

RESSALVA

Atendendo solicitação da autora, o texto completo desta dissertação será disponibilizado somente a partir de 13/10/2024.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro - SP

Carla Patrícia Ferreira dos Santos

Fundamentos de Geometria e Astronomia Esférica

**Rio Claro - SP
2020**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro - SP

Fundamentos de Geometria e Astronomia Esférica

Carla Patrícia Ferreira dos Santos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro - SP.

Orientador
Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá

**Rio Claro - SP
2020**

S237f Santos, Carla Patrícia Ferreira dos
Fundamentos de Geometria e Astronomia Esférica / Carla Patrícia
Ferreira dos Santos. -- Rio Claro, 2020
170 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual
Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
Claro
Orientador: Lucas Antonio Caritá

1. Geometria Esférica. 2. Trigonometria Esférica. 3. Geometrias
não Euclidianas. 4. Astronomia de Posição. 5. Astronomia Esférica. I.
Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Carla Patrícia Ferreira dos Santos

FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA E ASTRONOMIA ESFÉRICA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá
Orientador

Prof. Dr. João Peres Vieira
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP)

Prof. Dr. Francisco Carlos Rocha Fernandes
Universidade do Vale do Paraíba (UNIVAP)

Rio Claro - SP, 13 de outubro de 2020

*Aos meus pais e irmão que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para
que eu chegasse até esta etapa da minha vida.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitária, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

À Unesp pela oportunidade de fazer o curso.

Ao meu orientador Lucas Antonio Caritá pelas horas dedicadas a mim, pelo suporte, pelas correções e incentivos.

À professora Marta Cilene Gadotti por me auxiliar no começo dessa caminhada.

À minha família por sempre acreditarem em mim.

Aos meus pastores pelas orações.

Aos meus amigos pelas horas de consolo, incentivo e alegrias.

Aos membros da banca pela gentileza, pelas correções e sugestões.

*“Se vi mais longe,
foi porque estava sobre os ombros de gigantes”.*
Isaac Newton

Resumo

Os portugueses, diante dos desafios da navegação, proporcionaram grande desenvolvimento e aplicabilidade de técnicas advindas da Geometria Esférica, Astronomia e seus elementos para localização terrestre. Nesse contexto, este trabalho tem por objetivo fundamentar a teoria da Geometria Esférica, apresentando e demonstrando resultados, para posteriormente aplicá-los em Astronomia de Posição. O texto traz uma revisão histórica relacionando a navegação portuguesa e o uso da Geometria Esférica, apresenta definições e resultados matemáticos sobre Geometria e Trigonometria Esférica, faz um estudo acerca de congruência de triângulos esféricos, demonstra a Lei dos Senos, a Lei dos Cossenos e outros teoremas oriundos dessas leis e aborda resoluções de triângulos esféricos retângulos e oblíquângulos. Este trabalho também traz aplicações nos triângulos terrestre e astronômico, desenvolvendo fórmulas que relacionam coordenadas terrestres e celestes úteis para solucionar problemas de localização e estudar a dinâmica do movimento dos astros.

Palavras-chave: Geometria Esférica, Trigonometria Esférica, Geometrias não Euclidianas, Astronomia de Posição, Astronomia Esférica.

Abstract

The Portuguesees, facing the challenges of navigation, provided great development and applicability of techniques arising from Spherical Geometry, Astronomy and its elements for terrestrial location. In this context, this work aims to support the theory of Spherical Geometry, presenting and demonstrating results, to later apply them in Position Astronomy. The text provides a historical review relating Portuguese navigation with the use of Spherical Geometry, presents definitions and mathematical results on Spherical Geometry and Trigonometry, makes a study about the congruence of spherical triangles, demonstrates the Law of Senos, the Law of Cosines and others theorems from these laws, it carries out resolutions of spherical right and obliquulated triangles. This work also brings applications in the terrestrial and astronomical triangles, developing formulas that relate terrestrial and celestial coordinates which are useful for solving location problems and studying the dynamics of the movement of the stars.

Keywords: Spherical Geometry, Spherical Trigonometry, Non Euclidean Geometries, Position Astronomy, Spherical Astronomy.

Lista de Figuras

1.1	Como calcular o raio da Terra segundo Wallace (1823-1913).	29
2.1	Superfície esférica.	37
2.2	Círculo máximo.	38
2.3	Eixo e pontos diametralmente opostos (antípodas).	38
2.4	Círculos máximos de uma esfera cortando-se mutuamente.	39
2.5	Distância esférica.	40
2.6	Ângulo esférico.	40
2.7	Triângulo esférico.	41
2.8	Triângulo esférico tri-retângulo.	42
2.9	Triângulo esférico e seu triedro correspondente.	43
2.10	Triângulos esféricos simétricos.	44
2.11	Triângulo equilátero/equiângulo.	45
2.12	Um lado é menor que a soma dos outros dois e maior que sua diferença.	45
2.13	A soma dos três lados de um triângulo esférico é menor que 360° .	47
2.14	Polos de um círculo máximo em uma esfera de centro O.	47
2.15	Triângulo esférico ABC e as retas tangentes I e N.	48
2.16	Medição do ângulo esférico.	48
2.17	Triângulos polares.	49
2.18	Triângulos polares ABC e A'B'C'.	49
2.19	Triângulos polares para o Teorema de Lagrange.	50
2.20	Fuso esférico A.	52
2.21	Área do triângulo esférico.	52
3.1	Teoremas sobre senos e cossenos esféricos.	55
3.2	Congruência de triângulos esféricos: Caso AAA.	62
3.3	Congruência de triângulos esféricos: Caso ALA.	63
3.4	Congruência de triângulos esféricos: Caso LLL.	64
3.5	Congruência de triângulos esféricos: Caso LAL.	65
3.6	Triângulo esférico retângulo.	68
4.1	Triângulo obliquângulo.	73
5.1	Polos geográficos.	90
5.2	Principais paralelos terrestres.	91
5.3	Coordenadas geográficas.	92
5.4	Triângulo terrestre.	93
5.5	UNESP e Observatório da UNIVAP.	95
5.6	Pontos A a Oeste e B a Leste.	97

5.7	Distâncias entre Rio Claro e algumas cidades estrangeiras ilustradas com Google Maps.	99
5.8	Esfera celeste.	100
5.9	Vertical/ Zênite e Nadir.	100
5.10	Esfera celeste e horizonte.	101
5.11	Horizontes.	102
5.12	Horizonte aparente.	102
5.13	Paralelos e meridianos celeste.	103
5.14	Meridiano local.	103
5.15	Círculos verticais e círculos de altura.	104
5.16	Sentido direto e retrógrado.	104
5.17	Coordenadas horizontais.	105
5.18	Relação entre coordenadas retilíneas e horizontais.	107
5.19	Eclíptica, solstícios e equinócios.	108
5.20	Coordenadas equatoriais.	109
5.21	Relação coordenadas retilíneas e equatoriais.	111
5.22	Coordenadas horizontais e equatoriais	111
5.23	Coordenadas eclípticas.	112
5.24	Relação coordenadas retilíneas e eclípticas.	114
5.25	Coordenadas horárias.	115
6.1	Hora sideral.	117
6.2	Comparação entre Sol verdadeiro e Sol médio.	119
6.3	Passagem completa do Sol verdadeiro.	119
6.4	Hora solar verdadeira.	120
6.5	Dia solar e dia sideral.	120
6.6	Fusos horários do mundo.	121
6.7	Movimento aparente dos astros.	124
6.8	Latitude e altura do polo celeste.	125
6.9	Cálculo da altura do polo.	126
7.1	Exemplos de triângulo de posição astronômico.	128
7.2	Triângulo de posição astronômico com $\phi > 0$ e $\delta > 0$	129
7.3	Triângulo de posição astronômico com $\phi < 0$ e $\delta < 0$	131
7.4	Triângulo de posição astronômico com $\phi < 0$ e $\delta > 0$	134
7.5	Triângulo de posição astronômico com $\phi > 0$ e $\delta < 0$	136
7.6	Estrelas circumpolares.	142
7.7	Azimute do nascer e ocaso do Sol em Rio Claro durante os solstícios.	143
7.8	Passagem de um astro pelo círculo das seis horas.	144
7.9	Passagem do astro pelo primeiro vertical.	146
7.10	Elongação de um astro.	148
7.11	Distância angular entre os astros A e B.	153
7.12	O Cruzeiro do Sul.	155

Lista de Tabelas

5.1	Latitudes e longitudes de alguns locais (Norte: N, Sul: S, Leste: E e Oeste: W).	94
5.2	Equinócios e solstícios no hemisfério norte e hemisfério sul.	108
5.3	Resumo do sistema de coordenadas	115

Sumário

Introdução	23
1 O Desenvolvimento da Geometria ao Longo da História Humana	27
1.1 As Geometrias não Euclidianas	28
1.2 A Geometria Esférica e os Navegantes Portugueses	30
1.3 Os Portugueses e a Determinação da Longitude	31
2 Geometria Esférica	37
2.1 Elementos Básicos da Geometria Esférica	37
2.2 Congruências de Triângulos Esféricos	42
2.3 Algumas Propriedades para Triângulos Esféricos	44
3 Trigonometria Esférica	55
3.1 Lei dos Senos e Cossenos Esféricos	55
3.2 Congruências de Triângulos Esféricos Revisitadas	61
3.3 Fórmulas dos Cinco Elementos	65
3.4 Propriedades nos Triângulos Esféricos Retângulos	67
4 Resolução de Triângulos Esféricos Obliquângulos	73
4.1 Fórmulas de Borda	73
4.1.1 1º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos	74
4.1.2 2º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos	76
4.2 Analogias de Delambre e de Napier	80
4.2.1 Fórmulas de Delambre	80
4.2.2 Fórmulas de Napier	84
4.2.3 3º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos	86
4.2.4 4º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos	87
4.2.5 5º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos	87
4.2.6 6º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos	88
5 Introdução à Astronomia de Posição	89
5.1 Geodésia	89
5.1.1 Modelo Esférico	89
5.1.2 Esfera e Triângulo Terrestre	90
5.1.3 Cálculo de Distâncias na Terra	93
5.2 A Esfera Celeste	99
5.3 Coordenadas Celestes	104
5.3.1 Coordenadas Horizontais	104

5.3.2	Coordenadas Equatoriais	107
5.3.3	Coordenadas Eclípticas	112
5.3.4	Coordenadas Horárias	114
5.3.5	Resumo dos Sistemas de Coordenadas	114
6	Medida do Tempo e Movimento Aparente	117
6.1	Generalidades sobre Medida do Tempo	117
6.1.1	Tempo Sideral	117
6.1.2	Tempo Solar	118
6.1.3	Fusos Horários	121
6.2	Generalidades sobre o Movimento Aparente	122
6.2.1	Altura do Polo em Relação ao Horizonte	125
7	O Triângulo de Posição Astronômico	127
7.1	Relações entre Distância Zenital, Ângulo Horário, Azimute e Declinação	128
7.2	Estudo Analítico do Movimento Diurno	138
7.2.1	Passagem de um Astro pelo Meridiano do Lugar	138
7.2.2	Passagem de um Astro pelo Horizonte	140
7.2.3	Passagem de um Astro pelo Círculo das Seis Horas	144
7.2.4	Passagem do Astro pelo Primeiro Vertical	146
7.2.5	Elongação	148
7.3	Distância Angular Entre Dois Astros	153
8	Considerações Finais	159
	Referências	161
A	Apêndice: Lema Auxiliar para o Teorema 3.4	165
B	Apêndice: Identidades da Trigonometria Plana	169

Introdução

Acredita-se que as especulações a respeito sobre a natureza do Universo existam desde os tempos pré-históricos. A busca por entender o que nos cerca sempre foi constante na vida do ser humano. Ante essas indagações, entender o formato do nosso planeta, os astros celestes, suas medidas, movimentos e distâncias em relação à Terra, fomentaram a busca de matemáticos e astrônomos Egípcios, Babilônicos e Gregos.

Por volta de 550 a.C, o matemático grego Tales de Mileto introduziu na Grécia os fundamentos da geometria e da astronomia egípcia. Acredita-se que ele, juntamente com seu discípulo Anaximandro (610-546 a.C), foram os primeiros a propor modelos celestes baseados no movimento dos astros, não mais aceitando este fato como consequência de ação dos deuses. Entre os matemáticos gregos da antiguidade que observaram e conjecturaram sobre a esfericidade da Terra e o movimento dos astros, podemos citar: Pitágoras (572-497 a.C), Filolaus de Cretona (470-390 a.C), Eudóxio de Cnidos (408-344 a.C), Aristóteles (384-322 a.C), Aristarco de Samos (310-230 a.C), Eratóstenes (276-194 a.C), Hiparco (160-125 a.C) e Ptolomeu (85-165 d.C).

Todos estes matemáticos foram responsáveis por fundamentar o movimento dos astros, a esfericidade terrestre, o comprimento do raio da Terra, explicaram as fases da Lua, conceitos que foram utilizados até o renascimento, no século XVI. Vale ressaltar que, durante a época desses matemáticos, a Matemática estava passando por um processo de formalização, ou seja, estava começando a ser apresentada de maneira formal com axiomas, lemas e teoremas.

Já assumindo a abordagem mais formal, podemos citar os trabalhos do matemático Euclides (300 a.C), em especial o seu “Os Elementos”. Dentre os axiomas propostos por Euclides, iremos abordar o quinto postulado e suas consequências. O quinto postulado de Euclides diz: “É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos”. Matemáticos da antiguidade e Idade Média (como: Proclus, Nasiredin, John Wallis) acreditavam que este postulado fosse na verdade um teorema e tentaram demonstrá-lo, porém não obtiveram sucesso.

O começo do século XIX encontrou os geômetras ainda na busca de uma “prova” para o quinto postulado de Euclides, porém sem sucesso. Mas, ao longo dessa busca de tantos séculos, frutos foram acumulados junto de um entendimento de novas Geometrias, denominadas não Euclidianas. Essas geometrias receberam esse nome pelo fato de não mais serem explicadas pelos fundamentos desenvolvidos por Euclides e, como ocorre frequentemente na Matemática, quando a descoberta de novas geometrias ocorreu, não foi feita por um único homem. Dentre os matemáticos envolvidos dessa época, pode-se destacar o húngaro Jano Bolyai (1802-1860), o russo Nikolai Lo-

bachevsky (1793-17856), o alemão Felix Klein (1849-1925) e o italiano Georg Friedrich Riemann (1826-1866). Essas geometrias foram denominadas por: Geometria Elíptica, Geometria Hiperbólica e Geometria Esférica.

Destacando a Geometria Esférica, esta foi imprescindível para o desenvolvimento da geografia de localização e para a navegação portuguesa. Essa navegação teve grande salto com a formalização da Geometria Esférica, fato que também ajudou a formalizar novos conceitos à prática. Interessantemente, antes mesmo da oficialização das novas geometrias, os gregos, na antiguidade, já utilizavam a Geometria Esférica intuitivamente para estudar Astronomia. Foi essa civilização que propôs o conceito de esfera celeste, iniciando os primeiros estudos em Astronomia de Posição (também conhecida como Astronomia Esférica), a qual diz respeito fundamentalmente às direções na qual os corpos celestes são vistos, sem se preocupar com sua distância.

Nesse contexto, este trabalho tem por objetivo fundamentar a teoria da Geometria Esférica, apresentando e demonstrando resultados, para, posteriormente, aplicá-los em Astronomia de Posição.

No primeiro Capítulo, apresentam-se detalhes históricos que levaram à descoberta e ao desenvolvimento da Geometria Esférica e sua aplicação na prática das navegações portuguesas. No segundo Capítulo, demonstram-se teoremas e proposições à respeito da Geometria Esférica. No terceiro Capítulo, encontram-se demonstrações de teoremas à respeito da Trigonometria Esférica. O quarto Capítulo está dedicado ao estudo da resolução de triângulos esféricos quaisquer, ainda no contexto da trigonometria. No quinto Capítulo, apresenta-se uma introdução à Astronomia de Posição e Geodésia. O sexto Capítulo aborda particularidades sobre medida do tempo e movimento aparente da esfera celeste. Finaliza-se o trabalho em seu sétimo Capítulo, onde estão aplicações dos conceitos estudados nos capítulos anteriores no estudo analítico do movimento diurno.

Como principais referências bibliográficas, no que diz respeito à Geometria e Trigonometria Esférica, foram utilizados os seguintes textos: Gamael (1948), Pedro (1955), Adames (2005), Oliveira e Saraiva (2013) e Caritá (2018). No que diz respeito à Astronomia de Posição, foram utilizados como base: Oliveira e Saraiva (2013), Boczeko (1984), Lima-Neto (2020), Gamael (1948) e Pedro (1955). Eventualmente, outros textos foram utilizados e aparecerão citados ao longo da dissertação.

Objetivo Geral

Fundamentar a teoria da Geometria Esférica, apresentando e demonstrando resultados, para, posteriormente, aplicá-los em Astronomia de Posição.

Objetivos Específicos

- Contextualizar historicamente a Geometria Esférica;
- Definir elementos básicos da Geometria Esférica;
- Enunciar e demonstrar a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos, assim como teoremas oriundos destes;
- Demonstrar propriedades para triângulos esféricos retângulos e oblíquângulos;
- Definir elementos básicos da Astronomia de Posição;

- Aplicar o conteúdo matemático estudado à Astronomia de Posição, criando fórmulas úteis e solucionando problemas contextualizados.

8 Considerações Finais

Esta dissertação assumiu como objetivo fundamentar a teoria da Geometria Esférica e exemplificá-la por meio de aplicações em Astronomia de Posição. Para tal, este trabalho apoiou-se num conjunto de abordagens que contemplam: a historicidade sobre a criação das geometrias não Euclidianas e como a Geometria Esférica foi usada empiricamente pelos navegantes portugueses, definições e teoremas sobre a Geometria e Trigonometria Esféricas e aplicações em Geodésia e Astronomia de Posição, a qual diz respeito fundamentalmente às direções na qual os corpos celestes são vistos, sem se preocupar com sua distância.

Desta forma, primeiramente foi realizada uma revisão de literatura acerca da Geometria e Trigonometria Esférica, sendo destaque alguns teoremas como o Teorema de Lagrange, a Lei dos Senos e Cossenos, Analogias de Delambre e Napier, os quais foram imprescindíveis às posteriores aplicações nas esferas terrestre e celeste. Foram apresentadas demonstrações inéditas para alguns resultados, como os Teoremas 3.4 e 4.3.

Com o estudo da Geodésia e Astronomia de Posição, pôde-se localizar pontos nas esferas terrestre e celeste, calcular distâncias entre locais diferentes no globo terrestre, bem como calcular a separação angular entre dois astros. Ao estudar a esfera celeste, foram observados seus planos e pontos como: Horizonte, Zênite, Equador Celeste, Polos Celestes, entre outros. Aplicando os conceitos matemáticos estudados à Astronomia de Posição, foram apresentados os sistemas de coordenadas celestes Horizontais, Equatoriais, Horárias e Eclípticas. Também foram desenvolvidas fórmulas que relacionam as coordenadas distância zenital, ângulo horário, declinação e azimute que não são encontradas em outras literaturas.

Para auxiliar a visualização, em diversas resoluções e cálculos desse trabalho, foram geradas figuras que exemplificassem o que estava sendo dissertado. As figuras são inéditas em sua maioria e foram majoritariamente desenvolvidas com o GeoGebra Clássico¹.

Por fim, este trabalho mostra sua relevância e importância pelo detalhamento de suas demonstrações e da forma didática e construtiva em que foram dispostos os conteúdos, capítulo a capítulo, em linguagem acessível, porém zelando pela formalidade.

¹Disponível em <https://www.geogebra.org/> (acesso em 20 de julho de 2020).

Referências

- ADAMES, M. R. *Geometria Esférica*. Monografia (Graduação) — Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), 2005.
- ALBUQUERQUE, L. *As Navegações e a sua Projeção na Ciência e na Cultura*. 1. ed. Lisboa: Gradiva, 1987.
- BACELAR, J. *Conceito da Terra Redonda e Sua História*. 2020. Disponível em: <<http://www.mapas-historicos.com/terra-redonda.htm>>. Acesso em: 09 fev. 2020.
- BOCZKO, R. *Conceitos de Astronomia*. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda., 1984.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda., 2010.
- CANAS, A. C. Os portugueses e a determinação da longitude. *Anais do Clube Militar Naval*, CXXV, p. 249–273, 1995.
- CARITÁ, L. A. Lei dos cossenos e senos esféricos: demonstrações matemáticas para ferramentas astronômicas. *Revista Univap*, v. 24, p. 10–18, 2018.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial (Posição e Métrica), Vol. 10*. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.
- EVES, H. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula*. 1. ed. São Paulo: Atual, 1992.
- G1. *Horário de verão muda mapa de fusos horários no Brasil*. 2015. Disponível em: <<http://g1.globo.com/economia/noticia/2015/10/horario-de-verao-muda-mapa-de-fusos-horarios-no-brasil-veja.html>>. Acesso em: 17 abr. 2020.
- GAMAEL, C. *Noções de Trigonometria Esférica, Astronomia e Geodésia*. 1. ed. Curitiba: Diretório Acadêmico de Engenharia do Paraná, 1948.
- HAWKING, S. *Os gênios da Ciência: Sobre os ombros de gigantes*. 1. ed. São Paulo: Elsevier, 2005.
- HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática: Influência e função da matemática nos conhecimentos humanos*. 2. ed. Porto Alegre: Globo, 1970.

- IBGE. *Índice de Organização do Território*. 2010. Disponível em: <<https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/14126-asi-ibge-disponibiliza-coordenadas-e-altitudes-para-21304-localidades-brasileiras>>. Acesso em: 09 fev. 2020.
- LIMA-NETO, G. B. *Astronomia de Posição*. 2020. Disponível em: <<http://www.astro.iag.usp.br/Öcegastao/astroposicao.html>>. Acesso em: 30 mar. 2020.
- MAES, J. *Estudo descobre o verdadeiro culpado pelo crescimento desenfreado desta crença completamente estúpida*. 2019. Disponível em: <<https://hypescience.com/youtube-terraplanistas/>>. Acesso em: 25 fev. 2020.
- MARCOLIN, N. Os reis dos mares. *Pesquisa Fapesp*, v. 212, p. 86–87, 2013.
- MORICONI, M. *A Terra é redonda*. 2018. Disponível em: <<http://cienciahoje.org.br/artigo/a-terra-e-redonda/>>. Acesso em: 24 fev. 2020.
- OBSERVATÓRIO-NACIONAL. *Anuário 2020*. Cxxxvi. Rio de Janeiro: Observatório Nacional, 2020.
- OLIVEIRA, K. de; SARAIVA, M. de F. *Astronomia e Astrofísica*. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.
- OLIVEIRA, K. de; SARAIVA, M. de F. *Medidas de Tempo*. 2018. Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/tempo/tempo.htm>>. Acesso em: 31 mar. 2020.
- PEDRO, I. I. *Trigonometria Plana e Esférica*. 1. ed. São Paulo: Livraria Francisco Alvez Editora Paulo de Azevedo L.T.D.A., 1955.
- PENA, R. *Afinal, a Terra é redonda mesmo?* 2020. Disponível em: <<https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/geografia/afinal-terra-redonda-mesmo.htm>>. Acesso em: 09 fev. 2020.
- PENTEADO, A. M. *Pedro Nunes e a distinção de dois tipos de trajetórias na navegação: A linha de rumo e o círculo máximo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), 2011.
- PEREIRA, E. H. U. *A matemática do GPS*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí (UFPI), 2014.
- SARAIVA, M. de F. O.; OLIVEIRA, K. de S. *Decretos sobre o Horário de Verão no Brasil*. 2019. Disponível em: <<http://pcdsh01.on.br/DecHV.html>>. Acesso em: 30 out. 2020.
- SARAIVA, M. de F. O.; OLIVEIRA, K. de S.; MULLER, A. M. *Movimento Anual do Sol e Estações do Ano*. 2018. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/tex/fis02001/aulas/Aula3-122.pdf>>. Acesso em: 01 jul. 2020.
- SIQUEIRA, L. *Earthrise: a primeira foto da Terra feita por um astronauta faz 50 anos*. 2018. Disponível em: <<https://revistazum.com.br/radar/earthrise-50-anos/>>. Acesso em: 29 jun. 2020.

TODA-MATÉRIA. *Fuso Horários do Brasil*. 2019. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/fusos-horarios-no-brasil/>>. Acesso em: 17 abr. 2020.

UNESP. *Site da Diretoria Administrativa- DTAD*. 2019. Disponível em: <<https://igce.rc.unesp.br/\#!/dtad>>. Acesso em: 06 jul. 2020.

UNIVAP. *Observatório de Astronomia e Física da UNIVAP abre para visitas*. 2018. Disponível em: <<https://www.univap.br/home/universidade/noticias-e-eventos/noticias/noticias-observatorio-de-astronomia-e-fisica-da-univap-abre-para-visitas.htm>>. Acesso em: 06 jul. 2020.