

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**DINÂMICA NÃO-LINEAR DE UM SISTEMA MONO-
PENDULAR INVERTIDO, EXCITADO POR UM VIBRADOR
ELETRODINÂMICO DE POTÊNCIA CONTROLADA**

Autor: Carlos Eduardo Marques

Orientador: Prof. Titular José Manoel Balthazar

Bauru, 2013
SP, Brasil

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**DINÂMICA NÃO-LINEAR DE UM SISTEMA MONO-
PENDULAR INVERTIDO, EXCITADO POR UM VIBRADOR
ELETRODINÂMICO DE POTÊNCIA CONTROLADA**

Autor: Carlos Eduardo Marques

Orientador: Prof. Titular José Manoel Balthazar

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Projeto Mecânico

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Bauru - 2013

DIVISÃO TÉCNICA DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO
UNESP – CAMPUS BAURU

Marques, Carlos Eduardo.

Dinâmica Não-Linear de um Sistema Mono-Pendular Invertido, Excitado por um Vibrador Eletrodinâmico de Potência Controlada. / Carlos Eduardo Marques, 2013.

117 f. : il.

Orientador: José Manoel Balthazar

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Bauru, Bauru, 2012.

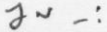
1.Sistemas Pendulares Invertidos. 2.Modelagem Matemática. 3.Controle. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Bauru. II. Título.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE BAURU
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE CARLOS EDUARDO MARQUES, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.

Aos 25 dias do mês de julho do ano de 2013, às 15:30 horas, no(a) ANFITEATRO DA SEÇÃO TÉCNICA DE PÓS-GRADUAÇÃO, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. JOSE MANOEL BALTHAZAR do(a) Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação / Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro - UNESP, Prof. Dr. ANGELO MARCELO TUSSET do(a) Departamento de Engenharias / Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPr, Prof. Dr. BENTO RODRIGUES DE PONTES JUNIOR do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de CARLOS EDUARDO MARQUES, intitulado "DINÂMICA NÃO-LINEAR DE UM SISTEMA MONO-PENDULAR INVERTIDO, EXCITADO POR UM VIBRADOR ELETRO-DINÂMICO DE POTÊNCIA CONTROLADA". Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: Aprovado. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.


Prof. Dr. JOSE MANOEL BALTHAZAR


Prof. Dr. ANGELO MARCELO TUSSET


Prof. Dr. BENTO RODRIGUES DE PONTES JUNIOR

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, em especial minha mãe, que sempre me apoiou e incentivou na busca pelo conhecimento, se privando muitas vezes do mesmo em função do trabalho, para que eu e minha irmã pudéssemos ir em frente.

Aos meus filhos, que mesmo sem saber o que é um sistema dinâmico, me incentivaram a seguir na pesquisa com um simples sorriso e um abraço nos momentos mais importantes.

À minha esposa Gisele, pelo carinho, paciência e incentivo, além de ter me suportado com maestria nos momentos em que eu mesmo não me aguentava mais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por permitir que tudo seja possível, até mesmo um Mestrado em Engenharia Mecânica para um Matemático.

Agradeço imensamente, ao melhor orientador que alguém possa ter nessa galáxia, o Professor Titular Dr. José Manoel Balthazar, por acreditar e confiar sempre em mim e na minha capacidade de superação. Agradeço muitíssimo por me conduzir neste trabalho com muita sagacidade e dedicação ímpar.

Ao Professor Dr. Bento Rodrigues Pontes Junior, por sempre me atender prontamente e sem nenhuma reclamação, em todas as inúmeras vezes que foi solicitado, para que em conjunto resolvêssemos pendências de artigos, trabalhos e o próprio problema abordado nesta dissertação, compartilhando sua sabedoria com muita paciência, muito obrigado!

Ao Professor Dr. Ângelo Marcelo Tusset, pela ajuda nos artigos, pelo projeto do controle, pela disponibilidade e pela amizade, muito obrigado!

Ao Professor Dr. Marcos Silveira, que mesmo tendo coisas mais importantes e interessantes a fazer, teve a bondade de iluminar cantos escuros de dinâmica em minha mente, além da praticamente onisciência em Matlab, muito obrigado mesmo!

Aos meus irmãos Hassan e Kleber que me trouxeram para o mundo Não-Linear e Caótico e que sempre estão comigo, seja no pensamento ou fisicamente próximos, muito obrigado!

À família que encontrei no grupo de pesquisa de Bauru que se resume às figuras de Itamar, Willians, Ricardo, Douglas e Leandro que compartilharam todos os momentos desse trabalho e sempre me ajudaram a evoluir e a realizar esse projeto, muito obrigado!

A todos os professores do programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica de Bauru que tive contato nas disciplinas, que gentilmente doaram seus conhecimentos que foram mais que essenciais para a conclusão desse trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro concedido através da bolsa de mestrado.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica e à Secretaria de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia de Bauru por propiciarem as melhores condições para que esse trabalho fosse realizado, muito obrigado mesmo!

“Pensar é o trabalho mais difícil que existe. Talvez por isso, tão poucos se dediquem a ele.”

-Henry Ford -

SUMÁRIO

RESUMO	IX
ABSTRACT	X
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	XI
LISTA DE SIGLAS	XIV
1 INTRODUÇÃO	ii
1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA	iii
1.2 BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	vi
1.2.1 Vibrações.....	vi
1.2.2 Absorvedores de Vibração por sistemas pendulares.....	vii
1.3 OBJETIVOS.....	xiii
1.4 MATERIAIS	xiv
1.5 ORGANIZAÇÃO DESTE TRABALHO.....	xiv
2 MODELAGEM MATEMÁTICA	16
2.1 MODELO MATEMÁTICO I.....	18
2.2 MODELO MATEMÁTICO II	27
2.3 MODELO MATEMÁTICO III.....	38
2.4 MODELO MATEMÁTICO IV.....	43
2.5 MODELO MATEMÁTICO V	56
3 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	72
3.1 RETRATOS DE FASE - MODELO MATEMÁTICO III.....	74
3.2 HISTÓRICOS TEMPORAIS DO DESLOCAMENTO - MOD. MAT. III.....	76
3.3 RETRATOS DE FASE - MODELO MATEMÁTICO IV.....	77
3.4 HISTÓRICOS TEMPORAIS DO DESLOCAMENTO - MOD. MAT. IV.....	79
3.5 RETRATOS DE FASE - MOD. MAT. IV/NOVOS PARÂMETROS.....	80
3.6 HISTÓRICOS TEMPORAIS DO DESLOCAMENTO - MOD. MAT. IV/ NOVOS PARÂMETROS	83
4 PROJETO DE CONTROLE	85
4.1 CONTROLE APLICADO PARA O SISTEMA DINÂMICO REFERENTE AO MODELO MATEMÁTICO III.....	86
4.2 DISCUSSÃO SOBRE OS RESULTADOS OBTIDOS COM O CONTROLE ADOTADO PARA O MODELO MATEMÁTICO III.....	89

4.3	CONCLUSÕES SOBRE O CONTROLE APLICADO PARA O SISTEMA DINÂMICO REFERENTE AO MODELO MATEMÁTICO III	92
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	93
	REFERÊNCIAS	96
	SUMULA CURRICULAR	103

RESUMO

Marques, C. E., DINÂMICA NÃO-LINEAR DE UM SISTEMA MONO-PENDULAR INVERTIDO, EXCITADO POR UM VIBRADOR ELETRODINÂMICO DE POTÊNCIA CONTROLADA, Bauru: Faculdade de Engenharia, UNESP - Universidade Estadual Paulista, 2013, 117 p., Dissertação (Mestrado).

O propósito deste trabalho é o de obter modelos matemáticos que sirvam de referência, para que se possa efetuar os estudos relacionados aos efeitos não-lineares presentes no comportamento dinâmico envolvido na perfuração de petróleo, executada por navios perfuradores. As diversas modelagens matemáticas adotadas e abordadas neste trabalho, para esse tipo de problema, baseiam-se em sistemas pendulares invertidos e que possuem excitação harmônica ou excitação por meio de um EDS-Vibrador Eletrodinâmico (Electrodynamics Shaker) simplificado, na forma de um circuito RLC com uma fonte de tensão harmônica.

A investigação do problema, em questão, se fez por meio de simulações numérico-computacionais, fazendo-se uso do método Runge-Kutta de 4ª ordem para a integração numérica direta das equações de movimento dos sistemas, aproximando suas soluções.

O controle aplicado nas possíveis irregularidades associadas ao movimento do sistema é do tipo retroalimentação de ajuste de energia de oscilação, proposto anteriormente por TERESHKO (2011) e daí adaptado ao modelo matemático, adotado.

Palavras chave: Sistemas Pendulares Invertidos, Modelagem Matemática, Controle.

ABSTRACT

Marques, C. E., NONLINEAR DYNAMICS OF A SINGLE-INVERTED PENDULUM SYSTEM, EXCITED BY AN ELECTRO-DYNAMIC CONTROLLED POWER SHAKER, Bauru: Faculty of Engineering, UNESP - Universidade Estadual Paulista, 2013, 117 p., Dissertation.

The purpose of this paper is to obtain mathematical models that serve as a reference for the studies related to the nonlinear effects present in the dynamic behavior involved in oil drilling, performed by drill ships. The various mathematical models adopted and raised in this paper for this problem, were based on inverted pendulum systems and have harmonic excitation or through an EDS-electrodynamics vibrator (Electrodynamics Shaker) simplified as a form of an RLC circuit with a harmonic voltage source.

The investigation of the problem in question was made by means of numerical and computational simulations, making use of the Runge-Kutta 4th order for the direct numerical integration of the equations of motion of systems approaching their solutions.

The control applied on possible irregularities associated with the motion of the system is the type of feedback adjustment oscillation energy, previously proposed by TERESHKO (2011) and then adapted to the mathematical model adopted.

Key words: Inverted Pendulum System, Mathematical Modeling, Control.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura (1) Planta de um modelo de navio perfurador de petróleo, FARINHA (2006).....	iv
Figura (1.2-1) Modelo do sistema estudado, VYAS e BAJAJ (2001)	viii
Figura (1.2-2) Modelo de sistemas Maglev trabalhados por ARBEX (2012) e ARBEX et al. (2013) – Sistema excitado por um motor de potência limitada com uma massa desbalanceada, acoplado a um pêndulo com o absorvedor de vibrações. Maglev não-ideal: A) acoplado a um pêndulo; B) mecanismo utilizado para o controle de vibrações.....	ix
Figura (1.2-3) Modelo estudado por CASSIANO, J. e BALTHAZAR, J.M. (2009).	x
Figura (1.2-4) Modelo de Sistema monotrilho, trabalhado por PERUZZI et al (2007).	xi
Figura (1.2-5) Modelo de Sistema monotrilho, Subsistemas primário e secundário, trabalhado por PERUZZI et al (2007).	xii
Figura (1.2-6) Modelo de “Motor CC – Mecanismo Biela- Manivela-Pêndulo”, trabalhado por BELATO, D. (1998)	xiii
Figura (2.1-1) Bloco de massa M, deslizando sem atrito sob o eixo horizontal, ligado ao eixo vertical por uma mola e por um amortecedor, com um pêndulo invertido de massa m, sob regime de vibrações livres.....	18
Figura (2.2-1) Bloco de massa M, deslizando sem atrito sob o eixo horizontal, ligado ao eixo vertical por uma mola e por um amortecedor, com um pêndulo invertido de massa m posicionado em seu centro de massa, estabilizado por mola torcional. Sistema excitado por uma força harmônica	27
Figura (2.3-1) Modelo Simplificado de Navio Perfurador, concebido na forma de um PPS, excitado por um EDS (Electro Dynamics Shaker), na forma de uma força harmônica F, MARQUES et al (2012)	38
Figura (2.4-1) Modelo Simplificado de Navio Perfurador, concebido na forma de um PPS, excitado por um EDS (Electro Dynamics Shaker), na forma de um circuito RLC com uma fonte de tensão $e(t)$ do tipo harmônica, MARQUES et al (2012).	44
Figura (2.5-1) Modelo Simplificado de Navio Perfurador, concebido na forma de uma PPS, excitado por um EDS (Electro Dynamics Shaker), na forma de um circuito RLC com uma fonte de tensão $e(t)$ do tipo harmônica, considerando-se a massa do núcleo do vibrador eletrodinâmico, MARQUES, C. E. (2013).	56
Figura (3.1-1A) Retrato de Fase do Deslocamento Vertical em função da Velocidade Vertical.	74
Figura (3.1-1B) Retrato de Fase do Deslocamento Vertical em função da Velocidade Vertical, sem os transientes.	74
Figura (3.1-2A) Retrato de Fase do Deslocamento Angular em função da Velocidade Angular.	75
Figura (3.1-2B) Retrato de Fase do Deslocamento Angular em função da Velocidade Angular, sem transientes.....	75

Figura (3.2-1) Histórico Temporal do Deslocamento Vertical.....	76
Figura (3.2-2) Histórico Temporal do Deslocamento Angular.	76
Figura (3.3-1A) Retrato de Fase do Deslocamento Vertical em função da Velocidade Vertical.	77
Figura (3.3-1B) Retrato de Fase do Deslocamento Vertical em função da Velocidade Vertical, sem os transientes.	77
Figura (3.3-2A) Retrato de Fase do Deslocamento Angular em função da Velocidade Angular.	78
Figura (3.3-2B) Retrato de Fase do Deslocamento Angular em função da Velocidade Angular, sem transientes.....	78
Figura (3.3-3A) Retrato de Fase da Carga Elétrica Instantânea em função da Corrente	78
Figura (3.3-3B) Retrato de Fase da Carga Elétrica Instantânea em função da Corrente, sem transientes.	78
Figura (3.4-1) Histórico Temporal do Deslocamento Vertical.....	79
Figura (3.4-2) Histórico Temporal do Deslocamento Angular.	79
Figura (3.4-3) Histórico Temporal da Carga Elétrica.....	79
Figura (3.5-1) Retrato de Fase do Deslocamento Vertical em função da Velocidade Vertical, (3.5-1A) com transientes, (3.5-1B) sem transientes	81
Figura (3.5-2) Retrato de Fase do Deslocamento Angular em função da Velocidade Angular.	81
Figura (3.5-3) Retrato de Fase do Deslocamento Angular em função da Velocidade Angular, (A) ciclo limite simétrico da esquerda e (B) ciclo limite simétrico da direita.....	82
Figura (3.5-4) Retrato de Fase da Carga Elétrica Instantânea em função da Corrente Elétrica, (3.5-4A) com transientes, (3.5-3B) sem transientes.....	82
Figura (3.6-1) (A) Histórico Temporal do Deslocamento Vertical e (B) Zoom na região de 300 s a 500 s.	83
Figura (3.6-2) (A) Histórico Temporal do Deslocamento Angular e (B) Zoom na região de 300 s a 500 s.	84
Figura (3.6-3) (A) Histórico Temporal da Carga Elétrica e (B) Zoom na região de 400 s a 500 s.....	84
Figura (4.1-1) (A) Diagrama de Bifurcação do Parâmetro de Controle v e (B) Zoom da Região 0,14 à região 0,28.	87
Figura (4.2-1) Retrato de Fase do Deslocamento Vertical pela Velocidade Vertical Comparando o Sistema sem o Controle (Preto) e o Sistema Controlado (Vermelho), (A) com transientes e (B) sem os transientes.	89
Figura (4.2-2) Retrato de Fase do Deslocamento Angular pela Velocidade Angular Comparando o Sistema sem o Controle (preto) e o Sistema Controlado (Vermelho), (A) com transientes e (B) sem os transientes... ..	103

Figura (4.2-3) Histórico Temporal do Deslocamento Vertical, Comparativo entre o Sistema sem o Controle (Preto) e o Sistema Controlado (Vermelho).....	90
Figura (4.2-4) Histórico Temporal do Deslocamento Angular, Comparativo entre o Sistema sem o Controle (Preto) e o Sistema Controlado (Vermelho).....	91

LISTA DE SIGLAS

EDS	Electrodynamical Shaker = Vibrador Eletrodinâmico
PPS	Plataforma Pendular Suspensa

1 INTRODUÇÃO

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, inicialmente, apresenta-se as motivações e os objetivos desta dissertação. A seguir, realiza-se uma breve revisão bibliográfica, contextualizando o trabalho na literatura corrente. Finalmente, descreve-se como estão estruturados o conteúdo que será encontrado em cada capítulo deste trabalho.

Este trabalho está diretamente ligado ao tema de trabalho dos grupos de pesquisa em Comportamento Dinâmico Não-linear e Estocástico e seu Controle, Incluindo-se Sistemas em Macro, Micro e Nano Escalas e Dinâmica e Controle de Sistemas Mecânicos e Mecatrônicos – UNESP, e é a primeira dissertação de Mestrado, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, na UNESP-Bauru, relacionado ao assunto que será desenvolvido, neste trabalho.

A seguir, descreve-se a motivação deste trabalho de mestrado.

1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

O uso crescente da tecnologia pela sociedade durante os anos, fez com que a necessidade de se possuir fontes energéticas abundantes, fosse cada vez maior e contínua. Segundo a ANEEL, Agência Nacional de Energia Elétrica, em seu Atlas de Energia Elétrica (2009), de todas as fontes de energia disponíveis no planeta, o petróleo e seus derivados se sobressaem em função de sua grande utilização. A busca por petróleo foi tão ou mais voraz do que a sua própria utilização no decorrer do tempo, dado o alto valor agregado ao mesmo, possibilitando lucros altíssimos na sua comercialização bruto ou mesmo já refinado (downstream).

Após o Primeiro Choque do Petróleo em 1973, países motivados pelo embargo do óleo, aplicado pela OPEP, começaram a desenvolver técnicas e equipamentos visando a exploração e a extração de petróleo em mar aberto (offshore), LOPES (2004).

Frente a esse novo panorama, a engenharia naval e oceânica obrigou-se a desenvolver navios petroleiros e perfuradores de petróleo como mostra o exemplo na Figura 1.

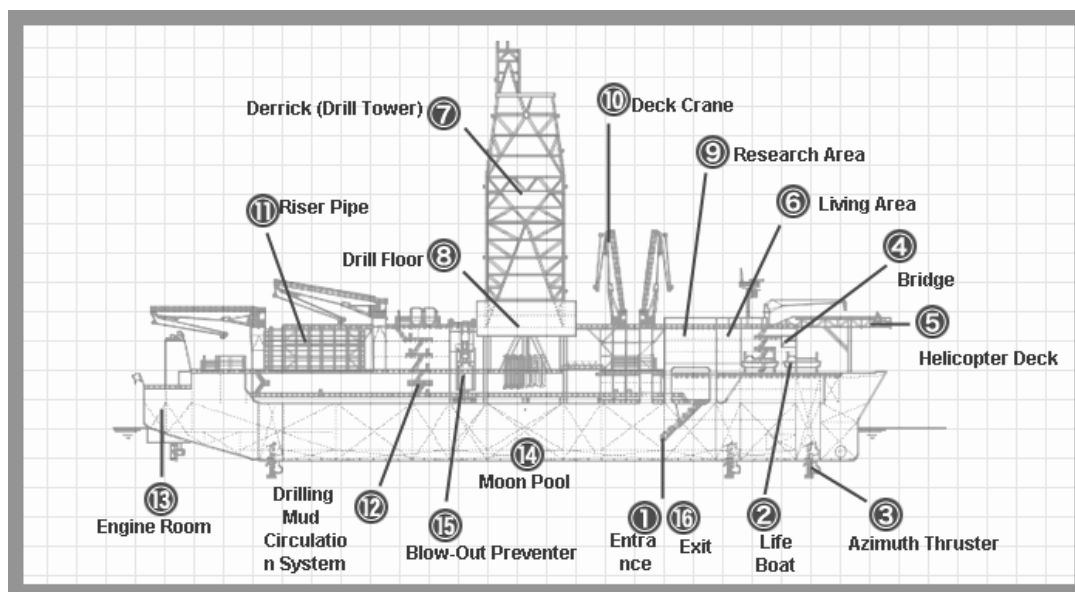


Figura (1) – Planta de um modelo de navio perfurador de petróleo, FARINHA (2006), 1-entrada, 2-salva-vidas, 3-azimute propulsor, 4-ponte de comando, 5-heliporto, 6-instalações dos tripulantes tais como jacuzzi, ginásio, sala de conferências, sala de convívio, cabines, sala de vídeo/cinema, sala de refeições etc., 7-torre de perfuração, 8-andar técnico de perfuração, 9-laboratório, 10-guindaste, 11- zona dos tubos de perfuração, 12-zona de circulação das lamas provenientes da perfuração, 13-sala das máquinas, 14-furo retangular, (12x22m) de baixo da torre de perfuração, para lançamento dos tubos, 15-equipamento de perfuração.

Ao analisar os equipamentos instalados no navio perfurador, constatou-se que as estruturas que estão acopladas ao “deck”, apresentam características vibratórias que causam grandes prejuízos às companhias de petróleo, relacionando-se diretamente à fadiga do material por meio de excesso de vibrações, KOLADE (2009).

Portanto, com o intuito de entender melhor o comportamento dinâmico, envolvido na extração de petróleo, efetuada por navios perfuradores, pesquisou-se um número grande de

modelos matemáticos que pudessem descrever o problema mencionado, e que tivessem um nível relativamente “baixo de dificuldade” para se trabalhar. Sendo assim, motivados, por exemplo, pelo trabalho de XU et al (2005), optou-se por analisar sistemas pendulares, invertidos ou não, mas que possuísem características dinâmicas relevantes à proposta desta dissertação. A partir daí, ao analisar as modelagens propostas por XU et al (2005), bem como LEE (2007) e DE PAULA et al (2011), percebe-se que mesmo não possuindo a mesma motivação de pesquisa, as modelagens propostas por estes autores se relacionam e se completam em essência aos propósitos deste trabalho. Finalmente, ao analisar as modelagens matemáticas, propostas por BALTHAZAR et al (2010) e BALTHAZAR et al (2011), evidenciam-se uma abordagem mais abrangente no que se refere aos aspectos dinâmicos tratados anteriormente, à medida que os autores fazem uma associação de características dos modelos trabalhados por XU et al (2005) e LEE (2007), servindo portanto, de motivação principal para esta dissertação.

Dado o nível de complexidade dinâmica do modelo principal a ser estudado, fez-se uma análise paramétrica de diversos modelos simplificados a partir do modelo utilizado por BALTHAZAR et al (2011), que serão apresentados no capítulo 2.

O objetivo principal dessa dissertação foi o de explorar a dinâmica envolvida no processo de perfuração de petróleo efetuada por navios perfuradores, modelados matematicamente, a partir de sistemas pendulares invertidos e excitados por uma fonte de energia de potência controlada descrita na forma de uma força harmônica e/ou de um circuito elétrico simplificado, composto por resistor, indutor, condensador e uma fonte de tensão senoidal, além de investigar a instalação de um controle para o comportamento irregular apresentado pelo sistema, visando à melhoria de seu desempenho.

O controle de vibrações, utilizado nesta pesquisa é o controle por retroalimentação do sistema dinâmico, alterando-se sua energia de oscilação, método proposto por TERESHKO (2011) e será apresentado no capítulo 4, bem como a discussão dos resultados obtidos através de simulações numérico-computacionais. A seguir, apresenta-se uma breve revisão bibliográfica.

1.2 BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.2.1 Vibrações

O fenômeno físico definido por vibração é aquele que é caracterizado pelo movimento oscilatório de um objeto em relação a uma posição de equilíbrio, podendo ser transmitido na forma de deslocamentos, velocidades e acelerações, por exemplo, IOSSAQUI (2009).

Segundo RAO (2009), o interesse das pessoas por vibrações se deu com a descoberta/criação de instrumentos musicais, provavelmente apitos ou tambores inicialmente, fascinando e instigando o homem a ir à busca de respostas sobre tais eventos.

Muitas figuras eternizadas pela história e pela ciência trataram desse assunto de maneira notável, dentre eles Galileu, Hooke, Taylor, Bernoulli, D'Alembert, Euler, Lagrange, Fourier, entre outros, e todos forneceram valiosas contribuições para o desenvolvimento da teoria de vibrações, RAO (2009).

A presença de fenômenos vibratórios em nosso cotidiano é bastante comum, ela está atrelada a praticamente todos os aparelhos a que temos contato ao longo do dia. Em muitos casos, as vibrações são até mesmo desejáveis, como nas ferramentas do tipo marteletes e

britadoras na construção civil, ou até mesmo no transporte de peças por movimento vibratório, etc. Porém, em muitos outros casos a presença de vibrações pode causar problemas estruturais na forma de rachaduras; fadiga precoce do material; gerar ruídos indesejáveis; transmitir forças às fundações das máquinas, entre outros, PONTES JR. (2011).

Nestas situações, em que a presença de vibrações é indesejável, um sistema de controle de vibração é aplicado com o intuito de reduzir os danos provocados pelo fenômeno vibratório.

1.2.2 Absorvedores de Vibração por sistemas pendulares

Os métodos de controle de vibrações são divididos em passivos ou ativos, onde sistemas de controle de vibrações passivos lidam diretamente com as propriedades físicas do objeto de controle, como rigidez, massa ou amortecimento, ou seja, é uma mudança estrutural básica onde se utiliza um elemento cuja função não depende de uma fonte de energia externa, ao passo que sistemas de controle de vibrações ativos dependem de uma fonte de energia externa, tradicionalmente relacionados com o campo de engenharia de controle, baseando-se no uso de sensores, eletrônica de tratamento de sinais e eletrônica de controle ligada diretamente aos atuadores, fazendo com que todos os erros possíveis de ocorrer numa máquina possam ser antecipados e compensados, AQUINO (2011).

Segundo, por exemplo, em IOSSAQUI (2009), as características dinâmicas da estrutura do objeto de controle podem ser modificadas pela introdução de absorvedores passivos de vibração, dado que tais dispositivos de características inerciais modificam a resposta dinâmica do sistema vibratório original em uma determinada faixa de frequência de interesse. Tais dispositivos absorvedores podem ser um oscilador massa-mola, um oscilador pendular, um fluido ou uma estrutura elástica contínua.

O uso de absorvedores de vibração é bastante amplo no campo da engenharia e o uso de pêndulos como dispositivos absorvedores do tipo passivo, é uma prática que se estende não só à engenharia mecânica. O seu uso em isolamento de base contra abalos sísmicos em estruturas prediais como hospitais, por exemplo, o FPS (“Friction Pendulum System”), está ganhando cada vez mais mercado, ESTEVES (2010).

Outros exemplos de aplicação de dispositivos pendulares como absorvedores passivos de vibração se encontram no trabalho de VYAS e BAJAJ (2001), onde analisaram a dinâmica de um absorvedor de vibração auto paramétrico, usando múltiplos pêndulos acoplados a um oscilador linear de um grau de liberdade, ilustrado na Figura (1.2-1), a seguir.

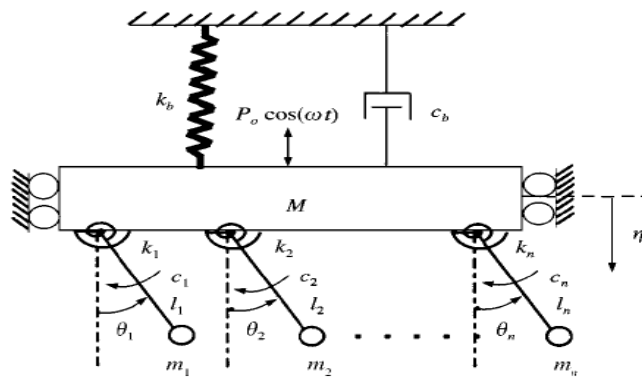


Figura (1.2-1) – Modelo do sistema estudado por VYAS e BAJAJ (2001)

E no modelo matemático de um trem baseado em levitação magnética, ARBEX (2012) e ARBEX et al. (2013) propuseram dois métodos de controle para um sistema do tipo Maglev não ideal, um método passivo, utilizando pêndulo como absorvedor de energia, e um método ativo onde injeta ou retira energia do sistema, como mostra a Figura 1.2-2.

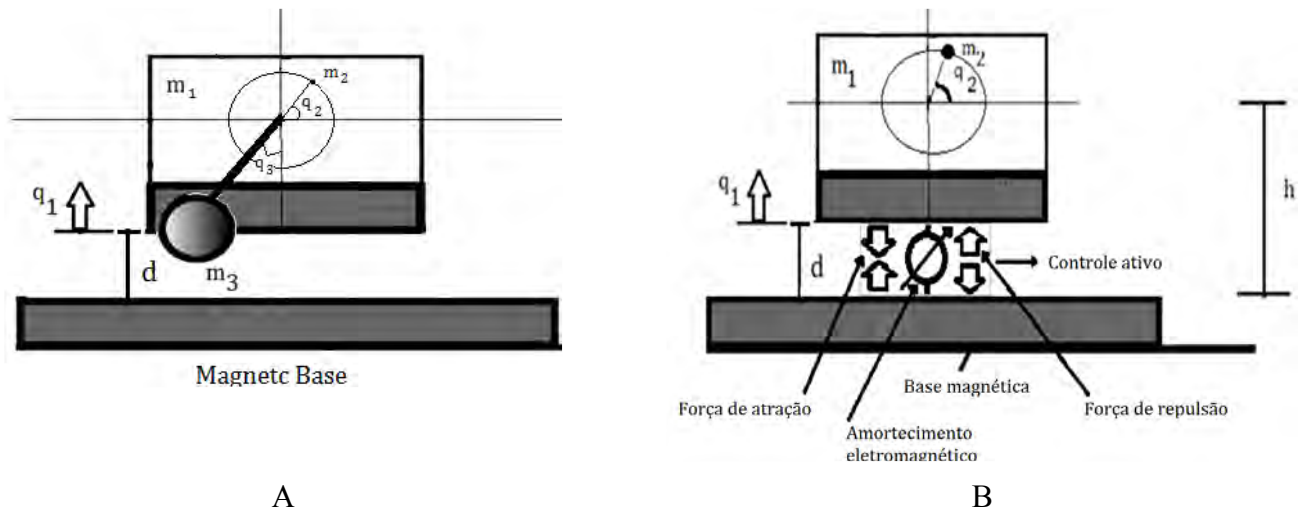


Figura (1.2-2) Modelo de sistemas Maglev trabalhados por ARBEX (2012) e ARBEX et al. (2013) – Sistema excitado por um motor de potência limitada com uma massa desbalanceada, acoplado a um pêndulo com o absorvedor de vibrações.

Maglev não-ideal: A) acoplado a um pêndulo; B) mecanismo utilizado para o controle de vibrações.

De acordo, por exemplo, com CASSIANO, J. e BALTHAZAR, J.M. (2009), uma outra aplicação para o pêndulo seria na modelagem matemática de uma plataforma petrolífera marítima fixa, podendo ser concebida como um pêndulo invertido articulado no fundo do mar, com uma mola torcional aplicada a este vínculo, conforme ilustrado na Figura (1.2-3).

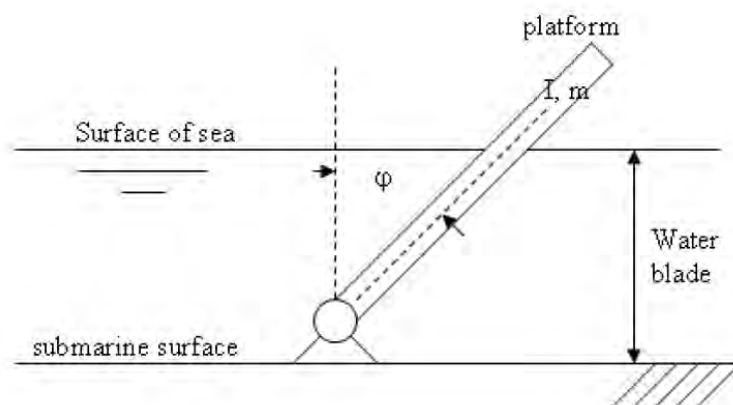


Figura (1.2-3) – Modelo estudado por CASSIANO, J. e BALTHAZAR, J.M. (2009).

Utilizando técnicas de Melnikov, CASSIANO, J. e BALTHAZAR, J.M. (2009), detectaram a presença de caos homoclínico para valores particulares dos parâmetros deste sistema dinâmico, onde ensaios numéricos foram verificados para constatação da técnica utilizada e se obteve total concordância entre ambas.

Outro exemplo de utilização de vibrações que se mostra presente no cotidiano, segundo PONTES JR. (2011), é o sistema de transporte de cargas por pontes rolantes em indústrias, e de acordo com, por exemplo, PERUZZI et al (2007), um modelo para esse problema é o sistema físico com três graus de liberdade, mostrado na Figura (1.2-4). Neste modelo, que é representado por um pêndulo invertido com excitação no suporte e um carro transportador do sistema monotrilho.

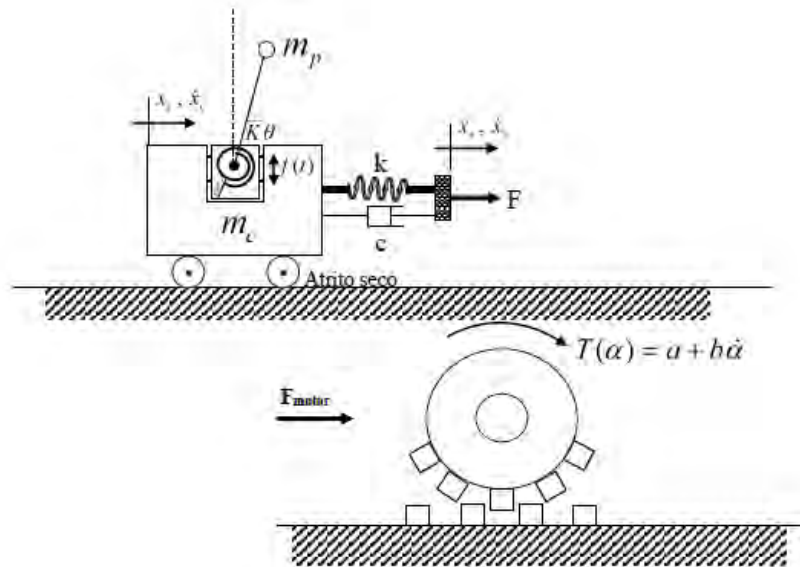


Figura (1.2-4) – Modelo de Sistema monotrilho, trabalhado por PERUZZI et al (2007)

PERUZZI et al (2007), definiu como um sistema primário (Figura 1.2-4) o que consiste de um carro de massa m_c , uma mola linear com coeficiente de elasticidade k e um amortecimento que é representado pelo coeficiente c .

O acionamento do carro (transmissão da potência do motor) foi modelado por uma força F . A força de acionamento F é transmitida através de um suporte onde são consideradas as propriedades elásticas e de amortecimento do sistema, citadas acima.

A Figura (1.2-5) mostra um sistema secundário trabalhado por PERUZZI et al (2007), onde a carga transportada é modelada. Tal sistema é composto por um pêndulo invertido de massa m_p e, em seu suporte, existe uma mola de rigidez torcional com coeficiente de elasticidade $\bar{K}$. Esta mola forçará o pêndulo a manter-se na posição vertical.

PERUZZI et al (2007), supôs ainda que, quando o sistema primário está em movimento, o suporte do pêndulo possui uma pequena vibração periódica vertical representada por $f(t) = \bar{A} \sin \omega t$, onde $\bar{A}$ representa a amplitude e ω a frequência da vibração.

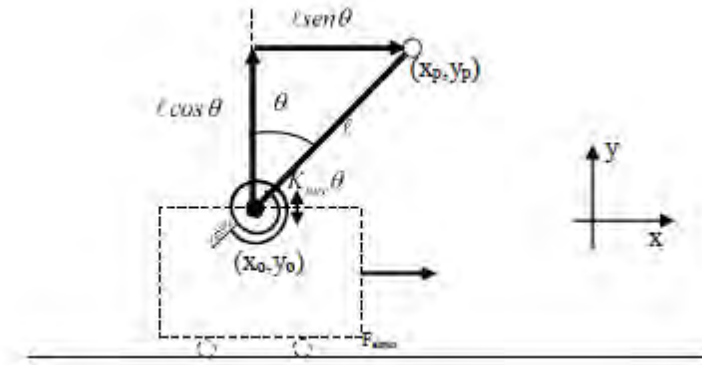


Figura (1.2-5) – Modelo de Sistema monotrilho, Subsistemas primário e secundário, trabalhado por PERUZZI et al (2007)

onde:

(x_o, y_o) é a coordenada do suporte do pêndulo, com $x_o = x_c$; com x_c : posição do carro;

(x_p, y_p) é a coordenada do centro de massa do pêndulo;

l é a distância entre o suporte e centro de massa;

$f(t) = \bar{A} \sin \omega t$ é o movimento vibratório do suporte do pêndulo.

BELATO, D. (1998), explorou a dinâmica envolvida em um sistema denominado “Motor CC – Mecanismo Biela-Manivela-Pêndulo”, ilustrado pela Figura (1.2-6), onde o fator motivacional de pesquisa envolvida na utilização de sistemas pendulares, assim como DE PAULA, A. (2006), foi a grande variedade de padrões periódicos imersos no comportamento caótico do pêndulo, agregado ao baixo gasto de energia associado, visando sua aplicação em sistemas mecânicos.

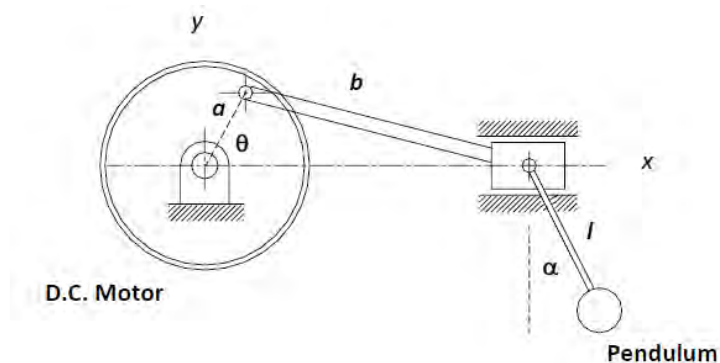


Figura (1.2-6) – Modelo de “Motor CC – Mecanismo Biela-Manivela-Pêndulo”, trabalhado por BELATO, D. (1998)

Outros exemplos podem ser encontrados, facilmente na literatura corrente, porém nos concentraremos em abordar o caso particular que trata esta dissertação de Mestrado.

1.3 OBJETIVOS

Os objetivos principais deste trabalho são exibidos a seguir:

- i. Entender e elaborar modelos matemáticos para os sistemas vibratórios pesquisados, empregando excitadores harmônicos ou de potência limitada do tipo EDS (Vibradores Eletrodinâmicos- “Electrodynamical Shaker”), bem como o uso dos absorvedores de vibração do tipo pendular invertido.
- ii. Comparar o comportamento dinâmico dos sistemas modelados matematicamente, visando identificar a sensibilidade dos parâmetros utilizados.
- iii. Controlar a irregularidade apresentada no movimento do sistema dinâmico, com o objetivo de melhoria de desempenho do mesmo.

1.4 MATERIAIS

Nas simulações numéricas realizadas utilizou-se um computador portátil pessoal, fazendo-se uso do método Runge-Kutta de 4ª ordem para a integração numérica direta das equações de movimento dos sistemas, aproximando suas soluções.

1.5 ORGANIZAÇÃO DESTE TRABALHO

O presente trabalho, está dividido em cinco capítulos.

O primeiro capítulo trata de uma introdução abordando a motivação da pesquisa e a sua justificativa, em seguida faz-se uma breve revisão bibliográfica fornecendo ao leitor conhecimentos básicos sobre vibrações e absorvedores de vibração por sistemas pendulares.

No capítulo 2 serão apresentadas várias modelagens matemáticas diferentes que serviram como uma evolução no que tange a complexidade dinâmica envolvida em cada modelo, de maneira a construir um modelo ótimo. Para cada uma dessas modelagens matemáticas, foram feitas as deduções das equações de movimento utilizando-se a Mecânica Lagrangiana como principal ferramenta.

No capítulo 3, apresenta-se os resultados numéricos obtidos por meio de integração direta das equações do movimento de cada sistema estudado. As simulações numéricas são realizadas para dois sistemas principais, diferenciando-os apenas pela fonte de excitação utilizada em cada um deles (excitação por força harmônica e por meio de um shaker simplificado na forma de um circuito RLC com uma fonte de tensão harmônica).

No capítulo 4 apresenta-se o controle aplicado ao modelo matemático III e no capítulo 5, discute-se os resultados numéricos obtidos, de maneira geral, traçando metas para trabalhos futuros.

2 DISCUSSÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA UTILIZADA

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo, tem-se por meta a construção de modelos matemáticos de forma gradual em relação a complexidade, que está diretamente ligada as características dinâmicas consideradas em cada caso. Sendo assim, para que se possa investigar a dinâmica do problema principal, estudou-se a dinâmica de alguns modelos simplificados a partir do principal e, que serão apresentados a seguir.

Para que se possa estudar a dinâmica envolvida em cada modelo matemático adotado, tem-se a necessidade de se obter as equações do movimento. Dessa forma, determinam-se as coordenadas generalizadas e o referencial inercial para cada caso. Em seguida, calcula-se a posição e a velocidade dos corpos envolvidos e na sequência obtêm-se as equações de energia e suas derivadas, construindo assim as equações do movimento por meio da metodologia proposta por Lagrange em Mecânica Analítica.

A seguir, apresentam-se os diversos modelos matemáticos adotados.

2.1 MODELO MATEMÁTICO I – PLATAFORMA OSCILANTE HORIZONTAL COM PÊNDULO INVERTIDO

O modelo inicial, adotado, se encontra sob regime de vibrações livres e se apresenta na forma de um bloco de massa M , que desliza sem atrito na direção do eixo horizontal X e que possui um pêndulo invertido de massa m , de haste pendular l , estabilizado por uma mola torcional de rigidez linear k_1 , posicionado no centro de massa do bloco. A este bloco estão conectados uma mola de rigidez k_2 e um amortecedor c .

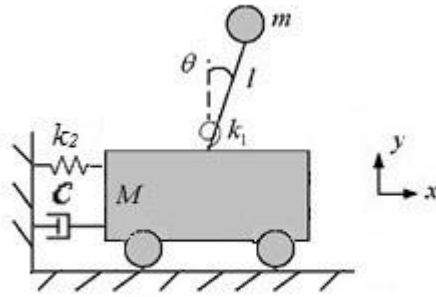


Figura (2.1-1) – Bloco de massa M , deslizando sem atrito sob o eixo horizontal, ligado ao eixo vertical por uma mola e por um amortecedor, com um pêndulo invertido de massa m , sob regime de vibrações livres.

Coordenadas generalizadas para o sistema:

Para o bloco:

$$X_1 = q_x \Rightarrow \dot{X}_1 = \dot{q}_x \quad (1)$$

Para o pêndulo:

$$\begin{cases} X_2 = q_x + l \sin \theta \Rightarrow \dot{X}_2 = \dot{q}_x + \dot{\theta} l \cos \theta \\ Y_2 = l(1 - \cos \theta) \Rightarrow \dot{Y}_2 = \dot{\theta} l \sin \theta \end{cases} \quad (2)$$

Determinadas as coordenadas generalizadas para o sistema em estudo, calculam-se as energias, cinética (T) e potencial (V), do sistema. Sendo assim, têm-se:

Energia Cinética (T)

$$T = \frac{1}{2} [M \cdot (\dot{X}_1^2) + m \cdot (\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2)] \quad (3)$$

onde, $\frac{1}{2} [M \cdot (\dot{X}_1^2)]$ é a energia cinética referente ao deslocamento horizontal do bloco e $\frac{1}{2} [m \cdot (\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2)]$ são as energias cinéticas referentes ao deslocamento angular do pêndulo nos dois eixos de orientação, X_2 horizontal e Y_2 vertical.

Substituindo as coordenadas generalizadas, (1) e (2), na expressão (3) e desenvolvendo a mesma, tem-se:

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} [M \cdot (\dot{q}_x)^2 + m \cdot ((\dot{q}_x + \dot{\theta} l \cos \theta)^2 + (\dot{\theta} l \sin \theta)^2)] \quad (4)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} [M \cdot \dot{q}_x^2 + m \cdot (\dot{q}_x^2 + 2 \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \cos(\theta) + \dot{\theta}^2 \cdot l^2 \cdot \cos^2(\theta) + \dot{\theta}^2 \cdot l^2 \cdot \sin^2(\theta))] \quad (5)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} [M \cdot \dot{q}_x^2 + m \cdot (\dot{q}_x^2 + 2 \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \cos(\theta) + \dot{\theta}^2 \cdot l^2)] \quad (6)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \cdot [M \cdot \dot{q}_x^2 + (m \cdot \dot{q}_x^2 + 2 \cdot m \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \cos(\theta) + m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot l^2)] \quad (7)$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot \dot{q}_x^2 + m \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \cos(\theta) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot l^2 \quad (8)$$

Energia Potencial (V)

$$V = \frac{1}{2}k_2X_1^2 + mgY_2 + \frac{1}{2}k_1\theta^2 \quad (9)$$

onde $\frac{1}{2}k_2X_1^2$ representa a energia potencial elástica da mola torcional do bloco e $mgY_2 + \frac{1}{2}k_1\theta^2$ representam as energias, potencial gravitacional da massa do pêndulo e a potencial elástica da mola torcional do pêndulo, respectivamente.

Substituindo as coordenadas generalizadas em (9) e desenvolvendo a expressão, obtêm-se:

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}k_2q_x^2 + mg(l(1 - \cos\theta)) + \frac{1}{2}k_1\theta^2 \quad (10)$$

$$\therefore V = \frac{1}{2}k_2q_x^2 + mgl - mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k_1\theta^2 \quad (11)$$

A partir das energias do sistema, constrói-se a função Lagrangiana, L, que é definida pela diferença entre as energias cinética (T) e potencial (V) e as equações do movimento do sistema são as derivadas da função Lagrangiana em função das coordenadas generalizadas e do tempo, KIBBLE (1970).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T - V)}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial\dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (12)$$

Onde, $\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t}$ é a velocidade generalizada, n é o número de coordenadas generalizadas e D simboliza a função de energia de dissipação de Rayleigh.

$$L = T - V = \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot \dot{q}_x^2 + m \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \cos(\theta) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot l^2 - \frac{1}{2} k_2 q_x^2 - mgl + mgl \cos \theta - \frac{1}{2} k_1 \theta^2 \quad (13)$$

Para que seja possível a análise das forças não conservativas do sistema, define-se a função de dissipação de energia de Rayleigh.

$$D = \frac{1}{2} c_\theta (l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} c \dot{q}_x^2 \quad (14)$$

Onde c_θ é o amortecimento do pêndulo e c é o amortecimento do bloco.

Substituindo (13) e (14) em (12), e variando-se as coordenadas generalizadas do sistema, obtêm-se as equações do movimento do sistema.

Em relação ao movimento horizontal, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_x} = 0 \quad (15)$$

Daí, tem-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} = (M + m) \cdot \dot{q}_x + m \cdot l \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} \right) = (M + m) \cdot \ddot{q}_x + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) - m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \quad (17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_x} = -k_2 \cdot q_x \quad (18)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_x} = c \dot{q}_x \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_x} \\ = (M + m) \cdot \ddot{q}_x + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) - m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) + k_2 \cdot q_x + c \dot{q}_x \end{aligned} \quad (20)$$

De maneira análoga, faz-se o mesmo para o movimento angular e obtêm-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad (21)$$

A partir de (21), faz-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m \cdot l \cdot \dot{q}_x \cdot \cos(\theta) + m \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m \cdot l \cdot \ddot{q}_x \cdot \cos(\theta) - m \cdot l \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) + m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} \quad (23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m \cdot l \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) - m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\theta) - k_1 \cdot \theta \quad (24)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = c_\theta l^2 \dot{\theta} \quad (25)$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = m \cdot l \cdot \ddot{q}_x \cdot \cos(\theta) + m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\theta) + k_1 \cdot \theta + c_\theta l^2 \dot{\theta} \quad (26)$$

Sendo assim, obtêm-se as equações do movimento do sistema, apresentadas no sistema a seguir:

$$\begin{cases} (M + m) \cdot \ddot{q}_x + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) - m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) + k_2 \cdot q_x + c \dot{q}_x = 0 \\ m \cdot l \cdot \ddot{q}_x \cdot \cos(\theta) + m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\theta) + k_1 \cdot \theta + c_\theta l^2 \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Isolando as acelerações do sistema tem-se:

$$\begin{cases} (M + m) \cdot \ddot{q}_x + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) = m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) - k_2 \cdot q_x - c\dot{q}_x \equiv f_1 \\ m \cdot l \cdot \ddot{q}_x \cdot \cos(\theta) + m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\theta) - k_1 \cdot \theta - c_\theta l^2 \dot{\theta} \equiv f_2 \end{cases} \quad (28)$$

Dessa forma, simplifica-se o sistema anterior e podemos descrevê-lo da seguinte forma:

$$\begin{cases} (M + m) \cdot \ddot{q}_x + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) = f_1 \\ m \cdot l \cdot \ddot{q}_x \cdot \cos(\theta) + m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} = f_2 \end{cases} \quad (29)$$

Onde $f_1 = m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) - k_2 \cdot q_x - c\dot{q}_x$ e $f_2 = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\theta) - k_1 \cdot \theta - c_\theta l^2 \dot{\theta}$.

Manipulando algebricamente esse sistema, tem-se:

$$\begin{cases} (M + m) \cdot \ddot{q}_x + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) = f_1 \\ m \cdot l \cdot \ddot{q}_x \cdot \cos(\theta) + m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} = f_2 \end{cases} \quad (30)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (M + m) \cdot \ddot{q}_x = f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) \\ m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} = f_2 - m \cdot l \cdot \ddot{q}_x \cdot \cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \quad (31)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_x = \frac{f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} = \frac{f_2 - m \cdot l \cdot \ddot{q}_x \cdot \cos(\theta)}{m \cdot l^2} \end{cases} \quad (32)$$

Substituindo $\ddot{q}_x$ em $\ddot{\theta}$, têm-se:

$$\ddot{\theta} = \frac{\frac{(M + m) \cdot f_2}{(M + m)} - \frac{m \cdot l \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} + \frac{m^2 \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos^2(\theta)}{(M + m)}}{m \cdot l^2} \Rightarrow \quad (33)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \left[\frac{(M + m) \cdot f_2 - m \cdot l \cdot f_1 \cdot \cos(\theta) + m^2 \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos^2(\theta)}{(M + m)} \right] \cdot m \cdot l^2 \Rightarrow \quad (34)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{(M + m) \cdot f_2 \cdot m \cdot l^2 - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} + \frac{m^3 \cdot l^4 \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos^2(\theta)}{(M + m)} \Rightarrow \quad (35)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{m^3 \cdot l^4 \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos^2(\theta)}{(M + m)} = \frac{(M + m) \cdot f_2 \cdot m \cdot l^2 - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \Rightarrow \quad (36)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} \cdot \left(1 - \frac{m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)}{(M + m)} \right) = \frac{(M + m) \cdot f_2 \cdot m \cdot l^2 - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \Rightarrow \quad (37)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} \cdot \left(\frac{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)}{(M + m)} \right) = \frac{(M + m) \cdot f_2 \cdot m \cdot l^2 - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \Rightarrow \quad (38)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{(M + m) \cdot f_2 \cdot m \cdot l^2 - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \cdot \left(\frac{(M + m)}{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \right) \Rightarrow \quad (39)$$

$$\therefore \ddot{\theta} = \frac{(M + m) \cdot f_2 \cdot m \cdot l^2 - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \quad \text{Eq. 3}$$

(40)

Substituindo a Eq.3 em Eq.1, temos:

$$\ddot{q}_x = \frac{f_1 - m \cdot l \cdot \cos(\theta) \cdot \left(\frac{(M + m) \cdot f_2 \cdot m \cdot l^2 - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \right)}{(M + m)} \Rightarrow$$

(41)

$\Rightarrow \ddot{q}_x$

$$= \frac{\frac{f_1 \cdot (M + m) - f_1 \cdot m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta) - (M + m) \cdot f_2 \cdot m^2 \cdot l^3 \cdot \cos(\theta) + m^3 \cdot l^4 \cdot f_1 \cdot \cos^2(\theta)}{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)}}{(M + m)}$$

(42)

$$\Rightarrow \ddot{q}_x = \frac{\frac{f_1 \cdot (M + m) - (M + m) \cdot f_2 \cdot m^2 \cdot l^3 \cdot \cos(\theta)}{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)}}{(M + m)}$$

(43)

$$\Rightarrow \ddot{q}_x = \left[\frac{f_1 \cdot (M + m) - (M + m) \cdot f_2 \cdot m^2 \cdot l^3 \cdot \cos(\theta)}{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \right] \cdot (M + m)$$

(44)

$$\Rightarrow \ddot{q}_x = \frac{(M + m)^2 \cdot \{f_1 - f_2 \cdot m^2 \cdot l^3 \cdot \cos(\theta)\}}{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \quad \text{Eq. 4}$$

(45)

Dessa forma, temos um novo sistema que é definido pelas Eq.4 e Eq.5:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{(M + m) \cdot f_2 \cdot m \cdot l^2 - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \\ \ddot{q}_x = \frac{(M + m)^2 \cdot \{f_1 - f_2 \cdot m^2 \cdot l^3 \cdot \cos(\theta)\}}{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \end{cases} \quad (46)$$

Fazendo $(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta) = \Delta$, temos:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{(M + m) \cdot f_2 \cdot m \cdot l^2 - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{\Delta} \\ \ddot{q}_x = \frac{(M + m)^2 \cdot \{f_1 - f_2 \cdot m^2 \cdot l^3 \cdot \cos(\theta)\}}{\Delta} \end{cases} \Rightarrow \quad (47)$$

$$\therefore \begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{1}{\Delta} \cdot \{(M + m) \cdot f_2 \cdot m \cdot l^2 - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)\} \\ \ddot{q}_x = \frac{1}{\Delta} \cdot \{(M + m)^2 \cdot \{f_1 - f_2 \cdot m^2 \cdot l^3 \cdot \cos(\theta)\}\} \end{cases} \quad (48)$$

Portanto, o sistema que comporta as equações do movimento é:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{1}{\Delta} \cdot \{(M + m) \cdot f_2 \cdot m \cdot l^2 - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)\} \\ \ddot{q}_x = \frac{1}{\Delta} \cdot \{(M + m)^2 \cdot \{f_1 - f_2 \cdot m^2 \cdot l^3 \cdot \cos(\theta)\}\} \end{cases} \quad (49)$$

onde,

$$\begin{cases} f_1 = m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) - k_2 \cdot q_x - c \dot{q}_x \\ f_2 = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\theta) - k_1 \cdot \theta - c_\theta l^2 \dot{\theta} \end{cases}$$

$$e, \Delta = (M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta).$$

2.2 MODELO MATEMÁTICO II - PLATAFORMA OSCILANTE HORIZONTAL COM PÊNDULO INVERTIDO E EXCITAÇÃO HARMÔNICA DO SUPORTE

O modelo que se apresenta a seguir, é obtido através da inserção de uma fonte de excitação ao modelo anterior, adotada na forma de uma força harmônica, como mostra a Figura (2.2-1), a seguir.

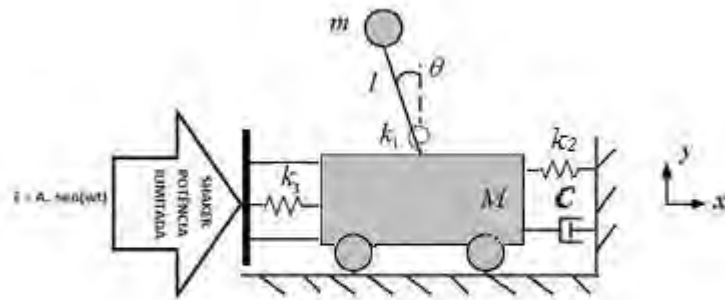


Figura (2.2-1) – Bloco de massa M , deslizando sem atrito sob o eixo horizontal, ligado ao eixo vertical por uma mola e por um amortecedor, com um pêndulo invertido de massa m posicionado em seu centro de massa, estabilizado por mola torcional. Sistema excitado por uma força harmônica.

De maneira análoga ao modelo abordado anteriormente, determina-se as coordenadas generalizadas deste sistema, da seguinte forma:

Para o bloco:

$$\begin{cases} X_1 = q_x - q_v \Rightarrow \dot{X}_1 = \dot{q}_x - \dot{q}_v \\ Y_1 = 0 \Rightarrow \dot{Y}_1 = 0 \end{cases} \quad (50)$$

Para o pêndulo:

$$\begin{cases} X_2 = (q_x - q_v) + l \sin \theta \Rightarrow \dot{X}_2 = (\dot{q}_x - \dot{q}_v) + \dot{\theta} l \cos \theta \\ Y_2 = l \cdot \cos \theta \Rightarrow \dot{Y}_2 = -\dot{\theta} \cdot l \cdot \sin \theta \end{cases} \quad (51)$$

Onde $q_v = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ e, $\dot{q}_v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

Determinadas as coordenadas generalizadas para o sistema em estudo, calculam-se as energias, cinética (T) e potencial (V), do sistema. Sendo assim, têm-se:

Energia Cinética (T)

$$T = \frac{1}{2} [M(\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2) + m(\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2)] \quad (52)$$

onde $\frac{1}{2} [M(\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2)]$ representam as energias cinéticas do bloco, referentes ao deslocamento linear no eixo horizontal X_1 e no eixo vertical Y_1 e $\frac{1}{2} [m(\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2)]$ são as energias cinéticas referentes ao deslocamento angular do pêndulo nos dois eixos de orientação, X_2 horizontal e Y_2 vertical.

Substituindo as coordenadas generalizadas, (50) e (51), na expressão (52) e desenvolvendo a mesma, tem-se:

$$T = \frac{1}{2} \left\{ M[(\dot{q}_x - \dot{q}_v)^2 + 0^2] + m \left[(\{\dot{q}_x - \dot{q}_v\} + \dot{\theta} l \cos \theta)^2 + \{-\dot{\theta} \cdot l \cdot \sin \theta\}^2 \right] \right\} \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
T = \frac{1}{2} \{ & M[\dot{q}_x^2 - 2\dot{q}_x\dot{q}_v + \dot{q}_v^2] \\
& + m[\dot{q}_x^2 - 2\dot{q}_x\dot{q}_v + \dot{q}_v^2 + 2 \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \cos(\theta) - 2 \cdot \dot{q}_v \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \cos(\theta) + \dot{\theta}^2 \\
& \cdot l^2 \cdot \cos^2(\theta) + \dot{\theta}^2 \cdot l^2 \cdot \sin^2(\theta)] \}
\end{aligned}
\tag{54}$$

$$\begin{aligned}
T = \left\{ \left[\frac{1}{2} M \cdot \dot{q}_x^2 - M \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{q}_v + \frac{1}{2} M \cdot \dot{q}_v^2 \right] \right. \\
+ \left[\frac{1}{2} m \cdot \dot{q}_x^2 - m \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{q}_v + \frac{1}{2} m \cdot \dot{q}_v^2 + m \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \cos(\theta) - m \cdot \dot{q}_v \cdot \dot{\theta} \cdot l \right. \\
\left. \left. \cdot \cos(\theta) + \frac{1}{2} m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot l^2 \cdot \cos^2(\theta) + \frac{1}{2} m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot l^2 \cdot \sin^2(\theta) \right] \right\}
\end{aligned}
\tag{55}$$

$$\begin{aligned}
\therefore T = \frac{1}{2} (M + m) \cdot \dot{q}_x^2 + \frac{1}{2} (M + m) \cdot \dot{q}_v^2 - (M + m) \cdot (\dot{q}_x \cdot \dot{q}_v) + m \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \cos(\theta) - m \cdot \\
\dot{q}_v \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \cos(\theta) + \frac{1}{2} m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot l^2
\end{aligned}
\tag{56}$$

Energia Potencial (V)

$$V = mgY_2 + \frac{1}{2}k_3X_1^2 + \frac{1}{2}k_2X_1^2 + \frac{1}{2}k_1\theta^2 \tag{57}$$

onde $\frac{1}{2}k_3X_1^2 + \frac{1}{2}k_2X_1^2$ representam as energias potenciais elásticas das molas k_3 e k_1 , respectivamente, que estão vinculadas ao bloco. E $mgY_2 + \frac{1}{2}k_1\theta^2$ representam as energias, potencial gravitacional da massa do pêndulo e a potencial elástica da mola torcional do pêndulo, respectivamente.

Substituindo as coordenadas generalizadas, (50) e (51), na expressão (57) e desenvolvendo a mesma, tem-se:

$$V = m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta) + \frac{1}{2}k_3 \cdot (q_x - q_v)^2 + \frac{1}{2}k_2 \cdot (q_x - q_v)^2 + \frac{1}{2}k_1 \cdot \theta^2 \Rightarrow \quad (58)$$

$$\Rightarrow V = m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta) + \frac{1}{2}k_3 \cdot (q_x - q_v)^2 + \frac{1}{2}k_2 \cdot (q_x - q_v)^2 + \frac{1}{2}k_1 \cdot \theta^2 \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V = m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta) + \frac{1}{2}k_3 \cdot (q_x^2 - 2 \cdot q_x \cdot q_v + q_v^2) + \frac{1}{2}k_2 \cdot (q_x^2 - 2 \cdot q_x \cdot q_v + q_v^2) \\ + \frac{1}{2}k_1 \cdot \theta^2 \end{aligned} \quad (60)$$

$$\Rightarrow V = m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta) + \frac{1}{2}(k_3 + k_2) \cdot (q_x^2 - 2 \cdot q_x \cdot q_v + q_v^2) + \frac{1}{2}k_1 \cdot \theta^2 \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \therefore V = m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta) + \frac{1}{2}(k_3 + k_2) \cdot q_x^2 - (k_3 + k_2) \cdot q_x \cdot q_v + \frac{1}{2}(k_3 + k_2) \cdot q_v^2 + \\ + \frac{1}{2}k_1 \cdot \theta^2 \end{aligned} \quad (62)$$

A partir das energias do sistema, constrói-se a função Lagrangiana, L , que é definida pela diferença entre as energias cinética (T) e potencial (V) e as equações do movimento do sistema são as derivadas da função Lagrangiana em função das coordenadas generalizadas e do tempo, KIBBLE (1970).

$$\begin{aligned}
L = T - V = & \frac{1}{2}(M + m) \cdot \dot{q}_x^2 + \frac{1}{2}(M + m) \cdot \dot{q}_v^2 - (M + m) \cdot (\dot{q}_x \cdot \dot{q}_v) + m \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \cos(\theta) \\
& - m \cdot \dot{q}_v \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \cos(\theta) + \frac{1}{2}m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot l^2 - m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta) - \frac{1}{2}(k_3 + k_2) \cdot q_x^2 \\
& + (k_3 + k_2) \cdot q_x \cdot q_v - \frac{1}{2}(k_3 + k_2) \cdot q_v^2 - \frac{1}{2}k_1 \cdot \theta^2
\end{aligned} \tag{63}$$

Para que seja possível a análise das forças não conservativas desse sistema, define-se a função de dissipação de energia de Rayleigh.

$$D = \frac{1}{2} \cdot c_\theta \cdot (l \cdot \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\dot{q}_x - \dot{q}_v)^2 \tag{64}$$

Onde c_θ é o amortecimento do pêndulo e c é o amortecimento do bloco, além de $\dot{q}_v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

Substituindo (63) e (64) em (12), e variando-se as coordenadas generalizadas do sistema, obtêm-se as equações do movimento do sistema.

Em relação ao movimento horizontal, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_x} = 0 \tag{65}$$

Daí, tem-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} = (M + m)\dot{q}_x - (M + m) \cdot \dot{q}_v + m \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \cos(\theta) \tag{66}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} \right) = (M + m) \ddot{q}_x - (M + m) \cdot \ddot{q}_v + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) - m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \quad (67)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_x} = -(k_3 + k_2) \cdot q_x + (k_3 + k_2) \cdot q_v \quad (68)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_x} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \cdot c_\theta \cdot (l \cdot \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\dot{q}_x - \dot{q}_v)^2 \right)}{\partial \dot{q}_x} = c \cdot \dot{q}_x - c \cdot \dot{q}_v \quad (69)$$

Sendo assim, a primeira equação governante do movimento desse sistema é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_x} \\ = (M + m) \ddot{q}_x - (M + m) \cdot \ddot{q}_v + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) - m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \\ + (k_3 + k_2) \cdot q_x - (k_3 + k_2) \cdot q_v + c \cdot \dot{q}_x - c \cdot \dot{q}_v = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

Onde $q_v = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$, $\dot{q}_v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$ e $\ddot{q}_v = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

Em relação ao deslocamento angular, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad (71)$$

Daí, tem-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \cdot \dot{q}_x \cdot l \cdot \cos(\theta) - m \cdot \dot{q}_v \cdot l \cdot \cos(\theta) + m \cdot \dot{\theta} \cdot l^2$$
(72)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= m \cdot l \cdot \ddot{q}_x \cdot \cos(\theta) - m \cdot l \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) - m \cdot l \cdot \ddot{q}_v \cdot \cos(\theta) + m \cdot l \cdot \dot{q}_v \cdot \dot{\theta} \\ &\quad \cdot \sin(\theta) + m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} \end{aligned}$$
(73)

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m \cdot l \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) + m \cdot l \cdot \dot{q}_v \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) + m \cdot g \cdot l \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) + k_1 \cdot \theta$$
(74)

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \cdot c_\theta \cdot (l \cdot \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\dot{q}_x - \dot{q}_v)^2 \right)}{\partial \dot{\theta}} = c_\theta \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}$$
(75)

Portanto, a segunda equação governante do movimento do sistema é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} &= m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot l \cdot \ddot{q}_x \cdot \cos(\theta) - m \cdot l \cdot \ddot{q}_v \cdot \cos(\theta) - m \cdot l \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot \\ &\sin(\theta) + m \cdot l \cdot \dot{q}_v \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) + m \cdot l \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) - m \cdot l \cdot \dot{q}_v \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) - m \cdot g \cdot l \cdot \dot{\theta} \cdot \\ &\sin(\theta) - k_1 \cdot \theta + c_\theta \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} = 0 \end{aligned}$$
(76)

Onde $q_v = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$, $\dot{q}_v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$ e $\ddot{q}_v = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

Portanto, temos as seguintes equações do movimento:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{q}_x - (M + m) \cdot \ddot{q}_v + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) - m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) + \\ + (k_3 + k_2) \cdot q_x - (k_3 + k_2) \cdot q_v + c \cdot \dot{q}_x - c \cdot \dot{q}_v = 0 \\ m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot l \cdot \ddot{q}_x \cdot \cos(\theta) - m \cdot l \cdot \ddot{q}_v \cdot \cos(\theta) - m \cdot l \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) + m \cdot l \cdot \dot{q}_v \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) + \\ + m \cdot l \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) - m \cdot l \cdot \dot{q}_v \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) - m \cdot g \cdot l \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) - k_1 \cdot \theta + c_\theta \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (77)$$

Isolando as acelerações e substituindo-se os valores de $q_v = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$, $\dot{q}_v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$ e $\ddot{q}_v = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$, nas equações do sistema tem-se:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{q}_x + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) = (M + m) \cdot (-A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) + m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) + \\ - (k_3 + k_2) \cdot q_x + (k_3 + k_2) \cdot (A \cdot \sin(\omega \cdot t)) - c \cdot \dot{q}_x + c \cdot (A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)) \equiv f_1 \\ m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot l \cdot \ddot{q}_x \cdot \cos(\theta) = m \cdot l \cdot (-A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot \cos(\theta) + m \cdot l \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) + \\ - m \cdot l \cdot (A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) - m \cdot l \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) + \\ + m \cdot l \cdot (A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) + m \cdot g \cdot l \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) + k_1 \cdot \theta - c_\theta \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} \equiv f_2 \end{cases} \quad (78)$$

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{q}_x + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) = f_1 \\ m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot l \cdot \ddot{q}_x \cdot \cos(\theta) = f_2 \end{cases} \quad (79)$$

onde, $f_1 = (M + m) \cdot (-A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) + m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) - (k_3 + k_2) \cdot q_x + (k_3 + k_2) \cdot (A \cdot \sin(\omega \cdot t)) - c \cdot \dot{q}_x + c \cdot (A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t))$ e, $f_2 = m \cdot l \cdot (-A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot \cos(\theta) + m \cdot l \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) - m \cdot l \cdot (A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) - m \cdot l \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) + m \cdot l \cdot (A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) + m \cdot g \cdot l \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) + k_1 \cdot \theta - c_\theta \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}$.

Manipulando-se as equações do sistema descrito acima, tem-se:

$$\begin{cases} \ddot{q}_x = \frac{f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} = \frac{f_2 - m \cdot l \cdot \ddot{q}_x \cdot \cos(\theta)}{m \cdot l^2} \end{cases}$$

(80)

Substituindo $\ddot{q}_x$ em $\ddot{\theta}$, tem-se:

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_x = \frac{f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} = \frac{f_2 - m \cdot l \cdot \left(\frac{f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \right) \cdot \cos(\theta)}{m \cdot l^2} \end{cases}$$

(81)

$$\begin{cases} \ddot{q}_x = \frac{f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} = \frac{\frac{f_2 \cdot (M + m) - m \cdot l \cdot f_1 \cdot \cos(\theta) + m^2 \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos^2(\theta)}{(M + m)}}{m \cdot l^2} \end{cases} \Rightarrow$$

(82)

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_x = \frac{f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} = f_2 \cdot m \cdot l^2 - \frac{m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} + \frac{m^3 \cdot l^4 \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos^2(\theta)}{(M + m)} \end{cases} \Rightarrow$$

(83)

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_x = \frac{f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} - \frac{m^3 \cdot l^4 \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos^2(\theta)}{(M + m)} = f_2 \cdot m \cdot l^2 - \frac{m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \end{cases} \Rightarrow$$

(84)

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_x = \frac{f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} \cdot \left(\frac{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)}{(M + m)} \right) = f_2 \cdot m \cdot l^2 - \frac{m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \end{cases} \Rightarrow$$

(85)

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_x = \frac{f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} = f_2 \cdot m \cdot l^2 \cdot \left(\frac{(M + m)}{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \right) - \frac{m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \cdot \left(\frac{(M + m)}{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \right) \end{cases}$$

(86)

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_x = \frac{f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta)}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} = \frac{f_2 \cdot m \cdot l^2 \cdot (M + m) - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \end{cases}$$

(87)

Substituindo agora a equação $\ddot{\theta}$ na equação $\ddot{q}_x$, tem-se:

$$\begin{cases} \ddot{q}_x = \frac{f_1}{(M + m)} - \frac{m \cdot l \cdot \cos(\theta) \cdot \left(\frac{f_2 \cdot m \cdot l^2 \cdot (M + m) - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \right)}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} = \frac{f_2 \cdot m \cdot l^2 \cdot (M + m) - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M + m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \end{cases} \Rightarrow$$

(88)

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_x = \left(\frac{f_1 \cdot (M+m) - f_1 \cdot m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta) - f_2 \cdot m^2 \cdot l^3 \cdot \cos(\theta) \cdot (M+m) + m^3 \cdot l^4 \cdot f_1 \cdot \cos^2(\theta)}{(M+m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \right) \cdot \frac{(M+m)}{1} \\ \ddot{\theta} = \frac{f_2 \cdot m \cdot l^2 \cdot (M+m) - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M+m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \end{array} \right. \quad (89)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_x = \frac{(M+m)^2 \cdot (f_1 - f_2 \cdot m^2 \cdot l^3 \cdot \cos(\theta))}{(M+m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \\ \ddot{\theta} = \frac{f_2 \cdot m \cdot l^2 \cdot (M+m) - m^2 \cdot l^3 \cdot f_1 \cdot \cos(\theta)}{(M+m) - m^3 \cdot l^4 \cdot \cos^2(\theta)} \end{array} \right. \quad (90)$$

Onde, $f_1 = (M+m) \cdot (-A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) + m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) - (k_3 + k_2) \cdot q_x + (k_3 + k_2) \cdot (A \cdot \sin(\omega \cdot t)) - c \cdot \dot{q}_x + c \cdot (A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t))$ e, $f_2 = m \cdot l \cdot (-A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot \cos(\theta) + m \cdot l \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) - m \cdot l \cdot (A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) - m \cdot l \cdot \dot{q}_x \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) + m \cdot l \cdot (A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) + m \cdot g \cdot l \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) + k_1 \cdot \theta - c_\theta \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}$.

2.3 MODELO MATEMÁTICO III - PLATAFORMA OSCILANTE VERTICAL COM PÊNDULO INVERTIDO E EXCITAÇÃO HARMÔNICA DO SUPORTE

Neste modelo matemático, adotado, mudando-se a posição do bloco, colocando-o na vertical, a fim de que seu movimento se limitasse apenas a direção vertical, gerando um novo sistema, conforme Figura (2.3-1).

O sistema investigado, então, consiste em um pêndulo invertido fixado a uma plataforma suspensa de massa M . O pêndulo tem uma massa m , conectada à plataforma, que será tratada a partir de agora por PPS (Plataforma Pendular Suspensa), por uma haste de comprimento l , onde θ é o deslocamento angular, que é estabilizado por uma mola de torção cuja rigidez é representada por k_1 .

A mola que faz a ligação entre a PPS (Plataforma Pendular Suspensa) e a fonte de excitação do sistema, ($F = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$), tem rigidez definida por k_2 e o amortecedor que também tem esse papel de ligação entre a PPS e a fonte de excitação é representado por c , além de x e y representarem o deslocamento horizontal e vertical, respectivamente.

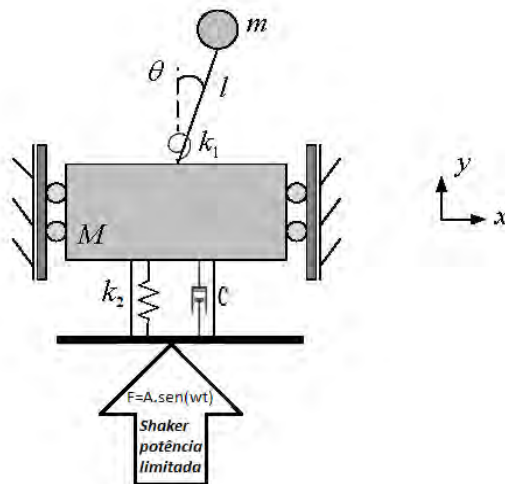


Figura (2.3-1) – Modelo Simplificado de Navio Perfurador, concebido na forma de um PPS, excitado por um EDS (*Electro Dynamics Shaker*), na forma de uma força harmônica F , MARQUES et al (2012).

De maneira análoga aos modelos abordados anteriormente, determina-se as coordenadas generalizadas deste sistema, da seguinte forma:

Para a PPS tem-se:

$$\begin{cases} X_1 = 0 \Rightarrow \dot{X}_1 = 0 \\ Y_1 = q_y - q_b \Rightarrow \dot{Y}_1 = \dot{q}_y - \dot{q}_b \end{cases} \quad (91)$$

E para o pêndulo tem-se:

$$\begin{cases} X_2 = l \sin \theta \Rightarrow \dot{X}_2 = \dot{\theta} l \cos \theta \\ Y_2 = (q_y - q_b) + l(1 - \cos \theta) \Rightarrow \dot{Y}_2 = (\dot{q}_y - \dot{q}_b) + \dot{\theta} l \sin \theta \end{cases} \quad (92)$$

Onde, $q_b = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ e $\dot{q}_b = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

Determinados o referencial e as coordenadas generalizadas, busca-se calcular as energias cinética (T) e potencial (V) do sistema. Dessa forma, tem-se:

Energia Cinética (T)

$$T = \frac{1}{2} [M(\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2) + m(\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2)] \quad (93)$$

onde $\frac{1}{2} [M(\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2)]$ representam as energias cinéticas da PPS, referentes ao deslocamento linear no eixo horizontal dado pela coordenada generalizada X_1 e no eixo vertical dado pela coordenada generalizada Y_1 , e $\frac{1}{2} [m(\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2)]$ são as energias cinéticas referentes ao deslocamento angular do pêndulo nos dois eixos de orientação horizontal dado pela coordenada generalizada X_2 e vertical dado pela coordenada generalizada Y_2 .

Substituindo as coordenadas generalizadas, (91) e (92), na expressão (93) e desenvolvendo a mesma, tem-se:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot \dot{q}_y^2 + \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot (A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t)) - (M + m) \cdot \dot{q}_y (A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)) \\
& + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\theta}^2 l^2 + (m \cdot \dot{\theta} l \sin \theta) \cdot (\dot{q}_y - A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t))
\end{aligned}
\tag{94}$$

Energia Potencial (V)

$$V = MgY_1 + mgY_2 + \frac{1}{2}k_3Y_1^2 + \frac{1}{2}k_1\theta^2 \tag{95}$$

onde $MgY_1 + \frac{1}{2}k_3Y_1^2$ representam as energias potenciais gravitacional e elástica da PPS e da mola de ligação com a fonte de excitação k_3 , respectivamente, que estão vinculadas ao bloco. E $mgY_2 + \frac{1}{2}k_1\theta^2$ representam as energias, potencial gravitacional da massa do pêndulo e a potencial elástica da mola torcional do pêndulo, respectivamente.

Substituindo as coordenadas generalizadas, (91) e (92), na expressão (95) e desenvolvendo a mesma, tem-se:

$$\begin{aligned}
V = & (Mg + mg)q_y - (Mg + mg)(A \cdot \sin(\omega t)) + mgl - mgl \cos(\theta) + \frac{1}{2}k_3q_y^2 \\
& + \frac{1}{2}k_3(A^2 \cdot \sin^2(\omega t)) + \frac{1}{2}k_1\theta^2 - k_3q_y(A \cdot \sin(\omega t))
\end{aligned}
\tag{96}$$

A partir das energias do sistema, constrói-se a função Lagrangiana, L, que é definida pela diferença entre as energias cinética (T) e potencial (V) e as equações do movimento do sistema são as derivadas da função Lagrangiana em função das coordenadas generalizadas e do tempo, KIBBLE (1970).

$$\begin{aligned}
L = T - V = & \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot \dot{q}_y^2 + \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot (A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t)) - (M + m) \\
& \cdot \dot{q}_y (A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\theta}^2 l^2 + (m \cdot \dot{\theta} l \sin \theta) \cdot (\dot{q}_y - A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)) \\
& - (Mg + mg) q_y + (Mg + mg)(A \cdot \sin(\omega t)) - mgl + mgl \cos(\theta) - \frac{1}{2} k_3 q_y^2 \\
& - \frac{1}{2} k_3 (A^2 \cdot \sin^2(\omega t)) - \frac{1}{2} k_1 \theta^2 + k_3 q_y (A \cdot \sin(\omega t))
\end{aligned} \tag{97}$$

Para que seja possível a análise das forças não conservativas desse sistema, define-se a função de dissipação de energia de Rayleigh.

$$D = \frac{1}{2} \cdot c_\theta \cdot (l \cdot \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} c \dot{q}_y^2 \tag{98}$$

Onde c_θ é o amortecimento do pêndulo e c é o amortecimento do bloco.

Substituindo (97) e (98) em (12), e variando-se as coordenadas generalizadas do sistema, obtêm-se as equações do movimento.

Em relação ao deslocamento vertical, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_y} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_y} = 0 \tag{99}$$

E em relação ao deslocamento angular, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (L)}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial (L)}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \tag{100}$$

Calculando as derivadas referentes a (99) e (100) e isolando as acelerações, obtêm-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_y = \frac{f_1 \cdot l - f_2 \cdot \sin(\theta)}{(M + m) \cdot l - l \cdot \sin(\theta)} \\ \ddot{\theta} = \frac{f_2 \cdot (M + m) - f_1 \cdot m \cdot l \cdot \sin(\theta)}{(M + m) \cdot m \cdot l^2 - m \cdot l^2 \cdot \sin^2(\theta)} \end{array} \right. \quad (101)$$

Onde, $f_1 = -(M + m) \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) - m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) - (M + m) \cdot g + k_3 \cdot (A \cdot \sin(\omega t) - q_y) - c \cdot \dot{q}_y$ e $f_2 = -m \cdot l \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\theta) - m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\theta) - k_1 \cdot \theta - c_\theta \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}$

2.4 MODELO MATEMÁTICO IV - PLATAFORMA OSCILANTE NA VERTICAL COM PÊNDULO INVERTIDO ASSOCIADA A EXCITADOR ELETROMECAÂNICO NÃO-LINEAR

O modelo adotado neste momento para análise, difere-se do seu antecessor apenas em sua fonte de excitação, que passou de uma força harmônica para um vibrador eletrodinâmico de potência controlada simplificado, na figura de um circuito RLC com uma fonte de tensão harmônica. De acordo então com a Figura (2.4-1), é definido o novo sistema como sendo do tipo “mono-pendular” invertido, fixado a uma plataforma suspensa de massa M . O pêndulo consiste de uma massa m , conectada por uma haste de comprimento l , que por sua vez é fixada à base da plataforma suspensa por meio de uma mola torcional de rigidez não-linear, dada por $k_1 = k + h\theta^2$, onde θ é o ângulo formado entre o pêndulo e a plataforma. As variáveis x e y são os deslocamentos da plataforma suspensa nas direções horizontal e vertical, respectivamente. A PPS, Plataforma Pendular Suspensa, possui uma mola constante de rigidez linear, k_2 , bem como um amortecedor c , ver Figura 1, no seu acoplamento com a fonte de excitação do sistema, um EDS, Electrodynamical Shaker.

O acoplamento entre a PPS e o EDS é realizado através da força eletromagnética, devido ao ímã permanente e a $F_{em} = K \cdot \dot{q}$, onde $K = l_c \cdot B$ em que l_c e B são o comprimento do condutor e o campo magnético, respectivamente. Tal acoplamento gera uma Força de Laplace na parte mecânica e a Voltagem Eletromotriz de Lenz na parte elétrica. A parte elétrica do sistema consiste de um resistor R , um indutor L , um condensador C e uma fonte de tensão senoidal $e(t) = e_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t)$, em que e_0 e Ω são a amplitude e a frequência, respectivamente e t o tempo, todos conectados em série. No presente modelo, a voltagem do condensador é uma função não-linear de carga elétrica instantânea q , definida como:

$$V_c = \frac{1}{C_0} \cdot q + \alpha_3 \cdot q^3 \quad (102)$$

Onde C_0 é o valor linear de C e α_3 é o coeficiente não-linear, dependendo do tipo de capacitor a ser usado.

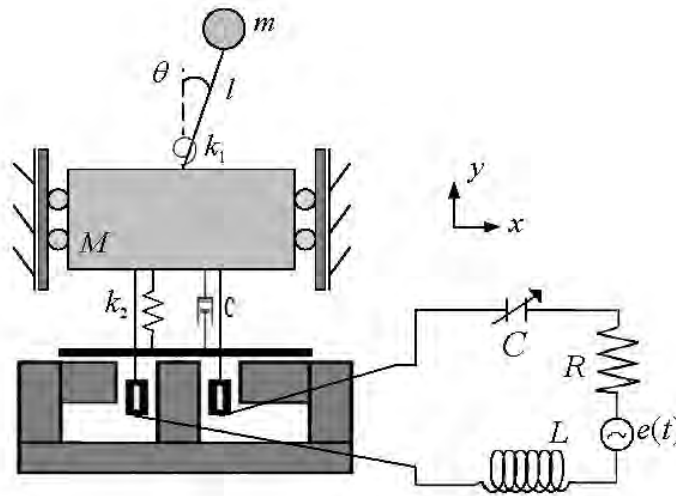


Figura (2.4-1) – Modelo Simplificado de Navio Perfurador, concebido na forma de um PPS, excitado por um EDS (*Electro Dynamics Shaker*), na forma de um circuito RLC com uma fonte de tensão $e(t)$ do tipo harmônica, MARQUES et al (2012).

De maneira análoga às análises dos modelos expostos anteriormente, determina-se as coordenadas generalizadas, da seguinte forma:

Para a PPS tem-se:

$$\begin{cases} X_1 = 0 \Rightarrow \dot{X}_1 = 0 \\ Y_1 = q_y \Rightarrow \dot{Y}_1 = \dot{q}_y \end{cases} \quad (103)$$

Onde q_y é definido como o deslocamento vertical e consequentemente $\dot{q}_y$ a velocidade vertical.

E para o pêndulo tem-se:

$$\begin{cases} X_2 = l \sin \theta \Rightarrow \dot{X}_2 = \dot{\theta} l \cos \theta \\ Y_2 = q_y + l(1 - \cos \theta) \Rightarrow \dot{Y}_2 = \dot{q}_y + \dot{\theta} l \sin \theta \end{cases} \quad (104)$$

Para o Circuito Elétrico, faz-se uma analogia força-voltagem, com base na Lei das Malhas de Kirchhoff, DORF e BISHOP (2001), dado que os elementos do circuito se apresentam conectados em série, obtêm-se:

Tabela 1 – Elementos análogos de sistemas mecânicos e elétricos baseado na relação força-voltagem. Medidas no Sistema Internacional de Unidades (SI)

Sistema Mecânico	Sistema Elétrico
Força f (N) ou Torque T (N.m)	Tensão e (V)
Massa m (Kg) ou Inércia J (Kg.m ²)	Indutância L (H)
Amortecimento Viscoso b (N.s/m) ou B (N.m.s/rad)	Resistência R (Ω)
Rigidez k (N / m) ou K (N.m/rad)	Inverso da Capacitância $1/C$ (1/ F)
Deslocamento x (m) ou θ (rad)	Carga Elétrica q (C)
Velocidade $\dot{x}$ (m/s) ou $\dot{\theta}$ (rad / s)	Corrente Elétrica i (A)
Aceleração $\ddot{x}$ (m/s ²) ou $\ddot{\theta}$ (rad / s ²)	Variação di/dt (A/s)

(105)

Onde q simboliza a carga elétrica instantânea, L a indutância, R a resistência, C a capacitância e por último e como a fonte de tensão.

Determinados o referencial, as coordenadas generalizadas e os termos análogos entre elétrica e mecânica, busca-se calcular as energias, cinética (T) e potencial (V), do sistema. Dessa forma tem-se:

Energia Cinética (T)

$$T = \frac{1}{2} [M(\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2) + m(\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2) + L(\dot{q})^2] \quad (106)$$

onde $\frac{1}{2} [M(\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2)]$ representam as energias cinéticas da PPS, referentes ao deslocamento linear no eixo horizontal dado pela coordenada generalizada X_1 e no eixo vertical dado pela coordenada generalizada Y_1 , $\frac{1}{2} [m(\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2)]$ são as energias cinéticas referentes ao deslocamento angular do pêndulo nos dois eixos de orientação horizontal dado pela coordenada generalizada X_2 e vertical dado pela coordenada generalizada Y_2 e $\frac{1}{2} L(\dot{q})^2$ representa a energia cinética referente às cargas elétricas da fonte de tensão presente no circuito RLC do sistema.

Substituindo as coordenadas generalizadas (103), (104) e interpretando o circuito elétrico de acordo com (105), utilizando a expressão (106), têm-se:

$$T = \frac{1}{2} \{ M[0 + \dot{q}_y^2] + m[(\dot{\theta} l \cos \theta)^2 + (\dot{q}_y + \dot{\theta} l \sin \theta)^2] + L(\dot{q})^2 \} \Rightarrow \quad (107)$$

$$T = \frac{1}{2} \{ M\dot{q}_y^2 + m[\dot{\theta}^2 l^2 \cos^2 \theta + \dot{q}_y^2 + 2\dot{q}_y \dot{\theta} l \sin \theta + \dot{\theta}^2 l^2 \sin^2 \theta] + L\dot{q}^2 \} \Rightarrow \quad (108)$$

$$T = \frac{1}{2} \{ M\dot{q}_y^2 + m[\dot{\theta}^2 l^2 + \dot{q}_y^2 + 2\dot{q}_y \dot{\theta} l \sin \theta] + L\dot{q}^2 \} \Rightarrow \quad (109)$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{q}_y^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}_y^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2l^2 + m\dot{q}_y\dot{\theta}l\sin\theta + \frac{1}{2}L\dot{q}^2 \quad (110)$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot \dot{q}_y^2 + m \cdot l \cdot \dot{q}_y \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta + \frac{1}{2} \cdot m \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \dot{q}^2 \quad (111)$$

Energia Potencial (V)

$$V = MgY_1 + mgY_2 + \frac{1}{2}k_2Y_1^2 + \frac{1}{2}k_1\theta^2 - (-K\dot{q}q_y) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{C_0}q + \alpha_3q^3 \right) \cdot q \quad (112)$$

onde $MgY_1 + \frac{1}{2}k_2Y_1^2$ representam as energias potencial gravitacional da PPS e potencial elástica da mola de ligação da PPS com a fonte de excitação, já $mgY_2 + \frac{1}{2}k_1\theta^2$ representam as energias potencial gravitacional da massa do pêndulo e a potencial elástica da mola torcional do pêndulo, respectivamente. E finalmente $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{C_0}q + \alpha_3q^3 \right) \cdot q$ representa a energia potencial elétrica da fonte de excitação e $(-K\dot{q}q_y)$ representa o trabalho realizado pela força eletromagnética.

Substituindo as coordenadas generalizadas (103), (104) e interpretando o circuito elétrico de acordo com (105), utilizando a expressão (112), têm-se:

$$V = Mgq_y + mg\{q_y + l(1 - \cos\theta)\} + \frac{1}{2}k_2q_y^2 + \frac{1}{2}\{k + h\theta^2\}\theta^2 + K\dot{q}q_y + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{C_0}q + \alpha_3q^3 \right) \cdot q \Rightarrow \quad (113)$$

$$V = Mgq_y + mgq_y + mgl - mg \cos \theta + \frac{1}{2}k_2q_y^2 + \frac{1}{2}k\theta^2 + \frac{1}{2}h\theta^4 + K\dot{q}q_y + \frac{1}{2C_0}q^2 + \frac{1}{2}\alpha_3q^4 \Rightarrow \quad (114)$$

$$\therefore V = (M + m)gq_y + mgl - mg \cos \theta + \frac{1}{2}k_2q_y^2 + \frac{1}{2}k\theta^2 + \frac{1}{2}h\theta^4 + K\dot{q}q_y + \frac{1}{2C_0}q^2 + \frac{1}{2}\alpha_3q^4 \quad (115)$$

A partir das energias do sistema, constrói-se a função Lagrangiana, L, que é definida pela diferença entre as energias cinética (T) e potencial (V) e as equações do movimento do sistema são as derivadas da função Lagrangiana em função das coordenadas generalizadas e do tempo, KIBBLE (1970).

$$\begin{aligned} L = T - V = & \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot \dot{q}_y^2 + m \cdot l \cdot \dot{q}_y \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot m \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \dot{q}^2 \\ & - (M + m)gq_y - mgl + mg \cos \theta - \frac{1}{2}k_2q_y^2 - \frac{1}{2}k\theta^2 - \frac{1}{2}h\theta^4 - K\dot{q}q_y \\ & - \frac{1}{2C_0}q^2 - \frac{1}{2}\alpha_3q^4 \end{aligned} \quad (116)$$

Para que se possa analisar as forças não conservativas do sistema, define-se a função de dissipação de energia de Rayleigh.

$$D = \frac{1}{2}c_\theta(l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}c\dot{q}_y^2 + \frac{1}{2}R\dot{q}^2 \quad (117)$$

Onde c_θ é o amortecimento do pêndulo, c é o amortecimento do bloco e R é o resistor do circuito elétrico.

Substitui-se (116) e (117) em (12), variando-se as coordenadas generalizadas do sistema, para que se possa encontrar as equações do movimento do mesmo.

Em relação ao movimento vertical do sistema, ou seja, q_y e $\dot{q}_y$, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{q}_y} \right) - \frac{\partial(L)}{\partial q_y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_y} = 0 \quad (118)$$

A partir daí, tem-se:

$$\frac{\partial(L)}{\partial \dot{q}_y} = (M + m) \cdot \dot{q}_y + m \cdot l \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta \quad (119)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{q}_y} \right) &= \frac{d}{dt} \left((M + m) \cdot \dot{q}_y + m \cdot l \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta \right) \\ &= (M + m) \cdot \ddot{q}_y + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta + m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (120)$$

$$\frac{\partial(L)}{\partial q_y} = -(M + m)g - k_2 q_y - K \dot{q}_y \quad (121)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_y} = c \dot{q}_y \quad (122)$$

Dessa forma, em relação ao movimento vertical do sistema, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{q}_y} \right) - \frac{\partial(L)}{\partial q_y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_y} \\
= (M + m) \cdot \ddot{q}_y + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta + m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta + K \dot{q} + c \dot{q}_y \\
+ (M + m)g + k_2 q_y = 0
\end{aligned}
\tag{123}$$

De maneira análoga desenvolve-se a expressão (12), utilizando (116) e (117), em relação ao movimento rotacional, ou seja, θ e $\dot{\theta}$, sendo assim tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial(L)}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0
\tag{124}$$

$$\frac{\partial(L)}{\partial \dot{\theta}} = m \cdot l \cdot \dot{q}_y \cdot \sin \theta + m \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}
\tag{125}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{d}{dt} (m \cdot l \cdot \dot{q}_y \cdot \sin \theta + m \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}) \\
&= m \cdot l \cdot \ddot{q}_y \cdot \sin \theta + m \cdot l \cdot \dot{q}_y \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta + m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta}
\end{aligned}
\tag{126}$$

$$\frac{\partial(L)}{\partial \theta} = m \cdot l \cdot \dot{q}_y \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta - mg \sin \theta - k\theta - 2h\theta^3
\tag{127}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = c_\theta \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}
\tag{128}$$

Dessa forma, em relação ao movimento rotacional do sistema, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial(L)}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \\
& = m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot l \cdot \ddot{q}_y \cdot \sin \theta + m \cdot l \cdot \dot{q}_y \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta - m \cdot l \cdot \dot{q}_y \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta \\
& + c_\theta \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} + mg \sin \theta + k\theta + 2h\theta^3 = 0
\end{aligned}
\tag{129}$$

De maneira análoga desenvolve-se a expressão (12), utilizando (116) e (117), em relação à carga elétrica instantânea do circuito RLC, ou seja, q e $\dot{q}$, sendo assim tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial(L)}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = e_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t)
\tag{130}$$

A partir daí, tem-se:

$$\frac{\partial(L)}{\partial \dot{q}} = L \cdot \dot{q} - Kq_y
\tag{131}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} (L \cdot \dot{q} - Kq_y) = L \cdot \ddot{q} - K\dot{q}_y
\tag{132}$$

$$\frac{\partial(L)}{\partial q} = -\frac{1}{C_0} q - 2\alpha_3 q^3
\tag{133}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = R\dot{q}
\tag{134}$$

Dessa forma, em relação à carga elétrica instantânea do circuito RLC, obtêm-se:

$$L \cdot \ddot{q} - K\dot{q}_y + \frac{1}{C_0}q + 2\alpha_3 q^3 + R\dot{q} = e_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t) \quad (135)$$

Sendo assim, obtêm-se o seguinte sistema de equações do movimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} (M + m) \cdot \ddot{q}_y + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta + m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta + K\dot{q} + c\dot{q}_y + (M + m)g + k_2 q_y = 0 \\ m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot l \cdot \ddot{q}_y \cdot \sin \theta + c_\theta \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} + mg \sin \theta + k\theta + 2h\theta^3 = 0 \\ L \cdot \ddot{q} - K\dot{q}_y + \frac{1}{C_0}q + 2\alpha_3 q^3 + R\dot{q} = e_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t) \end{array} \right. \quad (136)$$

Isolando-se as acelerações da expressão (136) obtêm-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} (M + m) \cdot \ddot{q}_y + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta = -m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta - K\dot{q} - c\dot{q}_y - (M + m)g - k_2 q_y \equiv f_1 \\ m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot l \cdot \ddot{q}_y \cdot \sin \theta = -c_\theta \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} - mg \sin \theta - k\theta - 2h\theta^3 \equiv f_2 \\ L \cdot \ddot{q} = e_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t) + K\dot{q}_y - \frac{1}{C_0}q - 2\alpha_3 q^3 - R\dot{q} \equiv f_3 \end{array} \right. \quad (137)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (M + m) \cdot \ddot{q}_y + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta = f_1 \\ m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot l \cdot \ddot{q}_y \cdot \sin \theta = f_2 \\ L \cdot \ddot{q} = f_3 \end{array} \right. \quad (138)$$

Onde $f_1 = -m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta - K\dot{q} - c\dot{q}_y - (M + m)g - k_2 q_y$, $f_2 = -c_\theta \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} - mg \sin \theta - k\theta - 2h\theta^3$ e $f_3 = e_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t) + K\dot{q}_y - \frac{1}{C_0}q - 2\alpha_3 q^3 - R\dot{q}$.

Manipulando-se (138), obtêm-se:

$$\begin{cases} \ddot{q}_y = \frac{f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} = \frac{f_2 + m \cdot l \cdot \ddot{q}_y \cdot \sin \theta}{m \cdot l^2} \Rightarrow \\ \ddot{q} = \frac{f_3}{L} \end{cases}$$

(139)

$$\begin{cases} \ddot{q}_y = \frac{f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} = \frac{f_2 + m \cdot l \cdot \left\{ \frac{f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta}{(M + m)} \right\} \cdot \sin \theta}{m \cdot l^2} \Rightarrow \\ \ddot{q} = \frac{f_3}{L} \end{cases}$$

(140)

$$\begin{cases} \ddot{q}_y = \frac{f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} = \frac{(M + m) \cdot f_2 + m \cdot l \cdot \sin \theta \cdot f_1 - m^2 \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin^2 \theta}{(M + m) \cdot m \cdot l^2} \Rightarrow \\ \ddot{q} = \frac{f_3}{L} \end{cases}$$

(141)

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_y = \frac{f_1 - m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} = \frac{(M + m) \cdot f_2 + m \cdot l \cdot \sin \theta \cdot f_1}{\{(M + m) + m \cdot \sin^2 \theta\} \cdot m \cdot l^2} \Rightarrow \\ \ddot{q} = \frac{f_3}{L} \end{array} \right. \quad (142)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_y = \frac{f_1 + \left[\frac{-m \cdot l \cdot \sin \theta \cdot (M + m) \cdot f_2 - m^2 \cdot l^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot f_1}{\{(M + m) + m \cdot \sin^2 \theta\} \cdot m \cdot l^2} \right]}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} = \frac{(M + m) \cdot f_2 + m \cdot l \cdot \sin \theta \cdot f_1}{\{(M + m) + m \cdot \sin^2 \theta\} \cdot m \cdot l^2} \Rightarrow \\ \ddot{q} = \frac{f_3}{L} \end{array} \right. \quad (143)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_y = \frac{\left[\frac{(M+m) \cdot m \cdot l^2 \cdot f_1 + m^2 \cdot l^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot f_1 - m \cdot l \cdot \sin \theta \cdot (M+m) \cdot f_2 - m^2 \cdot l^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot f_1}{\{(M+m) + m \cdot \sin^2 \theta\} \cdot m \cdot l^2} \right]}{(M+m)} \\ \ddot{\theta} = \frac{(M+m) \cdot f_2 + m \cdot l \cdot \sin \theta \cdot f_1}{\{(M+m) + m \cdot \sin^2 \theta\} \cdot m \cdot l^2} \\ \ddot{q} = \frac{f_3}{L} \end{array} \right. \quad (144)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_y = \frac{\left[\frac{(M + m) \cdot (l \cdot f_1 - \sin \theta \cdot f_2)}{(M + m) \cdot l + m \cdot l \cdot \sin^2 \theta} \right]}{(M + m)} \\ \ddot{\theta} = \frac{(M + m) \cdot f_2 + m \cdot l \cdot \sin \theta \cdot f_1}{\{(M + m) + m \cdot \sin^2 \theta\} \cdot m \cdot l^2} \Rightarrow \\ \ddot{q} = \frac{f_3}{L} \end{array} \right. \quad (145)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_y = \frac{l \cdot f_1 - \sin \theta \cdot f_2}{(M + m) \cdot l + m \cdot l \cdot \sin^2 \theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{(M + m) \cdot f_2 + m \cdot l \cdot \sin \theta \cdot f_1}{\{(M + m) + m \cdot \sin^2 \theta\} \cdot m \cdot l^2} \\ \ddot{q} = \frac{f_3}{L} \end{array} \right. \quad (146)$$

Portanto, o sistema de equações que descreve o movimento do modelo pode ser encontrado na expressão (147), abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_y = \frac{l \cdot f_1 - \sin \theta \cdot f_2}{(M + m) \cdot l + m \cdot l \cdot \sin^2 \theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{(M + m) \cdot f_2 + m \cdot l \cdot \sin \theta \cdot f_1}{\{(M + m) + m \cdot \sin^2 \theta\} \cdot m \cdot l^2} \\ \ddot{q} = \frac{f_3}{L} \end{array} \right. \quad (147)$$

onde $f_1 = -m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta - K\dot{q} - c\dot{q}_y - (M + m)g - k_2 q_y$, $f_2 = -c_\theta \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} - mg \sin \theta - k\theta - 2h\theta^3$ e $f_3 = e_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t) + K\dot{q}_y - \frac{1}{c_0} q - 2\alpha_3 q^3 - R\dot{q}$.

2.5 MODELO MATEMÁTICO V – PLATAFORMA OSCILANTE VERTICAL COM PÊNDULO INVERTIDO ASSOCIADA A EXCITADOR ELETROMECHANICO NÃO-LINEAR DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Neste modelo matemático adotado, que é obtido também como um tipo de variação do anterior, onde passa-se a considerar a massa do núcleo do vibrador eletrodinâmico de potência controlada, aumentando-se assim, o nível de complexidade dinâmica do sistema, gerando um novo modelo esquemático, conforme Figura (2.5-1).

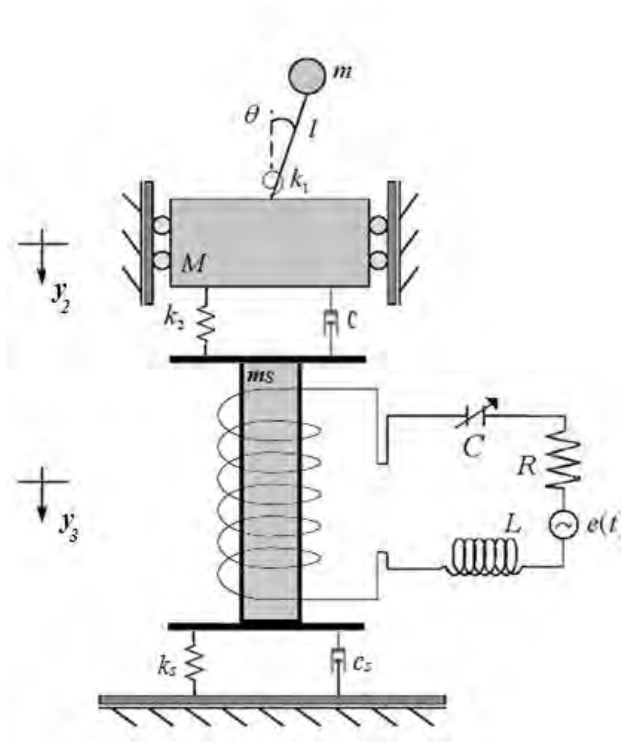


Figura (2.5-1) – Modelo Simplificado de Navio Perfurador, concebido na forma de uma PPS, excitado por um EDS (*Electro Dynamics Shaker*), na forma de um circuito RLC com uma fonte de tensão $e(t)$ do tipo harmônica, considerando-se a massa do núcleo do vibrador eletrodinâmico, MARQUES, C. E. (2013).

O modelo também é definido como um sistema do tipo “mono-pendular” invertido, fixado a uma plataforma suspensa de massa M . O pêndulo consiste de uma massa m , conectada por uma haste de comprimento l , que por sua vez é fixada à base da plataforma suspensa por meio de uma mola torcional de rigidez não-linear, dada por $k_1 = k + h\theta^2$, onde θ é o ângulo formado entre o pêndulo e a plataforma. As variáveis x e y são os deslocamentos da plataforma

suspensa nas direções horizontal e vertical, respectivamente. A PPS, Plataforma Pendular Suspensa, possui uma mola constante de rigidez linear, k_2 , bem como um amortecedor c , no seu acoplamento com a fonte de excitação do sistema, um EDS, Electrodynamic Shaker, de massa m_s .

O acoplamento entre a PPS e o EDS é realizado através da força eletromagnética, devido ao imã permanente e a $F_{em} = K \cdot \dot{q}$, onde $K = l_c \cdot B$ em que l_c e B são o comprimento do condutor e o campo magnético, respectivamente. Tal acoplamento gera uma Força de Laplace na parte mecânica e a Voltagem Eletromotriz de Lenz na parte elétrica. A parte elétrica do sistema consiste de um resistor R , um indutor L , um condensador C e uma fonte de tensão senoidal $e(t) = e_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t)$, em que e_0 e Ω são a amplitude e a frequência, respectivamente e t o tempo, todos conectados em série. No presente modelo, a voltagem do condensador é uma função não-linear de carga elétrica instantânea q , definida como:

$$V_c = \frac{1}{C_0} \cdot q + \alpha_3 \cdot q^3 \quad (148)$$

onde C_0 é o valor linear de C e α_3 é o coeficiente não-linear, dependendo do tipo de capacitor a ser usado.

O EDS possui uma mola k_s e um amortecedor c_s que o conecta ao solo, cuja rigidez e amortecimento possuem comportamentos lineares.

Determinando as coordenadas generalizadas, tem-se:

Para o pêndulo tem-se:

$$\begin{cases} X_1 = l \cdot \sin(\theta) \Rightarrow \dot{X}_1 = \dot{\theta} \cdot l \cdot \cos(\theta) \\ Y_1 = y_2 + l \cdot (1 - \cos(\theta)) \Rightarrow \dot{Y}_1 = \dot{y}_2 + \dot{\theta} \cdot l \cdot \sin(\theta) \end{cases} \quad (149)$$

Onde y_2 é definido como o deslocamento vertical do bloco (PPS) e y_3 é o deslocamento da massa do núcleo do shaker. Dessa forma, consequentemente, $\dot{y}_2$ é a velocidade vertical do bloco e $\dot{y}_3$ é a velocidade vertical do núcleo do Shaker.

Para a PPS tem-se:

$$\begin{cases} X_2 = 0 \Rightarrow \dot{X}_2 = 0 \\ Y_2 = y_2 \Rightarrow \dot{Y}_2 = \dot{y}_2 \end{cases} \quad (150)$$

Para o núcleo do shaker, tem-se:

$$\begin{cases} X_3 = 0 \Rightarrow \dot{X}_3 = 0 \\ Y_3 = y_3 \Rightarrow \dot{Y}_3 = \dot{y}_3 \end{cases} \quad (151)$$

Para o Circuito Elétrico, faz-se uma analogia força-voltagem, com base na Lei das Malhas de Kirchhoff, Dorf e Bishop (2001), dado que os elementos do circuito se apresentam conectados em série.

Energia Cinética (T)

Para o pêndulo tem-se:

$$T_{pend} = \frac{1}{2} [m(\dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2)] \Rightarrow T_{pend} = \frac{1}{2} [m\{(\dot{X}_1^2) + (\dot{Y}_1^2)\}] \quad (152)$$

$$\Rightarrow T_{pend} = \frac{1}{2} \left[m \left\{ \left(\dot{\theta} \cdot l \cdot \cos(\theta) \right)^2 + \left(\dot{y}_2 + \dot{\theta} \cdot l \cdot \sin(\theta) \right)^2 \right\} \right] \quad (153)$$

$$T_{pend} = \frac{1}{2} \left[m \left\{ \dot{\theta}^2 \cdot l^2 \cdot \cos^2(\theta) + (\dot{y}_2)^2 + 2 \cdot (\dot{y}_2) \cdot \left(\dot{\theta} \cdot l \cdot \sin(\theta) \right) + \left(\dot{\theta} \cdot l \cdot \sin(\theta) \right)^2 \right\} \right] \quad (154)$$

$$\Rightarrow T_{pend} = \frac{1}{2} [m\{\dot{\theta}^2 \cdot l^2 \cdot \cos^2(\theta) + \dot{y}_2^2 + 2 \cdot \dot{y}_2 \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \sin(\theta) + \dot{\theta}^2 \cdot l^2 \cdot \sin^2(\theta)\}] \quad (155)$$

$$\Rightarrow T_{pend} = \frac{1}{2} [m\{\dot{\theta}^2 \cdot l^2 + \dot{y}_2^2 + 2 \cdot \dot{y}_2 \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \sin(\theta)\}] \quad (156)$$

$$\therefore T_{pend} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot l^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{y}_2^2 + m \cdot \dot{y}_2 \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \sin(\theta) \quad (157)$$

Para a PPS tem-se:

$$T_{PPS} = \frac{1}{2} [M(\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2)] \Rightarrow T_{PPS} = \frac{1}{2} [M(0^2 + (\dot{y}_2)^2)] \quad (158)$$

$$\therefore T_{PPS} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{y}_2^2 \quad (159)$$

Para o núcleo do shaker, tem-se:

$$T_{shaker} = \frac{1}{2} [m_s(\dot{X}_3^2 + \dot{Y}_3^2)] \Rightarrow T_{shaker} = \frac{1}{2} [m_s(0^2 + \dot{y}_3^2)] \Rightarrow T_{shaker} = \frac{1}{2} [m_s(\dot{y}_3^2)] \quad (160)$$

$$\therefore T_{shaker} = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot \dot{y}_3^2 \quad (161)$$

Para o Circuito Elétrico tem-se:

$$T_{C.E.} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \dot{q}^2 \quad (162)$$

Sendo assim, tem-se:

$$\therefore T_{total} = T_{pend} + T_{PPS} + T_{shaker} \quad (163)$$

$$\therefore T_{total} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot l^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{y}_2^2 + m \cdot \dot{y}_2 \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \sin(\theta) + \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot \dot{y}_3^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \dot{q}^2 \quad (164)$$

Energia Potencial (V)

Para o pêndulo tem-se:

Energia Potencial Gravitacional

$$V_{PG/pend} = mgY_1 \Rightarrow V_{PG/pend} = mg[(y_2) + l(1 - \cos\theta)] \quad (165)$$

$$\therefore V_{PG/pend} = mgy_2 + mgl(1 - \cos\theta) \quad (166)$$

Energia Potencial Elástica

$$V_{PE/pend} = \frac{1}{2} k_1 \theta^2 \quad (167)$$

$$\therefore V_{pend} = mgy_2 + mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} k_1 \theta^2 \quad (168)$$

Para a PPS tem-se:

Energia Potencial Gravitacional

$$V_{PG/PPS} = MgY_2 \Rightarrow V_{PG/PPS} = Mg(y_2) \quad (169)$$

$$\therefore V_{PG/PPS} = Mgy_2 \quad (170)$$

Energia Potencial Elástica

$$V_{PE/PPS} = \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_3)^2 \quad (171)$$

$$\therefore V_{PPS} = Mgy_2 + \left(\frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot y_2^2 - k_2 \cdot y_2 \cdot y_3 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot y_3^2 \right) \quad (172)$$

Para o núcleo do vibrador tem-se:

Energia Potencial Gravitacional

$$V_{PG/shaker} = m_s \cdot g \cdot Y_3 \Rightarrow V_{PG/shaker} = m_s \cdot g \cdot y_3 \quad (173)$$

Energia Potencial Elástica

$$V_{PE/shaker} = \frac{1}{2} \cdot k_s \cdot Y_3^2 \Rightarrow V_{PE/shaker} = \frac{1}{2} \cdot k_s \cdot y_3^2 \quad (174)$$

Energia Potencial Elétrica

$$V_{PEletrica/shaker} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{C_0} q + \alpha_3 q^3 \right)^{-1} \cdot q^2 \quad (175)$$

$$\therefore V_{PEletrica/shaker} = \frac{C_0 \cdot q}{2(1 + C_0 \cdot \alpha_3 q^2)} \quad (176)$$

Trabalho Realizado pela Força Eletromagnética

$$W_{FEM/shaker} = -K \cdot \dot{q} \cdot (y_2 - y_3) \quad (177)$$

$$\therefore V_{shaker} = m_s g y_3 + \frac{1}{2} k_s y_3^2 + \frac{C_0 \cdot q}{2(1 + C_0 \cdot \alpha_3 q^2)} - (-K \cdot \dot{q} \cdot (y_2 - y_3)) \quad (178)$$

$$\therefore V_{shaker} = m_s \cdot g \cdot y_3 + \frac{1}{2} \cdot k_s \cdot y_3^2 + \frac{C_0 \cdot q}{2(1 + C_0 \cdot \alpha_3 q^2)} + K \cdot \dot{q} \cdot (y_2 - y_3) \quad (179)$$

Sendo assim, tem-se:

$$\therefore V_{total} = V_{pend} + V_{PPS} + V_{shaker} \quad (180)$$

$$\begin{aligned}
\therefore V_{total} = & mgy_2 + mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}k_1\theta^2 + Mgy_2 \\
& + \left(\frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot y_2^2 - k_2 \cdot y_2 \cdot y_3 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot y_3^2 \right) + m_s \cdot g \cdot y_3 + \frac{1}{2} \cdot k_s \cdot y_3^2 \\
& + \frac{C_0 \cdot q}{2(1 + C_0 \cdot \alpha_3 q^2)} + K \cdot \dot{q} \cdot (y_2 - y_3)
\end{aligned} \tag{181}$$

A partir das energias do sistema, constrói-se a função Lagrangiana, L , que é definida pela diferença entre as energias cinética (T) e potencial (V).

$$L = T - V$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow L = & \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot l^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{y}_2^2 + m \cdot \dot{y}_2 \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \sin(\theta) + \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot \dot{y}_3^2 + \frac{1}{2} \cdot L \\
& \cdot \dot{q}^2 - mgy_2 - mgl(1 - \cos\theta) - \frac{1}{2}k_1\theta^2 - Mgy_2 \\
& - \left(\frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot y_2^2 - k_2 \cdot y_2 \cdot y_3 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot y_3^2 \right) - m_s \cdot g \cdot y_3 - \frac{1}{2} \cdot k_s \cdot y_3^2 \\
& - \frac{C_0 \cdot q}{2(1 + C_0 \cdot \alpha_3 q^2)} - K \cdot \dot{q} \cdot (y_2 - y_3)
\end{aligned} \tag{182}$$

$$\begin{aligned}
\therefore L = & \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot l^2 + \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot \dot{y}_2^2 + m \cdot \dot{y}_2 \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \sin(\theta) + \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot \dot{y}_3^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \dot{q}^2 \\
& - (M + m) \cdot g \cdot y_2 - m \cdot g \cdot l + m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta) - \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot \theta^2 - \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot y_2^2 \\
& - \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot y_3^2 + k_2 \cdot y_2 \cdot y_3 - m_s \cdot g \cdot y_3 - \frac{1}{2} \cdot k_s \cdot y_3^2 - \frac{C_0 \cdot q}{2(1 + C_0 \cdot \alpha_3 q^2)} \\
& - K \cdot \dot{q} \cdot y_2 + K \cdot \dot{q} \cdot y_3
\end{aligned} \tag{183}$$

Para que se possa analisar as forças não conservativas do sistema, define-se a função de dissipação de energia de Rayleigh, D :

Para o pêndulo tem-se:

$$D_{pend} = \frac{1}{2} \cdot c_{\theta} \cdot (l \cdot \dot{\theta})^2 \quad (184)$$

Para a PPS tem-se:

$$D_{PPS} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_3)^2 \quad (185)$$

Para o núcleo do Shaker, tem-se:

$$D_{shaker} = \frac{1}{2} \cdot c_s \cdot (\dot{y}_3)^2 \quad (186)$$

Para o Circuito Elétrico, tem-se:

$$D_{C.E.} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \dot{q}^2 \quad (187)$$

Sendo assim,

$$\therefore D_{total} = D_{pend} + D_{PPS} + D_{shaker} + D_{C.E.} \quad (188)$$

$$\Rightarrow D_{total} = \frac{1}{2} \cdot c_{\theta} \cdot (l \cdot \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_s \cdot (\dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot R \cdot \dot{q}^2$$

(189)

Substitui-se (183) e (189) em (12), variando-se as coordenadas generalizadas do sistema, para que se possa encontrar as equações do movimento do mesmo.

Como y_1 é expresso por uma relação de y_2 e y_3 parte-se direto para a coordenada vertical y_2 .

Em relação à y_2 , tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial(L)}{\partial y_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_2} = 0$$

(190)

Sendo assim, faz-se:

$$\frac{\partial(L)}{\partial \dot{y}_2} = (M + m) \cdot \dot{y}_2 + m \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \sin(\theta)$$

(191)

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{y}_2} \right) &= \frac{d}{dt} \left((M + m) \cdot \dot{y}_2 + m \cdot \dot{\theta} \cdot l \cdot \sin(\theta) \right) \\ &= (M + m) \cdot \ddot{y}_2 + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin(\theta) + m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) \end{aligned}$$

(192)

Por outro lado tem-se:

$$\frac{\partial(L)}{\partial y_2} = -(M + m) \cdot g - k_2 \cdot y_2 + k_2 \cdot y_3 - K \cdot \dot{q} \quad (193)$$

e,

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{y}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}_2} \left(\frac{1}{2} \cdot c_\theta \cdot (l \cdot \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_s \cdot (\dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot R \cdot \dot{q}^2 \right) \quad (194)$$

$$\therefore \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_2} = c \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) \quad (195)$$

Dessa forma, em relação à y_2 , tem-se:

$$(M + m) \cdot \ddot{y}_2 + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin(\theta) + m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) + (M + m) \cdot g + k_2 \cdot y_2 - k_2 \cdot y_3 + K \cdot \dot{q} + c \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) = 0 \quad (196)$$

De maneira análoga, em relação à y_3 , tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{y}_3} \right) - \frac{\partial(L)}{\partial y_3} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_3} = 0 \quad (197)$$

Sendo assim, faz-se:

$$\frac{\partial(L)}{\partial \dot{y}_3} = m_s \cdot \dot{y}_3 \quad (198)$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{y}_3} \right) = \frac{d}{dt} (m_s \cdot \dot{y}_3) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{y}_3} \right) = m_s \cdot \ddot{y}_3 \quad (199)$$

Por outro lado tem-se:

$$\frac{\partial(L)}{\partial y_3} = -k_2 \cdot y_3 + k_2 \cdot y_2 - m_s \cdot g - k_s \cdot y_3 + K \cdot \dot{q} \quad (200)$$

e,

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{y}_3} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}_3} \left(\frac{1}{2} \cdot c_\theta \cdot (l \cdot \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_s \cdot (\dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot R \cdot \dot{q}^2 \right) \quad (201)$$

$$\therefore \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_3} = -c \cdot \dot{y}_2 + c \cdot \dot{y}_3 + c_s \cdot \dot{y}_3 \quad (202)$$

Dessa forma, em relação à y_3 , tem-se:

$$m_s \cdot \ddot{y}_3 + k_2 \cdot y_3 - k_2 \cdot y_2 + m_s \cdot g + k_s \cdot y_3 - K \cdot \dot{q} - c \cdot \dot{y}_2 + c \cdot \dot{y}_3 + c_s \cdot \dot{y}_3 = 0 \quad (203)$$

De maneira análoga desenvolve-se a expressão (12), em relação ao movimento rotacional, ou seja, θ e $\dot{\theta}$, sendo assim tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial(L)}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad (204)$$

Sendo assim, faz-se:

$$\frac{\partial(L)}{\partial \dot{\theta}} = m \cdot \dot{\theta} \cdot l^2 + m \cdot \dot{y}_2 \cdot l \cdot \sin(\theta) \quad (205)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (m \cdot \dot{\theta} \cdot l^2 + m \cdot l \cdot \dot{y}_2 \cdot \sin(\theta)) \quad (206)$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{\theta}} \right) = m \cdot \ddot{\theta} \cdot l^2 + m \cdot l \cdot \ddot{y}_2 \cdot \sin(\theta) + m \cdot l \cdot \dot{y}_2 \cdot \cos(\theta) \quad (207)$$

Por outro lado tem-se:

$$\frac{\partial(L)}{\partial \theta} = m \cdot \dot{y}_2 \cdot \theta \cdot l \cdot \cos(\theta) - m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\theta) - k_1 \cdot \theta \quad (208)$$

e,

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{1}{2} \cdot c_{\theta} \cdot (l \cdot \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_s \cdot (\dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot R \cdot \dot{q}^2 \right) \quad (209)$$

$$\therefore \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = c_{\theta} \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} \quad (210)$$

Dessa forma, em relação ao movimento rotacional do sistema, tem-se:

$$m \cdot \ddot{\theta} \cdot l^2 + m \cdot l \cdot \ddot{y}_2 \cdot \sin(\theta) + m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\theta) + k_1 \cdot \theta + c_{\theta} \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} = 0 \quad (211)$$

De maneira análoga novamente desenvolve-se a expressão (2), em relação à carga elétrica instantânea do circuito RLC, ou seja, q e $\dot{q}$, sendo assim tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial(L)}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = e_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t) \quad (212)$$

Substituindo o valor da L na expressão (212), tem-se:

$$\frac{\partial(L)}{\partial \dot{q}} = L \cdot \dot{q} - K \cdot y_2 + K \cdot y_3 \quad (213)$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} (L \cdot \dot{q} - K \cdot y_2 + K \cdot y_3) = L \cdot \ddot{q} - K \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) \quad (214)$$

Por outro lado tem-se:

$$\frac{\partial(L)}{\partial q} = \frac{\partial \left(-\frac{C_0 \cdot q}{2(1 + C_0 \cdot \alpha_3 \cdot q^2)} \right)}{\partial q} \quad (215)$$

$$\therefore \frac{\partial(L)}{\partial q} = \frac{C_0^2 \cdot \alpha_3 \cdot q^2 - C_0}{2(1 + C_0 \cdot \alpha_3 \cdot q^2)^2} \quad (216)$$

e,

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} c_\theta (l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} c (\dot{y}_2 - \dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} c_s (\dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} R \dot{q}^2 \right) \quad (217)$$

$$\therefore \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = R \dot{q} \quad (218)$$

Dessa forma, em relação à carga elétrica instantânea do circuito RLC, obtêm-se:

$$L \cdot \ddot{q} - K \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) + \frac{C_0 - C_0^2 \cdot \alpha_3 \cdot q^2}{2(1 + C_0 \cdot \alpha_3 \cdot q^2)^2} + R\dot{q} = e_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t) \quad (219)$$

Sendo assim, obtêm-se o seguinte sistema de equações do movimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} (M + m) \cdot \ddot{y}_2 + m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin(\theta) + m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) + \\ + (M + m) \cdot g + k_2 \cdot y_2 - k_2 \cdot y_3 + K \cdot \dot{q} + c \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) = 0 \\ \\ m_s \cdot \ddot{y}_3 + k_2 \cdot y_3 - k_2 \cdot y_2 + m_s \cdot g + k_s \cdot y_3 + \\ - K \cdot \dot{q} - c \cdot \dot{y}_2 + c \cdot \dot{y}_3 + c_s \cdot \dot{y}_3 = 0 \\ \\ m \cdot \ddot{\theta} \cdot l^2 + m \cdot l \cdot \ddot{y}_2 \cdot \sin(\theta) + \\ + m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\theta) + k_1 \cdot \theta + c_\theta \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} = 0 \\ \\ L \cdot \ddot{q} - K \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) + \frac{C_0 - C_0^2 \cdot \alpha_3 \cdot q^2}{2(1 + C_0 \cdot \alpha_3 \cdot q^2)^2} + R\dot{q} = e_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t) \end{array} \right. \quad (220)$$

Isolando as acelerações e fazendo $(M+m) = M_t$, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y}_2 = \left[\frac{m \cdot \sin^2(\theta)}{[(M_t) - m \cdot \sin^2(\theta)]} + 1 \right] \cdot \left[-\frac{m \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta)}{(M_t)} - \frac{k_2 \cdot (y_2 - y_3)}{(M_t)} - \frac{K \cdot \dot{q}}{(M_t)} - \frac{c \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_3)}{(M_t)} \right] \\ + \frac{\sin(\theta)}{((M_t) - m \cdot \sin^2(\theta)) \cdot (M_t)} \cdot \left[\frac{k_1 \cdot \theta + l^2 \cdot c_\theta \cdot \dot{\theta}}{l} \right] - g \\ \\ \ddot{y}_3 = \frac{1}{m_s} \cdot [k_2 \cdot (y_2 - y_3) - k_s \cdot y_3 + K \cdot \dot{q} + c \cdot \dot{y}_2 - (c + c_s) \cdot \dot{y}_3] - g \\ \\ \ddot{\theta} = \frac{\sin(\theta)}{(M_t) - m \cdot \sin^2(\theta)} \cdot \left[m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) + \frac{k_2 \cdot (y_2 - y_3)}{l} + \frac{K \cdot \dot{q}}{l} + \frac{c \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_3)}{l} \right] \\ + \frac{1}{((M_t) - m \cdot \sin^2(\theta)) \cdot m} \cdot \left[-\frac{k_1 \cdot \theta}{l^2} - c_\theta \cdot \dot{\theta} \right] \\ \\ \ddot{q} = \frac{1}{L} \cdot \left[K \cdot (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) - \frac{C_0 - C_0^2 \cdot \alpha_3 \cdot q^2}{2 \cdot (1 + C_0 \cdot \alpha_3 \cdot q^2)^2} - R\dot{q} + e_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right] \end{array} \right. \quad (221)$$

Com o objetivo de simular computacionalmente esse sistema, descrito pela expressão (221), há a necessidade de reescrevê-lo em variáveis de estado, sendo assim, faz-se uma troca de variáveis.

Seja, $x_1 = y_2, x_2 = \dot{y}_2, x_3 = y_3, x_4 = \dot{y}_3, x_5 = \theta, x_6 = \dot{\theta}, x_7 = q$ e $x_8 = \dot{q}$, ao substituir-se em (224), obtêm-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = \left[\frac{m \cdot \sin^2(x_5)}{[(M_t) - m \cdot \sin^2(x_5)]} + 1 \right] \cdot \left[-\frac{m \cdot l \cdot x_6^2 \cdot \cos(x_5)}{(M_t)} - \frac{k_2 \cdot (x_1 - x_3)}{(M_t)} - \frac{K \cdot x_8}{(M_t)} - \frac{c \cdot (x_2 - x_4)}{(M_t)} \right] \\ \quad + \frac{\sin(x_5)}{((M_t) - m \cdot \sin^2(x_5)) \cdot (M_t)} \cdot \left[\frac{k_1 \cdot x_5 + l^2 \cdot c_\theta \cdot x_6}{l} \right] - g \\ \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{m_s} \cdot [k_2 \cdot (x_1 - x_3) - k_s \cdot x_3 + K \cdot x_8 + c \cdot x_2 - (c + c_s) \cdot x_4] - g \\ \\ \dot{x}_6 = \frac{\sin(x_5)}{(M_t) - m \cdot \sin^2(x_5)} \cdot \left[m \cdot x_6^2 \cdot \cos(x_5) + \frac{k_2 \cdot (x_1 - x_3)}{l} + \frac{K \cdot x_8}{l} + \frac{c \cdot (x_2 - x_4)}{l} \right] \\ \quad + \frac{1}{((M_t) - m \cdot \sin^2(x_5)) \cdot m} \cdot \left[-\frac{k_1 \cdot x_5}{l^2} - c_\theta \cdot x_6 \right] \\ \\ \dot{x}_8 = \frac{1}{L} \cdot \left[K \cdot (x_2 - x_4) - \frac{c_0 - c_0^2 \cdot \alpha_3 \cdot x_7^2}{2 \cdot (1 + c_0 \cdot \alpha_3 \cdot x_7^2)^2} - R x_8 + e_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right] \end{array} \right. \quad (222)$$

A seguir, discute-se a análise paramétrica destes modelos.

3 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesse capítulo serão apresentados resultados das simulações numéricas de alguns modelos do capítulo 2.

Dada a relevância do modelo matemático III (**plataforma oscilante vertical com pêndulo invertido e excitação harmônica do suporte**), referido no capítulo anterior, para com o tema central da dissertação, apresentaremos os resultados obtidos por meio de simulações numéricas.

Os parâmetros utilizados nas simulações estão identificados, a seguir e estão de acordo com BALTHAZAR et al. (2010), BALTHAZAR et al. (2011), PICCIRILLO et al. (2009) e XU et al (2007), onde

$M = 1 \text{ kg}$ (massa da PPS);

$m = 0,354 \text{ kg}$ (massa do pêndulo);

$l = 0,3166 \text{ m}$ (comprimento da haste pendular);

$k_1 = 0,3156 \text{ N/rad}$ (rigidez da mola torcional);

$k_3 = 0,960999 \text{ N/m}$ (rigidez da mola vertical);

$c = 0,313 \text{ N.s/m}$ (amortecimento da PPS);

$c_{\theta} = 0,0614 \text{ N.s/m}$ (amortecimento do pêndulo);

$A = 1,5 \text{ N}$ (amplitude da força de excitação);

$\omega = 5,3 \text{ Hz}$ (frequência da força de excitação);

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (aceleração da gravidade).

A seguir, exibem-se estes resultados:

3.1 RETRATOS DE FASE

Segundo KOÇAK e HALE (1991) e THOMPSON e STEWART (1991), plotando-se um ponto a cada instante de tempo em um sistema de coordenadas ortogonais, onde cada coordenada dependente representa uma das variáveis que compõem o sistema, origina-se o retrato de fase do sistema, ou seja, o conjunto destes pontos origina uma órbita ou trajetória de fase.

Nas Figuras (3.1-1A) e (3.1-1B), temos o retrato de fase do deslocamento vertical da PPS, Y , em relação à velocidade vertical, $\dot{Y}$. Ao observar o retrato, fica evidente que a trajetória da PPS é bastante irregular, dada a presença de não conformidades ao movimento, fazendo com que se apresente um déficit de desempenho no sistema, na forma de vibrações excessivas e indesejadas.

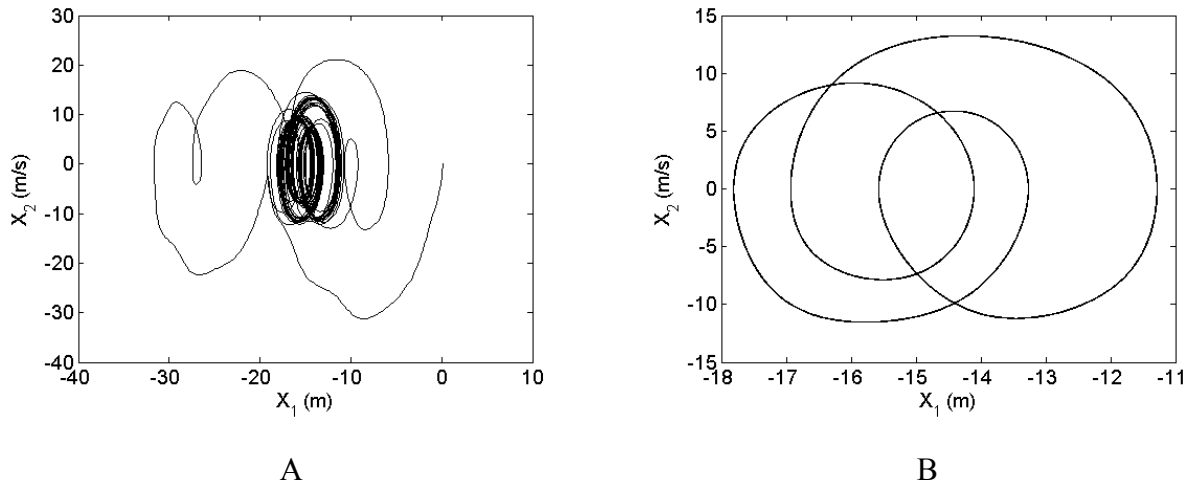


Figura (3.1-1) – Retrato de Fase do Deslocamento Vertical em função da Velocidade Vertical, (A) com transientes e (B) sem os transientes.

De maneira análoga, nas Figuras (3.1-1A) e (3.1-1B), o retrato de fase do deslocamento angular, θ , pela velocidade angular $\dot{\theta}$, também apresenta não conformidades no seu movimento, o que é traduzido na forma de perda de desempenho do sistema pelo mesmo motivo, vibrações excessivas e indesejadas.

Sendo assim, fica clara a necessidade de se aplicar um controle no sistema para que se estabilizem seus deslocamentos vertical e angular.

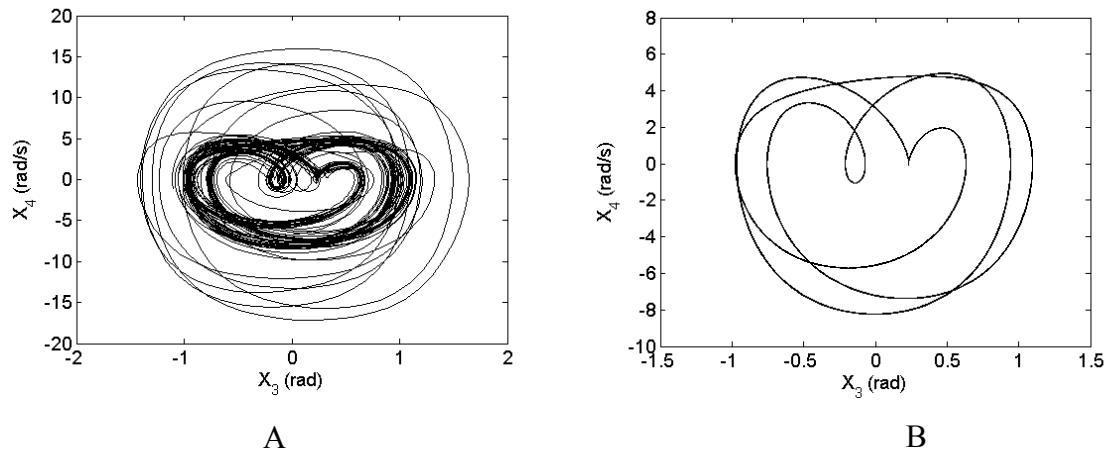


Figura (3.1-2) – Retrato de Fase do Deslocamento Angular em função da Velocidade Angular, (A) com transientes e (B) sem transientes.

3.2 HISTÓRICOS TEMPORAIS DE DESLOCAMENTOS

Os históricos dos deslocamentos angular e vertical, são gráficos que descrevem o comportamento do sistema em função do tempo, ou seja, plota-se a posição da PPS (Figura (3.2-1)) e a posição do pêndulo (Figura(3.2-2)) em cada instante de tempo.

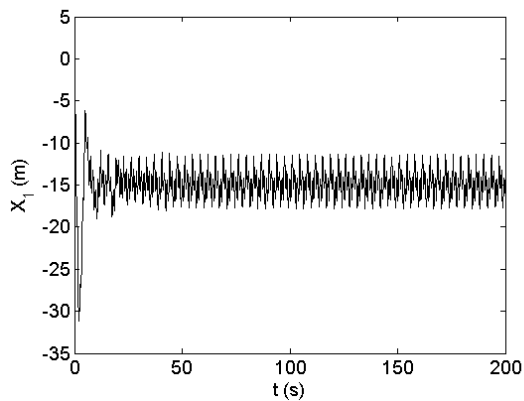


Figura (3.2-1) – Histórico do Deslocamento Vertical.

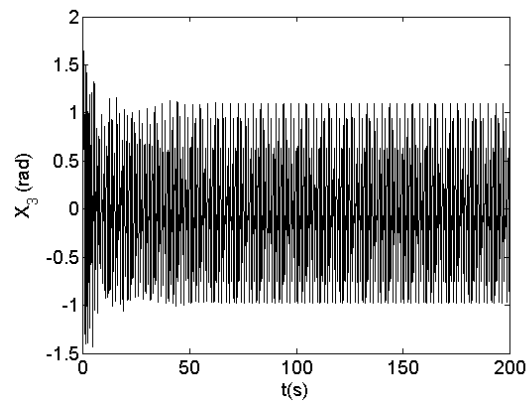


Figura (3.2-2) – Histórico do Deslocamento Angular.

Ainda em relação à relevância das modelagens matemáticas apresentadas no capítulo anterior, o modelo matemático IV, também possui importantes características a serem exploradas, sendo assim, apresentaremos os resultados obtidos por meio de simulações numéricas.

Os parâmetros utilizados nas simulações estão identificados a seguir, e estão de acordo com MARQUES et al (2012), BALTHAZAR et al (2010), BALTHAZAR et al (2011), PICCIRILLO et al (2009) e XU et al (2007), onde $M = 125$ kg (massa da PPS); $m = 5,354$ kg (massa do pêndulo); $l = 0,3166$ m (comprimento da haste pendular); $k = 0,430999$ e $h = 5,9$, (rigidez da mola torcional); $k_2 = 0,4535$ N/m (rigidez da mola vertical); $c = 0,7471295$ N.s/m (amort. da PPS); $c_{theta} = 0,195$ N.s/m (amortecimento do pêndulo); $e_0 = 14,6$ V (amplitude da

fonte de tensão); $C_0 = 15,6578$ F; $K=126$ N/A; $L=0.002626$ H; $R = 0,3$ ohms; $\alpha_3 = 3,745$; $\hat{\Omega} = 5,5$ Hz (freq. da força de excitação); $g = 9,81$ m/s² (aceleração da gravidade).

A seguir, exibem-se estes resultados:

3.3 RETRATOS DE FASE

Segundo KOÇAK e HALE (1991) e THOMPSON e STEWART (1991), plotando-se um ponto a cada instante de tempo em um sistema de coordenadas ortogonais, onde cada coordenada dependente representa uma das variáveis que compõem o sistema, origina-se o retrato de fase do sistema, ou seja, o conjunto destes pontos origina uma órbita ou trajetória de fase.

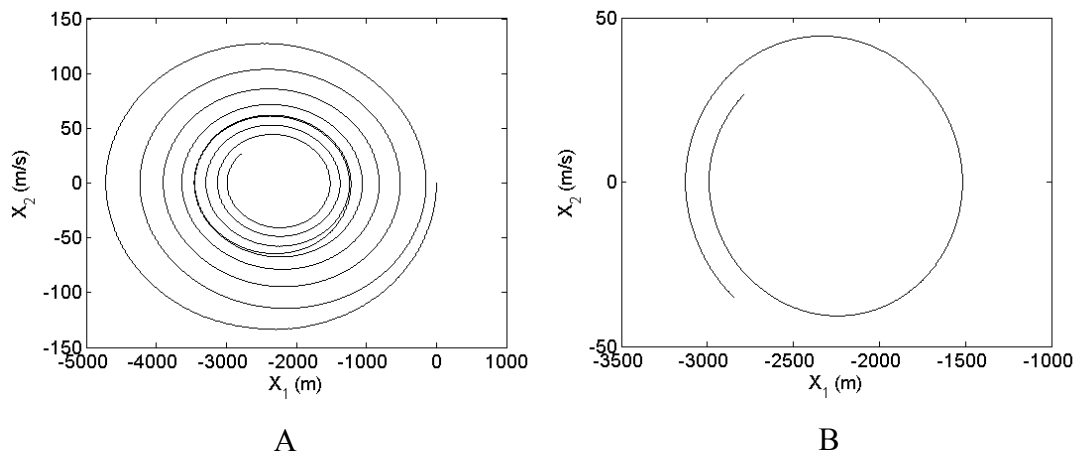


Figura (3.3-1) – Retrato de Fase do Deslocamento Vertical em função da Velocidade Vertical, (A) com transientes e (B) sem os transientes.

Nas Figuras (3.3-1A) e (3.3-1B), temos o retrato de fase do deslocamento vertical da PPS, Y , em relação à velocidade vertical, $\dot{Y}$. Ao observar o retrato, evidencia-se um movimento harmônico que com o tempo vai perdendo energia e tendendo ao repouso.

Ao passo que nas Figuras (3.3-2A) e (3.3-2B), abaixo, o retrato de fase do deslocamento angular θ , pela velocidade angular $\dot{\theta}$, apresenta não conformidades no seu movimento, revelando um possível atrator de segunda ordem e de características simétricas.

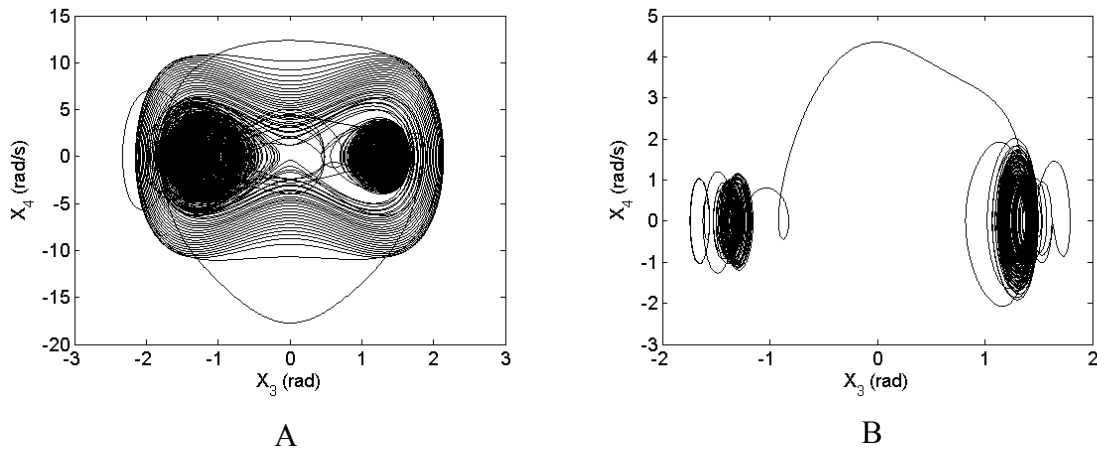


Figura (3.3-2) – Retrato de Fase do Deslocamento Angular em função da Velocidade Angular, (A) com transientes e (B) sem transientes.

A seguir, apresenta-se o retrato de fase referente a carga elétrica instantânea relacionada à fonte de excitação na forma de um vibrador eletrodinâmico, em função da corrente elétrica.

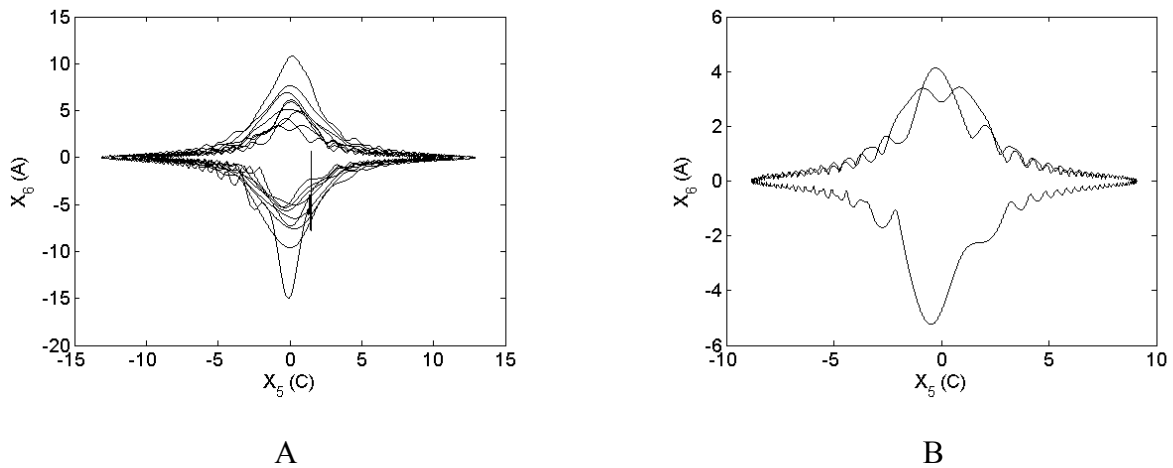


Figura (3.3-3A) – Retrato de Fase da Carga Elétrica Instantânea e função da Corrente, (A) com transientes e (B) sem transientes.

3.4 HISTÓRICOS TEMPORAIS DE DESLOCAMENTOS

Os históricos dos deslocamentos angular, vertical e da carga elétrica instantânea, são gráficos que descrevem o comportamento do sistema em função do tempo, ou seja, plota-se a posição da PPS (Figura (3.4-1)) e a posição do pêndulo (Figura(3.4-2)) e do valor da carga elétrica (Figura (3.4-3)) em cada instante de tempo.

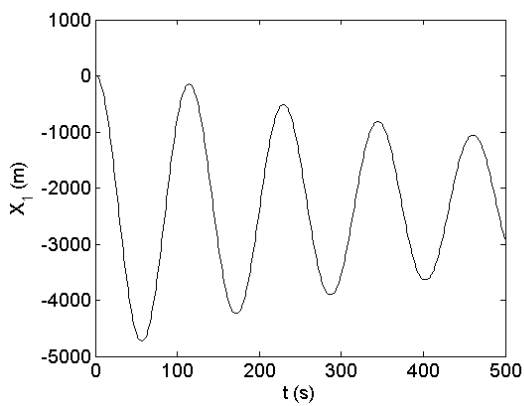


Figura (3.4-1) – Histórico do Deslocamento Vertical.

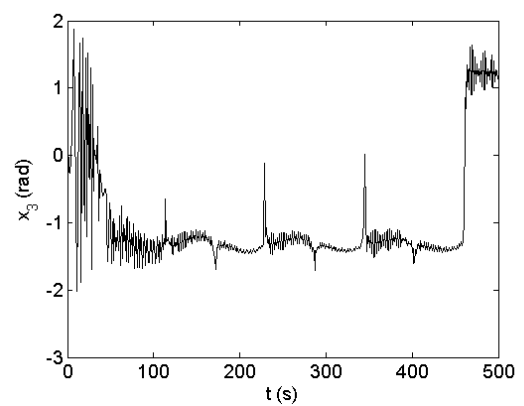


Figura (3.4-2) – Histórico do Deslocamento Angular.

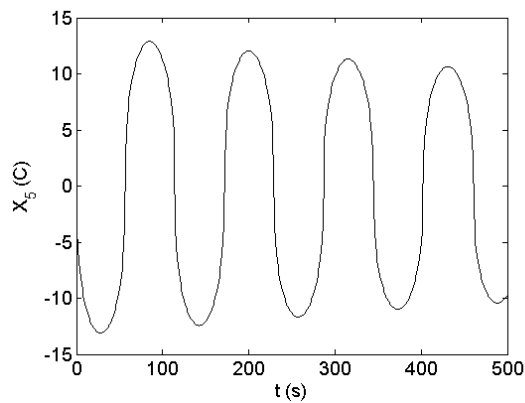


Figura (3.4-3) – Histórico da Carga Elétrica.

Motivados pelo comportamento do pêndulo, Figuras (3.3-2A) e (3.3-2B), fez-se um refinamento nos parâmetros com o intuito de investigar o atrator de segunda ordem. Sendo assim, assumimos os mesmos valores usados anteriormente, com exceção da rigidez k_2 e do amortecimento c . Portanto foram adotados os seguintes parâmetros: $M = 125$ kg (massa da PPS); $m = 5,354$ kg (massa do pêndulo); $l = 0,3166$ m (comprimento da haste pendular); $k = 0,430999$ e $h = 5,9$, (rigidez da mola torcional); $k_2 = 1400$ N/m (rigidez da mola vertical); $c = 77,471295$ N.s/m (amort. da PPS); $c_{\theta} = 0,195$ N.s/m (amortecimento do pêndulo); $e_0 = 14,6$ V (amplitude da fonte de tensão); $C_0 = 15,6578$ F; $K = 126$ N/A; $L = 0.002626$ H; $R = 0,3$ ohms; $\alpha_3 = 3,745$; $\Omega = 5,5$ Hz (freq. da força de excitação); $g = 9,81$ m/s² (aceleração da gravidade).

A seguir, exibem-se estes resultados:

3.5 RETRATOS DE FASE

Segundo KOÇAK e HALE (1991) e THOMPSON e STEWART (1991), plotando-se um ponto a cada instante de tempo em um sistema de coordenadas ortogonais, onde cada coordenada dependente representa uma das variáveis que compõem o sistema, origina-se o retrato de fase do sistema, ou seja, o conjunto destes pontos origina uma órbita ou trajetória de fase.

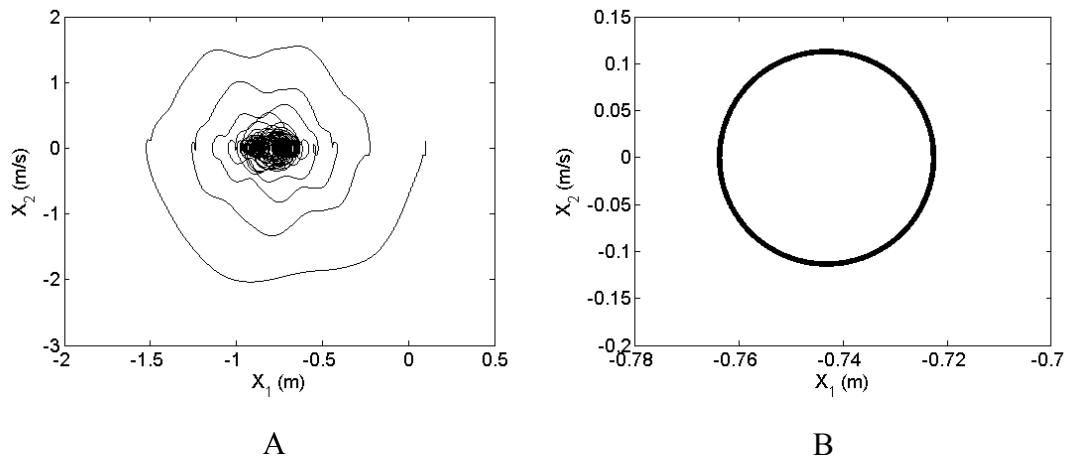


Figura (3.5-1) – Retrato de Fase do Deslocamento Vertical em função da Velocidade Vertical, (A) com transientes e (B) sem transientes.

Segundo as Figuras (3.5-1A) e (3.5-1B), percebe-se que o bloco ainda possui movimento harmônico. De maneira análoga, o aumento da rigidez, k_2 , e do amortecimento, c , fez com que o sistema mantivesse indícios de atratores simétricos, ver Figuras (3.5-2A) e (3.5-2B), abaixo.

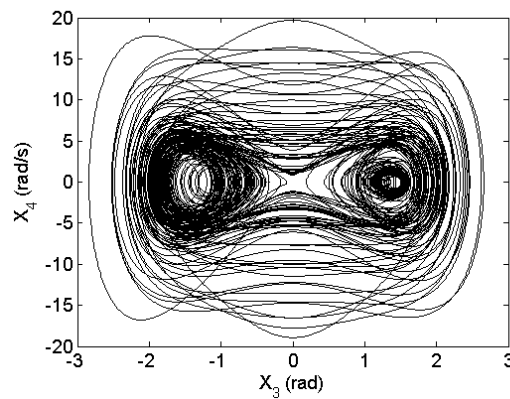


Figura (3.5-2) – Retrato de Fase do Deslocamento Angular em função da Velocidade Angular.

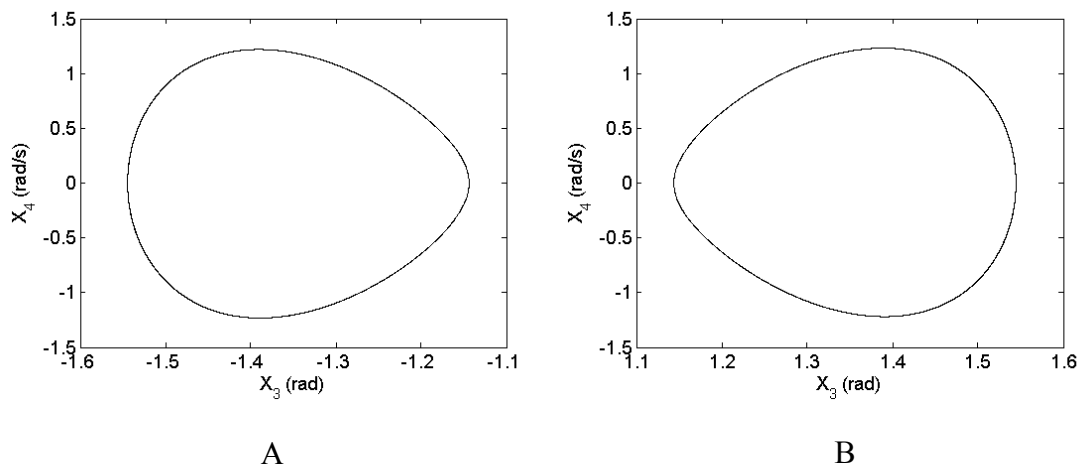


Figura (3.5-3) – Retrato de Fase do Deslocamento Angular em função da Velocidade Angular, (A) ciclo limite simétrico da esquerda e (B) ciclo limite simétrico da direita.

Na sequência apresenta-se o retrato de fase referente a carga elétrica, que se mostra bastante harmônico, como ilustrado nas Figuras (3.5-3A) e (3.5-3B) abaixo.

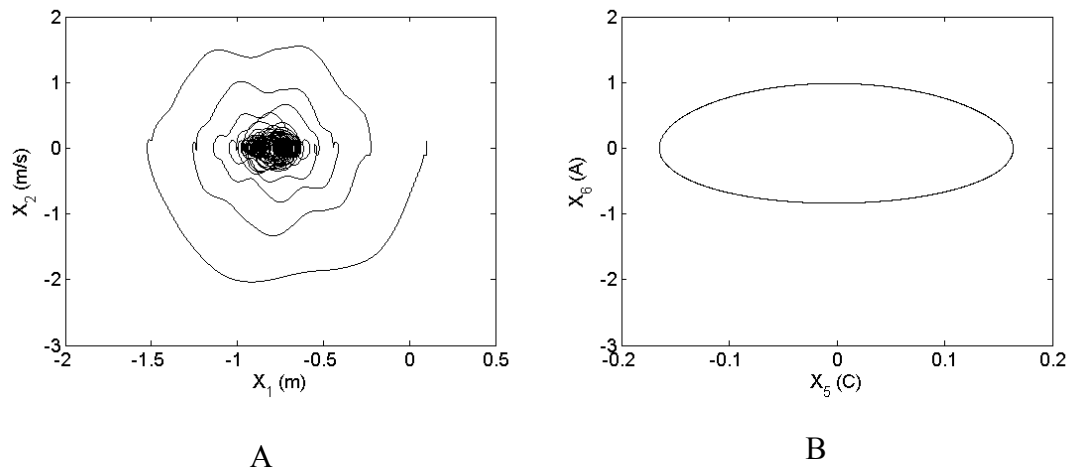


Figura (3.5-4) – Retrato de Fase da Carga Elétrica Instantânea em função da Corrente Elétrica, (A) com transientes e (B) sem transientes.

3.6 HISTÓRICOS TEMPORAIS DE DESLOCAMENTOS

Os históricos dos deslocamentos angular, vertical e da carga elétrica instantânea, são gráficos que descrevem o comportamento do sistema em função do tempo, ou seja, plota-se a posição da PPS (Figura (3.6-1A) e Figura (3.6-1B)) e a posição do pêndulo (Figura(3.6-2A) e Figura(3.6-2B)) e quantidade de carga elétrica (Figura (3.6-3A) e Figura(3.6-2B)) em cada instante de tempo.

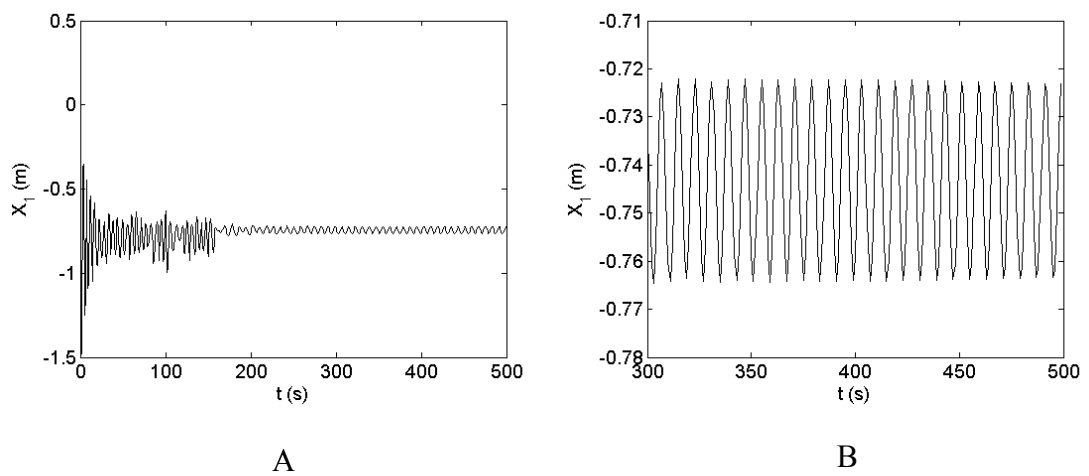


Figura (3.6-1) – (A) Histórico Temporal do Deslocamento Vertical e (B) Zoom na região de 300 s a 500 s.

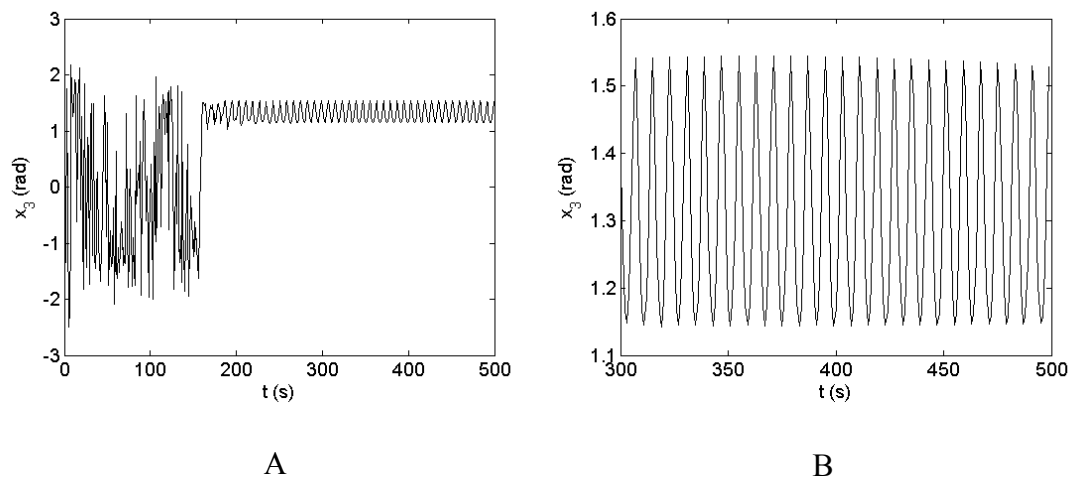


Figura (3.6-2) – (A) Histórico Temporal do Deslocamento Angular e (B) Zoom na região de 300 s a 500 s.

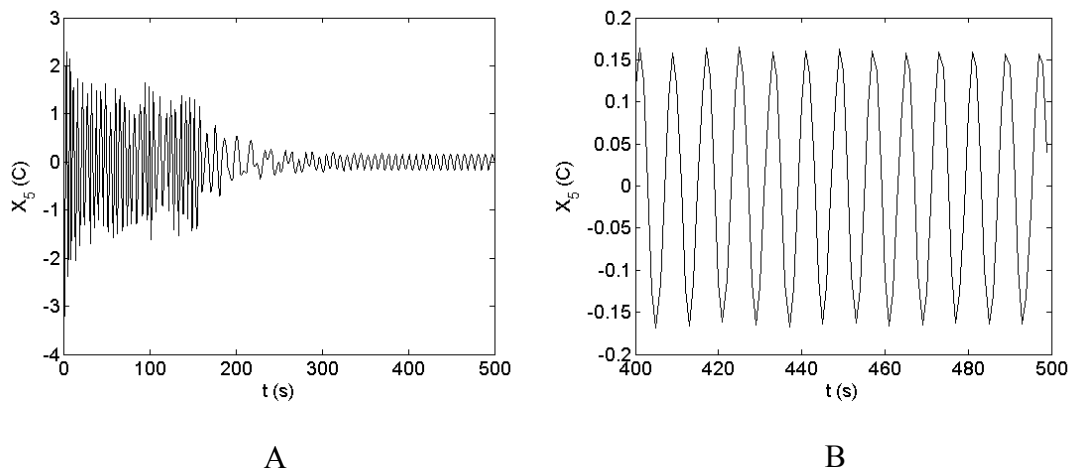


Figura (3.6-3) – (A) Histórico Temporal da Carga Elétrica e (B) Zoom na região de 400 s a 500 s.

4 PROJETO DE CONTROLE

4.1 CONTROLE APLICADO PARA O SISTEMA DINÂMICO REFERENTE AO MODELO III

Segundo, por exemplo, ILIUK et al (2011), o verdadeiro objetivo é encontrar o parâmetro de controle u , retroalimentando o sistema de forma a alterar sua energia de oscilação, utilizando-se do método proposto por TERESHKO (2011). A ideia principal é que a resposta do sistema controlado resulte em uma órbita assintoticamente estável.

Ao inserir o controle, obtém-se o seguinte sistema:

$$\dot{x} = A(x) + F + u_k \quad (223)$$

Onde u , altera a energia de oscilação com o controle retroalimentado.

$$u = -k \cdot \tanh(v \cdot \dot{x}) \quad (224)$$

Escrevendo o sistema em espaço de estados e inserindo o controle tem-se:

Seja $x_1 = q_y$, $\dot{x}_1 = x_2 = \dot{q}_y$, $x_3 = \theta$ e $\dot{x}_3 = x_4 = \dot{\theta}$. Reescreve-se o sistema da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = \frac{f_1 \cdot l - f_2 \cdot \sin(x_3)}{(M + m) \cdot l - l \cdot \sin^2(x_3)} = 0 \\ \dot{x}_3 = x_4 = 0 \\ \dot{x}_4 = \frac{f_2 \cdot (M + m) - f_1 \cdot m \cdot l \cdot \sin(x_3)}{(M + m) \cdot m \cdot l^2 - m \cdot l^2 \cdot \sin^2(x_3)} - u_k = 0 \end{array} \right.$$

(225)

Onde, $u_k = k \cdot \tanh(v \cdot x_4)$,

$$f_1 = -(M + m) \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) - m \cdot l \cdot x_4^2 \cdot \cos(x_3) - (M + m) \cdot g + k_3 \cdot (A \cdot \sin(\omega \cdot t) - x_1) - c \cdot x_2 \text{ e}$$

$$f_2 = -m \cdot l \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(x_3) - m \cdot g \cdot l \cdot \sin(x_3) - k_1 \cdot x_3 - c_\theta \cdot l^2 \cdot x_4.$$

Para se determinar os parâmetros de controle, k e v , faz-se uma análise dos diagramas de bifurcações, Figuras (4.1-1a) e (4.1-1b), e escolhem-se àqueles que estejam em uma região onde o sistema mostra comportamento periódico. Para esta simulação, toma-se $k=5$ de forma arbitrária, e faz-se v variar.

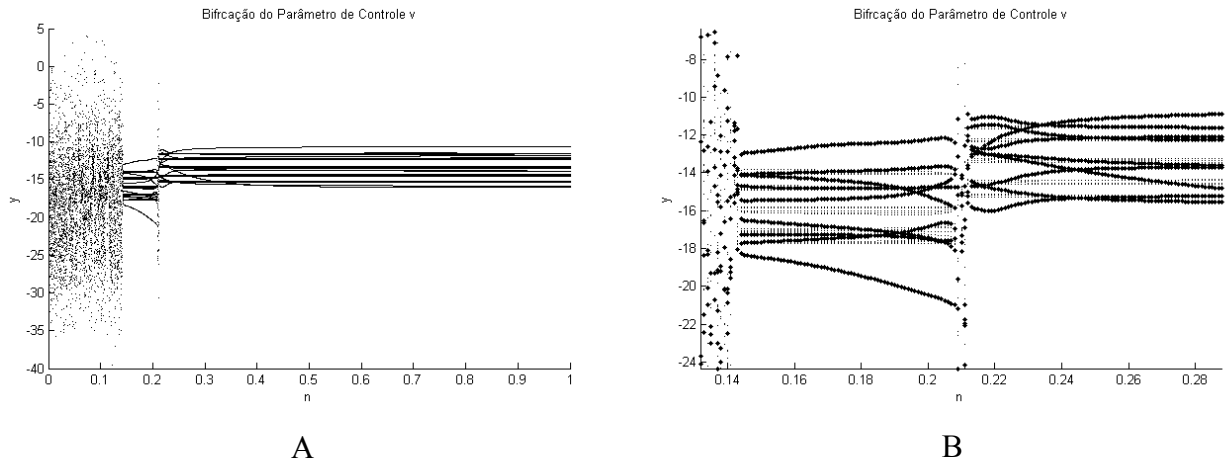


Figura (4.1-1) – (A) Diagrama de Bifurcação do Parâmetro de Controle v e (B) Zoom da Região 0,14 à região 0,28

Para o sistema em estudo utilizou-se de $k=5$ e $v=0,5$, sendo assim, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{f_1 \cdot l - f_2 \cdot \sin(x_3)}{(M + m) \cdot l - l \cdot \sin^2(x_3)} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{f_2 \cdot (M + m) - f_1 \cdot m \cdot l \cdot \sin(x_3)}{(M + m) \cdot m \cdot l^2 - m \cdot l^2 \cdot \sin^2(x_3)} - 5 \cdot \tanh(0,5 \cdot x_4) \end{array} \right.$$

(226)

4.2 DISCUSSÃO SOBRE OS RESULTADOS OBTIDOS COM O CONTROLE ADOTADO

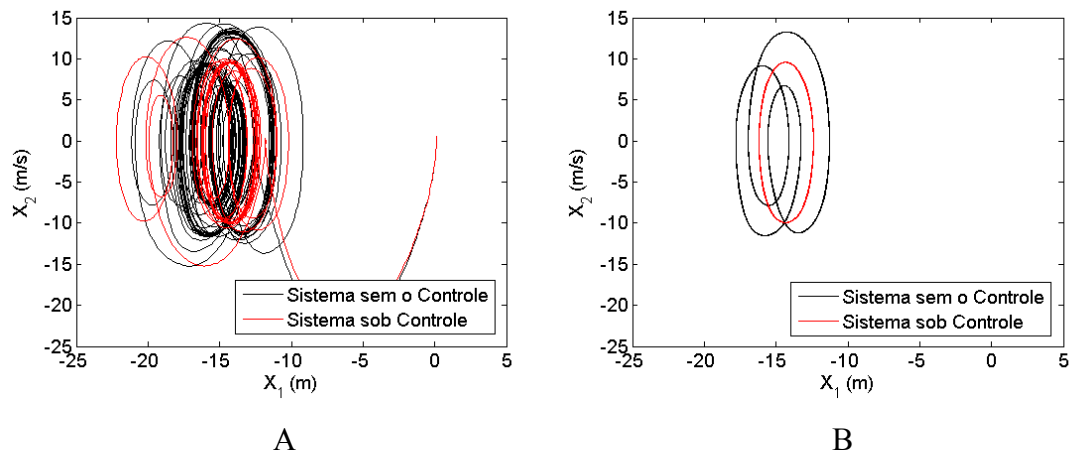


Figura (4.2-1) – Retrato de Fase do Deslocamento Vertical pela Velocidade Vertical Comparando o Sistema sem o Controle (Preto) e o Sistema Controlado (Vermelho), (A) com transientes e (B) sem os transientes.

De acordo com as Figuras (4.2-1A) e (4.2-1B), acima, pode-se observar a boa aplicação do controle no que diz respeito ao deslocamento da PPS (Plataforma Pendular Suspensa), que inicialmente apresentava excessiva irregularidade em seu movimento (preto) e que após o controle, tornou-se muito mais próximo de um movimento harmônico (vermelho).

Quando se observa o comportamento do deslocamento angular do pêndulo, Figuras (4.2-2A) e (4.2-2B) abaixo, a comparação entre o sistema sem o controle de oscilações (preto) e com o controle de oscilações (vermelho), reforça ainda mais a eficácia do controle aplicado ao sistema, dado o comportamento muito mais regular apresentado em sua nova órbita.

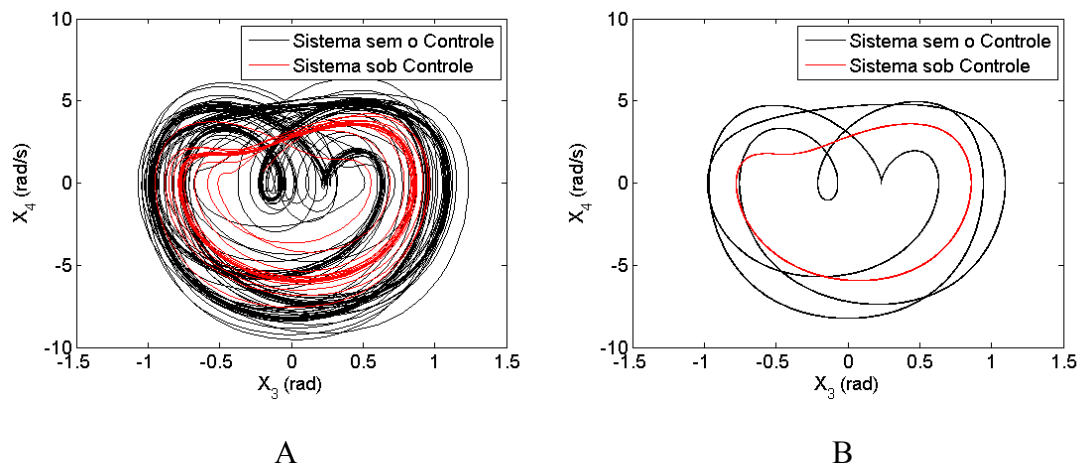


Figura (4.2-2) – Retrato de Fase do Deslocamento Angular pela Velocidade Angular Comparando o Sistema sem o Controle (preto) e o Sistema Controlado (Vermelho), (A) com transientes e (B) sem os transientes.

Ao analisar os históricos comparativos temporais do deslocamento vertical e angular, a menor amplitude de deslocamento referenciada pela cor vermelha nos gráficos (sistema após o controle) é mais um fator que evidencia a eficácia da aplicação do controle no sistema.

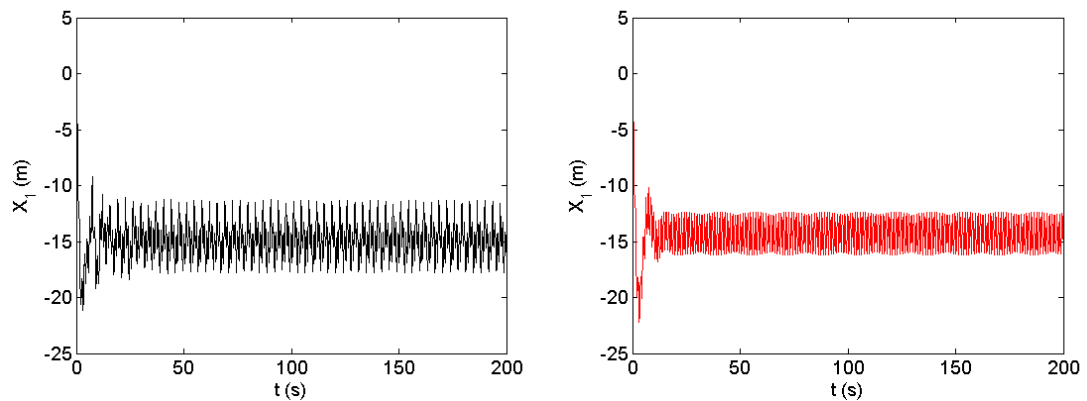


Figura (4.2-3) – Histórico Temporal do Deslocamento Vertical, Comparativo entre o Sistema sem o Controle (Preto) e o Sistema Controlado (Vermelho).

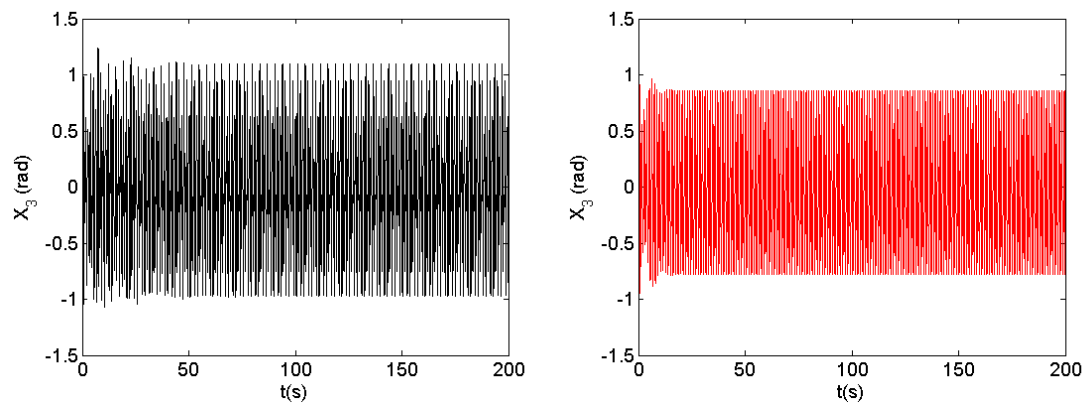


Figura (4.2-4) – Histórico Temporal do Deslocamento Angular, Comparativo entre o Sistema sem o Controle (Preto) e o Sistema Controlado (Vermelho).

4.3 CONCLUSÕES SOBRE O CONTROLE ADOTADO PARA O SISTEMA DINÂMICO REFERENTE AO MODELO MATEMÁTICO III

Após a análise das equações do movimento, mediante as Figuras (3.1-1A), (3.1-1B), (3.1-2A), (3.1-2B), (3.2-1) e (3.2-2), pode-se afirmar que o sistema apresenta movimentos demasiadamente irregulares, fazendo com que o mesmo apresente perda de performance e uma necessidade de controle de suas oscilações. Através do diagrama de bifurcações, Figuras (4.1-1A) e (4.1-1B), estipulou-se os parâmetros de controle ótimos a serem utilizados e por meio das Figuras (4.2-1a), (4.2-1b), (4.2-2a), (4.2-2b), (4.2-3) e (4.2-4) pode-se concluir que o controle proposto por Tereshko (2011), foi bem aplicado, havendo levado o sistema à orbitas harmônicas e controlando o excesso de irregularidades apresentado inicialmente. Sendo assim, pode-se afirmar que o sistema de perfuração apresentado e representado pelo modelo III da Figura (2.3-1) tornou-se uma aproximação eficiente, dado o controle de vibrações que foi aplicado.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O objetivo principal deste trabalho foi a construção de modelos matemáticos que possibilita-se a análise dinâmica de sistemas de certo grau de similaridade com certos processos operacionais de equipamentos para a extração e produção de petróleo, efetuado por navios perfuradores. A discussão apresentada do capítulo 2, desta dissertação, abriu um leque de novos modelos matemáticos que possuem características dinâmicas que envolvem tais processos similares da indústria petrolífera, e dessa forma, pode-se afirmar que as ferramentas necessárias para aprofundar as análises estão sendo construídas.

Após o desenvolvimento dos modelos matemáticos e suas equações do movimento, no capítulo 2, fez-se uma investigação dinâmica, por meio de integração numérica direta, de alguns modelos matemáticos desenvolvidos, sendo estas apresentadas no capítulo 3. Tomando o modelo matemático III (sistema pendular invertido excitado harmonicamente), como referência inicial, por apresentar características dinâmicas necessárias e suficientes para as análises principais, pode-se admiti-lo como uma representação aproximada (esquemática) de um navio perfurador. Após a análise das equações do movimento, mediante as Figuras (3.1-1A), (3.1-1B), (3.1-2A), (3.1-2B), (3.2-1) e (3.2-2), pode-se afirmar que o sistema (modelo matemático III) apresenta movimentos irregulares (não-periódicos), fazendo com que o mesmo apresente perda de performance e a necessidade de controle de suas oscilações.

No capítulo 4, apresenta-se um controle para as oscilações intensas e irregulares do sistema, por meio de um modelo de amortecedor torcional não-linear, de características dinâmicas semelhantes a um amortecedor com fluido magneto-reológico, e que foi inserido no modelo no eixo de oscilação do pêndulo. Os parâmetros de controle do sistema foram definidos a partir da metodologia proposta por TERESHKO (2011).

Através do diagrama de bifurcações, Figuras (4.1-1A) e (4.1-1B), definiram-se os parâmetros de controle ótimos a serem utilizados. Analisando-se os resultados apresentados nas Figuras (4.2-1A), (4.2-1B), (4.2-2A), (4.2-2B), (4.2-3) e (4.2-4) pode-se concluir que o controle proposto por Tereshko (2011), foi bem aplicado, havendo levado o sistema à orbitas periódicas harmônicas e controlando o excesso de irregularidades apresentado inicialmente. Sendo assim, pode-se afirmar que o modelo III representado o sistema de perfuração, Figura (2.3-1), tornou-se uma aproximação eficiente devido ao controle de vibrações que foi aplicado.

Houve ainda, no capítulo 3, uma investigação dinâmica sobre o modelo matemático IV (sistema pendular invertido associado a um excitador eletromecânico), onde encontrou-se indícios de caos homoclínico, mostrando a presença de atratores simétricos no retrato de fase referente ao movimento do pêndulo.

Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, o bloco também chamado de PPS, do modelos IV (sistema pendular invertido associado a um excitador eletromecânico não-linear) e modelo V (sistema pendular invertido associado a excitador eletromecânico não-linear com dois graus de liberdade na translação vertical), apresentados no capítulo II, será incrementado pela adição do grau de liberdade horizontal. Outra modificação pertinente seria a inserção de mais um pêndulo na PPS, tornando mais complexo o modelo, além do acréscimo de motores, com massas desbalanceadas nos dois pêndulos. Uma análise mais aprofundada da dinâmica e a discussão de existência de caos (movimentos caóticos) nos sistemas, também se faz necessária, bem como um projeto de controle do torque.

REFERÊNCIAS

ANEEL, “Atlas de Energia Elétrica do Brasil”, 2009, versão eletrônica disponível em: www.aneel.gov.br/arquivos/PDF/atlas_par1_cap2.pdf, último acesso em 24/02/2012.

AQUINO, A. S., “Controle de Vibração de um Sistema sob Desbalanceamento Rotativo Utilizando Atuador de Memória de Forma”, João Pessoa: Centro de Tecnologia, UFPB- Universidade Federal da Paraíba, 2011, 134 f., Tese (Doutorado).

ARBEX, H. C., “Dinâmica Não-Linear de Sistemas de Levitação Magnética”, Bauru: Faculdade de Engenharia de Bauru, UNESP- Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2012, 139 f., Dissertação de Mestrado.

ARBEX, H. C., BALTHAZAR, J. M., PONTES JR, B. R., FELIX, J. L. P., BRAZIL, R. M. L. R. F., TUSSET, A. M., “On the Nonlinear Behavior of a Maglev System” – XV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, Buzios, RJ – Brasil, 2013.

BALTHAZAR J.M., FELIX J.L.P., “Revisited Nonlinear Non-ideal Vibrations”. In: Vibration Problems ICOVP (Supplement), Technical University of Liberec, Prague, Czech Public, pp.84-89, 2011.

BALTHAZAR J.M., FELIX J.L.P., BRASIL R.M.L.R.F., “On an Energy Transfer and Nonlinear, Non-Ideal and Chaotic Dynamics of a Macro Tuning Fork Beam (TFB, Under an

Electro-Dynamical Shaker Excitation (EDS)” - Pan-American Congress of Applied Mechanics, Foz do Iguaçu, PR – Brasil, 2010.

BALTHAZAR J.M., MOOK D.T., WEBER H.I., BRASIL R.M.L.R.F., Fenili A., BELATO D., FELIX J.L.P., “An overview on Non-Ideal vibrations with limited power supply” - *Mecannica* V.38, pp.613-621, 2003.

BELATO, D., “Não Linearidades do Eletro-Pêndulo” – Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP – Univesidade Estadual de Campinas, 1998, 149 f., Dissertação de Mestrado.

BISHOP, R. H. *The Mechatronics Handbook*, CRC Press, 2002, ISBN: 0849300665.

CASSIANO, J. e BALTHAZAR, J. M., “On Chaotic Behavior of a Fixed Offshore Structure” – *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Volume 19, Issue 01, January 2009.

DE PAULA, A. S., “Controle de Caos Multiparâmetros a partir do Método OGY: Aplicação em um Pêndulo Não-Linear”, Rio de Janeiro: COOPE/UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007, 103 f., Dissertação de Mestrado.

DE PAULA A.S, SAVI M.A., WIERCIGROCH M., PAVLOVSKAIA E., “Bifurcation Control of a Parametric Pendulum”, *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 2011.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H., *Sistemas de Controle Modernos*, 8a. ed., LTC Editora, Rio de Janeiro, 2001.

ESTEVES, N. M. C., “Isolamento Sísmico com Sistemas Pendulares com Atrito”, Lisboa: Instituto Superior Técnico: Universidade Técnica de Lisboa, Engenharia Civil, 2010, 101 f., Dissertação (Mestrado).

FARINHA P., “Navio Perfurador Científico D/V CHIKYU – Science and Technology”, disponível em: <http://farinha0.tripod.com/id126.html>, última visualização em 26/08/2011.

ILIUK, I., BALTHAZAR, J. M., TUSSET, A. M., PONTES JR, B. R., FELIX, J. L. P., “On a Vibrating Model of Energy Harvester, with Nonlinear Piezoelectric Coupling and Excited by a Non-ideal Motor”, Proceedings of 11th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, December 5-8, 2011, Lodz, Poland, p.391-396, ISBN: 978-83-7283-448.

IOSSAQUI, J. G., “Uso de Absorvedores de Vibrações Eletromecânicos Lineares e Não-Lineares em Sistemas Não-Lineares e Não-Ideais”, Bauru: Faculdade de Engenharia, UNESP-Universidade Estadual Paulista, 2009, 106 p., Dissertação (Mestrado).

KIBBLE T.W.B., Mecânica Clássica, 1932, trad. Rocha Barros, A.L., Redondo, D.M., Ed. Polígono, 1970.

KOLADE, O., “Deepwater Drilling Problems”, Master’s Thesis, Faculty of Science and Technology, Universitetet Stavanger, 2009.

LEE Y., “A Study of Parametric Excitation Applied to a MEMS Tuning Fork Gyroscope”, Tese de Doutorado, Faculty of the Graduate School – University of Missouri – Columbia, 2007.

LOPES F.C., “O Conflito entre a Exploração Offshore de Petróleo e a Atividade Pesqueira Artesanal”, Monografia de Bacharelado, Instituto de Economia, UFRJ, 2004.

MARQUES, C. E., BALTHAZAR, J. M., FELIX, J. L. P., PONTES JR., B. R., TUSSET, A. M., “Comportamento Dinâmico Não-Linear e Controle de um Sistema Pendular Invertido”, CONEM, São Luís – Maranhão – Brasil, 2012.

MARQUES, C. E., BALTHAZAR, J. M., PONTES JR., B. R., FELIX, J. L. P., TUSSET, A. M., “Comportamento Dinâmico Não-Linear de um ‘Sistema Pendular Invertido’, Modelado Matematicamente com Atuação Externa de uma Fonte de Energia de Potência Limitada”, CNMAC, Águas de Lindóia – São Paulo – Brasil, 2012.

MOON, F.C., “Applied Dynamics” Jhon Wiley & Son Canada, 1987.

NAYFEH, A. H., BALACHANDRAN, B., “Applied Nonlinear Dynamics” Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 1995.

NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. Nonlinear Oscillations. New Jersey: Interscience, 1979.

PERUZZI, N.J., BALTHAZAR, J. M., Pontes, B.R., BRASIL, R. M. L. R. F., “Nonlinear dynamics and control of an ideal/non-ideal load transportation system with periodic coefficients”, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, v.2, p.32 - 39, 2007.

PONTES JR, B. R. In: Notas de aula do curso de Vibrações Mecânicas, Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UNESP/FEB, 1º semestre de 2011.

PREUMONT, A. Mechatronics Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems. Netherlands: Springer, 1999.

PRIYA, S., INMAN, D.J., Energy Harvesting Technologies, Springer, New York, 2009.

RAO, S. S. Mechanical Vibrations. (3th ed.), Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

STROGATZ, S.H., Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering, New Jersey: Addison Wesley, 1994.

THOMPSON, J.M.T.; STEWART, H.B., Nonlinear Dynamics and Chaos. 8º ed. Chichester: John Wiley & Sons LTD, 2002.

VYAS, A. e BAJAJ, A. K., “Dynamics of Autoparametric Vibration Absorber Using Multiple Pendulums”, Journal of Sound and Vibration 246(1), (2001), 115-135.

XU X., PAVLOVSKAIA E., WIERCIGROCH M., ROMEO F., LENCI S., “Dynamic Interactions Between Parametric Pendulum and electro-dynamical shaker” – ZAMM, 87, nº2, pp. 172-186, 2007.

XU X., WIERCIGROCH M., CARTMELL M. P., “Rotating Orbits of a Parametrically-Excited Pendulum” – Science Direct – Chaos, Solitons and Fractals, 1538-1548pp., June, 2004.

XU X., WIERCIGROCH M., PAVLOVSKAIA E., LENCI S., CERRI M. N., ROMEO F., “Modeling of Dynamic Interactions between an Electro-Dynamic Shaker and a Parametric Pendulum” – IMA, International Conference Recent Advances on Nonlinear Mechanics, Aberdeen – Scotland, 2005.

SUMULA CURRICULAR

Disciplinas Cursadas no Mestrado

Disciplinas	Ano	Período Letivo	Créditos	Carga Horária	Conceito
Dinâmica Não-Linear e Caos	2011	1º Semestre	8	120	A
Método dos Elementos Finitos	2011	1º Semestre	8	120	A
Vibrações Mecânicas	2011	1º Semestre	8	120	A
Acústica Aplicada	2011	2º Semestre	8	120	A
Controle de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares e Caóticos	2011	2º Semestre	8	120	A
Modelagem de Sistemas Mecânicos	2011	2º Semestre	8	120	A
Interação Modal em Sistemas Oscilatórios Não-Lineares	2011	1º Semestre	8	120	A
Pesquisa Científica	2012	1º Semestre	4	60	A

Trabalhos Aceitos Em Eventos Com Arbitragem

- ★ **MARQUES, C. E.** ; BALTHAZAR, J. M. ; FELIX, J. L. P. ; PONTES JR., B. R. ; TUSSET, A. M. . COMPORTAMENTO DINÂMICO NÃO-LINEAR E CONTROLE DE UM SISTEMA PENDULAR INVERTIDO. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA (CONEM), 2012, SÃO LUIS - BRASIL.
- ★ **MARQUES, C. E.** ; BALTHAZAR, J. M. ; PONTES JR., B. R. ; FELIX, J. L. P. ; TUSSET, A. M. . COMPORTAMENTO DINÂMICO NÃO-LINEAR E CONTROLE DE UM SISTEMA 'MONO-PENDULAR' INVERTIDO, MODELADO MATEMATICAMENTE COM ATUAÇÃO EXTERNA DE UMA FONTE DE ENERGIA DE POTÊNCIA LIMITADA. In: XXXIV CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL (CNMAC), 2012, Águas de Lindóia, SP - BRASIL.
- ★ TUSSET, A. M., LENZ, W. B., PICCIRILLO, V., **MARQUES, C. E.**, BALTHAZAR, J.M. . CONTROL OF AN ELECTROMECHANICAL PENDULUM EMBARKED WITH MAGNETORHEOLOGICAL FLUID. In: 22nd INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING (COBEM) NOVEMBER 3-7, 2013, RIBEIRÃO PRETO, SP – BRASIL.

- ★ BALTHAZAR, J. M., **MARQUES, C. E.**, TUSSET, A. M., BUENO, A., COLON, D., DE PONTES, B. R., SILVEIRA, M., FELIX, J. L. P. . In: ON CONTROL OF AN ELETRO-PENDULUM SUSPENDED PLATFORM IN A DRILL SHIP OIL. 12TH CONFERENCE DYNAMICAL SYSTEMS – THEORY AND APPLICATIONS - LODZ, POLAND, 2013.

Trabalhos Submetidos

- ★ BALTHAZAR J.M., **MARQUES, C. E.**, “ON THE DYNAMICS OF AN INVERTED PENDULUM, FIXED TO AN INERTIAL PLATFORM AND SUSPENDED BY A SPRING AND A DAMPER AND EXCITED BY A HARMONIC FORCE IN ITS BASIS” - JOURNAL OF COMPUTATIONAL AND NONILNEAR DYNAMICS, ASME, 2013.