

Beatriz Gonçalves Paniche

Geometria Diferencial da Cuspidal Edge

São José do Rio Preto
2021

Beatriz Gonçalves Paniche

Geometria Diferencial da Cuspidal Edge

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof^ª. Dr^ª. Luciana de Fátima Martins

São José do Rio Preto
2019

P192g Paniche, Beatriz Gonçalves
Geometria diferencial da Cuspidal Edge / Beatriz Gonçalves
Paniche. -- São José do Rio Preto, 2021
98 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio
Preto
Orientadora: Luciana de Fátima Martins

1. Matemática. 2. Singularidades (Matemática). 3. Superfícies
(Matemática). 4. Curvatura. 5. Torção. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Beatriz Gonçalves Paniche

Geometria Diferencial da Cuspidal Edge

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof^a. Dr^a. Luciana de Fátima Martins
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto
Orientador

Prof^a. Dr^a. Ana Cláudia Nabarro
ICMC-USP - São Carlos

Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
30 de Junho de 2021

A minha mãe Vera e ao meu namorado e parceiro João Vítor, dedico

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho pudesse ser realizado. Em especial agradeço:

À Deus, que guiou me caminho até chegar aqui.

À Luciana de Fátima Martins, que me acolheu no último ano de mestrado em um momento de dúvida com relação a qual objeto de estudo deveria seguir, me mostrou através de sua paixão pela Geometria que este seria meu lugar na área. Sobretudo, agradeço pelo incentivo, pelos puxões de orelha merecidos, por compartilhar seu conhecimento e pela bela amizade que vou levar por toda a vida.

À minha família, pelo apoio, incentivo e carinho e aos meus pais que me deram a vida e me criaram com conceitos e valores, os quais levarei por toda a vida. Em especial ao meu avô Antônio e minha mãe Vera por facilitarem minha vida acadêmica fornecendo as condições necessárias para que eu pudesse me dedicar integralmente aos estudos.

A todos os meus amigos da universidade, que me apoiaram, me emprestaram materiais didáticos e tiveram muita paciência em me explicar conceitos não entendidos ao longo do curso. Com destaque aos meus amigos Paulo, Tarcísio, Gabriel e Matheus que entre graduação e pós-graduação tiveram um papel de destaque em minha vida. Em especial ao meu melhor amigo João Vítor, que se tornou meu parceiro de vida.

Ao Prof. Luis Evangelista, que com sua didática impecável, me influenciou desde o ensino médio a seguir na matemática e me mostrou que, ao contrário do que muitos pensam, a matemática é linda e profunda. Além de professor, um ser humano incrível que nunca desistiu de mostrar aos seus alunos esse mundo incrível de conhecimento.

À banca, que se dispôs a participar deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

“Só seres que arriscam erram. Não confunda erro com negligência, desatenção e descuido. Ser capaz de arriscar é uma das coisas mais inteligentes para mudar.”

Mario Sérgio Cortella (2009, p.29)

RESUMO

Seja M a superfície cuspidal edge, a qual é uma superfície de posto 1 parametrizada por uma frente de onda. Neste trabalho estudamos invariantes geométricos que determinam M , como a curvatura umbílica para superfícies de posto 1, as curvaturas singular, normal e cuspidal para frentes de onda e a curvatura inflexional e torção cuspidal. Além disso, esclarecemos as relações entre estes invariantes geométricos.

Palavras-chave: Superfícies Singulares. Cuspidal Edge. Geometria Diferencial. Frentes de Onda.

ABSTRACT

Let M be a cuspidal edge which is a corank 1 surface given by a wave front. In this work we study geometric invariants that determine M , such as the umbilic curvature for surfaces with corank 1 singularities, the singular, normal and cuspidal curvatures for wave fronts and the inflexional curvature and cuspidal torsion. In addition, we clarify the relationships between these geometric invariants.

Keywords: Singular Surfaces. Cuspidal Edge. Diferencial Geometry. Wave Fronts.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Cuspidal edge usual. Fonte: Feita pelo autor.	19
1.2	Invariantes da cuspidal edge (invariantes não identificados são zero.) Fonte: Martins, Saji, 2019, p. 459.	20
3.1	Cuspidal edge, cross-cap e swallowtail usuais do Exemplo 3.0.1. Fonte: Feita pelo autor.	31
3.2	Cuspidal edge, cross-cap e swallowtail usuais do Exemplo 3.2.2 Fonte: primeira e segunda figura: Nunez, 2018, p. 80. Terceira figura, feita do autor.	36
3.3	Possibilidades para Δ_p e o conjunto A das direções assintóticas de M em N_pM . Fonte: Nunez, 2018, p. 97.	40
3.4	Possibilidades para Δ_p , o conjunto A das direções binormais de M em N_pM . Fonte: Nunez, 2018, p. 98.	41
3.5	Bases adaptadas de N_pM . Fonte: Nunez, 2018, p.99.	42
3.6	Interpretação geométrica de κ_u em N_pM , considerando uma base adaptada. Fonte: Nunez, 2018, p. 101.	44
4.1	Traço da cúspide (t^2, t^3) do Exemplo 4.1.3. Fonte: feita pelo autor.	48
4.2	Traço da cúspide (t^2, t^5) do Exemplo 4.1.4. Fonte: Feita pelo autor.	49
4.3	Traço de α para $a = -200$, $a = -1$, $a = 1$ e $a = 200$, da esquerda para a direita, do Exemplo 4.1.8 item (a). Fonte: feita pelo autor.	50
4.4	Traço da ciclóide do Exemplo 4.1.8 item (a). Fonte: feita pelo autor.	51
4.5	Traço da superfície do Exemplo 4.2.5. Fonte: feito pelo autor.	61
4.6	Direção singular e nula dadas na Definição 4.2.11. Fonte: Santos, 2015, p. 35.	63
4.7	Reta tangente e plano normal a M em $p = f(q)$. Fonte: Santos, 2015, p. 36.	64
5.1	Parábola cuspidal elíptica para $a = b = 1$ a esquerda e parábola cuspidal hiperbólica para $a = -1$ e $b = -1$ a direita, referentes ao Exemplo 5.2.8. Fonte: feita pelo autor.	75
5.2	Exemplo de curvatura singular positiva e negativa, respectivamente. Fonte: Saji, Umehara, Yamada, 2009, p.503.	78
5.3	Superfície tangente desenvolvível do Exemplo 5.2.14. Fonte: Martins, Saji, 2019, p.460.	80
5.4	Parábola Cuspidal com curvatura normal negativa, para $a = b = 1$, e positiva, para $a = -1$ e $b = 1$, respectivamente. Fonte: feita pelo autor.	82
5.5	O semiespaço $\Omega(-\nu)$ contém a curva singular. Fonte: Saji, Umehara, Yamada, 2009, p.516.	83

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	PRELIMINARES	23
2.1	Geometria diferencial de curvas	23
2.1.1	Curvas planas	23
2.1.2	Curvas em $\mathbb{R}^3$	25
2.2	Geometria diferencial de superfícies em $\mathbb{R}^3$	26
2.3	Formas normais de $\mathcal{A}$ -classes	28
3	GEOMETRIA DE SUPERFÍCIES DE POSTO 1 EM $\mathbb{R}^3$	31
3.1	Primeira e segunda formas fundamentais para superfícies de posto 1	32
3.2	Parábola de curvatura	35
3.3	Direções assintóticas e binormais	37
3.4	Curvatura umbílica	41
4	GEOMETRIA DE FRENTES DE ONDA	47
4.1	Frentes de onda em $\mathbb{R}^2$	47
4.1.1	3/2-cúspides e curvatura cuspidal	49
4.1.2	Comportamento da curvatura cuspidal de 3/2-cúspides	51
4.2	Frentes de onda em $\mathbb{R}^3$	58
5	GEOMETRIA DA CUSPIDAL EDGE	67
5.1	Forma normal	67
5.2	Curvatura singular	71
5.3	Curvatura normal	81
5.4	Curvatura umbílica para a cuspidal edge	85
5.5	Curvatura cuspidal	87
5.6	Torção cuspidal	91
5.7	Curvatura inflexional	92
5.8	Invariantes geométricos até ordem 3	93
5.9	Sobre as curvaturas Gaussiana e média	94
	REFERÊNCIAS	97

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar a geometria da superfície cuspidal edge M . Através deste estudo, apresentamos invariantes geométricos de M , relacionados aos coeficientes de sua forma normal. A cuspidal edge é definida através do conceito de germe de aplicação pela $\mathcal{A}$ -equivalência. Tal definição nos diz que um germe suave $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ é uma cuspidal edge se f for $\mathcal{A}$ -equivalente a (x, y^2, y^3) , denominada cuspidal edge usual, como mostra a figura a seguir.

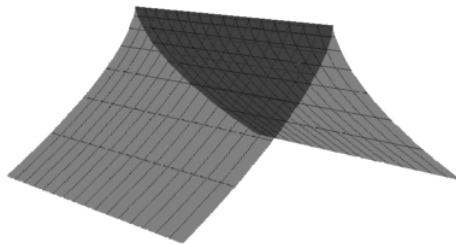


Figura 1.1: Cuspidal edge usual. Fonte: Feita pelo autor.

No início do trabalho, é apresentada a geometria de superfícies de posto 1 em $\mathbb{R}^3$ e o conceito de frentes de onda, para que sejam apresentados os invariantes, já que a cuspidal edge satisfaz ambos.

Os invariantes geométricos estudados neste trabalho podem ser visualmente observados ao olhar para a cuspidal edge, pois em sua imagem podemos obter informações sobre muitos dos conceitos a serem abordados neste trabalho.

Na Figura 1.2 temos superfícies que são imagens de germes de aplicações fornecidas pela forma normal da cuspidal edge. Somente ao observar estas figuras, detectamos diferenças ao variar seus representantes, baseado nas interpretações geométricas dos invariantes. Logo, queremos estudar objetos que meçam estas diferenças e relacioná-los aos coeficientes da forma normal associada a cuspidal edge. Desta forma, tornamos estes conceitos invariantes ao representante desta classe.

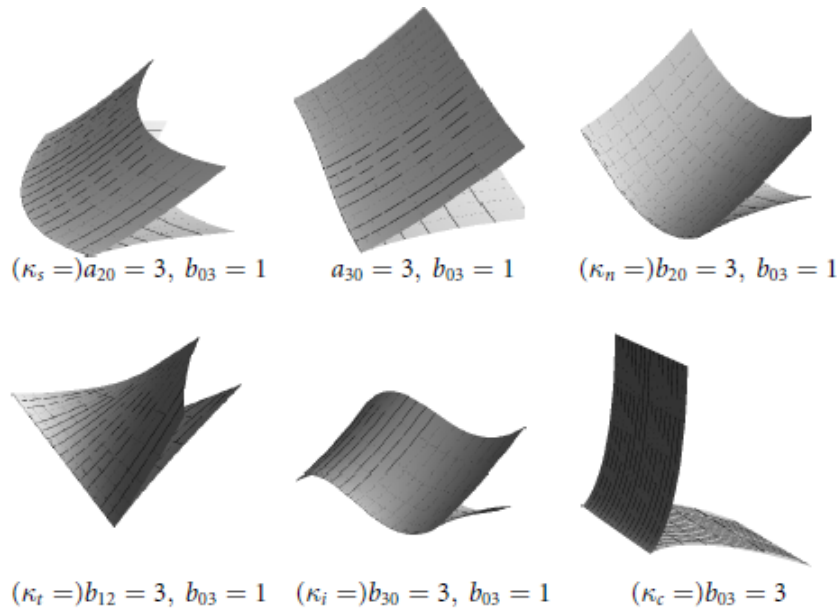


Figura 1.2: Invariantes da cuspidal edge (invariantes não identificados são zero.)

Fonte: Martins, Saji, 2019, p. 459.

Uma classificação genérica de singularidades de frentes de onda, foi dada por Arnol'd e Varchenko em [1]. Eles mostraram que as singularidades genéricas de frentes de onda em $\mathbb{R}^3$ são cuspidal edges e swallowtails, um dos motivos pelos quais este trabalho foi construído, já que a partir de [1] é entendido que a cuspidal edge se torna especialmente um dos focos do estudo da teoria de singularidades. Recentemente, tem havido inúmeros estudos sobre cuspidal edges do ponto de vista da geometria diferencial, por exemplo, [9, 11, 15, 17].

A organização deste trabalho é como segue: No primeiro capítulo, discutimos brevemente ferramentas de Geometria Diferencial que são necessárias para o nosso estudo, dentre elas a geometria de curvas planas, curvas no espaço e superfícies, tendo como referência [3] e [21]. Também revisamos brevemente alguns conceitos da Teoria de Singularidades, como o conceito de germes, k-jatos e $\mathcal{A}$ -equivalência necessários para o nosso estudo, tendo como referência [6, 7, 11].

No Capítulo 2, estudamos o conceito de geometria de superfícies em $\mathbb{R}^3$ de posto 1, estudo importante, uma vez que cuspidal edges são superfícies de posto 1. Neste capítulo, o objetivo principal é apresentar a definição de curvatura umbílica em $p = f(q)$, onde q é um ponto singular de posto 1 de f . Neste capítulo omitimos várias demonstrações, uma vez que estão detalhadas em [14], dando preferência a ilustrar as definições e resultados através de exemplos, tendo como referência [8].

No Capítulo 3, desenvolvemos o conceito de frentes de onda, uma vez que cuspidal edges são frentes de onda, assim como outros exemplos citados. Este capítulo tem como objetivo preparar a base para que possamos definir, no último capítulo, inúmeros invariantes, tendo como referência [17].

No quarto e principal capítulo, apresentamos os principais conceitos deste trabalho, os invariantes geométricos envolvendo a forma normal da cuspidal edge, com o objetivo de esclarecer as relações entre esses invariantes e apresentar uma lista de invariantes que determinam a cuspidal edge. Na primeira seção, definimos o conceito de forma normal, uma forma de reparametrizar a cuspidal edge sem modificar a geometria da superfície. Este

será um ponto importante deste trabalho, pois após definir cada invariante geométrico, vemos como cada um será relacionado a forma formal. Na seção seguinte, apresentamos o conceito de curvatura singular, definido para frentes de onda, de onde concluímos que a interpretação geométrica nos indica se localmente a superfície cuspidal edge esta contida no semiespaço determinado pelo plano osculador que contém o vetor normal principal ou se possui pontos em ambos os semiespaços. Na Seção 4.3, apresentamos o conceito de curvatura normal, definido para frentes de onda, de onde concluímos que sua interpretação geométrica nos indica se a imagem da curva singular através de f esta contida no semiespaço determinado pelo plano tangente limitante que contém o vetor ν ou se está contida no semiespaço contrário. Na Seção 4.4, recordamos o conceito de curvatura umbílica apresentado no Capítulo 2, mas com foco na cuspidal edge. Nesta seção, concluímos algumas propriedades envolvendo a cuspidal edge em um sistema de coordenadas adaptado. Na Seção 4.5, estudamos a curvatura cuspidal para cuspidal edges, sendo um conceito já trabalhado para $3/2$ -cúspides no Capítulo 3, onde em sua interpretação geométrica temos que a curvatura cuspidal de f coincide com a de uma $3/2$ -cúspide. Na Seção 4.6, estudamos a torção cuspidal para cuspidal edges, conceito que mede a rotação da direção cuspidal ao longo da curva singular. Na Seção 4.7, introduzimos o último invariante deste trabalho, a curvatura inflexional, onde também será relacionado aos coeficientes da forma normal.

Na última seção deste capítulo, apresentamos um teorema que relaciona todos os conceitos vistos neste capítulo, de onde concluímos que, se dois germes de cuspidal edge possuem os mesmos invariantes estudados neste capítulo, a menos de uma isometria na meta e um difeomorfismo na fonte, eles coincidem até termos de grau 3, conceito próximo ao Teorema Fundamental das Curvas Planas (2.1.2), Teorema Fundamental das Curvas no Espaço e o Teorema Fundamental das Superfícies (Bonnet, 2.2.2) estudados em Geometria Diferencial. Também estudamos a relação $\kappa^2 = \kappa_s^2 + \kappa_n^2$ envolvendo as curvaturas singular e normal absoluta, similar a feita para pontos regulares (2.4), envolvendo as curvaturas geodésicas e normal. Também neste capítulo, abordamos brevemente a relação das curvaturas Gaussiana e média com os invariantes deste trabalho. Este último capítulo, tem como referências principais [9], [11] e [17].

Em relação as referências deste trabalho, temos várias textos que foram de essencial importância para sua construção. Como por exemplo, a curvatura singular e a curvatura normal limitante para cuspidal edges são definidas em [17] por um limite de curvaturas geodésicas e um limite de curvaturas normais, respectivamente. Por outro lado, a curvatura umbílica é definida em [8] para superfícies de posto 1 usando a primeiras e a segundas formas fundamentais. Portanto, a curvatura umbílica é definida para cuspidal edges. É apresentado neste trabalho, com base em [9], que as curvaturas singular, normal limitante e umbílica, cuspidal, inflexional e torção cuspidal são invariantes, definidas pelo uso de ferramentas fundamentais de geometria diferencial de superfícies e da teoria da singularidade, aplicadas a cuspidal edges.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo de preliminares, discutimos brevemente definições e resultados que são úteis em nosso trabalho. Na primeira seção, vemos uma breve revisão sobre a geometria diferencial das curvas planas e curvas no espaço. Na segunda seção, vemos uma revisão de Geometria Diferencial de superfícies regulares e, na última seção, discutiremos algumas definições relacionadas a $\mathcal{A}$ -equivalência, onde apresentamos a definição de cuspidal edge e swallowtail como germe de aplicação através da $\mathcal{A}$ -equivalência, de onde segue este trabalho. Na sequência de todo este trabalho, a origem de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, será denotada também por $\mathbf{0}$, a menos de menção contrária. As duas primeiras seções são baseadas nas referências [3] e [21], base para o estudo de Geometria Diferencial clássica e a última seção é baseada nas referências [6, 7, 20], muito úteis ao estudo de singularidades.

2.1 Geometria diferencial de curvas

2.1.1 Curvas planas

Nesta subseção $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ denota uma curva parametrizada diferenciável (suave) em $\mathbb{R}^2$, onde I é uma intervalo aberto da reta. Primeiramente, uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita *regular* se para todo $t \in I$, $\alpha'(t) \neq 0$. Por outro lado, dizemos que t_0 é um *ponto singular* de α se $\alpha'(t_0) = 0$. Daqui em diante, vamos restringir a teoria apenas às curvas regulares. A seguir, um exercício de cálculo que será utilizado na sequência do trabalho.

Lema 2.1.1. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave que satisfaz*

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0,$$

então $\frac{f(x)}{x^k}$ é uma função suave.

Demonstração. Vamos provar por indução sobre k . Para $k = 1$ temos

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(1 \cdot x) - f(0 \cdot x)}{x} = \frac{\int_0^1 \frac{d}{du} f(ux) du}{x} = \frac{\int_0^1 x f'(ux) du}{x} = \int_0^1 f'(ux) du.$$

Como essa nova função dentro da integral é suave, pois é a composição da função suave $f'(x)$ com a função suave $g(u, x) = ux$, e sua derivada com relação a x é suave, e em particular é contínua, então podemos aplica a regra de Leibniz e obter

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 f'(ux) du = \int_0^1 \frac{d}{dx} f'(ux) du = \int_0^1 u f''(ux) du.$$

Refazendo o processo para ordens superiores da derivada de $\frac{f(x)}{x}$, concluímos que ela é suave.

Supondo o resultado válido para k , vamos provar para $k + 1$. Temos que $h(x) = \frac{f(x)}{x^k}$ é suave, queremos mostrar que $\frac{f(x)}{x^{k+1}}$ é suave. Assim $\frac{f(x)}{x^{k+1}} = \frac{h(x)}{x}$. Observe que

$$h(0) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{kx^{k-1}} \stackrel{L'H}{=} \dots \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0.$$

Como feito no passo $k = 1$, $\frac{h(x)}{x}$ é suave, isto é, $\frac{f(x)}{x^{k+1}}$ é suave. Portanto, $\frac{f(x)}{x^k}$ é suave. $\square$

Para facilitar as contas, existe uma proposição utilizada para verificar se uma curva α está parametrizada por comprimento de arco, isto é, uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada por comprimento de arco se, e só se, para todo $t \in I$, $\|\alpha'(t)\| = 1$.

Para $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in \mathbb{R}$, uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, para cada $s \in I$, denotamos

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s)),$$

como sendo um vetor unitário. Seja $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$, um vetor unitário ortogonal a $\mathbf{t}(s)$, tal que a base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada por $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ é positivamente orientada. O conjunto de vetores $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ é dito *referencial de Frenet* da curva α em s .

Observe que $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ são funções de I em $\mathbb{R}^2$ suaves e para cada $s \in I$ os vetores $\mathbf{t}'(s)$ e $\mathbf{n}'(s)$ são escritos como combinação linear de $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$. Como $\mathbf{t}(s)$ é unitário, temos que $\mathbf{t}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{t}(s)$ e portanto $\mathbf{t}'(s)$ é proporcional a $\mathbf{n}(s)$. Este fator de proporcionalidade, denotado por $\kappa(s)$, é chamado **curvatura** de α em s , isto é,

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s). \quad (2.1)$$

Segue da definição de curvatura que

$$\kappa(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s).$$

Aplicando o mesmo raciocínio feito para $\mathbf{t}(s)$ em $\mathbf{n}(s)$, concluímos que $\mathbf{n}'(s)$ é proporcional a $\mathbf{t}(s)$ e assim concluímos que

$$\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s). \quad (2.2)$$

As equações (2.1) e (2.2) são ditas *fórmulas de Frenet* de uma curva plana.

A interpretação geométrica da curvatura nos diz que a função curvatura indica a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção. Ver ([21], p.43).

Fixando $s_0 \in I$, o sinal da curvatura nos indica a direção do vetor $\mathbf{n}(s_0)$ com relação a $\alpha''(s_0)$, isto é, se $\kappa(s_0) > 0$, então $\mathbf{n}(s_0)$ tem mesmo sentido de $\alpha''(s_0)$, caso contrário, $\mathbf{n}(s_0)$ tem sentido contrário ao de $\alpha''(s_0)$. Ver ([21], p.47).

A seguir, temos um dos teoremas mais importantes da teoria, o teorema fundamental das curvas planas.

Teorema 2.1.2. (TFCP)([21], p. 46) (a) *Dada uma função diferenciável $\kappa(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, existe uma curva regular $\alpha(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco s , cuja curvatura é $\kappa(s)$.*

(b) *A curva $\alpha(s)$ do item (a) é única quando fixamos $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s_0) = \nu_0$, onde ν_0 é um vetor unitário de $\mathbb{R}^2$.*

(c) *Se duas curvas $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ têm a mesma curvatura, então diferem por sua posição no plano, isto é, existe uma rotação L e uma translação T em $\mathbb{R}^2$, tal que $\alpha(s) = (L \circ T \circ \beta)(s)$.*

Por fim, vamos definir uma curva utilizada ao longo deste trabalho, principalmente no Capítulo 3, e um resultado, muito importante na teoria de cálculo.

Definição 2.1.3. A *ciclóide* é a curva obtida por um movimento rígido da curva dada por

$$c(t) := a(t - \operatorname{sen} t, 1 - \operatorname{cos} t),$$

onde $a > 0$ é chamado de **raio da ciclóide**.

A seguir, temos um lema muito utilizado neste trabalho, análogo ao Lema de Hadamard, no qual podemos expressar uma aplicação suave que se anula em um eixo em termos de uma função suave e um valor real exatamente de uma maneira conveniente.

Lema 2.1.4. ([2], p. 86) *Suponha que f uma função suave em $\mathbb{R}^2$ na vizinhança do $\mathbf{0}$. Suponha que $f(x, 0) = 0$, para todo x na vizinhança do $\mathbf{0}$. Então $f(x, y) = y f_1(x, y)$, para uma função suave f_1 definida na vizinhança do $\mathbf{0}$.*

2.1.2 Curvas em $\mathbb{R}^3$

Na sequência desta subseção, α denota uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, a menos de menção contrária. Como ocorre com as curvas planas, toda curva regular no espaço admite uma reparametrização pelo parâmetro comprimento de arco. A demonstração destes resultados citados é análoga ao feito para curvas em $\mathbb{R}^2$. Anteriormente vimos uma breve revisão sobre as fórmulas de Frenet, considerando um diedro ortonormal associado naturalmente a uma curva plana. A seguir, será feito um raciocínio análogo, considerando um triedro ortonormal associado a uma curva regular no espaço.

A *curvatura* de α em $s \in I$ é o número real $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$. Se α é parametrizada por comprimento de arco, então podemos concluir que $\alpha''(s)$ é ortogonal a $\alpha'(s)$. Assim, podemos definir um vetor unitário na direção $\alpha''(s)$ dada por $\mathbf{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ denominado *vetor normal a α em s* . A *reta normal a α em $s_0 \in I$* é a reta que passa por $\alpha(s_0)$ na direção do vetor normal em s_0 . Denotando por $\mathbf{t}(s)$ o vetor unitário tangente a α , temos que ele é ortonormal ao vetor normal e

$$\mathbf{t}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

Se α tem curvatura estritamente positiva, então podemos definir o vetor $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$, como o *vetor binormal* a α em s . O referencial ortonormal formado pelos vetores $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ é chamado *triedro de Frenet* da curva α em s .

Em cima do triedro de Frenet, podemos construir determinados planos retificante, osculador e normal. O plano de $\mathbb{R}^3$ que contém $\alpha(s)$ e é normal ao vetor $\mathbf{t}(s)$ é o *plano normal* à curva α em s . O plano que contém $\alpha(s)$ e é normal a $\mathbf{b}(s)$ é denominado *plano osculador*, e o plano que contém $\alpha(s)$ e é normal a $\mathbf{n}(s)$ é o *plano retificante* da curva α em s .

Como $\mathbf{b}'(s)$ é paralelo a $\mathbf{n}(s)$, então $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$, onde $\tau(s)$ é um número real, denominando *torção* da curva α em s .

De forma análoga ao que foi feito para curvas planas, através das derivadas dos vetores que compõem o triedro de Frenet, obtemos as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}'(s) &= \tau(s)\mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

Estas fórmulas acima são denominadas **fórmulas de Frenet**. Uma das aplicações do triedro de Frenet útil ao trabalho é a caracterização das curvas planas pelo fato de terem torção nula. Da interpretação dos planos normal, osculador e retificante, temos a seguinte proposição

Proposição 2.1.5. ([21], p. 79) *Seja α uma curva regular em $\mathbb{R}^3$ de curvatura não nula, para todo $s \in I$. Fixando $s_0 \in I$, as seguintes propriedades se verificam:*

- (a) *Para todo s suficientemente próximo de s_0 , $\alpha(s)$ pertence ao semiespaço determinado pelo plano retificante, que contém $\mathbf{n}(s_0)$.*
- (b) *Se $\tau(s_0) < 0$, então para todo s suficientemente próximo de s_0 $\alpha(s)$ pertence ao semiespaço determinado pelo plano osculador, que contém $-\mathbf{b}(s_0)$ (resp. $\mathbf{b}(s_0)$) se $s < s_0$ (resp. $s > s_0$).*
- (c) *Se $\tau(s_0) > 0$, então para todo s suficientemente próximo de s_0 $\alpha(s)$ pertence ao semiespaço determinado pelo plano osculador, que contém $\mathbf{b}(s_0)$ (resp. $-\mathbf{b}(s_0)$) se $s < s_0$ (resp. $s > s_0$).*

Vimos que a curvatura determina uma curva plana a menos de sua posição. Temos também que a curvatura e a torção determinam uma curva a menos de sua posição no espaço. Uma aplicação $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma *isometria* de $\mathbb{R}^3$ se preserva distâncias isto é, para todo $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3$,

$$\|F(p_1) - F(p_2)\| = \|p_1 - p_2\|.$$

Uma *transformação ortogonal* de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação linear $C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que preserva o produto interno, isto é,

$$\langle C(p_1), C(p_2) \rangle = \langle p_1, p_2 \rangle, \quad \forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3.$$

Destas definições, concluímos que toda transformação ortogonal é uma isometria e toda isometria pode ser escrita de forma única como uma composta de translação e uma transformação ortogonal. E mais, esta isometria é diferenciável e sua diferencial coincide com a transformação ortogonal, isto é, sua diferencial preserva o produto interno.

Observe também que F preserva a orientação (resp. inverte a orientação) se, e somente se, o determinante da matriz associada a diferencial de F em um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ é igual a 1 (resp. -1).

É de se esperar que duas curvas α e $\bar{\alpha}$ tais que $\alpha = F \circ \bar{\alpha}$, onde F é uma isometria, tenham a mesma curvatura e torção (a menos de sinal). Por fim nesta seção, enunciamos um dos teoremas centrais desta teoria, o teorema fundamental das curvas no espaço.

Teorema 2.1.6. (TFCE) ([21], p. 91) (a) *Dadas duas funções diferenciáveis, $\kappa(s) > 0$ e $\tau(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, existe uma curva regular $\alpha(s)$ parametrizada por comprimento de arco, tal que $\kappa(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ a torção de α em s .*

(b) *A curva $\alpha(s)$ é a única se fixarmos um ponto $\alpha(s_0) = p_0 \in \mathbb{R}^3$, $\alpha'(s_0) = \mathbf{v}_1$, $\alpha''(s_0) = \kappa(s_0)\mathbf{v}_2$, onde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^3$.*

(c) *Se duas curvas $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ têm a mesma curvatura e torção (a menos de sinal), então elas coincidem, a menos de uma isometria.*

2.2 Geometria diferencial de superfícies em $\mathbb{R}^3$

Expomos, nesta seção, definições e resultados sobre superfícies em $\mathbb{R}^3$ e sua geometria diferencial que são importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança V de p em

$\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $f : U \rightarrow V$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \subset \mathbb{R}^3$, tal que f seja um homeomorfismo suave e sua df_q é injetiva, para todo $q \in U$, isto é, sua matriz no ponto q tem posto 2.

Chamamos de curvas coordenadas de f as curvas da forma $\alpha(t) = f(t, c)$ e $\beta(t) = f(c, t)$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. Note que f é uma imersão (injetiva) de $U \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, ou seja, uma aplicação (injetiva) suave com derivada injetiva em todos os pontos de U . Como neste trabalho o estudo é local, consideramos no que segue, superfícies M dadas por uma parametrização $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $M = f(U)$. Consequentemente, temos um vetor unitário normal a $T_p M$ dado por:

$$N(p) = \frac{f_x(q) \times f_y(q)}{\|f_x(q) \times f_y(q)\|} \quad (2.3)$$

que diremos ser um *vetor unitário normal à superfície M* em p . Note que o vetor $-N(p)$ também é um vetor unitário normal a M em p . Assim, é preciso explicitar qual é a orientação à ser tomada para M , se compatível com (2.3) ou não. A aplicação suave $N : M \rightarrow S^2$ é chamada *Aplicação Normal de Gauss* de M , onde S^2 é a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

A aplicação bilinear simétrica $I_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $I_q(w, w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2$ é chamada de *primeira forma fundamental de M em q* . Usaremos a notação $I_q(w)$ para $I_q(w, w)$. Temos assim que $E(q) = \langle f_x(q), f_x(q) \rangle$, $F(q) = \langle f_x(q), f_y(q) \rangle$ e $G(q) = \langle f_y(q), f_y(q) \rangle$ são funções suaves em U , chamadas de *coeficientes da primeira forma fundamental* de M em q com respeito à parametrização f . Observe que, para $w = af_x(q) + bf_y(q)$, temos

$$I_q(w) = a^2 E(q) + 2abF(q) + b^2 G(q).$$

A segunda forma fundamental de M em p é a forma bilinear simétrica $II_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $II_q(w, w) = \langle -dN_p(w), w \rangle$, onde denotamos por $II_q(w)$.

Note que, tomando uma parametrização f de M em $p = f(q)$ e escrevendo $w_1 = a_1 f_x(q) + b_1 f_y(q)$ e $w_2 = a_2 f_x(q) + b_2 f_y(q)$, segue que $II_q(w_1, w_2) = a_1 a_2 l(q) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) m(q) + a_2 b_2 n(q)$, onde

$$\begin{aligned} l(q) &= \langle -N_x, f_x \rangle(q) = \langle N, f_{xx} \rangle(q), \\ m(q) &= \langle -N_x, f_y \rangle(q) = \langle N, f_{xy} \rangle(q) = \langle -N_y, f_x \rangle(q), \text{ e} \\ n(q) &= \langle -N_y, f_y \rangle(q) = \langle N, f_{yy} \rangle(q), \end{aligned}$$

são funções suaves em U . Dizemos que $l(q)$, $m(q)$ e $n(q)$ são os *coeficientes da segunda forma fundamental de M em p* com respeito à parametrização f . Notemos que $II_q(w) = a^2 l(q) + 2abm(q) + b^2 n(q)$, para $w = af_x(q) + bf_y(q)$.

Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma curva suave parametrizada pelo comprimento de arco. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, o valor aceleração $\alpha''(t)$ é ortogonal à $\alpha'(t)$ e, portanto, pertence ao plano gerado pelos vetores $N(t)$ e $N(t) \times \alpha'(t)$, onde $N(t) = N(\alpha(t))$. Podemos escrever

$$\alpha''(t) = \kappa_g(t)(N(t) \times \alpha'(t)) + \kappa_n(t)N(t).$$

Definição 2.2.1. Temos que $\kappa_n(t)$ é chamada de **curvatura normal** de $\alpha(t)$ e $\kappa_g(t)$ a **curvatura geodésica** de $\alpha(t)$.

Se a curva não está parametrizada pelo comprimento de arco, a curvatura normal em p é definida por

$$\kappa_n(t) = II_q \left(\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right) = \frac{II_q(\alpha'(t))}{I_q(\alpha'(t))} = -\frac{\langle \alpha'(t), N'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2} = \frac{\langle \alpha''(t), N(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}.$$

Se p é não umbílico, podemos escrever qualquer vetor unitário $w \in T_p M$ escrito como $w = \cos(\theta)w_1 + \sin(\theta)w_2$, onde w_1 e w_2 são direções principais unitários. Assim, podemos concluir que

$$\kappa_n(w) = II_p(w) = \kappa_1 \cos^2(\theta) + \kappa_2 \sin^2(\theta).$$

Portanto, as curvaturas principais são os extremos da curvatura normal em p , quando θ varia em $[0, \pi]$. Uma direção w em p tal que $\kappa_n(w) = 0$ é chamado de *direção assintótica*. Uma direção é *assintótica*, portanto, se e somente se $II_q(w) = 0$. Uma curva sobre M onde todos os vetores tangentes são direções assintóticas é chamada de *curva assintótica*. Diferente da curvatura normal, a curvatura geodésica depende da curva, e não somente do ponto $\alpha(t)$ e de $\alpha'(t)$. Pode ser mostrado que se α não está parametrizada por comprimento de arco, a curvatura geodésica é dada por

$$\kappa_g(t) = \frac{\langle \alpha''(t), N(t) \times \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Diretamente da fórmula acima, temos a relação

$$\kappa(t)^2 = \kappa_g(t)^2 + \kappa_n(t)^2, \quad (2.4)$$

onde κ é a curvatura de uma curva $\alpha(t)$.

Por fim, um teorema que diz que o conhecimento da primeira e segundas formas fundamentais determina a superfície localmente. Mais precisamente,

Teorema 2.2.2. ([3], p. 282)(Bonnet) *Sejam E, F, G, l, m e n funções diferenciáveis definidas em um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, com $E > 0$, $G > 0$. Suponha que as funções dadas satisfaçam formalmente as equações de Gauss e Mainardi-Codazi e que $EG - F^2 > 0$. Então, para todo $q \in V$ existe uma vizinhança $U \subset V$ de q e um difeomorfismo $\psi : U \rightarrow \psi(U) \subset \mathbb{R}^3$ tal que a superfície regular $\psi(U)$ tem E, F, G, l, m e n como coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente. Além disso, se U é conexo e se $\Phi : U \rightarrow \Phi(U) \subset \mathbb{R}^3$ é um outro difeomorfismo satisfazendo as mesmas condições, então existe uma translação T e uma transformação ortogonal própria ρ em $\mathbb{R}^3$ tal que $\psi = T \circ \rho \circ \Phi$.*

2.3 Formas normais de $\mathcal{A}$ -classes

Nesta seção, discutiremos o conceito de germes, que nos permite trabalhar localmente com conjuntos e aplicações, o de determinação finita, que facilita o trabalho, no sentido que permite reduzir o problema de classificar um certo germe ao estudo de seu k -jato, que é um polinômio. É interessante trabalhar com germes pois eles contêm toda a informação que pode ocorrer em um conjunto ou em uma aplicação em uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto. As singulares são representas de uma classe de A -equivalências, chamadas de formas normais, que seria os representantes “usuais” de uma classe. Para mais detalhes, Ver [6].

Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ contendo o ponto q . Dizemos que X é equivalente a Y em q se existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo q tal que $X|U = Y|U$. Assim, temos uma relação de equivalência bem definida sobre os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que contém q . Essa classe é chamada *germe de X em q* e é denotada por (X, q) .

Definição 2.3.1. *Sejam X e Y abertos de $\mathbb{R}^n$ contendo $q \in \mathbb{R}^n$ e sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ duas aplicações. Dizemos que as aplicações f e g são **equivalentes** (e denotamos por $f \sim g$) se existe um aberto $Z \subset X \cap Y$ contendo q tal que $f|Z = g|Z$, isto é, as aplicações f e g coincidem em Z . Esta é uma relação de equivalência e as classes são chamadas **germes de aplicações suave**. Os elementos de uma classe são denominados **representantes**. Denotamos por $f : (X, q) \rightarrow \mathbb{R}^m$ a classe de equivalência de f .*

Para simplificar, vamos trabalhar com $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$. Uma aplicação f é um difeomorfismo quando é uma bijeção diferenciável, cuja inversa também é diferenciável. Logo, sua diferencial é um isomorfismo e através do Teorema da aplicação Inversa, é provado que a recíproca é válida localmente.

Se supomos que todos os elementos da classe de equivalência de f assumem o mesmo valor em q , digamos p , denotamos seu germe por $f : (\mathbb{R}^n, q) \rightarrow (\mathbb{R}^m, p)$. Caso contrário, no que segue $f : (\mathbb{R}^n, q) \rightarrow \mathbb{R}^m$ denota uma aplicação suave. Dizemos que um germe de aplicação f é suave se um de seus representantes e, portanto todos, é suave em q . Da mesma forma, dizemos que f é um germe de difeomorfismo se um de seus representantes é um difeomorfismo local em q .

Denotamos por $\mathcal{E}_n$ o conjunto dos germes de funções suaves na origem de $\mathbb{R}^n$. O conjunto de todos os germes de aplicações suaves f é denotado por $\mathcal{E}(n, m)$, ou simplesmente por $\mathcal{E}(n)$, quando $n = m$. Note que $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}(n, 1)$. É natural definirmos uma relação de equivalência entre germes e buscar por uma classificação para as classes de equivalência, ou seja, listar representantes para cada classe de equivalência, de tal maneira que sejam da forma mais simples possível. Tais representantes para as classes são comumente referidos como formas normais.

Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ germes suaves. Dizemos que f e g são $\mathcal{A}$ -equivalentes se existem difeomorfismos $k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tais que $f = h \circ g \circ k^{-1}$ e denotamos como $f \sim_{\mathcal{A}} g$. Também podemos definir $\mathcal{A}$ -equivalência para aplicações de forma análoga. Observe que a $\mathcal{A}$ -equivalência preserva singularidades. Desta forma, podemos definir a cuspidal edge e a swallowtail através da $\mathcal{A}$ -equivalência.

Definição 2.3.2. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ então dizemos que f é uma*

1) **cuspidal edge** quando f é $\mathcal{A}$ -equivalente a cuspidal edge usual, isto é

$$f \sim_{\mathcal{A}} (x, y^2, y^3),$$

2) **swallowtail** quando f é $\mathcal{A}$ -equivalente a swallowtail usual, isto é

$$f \sim_{\mathcal{A}} (3x^4 + x^2y, 4x^3 + 2xy, y).$$

3) **cross-cap** quando f é $\mathcal{A}$ -equivalente a cross-cap usual, isto é

$$f \sim_{\mathcal{A}} (x, y^2, xy).$$

A seguir, faremos uma breve revisão sobre o espaço de k -jatos e as definições de ação de um grupo e suas órbitas a fim de auxiliar no Capítulo 2, onde faremos um resultado utilizando esse espaço.

O *espaço dos jatos* $J^k(n, m)$ é o espaço vetorial real das aplicações $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ onde cada componente f_i de f é um polinômio de grau $\leq k$ nas coordenadas canônicas $x_1, \dots, x_n$ de $\mathbb{R}^n$ com termo constante nulo. Para cada aplicação f suave e a cada $a \in \mathbb{R}^n$, definimos a aplicação $j^k f : \mathbb{R}^n \rightarrow J^k(n, m)$ por $j^k f(a)$ é o polinômio de Taylor de $f(x + a) - f(a)$ de ordem k na origem. Dizemos de $j^k f(a)$ é o k -jato de f em a .

O k -jato de um germe f em $\mathbf{0}$ é o k -jato de algum dos seus representantes em $\mathbf{0}$. Note que esta definição não depende da escolha do representante de f em $\mathbf{0}$. Por fim, uma *ação* de um grupo G em um conjunto M é uma aplicação $\alpha : G \times M \rightarrow M$ definida por $(g, x) \mapsto \alpha(g, x) := g.x$, tal que $1.x = x$ e $(hg).x = h(g.x)$, para todo $h, g \in G$ e para todo $x \in M$. Fixando $x \in M$, temos a aplicação $\alpha_x : G \rightarrow M$ definida por $g \mapsto \alpha_x(g) = g.x$ é a *órbita* de x pela ação de g .

3 GEOMETRIA DE SUPERFÍCIES DE POSTO 1 EM $\mathbb{R}^3$

O objetivo deste capítulo é apresentar parte do artigo [8] que trata da geometria de superfícies em $\mathbb{R}^3$ de posto 1. Este nosso estudo é importante uma vez que cuspidal edges são superfícies de posto 1. Como nosso estudo é local, por uma superfície de posto 1 em $q \in \mathbb{R}^2$ queremos dizer uma aplicação suave $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com U um aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo q , tal que a diferencial de f em q tem posto 1, isto é, $\dim df_q(\mathbb{R}^2) = 1$, ou ainda, posto $Jf(q) = 1$, onde $Jf(q)$ é a matriz jacobiana de f em q . Equivalentemente, denotando por (x, y) as coordenadas de $\mathbb{R}^2$, uma outra condição é que $\{f_x(q), f_y(q)\}$ seja linearmente dependente, onde $f_x(q)$ e $f_y(q)$ não sejam simultaneamente nulos. Dizemos ainda que q é um *ponto singular de posto 1* de f . Ao conjunto imagem de f também chamamos de superfície de posto 1.

Nosso principal objetivo é apresentar a definição de *curvatura umbílica* em p ($\kappa_u(p)$), onde $p = f(q)$, a qual usamos no Capítulo 4, que é o principal capítulo deste trabalho.

Na sequência de todo este trabalho, a origem de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, será denotada também por $\mathbf{0}$. Omitiremos aqui várias demonstrações, uma vez que elas estão detalhadas na Dissertação [14], dando preferência aos exemplos que ilustram as definições e resultados.

Exemplo 3.0.1. (a) A superfície $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$, é chamada *cuspidal edge usual*, e sua imagem é dada na Figura 3.1, esquerda. Temos $f_x(x, y) = (1, 0, 0)$ e $f_y(x, y) = (0, 2y, 3y^2)$. Logo, $q = (x, 0)$ é um ponto singular de posto 1 de f , para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, a cuspidal edge usual é uma superfície singular de posto 1 em q .

(b) A superfície $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x, y^2, xy)$, é chamada *cross-cap usual* e sua imagem é dada na Figura 3.1, centro. Temos $f_x(x, y) = (1, 0, y)$ e $f_y(x, y) = (0, 2y, x)$. Portanto a cross-cap usual é uma superfície singular de posto 1 em $q = (0, 0)$.

(c) A superfície $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (3x^4 + x^2y, 4x^3 + 2xy, y)$, é chamada *swallowtail usual* e sua imagem é dada na Figura 3.1, direita. Como $f_x(x, y) = (12x^3 + 2xy, 12x^2 + 2y, 0)$ e $f_y(x, y) = (x^2, 2x, 1)$, então os pontos da forma $q = (x, -6x^2)$ são pontos singulares de posto 1 de f , para todo $x \in \mathbb{R}$.

□

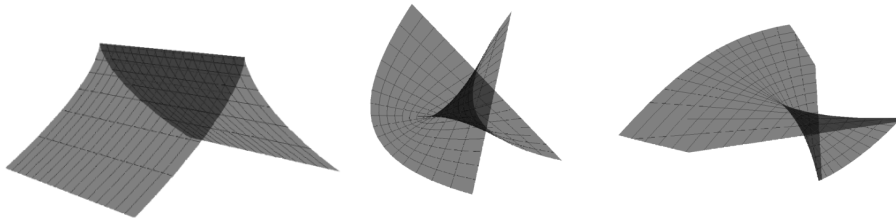


Figura 3.1: Cuspidal edge, cross-cap e swallowtail usuais do Exemplo 3.0.1.
Fonte: Feita pelo autor.

Em todo este capítulo, U denotará um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação suave de posto 1 em $q \in U$, com $f(q) = p$. Além disso, $M = f(U)$, (x, y) denota as coordenadas de $\mathbb{R}^2$ com relação a base canônica $\{e_1, e_2\}$ e (u, v, w) denota as coordenadas de $\mathbb{R}^3$ com relação a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$.

3.1 Primeira e segunda formas fundamentais para superfícies de posto 1

Definição 3.1.1. A métrica euclidiana em $\mathbb{R}^3$ induz uma pseudométrica em $\mathbb{R}^2$

$$I_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$I_q((x, y), (x', y')) = \langle df_q(x, y), df_q(x', y') \rangle,$$

chamada de **primeira forma fundamental de $M = f(U)$ em q** .

Observe que I não é uma métrica sobre $\mathbb{R}^2$ pois, dado $(x, y) \in \text{Ker}(df_q)$ não nulo, tem-se que $\langle df_q(x, y), df_q(x, y) \rangle = 0$.

Definição 3.1.2. Os coeficientes da primeira forma fundamental de M em q são as funções dadas por:

$$\begin{aligned} E(q) &= I_q(e_1, e_1) = \langle f_x(q), f_x(q) \rangle, \\ F(q) &= I_q(e_1, e_2) = \langle f_x(q), f_y(q) \rangle, \\ G(q) &= I_q(e_2, e_2) = \langle f_y(q), f_y(q) \rangle. \end{aligned}$$

Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, obtemos

$$\begin{aligned} I_q((x, y), (x, y)) &= \langle df_q(x, y), df_q(x, y) \rangle = \langle xf_x(q) + yf_y(q), xf_x(q) + yf_y(q) \rangle \\ &= x^2 \langle f_x(q), f_x(q) \rangle + 2xy \langle f_x(q), f_y(q) \rangle + y^2 \langle f_y(q), f_y(q) \rangle \\ &= x^2 E(q) + 2xy F(q) + y^2 G(q). \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.3. Seja $M = f(U)$ qualquer uma das superfícies estudadas no Exemplo 3.0.1.

(a) Para a cuspidal edge usual temos $f_x(x, 0) = (1, 0, 0)$ e $f_y(x, 0) = (0, 0, 0)$. Logo, $E(q) = 1$ e $F(q) = G(q) = 0$. Assim, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos que a primeira forma fundamental de M no ponto singular $q = (x, 0)$ é dada por $I_q((x, y), (x, y)) = x^2$.

(b) Para a cross-cap usual, como $f_x(0, 0) = (1, 0, 0)$ e $f_y(0, 0) = (0, 0, 0)$ temos que sua primeira forma fundamental em $q = (0, 0)$ coincide com a da cuspidal edge usual.

(c) Para o swallowtail usual, para $q = (x, -6x^2)$ temos $f_x(q) = (0, 0, 0)$ e $f_y(q) = (x^2, 2x, 1)$. Logo, $E(q) = F(q) = 0$ e $G(q) = x^4 + 4x^2 + 1$. Logo, para $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, $I_q((x', y'), (x', y')) = y'^2(x^4 + 4x^2 + 1)$. $\square$

A *reta tangente* a $M = f(U)$ em $p = f(q)$, denotada por $T_p M$, é a reta que passa por p e é paralela ao subespaço de dimensão 1 dada por $df_q(\mathbb{R}^2)$, que sabemos ser uma reta em $\mathbb{R}^3$ pois f tem posto 1 em q . O *plano normal* a M em p , denotado por $N_p M$, é o plano perpendicular à reta $T_p M$. Assim, temos que

$$T_p \mathbb{R}^3 = T_p M \oplus N_p M,$$

onde $\oplus$ denota a soma direta de espaços vetoriais e $T_p \mathbb{R}^3$ é o espaço tangente a $\mathbb{R}^3$ em p , ou seja, é o espaço vetorial $\{(p, v); v \in \mathbb{R}^3\}$, com as operações

$$\begin{aligned} (p, v) + (p, w) &= (p, v + w) \\ \lambda(p, v) &= (p, \lambda v), \end{aligned} \quad (3.1)$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v, w \in \mathbb{R}^3$, o qual é isomorfo a $\mathbb{R}^3$. Note que a origem de $T_p \mathbb{R}^3$ é o vetor $(p, 0)$. Vamos denotar $(p, v) \in T_p \mathbb{R}^3$ por v_p , ou simplesmente por v para simplificar a notação. Geometricamente, v_p é o vetor em $\mathbb{R}^3$ com ponto inicial em p e final em $p + v$. Assim, a origem de $T_p \mathbb{R}^3$ é o próprio p .

Exemplo 3.1.4. Considerando as matrizes jacobianas das aplicações dos itens (a) e (b) do Exemplo 3.0.1, obtemos que a reta tangente e o plano normal na origem da cuspidal edge e cross-cap usuais são retas e planos paralelos aos eixos u e vw , respectivamente. Para swallowtail usual, a reta tangente na origem é paralela ao eixo w e o plano normal na origem é paralelo ao plano uv . $\square$

Definição 3.1.5. A *segunda forma fundamental de f em q* é a aplicação

$$II_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow N_p M$$

definida como segue. Definimos:

$$II_q(e_1, e_1) = f_{xx}^\perp(q), \quad II_q(e_1, e_2) = f_{xy}^\perp(q) \quad e \quad II_q(e_2, e_2) = f_{yy}^\perp(q),$$

onde, para $v \in \mathbb{R}^3$, $v^\perp$ denota a projeção ortogonal do vetor v_p sobre $N_q M$, e estendemos II_q para $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ de modo único como uma aplicação bilinear simétrica.

Tomando $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned} II_q((x, y), (x', y')) &= II_q(xe_1 + ye_2, x'e_1 + y'e_2) \\ &= xx'II_q(e_1, e_1) + xy'II_q(e_1, e_2) + yx'II_q(e_2, e_1) + yy'II_q(e_2, e_2) \\ &= xx'f_{xx}^\perp(q) + (xy' + yx')f_{xy}^\perp(q) + yy'f_{yy}^\perp(q). \end{aligned}$$

Assim, em particular obtemos:

$$II_q((x, y), (x, y)) = x^2 f_{xx}^\perp(q) + 2xy f_{xy}^\perp(q) + y^2 f_{yy}^\perp(q) \quad (3.2)$$

Quando usamos uma outra base para $\mathbb{R}^2$ que não a canônica para calcular a segunda forma fundamental, obtêm-se a mesma aplicação bilinear simétrica. Ou seja, vale o seguinte lema.

Lema 3.1.6. ([8], p.108) *A definição da segunda forma fundamental não depende da escolha de coordenadas em $\mathbb{R}^2$.*

Exemplo 3.1.7. Considerando as superfícies estudadas nos Exemplos 3.0.1 e 3.1.4, e tomando a base ortonormal $\{e_2, e_3\}$ de $N_p M = \text{plano-}vw$ para os itens (a) e (b) e $\{e_1, e_2\}$ para o item (c), calculemos suas respectivas segundas formas fundamentais de f em $q = (0, 0)$. Tomando $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos:

(a) Seja $M = f(U)$ a cuspidal edge usual. Temos, $f_{xx}^\perp(q) = f_{xy}^\perp(q) = (0, 0, 0)$ e $f_{yy}^\perp(q) = (0, 2, 0)$. Portanto,

$$II_q((x, y), (x, y)) = (0, 2y^2, 0).$$

(b) Seja $M = f(U)$ a cross-cap usual. Temos, $f_{xx}^\perp(q) = (0, 0, 0)$, $f_{xy}^\perp(q) = (0, 0, 1)$ e $f_{yy}^\perp(q) = (0, 2, 0)$. Portanto,

$$II_q((x, y), (x, y)) = (0, 2y^2, 2xy)$$

(c) Seja $M = f(U)$ o swallowtail usual. Temos $f_{xx}^\perp(q) = (0, 0, 0)$ e $f_{xy}^\perp(q) = f_{yy}^\perp(q) = (0, 2, 0)$. Portanto,

$$II_q((x, y), (x, y)) = (0, 4xy, 0).$$

□

Note que neste exemplo, por abuso de linguagem, denotamos $(e_1)_p$, $(e_2)_p$ e $(e_3)_p$ por e_1 , e_2 e e_3 , isto é, $(e_1)_p = e_1$, $(e_2)_p = e_2$ e $(e_3)_p = e_3$ por $p = (0, 0, 0)$.

Definição 3.1.8. *Seja $\nu \in N_p M$. A segunda forma fundamental de f em q ao longo de ν é a aplicação $II_\nu : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$II_\nu((x, y), (x', y')) = \langle II_q((x, y), (x', y')), \nu \rangle,$$

e os coeficientes da segunda forma fundamental de f em q ao longo de ν em q por:

$$l_\nu(q) = \langle II_q(e_1, e_1), \nu \rangle = \langle f_{xx}^\perp(q), \nu \rangle, \quad m_\nu(q) = \langle II_q(e_1, e_2), \nu \rangle = \langle f_{xy}^\perp(q), \nu \rangle$$

$$e \ n_\nu(q) = \langle II_q(e_2, e_2), \nu \rangle = \langle f_{yy}^\perp(q), \nu \rangle.$$

Dados $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$\begin{aligned} II_\nu((x, y), (x', y')) &= \langle II_q((x, y), (x', y')), \nu \rangle = \langle xx' f_{xx}^\perp(q) + (xy' + yx') f_{xy}^\perp(q) \\ &+ yy' f_{yy}^\perp(q), \nu \rangle = xx' \langle f_{xx}^\perp(q), \nu \rangle + (xy' + x'y) \langle f_{xy}^\perp(q), \nu \rangle \\ &+ yy' \langle f_{yy}^\perp(q), \nu \rangle = xx' l_\nu(q) + (xy' + x'y) m_\nu(q) + yy' n_\nu(q). \end{aligned}$$

Assim, em particular obtemos:

$$II_\nu((x, y), (x, y)) = x^2 l_\nu(q) + 2xym_\nu(q) + y^2 n_\nu(q). \quad (3.3)$$

Fixando uma base ortonormal $\{\nu_1, \nu_2\}$ de $N_p M$, como $II_q((x, y), (x, y)) \in N_p M$, obtemos:

$$\begin{aligned} II_q((x, y), (x, y)) &= \langle II_q((x, y), (x, y)), \nu_1 \rangle \nu_1 + \langle II_q((x, y), (x, y)), \nu_2 \rangle \nu_2 \\ &= II_{\nu_1}((x, y), (x, y)) \nu_1 + II_{\nu_2}((x, y), (x, y)) \nu_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

De (3.3) obtemos:

$$\begin{aligned} II_q((x, y), (x, y)) &= (x^2 l_{\nu_1}(q) + 2xym_{\nu_1}(q) + y^2 n_{\nu_1}(q)) \nu_1 + (x^2 l_{\nu_2}(q) + 2xym_{\nu_2}(q) \\ &\quad + y^2 n_{\nu_2}(q)) \nu_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Exemplo 3.1.9. Considerando as superfícies estudadas nos Exemplos 3.0.1, 3.1.4 e 3.1.7, calculemos suas respectivas segundas formas fundamentais ao longo de $\nu = (0, \nu_2, \nu_3)$ para os itens (a) e (b) e $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ para o item (c) e seus coeficientes em $q = (0, 0)$. Tomando $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos:

(a) Seja $M = f(U)$ a cuspidal edge usual. Temos, $l_\nu(q) = m_\nu(q) = 0$ e $n_\nu(q) = 2\nu_2$. De (3.3), obtemos:

$$II_\nu((x, y), (x, y)) = 2\nu_2 y^2.$$

(b) Seja $M = f(U)$ a cross-cap usual. Temos $l_\nu(q) = 0$, $m_\nu(q) = \nu_3$ e $n_\nu(q) = 2\nu_2$. De (3.3), obtemos:

$$II_\nu((x, y), (x, y)) = 2\nu_2 y^2 + 2\nu_3 xy.$$

(c) Seja $M = f(U)$ o swallowtail usual. Temos $l_\nu(q) = 0$ e $m_\nu(q) = n_\nu(q) = 2\nu_2$. De (3.3), obtemos:

$$II_\nu((x, y), (x, y)) = 2\nu_2(2xy + y^2).$$

□

3.2 Parábola de curvatura

Definição 3.2.1. Sejam C_q o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por todos os vetores unitários com relação a pseudométrica I_q e $\eta_q : C_q \rightarrow N_p M$ a aplicação dada por

$$\eta_q(x, y) = II_q((x, y), (x, y)).$$

A **parábola de curvatura de $M = f(U)$ em $p = f(q)$** , a qual denotamos por Δ_p , é a imagem de η_q , isto é, $\Delta_p = \eta_q(C_q)$.

Dado que $C_q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{I_q((x, y), (x, y))} = 1\}$. Temos:

$$\Delta_p = \eta_q(C_q) = \{II_q((x, y), (x, y)); I_q((x, y), (x, y)) = 1\} \subset N_pM.$$

Exemplo 3.2.2. Considere o obtido nos Exemplos 3.1.3 e 3.1.7, onde $q = (0, 0)$ é o ponto singular, $f(q) = p = (0, 0, 0)$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Para os itens (a) e (b), $I_q((x, y), (x, y)) = x^2$, então $C_q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = \pm 1\}$.

(a) Seja $M = f(U)$ a cuspidal edge usual. Como $II_q((x, y), (x, y)) = (0, 2y^2, 0)$, então

$$\eta_q(C_q) = \{(0, 2y^2, 0); y \in \mathbb{R}\}.$$

Logo a parábola de curvatura Δ_p de M é a semirreta parametrizada por $\alpha(y) = (0, 2y^2, 0)$. Neste caso, dizemos que a extremidade da semireta é o **vértice de Δ_p** . Ver Figura 3.2, esquerda.

(b) Seja $M = f(U)$ a cross-cap usual. Como $II_q((x, y), (x, y)) = (0, 2y^2, 2xy)$, então

$$\eta_q(C_q) = \{(0, 2y^2, 2xy); y \in \mathbb{R}\}.$$

Logo a parábola de curvatura Δ_p de M é uma parábola não degenerada em N_pM e pode ser parametrizada por $\alpha(y) = (0, 2y^2, 2y)$. Ver Figura 3.2, centro.

(c) Seja $M = f(U)$ o swallowtail usual. Como $II_q((x, y), (x, y)) = (0, 4xy, 0)$, então

$$\eta_q(C_q) = \{(0, 4xy, 0); y \in \mathbb{R}\}.$$

Logo a parábola de curvatura Δ_p de M é uma reta em N_pM passando pela origem parametrizada por $\alpha(y) = (0, 4y, 0)$. Ver Figura 3.2, direita. $\square$

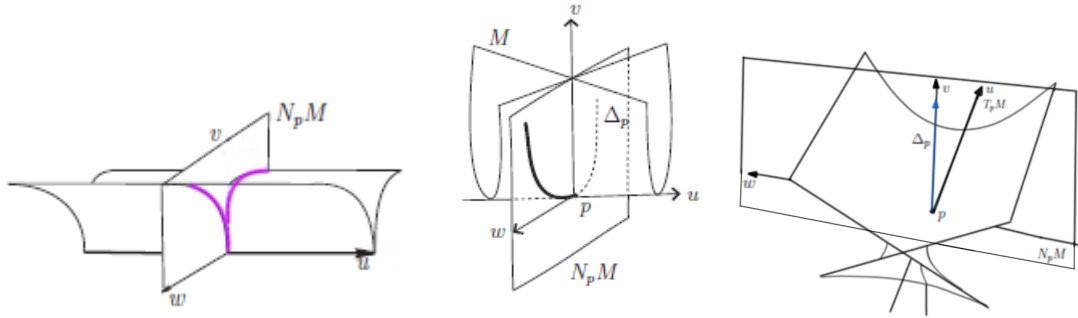


Figura 3.2: Cuspidal edge, cross-cap e swallowtail usuais do Exemplo 3.2.2

Fonte: primeira e segunda figura: Nunez, 2018, p. 80. Terceira figura, feita do autor.

Observação 3.2.3. Como f tem posto 1 em q , podemos escolher um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e realizar uma rotação em $\mathbb{R}^3$ de tal forma que f pode ser escrita como

$$f(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y)),$$

onde $(f_i)_x(q) = (f_i)_y(q) = 0$, $i = 2, 3$. Neste caso, a reta tangente a $M = f(U)$ em $p = f(q)$ é paralela ao eixo- u e o plano normal é o plano- vw , onde estamos denotando

por (u, v, w) as coordenadas de $\mathbb{R}^3$. Além disso, $E(q) = 1$ e $F(q) = G(q) = 0$ e, dado $(x, y) \in C_q$, temos

$$I_q((x, y), (x, y)) = x^2 E(q) + 2xy F(q) + y^2 G(q) = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Então, fixando $\{\nu_1, \nu_2\}$ base ortonormal de $N_p M$ e usando (3.5), obtemos que

$$\alpha(y) = (0, l_{\nu_1}(q) + 2ym_{\nu_1}(q) + y^2 n_{\nu_1}(q), l_{\nu_2}(q) + 2ym_{\nu_2}(q) + y^2 n_{\nu_2}(q)), \quad (3.6)$$

é uma parametrização para a parábola de curvatura Δ_p no plano normal de M em p . Além disso, Δ_p é uma parábola no plano normal, a qual se degenera em uma reta, semirreta ou a um ponto se, e somente se, sua curvatura se anula ou, equivalentemente, $m_{\nu_1}(q)n_{\nu_2}(q) - m_{\nu_2}(q)n_{\nu_1}(q) = 0$. Para detalhes da demonstração ver [14], p. 81. $\square$

Veremos a seguir um resultado que distingui os diferentes casos da parábola de curvatura. O seguinte resultado encontrado em [12], nos dá uma partição de todos os germes de aplicação f de posto 1 na vizinhança da origem de acordo com seu 2-jato sob a ação de $\mathcal{A}^2$, que denota o espaço de 2-jatos de difeomorfismos na fonte e na meta. Vamos denotar por $J^2(2, 3)$ o espaço de 2-jatos $j^2 f(0, 0)$ dos germes de aplicação f e por $\Sigma^1 J^2(2, 3)$ o subconjunto de 2-jatos de posto 1.

Proposição 3.2.4. ([8], p. 111) *Existem quatro órbitas em $\Sigma^1 J^2(2, 3)$ sob a ação de $\mathcal{A}^2$, que são*

$$(x, y^2, xy), (x, y^2, 0), (x, xy, 0) \text{ e } (x, 0, 0).$$

No próximo teorema, mostramos que a parábola de curvatura pode ser facilmente usada para distinguir entre os quatro tipos de singularidades de posto 1, apenas olhando para o tipo de degeneração da parábola de curvatura.

Teorema 3.2.5. ([8], p. 111) *Seja $M = f(U)$ uma superfície de posto 1 em $p = f(q)$, onde q e p são as origens de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Então os seguintes itens são válidos:*

- (a) Δ_p é uma parábola não degenerada se, e somente se, $j^2 f(0) \sim (x, y^2, xy)$;
- (b) Δ_p é uma semirreta se, e somente se, $j^2 f(0) \sim (x, y^2, 0)$;
- (c) Δ_p é uma reta se, e somente se, $j^2 f(0) \sim (x, xy, 0)$;
- (d) Δ_p é um ponto se, e somente se, $j^2 f(0) \sim (x, 0, 0)$.

Exemplo 3.2.6. Vimos no Exemplo 3.2.2 que a parábola de curvatura da cuspidal edge usual é uma semirreta, da cross-cap usual é uma parábola não degenerada e do swallowtail usual é uma reta. O teorema acima diz que o tipo de parábola de curvatura é invariante pela $\mathcal{A}$ -equivalência e, portanto, a parábola de curvatura da cross-cap, cuspidal edge e swallowtail são, respectivamente, parábolas não degeneradas, semirretas e retas. $\square$

3.3 Direções assintóticas e binormais

Veremos agora duas definições importantes para o estudo da curvatura umbílica. No que segue, $M = f(U) \subset \mathbb{R}^3$ continuará denotando uma superfície de posto 1 em $f(q) = p$ e Δ_p sua parábola de curvatura em p .

Definição 3.3.1. Dizemos que uma direção dada por um vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^2$ é **assintótica** se existe um vetor não nulo $\nu \in N_p M$ tal que $II_\nu(u, \nu) = 0$, para todo $\nu \in \mathbb{R}^2$. Além disso, neste caso dizemos que ν é uma **direção binormal** associada a direção assintótica u .

Desta definição, podemos observar o seguinte:

(a) A definição de “direção” assintótica faz sentido pois, se $u \in \mathbb{R}^2$ é direção assintótica, então λu também é uma direção assintótica, para todo λ real. De fato, para todo ν em $\mathbb{R}^2$, da bilinearidade da segunda forma fundamental e do produto interno, obtemos:

$$II_\nu(\lambda u, \nu) = \langle II_q(\lambda u, \nu), \nu \rangle = \lambda \langle II_q(u, \nu), \nu \rangle = 0,$$

onde ν é direção binormal associada a u .

(b) Se u é uma direção assintótica unitária, isto é, $u \in C_q$, e ν uma direção binormal associada então a reta que passa por p e é perpendicular a ν contém um ponto da parábola de curvatura Δ_p . De fato, da definição temos, $\langle II_q(u, \nu), \nu \rangle = 0, \forall \nu \in \mathbb{R}^2$, ou seja, $II_q(u, \nu)$ é um vetor de $N_p M$ perpendicular a ν . Em particular, tomando $\nu=u$, temos que o vetor $II_q(u, u)$, o qual corresponde a um ponto de Δ_p , é perpendicular a direção binormal ν , ou seja, a reta que passa por p e é perpendicular a ν contém um ponto da parábola de curvatura Δ_p , como afirmamos.

Exemplo 3.3.2. Tomemos $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, p a origem do $\mathbb{R}^3$ e $\nu = (0, \nu_2, \nu_3) \in N_p M$ não nulo. Sejam $M = f(U)$ qualquer uma das superfícies estudadas no Exemplo 3.1.9.

(a) Seja $M = f(U)$ a cuspidal edge usual. Então u é uma direção assintótica de M se existe ν tal que, para todo $\nu = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, $II_\nu(u, \nu) = 2\nu_2 yy' = 0$. Assim toda direção $u \in \mathbb{R}^2$ é assintótica, pois basta toma $\nu = (0, 0, \nu_3)$ com $\nu_3 \neq 0$ como direção binormal associada. Em particular, se tomarmos a direção assintótica da forma $u=(x, 0)$, com $x \neq 0$, qualquer direção em $N_p M$ é direção binormal associada a u .

(b) Seja $M = f(U)$ a cross-cap usual. Então u é uma direção assintótica de M se existe ν tal que, para todo $\nu = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, $II_\nu(u, \nu) = 2\nu_2 yy' + \nu_3(xy' + yx') = 0$. Assim, $u=(x, 0)$ é direção assintótica, pois basta tomar $\nu = (0, \nu_2, 0)$ com $\nu_2 \neq 0$ como direção binormal associada.

(c) Seja $M = f(U)$ o swallowtail usual. Então u é uma direção assintótica de M se existe ν tal que, para todo $\nu = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, $II_\nu(u, \nu) = 4(xy' + yx')\nu_2 + 2yy'\nu_2 = 0$. Assim, toda direção $u \in \mathbb{R}^2$ é assintótica, pois basta toma $\nu = (0, 0, \nu_3)$ com $\nu_3 \neq 0$ como direção binormal associada. $\square$

Considerando $\{\nu_1, \nu_2\}$ uma base ortonormal de $N_p M$, vamos buscar no resultado a seguir condições para que uma direção tangente $u \in \mathbb{R}^2$ seja assintótica. Sua demonstração pode ser encontrada com detalhes em [14], p. 24.

Proposição 3.3.3. ([8], p.115) Uma direção $u = xe_1 + ye_2 \in \mathbb{R}^2$ é assintótica se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} y^2 & -xy & x^2 \\ l_{\nu_1}(q) & m_{\nu_1}(q) & n_{\nu_1}(q) \\ l_{\nu_2}(q) & m_{\nu_2}(q) & n_{\nu_2}(q) \end{pmatrix} = 0.$$

Definição 3.3.4. Chamamos a direção dada pelo núcleo de df_q de **direção nula**, ou seja, todo vetor em $\mathbb{R}^2$ pertencente ao núcleo de df_q é uma direção nula.

Considere f como na Observação 3.2.3, com q e p a origem de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Como $f_x = (1, (f_2)_x, (f_3)_x)$ e $f_y = (0, (f_2)_y, (f_3)_y)$ então o núcleo de df_q é o eixo- y , ou seja, a direção dada por $e_2 = (0, 1)$ é direção nula. Além disso, $C_q = \{(\pm 1, y)\}$ e a parábola de curvatura Δ_p é parametrizada por (3.6).

Proposição 3.3.5. ([8], p. 116) Nas condições acima, temos:

- (a) A direção $(1, y) \in \mathbb{R}^2$ é assintótica se, e somente se, $\alpha(y)$ e $\alpha'(y)$ são colineares, onde α é a parametrização de Δ_p dada em (3.6).
- (b) A direção nula e_2 é assintótica se, e somente se, Δ_p é uma parábola degenerada.

O resultado acima é referente ao Lema 2.5, p.116 de [8], juntamente com a Proposição 4.18, p. 95 de [14].

Por abuso de linguagem, o parâmetro $y \in \mathbb{R}$ correspondente a uma direção assintótica $(1, y)$ também é dito *direção assintótica*. Vamos adicionar um parâmetro ao domínio de α e α' , denotado por y_∞ , correspondente a direção nula e_2 , da seguinte maneira:

- Se Δ_p é uma semireta ou uma reta,

$$\alpha(y_\infty) = \alpha'(y_\infty) := \frac{\alpha'(y)}{\|\alpha'(y)\|},$$

onde $y > 0$ é qualquer valor tal que $\alpha'(y) \neq 0$.

- Se Δ_p é um ponto,

$$\alpha(y_\infty) := \Delta_p \text{ e } \alpha'(y_\infty) := 0.$$

- Se Δ_p é uma parábola não degenerada, $\alpha(y_\infty)$ e $\alpha'(y_\infty)$ não estão definidos.

Também chamaremos o parâmetro y_∞ de *direção assintótica*.

Considerando a Proposição 3.3.5, vamos analisar as possibilidades para as direções assintóticas em $\mathbb{R} \cup \{y_\infty\}$ para cada tipo de parábola de curvatura, uma vez que $\alpha(y)$ e $\alpha'(y)$ devem ser colineares. Ver Figura 3.3.

(1) Se Δ_p é uma parábola não degenerada então, para que $\alpha(y)$ e $\alpha'(y)$ sejam colineares, a reta tangente a Δ_p no parâmetro y deve passar pela origem p de $N_p M$. Logo, podem existir 0, 1 ou 2 direções assintóticas que ocorrem quando p está no interior, pertence ou está no exterior de Δ_p , respectivamente.

(2) Se Δ_p é uma semirreta, então, para que $\alpha(y)$ e $\alpha'(y)$ sejam colineares, com $y \neq y_\infty$, basta que um desses vetores de $N_p M$ seja nulo, ou que a reta que contém Δ_p passe por p . Assim, temos dois casos:

- Se a reta contendo Δ_p não passa por p então existem duas direções assintóticas $\{y_v, y_\infty\}$, onde y_v é o vértice de Δ_p , pois $\alpha'(y) = 0$.

- Se a reta contendo Δ_p passa por p então todo $y \in \mathbb{R} \cup \{y_\infty\}$ é direção assintótica.
- (3) Quando Δ_p é uma reta, então $\alpha(y)$ e $\alpha'(y)$, $y \neq y_\infty$, são colineares se, e somente se, Δ_p passa por p . Assim, temos dois casos:
- Se a reta não contém p então y_∞ é a única direção assintótica.
 - Se a reta contém p então cada $y \in \mathbb{R} \cup \{y_\infty\}$ é uma direção assintótica.
- (4) Se Δ_p é um ponto, então todo $y \in \mathbb{R} \cup \{y_\infty\}$ é direção assintótica, uma vez que $\alpha'(y) = 0$.

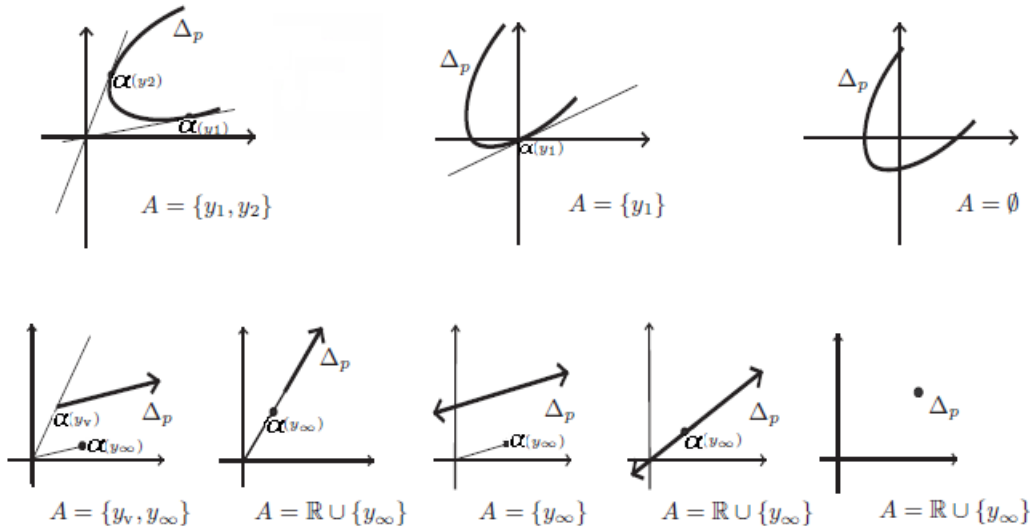


Figura 3.3: Possibilidades para Δ_p e o conjunto A das direções assintóticas de M em $N_p M$. Fonte: Nunez, 2018, p. 97.

Das considerações e resultados anteriores, concluímos o seguintes resultado.

Proposição 3.3.6. ([8], p. 117) *Uma direção $\nu \in N_p M$ é binormal se, e somente se, existe uma direção assintótica $y \in \mathbb{R} \cup \{y_\infty\}$ tal que ν é ortogonal ao subespaço gerado por $\alpha(y)$ e $\alpha'(y)$.*

Da mesma forma que fizemos anteriormente para direções assintóticas, vamos analisar as possibilidades para direções binormais de M em $N_p M$, utilizando da Proposição 3.3.6. Ver figura 3.4.

- (1) Se Δ_p é uma parábola não degenerada, então podem existir 0, 1 ou 2 direções binormais, uma para cada direção assintótica. Cada direção binormal é perpendicular a reta tangente à Δ_p que passa por p .
- (2) Se Δ_p é uma semirreta existem três casos:

- Se a reta que contém Δ_p não passa por p então temos 2 direções binormais, uma para cada direção assintótica. Mais precisamente, uma direção perpendicular à reta que contém Δ_p (associada a y_∞), e a outra é perpendicular à reta que passa por p e pelo vértice de Δ_p (associada a y_v).

- Se a reta que contém Δ_p passa por p , mas o vértice da parábola não é o ponto p , então temos apenas uma direção binormal, ortogonal a $\alpha'(y)$, com $y \neq y_v$.
- Se o vértice de Δ_p é o ponto p então a direção assintótica y_v satisfaz $\alpha(y_v) = \alpha'(y_v) = 0$ e, daí, todas as direções do plano normal são binormais. No caso de $y \neq y_v$, são os vetores ortogonais a reta que contém Δ_p .

(3) Se Δ_p é uma reta então existe apenas uma direção binormal, a qual é perpendicular a Δ_p .

(4) Se Δ_p é um ponto, temos dois casos:

- Se $\Delta_p \neq \{p\}$ então temos apenas uma direção binormal (a direção ortogonal a reta que passa por p e Δ_p).
- Se $\Delta_p = \{p\}$ então qualquer direção do plano normal é binormal, uma vez que o espaço gerado por $\alpha(y)$ e $\alpha'(y)$ é apenas o ponto p .

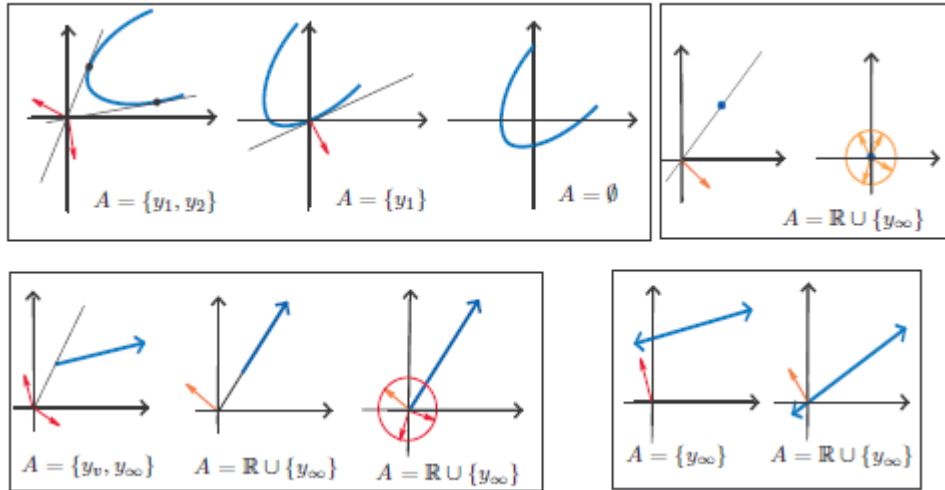


Figura 3.4: Possibilidades para Δ_p , o conjunto A das direções binormais de M em $N_p M$. Fonte: Nunez, 2018, p. 98.

3.4 Curvatura umbílica

Suponha $M = f(U)$ cuja parábola de curvatura Δ_p é uma parábola degenerada. Dada $\{\nu_1, \nu_2\}$, base ortonormal de $N_p M$ e $v \in \mathbb{R}^2$, de (3.4) temos a seguinte relação

$$II_q(v, v) = \langle II_q(v, v), \cdot_1 \rangle \cdot_1 + \langle II_q(v, v), \cdot_2 \rangle \cdot_2.$$

Vamos considerar uma base especial para $N_p M$. Suponha que Δ_p seja uma reta ou uma semirreta. Vamos denotar por ν_∞ a *direção binormal infinita*, ou seja, a direção binormal associada a direção assintótica y_∞ , de modo que a base ortonormal de $N_p M$

$$\{\alpha(y_\infty), \nu_\infty\} \tag{3.7}$$

seja positiva. Suponha agora que Δ_p seja um ponto diferente da origem de N_pM . Então $\alpha(y)$ é um vetor constante não nulo. Seja ν direção binormal tal que a base ortonormal de N_pM

$$\left\{ \nu, \frac{\alpha(y)}{\|\alpha(y)\|} \right\} \quad (3.8)$$

seja positiva.

Definição 3.4.1. As bases dadas em 3.7 e 3.8 são chamadas de **bases adaptadas** de N_pM . Quando $\Delta_p = \{p\}$, qualquer base ortonormal positiva de N_pM é chamada de **base adaptada**. Ver Figura 3.5.

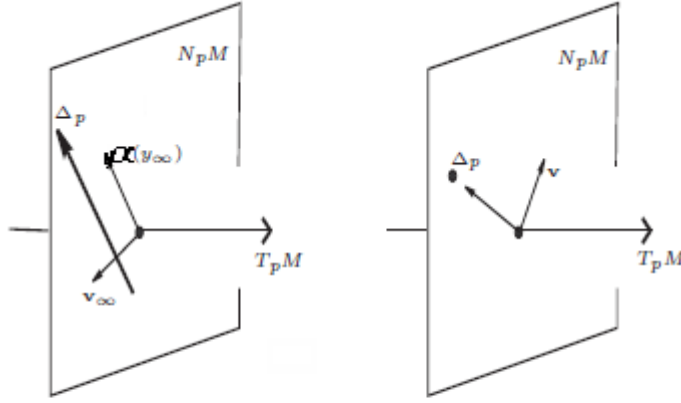


Figura 3.5: Bases adaptadas de N_pM . Fonte: Nunez, 2018, p.99.

Exemplo 3.4.2. Seja $M = f(U)$ qualquer uma das superfícies estudadas no Exemplo 3.2.2. Relembrando que nos três casos, $N_pM = \text{plano-}vw$, vamos calcular a base adaptada de N_pM , tomando $q = (0, 0)$ e $p = f(q) = (0, 0, 0)$.

(a) Seja M a cuspidal edge usual. Sua parábola de curvatura é a semirreta parametrizada por $\alpha(y) = (0, 2y^2, 0)$, cujo vértice é a origem. A base adaptada de N_pM é dada por (3.7), sendo:

$$\alpha(y_\infty) = \alpha'(y) := \frac{\alpha'(y)}{\|\alpha'(y)\|} = (0, 1, 0).$$

Para que $\{\alpha(y_\infty), \nu_\infty\}$ seja uma base adaptada, a direção binormal ν_∞ associada a y_∞ deve ter norma 1 e ser ortogonal a $(0, 1, 0)$. Assim, tomando $\nu_\infty = (0, 0, 1)$, obtemos $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ base adaptada de N_pM .

(b) Seja M a cross-cap usual. Sua parábola de curvatura Δ_p é a parábola não degenerada parametrizada por $\alpha(y) = (0, 2y^2, 2y)$. Logo, não podemos realizar o cálculo da base adaptada de N_pM , pois $\alpha(y_\infty)$ e $\alpha'(y_\infty)$ não estão definidos.

(c) Seja M o swallowtail usual. Sua parábola de curvatura é a reta passando pela origem parametrizada por $\alpha(y) = (0, 4y, 0)$. Então neste caso, a base adaptada de $N_p M$ é dada por (3.7), com

$$\alpha(y_\infty) = \alpha'(y) := \frac{\alpha'(y)}{\|\alpha'(y)\|} = (0, 1, 0).$$

Assim, $\{\alpha(y_\infty), \nu_\infty\}$ é base adaptada, onde $\nu_\infty = (0, 0, 1)$. $\square$

Dado $v \in C_q$ temos $II_q(v, v) \in \Delta_p$. Assim, segue da definição que em uma base adaptada $\{\nu_1, \nu_2\}$ de $N_p M$, $II_{\nu_2}(v, v)$ não depende de $v \in C_q$, a menos de sinal.

Definição 3.4.3. *Seja $M = f(U)$ cuja parábola de curvatura é degenerada. Dado um vetor $v \in C_q$ e uma base adaptada $\{\nu_1, \nu_2\}$ de $N_p M$, chamamos o número não negativo*

$$\kappa_u(p) = |\langle II_q(v, v), \nu_2 \rangle| = |II_{\nu_2}(v, v)|$$

de **curvatura umbílica** de M em $f(q) = p$.

Exemplo 3.4.4. Utilizando os cálculos do Exemplo 3.4.2, obtemos a curvatura umbílica de $M = f(U)$ em $p = (0, 0, 0)$. Dado $v = (x, y) \in C_q$, com $q = (0, 0)$, temos:

(a) Seja M a cuspidal edge usual. Como $II_q((x, y), (x, y)) = (0, 2y^2, 0)$ e $\nu_2 = \nu_\infty = (0, 0, 1)$, a curvatura umbílica de $M = f(U)$ em q é dada por:

$$\kappa_u(p) = |\langle II_q(v, v), \nu_2 \rangle| = |\langle (0, 2y^2, 0), (0, 0, 1) \rangle| = 0.$$

(b) Seja M o swallowtail usual. Como $II_q((x, y), (x, y)) = (0, 4xy, 0)$ e $\nu_2 = \nu_\infty = (0, 0, 1)$, a curvatura umbílica de $M = f(U)$ em q é dada por:

$$\kappa_u(p) = |\langle II_q(v, v), \nu_2 \rangle| = |\langle (0, 4xy, 0), (0, 0, 1) \rangle| = 0.$$

$\square$

Observação 3.4.5. Superfícies de mesmo traço nem sempre tem mesma curvatura umbílica. De fato, sabemos que $M = f(U)$ onde

$$f(x, y) = (x, (y^3 + x)^2, (y^3 + x)^3)$$

tem mesmo traço que a cuspidal edge usual, porém, a curvatura umbílica da cuspidal edge usual é 0. Para esta outra parametrização, a reta tangente e o plano normal coincidem com as da cuspidal edge usual. Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $I_q((x, y), (x, y)) = x^2$ e $II_q((x, y), (x, y)) = (0, 2x^2, 0)$. Assim, a parábola de curvatura Δ_p de $M = f(U)$ em $p = (0, 0, 0)$ é apenas o ponto $\{(0, 2, 0)\}$. Logo, $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é base adaptada para $N_p M$. Portanto, $\forall v = (x, y) \in C_q$,

$$\kappa_u(p) = |\langle II_q(v, v), \nu_2 \rangle| = |\langle (0, 2, 0), (0, 1, 0) \rangle| = 2 \neq 0,$$

como queríamos. $\square$

Note que nesta observação também concluímos que a segunda forma fundamental e a parábola de curvatura dependem da parametrização de f . A seguir, vamos fazer a interpretação geométrica da curvatura umbílica, de acordo com as possibilidades para a parábola de curvatura Δ_p .

Observação 3.4.6. (a) Se Δ_p é um ponto, segue diretamente da definição de $\kappa_u(p)$ que $\kappa_u(p)$ é a distância entre Δ_p e p . Neste caso, $\kappa_u(p) = 0$ se, e somente se, $\Delta_p = \{p\}$.

(b) Se Δ_p é uma semirreta ou uma reta, então $\kappa_u(p)$ é a medida da projeção de Δ_p na direção dada por ν_∞ . De fato, como Δ_p é uma reta ou semirreta, então uma base adaptada é da forma $\{\alpha(y_\infty), \nu_\infty\}$. Logo, pela interpretação da Figura (3.4), a curvatura umbílica é a medida da projeção de Δ_p na direção dada por ν_∞ , uma vez que este é perpendicular à reta que contém p . Neste caso, $\kappa_u(p) = 0$ se, e somente se, Δ_p está contida na reta passando por p na direção de $\alpha'(y)$. Ver Figura 3.6.

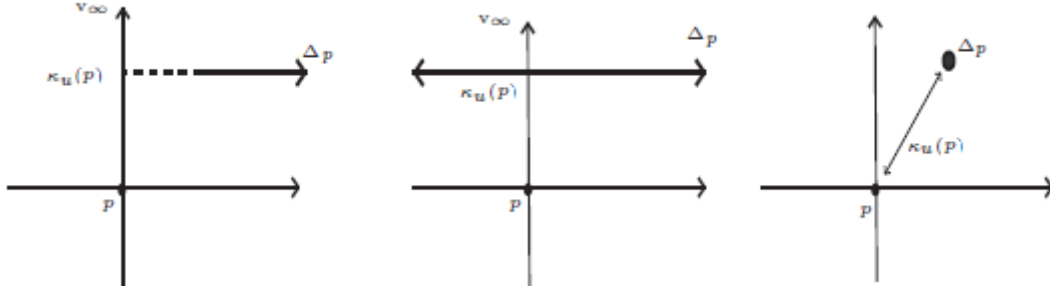


Figura 3.6: Interpretação geométrica de κ_u em $N_p M$, considerando uma base adaptada. Fonte: Nunez, 2018, p. 101.

Então obtemos

$$\kappa_u(p) = \left| \left\langle \alpha(y), \frac{\alpha'(y)}{\|\alpha'(y)\|} \times v \right\rangle \right| = \frac{1}{\|\alpha'(y)\|} |\det(\alpha(y), \alpha'(y), v)|,$$

onde α é a parametrização de Δ_p , v vetor unitário em $T_p M$ e y um número real tal que $\alpha'(y) \neq 0$. Como a curvatura umbílica pode ser vista como a distância entre p e a reta que contém Δ_p , também obtemos a expressão:

$$\kappa_u(p) = \frac{\|\alpha(y) \times \alpha'(y)\|}{\|\alpha'(y)\|},$$

a qual não depende de y , com $\alpha'(y) \neq 0$.

(c) Para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$ e $\{\nu_1, \nu_2\}$ base adaptada de $N_p M$, vale

$$\kappa_u(p) = \frac{|II_{\nu_2}(v, v)|}{I_q(v, v)}.$$

De fato,

$$|II_{\nu_2}(v, v)| = \|v\|^2 \left| II_{\nu_2} \left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right) \right| = I_q(v, v) \kappa_u(p),$$

considerando a pseudométrica induzida de I_q . Observe que existe uma fórmula semelhante para curvatura normal κ_n em pontos regulares. Assim, a direção binormal infinita ν_∞ , quando Δ_p é uma reta ou semirreta, faz o papel do vetor normal principal de uma superfície regular. Além disso, quando κ_n é constante, obtemos os pontos umbílicos da superfície. Para o caso de superfícies singulares de posto 1, com Δ_p sendo uma reta ou semirreta, temos $\kappa_u(p) = \frac{|II_{\nu_2}(v,v)|}{I_q(v,v)}$ constante. Portanto, temos a motivação para o nome de curvatura umbílica.

(d) Segue de (a) e (b) que a definição de curvatura umbílica não depende da escolha da base adaptada de $N_p M$ e nem da parametrização de α , mas pode depender da parametrização de $M = f(U)$, como mostra a Observação 3.4.5.

4 GEOMETRIA DE FRENTES DE ONDA

O objetivo desse capítulo é estudar parte do artigo [17] que trata da geometria de *frentes de onda* em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, definidas neste capítulo. Este estudo é importante uma vez que cuspidal edges são imagens de frentes de onda, assim como outros exemplos citados no Capítulo 1, como a cross-cap e o swallowtail. No que segue, $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ denota uma aplicação suave em $q \in U$, com $f(q) = p$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ denota uma aplicação suave em $t \in I$, onde I um aberto de $\mathbb{R}$, (x, y) denota as coordenadas de $\mathbb{R}^2$ com relação a base canônica $\{e_1, e_2\}$ e (u, v, w) as coordenadas de $\mathbb{R}^3$ com relação a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$. O principal objetivo é apresentar definições e propriedades acerca das frentes de onda para que possamos definir no capítulo 4 a *curvatura singular* de uma curva através de f em um parâmetro t ($\kappa_s(t)$). Omitiremos aqui algumas demonstrações, uma vez que elas estão detalhadas na Dissertação [18].

4.1 Frentes de onda em $\mathbb{R}^2$

Nesta seção, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ denotará uma aplicação suave, onde I é um aberto de $\mathbb{R}$.

Definição 4.1.1. Uma aplicação suave $\nu : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um **campo suave de vetores normais unitários à α** se para todo $t \in I$, temos $\|\nu(t)\| = 1$ e $\nu(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$.

Se ν é um campo suave de vetores normais unitários à α , então $\nu(t)$ é ortogonal a imagem de $d\alpha_t$, a qual pode ser um ponto ou uma reta, para todo $t \in I$.

Definição 4.1.2. Uma aplicação suave $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma **frontal** se existe um campo ν suave de vetores normais unitários à α . Se $(\alpha, \nu) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ é uma imersão, então dizemos que α é uma **frente de onda** (ou apenas **frente**).

Logo, se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ e $\nu(t) = (\nu_1(t), \nu_2(t))$ um campo suave de vetores unitários normais a α , então para todo $t \in I$, se for verificado que $x'(t) \neq 0$, $y'(t) \neq 0$, $\nu_1'(t) \neq 0$ ou $\nu_2'(t) \neq 0$, temos um critério para verificar se uma curva α é uma frente.

Exemplo 4.1.3. (a) Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\nu(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

é um vetor normal unitário de α em t , como visto na Seção na Seção 2.1.1. Assim, ν é um campo suave de vetores unitários normais à α , para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo α é frontal. Como α é regular, então $x'(t)$ ou $y'(t)$ é não nulo. Portanto α é frente.

(b) Seja $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ a cúspide ordinária, cuja imagem está dada na Figura 4.1. Esta curva é singular em $t = 0$, uma vez que $\alpha'(0) = (0, 0)$. Para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\nu(t) = (\nu_1(t), \nu_2(t)) = \frac{(-3t, 2)}{\sqrt{4 + 9t^2}}$$

é um campo unitário de vetores normais à α , pois $\|\nu(t)\| = 1$ e

$$\langle \alpha'(t), \nu(t) \rangle = \left\langle (2t, 3t^2), \left(\frac{-3t}{\sqrt{4 + 9t^2}}, \frac{2}{\sqrt{4 + 9t^2}} \right) \right\rangle = 0.$$

Logo α é frontal. Para $t \neq 0$, temos $x'(t) = 2t \neq 0$ e como $\nu'_1(t) = \frac{-12}{(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}}}$, para $t = 0$ $\nu'_1(0) = -\frac{3}{2} \neq 0$. Portanto α é frente. $\square$

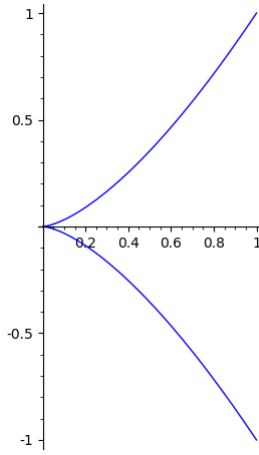


Figura 4.1: Traço da cúspide (t^2, t^3) do Exemplo 4.1.3. Fonte: feita pelo autor.

Agora, faremos um exemplo de uma curva singular α que é uma frontal, porém, não é uma frente, isto é, (α, ν) não é uma imersão, onde ν uma campo suave de vetores unitários normais à α .

Exemplo 4.1.4. Seja $\alpha(t) = (t^2, t^5)$ uma curva em $\mathbb{R}^2$ cuja imagem está dado na Figura 4.2. Esta curva é singular em $t = 0$, uma vez que $\alpha'(0) = (0, 0)$. Para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\nu(t) = \left(\frac{-5t^3}{\sqrt{4 + 25t^6}}, \frac{2}{\sqrt{4 + 25t^6}} \right)$$

é um campo suave de vetores unitários normais à α , pois $\|\nu(t)\| = 1$ e $\langle \alpha'(t), \nu(t) \rangle = 0$. Portanto, α é frontal. Agora, para todo $t \neq 0$ temos $x'(t) \neq 0$, porém, para $t = 0$ obtemos que

$$x'(0) = y'(0) = \nu'_1(0) = \nu'_2(0) = 0,$$

onde $\nu'_1(t) = \frac{5t(25t^6 - 8)}{(4 + 25t^6)^{\frac{3}{2}}}$ e $\nu'_2(t) = \frac{150t^5}{(25t^6 + 4)^{\frac{3}{2}}}$. Portanto, (α, ν) não é uma imersão e assim α não é uma frente. $\square$

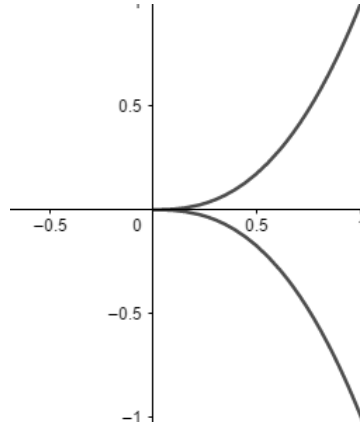


Figura 4.2: Traço da cuspide (t^2, t^5) do Exemplo 4.1.4. Fonte: Feita pelo autor.

4.1.1 $3/2$ -cúspides e curvatura cuspidal

Esta seção será dedicada a geometria nos pontos singulares de um tipo particular de curva α denominada $3/2$ -cuspide, desenvolvida em [19]. O objetivo principal é definir a *curvatura cuspidal* de α em um parâmetro t onde a curva é singular. Para facilitar alguns cálculos, vamos supor $t = 0$ e $\alpha(0) = (0, 0)$.

Definição 4.1.5. *Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave e 0 um ponto singular de $\alpha(t)$. Dizemos que α é uma **$3/2$ -cuspide** em 0 se é $\mathcal{A}$ -equivalente a cuspide ordinária (t^2, t^3) , cujo traço foi dado na Figura 4.1.*

Na sequência deste trabalho, podemos dizer também que 0 é um ponto de $3/2$ -cuspide de α .

Fato 1. ([10] p.4) α é uma $3/2$ -cuspide em t_0 se, e somente se, os vetores $\alpha''(t_0)$ e $\alpha^{(3)}(t_0)$ são linearmente independentes.

Definição 4.1.6. *Seja $\alpha(t)$ uma $3/2$ -cuspide no 0. Dizemos que α é uma **cuspide positiva** se $[\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)] > 0$ e **cuspide negativa** se $[\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)] < 0$.*

Notação: A notação $[\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)]$ indica o determinante da matriz que tem como colunas as derivadas segundas e terceiras da $3/2$ -cuspide α , respectivamente.

Observe que o sinal da cuspide é invariante sob um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que preserva orientação, isto é, dada uma $3/2$ -cuspide α em 0 e um difeomorfismo ϕ tal que $\det(J\phi) > 0$, então $\phi \circ \alpha$ é uma $3/2$ -cuspide que tem o mesmo sinal da $3/2$ -cuspide α , pois $[(\phi \circ \alpha)''(0), (\phi \circ \alpha)^{(3)}(0)] = [\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)] \cdot \det(J\phi)$.

Definição 4.1.7. *Seja $\alpha(t)$ curva suave tal que é $3/2$ -cuspide em 0. A **curvatura cuspidal (Euclidiana)** κ_c de α em 0 é dada por*

$$\kappa_c(0) := \frac{[\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)]}{\|\alpha''(0)\|^{\frac{5}{2}}}.$$

O número $\frac{1}{(\mu_g(0))^2}$ é chamado de **raio da curvatura cuspidal**.

Exemplo 4.1.8. (a) Consideremos $\alpha(t) = (at^2, at^3)$, com $a \neq 0$, cuja imagem está dado na Figura 4.3, para diferentes valores de $a \in \mathbb{R}^*$.

- α é uma $3/2$ -cúspide, pois tomando k uma mudança de coordenada tal que $k(t) = t$, onde $k(0) = 0$ e h um difeomorfismo tal que $h(x, y) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)$, onde $h(\gamma(0)) = h(0, 0) = (0, 0)$, temos

$$(h \circ \alpha \circ k)(t) = (h \circ \alpha)(k(t)) = h(at^2, at^3) = (t^2, t^3),$$

como queríamos.

- α é uma cúspide positiva, pois

$$[\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)] = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 6a \end{vmatrix} = 12a^2 > 0,$$

onde $a \neq 0$.

- A curvatura cuspidal de α é dada por

$$\kappa_c(0) = \frac{[\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)]}{|\alpha''(0)|^{\frac{5}{2}}} = \frac{12a^2}{(\sqrt{4a^2})^{\frac{5}{2}}} = \frac{12a^2}{(2|a|)^{\frac{5}{2}}} = \frac{12a^2}{\sqrt{32|a|^5}} = \frac{3(4a^2)}{4a^2\sqrt{2|a|}} = \frac{3}{\sqrt{2|a|}}.$$

- Por fim, o raio de curvatura de γ é $\frac{2|a|}{9}$.

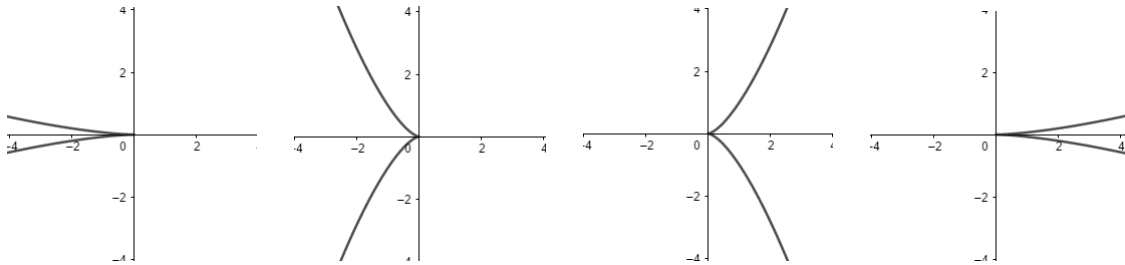


Figura 4.3: Traço de α para $a = -200$, $a = -1$, $a = 1$ e $a = 200$, da esquerda para a direita, do Exemplo 4.1.8 item (a). Fonte: feita pelo autor.

Note que quanto maior seja o $a \in \mathbb{R}^*$ em módulo, a curvatura cuspidal é menor.

(b) Consideremos

$$\alpha(t) = (a(t - \sin(t)), a(1 - \cos(t)))$$

a ciclóide de raio $a \neq 0$, cujo traço esta dado da Figura 4.4.

- γ é uma $3/2$ -cúspide, pois

$$[\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)] = \begin{vmatrix} a\sin(0) & a\cos(0) \\ a\cos(0) & -a\sin(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} = -a^2 \neq 0,$$

e pelo Fato 1, segue que α é uma $3/2$ -cúspide na origem.

- Como $[\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)] = -a^2 < 0$, então α é uma cúspide negativa.
- A curvatura cupidal de α é dada por

$$\kappa_c(0) = \frac{[\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)]}{\|\alpha''(0)\|^{\frac{5}{2}}} = \frac{-a^2}{\sqrt{a^2}^{\frac{5}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{a}}.$$

- Por fim, o raio de curvatura de α é igual a a .

□

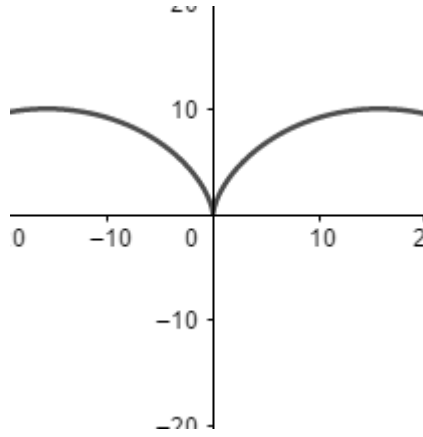


Figura 4.4: Traço da ciclóide do Exemplo 4.1.8 item (a). Fonte: feita pelo autor.

4.1.2 Comportamento da curvatura cuspidal de 3/2-cúspides

Nesta subseção vamos abordar propriedades envolvendo a curvatura cuspidal e culminar em um teorema que dá uma relação interessante entre a curvatura cuspidal e a curvatura da curva. Por fim, vamos obter um teorema que dá um resultado análogo ao Teorema Fundamental das Curvas Planas (2.1.2). Observe que o sinal da curvatura cuspidal é invariante por isometrias em $\mathbb{R}^2$ que preservam orientação, isto é, dada α uma 3/2-cúspide no 0 e ϕ uma isometria que preserva orientação, isto é, $\det(J\phi) > 0$, temos

$$\frac{[(\phi \circ \alpha)''(0), (\phi \circ \alpha)^{(3)}(0)]}{\|(\phi \circ \alpha)''(0)\|^{\frac{5}{2}}} = \det J\phi(0) \frac{[\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)]}{\|\alpha''(0)\|^{\frac{5}{2}}}.$$

A proposição seguinte dá um resultado que relaciona 3/2-cúspides com ciclóides e seus raios de curvatura.

Proposição 4.1.9. ([16], p. 604) *Seja α uma 3/2-cúspide no 0. Então existe uma única ciclóide $c(t)$ tal que o raio de curvatura cuspidal de α coincide com raio da ciclóide $c(t)$. E mais,*

$$\alpha(t) - c(t) = o(t^3),$$

a menos de mudanças de variável para $\alpha(t)$ e $c(t)$, onde $o(t^3)$ nos diz que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\alpha(t) - c(t)|}{|t^3|} = 0$, isto é, $c(t)$ e $\alpha(t)$ expandidas em Taylor coincidem até os termos de ordem 3.

Demonstração. Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva suave, onde $\gamma(0) = 0$. Primeiramente, vamos reescrever α de forma que facilite alguns cálculos ao longo da demonstração. Pelo Lema 2.1.4, existem funções diferenciáveis $a_1, b_1 : (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\alpha(t) = t(a_1(t), b_1(t))$. Agora, observe que

$$\alpha'(t) = (a_1(t), b_1(t)) + t(a_1'(t), b_1'(t)),$$

e aplicando no $t = 0$ temos

$$(0, 0) = \alpha'(0) = (a_1(0), b_1(0)),$$

pois 0 é ponto singular de α . Pelo Lema 2.1.4 aplicado às funções a_1 e b_1 , existem funções diferenciáveis $a, b : (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$a_1(t) = ta(t) \text{ e } b_1(t) = tb(t).$$

Logo,

$$\alpha(t) = t(a_1(t), b_1(t)) = t(ta(t), tb(t)) = t^2(a(t), b(t)).$$

Como 0 é um ponto de 3/2-cúspide de $\alpha(t)$ então, pelo Fato 1, $[\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)] \neq 0$. Em particular,

$$\alpha''(0) \neq (0, 0) \Rightarrow 2(a(0), b(0)) \neq (0, 0) \Rightarrow (a(0), b(0)) \neq (0, 0).$$

A menos de uma rotação, suponha que $a(0) = 0$ e $b(0) > 0$. Considere o difeomorfismo local $h(t) = t\sqrt{b(t)}$, pois $h'(0) = \sqrt{b(0)} \neq 0$, $g = h^{-1}$ e a reparametrização de α dada por $\tilde{\alpha}(s) = (\alpha \circ g)(s)$. Então, podemos escrever $\tilde{\alpha}$ da seguinte forma

$$\tilde{\alpha}(s) = (\lambda s^3, s^2) + o(s^3),$$

com $\lambda > 0$. De fato, derivando g com relação a s , temos

$$g'(0) = \frac{1}{h'(0)} = \frac{1}{\sqrt{b(0)}}. \quad (4.1)$$

Derivando g novamente, aplicando em $s = 0$ e usando (4.1), obtemos:

$$g''(0) = \frac{-1}{h'(0)^2} h''(0) g'(0) = -\frac{b'(0)}{b(0)^2}. \quad (4.2)$$

Escrevendo $(t^2 a(t), t^2 b(t)) = \alpha(t) = (x(t), y(t))$. Derivando novamente e aplicando em 0, obtemos:

$$y''(0) = 2b(0). \quad (4.3)$$

Derivando três vezes a igualdade $y(t) = t^2 b(t)$ e aplicando em 0, obtemos:

$$y^{(3)}(0) = 6b'(0). \quad (4.4)$$

Temos

$$(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) = \tilde{\alpha}(s) = \alpha(g(s)) = (x(g(s)), y(g(s))).$$

Assim derivando a expressão $\tilde{y}(s) = y(g(s))$ e aplicando em 0,

$$\tilde{y}'(0) = y'(0)g'(0) = 0.$$

Derivando novamente, aplicando em 0 e usando (4.1) e (4.3), obtemos:

$$\tilde{y}''(0) = y''(0)g'(0)^2 = 2b(0) \left(\frac{1}{\sqrt{b(0)}} \right)^2 = 2.$$

Derivando mais uma vez, aplicando em 0 e usando (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4), obtemos:

$$\tilde{y}^{(3)}(0) = y^{(3)}(0)g'(0)^3 + 3y''(0)g'(0)g''(0) = 6b'(0) \frac{1}{\sqrt{b(0)}^3} - 6b(0) \frac{1}{\sqrt{b(0)}} \frac{b'(0)}{b(0)^2} = 0.$$

Derivando duas vezes a expressão $x(t) = t^2a(t)$ e aplicando em 0,

$$x''(0) = 2a(0) = 0. \quad (4.5)$$

Derivando novamente e aplicando em 0, obtemos

$$a'(0) = \frac{x^{(3)}(0)}{6} \neq 0, \quad (4.6)$$

pois o determinante $[\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)] \neq 0$ e $x''(0) = 0$. Derivando duas vezes a igualdade $\tilde{x}(s) = x(g(s))$ e aplicando em 0,

$$\tilde{x}''(0) = x''(g(0))g'(0)^2 + x'(g(0))g''(0) = 0.$$

Derivando novamente, aplicando em 0 e usando (4.1), (4.5) e (4.6),

$$\tilde{x}^{(3)}(0) = x^{(3)}(0)g'(0)^3 + 3x''(0)g'(0)g''(0) = x^{(3)}(0)g'(0)^3 = 6a'(0) \frac{1}{\sqrt{b(0)}^3} \neq 0.$$

Concluimos que

$$\tilde{\alpha}''(0) = (\tilde{x}''(0), \tilde{y}''(0)) = (0, 2) \quad \text{e} \quad \tilde{\alpha}^{(3)}(0) = (\tilde{x}^{(3)}(0), \tilde{y}^{(3)}(0)) = \left(6a'(0) \frac{1}{\sqrt{b(0)}^3}, 0 \right).$$

Note que

$$\tilde{\alpha}(0) = \alpha(g(0)) = \alpha(0) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\text{ff}}'(0) = g'(0)\text{ff}'(g(0)) = g'(0)\text{ff}'(0) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(s) &= \frac{\tilde{\alpha}''(0)}{2}s^2 + \frac{\tilde{\alpha}^{(3)}(0)}{6}s^3 + o(s^3) = \frac{(\tilde{x}''(0), \tilde{y}''(0))}{2}s^2 + \frac{(\tilde{x}^{(3)}(0), \tilde{y}^{(3)}(0))}{6}s^3 + o(s^3) = \\ &= (0, 1)s^2 + \left(a'(0) \frac{1}{\sqrt{b(0)}^3}, 0 \right) s^3 + o(s^3) = \left(\frac{a'(0)}{\sqrt{b(0)}^3} s^3, s^2 \right) + o(s^3) = (\lambda s^3, s^2) + o(s^3), \end{aligned}$$

onde $\lambda = \frac{a'(0)}{\sqrt{b(0)}^3} \neq 0$. Podemos supor $\lambda > 0$ pois caso $\lambda < 0$ podemos substituir $x(t)$ por $-x(t)$, tornando o novo α positivo. Note que essa reflexão muda o sinal da curvatura

cuspidal, pois troca o sinal da primeira linha do determinante que define essa curvatura. Considere a cicloide

$$c(t) := \frac{2}{9\lambda^2}(t - \sin(t), 1 - \cos(t)),$$

a qual tem raio $\frac{2}{9\lambda^2}$ e a função $h(t) = \frac{1}{3\lambda}t$ uma mudança de variável para $c(t)$. Assim, considere $g(s) = 3\lambda s$, a inversa da função h e a reparametrização de $c(t)$ dada por $\tilde{c}(s) = (c \circ h)(s)$.

Afirmamos que

$$\tilde{c}(s) = (c \circ g)(s) = \frac{2}{9\lambda^2}(3\lambda s - \sin(3\lambda s), 1 - \cos(3\lambda s))$$

é a cicloide desejada. Para isso, devemos provar a existência e unicidade de $\tilde{c}(s)$ e que o raio desta cicloide coincide com a curvatura cuspidal da curva $\tilde{\alpha}$.

- Existência: Expandindo $\tilde{c}(s)$ em Taylor, obtemos:

$$\tilde{c}(s) = (0, 0) + (0, s^2) + (\lambda s^3, 0) + o(s^3) = (\lambda s^3, s^2) + o(s^3).$$

Subtraindo $\tilde{\gamma}(s)$ e $\tilde{c}(s)$ obtemos:

$$\tilde{\gamma}(s) - \tilde{c}(s) = (\lambda s^3, s^2) + o(s^3) - (\lambda s^3, s^2) - o(s^3) = o(s^3).$$

- Unicidade: tome uma cicloide $d(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$ de raio a e componha com $g(s) = 3\lambda s$, como feito anteriormente, assim temos

$$\tilde{d}(s) = (d \circ g)(s) = a(3\lambda s - \sin(3\lambda s), 1 - \cos(3\lambda s)),$$

cicloide de raio a . Expandindo $\tilde{d}(s)$ em Taylor, obtemos que

$$\tilde{d}(s) = (0, 0) + (0, 0)s + \frac{(0, 9\lambda^2 a)}{2}s^2 + \frac{(27\lambda^3 a, 0)}{6}s^3 + o(s^3) = \left(\frac{27\lambda^3 a}{6}s^3, \frac{9\lambda^2 a}{2}s^2 \right) + o(s^3).$$

Agora, para $\tilde{d}(t)$ satisfazer o teorema, queremos que $\tilde{\alpha}(s) - \tilde{d}(s) = o(s^3)$, isto é, $\tilde{\alpha}(s)$ e $\tilde{d}(s)$ devem coincidir expandidas em Taylor até termos de grau 3. Isto é,

$$\begin{cases} \frac{27\lambda^3 a}{6} = \lambda \\ \frac{9\lambda^2 a}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{9\lambda^2},$$

que é justamente o raio da cicloide $\tilde{c}(s)$.

Por fim, calculando as derivadas de $\tilde{\alpha}(t)$ temos:

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}'(s) = (3\lambda s^2, 2s) + o(s^2) \stackrel{s=0}{=} (0, 0); \\ \tilde{\alpha}''(s) = (6\lambda s, 2) + o(s) \stackrel{s=0}{=} (0, 2); \\ \tilde{\alpha}^{(3)}(s) = (6\lambda, 0) + o(s^0) \stackrel{s=0}{=} (6\lambda, 0). \end{cases}$$

Então $\frac{1}{\kappa_c(0)^2} = \frac{2}{9\lambda^2} = \text{raio}[\tilde{c}(s)]$. Portanto, $\tilde{c}(s)$ é a ciclóide desejada, como queríamos.

□

Observe que no Exemplo 4.1.8 item (b), $\alpha(t) = c(t)$. Logo, podemos aplicar a proposição acima e concluir qual é a curvatura cuspidal de $\alpha(t)$ a partir do raio da ciclóide.

Definição 4.1.10. *Seja $\alpha(t)$ uma $3/2$ -cúspide em 0. A função $N_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $N_k(t) = \sqrt{|s_g(t)|} \kappa(t)$ é chamada **curvatura normalizada de α** , onde κ denota a curvatura de α e s_g a função comprimento de arco de α a partir de $t = 0$.*

Teorema 4.1.11. ([19], p.286) *Seja α uma $3/2$ -cúspide no 0. Seja $h(t) = \text{sgn}(t) \sqrt{|s_g(t)|}$ (chamada **mudança de parâmetro por meio comprimento de arco**). Então $h(t)$ é uma mudança de coordenada de α em 0 e $\sqrt{|s_g|} \kappa$ é uma função C_0^∞ , onde C_0^∞ denotada o conjunto das funções suaves em uma vizinhança do 0. E mais,*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{|s_g(t)|} \kappa(t) = \frac{\kappa_c(0)}{2\sqrt{2}}.$$

Demonstração. Podemos supor que $\alpha(0) = \mathbf{0}$. Aplicando a regra de L'Hospital, obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha'(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \alpha''(t) = \alpha''(0) \neq \mathbf{0} \quad (4.7)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t)]}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[\alpha''(t), \alpha^{(3)}(t)]}{2} = \frac{[\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)]}{2} \neq 0, \quad (4.8)$$

o que implica que $\frac{\alpha'(t)}{t}$ e $\frac{[\alpha'(t), \alpha''(t)]}{t^2}$ são suaves em $t = 0$. Temos

$$\begin{aligned} |t| \kappa(t) &= |t| \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t)]}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t)]}{t^2} \frac{t^2 |t|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t)]}{t^2} \left\| \frac{t^3}{\alpha'(t)^3} \right\| \\ &= \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t)]}{t^2} \left\| \frac{\alpha'(t)}{t} \right\|^{-3}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Olhando para as funções coordenadas, como $\alpha'(0) = 0$ e $\alpha'(t)$ é suave, podemos aplicar o Lema 2.1.1 e concluir que $\frac{\alpha'(t)}{t} \in C^\infty$. Note que a função $[\alpha'(t), \alpha''(t)]$ é suave, e tanto ela quanto a sua primeira derivada se anulam em 0. Logo aplicando o Lema 2.1.1, temos que $\frac{[\alpha'(t), \alpha''(t)]}{t^2} \in C^\infty$. Portanto, $|t| \kappa(t) \in C_0^\infty$ e de (4.9) obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} |t| \kappa(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t)]}{t^2} \left\| \frac{\alpha'(t)}{t} \right\|^{-3} = \frac{[\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)]}{2 \|\alpha''(0)\|^3}. \quad (4.10)$$

Temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{s_g(t)}{t^2} \right| &= \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{\int_0^t |\alpha'(t)| dt}{t^2} \right| \stackrel{L'H.}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{\alpha'(t)}{2t} \right\| \stackrel{L'H.}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|\alpha''(t)\|}{2} \\ &= \frac{\|\alpha''(0)\|}{2} > 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Em particular,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{\frac{|s_g(t)|}{|t^2|}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|s_g(t)|}}{|t|} = \frac{\sqrt{||\alpha''(0)||}}{\sqrt{2}}. \quad (4.12)$$

Portanto, substituindo (4.9), (4.10) e (4.12),

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{|s_g(t)|} \kappa(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|s_g(t)|}}{|t|} |t| \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t)]}{||\alpha'(t)||^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|s_g(t)|}}{|t|} \lim_{t \rightarrow 0} |t| \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t)]}{||\alpha'(t)||^3} \\ &= \frac{||\alpha''(0)||^{\frac{1}{2}} [\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)]}{\sqrt{2} \cdot 2 ||\alpha''(0)||} = \frac{||\alpha''(0)||^{\frac{1}{2}} [\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)]}{||\alpha''(0)||^3 \cdot 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{[\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0)]}{||\alpha''(0)||^{\frac{5}{2}}} \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\kappa_c(0)}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

De (4.7), (4.12) e (4.12) temos $\left\| \frac{\alpha'(t)}{t} \right\|, \frac{s(t)}{\text{sgn}(t)t^2} = \left| \frac{s(t)}{t^2} \right|, \phi(t) := \frac{\sqrt{s_g(t)}}{|t|} \in C^\infty$. Em particular,

$$h(t) = \text{sgn}(t) \sqrt{s_g(t)} = t\phi(t) \in C_0^\infty.$$

Como $h'(t) = \phi(t) + t\phi'(t)$, aplicando em $t = 0$, de (4.12) temos $h(0) = \phi(0) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Inversa, h é um difeomorfismo em torno do 0 e, então, a função h é uma mudança de coordenadas da curva $\alpha(t)$ em 0, como queríamos. $\square$

Teorema 4.1.12. ([19], p. 286) *Seja $f \circ h$ uma função C^∞ , onde α é uma curva em $\mathbb{R}^2$ suave e h uma mudança de parâmetro para α , tal que $\alpha(0) \neq 0$. Então existe uma única 3/2-cúspide em 0 a menos de isometria que preserva orientação em $\mathbb{R}^2$ tal que*

$$\sqrt{s_g(t)} \kappa(t) = (f \circ h)(t).$$

Demonstração. Temos que $f \circ h$ uma função C^∞ . Seja $\alpha \circ h$ a curva definida por

$$(\alpha \circ h)(t) := 2 \int_0^{h(t)} u \begin{pmatrix} \cos \theta(u) \\ \sin \theta(u) \end{pmatrix} du, \quad (\theta \circ h)(t) := 2 \int_0^{h(t)} f(u) du.$$

Conseguimos verificar que

$$\begin{aligned} ||\alpha'(h(t))|| &= ||(2h(t)\cos\theta(h(t)), 2h(t)\sin\theta(h(t)))|| \\ &= \sqrt{4h(t)^2 \cos^2 \theta(h(t)) + 4h(t)^2 \sin^2 \theta(h(t))} = 2h(t), \end{aligned}$$

isto é, $h(t)$ é uma mudança de parâmetro por meio comprimento de arco. Além disso verificamos que esta $\alpha(h(t))$ é a 3/2-cúspide procurada. De fato,

$$\begin{aligned} [\alpha''(h(t)), \alpha^{(3)}(h(t))] &= \begin{vmatrix} -2\sin\theta(h(t)) & -2\cos\theta(h(t)) \\ 2\cos\theta(h(t)) & -2\sin\theta(h(t)) \end{vmatrix} \\ &= 4(\sin^2\theta(h(t)) + \cos^2\theta(h(t))) = 4 \neq 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

e satisfaz

$$\begin{aligned}
 s_g(h(t))k(h(t)) &= \left(\int_0^{h(t)} \|\alpha'(u)\| du \right) \left(\frac{[\alpha'(h(t)), \alpha''(h(t))]}{\|\alpha'(h(t))\|^3} \right) \\
 &= (2h(t)^2) \frac{\begin{vmatrix} 2h(t) \cos(\theta(h(t))) & -2\sin(\theta(h(t)))2f(h(t)) \\ 2h(t)\sin(\theta(h(t))) & 2\cos(\theta(h(t)))2f(h(t)) \end{vmatrix}}{8h(t)^3} \\
 &= (2h(t)^2) \frac{\begin{vmatrix} h(t) \cos(\theta(h(t))) & -\sin(\theta(h(t)))2f(h(t)) \\ h(t)\sin(\theta(h(t))) & \cos(\theta(h(t)))2f(h(t)) \end{vmatrix}}{4h(t)^3} = \\
 &= \frac{(2h(t)^2)2h(t)f(h(t))}{4h(t)^3} = f(h(t)).
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 4.1.13. (a) Dada a cúspide $\alpha(t) = (at^2, at^3)$, com $a \neq 0$, cujo traço está dada na Figura 4.3, temos que

$$s_g(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \operatorname{sgn}(t) \frac{a((4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}} - 8)}{27} \quad \text{e} \quad \kappa(t) = \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t)]}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{6}{at(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pelo teorema 4.1.11, a curvatura cuspidal é dada por

$$\begin{aligned}
 \kappa_c(0) &= 2\sqrt{2} \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{|s_g(t)|} k_g(t) = 2\sqrt{2} \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{\operatorname{sgn}(t) \frac{a((4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}} - 8)}{27}} \frac{6}{at(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= 2\sqrt{2} \frac{2}{\sqrt{3a}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}} - 8}}{t(9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{2} \frac{2}{\sqrt{3a}} \frac{1}{8} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}} - 8}}{t} \\
 &= 2\sqrt{2} \frac{2}{\sqrt{3a}} \frac{1}{8} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}} - 8}}{t} \cdot \frac{\sqrt{(9t^2 + 4)^{\frac{3}{2} + 8}}}{\sqrt{(9t^2 + 4)^{\frac{3}{2} + 8}}} = 2\sqrt{2} \frac{2}{\sqrt{3a}} \frac{1}{8} 3\sqrt{3} = \frac{3}{\sqrt{2a}}.
 \end{aligned}$$

(b) Dada a ciclóide $\alpha(t) = (a(t - \sin(t)), a(1 - \cos(t)))$ com raio $a \neq 0$, cujo traço está dada na Figura 4.4. Temos

$$s_g(t) = \sqrt{2a} 2^{\frac{3}{2}} \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \right) \quad \text{e} \quad \kappa(t) = \frac{-\sin^2 t}{\sqrt{2}^3 a(1 - \cos t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pelo Teorema 4.1.11 temos que a curvatura cuspidal de α é dada por

$$\kappa_c(0) = \sqrt{\sqrt{2a} 2^{\frac{3}{2}} (\cos(\frac{t}{2}) - 1)} \frac{-\sin^2 t}{\sqrt{2}^3 a(1 - \cos t)^{\frac{3}{2}}} = -2\sqrt{2} \frac{1}{2\sqrt{2a}} = \frac{-1}{\sqrt{a}}.$$

□

4.2 Frentes de onda em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção, $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ denotará uma aplicação suave, com U um aberto do $\mathbb{R}^2$ contendo q , com $f(q) = p$.

Definição 4.2.1. Uma aplicação suave $\nu : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é um **campo de vetores normais unitários à f** se, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $q \in U$, temos $\|\nu(q)\| = 1$ e $\nu(q)$ é ortogonal a $df_q(x, y)$.

Se ν é um campo de vetores normais unitários à f então $\nu(q)$ é ortogonal à imagem de df_q , sendo um ponto, uma reta ou um plano, para todo $q \in U$, ou seja,

$$\langle f_x(q), \nu(q) \rangle = 0 \text{ e } \langle f_y(q), \nu(q) \rangle = 0,$$

onde $(\)_x = \frac{\partial}{\partial x}$ e $(\)_y = \frac{\partial}{\partial y}$, para algum sistema de coordenadas (x, y) em U .

Definição 4.2.2. $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma **frontal** se existe um campo ν de vetores normais unitários à f . Ainda mais, se $(f, \nu) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ é uma imersão, então f é uma **frente de onda**. (ou apenas **frente**). Neste caso, chamamos ν de **aplicação de Gauss da frente f** .

Exemplo 4.2.3. Toda superfície parametrizada regular é uma frente de onda.

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Tomando ν como a aplicação normal de Gauss de f , temos que $\|\nu(q)\| = 1$, para todo $q \in U$. Então f é uma frontal. Por fim, mostremos que (f, ν) é uma imersão. A matriz jacobiana em q de

$$(f, \nu)(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y), \nu_1(x, y), \nu_2(x, y), \nu_3(x, y)),$$

é dada por

$$J_q(f, \nu) = \begin{pmatrix} f_{1x}(q) & f_{1y}(q) \\ f_{2x}(q) & f_{2y}(q) \\ f_{3x}(q) & f_{3y}(q) \\ \nu_{1x}(q) & \nu_{1y}(q) \\ \nu_{2x}(q) & \nu_{2y}(q) \\ \nu_{3x}(q) & \nu_{3y}(q) \end{pmatrix}.$$

As três primeiras linhas dessa matriz formam a matriz jacobiana de f em q . Como f é uma superfície parametrizada regular, então df_q é injetora. Logo, o posto da matriz jacobiana de f em q é 2, o que implica que o posto da matriz jacobiana de (f, ν) em q é 2, para todo $q \in U$. Portanto f é uma frente de onda. $\square$

Dada $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ denotaremos por Σ_f o conjunto singular de f , isto é,

$$\Sigma_f = \{q \in U; q \text{ é ponto singular de } f\}.$$

Vimos no exemplo acima que superfícies parametrizadas regulares são frentes de onda. Vejamos agora exemplos de frentes de onda que possuem pontos singulares.

Exemplo 4.2.4. Considere os cálculos do Exemplo 3.0.1 feitos para a cuspidal edge, cross-cap e o swallowtail usuais.

(a) Seja $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$ a superfície cuspidal edge usual. Temos que Σ_f é o eixo- x , pois

$$f_x(x, y) \times f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow (1, 0, 0) \times (0, 2y, 3y^2) = 0 \Leftrightarrow y(0, -3y, 2) = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Seja

$$\nu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 + 9y^2}}(0, -3y, 2).$$

Temos que $\nu(x, y)$ é unitário e paralelo a $(f_x \times f_y)(x, y)$, então é um campo de vetores normais unitários à f .

$$\|\nu(x, y)\| = \sqrt{\frac{9y^2}{4 + 9y^2} + \frac{4}{4 + 9y^2}} = 1.$$

Mostremos que (f, ν) é uma imersão. Como

$$(f, \nu)(x, y) = \left(x, y^2, y^3, 0, \frac{-3y}{\sqrt{4 + 9y^2}}, \frac{2}{\sqrt{4 + 9y^2}} \right),$$

sua matriz jacobiana é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y \\ 0 & 3y^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12}{(4 + 9y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 & \frac{18y}{\sqrt{4 + 9y^2}} \end{pmatrix}.$$

Se $y = 0$, as linhas 1 e 5 são linearmente independentes. Caso $y \neq 0$, as linhas 1 e 2 são linearmente independentes. Portanto, f é frente.

(b) Seja $f(x, y) = (3x^4 + x^2y, 4x^3 + 2xy, y)$ o swallowtail usual. Temos $f_x(x, y) = (12x^3 + 2xy, 12x^2 + 2y, 0)$, $f_y(x, y) = (x^2, 2x, 1)$ e

$$f_x(x, y) \times f_y(x, y) = (12x^2 + 2y)(1, -x, x^2).$$

Assim,

$$f_x \times f_y = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -6x^2.$$

Então, o conjunto singular de f é a parábola dada por $y = -6x^2$. Tomemos

$$\nu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + x^4}}(1, -x, x^2).$$

Assim,

$$\|\nu(x, y)\| = \sqrt{\frac{1 + x^2 + x^4}{1 + x^2 + x^4}} = \sqrt{1} = 1$$

e como $\nu(x, y)$ e $(f_x \times f_y)(x, y)$ são paralelos, obtemos que ν é um campo unitário de vetores normais a f . Além disso, como

$$(f, \nu)(x, y) = \left(3x^4 + x^2y, 4x^3 + 2xy, \frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}, \frac{-x}{\sqrt{1+x^2+x^4}}, \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+x^4}} \right)$$

tem sua matriz jacobiana dada por

$$\begin{pmatrix} 2x(6x^2 + y) & x^2 \\ 2(6x^2 + y) & 2x \\ 0 & 1 \\ \frac{x(2x^2 + 1)}{(1+x^2+x^4)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ \frac{x^4 - 1}{(1+x^2+x^4)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ \frac{x(x^2 + 2)}{(1+x^2+x^4)^{\frac{3}{2}}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos 3 casos,

- Se $y \neq -6x^2$, então as linhas 2 e 3 são linearmente independentes.
- Se $y = -6x^2$ e $x \neq 0$, então as linhas 3 e 4 são linearmente independentes.
- Se $x = y = 0$ então as linhas 3 e 5 são linearmente independentes.

Portanto f é uma frente.

(c) Seja $f(x, y) = (x, y^2, xy)$ a superfície cross-cap usual. Sabendo que o único ponto singular de f é a origem, suponha que f seja uma frontal. Logo existe um campo ν de vetores normais unitários a f . Fora da origem, sabemos definir o vetor normal unitário dado por $N(x, y) = \frac{f_x \times f_y}{\|f_x \times f_y\|}$, de onde segue da unicidade que $\nu = N$ fora da origem. Por outro lado, como ν é suave na origem, então vale

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \nu(x, y) = \nu(0, 0),$$

o que não ocorre, pois o limite sequer existe. Portanto, f não é frontal, logo não é frente. $\square$

Além da cross-cap usual não ser uma frente de onda, é provado em [4] que as singularidades de frente de onda são, genericamente, cuspidal edges ou swallowtails.

Agora, faremos um exemplo de uma superfície singular que é uma frontal, porém, não é uma frente.

Exemplo 4.2.5. Seja $f(x, y) = (x, y^2, y^5)$, cuja imagem está dada na figura 4.5. Temos $f_x(x, y) = (1, 0, 0)$, $f_y(x, y) = (0, 2y, 5y^4)$ e

$$f_x(x, y) \times f_y(x, y) = (0, -5y^4, 2y).$$

Assim,

$$f_x(x, y) \times f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Então, o conjunto singular de f é o eixo-x. Tomemos

$$\nu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{25y^6 + 4}}(0, 5y^3, 2).$$

Assim, $\|\nu(x, y)\| = 1$ e como $\nu(x, y)$ e $(f_x \times f_y)(x, y)$ são paralelos, obtemos que ν é um campo unitário de vetores normais a f . Agora,

$$(f, \nu)(x, y) = \left(x, y^2, y^5, \frac{-5y}{\sqrt{25y^6 + 4}}, \frac{2}{\sqrt{25y^6 + 4}} \right)$$

tem sua matriz jacobiana dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y \\ 0 & 5y^4 \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{-60y^2}{(25y^6 + 4)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 & \frac{-150y^5}{(25y^6 + 4)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 & \frac{2}{(25y^6 + 4)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}.$$

Se $y = 0$, obtemos uma linha inteira nula. Portanto, f é uma frontal, mas não é uma frente.

□

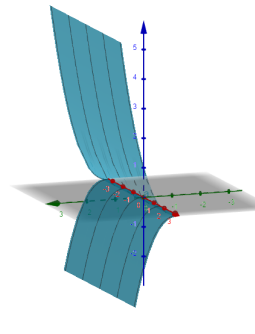


Figura 4.5: Traço da superfície do Exemplo 4.2.5. Fonte: feito pelo autor.

No que segue nesta seção, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ denotará uma frente de onda, ν uma aplicação normal de Gauss da f e $M = f(U)$. Observe que em pontos regulares de f temos que $\nu(q)$ é ortogonal a todo vetor do plano tangente, em particular, é ortogonal à $f_x(q)$ e $f_y(q)$. Logo $\nu(q)$ é paralelo à $(f_x \times f_y)(q)$.

Observação 4.2.6. Se f é uma frente de onda e $\tilde{f}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a f , então $\tilde{f}$ também é uma frente de onda, pois como $\tilde{f} = h \circ f \circ k$, onde h e k são difeomorfismos, basta observar geometricamente que não perdemos a existência do campo $\tilde{\nu}$ de vetores normais unitários a $\tilde{f}$ e nem o fato de $(\tilde{f}, \tilde{\nu})$ ser uma imersão, já que as derivadas dos difeomorfismos na composição são isomorfismos. $\square$

Definição 4.2.7. A função $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\lambda(q) = \langle f_x(q) \times f_y(q), \nu(q) \rangle = \det(f_x, f_y, \nu)(q),$$

é chamada de **função densidade de área de f** .

Observemos que $\Sigma_f = \lambda^{-1}(0)$. De fato, se $q \in \Sigma_f$, então, df_q não é injetora, e, assim, $f_x(q) \times f_y(q) = 0$, de onde segue que $\lambda(q) = 0$. Reciprocamente, se $q \in \lambda^{-1}(0)$, $\lambda(q) = 0$, ou seja, $\det(f_x, f_y, \nu)(q) = 0$. Isto nos diz que f_x, f_y e ν são linearmente dependentes. Geometricamente, se ν é não nulo e ortogonal a f_x e f_y , então f_x e f_y são linearmente dependentes.

Seja $M = f(U)$. Suponha $q \in U$ ponto regular de f e seja $f(q) = p$. Então, $\lambda(q) \neq 0$ e, conseqüentemente, como os vetores $f_x(q) \times f_y(q)$ e $\nu(q)$ são paralelos, concluímos que eles apontam para o mesmo semiespaço determinado por $T_p M$ caso $\lambda(q) > 0$, e apontam para semiespaços distintos, caso $\lambda(q) < 0$.

Definição 4.2.8. Seja $q \in \Sigma_f$. Dizemos que q é um **ponto singular não degenerado de f** se q é um ponto regular de λ , isto é, $\lambda_x(q)$ e $\lambda_y(q)$ não se anulam simultaneamente.

Σ_f é localmente uma curva regular em pontos singulares não degenerados de f . De fato, se $q = (q_1, q_2) \in \Sigma_f$ é um ponto singular não degenerado de f , então $\lambda_x(q)$ e $\lambda_y(q)$ não se anulam simultaneamente, por exemplo $\lambda_y(q) \neq 0$ (o raciocínio é análogo para $\lambda_x(q) \neq 0$). Como $\lambda(q) = 0$ e $\lambda_y(q) \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita, podemos escrever $y = y(x)$, para x em uma vizinhança de q_1 , satisfazendo $\lambda(x, y(x)) = 0$. Assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$\gamma : (q_1 - \delta, q_1 + \delta) \rightarrow U$$

dada por $\gamma(x) = (x, y(x))$ é uma curva regular com $\lambda \circ \gamma = 0$. Portanto, Σ_f é uma curva regular em uma vizinhança de q .

Definição 4.2.9. A curva γ é chamada de **curva singular de f em q** . Cada direção tangente à curva singular é chamada de **direção singular**.

Reparametrizando γ , se necessário, podemos supor $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, ($\varepsilon > 0$). Observe que podemos tomar $\varepsilon > 0$ de forma que $\gamma(t)$ seja um ponto singular não degenerado, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, uma vez que λ é suave e, portanto, λ_x e λ_y são contínuas.

Observação 4.2.10. Se q um ponto singular não degenerado de f , então f em q tem posto 1, o que é equivalente a dizer que o núcleo da aplicação df_q tem dimensão 1. De fato, temos $\dim(\text{Ker}(df_q)) \neq 0$, pois caso contrário, df_q seria injetora, o que contradiz o fato de q ser ponto singular de f . Agora suponha que $\dim(\text{Ker}(df_q)) = 2$. Então $\text{Ker}(df_q) = \mathbb{R}^2$,

ou seja, df_q é a transformação linear nula e, portanto, $f_x(q) = f_y(q) = 0$. Neste caso, obtemos:

$$\lambda_x(q) = \det(f_{xx}(q), f_y(q), \nu(q)) + \det(f_x(q), f_{xy}(q), \nu(q)) + \det(f_x(q), f_y(q), \nu_x(q)) = 0,$$

e, de modo análogo,

$$\lambda_y(q) = \det(f_{xy}(q), f_y(q), \nu(q)) + \det(f_x(q), f_{yy}(q), \nu(q)) + \det(f_x(q), f_y(q), \nu_y(q)) = 0,$$

o que é um absurdo, pois q é um ponto singular não degenerado de f . Portanto, $\dim(Ker(df_q)) = 1$, como queríamos. $\square$

Definição 4.2.11. *Seja $q \in \Sigma_f$ um ponto singular não degenerado de f e γ curva singular de f em q . O núcleo da aplicação linear $df_{\gamma(t)}$ (que é um subespaço vetorial de dimensão 1 em $\mathbb{R}^2$) é chamado de **direção nula**. Para cada t , podemos escolher um campo suave de vetores não nulos $\eta(t)$ tal que $\eta(t)$ pertença a uma direção nula, isto é, $df_{\gamma(t)}(\eta(t)) = (0, 0)$. Chamamos este campo de **campo anulador ao longo de γ** . Ver Figura 4.6.*

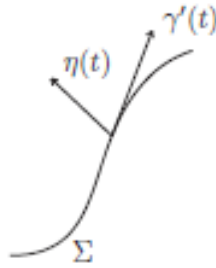


Figura 4.6: Direção singular e nula dadas na Definição 4.2.11. Fonte: Santos, 2015, p. 35.

Dados $q \in U$ e $f(q) = p$, sabemos que $df_q(\mathbb{R}^2)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ (sendo um ponto, uma reta ou um plano), tendo como geradores os vetores $f_x(q)$ e $f_y(q)$.

- Se $q \notin \Sigma_f$, então df_q é injetora e, assim, $df_q(\mathbb{R}^2)$ é um plano, que tem como base os vetores $f_x(q)$ e $f_y(q)$, denominado **plano tangente à M** em p , denotado por T_pM .
- Se $q \in \Sigma_f$ é um ponto singular não degenerado, vimos na Observação 4.2.10 que df_q tem posto 1 e, portanto, $f_x(q)$ e $f_y(q)$ não se anulam simultaneamente. Logo, T_pM é ortogonal a $\nu(q)$. Logo, definimos o **plano normal a M** em p , como sendo o plano que passa por p e é perpendicular a T_pM , que denotaremos por N_pM . (Ver Figura 4.7).

Segue da definição de frente de onda que existe um "plano tangente" bem definido, mesmo em pontos singulares.

Definição 4.2.12. *Dado $q \in U$, o plano que passa por $f(q)$ e é ortogonal a $\nu(q)$ é chamado **plano tangente limitante à M** em $f(q)$.*

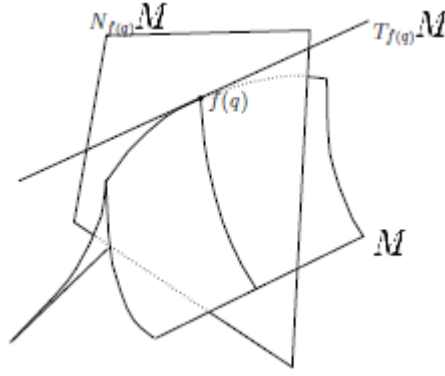


Figura 4.7: Reta tangente e plano normal a M em $p = f(q)$. Fonte: Santos, 2015, p. 36.

Em pontos regulares de f , o plano tangente limitante coincide com o plano tangente usual, uma vez que, dado um ponto regular $q \in U$, $\nu(q)$ e $f_x(q)$ e $f_y(q)$ são não nulos e paralelos. Em pontos singulares não degenerados de f , o plano tangente limitante contém a reta tangente a M naquele ponto, uma vez que ambos são ortogonais a ν no ponto singular.

O teorema a seguir fornece critérios para que um ponto singular de f seja uma cuspidal edge ou uma swallowtail.

Teorema 4.2.13. ([15] p. 9) *Sejam q ponto singular não degenerado de uma frente de onda f e γ a curva singular de f em q . Então*

1) $q = \gamma(t_0)$ é uma cuspidal edge se, e somente se, a direção nula e a direção singular são transversais, isto é, $\det(\gamma'(t), \eta(t))$ não se anula em $t = t_0$.

2) $q = \gamma(t_0)$ é uma swallowtail se, e somente se, a direção nula e a direção singular são paralelas e

$$\left. \frac{d}{dt} \det(\gamma'(t), \eta(t)) \right|_{t=t_0} \neq 0.$$

Exemplo 4.2.14. (a) Seja $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$ a cuspidal edge usual. Vimos no Exemplo 4.2.4 que o conjunto singular de f é o eixo- x , e que $\nu(x, y) = \frac{(0, -3y, 2)}{\sqrt{9y^2 + 4}}$ é um campo de vetores normais unitário à f . Dado $(x, 0) \in \Sigma_f$, como $f_y(x, 0) = (0, 0, 0)$, temos

$$\lambda_y(x, 0) = \det(f_x(x, 0), f_{yy}(x, 0), \nu(x, 0)) = \det((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)) = 2,$$

isto é, todo ponto singular de f é não degenerado. Seja $\gamma(t) = (t, 0)$ uma parametrização para a curva singular de f em $q = (x, 0)$, com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Então, podemos tomar $\eta(t) = (0, 1)$, como o campo anulador ao longo de γ , pois como $df_{\gamma(t)}(x, y) = (x, 0, 0)$ temos

$$df_{\gamma(t)}(\eta(t)) = (0, 0, 0), \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Agora observe que a direção nula e a direção singular são transversais como diz o Teorema 4.2.13, já que a direção singular de γ é dada por $\gamma'(t) = (1, 0)$. O plano tangente limitante à $M = f(U)$ em $f(x, 0) = (x, 0, 0)$ é o plano paralelo ao plano- uv já que $\nu(x, 0) = (0, 0, 1)$, e o plano normal é o plano paralelo ao plano- vw uma vez que a reta tangente a cuspidal

edge tem como vetor diretor $f_x(x, 0) = (1, 0, 0)$.

(b) Seja $f(x, y) = (3x^2 + x^2y, 4x^3 + 2xy, y)$ o swallowtail usual. Vimos no Exemplo 4.2.4 que o conjunto singular de f é dado por uma parábola parametrizada por $\alpha(x) = -6x^2$ e como

$$\lambda_y(0, 0) = \det(f_{xy}(0, 0), f_y(0, 0), \nu(0, 0)) = \det((0, 2, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)) = 2,$$

então $(0, 0)$ é um ponto singular não degenerado de f . Seja $\gamma(t) = (t, -6t^2)$ uma parametrização para a curva singular de f . Logo a direção singular na origem é $\gamma'(0) = (1, 0)$. Agora, $df_{\gamma(t)}(x, y) = (t^2y, 2ty, y)$, e como para $\eta(t) = (1, 0)$, temos

$$df_{\gamma(t)}(\eta(t)) = (0, 0, 0), \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

então $\eta(t)$ é uma direção nula. Logo fica definido um campo de vetores nulo η , ao longo de γ . Observamos que

$$\left. \frac{d}{dt} \det(\gamma'(t), \eta(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \det((1, -12t), (1, 0)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} 12t \right|_{t=0} = 12 \neq 0,$$

e a curva singular e a direção nula são paralelas, estando de acordo com o Teorema 4.2.13. Além disso, como $f(0, 0) = (0, 0, 0)$ e $\nu(0, 0) = (0, 0, 1)$, temos que o plano tangente limitante em $(0, 0, 0)$ é o plano- uv , que coincide com o plano normal, uma vez que a reta tangente em $f(0, 0)$ tem como vetor diretor $f_y(0, 0) = (0, 0, 1)$. $\square$

5 GEOMETRIA DA CUSPIDAL EDGE

Salvo menção contrária, em todo este capítulo $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ denotará um germe de frente de onda que é uma cuspidal egde M (isto é, $\mathbf{0}$ é um ponto singular de cuspidal edge), pois com abuso de linguagem, chamamos de cuspidal edge tanto o germe f , ou o ponto singular, assim como também o germe do conjunto imagem de f . Denotaremos por (x, y) e (u, v, w) os sistemas de coordenadas usuais em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Além disso, ν denotará sua aplicação de Gauss e $\gamma(t)$ a *curva singular* (composta por *pontos singulares não degenerados*) e sua imagem por f será $\hat{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t)$. Como a cuspidal edge é uma frente, utilizamos também todas as notações do capítulo anterior, como η para o campo anulador, λ a função densidade de área, etc. Será apresentado neste capítulo algumas relações entre invariantes fundamentais envolvendo a cuspidal edge. As referências principais usadas foram os artigos [9], [11] e [17].

5.1 Forma normal

Quando uma superfície M é regular e $p \in M$, podemos escolher um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$ tal que p seja a origem, $T_p M$ seja o plano- uv e M seja localmente o gráfico de alguma função dada por $z = h(x, y)$, onde $p \in \mathbb{R}^3$ e $h(0, 0) \in \mathbb{R}$. Dizemos que M está parametrizada na *forma de Monge*, isto é, $f(x, y) = (x, y, h(x, y))$ é uma parametrização local para M .

Agora, para superfícies singulares que consistem da cuspidal edge, vamos mostrar que podemos parametrizá-las por uma forma similar a de Monge, fazendo mudanças de coordenadas na fonte e isometrias na meta, sem modificar a geometria da superfície.

Teorema 5.1.1. (Forma Normal da Cuspidal Edge) ([9] p. 448) *Existe um germe de difeomorfismo $\psi : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ e um germe de isometria $\Phi : (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ que satisfazem*

$$\Phi \circ f \circ \psi(x, y) = \left(x, \frac{a_{20}}{2}x^2 + \frac{a_{30}}{6}x^3 + \frac{1}{2}y^2, \frac{b_{20}}{2}x^2 + \frac{b_{30}}{6}x^3 + \frac{b_{12}}{2}xy^2 + \frac{b_{03}}{6}y^3 \right) + h(x, y) \quad (5.1)$$

onde $b_{03} \neq 0$, $b_{20} \geq 0$ e

$$h(x, y) = (0, x^4 h_1(x), x^4 h_2(x) + x^2 y^2 h_3(x) + xy^3 h_4(x) + y^4 h_5(x, y)),$$

onde $h_1(x), h_2(x), h_3(x), h_4(x)$ e $h_5(x, y)$ são funções suaves.

Demonstração. Sejam $f = (f_1, f_2, f_3)$ e $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Como f é uma aplicação de posto 1 em $\mathbf{0}$, então podemos supor

$$f_x(\mathbf{0}) = ((f_1)_x(\mathbf{0}), 0, 0),$$

onde $(f_1)_x(\mathbf{0}) \neq 0$. (basta fazer uma rotação em $\mathbb{R}^3$, se necessário). Considere a aplicação

$$F(x, y) = (f_1(x, y), y) = (\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Afirmamos que F é uma mudança de coordenadas. De fato, como a matriz jacobiana de F em $\mathbf{0}$ é inversível, pois

$$\det JF(\mathbf{0}) = \det \begin{pmatrix} (f_1)_x(\mathbf{0}) & (f_2)_y(\mathbf{0}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (f_1)_x(\mathbf{0}) \neq 0,$$

então, pelo Teorema da Aplicação Inversa, F é um difeomorfismo local na origem. Logo, escrevendo $F^{-1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (h_1(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{y})$, para alguma h_1 suave, seja $\tilde{f} = f \circ F^{-1}$. Então,

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(F^{-1}(\tilde{x}, \tilde{y})) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)) = (\tilde{x}, \tilde{f}_2(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{f}_3(\tilde{x}, \tilde{y})),$$

uma vez que $\tilde{f}_2 = f_2 \circ F^{-1}$ e $\tilde{f}_3 = f_3 \circ F^{-1}$. Temos

$$\begin{cases} \tilde{f}_{2\tilde{x}}(\mathbf{0}) = (f_2)_x(\mathbf{0}) \cdot (h_1)_{\tilde{x}}(\mathbf{0}) + (f_2)_y(\mathbf{0}) \cdot 0 = 0 \\ \tilde{f}_{3\tilde{x}}(\mathbf{0}) = (f_3)_x(\mathbf{0}) \cdot (h_1)_{\tilde{x}}(\mathbf{0}) + (f_3)_y(\mathbf{0}) \cdot 0 = 0 \\ \tilde{f}_{2\tilde{y}}(\mathbf{0}) = (f_2)_x(\mathbf{0}) \cdot (h_1)_{\tilde{y}}(\mathbf{0}) + (f_2)_y(\mathbf{0}) \cdot 1 = 0 \\ \tilde{f}_{3\tilde{y}}(\mathbf{0}) = (f_3)_x(\mathbf{0}) \cdot (h_1)_{\tilde{y}}(\mathbf{0}) + (f_3)_y(\mathbf{0}) \cdot 1 = 0, \end{cases}$$

pois $(f_2)_x(\mathbf{0}) = (f_2)_y(\mathbf{0}) = (f_3)_x(\mathbf{0}) = (f_3)_y(\mathbf{0}) = 0$, uma vez que, sendo f de posto 1, $f_y(\mathbf{0})$ é paralelo ao vetor $f_x(\mathbf{0}) = ((f_1)_x(\mathbf{0}), 0, 0)$. Renomeando para simplificar a notação, escrevemos

$$f(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y)). \quad (5.2)$$

Seja q um ponto singular de f . Como $f_x(q) = (1, (f_2)_x(q), (f_3)_x(q))$ e $f_y(q) = (0, (f_2)_y(q), (f_3)_y(q))$ então $f_y(q) = 0$ e

$$(x, y) \in \text{Ker} df(q) \Leftrightarrow x = 0.$$

Logo, $\eta(q) = \partial_y = (0, 1)$ é um campo anulador de vetores ao longo da curva singular de f . Como $\mathbf{0}$ é um ponto de cuspidal edge então, pelo Teorema 4.2.13, a curva singular de f é “transversal” à direção nula em $\mathbf{0}$, isto é, o vetor tangente desta curva (direção singular) é transversal a direção nula $\eta(q) = \partial_y$. Logo, a curva singular é transversal ao eixo- y . Portanto, a curva singular pode ser parametrizada por $\gamma(x) = (x, g(x))$, para alguma função suave g . Considere a mudança de coordenadas na fonte

$$h(x, y) = (x, y - g(x)) = (\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Como $h^{-1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}, \tilde{y} + g(\tilde{x}))$ então

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= f \circ h^{-1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(\tilde{x}, \tilde{y} + g(\tilde{x})) = (\tilde{x}, f_2(\tilde{x}, \tilde{y} + g(\tilde{x})), f_3(\tilde{x}, \tilde{y} + g(\tilde{x}))) \\ &= (\tilde{x}, \tilde{f}_2(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{f}_3(\tilde{x}, \tilde{y})). \end{aligned}$$

Note que $h(x, g(x)) = (\tilde{x}, 0)$. Assim, renomeando novamente, temos

$$f(x, y) = (x, f_2(x, y), f_3(x, y)),$$

com $\Sigma_f = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$, isto é, a curva singular de f é o eixo- x . Note que ainda temos $f_y(q) = 0, \forall q = (x, 0)$. Seja $\varphi(x, y) = f_2(x, y) - f_2(x, 0)$. Como $\varphi(x, 0) = 0$, aplicando o Lema 2.1.4, temos

$$\varphi(x, y) = yb_2(x, y), \quad (5.3)$$

para alguma função b_2 suave. Portanto, $f_2(x, y) = a_2(x) + yb_2(x, y)$, onde $a_2(x) = f_2(x, 0)$. De modo análogo, podemos escrever

$$f_3(x, y) = a_3(x) + yb_3(x, y),$$

sendo $a_3(x) = f_3(x, 0)$, para alguma função suave b_3 . Assim, temos

$$f(x, y) = (x, a_2(x) + yb_2(x, y), a_3(x) + yb_3(x, y)). \quad (5.4)$$

Como $\mathbf{0} = f_y(x, 0) = (0, b_2(x, 0), b_3(x, 0))$, ou seja, $b_2(x, 0) = b_3(x, 0) = 0 \forall x$, então, pelo Lema 2.1.4, podemos escrever

$$b_i(x, y) = y\bar{b}_i(x, y), \text{ para } i = 2, 3.$$

Substituindo em (5.4) e reescrevendo $\bar{b}$ por b , obtemos:

$$f(x, y) = (x, a_2(x) + y^2b_2(x, y), a_3(x) + y^2b_3(x, y)). \quad (5.5)$$

Considerando a função densidade de área de f , $\lambda = \det(f_x, f_y, \nu)$, e $q = (x, 0)$ um ponto singular não degenerado de f , temos

$$\lambda_x(q) = \det(f_{xx}(q), f_y(q), \nu(q)) + \det(f_x(q), f_{xy}(q), \nu(q)) + \det(f_x(q), f_y(q), \nu_x(q)) = 0,$$

pois $f_y(q) = f_{xy}(q) = \mathbf{0}$. Logo, pela definição de ponto singular não degenerado, $\lambda_y(q) \neq 0$. Como $\lambda_y(q) = \det(f_x(q), f_{yy}(q), \nu(q))$, então $f_{yy}(q) \neq 0, \forall q = (x, 0)$. Derivando (5.5) duas vezes com relação a y em q , obtemos $f_{yy}(q) = (0, 2b_2(q), 2b_3(q))$. Logo, $b_2(q) \neq 0$ e $b_3(q) \neq 0$, para todo $q = (x, 0)$. Agora, aplicando em f uma rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo- u dada por

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

obtemos

$$\begin{aligned} A_\theta \circ f(x, y) &= (x, \cos \theta a_2(x) - \sin \theta a_3(x) + y^2[\cos \theta b_2(x, y) \\ &\quad - \sin \theta b_3(x, y)], \sin \theta a_2(x) + \cos \theta a_3(x) + y^2[\sin \theta b_2(x, y) + \cos \theta b_3(x, y)]). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Como $b_2(q) \neq 0$ e $b_3(q) \neq 0$ então existe um ângulo θ tal que

$$\cos \theta b_2(0, 0) - \sin \theta b_3(0, 0) > 0 \text{ e } \sin \theta b_2(0, 0) + \cos \theta b_3(0, 0) = 0. \quad (5.7)$$

Sejam

$$\begin{aligned} \hat{a}_2(x) &= \cos \theta a_2(x) - \sin \theta a_3(x), \\ \hat{a}_3(x) &= \sin \theta a_2(x) + \cos \theta a_3(x), \\ \hat{b}_2(x, y) &= \cos \theta b_2(x, y) - \sin \theta b_3(x, y), \\ \hat{b}_3(x, y) &= \sin \theta b_2(x, y) + \cos \theta b_3(x, y). \end{aligned}$$

Substituindo em (5.6) e renomeando $A_\theta \circ f$ por f , obtemos:

$$f(x, y) = (x, \hat{a}_2(x) + y^2\hat{b}_2(x, y), \hat{a}_3(x) + y^2\hat{b}_3(x, y)), \quad (5.8)$$

onde $\hat{b}_2(\mathbf{0}) > 0$ e $\hat{b}_3(\mathbf{0}) = 0$. Além disso, como

$$\begin{aligned}(0, 0, 0) &= f(\mathbf{0}) = (0, \hat{a}_2(0), \hat{a}_3(0)) \text{ e} \\ (1, 0, 0) &= f_x(\mathbf{0}) = (1, \hat{a}'_2(0), \hat{a}'_3(0))\end{aligned}$$

pois a rotação é em torno do eixo- u , então $\hat{a}_2(0) = \hat{a}_3(0) = \hat{a}'_2(0) = \hat{a}'_3(0) = 0$. Aplicando a mudança de coordenadas na fonte

$$\tilde{x} = x \text{ e } \tilde{y} = y\sqrt{2\hat{b}_2(x, y)}$$

e escrevendo $y = \frac{\tilde{y}}{\sqrt{2\hat{b}_2(\tilde{x}, y(\tilde{x}, \tilde{y}))}}$, obtemos:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \left(x, \hat{a}_2(x) + \frac{1}{2} \left(y\sqrt{2\hat{b}_2(x, y)} \right)^2, \hat{a}_3(x) + y^2\hat{b}_3(x, y) \right) \\ &= \left(\tilde{x}, \hat{a}_2(\tilde{x}) + \frac{\tilde{y}^2}{2}, \hat{a}_3(\tilde{x}) + \tilde{y}^2\bar{b}_3(\tilde{x}, \tilde{y}) \right),\end{aligned}$$

onde $\bar{b}_3(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\hat{b}_3(\tilde{x}, y(\tilde{x}, \tilde{y}))}{2\hat{b}_2(\tilde{x}, y(\tilde{x}, \tilde{y}))}$. Renomeando $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y$, $\hat{a} = a$ e $\bar{b} = b$, obtemos:

$$f(x, y) = \left(x, a_2(x) + \frac{y^2}{2}, a_3(x) + y^2b_3(x, y) \right), \quad (5.9)$$

onde $a_2(0) = a_3(0) = a'_2(0) = a'_3(0) = 0$ e $b_3(\mathbf{0}) = 0$, pois $\hat{b}_3(0, y(\mathbf{0})) = \hat{b}_3(\mathbf{0}) = 0$. Seja $\psi(x, y) = b_3(x, y) - b_3(x, 0)$. Como $\psi(x, 0) = 0$, aplicando o Lema 2.1.4, temos

$$\psi(x, y) = yb_4(x, y) \Rightarrow b_3(x, y) = a_4(x) + yb_4(x, y), \quad (5.10)$$

para alguma função b_4 suave, onde $a_4(x) = b_3(x, 0)$ tal que $a_4(0) = 0$.

Logo, como $f_{yy} = (0, 1, 2b_3 + 4y(b_3)_y + y^2(b_3)_{yy})$, então $f_{yyy}(\mathbf{0}) = (0, 0, 2(b_3)_y(\mathbf{0})) \neq 0$ e, assim, $(b_3)_y(\mathbf{0}) \neq 0$, de onde segue que $b_4(\mathbf{0}) \neq 0$. Como f é cuspidal edge em $q = (x, 0)$, então

$$\det(f_x(q), f_{yy}(q), f_{yyy}(q)) \neq 0 \Leftrightarrow b_{3_y}(q) \neq 0.$$

Para detalhes, ver [11], p. 264. Logo, $b_4(q) \neq 0$. Renomeando, obtemos:

$$f(x, y) = \left(x, a_1(x) + \frac{y^2}{2}, b_2(x) + y^2b_3(x) + y^3b_4(x, y) \right), \quad (5.11)$$

onde $a_1(0) = a'_1(0) = b_2(0) = b'_2(0) = b_3(0) = 0$ e $b_4(\mathbf{0}) \neq 0$. Por rotações $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ em $\mathbb{R}^2$ e $(u, v, w) \mapsto (-u, v, -w)$ em $\mathbb{R}^3$, podemos assumir que $b''_2(0) \geq 0$. De fato, se $b''_2(0) \leq 0$, tomando as rotações citadas acima, obtemos

$$\begin{aligned}f(x, y) &= (x, a_1(-x) + \frac{y^2}{2}, -b_2(-x) - y^2b_3(-x) + y^3b_4(-x, -y)) \\ &= (\bar{x}, \bar{a}_1(x) + \frac{y^2}{2}, \bar{b}_2(x) + y^2\bar{b}_3(x) + y^3\bar{b}_4(x, y)),\end{aligned}$$

onde $\bar{a}_1(x) = a_1(-x)$, $\bar{b}_2(x) = -b_2(-x)$, $\bar{b}_3(x) = b_3(-x)$ e $\bar{b}_4(x, y) = b_4(-x, -y)$. Note que, $\bar{b}''_2(0) = -b''_2(0) \geq 0$, como queríamos.

□

Os seis coeficientes a_{20} , a_{30} , b_{20} , b_{30} , b_{12} e b_{03} que aparecem na expansão da cuspidal edge em sua forma normal são unicamente determinados, (Ver [9], p. 450). Isso implica que eles podem ser considerados invariantes geométricos da cuspidal edge, ou seja, qualquer cuspidal edge tem essa forma normal, obtida através de mudanças de coordenadas na fonte e isometrias na meta. Nas próximas seções vamos estudar esses seis invariantes geométricos.

5.2 Curvatura singular

Em pontos regulares de f , dada uma curva regular $\alpha : I \rightarrow U$ com traço contido na superfície $M = f(U)$, temos a Definição 2.2.1 para curvatura geodésica de α em $\alpha(t)$ dada por

$$\kappa_g(\alpha(t)) = \frac{\langle \alpha''(t), \nu(t) \times \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3},$$

onde ν é a aplicação de Gauss. Para pontos singulares, há um conceito análogo ao de curvatura geodésica, que foi introduzido no artigo [17].

Definição 5.2.1. *Seja $\eta(t)$ um campo anulador de vetores ao longo da curva singular γ de f , tal que $\{\gamma'(t), \eta(t)\}$ seja uma base positivamente orientada ao longo da curva singular. A **curvatura singular** de $\hat{\gamma}$ em t é dada pela expressão*

$$\kappa_s(t) := \text{sgn}(d\lambda(\eta(t))) \frac{\langle \hat{\gamma}''(t), \nu(t) \times \hat{\gamma}'(t) \rangle}{\|\hat{\gamma}'(t)\|^3}, \quad (5.12)$$

onde ν é aplicação de Gauss de f e $\hat{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$.

Com abuso de linguagem, também dizemos curvatura singular em q , $\kappa_s(q)$, para quando $q = \gamma(t)$, para algum t . A fim de facilitar alguns cálculos, é conveniente tomarmos um sistema local de coordenadas (x, y) centrado em um ponto singular não degenerado de f , como segue:

- (a) (x, y) é positivamente orientado,
- (b) a curva singular é o eixo- x ,
- (c) o eixo- x contém todos os pontos singulares de f .

Definição 5.2.2. *Um sistema local de coordenadas (x, y) satisfazendo os itens acima é chamado **sistema adaptado de coordenadas** com respeito ao ponto singular.*

Observação 5.2.3. (a) Em um sistema adaptado de coordenadas, a função densidade de área $\lambda(x, y)$ de f se anula sobre o eixo- x . Assim, a condição (c) da definição diz que, dado um ponto singular $q = (x, 0)$, como $\lambda^{-1}(0)$ é a curva singular e $\nabla\lambda(q)$ é ortogonal à curva singular, então obtemos

$$0 = \langle \nabla\lambda(q), (1, 0) \rangle = \lambda_x(q).$$

Logo, como q é não degenerado, então $\lambda_y(q) \neq 0$.

(b) O sistema de coordenadas na parametrização dada no Teorema 5.1.1 é adaptado. Além disso, vale que $\eta = \partial_y$ é um campo anulador sobre o eixo- x . Logo, quando necessário,

podemos tomar um sistema adaptado de coordenadas com $\eta = \partial_y$ sendo um campo anulador. Neste caso, temos

$$\mathbf{0} = df_q(\partial_y) = f_y(q), \forall q = (x, 0).$$

Logo, como f tem posto 1 em q , então $f_x(q) \neq \mathbf{0}$. Além disso, pelo Lema 2.1.4, $f_y(x, y) = yh(x, y)$, para alguma h suave, de onde segue que $f_{xy}(q) = \mathbf{0}$, para todo $q = (x, 0)$. Assim, obtemos que

$$\lambda_y(q) = \det(f_x(q), f_{yy}(q), \nu(q)),$$

portanto $\{f_x(q), f_{yy}(q), \nu(q)\}$, é linearmente independente. $\square$

Consideremos os seguintes abertos do $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} U_+ &= \{(x, y) \in U \mid \lambda(x, y) > 0\} \text{ e} \\ U_- &= \{(x, y) \in U \mid \lambda(x, y) < 0\}. \end{aligned}$$

Considerando um sistema adaptado de coordenadas, afirmamos que λ muda de sinal sobre o eixo- x , ou seja, a curva singular está na fronteira de U_+ e U_- . De fato, como $\lambda(x, 0) = 0$ então, pelo Lema 2.1.4, $\lambda(x, y) = yg_1(x, y)$, para alguma g_1 suave. Portanto λ_x também se anula sobre o eixo- x e, portanto, $\lambda_y(x, 0) \neq 0$, pois a curva singular é composta por pontos singulares de f não degenerados. Como

$$\lambda_y(x, y) = g_1(x, y) + y(g_1)_y(x, y),$$

então $g_1(x, 0) \neq 0$, o que implica que, diminuindo U se necessário, g_1 não muda de sinal em U e, ainda mais, $\text{sgn}(\lambda_y) = \text{sgn}(g_1)$. Consequentemente, $\lambda(x, y) = yg_1(x, y)$, muda de sinal quando cruza o eixo- x .

Observação 5.2.4. (a) Em um sistema adaptado de coordenadas (x, y) , (5.12) pode ser reescrita da forma

$$\kappa_s(t) = \text{sgn}(\lambda_y(\gamma(t))) \frac{\det(f_x(\gamma(t)), f_{xx}(\gamma(t)), \nu(t))}{\|f_x(\gamma(t))\|^3}. \quad (5.13)$$

De fato, parametrizando a curva singular por $\gamma(t) = (x(t), 0)$, com $x(t)$ crescente, seja

$$\eta(t) = a(t)\partial x + e(t)\partial y,$$

onde $a(t)$ e $e(t)$ são funções suaves. Como $\{\gamma', \eta\}$ é uma base orientada positivamente, então $e(t) > 0$. Como $\lambda_x = 0$ e $\lambda_y \neq 0$ ao longo do eixo- x , então $d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t)) = e(t)\lambda_y(\gamma(t))$. Em particular temos

$$\text{sgn}(d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t))) = \text{sgn}(\lambda_y(\gamma(t))) = \begin{cases} +1 & \text{se o lado esquerdo de } \gamma \text{ é } U_+ \\ -1 & \text{se o lado esquerdo de } \gamma \text{ é } U_-, \end{cases}$$

pois $\text{sgn}(\lambda_y) = \text{sgn}(g_1)$ em U , sendo $\lambda(x, y) = yg_1(x, y)$. Como $\hat{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) = f(x(t), 0)$, temos:

$$\begin{cases} \hat{\gamma}'(t) = x'(t)f_x(\gamma(t)) \\ \hat{\gamma}''(t) = x''(t)f_{xx}(\gamma(t)) + x'(t)f_x(\gamma(t)). \end{cases}$$

Substituindo em (5.13), obtemos:

$$\begin{aligned}
\kappa_s(t) &= \operatorname{sgn}(d\lambda(\eta(t))) \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \nu(t))}{\langle \hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}'(t) \rangle^{\frac{3}{2}}} \\
&= \operatorname{sgn}(\lambda_y) \frac{\det(x'(t)f_x(\gamma(t)), x'(t)^2 f_{xx}(\gamma(t)) + x''(t)f_x(\gamma(t)), \nu(t))}{\langle x'(t)f_x(\gamma(t)), x'(t)f_x(\gamma(t)) \rangle^{\frac{3}{2}}} \\
&= \operatorname{sgn}(\lambda_y) \frac{\det(x'(t)f_x(\gamma(t)), x'(t)^2 f_{xx}(\gamma(t)), \nu(t))}{x'(t)^3 \langle f_x(\gamma(t)), f_x(\gamma(t)) \rangle^{\frac{3}{2}}} \\
&= \operatorname{sgn}(\lambda_y) \frac{\det(f_x(\gamma(t)), f_{xx}(\gamma(t)), \nu(t))}{\langle f_x(\gamma(t)), f_x(\gamma(t)) \rangle^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

como queríamos.

(b) Se γ não é a curva singular, então a expressão (4.1) é, a menos de sinal, a curvatura geodésica de $f \circ \gamma$. Assim, a partir de (a), concluímos que $\kappa_s(t)$ pode ser considerada como a curvatura geodésica limitante das curvas regulares sobre a superfície, tais que suas pré-imagens em U estejam à esquerda da curva singular. $\square$

Exemplo 5.2.5. Seja $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$, a cuspidal edge usual, dada no Exemplo 4.2.4, onde vimos que a curva singular é o eixo- x , que parametrizamos por $\gamma(t) = (t, 0)$ e $\nu(x, y) = \frac{(0, -3y, 2)}{\sqrt{4 + 9y^2}}$ sua aplicação de Gauss. Logo, estamos em um sistema adaptado de coordenadas, com $\eta = \partial_y$. Vamos usar a expressão dada na Observação 5.2.4 para calcular a curvatura singular. Temos:

$$\lambda(x, y) = \frac{4y + 9y^3}{\sqrt{4 + 9y^2}} \text{ e } \lambda_y(x, y) = \frac{2(9y^2 + 2)}{\sqrt{4 + 9y^2}},$$

ou seja, $\operatorname{sgn}(\lambda_y) = 1$. Portanto, a curvatura singular é $\kappa_s(x, 0) = 0$, uma vez que $f_{xx}(x, y) = 0$. $\square$

Teorema 5.2.6. (Invariância da curvatura singular) ([17] p. 497) *A definição de curvatura singular dada em (5.12) independe do parâmetro t , da escolha do campo ν e da orientação da curva singular.*

Demonstração. Primeiramente, independente da reparametrização da curva singular pois, tomando $t = h(s)$ uma mudança de parâmetro para γ , temos:

$$\begin{aligned}
\kappa_s(\gamma(h(s))) &= \operatorname{sgn}(d\lambda(\eta)) \frac{\det(h'(s)^2 \gamma'(h(s)), h'(s)^2 \gamma''(h(s)) + h''(s) \gamma'(h(s)), \nu(h(s)))}{\langle \gamma'(h(s)) h'(s), \gamma'(h(s)) h'(s) \rangle^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \operatorname{sgn}(d\lambda(\eta)) \frac{\det(\gamma'(h(s)), \gamma''(h(s)), \nu(h(s)))}{\langle \gamma'(h(s)), \gamma'(h(s)) \rangle^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

logo a definição se mantém, para qualquer parâmetro t . Se tomarmos o campo $-\nu$, modificamos o sinal da fração presente em (5.12). Por outro lado, modificamos o sinal de λ , assim mantendo o sinal da expressão. Por fim, se γ muda de orientação, tanto γ' quanto η mudam de sinal, assim (5.12) mantém o sinal. Em todos os casos, a curvatura singular se mantém inalterada. $\square$

Uma propriedade muito importante da curvatura singular é o fato de que é um conceito intrínseco, isto é, que (5.12) pode ser reescrita em função dos coeficientes da primeira forma fundamental. Não faremos sua demonstração aqui, pois envolve alguns conceitos não estudados neste trabalho.

Proposição 5.2.7. (Fórmula intrínseca da curvatura singular) ([17] p. 497) *Seja q um ponto de cuspidal edge de f e (x, y) um sistema adaptado de coordenadas com respeito a q tal que ∂_y seja uma direção nula. Então a curvatura singular é dada por*

$$k_s(t) = \frac{-F_y E_x + 2E F_{xy} - E E_{yy}}{E^{\frac{3}{2}} \lambda_y}(\gamma(t)), \quad (5.14)$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental de f em q .

Exemplo 5.2.8. (Parábola Cuspidal) *Seja*

$$f(x, y) = (ax^2 + y^2, by^2 + y^3, x), \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (5.15)$$

Temos

$$f_x(x, y) = (2ax, 0, 1), \quad f_y(x, y) = (2y, 2by + 3y^2, 0) \Rightarrow f_x(x, y) \times f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Logo, o eixo- x é a curva singular e f está em um sistema adaptado de coordenadas. Seja $\gamma(t) = (t, 0)$ uma parametrização da curva singular, com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Então podemos tomar $\eta(t) = \partial_y$ como o campo anulador ao longo de γ . De fato, como $df_{\gamma(t)}(x, y) = (2atx, 0, x)$, temos $df_{\gamma(t)}(\eta(t)) = \mathbf{0}$. Temos

$$\nu(x, y) = \frac{1}{\delta}(-3y - 2b, 2, 2ax(3y + 2b)), \quad \text{onde } \delta = \sqrt{4 + (1 + 4a^2x^2)(4b^2 + 12by + 9y^2)}$$

é um campo de vetores normais unitários a f . Como

$$(f, \nu)(x, y) = \left(ax^2 + y^2, by^2 + y^3, x, \frac{-3y - 2b}{\delta}, \frac{2}{\delta}, \frac{2ax(3y + 2b)}{\delta} \right),$$

sua matriz jacobiana nos pontos singulares $(x, 0)$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 2ax & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 32a^2b^3x & 3 \\ \frac{(4b^2(4a^2x^2 + 1) + 4)^{\frac{3}{2}}}{4a^2b^2x} & -\frac{2(4a^2b^2x^2 + b^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{3b(4a^2x^2 + 1)} \\ -\frac{(4a^2b^2x^2 + b^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{2ab(b^2 + 1)} & -\frac{2(4a^2b^2x^2 + b^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{3ax} \\ \frac{(b^2(4a^2x^2 + 1))^{\frac{3}{2}}}{(b^2(4a^2x^2 + 1))^{\frac{3}{2}}} & \frac{(4a^2b^2x^2 + b^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{(4a^2b^2x^2 + b^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}.$$

Como as duas colunas são linearmente independentes então (f, ν) é uma imersão. Portanto, f é uma frente de onda. Além disso, como as direções singulares e nulas são

transversais, pelo Teorema 4.2.13, segue que cada ponto do eixo- x é uma cuspidal edge. Tomando $q = (x, 0)$ um ponto singular de f , temos

$$E(q) = 4a^2x^2 + 1, \quad E_x(q) = 8a^2x + 1, \quad E_{yy}(q) = 0, \quad F_y(q) = 4ax,$$

$$F_{xy}(q) = 4a, \quad \text{e } \lambda_y(q) = \frac{16a^2b^2x^2 + 4b^2 + 4}{\sqrt{4b^2(4a^2x^2 + 1) + 4}},$$

pois

$$\lambda(q) = \frac{48a^2bx^2y^2 + 16a^2b^2x^2y + 36a^2x^2y^3 + 4y + 12by^2 + 4b^2y + 9y^3}{\delta}.$$

Usando a Proposição 5.2.7 para a curvatura singular, temos:

$$\kappa_s(q) = \frac{(-4ax)(8a^2x) + 8a(4a^2x^2 + 1)}{(1 + 4a^2x^2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{16a^2b^2x^2 + 4b^2 + 4}{\sqrt{4b^2(4a^2x^2 + 1) + 4}} \right)} = \frac{8a}{(1 + 4a^2x^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + b^2(1 + 4a^2x^2)}}.$$

Se $a > 0$ então a curvatura singular é positiva e chamamos f de *parábola cuspidal elíptica*, e se $a < 0$, a curvatura singular é negativa e chamamos f de *parábola cuspidal hiperbólica*, com traços dados na Figura 5.1. $\square$

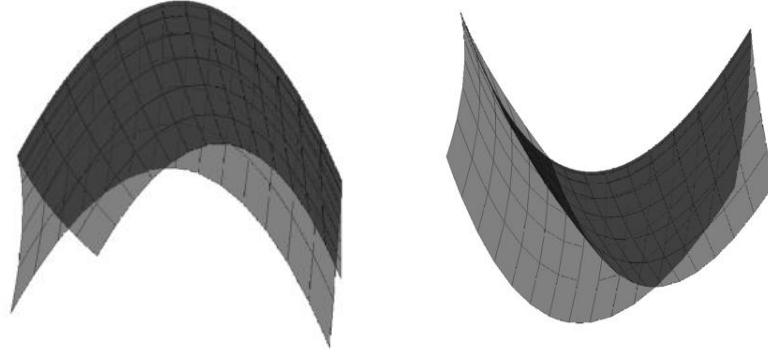


Figura 5.1: Parábola cuspidal elíptica para $a = b = 1$ a esquerda e parábola cuspidal hiperbólica para $a = -1$ e $b = -1$ a direita, referentes ao Exemplo 5.2.8. Fonte: feita pelo autor.

Veremos que o sinal da curvatura singular tem uma grande importância em sua interpretação geométrica.

Definição 5.2.9. Uma curva regular $\sigma : I \rightarrow U$ é chamada de **curva nula** de uma frente de onda f se $\sigma'(t)$ é uma direção nula em cada ponto singular de f .

Dada uma curva nula σ , se $\sigma(t)$ é um ponto singular de f temos

$$\hat{\sigma}'(t) = (f \circ \sigma)'(t) = df_{\sigma(t)}(\sigma'(t)) = \mathbf{0},$$

pois $\sigma'(t)$ é uma direção nula. Agora, quando f consiste apenas de pontos de cuspidal edge, pelo Teorema 4.2.13, a curva nula e a curva singular são transversais em cada ponto de sua interseção, assim, a curva $\hat{\sigma}(t) = f(\sigma(t))$ é uma curva “transversal” a cuspidal edge nestes pontos, isto é, cruza a curva $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$, atravessando a f .

Teorema 5.2.10. ([17] p. 501) *Seja q um ponto de cuspidal edge, e γ a curva singular parametrizada por comprimento de arco tal que $\gamma(0) = q$ e $\hat{\gamma}(0) = f(q)$. Seja $\sigma(s) = (x(s), y(s))$ uma curva nula passando por $\sigma(0) = q$. Então o sinal da curvatura singular em q coincide com o sinal de $\langle \hat{\sigma}''(0), \hat{\gamma}''(0) \rangle$, onde $\hat{\sigma} = f \circ \sigma$ e $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$.*

Demonstração. Seja (x, y) um sistema adaptado de coordenadas com respeito a origem tal que $\eta = \partial_y$ é um campo anulador de vetores sobre o eixo- x . Então, pela Observação 5.2.3 item (b), $f_y(q) = df_q(\eta) = \mathbf{0}$ e $f_{xy}(q) = 0$. Por outro lado, como γ parametriza o eixo- x , podemos supor que $\gamma(t) = (t, 0)$. Como $\sigma'(0)$ é uma direção nula, ou seja, é paralelo a ∂_y , segue que $x'(0) = 0$. Temos

$$\begin{cases} \hat{\sigma}' = x'f_x + y'f_y \\ \hat{\sigma}'' = x''f_x + x'(x'f_{xx} + y'f_{xy}) + y''f_y + y'(x'f_{yx} + y'f_{yy}). \end{cases}$$

Além disso, como $f_y(q)$ e $f_{xy}(q)$ também se anulam na origem (ver Observação 5.2.3), então

$$\hat{\sigma}'(0) = x'(0)f_x(q) = 0 \text{ e } \hat{\sigma}''(0) = x''(0)f_x(q) + y'(0)^2f_{yy}(q). \quad (5.16)$$

Observe que, como $\hat{\gamma}(t) = f(t, 0)$, temos:

$$\begin{cases} \hat{\gamma}'(t) = f_x(t, 0) \\ \hat{\gamma}''(t) = f_{xx}(t, 0). \end{cases}$$

Substituindo na expressão $\langle \hat{\sigma}''(0), \hat{\gamma}''(0) \rangle$, obtemos:

$$\langle \hat{\sigma}''(0), \hat{\gamma}''(0) \rangle = \langle x''(0)f_x(q) + y'(0)^2f_{yy}(q), f_{xx}(q) \rangle = y'(0)^2 \langle f_{yy}(q), f_{xx}(q) \rangle, \quad (5.17)$$

pois como γ é parametrizada por comprimento de arco, temos

$$\langle f_x, f_{xx} \rangle = \langle \hat{\gamma}', \hat{\gamma}'' \rangle = 0.$$

Temos que $\{f_x, \nu, f_x \times \nu\}$ é uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$, em qualquer ponto de U . Assim, se escrevemos

$$f_{yy}(q) = af_x(q) + b\nu(q) + c(f_x(q) \times \nu(q)), \quad (5.18)$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, segue que,

$$b = \langle f_{yy}(q), \nu(q) \rangle = (\langle f_y(q), \nu(q) \rangle)_y - \langle f_y(q), \nu_y(q) \rangle = 0 \text{ e}$$

$$c = \langle f_{yy}(q), f_x(q) \times \nu(q) \rangle = (\langle f_y(q), f_x(q) \times \nu(q) \rangle)_y = -\lambda_y(q).$$

Substituindo em (5.18), obtemos

$$f_{yy}(q) = af_x(q) - \lambda_y(q)(f_x(q) \times \nu(q)). \quad (5.19)$$

Portanto, substituindo (5.19) em (5.17), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}''(0), \hat{\gamma}''(0) \rangle &= y'(0)^2 \langle af_x(q) - \lambda_y(q)(f_x(q) \times \nu(q)), f_{xx}(q) \rangle \\ &= -y'(0)^2 \lambda_y(q) \langle f_x(q) \times \nu(q), f_{xx}(q) \rangle \\ &= y'(0)^2 \lambda_y(q) \det(f_x(q), f_{xx}(q), \nu(q)) = y'(0)^2 \lambda_y(q) \frac{\kappa_s(q)}{\text{sgn}(\lambda_y(q))}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \hat{\sigma}''(0), \hat{\gamma}''(0) \rangle = y'(0)^2 |\lambda_y(q)| \kappa_s(q) \Rightarrow \text{sgn}(\langle \hat{\sigma}''(0), \hat{\gamma}''(0) \rangle) = \text{sgn}(\kappa_s(q)),$$

como queríamos. □

Na geometria diferencial, sendo α uma parametrização por comprimento de arco de uma curva regular com curvatura não nula, o plano retificante de α em t é gerado pelos vetores $\mathbf{t}(t) = \alpha'(t)$ e $\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t)$, onde $\mathbf{n}(t) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}$. Um resultado conhecido é que, em um ponto da curva α em que a curvatura não se anula, seu traço não cruza o plano retificante e, ainda mais, o traço está contido no semiespaço determinado pelo plano retificante em que aponta o vetor normal principal $\mathbf{n}$. O seguinte corolário é um resultado análogo para cuspidal edges.

Corolário 5.2.11. (Interpretação geométrica da curvatura singular) ([17] p. 502) *Seja q um ponto de cuspidal edge de f e γ a curva singular de f com $\gamma(0) = q$. Seja T o plano retificante de $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$ em q . Se a curvatura singular em q é positiva (resp. negativa) então, para toda curva nula σ , com $\sigma(0) = q$, $\hat{\sigma}(t) = (f \circ \sigma)(t)$ pertence ao semiespaço (respectivamente o semiespaço oposto) determinado por T que contém o vetor normal principal $\mathbf{n}(0)$ de $\hat{\gamma}$ em uma vizinhança de q . E mais, se a curvatura singular em q for positiva, localmente a superfície cuspidal edge está contida no mesmo semiespaço determinado por T que contém $\mathbf{n}(0)$, caso contrário, há pontos da superfície em ambos os semiespaços determinados por T .*

Demonstração. Seja (x, y) um sistema adaptado de coordenadas em q , e suponha q e $f(q) = p$ as origens do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. A expansão de Taylor de f na origem é dada por

$$f(x, y) = f_x(q) + \frac{1}{2}(f_{xx}(q)x^2 + f_{yy}(q)y^2) + o(x^2 + y^2),$$

uma vez que $f_{xy}(q) = \mathbf{0}$ e $o(x^2 + y^2)$ denota os termos de grau maior ou igual a 3. Como $\hat{\gamma}(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(t, 0)$ temos $\hat{\gamma}''(t) = f_{xx}(t, 0)$ paralelo ao vetor normal principal de $\hat{\gamma}$, onde $\hat{\gamma}$ está parametrizada por comprimento de arco. Logo, $\langle f_x(t, 0), f_{xx}(t, 0) \rangle = 0$. Assim,

$$\langle f(x, y), f_{xx}(\mathbf{0}) \rangle = \frac{1}{2}x^2\|f_{xx}(\mathbf{0})\|^2 + \frac{1}{2}y^2\langle f_{yy}(\mathbf{0}), f_{xx}(\mathbf{0}) \rangle + o(x^2 + y^2). \quad (5.20)$$

Seja $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva nula, com $\sigma(0) = q$. Analisando o sinal da curvatura singular, temos:

- Se $\kappa_s(\mathbf{0}) > 0$, pelo Teorema 5.2.10 e por (5.17) temos $\langle f_{yy}(\mathbf{0}), f_{xx}(\mathbf{0}) \rangle > 0$. Assim, $\langle f(x, y), f_{xx}(\mathbf{0}) \rangle > 0$, em uma vizinhança da origem, isto é, se a curvatura singular for positiva então, $f(x, y)$ pertence ao semiespaço determinado pelo plano perpendicular a $f_{xx}(\mathbf{0})$ e que aponta o vetor $f_{xx}(\mathbf{0})$, que é o plano retificante de $\hat{\gamma}$ em p , pois $f_{xx}(\mathbf{0}) = \hat{\gamma}''(0)$.
- Se $\kappa_s(\mathbf{0}) < 0$, então podemos escolher um sistema de coordenadas adaptado tal que $\sigma(t) = (0, t)$. De modo análogo ao feito no item anterior, temos $\langle f(0, t), f_{xx}(\mathbf{0}) \rangle < 0$ em uma vizinhança da origem, isto é, se a curvatura singular for negativa então, localmente $f(0, t)$ pertence ao semiespaço determinado pelo plano retificante de $\hat{\gamma}$ em p que contém o vetor $-f_{xx}(\mathbf{0})$, ou seja, o semiespaço contrário ao que contém pontos de $\hat{\gamma}$. Portanto, localmente há pontos da superfície em ambos os semiespaços definidos por T .

□



Figura 5.2: Exemplo de curvatura singular positiva e negativa, respectivamente.
Fonte: Saji, Umehara, Yamada, 2009, p.503.

Para facilitar alguns cálculos, é conveniente introduzir um par adequado de campos de vetores. Seja (ξ, η) um par de campos de vetores definido em uma vizinhança de um ponto singular não degenerado de f que satisfaz:

- (a) ξ é tangente a curva singular;
- (b) η é um campo anulador de vetores ao longo da curva singular;
- (c) (ξ, η) é positivamente orientado.

Definição 5.2.12. Um par de campos de vetores (ξ, η) satisfazendo os itens acima é chamado **par adaptado de campos de vetores** com respeito ao ponto singular.

No que segue neste trabalho usaremos uma notação diferente da usual para derivada direcional, a qual é usada nos artigos [9] e [17], dentre outros. Por exemplo, considerando f e um campo de vetores ξ , a derivada direcional de f na direção de ξ será denotada por ξf .

Observação 5.2.13. (1) Tomando a função densidade de área λ , a condição (b) é equivalente a afirmar que $\eta f = 0$ sobre a curva singular. De fato, $\eta f(q) = df_q(\eta(q)) = 0$, para todo q na curva singular. Além disso, como f é frente de onda, então (f, ν) é imersão e, conseqüentemente, $\eta \nu \neq 0$. A condição (a) acima é caracterizada por $\xi \lambda = 0$, onde λ é a função densidade de área de f . De fato, $\xi \lambda(q) = \langle \nabla \lambda(q), \xi(q) \rangle = 0$, uma vez que o vetor $\nabla \lambda(q)$ é perpendicular à curva singular em q . E mais, $\{\xi f, \eta \eta f, \nu\}$ é linearmente independente, desde que $\det(\xi f, \eta \eta f, \nu) = \eta \lambda \neq 0$ em pontos singulares.

(2) Considerando um par adaptado de campos de vetores (ξ, η) , podemos mostrar que a curvatura singular pode ser reescrita da seguinte forma

$$\kappa_s(t) = \text{sgn}(j^\vee) \frac{\det(,f(f(t)), ,f(f(t)), ^\circ(f(t)))}{\|,f(f(t))\|^3}. \quad (5.21)$$

De fato, seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Temos que $\hat{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t)$ e pelo item (a) da definição anterior, $\gamma'(t) = a(t)\xi(t)$. Assim, simplificando algumas notações, temos:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}'(t) &= df_{\gamma(t)}(a(t)\xi(t)) = a(t)df_{\gamma(t)}(\xi(t)) = a\xi f; \\ \hat{\gamma}''(t) &= a'\xi f + a'\xi f + a(\xi f)'; \\ \|\hat{\gamma}'(t)\|^3 &= \|a\xi f\|^3 = |a(t)|^3 \|\xi f\|^3. \end{aligned}$$

Escrevendo $\xi(x, y) = A(x(t), y(t))\partial_x + B(x(t), y(t))\partial_y$, temos:

$$\begin{aligned}\xi f &= Af_x + Bf_y \\ \xi \xi f &= \xi(Af_x + Bf_y) = A(\xi f)_x + B(\xi f)_y = A(Af_x + Bf_y)_x + B(Af_x + Bf_y)_y \\ &= (AA_x + A_y B)f_x + (AB_x + B_y B)f_y + A^2 f_{xx} + 2ABf_{xy} + B^2 f_{yy}.\end{aligned}\quad (5.22)$$

Por outro lado, como $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, temos:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}'(t) &= x'(t)f_x + y'(t)f_y \\ \hat{\gamma}''(t) &= x''(t)f_x + y''(t)^2 f_y + x'(t)^2 f_{xx} + 2x'(t)y'(t)f_{xy} + y'(t)^2 f_{yy},\end{aligned}\quad (5.23)$$

onde as funções são calculadas em $(x(t), y(t))$. Obtemos:

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= a(t)\xi(x(t), y(t)) = a(t)(A(x(t), y(t)), B(x(t), y(t))) \\ \Rightarrow x'(t) &= a(t)A(x(t), y(t)) \text{ e } y'(t) = a(t)B(x(t), y(t)).\end{aligned}$$

Substituindo em $\hat{\gamma}''(t)$ e usando (5.22), obtemos:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}''(t) &= x''(t)f_x + y''(t)^2 f_y + a(t)^2[A^2 f_{xx} + 2ABf_{xy} + B^2 f_{yy}] \\ &= x''(t)f_x + y''(t)^2 f_y + a(t)^2[\xi \xi f - (AA_x + A_y B)f_x - (AB_x + BB_y)f_y] \\ &= x''(t) - (AA_x + A_y B)f_x + y''(t) - [AB_x + BB_y]f_y + a(t)^2 \xi \xi f \\ &= \bar{A}f_x + \bar{B}f_y + a(t)^2 \xi \xi f,\end{aligned}$$

onde $\bar{A} = x''(t) - (AA_x + A_y B)$ e $\bar{B} = y''(t) - (AB_x + BB_y)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\kappa_s(t) &= \text{sgn}(d\lambda\eta) \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \nu(t))}{||\hat{\gamma}'(t)||^3} = \text{sgn}(\eta\lambda) \frac{\det(a(t)\xi f, \bar{A}f_x + \bar{B}f_y + a(t)^2 \xi \xi f, \nu(t))}{|a(t)|^3 ||\xi f||^3} \\ &= \text{sgn}(\eta\lambda) \frac{a(t)^3 \det(\xi f, \xi \xi f, \nu(t))}{|a(t)|^3 ||\xi f||^3} = \text{sgn}(\eta\lambda) \frac{\det(\xi f, \xi \xi f, \nu(t))}{||\xi f||^3}.\end{aligned}\quad (5.24)$$

Note que podemos tomar um par adaptado de campos de vetores (ξ, η) tal que $\xi'(t) = a(t)\hat{\gamma}'(t)$ com $a(t) > 0$.

□

Exemplo 5.2.14. (Superfície tangente desenvolvível) Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco com curvatura $\kappa(x) > 0$ e torção $\tau(x) \neq 0$, para todo $x \in I$, e seja $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ o triedo de Frenet. A superfície $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = \alpha(x) + y\alpha'(x)$ é chamada **superfície tangente desenvolvível** e seu traço está dado na Figura 5.3. Como $f_x(x, y) = \alpha'(x) + y\alpha''(x)$, $f_y(x, y) = \alpha'(x)$ e $(f_x \times f_y)(x, y) = y(\alpha''(x) \times \alpha'(x)) \parallel \mathbf{b}(x) \neq \mathbf{0}$ então o eixo- x é a curva singular. Temos:

$$df_{(x,0)}(x, y) = x\alpha'(x_0) + y\alpha'(x_0) = (x + y)\alpha'(x_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = y.$$

Logo, $\eta = -\partial_x + \partial_y$ é um campo anulador de vetores. Portanto, pelo Teorema 4.2.13, cada ponto do eixo- x é uma cuspidal edge. Tomemos a aplicação de Gauss $\nu(x, y) = \mathbf{b}(x)$ e $\xi = \partial_x$ a direção singular, então (ξ, η) é um par adaptado de campos de vetores, pois $\{\xi, \eta\}$ é base positiva para $\mathbb{R}^2$. A função densidade de área é:

$$\lambda(x, y) = \det(f_x, f_y, \nu)(x, y) = y\langle f_x \times f_y, \nu \rangle(x, y) = y\langle \kappa(x\mathbf{n}(x) \times \mathbf{t}(x), \mathbf{b}(x)) \rangle = -\kappa(x)y.$$

Temos:

$$\begin{aligned}\xi f(x, y) &= \alpha'(x) + y\alpha''(x) \\ \xi\xi f(x, y) &= \alpha''(x) + y\alpha^{(3)}(x) \\ \xi\xi\xi f(x, y) &= \alpha^{(3)}(x) + y\alpha^{(4)}(x)\end{aligned}$$

e substituindo as fórmulas de Frenet, obtemos,

$$\begin{aligned}\xi f(x, y) &= \mathbf{t}(x) + y\kappa(x)\mathbf{n}(x) \\ \xi\xi f(x, y) &= \kappa(x)\mathbf{n}(x) + y(\kappa(x)\mathbf{n}(x))' \\ \xi\xi\xi f(x, y) &= -\kappa(x)^2\mathbf{t}(x) + \kappa'(x)\mathbf{n}(x) + \kappa(x)\tau(x)\mathbf{b}(x) + y(\kappa(x)\mathbf{n}(x))''.\end{aligned}$$

Calculando nos pontos singulares $(x, 0)$, obtemos:

$$\begin{aligned}\xi f(x, 0) &= \mathbf{t}(x) \\ \xi\xi f(x, 0) &= \kappa(x)\mathbf{n}(x) \\ \xi\xi\xi f(x, 0) &= -\kappa(x)^2\mathbf{t}(x) + \kappa'(x)\mathbf{n}(x) + \kappa(x)\tau(x)\mathbf{b}(x).\end{aligned}$$

Além disso, temos $\lambda_x = -\kappa(x)y$ e $\lambda_y = -\kappa(x)$. Logo,

$$\eta\lambda(x, y) = \langle \nabla\lambda(x, y), \eta(x, y) \rangle = \langle (-\kappa'(x)y, -\kappa(x)), (-1, 1) \rangle = \kappa'(x)y - \kappa(x),$$

daí $\eta\lambda(x, 0) = -\kappa(x)$, ou seja, $\text{sgn}(\eta\lambda) = -1$. Assim, substituindo em (5.21) para a curvatura singular, obtemos:

$$\kappa_s(x) = -\det(\mathbf{t}(x), \kappa(x)\mathbf{n}(x), \mathbf{b}(x)) = -\kappa(x)\det(\mathbf{t}(x), \mathbf{n}(x), \mathbf{b}(x)) = -\kappa(x).$$

□

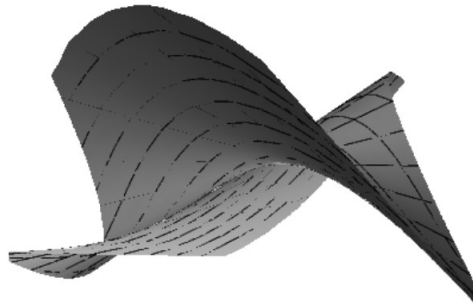


Figura 5.3: Superfície tangente desenvolvível do Exemplo 5.2.14. Fonte: Martins, Saji, 2019, p.460.

Exemplo 5.2.15. (Forma normal) Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada pela forma normal (5.1). Vamos usar a parametrização dada em (5.11) por

$$f(x, y) = \left(x, a_1(x) + \frac{y^2}{2}, b_2(x) + y^2 b_3(x) + y^3 b_4(x, y) \right),$$

onde $a_1(0) = a'_1(0) = b_2(0) = b'_2(0) = b_3(0) = 0$ e $b_4(\mathbf{0}) \neq 0$. Temos

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (1, a'_1(x), b'_2(x) + y^2 b'_3(x) + y^3 (b_4)_x(x, y)) \\ f_y(x, y) &= (0, y, 2y b_3(x) + 3y^2 b_4(x, y) + y^3 (b_4)_y(x, y)) \\ f_{xx}(x, y) &= (0, a''_1(x), b''_2(x) + y^2 b''_3(x) + y^3 (b_4)_{xx}(x, y)) \\ f_{yy}(x, y) &= (0, 1, 2b_3(x) + 6y b_4(x, y) + 3y^2 (b_4)_y(x, y) + 3y^2 (b_4)_{yy}(x, y) + y^3 (b_4)_{yy}(x, y)). \end{aligned}$$

Note que a curva singular é o eixo $-x$ e, portanto, estamos em um sistema adaptado de coordenadas, com $\eta = \partial_y$. Vamos usar a expressão dada na Observação 5.2.4 para calcular a curvatura singular.

$$f_x(0, 0) = (1, 0, 0), \quad f_y(0, 0) = (0, 0, 0), \quad f_{xx}(0, 0) = (0, a''_1(0), b''_2(0)) \text{ e } f_{yy}(0, 0) = (0, 1, 0).$$

Temos:

$$\begin{aligned} (f_x \times f_y)(x, y) &= y(2a'_1(x)b_3(x) + 3a'_1(x)y b_4(x, y) + a'_1(x)y^2 (b_4)_y(x, y) - b'_2(x) - y^2 b'_3(x) \\ &\quad - y^3 (b_4)_x(x, y), -2b_3(x) - 3y b_4(x, y) + y^2 (b_4)_y(x, y), 1) = y a(x, y), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} a(x, y) &= (2a'_1(x)b_3(x) + 3a'_1(x)y b_4(x, y) + a'_1(x)y^2 (b_4)_y(x, y) - b'_2(x) - y^2 b'_3(x) \\ &\quad - y^3 (b_4)_x(x, y), -2b_3(x) - 3y b_4(x, y) + y^2 (b_4)_y(x, y), 1). \end{aligned}$$

Daí, $\nu(x, y) = \frac{a(x, y)}{\|a(x, y)\|}$, que em $(0, 0)$, temos $\nu(0, 0) = (0, 0, 1)$. A função densidade de área é:

$$\lambda(x, y) = \det(f_x, f_y, \nu)(x, y) = y \langle a(x, y), \nu(x, y) \rangle = y \|a(x, y)\|.$$

Logo, $\lambda_y(x, y) = \|a(x, y)\| + y \|a(x, y)\|_y$. Como $\|a(x, y)\| \geq 1$, pois sua última entrada é 1, e para y perto de 0, a parcela $y \|a(x, y)\|_y$ fica pequeno de tal forma que $\lambda_y > 0$, ou seja, $\text{sgn}(\lambda_y) = 1$. Assim,

$$\kappa_s(0, 0) = \text{sgn}(\lambda_y) \frac{\det(f_x(0, 0), f_{xx}(0, 0), \nu(0, 0))}{\langle f_x(0, 0), f_x(0, 0) \rangle^{\frac{3}{2}}} = a''_1(0) = a_{20}. \quad (5.25)$$

□

5.3 Curvatura normal

Para uma curva regular α com traço contido na parte regular de $M = f(U)$, a curvatura normal é dada por

$$\kappa_n(t) = \frac{\langle \alpha''(t), \nu(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}.$$

Veremos agora como este conceito é estendido para a curva singular da cuspidal edge, que foi apresentada no artigo [17], p. 515.

Definição 5.3.1. A *curvatura normal limitante* de $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$ em t é dada por:

$$\kappa_\nu(t) = \frac{\langle \hat{\gamma}''(t), \nu(t) \rangle}{\|\hat{\gamma}'(t)\|^2}, \quad (5.26)$$

onde $\nu(t) = \nu \circ \gamma(t)$. O valor $\kappa_n(t) = |\kappa_\nu(t)|$ é chamado *curvatura normal absoluta* (ou apenas *curvatura normal*) da cuspidal edge.

Com abuso de linguagem, também dizemos curvatura normal em q , $\kappa_\nu(q)$, para quando $q = \gamma(t)$, para algum t . Observe que esta definição depende da escolha do campo ν . Por exemplo, tomando o campo $-\nu$, obtem-se que $\kappa_{-\nu}(t) = -\kappa_\nu(t)$.

Exemplo 5.3.2. Seja $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$, a cuspidal edge usual, dada no Exemplo 4.2.4, onde vimos que a curva singular é o eixo- x , que parametrizamos por $\gamma(t) = (t, 0)$ e $\nu(x, y) = \frac{(0, -3y, 2)}{\sqrt{4 + 9y^2}}$ sua aplicação de Gauss. Portanto, a curvatura normal limitante de $\hat{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t)$ é $\kappa_\nu(x, y) = 0$ uma vez que $\hat{\gamma}''(0) = \mathbf{0}$. $\square$

Exemplo 5.3.3. (Parábola Cuspidal) Seja $f(x, y) = (ax^2 + y^2, by^2 + y^3, x)$, $a, b \in \mathbb{R}$, dada no Exemplo 5.2.8. Como a curva singular de f é o eixo- x , que parametrizamos por $\gamma(t) = (t, 0)$ então $\hat{\gamma}(t) = (at^2, 0, t)$ e assim $\hat{\gamma}'(t) = (2at, 0, 1)$ e $\hat{\gamma}''(t) = (2a, 0, 0)$. A curvatura normal limitante de $\hat{\gamma}(t)$ é:

$$\begin{aligned} \kappa_\nu(t) &= \frac{\left\langle (2a, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{4 + (1 + 4a^2t^2)4b^2}}(-2b, 2, 4atb) \right\rangle}{\|(2at, 0, 1)\|^2} \\ &= \frac{-4ab}{\sqrt{4(1 + b^2 + 4a^2b^2t^2)(4a^2t^2 + 1)}}. \end{aligned}$$

Para $a = b = 1$ temos que a curvatura normal limitante de $\hat{\gamma}$ é negativa e para $a = -1$ e $b = 1$ temos que a curvatura de f é positiva, como vemos na Figura 5.4. $\square$

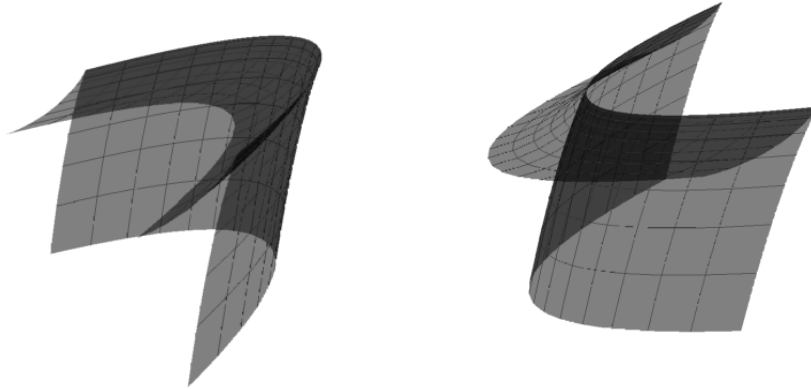


Figura 5.4: Parábola Cuspidal com curvatura normal negativa, para $a = b = 1$, e positiva, para $a = -1$ e $b = 1$, respectivamente. Fonte: feita pelo autor.

Seja q um ponto singular de f . Então existe um sistema de coordenadas (x, y) centrado em q que satisfaz:

- (a) $\langle f_x, f_x \rangle = 1$ sobre o eixo- x ,
- (b) f_y se anula sobre o eixo- x ,
- (c) $\lambda_y = 1$ sobre o eixo- x ,
- (d) $\langle f_{yy}, f_x \rangle$ se anula sobre o eixo- x ,
- (e) $\{f_x, f_{yy}, \nu\}$ é uma base ortonormal positivamente orientada ao longo do eixo- x .

Definição 5.3.4. Um sistema de coordenadas (x, y) satisfazendo os itens acima é chamado **sistema especial adaptado de coordenadas** com respeito a q .

Note que, em um sistema especial adaptado de coordenadas (x, y) , o eixo- x é a curva singular, $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$ está parametrizada por comprimento de arco (pois, pondo $\gamma(t) = (t, 0)$, obtemos $\hat{\gamma}'(t) = f_x(t, 0)$ e, por (a), temos $\|\hat{\gamma}'(t)\| = 1$). Assim, $\hat{\gamma}''(t) = f_{xx}(t, 0)$ é paralelo ao vetor normal principal de $\hat{\gamma}$. Assim, neste sistema de coordenadas, obtemos:

$$\kappa_\nu(t) = \langle f_{xx}(t, 0), \nu(t) \rangle.$$

Vejamos agora uma interpretação geométrica para a curvatura normal limitante. Seja $\Omega(\nu)$ (resp. $\Omega(-\nu)$) o semiespaço fechado delimitado pelo plano tangente limitante para o qual aponta ν (resp. $-\nu$). Segue da definição de κ_ν que, em uma vizinhança de q , os pontos da curva singular através de f está contida em $\Omega(\nu)$, quando $\kappa_\nu(q) > 0$ e em $\Omega(-\nu)$, quando $\kappa_\nu(q) < 0$. De fato, o sinal de $\kappa_\nu(t)$ é o sinal do $\cos \theta$, onde θ é o ângulo entre $f_{xx}(t, 0)$ e $\nu(t)$, ou seja, entre o vetor normal principal de $\hat{\gamma}$ e ν (tomando um sistema especial adaptado de coordenadas). Logo, basta lembrar que o vetor normal principal de $\hat{\gamma}$ aponta na direção da concavidade da curva, uma vez que seu traço não fura o plano retificante e está no semiespaço que aponta o vetor normal principal.

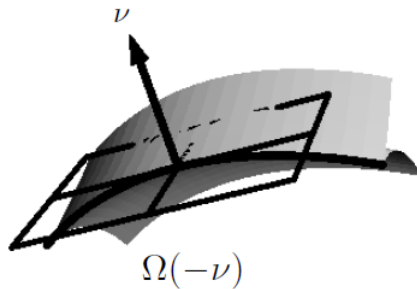


Figura 5.5: O semiespaço $\Omega(-\nu)$ contém a curva singular. Fonte: Saji, Umehara, Yamada, 2009, p.516.

Recorde que o plano osculador de $\hat{\gamma}$ em t é o plano gerado pelos seus vetores tangente e normal principal em t .

Proposição 5.3.5. Seja $q = \gamma(t)$ um ponto de cuspidal edge de f . Então $\kappa_\nu(q) = 0$ se, e somente se, o plano osculador de $\hat{\gamma}$ em t coincide com o plano tangente limitante de f em $f(q)$.

Demonstração. Seja (x, y) um sistema especial adaptado de coordenadas e $q = (t, 0)$. Como $\kappa_\nu(t) = \langle f_{xx}(t, 0), \nu(t) \rangle$ então $\kappa_\nu(t) = 0$ se, e somente se, $\nu(t)$ é ortogonal ao vetor normal principal de $\hat{\gamma}$. Como $\nu(t)$ perpendicular a $\hat{\gamma}'(t)$, então $\kappa_\nu(t) = 0$ se, e somente se, $\nu(t)$ é perpendicular ao plano osculador de $\hat{\gamma}$ em t , ou seja, quando este plano coincidir com o plano tangente limitante de f em $f(q)$. $\square$

Consideremos um sistema adaptado de coordenadas. Como f_y se anula nos pontos singulares de f , pelo item (b) da Observação 5.2.3, $f_{yy}(q) \neq 0$ e assim, pelo Lema 2.1.4, podemos escrever $f_y(x, y) = yh(x, y)$, onde $h(x, y) \neq 0$, o que implica que

$$\nu(q) = \varepsilon \frac{f_x(q) \times h(q)}{\|f_x(q) \times h(q)\|} = \varepsilon \frac{f_x(q) \times f_{yy}(q)}{\|f_x(q) \times f_{yy}(q)\|} = \varepsilon \frac{f_x(q) \times f_{yy}^\perp(q)}{\|f_x(q) \times f_{yy}(q)\|}, \quad (5.27)$$

sobre o conjunto singular, onde $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$. Sendo $\hat{\gamma}(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(t, 0)$ e (ξ, η) um par adaptado de campos de vetores, pelos cálculos da Observação 5.2.4, a curvatura normal pode ser reescrita da seguinte forma, onde as funções são calculadas em $\gamma(t)$:

$$\kappa_n(t) = \left| \frac{\langle \hat{\gamma}''(t), \nu(t) \rangle}{\|\hat{\gamma}'(t)\|^2} \right| = \frac{\left| \left\langle f_{xx}, \frac{f_x \times f_{yy}}{\|f_x \times f_{yy}\|} \right\rangle \right|}{\|f_x\|^2} = \frac{|\det(\xi f, \eta \eta f, \xi \xi)|}{\|\xi f\|^2 \|\xi f \times \eta \eta f\|}. \quad (5.28)$$

Podemos tomar o par adaptado de campos de vetores pois (5.28) independe da escolha dos campos, como mostra o lema a seguir.

Lema 5.3.6. ([9], p.452) *A expressão (5.28) não depende da escolha do par adaptado de campos de vetores.*

Assim, podemos escolher o par adaptado de campos de vetores $(\xi, \eta) = (\partial_x, \partial_y)$, tal que (5.28) pode ser reescrita novamente da forma

$$\kappa_n(t) = \frac{1}{E} \frac{|\det(f_x(\gamma(t)), f_{yy}(\gamma(t)), f_{xx}(\gamma(t)))|}{\|f_x(\gamma(t)) \times f_{yy}(\gamma(t))\|}, \quad (5.29)$$

em $\gamma(t)$, bastando substituir a derivação induzida pelos campos ξ e η de f .

Essas novas fórmulas encontradas para a curvatura normal da cuspidal edge serão muito úteis ao longo deste capítulo, onde trabalhamos as relações entre as curvaturas normal, singular e umbílica.

Exemplo 5.3.7. (Superfície tangente desenvolvível) Seja f a superfície tangente desenvolvível, discutida no Exemplo 5.2.14. Dos cálculos feitos neste exemplo e tendo que $\eta = -\partial_x + \partial_y$, obtemos

$$\begin{aligned} \eta f &= (-\partial_x + \partial_y)f = -f_x + f_y = -y\alpha''(x) = -y\kappa(x)\mathbf{n}(x) \text{ e} \\ \eta \eta f &= y\alpha^{(3)}(x) - \alpha''(x) = y(\kappa(x)\mathbf{n}(x))' - \kappa\mathbf{n}(x). \end{aligned}$$

Calculando nos pontos singulares $(x, 0)$, obtemos $\eta f = 0$ e $\eta \eta f = -\kappa\mathbf{n}(x)$. Usaremos a expressão (5.28) para calcular a curvatura normal limitante. Assim,

$$\kappa_n(x) = \frac{|\det(\mathbf{t}(x), -\kappa\mathbf{n}(x), \kappa(x)\mathbf{n}(x))|}{\|\mathbf{t}(x) \times -\kappa\mathbf{n}(x)\|} = 0.$$

$\square$

Exemplo 5.3.8. (Forma Normal) Seja f dada pela forma normal 5.1 discutida no Exemplo 5.2.15. Dos cálculos feitos neste exemplo e usando a expressão (5.29), a curvatura normal limitante de $\hat{\gamma}$ é dada por:

$$\kappa_n(\mathbf{0}) = \frac{|\det((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, a_1''(0), b_2''(0)))|}{\|(1, 0, 0) \times (0, 1, 0)\|} = |b_2''(0)| = |b_{20}|.$$

□

5.4 Curvatura umbílica para a cuspidal edge

Nesta seção faremos uma revisão sobre a curvatura umbílica estudada no Capítulo 2, porém com o foco na cuspidal edge. Veremos que a curvatura umbílica coincide com a curvatura normal limitante. Seja M a cuspidal edge, cuja parábola de curvatura sabemos ser uma semirreta. Dados um vetor $v \in C_q$, onde C_q é o subconjunto formado por todos os vetores unitários com relação a pseudométrica I_q , e uma base adaptada $\{v_1, v_2\}$ de $N_p M$, vista da Definição 3.4.1, a curvatura umbílica de M em $p = f(q)$ é dada por

$$\kappa_u(p) = |\langle II_q(v, v), v_2 \rangle| = |II_{v_2}(v, v)|.$$

A interpretação geométrica da curvatura umbílica da Observação 3.4.6, nos diz que $\kappa_u(q) = 0$ se, e somente se, Δ_p está contida na reta passando por p na direção de $\alpha'(t)$, onde α é a parametrização de Δ_p e t um número real tal que $\alpha'(t) \neq 0$. Também obtemos que

$$\kappa_u(q) = \frac{\|\alpha(t) \times \alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} = \left| \left\langle \frac{\alpha(t) \times \alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{\hat{\gamma}'(t)}{\|\hat{\gamma}'(t)\|} \right\rangle \right| = \frac{|\det(\alpha(t), \alpha'(t), \hat{\gamma}'(t))|}{\|\alpha'(t) \times \hat{\gamma}'(t)\|}. \quad (5.30)$$

Em um sistema de coordenadas adaptado (x, y) , tomando $v \in \mathbb{R}^2$, v é um vetor unitário com relação a pseudométrica I_q se, e somente se, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{E(q)}}$. De fato,

$$\|v\| = 1 \Leftrightarrow x^2 E(q) + 2xy F(q) + y^2 G(q) = 1 \Leftrightarrow x^2 E(q) = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{E(q)}}.$$

Escrevendo $\gamma(t) = (x(t), 0)$, temos $\hat{\gamma}'(t) = (f \circ \gamma)'(t)$. Desenvolvendo a segunda forma fundamental de acordo com a sua bilinearidade e aplicando o item (b) da Observação 5.2.3, obtemos que a parametrização da parábola de curvatura $\Delta_{\hat{\gamma}(t)}$ é dada por

$$\begin{aligned} \Delta_p &= \eta_q(C_q) = \{II_q(v, v) | I_q(v, v), v \in C_q\} \\ &= \{a^2 f_{xx}^\perp(q) + 2ab f_{xy}^\perp(q) + b^2 f_{yy}^\perp(q) | I_q(v, v), v \in C_q\} \\ &= \left\{ \frac{1}{E(q)} f_{xx}^\perp(q) + b^2 f_{yy}^\perp(q) | I_q(v, v), v \in C_q \right\}, \end{aligned}$$

onde $q = (x(t), 0)$. Logo,

$$\alpha(s) = \frac{1}{E(x(t), 0)} f_{xx}^\perp(x(t), 0) + s^2 f_{yy}^\perp(x(t), 0), \quad (5.31)$$

parametriza $\Delta_{\hat{\gamma}(t)}$ e assim, $\alpha'(s) = 2sf_{yy}^\perp(q)$. Substituindo em (5.2.3) e aplicando (5.27), com as funções sendo calculadas em $q = (x, 0)$, obtemos:

$$\begin{aligned}\kappa_u(q) &= \frac{|\det(\alpha(s), \alpha'(s), \hat{\gamma}'(t))|}{\|\alpha'(t) \times \hat{\gamma}(t)\|} = \frac{|\det(\frac{1}{E}f_{xx}^\perp + t^2f_{yy}^\perp, 2tf_{yy}^\perp, f_x)|}{\|2tf_{yy} \times f_x\|} \\ &= \frac{1}{E} \frac{|\det(f_{xx}, 2tf_{yy}, f_x)|}{\|2tf_{yy} \times f_x\|} = \frac{1}{E} \frac{|\det(f_x, f_{yy}, f_{xx})|}{\|f_x \times f_{yy}\|} \\ &= \frac{1}{E} \left| \left\langle \frac{f_x \times f_{yy}}{\|f_x \times f_{yy}\|}, f_{xx} \right\rangle \right| = \frac{|\langle \nu, f_{xx} \rangle|}{E} = \frac{|\langle \nu, f_{xx}^\perp \rangle|}{E}.\end{aligned}\tag{5.32}$$

De fato, como $f_x(q) = \hat{\gamma}'(t)$, é o vetor diretor de $\hat{\gamma}$, N_pM é o plano ortogonal ao eixo- x e $\langle f_{xx}(q), f_x(q) \rangle = 0$, logo f_{xx} pertence a N_pM e então coincide com sua projeção sobre N_pM . Agora, como $f_y(q)$ pertence ao eixo- x , pois $f_y(q) = 0$, e $\langle f_{yy}(q), f_y(q) \rangle = 0$ e $\langle f_x(q), f_y(q) \rangle = 0$, f_{yy} pertence a N_pM e também coincide com sua projeção sobre N_pM .

Vamos mostrar agora que, para cuspidal edges, a curvatura umbílica nada mais é do que a curvatura normal absoluta, vista na seção anterior.

Teorema 5.4.1. ([9], p. 453) *Seja q um ponto singular de f . Então, são válidos os seguintes itens:*

- (a) $\nu(q)$ é ortogonal a reta que contém Δ_p ;
- (b) $\kappa_u(q) = \kappa_n(q)$.

Demonstração. (a) Podemos tomar um sistema adaptado de coordenadas (x, y) , pois como provado no Lema 3.1.6, a segunda forma fundamental independe da escolha do sistema local de coordenadas em $\mathbb{R}^2$. Parametrizando a curva singular de f por $\gamma(t) = (x(t), 0)$ e lembrando que $\hat{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t)$, temos $\hat{\gamma}'(t) = x'(t)f_x(x(t), 0)$. Pelo item (b) da Observação 5.2.3, $f_y(x(t), 0) = 0$ e, como f tem posto 1, $f_x(x(t), 0) \neq 0$. De (5.27) temos que $\nu(q)$ é ortogonal a $f_{yy}^\perp(q)$ e, portanto, considerando que Δ_p é parametrizada por (5.31), obtemos que $\nu(q)$ é ortogonal a reta que contém Δ_p .

(b) Em um sistema de coordenadas adaptado (x, y) , temos que a curvatura normal é dada por (5.29) que coincide com (5.32) para curvatura umbílica.

□

Exemplo 5.4.2. Seja $M = f(U)$ a superfície cuspidal edge usual. Pelo Exemplo 4.2.4, temos que $\nu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4+9y^2}}(0, -3y, 2)$ é um campo de vetores normais unitários a f . Pelo Exemplo 3.2.2, $\alpha'(y) = (0, 2y, 0)$ é o vetor tangente a reta que contém Δ_p . Logo,

$$\langle \alpha'(y), \nu(q) \rangle = \langle (0, 0, 2), (0, 2y, 0) \rangle = 0.$$

Assim, $\nu(q)$ é ortogonal a reta que contém Δ_p , de acordo com o item (a) do Teorema 5.4.1. Comparando os Exemplos 3.4.4 e 5.3.2, podemos concluir que as curvaturas umbílica e normal se anulam, de acordo com o item (b) do Teorema 5.4.1. □

Uma das abordagens para o estudo da geometria de superfícies é analisar o contato delas com planos e esferas, isto é, analisar o tipo de singularidades que surgem a partir da

composição da equação implícita do plano ou esfera com a parametrização da superfície. Em [8] foi feito este estudo para superfícies em $\mathbb{R}^3$ de posto 1 estudadas no Capítulo 2 deste trabalho. Um ponto singular de uma função é do tipo $\Sigma^{2,2}$ se as derivadas de ordem superior a 2 neste ponto singular se anulam.

Corolário 5.4.3. ([8], p. 120, 122) *Seja q um ponto singular de f . Então, temos os seguintes itens:*

- (a) *Se $\kappa_n(q) = 0$ então o plano que contém $f(q) = p$ ortogonal a $\nu(q)$ é o único plano em $\mathbb{R}^3$ que tem contato do tipo $\Sigma^{2,2}$ com f .*
- (b) *Se $\kappa_n(q) \neq 0$ então a esfera de centro*

$$p + \varepsilon \frac{1}{\kappa_n(q)} \nu(q)$$

é a única esfera em $\mathbb{R}^3$ que tem contato do tipo $\Sigma^{2,2}$ com f , onde $\varepsilon = \text{sgn}(\Pi \cdot (\nu, \nu))$, para $\nu \in \mathbb{R}^2$ unitário.

5.5 Curvatura cuspidal

Sendo α uma curva suave em $\mathbb{R}^2$ tal que 0 é um ponto de 3/2—cúspide, apresentamos na Seção 4.1.1 deste trabalho, a definição de curvatura cuspidal de α em 0 dada por

$$\kappa_c(0) := \frac{\det(\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0))}{\|\alpha''(0)\|^{\frac{5}{2}}}.$$

Se α é uma 3/2—cúspide em 0 plana em $\mathbb{R}^3$, contida em um plano P , vale:

$$\kappa_c(0) = \frac{\det(\alpha''(0), \alpha^{(3)}(0), \nu)}{\|\alpha''(0)\|^{\frac{5}{2}}},$$

onde ν é um vetor unitário perpendicular ao plano P .

Agora veremos uma curvatura para a superfície cuspidal edge que também tem o nome de curvatura cuspidal. Sua interpretação geométrica tem relação direta com a definição de curvatura cuspidal para 3/2—cúspides, justificando esta coincidência de nomes.

Seja f uma frontal, q um ponto singular não degenerado de f e η o campo anulador de vetores ao longo de sua curva singular γ , tal que $\gamma(0) = q$. Dizemos que q é um ponto singular de *primeiro tipo* se $\{\eta(0), \gamma'(0)\}$ é linearmente independente, ou seja, o campo anulador em q é transversal à curva singular.

No artigo [11] os autores definiram a curvatura cuspidal para frontais com pontos singulares do primeiro tipo. Pelo Teorema 4.2.13 cuspidal edges são pontos singulares de primeiro tipo de uma frente. Logo, podemos aplicar os resultados feitos em [11] para pontos de cuspidal edge. Assim, no que segue, f é cuspidal edge.

Tome η um *campo anulador de vetores estendido*, isto é, o campo anulador de vetores definido em uma vizinhança do ponto singular. Assim, $\eta f(q) = 0$, para todo q ponto singular de f . Para facilitar alguns cálculos, vamos considerar um *sistema local de coordenadas admissível* (x, y) no ponto singular q , que satisfaz $f_y(q) = 0$ e (x, y) é positivamente orientado. Assim, ∂_y é uma direção nula em q . Como $\{\partial_x, \partial_y\}$ é linearmente independente, então $\{\partial_x, \eta\}$ é linearmente independente. Seja $\bar{\lambda}$ a função definida por $\bar{\lambda} = \det(f_x, \eta f, \nu)$. Note que $\bar{\lambda}$ se anula ao longo de γ .

Afirmamos que $\eta\bar{\lambda}(q) \neq 0$. De fato, como $\eta(q) = a\partial_y$, para algum $a \in \mathbb{R}_*$ e $\eta\lambda(q) \neq 0$, onde λ é a função densidade de área de f dada por $\lambda = \det(f_x, f_y, \nu)$ (pois $\eta\lambda(q) = \langle \nabla\lambda(q), \eta(q) \rangle$ e sabemos que $\nabla\lambda(q)$ é perpendicular à curva singular em q e $\eta(q)$ é transversal à ela), obtemos

$$0 \neq \eta\lambda(q) = \langle (\lambda_x(q), \lambda_y(q)), (0, a) \rangle = a\lambda_y(q).$$

Além disso, temos $\eta\bar{\lambda}(q) = \langle \nabla\bar{\lambda}(q), \eta(q) \rangle = a\bar{\lambda}(q)$. Como $\lambda_y(q) = \det(f_x(q), f_{yy}(q), \nu(q))$, e $\bar{\lambda}_y(q) = \det(f_x(q), \partial_y\eta f(q), \nu(q))$ e os vetores $f_{yy}(q)$ e $\partial_y\eta f(q)$ são paralelos, concluímos que $\bar{\lambda}_y(q) \neq 0$, ou seja, $\eta\bar{\lambda}(q) \neq 0$, como afirmamos. Portanto

$$0 \neq \eta\bar{\lambda}(q) = a \det(f_x(q), \frac{1}{a}\eta\eta f(q), \nu(q)) = \det(f_x(q), \eta\eta f(q), \nu(q)).$$

Logo, $\{f_x, \eta\eta f\}$ é linearmente independente em pontos singulares não degenerados. Como a aplicação linear $df_{\gamma(t)}$ têm posto 1 nestes pontos e $\{\partial_x, \eta\}$ é linearmente independente, então

$$\hat{\gamma}'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = c(t)df_{\gamma(t)}(\partial_x) = c(t)f_x(\gamma(t)),$$

onde $c(t) \in \mathbb{R}_*$, ou seja, $\hat{\gamma}'(t)$ é paralelo a $f_x(\gamma(t))$. Portanto, $\hat{\gamma}'(t) \times \eta\eta f(\gamma(t)) = c(t)f_x(\gamma(t)) \times \eta\eta f(\gamma(t))$ não se anula. Assim, temos bem definida a curvatura cuspidal para pontos de cuspidal edge.

Definição 5.5.1. A *curvatura cuspidal* de $\hat{\gamma}$ em t em pontos de cuspidal edge é dada por

$$\kappa_c(t) = \frac{\|\hat{\gamma}'(t)\|^{\frac{3}{2}} \det(\hat{\gamma}'(t), \eta\eta f(\gamma(t)), \eta\eta\eta f(\gamma(t)))}{\|\hat{\gamma}'(t) \times \eta\eta f(\gamma(t))\|^{\frac{5}{2}}}, \quad (5.33)$$

onde $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$ e ν a aplicação de Gauss de f .

Com abuso de linguagem, também dizemos curvatura cuspidal em q , $\kappa_c(q)$, para quando $q = \gamma(t)$, para algum t . Em um sistema de coordenadas admissível em q , obtemos:

$$\kappa_c(q) = \frac{\|f_x(q)\|^{\frac{3}{2}} \det(f_x(q), f_{yy}(q), f_{yyy}(q))}{\|f_x(q) \times f_{yy}(q)\|^{\frac{5}{2}}}.$$

Vamos apresentar a seguir um resultado que dá uma interpretação geométrica para a curvatura cuspidal. Para sua demonstração, usamos a seguinte proposição:

Proposição 5.5.2. ([11], p. 264) *Seja f uma frontal e q um ponto singular não degenerado do primeiro tipo. Então f é uma frente se, e somente se, $\kappa_c(q) \neq 0$.*

Como frentes com pontos singulares do primeiro tipo são cuspidal edges, pelo Teorema 4.2.13 concluímos que a curvatura cuspidal de cuspidal edges não se anula.

Proposição 5.5.3. ([11], p. 257) *Seja $q = \gamma(0)$ um ponto de cuspidal edge. Então a interseção da imagem de f com o plano P que passa por $f(q)$ e é perpendicular a $\hat{\gamma}'(0)$ consiste de uma 3/2-cúspide em P de mesma curvatura cuspidal que $\hat{\gamma}$ em 0.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir q e $f(q) = p$ as origens do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Vamos denotar por Γ a interseção da imagem de f com o plano P . Seja (x, y) um sistema de coordenadas admissível. Então

$$\Gamma = \{f(x, y); \langle f(x, y), f_x(q) \rangle = 0\},$$

pois $\hat{\gamma}'(t)$ é paralelo à $f_x(\gamma(t))$, em particular para q . Como df_q tem posto 1 e estamos em um sistema de coordenadas admissível, temos $f_x(q) \neq 0$. Seja $F(x, y) := \langle f(x, y), f_x(q) \rangle$. Como $F(q) = 0$ e $F_x(q) \neq 0$, aplicando o Teorema da Função Implícita, podemos escrever $x = x(y)$, onde $x(0) = 0$, para y em uma vizinhança de 0, tal que

$$F(x, y) = \langle f(x(y), y), f_x(q) \rangle = 0 \quad (5.34)$$

e $\sigma(t) := f(x(t), t)$ parametriza o conjunto Γ . Vamos mostrar que σ é uma $3/2$ -cúspide em $t = 0$. Para isto, devemos mostrar que $\sigma'(0) = 0$ e que os vetores $\sigma''(0)$ e $\sigma^{(3)}(0)$ são linearmente independentes. Derivando (5.34) obtemos

$$\langle x'(y)f_x(x(y), y) + f_y(x(y), y), f_x(q) \rangle = 0. \quad (5.35)$$

Como $x(0) = 0$, $f_y(q) = 0$ e $f_x(q) \neq 0$, avaliando (5.35) em 0, obtemos

$$x'(0)\langle f_x(q), f_x(q) \rangle = 0,$$

o que implica que $x'(0) = 0$. Logo, como $\sigma'(t) = x'(t)f_x(x(t), t) + f_y(x(t), t)$, obtemos $\sigma'(0) = 0$, ou seja, $t = 0$ é um ponto singular de σ . Derivando (5.35) e avaliando em 0, obtemos:

$$\langle x''(0)f_x(q) + f_{yy}(q), f_x(q) \rangle = 0.$$

Logo,

$$x''(0) = -\frac{\langle f_{yy}(q), f_x(q) \rangle}{\|f_x(q)\|^2} \quad (5.36)$$

Temos

$$\sigma''(t) = x''(t)f_x(x(t), t) + x'(t)^2 f_{xx}(x(t), t) + 2x'(t)f_{xy}(x(t), t) + f_{yy}(x(t), t).$$

Logo,

$$\sigma''(0) = x''(0)f_x(q) + f_{yy}(q) \text{ e } \sigma^{(3)}(0) = 3x''(0)f_{xy}(q) + x^{(3)}(0)f_x(q) + f_{yyy}(q).$$

Assim temos

$$\begin{aligned} \det(f_x(q), \sigma''(0), \sigma^{(3)}(0)) &= \det(f_x(q), f_{yy}(q), f_{yyy}(q) + 3x''(0)f_{xy}(q)) \\ &= \det(f_x(q), f_{yy}(q), f_{yyy}(q)) + 3x''(0)\det(f_x(q), f_{xy}(q), f_{yy}(q)). \end{aligned}$$

Como p é um ponto de cuspidal edge, temos que $\det(f_x(q), f_{yy}(q), f_{xy}(q))$ se anula. Ver ([11], p. 258). Então, obtemos:

$$\det(f_x(q), \sigma''(0), \sigma^{(3)}(0)) = \det(f_x(q), f_{yy}(q), f_{yyy}(q)) \neq 0,$$

uma vez que, pela Proposição 5.5.2, $\kappa_c(q) \neq 0$. Assim, $\sigma''(0)$ e $\sigma^{(3)}(0)$ são linearmente independentes. Portanto, σ é uma $3/2$ -cúspide no 0. Agora, resta provar que a curvatura

cuspidal da σ em $t = 0$ coincide com a curvatura cuspidal da f em q . Usando (5.36), obtemos:

$$\begin{aligned}
\|\sigma''(0)\|^2 &= \langle x''(0)f_x(q) + f_{yy}(q), x''(0)f_x(q) + f_{yy}(q) \rangle \\
&= \langle f_{yy}(q), f_{yy}(q) \rangle + x''(0)^2 \langle f_x(q), f_x(q) \rangle + 2x''(0) \langle f_x(q), f_{yy}(q) \rangle \\
&= \|f_{yy}(q)\|^2 + x''(0)[x''(0)\|f_x(q)\|^2 + 2\langle f_x(q), f_{yy}(q) \rangle] \\
&= \|f_{yy}(q)\|^2 - \frac{\langle f_x(q), f_{yy}(q) \rangle}{\|f_x(q)\|^2} [-\langle f_x(q), f_{yy}(q) \rangle + 2\langle f_x(q), f_{yy}(q) \rangle] \\
&= \|f_{yy}(q)\|^2 \frac{\langle f_x(q), f_{yy}(q) \rangle^2}{\|f_x(q)\|^2} = \frac{\|f_x(q)\|^2 \|f_{yy}(q)\|^2 - \langle f_x(q), f_{yy}(q) \rangle^2}{\|f_x(q)\|^2} \\
&= \frac{\|f_x(q) \times f_{yy}(q)\|^2}{\|f_x(q)\|^2}.
\end{aligned}$$

Assim, a curvatura cuspidal de f em q é igual a

$$\begin{aligned}
\kappa_c(0) &= \frac{\|f_x(q)\|^{\frac{3}{2}} \det(f_x(q), f_{yy}(q), f_{yyy}(q))}{\|f_x(q) \times f_{yy}(q)\|^{\frac{5}{2}}} = \frac{\|f_x(q)\|^{\frac{3}{2}} \det(f_x(q), \sigma''(0), \sigma^{(3)}(0))}{\|f_x(q)\|^{\frac{5}{2}} \|\sigma''(0)\|^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{1}{\|\sigma''(0)\|^{\frac{5}{2}}} \det\left(\sigma''(0), \sigma^{(3)}(0), \frac{f_x(q)}{\|f_x(q)\|}\right),
\end{aligned}$$

que é a curvatura cuspidal da $3/2$ -cúspide em $t = 0$, como queríamos. $\square$

Exemplo 5.5.4. Seja $M = f(U)$ a superfície cuspidal edge usual dada no Exemplo 3.0.1. Calculando o conjunto Γ descrito na demonstração anterior, que denota a interseção da imagem de f com o plano P , que passa por $f(q)$ e é perpendicular a $\hat{\gamma}'(0)$. Obtemos:

$$\Gamma = \{(x, y^2, y^3), \langle (x, y^2, y^3), (1, 0, 0) \rangle = 0\} = \{(0, y^2, y^3)\}.$$

Ou seja, como todo elemento de Γ é da forma $(0, y^2, y^3)$, então Γ pode ser parametrizado por $(0, t^2, t^3)$. Esta curva pode ser vista como a $3/2$ -cúspide usual (t^2, t^3) , vista no Exemplo 4.1.8 tomando $a = 1$, composta com a inclusão $(y, z) \mapsto (0, y, z)$, cuja curvatura cuspidal em 0 é dada por $\kappa_c(0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$. A curvatura cuspidal de f em $q = (x, 0)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\kappa_c(q) &= \frac{\|f_x(q)\|^{\frac{3}{2}} \det(f_x(q), f_{yy}(q), f_{yyy}(q))}{\|f_x(q) \times f_{yy}(q)\|^{\frac{5}{2}}} = \frac{\|(1, 0, 0)\|^{\frac{3}{2}} \det((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 2, 6))}{\|(1, 0, 0) \times (0, 2, 0)\|^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{12}{\sqrt{2^5}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 5.5.5. (Superfície tangente desenvolvível) Seja f a superfície tangente desenvolvível M , desenvolvida nos Exemplos 5.2.14 e 5.3.7. Tome η um campo anulador de vetores estendido. Como (x, y) é um sistema local de coordenadas adaptado, em particular, também é um sistema local de coordenadas admissível. Temos

$$\begin{aligned}
\eta\eta\eta f(x, y) &= -y\alpha^{(4)}(x) + 2\alpha^{(3)}(x) = -y(\kappa(x)\mathbf{n})'' + 2(\kappa'(x)\mathbf{n}(x) - \kappa(x)^2\mathbf{t}(x) \\
&\quad - \kappa(x)\tau(x)\mathbf{b}(x)).
\end{aligned}$$

Calculando nos pontos singulares $(x, 0)$, obtemos

$$\eta\eta f(x, 0) = 2(\kappa'(x)\mathbf{n}(x) - \kappa(x)^2\mathbf{t}(x) - \kappa(x)\tau(x)\mathbf{b}(x)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\kappa_c(x) &= \frac{2\kappa(x)^2\tau(x)\det(\mathbf{t}(x), \mathbf{n}(x), \mathbf{b}(x))}{-\kappa(x)^{\frac{5}{2}}\|\mathbf{t}(x) \times \mathbf{n}(x)\|^{\frac{5}{2}}} = \frac{2\kappa^2(x)\tau(x)}{-\kappa(x)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2\kappa^2(x)\tau(x)}{-\sqrt{\kappa(x)^4\kappa(x)}} \\ &= \frac{2\kappa^2(x)\tau(x)}{-\kappa(x)^2\sqrt{\kappa(x)}} = -\frac{2\tau(x)}{\sqrt{\kappa(x)}}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 5.5.6. (Forma Normal) Seja f dada pela forma normal (5.1) discutida no Exemplo 5.2.15 e η é um campo anulador de vetores estendido. Como (x, y) é um sistema local de coordenadas adaptado, em particular, também é um sistema local de coordenadas admissível. Vamos usar a reparametrização dada em (5.11). Temos $f_{yyy}(\mathbf{0}) = (0, 1, 6b_4(\mathbf{0}))$. Assim,

$$\kappa_c(0) = \frac{\det((1, a'_1(0), b'_2(0)), (0, 1, 0), (0, 0, 6b_4(\mathbf{0})))}{\|(1, a'_1(0), b'_2(0)) \times (0, 1, 0)\|^{\frac{5}{2}}} = \frac{6b_4(\mathbf{0})}{(\sqrt{1 + b'_2(0)^2})^{\frac{5}{2}}} = 6b_4(\mathbf{0}) = b_{03}.$$

□

5.6 Torção cuspidal

Se $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ um germe de aplicação suave tal que $\mathbf{0}$ seja um ponto de cuspidal edge de f , onde $\gamma(t)$ é a parametrização de seu conjunto singular. Seja (ξ, η) um par adaptado de campos de vetores em $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ (ver Definição 5.2.12) e $\bar{\lambda}$ a função definida por $\bar{\lambda} = \det(\xi f, \eta\eta f, \nu)$. Pelo mesmo raciocínio feito na definição de curvatura cuspidal, concluímos que $\det(\xi f, \eta\eta f, \nu)(\mathbf{0}) = \eta\bar{\lambda}(\mathbf{0}) \neq 0$. Portanto, $\xi f \times \eta\eta f \neq 0$. Logo, temos a seguinte definição.

Definição 5.6.1. A *torção cúspide-direcional* (ou simplesmente, *torção cuspidal*) em um ponto singular q de f , é dada por

$$\kappa_t(q) = \frac{\det(\xi f, \eta\eta f, \xi\eta\eta f)}{\|\xi f \times \eta\eta f\|^2}(q) - \frac{\det(\xi f, \eta\eta f, \xi\xi f)\langle \xi f, \eta\eta f \rangle}{\|\xi f\|^2\|\xi f \times \eta\eta f\|^2}(q).$$

Tomando um par adaptado de campos de vetores (ξ, η) e parte dos cálculos feitos na demonstração do Lema 5.3.6, que pode ser encontrada em ([9], p.452), temos a seguinte proposição.

Proposição 5.6.2. ([9], p. 457) A definição de torção cuspidal independe do par adaptado de campos de vetores (ξ, η) em $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$.

Para um sistema adaptado de coordenadas (x, y) (ver Definição 5.2.2), temos a seguinte expressão para a torção cuspidal

$$\kappa_t(x, 0) = \frac{\det(f_x, f_{yy}, f_{xyy})}{\|f_x \times f_{yy}\|^2}(x, 0) - \frac{\det(f_x, f_{yy}, f_{xx})\langle f_x, f_{yy} \rangle}{\|f_x\|^2\|f_x \times f_{yy}\|^2}(x, 0).$$

Proposição 5.6.3. ([11], p. 456) *Se $pr_v \circ f$ é localmente uma bijeção então a torção cuspidal se anula em uma vizinhança de q , onde pr_v é a projeção ortogonal no plano ortogonal a $v = \text{Imd}(f_0(\mathbb{R}^2)) \times {}^\circ(0)$.*

Se 0 é um ponto de cuspidal edge, e $M = f(U)$, então $M \cap N_0 M$ é uma cúspide, ver ([9], p. 460). Quando um par de campos de vetores adaptado (ξ, η) satisfaz $\langle \xi f, \eta \eta f \rangle(q) = 0$, então $\eta \eta f \in N_0 M$ aponta para a direção da cúspide em $N_0 M$. Esta direção é chamada *direção cuspidal*.

Da Proposição 5.6.3 temos que a torção cuspidal mede a rotação da direção cuspidal ao longo da curva singular da cuspidal edge. Essa é a motivação para a torção cuspidal ter este nome. Observe que esta mesma Proposição está bem definida para singularidades não degeneradas cuja direção nula é transversal à direção singular, isto é, pelo Teorema 4.2.13, esta proposição está bem definida para pontos de cuspidal edge.

Exemplo 5.6.4. (Superfície tangente desenvolvível) Seja f a superfície tangente desenvolvível M , desenvolvida nos Exemplos 5.2.14 e 5.3.7. Temos

$$\xi \eta \eta f(x, 0) - \kappa'(x) \mathbf{n}(x) + \kappa(x)^2 \mathbf{t}(x) + \kappa(x) \tau(x) \mathbf{b}(x).$$

Assim a torção cuspidal de f sobre $q = (x, 0)$ é dada por

$$\begin{aligned} \kappa_t(q) &= \frac{\det(\mathbf{t}(x), \kappa(x) \mathbf{n}(x), -\kappa'(x) \mathbf{n}(x) + \kappa(x)^2 \mathbf{t}(x) + \kappa(x) \tau(x) \mathbf{b}(x))}{\|\mathbf{t}(x) \times \kappa(x) \mathbf{n}(x)\|^2} \\ &= \frac{\kappa(x)^2 \tau(x) \det(\mathbf{t}(x), \mathbf{n}(x), \mathbf{b}(x))}{\kappa(x)^2} = \tau(x). \end{aligned}$$

□

Exemplo 5.6.5. (Forma Normal) Seja f dada pela forma normal (5.1) discutida nos Exemplos 5.2.15 e 5.5.5. Vamos usar a reparametrização dada em (5.11). Dos cálculos feitos no Exemplo 5.2.15, temos $f_{xyy}(\mathbf{0}) = (0, 0, 2b'_3(0))$. Logo, a torção cuspidal no $\mathbf{0}$ é dada por

$$\kappa_t(\mathbf{0}) = \frac{\det((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2b'_3(0)))}{\|(1, 0, 0) \times (0, 1, 0)\|^2} = 2b'_3(0) = b_{12}.$$

Para um estudo de propriedades globais de torção cuspidal, ver Apêndice A de [9].

5.7 Curvatura inflexional

Os invariantes introduzidos nas seções anteriores para um germe de aplicação em sua forma normal, sugerem que existe mais um invariante geométrico relacionado aos coeficientes a_{30} ou b_{30} , pois todos os outros coeficientes foram relacionados aos conceitos discutidos ao longo deste capítulo. Seja (ξ, η) um par adaptado de campos de vetores em $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$.

Definição 5.7.1. A *curvatura inflexional* de f em $q \in \Sigma_f$ é dada por

$$\kappa_i(q) = \frac{\det(\xi f, \eta \eta f, \xi \xi \xi f)}{\|\xi f\|^3 \|\xi f \times \eta \eta f\|}(q) - 3 \frac{\langle \xi f, \xi \xi f \rangle \det(\xi f, \eta \eta f, \xi \xi f)}{\|\xi f\|^5 \|\xi f \times \eta \eta f\|}(q)$$

Observe que se $\|\xi f\| = 1$ em Σ_f , podemos simplificar a expressão acima da seguinte forma

$$\kappa_i(q) = \frac{\det(\xi f, \eta \eta f, \xi \xi \xi f)}{\|\xi f \times \eta \eta f\|}(q),$$

pois $\langle \xi f, \xi \xi f \rangle = 0$ e $\|\hat{\gamma}'\| = \text{cst} \Rightarrow \langle \hat{\gamma}', \hat{\gamma}'' \rangle = 0$.

Proposição 5.7.2. ([9], p. 457) *A definição de curvatura inflexional de f independe do par adaptado de campos de vetores (ξ, η) em $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$.*

Para um sistema adaptado de coordenadas (x, y) , temos a seguinte expressão para a curvatura inflexional:

$$\kappa_i(x, 0) = \frac{\det(f_x, f_{yy}, f_{xxx})}{\|f_x\|^3 \|f_x \times f_{yy}\|}(x, 0) - 3 \frac{\langle f_x, f_{xx} \rangle \det(f_x, f_{yy}, f_{xx})}{\|f_x\|^5 \|f_x \times f_{yy}\|}(x, 0).$$

Exemplo 5.7.3. (Superfície tangente desenvolvível) Seja f a superfície tangente desenvolvível M , desenvolvida nos Exemplos 5.2.14 e 5.3.7. Temos curvatura inflexional de f em $q = (x, 0)$ é dada por

$$\begin{aligned} \kappa_i(q) &= \frac{\det(\mathbf{t}(x), -\kappa(x)\mathbf{n}(x), -\kappa(x)^2\mathbf{t}(x) + \kappa'(x)\mathbf{n}(x) + \kappa(x)\tau(x)\mathbf{b}(x))}{\|\mathbf{t}(x)\|^3 \|\mathbf{t}(x) \times -\kappa(x)\mathbf{n}(x)\|} \\ &= \frac{-\kappa(x)^2\tau(x) \det(\mathbf{t}(x), \mathbf{t}(n), \mathbf{b}(x))}{\kappa(x)} = \frac{-\kappa(x)^2\tau(x)}{\kappa(x)} = -\kappa(x)\tau(x). \end{aligned}$$

□

Exemplo 5.7.4. (Forma Normal) Seja f dada pela forma normal (5.1) discutida nos Exemplos 5.2.15 e 5.5.5. Vamos usar a reparametrização dada em (5.11). Logo, a curvatura inflexional de f em $q = (0, 0)$ é dada por

$$\kappa_i(q) = \frac{\det((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, a_1^{(3)}(0), b_2^{(3)}(0)))}{\|(1, 0, 0)\|^3 \|(1, 0, 0) \times (0, 1, 0)\|} = b_2^{(3)}(0) = b_{30}.$$

□

5.8 Invariantes geométricos até ordem 3

Nos exemplos apresentados nas seções anteriores vimos que, quando f é um germe de cuspidal edge dado pela forma normal (5.1), então os seis coeficientes naquela expressão satisfazem:

$$\kappa_s = a_{20}, \quad \kappa_n = \kappa_u = b_{20}, \quad \kappa_c = b_{03}, \quad \kappa_t = b_{12} \quad \text{e} \quad \kappa_i = b_{30}.$$

Das expressões de cada um desses conceitos, vemos que as curvaturas κ_s e κ_n dependem apenas das derivadas de f até ordem 2. Já os demais conceitos são invariantes geométricos até ordem 3. Além disso, dos cálculos feitos nos Exemplos 5.2.15 e 5.7.4 temos:

$$\begin{aligned} \kappa(0) &= \|\hat{\gamma}''(0)\| = \|f_{xx}(\mathbf{0})\| = \sqrt{a_{20}^2 + b_{20}^2} \text{ e} \\ \tau(0) &= \frac{\det(\hat{\gamma}'(0), \hat{\gamma}^{(3)}(0), \hat{\gamma}''(0))}{\|\hat{\gamma}'(0) \times \hat{\gamma}''(0)\|^2} = \frac{\det(f_x(\mathbf{0}), f_{xxx}(\mathbf{0}), f_{xx}(\mathbf{0}))}{\|f_x(\mathbf{0}) \times f_{xx}(\mathbf{0})\|^2} = \frac{a_{30}b_{20} - b_{30}a_{20}}{a_{20}^2 + b_{20}^2}, \end{aligned}$$

onde κ e τ são curvatura e torção de $\hat{\gamma}$. Assim, obtemos que

$$\kappa(0)^2 = a_{20}^2 + b_{20}^2 = k_s(0)^2 + \kappa_n(0)^2,$$

para f dada na forma normal (5.1). Logo, similar ao caso regular (2.4), como a forma normal é obtida compondo uma cuspidal edge com difeomorfismos na fonte e isometrias na meta, obtemos:

Teorema 5.8.1. ([9], p. 455) *Seja $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ um germe de aplicação com $\mathbf{0}$ uma cuspidal edge. Então*

$$\kappa(t)^2 = \kappa_s(t)^2 + \kappa_n(t)^2.$$

O teorema abaixo diz que, se os seis invariantes τ , κ_s , κ_n , κ_c , κ_t e κ_i , de duas cuspidais edges f e g coincidem ($\kappa_n \neq 0$) então existe um sistema de coordenadas composto por difeomorfismos na fonte e isometrias na meta, tal que $j^3 f(\mathbf{0}) = j^3 g(\mathbf{0})$.

Teorema 5.8.2. ([9], p. 458) *Sejam f e g dois germes de aplicações com $\mathbf{0}$ sendo cuspidal edges com os mesmos invariantes τ , κ_s , κ_n , κ_c , κ_t e κ_i em $\mathbf{0}$, sendo $\kappa_n(\mathbf{0}) \neq 0$. Então, existe um germe de difeomorfismos ψ na origem em $\mathbb{R}^2$ e um germe de isometria Φ na origem em $\mathbb{R}^3$ tais que*

$$f(x, y) - \Phi(g(\psi(x, y))) = o(4),$$

onde $o(4) = \{h(x, y) : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) | (\partial^{i+j} / \partial_x^i \partial_y^j) h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, i + j \leq 3\}$, isto é, f e g coincidem até termos de grau 3, a menos de isomorfismos na meta e difeomorfismos na origem.

Demonstração. Pelas fórmulas para τ , κ_s , κ_n , κ_c , κ_t e κ_i , se $\kappa_n \neq 0$, estes seis valores determinam todos os coeficientes a_{20} , a_{30} , b_{20} , b_{30} , b_{12} e b_{03} em (5.1), de onde segue o resultado. $\square$

Observamos que, dados números reais τ , κ_s , κ_n , κ_c , κ_t e κ_i em $\mathbf{0}$, existe um germe de difeomorfismo f na origem de $\mathbb{R}^2$ tal que é uma cuspidal edge em $\mathbf{0}$, e seus invariantes em $\mathbf{0}$ são os números dados, basta substituir esses números reais em (5.1) e aplicar $h(x, y) = 0$. Note que este teorema é similar a grandes resultados da Geometria Diferencial, como por exemplo o Teorema Fundamental das Curvas Planas (2.1.2), espaciais (2.1.6) e para superfícies localmente (2.2.2).

5.9 Sobre as curvaturas Gaussiana e média

O comportamento das curvaturas Gaussiana e média de frentes na vizinhança de pontos singulares não degenerados foi estudado em [17], onde é mostrado que, se p é um ponto singular de uma frente f , sendo γ a curva singular consistindo de pontos não-degenerados, então:

- (a) A função curvatura Gaussiana K de f é limitada em uma vizinhança suficientemente pequena de p se e somente se a segunda forma fundamental se anula em $\gamma(I)$, o que ocorre se e somente se o plano osculador em pontos da curva singular coincide com o plano tangente limitante ([17], Teorema 3.1 e Corolário 3.6).
- (b) Quando f é uma cuspidal edge em p , K é limitada em uma vizinhança de p se e somente se a curvatura normal limitante se anula ao longo da curva singular, isto é, $\kappa_\nu = 0$ ao longo da curva singular.

-
- (c) A função curvatura média H de f é não limitada numa vizinhança de p ([17], Corolário 3.5).

Por questões de tempo não desenvolvemos este estudo com detalhes.

REFERÊNCIAS

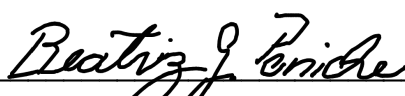
- [1] Arnol'd, V.I.; Gusein-zade, S.M.; Varchenko, N.A. *Singularities of Differentiable Maps*, Vol 1. Birkhauser, Boston. Monographs in Math. 82, 1985.
- [2] Bruce, J.; Giblin, P. *Curves and singularities: a geometrical introduction to singularity theory*. 2. ed. Cambridge University Press, 1984.
- [3] Carmo, M. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, 4.ed.- Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [4] Cortella, M. S. *Qual é a tua obra?*, 6.ed.- Petrópolis, RJ: Vozes, 2009.
- [5] Fujimori, S.; Saji, K.; Umehara, M.; Yamada, K. *Shape singularities of maximal surfaces*. Math. Z. 259, 827-848 (2008).
- [6] Fuster, M.C.R.; Izumiya, S.; Ruas, M.A.S.; Tari, F. *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, 2015.
- [7] Gibson, G. *Singular Points of Smooth Mappings*, Pitman, London, 1979.
- [8] Martins, L.F.; Nuño-Ballesteros, J.J. *Contact properties of surfaces in $\mathbb{R}^3$, with corank 1 singularities*, Tohoku Math J., 67 2015, 105-124.
- [9] Martins, L.F.; Saji, K. *Geometric Invariants of Cuspidal Edges*, Canad. J. Math. Vol 68 (2), 2016 pp. 445-462.
- [10] Martins, L.F.; Saji, K.; Santos, S.P.; Teramoto, K. *Singular surfaces of revolution with prescribed unbounded mean curvature*, Annals of the Brazilian Academy of Sciences, 2019, version ISSN 1678-2690.
- [11] Martins, L.F.; Saji, K.; Umehara, M.; Yamada, K. *Behavior of Gaussian Curvature and Mean Curvature Near Non-degenerate Singular Points on Wave Fronts*, Springer Japan, 2016.
- [12] Mond, D. *On the classification of germs of maps from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$* , Proc. London Math. Soc. (3) 50 (1985), 333–369.
- [13] Morris, R. *The sub-parabolic lines of a surface*, The Mathematics of Surfaces VI, IMA Conf. New Series, vol 58. Oxford Univ. Press, 1996. p. 79-102.
- [14] Nunez, T.G. *Geometria de Superfícies de Posto 1 em $\mathbb{R}^3$ do Ponto de Vista de Contato*. 2018.118 p. Dissertação - Instituto de Biociências, letras e ciências exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2018.
- [15] Saji, K.; Rossman, W.; Kokubu, M.; Umehara, M.; Yamada, K. *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. of Math. 221, 2005. p. 303-351.
- [16] Saji, K.; Umehara, M.; Yamada, K. *The duality between singular points and inflection point on wave fronts*, Osaka J Math. 47 (2010) 591-607.

- [17] Saji, K.; Umehara, M.; Yamada, K. *The Geometry of fronts*, Annals of Mathematics, 2009, 491-592.
- [18] Santos, S. P. *Geometria Diferencial do Conjunto Focal*. 2017. 91 p. Dissertação - Instituto de Biociências, letras e ciências exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2015.
- [19] Shiba, S.; Umehara, M. *The behavior of curvature function at cusps and inflection points*, Differential Geometry and its Applications 30 (2012) 285-299.
- [20] Tari, F. *Singularidades de Aplicações Diferenciáveis*, Notas de Aula, ICMC-USP, São Carlos, 1998.
- [21] Tenenblat, K. *Introdução à geometria diferencial*, 2^aed.- São Paulo: Edgard Blucher, 2008.
- [22] Whitney, H. *Shape the general type of singularity of a set of $2n-1$ smooth functions of n variables*, Duke Math. J. 10, 161–172 (1943).

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 05 / 07 / 2021



Assinatura do autor