

Maurício Móz Christofolletti

***O Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Corte
de Estoque em uma Indústria de Colchões***

Bauru

2018

Maurício Móz Christofolletti

***O Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Corte
de Estoque em uma Indústria de Colchões***

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção, junto ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru.

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo

Orientador

Prof^a. Dr^a. Adriana Cristina Cherri

Coorientadora

Bauru

2018

Christofolletti, Maurício Móz.

O problema integrado de dimensionamento de lotes e
corte de estoque em uma indústria de colchões /
Maurício Móz Christofolletti, 2018.

85 f. : il.

Orientador: Silvio Alexandre de Araujo

Coorientadora: Adriana Cristina Cherri

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2018

1. Problema de dimensionamento de lotes. 2.
Problema de corte de estoque tridimensional. 3.
Problema integrado. 4. Indústria de colchões. I.
Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Engenharia. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE MAURÍCIO MÓZ CHRISTOFOLETTI, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 06 dias do mês de dezembro do ano de 2018, às 09:30 horas, no(a) Anfiteatro da Pós-graduação

/ FEB, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. SILVIO ALEXANDRE DE ARAUJO - Orientador(a) do(a) Departamento de Matemática

Aplicada / Câmpus de São José do Rio Preto - UNESP, Profa. Dra. SONIA CRISTINA

POLTRONIERE SILVA do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru -

UNESP, Prof. Dr. ROBERTO FERNANDES TAVARES NETO do(a) Departamento de Engenharia de

Produção / Universidade Federal de São Carlos - UFSCAR, sob a presidência do primeiro, a fim de

proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de MAURÍCIO MÓZ

CHRISTOFOLETTI, intitulada **O PROBLEMA INTEGRADO DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES E**

CORTE DE ESTOQUE EM UMA INDÚSTRIA DE COLCHÕES. Após a exposição, o discente foi

arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: Aprova

_____. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi

assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. SILVIO ALEXANDRE DE ARAUJO

Profa. Dra. SONIA CRISTINA POLTRONIERE SILVA

Prof. Dr. ROBERTO FERNANDES TAVARES NETO

Em primeiro lugar, a Deus.
Aos meus amados pais, Inácio e Isabel.
À minha querida namorada, Taíse.
Aos meus irmãos, Maria Alice e Guilherme.
Em especial aos meus avós, Martin e Irma (*in memoriam*).
Dedico.

Agradecimentos

A Deus, pelas oportunidades oferecidas e por me conceder a graça de concluir mais esta etapa.

Aos meus pais, Inácio e Isabel, pelo apoio, compreensão, e, em especial, por todo o carinho ao longo deste percurso.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo, pelas oportunidades, orientação e apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

À minha coorientadora, Prof^a. Dr^a. Adriana Cristina Cherri, pelo apoio, dedicação e disponibilidade durante a orientação deste trabalho.

À minha querida namorada, Taíse, pela dedicação, carinho, apoio, compreensão e companheirismo durante esses sete anos de convívio e cumplicidade, tornando todos os grandes obstáculos mais fáceis de serem superados.

Aos meus irmãos, Maria Alice e Guilherme, pela compreensão e pela ajuda nos momentos difíceis.

Aos meus avós, Martin e Irma, duas das melhores pessoas que já conheci na vida, pelo carinho, apoio e por todas as orações durante esta caminhada.

Aos meus amigos e companheiros de trabalhos que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida.

Ao Prof. Dr. Raf Jans, pela sua receptividade em Montréal e pela valiosa contribuição para a realização deste trabalho.

À banca examinadora, por prestar valiosas sugestões para a conclusão deste trabalho.

À Faculdade de Engenharia de Bauru, pela oportunidade de realizar este curso.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

A realização do presente trabalho constitui um importante marco na minha vida acadêmica e pessoal, e gostaria de deixar os meus agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram de forma direta ou indireta para a sua concretização.

“Uma jornada de mil milhas começa
com um único passo.”

Lao-Tsé

Resumo

Dois problemas fundamentais surgem no planejamento da produção de muitos processos produtivos: o problema de dimensionamento de lotes e o problema de corte de estoque. Geralmente, as empresas tratam estes problemas separadamente, porém, ao considerá-los de maneira integrada, é possível obter melhores resultados. Neste trabalho, investiga-se o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque tridimensional aplicado a uma indústria de colchões, visando à redução de custos e desperdícios. É proposto um modelo matemático de programação inteira mista para a resolução do problema. Testes computacionais com base em dados coletados em uma indústria do setor foram realizados, permitindo comparar as soluções obtidas pelo modelo e as soluções adotadas pela indústria. Testes adicionais foram realizados com dados aleatórios, a fim de avaliar o comportamento do modelo para diferentes casos. Os resultados indicam que o modelo apresenta um bom desempenho, reduzindo os custos da função objetivo para diferentes conjuntos de testes. Com base nos resultados, algumas direções interessantes podem ser exploradas pela indústria, como por exemplo, ao aumentar o número de padrões de corte, aumenta-se o número de combinações possíveis para o corte, resultando em melhor aproveitamento de material e redução nos custos.

Palavras-chave: *Problema de dimensionamento de lotes. Problema de corte de estoque tridimensional. Problema integrado. Indústria de colchões.*

Abstract

Two fundamental problems arise in the production planning of many productive processes: the lot-sizing problem and the cutting stock problem. Generally, companies deal with these problems separately, but by considering them in an integrated way, it is possible to obtain better results. In this paper, the integrated lot-sizing and three-dimensional cutting stock problem applied to a mattress industry is investigated, aiming at reducing costs and waste. It is proposed a mathematical model of mixed integer programming for the problem resolution. Computational tests based on data collected in an industry of the sector were carried out, allowing to compare the solutions obtained by the model and the solutions adopted by the industry. Additional tests were performed with random data in order to evaluate the behaviour of the model for different cases. The results indicate that the model performs well, reducing the objective function costs for different sets of tests. Based on the results, some interesting directions can be explored by the industry, for example, by increasing the number of cutting patterns, the number of possible combinations for cutting is increased, resulting in better material utilization and reduction in costs.

Keywords: *Lot-sizing problem. Three-dimensional cutting stock problem. Integrated problem. Mattress industry.*

Lista de Figuras

Figura 1: Exemplos de padrões de corte unidimensionais.	29
Figura 2: Exemplo de padrão de corte bidimensional guilhotinado.....	31
Figura 3: Exemplo de padrão de corte tridimensional: (a) bloco inteiro antes do corte e (b) geração de diferentes itens após o corte.	35
Figura 4: Estrutura de um colchão de espuma clássico.	40
Figura 5: Processo de fabricação de colchões de espuma.	41
Figura 6: Máquina de corte vertical.....	42
Figura 7: Custos da função objetivo.....	67
Figura 8: Contribuição das parcelas da função objetivo nos casos analisados.....	68

Lista de Tabelas

Tabela 1: Demandas de objetos (d_{kt}) – Todos conjuntos de testes.....	50
Tabela 2: Demandas de itens (d_{kt}^i) – Todos conjuntos de testes.	50
Tabela 3: Número de unidades do item no padrão de corte (a_{ij}).	51
Tabela 4: Custos de compra de objetos (pc_{kt} , em R\$) – Todos conjuntos de testes.	52
Tabela 5: Custos de preparação da máquina (sc_{kjt} , em R\$) – Todos conjuntos de testes.....	52
Tabela 6: Custos de corte de objetos (cc_{kjt} , em R\$) – Todos conjuntos de testes.	52
Tabela 7: Tempos de preparação (st_j , em minutos) – Primeiro conjunto de testes.....	53
Tabela 8: Tempos de preparação (st_j , em minutos) – Segundo conjunto de testes.....	53
Tabela 9: Tempos de preparação (st_j , em minutos) – Terceiro conjunto de testes.	53
Tabela 10: Tempos de produção (pt_{kj} , em minutos) – Primeiro conjunto de testes.....	53
Tabela 11: Tempos de produção (pt_{kj} , em minutos) – Segundo conjunto de testes.....	54
Tabela 12: Tempos de produção (pt_{kj} , em minutos) – Terceiro conjunto de testes.	54
Tabela 13: Custos de armazenamento de objetos (hc_{kt} , em R\$) – Todos conjuntos de testes.	54
Tabela 14: Custos de armazenamento de itens (hc_{kt}^i , em R\$) – Todos conjuntos de testes.....	55
Tabela 15: Estoques de segurança de objetos (ES_{kt}) – Todos conjuntos de testes.....	56
Tabela 16: Estoques de segurança de itens (ES_{kt}^i) – Todos conjuntos de testes.	56
Tabela 17: Quantidade comprada de objetos (y_{kt}) – Primeiro conjunto de testes.....	58
Tabela 18: Quantidade comprada de objetos (y_{kt}) – Segundo conjunto de testes.....	58
Tabela 19: Quantidade comprada de objetos (y_{kt}) – Terceiro conjunto de testes.	58
Tabela 20: Estoque de objetos (s_{kt}) – Primeiro conjunto de testes.....	59
Tabela 21: Estoque de objetos (s_{kt}) – Segundo conjunto de testes.....	59
Tabela 22: Estoque de objetos (s_{kt}) – Terceiro conjunto de testes.	59
Tabela 23: Variável binária de preparação ou não da máquina (w_{jt}) – Primeiro conjunto de testes.	60

Tabela 24: Variável binária de preparação ou não da máquina (w_{jt}) – Segundo conjunto de testes.	60
Tabela 25: Variável binária de preparação ou não da máquina (w_{jt}) – Terceiro conjunto de testes.	61
Tabela 26: Número de objetos cortados (x_{kjt}) – Primeiro conjunto de testes.....	61
Tabela 27: Número de objetos cortados (x_{kjt}) – Segundo conjunto de testes.....	62
Tabela 28: Número de objetos cortados (x_{kjt}) – Terceiro conjunto de testes.	63
Tabela 29: Estoque de itens (r_{kt}^i) – Primeiro conjunto de testes.	65
Tabela 30: Estoque de itens (r_{kt}^i) – Segundo conjunto de testes.	66
Tabela 31: Estoque de itens (r_{kt}^i) – Terceiro conjunto de testes.	66
Tabela 32: Parâmetros das classes de instâncias.	70
Tabela 33: Resultados dos testes computacionais adicionais.....	71

Sumário

1. Introdução	13
1.1. Contexto do Trabalho	13
1.2. Problema de Pesquisa	14
1.3. Objetivos	14
1.4. Justificativas	14
1.5. Método de Pesquisa	15
1.6. Estrutura do Trabalho	16
2. Revisão de Literatura	17
2.1. O Problema de Dimensionamento de Lotes	17
2.1.1. O Problema de Dimensionamento de Lotes Multi-itens	18
2.1.2. O Problema de Dimensionamento de Lotes Multiestágio	21
2.1.3. O Problema de Dimensionamento de Lotes com Máquinas Paralelas	23
2.2. O Problema de Corte de Estoque	25
2.2.1. O Modelo Clássico de Gilmore e Gomory (1961, 1963)	25
2.2.2. O Problema de Corte de Estoque Unidimensional	28
2.2.3. O Problema de Corte de Estoque Bidimensional	31
2.2.3.1. O Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado em 2-Estágios	32
2.2.4. O Problema de Corte de Estoque Tridimensional	34
2.3. O Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque	36
3. Descrição do Processo Produtivo	40
4. Modelagem Matemática	44
5. Testes Computacionais e Discussões	49
5.1. Dados Numéricos	49
5.2. Resultados	57
5.3. Testes Computacionais Adicionais	69
6. Conclusões e Propostas Futuras	75
Referências Bibliográficas	77
APÊNDICE A – Heurística para Geração de Padrões de Corte Tridimensionais	82

Capítulo 1

1. Introdução

1.1. Contexto do Trabalho

Com o rápido avanço da tecnologia em um mundo cada vez mais integrado, houve também um aumento da concorrência entre as empresas, uma vez que os consumidores se tornaram mais exigentes quanto à diversidade, qualidade, preço e velocidade de entrega. No setor brasileiro de colchões, a competição entre as indústrias está relacionada com as ferramentas de tecnologia e gerenciamento utilizadas. Assim, para sobreviver e diferenciar-se, as empresas precisam reduzir custos e desperdícios para aumentar sua produtividade. Em geral, elas fazem isso investindo em máquinas mais sofisticadas e adquirindo novas tecnologias. Uma abordagem menos comum, mas uma boa estratégia para sobreviver em um mercado altamente competitivo, é se concentrar na resolução de problemas de gerenciamento e manufatura, utilizando modelos matemáticos e técnicas de otimização como ferramentas para a tomada de decisão.

Dois problemas fundamentais que surgem no planejamento da produção de muitas indústrias são o Problema de Dimensionamento de Lotes (PDL), que consiste em decidir a quantidade de cada produto que deve ser fabricada em cada período de um horizonte de planejamento, e o Problema de Corte de Estoque (PCE), que consiste no corte de objetos maiores, disponíveis em estoque, em peças menores (itens), a fim de satisfazer uma demanda de itens e minimizar, por exemplo, a perda total de material.

Normalmente, as empresas consideram estes problemas separadamente, solucionando primeiro o PDL e depois o PCE. Porém, com o avanço da tecnologia e maior conhecimento sobre estes problemas, as indústrias têm procurado métodos e soluções integradas para representar melhor as suas atividades. Neste contexto, a integração do PDL e do PCE permite uma melhor análise do *trade-off* entre custos de armazenamento e preparo de máquina para produção e custos relacionados com o processo de corte.

Nos últimos anos, o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque tem atraído o interesse da comunidade acadêmica e das indústrias, pois seu grande potencial e sua vasta gama de aplicações possíveis tornam o assunto muito relevante, além da sua dificuldade de resolução.

1.2. Problema de Pesquisa

Uma vez que há poucos trabalhos disponíveis na literatura sobre o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque, além de não existir nenhum estudo prático que considere a integração a um problema de corte de estoque tridimensional (MELEGA; ARAUJO; JANS, 2018), será proposto e implementado neste trabalho, um modelo matemático que represente o processo produtivo de uma indústria de colchões, apresentando uma nova abordagem para o processo de tomada de decisão na indústria, visando gerar uma melhoria na programação da produção.

1.3. Objetivos

O objetivo geral do presente trabalho consiste em propor e resolver (com o auxílio de pacotes de otimização) um modelo matemático para o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque tridimensional que surge em uma indústria de colchões.

1.4. Justificativas

Levando-se em consideração o cenário atual e a importância das reduções de custos e desperdícios nas empresas, este trabalho é de grande importância, pois consiste em um estudo de caso do problema integrado de PDL e PCE em uma indústria de colchões.

A partir de buscas realizadas em maio de 2017 na base de dados *Scopus*, verificou-se a existência de artigos abordando o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque em diversos segmentos da indústria, considerando, porém, este problema somente como unidimensional ou bidimensional. Dessa forma, foram evidenciados dois *gaps* na literatura: a falta de um modelo integrado envolvendo o PDL e o PCE tridimensional, e a lacuna

devido à ausência de um estudo prático aplicado à indústria de colchões. Tais constatações foram confirmadas por Melega, Araujo e Jans (2018).

1.5. Método de Pesquisa

A fim de justificar esta pesquisa, realizou-se uma revisão bibliográfica na base de dados *Scopus* da *Elsevier* em maio de 2017 sobre o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque, a fim de verificar as tendências e o que já fora estudado na literatura.

Após a aplicação de filtros de pesquisa e critérios de exclusão para artigos que não se enquadrassem adequadamente no tema, os artigos selecionados foram lidos e analisados a fim de encontrar algum *gap*.

Observando o crescente reconhecimento do problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque, tanto na área acadêmica quanto em indústrias, com estudos que demonstram a sua influência e os ganhos obtidos com tal abordagem, somado ao fato da literatura não apresentar nenhum artigo aplicado ao ramo de colchões e que considere o problema como tridimensional, acabou por definir-se, assim, o tema desta pesquisa. Conforme dito anteriormente, o artigo de revisão bibliográfica de Melega, Araujo e Jans (2018) sobre o tema foi publicado posteriormente, e confirmou o que se havia detectado no início da pesquisa.

Definido o tema de pesquisa e tendo como base os modelos encontrados na literatura, foi proposto um modelo para o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque tridimensional aplicado a uma indústria de colchões.

Para a etapa de coleta de dados, recrutou-se uma indústria que fabrica colchões e realizaram-se algumas entrevistas com o gestor de produção, a fim de melhor compreender o processo produtivo da indústria e coletar os dados pertinentes ao modelo. Em seguida, o modelo foi implementado e resolvido por meio do *solver* CPLEX no *software* GAMS. Dessa forma, pôde-se comparar, para diferentes conjuntos de testes, as soluções obtidas pelo modelo com as soluções adotadas pela indústria; além de terem sido realizados testes computacionais adicionais com dados aleatórios para analisar o comportamento do modelo em diferentes casos.

1.6. Estrutura do Trabalho

Este trabalho encontra-se dividido em seis capítulos. Após este capítulo referente à introdução, segue-se para o capítulo 2, no qual consta a revisão de literatura sobre o problema de dimensionamento de lotes, problema de corte de estoque e sobre o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque. O capítulo 3 contém a descrição do processo produtivo na indústria estudada. No capítulo 4, é apresentado um modelo matemático que considera as decisões integradas de dimensionamento de lotes e corte de estoque. Os testes computacionais são discutidos no capítulo 5. Por fim, o capítulo 6 encerra este trabalho trazendo as conclusões e as propostas futuras.

Capítulo 2

2. Revisão de Literatura

Neste capítulo, apresenta-se uma breve revisão de literatura sobre os problemas que envolvem o tema desta dissertação de mestrado, o Problema de Dimensionamento de Lotes e o Problema de Corte de Estoque, finalizando com o Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque, tópico em que se concentra o estudo. Nesta revisão de literatura, diversos trabalhos referentes a esses problemas serão analisados, abordando os conceitos e as características de cada um desses três tipos de problemas.

2.1. O Problema de Dimensionamento de Lotes

O planejamento da produção envolve diversas decisões que necessitam ser tomadas a curto, médio e longo prazo, sendo uma atividade que visa otimizar o uso dos recursos produtivos para cumprir as metas de produção em um determinado período denominado horizonte de planejamento. Na literatura, um dos problemas de planejamento da produção que trata de questões relacionadas à quanto e quando produzir é definido como o Problema de Dimensionamento de Lotes (PDL), sendo este um dos problemas mais difíceis e importantes no planejamento da produção (KARIMI; GHOMI; WILSON, 2003).

Com base na demanda de cada período, um Problema de Dimensionamento de Lotes deve ser resolvido para decidir a quantidade de cada produto final, que tem de ser fabricada em vários (ou único) estágios e em uma ou mais máquinas, ao longo de um horizonte de planejamento finito. O objetivo clássico é minimizar os custos de produção, armazenamento e preparo de máquina. No entanto, deve-se notar que, se há o processo de corte no processo produtivo, o PDL não otimiza a perda de material neste processo, uma vez que diferentes lotes requerem diferentes quantidades de itens que conduzem a uma perda de material diversa (GRAMANI; FRANÇA; ARENALES, 2009). O problema de dimensionamento de lotes lida com o *trade-off* entre os custos de preparo e os custos de armazenamento ao escolher lotes

para produção ou compras (NONÅS; THORSTENSON, 2000). Nesta seção serão apresentadas algumas classes de problemas de dimensionamento de lotes.

2.1.1. O Problema de Dimensionamento de Lotes Multi-itens

As características consideradas nos modelos de dimensionamento de lotes afetam sua classificação, modelagem e complexidade, e serão apresentadas a seguir.

De acordo com Karimi, Ghomi e Wilson (2003), o PDL pode ser classificado de duas maneiras quanto ao número de itens: único item e multi-itens. No planejamento da produção de único item, as atividades de planejamento são organizadas para um único item final (produto final), enquanto que no planejamento da produção de múltiplos itens há vários itens finais, logo a complexidade dos problemas multi-itens é muito maior do que a dos problemas de único item.

Além do número de itens, o sistema de produção pode ser do tipo monoestágio, em que o item final é produzido de maneira direta em um único estágio e possui demandas independentes (as demandas são satisfeitas diretamente pela produção do item final), ou multies-tágio, que será explicado na próxima seção (ARAUJO; RANGEL, 2014).

Um PDL com demanda estática é aquele em que os valores da demanda não mudam com o tempo, ao passo que um PDL de demanda dinâmica apresenta variação na demanda ao longo do tempo. Caso a demanda seja conhecida antecipadamente (estática ou dinâmica), ela é denominada determinística, mas se ela não é exatamente conhecida e seus valores são baseados em probabilidades, então é denominada probabilística (KARIMI; GHOMI; WILSON, 2003).

Segundo Araujo e Rangel (2014), quando não há restrição de recursos, pode-se produzir qualquer quantidade de itens, assim, o problema é não capacitado. Já quando as restrições de capacidade são explicitamente declaradas, existindo um limite máximo para a quantidade a ser produzida, o problema é denominado capacitado.

Além dessas classificações, o horizonte de planejamento do PDL pode ser finito ou infinito, sendo que o sistema pode ser observado continuamente ou em pontos de tempo discretos, classificando-o como um sistema de tipo contínuo ou discreto (KARIMI; GHOMI; WILSON, 2003).

Dentre os tipos de PDL apresentados, os modelos mais utilizados em aplicações industriais são aqueles que consideram múltiplos itens, demanda dinâmica e restrições de capacidade, uma vez que as aplicações industriais geralmente apresentam a produção de vários itens que são planejados simultaneamente e sujeitos às restrições de capacidade (MAES; MCCLAIN; VAN WASSENHOVE, 1991).

A seguir, será apresentado o modelo clássico de Trigeiro, Thomas e Mcclain (1989) para o PDL monoestágio, multi-itens, com restrição de capacidade, e com custos de preparação, produção e armazenamento. Os tempos de preparação e produção serão considerados a fim de deixar o modelo mais semelhante às situações reais. Ademais, será considerado que todos os custos e as demandas podem variar de acordo com o item e o período.

Índices:

- $i = \{1, \dots, m\}$: itens;
- $t = \{1, \dots, T\}$: períodos de tempo.

Parâmetros:

- hc_{it} : custo unitário de armazenamento do item i no período t ;
- pc_{it} : custo unitário de produção do item i no período t ;
- pt_{it} : tempo unitário de produção do item i no período t ;
- sc_{it} : custo de preparação para a produção do item i no período t ;
- st_{it} : tempo de preparação para a produção do item i no período t ;
- Cap_t : limite de capacidade em unidades de tempo no período t ;
- d_{it} : demanda do item i no período t .

Variáveis de decisão:

- y_{it} : quantidade produzida do item i no período t ;
- r_{it} : quantidade estocada do item i no período t ;
- w_{it} : variável binária indicando a produção ou não do item i no período t .

O modelo completo para o problema de dimensionamento de lotes multi-itens, capacitado, com tempos e custos de preparo (PDLM) é dado pelas equações de (1) a (6), tendo como objetivo determinar um planejamento da produção que minimize os custos, satisfazendo a demanda pré-estabelecida e a capacidade disponível para produção e preparo.

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T (pc_{it}y_{it} + hc_{it}r_{it} + sc_{it}w_{it}) \quad (1)$$

Sujeito a:

$$y_{it} + r_{i,t-1} - r_{it} = d_{it}, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m pt_{it}y_{it} + \sum_{i=1}^m st_{it}w_{it} \leq Cap_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$y_{it} \leq \sum_{\tau=t}^T d_{i\tau}w_{it}, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$w_{it} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T \quad (5)$$

$$y_{it}, r_{it} \in \mathbb{R}_+ (r_{i0} = 0), \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T \quad (6)$$

No modelo (1) – (6), a função objetivo (1) minimiza os custos totais de produção, armazenamento e preparação. As equações (2) representam as restrições de balanceamento de estoque, segundo a qual, para cada item e período, a quantidade produzida mais a quantidade disponível em estoque no final do período anterior menos o excesso de produção que será estocado deve ser igual à demanda. A fim de garantir que o limite máximo de tempo disponível para a produção dos itens em cada período (Cap_t) seja respeitado, as equações (3), restrições referentes à capacidade de produção, foram adicionadas ao modelo. Logo, para satisfazer tal restrição, em cada período t deve-se considerar o tempo consumido pela produção dos vários itens i , ($\sum_{i=1}^m pt_{it}y_{it}$), e o tempo utilizado para a preparação da linha de produção, ($\sum_{i=1}^m st_{it}w_{it}$). As restrições (4) asseguram que só há produção quando a linha de produção está preparada. Também se considera que o estoque inicial dos itens é nulo ($r_{i0} = 0$, $i = 1, \dots, m$), sendo o domínio das variáveis definido em (5) e (6).

Na literatura, há disponíveis vários métodos exatos e heurísticos para resolver problemas do tipo monoestágio com múltiplos itens e tempos de preparação. Destacam-se, entre os métodos exatos, os trabalhos de: Armentano, França e Toledo (1999), que utilizaram um algoritmo *branch-and-bound* e representaram o problema como uma rede generalizada; Belvaux e Wolsey (2000) e Belvaux e Wolsey (2001), que desenvolveram um pacote baseado no método *branch-and-cut* para modelagem e resolução de PDL; van Vyve e Wolsey (2005), que utilizaram esse pacote e reformulações estendidas para resolver o mesmo problema; Degraeve e Jans (2007) e Pimentel, Alvelos e Carvalho (2010), que desenvolveram métodos *branch-and-price*.

Entre os trabalhos que consideraram métodos heurísticos para sua solução, destacam-se: Trigeiro, Thomas e McClain (1989), que desenvolveram um método heurístico que consiste na relaxação das restrições de capacidade através da relaxação Lagrangiana. Posteriormente, uma heurística Lagrangiana é aplicada se a solução for infactível, transferindo a produção entre períodos para tentar obter uma solução factível e, finalmente, a atualização dos multiplicadores de Lagrange é realizada utilizando o método do subgradiente (HELD; WOLFE; CROWDER, 1974; CAMERINI; FRATTA; MAFFIOLI, 1975). Araujo e Arenales (2000) revisaram o procedimento de factibilização de Trigeiro, Thomas e McClain (1989) ao alterar a forma de transferência de produção entre os períodos, buscando propriedades de otimalidade do problema com limitações de capacidade. Jans e Degraeve (2004) apresentaram um método para a obtenção dos limitantes inferiores no problema com tempo de preparação e Denizel *et al.* (2007) desenvolveram uma heurística de arredondamento.

2.1.2. O Problema de Dimensionamento de Lotes Multiestágio

Este tipo de problema ocorre quando um item final possui itens predecessores (componentes), que também devem ser programados para compra ou produção. Os itens finais têm suas próprias demandas (demandas independentes), ao passo que os itens componentes podem possuir demanda dependente e demanda independente.

Além dos parâmetros considerados para o modelo de múltiplos itens com restrição de capacidade, para a formulação matemática do PDL multi-itens e multiestágios considera-se o parâmetro b_{ik} , que refere-se à quantidade de itens do tipo i necessários para compor uma unidade do item k .

Billington, McClain e Thomas (1983) formularam o PDL multiestágio com restrições de capacidade e estrutura geral de produto, como o modelo de otimização inteira mista (7) – (12).

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T (pc_{it}y_{it} + hc_{it}r_{it} + sc_{it}w_{it}) \quad (7)$$

Sujeito a:

$$y_{it} + r_{i,t-1} - r_{it} = d_{it} + \sum_{k \in S(i)} b_{ik}y_{kt}, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^m pt_{it}y_{it} + \sum_{i=1}^m st_{it}w_{it} \leq Cap_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (9)$$

$$y_{it} \leq \sum_{\tau=t}^T d_{it}w_{it}, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T \quad (10)$$

$$w_{it} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T \quad (11)$$

$$y_{it}, r_{it} \in \mathbb{R}_+ (r_{i0} = 0), \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T \quad (12)$$

O modelo para o PDL multiestágio é semelhante ao modelo de dimensionamento de lotes multi-itens, fazendo-se uso dos mesmos parâmetros, variáveis e restrições, com ressalva para as equações (8), referentes às restrições de balanceamento de estoque. Estas restrições garantem que a produção e o estoque de um item sejam suficientes para suprir a demanda independente, mais, eventualmente, uma quantidade para compor o lote dos itens sucessores (demanda dependente), sendo $S(i)$ o conjunto dos itens sucessores imediatos do item i . Devido a essa restrição, não é possível decompor o modelo multiestágio por item, quando as restrições de capacidade são relaxadas, impossibilitando o uso das técnicas de resolução aplicadas a problemas monoestágios (ARAUJO; RANGEL, 2014).

Maes, McClain e van Wassenhove (1991) desenvolveram uma heurística para resolver o problema multiestágio com restrições de capacidade. Com as variáveis inteiras relaxadas, o problema linear foi resolvido e três heurísticas de arredondamento (heurística de passo único, cadeias de *setups* e *branch-and-bound* parcial) foram testadas para obter variáveis inteiras. Essas heurísticas tentam reduzir o processo de enumeração, utilizando informações da estrutu-

ra do problema e da relaxação linear do modelo. Testes em problemas de pequeno porte mostraram que essas três heurísticas apresentam um bom desempenho em diversas circunstâncias.

2.1.3. O Problema de Dimensionamento de Lotes com Máquinas Paralelas

O PDL com máquinas paralelas ocorre quando deve-se escolher em qual máquina produzir em cada período. Os itens podem ser produzidos em qualquer uma das máquinas disponíveis e para iniciar a sua produção implica-se um tempo de *setup* na máquina a ser utilizada (SANTOS, 2000).

As máquinas paralelas podem ser classificadas em três categorias: idênticas, uniformes e não relacionadas. Nas máquinas idênticas, cada tarefa tem o mesmo tempo de processamento e o mesmo tempo de preparo. Já nas máquinas uniformes, o tempo de processamento de uma tarefa e o tempo de preparo de máquinas mais modernas acabam sendo proporcionais aos tempos correspondentes à máquina mais antiga. Por último, nas máquinas não relacionadas, não há uma relação entre os tempos de processamento e preparo de máquinas distintas (ARENALES *et al.*, 2007).

O problema abordado nesta seção é um PDL multi-itens, multiestágio, com restrição de capacidade e máquinas paralelas, em que cada estágio é composto por máquinas paralelas com capacidades limitadas.

Para a modelagem matemática serão utilizados os mesmos parâmetros e variáveis adotados nos modelos anteriores. Porém, será adicionado um índice j referente à máquina utilizada, por exemplo, y_{ijt} é a quantidade produzida do item i na máquina j no período t , seguindo o mesmo raciocínio para os demais parâmetros e variáveis.

Índice:

– $j = \{1, \dots, M\}$: máquinas.

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^T (sc_{ijt} w_{ijt} + pc_{ijt} y_{ijt}) + \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T hc_{it} r_{it} \quad (13)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^M y_{ijt} + r_{i,t-1} - r_{it} = d_{it} + \sum_{k \in S(i)} b_{ik} \sum_{j=1}^M y_{kjt}, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^m p t_{ijt} y_{ijt} + \sum_{i=1}^m s t_{ijt} w_{ijt} \leq Cap_{jt}, \quad j = 1, \dots, M, \quad t = 1, \dots, T \quad (15)$$

$$y_{ijt} \leq \sum_{\tau=t}^T d_{it} w_{ijt}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, M, \quad t = 1, \dots, T \quad (16)$$

$$w_{ijt} \in \{0, 1\}, \quad y_{ijt}, r_{it} \in \mathbb{R}_+ (r_{i0} = 0), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, M, \quad t = 1, \dots, T \quad (17)$$

No modelo (13) – (17), a função objetivo (13) minimiza os custos de preparo, produção e armazenamento. As restrições (14) e (15) referem-se ao balanceamento de estoque e ao limite de capacidade, respectivamente. Já as restrições (16) dizem respeito ao preparo, indicando a necessidade de preparação das máquinas, caso ocorra produção e garantem que $y_{ijt} = 0$, se $w_{ijt} = 0$. Por fim, as restrições (17) referem aos domínios das variáveis.

Na literatura há alguns trabalhos que abordam máquinas paralelas no ambiente produtivo. Uma heurística de lote econômico para máquinas paralelas idênticas foi proposta por Carreno (1990), considerando os tempos de preparação das máquinas.

Uma outra heurística, considerando também os tempos de preparação das máquinas, foi proposta por Sabbag Neto (1993) para solucionar o PDL em máquinas paralelas não idênticas. A heurística começa em uma solução inicial infactível e, por meio da transferência de quantidade de produção entre os períodos e entre as máquinas, procura a factibilidade. Posteriormente, aplica-se um passo de melhoria a fim de obter uma solução de melhor custo.

Kang, Malik e Thomas (1999) consideraram o problema em máquinas paralelas e custo de preparo dependente da sequência, propondo um método baseado em geração de colunas e *branch-and-bound*.

Belvaux e Wolsey (2000) descreveram uma modelagem genérica e um sistema de otimização capaz de resolver vários PDLs, incluindo os casos de multi-itens, multiestágios e máquinas paralelas.

Uma heurística Lagrangiana para a resolução do problema foi proposta por Toledo e Armentano (2006) ao considerar o problema com várias máquinas e a relaxação das restrições de capacidade. Obtém-se a solução inicial através da minimização do problema Lagrangiano, geralmente infactível. O deslocamento da produção entre períodos e máquinas é realizado para tentar factibilizar a solução, deslocando a produção que exceda a capacidade, procurando

por soluções factíveis que minimizem o custo. Outras heurísticas foram propostas por Fiorotto e Araujo (2014) e Fiorotto, Araujo e Jans (2015).

2.2. O Problema de Corte de Estoque

O Problema de Corte de Estoque (PCE) aborda a questão prática de como cortar partes requeridas a partir de material de estoque especificado, com perda mínima de corte ou resíduos (NONÂS; THORSTENSON, 2000), ou seja, consiste na otimização do processo de corte de peças grandes (objetos), disponíveis em estoque, para a produção de peças menores (itens), a fim de satisfazer a demanda de itens e, por exemplo, minimizar a perda total de material ou o custo total dos objetos cortados. O PCE pode apresentar certas características, como: uma grande repetição de itens (poucos tipos de itens produzidos em grandes quantidades), os objetos podem ser de um único tipo ou de vários tipos, e a presença ou não de restrições de capacidade. A seguir, a classificação dos problemas de corte de estoque é feita de acordo com o número de dimensões relevantes no processo de corte do objeto, podendo ser: unidimensional, bidimensional ou tridimensional. Além disso, serão apresentadas algumas particularidades deste problema.

2.2.1. O Modelo Clássico de Gilmore e Gomory (1961, 1963)

Considerando o problema de corte de estoque com somente um tipo de objeto em estoque, uma variedade pouco heterogênea de itens pequenos é completamente alocada para uma seleção de objetos grandes de mínimo valor, número ou tamanho total.

Para modelar tal problema, será considerado o modelo de Gilmore e Gomory (1961, 1963), que se caracteriza por ser flexível e facilmente adaptável para problemas multidimensionais, além de considerar em sua formulação o conceito de padrões de corte, definido a seguir:

Definição 1: Chamamos de **padrão de corte** a maneira como um objeto em estoque é cortado para a produção de itens demandados. Para cada padrão de corte associa-se um vetor m -dimensional que contabiliza os itens produzidos:

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

em que α_i é a quantidade de itens do tipo i no padrão de corte.

Na prática, o número de padrões de corte possíveis é elevado. O modelo matemático de Gilmore e Gomory (1961, 1963), descrito a seguir, considera os seguintes índices, parâmetros e variáveis de decisão:

Índices:

- $i = \{1, \dots, m\}$: itens;
- $j = \{1, \dots, N\}$: padrões de corte.

Parâmetros:

- a_{ij} : número de vezes que o item i está incluído no padrão de corte j ;
- d_i : demanda do item i .

Variáveis de decisão:

- Z_j : número de objetos cortados segundo o padrão de corte j .

$$\text{Min} \sum_{j=1}^N Z_j \tag{18}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} Z_j \geq d_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{19}$$

$$Z_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, N \tag{20}$$

No modelo (18) – (20), a função objetivo (18) minimiza o número de objetos cortados, enquanto que as restrições (19) garantem que as demandas de cada item sejam atendidas através do corte de objetos em estoque usando diferentes padrões de corte. As restrições (20) são

as restrições de integralidade, sendo que cada solução do modelo consiste em um conjunto de padrões de corte (que devem ser realizados) e suas frequências de aplicações correspondentes.

Esta formulação torna-se difícil de ser resolvida devido ao grande número de variáveis de decisão, que devem ser inteiras. Assim, Gilmore e Gomory (1961, 1963) propuseram relaxar as restrições de integralidade e resolver o problema de programação linear resultante através de uma técnica de geração de colunas. Desta forma, resolvendo um subproblema, as colunas a_{ij} em (19) são geradas, e aquelas com custo relativo negativo são adicionadas ao problema principal para aprimorar a solução atual. As características dos subproblemas para gerar colunas (padrões de corte) dependem das características do problema de corte em questão. Os casos envolvendo problemas unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais serão discutidos nas subseções 2.2.2, 2.2.3 e 2.2.4, respectivamente.

Após a definição dos padrões de corte, faz-se necessário determinar o número de vezes que cada padrão de corte j será utilizado para solucionar o problema, sendo representado pela variável de decisão Z_j . Assim, a modelagem matemática do problema de corte de estoque pode ser realizada em duas etapas principais:

1. Definir todos os padrões de corte possíveis, sendo que esta etapa pode ser feita independentemente da demanda dos itens, supondo as N possíveis soluções:

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}, \dots, a_N = \begin{pmatrix} \alpha_{1N} \\ \alpha_{2N} \\ \vdots \\ \alpha_{mN} \end{pmatrix}$$

em que α_{ij} é o número de itens do tipo i no padrão de corte j , $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, N$.

2. Decidir quantas vezes cada padrão de corte será utilizado para atender a demanda, devendo ser um número inteiro e não-negativo.

Como a resolução do problema de corte de estoque é de grande complexidade computacional, devido à condição de integralidade sobre as variáveis Z_j e ao número de padrões de corte N , Gilmore e Gomory (1961) relaxaram as restrições de integralidade, resolvendo o problema de programação linear pelo Método Simplex com geração de colunas.

No ambiente industrial, os problemas de corte estão frequentemente embutidos em processos produtivos diferentes e, ao longo dos anos, o modelo padrão foi estendido para con-

siderar diversos aspectos encontrados na prática industrial, resultando em diferentes objetivos, restrições e características.

O uso de diferentes tipos de objetos (com relação aos comprimentos, pesos ou espessuras) pode levar a uma melhor utilização geral de materiais, sendo assim, uma característica importante em algumas empresas. Geralmente, a adição de custos associados a objetos diferentes é necessária, resultando em outras funções objetivo, como minimizar os custos de objetos ou a perda de material.

Um caso importante, dentre as extensões do problema de corte, é a incorporação de custos associados ao uso de um novo padrão de corte, diferente do anterior, uma vez que é necessário um *setup* sempre que um novo padrão de corte é iniciado e o equipamento de corte deve ser preparado para esse novo padrão de corte. *Setups* deste tipo causam a perda de capacidade de tempo produtivo, custos adicionais e consumo de recursos. Nesses casos, a minimização do custo de *setup* é adicionada à minimização de custos de desperdícios ou objetos (HAESSLER, 1975; DIEGEL *et al.*, 1996; VANDERBECK, 2000).

Para modelar uma restrição de *setup* na formulação proposta por Gilmore e Gomory (1961, 1963), utiliza-se W_j como uma variável binária indicando se o padrão de corte j é usado ou não, e M como um número grande. Assim, pode-se adicionar ao modelo a seguinte restrição:

$$Z_j \leq MW_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (21)$$

A restrição (21) garante que um *setup* do padrão de corte é realizado sempre que um padrão de corte é usado ao menos uma vez. Para minimizar o número de *setups*, é necessário adicionar um termo envolvendo W_j na função objetivo. Em Henn e Wäscher (2013) é possível encontrar uma revisão bibliográfica sobre problemas de corte de estoque com *setups*.

2.2.2. O Problema de Corte de Estoque Unidimensional

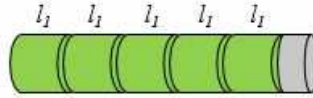
O problema de corte de estoque é classificado como unidimensional quando apenas uma dimensão é relevante no processo de corte. Exemplos da ocorrência deste tipo de problema podem ser encontrados no corte de barras de aço e bobinas de papel.

No problema de corte de estoque unidimensional, um objeto (bobina, barra, etc) deve ser cortado ao longo de seu comprimento para produzir itens de comprimentos específicos. Considera-se como perdas os itens cujos comprimentos não foram especificados. Dessa forma, surge um problema de otimização combinatória: como atender as demandas dos itens nos tamanhos específicos, cortando-se o menor número de objetos possível.

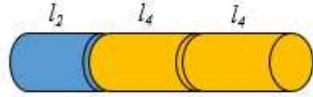
Supondo que haja um grande número de objetos disponíveis em estoque de um certo comprimento L , o PCE unidimensional consiste em cortar esses objetos em itens de comprimentos menores $l_i, i = 1, \dots, m$ (sendo $l_i \leq L$), atendendo as demandas conhecidas $d_i, i = 1, \dots, m$, e otimizando uma função objetivo específica. Muitos objetos precisarão ser cortados para produzir diferentes tipos de itens, sendo necessário obter a melhor combinação possível dos itens dentro de cada objeto, utilizando, assim, padrões de corte. Alguns exemplos de padrões de corte unidimensionais estão representados na Figura 1, a seguir.

Figura 1: Exemplos de padrões de corte unidimensionais.

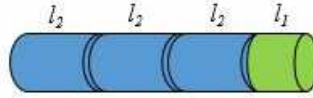
Padrão 1: $a_1 = (5, 0, 0, 0)^T$



Padrão 2: $a_2 = (0, 1, 0, 2)^T$



Padrão 3: $a_3 = (1, 3, 0, 0)^T$



Fonte: Adaptado de Arenales *et al.* (2007).

Dois padrões de corte que tenham o mesmo vetor a associado são chamados de *equivalentes*. Um vetor $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ corresponde a um padrão de corte se, e somente se, satisfazer as seguintes restrições do problema da mochila (considerando apenas as restrições físicas):

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_m\alpha_m \leq L \quad (22)$$

$$\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{Z}_+ \quad (23)$$

supondo que o comprimento do objeto seja L .

Em alguns casos reais, uma perda intrínseca é caracterizada pelo fato de, ao se cortar um objeto, ocorrer uma perda inevitável devido ao uso de um equipamento de corte, sendo necessário considerar a largura da serra de corte na modelagem matemática. A inclusão da perda intrínseca (largura da serra) é denotada por σ no comprimento do item, dessa forma, o comprimento do item deve ser $l_i + \sigma$. No último item, um corte a mais é computado, sendo necessário aumentar o comprimento do objeto para $L + \sigma$, a fim de resolver esse fato (ARENALES; MORABITO; YANASSE, 2004).

De acordo com Arenales, Morabito e Yanasse (2004) e considerando $l_i, i = 1, \dots, m$, os comprimentos dos itens, σ a largura da serra e α_i o número de itens do tipo i no padrão de corte, temos:

- a) $l_1\alpha_1 + \dots + l_m\alpha_m$ é o comprimento total dos itens no padrão de corte;
- b) $\alpha_1 + \dots + \alpha_m$ é o número de itens;
- c) $\alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1$ é o número total de cortes realizados;
- d) $\sigma \times (\alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1)$ é a perda causada pela largura da serra.

Dessa forma, a equação (22) deve ser alterada para:

$$l_1\alpha_1 + \dots + l_m\alpha_m + \sigma \times (\alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1) \leq L \quad (22a)$$

ou,

$$(l_1 + \sigma)\alpha_1 + \dots + (l_m + \sigma)\alpha_m \leq L + \sigma \quad (22b)$$

Definição 2: Um padrão de corte é chamado de **homogêneo** quando produz apenas um tipo de item.

De modo equivalente, um padrão de corte é homogêneo se o vetor associado tiver somente uma coordenada não-nula: $a = (0, \dots, \alpha_i, \dots, 0), \alpha_i \neq 0$. Sempre haverá m padrões homogêneos, com vetores associados definindo uma matriz diagonal.

2.2.3. O Problema de Corte de Estoque Bidimensional

No problema de corte de estoque bidimensional, duas dimensões são relevantes durante o processo de corte (comprimento e largura). Neste problema, placas em estoque com dimensões $L \times W$ devem ser cortadas para produzir m itens retangulares menores, cujas dimensões são: $l_1 \times w_1, l_2 \times w_2, \dots, l_m \times w_m$.

Exemplos de problemas bidimensionais são encontrados no corte de chapas na indústria metalúrgica e no corte de placas de madeira na indústria moveleira. As etapas da modelagem matemática para o problema de corte de estoque unidimensional, descritas na seção anterior, são válidas também para o problema de corte de estoque bidimensional, mas a técnica de geração dos padrões de corte é diferente.

Serão apresentados, a seguir, como o subproblema gerador de colunas pode ser resolvido para o problema de corte de estoque bidimensional, além de outras definições para este tipo de problema, segundo Arenales, Morabito e Yanasse (2004).

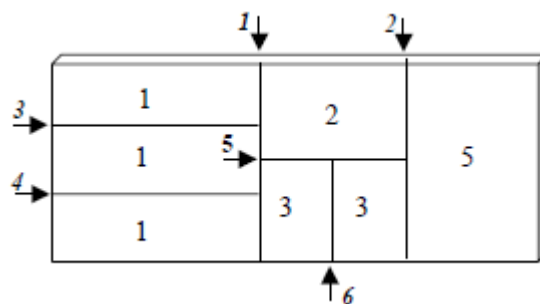
Definição 3: Um corte sobre uma placa retangular que produza dois novos retângulos é chamado **corte guilhotinado ortogonal**, ou simplesmente, **corte guilhotinado**. Uma sequência de cortes guilhotinados, aplicados sobre a placa e sobre os retângulos resultantes produz um **padrão de corte guilhotinado**.

De maneira semelhante ao caso unidimensional, pode-se associar um vetor que contabiliza os itens no padrão:

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

em que α_i é o número de itens (retângulos) do tipo i no padrão de corte.

Figura 2: Exemplo de padrão de corte bidimensional guilhotinado.



Fonte: Arenales, Morabito e Yanasse (2004).

No exemplo da Figura 2, considerando $m = 5$ tipos de itens, o vetor associado é dado por $a = (3, 1, 2, 0, 1)$, sendo três itens do tipo 1, um item do tipo 2, dois itens do tipo 3, nenhum item do tipo 4 e um item do tipo 5, utilizando 6 cortes guilhotinados para a produção deste padrão de corte.

A dificuldade é maior no problema bidimensional, quando comparado ao problema unidimensional, principalmente para gerar arranjos sem que ocorra a sobreposição de itens nos planos de corte, ou seja, insere-se a dificuldade geométrica na resolução do problema.

Os padrões de corte guilhotinados organizam-se em estágios da seguinte maneira: no primeiro estágio, cortes guilhotinados paralelos uns aos outros são realizados sobre a placa (cortes verticais 1 e 2 na Figura 2). No segundo estágio, os retângulos obtidos são cortados de forma perpendicular (cortes horizontais 3, 4 e 5 na Figura 2) aos cortes do primeiro estágio, e assim sucessivamente, definindo os estágios de corte, sendo que no terceiro estágio realizou-se o corte 6 (vertical), que só pode ser realizado após o corte 5. Dessa forma, o padrão de corte da Figura 2 foi obtido depois de três estágios.

Definição 4: Se o número permitido de estágios é limitado por k , dizemos que o padrão de corte resultante é um **padrão de corte guilhotinado em k-estágios**.

2.2.3.1. O Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado em 2-Estágios

Considerando uma placa, cujos comprimento e largura são $L \times W$, respectivamente, a mesma deve ser cortada para produzir m itens menores de dimensões $l_i \times w_i, i = 1, \dots, m$, tendo cada item i um valor de utilidade associado $v_i, i = 1, \dots, m$, sendo $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ o vetor associado a um padrão de corte sobre a placa $L \times W$ e α_i o número de itens do tipo i no padrão de corte. O problema em questão é formulado da seguinte maneira (ARENALES; MORABITO; YANASSE, 2004):

1. Determinar as melhores formas de se cortar as faixas $L \times w_1, L \times w_2, \dots, L \times w_m$.

A representação dos itens, que podem ser cortados numa faixa $L \times w_k$, é dada pelo conjunto $W_k = \{i \mid w_i \leq w_k\}$ e as faixas são definidas apenas para larguras diferentes, pois se $w_k = w_j$ então as faixas $L \times w_k$ e $L \times w_j$ são iguais. Supondo que as r primeiras larguras são diferentes entre si, considera-se somente as faixas $L \times w_1, L \times w_2, \dots, L \times w_r$.

Para produzir os itens demandados, cada faixa deve ser cortada de maneira a obter o maior valor de utilidade. Dessa forma, para cada faixa $L \times w_k, k = 1, \dots, r$, deve-se resolver o seguinte problema da mochila:

$$\begin{aligned} V_k = \text{Max} \sum_{i \in W_k} v_i \gamma_{ik} \\ \text{Sujeito } a : \begin{cases} \sum_{i \in W_k} l_i \gamma_{ik} \leq L \\ \gamma_{ik} \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \dots, m \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

em que γ_{ik} é o número de itens do tipo i na faixa $L \times w_k$.

Após resolver os r problemas da mochila em (24), obtém-se as melhores faixas para compor o padrão de corte bidimensional.

2. Determinar quantas vezes cada faixa deve ser usada no padrão bidimensional.

Considerando a largura W da placa e as larguras w_k de cada faixa k , será resolvido o seguinte problema da mochila:

$$\begin{aligned} V = \text{Max } V_1 \beta_1 + V_2 \beta_2 + \dots + V_r \beta_r \\ \text{Sujeito } a : \begin{cases} w_1 \beta_1 + w_2 \beta_2 + \dots + w_r \beta_r \leq W \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

O vetor associado ao padrão de corte obtido pelo procedimento acima, que determina o número de itens no padrão, pode ser representado por:

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 = \sum_{k=1}^r \gamma_{1k} \beta_k \\ \alpha_2 = \sum_{k=1}^r \gamma_{2k} \beta_k \\ \vdots \\ \alpha_m = \sum_{k=1}^r \gamma_{mk} \beta_k \end{pmatrix} \quad (26)$$

As somatórias em (26) se restringem às faixas com a possibilidade de conter o item, ou seja, $\alpha_i = \sum_{k|i \in W_k} \gamma_{ik} \beta_k$, pois $\gamma_{ik} = 0$, se $i \notin W_k$. Por meio do procedimento acima, conse-

gue-se produzir padrões de corte em 2-estágios, com o primeiro sendo obtido através de cortes horizontais, já que são produzidas faixas $L \times w_k$.

Para que se consiga produzir padrões de corte guilhotinados em 2-estágios, com o primeiro estágio sendo formado por cortes verticais, faz-se necessário produzir faixas $l_k \times W$, além de redefinir o conjunto de itens que podem ser cortados nessa faixa como $L_k = \{i \mid l_i \leq l_k\}$, substituindo os termos em (24) e (25).

2.2.4. O Problema de Corte de Estoque Tridimensional

Cortar blocos retangulares (paralelepípedos) para a produção de itens menores tridimensionais com demandas pré-estabelecidas caracteriza o Problema de Corte de Estoque Tridimensional, no qual vários blocos serão cortados, devendo-se determinar suas quantidades, de forma análoga ao problema bidimensional. Neste problema, os objetos e itens possuem três dimensões relevantes no processo de corte: comprimento L , largura W e altura H . Assim, os blocos em estoque possuem dimensões $L \times W \times H$ e precisam ser cortados para produzir m itens menores em forma de paralelepípedos, cujas dimensões são: $l_1 \times w_1 \times h_1, l_2 \times w_2 \times h_2, \dots, l_m \times w_m \times h_m$. Exemplos de problemas de corte de estoque tridimensionais podem ser encontrados no corte de blocos retangulares de espuma na indústria de colchões.

Um outro problema tridimensional clássico na literatura é o Problema de Empacotamento (PE), considerado como o problema inverso do corte, já que consiste em determinar a melhor maneira de organizar um conjunto de itens dentro de objetos maiores como contêineres ou caminhões. Exemplos de PE são encontrados em atividades logísticas de movimentação, transporte e armazenamento de materiais (MELEGA, 2017).

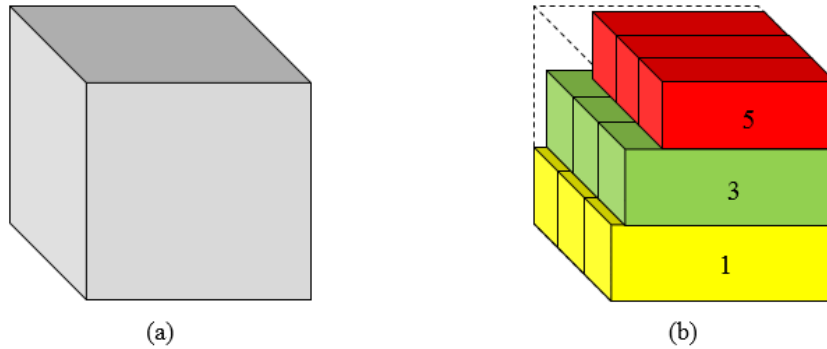
De acordo com Arenales, Morabito e Yanasse (2004), no Problema de Empacotamento, além do arranjo geométrico dos itens dentro de objetos maiores, podem haver outras restrições, como: uma certa orientação dos itens dentro do objeto maior; quantidade de itens que podem ser empilhados; estabilidade da carga; grupos de itens que devem permanecer juntos (por possuírem características parecidas ou por serem descarregados juntos em um mesmo lugar); grupos de itens que devem ficar separados (por apresentarem características diferentes); distribuição de peso dentro do objeto maior e limite de peso suportado pelo objeto.

Similarmente ao caso bidimensional, pode-se associar um vetor que contabiliza os itens no padrão:

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

em que α_i é o número de itens (blocos retangulares) do tipo i no padrão de corte.

Figura 3: Exemplo de padrão de corte tridimensional: (a) bloco inteiro antes do corte e (b) geração de diferentes itens após o corte.



Fonte: Autor.

É possível observar, pela Figura 3(a), o bloco antes de ser cortado, e através da Figura 3(b) o mesmo bloco depois de ser cortado, gerando diferentes tipos de itens por meio do padrão de corte. No exemplo da Figura 3 e levando-se em consideração que $m = 5$ tipos de itens, o vetor associado é dado por $a = (3, 0, 3, 0, 3)$, sendo três itens do tipo 1, nenhum item do tipo 2, três itens do tipo 3, nenhum item do tipo 4 e três itens do tipo 5.

Em comparação com os problemas unidimensionais e bidimensionais, os problemas tridimensionais apresentam dificuldades geométricas ainda maiores. Além de grandes dificuldades para se resolver o modelo, esses problemas dependem do tipo de padrão tridimensional (guilhotinado ou não-guilhotinado, restrito ou irrestrito), sendo que essas restrições também existem para os problemas bidimensionais (ARENALES; MORABITO; YANASSE, 2004).

Quanto à geração de padrões de corte tridimensionais guilhotinados, Queiroz *et al.* (2012) apresentaram inicialmente algumas heurísticas primais que foram utilizadas como sub-rotinas na geração de colunas para o problema de corte de estoque tridimensional. A primeira heurística primal apresentada foi a heurística híbrida HFF3, que gera padrões compostos de níveis e se baseia no algoritmo híbrido de ajuste inicial de Chung, Garey e Johnson (1982) para gerar os níveis para o problema de corte de estoque bidimensional, além de também utilizar um algoritmo (ajuste inicial – FF e ajuste inicial decrescente – FFD) para o problema de corte de estoque unidimensional para empacotar esses níveis em caixas. Outra heurística primal apresentada foi o algoritmo H3CS, que primeiro classifica os itens de forma decrescente

pela altura, e então, iterativamente, gera um novo nível utilizando o algoritmo para o problema de corte de estoque bidimensional, privilegiando o empacotamento dos itens maiores em cada nível. Para cada item i , o maior número possível deles é empacotado sem violar a sua demanda e mantendo o empacotamento em um nível. Quando todos os níveis são gerados, eles são empacotados em caixas por um algoritmo para o problema de corte de estoque unidimensional.

Já quanto às heurísticas baseadas na geração de colunas para o problema de corte de estoque tridimensional, Queiroz *et al.* (2012) utilizaram o algoritmo apresentado para o problema tridimensional da mochila ilimitada (3UK) para gerar padrões. Tal algoritmo é chamado de Simplex_{cs} e resolve o modelo (18) – (20), sendo que a matriz $I_{N \times N}$ é a matriz identidade correspondente à N padrões, cada um com itens de um tipo e de uma orientação. Outro algoritmo apresentado foi o algoritmo CG3CS, que resolve o problema de corte de estoque tridimensional. Este algoritmo recebe a solução encontrada pelo algoritmo Simplex_{cs} e retorna uma solução inteira para o problema de corte de estoque tridimensional. Caso seja necessário, uma heurística primal é utilizada pelo algoritmo para obter um padrão de corte.

2.3. O Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque

Os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque, abordados de maneira isolada, têm atraído a atenção dos pesquisadores nas últimas décadas e devido à aspectos econômicos e aos avanços computacionais, a complexidade de modelos de otimização em processos industriais tem aumentado bastante (GRAMANI; FRANÇA; ARENALES, 2011).

Tipicamente, as indústrias resolvem estes problemas separadamente, solucionando primeiro o PDL, determinando o planejamento da produção de produtos finais para cada período, e depois resolvendo o PCE, tomando decisões (para cada período) sobre como cortar cada parte, a fim de satisfazer a quantidade de itens necessários para atender a demanda do produto final (GRAMANI; FRANÇA; ARENALES, 2009). No entanto, lidar com estes dois problemas separadamente pode levar a custos globais inaceitáveis na prática, especialmente se a etapa de corte é economicamente relevante no processo (GRAMANI; FRANÇA, 2006).

Devido ao uso de novas tecnologias, do planejamento baseado em otimização, além da maior compreensão destes problemas individuais, as organizações têm buscado métodos globais mais avançados e soluções integradas que representem as atividades industriais com maior precisão (GRAMANI; FRANÇA; ARENALES, 2011).

Ao integrar os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes, a questão consiste na análise do *trade-off* existente quando se resolve o problema de corte de estoque levando em consideração o planejamento da produção para vários períodos. Uma alternativa seria antecipar a produção de grandes quantidades de itens ou produtos finais, aumentando os custos de armazenamento, mas reduzindo as perdas no processo de corte, assim como a quantidade de preparos. Dessa forma, três fatores econômicos têm influência sobre o problema integrado: a perda por corte, os custos de armazenamento e os custos de preparo da produção (GRAMANI; FRANÇA; ARENALES, 2011). Exemplos da ocorrência simultânea dos problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes podem ser encontrados nas indústrias de papel, móveis e têxtil. No entanto, apenas alguns artigos consideraram esses dois problemas de maneira integrada.

O primeiro autor a publicar sobre o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque foi Farley (1988). O autor propôs um modelo de otimização quadrática e um modelo de otimização inteira mista para a indústria têxtil, considerando o problema de corte como bidimensional para um único período na programação da produção.

Hendry, Fok e Shek (1996) realizaram um estudo de caso em uma indústria de fundição de cobre, apresentando uma solução em duas etapas para o problema integrado em questão. O problema de corte de estoque com restrições de capacidade é resolvido heurísticamente na primeira etapa e a solução obtida é usada em um modelo de programação inteira para determinar os tamanhos dos lotes, ou seja, o modelo proposto determina a quantidade correta de cobre a ser derretida para fabricar as barras e o corte de estoque unidimensional das barras produzidas, utilizando métodos heurísticos para obter as soluções.

Uma revisão bibliográfica recente sobre este problema integrado pode ser encontrada em Melega, Araujo e Jans (2018), os quais propuseram uma formulação geral para o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque, considerando dois tipos de integração: a integração entre períodos de tempo e a integração entre os níveis de produção. Além disso, os autores também discutiram e classificaram as publicações na literatura, relacionadas a esse tipo de problema integrado, de acordo com dois aspectos principais. Primeira-

mente, o modelo é classificado em um nível específico (1, 2 e 3) se houver uma variável de decisão vinculada a esse nível. Um ambiente produtivo de três níveis e múltiplos períodos é considerado com objetos sendo adquiridos (Nível 1) e depois cortados em pedaços (Nível 2), formando as entradas para o processo de montagem (Nível 3), onde os produtos finais são obtidos. Então, o segundo aspecto está relacionado à integração entre períodos de tempo, sendo classificado de acordo com o horizonte de planejamento (discreto ou contínuo) e o número de períodos de tempo (um período, múltiplos períodos ou infinito). Melega, Araujo e Jans (2018) também forneceram informações sobre o tipo de empresa em que o modelo foi usado.

Seguindo estes critérios de classificação, o presente trabalho pode ser classificado como um problema tridimensional e trata de uma integração de ambos os tipos (entre períodos de tempo e entre níveis de produção), sendo aplicado a uma indústria de colchões e restrito a dois níveis de produção (Nível 1 e Nível 2), pois o modelo possui variáveis de decisão relacionadas à compra e ao corte de objetos em um horizonte de planejamento discreto e com múltiplos períodos ($L1/L2/-/M$).

A integração entre esses dois níveis (1 e 2) pode ser encontrada em muitos artigos da literatura. Em relação à dimensionalidade do PCE no Nível 2, tipo de períodos de tempo, tipo de horizonte temporal e aplicações, é possível separar os artigos em diferentes grupos. Em Reinders (1992), Hendry, Fok e Shek (1996), Correia, Oliveira e Ferreira (2004), Poltroniere *et al.* (2007), Poltroniere, Araujo e Poldi (2016), Malik, Qiu e Taplin (2009), Silva, Alvelos e Carvalho (2014), Agostinho *et al.* (2016), Leão, Furlan e Toledo (2017) e Poldi e Araujo (2016), são considerados um horizonte de tempo discreto e múltiplos períodos de tempo, se diferenciando pelo tipo de aplicação e pela dimensionalidade do problema. Por outro lado, Krichagina *et al.* (1998) consideram um horizonte de tempo contínuo e períodos de tempo infinitos, enquanto Silva *et al.* (2015) levam em consideração um horizonte de tempo discreto e um período de tempo. Em relação aos tipos de aplicações, encontramos artigos aplicados na indústria de papel (KRICHAGINA *et al.*, 1998; CORREIA; OLIVEIRA; FERREIRA, 2004; POLTRONIERE *et al.*, 2007; POLTRONIERE; ARAUJO; POLDI, 2016; MALIK; QIU; TAPLIN, 2009; LEÃO; FURLAN; TOLEDO, 2017; POLDI; ARAUJO, 2016), em processamento de madeira (REINDERS, 1992), na indústria do cobre (HENDRY; FOK; SHEK, 1996), em móveis (SILVA; ALVELOS; CARVALHO, 2014), na indústria têxtil (SILVA *et al.*, 2015) e em aplicações gerais (AGOSTINHO *et al.*, 2016). Sobre a dimensionalidade do problema de corte de estoque, observa-se que a maioria dos artigos considera o problema co-

mo unidimensional (HENDRY; FOK; SHEK, 1996; POLTRONIERE *et al.*, 2007; POLTRONIERE; ARAUJO; POLDI, 2016; MALIK; QIU; TAPLIN, 2009; AGOSTINHO *et al.*, 2016; LEÃO; FURLAN; TOLEDO, 2017; POLDI; ARAUJO, 2016), outra parte considera o problema como bidimensional (KRICHAGINA *et al.*, 1998; SILVA; ALVELOS; CARVALHO, 2014; SILVA *et al.*, 2015) e dois artigos consideram o problema como uni/bidimensional (REINDERS, 1992; CORREIA; OLIVEIRA; FERREIRA, 2004).

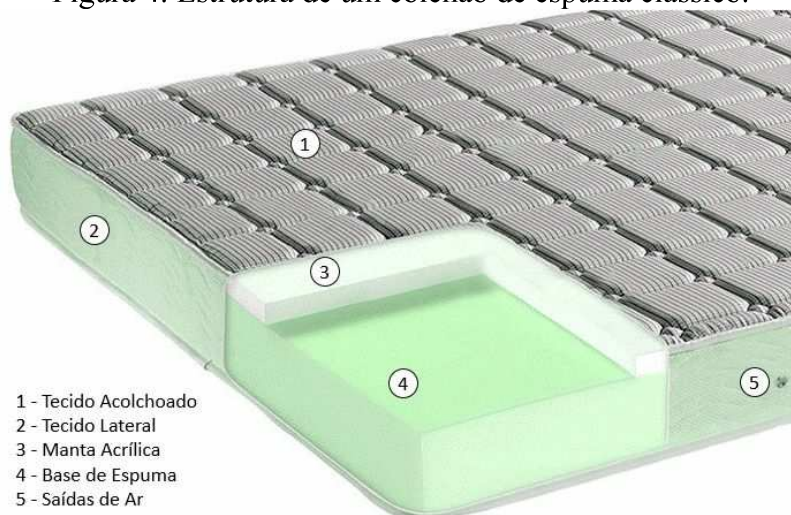
Pode-se verificar que não há nenhum artigo publicado sobre o problema de corte de estoque tridimensional em indústrias de colchões. Assim, o foco deste trabalho é propor e resolver um modelo matemático para o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque tridimensional em uma indústria de colchões, sendo que tal modelo, bem como a descrição do processo produtivo, serão discutidos nos próximos capítulos.

Capítulo 3

3. Descrição do Processo Produtivo

O processo produtivo de colchões descrito neste capítulo é baseado nas informações coletadas em uma indústria brasileira de pequeno porte situada no estado de São Paulo, que produz colchões de mola e de espuma. No entanto, o foco deste trabalho é sobre colchões de espuma feitos de poliuretano, com diferentes tamanhos e densidades. Os materiais utilizados em um colchão de espuma clássico são mostrados na Figura 4.

Figura 4: Estrutura de um colchão de espuma clássico.



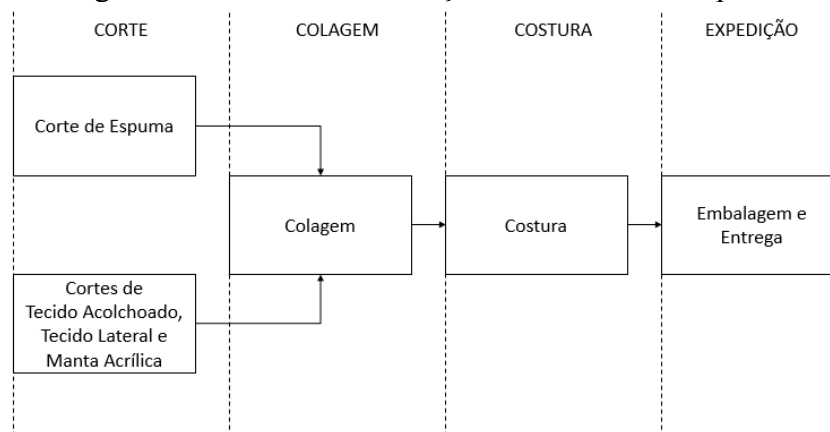
Fonte: Autor.

O ambiente de produção é composto por dois níveis. O primeiro nível de produção (PDL) corresponde ao planejamento da aquisição de blocos de espuma (objetos), que devem ser encomendados de fornecedores. Os blocos de espuma podem ser comprados de diferentes fornecedores, podendo variar de tamanho dependendo do fornecedor. Por simplicidade, neste trabalho somente um tamanho de objeto em estoque será considerado para todos os fornecedores. Os blocos de espuma são produzidos em quatro densidades diferentes (D15, D23, D26, D33) e espumas com densidades maiores são indicadas para fins ortopédicos, pois são mais rígidas. A indústria mantém dois blocos de espuma D23 (mais vendida) de 2,76m x 1,88m x 1,15m como estoque de segurança para objetos em cada período e existe uma demanda inde-

pendente pelos blocos. O segundo nível de produção corresponde ao PCE tridimensional, no qual os objetos são cortados em partes menores (itens) de espumas através do uso de padrões de corte. Esses itens podem ser diretamente considerados como produtos finais ou podem ser combinados com outros componentes para produzir os colchões. Após uma operação de corte, dependendo do tamanho do bloco de espuma que sobrou, ele é mantido em estoque; ou é usado em um produto secundário com um valor reduzido, sendo esta uma estratégia para reduzir o desperdício de material. No modelo matemático proposto neste trabalho não são consideradas sobras aproveitáveis. Dessa forma, o problema deste trabalho é caracterizado como um PDL com PCE tridimensional.

O processo de fabricação de colchões de espuma, mostrado na Figura 5, é dividido em quatro setores principais (corte, colagem, costura e expedição) e em cinco estações de trabalho (corte de espuma; cortes de tecido acolchoado, tecido lateral e manta acrílica; colagem; costura; embalagem e entrega), iniciando o processo em duas linhas paralelas (corte de espuma e cortes de tecido acolchoado, tecido lateral e manta acrílica) no setor de Corte. Os blocos de espuma tridimensionais são cortados em duas máquinas de corte paralelas na estação Corte de Espuma na primeira linha, gerando itens retangulares tridimensionais de espumas, conforme necessário. O segundo ramo da linha de fabricação consiste em cortar tecidos acolchoados, tecidos laterais e mantas acrílicas. Após a conclusão dos processos nessas duas linhas, os produtos semiacabados são colados na estação Colagem. Os tecidos acolchoados superior e inferior e os tecidos laterais são costurados, juntamente com os produtos semiacabados, na estação Costura. Finalmente, os colchões de espuma vão para a última estação onde eles são embalados e armazenados para entregas futuras.

Figura 5: Processo de fabricação de colchões de espuma.



Fonte: Autor.

A principal preocupação da indústria está relacionada ao custo final do produto. De acordo com os dados coletados, os custos de espuma representam cerca de 65% do custo final do produto. No modelo, proposto no próximo capítulo, apenas o processo de corte da base de espuma (item 4 da Figura 4) será considerado, os outros estágios do processo produtivo não serão tratados, devido ao custo da espuma e pelo fato do processo de corte ser o gargalo do processo produtivo, já que limita a quantidade de produtos que o sistema pode gerar como um todo. Assim, o foco deste estudo será otimizar o processo de corte de espuma, visando reduzir os custos de produção e o desperdício de material.

O processo de corte de espuma consiste em duas máquinas de corte (uma horizontal e outra vertical) idênticas (mesmos tempos de preparo e de processamento), que trabalham de maneira separada e independente, sendo possível realizar, em ambas as máquinas, todas as operações de corte. O bloco de espuma permanece estático durante a operação de corte nas duas máquinas, com movimentação somente da base de apoio, uma vez que esta se movimenta em dois eixos (x e y). Apenas quando se modifica a direção do corte, altera-se a posição do bloco de espuma, para que seja possível realizar o corte. A única diferença entre as máquinas é quanto à posição da serra para o corte da espuma, já que em uma delas a serra se encontra na posição horizontal e na outra, vertical (Figura 6), sendo necessário realizar um novo *setup* na máquina de corte sempre que um objeto é cortado de acordo com um novo padrão de corte. No entanto, será considerada apenas uma máquina no modelo, com capacidade aproximadamente igual à soma das capacidades das duas máquinas de corte.

Figura 6: Máquina de corte vertical.



Fonte: Autor.

O catálogo da indústria considerada neste estudo contém sete tipos de colchões de espuma: dois modelos de colchões de berço – cm1 (1,28m x 0,58m x 0,12m) e cm2 (1,28m x 0,68m x 0,12m), dois modelos de colchões de solteiro – sm1 (1,88m x 0,78m x 0,14m) e sm2 (1,88m x 0,88m x 0,14m), um colchão de casal normal – dm (1,88m x 1,38m x 0,14m), um colchão de casal *queen* – qm (1,98m x 1,58m x 0,2m) e um colchão de casal *king* – km (1,98m x 1,86m x 0,2m). Os colchões de espuma podem ser produzidos em quatro densidades diferentes, resultando em 28 produtos finais distintos.

As decisões sobre o problema de dimensionamento de lotes e corte de estoque são tomadas com base na demanda do cliente, respeitando os prazos de entrega (após o pedido) de até 10 dias para colchões com medidas usuais (sete tipos descritos acima) e de até 20 dias para colchões fora do padrão, mas sempre mantendo um estoque de segurança. O estoque de segurança de produtos finais, informado pela indústria, corresponde a: 50 colchões de solteiro de 1,88m x 0,78m x 0,14m, 50 colchões de solteiro de 1,88m x 0,88m x 0,14m e 20 colchões normais de casal de 1,88m x 1,38m x 0,14m; todos correspondentes à densidade D23.

Capítulo 4

4. Modelagem Matemática

Neste capítulo, é proposto um modelo matemático para o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque apresentado. O modelo baseia-se na descrição do processo produtivo da indústria de colchões apresentada no capítulo 3. Antes de apresentar o modelo matemático, são consideradas algumas simplificações no processo produtivo para obter um modelo solucionável computacionalmente:

1. Um único tipo de objeto em estoque com tamanho padrão de 2,76m x 1,88m x 1,15m será considerado para todos os fornecedores, se diferenciando somente pela densidade.
2. Não serão consideradas máquinas paralelas no modelo. Será considerada apenas uma máquina com capacidade aproximadamente igual à soma das capacidades das duas máquinas.

O modelo proposto consiste em uma generalização do modelo de Gilmore e Gomory (1961, 1963) para o problema de corte de estoque, para lidar com o problema de corte de estoque multiperíodo (POLDI; ARAUJO, 2016) e em uma generalização do modelo de Trigeiro, Thomas e McClain (1989) para o problema de dimensionamento de lotes. Os seguintes dados são considerados para a modelagem matemática:

Índices:

- $t = 1, \dots, T$: períodos do horizonte de planejamento;
- $k = 1, \dots, K$: tipos de objetos disponíveis em estoque (diferentes densidades);
- $j = 1, \dots, N$: padrões de corte;
- $i = 1, \dots, m$: tipos de itens.

Parâmetros:

- T : número de períodos do horizonte de planejamento;

- K : número de tipos de objetos disponíveis em estoque;
- N : número de padrões de corte;
- m : número de tipos de itens;
- d_{kt}^i : demanda do item (espuma) do tipo i com densidade k no período t , $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$;
- a_{ij} : número de unidades do item do tipo i no padrão de corte j , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, N$;
- pc_{kt} : custo de compra do objeto com densidade k no período t , $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$;
- hc_{kt} : custo de armazenamento do objeto com densidade k no período t , $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$;
- d_{kt} : demanda independente de objeto com densidade k no período t , $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$;
- sc_{kjt} : custo de preparação da máquina de corte para cortar um objeto com densidade k de acordo com o padrão de corte j no período t , $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, N$, $t = 1, \dots, T$;
- cc_{kjt} : custo para cortar um objeto com densidade k de acordo com o padrão de corte j no período t , $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, N$, $t = 1, \dots, T$;
- st_j : tempo de preparação para cortar um objeto de acordo com o padrão de corte j , $j = 1, \dots, N$;
- pt_{kj} : tempo de produção necessário para cortar um objeto com densidade k de acordo com o padrão de corte j , $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, N$;
- Cap_t : capacidade da máquina de corte (em unidades de tempo) no período t , $t = 1, \dots, T$;
- hc_{kt}^i : custo de armazenamento para o item do tipo i com densidade k no período t , $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$;
- M'_{kjt} : número grande calculado com base na densidade k , no padrão de corte j e no período t , $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, N$, $t = 1, \dots, T$;
- ES_{kt}^i : estoque de segurança para o item do tipo i com densidade k no período t , $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$;
- ES_{kt} : estoque de segurança para o objeto com densidade k no período t , $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$.

Variáveis de decisão:

- y_{kt} : quantidade comprada de objetos com densidade k no período t ;

- s_{kt} : estoque do objeto k no final do período t ;
- w_{jt} : variável binária que indica a preparação ou não da máquina para utilizar o padrão de corte j no período t ;
- x_{kjt} : número de objetos com densidade k cortados de acordo com o padrão de corte j no período t ;
- r_{kt}^i : estoque de itens do tipo i com densidade k no final do período t .

Modelo matemático:

$$\text{Min} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{k=1}^K (pc_{kt} y_{kt} + hc_{kt} s_{kt}) + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N (sc_{kjt} w_{jt} + cc_{kjt} x_{kjt}) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K hc_{kt}^i r_{kt}^i \right) \quad (27)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_{kjt} + r_{k,t-1}^i - r_{kt}^i = d_{kt}^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, K, \quad t = 1, \dots, T \quad (28)$$

$$s_{k,t-1} + y_{kt} = \sum_{j=1}^N x_{kjt} + d_{kt} + s_{kt}, \quad k = 1, \dots, K, \quad t = 1, \dots, T \quad (29)$$

$$x_{kjt} \leq M'_{kjt} w_{jt}, \quad j = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, K, \quad t = 1, \dots, T \quad (30)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N (st_j w_{jt} + pt_{kj} x_{kjt}) \leq Cap_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (31)$$

$$r_{kt}^i \geq ES_{kt}^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, K, \quad t = 1, \dots, T \quad (32)$$

$$s_{kt} \geq ES_{kt}, \quad k = 1, \dots, K, \quad t = 1, \dots, T \quad (33)$$

$$y_{kt}, s_{kt}, r_{kt}^i \in \mathbb{R}_+, w_{jt} \in \{0, 1\}, x_{kjt} \in \mathbb{Z}_+, \quad (34)$$

$$i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, K, \quad t = 1, \dots, T$$

A função objetivo (27) minimiza os custos de compra e os custos de armazenamento de objetos, os custos de preparação da máquina de corte e os custos de corte de objetos, além dos custos de armazenamento de itens, ou seja, os custos globais em cada nível. As restrições (28) garantem que a demanda de itens seja atendida, ao passo que as restrições (29) são de balanço de estoque dos objetos e fazem parte do conjunto de restrições do problema de di-

mensionamento de lotes no Nível 1 (compra de objetos). As restrições (29) também integram o Nível 1 (compra de objetos) com o Nível 2 (corte dos objetos em itens), garantindo a compra de objetos suficientes no processo de corte e a integração entre o PDL e o PCE. Os objetos em estoque não utilizados em um período t ficam disponíveis no período $t + 1$, com uma "penalidade", ou seja, o custo de armazenamento hc_{kt} . Já as restrições (30) e (31) estão relacionadas à produção de itens de espuma no processo de corte. O conjunto de restrições (30) força um *setup* na máquina de corte, sempre que um objeto é cortado de acordo com um novo padrão de corte (ocorre *setup* só quando troca o padrão de corte) e o parâmetro M'_{kjt} , utilizado no modelo e presente nestas restrições, pode ser definido como:

$$M'_{kjt} = \min \left\{ \begin{array}{l} M_{kjt} = \max_{i/a_{ij}>0} \left\{ \left[\frac{\sum_{l=t}^T d_{kl}^i + ES_{kt}^i}{a_{ij}} \right] \right\} \\ M_{kjt} = \left\lfloor \frac{Cap_t - st_j}{pt_{kj}} \right\rfloor \end{array} \right. \quad (35)$$

Em resumo, tal definição limita a produção como o mínimo entre: a capacidade da máquina de corte menos o tempo de *setup* e a demanda mais o estoque de segurança de itens, garantindo, assim, uma relaxação linear mais forte. As restrições (31) referem-se ao limite de capacidade, levando em consideração o tempo de *setup* para o padrão de corte e o tempo de produção para cortar o objeto de acordo com o padrão de corte, enquanto que as restrições (32) e (33) levam em consideração os estoques de segurança para itens e objetos, respectivamente. Por fim, as restrições (34) são as restrições de não-negatividade e integralidade das variáveis de decisão. Na literatura relacionada à problemas de dimensionamento de lotes (ver seção 2.1) é bastante comum considerar as variáveis relacionadas à produção e ao estoque como variáveis contínuas, pois, em várias aplicações os altos valores associados a tais variáveis fazem com que o fato de considerá-las contínuas, ao invés de inteiras, tenha um efeito irrisório na solução do problema. Assim, essas variáveis também serão consideradas dessa forma, seguindo a abordagem presente na literatura. Observe que as variáveis w_{jt} (variável binária) e x_{kjt} (variável inteira) foram mantidas inteiras, pois, são variáveis de preparação e relacionadas ao problema de corte de estoque, respectivamente.

É possível observar, através da descrição do processo produtivo e da modelagem matemática, que o problema integrado considerado neste trabalho se caracteriza no Nível 1 como um PDL multi-itens, multiperíodo, não capacitado, monoestágio, com demanda dinâmica e horizonte de planejamento finito e discreto; e no Nível 2 como um PCE tridimensional capacitado.

No capítulo a seguir, serão mostrados os testes computacionais realizados com tal problema integrado.

Capítulo 5

5. Testes Computacionais e Discussões

Neste capítulo, serão apresentados os dados coletados em uma indústria de colchões, bem como a comparação entre as soluções obtidas pelo modelo e as soluções adotadas pela indústria, além de testes computacionais adicionais, a fim de verificar o desempenho e a aplicabilidade do modelo considerado.

5.1. Dados Numéricos

Os dados numéricos, descritos nesta seção, foram obtidos através de entrevistas com o gestor de produção da indústria.

A fim de comparar as soluções obtidas pela resolução do modelo com as soluções adotadas pela indústria, consideram-se:

- Quatro períodos no horizonte de planejamento ($T = 4$), sendo que cada período consiste em um intervalo de duas semanas, cobrindo, assim, um horizonte de planejamento total de dois meses;
- Quatro tipos de objetos disponíveis em estoque, ou seja, quatro tipos de blocos de espuma de densidades diferentes (D15, D23, D26, D33);
- Cinco padrões de corte diferentes ($N = 5$) para o primeiro conjunto de testes e dez padrões de corte diferentes ($N = 10$) para o segundo conjunto de testes, sendo esses os mesmos padrões de corte utilizados pela indústria na prática para o corte tridimensional, pois pretende-se obter soluções de fácil aplicação, além de comparar a solução obtida pelo modelo com a solução adotada pela indústria, sendo que a indústria opta por utilizar esses dez padrões de corte devido à sua praticidade;
- Um terceiro conjunto de testes com quinze padrões de corte diferentes ($N = 15$) será considerado, sendo formado pelos dez padrões de corte anteriores e por mais cinco novos padrões gerados através da heurística descrita no Apêndice A. Esses cinco novos padrões de corte foram escolhidos de maneira aleatória, considerando somente os

que apresentavam a combinação de dois itens sendo produzidos no padrão de corte, já que a indústria utiliza padrões com dois itens diferentes no máximo, e assim, as comparações ficariam mais próximas da realidade;

- Sete tipos de itens (dois modelos de colchões de berço, dois modelos de colchões de solteiro, um colchão de casal normal, um colchão de casal *queen* e um colchão de casal *king*), representando o portfólio de produtos da indústria;
- Uma capacidade de corte disponível de 9600 minutos para cada período, levando em conta duas máquinas operando oito horas por dia e cinco dias por semana, durante duas semanas.

Todos os outros parâmetros, descritos no capítulo 4, foram coletados na indústria de colchões e são mostrados nas Tabelas 1 a 16, a seguir, sendo que alguns valores tiveram que ser estimados para os cinco novos padrões de corte do terceiro conjunto de testes e serão melhor explicados no decorrer do texto.

Tabela 1: Demandas de objetos (d_{kt}) – Todos conjuntos de testes.

		Períodos			
		1	2	3	4
Objetos	D15	18	16	14	10
	D23	10	14	16	18
	D26	10	8	6	12
	D33	2	1	3	4

Fonte: Autor.

Tabela 2: Demandas de itens (d_{kt}^i) – Todos conjuntos de testes.

Objetos	Itens	Períodos			
		1	2	3	4
D15	cm1	3	10	2	6
	cm2	6	2	10	3
	sm1	80	60	90	150
	sm2	40	100	60	70
	dm	10	20	40	30
	qm	0	0	0	0
	km	0	0	0	0
D23	cm1	0	0	0	0
	cm2	0	0	0	0
	sm1	9	14	23	15
	sm2	9	12	17	12

D26	dm	10	8	12	10
	qm	0	0	0	0
	km	0	0	0	0
	cm1	0	0	0	0
	cm2	0	0	0	0
	sm1	7	12	25	15
	sm2	7	4	5	12
D33	dm	10	8	11	9
	qm	2	4	6	2
	km	2	4	6	2
	cm1	0	0	0	0
	cm2	0	0	0	0
	sm1	5	3	2	8
	sm2	3	6	0	4
	dm	10	12	8	6
	qm	3	4	2	6
	km	2	3	1	4

Fonte: Autor.

As demandas de objetos e itens, mostradas nas Tabelas 1 e 2, respectivamente, são iguais para os três conjuntos de testes.

Tabela 3: Número de unidades do item no padrão de corte (a_{ij}).

Conjuntos de testes	Padrões de corte	Itens						
		cm1	cm2	sm1	sm2	dm	qm	km
Primeiro	1	3	0	4	0	0	0	0
	2	0	2	0	4	0	0	0
	3	0	0	0	0	16	0	0
	4	0	0	0	0	0	5	0
	5	0	0	0	0	0	0	5
Segundo	1	3	0	4	0	0	0	0
	2	0	2	0	4	0	0	0
	3	0	0	0	0	16	0	0
	4	0	0	0	0	0	5	0
	5	0	0	0	0	0	0	5
	6	0	0	24	0	0	0	0
	7	0	0	0	24	0	0	0
	8	36	18	0	0	0	0	0
	9	2	0	0	4	0	0	0
	10	0	3	4	0	0	0	0
Terceiro	1	3	0	4	0	0	0	0
	2	0	2	0	4	0	0	0
	3	0	0	0	0	16	0	0
	4	0	0	0	0	0	5	0
	5	0	0	0	0	0	0	5

6	0	0	24	0	0	0	0
7	0	0	0	24	0	0	0
8	36	18	0	0	0	0	0
9	2	0	0	4	0	0	0
10	0	3	4	0	0	0	0
11	6	0	19	0	0	0	0
12	6	0	0	0	8	0	0
13	10	18	0	0	0	0	0
14	0	0	0	5	0	5	0
15	0	0	0	3	0	0	3

Fonte: Autor.

Tabela 4: Custos de compra de objetos (pc_{kt} , em R\$) – Todos conjuntos de testes.

		Períodos			
		1	2	3	4
Objetos	D15	1261,10	1268,20	1273,50	1279,70
	D23	1670,00	1679,40	1686,40	1694,60
	D26	1934,00	1944,90	1953,00	1962,50
	D33	2581,30	2595,80	2606,60	2619,30

Fonte: Autor.

Os custos de compra de objetos, mostrados na Tabela 4, são iguais para os três conjuntos de testes.

Tabela 5: Custos de preparação da máquina (sc_{kt} , em R\$) – Todos conjuntos de testes.

		Períodos			
		1	2	3	4
Objetos	D15	20,00	24,00	26,00	30,00
	D23	26,00	31,20	33,80	39,00
	D26	30,00	36,00	39,00	45,00
	D33	40,00	48,00	52,00	60,00

Fonte: Autor.

Os custos de preparação da máquina, mostrados na Tabela 5, são os mesmos para os três conjuntos de testes.

Tabela 6: Custos de corte de objetos (cc_{kt} , em R\$) – Todos conjuntos de testes.

		Períodos			
		1	2	3	4
Objetos	D15	40,00	48,00	52,00	60,00
	D23	52,00	62,40	67,60	78,00
	D26	60,00	72,00	78,00	90,00

D33	80,00	96,00	104,00	120,00
------------	-------	-------	--------	--------

Fonte: Autor.

Os custos de corte de objetos, mostrados na Tabela 6, são iguais para os três conjuntos de testes.

Tabela 7: Tempos de preparação (st_j , em minutos) – Primeiro conjunto de testes.

Padrões de corte				
1	2	3	4	5
3	4	2	2	2

Fonte: Autor.

Tabela 8: Tempos de preparação (st_j , em minutos) – Segundo conjunto de testes.

Padrões de corte									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	2	2	2	2	2	4	3	3

Fonte: Autor.

Tabela 9: Tempos de preparação (st_j , em minutos) – Terceiro conjunto de testes.

Padrões de corte														
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	4	2	2	2	2	2	4	3	3	3	4	4	5	5

Fonte: Autor.

Os tempos de preparação para os cinco novos padrões de corte do terceiro conjunto de testes, representados na Tabela 9, tiveram que ser estimados com base nas dimensões dos itens produzidos em cada padrão, uma vez que a indústria utiliza dez padrões de corte.

Tabela 10: Tempos de produção (pt_{ij} , em minutos) – Primeiro conjunto de testes.

		Padrões de corte				
		1	2	3	4	5
Objetos	D15	11,8	12,3	63	34	40
	D23	13	13,6	69,4	37,3	44
	D26	13,6	14,2	73	39,2	46,2
	D33	15	15,7	80,2	43,1	50,8

Fonte: Autor.

Tabela 11: Tempos de produção (pt_{kj} , em minutos) – Segundo conjunto de testes.

		Padrões de corte									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Objetos	D15	11,8	12,3	63	34	40	53,5	60,4	55,3	12	12,3
	D23	13	13,6	69,4	37,3	44	58,9	66,4	60,8	13,2	13,5
	D26	13,6	14,2	73	39,2	46,2	61,8	69,7	63,8	13,9	14,2
	D33	15	15,7	80,2	43,1	50,8	68	76,7	70	15,2	15,6

Fonte: Autor.

Tabela 12: Tempos de produção (pt_{kj} , em minutos) – Terceiro conjunto de testes.

		Padrões de corte														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Objetos	D15	11,8	12,3	63	34	40	53,5	60,4	55,3	12	12,3	48,2	37,4	30,1	46,6	31,5
	D23	13	13,6	69,4	37,3	44	58,9	66,4	60,8	13,2	13,5	53	41,1	33,1	51,2	34,7
	D26	13,6	14,2	73	39,2	46,2	61,8	69,7	63,8	13,9	14,2	55,6	43,2	34,8	53,8	36,4
	D33	15	15,7	80,2	43,1	50,8	68	76,7	70	15,2	15,6	61,2	47,5	38,2	59,2	40,1

Fonte: Autor.

Os tempos de produção para o primeiro e segundo conjuntos de testes são mostrados nas Tabelas 10 e 11, respectivamente, e são calculados levando em consideração as dimensões dos itens que serão cortados em cada padrão, bem como suas quantidades, sendo que, conforme a densidade aumenta, o material fica mais duro, resultando em um tempo maior para efetuar a operação de corte. Já os tempos de produção para os cinco novos padrões de corte do terceiro conjunto de testes, representados na Tabela 12, foram novamente estimados, uma vez que a indústria utiliza dez padrões de corte.

Tabela 13: Custos de armazenamento de objetos (hc_{kt} , em R\$) – Todos conjuntos de testes.

		Períodos			
		1	2	3	4
Objetos	D15	10,00	12,00	13,00	15,00
	D23	13,00	15,60	16,90	19,50
	D26	15,00	18,00	19,50	22,50
	D33	20,00	24,00	26,00	30,00

Fonte: Autor.

Tabela 14: Custos de armazenamento de itens (hc_{kt}^i , em R\$) – Todos conjuntos de testes.

Objetos	Itens	Períodos			
		1	2	3	4
D15	cm1	0,20	0,24	0,26	0,30
	cm2	0,30	0,36	0,39	0,45
	sm1	1,00	1,20	1,30	1,50
	sm2	1,20	1,44	1,56	1,80
	dm	2,00	2,40	2,60	3,00
	qm	3,00	3,60	3,90	4,50
	km	4,00	4,80	5,20	6,00
D23	cm1	0,26	0,31	0,34	0,39
	cm2	0,39	0,47	0,51	0,59
	sm1	1,30	1,56	1,69	1,95
	sm2	1,56	1,87	2,03	2,34
	dm	2,60	3,12	3,38	3,90
	qm	3,90	4,68	5,07	5,85
	km	5,20	6,24	6,76	7,80
D26	cm1	0,30	0,36	0,39	0,45
	cm2	0,45	0,54	0,58	0,67
	sm1	1,50	1,80	1,95	2,25
	sm2	1,80	2,16	2,34	2,70
	dm	3,00	3,60	3,90	4,50
	qm	4,50	5,40	5,85	6,75
	km	6,00	7,20	7,80	9,00
D33	cm1	0,40	0,48	0,52	0,60
	cm2	0,60	0,72	0,78	0,90
	sm1	2,00	2,40	2,60	3,00
	sm2	2,40	2,88	3,12	3,60
	dm	4,00	4,80	5,20	6,00
	qm	6,00	7,20	7,80	9,00
	km	8,00	9,60	10,40	12,00

Fonte: Autor.

Os custos de armazenamento de objetos e itens, mostrados nas Tabelas 13 e 14, respectivamente, são iguais para todos os conjuntos de testes. Os custos de armazenamento de objetos aumentam com a densidade, uma vez que objetos com densidades maiores são mais caros. Já os custos de armazenamento de itens são calculados com base nas dimensões de cada um dos itens e no espaço ocupado no armazém por cada um destes, sendo que estes custos também aumentam com a densidade.

Tabela 15: Estoques de segurança de objetos (ES_{kt}) – Todos conjuntos de testes.

		Períodos			
		1	2	3	4
Objetos	D15	0	0	0	0
	D23	2	2	2	2
	D26	0	0	0	0
	D33	0	0	0	0

Fonte: Autor.

Tabela 16: Estoques de segurança de itens (ES_{kt}^i) – Todos conjuntos de testes.

Objetos	Itens	Períodos			
		1	2	3	4
D15	cm1	0	0	0	0
	cm2	0	0	0	0
	sm1	0	0	0	0
	sm2	0	0	0	0
	dm	0	0	0	0
	qm	0	0	0	0
	km	0	0	0	0
D23	cm1	0	0	0	0
	cm2	0	0	0	0
	sm1	50	50	50	50
	sm2	50	50	50	50
	dm	20	20	20	20
	qm	0	0	0	0
	km	0	0	0	0
D26	cm1	0	0	0	0
	cm2	0	0	0	0
	sm1	0	0	0	0
	sm2	0	0	0	0
	dm	0	0	0	0
	qm	0	0	0	0
	km	0	0	0	0
D33	cm1	0	0	0	0
	cm2	0	0	0	0
	sm1	0	0	0	0
	sm2	0	0	0	0
	dm	0	0	0	0
	qm	0	0	0	0
	km	0	0	0	0

Fonte: Autor.

As Tabelas 15 e 16 apresentam os valores dos estoques de segurança de objetos e itens, respectivamente, sendo esses os mesmos para os três conjuntos de testes.

5.2. Resultados

Nesta seção, são apresentadas as soluções obtidas resolvendo-se o modelo (27) – (35) e as soluções adotadas pela indústria para o primeiro e segundo conjuntos de testes (com 5 e 10 padrões de corte, respectivamente), além das soluções obtidas pelo modelo para o terceiro conjunto de testes (com 15 padrões de corte). O objetivo do estudo computacional é analisar o comportamento do modelo proposto, podendo comparar com as soluções adotadas e demonstrar quanto os custos da função objetivo seriam reduzidos ao aumentar o número de padrões de corte. O modelo (27) – (35) foi implementado na linguagem de modelagem algébrica GAMS e resolvido pelo CPLEX (versão 12.6.3.0), *solver* de otimização linear, inteira, mista e quadrática. Todos os testes computacionais foram realizados em um computador i7 com 3,6 GHz, 16 GB de RAM e sistema operacional Windows 10 Pro.

Nas Tabelas 17 a 31, a seguir, tanto para o primeiro conjunto de testes quanto para o segundo, são mostradas as soluções obtidas pelo modelo para as variáveis de decisão e as soluções adotadas pela indústria, estando estas entre parênteses nas respectivas tabelas, sendo apresentados também os resultados do modelo para o terceiro conjunto de testes. Por último, são apresentados, na Figura 7, os valores obtidos para a função objetivo nos dois primeiros conjuntos de testes e para os casos computacional e prático, além dos valores computacionais referentes ao terceiro conjunto de testes. Vale a pena mencionar que os tempos computacionais CPLEX para o primeiro, segundo e terceiro conjuntos de testes foram de 0,08s, 0,39s e 7,3s, respectivamente.

As Tabelas 17 e 18 apresentam as soluções obtidas pelo modelo e as soluções adotadas pela indústria para y_{kt} , isto é, a quantidade comprada de objetos com densidade k no período t , para o primeiro e segundo conjuntos de testes, respectivamente, enquanto que a Tabela 19 mostra os resultados do modelo para o terceiro conjunto de testes. É possível observar que as soluções obtidas pelo modelo são sempre menores ou iguais às soluções adotadas pela indústria nos dois primeiros conjuntos de testes. Pode-se observar que, considerando todo o horizonte de planejamento, houve, em média, uma diminuição em ambas as soluções ao passar do primeiro para o segundo conjunto de testes, ocorrendo também uma pequena diminuição ao passar do segundo conjunto de testes para o terceiro. Tal comportamento pode ser explicado pelo fato de que um maior número de padrões de corte diferentes está disponível para ser utilizado, resultando em um maior número de combinações possíveis para o corte, melhor apro-

veitamento de material, menos desperdício e, dessa forma, uma menor necessidade de compra de objetos.

Tabela 17: Quantidade comprada de objetos (y_{kt}) – Primeiro conjunto de testes.

		Períodos			
		1	2	3	4
Objetos	D15	183 (200)	16 (19)	19 (24)	10 (12)
	D23	68 (75)	14 (17)	17 (18)	18 (20)
	D26	40 (44)	8 (10)	7 (7)	12 (13)
	D33	18 (19)	1 (2)	4 (7)	4 (4)

Fonte: Autor.

Tabela 18: Quantidade comprada de objetos (y_{kt}) – Segundo conjunto de testes.

		Períodos			
		1	2	3	4
Objetos	D15	35 (40)	16 (17)	34 (34)	10 (12)
	D23	23 (24)	14 (19)	19 (23)	18 (20)
	D26	21 (21)	8 (9)	9 (12)	12 (13)
	D33	11 (12)	1 (3)	4 (4)	4 (5)

Fonte: Autor.

Tabela 19: Quantidade comprada de objetos (y_{kt}) – Terceiro conjunto de testes.

		Períodos			
		1	2	3	4
Objetos	D15	36	16	33	10
	D23	23	14	19	18
	D26	19	8	10	12
	D33	10	1	4	4

Fonte: Autor.

As Tabelas 20 e 21 contêm as soluções obtidas pelo modelo e as soluções adotadas pela indústria para s_{kt} , ou seja, o estoque do objeto k no final do período t , para o primeiro e segundo conjuntos de testes, respectivamente, enquanto que a Tabela 22 apresenta os resultados do modelo para o terceiro conjunto de testes. Ao olhar para os resultados destas tabelas, constata-se novamente que as soluções obtidas pelo modelo são sempre menores ou iguais às soluções adotadas pela indústria nos dois primeiros conjuntos de testes, uma vez que a prática acaba por considerar outros períodos além do último período (4). Observa-se também que as soluções obtidas pelo modelo se igualam aos estoques de segurança de objetos (Tabela 15)

nos três conjuntos de testes e as soluções obtidas pelo modelo e adotadas pela indústria permanecem, em média, praticamente as mesmas ao passar do primeiro para o segundo conjunto de testes.

Tabela 20: Estoque de objetos (s_{it}) – Primeiro conjunto de testes.

		Períodos			
		1	2	3	4
Objetos	D15	0 (3)	0 (4)	0 (1)	0 (0)
	D23	2 (5)	2 (4)	2 (2)	2 (2)
	D26	0 (3)	0 (3)	0 (2)	0 (1)
	D33	0 (1)	0 (0)	0 (1)	0 (0)

Fonte: Autor.

Tabela 21: Estoque de objetos (s_{it}) – Segundo conjunto de testes.

		Períodos			
		1	2	3	4
Objetos	D15	0 (5)	0 (4)	0 (1)	0 (0)
	D23	2 (2)	2 (6)	2 (3)	2 (2)
	D26	0 (2)	0 (1)	0 (4)	0 (0)
	D33	0 (1)	0 (0)	0 (2)	0 (0)

Fonte: Autor.

Tabela 22: Estoque de objetos (s_{it}) – Terceiro conjunto de testes.

		Períodos			
		1	2	3	4
Objetos	D15	0	0	0	0
	D23	2	2	2	2
	D26	0	0	0	0
	D33	0	0	0	0

Fonte: Autor.

As Tabelas 23 e 24 mostram, para o primeiro e segundo conjuntos de testes, respectivamente, as soluções obtidas pelo modelo e as soluções adotadas pela indústria para w_{jt} (variável binária que indica a preparação ou não da máquina para utilizar o padrão de corte j no período t), ao passo que a Tabela 25 traz os resultados do modelo para o terceiro conjunto de testes. Olhando para a modelagem matemática, sabe-se que w_{jt} se relaciona com a variável x_{kjt} por meio das restrições (30), assim, caso ocorra produção, $w_{jt} = 1$ e $x_{kjt} \neq 0$, caso contrário, $w_{jt} = 0$ e $x_{kjt} = 0$, sendo que tal relação pode ser observada nas Tabelas 23 a 28.

Além disso, muitos resultados obtidos pelo modelo e adotados pela indústria são iguais nos dois primeiros conjuntos de testes, mas existe mais preparação na prática, principalmente no período 2 do segundo conjunto, já que há produção nesse período, ao passo que quase não há preparação no período 4. Através dos resultados de w_{jt} nas Tabelas 23, 24 e 25, percebe-se que, conforme o número de padrões de corte aumenta ao passar do primeiro conjunto de testes para o segundo e depois para o terceiro, aumentam-se também as possibilidades de corte, fazendo com que uma variável binária referente a um certo período e padrão de corte, antes preparada (igual a um), não seja mais ao passar de um conjunto de testes para o outro, devido ao aumento do número de padrões e das combinações possíveis para o corte.

Tabela 23: Variável binária de preparação ou não da máquina (w_{jt}) – Primeiro conjunto de testes.

		Períodos			
		1	2	3	4
Padrões de corte	1	1 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (1)
	2	1 (1)	0 (0)	0 (1)	0 (0)
	3	1 (1)	0 (0)	1 (1)	0 (0)
	4	1 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	5	1 (1)	0 (0)	0 (1)	0 (0)

Fonte: Autor.

Tabela 24: Variável binária de preparação ou não da máquina (w_{jt}) – Segundo conjunto de testes.

		Períodos			
		1	2	3	4
Padrões de corte	1	0 (1)	0 (1)	0 (1)	0 (0)
	2	1 (1)	0 (1)	0 (1)	0 (0)
	3	1 (1)	0 (1)	1 (1)	0 (0)
	4	1 (1)	0 (1)	0 (0)	0 (0)
	5	1 (1)	0 (1)	0 (0)	0 (0)
	6	1 (1)	0 (1)	1 (1)	0 (0)
	7	1 (1)	0 (1)	1 (1)	0 (0)
	8	1 (0)	0 (1)	0 (1)	0 (0)
	9	0 (1)	0 (1)	0 (1)	0 (0)
	10	0 (1)	0 (1)	0 (1)	0 (0)

Fonte: Autor.

Tabela 25: Variável binária de preparação ou não da máquina (w_{jt}) – Terceiro conjunto de testes.

		Períodos			
		1	2	3	4
Padrões de corte	1	0	0	0	0
	2	1	0	0	0
	3	1	0	1	0
	4	0	0	0	0
	5	1	0	0	0
	6	1	0	1	0
	7	1	0	1	0
	8	1	0	0	0
	9	0	0	0	0
	10	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	12	1	0	0	0
	13	0	0	0	0
	14	1	0	0	0
	15	0	0	0	0

Fonte: Autor.

As Tabelas 26 e 27 apresentam as soluções obtidas pelo modelo e as soluções adotadas pela indústria para x_{kjt} , número de objetos com densidade k cortados de acordo com o padrão de corte j no período t , para o primeiro e segundo conjuntos de testes, respectivamente, enquanto que a Tabela 28 mostra as soluções obtidas pelo modelo para o terceiro conjunto de testes. Nota-se ao olhar para os resultados das Tabelas 26 e 27 que, em média, os números de objetos cortados do modelo são menores que os números de objetos cortados da indústria nos dois primeiros conjuntos de testes. Ademais, percebe-se que, em média, houve diminuições nas soluções obtidas pelo modelo e nas soluções adotadas pela indústria ao passar do primeiro para o segundo conjunto de testes, ocorrendo também, em média, uma diminuição nas soluções obtidas pelo modelo entre o segundo e o terceiro conjunto de testes, dado que mais padrões de corte serão usados, levando a um maior número de combinações possíveis para o corte, melhor aproveitamento de material, menos desperdício e, assim, menos objetos sendo cortados.

Tabela 26: Número de objetos cortados (x_{kjt}) – Primeiro conjunto de testes.

Objetos	Padrões de corte	Períodos			
		1	2	3	4
D15	1	95 (106)	0 (0)	0 (0)	0 (5)

	2	68 (77)	0 (0)	0 (7)	0 (0)
	3	2 (5)	0 (0)	5 (9)	0 (0)
	4	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	5	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
D23	1	28 (33)	0 (0)	0 (0)	0 (4)
	2	25 (27)	0 (0)	0 (3)	0 (0)
	3	3 (4)	0 (0)	1 (1)	0 (0)
	4	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	5	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
D26	1	15 (20)	0 (0)	0 (0)	0 (2)
	2	7 (9)	0 (0)	0 (2)	0 (0)
	3	2 (6)	0 (0)	1 (3)	0 (0)
	4	3 (8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	5	3 (3)	0 (0)	0 (7)	0 (0)
D33	1	5 (5)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	2	4 (5)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	3	2 (8)	0 (0)	1 (4)	0 (0)
	4	3 (7)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	5	2 (3)	0 (0)	0 (3)	0 (0)

Fonte: Autor.

Tabela 27: Número de objetos cortados (x_{kjt}) – Segundo conjunto de testes.

Objetos	Padrões de corte	Períodos			
		1	2	3	4
D15	1	0 (5)	0 (2)	0 (4)	0 (0)
	2	2 (2)	0 (8)	0 (6)	0 (0)
	3	2 (3)	0 (6)	5 (9)	0 (0)
	4	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	5	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	6	6 (6)	0 (3)	10 (12)	0 (0)
	7	6 (7)	0 (8)	5 (5)	0 (0)
	8	1 (0)	0 (2)	0 (2)	0 (0)
	9	0 (2)	0 (4)	0 (3)	0 (0)
	10	0 (3)	0 (3)	0 (1)	0 (0)
D23	1	0 (2)	0 (6)	0 (3)	0 (0)
	2	1 (2)	0 (4)	0 (4)	0 (0)
	3	3 (3)	0 (2)	1 (2)	0 (0)
	4	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	5	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	6	4 (4)	0 (5)	1 (7)	0 (0)
	7	3 (4)	0 (6)	1 (2)	0 (0)
	8	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	9	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	10	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
D26	1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	2	1 (2)	0 (0)	0 (0)	0 (0)

	3	2 (2)	0 (0)	1 (2)	0 (0)
	4	3 (1)	0 (2)	0 (0)	0 (0)
	5	3 (1)	0 (2)	0 (0)	0 (0)
	6	1 (1)	0 (1)	2 (1)	0 (0)
	7	1 (1)	0 (1)	0 (0)	0 (0)
	8	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	9	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	10	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
D33	1	0 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	2	0 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	3	2 (1)	0 (2)	1 (1)	0 (0)
	4	3 (1)	0 (3)	0 (0)	0 (0)
	5	2 (1)	0 (1)	0 (0)	0 (0)
	6	1 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	7	1 (0)	0 (1)	0 (0)	0 (0)
	8	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	9	0 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	10	0 (2)	0 (0)	0 (0)	0 (0)

Fonte: Autor.

Tabela 28: Número de objetos cortados (x_{kjt}) – Terceiro conjunto de testes.

Objetos	Padrões de corte	Períodos			
		1	2	3	4
D15	1	0	0	0	0
	2	2	0	0	0
	3	2	0	4	0
	4	0	0	0	0
	5	0	0	0	0
	6	6	0	10	0
	7	6	0	5	0
	8	1	0	0	0
	9	0	0	0	0
	10	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	12	1	0	0	0
	13	0	0	0	0
	14	0	0	0	0
	15	0	0	0	0
D23	1	0	0	0	0
	2	1	0	0	0
	3	3	0	1	0
	4	0	0	0	0
	5	0	0	0	0
	6	4	0	1	0
	7	3	0	1	0
	8	0	0	0	0

	9	0	0	0	0
	10	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	12	0	0	0	0
	13	0	0	0	0
	14	0	0	0	0
	15	0	0	0	0
D26	1	0	0	0	0
	2	0	0	0	0
	3	1	0	1	0
	4	0	0	0	0
	5	3	0	0	0
	6	1	0	2	0
	7	0	0	1	0
	8	0	0	0	0
	9	0	0	0	0
	10	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	12	1	0	0	0
	13	0	0	0	0
	14	3	0	0	0
	15	0	0	0	0
D33	1	0	0	0	0
	2	0	0	0	0
	3	1	0	1	0
	4	0	0	0	0
	5	2	0	0	0
	6	1	0	0	0
	7	0	0	0	0
	8	0	0	0	0
	9	0	0	0	0
	10	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	12	1	0	0	0
	13	0	0	0	0
	14	3	0	0	0
	15	0	0	0	0

Fonte: Autor.

As Tabelas 29 e 30 trazem as soluções obtidas pelo modelo e as soluções adotadas pela indústria para r_{kt}^i , estoque de itens do tipo i com densidade k no final do período t , para o primeiro e segundo conjuntos de testes, respectivamente, ao passo que a Tabela 31 apresenta as soluções obtidas pelo modelo para o terceiro conjunto de testes. Analisando os resultados das tabelas, verifica-se que, em média, as soluções obtidas pelo modelo são menores que as

soluções adotadas pela indústria nos dois primeiros conjuntos de testes, com mais estoque de itens na prática do que no modelo, devido ao fato da prática considerar outros períodos após o período 4. Além disso, ocorreram, em média, diminuições em ambas soluções ao passar do primeiro para o segundo conjunto de testes e nas soluções obtidas pelo modelo ao passar do segundo para o terceiro conjunto de testes, visto que mais padrões de corte serão utilizados, resultando em um maior número de combinações possíveis para o corte, existindo agora melhores padrões de corte do que antes, fazendo com que, assim, menos itens sejam cortados sem necessidade e armazenados.

Tabela 29: Estoque de itens (r_{kt}^i) – Primeiro conjunto de testes.

Objetos	Itens	Períodos			
		1	2	3	4
D15	cm1	282 (315)	272 (305)	270 (303)	264 (312)
	cm2	130 (148)	128 (146)	118 (150)	115 (147)
	sm1	300 (344)	240 (284)	150 (194)	0 (64)
	sm2	232 (268)	132 (168)	72 (136)	2 (66)
	dm	22 (70)	2 (50)	42 (154)	12 (124)
	qm	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	km	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
D23	cm1	84 (99)	84 (99)	84 (99)	84 (111)
	cm2	50 (54)	50 (54)	50 (60)	50 (60)
	sm1	103 (123)	89 (109)	66 (86)	51 (87)
	sm2	91 (99)	79 (87)	62 (82)	50 (70)
	dm	38 (54)	30 (46)	34 (50)	24 (40)
	qm	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	km	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
D26	cm1	45 (60)	45 (60)	45 (60)	45 (66)
	cm2	14 (18)	14 (18)	14 (22)	14 (22)
	sm1	53 (73)	41 (61)	16 (36)	1 (29)
	sm2	21 (29)	17 (25)	12 (28)	0 (16)
	dm	22 (86)	14 (78)	19 (115)	10 (106)
	qm	13 (38)	9 (34)	3 (28)	1 (26)
	km	13 (13)	9 (9)	3 (38)	1 (36)
D33	cm1	15 (15)	15 (15)	15 (15)	15 (15)
	cm2	8 (10)	8 (10)	8 (10)	8 (10)
	sm1	15 (15)	12 (12)	10 (10)	2 (2)
	sm2	13 (17)	7 (11)	7 (11)	3 (7)
	dm	22 (118)	10 (106)	18 (162)	12 (156)
	qm	12 (32)	8 (28)	6 (26)	0 (20)
	km	8 (13)	5 (10)	4 (24)	0 (20)

Fonte: Autor.

Tabela 30: Estoque de itens (r_{kt}^i) – Segundo conjunto de testes.

Objetos	Itens	Períodos			
		1	2	3	4
D15	cm1	33 (16)	23 (92)	21 (180)	15 (174)
	cm2	16 (7)	14 (66)	4 (107)	1 (104)
	sm1	64 (96)	4 (128)	154 (346)	4 (196)
	sm2	112 (144)	12 (284)	72 (380)	2 (310)
	dm	22 (38)	2 (114)	42 (218)	12 (188)
	qm	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	km	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
D23	cm1	0 (6)	0 (24)	0 (33)	0 (33)
	cm2	2 (4)	2 (12)	2 (20)	2 (20)
	sm1	87 (95)	73 (225)	74 (382)	59 (367)
	sm2	67 (95)	55 (243)	62 (290)	50 (278)
	dm	38 (38)	30 (62)	34 (82)	24 (72)
	qm	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	km	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
D26	cm1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	cm2	2 (4)	2 (4)	2 (4)	2 (4)
	sm1	17 (17)	5 (29)	28 (28)	13 (13)
	sm2	21 (25)	17 (45)	12 (40)	0 (28)
	dm	22 (22)	14 (14)	19 (35)	10 (26)
	qm	13 (3)	9 (9)	3 (3)	1 (1)
	km	13 (3)	9 (9)	3 (3)	1 (1)
D33	cm1	0 (5)	0 (5)	0 (5)	0 (5)
	cm2	0 (8)	0 (8)	0 (8)	0 (8)
	sm1	19 (31)	16 (28)	14 (26)	6 (18)
	sm2	21 (5)	15 (23)	15 (23)	11 (19)
	dm	22 (6)	10 (26)	18 (34)	12 (28)
	qm	12 (2)	8 (13)	6 (11)	0 (5)
	km	8 (3)	5 (5)	4 (4)	0 (0)

Fonte: Autor.

Tabela 31: Estoque de itens (r_{kt}^i) – Terceiro conjunto de testes.

Objetos	Itens	Períodos			
		1	2	3	4
D15	cm1	39	29	27	21
	cm2	16	14	4	1
	sm1	64	4	154	4
	sm2	112	12	72	2
	dm	30	10	34	4
	qm	0	0	0	0
	km	0	0	0	0
D23	cm1	0	0	0	0
	cm2	2	2	2	2

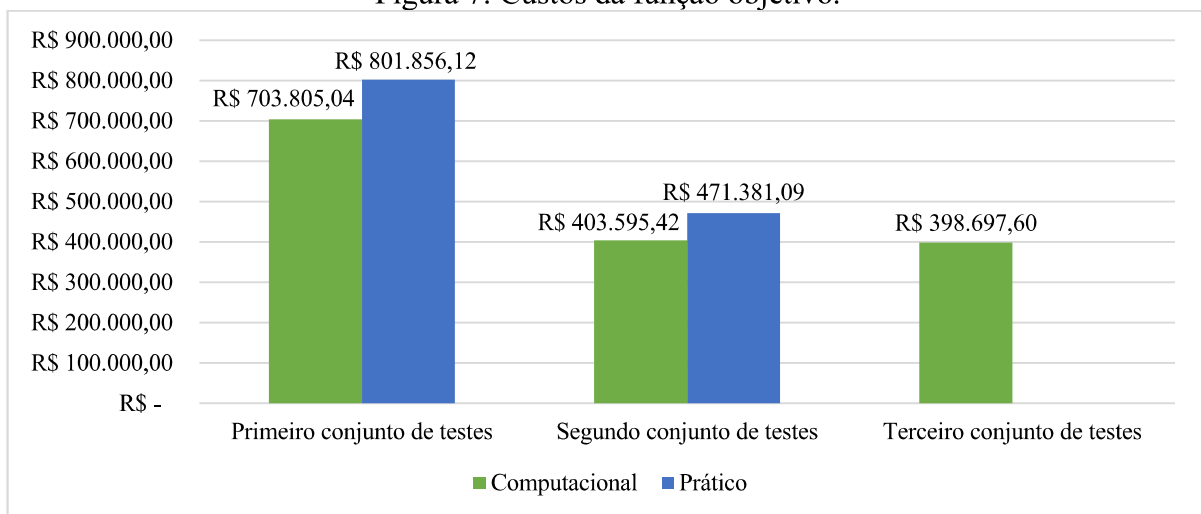
	sm1	87	73	74	59
	sm2	67	55	62	50
	dm	38	30	34	24
	qm	0	0	0	0
	km	0	0	0	0
D26	cm1	6	6	6	6
	cm2	0	0	0	0
	sm1	17	5	28	13
	sm2	8	4	23	11
	dm	14	6	11	2
	qm	13	9	3	1
	km	13	9	3	1
D33	cm1	6	6	6	6
	cm2	0	0	0	0
	sm1	19	16	14	6
	sm2	12	6	6	2
	dm	14	2	10	4
	qm	12	8	6	0
	km	8	5	4	0

Fonte: Autor.

Assim, através dos resultados das Tabelas 17 a 31, observa-se que a capacidade do modelo está folgada, já que não há objetos sendo cortados no último período, e o modelo opta por adiantar a produção e estocar os itens.

Na Figura 7, são mostrados os valores obtidos para os custos da função objetivo nos dois primeiros conjuntos de testes e para os casos computacional e prático, além dos valores computacionais referentes ao terceiro conjunto de testes.

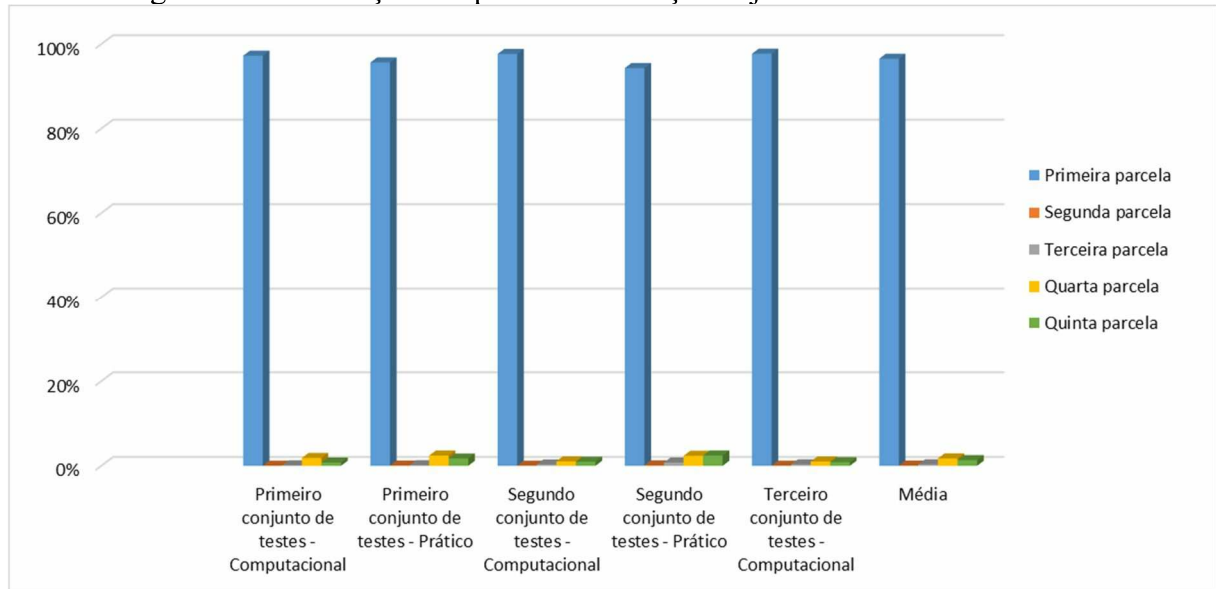
Figura 7: Custos da função objetivo.



Fonte: Autor.

Já a Figura 8 representa a contribuição de cada uma das cinco parcelas da função objetivo nos custos dos cinco casos analisados, além de suas médias.

Figura 8: Contribuição das parcelas da função objetivo nos casos analisados.



Fonte: Autor.

Embora algumas soluções obtidas pelo modelo e adotadas pela indústria, apresentadas nas Tabelas 17 a 31, se igualem nos conjuntos de testes, ao comparar os valores obtidos para os custos da função objetivo entre diferentes conjuntos e entre os casos computacional e prático, as diferenças ficam mais evidentes, como podem ser vistas na Figura 7. O objetivo de considerar três conjuntos de testes com números de padrões de corte diferentes é justamente dimensionar quanto os resultados podem ser melhorados ao aumentar o número de padrões de 5 para 10, e posteriormente, de 10 para 15. Ao observar os custos da função objetivo na Figura 7, verifica-se que houve uma redução de 42,66% nos custos para o caso computacional e uma redução de 41,21% nos custos para o caso prático, ao passar de 5 padrões de corte (primeiro conjunto de testes) para 10 padrões de corte (segundo conjunto de testes), além de uma redução de 1,21% nos custos para o caso computacional ao passar de 10 padrões de corte (segundo conjunto de testes) para 15 padrões de corte (terceiro conjunto de testes), verificando-se, assim, uma coerência, já que haverá um maior número de combinações possíveis para o corte de espuma, resultando em menos desperdício e melhor aproveitamento de material, além de uma redução nos custos. Ao comparar os custos computacional e prático, verificou-se uma diminuição de 12,23% e 14,38% para o primeiro e segundo conjuntos de testes, respectivamente,

em relação aos valores fornecidos pela função objetivo, evidenciando, assim, o bom desempenho do modelo para o referido problema. Além disso, ao analisar a contribuição de cada uma das cinco parcelas da função objetivo nos custos dos casos analisados, foi possível constatar, através da Figura 8, que a quase totalidade dos custos é dada pela primeira parcela da função objetivo ($PC_{kt}Y_{kt}$), relacionada à compra de objetos, com um valor médio de 96,53% dos custos totais. Já a segunda maior contribuição é dada pela quarta parcela da função objetivo ($CC_{kjt}x_{kjt}$), com um valor médio de 1,74%, e posteriormente, pela quinta parcela ($hc_{kt}^j r_{kt}^j$), com um valor médio de 1,34%, sendo que as duas menores contribuições são da terceira parcela ($SC_{kjt}w_{jt}$) e da segunda parcela ($hc_{kt}s_{kt}$) da função objetivo, com valores médios de 0,34% e 0,05%, respectivamente.

5.3. Testes Computacionais Adicionais

Outros testes computacionais foram realizados a fim de analisar o comportamento do modelo proposto no capítulo 4 para diferentes casos. Um gerador aleatório de dados foi utilizado no GAMS para que fossem criadas 36 classes de problemas, cada uma com 10 instâncias, totalizando 360 instâncias. Os detalhes de como essas classes foram construídas e os resultados obtidos serão mostrados a seguir.

Com o intuito de realizar os testes computacionais adicionais, alguns parâmetros foram fixados, tais como:

- Capacidade da máquina de corte: $Cap_t = 9600\text{min}$ e 14400min (considerando a utilização de uma máquina a mais);
- Número de padrões de corte: $N = 5, 10$ e 15 (sendo esses iguais aos padrões de corte utilizados nas duas últimas seções).

Outros parâmetros foram gerados aleatoriamente, com uma distribuição uniforme, nos seguintes intervalos para definir as classes de problemas:

- Demanda de objetos:
 - Média: $d_{kt} \in [6, 9]$ (faixa correspondente à aproximadamente 33% e 50% do intervalo de variação dos dados reais da seção 5.1);

- Baixa: $d_{kt} \in [1, 5]$ (faixa correspondente à aproximadamente 0% e 25% do intervalo de variação dos dados reais da seção 5.1);
- Demanda de itens:
 - Alta: $d_{kt}^i \in [76, 134]$ (faixa correspondente à aproximadamente 51% e 89% do intervalo de variação dos dados reais da seção 5.1);
 - Média: $d_{kt}^i \in [50, 75]$ (faixa correspondente à aproximadamente 33% e 50% do intervalo de variação dos dados reais da seção 5.1);
 - Baixa: $d_{kt}^i \in [0, 37]$ (faixa correspondente à aproximadamente 0% e 25% do intervalo de variação dos dados reais da seção 5.1).

Assim, foram geradas 36 classes de problemas, cada uma contendo 10 instâncias. Todas essas classes de problemas foram definidas conforme a Tabela 32.

Tabela 32: Parâmetros das classes de instâncias.

Classe	Demanda de objetos	Demanda de itens	Capacidade	Número de padrões
1	baixa	baixa	9600min	5
2	baixa	baixa	9600min	10
3	baixa	baixa	9600min	15
4	baixa	baixa	14400min	5
5	baixa	baixa	14400min	10
6	baixa	baixa	14400min	15
7	baixa	média	9600min	5
8	baixa	média	9600min	10
9	baixa	média	9600min	15
10	baixa	média	14400min	5
11	baixa	média	14400min	10
12	baixa	média	14400min	15
13	média	baixa	9600min	5
14	média	baixa	9600min	10
15	média	baixa	9600min	15
16	média	baixa	14400min	5
17	média	baixa	14400min	10
18	média	baixa	14400min	15
19	média	média	9600min	5
20	média	média	9600min	10
21	média	média	9600min	15
22	média	média	14400min	5
23	média	média	14400min	10
24	média	média	14400min	15
25	baixa	alta	9600min	5

26	baixa	alta	9600min	10
27	baixa	alta	9600min	15
28	baixa	alta	14400min	5
29	baixa	alta	14400min	10
30	baixa	alta	14400min	15
31	média	alta	9600min	5
32	média	alta	9600min	10
33	média	alta	9600min	15
34	média	alta	14400min	5
35	média	alta	14400min	10
36	média	alta	14400min	15

Fonte: Autor.

Para os demais parâmetros do modelo (não mencionados acima) foram utilizados os mesmos valores mostrados na seção 5.1. O modelo proposto foi implementado e resolvido por meio do *solver* CPLEX no *software* GAMS para as 36 classes, com um tempo limite padrão de 1000s, sendo utilizadas 10 sementes iguais (uma para cada instância) para todas as classes de problemas, a fim de possibilitar uma melhor análise e comparação entre os resultados. A Tabela 33 apresenta as médias das 36 classes, além da média entre elas, referentes ao número de soluções inteiras obtidas pelo *solver* CPLEX considerando o limite de tempo; aos custos da função objetivo do modelo; ao *gap* relativo % (CPLEX); ao número de nós da árvore *branch-and-cut* necessários para obter tais soluções e ao tempo computacional CPLEX.

Tabela 33: Resultados dos testes computacionais adicionais.

Classe	Número de soluções inteiras	Custos da função objetivo (R\$)	Gap relativo % (CPLEX)	Número de nós	Tempo CPLEX (s)
1	10	898 922,02	0,00	0,00	0,08
2	10	485 159,41	0,00	11525,90	2,96
3	10	461 300,32	0,10	785559,80	417,06
4	10	898 922,02	0,00	0,00	0,07
5	10	485 159,41	0,00	5431,80	1,49
6	10	461 300,63	0,12	1272493,40	492,45
7	10	2 644 961,58	0,00	54,80	0,08
8	10	1 297 806,70	0,05	3017351,70	618,80
9	10	1 214 166,11	0,19	2682812,60	1000,00
10	10	2 637 512,10	0,00	0,00	0,08
11	10	1 297 567,52	0,03	2618354,00	417,50
12	10	1 214 080,08	0,16	3062555,50	1000,00
13	10	1 033 360,77	0,00	0,00	0,07
14	10	618 884,60	0,00	17892,30	3,56

15	10	584 263,37	0,14	1963716,60	816,65
16	10	1 033 360,77	0,00	0,00	0,06
17	10	618 884,60	0,00	42250,00	9,24
18	10	584 258,38	0,13	1572255,40	630,25
19	10	2 780 774,93	0,00	16,50	0,07
20	10	1 434 472,37	0,05	2532110,60	515,45
21	10	1 350 823,16	0,11	2465190,70	1000,00
22	10	2 774 185,24	0,00	0,00	0,05
23	10	1 434 249,84	0,04	2565229,90	443,50
24	10	1 350 762,69	0,15	2709945,40	973,94
25	0 (10)	-	-	-	-
26	0 (10)	-	-	-	-
27	0 (10)	-	-	-	-
28	7 (3)	4 346 312,57	0,00	493,86	0,11
29	10	2 113 244,51	0,03	3289096,50	606,88
30	10	1 977 614,02	0,21	3990954,00	1000,00
31	0 (10)	-	-	-	-
32	0 (10)	-	-	-	-
33	0 (10)	-	-	-	-
34	6 (4)	4 535 794,74	0,00	415,00	0,13
35	10	2 231 550,96	0,01	2101772,90	345,54
36	10	2 095 645,28	0,15	3471711,80	900,88
Média	8,14	1 563 176,69	0,06	1339306,37	373,23

Fonte: Autor.

Os números entre parênteses na Tabela 33 representam o número de instâncias em que o CPLEX não conseguiu encontrar uma solução factível no tempo limite. Observa-se que, para uma grande porcentagem das soluções inteiras encontradas, o pacote conseguir provar que se trata da solução ótima, restrita ao número de padrões utilizados. O *gap* relativo % (CPLEX) é fornecido pelo *solver* CPLEX ao resolver o modelo, sendo calculado através da seguinte equação:

$$Gap\ relativo\ \% (CPLEX) = \frac{100 \times (Solução\ MIP - Limitante\ Inferior)}{Solução\ MIP}$$

Ao observar as Tabelas 32 e 33, é possível verificar que:

- Para as classes de 1 a 3, 4 a 6, 7 a 9, e assim, sucessivamente, ou seja, classes com os mesmos tipos de demanda de objetos e itens, além da mesma capacidade, os custos da função objetivo sempre diminuem com o aumento do número de padrões de corte. Já o

número de soluções inteiras permanece constante, para a quase totalidade dos casos, ao aumentar o número de padrões de corte. Porém, tanto o *gap* relativo quanto o tempo computacional sempre aumentam com o acréscimo do número de padrões de corte, sendo que tal comportamento também é evidenciado em relação ao número de nós, com exceção para as classes 7 a 9 e 19 a 21. Esses fatos podem ser explicados pelo aumento da quantidade de dados no problema ao utilizar mais padrões de corte, levando a uma maior dificuldade computacional de resolução, gerando aumentos no *gap* relativo, no número de nós e no tempo computacional, ao passo que os custos da função objetivo acabam por diminuir ao utilizar mais padrões, uma vez que haverá um maior número de combinações possíveis para o corte de espuma, resultando em menos desperdício e melhor aproveitamento de material;

- Para as classes de 1 a 6, 7 a 12, 13 a 18, e assim, sucessivamente, isto é, classes com os mesmos tipos de demanda de objetos e itens, mas com variações na capacidade e número de padrões de corte, ao aumentar a capacidade da máquina de corte de 9600min para 14400min, o número de soluções inteiras se mantém constante para demandas baixas e médias de objetos e itens, apresentando grandes aumentos no número de soluções inteiras para as classes com altas demandas de itens (classes 25 a 30 e 31 a 36). Também é possível observar que, ao aumentar a capacidade, os custos da função objetivo tendem a diminuir de maneira geral, mostrando diferenças significativas para as classes com alta demanda de itens, uma vez que estas são infactíveis com capacidade de 9600min, mas passam a ser inteiras com o acréscimo na capacidade. Além disso, o número de nós e o tempo computacional são diretamente proporcionais, com poucas exceções;
- Para as classes com os mesmos tipos de demanda de objetos, capacidade e número de padrões de corte, variando as demandas de itens (classes 1, 7 e 25; 2, 8 e 26; 3, 9 e 27; dentre outras), nota-se que, ao aumentar a demanda de itens, aumentam-se também, para quase todas as classes, os custos da função objetivo, o *gap* relativo, o número de nós e o tempo computacional, sendo que as classes 25, 26, 27, 31, 32 e 33 se tornam infactíveis com altas demandas de itens e capacidade de 9600min. Entretanto, para classes com os mesmos tipos de demanda de objetos, capacidade e número de padrões de corte, o número de soluções inteiras apresenta comportamento inverso, uma vez

que, em geral, diminui ao passar da demanda de itens média para a demanda de itens alta;

- Para as classes com os mesmos tipos de demanda de itens, capacidade e número de padrões de corte, variando as demandas de objetos (classes 1 e 13, 2 e 14, 3 e 15, dentre outras), constata-se que, ao aumentar a demanda de objetos, aumentam-se também, para a grande maioria das classes, os custos da função objetivo, o *gap* relativo, o número de nós e o tempo computacional, sendo que as classes 25, 26, 27, 31, 32 e 33 são infactíveis com altas demandas de itens e capacidade de 9600min, independentemente da demanda de objetos. Entretanto, para classes com os mesmos tipos de demanda de itens, capacidade e número de padrões de corte, o número de soluções inteiras permanece inalterado ao passar da demanda de objetos baixa para a demanda de objetos média, com exceção das classes 28 e 34;
- O número de soluções inteiras altera-se mais com a variação da demanda de itens do que com a variação da demanda de objetos, já que, para as mesmas condições de demanda, capacidade e número de padrões de corte, o aumento da demanda de itens acaba por diminuir consideravelmente o número de soluções inteiras, ao passo que o aumento da demanda de objetos quase não gera alterações no número de soluções inteiras;
- De modo geral, o CPLEX encontrou soluções inteiras em um número expressivo das 10 instâncias para a grande maioria das classes, sendo que a média obtida foi de 8,14;
- O *gap* relativo % (CPLEX) médio foi baixo, com um tempo médio computacional CPLEX intermediário, o que comprova o bom desempenho do modelo para uma gama diversa de classes.

Capítulo 6

6. Conclusões e Propostas Futuras

Devido à sua importância e por possibilitar uma melhor tomada de decisão quanto ao planejamento da produção, o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque tem chamado a atenção de diversos pesquisadores nos últimos anos, mostrando ser um tema muito relevante e atual.

Neste trabalho, propôs-se um modelo matemático para determinar as principais decisões do processo produtivo de uma indústria de colchões, capturando as interdependências das decisões dos problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque, além de promover uma nova abordagem para o processo de tomada de decisão e uma melhoria na programação da produção. Foram feitas comparações entre as soluções obtidas pelo modelo e as soluções adotadas pela indústria, finalizando com testes computacionais adicionais, a fim de verificar o desempenho e a aplicabilidade do modelo considerado. Os testes para validar o modelo foram baseados na lista de produtos e nas informações fornecidas pela indústria. Entende-se que o presente trabalho ajuda a preencher um *gap* na literatura ao abordar o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque de maneira tridimensional.

Na primeira seção de resultados, a aplicação do modelo mostrou um desempenho satisfatório, resultando em significativas diminuições de 42,66% e 41,21% nos custos da função objetivo para os casos computacional e prático, respectivamente, ao serem modificados os números de padrões de corte de 5 para 10, além de uma diminuição de 1,21% nos custos da função objetivo para o caso computacional ao alterar o número de padrões de corte de 10 para 15, mostrando, assim, uma tendência clara em diminuir os valores dos custos com o aumento do número de padrões de corte, fato que pode ser explicado pelo maior número de combinações possíveis para o corte de espuma, resultando em menos desperdício e melhor aproveitamento de material. Além disso, verificou-se que, se a indústria utilizasse o modelo proposto neste trabalho, os custos para o primeiro e segundo conjuntos de testes poderiam ser reduzidos em 12,23% e 14,38%, respectivamente.

Na segunda seção de resultados, os testes computacionais adicionais com dados aleatórios comprovaram a boa performance do modelo para diferentes casos, com um baixo *gap*

relativo % (CPLEX) médio e com um tempo médio computacional CPLEX intermediário, além do *solver* CPLEX, de forma geral, ter obtido soluções inteiras em um número expressivo das 10 instâncias para cada uma das 36 classes. Também foi mostrado através desses testes computacionais um aspecto interessante: o número de soluções inteiras altera-se mais com a variação da demanda de itens do que com a variação da demanda de objetos, para as mesmas condições de demanda, capacidade e número de padrões de corte, uma vez que o aumento da demanda de itens acaba por diminuir consideravelmente o número de soluções inteiras, ao passo que o aumento da demanda de objetos quase não gera alterações no número de soluções inteiras.

Dessa forma, entende-se que o modelo cumpre o que fora proposto, funcionando como uma boa ferramenta na redução de custos para tal problema. A diminuição de custos é de extrema importância para as empresas, visto que estas precisam buscar continuamente por melhorias em seus processos e eliminar perdas. O caso ideal seria trabalhar com o maior número possível de padrões de corte, reduzindo ainda mais os custos, porém as matrizes ficariam maiores e a dificuldade computacional aumentaria consideravelmente.

Como pesquisas futuras, pretende-se implementar um procedimento de geração de colunas (tridimensionais) para resolver a relaxação linear do modelo proposto, bem como uma heurística para obter uma solução inteira (factível) para o modelo.

Referências Bibliográficas

AGOSTINHO, G. T. *et al.* The multiperiod cutting stock problem with usable leftover. **Em: XVIII Congreso Latino Ibero Americano de Investigación de Operaciones (CLAIO)**, 2016.

ARAUJO, S. A.; ARENALES, M. N.. Problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade: modelagem, método de resolução e resultados computacionais. **Pesquisa Operacional**, [s.l.], v. 20, n. 2, p.287-306, 2000.

ARAUJO, S. A.; RANGEL, S.. **Matemática Aplicada ao Planejamento da Produção e Logística**. São Carlos: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2014.

ARENALES, M. *et al.* **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 524 p.

ARENALES, M. N.; MORABITO, R.; YANASSE, H. H.. **Problemas de Corte e Empacotamento**. São João del Rei: XXXVI SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2004.

ARMENTANO, V. A.; FRANÇA, P. M.; TOLEDO, F. M. B.. A network flow model for the capacitated lot-sizing problem. **Omega**, [s.l.], v. 27, n. 2, p.275-284, 1999.

BELVAUX, G.; WOLSEY, L. A.. Bc — prod: A Specialized Branch-and-Cut System for Lot-Sizing Problems. **Management Science**, [s.l.], v. 46, n. 5, p.724-738, 2000.

BELVAUX, G.; WOLSEY, L. A.. Modelling Practical Lot-Sizing Problems as Mixed-Integer Programs. **Management Science**, [s.l.], v. 47, n. 7, p.993-1007, 2001.

BILLINGTON, P. J.; MCCLAIN, J. O.; THOMAS, L. J.. Mathematical Programming Approaches to Capacity-Constrained MRP Systems: Review, Formulation and Problem Reduction. **Management Science**, [s.l.], v. 29, n. 10, p.1126-1141, 1983.

CAMERINI, P. M.; FRATTA, L.; MAFFIOLI, F.. On improving relaxation methods by modified gradient techniques. **Nondifferentiable Optimization**, [s.l.], p.26-34, 1975.

CARRENO, J. J.. Economic Lot Scheduling for Multiple Products on Parallel Identical Processors. **Management Science**, [s.l.], v. 36, n. 3, p.348-358, 1990.

CHUNG, F. R. K.; GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S.. On Packing Two-Dimensional Bins. **Siam Journal On Algebraic Discrete Methods**, [s.l.], v. 3, n. 1, p.66-76, 1982.

CORREIA, M. H.; OLIVEIRA, J. F.; FERREIRA, J. S.. Reel and sheet cutting at a paper mill. **Computers & Operations Research**, [s.l.], v. 31, n. 8, p.1223-1243, 2004.

DEGRAEVE, Z.; JANS, R.. A New Dantzig-Wolfe Reformulation and Branch-and-Price Algorithm for the Capacitated Lot-Sizing Problem with Setup Times. **Operations Research**, [s.l.], v. 55, n. 5, p.909-920, 2007.

DENIZEL, M. *et al.* Equivalence of the LP relaxations of two strong formulations for the capacitated lot-sizing problem with setup times. **Or Spectrum**, [s.l.], v. 30, n. 4, p.773-785, 2007.

DIEGEL, A. *et al.* Setup minimising conditions in the trim loss problem. **European Journal Of Operational Research**, [s.l.], v. 95, n. 3, p.631-640, 1996.

FARLEY, A. A.. Mathematical Programming Models for Cutting-Stock Problems in the Clothing Industry. **Journal Of The Operational Research Society**, [s.l.], v. 39, n. 1, p.41-53, 1988.

FIOROTTO, D. J.; ARAUJO, S. A.. Reformulation and a Lagrangian heuristic for lot sizing problem on parallel machines. **Annals Of Operations Research**, [s.l.], v. 217, p.213-231, 2014.

FIOROTTO, D. J.; ARAUJO, S. A.; JANS, R.. Hybrid methods for lot sizing on parallel machines. **Computers & Operations Research**, [s.l.], v. 63, p.136-148, 2015.

GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E.. A Linear Programming Approach to the Cutting-Stock Problem. **Operations Research**, [s.l.], v. 9, n. 6, p.849-859, 1961.

GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E.. A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem—Part II. **Operations Research**, [s.l.], v. 11, n. 6, p.863-888, 1963.

GRAMANI, M. C. N.; FRANÇA, P. M.. The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes. **European Journal of Operational Research**, [s.l.], v. 174, n. 1, p.509-521, 2006.

GRAMANI, M. C. N.; FRANÇA, P. M.; ARENALES, M. N.. A Lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem. **International Journal of Production Economics**, [s.l.], v. 119, n. 2, p.219-227, 2009.

GRAMANI, M. C. N.; FRANÇA, P. M.; ARENALES, M. N.. A linear optimization approach to the combined production planning model. **Journal of The Franklin Institute**, [s.l.], v. 348, n. 7, p.1523-1536, 2011.

HAESSLER, R. W.. Controlling Cutting Pattern Changes in One-Dimensional Trim Problems. **Operations Research**, [s.l.], v. 23, n. 3, p.483-493, 1975.

HELD, M.; WOLFE, P.; CROWDER, H. P.. Validation of subgradient optimization. **Mathematical Programming**, [s.l.], v. 6, n. 1, p.62-88, 1974.

HENDRY, L. C.; FOK, K. K.; SHEK, K. W.. A Cutting Stock and Scheduling Problem in the Copper Industry. **Journal Of The Operational Research Society**, [s.l.], v. 47, n. 1, p.38-47, 1996.

HENN, S.; WÄSCHER, G.. Extensions of cutting problems: setups. **Pesquisa Operacional**, [s.l.], v. 33, n. 2, p.133-162, 2013.

JANS, R.; DEGRAEVE, Z.. Improved lower bounds for the capacitated lot sizing problem with setup times. **Operations Research Letters**, [s.l.], v. 32, n. 2, p.185-195, 2004.

KANG, S.; MALIK, K.; THOMAS, L. J.. Lotsizing and Scheduling on Parallel Machines with Sequence-Dependent Setup Costs. **Management Science**, [s.l.], v. 45, n. 2, p.273-289, 1999.

KARIMI, B.; GHOMI, S. M. T. F.; WILSON, J. M.. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. **Omega**, [s.l.], v. 31, n. 5, p.365-378, 2003.

KRICHAGINA, E. V. *et al.* A Dynamic Stochastic Stock-Cutting Problem. **Operations Research**, [s.l.], v. 46, n. 5, p.690-701, 1998.

LEÃO, A. A. S.; FURLAN, M. M.; TOLEDO, F. M. B.. Decomposition methods for the lot-sizing and cutting-stock problems in paper industries. **Applied Mathematical Modelling**, [s.l.], v. 48, p.250-268, 2017.

MAES, J.; MCCLAIN, J. O.; VAN WASSENHOVE, L. N.. Multilevel capacitated lotsizing complexity and LP-based heuristics. **European Journal Of Operational Research**, [s.l.], v. 53, n. 2, p.131-148, 1991.

MALIK, M. M.; QIU, M.; TAPLIN, J.. An integrated approach to the lot sizing and cutting stock problems. **2009 IEEE International Conference On Industrial Engineering And Engineering Management**, [s.l.], p.1111-1115, 2009.

MELEGA, G. M.. **Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque: Modelagem Matemática e Métodos de Solução**. 2017. 162 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto, 2017.

MELEGA, G. M.; ARAUJO, S. A.; JANS, R.. Classification and literature review of integrated lot-sizing and cutting stock problems. **European Journal Of Operational Research**, [s.l.], v. 271, n. 1, p.1-19, 2018.

NONÅS, S. L.; THORSTENSON, A.. A combined cutting-stock and lot-sizing problem. **European Journal of Operational Research**, [s.l.], v. 120, n. 2, p.327-342, 2000.

PIMENTEL, C. M. O.; ALVELOS, F. P.; CARVALHO, J. M. V.. Comparing Dantzig–Wolfe decompositions and branch-and-price algorithms for the multi-item capacitated lot sizing problem. **Optimization Methods And Software**, [s.l.], v. 25, n. 2, p.299-319, 2010.

POLDI, K. C.; ARAUJO, S. A.. Mathematical models and a heuristic method for the multiple-period one-dimensional cutting stock problem. **Annals Of Operations Research**, [s.l.], v. 238, n. 1, p.497-520, 2016.

POLTRONIERE, S. C. *et al.* A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry. **Annals Of Operations Research**, [s.l.], v. 157, n. 1, p.91-104, 2007.

POLTRONIERE, S. C.; ARAUJO, S. A.; POLDI, K. C.. Optimization of an Integrated Lot Sizing and Cutting Stock Problem in the Paper Industry. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional (TEMA)**, [s.l.], v. 17, n. 3, p.305-320, 2016.

QUEIROZ, T. A. de *et al.* Algorithms for 3D guillotine cutting problems: Unbounded knapsack, cutting stock and strip packing. **Computers & Operations Research**, [s.l.], v. 39, n. 2, p.200-212, 2012.

REINDERS, M. P.. Cutting stock optimization and integral production planning for centralized wood processing. **Mathematical And Computer Modelling**, [s.l.], v. 16, n. 1, p.37-55, 1992.

SABBAG NETO, Z.. **Planejamento da produção em máquinas paralelas sob restrições de capacidade**. 1993. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

SANTOS, Maristela Oliveira dos. **Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas com Restrições de Capacidade em Sistemas Multiestágios**. 2000. 198 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ciências de Computação e Matemática Computacional, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

SILVA, E. *et al.* Integrated Cutting and Production Planning: A Case Study in a Home Textile Manufacturing Company. **Operations Research And Big Data**, [s.l.], p.213-220, 2015.

SILVA, E; ALVELOS, F; CARVALHO, J. M. V.. Integrating two-dimensional cutting stock and lot-sizing problems. **Journal Of The Operational Research Society**, [s.l.], v. 65, n. 1, p.108-123, 2014.

TOLEDO, F. M. B.; ARMENTANO, V. A.. A Lagrangian-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines. **European Journal Of Operational Research**, [s.l.], v. 175, n. 2, p.1070-1083, 2006.

TRIGEIRO, W. W.; THOMAS, L. J.; MCCLAIN, J. O.. Capacitated Lot Sizing with Setup Times. **Management Science**, [s.l.], v. 35, n. 3, p.353-366, 1989.

VAN VYVE, M.; WOLSEY, L. A.. Approximate extended formulations. **Mathematical Programming**, [s.l.], v. 105, n. 2-3, p.501-522, 2005.

VANDERBECK, F.. Exact Algorithm for Minimising the Number of Setups in the One-Dimensional Cutting Stock Problem. **Operations Research**, [s.l.], v. 48, n. 6, p.915-926, 2000.

ZHU, W.; LIM, A.. A new iterative-doubling Greedy–Lookahead algorithm for the single container loading problem. **European Journal Of Operational Research**, [s.l.], v. 222, n. 3, p.408-417, 2012.

APÊNDICE A – Heurística para Geração de Padrões de Corte Tridimensionais

A heurística para geração de padrões de corte tridimensionais foi implementada por Everton Fernandes da Silva, estudante de Doutorado na KU Leuven (Bélgica), para a realização deste trabalho. A heurística se baseia nos dois primeiros algoritmos do suplemento online de Zhu e Lim (2012): Geração de Blocos Simples (*Generating Simple Blocks*) e Geração de Blocos Guilhotinados (*Generating Guillotine Blocks*). Tendo em vista que o objetivo era gerar os padrões de corte tridimensionais para o problema integrado, a heurística utilizada é um método para gerar “blocos”, agrupando os colchões do mesmo tipo (mesmas dimensões) e começando com um único colchão, sempre aumentando de um em um até que as dimensões desse bloco não sejam maiores que as dimensões da espuma que será cortada para gerar os colchões ou até que toda a demanda do colchão tenha sido usada, gerando, no fim, um grande conjunto de blocos de colchões do mesmo tipo (blocos homogêneos), sendo que cada tipo tem o seu conjunto e cada rotação possível do colchão na maioria das vezes gera um bloco diferente. Tal procedimento é dado pelo Algoritmo 1: Geração de Blocos Simples, a seguir.

Algoritmo 1: Geração de Blocos Simples

Gerar blocos simples (*MaxContBS*)

```

1       $B = 0$ 
2      para cada caixa do tipo  $i$ 
3           $B_i = 0$ 
4          para cada orientação permitida  $(l, w, h)$  do tipo  $i$ 
5              para  $nl = 1$  até  $n_i$ 
6                  para  $nw = 1$  até  $n_i$ 
7                      para  $nh = 1$  até  $n_i$ 
8                          se  $nl \cdot nw \cdot nh \leq n_i$ 
9                              Criar um bloco  $b$  com dimensões  $(nl \cdot l, nw \cdot w, nh \cdot h)$ , que consiste em  $nl \cdot nw \cdot nh$  caixas do tipo  $i$ 

```

```

10                                     Adicionar  $b$  em  $B_i$ 
11    $TotalBlocos = \sum_i |B_i|$ 
12   se  $TotalBlocos > MaxContBS$ 
13       para cada caixa do tipo  $i$ 
14            $num = \max \left\{ \left\lfloor \frac{|B_i|}{TotalBlocos} \cdot MaxContBS \right\rfloor, 1 \right\}$ 
15           Ordenar  $B_i$  aumentando o volume do bloco
16           Adicionar os primeiros  $num$  blocos de  $B_i$  em  $B$ 
17   senão
18       Adicionar todos blocos de  $B_i$  para todas as caixas de tipo  $i$  em  $B$ 
19   retornar  $B$ 

```

O procedimento para gerar blocos simples é dado pelo Algoritmo 1, que retorna uma lista de aproximadamente $MaxContBS$ blocos simples. Por definição, um bloco simples consiste em uma ou mais caixas do mesmo tipo colocadas na mesma orientação, assim, o bloco simples pode ser visto como uma caixa replicada nl , nw e nh vezes ao longo das direções de comprimento, largura e altura do contêiner, respectivamente. Como há apenas n_i caixas do tipo i , então $nl \leq n_i$, $nw \leq n_i$, $nh \leq n_i$ e o número total de caixas no bloco é $nl \cdot nw \cdot nh \leq n_i$. Uma caixa com dimensões (l_i, w_i, h_i) pode ser colocada em até seis orientações, em geral, sendo que cada orientação é uma permutação de (l_i, w_i, h_i) e pode ser indicada por um trio (l, w, h) . As linhas 2-10 enumeram todos os possíveis blocos simples para cada caixa do tipo i em orientações permitidas, colocando-os em uma lista B_i . Se o número total de blocos simples gerados for maior que $MaxContBS$, o algoritmo retém apenas os num menores blocos para cada tipo de caixa, onde num é calculado através da relação entre o número de blocos desse tipo e todos os blocos gerados, sendo igual à pelo menos um (linha 14), evitando que um tipo de caixa muito pequena resulte em um número desproporcional de blocos na lista de blocos resultante. Além disso, ao manter, pelo menos, o menor bloco para cada tipo de caixa (consistindo de uma única caixa), garante-se que todas as caixas sejam representadas na lista de blocos (ZHU; LIM, 2012).

Depois que todos os blocos homogêneos são gerados, agrupam-se os blocos de tipos diferentes, gerando combinações heterogêneas de blocos a partir de então, seguindo a mesma lógica anterior, sendo que tal procedimento é dado pelo Algoritmo 2: Geração de Blocos Gui-

lhotinados, a seguir, que nada mais é do que juntar blocos simples de colchões com dimensões diferentes.

Algoritmo 2: Geração de Blocos Guilhotinados

Gerar blocos guilhotinados ($MinUtil, MaxContBloco$)

```

1    $B = \text{Gerar blocos simples } (MaxContBloco/2)$ 
2    $PG = B$ 
3   enquanto  $|B| < MaxContBloco$  e  $PG$  não vazio
4        $NG = 0$ 
5       para cada bloco  $b_1$  em  $P$ 
6           para cada bloco  $b_2$  em  $B$ 
7               para cada direção  $dir$  em  $\{L, W, H\}$ 
8                   Combinar  $b_1$  e  $b_2$  ao longo da direção  $dir$  para obter um
                       novo bloco  $b$ 
9                   Adicionar  $b$  em  $NG$  se ele é factível e nenhum bloco
                       equivalente existe em  $B$ 
10           $B = B \cup NG$  e manter apenas os primeiros  $MaxContBloco$  blocos
11           $PG = NG$ 
12  retornar  $B$ 

```

O Algoritmo 2 gera blocos guilhotinados ao combinar iterativamente blocos menores em blocos maiores, começando por gerar $MaxContBloco/2$ blocos simples (linha 1), além de manter três conjuntos de blocos: o conjunto de blocos gerados até agora são armazenados em B ; o conjunto de blocos gerados na iteração anterior é armazenado em PG ; e o conjunto de blocos gerados na iteração atual é armazenado em NG . Novos blocos são gerados ao escolher um bloco b_1 de B e outro bloco b_2 de PG , combinando, assim, os dois blocos ao longo das direções de comprimento, largura ou altura do contêiner, sendo possível que o bloco b gerado seja equivalente a algum bloco existente em B (de mesmas dimensões e consistindo do mesmo conjunto de caixas) ou infactível (muito grande para ser carregado no contêiner ou consistindo em mais caixas de um tipo do que há disponível); em tais casos, os blocos são descartados. A nova geração de blocos NG é adicionada a B depois que uma iteração é concluída, tornando-se a geração anterior PG na próxima iteração, sendo que tal processo continua até

gerar blocos suficientes ou até que não sejam gerados novos blocos (linha 3) (ZHU; LIM, 2012).

Assim, através desses algoritmos, gera-se uma boa diversidade de opções de combinações de colchões, que variam de acordo com as suas demandas.