10) obtemos

$$\begin{aligned} \int_B |x|^\alpha |u|^q dx &\leq \left(\int_B |u| dx \right)^a \left(C \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^{\frac{q-a}{1-a}} \right)^{1-a} \\ &= C^{1-a} \left(\int_B |u| dx \right)^a \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^{q-a}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Assim, se (u_n) é uma sequência limitada em $W_{0,rad}^{1,p}(B)$, então pela compacidade da imersão $W_{0,rad}^{1,p}(B) \hookrightarrow L^1(B)$ existe $u \in W_{0,rad}^{1,p}(B)$ tal que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^1(B) \quad (2.14)$$

e por (2.13)

$$\begin{aligned} |T(u_n - u)|_{L_\alpha^q(B)}^q &\leq C^{1-a} |u_n - u|_{L^1(B)}^a \|u_n - u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^{q-a} \\ &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Portanto, T é um operador compacto. □

Definimos

$$BV_{rad}(B) := \{ u \in BV(B) : u(x) = u(|x|) \},$$

ou, de forma equivalente, podemos definir

$$BV_{rad}(B) = \{ u \in BV(B) : u(Sx) = u(x), \forall x \in B, \forall S \in O(N) \},$$

onde $O(N)$ é o grupo ortogonal matricial real $N \times N$.

Observação 2.21. Usando os mesmos argumentos que no Lema 2.9, é possível provar que, se $(u_n) \subset BV_{rad}(B)$ é limitada e $u_n \rightarrow u$ em $L_\alpha^r(B)$, para $1 \leq r < 1_\alpha^*$, então $u \in BV_{rad}(B)$ e

$$\|u\|_{BV_{rad}(B)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{BV_{rad}(B)}.$$

A seguir, enunciamos e provamos um lema de densidade que é essencial nos teoremas de imersão. Para isso, precisamos inicialmente de algumas definições e observações.

Definição 2.22. Dizemos que $(u_n) \subset BV_{rad}(B)$ converge para $u \in BV_{rad}(B)$ com respeito à topologia da convergência estrita se

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L_\alpha^1(B)$$

e

$$\int_B |Du_n| \longrightarrow \int_B |Du|.$$

A próxima definição e as duas próximas proposições podem ser encontradas em [7].

Definição 2.23. Uma função regularizante $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é definida como $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} \rho(\frac{x}{\varepsilon})$, onde ρ é uma função não-negativa que satisfaz $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) dx = 1$, com $\text{supp}(\rho_\varepsilon) \subset \overline{B_1(0)}$. Também, para todo $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ define-se:

$$\rho_\varepsilon \star \mu(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x - y) \mu(y).$$

Proposição 2.24. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1, \infty)$, então para quaisquer funções regularizantes (ρ_n) valem as seguintes propriedades:*

- (i) $f \star \rho_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$,
- (ii) $|f \star \rho_n|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq |f|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$,
- (iii) $f \star \rho_n \longrightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Demonstração. Ver [7][Proposição 2.2.4].

□

Proposição 2.25. *Considerando ρ_ε , $\rho_\varepsilon \star \mu$ como na Definição 2.23 acima, então $\rho_\varepsilon \star \mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$, e além disso, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ valem as seguintes propriedades:*

- (i) $\rho_\varepsilon \star \mu \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$,
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_\varepsilon \star \mu| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\mu|$,
- (iii) $\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_\varepsilon \star \mu| \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |\mu|$,
- (iv) $D^\alpha(\rho_\varepsilon \star \mu) = D^\alpha \rho_\varepsilon \star \mu = \rho_\varepsilon \star D^\alpha \mu$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

Demonstração. Ver [7][Teorema 4.2.2].

□

Observação 2.26. Se u e ρ_ε são radialmente simétricos, então $u \star \rho_\varepsilon$ é radialmente simétrico. Com efeito, para todo $S \in O(N)$ temos

$$\begin{aligned}
 (u \star \rho_\varepsilon)(Sx) &= \int_B u(y) \rho_\varepsilon(Sx - y) dy \\
 &= \int_B u(y) \rho_\varepsilon(S(x - S^T y)) dy \\
 &= \int_B u(y) \rho_\varepsilon(x - S^T y) dy \\
 &= \int_B u(S^T y) \rho_\varepsilon(x - S^T y) dy \\
 &= \int_B u(z) \rho_\varepsilon(x - z) |det S| dz \\
 &= \int_B u(z) \rho_\varepsilon(x - z) dz \\
 &= (u \star \rho_\varepsilon)(x).
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Lema 2.27. *O espaço $C^\infty(B) \cap BV_{rad}(B)$ é denso em $BV_{rad}(B)$ com respeito a convergência estrita.*

Demonstração. Dados $u \in BV_{rad}(B)$ e $\varepsilon > 0$, nosso objetivo é, dado $\varepsilon > 0$, construir uma função $u_\varepsilon \in C^\infty(B) \cap W_{rad}^{1,1}(B)$ tal que

$$|u_\varepsilon - u|_{L_\alpha^1(B)} < \varepsilon \text{ e } \left| \int_B |\nabla u_\varepsilon| dx - \int_B |Du| \right| < 4\varepsilon.$$

Como $\int_B |Du| < +\infty$, existe B_0 aberto de B e tal que $\int_{B \setminus B_0} |Du| < \varepsilon$. Assim, podemos construir uma família de conjuntos abertos $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tais que $B_i \subset \subset B_{i+1}$ e $B = \cup_{i=1}^\infty B_i$. Seja ainda $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, onde $C_1 = B_2$ e $C_i = B_{i+1} \setminus B_{i-1}$, para $i \geq 2$ que também é uma cobertura aberta de B . Seja ainda $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma partição da unidade subordinada a $\{C_i\}$,

ou seja, $\varphi_i \in C_c^\infty(C_i)$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$ e $\sum \varphi_i = 1$. Notemos que $C_{i+1} \cap C_i = B_{i+1} \setminus B_i \neq \emptyset$ e com isso temos que $B_1 \cap C_i = \emptyset$ com $i \geq 2$, e então $\varphi_1(x) = 1$ em B_1 .

Agora, para cada $i \in \mathbb{N}$, escolhemos ρ_{ε_i} funções regularizantes de maneira que

$$\text{supp}(\rho_{\varepsilon_i} \star \varphi_i \cdot u) \subset C_i \quad (2.16)$$

$$\left| \int_B |\rho_{\varepsilon_1} \star (\varphi_1 Du)| - \int_B |\varphi_1 Du| \right| < \varepsilon \quad (2.17)$$

$$\int_B |x|^\alpha |\rho_{\varepsilon_i} \star (u\varphi_i) - u\varphi_i| dx < \frac{\varepsilon}{2^i} \quad (2.18)$$

$$\int_B |\rho_{\varepsilon_i} \star (u\nabla\varphi_i) - u\nabla\varphi_i| dx < \frac{\varepsilon}{2^i}. \quad (2.19)$$

Observamos que (2.17) foi obtido a partir da Proposição 2.25 (iii). Sendo $u\varphi_i \in L_\alpha^1(B)$ e $u\nabla\varphi_i \in L^1(B)$, então obtemos (2.18) e (2.19) respectivamente a partir da Proposição 2.24 (iii).

Definimos

$$u_\varepsilon := \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\varepsilon_i} \star (u\varphi_i)$$

e notemos que esta soma é localmente finita, uma vez que, para cada $x \in B$, x pertence no máximo a dois conjuntos C_i e, portanto, u_ε está bem definido e é radialmente simétrico por (2.15). Além disso, do fato de que em uma vizinhança de x , no máximo duas funções φ_i não se anulam, então $u_\varepsilon \in C_{rad}^\infty(B)$. Logo, da desigualdade (2.18) temos que

$$\begin{aligned} \int_B |x|^\alpha |u - u_\varepsilon| dx &= \int_B |x|^\alpha \left| u - \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\varepsilon_i} \star (u\varphi_i) \right| dx \\ &= \int_B |x|^\alpha \left| \sum_{i=1}^{\infty} (u\varphi_i - \rho_{\varepsilon_i} \star (u\varphi_i)) \right| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_B |x|^\alpha |u\varphi_i - \rho_{\varepsilon_i} \star (u\varphi_i)| dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Por fim, mostremos que

$$\left| \int_B |\nabla u_\varepsilon| dx - \int_B |Du| \right| \leq \varepsilon.$$

Como $\varphi_i \in C_c^\infty(B)$ temos:

$$D(u\varphi_i) = \varphi_i Du + u \nabla \varphi_i \mathcal{L}^N|_B.$$

Ainda,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nabla \varphi_i = \nabla \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \right) = 0,$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\nabla u_\epsilon &= \sum_{i=1}^{\infty} D(\rho_{\epsilon_i} \star (u\varphi_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} \star D(u\varphi_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} \star (\varphi_i Du + u \nabla \varphi_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} \star (\varphi_i Du) + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} \star (u \nabla \varphi_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} \star (\varphi_i Du) + \sum_{i=1}^{\infty} (\rho_{\epsilon_i} \star (u \nabla \varphi_i) - u \nabla \varphi_i). \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Assim, por (2.19) , (2.21) e pela Proposição 2.25 (iii) temos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_B |\rho_{\epsilon_1} \star (u \nabla \varphi_1)| dx - \int_B |\nabla u_\epsilon| \right| &\leq \sum_{i=2}^{\infty} \int_B |\rho_{\epsilon_i} \star (\varphi_i Du)| dx + \sum_{i=1}^{\infty} \int_B |\rho_{\epsilon_i} \star (u \nabla \varphi_i) - u \nabla \varphi_i| dx \\
&\leq \sum_{i=2}^{\infty} \int_B |\varphi_i| |Du| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_B |\varphi_i| |Du| + \epsilon \\
&\leq \int_{B \setminus B_0} |Du| + \epsilon < 2\epsilon. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Da desigualdade (2.17) e do fato de que $\varphi \equiv 1$ em B_1 , temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_B |\rho_{\epsilon_1} \star (u \nabla \varphi_1)| dx - \int_B |Du| \right| &\leq \left| \int_B |\rho_{\epsilon_1} \star (u \nabla \varphi_1)| dx - \int_B |\varphi_1 Du| dx \right| + \\
&\quad + \left| \int_B |\varphi_1 Du| - \int_B |Du| \right| dx \\
&\leq \epsilon + \left| \int_B |\varphi_1 Du| - \int_B |Du| \right| \\
&\leq \epsilon + \int_B (1 - \varphi_1) |Du| - \int_B |Du| \\
&\leq 2\epsilon. \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Assim, pelas desigualdades (2.22) e (2.23) obtemos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_B |\nabla u_\epsilon| dx - \int_B |Du| \right| &\leq \left| \int_B |\nabla u_\epsilon| dx - \int_B |\rho_{\epsilon_1} \star (u \nabla \varphi_1)| dx \right| + \\
&\leq \left| \int_B |\rho_{\epsilon_1} \star (u \nabla \varphi_1)| dx - \int_B |Du| \right| \\
&\leq 4\epsilon. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Concluindo assim a demonstração deste resultado.

□

Segue como uma consequência de (2.15) e do Lema 2.27 a seguinte observação.

Observação 2.28. $C_{rad}^\infty(B) \cap BV_{rad}(B)$ é denso em $BV_{rad}(B)$ com a convergência estrita.

Observação 2.29. Podemos modificar a demonstração do Lema 2.27 de modo a tomar funções suficientemente próximas de u na norma de $L_\alpha^r(B)$, com isso, temos que para todo $u \in BV_{rad}(B)$ e $r > 1$, existe $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset C_{rad}^\infty(B) \cap BV_{rad}(B)$, tal que, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \text{ em } L_\alpha^r(B) \text{ e } \int_B |\nabla u_\varepsilon| dx \longrightarrow \int_B |Du|.$$

A seguir enunciamos e provamos um dos principais resultados deste capítulo.

Teorema 2.30. *Seja $\alpha > 0$, então a imersão*

$$BV_{rad}(B) \hookrightarrow L_\alpha^r(B)$$

é contínua para $1 \leq r \leq 1_\alpha^$ e compacta para $1 \leq r < 1_\alpha^*$.*

Demonstração. Sejam $u \in BV_{rad}(B)$ e $(u_n) \subset C_{rad}^\infty(B) \cap BV_{rad}(B)$ tais que, quando $n \rightarrow +\infty$,

$$\int_B |x|^\alpha |u_n|^r dx \longrightarrow \int_B |x|^\alpha |u|^r dx \text{ e } \int_B |\nabla u_n| dx \longrightarrow \int_B |Du|.$$

Notemos ainda que $(u_n) \in W_{rad}^{1,1}(B)$ e pelo Lema 2.20 tem-se a imersão $W_{rad}^{1,1}(B) \hookrightarrow L_\alpha^r(B)$ é contínua. Logo

$$\|u_n\|_{L_\alpha^r(B)} \leq C \|u_n\|_{W_{rad}^{1,1}(B)}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\|u\|_{L_\alpha^r(B)} \leq C \|u\|_{BV_{rad}(B)}. \quad (2.25)$$

Para mostrarmos a imersão compacta, consideremos $a \in (0, 1)$ e usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \int_B |x|^\alpha |u|^r dx &= \int_B |u|^a |x|^\alpha |u|^{r-a} dx \\ &\leq \left[\int_B \left(|u|^a \right)^{\frac{1}{1-a}} dx \right]^a \left[\int_B \left(|x|^\alpha |u|^{r-a} \right)^{\frac{1}{1-a}} dx \right]^{1-a} \\ &= \left(\int_B |u| dx \right)^a \left(\int_B |x|^{\frac{\alpha}{1-a}} |u|^{\frac{r-a}{1-a}} dx \right)^{1-a}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Provemos agora que existe $C > 0$ tal que

$$\left(\int_B |x|^{\frac{\alpha}{1-a}} |u|^{\frac{r-a}{1-a}} dx \right) \leq C \|u\|_{BV_{rad}(B)}^{\frac{r-a}{1-a}}. \quad (2.27)$$

De fato, por (2.25), (2.27) vale se,

$$1 \leq \frac{r-a}{1-a} \leq \frac{1}{N-1} \left(N + \frac{\alpha}{1-a} \right).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{r-a}{1-a} \leq \frac{1}{N-1} \left(\frac{N - Na + \alpha}{1-a} \right) &\Leftrightarrow -a \geq Nr - r - N - \alpha \\ &\Leftrightarrow a \leq r + N + \alpha - Nr. \end{aligned}$$

Tal escolha para a só é possível se

$$\begin{aligned} r + N + \alpha - Nr > 0 &\Leftrightarrow r + N + \alpha > Nr \\ &\Leftrightarrow r < \frac{N + \alpha}{N - 1} = 1_\alpha^*, \end{aligned}$$

o que é satisfeito por hipótese.

Substituindo (2.27) em (2.26), obtemos

$$\begin{aligned} \int_B |x|^\alpha |u|^r dx &\leq \left(\int_B |u| dx \right)^a \left(C \|u\|_{BV_{rad}(B)}^{\frac{r-a}{1-a}} \right)^{1-a} \\ &= C^{1-a} \left(\int_B |u| dx \right)^a \|u\|_{BV_{rad}(B)}^{r-a}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Assim, se u_n é uma sequência limitada em $BV_{rad}(B)$, então pela compacidade da imersão $BV_{rad}(B) \hookrightarrow L^1(B)$ existe $u \in L^1(B)$ que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^1(B). \quad (2.29)$$

De (2.28) e (2.29)

$$\begin{aligned} |u_n - u|_{L_\alpha^r(B)}^r &\leq C^{1-a} \left(|u_n - u|_{L^1(B)} \right)^a \|u_n - u\|_{BV_{rad}(B)}^{r-a} \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Além disso, da semicontinuidade da norma $\|\cdot\|_{BV(B)}$ com respeito à topologia de $L_\alpha^r(B)$, segue que $u \in BV_{rad}(B)$. Portanto a imersão $BV_{rad}(B) \hookrightarrow L_\alpha^r(B)$ é compacta se $1 \leq r < 1_\alpha^*$.

□

2.4 Resultados de densidade em BV_l

Nesta seção apresentamos resultados de imersão entres os espaços $BV_l(B)$ e $L_\alpha^q(B)$. Para isso, devemos fixar $N \geq 4$ com $l \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq N - l \leq l$ e $p \geq 1$. Consideremos também $x = (y, z) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{N-l}$ e definamos

$$BV_l(B) := \{u \in BV(B) : u(R_1 y, R_2 z) = u(y, z), \forall x = (y, z) \in B, \forall (R_1, R_2) \in O(l) \times O(N-l)\},$$

e

$$\begin{aligned} W_l^{1,p}(B) &:= \left\{ u \in W^{1,p}(B) : u(R_1 y, R_2 z) = u(y, z), \forall x = (y, z) \in B, \forall (R_1, R_2) \in O(l) \times O(N-l) \right\} \\ &= \left\{ u \in W^{1,p}(B) : u(y, z) = u(|y|, |z|), \forall x = (y, z) \in B \right\}. \end{aligned}$$

Teorema 2.31. *Assumindo que $2 \leq N - l \leq l$, $p \geq 1$. Sejam $p_l := \frac{p(l+1)}{l+1-p}$ se $l+1 > p$ e $p_l \in (p, +\infty)$, se $l+1 \leq p$. Além disso, seja $q_l := \frac{Np+(l-1)(l+1-p)}{l+1}$. Então a imersão $W_{0,l}^{1,p}(B) \hookrightarrow L_\alpha^q(B)$ é continua, para $1 \leq q \leq p_l$ e $\alpha \geq \alpha_0 := \frac{p_l q_l}{p}$. Ainda, se $1 \leq q < p_l$ e $\alpha \geq \alpha_0$, então a imersão é compacta.*

Demonstração. Ver de Figueiredo [18][Corolário 1.5].

□

Lema 2.32. *Se u e ρ_ε são parcialmente simétricas, então $u \star \rho_\varepsilon$ também o é. De fato, se $S \in O(N-l)$ e $T \in O(l)$, temos*

$$\begin{aligned}
 (u \star \rho_\varepsilon)(Sy, Tz) &= \int_B u(\bar{y}, \bar{z}) \rho_\varepsilon((Sy, Tz) - (\bar{y}, \bar{z})) d\bar{y} d\bar{z} \\
 &= \int_B u(\bar{y}, \bar{z}) \rho_\varepsilon((Sy - \bar{y}, Tz - \bar{z})) d\bar{y} d\bar{z} \\
 &= \int_B u(\bar{y}, \bar{z}) \rho_\varepsilon(S(y - S^t \bar{y}), T(z - T^t \bar{z})) d\bar{y} d\bar{z} \\
 &= \int_B u(S^t \bar{y}, T^t \bar{z}) \rho_\varepsilon(y - S^t \bar{y}, z - T^t \bar{z}) d\bar{y} d\bar{z} \\
 &= \int_B u(R, Q) \rho_\varepsilon(y - R, z - Q) dR dQ \\
 &= \int_B u(R, Q) \rho_\varepsilon((y, z) - (R, Q)) dR dQ \\
 &= (u \star \rho_\varepsilon)(y, z).
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Lema 2.33. $C_l^\infty(B) \cap BV_l(B)$ é denso em $BV_l(B)$ com respeito a convergência estrita.

Demonstração. Similar à prova do Lema 2.27, levando em conta a observação anterior.

□

Observação 2.34. Como uma consequência do Lema 2.33 temos que para todo $v \in BV_l(B)$ e $s > 1$, existe $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset C_l^\infty(B) \cap BV_l(B)$ tal que quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$u_\varepsilon \longrightarrow v \text{ em } L_\alpha^s(B) \text{ e } \int_B |\nabla v_\varepsilon| dx \longrightarrow \int_B |Dv|.$$

Observação 2.35. Suponha que $w \in BV_l(B)$ e seja

$$\bar{w} := \begin{cases} w & \text{em } B \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \bar{B}. \end{cases} \tag{2.31}$$

Então, $\bar{w} \in BV_l(\mathbb{R}^N)$ e ainda

$$D\bar{w} = Dw|_\Omega - tr(w)_{\partial\Omega} \nu \mathcal{H}^{N-1}|_{\partial\Omega},$$

onde $\nu(x)$ denota o vetor unitário exterior a Ω em $x \in \partial\Omega$. De fato, para todo $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ e pelo Teorema 2.13, temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^N} \varphi D\bar{w} &= - \int_{\mathbb{R}^N} \bar{w} \operatorname{div}(\varphi) dx \\
 &= - \int_\Omega w \operatorname{div}(\varphi) dx \\
 &= - \int_\Omega \varphi Dw - \int_{\partial\Omega} tr_{\partial\Omega}(\bar{w}) \varphi \mathcal{H}^{N-1}.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Assim, pela observação anterior

$$\int_{\mathbb{R}^N} |D\bar{u}| = \int_B |Du| + \int_{\partial B} |u| d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{2.33}$$

O lema a seguir é essencial na prova de um outro resultado de densidade em BV_l .

Lema 2.36. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto e limitado com fronteira lipschitziana, então existe $\tau_0 > 0$ e $0 \leq \tau \leq \tau_0$, uma família de difeomorfismos C^∞ , $\Phi^\tau : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ com inversa Ψ^τ , tal que*

$$(D1) \quad \Phi^0 = \Psi^0 = Id,$$

$$(D2) \quad \Phi^\tau \rightarrow Id \text{ e } \Psi^\tau \rightarrow Id, \text{ quando } \tau \rightarrow 0 \text{ uniformemente em } \mathbb{R}^N,$$

$$(D3) \quad D\Phi^\tau(x) \rightarrow Id \text{ e } D\Psi^\tau(x) \rightarrow Id, \text{ quando } \tau \rightarrow 0 \text{ uniformemente com respeito a } x \in \mathbb{R}^N,$$

$$(D4) \quad \Phi^\tau(\bar{\Omega}) \subset\subset \Omega \text{ para todo } \tau \in (0, \tau_0].$$

Demonstração. Ver [29] [Lema 3.2].

Proposição 2.37. *Se $u \in BV_l(B) \cap L_\alpha^r(B)$, para algum $r \in [1, \infty)$ e $\alpha > 0$, então existe uma sequência $(u_n)_n \subset C_0^\infty(B) \cap BV_l(B)$ tal que*

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } L_\alpha^s(B)$$

e

$$\int_B |\nabla u_n| dx \rightarrow \int_B |Du| + \int_{\partial B} |u| d\mathcal{H}^{N-1},$$

quando $n \rightarrow +\infty$, para $s \in [1, r]$. Além disso, temos também que, se $p_n \rightarrow 1^+$ quando $n \rightarrow +\infty$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_B |\nabla u_n|^{p_n} dx = \int_B |Du| + \int_{\partial B} |u| d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $u \in BV_l(B) \cap L_\alpha^r(B)$, para algum $r \in [1, \infty)$ que tenha suporte em B , isto é, $u = 0$ em $B \setminus \tilde{B}$ onde $\tilde{B}$ é compacto. Para $\varepsilon > 0$ consideremos $u_\varepsilon := u \star \eta_\varepsilon$, sendo $\eta_\varepsilon(x) = \frac{\eta(\frac{x}{\varepsilon})}{\varepsilon^n}$ para o *mollifiers* padrão η . Pela definição de u_ε e pela Proposição 2.25 temos $u_\varepsilon \in C_0^\infty(B)$. Ainda, $u_\varepsilon \in BV_l(B)$ com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, pela Proposição 2.24 *iii*) $u_\varepsilon \rightarrow u \in L_\alpha^r(B)$. Em particular, identificamos u_ε com sua extensão por zero ao $\mathbb{R}^N$, $u_\varepsilon \rightarrow u \in L_\alpha^1(\mathbb{R}^N)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Assim, pela semicontinuidade inferior da variação total

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Du| \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon| dx. \quad (2.34)$$

Por outro lado, tomando $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ com $|\varphi| \leq 1$ temos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon \operatorname{div} \varphi dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (u \star \eta_\varepsilon) \operatorname{div} \varphi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u (\eta_\varepsilon \star \operatorname{div} \varphi) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u \operatorname{div} (\eta_\varepsilon \star \varphi) dx \\ &\leq \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} (\eta_\varepsilon \star \varphi) dx; (\eta_\varepsilon \star \varphi) \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\eta_\varepsilon \star \varphi\|_\infty \leq 1 \right\} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |Du|, \end{aligned} \quad (2.35)$$

desde que $|\eta_\varepsilon \star \varphi| \leq 1$. Pela arbitrariedade de φ e por (2.1)

$$\begin{aligned}
 \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |Du_\varepsilon| dx &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\| \\
 &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon \operatorname{div} \varphi dx \\
 &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} u \operatorname{div} (\eta_\varepsilon \star \varphi) dx \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |Du|,
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

De (2.34) e (2.36)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon| dx = \int_{\mathbb{R}^N} |Du|. \tag{2.37}$$

Consideremos agora qualquer $u \in BV_l(B) \cap L_\alpha^r(B)$ e fixemos uma família $(\Phi^\tau)_{0 \leq \tau \leq \tau_0}$ de difeomorfismos de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^N$ com inversa $(\Psi^\tau)_{0 \leq \tau \leq \tau_0}$ de acordo com o Lema 2.36. Consideremos $u^\tau := u \circ \Psi^\tau$ para $\tau \in [0, \tau_0]$. Por construção, $u^\tau = 0$ em $B \setminus \tilde{B}$. Além disso, pelas propriedades prévias de Ψ^τ e u^τ conclui-se que $u^\tau \in L_\alpha^r(B)$ para todo $\tau \in [0, \tau_0]$.

Vamos mostrar que $u^\tau \rightarrow u$ em $L_\alpha^r(\mathbb{R}^N)$ quando $\tau \rightarrow 0$. Para cada $\varepsilon > 0$ e pela Observação 2.34 existe $\tilde{u} \in C_0^\infty(B)$ com $|u - \tilde{u}|_{L_\alpha^r} \leq \varepsilon$. Desde que $\tilde{u}$ é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq \varepsilon \text{ se } |x - y| \leq \delta. \tag{2.38}$$

Por (D3) do Lema 2.36, existe $\tau_1 \in (0, \tau_0]$ tal que

$$|\Psi^\tau(x) - x| \leq \delta \text{ e } |\det(D\Psi^\tau(x))| \leq 2, \tag{2.39}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Assim,

$$\begin{aligned}
 |u - u^\tau|_{L_\alpha^r} &= |u - \tilde{u} + \tilde{u} - \tilde{u} \circ \Psi^\tau + \tilde{u} \circ \Psi^\tau - u^\tau|_{L_\alpha^r} \\
 &\leq |u - \tilde{u}|_{L_\alpha^r} + |\tilde{u} - \tilde{u} \circ \Psi^\tau|_{L_\alpha^r} + |\tilde{u} \circ \Psi^\tau - u^\tau|_{L_\alpha^r} \\
 &\leq \varepsilon + \left(|B| \sup_{x \in B} |\tilde{u}(x) - \tilde{u} \circ \Psi^\tau(x)|^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |(\tilde{u} - u)(\Psi^\tau)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \\
 &\leq \varepsilon + \left(|B| \sup_{x \in B} |\tilde{u}(x) - \tilde{u} \circ \Psi^\tau(x)|^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u} - u|^r |\det(D\Psi^\tau)| dx \right)^{\frac{1}{r}} \\
 &\leq \varepsilon + |B|^{\frac{1}{r}} \varepsilon + 2^{\frac{1}{r}} |\tilde{u} - u|_{L_\alpha^r} \\
 &\leq \varepsilon + |B|^{\frac{1}{r}} \varepsilon + 2^{\frac{1}{r}} \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Logo, $u^\tau \rightarrow u$ em $L_\alpha^r(\mathbb{R}^N)$ e além disso, $u^\tau \rightarrow u$ em $L_\alpha^r(B)$.

A fórmula de mudança de coordenadas para funções em BV, (ver [24][Lema 10.1]) implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Du^\tau| = \int_{\mathbb{R}^N} |(D\Psi^\tau)^T \sigma| |\det(D\Psi^\tau)| |d| Du|$$

onde σ é dada pela decomposição polar $Du = \sigma|Du|$. Assim $u^\tau \in BV(\mathbb{R}^N)$ e desde o integrando do lado direito converge uniformemente para 1,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |Du^\tau| = \int_{\mathbb{R}^N} |Du|.$$

De acordo com (2.37), existe $v^\tau \in C_0^\infty(B)$ tal que

$$|u^\tau - v^\tau|_r < \tau \text{ e } \left| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^\tau| - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^\tau| \right|.$$

Seja $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e denotemos u_{ε_n} por u_n . Então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |Du| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n| dx \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_B |\nabla u_n| dx \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|\nabla u_n\|_\infty \int_B \frac{|\nabla u_n|}{\|\nabla u_n\|_\infty} dx \right) \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\|\nabla u_n\|_\infty \int_B \left(\frac{|\nabla u_n|}{\|\nabla u_n\|_\infty} \right)^{\rho_n} dx \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\|\nabla u_n\|_\infty^{1-\rho_n} \int_B |\nabla u_n|^{\rho_n} dx \right) \\ &= \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\nabla u_n\|_\infty^{1-\rho_n} \right) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_B |\nabla u_n|^{\rho_n} dx \right) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\nabla u_n\|_\infty^{1-\rho_n} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_B |\nabla u_n|^{\rho_n} dx \right) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |\nabla u_n| dx \right)^{1-\rho_n} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_B |\nabla u_n|^{\rho_n} dx \right). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Note que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B |\nabla u_n| dx = \int_{\mathbb{R}^N} |Du| > 0$$

e, então,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |\nabla u_n| dx \right)^{1-\rho_n} = 1,$$

quando $\rho_n \rightarrow 1$.

Desta forma, por (2.41)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_B |\nabla u_n|^{\rho_n} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |Du|. \tag{2.42}$$

Por outro lado, segue do fato de que, para uma sequência real (a_n) tal que $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$, temos que $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\rho_n}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
0 < \int_{\mathbb{R}^N} |Du| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n| dx \right) \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_B |\nabla u_n| dx \right) \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\int_B |\nabla u_n|^{\rho_n} dx \right)^{\frac{1}{\rho_n}} |B|^{\frac{\rho_n-1}{\rho_n}} \right] \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(|B|^{\frac{\rho_n-1}{\rho_n}} \int_B |\nabla u_n|^{\rho_n} dx \right) \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_B |\nabla u_n|^{\rho_n} dx
\end{aligned} \tag{2.43}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Du| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_B |\nabla u_n|^{\rho_n} dx. \tag{2.44}$$

Portanto, de (2.41) e (2.44)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_B |\nabla u_n|^{\rho_n} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |Du|,$$

o que por sua vez implica que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_B |\nabla u_n|^{\rho_n} dx = \int_B |Du| + \int_{\partial B} |u| d\mathcal{H}^{N-1}$$

□

Teorema 2.38. *Sejam l, N, p_l, q_l e α como no Teorema 2.31, então a imersão $BV_l(B) \hookrightarrow L_\alpha^q(B)$ é contínua se $1 \leq q \leq 1_l$ e compacta se $1 \leq q < 1_l$.*

Demonstração. Sejam $u \in BV_l(B)$ e $(u_n) \subset C_l^\infty(B)$ tais que

$$\int_B |x|^\alpha |u_n|^q dx \longrightarrow \int_B |x|^\alpha |u|^q dx \text{ e } \int_B |\nabla u_n| dx \longrightarrow \int_B |Du|.$$

Notemos ainda que $(u_n) \in W_{0,l}^{1,1}(B)$ e pelo Teorema 2.31 tem-se que a imersão $W_{0,l}^{1,1}(B) \hookrightarrow L_\alpha^q(B)$ é contínua.

Logo

$$|u_n|_{L_\alpha^q(B)} \leq C \|u_n\|_{W_{0,l}^{1,1}(B)}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$|u|_{L_\alpha^q(B)} \leq C \|u\|_{BV_l(B)}. \tag{2.45}$$

Consideremos $a \in (0, 1)$ e usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_B |x|^\alpha |u|^q dx &= \int_B |u|^a |x|^\alpha |u|^{q-a} dx \\
&\leq \left[\int_B \left(|u|^a \right)^{\frac{1}{a}} dx \right]^a \left[\int_B \left(|x|^\alpha |u|^{q-a} \right)^{\frac{1}{1-a}} dx \right]^{1-a} \\
&= \left(\int_B |u| dx \right)^a \left(\int_B |x|^{\frac{\alpha}{1-a}} |u|^{\frac{q-a}{1-a}} dx \right)^{1-a}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Provemos agora que existe $C > 0$ tal que

$$\left(\int_B |x|^{\frac{\alpha}{1-a}} |u|^{\frac{q-a}{1-a}} dx \right) \leq C \|u\|_{BV_l(B)}^{\frac{1}{1-a}}. \quad (2.47)$$

De fato, por (2.45) e (2.47) vale somente se,

$$1 \leq \frac{q-a}{1-a} \leq \frac{l+1}{l} \Leftrightarrow a \leq 1 + l(1-q).$$

Tal escolha para a só é possível se

$$\begin{aligned} 1 + l(1-q) > 0 &\Leftrightarrow l(1-q) > -1 \\ &\Leftrightarrow 1-q > -\frac{1}{l} \\ &\Leftrightarrow q < \frac{l+1}{l}, \end{aligned}$$

o que é satisfeito por hipótese.

Substituindo (2.46) em (2.45), obtemos

$$\begin{aligned} \int_B |x|^\alpha |u|^q dx &\leq \left(\int_B |u| dx \right)^a \left(C \|u\|_{BV_l(B)}^{\frac{q-a}{1-a}} \right)^{1-a} \\ &= C^{1-a} \left(\int_B |u| dx \right)^a \|u\|_{BV_l(B)}^{q-a}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Assim, se u_n é uma sequência limitada em $BV_l(B)$, então existe $u \in L^1(B)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^1(B). \quad (2.49)$$

Assim, por (2.48)

$$\begin{aligned} |u_n - u|_{L_\alpha^q(B)}^q &\leq C^{1-a} |u_n - u|_{L^1(B)} \|u_n - u\|_{BV_l(B)}^{q-a} \\ &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow +\infty$, pela compacidade da imersão $BV_l(B) \hookrightarrow L^1(B)$. Além disso, da semicontinuidade de $\|\cdot\|_{BV_l(B)}$ com respeito à topologia de $L_\alpha^q(B)$, segue que $u \in BV_l(B)$. Portanto a imersão $BV_l(B) \hookrightarrow L_\alpha^q(B)$ é compacta se $1 \leq q < p_l$.

□

3 Problemas do tipo Hénon com o operador 1-Laplaciano

Neste capítulo, estudaremos a existência de solução radial para o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = |x|^\alpha f(u) & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $B \subset \mathbb{R}^N$ é uma bola unitária, $N \geq 2$, $\alpha > 0$ e a não-linearidade f é uma função localmente Hölder contínua com $f(s) \geq 0$ se $s > 0$ e satisfazendo:

(f_1) existe $a > 0$ tal que

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{|s|^a} = 0, \text{ uniformemente em } x \in B,$$

(f_2) existem $C > 0$ e $q \in (0, 1_\alpha^* - 1)$ tais que

$$|f(s)| \leq C(1 + |s|^q), \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

onde $1_\alpha^* = \frac{N+\alpha}{N-1}$;

(f_3) existe $\kappa > 1$ tal que

$$0 < \kappa F(s) \leq f(s)s,$$

para todo $s > 0$, onde $F(t) = \int_0^t f(s)ds$.

Para mostrarmos a existência de uma solução para o problema (3.1), usaremos um esquema de aproximação por soluções de problemas envolvendo o operador p -Laplaciano. Para isso, nos baseamos no trabalho publicado em 1982 por Wei-Ming Ni (vide [34]) onde demonstraremos a existência das soluções radiais u_p do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = |x|^\alpha f(u) & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases} \quad (3.2)$$

Observação 3.1. Recordamos que uma solução fraca para o problema (3.2) é uma função $u \in W_{0,rad}^{1,p}(B)$ tal que

$$\int_B |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int_B |x|^\alpha f(u) v dx,$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(B)$. Assim, esta solução fraca será ponto crítico de um funcional $J : W_0^{1,p}(B) \rightarrow \mathbb{R}$ se e só se este funcional satisfizer

$$J'(u)v = \int_B |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \int_B |x|^\alpha f(u) v dx,$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(B)$. Dessa forma, o candidato natural a funcional associado ao problema (3.2) é $J : W_0^{1,p}(B) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_B |\nabla u|^p dx - \int_B |x|^\alpha F(u) dx.$$

o qual está bem definido pela hipótese (f_2) .

Observação 3.2. Pelo Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais, podemos considerar J definido em $W_0^{1,p}(B)$, ao invés de em $W_0^{1,p}(B)$, uma vez que todo ponto crítico de J restrito a $W_0^{1,p}(B)$, é ponto crítico de J em $W_0^{1,p}(B)$.

Para garantirmos a existência de pontos críticos para o funcional J precisamos dos seguintes resultados.

Definição 3.3. Seja E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Dizemos que $(u_n) \subset E$ é uma sequência de Palais-Smale no nível c para I , ou simplesmente $(PS)_c$, se $I(u_n) = c$ e $I'(u_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Dizemos ainda que I satisfaz a condição $(PS)_c$, quando toda sequência de Palais-Smale no nível c para I possuir uma subsequência convergente.

Antes de prosseguir, vamos enunciar um resultado clássico, que será essencial em nossa argumentação.

Teorema 3.4. (Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz) *Seja E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição Palais-Smale- (PS) . Suponha que $I(0) = 0$ e que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

- (H1) *Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$, onde B_ρ é uma bola aberta de centro na origem e raio ρ ;*
- (H2) *Existe um $e \in E \setminus \overline{B}_\rho$ tal que $I(e) \leq 0$.*

Então, I possui um valor crítico c , isto é, $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$, com $c \geq \alpha$, onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

e $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$.

3.1 Existência de solução radial para uma equação tipo Hénon envolvendo o operador p -Laplaciano

Nesta seção, seguimos os argumentos de [34] para tratar das soluções de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = |x|^\alpha f(u) & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases} \quad (3.3)$$

Vamos considerar $p_0 = \min\{1 + a, \kappa, 1 + q\}$ onde a , q e κ são como (f_1) , (f_2) e (f_3) , respectivamente. Por $(f_1) - (f_3)$ e a definição de p_0 , a não-linearidade f satisfaz:

$$(f_{1,p}) \quad \limsup_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{|s|^{p-1}} = 0, \text{ uniformemente com } x \in B,$$

$$(f_{2,p}) \quad \text{existe } C > 0 \text{ tal que } f(s) \leq C(1 + |s|^q), \text{ onde } q \in (p-1, p_\alpha^* - 1), \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \\ \text{onde } p_\alpha^* = \frac{p(N+\alpha)}{N-p}.$$

$$(f_{3,p}) \quad \text{existe } s_0 > 0 \text{ tal que } 0 < \kappa F(s) \leq sf(s) \text{ para } x \in B, s > s_0, \text{ onde } \kappa > p.$$

De fato, mostraremos separadamente que cada uma das afirmações são verdadeiras.

Afirmação $(f_{1,p})$: Pela hipótese (f_1) , existe $a > 0$ tal que

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{|s|^a} = 0 \text{ uniformemente com } x \in B. \quad (3.4)$$

Assim, dado $p \in (1, p_0)$, temos em particular que $1 < p < 1 + a$, o que implica que $0 < p - 1 < a$. Ainda, para $|s| < 1$, $\left(\frac{1}{|s|}\right)^a > \left(\frac{1}{|s|}\right)^{p-1}$.

Assim,

$$0 < \frac{|f(s)|}{|s|^{p-1}} \leq \frac{|f(s)|}{|s|^a}. \quad (3.5)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (3.5) obtemos por (3.4) que

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{|s|^{p-1}} = 0.$$

Afirmação $(f_{2,p})$: Como, por (f_2) , $q < 1_\alpha^* - 1 = \frac{\alpha+1}{N-1}$, então

$$(N-1)q < \alpha + 1. \quad (3.6)$$

Como $p > 1$, então

$$p-1 > 0 \quad \text{e} \quad \frac{p(N-1)}{N-p} > 1. \quad (3.7)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{p(N+\alpha)}{N-p} - 1 &= \frac{p(N+\alpha) - N + p}{N-p} \\ &= \frac{N(p-1) + p(\alpha+1)}{N-p} \\ &> \frac{N(0) + p(\alpha+1)}{N-p} \\ &= \frac{p(\alpha+1)}{N-p} \\ &> \frac{p}{N-p} (q(N-1)) \\ &> q. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Além disso, pela definição de p_0 , temos:

$$p < p_0 \leq 1 + q \implies p - 1 < q, \quad (3.9)$$

assim, de (3.8) e (3.9), $(f_{2,p})$ é satisfeita.

Afirmção $(f_{3,p})$: Basta notar que $\kappa > 1$ e $1 < p < p_0 \leq \kappa$.

Mostraremos agora que, dado $\varepsilon > 0$, existe $d_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(s)| < \varepsilon |s|^{p-1} + d_\varepsilon |s|^q, \quad \text{para todos } s \in \mathbb{R}.$$

De fato, por $(f_{1,p})$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta_1 < 1$ tal que

$$|f(s)| < \varepsilon |s|^{p-1}, \quad \text{para todo } s \in (-\delta_1, \delta_1). \quad (3.10)$$

Por $(f_{2,p})$, existem $C > 0$ e $M > 1$ tais que

$$|f(s)| \leq C(1 + |s|^q), \quad \text{para todo } s > M,$$

o que implica em

$$|f(s)| \leq C(|s|^q + |s|^q) = 2C|s|^q, \quad \text{para todo } s > M. \quad (3.11)$$

Como f é contínua, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq C_\varepsilon, \quad \text{para todo } s \in [\delta_1, M],$$

de onde obtemos

$$|f(s)| \leq C_\varepsilon \frac{|s|^q}{|s|^q} < \frac{C_\varepsilon}{\delta_1^q} |s|^q, \quad \text{para todo } s \in [\delta_1, M]. \quad (3.12)$$

As estimativas (3.10), (3.11) e (3.12) implicam em

$$|f(s)| < \varepsilon |s|^{p-1} + C2^q |s|^q + \frac{C_\varepsilon}{\delta_1^q} |s|^q = \varepsilon |s|^{p-1} + d_\varepsilon |s|^q, \quad \text{para todo } s \geq 0, \quad (3.13)$$

onde $d_\varepsilon = \left(C2^q + \frac{C_\varepsilon}{\delta_1^q}\right)$.

Teorema 3.5. *Considerando as hipóteses $(f_{1,p})$, $(f_{2,p})$, e $(f_{3,p})$, então o problema (3.3) possui uma solução fraca não-negativa no espaço $W_{0,rad}^{1,p}(B)$.*

Demonstração. Como estamos procurando obter soluções não-negativas u_p para todo $1 < p < p_0$, então vamos considerar (3.3) com $f_+ : B \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$f_+(s) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } s \leq 0, \\ f(s) & , \text{ se } s > 0. \end{cases}$$

Assim, a prova que faremos consiste em aplicar o Teorema do Passo da Montanha (ver Teorema 3.4) ao funcional energia $J_p^+ : W_{0,rad}^{1,p}(B) \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (3.3) definido por:

$$J_p^+(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p - \int_B |x|^\alpha F_+(u) dx, \quad (3.14)$$

onde $F_+(t) = \int_0^t f_+(s) ds$.

Notemos que $J_p^+ \in C^1(W_{0,rad}^{1,p}(B), \mathbb{R})$, e além disso,

$$J_p^{+'}(u).v = \int_B |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \int_B |x|^\alpha f_+(u) v dx, \quad (3.15)$$

para todo $v \in W_{0,rad}^{1,p}(B)$. Por (3.13) temos:

$$\begin{aligned}
 |F_+(s)| &= \left| \int_0^s f_+(t) dt \right| \\
 &\leq \int_0^s |f_+(t)| dt \\
 &\leq \int_0^s (\varepsilon |t|^{p-1} + d_\varepsilon |t|^q dt) \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{p} |s|^p + \frac{d_\varepsilon}{q+1} |s|^{q+1}.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Usando esta última desigualdade e as imersões de Sobolev (ver Lema 2.20), deduzimos

$$\begin{aligned}
 \int_B |x|^\alpha F_+(u) dx &\leq \frac{\varepsilon}{p} \int_B |x|^\alpha |u|^p dx + \frac{d_\varepsilon}{q+1} \int_B |x|^\alpha |u|^{q+1} dx \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{p} C \int_B |\nabla u|^p dx + \frac{d_\varepsilon}{q+1} \int_B |x|^\alpha |u|^{q+1} dx \\
 &\leq \frac{\varepsilon C}{p} \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p + \overline{C} \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^{q+1}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Disso, obtemos

$$\begin{aligned}
 J_p^+(u) &\geq \frac{1}{p} \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p - \frac{C\varepsilon}{p} \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p - \overline{C} \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^{q+1} \\
 &= \left(\frac{1}{p} - \frac{C\varepsilon}{p} \right) \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p - \overline{C} \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^{q+1}.
 \end{aligned}$$

Consideremos $\varepsilon > 0$ tal que $A = \left(\frac{1}{p} - \frac{C\varepsilon}{p} \right) > 0$.

Escolhendo $\rho > 0$ tal que $A\rho^p - d\rho^{q+1} > 0$, temos que, se $\beta = A\rho^p - d\rho^{q+1}$, então

$$J_p^+(u) \geq \beta > 0, \text{ para todo } u \in W_{0,rad}^{1,p}(B), \text{ com } \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)} = \rho.$$

Com isto, J satisfaz a primeira hipótese geométrica do Teorema do Passo da Montanha.

Agora, mostremos que J_p^+ satisfaz a segunda hipótese geométrica do Teorema do Passo da Montanha, isto é, que existe $e \in W_{0,rad}^{1,p}(B) \setminus \overline{B}_\rho$ tal que $J_p^+(e) < 0$. De fato, usando $(f_{3,p})$, obtemos

$$\kappa F_+(s) \leq f_+(s)s, \quad \forall s > s_0.$$

De modo equivalente

$$\frac{f_+(s)}{F_+(s)} \geq \frac{\kappa}{s}, \quad \forall s > s_0,$$

implicando em

$$\int_{s_0}^s \frac{f_+(t)}{F_+(t)} dt \geq \int_{s_0}^s \frac{\kappa}{t} dt, \quad \forall s > s_0.$$

Assim

$$\ln F_+(t) \Big|_{s_0}^s \geq \kappa \ln t \Big|_{s_0}^s, \quad \forall s > s_0,$$

e então

$$\frac{F_+(s)}{F_+(s_0)} \geq \frac{s^\kappa}{s_0^\kappa}, \quad \forall s > s_0.$$

Logo,

$$F_+(s) \geq C_1 s^\kappa, \quad \forall s > s_0, \quad (3.18)$$

onde $C_1 = \frac{F_+(s_0)}{s_0^\kappa}$. Desde que F_+ é contínua, existe $C > 0$ tal que

$$|F_+(s) - C_1 s^\kappa| \leq C, \quad \forall s \in [0, s_0]. \quad (3.19)$$

Assim, (3.18) e (3.19) implicam em

$$F_+(s) > C_1 s^k - C, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.20)$$

Então,

$$\begin{aligned} J_p^+(u) &= \frac{1}{p} \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p - \int_B |x|^\alpha F_+(u) dx \\ &\leq \frac{1}{p} \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p - C_1 \int_B |x|^\alpha |u|^\kappa dx - C_2 \int_B |x|^\alpha dx. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Assim, fixando $u \in W_{0,rad}^{1,p}(B)$ e $t > 0$, obtemos

$$J_p^+(tu) \leq C_3 t^p - C_4 t^\kappa - C_5,$$

onde

$$C_3 = \frac{1}{p} \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p, \quad C_4 = C_1 \int_B |x|^\alpha |u|^\kappa dx \quad \text{e} \quad C_5 = C_2 \int_B |x|^\alpha dx.$$

Sendo $\kappa > p$, então $J_p^+(tu) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Deste modo, é possível escolher $t_0 > 0$ tal que

$$\|t_0 u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)} > \rho \quad \text{e} \quad J_p^+(t_0 u) < 0.$$

Considerando $e = t_0 u \in W_{0,rad}^{1,p}(B)$, obtemos

$$\|e\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)} > \rho \quad \text{e} \quad J_p^+(e) < 0.$$

Portanto, J_p^+ satisfaz a segunda hipótese geométrica do Teorema do Passo da Montanha.

Provemos agora que o funcional J_p^+ satisfaz a *condição de Palais-Smale* (ver Definição 3.3). Para isso, suponhamos que (u_n) é uma *sequência de Palais-Smale* para J em $W_{0,rad}^{1,p}(B)$, isto é, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$i) \quad J_p^+(u_n) \longrightarrow d;$$

$$ii) \quad J_p^{+'}(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Provemos inicialmente que (u_n) é limitada em $W_{0,rad}^{1,p}(B)$. Como $J_p^{+'}(u_n) \rightarrow 0$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|J_p^{+'}(u_n)\| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0,$$

ou seja,

$$\|J_p^{+'}(u_n)u_n\| \leq \varepsilon \|u_n\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}, \quad \forall n \geq n_0. \quad (3.22)$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
 J_p^+(u_n) - \frac{1}{\kappa} J_p^{+'}(u_n) u_n &= \frac{1}{p} \|u_n\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p - \int_B |x|^\alpha F_+(u_n) dx - \frac{1}{\kappa} \left[\|u_n\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p - \int_B |x|^\alpha f_+(u_n) u_n dx \right] \\
 &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa} \right) \|u_n\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p - \int_B |x|^\alpha \left[F_+(u_n) - \frac{1}{\kappa} f_+(u_n) u_n \right] dx \\
 &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa} \right) \|u_n\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p + \int_{B \cap [u_n \leq s_0]} \left[\frac{1}{\kappa} f_+(u_n) u_n - F_+(u_n) \right] dx + \\
 &\quad + \int_{B \cap [u_n > s_0]} \left[\frac{1}{\kappa} f_+(u_n) u_n - F_+(u_n) \right] dx \\
 &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa} \right) \|u_n\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p - M|B|,
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde $M = \sup_{0 \leq s \leq s_0} \left| \frac{1}{\kappa} f_+(s)s - F_+(s) \right|$. Por outro lado, de $i)$

$$\begin{aligned}
 J_p^+(u_n) - \frac{1}{\kappa} J_p^{+'}(u_n) u_n &\leq \left| J_p^+(u_n) - \frac{1}{\kappa} J_p^{+'}(u_n) u_n \right| \\
 &\leq |J_p^+(u_n)| + \frac{1}{\kappa} |J_p^{+'}(u_n) u_n| \\
 &\leq K + \frac{\varepsilon}{\kappa} \|u_n\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)},
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

para n suficientemente grande. De (3.23) e (3.24)

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa} \right) \|u_n\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p - M|B| \leq K + \frac{\varepsilon}{\kappa} \|u_n\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)},$$

o que implica que $\|u_n\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}$ é limitada.

Agora, mostremos que $(u_n) \subset W_{0,rad}^{1,p}(B)$ possui uma subsequência convergente em $W_{0,rad}^{1,p}(B)$. Como (u_n) é limitada e desde que $W_{0,rad}^{1,p}(B)$ é reflexivo, existe $u \in W_{0,rad}^{1,p}(B)$ tal que, a menos de subsequência

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad W_{0,rad}^{1,p}(B),$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Ainda, como a imersão de $W_{0,rad}^{1,p}(B)$ em $L_\alpha^q(B)$ é compacta (ver Lema 2.20), temos que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad L_\alpha^q(B),$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Assim

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{em quase todo ponto} \quad x \in B.$$

Por $(f_{2,p})$

$$|x|^\alpha f_+(u_n) u_n \leq c|x|^\alpha |u_n| + c|x|^\alpha |u_n|^q.$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada, tem-se que, quando $n \rightarrow +\infty$,

$$\int_B |x|^\alpha f_+(u_n) u_n dx \longrightarrow \int_B |x|^\alpha f_+(u) u dx. \quad (3.25)$$

Podemos mostrar como em [19][Seção 7.7] que $J_p^{+'}(u) = 0$. Assim, de (3.25), temos que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p &= \int_B |x|^\alpha f_+(u_n) u_n \\ &= \int_B |x|^\alpha f_+(u) u + o_n(1) \\ &= \|u\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Assim, como consequência do Lema de Brezis-Lieb (ver [26][Corolário 4.7]),

$$u_n \rightarrow u, \text{ em } W_{0,rad}^{1,p}(B).$$

Assim, J_p^+ satisfaz a condição Palais-Smale. Assim, do Teorema do Passo da Montanha, e do Princípio de Criticalidade Simétrica do Palais, segue que u é uma solução fraca do problema (3.5). Concluimos que u é não-trivial, desde que $J_p^+(u) = c > 0$.

Mostremos, por fim que, $u \geq 0$. De fato, tomando u^- como função teste obtemos

$$\|u^-\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)}^p = \int_B |x|^\alpha f_+(u) u^- dx = 0. \quad (3.27)$$

□

3.2 Solução do problema envolvendo o operador 1-Laplaciano

Mostraremos, nesta seção, a existência de uma solução radial positiva para o problema (3.1), com f satisfazendo as hipóteses $(f_1) - (f_3)$. Para isso, consideremos primeiramente

$$X_\mu(B) = \{\mathbf{z} \in L^\infty(B, \mathbb{R}^N); \operatorname{div} \mathbf{z} \in \mathcal{M}(B)\}.$$

Lembremos que para $\mathbf{z} \in X_\mu(B)$ e $u \in BV_{rad}(B) \cap L^\infty(B)$, definimos por $(\mathbf{z}, Du) : C_0^\infty(B) \longrightarrow \mathbb{R}$ a distribuição

$$\langle (\mathbf{z}, Du), \varphi \rangle = - \int_B u \varphi \operatorname{div} \mathbf{z} dx - \int_B u \mathbf{z} \nabla \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B). \quad (3.28)$$

Ainda vale a *Fórmula de Green* (ver Proposição 2.19) envolvendo a medida $(\mathbf{z}, Du)$ e o traço fraco $[\mathbf{z}, \nu]$, dado por

$$\int_B (\mathbf{z}, Du) + \int_B u \operatorname{div} \mathbf{z} dx = \int_{\partial B} u [\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (3.29)$$

Para introduzir o cenário variacional do problema (3.1), consideremos o seu funcional energia associado $I : BV_{rad}(B) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \int_B |Du| + \int_{\partial B} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_B |x|^\alpha F(u) dx,$$

onde $\|u\|_{BV_{rad}(B)} = \int_B |Du| + \int_{\partial B} |u| d\mathcal{H}^{N-1}$. Temos, a seguir, a definição para a solução do nosso problema.

Definição 3.6. Dizemos que $u \in BV_{rad}(B) \cap L^\infty(B)$ é uma solução para o problema (3.1) se existe um campo vetorial $\mathbf{z} \in X_\mu$ com $\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1$ e tal que

- (1) $-\operatorname{div} \mathbf{z} = |x|^\alpha f(u)$ em $\mathcal{D}'(B)$,
- (2) $(\mathbf{z}, Du) = |Du|$ como medida sobre B ,
- (3) $[\mathbf{z}, \nu] \in \operatorname{sign}(-u)$ sobre ∂B .

Observação 3.7.

Note que, para todo $u \in BV_{rad}(B)$, temos por (f_2) que

$$\begin{aligned} \int_B |x|^\alpha f(u) dx &\leq C \int_B |x|^\alpha (1 + |u|^q) dx \\ &= C \int_B |x|^\alpha dx + C \|u\|_{L_\alpha^q(B)}^q < +\infty. \end{aligned}$$

Podemos enunciar e demonstrar, com os resultados obtidos nas seções anteriores, o resultado principal desse capítulo.

Teorema 3.8. *Suponha que $N \geq 2$ e que f satisfaça as condições $(f_1) - (f_3)$, então existe uma solução não-negativa $u \in BV_{rad}(B)$ de (3.1).*

Demonstração. Como mencionado na Seção 3.1, tomamos $p_0 = \min\{1+a, k, 1+q\}$ e para cada $1 < p < p_0$, consideramos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = |x|^\alpha f(u) & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases} \quad (3.30)$$

Pelas hipóteses $(f_1) - (f_3)$ e da definição de p_0 temos que para todo $p \in (1, p_0)$ a função f é Hölder contínua, $f(s) \geq 0$ se $s > 0$ e satisfaz

$$(f_{1,p}) \quad \limsup_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} = 0, \text{ uniformemente com } x \in B,$$

$$(f_{2,p}) \text{ existe } C > 0 \text{ tal que } f(s) \leq C(1 + |s|^q), \text{ com } p-1 < q < p_\alpha^* - 1,$$

$$(f_{3,p}) \text{ existem } s_0 > 0 \text{ e } \kappa > p \text{ tais que } 0 < \kappa F(s) \leq s f(s) \text{ para } x \in B, s > s_0.$$

Na Seção 3.1 mostramos que o problema (3.30) possui solução $u_p \geq 0$ a qual é ponto crítico do funcional $J_p^+ : W_{0,rad}^{1,p}(B) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_p^+(u) = \frac{1}{p} \int_B |\nabla u|^p dx - \int_B |x|^\alpha F_+(u) dx.$$

Consideremos agora o funcional $I_p : W_{0,rad}^{1,p}(B) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I_p(u) = J_p^+(u) + \frac{p-1}{p} |B|. \quad (3.31)$$

Observação 3.9. Notemos que $I_p(u)$ está bem definido e que os pontos críticos de J_p^+ e de I_p , são os mesmos, pois os dois funcionais se diferem apenas por uma constante.

Observação 3.10. Para cada $u \in W_{0,rad}^{1,p}(B)$, $(I_p(u))_{1 < p < p_0}$ é não-decrescente com respeito a p . De fato, se $1 \leq p_1 \leq p_2 < p_0$, a Desigualdade de Young implica que

$$\int_B |\nabla u|^{p_1} dx \leq \frac{p_1}{p_2} \int_B |\nabla u|^{p_2} dx + \frac{p_2 - p_1}{p_2} |B|.$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} I_{p_1}(u) &= J_{p_1}^+(u) + \frac{p_1 - 1}{p_1} |B| \\ &= \frac{1}{p_1} \int_B |\nabla u|^{p_1} dx - \int_B |x|^\alpha F_+(u) dx + \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) |B| \\ &\leq \frac{1}{p_1} \left(\frac{p_1}{p_2} \int_B |\nabla u|^{p_2} dx + \frac{p_2 - p_1}{p_2} |B| \right) - \int_B |x|^\alpha F_+(u) dx + \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) |B| \\ &= \frac{1}{p_2} \int_B |\nabla u|^{p_2} dx - \int_B |x|^\alpha F_+(u) dx + \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) |B| \\ &= J_{p_2}^+(u) + \frac{p_2 - 1}{p_2} |B| \\ &= I_{p_2}(u). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Por outro lado, fixando $\phi \in C_0^\infty(B)$, $\phi > 0$ e como $I_{p_0}(t\phi) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, então, para $t > 0$ suficientemente grande, existe $e = t\phi$ tal que $I_{p_0}(e) < 0$. Deste modo, por (3.32), obtemos que $I_p(e) < 0$ para todo $p \in (1, p_0)$, então

$$1 < p < p_0 \Rightarrow I_p(e) < I_{p_0}(e) < 0.$$

Pelo Teorema do Passo da Montanha existe $u_p \in W_{0,rad}^{1,p}(B)$ ponto crítico de I_p , tal que

$$I_p(u_p) = \inf_{\gamma \in \Gamma_p} \max_{t \in [0,1]} I_p(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma_p = \{\gamma \in C([0,1], W_{0,rad}^{1,p}(B)) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$.

Lema 3.11. A família $(I_p(u_p))_{p > 1}$ é não-decrescente para $p \in (1, p_0)$.

Demonstração. Com efeito, sejam $1 < p_1 \leq p_2 < p_0$, $u_{p_1} \in W_{0,rad}^{1,p_1}(B)$ e $u_{p_2} \in W_{0,rad}^{1,p_2}(B)$. Como $p_2 \geq p_1$, então $W_{0,rad}^{1,p_2}(B) \subset W_{0,rad}^{1,p_1}(B)$ e $\Gamma_{p_2} \subset \Gamma_{p_1}$. Assim,

$$\begin{aligned} I_{p_1}(u_{p_1}) &= \inf_{\gamma \in \Gamma_{p_1}} \max_{t \in [0,1]} I_{p_1}(\gamma(t)) \\ &\leq \inf_{\gamma \in \Gamma_{p_2}} \max_{t \in [0,1]} I_{p_1}(\gamma(t)) \\ &\leq \inf_{\gamma \in \Gamma_{p_2}} \max_{t \in [0,1]} I_{p_2}(\gamma(t)) \\ &= I_{p_2}(u_{p_2}) \end{aligned} \tag{3.33}$$

e o lema está provado. □

Lema 3.12. A família $(u_p)_{1 < p < p_0}$ é limitada em $BV_{rad}(B)$.

Demonstração. Segue, do Lema 3.11 que, para $p \in (1, p_0)$ fixo, $I_p(u_p) \leq I_{p_0}(u_{p_0})$, e consequentemente

$$\frac{1}{p} \int_B |\nabla u_p|^p dx - \int_B |x|^\alpha F_+(u_p) dx + \frac{p-1}{p} |B| \leq I_{p_0}(u_{p_0}) =: C,$$

o que implica

$$\frac{1}{p} \int_B |\nabla u_p|^p dx - \int_B |x|^\alpha F_+(u_p) dx \leq C - \frac{p-1}{p} |B| \leq C, \quad (3.34)$$

para todo $p \in (1, p_0)$, onde $C = C(p_0)$ é uma constante independente de p . Agora, para todo $p \in (1, p_0)$, seja $A_p = \{x \in B : u_p(x) \leq s_0\}$. Pelo item $(f_{2,p})$ e da definição de F_+ , obtemos

$$\int_{A_p} |x|^\alpha F_+(u_p) dx \leq C_1, \quad (3.35)$$

onde C_1 independe de p .

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{A_p} |x|^\alpha F_+(u_p) dx &\leq \int_{A_p} |x|^\alpha \left(C u_p + \frac{C}{q+1} u_p^{q+1} \right) dx \\ &\leq \int_{A_p} |x|^\alpha \left(C s_0 + \frac{C}{q+1} s_0^{q+1} \right) dx \\ &\leq \int_B |x|^\alpha \left(C s_0 + \frac{C}{q+1} s_0^{q+1} \right) dx \\ &\leq \int_B \left(C s_0 + \frac{C}{q+1} s_0^{q+1} \right) dx \\ &= C \left(s_0 + \frac{s_0^{q+1}}{q+1} \right) |B| \\ &=: C_1. \end{aligned}$$

Assim, pelo item $(f_{3,p})$ e, desde que u_p é solução, verifica-se que

$$\begin{aligned} \int_{B \setminus A_p} |x|^\alpha F_+(u_p) dx &\leq \int_B |x|^\alpha F_+(u_p) dx \\ &\leq \frac{1}{\kappa} \int_B |x|^\alpha f_+(u_p) u_p dx \\ &= \frac{1}{\kappa} \int_B |\nabla u_p|^p dx. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Obtemos, substituindo (3.35) e (3.36) em (3.34),

$$\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{\kappa} \right) \int_B |\nabla u_p|^p dx \leq C + C_1. \quad (3.37)$$

De fato, como

$$\begin{aligned} \int_B |x|^\alpha F_+(u_p) dx &= \int_{B \setminus A_p} |x|^\alpha F_+(u_p) dx + \int_{A_p} |x|^\alpha F_+(u_p) dx \\ &\leq \frac{1}{\kappa} \int_B |\nabla u_p|^p dx + C_1, \end{aligned}$$

temos que

$$-\int_B |x|^\alpha F_+(u_p) dx \geq -\frac{1}{\kappa} \int_B |\nabla u_p|^p dx - C_1.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} C &\geq \frac{1}{p} \int_B |\nabla u_p|^p dx - \int_B |x|^\alpha F(u_p) dx \\ &\geq \frac{1}{p} \int_B |\nabla u_p|^p dx - \frac{1}{\kappa} \int_B |\nabla u_p|^p dx - C_1, \end{aligned}$$

implicando

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa}\right) \int_B |\nabla u_p|^p dx \leq C + C_1.$$

Pelo fato de que $p \in (1, p_0)$ obtemos, assim:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{\kappa}\right) \int_B |\nabla u_p|^p dx &\leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa}\right) \int_B |\nabla u_p|^p dx \\ &\leq C + C_1. \end{aligned}$$

Por isso, podemos concluir que

$$\int_B |\nabla u_p|^p dx \leq \tilde{C}, \quad (3.38)$$

para todo $p \in (1, p_0)$ e para alguma constante positiva $\tilde{C} = C(p_0)$ que não depende de p .

Por outro lado, de (3.38) e da Desigualdade de Young

$$\begin{aligned} \|u_p\|_{BV_{rad}(B)} &= \int_B |\nabla u_p| dx + \int_{\partial B} |u_p| d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_B |\nabla u_p| dx \\ &\leq \frac{1}{p} \int_B |\nabla u_p|^p dx + \frac{p-1}{p} |B| \\ &\leq \frac{1}{p} \int_B |\nabla u_p|^p dx + |B| \\ &\leq \tilde{C} + |B| \\ &=: C, \end{aligned}$$

onde C não depende de p . Assim $(u_p)_{1 < p < p_0}$ é limitada em $BV_{rad}(B)$.

□

Lema 3.13. *Seja u_p uma solução para o problema (3.30), então existe um campo vetorial limitado $\mathbf{z} \in L^\infty(B, \mathbb{R}^N)$, com $\|\mathbf{z}\|_{L^\infty(B)} \leq 1$ tal que, a menos de uma subsequência,*

$$|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \rightharpoonup \mathbf{z}, \quad \text{fracamente em } L^s(B, \mathbb{R}^N), \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+. \quad (3.39)$$

Demonstração. Dado $1 \leq s < p'$. Pela Desigualdade de Hölder para $\frac{p}{s(p-1)}$ e $\frac{p}{p-s(p-1)}$, temos de (3.38) que

$$\begin{aligned}
 \left| |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \right|_{L^s(B)}^s &= \int_B \left| |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \right|^s dx \\
 &= \int_B |\nabla u_p|^{(p-1)s} dx \\
 &\leq \left[\int_B \left(|\nabla u_p|^{(p-1)s} \right)^{\frac{p}{s(p-1)}} dx \right]^{\frac{s(p-1)}{p}} \cdot \left(\int_B dx \right)^{\frac{p-s(p-1)}{p}} \\
 &\leq \left[\left(\int_B |\nabla u_p|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{s(p-1)} \cdot |B|^{\frac{p-s(p-1)}{p}} \\
 &\leq \left(\tilde{C}^{\frac{1}{p}} \right)^{s(p-1)} \cdot |B|^{\frac{p-s(p-1)}{p}} \\
 &\leq \tilde{C}^{\frac{s(p-1)}{p}} \cdot |B|^{\frac{p-s(p-1)}{p}}
 \end{aligned}$$

isto é,

$$\left| |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \right|_{L^s(B)} \leq \tilde{C}^{\frac{p-1}{p}} \cdot |B|^{\frac{1}{s} \frac{p-1}{p}}. \quad (3.40)$$

Consequentemente, a sequência $(|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p)_{p>1}$ é limitada em $L^s(B, \mathbb{R}^N)$ com $1 \leq s < p'$. Então existe $\mathbf{z}_s \in L^s(B, \mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência,

$$|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \rightharpoonup \mathbf{z}_s, \quad \text{em } L^s(B, \mathbb{R}^N) \quad \text{para todo } 1 \leq s < \infty, \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+. \quad (3.41)$$

É possível provar, usando um argumento diagonal, que o limite $\mathbf{z}$ não depende de s , ou seja

$$|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \rightharpoonup \mathbf{z}, \quad \text{em } L^s(B, \mathbb{R}^N) \quad \text{para todo } 1 \leq s < \infty, \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+. \quad (3.42)$$

Além disso, utilizando o fato da norma em $L^s(B, \mathbb{R}^N)$ ser fracamente semicontínua inferiormente, da desigualdade (3.40),

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{z}|_{L^s(B)} &\leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} \left| |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \right|_{L^s(B)} \\
 &\leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} \left(\tilde{C}^{\frac{p-1}{p}} \cdot |B|^{\frac{1}{s} \frac{p-1}{p}} \right) \\
 &= |B|^{\frac{1}{s}},
 \end{aligned} \quad (3.43)$$

para todo $1 \leq s < p'$ e, consequentemente, $\mathbf{z} \in L^\infty(B, \mathbb{R}^N)$ e $|\mathbf{z}|_{L^\infty(B)} \leq 1$. Portanto, existe um campo vetorial limitado $\mathbf{z} \in L^\infty(B, \mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de uma subsequência, (3.39) é satisfeita.

□

Considerando $\varphi \in C_0^\infty(B)$, então $\nabla \varphi \in L^\infty(B, \mathbb{R}^N)$ e assim, a aplicação

$$\psi \longmapsto \int_B \psi \cdot \nabla \varphi \quad (3.44)$$

é um funcional contínuo para $\psi \in L^\infty(B, \mathbb{R}^N)$. Utilizando a convergência fraca (3.39), aplicando o funcional (3.44) no campo $|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p$, obtemos

$$\int_B |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx \longrightarrow \int_B \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx, \quad \text{quando } p \rightarrow 1^+, \quad (3.45)$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(B)$.

Do Lema (3.12) e do Teorema 2.30 existe $u \in BV_{rad}(B)$, de forma que passando a uma subsequência,

- (A) $u_p \rightarrow u_0$ em $L_\alpha^r(B)$ para $1 \leq r < \frac{N+\alpha}{N-1}$,
 (B) $u_p(x) \rightarrow u_0(x)$ em quase todo ponto $x \in B$,
 (C) existe $g \in L_\alpha^r(B)$ com $1 \leq r < \frac{N+\alpha}{N-1}$ tal que $|u_p(x)| \leq g(x)$.

Observe que $u_0 \geq 0$, pois $u_p \geq 0$ para todo $p > 1$, então por (A) e, pelo fato de $f_+(s)$ ser contínua, temos:

$$|x|^\alpha f_+(u_p(x)) \longrightarrow |x|^\alpha f_+(u_0(x)) \quad \text{para quase todo } x \in B.$$

Além disso, deduzimos dos itens $(f_{2,p})$, (C) e da Observação 3.7 que

$$\begin{aligned} |x|^\alpha f_+(u_p(x)) &\leq C|x|^\alpha(1 + |u_p(x)|^q) \\ &\leq C|x|^\alpha(1 + |g(x)|^q) \in L^1(B). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_B |x|^\alpha f_+(u_p) \varphi dx \longrightarrow \int_B |x|^\alpha f_+(u_0) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(B). \quad (3.46)$$

Como u_p é uma solução fraca de (3.30), então por (3.46)

$$\int_B |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \nabla \varphi = \int_B |x|^\alpha f_+(u_p) \varphi dx \longrightarrow \int_B |x|^\alpha f_+(u_0) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(B). \quad (3.47)$$

Agora, de (3.45) e da definição do gradiente distribucional, temos:

$$\int_B |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \nabla \varphi dx \longrightarrow \int_B \mathbf{z} \nabla \varphi dx = - \int_B \varphi \operatorname{div}(\mathbf{z}), \quad \forall \varphi \in C_c^1(B). \quad (3.48)$$

Logo, das expressões (3.47), (3.48) e pela unicidade do limite, temos que:

$$\int_B |x|^\alpha f_+(u_0) \varphi dx = - \int_B \varphi \operatorname{div}(\mathbf{z}), \quad \forall \varphi \in C_c^1(B), \quad (3.49)$$

ou seja,

$$-\operatorname{div} \mathbf{z} = |x|^\alpha f_+(u_0) \quad \text{em } \mathcal{D}'(B). \quad (3.50)$$

Lema 3.14. A função $u_0 \in L^\infty(B)$.

Demonstração. Seja S_1 a melhor constante da imersão de Sobolev $W_{0,rad}^{1,1}(B) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(B)$ dada no Lema 2.20 (tal imersão ocorre, pois $\frac{N}{N-1} < \frac{N+\alpha}{N-1}$). Para cada $\kappa \geq 0$ e $p \in (1, p_0)$, definimos

$$A_{\kappa,p} = \{x \in B : |u_p(x)| > \kappa\}.$$

Por [35][Lema 3.1], vale a seguinte desigualdade

$$\int_{A_{\kappa,p}} [1 + u_p^q(x)]^N dx < \varepsilon, \quad (3.51)$$

para todo $\kappa \geq \kappa_0$ e para todo $p \in (1, p_0)$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Agora, para cada $\kappa > 0$, definimos a seguinte função auxiliar $G_\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$G_\kappa = \begin{cases} s - \kappa, & s > \kappa \\ 0, & |s| \leq \kappa \\ s + \kappa & s < -\kappa. \end{cases} \quad (3.52)$$

Então, escolhendo $G_\kappa(u_p)$ como uma função de teste em (3.2), obtemos

$$\int_B |\nabla G_\kappa(u_p)|^p dx = \int_B |x|^\alpha f(u_p) G_\kappa(u_p) dx. \quad (3.53)$$

Agora, usando (3.52), a imersão de Sobolev e as desigualdades de Young e Hölder, temos

$$\begin{aligned} \left(\int_B [G_\kappa(u_p)]^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} &\leq S_1 \int_B |\nabla G_\kappa(u_p)| dx \\ &\leq S_1 \left(\frac{1}{p} \int_B |\nabla G_\kappa(u_p)|^p dx + \frac{p-1}{p} |B| \right) \\ &\leq \frac{S_1}{p} \int_B |\nabla G_\kappa(u_p)|^p dx + \frac{S_1(p-1)}{p} |B| \\ &\leq S_1 \int_B |x|^\alpha f(u_p) G_\kappa(u_p) dx + \frac{S_1(p-1)}{p} |B| \\ &\leq CS_1 \int_{A_{\kappa,p}} (1 + u_p^q) G_\kappa(u_p) dx + \frac{S_1(p-1)}{p} |B| \\ &\leq CS_1 \left(\int_{A_{\kappa,p}} (1 + u_p^q)^N \right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_B (G_\kappa(u_p))^{\frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{N-1}{N}} + \frac{S_1(p-1)}{p} |B|, \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde $C > 0$ é uma constante. Por (3.51), existe $\bar{\kappa}_0$ (que não depende de p) tal que

$$\int_{A_{\kappa,p}} (1 + u_p^q)^N < \frac{1}{(2CS_1)^N}, \quad (3.55)$$

para todo $\kappa \geq \bar{\kappa}_0$. Assim, de (3.54) e (3.55)

$$\left(\int_B [G_\kappa(u_p)]^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \frac{\left(\int_B [G_\kappa(u_p)]^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}}}{2} + \frac{S_1(p-1)}{p} |B|, \quad (3.56)$$

isto é,

$$\int_B (G_\kappa(u_p))^{\frac{N}{N-1}} \leq \left(\frac{2S_1(p-1)|B|}{p} \right)^{\frac{N}{N-1}}. \quad (3.57)$$

Desde que $u_p(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p em B , podemos utilizar o lema de Fatou para obtermos

$$\begin{aligned} 0 < \int_B (u - \kappa) dx &= \int_B \liminf_{p \rightarrow 1^+} (u_p - \kappa) dx \\ &\leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} \left[\int_B (u_p - \kappa) dx \right] \\ &= \liminf_{p \rightarrow 1^+} \int_B G_\kappa(u_p) dx \\ &\leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} \left(\frac{2S_1(p-1)|B|}{p} \right)^{\frac{N}{N-1}} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

ou seja,

$$\int_B (u - \kappa)^{\frac{N}{N-1}} = 0,$$

para todo $\kappa \geq \bar{\kappa}_0$.

Portanto $\|u\|_{L^\infty(B)} = \inf \{C : |u(x)| \leq C \text{ q.t.p em } B\} \leq \bar{\kappa}_0$.

□

Lema 3.15. *A função u_0 e o campo vetorial $\mathbf{z}$ satisfazem a seguinte igualdade no sentido de medida em B ,*

$$(\mathbf{z}, Du_0) = |Du_0|.$$

Demonstração. Basta mostrarmos que para todo $\varphi \in C_c^\infty(B)$,

$$\langle (\mathbf{z}, Du_0), \varphi \rangle = \int_B |Du_0| \varphi.$$

Pelo Teorema 2.17 temos

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{z}, Du_0), \varphi \rangle &\leq |\langle (\mathbf{z}, Du_0), \varphi \rangle| \\ &\leq \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(B)} \int_B \varphi |Du_0| \\ &\leq \int_B \varphi |Du_0|. \end{aligned}$$

Resta-nos mostrar, daqui em diante, que

$$\langle (\mathbf{z}, Du_0), \varphi \rangle \geq \int_B |Du_0| \varphi.$$

Tomando $0 \leq u_p \varphi \in W_{0,rad}^{1,p}(B)$ como função teste em (3.30), temos que

$$\int_B |\nabla u_p|^p \varphi dx + \int_B u_p |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \nabla \varphi dx = \int_B |x|^\alpha f_+(u_p) u_p \varphi dx. \quad (3.59)$$

Estimando em (3.59) a primeira integral e usando a Desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} \int_B |\nabla u_p| \varphi dx &= \int_B \varphi (|\nabla u_p| \cdot 1) dx \\ &\leq \int_B \varphi \left(\frac{1}{p} |\nabla u_p|^p + \frac{p-1}{p} \cdot 1^{\frac{p}{p-1}} \right) dx \\ &= \frac{1}{p} \int_B \varphi |\nabla u_p|^p dx + \frac{p-1}{p} \int_B \varphi dx. \end{aligned}$$

Usando, neste momento, a semicontinuidade inferior da norma em $BV(B)$ com respeito à convergência em $L_\alpha^r(B)$ (Ver Observação 2.21), temos que:

$$\begin{aligned} \int_B \varphi |Du_0| &\leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} \int_B \varphi |\nabla u_p| dx \\ &\leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{p} \int_B \varphi |\nabla u_p|^p dx + \frac{p-1}{p} \int_B \varphi dx \right) \\ &= \liminf_{p \rightarrow 1^+} \int_B \varphi |\nabla u_p|^p dx. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Por outro lado, de (A) e (3.45),

$$\int_B u_p |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx \longrightarrow \int_B u_0 \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx, \quad (3.61)$$

quando $p \rightarrow 1^+$.

O lado direito de (3.59) é analisado da seguinte forma. Note que, por $(f_{1,p})$ e (C) ,

$$\begin{aligned} \left| |x|^\alpha f_+(u_p) u_p \varphi \right| &\leq C |x|^\alpha |u_p(x) \varphi| (1 + |u_p(x)|^q) \\ &\leq C |x|^\alpha |g(x) \varphi| (1 + |g(x)|^q) \in L^1(B). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e por (3.50), temos que:

$$\int_B |x|^\alpha f_+(u_p) u_p \varphi dx \longrightarrow \int_B |x|^\alpha f_+(u_0) u_0 \varphi dx = - \int_B u_0 \varphi \operatorname{div} \mathbf{z} dx,$$

quando $p \rightarrow 1^+$. Então fazendo $p \rightarrow 1^+$ em (3.59), obtemos

$$\begin{aligned} \liminf_{p \rightarrow 1^+} \int_B \varphi |\nabla u_p|^p dx + \int_B u_0 \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx &= \int_B |x|^\alpha f_+(u_0) u_0 \varphi dx \\ &= - \int_B u_0 \varphi \cdot \operatorname{div} \mathbf{z} dx, \end{aligned}$$

e por (3.60)

$$\int_B \varphi |Du_0| \leq - \int_B u_0 \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx - \int_B \operatorname{div} \mathbf{z} u_0 \varphi dx,$$

o que resulta que

$$\int_B \varphi |Du_0| \leq \langle (\mathbf{z}, Du_0), \varphi \rangle.$$

Logo

$$(\mathbf{z}, Du_0) = |Du_0|. \quad (3.62)$$

□

Lema 3.16. A função u_0 satisfaz $[\mathbf{z}, \nu] \in \operatorname{sign}(-u_0)$ sobre ∂B .

Demonstração. Observe inicialmente que

$$[\mathbf{z}, \nu] \in \operatorname{sign}(-u_0) \Leftrightarrow \int_{\partial B} (|u_0| + u_0 [\mathbf{z}, \nu]) d\mathcal{H}^{N-1} = 0, \quad (3.63)$$

pois como $|\mathbf{z}| \leq \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(B)} \leq 1$, então

$$-|u_0| \leq [\mathbf{z}, \nu] u_0 \implies 0 \leq [\mathbf{z}, \nu] u_0 + |u_0|. \quad (3.64)$$

Desta forma, $[\mathbf{z}, \nu] u_0 + |u_0| = 0$ sobre ∂B se, e somente se, $\int_{\partial B} (|u_0| + u_0 [\mathbf{z}, \nu]) d\mathcal{H}^{N-1} = 0$. Por um lado, por (3.64) temos:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} (|u_0| + u_0 [\mathbf{z}, \nu]) d\mathcal{H}^{N-1} &\geq \int_{\partial B} (-u_0 [\mathbf{z}, \nu] + u_0 [\mathbf{z}, \nu]) d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Resta mostrar então, que

$$\int_{\partial B} (|u_0| + u_0[\mathbf{z}, \nu]) d\mathcal{H}^{N-1} \leq 0. \quad (3.66)$$

Para tal, seja $\varphi \in C_c^1(B)$ e tomemos $(u_p - \varphi)$ como função teste em (3.30), então

$$\int_B |\nabla u_p|^p dx = \int_B |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \nabla \varphi dx + \int_B |x|^\alpha f_+(u_p)(u_p - \varphi) dx. \quad (3.67)$$

Desta forma, usando (3.67) e a Desigualdade de Young, temos:

$$\begin{aligned} p \int_B |\nabla u_p| dx &= p \int_B (\nabla u_p \cdot 1) dx \\ &\leq p \int_B \left(\frac{|\nabla u_p|^p}{p} + \frac{p-1}{p} \cdot 1^{\frac{p}{p-1}} \right) dx \\ &\leq p \int_B |\nabla u_p|^p dx + (p-1)|B| \\ &= p \int_B |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx + p \int_B |x|^\alpha f_+(u_p)(u_p - \varphi) dx + (p-1)|B|. \end{aligned}$$

Implicando em

$$\int_B |\nabla u_p| dx \leq \int_B |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx + \int_B |x|^\alpha f_+(u_p)(u_p - \varphi) dx + \frac{(p-1)}{p} |B|. \quad (3.68)$$

De (3.39) e (3.68) e da semicontinuidade inferior da variação total (Ver Observação 2.21) e os argumentos prévios, obtemos que:

$$\begin{aligned} \int_B |Du_0| + \int_{\partial B} |u_0| d\mathcal{H}^{N-1} &\leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} \left[\int_B |\nabla u_p| dx + \int_{\partial B} |u_p| d\mathcal{H}^{N-1} \right] \\ &= \liminf_{p \rightarrow 1^+} \int_B |\nabla u_p| dx \\ &\leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} \left[\int_B |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla \varphi dx \right. \\ &\quad \left. + \int_B |x|^\alpha f_+(u_p)(u_p - \varphi) dx + \frac{p-1}{p} |B| \right] \\ &= \int_B \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx - \int_B |x|^\alpha f_+(u_0) \varphi dx + \int_B |x|^\alpha f_+(u_0) u_0 dx \\ &= \int_B |x|^\alpha f_+(u_0) u_0 dx. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Temos, desta maneira, por (3.50), (3.29) e (3.62) que:

$$\begin{aligned} \int_B |x|^\alpha f_+(u_0) u_0 dx &= - \int_B u_0 \operatorname{div} \mathbf{z} dx \\ &= - \int_{\partial B} u_0 [\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} + \int_B (\mathbf{z}, Du_0) \\ &= - \int_{\partial B} u_0 [\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} + \int_B |Du_0|. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Substituindo (3.70) em (3.69) obtemos

$$\int_B |Du_0| + \int_{\partial B} |u_0| d\mathcal{H}^{N-1} \leq - \int_{\partial B} u_0 [\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} + \int_B |Du_0|,$$

isto é,

$$\int_{\partial B} |u_0| d\mathcal{H}^{N-1} \leq \int_{\partial B} u_0[\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1},$$

o que implica,

$$\int_{\partial B} (|u_0| + u_0[\mathbf{z}, \nu]) d\mathcal{H}^{N-1} \leq 0.$$

Assim, concluimos que

$$[\mathbf{z}, \nu] \in \text{sign}(-u_0) \text{ sobre } \partial B. \quad (3.71)$$

□

Então, por (3.50), (3.62) e (3.71) concluimos que u_0 é uma solução do problema (3.2), isto é,

$$\begin{cases} -\text{div}(\mathbf{z}) &= |x|^\alpha f(u_0) \text{ em } \mathcal{D}'(B), \\ (\mathbf{z}, Du_0) &= |Du_0| \text{ como medida,} \\ [\mathbf{z}, \nu] &\in \text{sign}(u_0) \text{ sobre } \partial B. \end{cases} \quad (3.72)$$

Observação 3.17. A princípio, o item (1) da definição 3.6 apenas nos permite considerar funções teste no espaço $C_0^\infty(B)$. Porém, como consequência da Teoria de Anzellotti, podemos escolher qualquer $w \in BV_{rad}(B) \cap L^\infty(B)$ como função teste, então a fórmula de Green (3.29) implica

$$\int_B (\mathbf{z}, Dw) - \int_B |x|^\alpha f(u)w = \int_{\partial B} w[\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Proposição 3.18. u_0 é uma solução positiva não-trivial.

Demonstração. Por (f_1) e (f_2) , é possível provar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $d_\varepsilon > 0$ tal que

$$F_+(s) \leq \varepsilon|s| + d_\varepsilon|s|^q, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Logo

$$\begin{aligned} I(u_0) &= \|u_0\|_{BV_{rad}(B)} - \int_B |x|^\alpha F_+(u_0) dx \\ &\geq \|u_0\|_{BV_{rad}(B)} - \varepsilon \|u_0\|_{L_\alpha^1(B)} - d_\varepsilon \|u_0\|_{L_\alpha^q(B)}^q \\ &\geq \|u_0\|_{BV_{rad}(B)} - C\varepsilon \|u_0\|_{BV_{rad}(B)} - C \|u_0\|_{BV_{rad}(B)}^q \\ &= (1 - C\varepsilon) \|u_0\|_{BV_{rad}(B)} - C \|u_0\|_{BV_{rad}(B)}^q \\ &= \|u_0\|_{BV_{rad}(B)} \left[(1 - C\varepsilon) - C \|u_0\|_{BV_{rad}(B)}^{q-1} \right] \\ &\geq \frac{\|u_0\|_{BV_{rad}(B)}}{2}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

desde que $\|u_0\|_{BV_{rad}(B)} \leq \rho$, onde $0 < \rho < \left(\frac{1}{2} - C\varepsilon\right)^{\frac{1}{q-1}}$, onde $\varepsilon > 0$ é escolhido pequeno suficiente para que $\left(\frac{1}{2} - C\varepsilon\right) > 0$.

Observando que $I(e) < 0$, deduzimos que $\|e\| > \rho$. Fixemos agora $p \in (1, p_0)$ e pela Desigualdade de Young para p e $\frac{p}{p-1}$, temos, para todo $u \in W_{0,rad}^{1,p}(B)$,

$$\begin{aligned} I(u) &= \|u\|_{BV_{rad}(B)} - \int_B |x|^\alpha F_+(u) dx \\ &= \int_B |\nabla u| + \int_{\partial B} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_B |x|^\alpha F_+(u) dx \\ &\leq \frac{1}{p} \int_B |\nabla u|^p + \frac{p-1}{p} |B| - \int_B |x|^\alpha F_+(u) dx \\ &= \left(\frac{1}{p} \int_B |\nabla u|^p + \frac{p-1}{p} |B| - \int_B |x|^\alpha F_+(u) dx \right) \\ &= I_p(u), \end{aligned}$$

isto é,

$$I_p(u_0) \geq I(u_0), \forall u_0 \in W_{0,rad}^{1,p}(B). \quad (3.74)$$

Agora, considerando um caminho $\gamma \in \Gamma_p$, pela continuidade da aplicação $t \mapsto I_p(\gamma(t))$, existe $t_0 > 0$ tal que $\|\gamma(t_0)\| = \rho$. Disso, segue de (3.73) e (3.74) que

$$\begin{aligned} I_p(u_p) &= \inf_{\gamma \in \Gamma_p} \max_{t \in [0,1]} I_p(\gamma(t)) \\ &\geq \frac{\rho}{2}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Por outro lado, usando a Observação 3.17 e o fato de que u_0 e u_p são soluções para os problemas (3.1) e (3.2) respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 1^+} \frac{1}{p} \int_B |\nabla u_p|^p dx &= \lim_{p \rightarrow 1^+} \frac{1}{p} \int_B |x|^\alpha f_+(u_p) u_p dx \\ &= \int_B |x|^\alpha f_+(u_0) u_0 dx \\ &= \int_B (\mathbf{z}, Du_0) - \int_{\partial B} u_0 [\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_B |Du_0| + \int_{\partial B} |u_0| d\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned}$$

Além disso, o item (C) implica que

$$\begin{aligned} \kappa |x|^\alpha |F(u_p)| &\leq |x|^\alpha u_p |f(u_p)| \\ &\leq |x|^\alpha g(x) (1 + g(x)^q) \in L^1(B). \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} \int_B |x|^\alpha F_+(u_p) dx = \int_B |x|^\alpha F_+(u_0) dx$$

e usando as duas últimas equações, deduzimos que

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 1^+} I_p(u_p) &= \lim_{p \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{p} \|u_p\|_{W_{0,rad}^{1,p}(B)} - \int_B |x|^\alpha F_+(u_p) dx + \frac{p-1}{p} |B| \right) \\ &= \|u_0\|_{BV_{rad}(B)} - \int_B |x|^\alpha F_+(u_0) dx \\ &= I(u_0). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Por (3.75) e (3.76) concluímos que $I(u_0) \geq \frac{\rho}{2}$ e então u_0 é não-trivial.

□

4 Quebra de simetria para a equação de Hénon envolvendo o operador 1-Laplaciano

Nesse capítulo, vamos estudar questões sobre a existência de solução que apresenta quebra de simetria para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = |x|^\alpha |u|^{q-2}u & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $B \subset \mathbb{R}^N$ é uma bola unitária, $\alpha > 0$, $N \geq 4$, com $1 < q < 1^*(N)$, onde

$$1^*(N) = \begin{cases} \frac{N+2}{2} & \text{se } N \text{ é par;} \\ \left[\frac{N}{2}\right] + 2 & \text{se } N \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

onde $[a]$ denota a parte inteira de $a \in \mathbb{R}$.

Nos baseamos no trabalho de Figueiredo, Carrião e Miyagaki [13] para mostrarmos que, apesar do domínio ser radial, existe uma solução não-radial para o problema (4.1), quando α é suficientemente grande. O resultado principal desse capítulo é o seguinte:

Teorema 4.1. *Suponha $N \geq 4$ e $q \in (1, 1^*(N))$, então existe um $\alpha_0 > 0$ tal que (4.1) tem uma solução de variação limitada não-trivial e não-radial para $\alpha > \alpha_0$.*

4.1 Resultados de existência

Como no capítulo anterior, atacaremos o problema (4.1) por meio da aproximação deste, pela família de problemas envolvendo o operador p -Laplaciano. Antes disso, devemos fixar $l = \frac{N}{2}$ se N for par, $l = \left[\frac{N}{2}\right] + 1$ se N é ímpar. Observamos que, $2 \leq N - l \leq l$ e então seja $p_0 \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p_0 \leq \max\{N/2, q, N - l\}$. Consideremos, para cada $1 < p < p_0$, o problema envolvendo o operador p -Laplaciano associado a (4.1),

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |x|^\alpha |u|^{q-2}u & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad (4.2)$$

e definamos para cada $1 < p < p_0$,

$$c_\alpha^p := \inf_{u \in W_{0,rad}^{1,p}(B) - \{0\}} \frac{\int_B |\nabla u|^p dx}{\left(\int_B |x|^\alpha |u|^q dx \right)^{\frac{p}{q}}} \quad (4.3)$$

e

$$m_{\alpha,l}^p := \inf_{u \in W_{0,l}^{1,p}(B) - \{0\}} \frac{\int_B |\nabla u|^p dx}{\left(\int_B |x|^\alpha |u|^q dx \right)^{\frac{p}{q}}}. \quad (4.4)$$

A partir do fato de que a simetria radial implica em parcial, devemos ter $W_{0,rad}^{1,p}(B) \subset W_{0,l}^{1,p}(B)$ e com isso, $m_{\alpha,l}^p \leq c_\alpha^p$.

Observação 4.2. Como $1 < p$, então $1^*(N) < p_l$. De fato,

$$\begin{aligned} p > 1 &\Rightarrow p(l+1) > l+1 \\ &\Rightarrow pl - (l+1-p) > 0 \\ &\Rightarrow (l+1)[pl - (l+1-p)] > 0 \\ &\Rightarrow \frac{(l+1)pl - (l+1)(l+1-p)}{(l+1-p)l} > 0 \\ &\Rightarrow \frac{(l+1)p}{l+1-p} - \frac{l+1}{l} > 0 \\ &\Rightarrow \frac{(l+1)p}{l+1-p} > \frac{l+1}{l}. \end{aligned}$$

Assim, se N é par, então

$$\begin{aligned} p_l = \frac{(l+1)p}{l+1-p} &> \frac{l+1}{l} \\ &= \frac{N/2+1}{N/2} \\ &= \frac{N+2}{N} \\ &= 1^*(N), \end{aligned}$$

e, se N é ímpar, então

$$\begin{aligned} p_l = \frac{(l+1)p}{l+1-p} &> \frac{l+1}{l} \\ &= \frac{([N/2]+1)+1}{[N/2]+1} \\ &= \frac{[N/2]+2}{[N/2]+1} \\ &= 1^*(N). \end{aligned}$$

Do Teorema 2.31, uma vez que nossa hipótese implica que $q < p_l = \frac{(l+1)p}{l+1-p}$, segue que $W_{0,l}^{1,p}(B)$ é imerso compactamente em $L_\alpha^q(B)$, desde que

$$\alpha \geq \alpha_0 := p_{0l} \left(\frac{Np_0 + (l-1)(l+1-p_0)}{l+1} \right). \quad (4.5)$$

De fato, se (4.5) for válido, então, para cada $1 < p < p_0$, temos que $\alpha \geq \frac{p_l q_l}{p}$, onde $q_l = \frac{Np+(l-1)(l+1-p)}{l+1}$ e $p_{0l} = \frac{(l+1)p_0}{l+1-p_0}$.

No próximo resultado, provamos que c_α^p e $m_{\alpha,l}^p$ são atingidos, respectivamente, por funções $u_p \in W_{0,rad}^{1,p}(B)$ e $v_p \in W_{0,l}^{1,p}(B)$ que serão, a menos de um múltiplo escalar, soluções fracas de (4.2), conforme seguinte resultado:

Proposição 4.3. *Sob as condições do Teorema 4.1, para todo $1 < p < p_0$, existem $u_p \in W_{0,rad}^{1,p}(B)$ e $v_p \in W_{0,l}^{1,p}(B)$, minimizantes de c_α^p e $m_{\alpha,l}^p$, respectivamente. Além disso, u_p e v_p são soluções fracas de (4.2).*

Demonstração. Para mostrar este resultado utilizamos o *Teorema de Multiplicadores de Lagrange* (ver [26]). Provamos apenas a existência de v_p que minimiza $m_{\alpha,l}^p$, uma vez que a existência de u_p segue os mesmos argumentos. Consideremos os funcionais $J : W_{0,l}^{1,p}(B) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathcal{F} : W_{0,l}^{1,p}(B) \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por:

$$J(v) = \frac{1}{p} \int_B |\nabla v|^p dx \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(v) = \frac{1}{q} \int_B |x|^\alpha |v|^q dx.$$

Notemos que $J, \mathcal{F} \in C^1(W_{0,l}^{1,p}(B), \mathbb{R})$ com

$$J'(v)w = \int_B |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla w dx \quad \text{e} \quad \mathcal{F}'(v)w = \int_B |x|^\alpha |v|^{q-2} v w dx,$$

para todo $w \in W_{0,l}^{1,p}(B)$. Consideremos ainda o seguinte subconjunto de $W_{0,l}^{1,p}(B)$:

$$M = \left\{ v \in W_{0,l}^{1,p}(B) : \frac{1}{q} \int_B |x|^\alpha |v|^q dx = 1 \right\}.$$

Mostremos que, para todo $v \in M$, $\mathcal{F}'(v) \neq 0$. De fato, para todo $v \in M$,

$$\mathcal{F}'(v)v = \int_B |x|^\alpha |v|^q dx = q \neq 0.$$

Além disso, J é limitado inferiormente em M pois, como

$$J(v) = \frac{1}{p} \int_B |\nabla v|^p dx \geq 0,$$

para todo $v \in W_{0,l}^{1,p}(B)$, temos em particular que $J \geq 0$ em M , pois $M \subset W_{0,l}^{1,p}(B)$.

Do fato de que J é limitado inferiormente em M , temos pelo *Postulado de Dedekind* na reta que existe $J_\infty \in \mathbb{R}$ tal que

$$J_\infty = \inf_{v \in M} J(v).$$

Pela definição de ínfimo, existe uma sequência $(v_n) \subset M$ de modo que

$$J_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \|v_n\|_{W_{0,l}^{1,p}(B)}^p, \quad (4.6)$$

mostrando que (v_n) é uma sequência limitada em $W_{0,l}^{1,p}(B)$, para $1 < p < N$, fixado. Desde que $W_{0,l}^{1,p}(B)$ é um espaço reflexivo, existe $v_0 \in W_{0,l}^{1,p}(B)$ tal que, a menos de subsequência

$$v_n \rightharpoonup v_0 \in W_{0,l}^{1,p}(B),$$

e, pelo Teorema 2.31,

$$v_n \rightarrow v_0 \in L_\alpha^q(B), \quad (4.7)$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Afirmção. $v_0 \in M$. De fato, se $(v_n) \subset M$, temos por (4.7)

$$\frac{1}{q} \int_B |x|^\alpha |v_0|^q dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q} \int_B |x|^\alpha |v_n|^q dx = 1,$$

o que mostra $v_0 \in M$.

Portanto,

$$J_\infty \leq J(v_0). \quad (4.8)$$

Por outro lado, desde que a função norma é fracamente semicontínua inferiormente, temos que

$$\begin{aligned} J(v_0) &= \frac{1}{p} \|v_0\|_{W_{0,l}^{1,p}}^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \|v_n\|_{W_{0,l}^{1,p}}^p \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(v_n) \\ &= J_\infty. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Por (4.8) e (4.9) temos que $J(v_0) = J_\infty$.

Afirmção. $J_\infty > 0$. De fato, suponha por absurdo que $J_\infty = 0$. De (4.6), obtemos $J(v_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, o que implica

$$v_n \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad W_{0,l}^{1,p}(B).$$

Usando o fato de que $W_{0,l}^{1,p}(B)$ está imerso continuamente em $L_\alpha^q(B)$ temos:

$$\int_B |x|^\alpha |v_n|^q dx \rightarrow 0.$$

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_B |x|^\alpha |v_{n_0}|^q dx < 1,$$

o que contradiz o fato de que $v_{n_0} \in M$. Desse modo, concluímos que $J_\infty > 0$ e pelo fato $J(v_0) = J_\infty$, segue que $v_0 \neq 0$.

Assim, podemos aplicar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, o qual fornece um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(v_0) = \lambda \mathcal{F}'(v_0).$$

Podemos supor ainda que $v_0 \geq 0$ pois, caso contrário, troca-se v_0 por $|v_0|$ e, ainda assim, continuamos a ter

$$J'(v_0) = \lambda \mathcal{F}'(v_0).$$

Portanto

$$J'(v_0)w = \lambda \mathcal{F}'(v_0)w, \quad \text{para todo } w \in W_{0,l}^{1,p}(B), \quad (4.10)$$

ou equivalentemente,

$$\int_B |\nabla v_0|^{p-2} \nabla v_0 \nabla w dx = \lambda \int_B |x|^\alpha |v_0|^{q-2} v_0 w dx, \quad \text{para todo } w \in W_{0,l}^{1,p}(B). \quad (4.11)$$

Assim, v_0 é uma solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda |x|^\alpha |\nabla v|^{q-2} v & \text{em } B \\ v = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases} \quad (4.12)$$

Em particular, tomando $v_0 = w$ como função teste em (4.11), obtemos

$$\int_B |\nabla v_0|^p dx = \lambda \int_B |x|^\alpha |v_0|^q dx.$$

Logo,

$$\lambda = \frac{1}{q} \int_B |\nabla v_0|^p dx > 0,$$

pois $\frac{1}{q} \int_B |x|^\alpha |v_0|^q dx = 1$.

Sejam $\beta > 0$ e $v_p = \beta v_0$, então:

$$\begin{aligned} \int_B |\nabla v_p|^{p-2} \nabla v_p \nabla w dx &= \int_B |\nabla \beta v_0|^{p-2} \nabla (\beta v_0) \nabla w dx \\ &= \beta^{p-1} \int_B |\nabla v_0|^{p-2} \nabla v_0 \nabla w dx \\ &= \beta^{p-1} \lambda \int_B |x|^\alpha |v_0|^{q-2} v_0 w dx \\ &= \frac{\beta^{p-1} \lambda}{\beta^{q-1}} \int_B |x|^\alpha |\beta v_0|^{q-2} (\beta v_0) w dx \\ &= \beta^{p-q} \lambda \int_B |x|^\alpha |v_p|^{q-2} v_p w dx. \end{aligned}$$

Agora, escolhendo β de modo que $\beta^{p-q} \lambda = 1$, concluímos que v_p é uma solução fraca do problema (4.2). Ainda temos,

$$\frac{\int_B |\nabla v_p|^p dx}{\left(\int_B |x|^\alpha |v_p|^q dx\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{\beta^p \int_B |\nabla v_0|^p dx}{\beta^p \left(\int_B |x|^\alpha |v_0|^q dx\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{\int_B |\nabla v_0|^p dx}{\left(\int_B |x|^\alpha |v_0|^q dx\right)^{\frac{p}{q}}} = m_{\alpha,l}^p.$$

Além disso, de (4.10) e do Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais, segue que v_p é uma solução fraca de (4.2).

□

A seguir enunciaremos um resultado obtido por Figueiredo, Carrião e Miyagaki em [13] que será crucial em nossa argumentação.

Lema 4.4. *Sejam $p \leq N - l \leq l$, $N \geq 4$ e $q \in (p, p_l)$, então existem $C_1, C_2 > 0$ e $\alpha_0 > 0$ (que não dependem de p ou α) de forma que*

$$C_1 \alpha^{p-1+\frac{p}{q}} \leq c_\alpha^p$$

e

$$m_{\alpha,l}^p \leq C_2 \alpha^{(l+1-N)(1-\frac{p}{q})+\frac{2p}{q}-2+p},$$

para $\alpha \geq \alpha_0$.

Demonstração. Ver [13] [Teorema 4.1 e Teorema 4.2].

□

Agora, suponha que α_0 na última proposição, satisfaça (4.5) e também

$$\alpha_0 > \left(\frac{C_2}{C_1} + 1 \right)^{\frac{1}{(N-l)(1-\frac{p_0}{q})}}. \quad (4.13)$$

Logo, para todos os $1 < p < p_0$ e $\alpha > \alpha_0$, temos que $\alpha > \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^{\frac{1}{(N-l)(1-\frac{p}{q})}}$. Com efeito, se $1 < p < p_0$ e $q > 1$, então

$$\begin{aligned} -p > -p_0 &\implies \frac{-p}{q} > \frac{-p_0}{q} \\ &\implies 1 - \frac{p}{q} > 1 - \frac{p_0}{q} \\ &\implies (N-l)(1 - \frac{p}{q}) > (N-l)(1 - \frac{p_0}{q}) \\ &\implies \frac{1}{(N-l)(1 - \frac{p}{q})} < \frac{1}{(N-l)(1 - \frac{p_0}{q})} \\ &\implies \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^{\frac{1}{(N-l)(1-\frac{p}{q})}} < \left(\frac{C_2}{C_1} + 1 \right)^{\frac{1}{(N-l)(1-\frac{p_0}{q})}} < \alpha_0. \end{aligned}$$

Isso, por sua vez, implica que

$$m_{\alpha,l}^p \leq C_2 \alpha^{(l+1-N)(1-\frac{p}{q}) + \frac{2p}{q} - 2 + p} < C_1 \alpha^{p-1+\frac{p}{q}} \leq c_\alpha^p. \quad (4.14)$$

De fato, como

$$p - 1 + \frac{p}{q} - \left[l - \frac{pl}{q} + 1 - \frac{p}{q} - N + \frac{pN}{q} + \frac{2p}{q} - 2 + p \right] = (N-l) \left(1 - \frac{p}{q} \right)$$

e

$$l - \frac{pl}{q} + 1 - \frac{p}{q} - N + \frac{pN}{q} + \frac{2p}{q} - 2 + p = (l+1-N) \left(1 - \frac{p}{q} \right) + \frac{2p}{q} - 2 + p,$$

segue que

$$\begin{aligned} \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^{\frac{1}{(N-l)(1-\frac{p}{q})}} < \alpha &\implies \frac{C_2}{C_1} < \alpha^{(N-l)(1-\frac{p}{q})} \\ &\implies \frac{C_2}{C_1} < \alpha^{(p-1+\frac{p}{q}) - [l - \frac{pl}{q} + 1 - \frac{p}{q} - N + \frac{pN}{q} + \frac{2p}{q} - 2 + p]} \\ &\implies \frac{C_2}{C_1} \alpha^{(l - \frac{pl}{q}) + 1 - \frac{p}{q} - N + \frac{pN}{q} + \frac{2p}{q} - 2 + p} < \alpha^{p-1+\frac{p}{q}} \\ &\implies \frac{C_2}{C_1} \alpha^{(l+1-N)(1-\frac{p}{q}) + \frac{2p}{q} - 2 + p} < \alpha^{p-1+\frac{p}{q}} \\ &\implies C_2 \alpha^{(l+1-N)(1-\frac{p}{q}) + \frac{2p}{q} - 2 + p} < C_1 \alpha^{p-1+\frac{p}{q}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Portanto, do Lema 4.4 e de (4.15) a desigualdade (4.14) é satisfeita.

Observação 4.5. A partir da Proposição 4.3 e (4.14) podemos perceber a presença de quebra de simetria no problema que envolve o operador p-Laplaciano em (4.2), uma vez que v_p é uma solução fraca não simétrica de (4.2).

4.2 Demonstração do Teorema 4.1

Nesta seção, mostramos que $(v_p)_{p>1}$ é uma família limitada em $BV_l(B)$ e que seu limite será uma solução não-radial do problema (4.1). Para tanto, analogamente ao Capítulo 3 devemos considerar

$$X_\mu(B) = \{\mathbf{z} \in L^\infty(B, \mathbb{R}^N); \operatorname{div}(\mathbf{z}) \in \mathcal{M}(B)\}.$$

Para $\mathbf{z} \in X_\mu(B)$ e $v \in BV_l(B) \cap L^\infty(B)$, [6] no fornece uma *Fórmula de Green* envolvendo a medida $(\mathbf{z}, Dv)$ e o traço fraco $[\mathbf{z}, \nu]$, dado por

$$\int_B (\mathbf{z}, Dv) + \int_B v \operatorname{div} \mathbf{z} dx = \int_{\partial B} v[\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (4.16)$$

Para introduzir um cenário variacional ao problema (4.1), buscamos pontos críticos de seu funcional energia associado, $\Phi : BV_l(B) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por,

$$\Phi(u) = \int_B |Du| + \int_{\partial B} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \frac{1}{q} \int_B |x|^\alpha |u|^q dx,$$

onde $BV_l(B)$ é considerado munido com a norma $\|u\|_{BV_l(B)} = \int_B |Du| + \int_{\partial B} |u| d\mathcal{H}^{N-1}$.

Definição 4.6. Dizemos que $v \in BV_l(B) \cap L^\infty(B)$ é uma solução para o problema (4.1) se existe um campo vetorial $\mathbf{z} \in X_\mu$, com $\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1$ e tal que

- (1) $-\operatorname{div}(\mathbf{z}) = |x|^\alpha |v|^{q-2} v$ em $\mathcal{D}'(B)$,
- (2) $(\mathbf{z}, Dv) = |Dv|$ como medida sobre B ,
- (3) $[\mathbf{z}, \nu] \in \operatorname{sign}(-v)$ sobre ∂B .

Observação 4.7. Note que para todo $v \in BV_l(B)$, utilizando a Desigualdade de Young com os expoentes $\frac{q}{q-1}$ e q , temos

$$\begin{aligned} \int_B |x|^\alpha |v|^{q-1} dx &\leq \int_B |x|^\alpha \left(\frac{q-1}{q} |v|^q + \frac{1}{q} \cdot 1 \right) dx \\ &= \frac{q-1}{q} \|v\|_{L_\alpha^q(B)}^q + \frac{1}{q} \int_B |x|^\alpha dx \\ &< +\infty. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Passamos agora à análise assintótica da família $(v_p)_{1 < p < p_0}$, quando $p \rightarrow 1^+$, a fim de descobrir se a quebra de simetria ainda permanece no limite. Em primeiro lugar, observe que para $\alpha > \alpha_0$ fixado, de (4.14),

$$m_{\alpha,l}^1 := \limsup_{p \rightarrow 1^+} m_{\alpha,l}^p \leq C_2 \alpha^{(l+1-N)(1-\frac{1}{q})+\frac{2}{q}-1} < C_1 \alpha^{\frac{1}{q}} \leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} c_\alpha^p =: c_\alpha^1. \quad (4.18)$$

De fato,

$$C_2 \alpha^{(l+1-N)(1-\frac{1}{q})+\frac{2}{q}-1} < C_1 \alpha^{\frac{1}{q}},$$

segue, desde que

$$\alpha > \alpha_0 > \left(\frac{C_2}{C_1} + 1 \right)^{\frac{1}{(N-l)(1-\frac{1}{q})}}.$$

Lema 4.8. $(v_p)_{1 < p < p_0}$ é uma sequência limitada em $BV_l(B)$.

Demonstração. De fato, pelo Teorema 4.3 mostramos que existe $v_p \in W_{0,l}^{1,p}(B)$ tal que

$$\frac{\int_B |\nabla v_p|^p dx}{\left(\int_B |x|^\alpha |v_p|^q dx\right)^{\frac{p}{q}}} = m_{\alpha,l}^p.$$

Assim,

$$\int_B |\nabla v_p|^p dx = m_{\alpha,l}^p \left(\int_B |x|^\alpha |v_p|^q dx \right)^{\frac{p}{q}},$$

isto é,

$$\|v_p\|_{W_{0,l}^{1,p}(B)}^p = m_{\alpha,l}^p \|v_p\|_{L_\alpha^q(B)}^p. \quad (4.19)$$

Por outro lado, como v_p é solução fraca de (4.2), então, se $v = v_p$ temos:

$$\int_B |\nabla v_p|^p dx = \int_B |x|^\alpha |v_p|^q dx \Rightarrow \|v_p\|_{W_{0,l}^{1,p}(B)}^p = \|v_p\|_{L_\alpha^q(B)}^q. \quad (4.20)$$

De (4.19) e (4.20)

$$\begin{aligned} \|v_p\|_{L_\alpha^q(B)}^q &= m_{\alpha,l}^p \|v_p\|_{L_\alpha^p(B)}^p \Rightarrow \|v_p\|_{L_\alpha^q(B)}^{q-p} = m_{\alpha,l}^p \\ &\Rightarrow \|v_p\|_{L_\alpha^q(B)} = \left(m_{\alpha,l}^p\right)^{\frac{1}{p-q}} \leq C, \end{aligned}$$

onde $C > 0$ e C não depende de p . Logo, novamente por (4.19)

$$\|v_p\|_{W_{0,l}^{1,p}(B)}^p = m_{\alpha,l}^p \|v_p\|_{L_\alpha^p(B)}^p,$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \|v_p\|_{W_{0,l}^{1,p}(B)} &= \left(m_{\alpha,q}^p\right)^{\frac{1}{p}} \|v_p\|_{L_\alpha^q(B)} \\ &\leq \left(m_{\alpha,l}^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot C \\ &\leq C_1, \end{aligned}$$

para todo $1 < p < p_0$.

Pela última desigualdade temos:

$$\begin{aligned} \|v_p\|_{BV_l(B)} &= \int_B |\nabla v_p| dx + \int_{\partial B} |v_p| d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_B |\nabla v_p| dx \\ &\leq \left(\int_B |\nabla v_p|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot |B|^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq C_1 \cdot |B|^{\frac{p-1}{p}} =: C_0, \end{aligned}$$

onde $C_0 > 0$ e C_0 não depende de p .

□

Do Teorema 2.38 e Lema 4.8, segue que existe $v_0 \in BV_l(B)$ tal que

$$v_p \rightarrow v_0 \quad \text{em} \quad L_\alpha^q(B), \quad (4.21)$$

quando $p \rightarrow 1^+$.

Utilizando uma argumentação semelhante à do Lema 3.13, temos que existe um campo vetorial $\mathbf{z} \in L^\infty(B, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$|\nabla v_p|^{p-2} \nabla v_p \rightharpoonup \mathbf{z}, \quad \text{fracamente em } L^r(B, \mathbb{R}^N), \quad (4.22)$$

para todo $1 \leq r < \infty$, quando $p \rightarrow 1^+$. Em particular, para $\varphi \in \mathcal{D}(B)$, tomando $\nabla \varphi$ como função teste em (4.22), temos

$$\int_B |\nabla v_p|^{p-2} \nabla v_p \nabla \varphi dx \longrightarrow \int_B \mathbf{z} \nabla \varphi dx, \quad (4.23)$$

quando $p \rightarrow 1^+$.

Lema 4.9. $-\operatorname{div}(\mathbf{z}) = |x|^\alpha |v_0|^{q-2} v_0 \quad \text{em } \mathcal{D}'(B).$

Demonstração. Observe que $v_0 \geq 0$, pois $v_p \geq 0$ para todo $p > 1$. Então, por (4.21) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_B |x|^\alpha |v_p|^{q-2} v_p \varphi dx \longrightarrow \int_B |x|^\alpha |v_0|^{q-2} v_0 \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(B). \quad (4.24)$$

Assim, das expressões (4.23) e (4.24),

$$-\operatorname{div}(\mathbf{z}) = |x|^\alpha |v_0|^{q-2} v_0 \quad \text{em } \mathcal{D}'(B). \quad (4.25)$$

□

Lema 4.10. A função $v_0 \in L^\infty(B)$.

Demonstração. Segue do Lema 3.14.

□

Lema 4.11. A função v_0 e o campo vetorial $\mathbf{z}$ satisfazem a seguinte igualdade

$$(\mathbf{z}, Dv_0) = |Dv_0|, \quad \text{em } \mathcal{M}(B).$$

Demonstração. Para $\mathbf{z} \in X_\mu(B)$ e $v_0 \in BV_l(B) \cap L^\infty(B)$, consideramos novamente a distribuição $(\mathbf{z}, Dv_0) : C_0^\infty(B) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle (\mathbf{z}, Dv_0), \varphi \rangle = - \int_B v_0 \varphi \operatorname{div}(\mathbf{z}) dx - \int_B v_0 \mathbf{z} \nabla \varphi dx,$$

$\forall \varphi \in C_c^\infty(B).$

Então, basta mostrarmos que, para todo $\varphi \in \mathcal{D}'(B)$ e $\varphi \geq 0$,

$$\langle (\mathbf{z}, Dv_0), \varphi \rangle = \int_B \varphi |Dv_0|.$$

Notemos primeiramente que

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{z}, Dv_0), \varphi \rangle &\leq |\langle (\mathbf{z}, Dv_0), \varphi \rangle| \\ &\leq \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(B)} \int_B \varphi |Dv_0| \\ &\leq \int_B \varphi |Dv_0|. \end{aligned}$$

Para todo $\varphi \in C_c^1(B)$, e $\varphi \geq 0$. Mostremos agora que

$$\langle (\mathbf{z}, Dv_0), \varphi \rangle \geq \int_B \varphi |Dv_0|,$$

para todo $\varphi \in C_c^1(B)$, $\varphi \geq 0$.

Tomando $0 \leq v_p \varphi \in W_{0,l}^{1,p}(B)$ como função teste em (4.2),

$$\int_B |\nabla v_p|^p \varphi dx + \int_B v_p |\nabla v_p|^{p-2} \nabla v_p \nabla \varphi dx = \int_B |x|^\alpha |v_p|^{q-2} v_p \varphi dx, \quad (4.26)$$

e pela Desigualdade de Young temos

$$\int_B |\nabla v_p| \varphi dx \leq \frac{1}{p} \int_B \varphi |\nabla v_p|^p dx + \frac{p-1}{p} \int_B \varphi dx. \quad (4.27)$$

Agora, fazendo $p \rightarrow 1^+$ em (4.27), obtemos

$$\int_B \varphi |Dv_0| \leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} \int_B \varphi |\nabla v_p|^p dx. \quad (4.28)$$

Por outro lado, de (4.21) e (4.23)

$$\int_B v_p |\nabla v_p|^{p-2} \nabla v_p \cdot \nabla \varphi dx \longrightarrow \int_B v_0 \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx, \quad (4.29)$$

quando $p \rightarrow 1^+$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e por (4.21), temos que

$$\int_B |x|^\alpha |v_p(x)|^{q-2} v_p(x) \varphi dx \longrightarrow \int_B |x|^\alpha |v_0(x)|^{q-2} v_0(x) \varphi dx, \quad (4.30)$$

quando $p \rightarrow 1^+$. Então, fazendo $p \rightarrow 1^+$ em (4.26) e depois, utilizando (4.29) e (4.30) obtemos

$$\begin{aligned} \liminf_{p \rightarrow 1^+} \int_B \varphi |\nabla v_p|^p dx + \int_B v_0 \mathbf{z} \cdot \nabla v_0 dx &= \int_B |x|^\alpha |v_0|^{q-2} v_0 \varphi dx \\ &= - \int_B v_0 \varphi \cdot \operatorname{div}(\mathbf{z}) dx. \end{aligned}$$

E por (4.28)

$$\int_B \varphi |Dv_0| \leq - \int_B v_0 \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx - \int_B \operatorname{div}(\mathbf{z}) v_0 \varphi dx,$$

o que resulta

$$\int_B \varphi |Dv_0| \leq \langle (\mathbf{z}, Dv_0), \varphi \rangle.$$

Logo

$$(\mathbf{z}, Dv_0) = |Dv_0|. \quad (4.31)$$

□

Lema 4.12. A função v_0 satisfaz $[\mathbf{z}, \nu] \in \text{sign}(-v_0)$ sobre ∂B .

Demonstração. É suficiente mostrar que

$$\int_{\partial B} (|v_0| + v_0[\mathbf{z}, \nu]) d\mathcal{H}^{N-1} = 0. \quad (4.32)$$

Por um lado, temos facilmente que

$$\int_{\partial B} (|v_0| + v_0[\mathbf{z}, \nu]) d\mathcal{H}^{N-1} \geq 0.$$

Por outro lado, mostremos

$$\int_{\partial B} (|v_0| + v_0[\mathbf{z}, \nu]) d\mathcal{H}^{N-1} \leq 0.$$

Para isso, para $\varphi \in C_c^1(B)$ tomemos $(v_p - \varphi)$ como função teste em (4.2). Então,

$$\int_B |\nabla v_p|^p dx = \int_B |\nabla v_p|^{p-2} \nabla v_p \nabla \varphi dx + \int_B |x|^\alpha |v_p|^{q-2} v_p (v_p - \varphi) dx. \quad (4.33)$$

Assim, usando (4.33) e a desigualdade de Young, temos:

$$p \int_B |\nabla v_p| dx \leq \int_B |\nabla v_p|^{p-2} \nabla v_p \nabla \varphi dx + \int_B |x|^\alpha |v_p|^{q-2} v_p (v_p - \varphi) dx + (p-1)|B|.$$

Disso, temos, pela semicontinuidade da norma de BV com respeito à L_α^r (ver Lema 2.14) e pela Fórmula de Green, e pelo Lema 4.11,

$$\begin{aligned} \int_B |Dv_0| + \int_{\partial B} |v_0| d\mathcal{H}^{N-1} &\leq - \int_B \varphi \text{div} \mathbf{z} dx + \int_B |x|^\alpha |v_0|^q dx - \int_B |x|^\alpha |v_0|^{q-2} v_0 \varphi dx \\ &= \int_B |x|^\alpha |v_0|^q dx \\ &= - \int_B v_0 \text{div} \mathbf{z} dx \\ &= \int_B (\mathbf{z}, Dv_0) - \int_{\partial B} v_0[\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_B |Dv_0| - \int_{\partial B} v_0[\mathbf{z}, \nu] d\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

De (4.34), segue que

$$\int_{\partial B} (|v_0| + v_0[\mathbf{z}, \nu]) d\mathcal{H}^{N-1} \leq 0.$$

Como o integrando é positivo, segue que

$$(-v_0)[\mathbf{z}, \nu] = |v_0| \quad \mathcal{H}^{N-1} \text{ q.s em } \partial B \text{ e,}$$

assim,

$$[\mathbf{z}, \nu] \in \text{sign}(-v_0) \text{ sobre } \partial B. \quad (4.35)$$

□

Pelos Lemas 4.9, 4.11 e 4.12 segue que v_0 é uma solução de (4.1).

Agora, terminamos a prova do Teorema 4.1 mostrando que v_0 apresenta quebra de simetria, ou seja, que v_0 é uma solução não-radial de (4.1). Para isso, apresentamos o seguinte resultado.

Lema 4.13. *Sejam $m_{\alpha,l}^1$ e c_α^1 definidos como em (4.18), então*

$$m_{\alpha,l}^1 = \inf_{w \in BV_l(B) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |Dw| + \int_{\partial B} |w| d\mathcal{H}^{N-1}}{(\int_B |x|^\alpha |w|^q dx)^{\frac{1}{q}}}. \quad (4.36)$$

e

$$c_\alpha^1 = \inf_{w \in BV_{rad}(B) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |Dw| + \int_{\partial B} |w| d\mathcal{H}^{N-1}}{(\int_B |x|^\alpha |w|^q dx)^{\frac{1}{q}}}. \quad (4.37)$$

Demonstração. Provamos apenas (4.36), já que (4.37) é totalmente análoga. Dado $w \in BV_l(B) \setminus \{0\}$, então existe uma sequência $(w_n)_n \subset BV_l(B) \cap C_0^\infty(B)$ dada pela Proposição 2.37, tal que

$$w_n \rightarrow w \quad \text{em } L_\alpha^q(B) \text{ e } \int_B |\nabla w_n| dx \rightarrow \int_B |Dw| + \int_{\partial B} |w| d\mathcal{H}^{N-1}, \quad (4.38)$$

quando $n \rightarrow +\infty$. Além disso, pela mesma Proposição 2.37, se $p_n \rightarrow 1^+$, quando $n \rightarrow +\infty$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_B |\nabla w_n|^{p_n} dx = \int_B |Dw| + \int_{\partial B} |w| d\mathcal{H}^{N-1}, \quad (4.39)$$

Então, de (4.4) e da definição de ínfimo, temos

$$m_{\alpha,l}^{p_n} \leq \frac{\int_B |\nabla w_n|^{p_n} dx}{(\int_B |x|^\alpha |w_n|^q dx)^{\frac{p_n}{q}}}. \quad (4.40)$$

Assim, de (4.38), (4.39) e (4.40)

$$\begin{aligned} m_{\alpha,l}^1 &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} m_{\alpha,l}^{p_n} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\int_B |\nabla w_n|^{p_n} dx}{(\int_B |x|^\alpha |w_n|^q dx)^{\frac{p_n}{q}}} \right) \\ &= \frac{\int_B |Dw| + \int_{\partial B} |w| d\mathcal{H}^{N-1}}{(\int_B |x|^\alpha |w|^q dx)^{\frac{1}{q}}}. \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$m_{\alpha,l}^1 \leq \inf_{w \in BV_l(B) \setminus \{0\}} \frac{\int_B |Dw| + \int_{\partial B} |w| d\mathcal{H}^{N-1}}{(\int_B |x|^\alpha |w|^q dx)^{\frac{1}{q}}}. \quad (4.41)$$

Por outro lado, pela semicontinuidade inferior da norma em $BV_l(B)$ com respeito à convergência em $L_\alpha^r(B)$ (Ver Lema 2.14), da Desigualdade de Young e do fato de que w_p é solução do problema (4.2) temos que

$$\begin{aligned} \int_B |Dw_0| + \int_{\partial B} |w_0| d\mathcal{H}^{N-1} &\leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} \left(\int_B |\nabla w_p| dx + \int_{\partial B} |w_p| d\mathcal{H}^{N-1} \right) \\ &= \liminf_{p \rightarrow 1^+} \int_B |\nabla w_p| dx \\ &\leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{p} \int_B |\nabla w_p|^p dx + \frac{p-1}{p} |B| \right] \\ &= \liminf_{p \rightarrow 1^+} \int_B |\nabla w_p|^p dx. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Por (4.21) e (4.42) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\int_B |Dv_0| + \int_{\partial B} |v_0| d\mathcal{H}^{N-1}}{(\int_B |x|^\alpha |v_0|^q dx)^{\frac{1}{q}}} &\leq \liminf_{p \rightarrow 1^+} \frac{\int_B |\nabla v_p|^p dx}{(\int_B |x|^\alpha |v_p|^q dx)^{\frac{p}{q}}} \\
&= \liminf_{p \rightarrow 1^+} m_{\alpha,l}^p \\
&\leq \limsup_{p \rightarrow 1^+} m_{\alpha,l}^p \\
&= m_{\alpha,l}^1.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Assim, de (4.41) e (4.43), segue que

$$\frac{\int_B |Dv_0| + \int_{\partial B} |v_0| d\mathcal{H}^{N-1}}{(\int_B |x|^\alpha |v_0|^q dx)^{\frac{1}{q}}} = m_{\alpha,l}^1, \tag{4.44}$$

o que implica em (4.36).

□

Observe que, a partir do último resultado e levando em consideração (4.18) e (4.44), segue-se que v_0 é uma solução não-radial e não-trivial de (4.1). Isso conclui a prova do Teorema 4.1.

Referências

- [1] AMBROSIO L.; FUSCO N.; PALLARA D. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford University Press., Oxford (2000).
- [2] ANDREU F.; BALLESTER C.; CASELLES V.; MAZÓN J.M. *The Dirichlet problem for the total variation flow*, J. Functional Anal., 180, No. 2, 347 - 403 (2001).
- [3] ANDREU F.; BALLESTER C.; CASELLES V.; MAZÓN J.M. *Minimizing total variation flow*, C. R. Acad. Sci., Paria, Sr. I, Math., 331, No. 11, 867 - 872 (2000).
- [4] ANDREU F.; BALLESTER C.; CASELLES V.; MAZÓN J.M. *Minimizing total variation flow*, Differential Integral Equations, 14, No. 3, 321 - 360 (2001).
- [5] ANDREU F.; CASELLES V.; MAZÓN J.M. *Parabolic quasilinear equations minimizing linear growth functionals*, Progress in mathematics, 233. Birkhäuser Verlag, Basel (2004).
- [6] ANZELLOTTI G. *Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness*, Ann. Mat. Pura Appl., No. 135, 293 - 318 (1983).
- [7] ATTOUCH H.; BUTTAZZO G.; MICHAILLE G. *Variational analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization*, MPS-SIAM, Philadelphia (2006).
- [8] BADIALE M.; SERRA E. *Multiplicity results for the supercritical Hénon equation*, Adv. Nonlinear Stud, No. 4, 453 - 467 (2004).
- [9] BATT J. *Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics*, J. Differential Equations, 25, No. 3, 342 - 364 (1977).
- [10] BATT J.; LI Y. *The positive solutions of the Matukuma equation and the problem of finite radius and finite mass*, Arch. Ration. Mech. Anal., 198, No. 2, 613 - 675 (2010).
- [11] BATT J.; FALTENBACHER W.; HORST E. *Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics*, Arch. Rational Mech. Anal., 93, No. 2, 159 - 183 (1986).
- [12] BREZIS H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, (2010).
- [13] CARRIÃO P.; DE FIGUEIREDO D.; MIYAGAKI O. *Quasilinear elliptic equations of the henon-type: Existence of non-radial solutions*, Comm. Contemp. Math. 11, No. 5, 783-798 (2009).

-
- [14] CHEN G.; FRID H. *Divergence-measure fields and hyperbolic conservation laws*, Arch. Ration. Mech. Anal., 147, No. 2, 89 - 118 (1999).
- [15] CHEN G.; NI W.M.; ZHOU J. *Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations*, Internat. J. Bifur. Chaos Appli. Sci. Engng., 10, 1565 - 1612 (2000).
- [16] CLÉMENT P.; DE FIGUEIREDO.; MITIDIERI E. *Quasilinear elliptic equations with critical exponents*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 187, 531 - 545. (1996).
- [17] DEMENGEL F. *On some nonlinear partial differential equations involving the 1-Laplacian and critical Sobolev exponent*, ESAIM, Control Optim. Calc. Var., 4, 667 - 686 (1999).
- [18] DE FIGUEIREDO D.; DOS SANTOS E.M.; MIYAGAKI O. *Sobolev spaces of symmetric functions and applications*, J. Funct. Anal., 261, 3735- 3770 (2011).
- [19] FIGUEIREDO G. M. *Uma introdução à teoria dos pontos críticos*, Notas de aula na UNB, (2016).
- [20] FIGUEIREDO G.M; PIMENTA M. T. O. *Nodal solutions to quasilinear elliptic problems involving the 1-laplacian operator via variational and approximation methods*, aceito em Indiana Univ. Math. J. (2021).
- [21] FIGUEIREDO G.M; PIMENTA M. T. O. *Sub-supersolution method for a quasilinear elliptic problem involving the 1-laplacian operator and a gradient term*, J. Funct. Anal., 278, 108325 (2020).
- [22] FIGUEIREDO G.M; PIMENTA M. T. O. *Nehari method for locally lipschitz functionals with examples in problems in the space of bounded variation functions*, Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, 25, No. 5, 1-18 (2018).
- [23] FOLLAND G.B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, (1999).
- [24] GIUSTI. E. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Monographs in Mathematics, 80, Birkhäuser Verlag, Basel, (1984).
- [25] HÉNON M. *Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems*, Astronom. Astrophys., 24, 229 - 238 (1973).
- [26] KAVIAN O. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, 4 , (1991).
- [27] KAWOHL B. *On a family of torsional creep problems*, J. Reine Angew. Math, 410, 1 - 22 (1990).
- [28] LATORRE M.; OLIVA F.; PETITTA.; SEGURA S. *The Dirichlet problem for the 1-Laplacian with a general singular term and L^1 -data*, Nonlinearity, 34, No. 3, 1791-1816 (2021).
- [29] LITTIG S.; SCHURICHT F. *Convergence of the eigenvalues of the p -Laplace operator as p goes to 1*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 49, 707 - 727 (2014).

-
- [30] MERCALDO A.; ROSSI J.D.; SEGURA S.; TROMBETTI C. *Behaviour of p -Laplacian problems with Neumann boundary conditions when p goes to 1*, Communications on Pure and Applied Analysis., 12, No. 1, 253–267 (2013).
 - [31] MERCALDO A.; SEGURA S.; TROMBETTI C. *On the solutions to 1-Laplacian equation with L^1 data*, Journal of Functional Analysis, 256, No 8, 2387- 2416, (2009).
 - [32] MERCALDO A.; SEGURA S.; TROMBETTI C. *On the behaviour of the solutions to p -Laplacian equations as p goes to 1*, Publ. Mat., 52, No 2, 377- 411, (2008).
 - [33] MIRANDA M. *Dirichlet problem with L^1 data for the non-homogeneous minimal surface equation*, Indiana Univ. Math., J., 24, 227 - 241 (1974/75).
 - [34] NI W.M. *A nonlinear Dirichlet problem on the unit ball and its applications*, Indiana Univ. Math. J., 31, No. 6, 801-807 (1982).
 - [35] SEGURA S.; MOLINO A. *Elliptic equations involving the 1-Laplacian and a subcritical source term*, Nonlinear Anal., 168, 50 - 66 (2018).
 - [36] SMETS D.; SU J.; WILLEN M. *Non-radial ground states for the Hénon equation*, Commun. Contemp. Math., 4, 703 - 725 (2005).

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, ____/____/____

Assinatura do autor