UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

MARIANA DE AVELAR GALVINO LIMA

AS POTENCIALIDADES DIDÁTICAS DO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA PARA A ÁLGEBRA ESCOLAR

Rio Claro - SP
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

MARIANA DE AVELAR GALVINO LIMA

AS POTENCIALIDADES DIDÁTICAS DO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA PARA A ÁLGEBRA ESCOLAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Lazari

Rio Claro - SP
2018

510.07 L732p

Lima, Mariana de Avelar Galvino
As potencialidades didáticas do Laboratório de Ensino de Matemática para a álgebra escolar / Mariana de Avelar Galvino Lima. - Rio Claro, 2018
219 f. : il., figs., gráfs., tabs., quadros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Henrique Lazari

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Álgebra. 3. Linguagem algébrica. 4. Proposta de intervenção. 5. Laboratório de Ensino de Matemática. 6. Ensino médio. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP - Ana Paula Santulo C. de Medeiros / CRB 8/7336

MARIANA DE AVELAR GALVINO LIMA

AS POTENCIALIDADES DIDÁTICAS DO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA PARA A ÁLGEBRA ESCOLAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Lazari

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Henrique Lazari
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Rosana Giaretta Sguera Miskulin
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Carlos Roberto de Moraes
UNIARARAS/Fundação Hermínio Ometto/Araras (SP)

Resultado: Aprovada.

Rio Claro, SP, 30 de Janeiro de 2018.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por possibilitar mais uma etapa de minha formação acadêmica, iluminar todos os passos dessa caminhada e garantir que coragem e saúde não me faltassem.

Agradeço aos professores da UNESP/Rio Claro, especialmente ao meu orientador prof. Dr. Henrique Lazari, pela oportunidade de fazer parte do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da UNESP/ Rio Claro e por fazer com que mais esse sonho fosse realizado. Agradeço ao meu orientador pela confiança, amizade e incentivo. Aos professores, Dr. Geraldo Perez e Drª. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin, agradeço pela atenção e contribuições para a organização e redação da Dissertação de Mestrado.

Aos professores da Universidade Federal de São João del Rei(UFSJ) que durante o período em que cursei Graduação em Licenciatura em Matemática, não apenas colaboraram com seu conhecimento, mas incentivaram o prosseguimento de meus estudos. Agradeço, em especial, ao professor Dr. José do Carmo Toledo (in memorian) e à professora Ms. Flávia Figueiredo Coura pelos primeiros ensinamentos na área de Educação Matemática.

Aos professores da cidade de Montes Claros/MG que contribuíram para o enriquecimento de minha pesquisa, relatando sua experiência no ensino de Álgebra.

Aos meus familiares, que apesar da distância sempre estiveram presentes em minha vida. Aos meus pais, irmã, e ao meu esposo Douglas Darmani, agradeço por acreditarem em mim, pelo incentivo e compreensão, principalmente nos momentos em que estive ausente.

A todos os meus colegas de curso pelos momentos de aprendizagem e pelo convívio. Em especial, agradeço aos colegas Maria Francisca, Egídio Martins (e sua esposa Clenia Tolentino) e Simone Sader por serem mais que colegas, são amigos que muito me ajudaram.

Agradeço a todas aquelas pessoas com as quais convivi nas instituições de ensino em que trabalhei (em São João del Rei, Campo Belo e Montes Claros) e pude aprender um *pouquinho* sobre o trabalho na área educacional. Tudo aquilo vivenciado anteriormente foi válido durante a realização deste Mestrado.

RESUMO

O presente trabalho constitui-se em um estudo das potencialidades didático-pedagógicas do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), na visão de professores, como auxiliar na superação de dificuldades dos alunos do Ensino Médio, diante dos conceitos e dos procedimentos da Álgebra, em especial ao uso da linguagem simbólica. Em um primeiro momento, discorre-se sobre a diversidade de "conceitos" atribuídos ao termo Álgebra e sobre ideias envolvidas no termo LEM. Analisam-se dois documentos curriculares, levando-se em conta conceitos, procedimentos e conteúdos algébricos, sob o enfoque da linguagem simbólica. Elucidam-se alguns problemas enfrentados pelos alunos, ressaltando-se a questão problemática em torno da linguagem simbólica. A fim de ilustrar tal situação, apresentam-se relatos de professores, nos quais argumentam sobre a importância da Álgebra e comentam sobre dificuldades encontradas pelos alunos. Em etapa posterior, atingindo-se a proposta da pesquisa, seleciona-se – como fonte para análise de propostas de intervenção que contemplem a metodologia do LEM e os conteúdos algébricos do Ensino Médio – o XI Encontro Nacional de Educação Matemática, com o tema "Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas". Examinou-se uma amostra de trabalhos obtida junto ao site do evento, composta por duas modalidades de pesquisas: Comunicações Científicas e Relatos de Experiência. A pesquisa enquadra-se na abordagem qualitativa, sendo, portanto, de natureza bibliográfica. A seleção e análise da amostra permitiram a identificação de uma variedade de questões concernentes ao trabalho com atividades laboratoriais e a Álgebra do Ensino Médio, tais como: o baixo número de estudos encontrados; a falta de diversificação quanto à contemplação dos conteúdos algébricos, centrando-se no tema Funções; estudos com desenvolvimentos repetitivos, alguns deles apresentando, superficialmente, o conteúdo abordado; falta de vinculação entre o uso de materiais concretos e jogos e os conteúdos abordados, dentre outros. Apesar disso, a análise dos dados confirma que há aproximação entre LEM e Álgebra, permitindo que se argumente a favor do LEM que: (i) as atividades laboratoriais encontradas favorecem o domínio da linguagem simbólica, pois incentivam o registro em linguagem verbal, estimulam a generalização verbal como ponto de partida para a generalização simbólica e proporcionam a abstração por meio de atividades experimentais ou a abstração por meio da observação; (ii) as tendências em Educação Matemática envolvidas nas atividades, por exemplo, a Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas, assim como recursos concretos e softwares matemáticos, promovem situações em que a notação usada aproxima-se da notação formal da Matemática; (iii) o LEM contribui para a superação de dificuldades em Álgebra do Ensino Médio, oportunizando o enfrentamento de deficiências de níveis escolares anteriores. Em geral, o presente trabalho indica dois pontos centrais de importância para a Educação Matemática: o reconhecimento da ligação entre o LEM e a Álgebra, especialmente a presença de linguagem algébrica em atividades laboratoriais, e o fato de tais atividades não serem devidamente reconhecidas pelos professores no que concerne ao caso da Álgebra do Ensino Médio, inferindo-se a necessidade de ampliação da participação de professores de Matemática da Educação Básica na criação de propostas de ensino no campo da Álgebra.

Palavras-chave: Álgebra. Linguagem Algébrica. Proposta de intervenção. Laboratório de Ensino de Matemática. Ensino Médio.

ABSTRACT

This present paper comprehends a study on the didactic and pedagogical potentialities of the Math Teaching Lab (*LEM*) as seen by teachers, as an aid for high school students to overcome their difficulties in the face of the concepts and processes in Algebra, especially concerning the use of symbolic language. To begin with, the diversity of "concepts" attributed to the term Algebra and the ideas around the term LEM are discussed. Two curricular documents are analyzed, taking into consideration algebraic concepts, processes and contents, under the focus of symbolic language. Some of the problems faced by students are elucidated, pinpointing the problematic matter around symbolic language. Aiming at illustrating such situations, reports by teachers are presented, in which they discuss the importance of Algebra and comment on the difficulties found by their students. At a following stage, upon fulfilling the research proposal, the *XI Encontro Nacional de Educação Matemática* (11th National Mathematical Education Conference) – with the theme "Mathematical Education: Retrospects and Prospects" – is chosen as a source of analysis of intervention proposals which observe LEM methodology and high school algebraic contents. A sample of works obtained from the website of the event, composed of two research categories: Science Communications and Experience Reports, was examined. The research fits a qualitative approach, therefore, it is of a bibliographic nature. The sample selection and analysis allowed the identification of a variety of questions concerning the work with lab activities and high school Algebra, such as: the small number of studies found; the lack of diversification in terms of comprehending algebraic contents, focusing on the Functions subject; studies with repetitive development, some of them presenting the discussed content superficially; the lack of linkage between the use of concrete material and games and the discussed content, among others. In spite of that, the data analysis confirms that there is an approach between LEM and Algebra, allowing arguing in favor of LEM that: (i) the lab activities found promote the dominance of symbolic language, for they motivate the record in verbal language, promote verbal generalization as a starting point to symbolic generalization and they provide abstraction by means of experimental activities or abstraction by means of observation; (ii) the tendencies in Mathematical Education involved in the activities, for example, Mathematical Modeling and Problem Solving, as well as concrete resources and mathematical software, promote situations in which the notation used is close to formal mathematical notation; (iii) LEM contributes to overcome difficulties in high school Algebra, providing the tackling of deficiencies of previous schooling stages. Overall, the present work indicates two important main points for Mathematical Education: the acknowledgement of a linkage between LEM and Algebra, especially the presence of algebraic language in lab activities, and the fact that these activities are not properly recognized by teachers, concerning Algebra in high school, what infers the need to increase the participation of elementary school Mathematics teachers in the creation of teaching proposals in the field of Algebra.

Keywords: Algebra. Algebraic Language. Intervention Proposal. Math Teaching Lab. High School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A presente Dissertação de Mestrado tem como foco o estudo do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), como auxiliar na redução das dificuldades dos alunos do Ensino Médio nos conceitos e procedimentos da Álgebra, em especial, quanto ao uso da linguagem simbólica.

Buscando compreender como o Laboratório de Ensino de Matemática pode favorecer o ensino da Álgebra escolar do Nível Médio, fixou-se a atenção em propostas de intervenção que abordem o LEM como uma alternativa metodológica e que contemplem os conteúdos algébricos do currículo do Ensino Médio. Com o intuito de situar o trabalho no quadro nacional, o levantamento das referidas propostas possui como fonte o XI Encontro Nacional de Educação Matemática[1], com o tema "Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas".

Antes de realizar o levantamento e a análise das produções científicas, diversos temas - como a Álgebra escolar, as recomendações para seu ensino, as concepções de LEM e as principais dificuldades enfrentadas no ensino e aprendizagem da Álgebra - são estudados e apresentados nos capítulos iniciais.

O capítulo inicial, PONTOS DE PARTIDA E ENCAMINHAMENTOS DA PESQUISA é inserido objetivando detalhar aspectos principais da pesquisa, como a questão de investigação, os objetivos e o modo de realização (pesquisa bibliográfica).

Tal capítulo enquadra a pesquisa na abordagem qualitativa e explica que o instrumento de coleta de dados é a observação, enquanto a interpretação é o instrumento de análise. Indica que parte da análise apoia-se na quantificação de alguns dados, mas o foco mantém-se na interpretação e não na quantificação, tratando-se de uma análise qualitativa, conforme explica Bicudo (2012)

O Capítulo 2, cujo tema é ÁLGEBRA, trata de um aprofundamento quanto às concepções desse ramo da Matemática. Relaciona os modos como a Álgebra é vista com os significados atribuídos ao termo e discute as possíveis origens para tais modos de conceber, à luz de informações da História da Matemática.

No supracitado capítulo delimitou-se o entendimento concebido sobre Álgebra escolar e expôs-se, em resumo, as recomendações para o tratamento da Álgebra escolar do Ensino Médio, dadas pelo principal documento curricular nacional, as Orientações

[1] Encontro realizado em 2013 em Curitiba/PR. Endereço: http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM.

Curriculares para o Ensino Médio (2007), e pelo Currículo Básico Comum do Ensino Médio (2008), referente ao estado de Minas Gerais. Em seguida, discorreu-se sobre os problemas relacionados à aprendizagem da Álgebra. Apontaram-se, ainda, as dificuldades relatadas em estreita relação com a linguagem algébrica e a notação simbólica.

O Capítulo 3 é composto por narrativas de professores do Ensino Médio e de professores que lecionam disciplinas de áreas afins em cursos de Graduação. O aludido capítulo explicita, por meio de narrativas, a complexidade em que se encontra a Álgebra de Nível Médio e mostra que há impactos no nível seguinte, o Ensino Superior. É um capítulo que traz as narrativas como fonte de conhecimento de um contexto, mas não as toma como ponto central de análise da pesquisa.

O Capítulo 4, O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA, lança a discussão em torno da relação do LEM com a Álgebra, por isso traz um aprofundamento dos pressupostos sobre LEM e é dedicado a colocar em destaque diferentes perspectivas de LEM, compreendidas a partir do estudo de diversas referências a respeito do tema.

Em tal capítulo também é defendida a inserção de atividades laboratoriais em outros níveis de ensino, além do Ensino Fundamental, inclusive, no Ensino Médio.

O Capítulo 5 é intitulado A PESQUISA, pois trata do modo de sua realização. Expõe o levantamento de pesquisas acadêmicas, obtidas junto aos Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, em duas sessões de trabalhos: as Comunicações Científicas (CC) e os Relatos de Experiência (RE). Apresenta a exposição dos pontos principais de cada proposta de intervenção selecionada, como, por exemplo, os recursos didáticos utilizados e os conteúdos algébricos contemplados.

No mesmo capítulo, a fim de facilitar a observação de alguns fatos ocorridos e de favorecer a interpretação, algumas informações são expressas em números. Esses dados estão expostos em tabelas e gráficos de fácil compreensão.

O Capítulo 6 destaca as reflexões em torno dos objetivos da pesquisa e traz à tona outras observações relevantes quanto ao tema investigado. Ao final, apontam-se conclusões quanto à inserção do Laboratório de Ensino de Matemática nas atividades dos professores voltadas para a Álgebra.

Concluiu-se, dentre outras coisas, que, embora o termo LEM não seja usado com frequência, existem três acepções do referido termo permeando as ações didáticas para a Álgebra, sendo elas: Laboratório Livre; Laboratório mediado pelo computador e o

Laboratório com material concreto. Essas formas de conceber o LEM contribuem para a superação de dificuldades neste ramo da Matemática no Ensino Médio.

Finalizando-se o capítulo e a investigação, indicam-se alguns encaminhamentos para pesquisas futuras.

E, ainda, apresenta-se a Bibliografia da pesquisa e os Anexos A, B e C que complementam o texto da Dissertação e contribuem para o "fechamento" do texto.

CAPÍTULO 1: PONTOS DE PARTIDA E ENCAMINHAMENTOS PARA A REALIZAÇÃO DA PESQUISA

1.1 Justificativa[2]

A preocupação com a aula de Matemática tem ocupado meus pensamentos desde a época em que ainda era aluna da Escola Básica, pois, facilmente, observava colegas reclamando das aulas e apresentando diversos problemas na aprendizagem.

Quando ingressei no curso de Graduação em Licenciatura em Matemática também passei a ser afetada por problemas de aprendizagem. Inicialmente, não conseguia identificá-los, mas sabia que se tratava de algo que atingia a minha compreensão nas questões propostas em sala de aula e nas avaliações.

Após alguns momentos de desânimo perante as dificuldades, percebi que minha falta de compreensão dava-se, principalmente, porque eu não estava conseguindo "traduzir" os enunciados matemáticos, como os teoremas, axiomas, corolários, entres outros. Muitas vezes eu não compreendia o que dizia um enunciado porque não sabia o que significavam os elementos simbólicos contidos nele.

Dessa forma, o estudo de disciplinas do ramo Álgebra tornou-se mais complexo que o esperado, pois contém uma infinidade de elementos abstratos, representados por símbolos.

Essa situação foi o primeiro ponto de partida para a elaboração da pergunta da pesquisa contida neste trabalho, pois foi a origem do interesse em investigar algo relacionado ao tema Álgebra e à linguagem simbólica.

Com a chance de realizar uma Iniciação Científica ao final do curso de Matemática e ao iniciar na função de professora de Matemática em instituições do Ensino Básico, o interesse pelos fatos supracitados cresceu e amadureceu, com os olhares sobre o referido nível de ensino. Passando por algumas situações junto aos alunos, pude perceber o quanto a falta de domínio da linguagem simbólica compromete o seu rendimento em toda a Matemática, principalmente nos conteúdos algébricos do Ensino Médio. Parece-me que a situação vivida por mim na graduação é bastante semelhante à que me deparei no Ensino Básico.

Iniciando a leitura a respeito do tema Álgebra, pude verificar que diversos são os problemas em torno dele, sendo possível inferir que as principais dificuldades relatadas estão relacionadas à sua simbologia. Então, há motivos para se dedicar, em uma pesquisa

---

[2] O texto apresentado na justificativa desta pesquisa encontra-se escrito em 1ª pessoa do singular, pois aborda a trajetória da pesquisadora.

acadêmica, aos itens de meu interesse, afinal, são questões problemáticas constantes, que me acompanharam durante toda a minha trajetória.

O segundo ponto de partida para a elaboração da questão diretriz foi a reflexão sobre "não pensar" apenas em problemas, mas em "indicar" soluções. Como havia lido sobre o tema Laboratório de Ensino de Matemática durante o período de realização da Iniciação Científica, quando refletia a respeito de ações interventivas para a Escola Básica, resolvi incluí-lo nos itens de interesse. Aliás, o estudo acerca do tema Laboratório de Ensino de Matemática cresceu a partir do momento que conheci o LEM da instituição onde estudava, a Universidade Federal de São João del-Rei. O referido Laboratório conta com uma sala de estudos ampla e uma diversidade de recursos didáticos, no entanto, como foram raras as minhas visitas ao LEM, não pude explorá-lo como gostaria. Tal fato contribuiu gerando curiosidade, sempre pensando em como seria lecionar tendo o LEM como aporte.

Entretanto, a ideia de relacioná-lo ao tema Álgebra Escolar não se deu porque ele tem sido amplamente usado em assuntos algébricos; pelo contrário, o LEM aparece com mais frequência na Geometria do que em outros ramos. Com a realização de leituras indicando necessidade de mudanças no ensino de Álgebra e de outras leituras sobre LEM, passei a me questionar: *O Laboratório de Ensino de Matemática pode constituir-se em um recurso metodológico utilizado no ensino de Álgebra?*

Movida por essa pergunta encontrei indícios da contribuição do LEM em outros ramos da Matemática, além da Geometria, o que justifica meu interesse em estudar o Laboratório de Ensino de Matemática com foco na Álgebra.

Com a realização da presente pesquisa, além de satisfazer uma inquietação pessoal, acredito que poderei, não só evidenciar as potencialidades do LEM para toda a Matemática, mas também trazer reflexões necessárias para o ensino de Álgebra.

Creio que, além de levantar importantes pontos de discussão, este trabalho é importante, especialmente porque o levantamento de pesquisas no XI Encontro Nacional em Educação Matemática[3], realizado em 2013, na cidade de Curitiba/PR, é um incentivo para que os resultados de trabalhos na área sejam trazidos para a prática docente, refletindo sobre as ações interventivas contidas neles.

1.2 A questão de investigação e os objetivos

---

[3] Endereço: http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM.

Diante da possibilidade da existência de materiais no LEM que tenham participação efetiva no ensino e na aprendizagem dos conceitos e dos procedimentos da Álgebra, bem como da consideração do citado Laboratório para o ensino de Álgebra como um processo de investigação, delineiam-se os seguintes objetivos específicos para o presente trabalho:

a) Identificar relações entre as recomendações para o ensino de Álgebra e o LEM;
b) Buscar, por meio de pesquisa bibliográfica junto aos anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, propostas de atividades voltadas para o ensino de Álgebra do Ensino Médio tendo como base o LEM como alternativa metodológica;
c) Analisar se as atividades selecionadas tem o intuito de contribuir para que os alunos possam evoluir na superação de dificuldades relacionadas ao uso da linguagem simbólica;
d) Investigar, na prática docente, quais são os resultados e as contribuições da inserção de atividades baseadas na concepção do LEM para a superação das dificuldades em Álgebra, particularmente para a superação de dificuldades com a linguagem simbólica.

De modo geral, busca-se resposta para a seguinte questão: Como o Laboratório de Ensino de Matemática pode constituir-se em uma abordagem metodológica a ser utilizada no ensino da Álgebra Escolar do Ensino Médio de modo a contribuir para que os alunos possam evoluir na superação de dificuldades, em especial as referentes ao uso da linguagem simbólica?

1.3 O desenvolvimento da pesquisa: a coleta, a apresentação, e a análise dos dados

A fim de cumprir os objetivos expostos acima, a parte principal da presente pesquisa de Mestrado consiste em realizar a análise de artigos acadêmicos, nas modalidades Comunicações Científicas e Relatos de Experiência, oriundos do XI Encontro Nacional em Educação Matemática (ENEM), cujo tema é “Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas”, realizado em Curitiba/PR, no ano de 2013. Os artigos foram obtidos por meio da Internet, junto ao endereço eletrônico http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM, o qual se encontra nos Anais do evento.

O referido evento foi escolhido como fonte de pesquisa por se tratar de um encontro nacional voltado para professores de Matemática da Educação Básica em exercício, bem como para futuros professores e pesquisadores em Educação Matemática, possibilitando, assim, uma investigação sob a perspectiva do professorado, com significativa abrangência pelo país.

Por possuir as características delineadas, a pesquisa, inicialmente, demonstra ser de natureza bibliográfica. Nessa fase, são elencados trabalhos algébricos, no âmbito do LEM, voltados para o Ensino Médio, dispostos em quadros, com a finalidade de indicar o que foi encontrado na busca. Tal exposição do levantamento realizado também objetiva anunciar as características principais de um considerável número de trabalhos, de maneira resumida, mas apresentando as partes mais relevantes, como, por exemplo, os temas algébricos abordados.

Após essa exposição, são apresentadas as descrições de cada texto selecionado, juntamente com observações referentes a itens de interesse contidos nesta pesquisa de Mestrado. As descrições e reflexões levantadas dar-se-ão de forma qualitativa, entendendo-se, em consonância com Bicudo (2004, p. 116), que o qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. Assim, essa etapa consiste em refletir a partir da leitura dos textos sob a ótica de quem tem os objetivos anteriormente apresentados.

Logo, a pesquisa não consiste apenas em resumir os artigos, mas em buscar compreender como o LEM e a Álgebra inter-relacionam-se no interior de cada texto, por isso foi necessário definir alguns itens norteadores dessa análise, tais como:

a) O processo de investigação envolvido nas propostas de intervenção;
b) A inter-relação entre teoria e prática;
c) O desenvolvimento da notação matemática;
d) A abstração, a generalização e a formalização;
e) Os recursos utilizados/materiais concretos usados/recursos tecnológicos e softwares usados;
f) Os conteúdos algébricos do Ensino Médio abordados;
g) As teorias envolvidas/Modelagem/Resolução de Problemas;
h) Os procedimentos algébricos.

Destarte, foi necessário realizar uma leitura minuciosa de cada trabalho, buscando compreender a sua essência, a partir da escrita apresentada por cada autor[4].

O foco está na interpretação, porém, a fim de apresentar algumas características dos trabalhos encontrados e de contribuir para a compreensão da presença e da inserção de atividades algébricas em um Laboratório de Ensino de Matemática, utilizam-se números para expor algumas informações. Dados numéricos são inseridos, de modo a complementar os dados qualitativos, o que não se configura como uma análise quantitativa, com emprego de ferramentas estatísticas. Realiza-se a integração de dados qualitativos com dados quantitativos pois isso pode contribuir para a compreensão da realidade mostrada nos trabalhos acadêmicos que estão sendo apresentados em eventos da área de Educação Matemática e por facilitar a análise das diversas variáveis existentes. Por exemplo, entende-se que é possível realizar inferência e cruzamento de informações por meio das quantificações de variáveis, como o conteúdo algébrico ensinado e o recurso didático utilizado.

Portanto, ao longo do trabalho, a complementaridade dos dados quantitativos e qualitativos torna possível a análise da realidade de interesse de forma mais abrangente e detalhada, apresentando de forma concisa o contexto em que o problema é investigado.

[4] Nessa etapa da pesquisa a autora teve inspiração na Hermenêutica, a Teoria da Compreensão, conforme a consideram Garnica e Bicudo(1994).

CAPÍTULO 2: A ÁLGEBRA

2.1 As concepções de Álgebra

O termo Álgebra, comum no meio acadêmico e também entre alunos e professores, tanto do Nível Superior quanto do Nível Básico, usado com frequência nos livros didáticos e documentos oficiais de orientações ao ensino da Matemática, não possui definição entre matemáticos e educadores matemáticos, embora seja considerado um dos pilares da Matemática, a base para a compreensão de outros ramos de tal ciência.

O termo ainda é largamente utilizado para tratar de um ramo da Matemática, um conjunto de conteúdos abstratos na Educação Superior e um conjunto de conteúdos dotados de simbologias, regras de resolução e técnicas de manipulação.

No dicionário Michaelis da Língua Portuguesa encontra-se o termo com o seguinte significado: “Parte da Matemática que ensina a calcular, generalizando e simplificando as questões aritméticas, por meio de letras do alfabeto”.

Pode-se notar que se trata de um significado bem parecido com o encontrado no conhecido dicionário Aurélio: “Ciência de cálculo das grandezas, representadas por letras”.

Percebe-se, apenas nessas duas consultas ao dicionário, que o termo Álgebra é diretamente associado ao cálculo literal e, consequentemente, à linguagem simbólica e se forem consultados outros dicionários da Língua Portuguesa esse fato será mantido. Analisando-se a história que envolve a própria palavra Álgebra pode-se refletir sobre essa associação.

Segundo Boyer (2001), o termo “Álgebra” veio do título do livro mais importante do matemático al-Khowarizmi (790-840), *Al-jabr Wa’l Muqabalah*. “O livro não se ocupa de problemas difíceis de análise indeterminada, mas contém uma exposição direta e elementar da resolução de equações, especialmente do segundo grau” (BOYER, 2001, p. 156).

Sobre o título do livro e a origem do termo “Álgebra”, Boyer (2001,) esclarece que não se sabe bem o que significam os termos *al-jabr* e *muqabalah*.

> a palavra *al-jabr* presumivelmente significa algo como “restauração” ou “completação” e parece referir-se à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação, a palavra *muqabalah*, ao que se diz, refere-se a “redução” ou “equilíbrio” isto é, ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação.

Por isso, Ponte, Branco e Matos (2009) afirmam que o termo "Álgebra" surge para designar a operação de "transposição de termos", essencial na resolução de uma equação.

A partir desses dados da História da Matemática pode-se concluir que al-Khowarizmi pretendia, em sua publicação, mostrar que uma equação poderia ser resolvida se fosse trabalhada em ambos os lados do sinal de igual, ou seja, caso se agrupassem, se unissem partes que, teoricamente, estariam fragmentadas. Então, pode-se claramente perceber que o termo "Álgebra" surgiu após o aparecimento ou desenvolvimento do conceito de equação e está atrelado aos procedimentos operacionais envolvidos nas resoluções, hoje designado cálculo literal ou cálculo algébrico.

Contudo, vale esclarecer que o trabalho de al-Khowarizmi não se limitava a procedimentos algébricos, assim como são conhecidos hoje, primeiro, porque, conforme afirma Boyer (2001), a Álgebra de al-Khowarizmi é inteiramente expressada em palavras, sem nada de sincopação (ou linguagem sincopada[5]); segundo, porque ele reconhecia e buscava pela realização de demonstrações geométricas, a fim de mostrar a verdade dos problemas que havia explicado com números, revelando conexão com a Geometria grega.

O trabalho do referido autor deu enfoque às resoluções de equações, dividindo-as em seis tipos e explorando as soluções de cada um deles. Boyer (2001, p. 157) diz, em certa parte do livro, que "as soluções são dadas por regras 'culinárias' para 'completar o quadrado', aplicadas a exemplos específicos", o que leva à conclusão de que al-Khowarizmi introduzia explicações passo a passo nas resoluções, reconhecendo a necessidade dos procedimentos na Matemática, no entanto, embora haja apresentação de "regras", elas não são inseridas sem sentido.

Essas características fizeram com que a sua Álgebra fosse difundida e preservada. Segundo Boyer (2001, p. 157), "a exposição de al-Khowarizmi era tão sistemática que seus leitores não devem ter tido dificuldade para aprender as soluções. Nesse sentido, pois, al-Khowarizmi merece ser chamado "o pai da Álgebra".

Naturalmente, por ser uma obra compreensível, o trabalho de al-Khowarizmi foi incorporado aos estudos de outros matemáticos. Porém, parece que diversos matemáticos deram grande enfoque às resoluções, fazendo com que a Álgebra passasse a ser entendida como o estudo das resoluções de equações. Talvez esse seja um dos motivos pelos quais, nos dias atuais, a Álgebra seja fortemente vinculada aos procedimentos operacionais envolvendo

---

[5] Em que confluem a linguagem corrente, as abreviações de palavras e numerais.

letras, muito embora a obra de al-Khowarizmi não fosse detentora de uma notação simbólica[6], conforme concebida atualmente.

De fato, se existe uma concepção de Álgebra centrada em cálculo puramente realizado com letras, não se deve atribuí-la à história em torno do termo *al-jabr*. Talvez aí não esteja a explicação para o fato em si, mas para um equívoco acerca de um dos modos como se entende a Álgebra atualmente.

Voltando-se ao significado dado no dicionário Michaelis, percebe-se que a ênfase não é dada apenas ao cálculo literal, mas a frase coloca a Álgebra como generalização da aritmética por meio dos seus símbolos – as letras. Segundo Lins e Gimenez (1997), a Álgebra, como aritmética generalizada, traz a ideia de que a atividade algébrica caracteriza-se pela expressão da generalidade, assim, preocupa-se com a linguagem simbólica como meio de expressão, e não apenas como objeto a que se aplicam técnicas diversas. Essa é uma colocação importante, pois se trata de uma visão da Álgebra cercada tanto de certeza quanto de questionamentos sob alguns aspectos.

Parece que a intenção de usar a linguagem simbólica para representar o pensamento e organizar o mundo de forma representativa e simplificada, com base fixa em questões numéricas e operacionais estabelecidas na Aritmética, não foi bem entendida e, portanto, bem–sucedida, porque o que ganhou destaque, mais uma vez, foram as letras.

Reconheceu-se a necessidade de uma notação algébrica e intensificou-se fortemente seu uso. Além disso, o uso de símbolos para expressar generalidades pode ter originado ideias equivocadas, como se os símbolos não dependessem das situações em que estão inseridos, um contexto. O fato de se chegar a expressões mais gerais por meio do uso de símbolos não implica que eles podem ser usados sem preocupação com o seu significado. Parece que a expressão de generalidades faz da Álgebra um ramo abstrato e afastado do concreto, além de tratar as letras simplesmente como elementos operacionais, conforme mencionado a seguir:

> Uma segunda perspectiva, em que os símbolos são tomados como objeto central da Álgebra, aproxima-se da anterior, e enfatiza a linguagem algébrica, mas é criticada por alguns autores, pelo fato de que a ênfase no simbolismo abstrato e na repetição de exercícios de manipulação algébrica afasta os alunos dos elementos concretos. (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, apud RIBEIRO e CURY, 2015, p. 13).

---

[6] No desenvolvimento da linguagem simbólica, Viète destacou-se por ter realizado progressos em relação à linguagem sincopada, trazendo as primeiras manifestações da linguagem simbólica que se conhece.

Assim como há diversas visões sobre o que é Álgebra, existem também posicionamentos diferentes quanto a cada uma delas, denotando que cada visão/concepção possui seus argumentos de sustentação e também críticas. Nesse sentido, ao falar da Álgebra, Kaput (1995) diz que se pode considerá-la como conjunto de conteúdos e métodos ou como formas de pensamento, tais como a generalização, a abstração, a justificação, entre outras.

Nenhuma dessas formas de "encarar" a Álgebra está errada e nem se encontra totalmente desvinculada, pois se entende que é por meio do estudo dos conteúdos e métodos que a Álgebra atinge a função de linguagem para expressar generalidades.

Dessa forma, não se vê problema em ter a Álgebra como um conjunto de conteúdos e métodos e que o termo seja associado a simbolismos e formalismos, afinal, seu estudo é essencial para a compreensão de outros ramos da Matemática, também dotados de formalismos dados em linguagem simbólica e que necessitam do cálculo literal em suas resoluções. "Faz sentido encarar o trabalho em Álgebra como a manipulação dos símbolos e das expressões algébricas... A verdade é que não podemos minimizar a importância dos símbolos" (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 9).

Porém, não é isso que acontece, pois "a visão da Álgebra como campo em que se estudam expressões, equações e regras de transformação ainda é a que prevalece, apesar do seu aspecto redutor" (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, apud RIBEIRO e CURY, 2015, p. 13). Ou seja, prevalece o uso da Álgebra apenas como ferramenta, dando enfoque aos aspectos transformacionais – cálculo literal - em detrimento dos aspectos conceituais e dos significados atribuídos às letras, reduzindo o papel e o alcance da Álgebra. Esse é um dos fatos apontados criticamente no presente trabalho.

Acrescente-se que também há erro em se considerar separadamente conceito e notação, uma vez que a falta de ligação entre esses itens não permite que a escrita da Matemática leve o estudante a compreender definições e resultados importantes como teoremas. Em outras palavras, não se pode esquecer que a base da Matemática e de sua linguagem é conceitual.

Demonstrando preocupação na visão da Álgebra como Aritmética generalizada e nos equívocos envolvidos nela – de certa forma, pensando nos possíveis problemas da Álgebra ao ganhar rigor com a notação e perder os significados que as letras carregam e, também, analisando um possível afastamento problemático entre Álgebra e Aritmética e tornar-se um ramo desprendido dos números –, Lins e Gimenez[7] (1997, p. 137) definem que "[...] a álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade [...].".

Até o momento, refletindo sobre o que vem a ser Álgebra ou como caracterizá-la, embora não exista definição científica para ela, "há, é verdade, um certo consenso a respeito de quais são as coisas da Álgebra: equações, cálculo literal, funções, por exemplo, mas, mesmo aí, há diferenças – gráficos são ou não parte da Álgebra?" (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 89), ou seja, divergências quanto à classificação de alguns itens da Matemática como algébricos ou não ainda existem.

Apesar de existir essa divergência, ao longo deste trabalho tais "coisas da Álgebra" serão chamadas de Álgebra Escolar ou conteúdos algébricos, quando houver referência à Álgebra presente no Ensino Básico.

Voltando-se às diferenças na classificação de itens da Matemática, acredita-se que esse fato não é causa de preocupação, podendo ser exemplificado pelos gráficos, que podem ser considerados como uma forma de representação diferente da analítica, onde, na verdade, o que se tem é um conteúdo algébrico – na maioria das vezes, uma Função. Às vezes, na Matemática, para melhor compreensão de um conteúdo, é necessário recorrer a representações diferentes e isso não diminui o papel da Álgebra, apenas ilustra bem sua ligação com outros ramos da Matemática.

> Frequentemente, um problema inicialmente formulado de maneira algébrica pode ser mais facilmente resolvido ou compreendido se o interpretarmos geometricamente e vice-versa. Por exemplo, a simetria axial presente nas funções quadráticas é facilmente perceptível no gráfico e, no entanto, pode exigir esforço de cálculo quando se trabalha com sua representação algébrica. (BRASIL, 2011, p. 30-31).

Essa circunstância – aliar Geometria e Álgebra –, hoje amplamente frequente nos livros didáticos, não é nova e, provavelmente, tem relação com o estudo que os Gregos realizaram da Matemática durante certo período, pois eles aplicaram conhecimentos de

[7] Na obra *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*, de Lins e Gimenez (1997), os autores buscam mostrar que a visão de Álgebra escolar como Aritmética generalizada é uma visão inadequada em alguns aspectos e errada em outros. (ver Capítulo 2). As informações contidas na obra a seguir podem contribuir para a compreensão da visão de Álgebra como Aritmética generalizada e ajudar a esclarecer por que nem sempre é considerada uma visão adequada: USISKIN, ZALMAN. Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.). *As ideias da Álgebra.* São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

cálculos de áreas na resolução de equações lineares e quadráticas, sendo este um dos fatores para que a Álgebra aritmética passasse a dar lugar a uma Álgebra geométrica.

Aliás, cabe lembrar que, diferentemente dos gregos, "tanto babilônios como egípcios trabalhavam, basicamente, com equações originárias de problemas de ordem prática, buscando soluções de tais equações por métodos basicamente aritméticos [...]" (RIBEIRO e CURY, 2015, p. 30) e isso sustenta o fato de chamar a Álgebra, até então conhecida de Álgebra aritmética, embora esses mesmos autores tragam informações, da História da Matemática, de que os babilônios expressavam problemas em terminologia geométrica, mas que, na verdade, tinham mais um enfoque algébrico.

Esses fatos servem de alerta, uma vez que a intenção de se utilizar a representação geométrica no estudo da Álgebra não se resume a expressar problemas em terminologia geométrica, mas em usar essa outra forma de representação para dar significado à linguagem algébrica e aos aspectos operacionais, envolvidos no cálculo literal da resolução dos problemas, uma vez que a notação algébrica não é absoluta.

Ressalte-se que a aliança entre Álgebra e Geometria é colocada na pesquisa como forma de compreender que o estudo sistematizado de regras para o cálculo com grandezas representadas por letras – como encontrado no dicionário – não é uma concepção completa e satisfatória para um ramo da Matemática dotado de grande importância, inclusive para outras ciências.

Entretanto, assim como a Álgebra geométrica, essa visão de Álgebra que prevalece e influencia na aprendizagem, inclusive de alunos de Nível Médio, também possui raízes nos estudos de Matemática de povos antigos.

De acordo com Ribeiro e Cury (2015), como já citado, na Matemática egípcia era comum encontrar problemas oriundos da prática, como os presentes nos papiros de Rhind[8] e Moscou. Geralmente, não se tratava de problemas com resoluções difíceis, não exigiam métodos e raciocínios complicados, pois, normalmente, não iam além de equações lineares com uma incógnita.

No entanto, Ribeiro e Cury (2015) comentam, segundo outras fontes autorais, que, nos papiros citados, as resoluções eram acompanhadas de instruções do tipo "faça isto", "faça aquilo", "este é o resultado", sem explicar o motivo de tais procedimentos puramente operacionais. Com base nesses fatos, os autores afirmam que

[8] Mais informações sobre a Álgebra no Papiro de Rhind podem ser encontradas na seguinte obra
ROBINS, G.; SHUTE, C. The Rhind mathematical papyrus: an ancient egyptian text. London: British Museum Publications, 1987.

> [...] podemos nos dias atuais, reconhecer indícios dessa "concepção", uma vez que há perspectivas de ensino e de aprendizagem de Matemática que se baseiam na simples manipulação de regras e algoritmos sem se preocupar com a discussão dos significados dos conceitos matemáticos envolvidos. (p. 30)

Um desses indícios encontra-se claramente em muitos livros e em outros materiais didáticos destinados ao ensino da Matemática básica, apresentando uma metodologia que espera do aluno a utilização de regras sem que se apresente sua sustentação, enfraquecendo o potencial da simbologia algébrica como ferramenta para a resolução de problemas, levando os alunos a não compreender a simbologia e a linguagem algébricas e a não empregar satisfatoriamente o cálculo algébrico.

Esclarece-se ainda que o foco deste trabalho está no estudo do Laboratório de Ensino de Matemática na visão de professores, como auxiliar na redução das dificuldades dos alunos do Nível Médio diante dos conceitos e procedimentos da Álgebra, em especial, quanto ao uso da linguagem simbólica, contudo, isso não significa que tal ênfase seja um aspecto redutor do trabalho com Álgebra, concentrando-se nas letras e deixando-se de lado os números, esquecendo-se de sua relação com a Aritmética.

A fim de esclarecer melhor, volta-se a citar Lins e Gimenez (1997, p. 51), trazendo-se o que os autores consideram como "pensar algebricamente": "Pensar algebricamente é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades ou desigualdades) e, com base nisso, transformar as expressões obtidas".

Para eles, uma das características fundamentais do pensamento algébrico é operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos. Ou seja, trabalhar com a linguagem algébrica, símbolos e sua manipulação não pressupõe desprezar o pensamento algébrico. Segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 10), "a capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico".

Então, como a Álgebra Escolar tem por objetivo desenvolver o pensamento algébrico, possui, sim, a intenção de desenvolver nos alunos a habilidade de manipular símbolos e de utilizar a linguagem algébrica. Inclui o trabalho dos aspectos operacionais de conteúdos como expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções dos mais variados tipos. Inclui ainda a resolução de problemas.

Por essa razão e pela diversidade de problemas relacionados à aprendizagem da Matemática, devido a dificuldades com esses itens, é que se justifica o interesse e o desenvolvimento deste trabalho, com atenção especial à manipulação de símbolos e à linguagem algébrica, embora se tenha consciência de que a Álgebra Escolar tem por meta desenvolver o pensamento algébrico em todas as suas vertentes.

2.2 A Álgebra nos Documentos Educacionais Oficiais para o Ensino Médio

A reflexão presente na seção anterior, onde é citada a consideração de Lins e Gimenez (1997), leva ao questionamento sobre quais são os elementos ou objetos essenciais da Álgebra. A afirmação desses autores, de que há certo consenso a respeito de quais são as coisas desse ramo da Matemática, não implica a inexistência de discussão em torno de quais são os objetos fundamentais da Álgebra e em quais desses objetos o currículo de Matemática deve centrar-se quanto ao estudo desse tema. Ponte, Branco e Matos (2009, p. 9), ao tratar dessa temática, explica que, desde a década de 1980, vêm sendo promovidas discussões com o intuito de delimitar o que deve ser incluído nesse ramo, inclusive na Álgebra a ser ensinada nas escolas.

Apesar disso, Ribeiro e Cury (2015, p. 15) defendem que “a Álgebra, trabalhada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, pode ser o fio condutor do currículo escolar [...]”. Diante de tal afirmação, o presente texto prossegue com a intenção de levar à reflexão sobre o assunto e lançar algo que possa subsidiar a crença dos autores, aqui corroborada.

Talvez alguns pensem que tal afirmação deva-se ao fato de a Álgebra ser dotada de uma simbologia e de uma linguagem própria que permitem à Matemática descrever situações reais e modelar o mundo. Também não se crê ser o “poder” da notação algébrica a base para tal afirmação, pois nem sempre esta representação é suficiente para se avançar na compreensão de conteúdos matemáticos. Como visto, às vezes é necessário recorrer a outros tipos de representação, por exemplo, gráficos e diagramas.

Existem outros motivos, de fundamental importância, para pensar no papel da Álgebra no currículo de Matemática. Conforme se lê em Lins e Gimenez (1997), a presença de atividades em sala de aula, que envolvam, tanto a utilização da Álgebra como forma de sistematizar propriedades observadas (generalização), como a resolução e discussão de problemas utilizando a Álgebra como ferramenta, são importantes.

Além desses motivos e, ao contrário do que é normal pensar, a Álgebra pode ser o fio condutor do currículo escolar, por ter o papel de levar a *pensar o mundo em números* e não apenas por levar a pensar o mundo em letras. Especialmente, em se tratando de Álgebra Escolar, o ideal não é generalizar e esquecer o ponto de partida, não é ir em direção ao abstrato e passar a ver letras por si só, desligando-se da Aritmética. O ideal é entender que ainda há números onde há letras e, assim, não tornar a Álgebra um amontoado de letras desprovidas de significado.

A atividade algébrica, de acordo com informações de Lins e Gimenez (1997) sobre estudos de Davydov[9], tem seu ponto de partida na atividade de lidar com relações quantitativas. Sendo assim, Álgebra e Aritmética têm o trabalho com relações quantitativas como raiz comum, o que permite ver a Álgebra como tratamento de afirmações que envolvem números, operações aritméticas e igualdades e desigualdades, como é identificado na concepção de Álgebra apresentada por aqueles autores.

Sendo assim, a Álgebra pode ser o eixo principal do currículo, não porque com ela tudo se resolve, mas por sua relação com a Aritmética.

Conforme mencionado, a visão que predomina é a que trata a Álgebra como cálculo com letras e a caracterização de uma atividade como algébrica ou não está ligada à presença de certos conteúdos, como equações, expressões, e/ou ao uso de determinadas notações. Porém, aparentemente, essa concepção predominante de Álgebra, juntamente com a primazia de determinados conteúdos no ensino de Álgebra, também não consiste em motivo suficiente para a afirmação de que a Álgebra pode ser o fio condutor do currículo.

Dá-se a entender que a afirmação de que o pensamento algébrico e a linguagem algébrica formam uma relação dialética é uma das justificativas para a afirmação de Ribeiro e Cury (2015), pois esses autores concordam que "o pensamento e a linguagem algébrica são dois aspectos entrelaçados e mutuamente dependentes do mesmo processo" (ARZARELLO, BAZZINI e CHIAPINI, 2001, p. 62 apud RIBEIRO e CURY, 2015, p. 14).

Aqui, não se pretende aprofundar a discussão, mas se crê na linguagem algébrica como decorrente de um pensamento algébrico. Como esses elementos são indissociáveis, corrobora-se com Ponte, Branco e Matos (2009, p. 9) e concorda-se que o grande objetivo do estudo da Álgebra é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Portanto, acredita-se que a Álgebra deve ser o fio condutor do currículo pela importância, tanto do pensamento algébrico quanto da linguagem algébrica.

Apresenta-se, nesse momento, uma discussão a respeito do que trazem os documentos educacionais oficiais brasileiros acerca do assunto, analisando-se alguns itens, como:

---

[9] Estudioso de origem russa, doutor em Psicologia. Seus estudos aproximam as significações aritméticas e algébricas.

a) a concepção de Álgebra embutida neles;
b) a importância dada ao estudo da Álgebra no Ensino Médio;
c) as orientações metodológicas apresentadas;
d) as orientações curriculares destinadas à educação algébrica no Ensino Médio;
e) a definição dos conteúdos considerados essenciais;
f) o tratamento de símbolos e de sua manipulação.

Esses são apenas alguns dos itens que se pode analisar ao realizar-se a leitura de documentos educacionais oficiais e, de agora em diante, a intenção aqui será discutir em torno deles e de outras questões que poderão surgir.

A ideia consiste em relatar os principais pontos observados e que são importantes na compreensão do tema Ensino e Aprendizagem da Álgebra Escolar. Diante disso, foram selecionados dois documentos educacionais que tratam do ensino da Álgebra Escolar no Ensino Médio de forma mais direta, a saber: as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2007) e o Currículo Básico Comum (2008). O primeiro traz informações em nível nacional e o segundo, em nível estadual (relativo ao estado de Minas Gerais).

2.2.1 Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2007)

Começa-se pelo documento: *Orientações Curriculares para o Ensino Médio* (2007) que, de acordo com informações do próprio documento, consiste em um material que apresenta e discute questões relacionadas ao currículo escolar e a cada disciplina em particular, ou seja, trata da inclusão e da abordagem de conteúdos na Educação escolar básica, sem, obrigatoriamente, delimitar “o que” e “como” ensinar.

O documento é apresentado aos professores com a intenção de expor um conjunto de reflexões que alimente a sua prática docente, de modo que não trata de uma prescrição, mas, como o próprio nome diz, refere-se a orientações, as quais se relacionam à escolha de conteúdos; à forma de trabalhar, ao projeto pedagógico e à organização curricular.

Destaque-se que, nas orientações acima expostas, quanto às formas de trabalhar os conteúdos são descartadas as exigências de memorização, *as apresentações de “regras” desprovidas de explicações, a resolução de exercícios repetitivos de “fixação”* ou a aplicação direta de fórmulas, o que leva a crer que, mesmo implicitamente, há a intenção de não restringir o ensino da Álgebra à manipulação algébrica.

A escolha de conteúdos deve ser feita de acordo com os propósitos do ensino de Matemática e em sua abordagem devemos

> [...] colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático - nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, ***generalizar situações, abstrair regularidades***, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. (BRASIL, 2007, p. 70, grifo nosso)

Note-se que, apesar de não se falar em Álgebra, mas da Matemática em geral, inicialmente já aparecem referências ao trabalho com atividades de natureza algébrica. Interessante que, ao tratar das questões de conteúdo, o documento as apresenta organizadas em quatro blocos: *Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade*.

Vê-se que a Álgebra não foi colocada como tema central de estudo, sobressaindo-se, por outro lado, o estudo de Funções. Isso indica que outros itens como, por exemplo, as equações, as inequações, as progressões e os polinômios, não possuem no currículo escolar o mesmo destaque que as Funções, podendo ser inseridos apenas como pré-requisitos ao estudo daquelas. Ademais, fica-se com a impressão de que, ou “alguma coisa” fica em segundo plano, ou o estudo de Funções é suficiente para o aluno aprender tudo o que precisa sobre Álgebra.

Colocar as Funções como um dos grandes blocos temáticos da Matemática, em um primeiro momento, faz pensar que diversos tipos de Funções serão abordados amplamente e que se deveria dar uma abordagem técnica a elas, de forma mais aprofundada, contudo, nem sempre o documento indica um estudo mais detalhado, conforme se verifica nos trechos abaixo:

> O estudo das demais funções trigonométricas *[a não ser, seno, cosseno e tangente]* pode e deve ser colocado em segundo plano.
> As funções polinomiais (para além das funções afim e quadrática), ainda que de forma bastante sucinta, podem estar presentes no estudo de funções. [...]
> Não se recomenda neste nível de ensino um estudo exaustivo dos logaritmos. (BRASIL, 2007, p. 74-75)

Fazendo-se uma leitura atenta das orientações referentes ao estudo de Funções, percebe-se que esse “reducionismo” do estudo de alguns tipos específicos de Funções é pensado e sugerido como forma de evitar que muito tempo e esforço sejam empreendidos na manipulação algébrica. Todavia, mesmo sendo essa a intenção, considera-se importante ter cuidado para que o contato dos estudantes do Nível Médio com as Funções não seja superficial e restrinja-se a explorar um ou outro exemplo.

O ideal é escolher casos que estejam dentro do "domínio" dos alunos, por exemplo,

> Casos em que a função polinomial se decompõe em um produto de funções polinomiais de grau 1 merecem ser trabalhados. Esses casos evidenciam a propriedade notável de que, uma vez se tendo identificado que o número c é um dos zeros da função polinomial $y = P(x)$, esta pode ser expressa como o produto do fator $(x - c)$ por outro polinômio de grau menor, por meio da divisão de P por $(x - c)$. (BRASIL, 2007, p. 74)

Isso significa que a análise do bloco denominado *Funções* não indica que o estudo da Álgebra resume-se ao exame de alguns tipos daquelas, pois estudá-las inclui a necessidade de aprender outros conteúdos e as suas respectivas propriedades operatórias, bem como o domínio da resolução de certos tipos de equações.

Nesse modo de estudar Álgebra no Ensino Médio, alguns conteúdos são considerados como ferramentas para um estudo focado em tipos diferentes de Funções, enquanto outros são fontes de situações de aplicação, assim como a Matemática Financeira é fonte de situações contextualizadas para o estudo da Função Exponencial, quando se trata dos juros compostos.

Dessa forma, a resolução de equações aparece como um dos passos para encontrar a solução de problemas, sendo dispensáveis em outros casos, conforme se lê no trecho a seguir:

> O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc. Procedimentos de resolução de equações sem que haja um propósito maior devem ser evitados. (BRASIL, 2007, p. 75)

Assim, com a inserção de problemas os procedimentos operacionais ganham motivo para serem executados e a notação algébrica ganha significado com a contextualização, afinal, de acordo com o documento, "é na dinâmica de contextualização/descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado" (BRASIL, 2007, p. 83).

Com essa reflexão, conclui-se que uma das orientações do referido documento é trazer a contextualização por meio da Resolução de Problemas[10] e, nesse sentido, o documento em questão alerta que "a contextualização aparece, não como uma forma de ilustrar o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola" (BRASIL, 2007, p. 83), ou seja, pode-se entender que o estudo do bloco denominado *Funções* ganha destaque no Ensino Médio por estar presente em diversas ciências.

A importância do conteúdo matemático fora da escola e a sua presença em fenômenos naturais também são fatores inseridos como parte do que deve ser a Matemática escolar, por exemplo, "as funções trigonométricas seno e cosseno também devem ser associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico" (BRASIL, 2007, p. 74).

No documento citado, um dos itens mais salientados quanto ao estudo de Funções é a sua imagem gráfica. Ao falar dos diversos tipos de Função a serem tratados no Ensino Médio, é amplamente difundida a orientação de que seus gráficos devem ser construídos, principalmente por ser um forte apoio no estudo do comportamento das Funções, por exemplo, crescimento e decrescimento, presentes em algumas relações funcionais. Até mesmo em casos mais "trabalhosos" a construção ainda é indicada, como se vê a seguir:

> Funções do tipo $f(x) = x^n$ podem ter gráficos esboçados por meio de uma análise qualitativa da posição do ponto (x, x^n) em relação à reta $y = x$, para isso comparando-se x e x^n nos casos $0 < x < 1$ ou $x > 1$ e usando-se simetria em relação ao eixo x ou em relação à origem para completar o gráfico. (BRASIL, 2007, p. 74)

Observando-se essa colocação e fazendo-se uma leitura atenta do documento citado, vê-se que, mesmo não aparecendo com muita clareza, a contextualização, juntamente com a Resolução de Problemas, é colocada como forma de estudar Funções, aliando notação algébrica e imagem gráfica, de modo que a ênfase dada à construção de gráficos não as faça "tomar vida própria" e desvincularem-se da notação algébrica e dos conceitos envolvidos nela.

Há a orientação de compreender os significados dos coeficientes presentes em expressões gerais de algumas Funções a partir da análise dos gráficos que são obtidos por meio da *variação* dos valores dos coeficientes. Nesse aspecto, o documento indica que é

[10] Aqui, o termo "Resolução de Problemas" é usado no sentido amplo como uma abordagem metodológica para a Matemática. Já o termo "resolução de problemas" é utilizado quando se trata da ação propriamente dita de encontrar a solução de um problema.

"importante destacar o significado da representação gráfica das Funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes" (BRASIL, 2007, p. 72).

Reforçando a ideia de inter-relacionar notação algébrica e imagem gráfica, o documento referido coloca, como exemplo, o caso da função quadrática, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e orienta que,

> O estudo dessa função – posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/ mínimo, zeros da função – deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o "aspecto" do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras. (BRASIL, 2007, p. 73)

Essas orientações deixam claro, não só a importância dos gráficos, mas também salientam, mesmo que de forma implícita, a necessidade de trabalhar simultaneamente com diferentes representações. Além desses itens, as referidas orientações indicam que o estudo da *variação* deve estar presente. E, como se pode verificar, tal estudo não se restringe a estudar o comportamento das Funções, devido a alterações na variável, mas inclui ainda a observação dos efeitos causados na Função, devido a mudanças em seus parâmetros.

Inclusive, é sob esses aspectos que o uso da tecnologia passa a ser indicado. Encontra-se no documento supracitado (p. 88) a indicação de que há softwares destinados a explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, possuindo determinadas características, como o oferecimento de diferentes representações para um mesmo objeto matemático e a possibilidade de manipular os objetos que estão na tela.

Vê-se que essa indicação vai ao encontro da recomendação de trabalhar com alterações nos coeficientes das Funções - sendo um dos motivos para justificar a inserção da tecnologia no Ensino Médio -, demonstrando também que a utilização da tecnologia na Matemática ultrapassa o estudo de tópicos da Geometria.

Até o momento, foi possível perceber, nas *Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2007)*, que alguns assuntos ganham mais destaque do que outros, tendo a equação obtido espaço no âmbito do estudo das Funções, como suporte a elas. No entanto, as equações e sistemas de equações obtêm destaque no bloco *Geometria*, especificamente na Geometria Analítica, conteúdo no qual o documento expressa relação direta com a Álgebra, conforme se lê:

> O trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre geometria e álgebra. Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. (BRASIL, 2007, p. 77)

Interessante notar que, nesse caso, a ideia da aliança entre Geometria e Álgebra traz consigo a preocupação de não trabalhar com atividades distintas que possuam resultados em comum, sendo a intenção trazida no documento a de posicionar entidades geométricas sob o olhar da Álgebra, colocando-a perante a Geometria, como pode ser claramente observado nas orientações a seguir:

> Posições relativas de retas e círculos devem ser interpretadas sob o ponto de vista algébrico, o que significa discutir a resolução de sistemas de equações. [...] No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. A resolução de um sistema 2x2 de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com *operações elementares*, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas. (BRASIL, 2007, p. 78-79, grifo nosso)

Essas orientações parecem demonstrar que o mencionado documento não trata a Álgebra como ramo da Matemática, isolado dos outros. Porém, não é apenas esse fato que está sendo enfatizado. Como mostrado na expressão em destaque, o documento volta a salientar a orientação de inserir nesse nível de ensino questões operatórias simples, contudo, considera-se que, nesse ponto, aparecem controvérsias, pois o que é indicado como “simples” nem sempre é tão simples como se espera.

Lendo-se cuidadosamente o documento, percebe-se que a prática do escalonamento é considerada uma operação elementar para a resolução de sistemas 2x2 e 3x3 e, quanto a este último (os sistemas quadrados), o documento diz que

> A regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, fica também dispensado o estudo de determinantes. (BRASIL, 2007, p. 78)

Tal observação provoca uma reanálise da *Regra de Cramer* e dos *Determinantes*, por um lado, levando a abandoná-los, por se tratar de recursos pouco úteis, pensando-se conforme quem escreveu o documento. Por outro lado, investigando-se as potencialidades da Regra de Cramer e dos Determinantes, conforme fazem alguns autores de livros didáticos e também alguns professores de Matemática, salienta-se a sua importância, assim, para Iezzi[11] *et al*, os resultados conhecidos como Regra de Cramer podem ser generalizados para um sistema *n x n* (*n* equações e *n* incógnitas). Afirmam ainda, alguns autores e professores, que

> a *Regra de Cramer* é um importante recurso na resolução de sistemas lineares possíveis e determinados, especialmente quando o escalonamento se torna muito trabalhoso (por causa dos coeficientes das equações do sistema), ou ainda quando o sistema é literal. (IEZZI et al, 2002, p.280)

Desse modo, têm-se duas visões diferentes e ambas baseiam-se no mesmo fato: a regra de Cramer destina-se a um grupo particular (porém, amplo) de sistemas de equações. Fato esse que deve consistir-se de um argumento para a presença desse conceito e dos Determinantes no currículo escolar. Aliás, por ser um recurso facilitador das resoluções, não deveria ser recomendado o abandono de seu ensino, já que o documento privilegia as questões operatórias elementares.

Além disso, desconsiderar o estudo dos Determinantes no Nível Médio é um fator intrigante, presente no documento, pois nele há enfoque nas resoluções de sistemas de forma simples, inclusive com discussão sobre a existência ou não de soluções. Por isso, aqui fica uma pergunta que muitos professores de Matemática devem fazer: *Por que desconsiderar o estudo dos Determinantes se eles fornecem uma eficiente e simples forma de identificar se um sistema possui solução única ou não?*

A impressão é que a preocupação em não destacar as questões operatórias da Matemática pode levar ao "reducionismo" de manipulação algébrica e ao "reducionismo" de conteúdo. E esse é um ponto crucial que merece atenção, pois o menosprezo de conteúdos matemáticos e a redução extrema do estudo de propriedades operatórias podem comprometer o desenvolvimento futuro do aluno em disciplinas de Nível Superior, o que é totalmente inadequado, visto que um dos objetivos do Ensino Médio é garantir ao aluno a continuidade dos estudos.

---

[11] Autor de livros didáticos de Nível Fundamental, Médio e Superior de Matemática.

2.2.1 Currículo Básico Comum (2008)

O segundo documento a ser analisado é o CBC (2008) – Currículo Básico Comum – do Ensino Médio do estado de Minas Gerais[12].

O CBC (2008) apresenta-se como um guia, um roteiro para que os professores de Matemática, juntamente com a equipe pedagógica da escola, elaborem a proposta curricular mais adequada àquela realidade. O documento, além de se estruturar em *Eixos Temáticos* e *Tópicos*, apresentando quais conteúdos considera necessários e adequados para o Nível Médio e as habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos, traz sugestões referentes a abordagens dos conteúdos em sala de aula e também sugestões de atividades.

Isso é feito com a intenção de contribuir para que a escola contemple, com sua listagem de conteúdo programático, os princípios e orientações de outros documentos mais abrangentes, como os *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)* e as *Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM)*.

A ideia consiste em identificar como a Álgebra é tratada nesse documento, assim como foi feito com o documento supramencionado.

De início, encontram-se indícios de preocupação com a linguagem simbólica e com o formalismo da Matemática, sendo colocada a necessidade do aluno (do Nível Médio) de compreender e utilizar essa linguagem, sendo este um diferencial em relação ao documento anteriormente citado. Conforme se lê, o CBC considera que:

> A Matemática é uma ferramenta essencial na solução de problemas do mundo em que vivemos. Nela são desenvolvidas estruturas abstratas baseadas em modelos concretos; ***raciocínios puramente formais***, permitem concluir sobre a possibilidade ou não da existência de certos padrões e suas propriedades no modelo original. [...] Além de método, a Matemática é um meio de comunicação – ***uma linguagem formal*** – e como tal requer uma prática constante, um exercício de sua “gramática”. Por ser uma linguagem precisa, a Matemática permite a argumentação de forma clara, concisa, rigorosa e universal. (MNAS GERAIS, 2008, p. 31-32)

Por essas considerações, percebe-se que o CBC entende a Matemática dotada de formalismo e de elementos abstratos, sendo tal circunstância um ponto para que ela constitua-se em uma ferramenta na resolução de problemas, e não um fator que a torna uma ciência afastada das questões da prática. A sugestão é de que o rigor seja tratado como um aliado ao

---

[12] Esse documento foi selecionado por se referir ao estado de origem da autora desta pesquisa, onde atuou como professora da Educação Básica.

ensino e à aprendizagem da Matemática no Nível Médio, e não como um agente complicador. Ele está presente nas diversas fases da atividade matemática, inclusive, o CBC (p. 34) recomenda que, no Ensino Médio, deve ser dada ênfase a justificativas mais formais, introduzindo, dessa forma, a linguagem um pouco mais rigorosa.

Para desenvolver essa linguagem é necessário usá-la, treiná-la, saber suas regras e lidar com uma simbologia específica: os símbolos algébricos. Dessa forma, veem-se indícios de que o CBC abre espaço para a manipulação algébrica. Esses e outros possíveis detalhes importantes serão observados, tendo em vista a divisão de conteúdos apresentada no documento. Primeiramente, é necessário esclarecer que o CBC divide os tópicos a serem estudados em três grandes blocos, chamados de Eixos Temáticos, a saber:

a) Eixo Temático I: Números, Contagem e Análise de Dados;
b) Eixo Temático II: Funções Elementares e Modelagem;
c) Eixo Temático III: Geometria e Medidas.

Assim como acorreu na análise do primeiro documento, no CBC também não há um espaço que trate especificamente da Álgebra com amplitude e profundidade de conteúdos. O tema Funções, novamente, tem papel central e detém grande parte das orientações e sugestões para o tratamento da Álgebra no Nível Médio. Veja-se um recorte que demonstra e justifica o que foi exposto:

> O conceito de função é um dos temas centrais e unificadores da matemática, podendo ser usado em diversas situações, mesmo não numéricas, por exemplo, na geometria, quando falamos em transformações geométricas.
> As funções elementares estudadas no Ensino Médio - afim, polinomial, exponencial e trigonométricas - permitem a análise de fenômenos que envolvam proporcionalidade, crescimento, decaimento e periodicidade, que são bastante comuns no cotidiano. (p. 36)

Desse recorte e, por meio da leitura atenta do documento, torna-se possível verificar que o estudo das Funções ganha destaque por permitir estudar Matemática – no caso, Álgebra – tendo por base metodologias ligadas à contextualização, como a Resolução de Problemas e a Modelagem, sendo, portanto, mais uma das semelhanças com o documento anterior.

Outro fator comum entre os documentos é a presença de temas algébricos envolvidos na Geometria, aqui, no Eixo Temático *Geometria e Medidas*. O CBC (2008, p. 37) considera que, no Ensino Médio, um dos aspectos a serem levados em conta no estudo da Geometria é a sua algebrização, ocorrendo "através da introdução de um modelo para a geometria euclidiana plana (geometria analítica)".

Nesse caso, a Álgebra é usada como forma de apoio ao estudo da Geometria, significando que esta é colocada sob o olhar da Álgebra, fato confirmado na afirmação: "a geometria analítica permite tratar lugares geométricos planos por meio de equações, transformando problemas geométricos em problemas algébricos" (p. 37).

Outro item que recebe incentivo, tanto no Eixo Temático Funções Elementares e Modelagem quanto no eixo *Geometria e Medidas,* é o trabalho com a representação gráfica de Funções. Embora a abordagem dos gráficos não seja indicada com a mesma intensidade como ocorre nas *Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006),* ela é citada com frequência em relação ao estudo das principais Funções, de primeiro grau, de segundo grau e trigonométricas.

Também é uma recomendação frequente levar o estudante a trabalhar simultaneamente com as representações gráfica e algébrica. Aliás, como se pode observar no Eixo Temático Funções Elementares e Modelagem, fala-se em "identificar geometricamente" e "interpretar o resultado geometricamente", mostrando-se que a Álgebra também é colocada sob o olhar da Geometria, principalmente pela presença dos gráficos. Portanto, a Geometria é um apoio para o estudo da Álgebra e esta é um apoio para estudar elementos geométricos, do mesmo modo como foi citado anteriormente, no primeiro documento analisado.

Considera-se o estabelecimento de vínculo entre Geometria e Álgebra, sempre positivo, pois, embora o foco das atenções não seja, necessariamente, as equações, elas podem "ganhar vida", ao permitirem o tratamento algébrico de questões geométricas. Parece que tal situação não deixa de ser um incentivo ao entendimento da utilização de equações (saber onde inseri-las) e à necessidade de saber resolvê-las, assim como realizar outras manipulações algébricas.

Conforme se pode verificar no fragmento a seguir, o CBC considera o estudo de conteúdos aliado às suas propriedades operatórias, comprovando que ele abre espaço para questões operatórias.

> É importante frisar que os conteúdos conceituais ou ideias básicas apresentados formam o esqueleto, a estrutura da proposta, enquanto os conteúdos relacionados às atitudes e procedimentos formam a carne que lhe dá sustentação. Essas peças complementares devem ser encaradas como integradas, uma não existindo sem a outra. (p. 38)

Dessa forma, nesse documento não há preocupação em indicar a inserção de questões operatórias simples nas atividades em sala de aula. O documento coloca, como habilidades a serem desenvolvidas, a resolução de equações, inequações e resolução de sistemas, além da utilização dessas e de outras propriedades operatórias na resolução de problemas, indicando a necessidade de lidar com regras. Contudo, reconhecer o papel dos procedimentos não significa que o documento parece ser a favor da introdução de regras sem explicação e traga uma visão de Álgebra centrada no cálculo literal.

Sobre a perspectiva de considerar as operações como um fator complicador e a retirada de itens considerados complexos, assim como verificado nas *Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006)*, viu-se que o mesmo não ocorre no CBC (2008). Ademais, o que o primeiro documento "descarta" no tópico "funções trigonométricas", o segundo coloca como uma das habilidades necessárias, como indicado a seguir:

> Alguns tópicos usualmente presentes no estudo da trigonometria podem ser dispensados, como, por exemplo, as outras três razões trigonométricas, as fórmulas para $sen(a + b)$ e $\cos(a + b)$, que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas. (BRASIL, 2007, p. 74)
>
> Resolver problemas que envolvam funções trigonométricas da soma e da diferença de arcos. (MINAS GERAIS, 2008, p. 38)

Ainda refletindo sobre a presença das Funções Trigonométricas nos documentos supracitados, é necessário esclarecer que o CBC também não faz referência a nenhuma outra Função, a não ser as Funções Seno, Cosseno e Tangente, havendo possíveis diferenças apenas na forma de abordá-las.

Já em relação a outros conteúdos, não considerados muito relevantes pelas *Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2007)*, como as Matrizes, os Determinantes e a Regra de Cramer, não existem recomendações mencionadas pelo CBC. Observando-se os tópicos citados, vê-se que a única indicação quanto à resolução de sistemas consiste em resolvê-los com duas variáveis, de modo que, como não há indicação referente à resolução de sistemas de outros tipos, fica implícita a desnecessidade dos itens citados.

Todas as observações feitas em relação ao CBC podem ser verificadas pela análise do extrato apresentado a seguir.

<u>Conteúdos algébricos do CBC para o 1º ano do Ensino Médio</u>

Eixo Temático: Funções Elementares e Modelagem

Tema: Funções.

Tópicos	**Habilidades**
Função do primeiro Grau	Identificar uma função linear a partir de sua *representação algébrica ou gráfica*. Utilizar a função linear para representar relações entre grandezas diretamente proporcionais. Reconhecer funções do primeiro grau como as que têm variação constante. Identificar uma função do primeiro grau a partir de sua *representação algébrica ou gráfica.* *Representar graficamente* funções do primeiro grau. Reconhecer funções do primeiro grau crescentes ou decrescentes. Identificar os intervalos em que uma função do primeiro grau é positiva ou negativa, relacionando com a solução algébrica de uma inequação. Identificar geometricamente uma semirreta como uma *representação gráfica* de uma inequação do primeiro grau. Reconhecer uma progressão aritmética como uma função do primeiro grau definida no conjunto dos números inteiros positivos. <u>Resolver problemas</u> que envolvam inequações do primeiro grau.
Progressão aritmética	Reconhecer uma progressão aritmética em um conjunto de dados apresentados em uma tabela, sequência numérica ou em <u>situações-problema</u>. Identificar o termo geral de uma progressão aritmética.
Função do segundo Grau	Identificar uma função do segundo grau a partir de sua *representação algébrica ou gráfica.* *Representar graficamente* funções do segundo grau. Identificar os intervalos em que uma função do segundo grau é positiva ou negativa. <u>Resolver situações-problema</u> que envolvam as raízes de uma função do segundo grau. <u>Resolver problemas</u> de máximos e mínimos que envolvam uma função do segundo grau.
Progressão Geométrica	Identificar o termo geral de uma progressão geométrica.

Função exponencial	Identificar exponencial crescente e exponencial decrescente. <u>Resolver problema</u>s que envolvam uma função do tipo $y = k.a^x$. Reconhecer uma progressão geométrica como uma função da forma $y = k.a^x$ definida no conjunto dos números inteiros positivos.

Eixo Temático: Funções Elementares e Modelagem

Tema: Matemática Financeira

Tópicos	**Habilidades**
Matemática Financeira	<u>Resolver problemas</u> que envolvam o conceito de porcentagem. <u>Resolver problemas</u> que envolvam o conceito de juros simples ou compostos. <u>Resolver situações-problema</u> que envolvam o cálculo de prestações em financiamentos com um número pequeno de parcelas.

Eixo Temático: Geometria e Medidas

Tema: Geometria Analítica

Tópicos	**Habilidades**
Plano cartesiano	Localizar pontos no plano cartesiano. Representar um conjunto de dados graficamente. <u>Resolver problemas</u> que envolvam simetrias no plano cartesiano. Reconhecer a **equação** de uma reta no plano cartesiano. Interpretar geometricamente a inclinação de uma reta.

<u>Conteúdos algébricos do CBC para o 2º ano do Ensino Médio</u>

Eixo Temático: Funções Elementares e Modelagem.

Tema: Funções

Tópicos	**Habilidades**
Funções do Primeiro Grau	Relacionar o *gráfico* de uma função do primeiro grau, no plano cartesiano, com uma reta.
Progressão aritmética	<u>Resolver problemas</u> que envolvam a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

Inequações do segundo grau	Identificar geometricamente uma inequação com parte de um *gráfico* de uma função do segundo grau. Resolver problemas que envolvam inequações do segundo grau.
Progressão geométrica	Resolver problemas que envolvam a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.
Funções logarítmicas	Reconhecer a função logarítmica como a inversa da função exponencial. Utilizar em problemas as propriedades operatórias da função logarítmica. Resolver problemas que envolvam a função logarítmica. Reconhecer o *gráfico* de uma função logarítmica.
Sistemas de equações lineares	Reconhecer se uma tripla ordenada é solução de um sistema de equações lineares. Resolver um sistema de equações lineares com duas variáveis e interpretar o resultado geometricamente. Resolver problemas que envolvam um sistema de equações lineares.

Eixo Temático: Geometria e Medidas

Tema: Geometria Analítica

Tópicos	**Habilidades**
Plano cartesiano	Resolver problemas que envolvam a distância entre dois pontos no plano cartesiano. Relacionar a tangente trigonométrica com a inclinação de uma reta. Reconhecer e determinar a **equação** da reta a partir de sua inclinação e das coordenadas de um de seus pontos; ou a partir de dois de seus pontos de coordenadas dadas numericamente ou por suas representações no plano cartesiano. Identificar a posição relativa de duas retas a partir de seus coeficientes. Reconhecer e determinar a **equação** de uma circunferência conhecidos seu centro e seu raio ou seu centro e um de seus pontos.

Conteúdos algébricos do CBC para o 3º ano do Ensino Médio

Eixo Temático: Números, Contagem e Análise de dados

Tema: Números

Tópicos	Habilidades
Números Complexos	Reconhecer a necessidade de ampliação dos números reais. Representar geometricamente um número complexo. Operar com números complexos e identificar suas partes real e imaginária: somar, subtrair, multiplicar, dividir, calcular uma potência, raízes, o conjugado e o módulo de um número complexo. Resolver equações do segundo grau. Forma polar ou trigonométrica de números complexos

Eixo Temático: Funções Elementares e Modelagem.

Tema: Funções

Tópicos	Habilidades
Funções trigonométricas	Identificar o *gráfico* das funções seno, cosseno e tangente. Reconhecer o período de funções trigonométricas. Resolver equações trigonométricas simples.
Estudo de funções	Reconhecer funções definidas por partes em situações-problema. Reconhecer os efeitos de uma transição ou mudança de escala no *gráfico* de uma função. Usar a função logarítmica para efetuar mudança de escala.

Eixo Temático: Geometria e Medidas

Tema: Semelhança e Trigonometria

Tópicos	Habilidades
	Resolver problemas que envolvam funções trigonométricas da soma e da diferença de arcos. Resolver problemas que envolvam a lei dos senos.

Funções trigonométricas	Resolver problemas que envolvam a lei dos cossenos. Identificar os *gráficos* das funções seno e cosseno. Identificar o período, a frequência e a amplitude de uma onda senoidal.

Eixo Temático: Geometria e Medidas

Tema: Geometria Analítica

Tópicos	Habilidades
Interseções entre retas e circunferências	Resolver e interpretar geometricamente um sistema formado por uma **equação** de reta e outra de circunferência. Reconhecer a **equação** de uma circunferência identificando seu centro e seu raio. Resolver e interpretar geometricamente um sistema formado por uma **equação** de reta e outra de parábola.
Elipse, hipérbole e parábola	**Equação** cartesiana da elipse. **Equação** cartesiana da hipérbole. **Equação** cartesiana da parábola. Relacionar as propriedades da parábola com instrumentos óticos e antenas. Reconhecer a elipse como um lugar geométrico e relacioná-la com as leis de Kepler.

2.2.3 Possíveis conclusões da análise apresentada

Os dois documentos apresentados e destinados a orientar os professores de Matemática do Ensino Médio têm sustentação na Contextualização e Resolução de Problemas, mas o CBC cita ainda a Modelagem. Percebe-se que ambos os documentos veem os problemas como uma forma de estabelecer conexão entre Matemática e vida real, por isso os problemas de aplicação são frequentemente citados, porém, citam-se também as situações–problema, indicando que, além de os problemas serem inseridos na atividade didática como forma de aplicação da Matemática, eles também aparecem como ponto de partida para a aprendizagem de algum conceito matemático.

Diante do exposto, conclui-se que se encontram nos referidos documentos duas concepções do trabalho com resolução de problemas: o ensino para a resolução de problemas e o ensino através da resolução de problemas. Como explicam Allevato e Onuchic (2014), no ensino para a resolução de problemas a Matemática é vista por sua utilidade, sendo o propósito principal utilizar o conhecimento matemático adquirido. Portanto, os problemas são compreendidos como forma de aplicação dos conteúdos estudados.

Tal modo de conceber a resolução de problemas (ensinando Matemática para encontrar a solução de problemas) é perceptível nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, mas aparece com mais evidência no CBC, o que pode ser confirmado pelo uso frequente da expressão "resolver problemas que envolvam...".

Já o ensino através da resolução de problemas, de acordo com as autoras citadas, toma os problemas com o propósito de se aprender Matemática, não havendo, entre esta e a resolução de problemas, aquela que se sobressai, ao contrário, ambas são consideradas simultaneamente. Para verificar a presença dessa concepção nos documentos analisados, basta observar o uso da expressão "situação-problema".

De acordo com o CBC, os problemas são inseridos no Ensino Médio a fim de promover nos alunos a capacidade de usar a linguagem simbólica para interpretar questões formuladas verbalmente, desenvolver a capacidade de abstração do aluno e atribuir significado aos conceitos abstratos estudados. Ou seja, no CBC a Resolução de Problemas é um recurso metodológico fortemente recomendado no estudo de conteúdos algébricos, não apenas por tê-los como requisitos para o ato de encontrar uma solução aritmética ou algébrica para os problemas.

Percebe-se ainda no CBC outra maneira de "encarar" o trabalho com resolução de problemas, o "ensino sobre Resolução de Problemas", que, resumidamente, de acordo com Allevato e Onuchic (2014), está voltado ao desenvolvimento de habilidades necessárias à resolução de problemas, tratando-se de orientações gerais sobre como se deve proceder e o que se deve saber para resolver um problema.

As autoras explicam que

> O ensino sobre resolução de problemas corresponde a considerá-la como um novo conteúdo. São abordados temas relacionados à resolução de problemas e percebe-se uma forte ênfase nas heurísticas como forma de orientar os alunos na resolução de problemas, com regras e processos gerais,

> independentes do conteúdo específico abordado [...]. (ALLEVATO e ONUCHIC, 2014, p. 37)

Veja-se um trecho do CBC que comprova a presença da Resolução de Problemas do ponto de vista do "ensino sobre resolução de problemas":

> O constante desenvolvimento das habilidades para a solução de problemas envolve as seguintes estratégias, que devem tornar-se hábito para o aluno:
>
> - Usar figuras, diagramas e gráficos, tanto de forma analítica quanto intuitiva.
> - Expressar oralmente ou por escrito, com suas próprias palavras, propriedades matemáticas, atribuindo significado aos conceitos abstratos e formulando, por meio do uso da linguagem simbólica, questões expressas verbalmente.
> - Perceber padrões em situações aparentemente diversas.
> - Estudar casos especiais mais simples, usando-os para elaborar estratégias de resolução de casos mais complexos ou gerais.
> - Fazer uso do método de tentativa e erro, elaborando novas estratégias de solução a partir da análise crítica dos erros.
> - Usar a simbologia matemática (sentenças) com variáveis e equações.
> - Usar a analogia como ferramenta de trabalho, recorrendo a métodos já utilizados e adaptando-os para a resolução de novos problemas.
> - Trabalhar de trás para diante, supondo conhecida a solução de um problema e deduzir suas propriedades para obter um caminho para encontrá-la.
> - Compartilhar e discutir observações e estratégias de outros estudantes, adquirindo, assim, experiência e novos insights para abordar um problema. (MINAS GERAIS, 2008, p. 38-39)

Portanto, conforme a discussão apresentada, nos dois documentos supramencionados, os conteúdos algébricos encontram-se ancorados na Resolução de Problemas como abordagem metodológica, perpassando pelos três modos de conceber o trabalho com os problemas, porém, com destaque para a abordagem "ensino para a resolução de problemas".

De todas as observações feitas, mostrou-se importante verificar que os problemas são recomendados nas três séries do Ensino Médio em busca de não apresentar os conteúdos algébricos destituídos de significado e também com o propósito de promover o uso da linguagem simbólica.

Ressalte-se que a verificação da recomendação da Resolução de Problemas pelos documentos referidos é de grande relevância para a presente pesquisa, uma vez que

> A RP [Resolução de Problemas], para além da prática de resolver problemas nas aulas de Matemática, pressupõe aulas de Matemática com professores e alunos envolvidos em comunidades de aprendizagem, desempenhando

> diferentes papéis e responsabilidades, visando a promover uma aprendizagem mais significativa. (MORAIS e ONUCHIC, 2014, p.17)

Assim, apesar de os documentos não mencionarem o LEM como alternativa metodológica, recomendam a Resolução de Problemas, que, a partir de uma boa observação, inter-relaciona-se com o LEM.

Todavia, envolto na Resolução de Problemas (enquanto conteúdo curricular), o tema Álgebra não detém espaço específico no currículo, pois não é encontrado um Bloco ou Eixo Temático denominado "Álgebra", ou seja, os assuntos algébricos não estão dispostos no currículo em um conjunto fechado, destinado exclusivamente a eles. Isso indica que a Álgebra não se encontra "isolada" no currículo, o que é um fator positivo, no entanto, também se mostra necessário dar atenção aos conteúdos algébricos, de modo a não serem minimizados.

Assim como demonstrado anteriormente, os temas algébricos estão submetidos, principalmente, aos blocos *Funções* e *Funções Elementares e Modelagem*, referindo-se às Orientações Curriculares e ao CBC, respectivamente. No entanto, há uma inter-relação entre Geometria e Álgebra, motivo pelo qual itens algébricos – principalmente as equações – encontram-se envolvidos nos blocos referentes à Geometria, especialmente na Geometria Analítica.

Com essa aliança, não apenas a Geometria recebe o apoio da Álgebra, algebrizando os problemas, mas a interpretação geométrica e o uso de gráficos tornam-se aliados do estudo de Funções, pois o seu grande destaque no Nível Médio são as representações gráficas. Porém, o apoio que a Geometria presta à Álgebra não deve levar ao pensamento de que a Geometria está sendo colocada no âmbito das Funções, ou seja, não tem relevância própria.

Essa situação não acontece apenas com a Geometria, as Progressões Aritmética e Geométrica são incluídas no CBC no Eixo Temático *Funções Elementares e Modelagem* por serem exemplos de Funções. A Matemática Financeira é tida pelos dois documentos como fonte para contextualização no estudo de Função Exponencial, por conta dos juros compostos. Nesse sentido, também outros tópicos algébricos, como Equações, Polinômios e Logaritmos tornam-se recursos auxiliares para o estudo da Álgebra focado em Funções.

Por um lado, pode-se pensar que a colocação do tema Funções com destaque significativo no currículo pode reduzir a abordagem da Álgebra ao estudo de Funções, de modo que alguns assuntos da Álgebra e até mesmo outros assuntos apareçam sempre numa perspectiva de Funções, assim como Ponte (2006, p. 18) diz ser o caso do currículo de Matemática de Portugal.

Nesse caso, manter a ênfase no estudo de Funções pode, não só levar a um grande destaque dos gráficos em detrimento da noção de Função como também fazer com que assuntos algébricos não tenham importância por si mesmos, passando sempre a assumir o papel de pré-requisitos de Funções, e isso seria simplificá-los.

Por outro lado, conforme apontado anteriormente, ter as Funções como tema central não indica que o estudo da Álgebra resume-se ao estudo de alguns tipos delas, justamente porque estudá-las inclui a necessidade de aprender outros conteúdos – algébricos e não algébricos – e as suas respectivas propriedades operatórias. Então, sob esse ponto de vista, ter as Funções como tema central do currículo implica o estudo detalhado e rigoroso de temas como Equações, Potências e Logaritmos, Polinômios, Progressões, Juros simples e compostos, dentre outros. Afinal, estudar Funções, por si só, é inconcebível.

Dar enfoque algébrico à Geometria e à Matemática Financeira seria apenas o reconhecimento de que a Álgebra está mesmo na base do currículo de Matemática, enquanto ter as Funções como tema estruturante do currículo, em se tratando de estudar Álgebra no Ensino Médio, pode ser entendido como uma forma de reconhecer que a Álgebra tem como raiz as relações quantitativas. O destaque dado às Funções e à representação gráfica leva a crer que a visão de Álgebra que se sobressai em importância nos documentos curriculares analisados é aquela que a concebe como o estudo das relações entre quantidades.

Portanto, o problema da Álgebra no currículo de Nível Médio parece consistir em dar mais destaque a um assunto do que a outro, levando ao menosprezo e ao abandono do estudo de alguns assuntos e técnicas. Pensa-se que ter um Bloco ou um Eixo Temático denominado *Funções,* no Nível Médio, não pode implicar abordagens superficiais e abandono de temas importantes ao aluno que ingressará no Nível Superior. Pode-se até lançar um olhar diferente para itens como Inequações e Sistemas de Equações e Inequações, mas sem deixar que sejam menosprezados.

Por meio das observações feitas, pode-se concluir que os documentos acima mencionados trazem a Álgebra do Ensino Médio envolta, principalmente, em duas visões: como meio de resolver problemas e como estudo de relações[13].

[13] Uma discussão mais detalhada a respeito dessa concepção de Álgebra é encontrada em: USISKIN, ZALMAN. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.). *As ideias da Álgebra.* São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

2.3 As Dificuldades com o Ensino e Aprendizagem de Álgebra

Sabe-se que as dificuldades dos alunos em Álgebra não são poucas. De acordo com Tinoco *et al* (1995), mesmo entre os alunos que escrevem expressões algébricas foram detectadas dificuldades como: pensar que uma expressão algébrica tem de ser igualada a um número ou pelo menos a uma letra (em geral, x); transformar erroneamente uma expressão, tentando simplificá-la; usar sinais de pontuação (parênteses) inadequadamente; igualar indevidamente uma expressão a zero, obtendo uma equação; interpretar precariamente informações codificadas, por exemplo, por legenda; realizar procedimentos, aparentemente, aleatórios ao resolver equações.

Entretanto, essas são apenas algumas das variadas dificuldades encontradas na aprendizagem dos conceitos algébricos. Além dessas, tem-se outro fato marcante: a transposição da linguagem corrente para a simbólica.

Segundo Lochhead e Mestre (1995), o passo mais difícil na resolução de problemas talvez seja o processo de tradução das palavras para os termos da linguagem simbólica da Álgebra. Nesse caso, a utilização da resolução de problemas é fortemente recomendada, por levar, gradualmente, da verbalização ao simbolismo algébrico e também por fundamentar a aprendizagem de novos tópicos no conhecimento e na compreensão que os alunos já possuem (SCHOEN, 1995, p. 137-138).

Contudo, também ocorrem erros quando se trata de situações conhecidas. Portanto, o uso de tais situações não implica uma aprendizagem significativa. Isso se deve, geralmente, ao fato de que eles não veem a Álgebra, ou a Matemática em geral, como um meio de modelar o mundo. Além disso, há o fato de escreverem uma equação com "incógnitas" e depois substituírem-nas por quantidades dadas no problema, revelando falta de compreensão quanto ao uso de letras para representar quantidades desconhecidas (SIMON; STIMPSON, 1995, p. 157).

Para Lochhead e Mestre (1995), o fato de os alunos não aprenderem a ler e a escrever em Matemática, não só limita seu desempenho na resolução de problemas como também os coloca em séria desvantagem, quando se trata de aprender a manipulação simbólica das regras da Álgebra.

Como se pode notar, as dificuldades relatadas estão relacionadas à simbologia utilizada pela Álgebra e os problemas vão desde os significados que os símbolos representam até o modo de manipulá-los. Por esse motivo, considera-se importante dar atenção aos problemas que os alunos apresentam em relação à simbologia, afinal, a falta de compreensão e de domínio de tal assunto pode comprometer a aprendizagem da Matemática como um todo.

Ponte, Branco e Matos (2009) corrobora essa discussão, alertando que é preciso ter cuidado ao lidar com a linguagem simbólica, pois, dependendo da forma como for abordada, a simbologia pode, sim, trazer malefícios, como é visto a seguir:

> A linguagem algébrica cria a possibilidade de distanciamento em relação aos elementos semânticos que os símbolos representam. Deste modo, a simbologia algébrica e a respectiva sintaxe ganham vida própria e tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas. [...] No entanto, esta grande potencialidade do simbolismo é também a sua grande fraqueza. Esta vida própria tem tendência a desligar-se dos referentes concretos iniciais e corre o sério risco de se tornar incompreensível para o aluno. (p. 08)

Dessa forma, não apenas os símbolos ganham vida própria, mas também a sua manipulação ganha regras sem explicação e esse tem sido um dos grandes problemas em Álgebra. Mesmo com o ensino pautado em técnicas, com seções de exercícios de aplicação delas, a manipulação algébrica ainda tem sido fonte de dificuldades para os alunos, provando, mais uma vez, que os símbolos merecem destaque e cuidado.

As deficiências em Álgebra envolvem ainda conceitos essenciais, como as Funções. O levantamento de pesquisas referentes ao ensino e à aprendizagem de Equações e Funções, feito por Ribeiro e Cury (2015), aponta alguns dos problemas encontrados, tais como: o fato de os alunos investigados atribuírem à equação o significado de uma "conta" a ser realizada, para a qual o sinal de igual assume um caráter unicamente operacional; não reconhecer a estrutura interna de uma equação, relacionando o conceito de equação simplesmente com o seu processo de resolução; dificuldades com termos que fazem parte da própria definição de função (domínio, contradomínio, imagem) e considerar que todas as funções são lineares, unindo os pontos com uma linha reta.

Como conclusão da análise dos resultados dos estudos selecionados, os autores supracitados afirmam que

> esse levantamento de pesquisas mostra que há vários problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem de equações e funções, os quais estão, normalmente, relacionados ao fato das equações e funções serem frequentemente compreendidas como um "amontoado" de símbolos, regras e procedimentos, muitas vezes desprovidos de significado. (RIBEIRO e CURY, 2015, p. 20)

Parece, assim, que os resultados desse levantamento indicam que, apesar de o tema Funções já estar sendo inserido na estrutura do currículo de Matemática no Ensino Médio, conforme discutido no capítulo anterior, o tema tem sido fonte de deficiências primárias e, por isso, esforços ainda são necessários quanto ao ensino das Funções.

Outra observação bastante relevante, também feita por Ribeiro e Cury (2015, p. 58), foi que, a partir dos resultados apresentados pelo Instituto de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), constatou-se que os estudantes que chegam ao final do período de escolarização não dominam competências como: 1) identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema; 2) resolver equações do 1º grau com uma incógnita; 3) resolver problemas que envolvam equação do 2º grau; 4) identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1º grau; 5) identificar, em um gráfico de função, o comportamento de crescimento/decrescimento; 6) identificar o gráfico de uma reta dada sua equação; dentre outras.

Como se nota, as dificuldades dos alunos com a Álgebra fazem parte da realidade estudantil com bastante frequência, sendo relatadas desde o início do estudo em Álgebra, ainda no Ensino Fundamental, e “transportadas” para o Ensino Médio.

Atualmente, alguns estudos realizados com estudantes do Nível Superior têm demonstrado que as deficiências apresentadas no Ensino Básico, inclusive aquelas referentes aos conceitos e procedimentos da Álgebra, podem interferir na aprendizagem de Matemática de Nível Superior.

Mota, Jucá e Vogado (2013), ao realizarem um estudo com o objetivo de identificar erros cometidos por alunos da Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual do Pará (quanto aos conteúdos de Limite e Derivada), apresentaram um recorte de pesquisas sobre a temática, onde se pode constatar que os principais problemas de aprendizagem dos estudantes em relação a Limite e Derivada são devidos aos seguintes fatores:

> a) Não desenvolvem atividades algébricas baseadas em regras;
> b) Apresentam erros na manipulação algébrica;
> c) Falta de domínio na fatoração de expressões algébricas que definem as funções, para a posterior aplicação das propriedades do limite;
> d) Os alunos não conseguem estabelecer as relações existentes entre uma função e a sua derivada;
> e) Dificuldade no conceito de derivada para efetuar o tratamento da questão;
> f) Os alunos não compreendem a ideia intuitiva do limite de uma função, nem dominam suas propriedades;
> g) Dificuldade na associação de algumas das propriedades da derivada de uma função. (MOTA, JUCÁ e VOGADO, 2013, p. 4-5)

Indo ao encontro das constatações obtidas com o recorte, os resultados da pesquisa de Mota, Jucá e Vogado (2013) são bem semelhantes aos mencionados acima, pois afirmam que

> Foi possível constatar em nossas análises que a causa dos erros dos alunos em Limite está relacionada à falta de compreensão da ideia de limite e à aplicação dos procedimentos algébricos corretos no caso da indeterminação apresentada. A causa dos erros dos alunos em Derivada relaciona-se, sobretudo, com a falta de compreensão das regras de derivação, bem como dos procedimentos algébricos adequados. [...] Em conversas informais com o professor da turma, foi possível destacar que no estudo de limite as dificuldades estão em aplicar corretamente as propriedades, as manipulações algébricas, as indeterminações e a definição de função contínua. E as dificuldades em derivada acontecem nas operações básicas da aritmética e nas aplicações corretas das regras de derivação. (MOTA, JUCÁ e VOGADO, 2013, p. 13)

Ou seja, verifica-se que as dificuldades apresentadas por alunos do Ensino Superior ao lidarem com disciplinas de Matemática, especialmente o Cálculo Diferencial e Integral, revelam a existência de uma problemática em torno da transição da Matemática Escolar para a Matemática de Nível Superior, fato constatado não apenas em cursos de Engenharia, como no próprio curso de graduação em Licenciatura em Matemática.

No entanto, percebe-se, tanto pelo recorte apresentado por Mota, Jucá e Vogado (2013) como pelos resultados de sua pesquisa, que as dificuldades não se restringem ao contato com novos conteúdos e novas notações e simbologias. Não surgem apenas quando os alunos se deparam com novos conceitos, como o Limite, a Derivada e a Integral, conteúdos com maior nível de abstração e, geralmente, apresentados com rigor e formalismo embutidos em uma notação específica e, até então, desconhecida pelos alunos.

Nota-se também a falta de pré-requisitos, ou seja, a falta de conhecimento de conceitos e procedimentos de conteúdos de Matemática, referentes ao Ensino Médio, principalmente no que concerne à Álgebra. Este fato leva a crer que essa defasagem seja uma das causas do alto índice de reprovação nos primeiros semestres, levando ainda à evasão.

CAPÍTULO 3: UM RECORTE DA SITUAÇÃO EDUCACIONAL EM ÁLGEBRA

3.1 As narrativas de professores

Acredita-se que a melhor forma de conhecer um cenário é ouvir o que conta quem vive nele, apesar de ser notório que os relatos são dotados de subjetividade. Cada pessoa que conta sua experiência constrói uma história a partir de sua própria perspectiva, cria uma versão da história que se passa com ela, onde o que se destacam são as verdades dos sujeitos sobre eles mesmos e sobre o que os cercam. Dessa forma, particularidades do sujeito e detalhes do ambiente em que estão inseridos podem ser detectados nos relatos.

Nesse capítulo, as narrativas são introduzidas no intuito de apresentar um recorte daquilo que vem ocorrendo no campo da Álgebra Escolar, em referência a questões abordadas anteriormente no presente trabalho, a partir das experiências daqueles que estão diretamente ligados ao assunto: os professores.

Busca-se, nas narrativas, um meio de conhecer e compreender realidades, por isso cabe uma reflexão cujo objetivo único é evidenciar, nos fatos mencionados pelos professores, a problemática em torno da Álgebra. Portanto, nesse texto, o termo "narrativa" vai além do ato de contar um fato. Narrativa, aqui, é compreendida, de acordo com Souza e Silva (2015), como um modo de articular experiências na forma de relato. Assim, o foco está nas experiências decorrentes do ensino da Álgebra Escolar. Aliás, como o assunto é Álgebra, as narrativas também pretendem apresentar qual é o entendimento de Álgebra por parte dos professores.

Para que as informações de cada narrativa se constituam em fator auxiliar na compreensão de um contexto é necessário orientar aquele que colabora. Por esta razão, foram elaborados dois roteiros[14], apresentados no Anexo B da presente pesquisa, que evidenciam os pontos de maior interesse, mas com o cuidado de não interferir na visão do entrevistado. A intenção do roteiro consiste em levar o colaborador a refletir a partir de suas memórias e motivá-lo a escrever, sendo do narrador a decisão sobre quais aspectos são narrados, evidenciados ou omitidos.

Utilizam-se as narrativas porque, quem narra, o faz a partir de seu ponto de vista. No entanto, a existência de um roteiro faz com que a narrativa seja dotada de intencionalidade.

---

[14] Optou-se por dois roteiros de entrevista para que as questões colocadas fossem apresentadas de forma mais objetiva aos professores, uma vez que a amostra de professores colaboradores foi dividida em dois Blocos, conforme descrito na página seguinte.

Assim, as narrativas refletem, sobretudo, o que pensa aquele que narra, mas também trazem considerações importantes que vão ao encontro das convicções demonstradas ao longo do trabalho.

Buscando garantir que os objetivos com a utilização das narrativas fossem alcançados, requereu-se ajuda às equipes pedagógicas de algumas instituições de ensino para a realização da seleção dos professores colaboradores. Assim, os professores selecionados foram indicados para participar da pesquisa pela equipe pedagógica de suas respectivas instituições, por possuírem afinidade com temas educacionais. No caso da professora Lívia de Fátima Silva Mendes[15], o interesse em participar foi de iniciativa própria, e não por indicação.

Após a realização da etapa de seleção dos colaboradores, a pesquisadora conversou com todos eles sobre a forma como as narrativas seriam coletadas, definindo que todos os professores receberiam antecipadamente o roteiro de entrevista em reunião[16] agendada com cada um deles na instituição de ensino em que lecionam e, posteriormente, todos entregariam um texto, na forma escrita, que atendesse às questões do roteiro de entrevista.

Excepcionalmente, o professor Paulo de Tarso Ramos optou pela gravação de áudio de sua entrevista, com base no roteiro, realizada na instituição em que leciona. A partir da gravação de áudio, a pesquisadora realizou as etapas de transcrição e textualização, resultando no texto escrito apresentado nesse capítulo.

A seguir, apresentam-se as narrativas, divididas em dois Blocos, sendo o Bloco I constituído de narrativas de professores do Ensino Médio do Colégio Marista São José e do Colégio Delta, ambos os Institutos de Ensino pertencentes à rede privada de Montes Claros, no estado de Minas Gerais.

O Bloco II é destinado às narrativas de professores do Ensino Superior das principais instituições da cidade supracitada: Faculdade de Ciência e Tecnologia de Montes Claros (FACIT), Faculdade Santo Agostinho, Faculdades Integradas Pitágoras (FIP-MOC) e Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes)[17].

O Bloco I é constituído pelas narrativas dos seguintes professores: Emerson Batista Ferreira Mota; Paulo de Tarso Ramos e James Crawford Fernandes Júnior. E constituem o

[15] Os nomes utilizados na pesquisa são reais, uma vez que não houve impedimento por parte dos professores. As cartas de cessão encontram-se anexadas ao trabalho.

[16] A reunião foi realizada com o intuito de esclarecer a cada professor a finalidade do uso das narrativas e também explicar o objetivo do roteiro, esclarecendo possíveis dúvidas quanto às questões apresentadas.

[17] A pesquisadora optou pelo uso de narrativas de professores que trabalham com o ensino de Álgebra no Ensino Médio e de professores da Educação Superior que lidam com conteúdos de Matemática e de áreas afins, da cidade de Montes Claros/MG, pois se trata do cenário em que recentemente esteve inserida.

Bloco II as narrativas dos professores James Crawford Fernandes Júnior[18], Maximiano Maicon Batista Lopes e Lívia de Fátima Silva Mendes.

Posteriormente, analisaram-se as entrevistas a fim de elucidar os "pontos fortes" de cada uma e de buscar por semelhanças e diferenças nas visões dos professores envolvidos na pesquisa. Além disso, procedeu-se à interpretação dos discursos apresentados, dando-se ênfase aos trechos considerados mais interessantes, de acordo com os objetivos do presente trabalho.

3.1.1 Bloco I

Entrevista 1: Emerson Batista Ferreira Mota

Eu, Emerson Batista Ferreira Mota graduado pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-MG), em Licenciatura Plena em Matemática, especialista em Matemática superior com ênfase em Análise pela Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes). Atualmente professor na Educação Básica, ministrando Matemática para o 2º ano do Ensino Médio e, no Ensino Superior, lecionando as disciplinas de Cálculo I e II. As disciplinas mencionadas são ministradas em escola privada e universidade pública, nessa ordem.

Nesses dez anos de experiência profissional vários são os "gargalos" observados no processo de ensino-aprendizagem de Matemática dentre elas: formação do professor, alunos com n deficiências em leituras interpretativas, operações matemáticas, formas geométricas, tratamento da informação, linguagem matemática, entre outras.

Como professor de matemática procuro sempre refletir sobre as minhas práticas pedagógicas, e sempre que possível, fazer as intervenções de forma reflexiva. Tenho como princípios para ensinar Matemática, a Educação Matemática bem como suas tendências como aporte teórico nesse processo. O uso das TIC's, Etnomatemática, Formação docente, Resolução de Problemas e Didática da Matemática, dentre elas. Faço uma ressalva para a Etnomatemática na perspectiva de um ensino de Matemática pautado na arte de ensinar Matemática em vários grupos sociais a partir da prática e realidade do aluno em um contexto histórico, político, psicológico, social e epistemológico. Visto que também a

[18] Por haver maior possibilidade de contato entre pesquisadora e entrevistado, foi possível que o professor James contribuísse com duas narrativas.

Resolução de Problemas está sendo determinante para a construção de saberes inerente a minha prática didática metodológica.

Sobre a minha prática quanto professor de Matemática, defino como sendo um pouco da bagagem tradicional de currículos "engessado" aliado a modelos atuais que envolvem situações práticas aplicáveis no cotidiano. Minhas aulas são preparadas a partir de ementas ou matrizes curriculares prontas. Procuro ensinar e mostrar para meus alunos, tanto da Educação Básica quanto do ensino superior, a importância da escrita matemática, seus elementos e símbolos, sobretudo, a aplicabilidade.

Vejo a Matemática Algébrica como pilar para uma boa aprendizagem em Matemática, esta proporciona a construção de conhecimentos, linguagens, significados de extrema relevância no processo cognitivo do aluno. Nesse contexto, fica perceptível que a Resolução de Problemas é prejudicada caso a Matemática algébrica seja negligenciada, ocasionando problemas na escrita, linguagens e interpretações.

No que se refere aos materiais como instrumento de aprendizagem, destaco em minhas aulas o uso dos softwares GeoGebra e Poly no ensino de Funções, trigonometria, e Geometria Espacial nessa ordem. Ressalto principalmente que o software permite relacionar as representações gráficas e algébricas, uma vez que é dúvida constante da Educação Básica e Ensino Superior.

Dessa forma, acredito que as regras são determinantes para Resolução de problemas técnicos e contextualizados, por isso em minhas aulas busco aplicar a linguagem algébrica acreditando na leitura e escrita matemática como fundamentação teórica para aquisição de outros conhecimentos.

Entrevista 2: Paulo de Tarso Ramos

Meu nome é Ramos, sou formado em Licenciatura plena em Matemática pela Universidade Estadual de Montes Claros, tendo concluído no ano 2000, possuo pós-graduação pela Universidade Federal de Lavras. Tenho outra graduação pelo exército, porque sou militar do exército e tenho mestrado em ciências militares também pelo exército. É a primeira vez que leciono no Ensino Médio, primeira experiência no colégio Marista com a turma de terceiro ano do Ensino Médio. Dou aula no nível superior, atualmente numa única instituição que é a FUNORTE (Fundação Universitária do norte de Minas), mas já *trabalhei em outras instituições. Atualmente trabalho as disciplinas: Matemática Aplicada 1, Matemática Aplicada 2, Raciocínio Lógico e Estatística.*

A respeito da álgebra escolar, eu a vejo como fundamental, um dos corações da Matemática. Não consigo imaginar a matemática sem o ensino da álgebra.

Vejo uma deficiência de aprendizagem que vem desde muito cedo e é muito difícil para o professor corrigir uma deficiência que vem há vários anos, especialmente quando o aluno chega ao terceiro ano do Ensino Médio com esta deficiência. Por exemplo, considerando o conteúdo de expressões e equações algébricas, o aluno precisa entender o que é um x^5, *um* x^4, *e obviamente a maioria consegue abstrair isso, aprender, e não há problema. Entretanto, há alunos que simplesmente consideram* $x^3 + x^2 = 2x^3$ *ou* $x^3 + x^2 = x^5$, *o que demonstra que não entendeu o que é um* x^3, *um* x^2. *Quando percebo este tipo de erro interrompo a aula e digo: "Gente, isso aqui são coisas completamente distintas,* x *é uma variável, nós não sabemos o valor de x. Além disso, este valor elevado ao cubo ou este valor elevado ao quadrado são valores diferentes. Também se você somar os expoentes estará cometendo um erro muito grande. E para facilitar, exemplifico com números, substituo o* x, *por exemplo por 2, aí temos* 2^3 *e* 2^2, *se você somar os expoentes vai encontrar* 2^5 *que é 32, e não é a mesma coisa que* $2^3 + 2^2$ *que é 12".*

Faço isso para o aluno entender. Fico triste quando um aluno de terceiro do Ensino Médio tem uma dúvida desse tipo porque imagino quanto erro ele já cometeu e quanto ele ainda cometerá. Aqui eu falo como professor de Ensino Médio, se eu fosse falar de Ensino Superior, comentaria sobre uma situação até pior, lá costumam não saber o que é 3^2, *às vezes eles acham que é 3 mais 3, as vezes acham que é 3 vezes 2.*

Penso que deveria permanecer no currículo o básico, o que qualquer ser humano precisa aprender de Matemática para o dia a dia, independentemente da profissão que ele escolher seguir há algumas coisas que são básicas. Considero as regras e procedimentos da álgebra como essencial, mas em se tratando de alunos de Ensino Médio que visa fazer um vestibular, um Enem, ele tem que aprender pelo fim em si, não pela aprendizagem, devido à cobrança de resolver as questões dos exames. Então, o aluno preocupa mais com o fim em si, que é o vestibular, o Enem, mas eu considero a aprendizagem mais importante.

O que deve ser ensinado de Matemática deveria ser resultado de um consenso desprovido de paixões, nesse desprovimento de paixões consideraríamos o que é realmente importante. Eu acho Matemática Financeira importantíssima para qualquer um, qualquer *que seja a área que ele vai escolher no futuro, uma análise de gráfico é importantíssimo para qualquer um, qualquer que seja a área que ele vai fazer no futuro.*

Obviamente é impossível pensar no estudo de Matemática Financeira sem nenhum conhecimento algébrico, sem utilizar simbologia algébrica.

A Matemática em si, há quem diga que é uma ciência de ferramenta, ferramenta para Física, ferramenta para Química, depende de como a pessoa a enxerga. Estudar álgebra compreende o aprendizado dela em si, enquanto teoria, e envolve também o seu uso como ferramenta. No caso da Matemática Financeira ela é simplesmente indispensável. Não consigo enxergar o estudo, não só de Matemática Financeira, como de vários outros campos sem trabalhar com conceitos algébricos básicos. A abordagem se reduziria a algo muito simples.

A Geometria, qualquer campo da Matemática não sobreviveria sem elementos algébricos. Por exemplo, não se inicia Geometria Analítica sem conhecimento algébrico. Mesmo em Geometria Plana mais simples, como no cálculo de área de um quadrado que é lado vezes lado, a álgebra aparece, pois quando você tem o número ali tudo bem, mas e quando o valor não é informado? Como o aluno vai fazer cálculos posteriores sem conhecimento algébrico? Impossível! Como ele vai pensar, abstrair sem o conhecimento do valor real daquela medida? Tem que recorrer aos conhecimentos algébricos.

Qualquer regra algébrica que nós como professores já estamos muito acostumados a trabalhar, um aluno de primeiro ano do Ensino Médio deveria saber tão bem quanto a gente e não acontece isso, então é um problema. E a maioria dos alunos reconhece que é falta de base.

Um aluno quando tem que resolver qualquer probleminha simples ainda comete erros primários. Por exemplo, numa prova dei os números complexos z_1 *e* z_2 *e pedi para realizarem a divisão de* z_1 *por* z_2*, somente isso, porém houve casos em que se igualou a zero. Então, quando fiz a correção da prova, eu perguntei: "Porque você igualou a zero?" E ele respondeu: "ué, não tem que igualar não?"*

Aí eu falei para toda a turma: "Porque quando você tem uma função polinomial do segundo grau, você iguala a zero? Para encontrar as raízes". Aí eu fui para o quadro e dei um exemplo. Depois concluí: "Então, você não vai sair igualando a zero qualquer coisa." Esse tipo de erro demonstra que houve uma falha de aprendizagem, falha passada. Isto acontece porque ao resolver exercícios, ele passa a igualar a zero mecanicamente, sem ter aprendido talvez muito bem o porquê de fazer aquilo.

Há uma incompreensão do que é função, o que é expressão, confundindo com o que é uma equação. Se o aluno não aprender isso bem, veremos a falha desse aluno, ele tenderá a igualar a zero. Por isso tive que falar na aula: "Não tem que igualar a zero sempre".

Há outros erros de manipulação algébrica que causam grande interferência nos resultados dos alunos nas provas.

Quanto a funções polinomiais e potências, as dúvidas não são só quanto a expoentes, tem alunos que tem dúvidas também quanto ao coeficiente. O aluno sabe o que é coeficiente, essa palavra coeficiente não é novidade para ele porque ele já teve contato no passado. No entanto, quando eu escrevo $2x^3$ *ele sabe que o coeficiente é 2, e quando eu escrevo* x^3*, tem aluno que pergunta: "qual é o valor do coeficiente?" ou então perguntam: "Porque você colocou que o coeficiente é um?"*

Ao trabalhar com álgebra, percebi que o coeficiente é problema, o expoente é problema, as operações em si são problema. Em alguns casos, aparecem absurdos como $2x + 3y = 5xy$.

Diante destes problemas, eu penso no aluno, não preocupado com o ENEM, eu penso no aluno como um jovem, um ser humano, como se fosse meu filho, como se fosse seu filho, que passou por todo um processo e deveria ter aprendido bem, e infelizmente pode ter dificuldades na vida, o Enem é uma delas, o vestibular, qualquer acesso a uma instituição de ensino superior pode ser uma dificuldade. Ele pode ter essa dificuldade por causa de uma falha de aprendizagem, mas pode ter outras também. Eu trabalho com uma grade curricular que é voltada para o Enem, para o Paes da Unimontes, mas me preocupo também com a deficiência de aprendizado, pois não tem como superá-la em uma aula porque vem de anos, então esse aluno pode ser prejudicado. Fico chateado quando um aluno diz que quer fazer Engenharia Civil apresentando várias deficiências de base. Se ele conseguir entrar, tem grande possibilidade de ser reprovado na maioria das disciplinas do primeiro período por não ter base, e assim não tem condições de acompanhar o curso.

<u>*Entrevista 3: James Crawford Fernandes Júnior*</u>

Depois de 4 anos, volto a trabalhar com o Ensino Médio.

Assuntos como simplificação de expressões e resolução de equações e sistemas, muitos alunos tem uma noção de como se faz, lembram-se de ter visto no ensino fundamental, mas não tem o domínio ideal para resoluções de problemas abordados. Outra dificuldade que *tenho notado em meus alunos é a intepretação de problemas, ou seja, eles tem dificuldade de ler um texto e interpretar com símbolos e expressões matemáticas tudo o que o problema exige, porém, já observei que não é uma exclusividade do Ensino Médio, pelo contrário, entre alunos do Ensino Médio esta dificuldade me parece menor que a apresentada por aluno no Ensino Superior.*

A meu ver, tais dificuldades esbarram principalmente em deficiências na noção de sentido de símbolo e de variável, na capacidade de generalização – manipulação algébrica envolvendo polinômios – a própria interpretação simbólica de linguagem corrente, além é claro de deficiências relacionadas à definições matemática e representação formal de determinadas expressões.

Quando o assunto é Produtos Notáveis – quadrado da soma/diferença de dois termos ou produto da soma pela diferença de dois termos –, um fenômeno me intriga a anos, todos os meus alunos conhecem os produtos notáveis e sabem as regras, mas reconhecer ou "lembrar" de usar no momento certo é algo muito raro em minhas aulas. Não sei o que acontece, sempre que há algo como $(x+2)^2$ *em determinado contexto, o aluno escreve* x^2+4*, quando digo ao aluno que está errado ele sempre me olha com uma expressão de surpresa, aí digo: "Temos uma soma elevado ao quadrado, não é mesmo?" e o aluno imediatamente me diz: "É mesmo! Isso é produto notável".*

A manipulação algébrica com uma única variável numa equação, por exemplo, geralmente não é problema. Se a expressão, ou função for de apenas uma variável e esta variável for $\boldsymbol{x}$*, do contrário, os alunos geralmente têm problemas com a manipulação.*

Estou trabalhando com funções no 1º ano e revendo no 3º ano na escola em que trabalho, e a recepção dos conceitos iniciais pelos alunos do primeiro ano têm sido positiva e entre os alunos do 3º ano, parece que eles têm os conceitos de função, domínio, imagem, muito bem definidos.

3.1.2 Bloco II

<u>*Entrevista 1: Professor James Crawford Fernandes Júnior*</u>

Sou James Crawford Fernandes Júnior, tenho Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Montes Claros, concluído em agosto de 2009, Pós-Graduação Latu Sensu em Docência Superior em Matemática pela Faculdade do Noroeste de Minas, cursei 5 *disciplinas como aluno especial do Programa de Mestrado e Doutorado em Educação da Universidade Católica de Brasília, atualmente sou aluno do Programa de Pós-graduação Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.*

Atualmente sou professor de todo o Ensino Médio do Colégio Delta e professor de Cálculo Diferencial e Integral I, Cálculo Diferencial e Integral III e Álgebra Linear e Geometria Analítica, para os cursos de Engenharia de Controle e Automação, Engenharia Elétrica, Engenharia Civil, Engenharia Química e Engenharia de Computação da Faculdade de Ciência e Tecnologia de Montes Claros – FACIT.

Esse conteúdo(a álgebra) é de extrema importância para a formação do Engenheiro, já que são necessárias várias manipulações algébricas na resolução e interpretação de resultados de integrais e derivadas, por exemplo, para a resolução de problemas específicos da Engenharia.

A FACIT, preocupada com o histórico da maioria dos alunos que recebemos reformulou seus cursos de Engenharia e hoje, a ementa da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I é basicamente uma revisão da Álgebra trabalhada na Educação Básica, nós professores desta disciplina trabalhamos com operações com frações, as propriedades de potenciação e radiciação de números e de polinômios, produtos notáveis, fatoração de um polinômio, trigonometria na circunferência e limite de uma função; com o objetivo de preparar o aluno para as manipulações algébricas necessárias na resolução não só de integrais e derivadas, mas também aquelas que aparecem na física, álgebra linear e nas matérias específicas de cada engenharia. Além disso, também é disponibilizado a todos os alunos uma disciplina de Nivelamento, onde um professor de Cálculo da faculdade (nesse semestre sou eu quem trabalho com a disciplina), dá aulas de reforço dos conteúdos trabalhados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

A pouco mais de 15 dias foi aplicada a primeira prova de Cálculo Diferencial e Integral I, que segue anexa à estas respostas, e o conteúdo cobrado foi operações com frações, potenciação e radiciação de números reais e de polinômios. A média da turma foi próxima dos 45% da nota total da prova. Os erros mais comuns que encontrei foram de aplicação das propriedades operatórias, como por exemplo,

Na questão 1) b) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{9}} \cdot 27^{\frac{7}{2}}$*, muitos alunos multiplicaram os dois 3 por 27, chegando à 243, dentre os que cometeram tal erro alguns também multiplicaram os expoentes, outros os somaram;*

Na questão 2) a) $a^5 - \frac{1}{7}a^5 + \frac{4}{3}\sqrt[2]{a^{10}}$ *quase todos os alunos interpretaram corretamente que* $\sqrt[2]{a^{10}} = a^5$*, porém uma quantidade expressiva de alunos colocou que* $\sqrt[2]{a^{10}} = \sqrt[2]{a^5}$*;*

A quantidade de erros na questão 3) a) $\sqrt{148 - \sqrt{8 \cdot \sqrt{\sqrt{13 + \sqrt{9}}}}}$ *foi expressiva também, porém dentre muitos dos alunos erraram por não copiar os dois radicais entre o 8 e o 13, mas alguns erraram as operações envolvidas na questão.*

Estes três erros foram os mais expressivos, mas tinham muitas questões em branco e erros de operações e uso de propriedades em toda a prova.

Erros de uso das quatro operações básicas, principalmente quando envolve frações e erros de propriedades de potenciação e radiciação não são exclusividade de alunos do 1º período, trabalho com disciplinas lecionadas até no 4º período e não são incomuns erros de manipulação algébrica em minhas provas durante resolução de Equações Diferenciais, por exemplo.

Apontar uma origem para esse erro é bastante complicado, mas acredito que com a busca pela Universalização da Educação Básica, a qualidade do Ensino no Brasil caiu bastante, prova disso são as várias publicações existentes a respeito e como GAZIRE (2000) afirma, o ensino de Geometria tem sido deixado totalmente de lado em escolas de Educação Básica em todo o Brasil, e com certeza o ensino das manipulações algébricas também tem sido deixadas de lado.

Entrevista 2: Professor Maximiano Maicon Batista Lopes

Meu nome é Maximiano Maicon Batista Lopes, sou bacharel em Física desde 2009 pela Universidade Federal de Ouro Preto e mestre em Engenharia dos Materiais pela REDEMAT (Rede Temática de Engenharia dos Materiais) desde 2012. Minha experiência na docência começou por necessidade em 2008 em um colégio particular em Ouro Preto. Desde o início, eu me preocupava com meu desempenho e com o rendimento dos meus alunos porque isso refletia meu sucesso ou fracasso como professor. Logo após o término do meu mestrado, fui contratado como professor das disciplinas de física em duas instituições de ensino superior em Montes Claros.

Ministro essas disciplinas de forma tradicional, "lousa e giz", e desta forma percebo que há maior fixação do conteúdo pelos alunos. O ato de escrever, que é uma forma de memorização, já que é expressivo o número de alunos que não se dedicam ao conteúdo fora da instituição de ensino, seja pela falta de interesse ou de tempo. Além disso, divido as aulas em dois momentos: no primeiro, apresento os conceitos físicos e no segundo, aplico exercícios que me permitem exemplificar a física e apresentar os métodos matemáticos envolvidos na resolução.

Como Matemática é a base da Física, é crucial que o aluno tenha os conhecimentos da Matemática para compreender os princípios da Física. Grande parte das grandezas físicas são vetoriais e necessitam da aplicação algébrica para representá-las e para realizar operações básicas. Contudo, muitos estudantes vindos do ensino médio iniciam a vida acadêmica com pouca bagagem em álgebra. Chegando ao nível de se encontrar alunos que não sabem o que são os vetores unitários nem como somar ou determinar o produto de dois vetores.

Para minimizar parte desse problema, faço uma revisão básica em Álgebra nas disciplinas de Mecânica e de Eletromagnetismo.

Na disciplina de Mecânica, aplica-se Álgebra, por exemplo, para determinar o deslocamento a partir dos vetores das posições inicial $\vec{x}_o$ *e final* $\vec{x}$ $\left(\overrightarrow{\Delta x} = \vec{x} - \vec{x}_o\right)$*, para determinar a velocidade vetorial, a aceleração vetorial e na representação gráfica de algumas equações na cinemática. Em minhas aulas, relaciono as equações físicas à função a qual elas correspondem na matemática, se a equação é a do deslocamento do movimento retilíneo uniforme* $\left(x = x_o + vt\right)$*, a função é de primeiro grau, então o gráfico é uma reta, mas se a equação é a do deslocamento do movimento retilíneo uniformemente variado* $\left(x = x_o + v_o t + \frac{at^2}{2}\right)$*, a função é de segundo grau e a representação gráfica é uma parábola.*

Já na disciplina de Eletromagnetismo, é necessária a resolução de um produto vetorial para determinar o vetor força magnética que atua em uma partícula carregada em movimento sobre um campo magnético $\left(\vec{F}_B = q.\vec{v}x\vec{B}\right)$ *ou força magnética que atua em um fio percorrido por uma corrente sobre um campo magnético* $\left(\vec{F}_B = i.\vec{L}x\vec{B}\right)$*.*

Os anos de experiência no ensino superior me permitiram observar as dificuldades dos alunos e desenvolver ferramentas em minhas disciplinas para minimizá-las. Dentre elas, uma apostila de exercícios, que tem como intuito fornecer uma boa variedade de questões e exibir as equações físicas bem como as grandezas envolvidas. Uma pergunta repetidamente *pronunciada pelos discentes durante as avaliações é: "Professor, o que significa esta grandeza nesta equação?". Percebi daí que alguns estudantes têm dificuldade em memorizar os símbolos de algumas grandezas físicas, o que impede a aplicação correta da equação na resolução do exercício.*

Certamente é difícil compreender os princípios físicos se não gostar de álgebra, é como querer andar de bicicleta sem rodas. A Álgebra está para Física assim como a Química está para a Biologia ou a Biologia está para Medicina, uma completa a outra.

Entrevista 3: Professor Diogo Daniel Bandeira de Albuquerque

Me chamo Diogo Albuquerque, sou formado em Economia pela UFPB (2013) e tenho mestrado em Economia pela UNICAMP (2015). Ensino na UNIMONTES a menos de um ano, onde sou professor de Macroeconomia e de Economia Matemática. Trabalho essencialmente com leituras, exercícios, quadro e giz. Procuro expor o conteúdo de forma prática, sempre com demonstrações e exercícios.

A álgebra tem destaque nas disciplinas que leciono. É fundamental para sintetizar problemas sociais na forma de símbolos, funções e equações, para que assim se chegue a resultados cientificamente comprovados e cabíveis de comprovação por meio de técnicas econométricas.

Entre os assuntos mais importantes compreendidos pela álgebra nos cursos que leciono estão o estudo de funções, equações e geometria analítica. A demonstração de tais assuntos exige um embasamento preliminar. Inicialmente é necessário um conhecimento básico, especialmente sobre operações básicas lecionadas no ensino médio. Nesse estágio, é evidente a dificuldade de analisar até problemas triviais, nos quais grande parcela da turma encontra dificuldades, especialmente com operações com números racionais, exponenciais e logaritmos. Essa dificuldade acaba por resultar um efeito "bola de neve", o aluno não entende assuntos elementares e isso afeta seu estudo em assuntos mais complexos.

Quando o problema envolve basicamente a aplicação de regras a dificuldade é menor. A maior parte consegue resolver. Mas uma grande parcela tem dificuldade em solucionar questões simples.

Outro problema comum é a dificuldade de entender problemas nos quais os símbolos das variáveis diferem dos mais comuns: X, Y, Z. Por exemplo, quando é colocado um problema com uma variável endógena quantidade Q e exógenas: trabalho, L, e capital, K, *grande parte da turma demora, ou não consegue, resolver o problema, só soluciona quando as variáveis são simbolicamente iguais aos encontrados nos livros ou em outros exemplos resolvidos anteriormente. O aluno tem muita dificuldade em fazer relações. Ele não consegue interpretar o problema e acaba se complicando ao relacionar as variáveis exógenas e endógenas.*

Esse problema se intensifica ao alterarmos a unidade de medida de cada variável. Por exemplo, os alunos estão acostumados a solucionar problemas que estão determinados em unidades, se alterarmos para mil unidades a maior parte dos alunos erra a questão.

Uma outra experiência é a capacidade dos alunos em ler, interpretar e resolver um problema. Se a questão exige que o próprio aluno monte equações para resolver os problemas, ao invés de apenas encontrar soluções de equações, o percentual de erro aumenta substancialmente.

Os alunos apresentam resistência a aplicação matemática. Eles até podem dominar certa técnica de resolução de problemas, mas não conseguem ver a suas múltiplas aplicações. Por exemplo, um problema de encontrar a demanda por determinado bem, e a variação da demanda desse bem entre dois períodos determinados. A dificuldade aumenta se é dado um exemplo de demanda e é cobrado outro caso, mas que exige a mesma técnica. Por exemplo, se o aluno teve contato com um problema de demanda, ele não consegue encontrar a receita, o custo, o lucro, a quantidade de empresas em determinado segmento, a quantidade de segmentos, a quantidade de fatores de produção, entre outros problemas que envolvem aplicação metodológica semelhante.

Ainda quanto à resolução de problemas, percebo que existe um problema de conhecimento do conteúdo, onde o aluno pode entender o que está escrito, mas não estudou e assimilou o conteúdo necessário para solucionar a questão e, existe o problema do aluno não conseguir fazer a ligação entre o que está escrito no enunciado e a forma algébrica que o possibilite resolver o problema. Neste último caso, o aluno até sabe como resolver uma questão algébrica, mas apresenta dificuldade em interpretar uma questão e expressá-la algebricamente.

Além do que já foi comentado, os alunos têm muita dificuldade em "desenhar" e interpretar gráficos. Apesar disso, eles têm mais dificuldade em interpretar e obter informações relevantes das funções na forma algébrica. Muitas vezes, precisam esboçar graficamente a função para extrair o que se pede na questão. Por exemplo, uma questão para a identificação de máximos e mínimos.

Eu acredito que o aluno deve ter um conhecimento lógico fortalecido ao longo de seu tempo na escola, mais aulas de matemática, física e mesmo xadrez ajudariam a melhorar a capacidade de aprendizado do aluno.

Entrevista 4: Professora Lívia de Fátima Silva Mendes

Sou graduada em Engenharia Elétrica na Universidade Federal de São João del-Rei e Mestre em Modelagem e Controle de Sistemas na mesma instituição. Atualmente leciono as disciplinas Máquinas Elétricas, Eletrônica Digital, Circuitos de Corrente Contínua e Circuitos de Corrente Alternada em duas instituições privadas de Montes Claros.

A diferença no perfil dos alunos exige um que o preparo das aulas siga uma metodologia distinta para cada disciplina e também para cada faculdade. Em uma delas os alunos demonstram maior interesse pelas disciplinas, apesar da grande dificuldade de aprendizado, porém o interesse permite maior aprofundamento dos conteúdos. As aulas da disciplina de Eletrônica Digital são baseadas em problemas reais, projetos de grande complexidade que visam solucionar problemas diversos, desde projetos aplicados a monitoramento de carros de corrida à monitoramento de pacientes em UTI's. A disciplina de Máquinas Elétricas exige maior aprofundamento teórico, portanto é necessário um longo estudo da modelagem matemática a ser abordada em aula para que as deduções sejam realizadas de forma clara e sempre fazendo uma ponte com outras disciplinas do curso. A disciplina de Circuitos Elétricos de Corrente Alternada é ministrada em regime de dependência aos sábados. A maioria dos alunos estão cursando a disciplina pela segunda vez, mas as dificuldades apresentadas por esta turma superam as dificuldades das demais turmas. As aulas são preparadas a partir de exercícios de aplicação retirados dos livros didáticos da bibliografia básica para melhor aproveitamento da carga horária, que é reduzida.

Na outra instituição, apesar de buscar problemas reais, os alunos apresentam grande dificuldade na interpretação destes problemas, portanto inicialmente as aulas são preparadas de acordo com os livros didáticos da bibliografia básica. Os problemas estão sendo inseridos lentamente à rotina destes alunos.

Entendo a álgebra com a área da matemática que relaciona grandezas através do uso de incógnitas. A álgebra possibilita modelar e relacionar diversas grandezas físicas, por isso, em todas as disciplinas que leciono, os conhecimentos sobre álgebra são fundamentais *para o entendimento e análise dos problemas, pois em todas há uma variedade de grandezas que se relacionam. A álgebra faz parte de praticamente todos os exercícios propostos, pois eles relacionam grandezas elétricas, como dito anteriormente. As manipulações algébricas estão muito presentes, por exemplo, para calcular o tempo de descarga de um capacitor.*

Os conteúdos que leciono envolvem diversas aplicações da álgebra, desde casos mais simples, tais como a relação entre tensão, corrente e resistência em corrente contínua – porém, também com as grandezas representadas por números complexos –, e as relações entre potência, conjugado eletromagnético e velocidade, até a aplicação da Álgebra Booleana para simplificação de circuitos digitais.

As representações algébricas têm papel fundamental, pois a base das disciplinas que leciono é justamente relacionar grandezas físicas, por exemplo, a modelagem de uma corrente elétrica em função de impedâncias e da aplicação uma fonte de tensão, ou o torque eletromagnético de um motor alimentado por uma fonte de tensão, modelado por uma impedância e cujo rotor gira a uma determinada velocidade.

As disciplinas Máquinas Elétricas e Circuitos de Corrente Alternada são as que exigem mais dos alunos, pois, a maior parte das análises é realizada com o auxílio de números complexos.

Os alunos apresentam grande dificuldade de relacionar o significado das variáveis quando elas apresentam variações em materiais diferentes. A principal dificuldade aparece quando são trabalhados os conteúdos de circuitos magnéticos, pois as grandezas são semelhantes às dos circuitos elétricos, inclusive a nomenclatura e simbologia são bastante parecidas, porém são fisicamente distintas.

As principais dificuldades que alunos apresentam são devido às carências anteriores ao ingresso na faculdade, os alunos entram despreparados, com grande dificuldade de análise crítica, sendo esta uma habilidade fundamental para o entendimento e aplicação da álgebra. Eles têm dificuldade de compreender as manipulações de uma simples equação, de entender a relação entre o coeficiente e a variável de uma função, e trabalhamos muito com funções de várias variáveis, o que torna a dificuldade ainda maior.

3.2 Compreendendo a realidade por meio das narrativas[19]

[19] Nessa seção, o objetivo não é apresentar uma análise, mas somente realizar a descrição das narrativas.

O professor Emerson destaca que, em sua experiência – em relação ao Ensino Básico, mas, podendo ser também considerada no Ensino Superior, conforme foi exposto em conversa durante a realização da pesquisa –, tem observado diversos problemas quanto à aprendizagem.

Refletindo sobre suas afirmações, percebe-se que as dificuldades de seus alunos vão desde a leitura, interpretação e escrita em Matemática até as operações aritméticas e algébricas. Diante dessa situação, ele busca suporte na Educação Matemática para aperfeiçoar sua prática, de modo a melhor enfrentar os desafios da sala de aula, ajudando os alunos a superar suas dificuldades.

Observando que é comum haver dificuldade em relação às diferentes representações presentes no estudo de Funções, o professor afirma buscar auxílio no uso de softwares matemáticos, o que demonstra que ele não entende a Álgebra Escolar restrita ao domínio do cálculo algébrico, porém, reconhece seu papel no desenvolvimento de atividades matemáticas.

No decorrer do texto percebe-se que o professor relaciona a Álgebra à linguagem, considerando este ramo da Matemática como pilar da aprendizagem matemática, sendo detentor de significados relevantes ao desenvolvimento cognitivo do aluno e de uma linguagem que subsidia outros conhecimentos. Por esse motivo, durante as aulas, o referido professor busca esclarecer aspectos da notação simbólica.

O professor Paulo faz uma narrativa mais detalhada, traz lembranças das aulas e exemplifica os problemas encontrados.

Embora sua discussão sobre currículo não aponte a Álgebra como elemento central, reconhece que o ensino dela é fundamental, ao considerar a Álgebra Escolar como um dos "corações" da Matemática. Apesar de não colocar a Álgebra como eixo central do currículo, o professor Paulo dá indícios de que a entende como um dos elementos principais, pois apresenta em sua narrativa a noção de que a Matemática não se "sustentaria" sem a Álgebra, ao afirmar que "qualquer campo da Matemática não sobreviveria sem elementos algébricos".

Em seu exemplo sobre Geometria Plana fica clara a sua visão acerca da necessidade da linguagem algébrica, especialmente a respeito da utilização de símbolos para representar valores desconhecidos. Percebe-se que, de forma implícita, o supracitado professor demonstra compreender a Álgebra como aritmética generalizada.

Dessa forma, o professor demonstra reconhecer a importância dos conhecimentos algébricos e da simbologia para o desenvolvimento de outros conteúdos da Matemática.

Entende a Álgebra como uma importante teoria, mas também como ferramenta essencial na Matemática porque outros ramos desta ciência dependem dos elementos algébricos.

Quanto à situação da aprendizagem em Álgebra de seus alunos, ele afirma ter percebido deficiências oriundas de fases anteriores da vida escolar, pois alguns de seus alunos estão chegando ao final do Ensino Médio cometendo erros primários, aplicando procedimentos sem saber o porquê, cometendo erros nas operações algébricas porque não aprenderam a lidar com a leitura e escrita algébricas, não compreendem o sentido de símbolo e a ideia de variável, cometendo erros na manipulação algébrica.

E, agravando a situação, ainda há o fato de que alguns alunos estão "vendo" os procedimentos algébricos apenas com a finalidade de resolver questões de exames, o que se transforma em mais um agravante das dificuldades.

Através de suas falas percebe-se que o professor salientou que os problemas em Álgebra vão além das operações, sendo alguns termos frequentes nos conteúdos algébricos também uma causa de incompreensões e erros, pois, às vezes, são mal interpretados e não identificados corretamente, como ocorre no exemplo que o professor fornece sobre os coeficientes polinomiais. Além disso, em alguns casos, o professor verificou que há dificuldade em estabelecer distinção entre alguns objetos matemáticos, como, por exemplo, as funções, equações e expressões.

Ele também conta que as dificuldades observadas e relatadas no presente trabalho têm trazido consequências para os alunos quando são avaliados. Nota-se nas suas falas que ele se preocupa com as consequências que as falhas na aprendizagem podem acarretar, inclusive quanto à entrada e permanência dos seus alunos em um curso superior.

De seu turno, o professor James fala de sua experiência no Ensino Médio e no Ensino Superior, fazendo importantes observações e mostrando fatos que, muito provavelmente, são vivenciados por outros professores. Ele observa, quanto a conteúdos de caráter mais procedimental (como as equações), que os alunos até possuem conhecimento de como resolvê-las, no entanto, continuam apresentando dificuldade quando esses assuntos aparecem no contexto de um problema.

Ainda quanto aos problemas, James comenta sobre a dificuldade dos alunos na transposição da linguagem corrente para a linguagem simbólica, evidenciando que ele vê a falta do bom uso da escrita algébrica como comprometedor da elaboração de estratégias para resolver o problema. Tal fato não apenas indica a falta de domínio do simbolismo matemático como também mostra a existência de dificuldade em relação a "como" e "quando" os conteúdos algébricos devem ser usados.

Tais observações demonstram que a visão do professor James envolve, tanto a noção de Álgebra como ferramenta nas aulas de Matemática como a de linguagem necessária para a expressão (por exemplo, aquilo que é expresso por um problema).

Para esse professor, as questões relatadas estão relacionadas às deficiências relacionadas a definições e representação formal de objetos e conteúdos matemáticos, ou seja, se o aluno não compreende a maneira formal (com definições, teoremas, etc.) como a Matemática se apresenta, provavelmente sentirá dificuldade ao usar a Álgebra, seja como ferramenta ou como linguagem.

Ele ainda comenta a respeito de operações comuns em Álgebra. Cita o problema do aluno não identificar um produto notável em determinado contexto, embora suas resoluções sejam amplamente conhecidas. Interessante que, ao falar de Funções, tema muito frequente no Ensino Médio, James não apresenta comentários sobre possíveis dificuldades e deficiências dos alunos.

Como James leciona em cursos de Engenharia, afirma ser a Álgebra de extrema importância para o engenheiro, pois permite a resolução de problemas específicos da área. Dessa forma, vê-se que é mantida a visão acerca da Álgebra enquanto ferramenta, contudo, ao fazer esta observação, não se está afirmando que a visão do professor restrinja-se ao caráter operacional, assim como não se considera que seja uma visão inaceitável.

É notória a preocupação apresentada pelo referido professor quanto aos problemas relativos aos conteúdos algébricos e às devidas manipulações algébricas envolvidas. Ao longo de sua narrativa, James ilustra erros comuns cometidos por alunos iniciantes na graduação, incluindo os erros de manipulação algébrica, o que o leva a acreditar que o ensino das manipulações algébricas tem sido deixado de lado, indo de encontro às considerações colocadas anteriormente neste trabalho, apontando o ensino da Álgebra bastante próximo do cálculo literal.

Maximiano, conhecido como Max, é professor de disciplinas da área de Física, lecionando em turmas iniciais de graduação em diversos cursos de Engenharia. É um professor que demonstra grande afinidade com a Matemática, pois, em seu relato, algumas vezes cita a ligação entre Física e Matemática, chegando a afirmar que a Matemática é a base da Física. É perceptível que a Matemática e a Álgebra fazem parte de suas aulas, seja nos métodos matemáticos das resoluções, nas representações das grandezas, no tratamento vetorial, nas equações ou nas representações gráficas.

A ideia que se tem diante de seu relato é que ele trabalha com disciplinas de cunho teórico e prático, dotadas de seus conceitos próprios, mas reconhecendo que, para serem estudadas e, principalmente, lecionas com qualidade, é preciso apoiar-se em preceitos matemáticos, especialmente os de natureza algébrica. Por isso, o referido professor não possui dificuldade em verificar as deficiências algébricas dos alunos e buscar alternativas para ajudá-los.

Para ele, a Álgebra é um complemento, mas não apenas porque fornece condições de realizar operações básicas necessárias nas resoluções. Logo, não se resume a uma ferramenta, fonte de regras a serem seguidas. Quando comenta a respeito de representações de grandezas e utilização de equações físicas em estreita ligação com as Funções algébricas, fica evidente sua visão, tanto de Álgebra como de Física, como detentoras de uma simbologia e de uma linguagem capaz de representar os fenômenos do mundo físico.

Na visão do professor, não se trata apenas de aplicar procedimentos da Álgebra na Física, mas, sobretudo, de compreender os significados que se encontram nos símbolos e notações utilizadas, e, então, compreender os conceitos físicos.

Suas falas levam a crer que ele vê a Álgebra na essência da Física, como a linguagem de comunicação através da qual se pode entender seus conceitos e tudo aquilo contido nos enunciados e leis. Suas colocações também levam a pensar que, dificilmente, um aluno que não tem conhecimento básico de Álgebra conseguirá entender o que a Física lhe diz. Não há como se comunicar com a Física se não for possível compreender seus resultados, que são expressos na forma algébrica. Em resumo, o estudo da Física não flui sem o estudo da Álgebra.

O próximo professor, Diogo, inicialmente apresenta sua visão de Álgebra, onde se encontram os símbolos, as Equações e as Funções. Percebe-se que, em sua concepção, a Álgebra predomina como relação funcional, onde os símbolos representam as grandezas envolvidas nos problemas e as Equações e Funções cumprem o papel de representar a relação existente entre as grandezas. Dessa forma, compreende-se que Diogo, além de se deter à Álgebra funcional, também possui o entendimento da Álgebra como ferramenta de representação, assim reconhecendo o papel dos símbolos em suas disciplinas.

Vê-se que ele se preocupa com o entendimento dos símbolos, especialmente quanto ao uso das variáveis, demonstrando que reconhecer o papel dos símbolos não implica em uma visão letrista. Percebe-se que, para Diogo, é fundamental compreender os significados trazidos nos símbolos, como também conseguir utilizá-los e manipulá-los corretamente, uma vez que a resolução dos problemas propostos em suas disciplinas é condicionada ao desenvolvimento dessas habilidades.

Verifica-se em seu relato a consideração de que escrever algebricamente é uma das etapas da resolução de problemas, a primeira delas. Quanto a isso, ele faz uma importante observação, levando ao pensamento no fato de que a tradução da linguagem corrente (do enunciado) para a simbólica às vezes pode não ocorrer porque o aluno não tem o domínio suficiente de conteúdos matemáticos, especialmente os algébricos, a ponto de saber aplicá-los. Assim, não identifica a Matemática que lhe proporcione condições de modelar algebricamente o problema e conseguir resolvê-lo.

De forma geral, aquele professor tem, nos símbolos e na Álgebra, uma forma de representar grandezas e relacioná-las, sendo frequente em suas aulas a aplicação de modelos funcionais. No entanto, embora o uso de Funções seja recorrente, o professor observa que sua forma algébrica, por vezes, ainda não é interpretada de forma suficiente, levando os alunos a apoiar-se no modelo gráfico, embora também possam apresentar dificuldades ao esboçá-lo e interpretá-lo.

Já a professora Lívia, ao relatar como são suas aulas, conta que utiliza problemas reais e projetos como base para a exposição de conteúdos, porém, ela demonstra pensar que tal metodologia não garante a eliminação dos problemas de aprendizagem, uma vez que ainda persiste a dificuldade na interpretação. Tal fato leva a crer que, perante os alunos, a Álgebra ainda não é vista como meio de modelar situações reais, eles não veem a linguagem algébrica como ferramenta de representação, o que parece estar bem claro para a professora.

Além disso, Lívia apresenta a compreensão do caráter funcional da Álgebra, sendo bastante enfática ao falar das relações entre grandezas presentes nas disciplinas que leciona. Aliás, ela considera essas relações como a base dessas disciplinas e, com isso, justifica a forte presença da Álgebra nos exercícios propostos, recorrendo frequentemente às manipulações.

Percebe-se em suas falas o frequente uso da Modelagem, aliada à resolução de problemas, confirmando-se que ela vê a Álgebra como fonte de uma linguagem capaz de traduzir o mundo físico. Constata-se também que, para a professora, não basta possuir o entendimento da Álgebra centrado nas representações das relações, pois, além de modelar o problema, escrevendo algebricamente, é preciso saber resolvê-lo e isso envolve aplicar a Álgebra, ou seja, é preciso conhecer os conteúdos algébricos.

Observa-se que, para Lívia, aplicar a Álgebra seria usar sua linguagem e trabalhar com seus conteúdos, onde a falta de análise crítica é um dos fatores que têm impedido os alunos de aplicar satisfatoriamente a Álgebra.

Assim como Diogo, Lívia também comenta acerca das dificuldades dos alunos no trabalho com as variáveis, citando que a compreensão dos significados das variáveis fica comprometida devido à falta de compreensão da simbologia presente em cada situação.

Entende-se que, embora as narrativas apresentadas possuam suas particularidades, elas apresentam muitas características comuns, principalmente quanto à compreensão da importância da Álgebra no ensino.

CAPÍTULO 4: O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

4.1 Concepções de Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) e a Álgebra

Embora as expressões Laboratório de Ensino de Matemática, Laboratório de Matemática e Laboratório de Educação Matemática sejam comumente utilizadas no meio acadêmico e também no meio educacional, para serem bem compreendidas é preciso levar em conta o ponto de vista de quem escreve, planeja, implementa e utiliza o laboratório em questão.

Como neste trabalho será abordado o tema Laboratório de Ensino de Matemática (denominado LEM) aliado ao ensino de Álgebra, faz-se necessário tratar do modo como tal expressão é compreendida, tanto no meio acadêmico como no ambiente escolar.

Diferentes olhares geram diferentes concepções para Matemática, ensino, aprendizagem, educação, didática, material didático, entre outros, que são fatores constituintes da concepção de LEM aqui explicitada. É a crença em determinado modo de ensinar e aprender Matemática que fará nascer uma concepção de LEM e o fará ser utilizado satisfatoriamente. Além do mais, é necessário ter em mente que uma das ideias constituintes de um LEM é a convicção no "aprender fazendo", o que coloca a ação do estudante como fator primordial para o surgimento de um LEM.

Para Lorenzato (2009), a princípio, o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) poderia ser um local para guardar materiais essenciais, tornando-os acessíveis para as aulas. Na lista de materiais de um LEM incluem-se os livros didáticos, artigos, jogos, figuras, sólidos, calculadoras, dentre outros, além de computadores, softwares e o uso da internet. Buscando ampliar essa concepção, o autor acaba lançando outra:

> O LEM pode ser um espaço especialmente dedicado à criação de situações pedagógicas desafiadoras e para auxiliar no equacionamento de situações previstas pelo professor em seu planejamento, mas imprevistas na prática, devido aos questionamentos dos alunos durante as aulas [...]. Enfim, o LEM, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, *experimentar*, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender. (LORENZATO, 2009, p. 7, grifo nosso)

Como se percebe, um LEM é um ambiente que auxilia, tanto ao aluno como ao professor de Matemática, por isso tem sido amplamente discutido o seu papel na formação de professores. Percebe-se ainda que o LEM implica a abertura de espaço para a experimentação, para o “aprender fazendo”, trazendo, como contribuição enquanto auxílio metodológico, a prática para o ensino de Matemática. Corroborando esta ideia, temos Ewbank (1977), considerando também o LEM em dois sentidos, um relacionado a lugar e outro numa concepção mais abrangente.

> Para Ewbank, a expressão “Laboratório de Matemática” é utilizada para representar um lugar, um processo, um procedimento. Com o sentido de lugar, é uma sala estruturada para experimentos matemáticos e *atividades práticas*. O termo também é utilizado para caracterizar uma abordagem utilizada em sala de aula onde os alunos trabalham de maneira informal, movimentam-se, discutem, escolhem seus materiais e métodos e geralmente descobrem a matemática por si próprios. (EWBANK, 1977, p. 214 apud TURRIONI e PEREZ, 2009, p. 60, grifo nosso)

Diante dessas concepções, acredita-se ser importante para o professor de Matemática ficar atento à sua prática de ensino no dia a dia, para não restringir o LEM a um local ou a uma abordagem metodológica, conforme apresenta Ewbank (1977). O LEM não é apenas um lugar para o trabalho com materiais didáticos, como também não é uma abordagem presente em todos os momentos do ensino de Matemática.

Nesse sentido, Lorenzato (2009, p. 7) alerta que é uma utopia pensar que todas as salas de aula e todas as aulas devem ser um laboratório onde se dão as aprendizagens da Matemática. Para ele, tal pensamento enfraquece a concepção possível e realizável do LEM porque induz os professores a não construí-lo na escola.

Entende-se que essa concepção pode levar o professor a querer implementar uma metodologia baseada apenas em sua atitude, bem como ao desenvolvimento de aulas sem contar com novas possibilidades, novos recursos didáticos. Enfim, pensar no LEM apenas como uma abordagem metodológica pode ser uma forma de reduzir o acesso e a utilização dos meios de ensino.

Portanto, o LEM necessita de um local, mas não se resume a ele, é uma abordagem metodológica, um processo, mas não se dá em todos os lugares e em todos os momentos do ensino de Matemática, não deve ser entendido apenas como o resultado da atitude do professor, mas envolve, sim, esta atitude. Para explicar melhor, citam-se as colocações de Passos (2006), pela concordância plena com a autora:

> [...] considero que o LEM é mais que um lugar. É um ambiente que propicia às crianças, aos futuros professores e aos professores formadores um

> conjunto de explorações e investigações matemáticas com o propósito de descobrir alguns princípios matemáticos, padrões, regularidades. Assim sendo, o LEM pode ser entendido como um ambiente onde ocorre um *processo*; constitui-se em cenário que permite que projetos individuais possam ser investigados por diferentes atores. Desse modo, a definição adequada para o LEM não pode ficar restrita a *lugar* ou *processo*, devendo incluir *atitude*. Certamente, uma de suas propostas é levar os estudantes a pensar por eles mesmos, a questionar, observar padrões – resumindo, desenvolver uma atitude de investigação matemática. (PASSOS, 2009, p. 90)

Por essa afirmação, percebe-se, mais uma vez, que o foco das atividades a serem realizadas em um LEM não está na manipulação em si de materiais, mas na forma como são explorados. Para Miskulin (2009, p. 165), “Um dos aspectos fundamentais consiste na mediação do professor. O ambiente, por mais rico e construtivo que seja, por si só, não é suficiente para promover contextos propícios à exploração e construção do conhecimento [...]”.

No entanto, a ideia de trabalhar a Matemática de forma prática, dando ênfase ao caráter experimental de um Laboratório de Ensino, leva alguns pesquisadores e professores, a afirmar que o LEM tem como principal objetivo ser um elo entre a teoria e a prática. De fato, “esse ambiente deve criar oportunidades para a realização de experiências reais e para a integração entre teoria e prática” (TURRIONI, 2004, p. 2).

Diante disso, considera-se, como um dos papéis essenciais de um LEM, levar aos alunos atividades práticas onde possam aplicar os conceitos adquiridos na aula. Porém, as aulas em um LEM não podem transformar-se apenas em um momento onde os alunos assistem aos professores demonstrarem, na prática, as teorias da Matemática. A mediação do professor vai além disso. Não é ideal restringir a atividade do estudante à observação de verdades já conhecidas, pois um dos propósitos do LEM é promover a descoberta.

Segundo Lopes e Araújo (2007), o livro The Mathematics Laboratory, de 1977, indica o LEM como mais que um local onde os estudantes desenvolvem experiências e envolvem-se em atividades de aprendizagem; as atividades realizadas em um LEM devem levar o estudante a desenvolver um conjunto de habilidades que possam iniciá-lo ao processo de *investigação e pesquisa*.

Nessa perspectiva, é possível notar que as atividades nele propostas devem ir além da simples observação e experimentação de resultados, conduzindo o aprendiz a elaborar pensamentos mais complexos, como formulação de hipóteses, análise e síntese.

Sendo assim, a atitude que deve permear o trabalho de professores e alunos em um LEM é a investigativa. Dessa forma, o “aprender fazendo” no LEM implica o “aprender investigando” e, sob esse foco, considera-se que investigar é procurar conhecer o que não se sabe, fala-se em investigação a propósito de atividades que envolvem uma procura de informação (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2009). Ou seja, a atitude investigativa faz com que, em um LEM, o aluno não só observe e busque aplicações para os conteúdos matemáticos, mas almeje a construção de seus conhecimentos.

Analisando-se as vantagens de uma aula investigativa – proporcionar a exploração e a elaboração de questões; formulação, teste e justificação de conjecturas – pode-se perceber que tal aula pode influenciar no processo de aprendizagem da Matemática, inclusive, da Álgebra. Depois de investigar, o aluno tem a oportunidade de expor e discutir seus pensamentos para chegar a uma conclusão e ao registro escrito dela, que, como foi dito, é um problema comum em Álgebra.

Conforme indica a fala de Oliveira (1983), em uma aula investigativa exige-se do estudante a busca pela comprovação de suas descobertas. Para a autora,

> A atitude de indagação é o primeiro passo para a pesquisa, pois, quando se está disposto a levantar hipóteses sobre as causas e consequências de um determinado problema, surge a necessidade de provar tais hipóteses. A busca de subsídios para aceitar ou rejeitar uma hipótese é uma atitude extremamente científica [...]. (OLIVEIRA, 1983, p. 95)

Caso um estudante de Matemática, ou mesmo um professor, não busque esses subsídios para aceitação ou refutação de uma hipótese, poderá cometer enganos em relação a fatos matemáticos. Por isso, é preciso ter clara a necessidade de verificação de resultados em uma aula na perspectiva do LEM.

Uma aula no LEM pode exigir a presença da prova com rigor matemático, evitando que o aluno tire conclusões baseadas apenas no senso comum, na observação. Segundo Lorenzato (2009, p. 14-15), é aceitável, em determinado nível de desenvolvimento dos alunos, que estes não sintam a necessidade de provas lógico-dedutivas porque tomam a percepção visual como prova. No entanto, quando os alunos já desenvolveram o raciocínio lógico dedutivo torna-se necessário evitar a confusão entre constatação perceptual e demonstração, separando aquilo que parece ser verdadeiro daquilo que essencialmente é verdadeiro.

Nesse sentido, Passos (2009, p. 88), citando Pais (1996), esclarece que as atividades com materiais manipuláveis não podem ser destituídas de racionalidade e que o ponto vulnerável dessas atividades está em restringi-las ao nível sensitivo.

Entende-se que no LEM existe a ideia de utilizar o senso comum, a observação, mas, como ponto de partida, com vistas a obter o conhecimento científico. E, como este conhecimento tem seu formalismo, um LEM não pode deixar em segundo plano questões como a demonstração, a notação formal e a linguagem matemática. Segundo Rêgo e Rêgo (2009), as atividades realizadas em um LEM são importantes e necessárias por auxiliar o aluno a:

> i) *ampliar sua linguagem e promover a comunicação de ideias matemáticas*;
> ii) adquirir estratégias de resolução de problemas e de planejamento de ações;
> iii) desenvolver sua capacidade de fazer estimativas e cálculos mentais;
> iv) iniciar-se nos métodos de investigação científica e *na notação matemática*;
> v) estimular sua concentração, perseverança, raciocínio e criatividade;
> vi) promover a troca de ideias através de atividades em grupo;
> vii) *estimular sua compreensão de regras*, sua percepção espacial, discriminação visual e a *formação de conceitos*. (p. 43-44, grifo nosso)

Portanto, observando-se as expressões em destaque, um LEM com base em um processo investigativo vem quebrar preconceitos e romper mitos, mostrando que sua inserção nas escolas e universidades deve ocorrer porque ele abre espaço para o aluno usar as mãos e, sobretudo, o pensamento.

Um dos mitos a serem extintos é a crença de muitos professores na necessidade de uma preparação para que os alunos consigam desenvolver atividades de investigação, desconsiderando que muitos conceitos e procedimentos podem ser aprendidos através de atividades exploratórias e investigativas. Por esse motivo, destaca-se o trecho de Rocha e Ponte (2006) a seguir:

> A realização de investigações matemáticas pelos alunos pode contribuir para o seu desenvolvimento em vários níveis: (i) na aprendizagem do que são e como se fazem investigações; (ii) *na aprendizagem de conceitos, ideias e procedimentos matemáticos*; (iii) na aprendizagem de objetivos curriculares transversais, como a capacidade de comunicação e o trabalho em grupo; e (iv) na formação de novas concepções e atitudes em relação a Matemática. (ROCHA e PONTE, 2006, p. 31, grifo nosso)

Outro preconceito que o LEM, juntamente com a investigação matemática, ajuda a romper é quanto ao uso do material didático, havendo aqueles que acreditam que os materiais didáticos dificultam a abstração, sendo que a recomendação é de que eles devem proporcionar uma base para ela.

Além disso, ainda a respeito do uso do material didático, vê-se, frequentemente, uma ideia que leva a um equívoco: muitos professores justificam o uso de materiais concretos como um fator de motivação, um meio de tornar as aulas de matemática mais agradáveis, esquecendo-se de que o seu objetivo deveria ser utilizá-lo para *ensinar Matemática*. Acredita-se que essas ideias configuram-se em razões para que, "mesmo quando um professor usa materiais manipuláveis, os alunos, muitas vezes, não relacionam essas experiências concretas com a matemática formal" (PASSOS, 2009, p. 80).

Tais considerações levam a refletir sobre as atividades desenvolvidas no Laboratório de Ensino de Matemática. Dependendo do modo em que são inseridas no cotidiano escolar, elas podem se tornar desconectadas da Matemática que o aluno estuda nas aulas tradicionais, distante da notação que ele comumente vê nos livros didáticos e que pode tornar-se fator de desmotivação à sua implementação e uso.

"Precisamos superar a expectativa que muitos professores têm quando justificam a opção pela utilização de materiais concretos nas aulas de matemática como um fator de motivação" (PASSOS, 2009, p. 79). Um material não pode ser escolhido para ser usado em um momento da aula e depois ser colocado à parte, isso seria dar aula de forma tradicional apenas com um objeto diferente.

Quanto a sua função, Turrioni e Perez (2009) observam que não é meramente ilustrativa:

> O material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos. (p. 61)

Por possuir a característica de facilitar a observação, é comum, quando se fala de LEM, que se lembre de sua predominância no ensino de Geometria. Lopes e Araújo (2007, p. 58), ao falarem dos materiais manipuláveis, afirmam que "[...] a Geometria, por sua vez, é um dos campos da matemática que necessita mais efetivamente da utilização de materiais dessa natureza; nesse caso, o *Geoplano* é, por exemplo, um material que pode tornar o ensino da Geometria Plana mais significativo".

Não se pode esquecer que o ensino de outros ramos da Matemática – especificamente, da Álgebra – também merece atenção. As considerações feitas a respeito das dificuldades no ensino e na aprendizagem dos conceitos e dos procedimentos da Álgebra representam apenas um "recorte" do que se escreve e discute atualmente na Educação

Matemática e têm a intenção de salientar a situação problemática relativa ao uso da linguagem simbólica.

Esse quadro representa mais um elemento para justificar a realização de pesquisas a respeito do Laboratório de Ensino de Matemática, voltado para o ensino da Álgebra, afinal, o LEM tem potencialidades para - através da observação, experimentação e investigação - proporcionar reflexões mais abstratas para os alunos.

Contudo, é imprescindível a preparação dos professores, ou seja, "é necessário, portanto, capacitar os professores com o conhecimento de metodologias que, utilizando os mais diversos materiais manipulativos, possam constituir ambientes de aprendizagem alternativos para os mais diversos conteúdos da Matemática" (LOPES e ARAÚJO, 2007, p. 59).

Capacitar, estudar e conhecer os materiais que podem constituir um LEM é a forma de garantir que os professores e futuros professores estejam expostos a toda a Matemática. Aliás, faz-se necessário salientar que um LEM é um ambiente que auxilia, tanto ao aluno como ao professor de Matemática, como se pode perceber, principalmente pelas falas de Lorenzato (2009) e Passos (2009), por isso tem sido amplamente discutido o seu papel na formação de professores.

Discutindo sobre as possibilidades oferecidas pelo LEM para a formação do professor, Turrioni (2004) considera que "[...] a participação dos licenciandos nos projetos do LEM contribui para sua formação inicial, através do contato com as situações de sala de aula, da *discussão sobre os problemas do ensino-aprendizagem da Matemática* e do engajamento em experimentos de ensino" (TURRIONI, 2004, p. 57, grifo nosso).

Concorda-se com a pesquisadora e acrescenta-se ainda que o envolvimento do licenciando em um ambiente de pesquisa, por engajá-lo em atividades de cunho exploratório e investigativo, favorece a inserção de tal prática nas salas de aula do Ensino Básico em que poderá vir a lecionar.

Sendo assim, discutir o LEM na perspectiva da formação de professores é importante porque este ambiente é ideal, não apenas para o aperfeiçoamento do curso de Licenciatura em Matemática, mas também porque favorece a busca de alternativas de ensino que possam contribuir para o trabalho com o currículo do Ensino Básico.

Miskulin (2009), ao discutir acerca de um laboratório de tecnologia na formação de professores, corrobora o pensamento aqui destacado, ao dizer que, naquele ambiente,

> [...] os professores em formação podem elaborar de forma conjunta e colaborativa projetos que atendam às necessidades e aos anseios da cultura escolar na qual se inserem as suas escolas e podem compartilhar esses projetos com outros professores de outras escolas por meio das TICs. (MISKULIN, 2009, p. 160)

Dessa forma, discutir os papéis do LEM, tanto na Escola Básica quanto na Universidade, é importante para sustentar a crença de que o Laboratório de Ensino de Matemática pode constituir-se em uma abordagem metodológica a ser utilizada no ensino de Álgebra.

Nesse sentido, encontra-se Lorenzato (2009), ratificando a ideia acima destacada, ao afirmar que os materiais utilizados em um LEM –manipuláveis ou não – podem desempenhar várias funções, conforme os objetivos a que se prestam. Logo, é possível supor que pode haver no LEM materiais com a função de auxiliar no ensino de Álgebra.

Essa consideração é confirmada por Lorenzato (2009), quando afirma que devem compor o LEM aqueles materiais que desafiam o raciocínio lógico-dedutivo nos campos aritmético, geométrico, algébrico, trigonométrico e estatístico.

Um dos materiais que abordam a Álgebra escolar é o *Algeplan*.

Figura 1 - Algeplan de madeira.

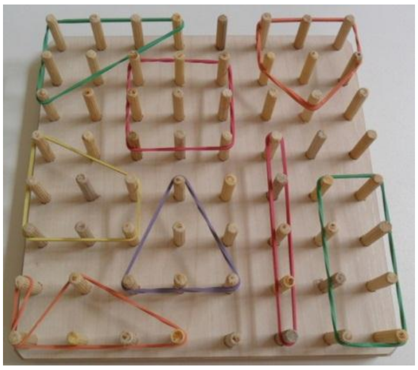
Fonte: http://cha-mate.blogspot.com.br/2010/09/algeplan.html. Acesso em: 05 dez. 2016.

Ele é formado por 40 peças, constituídas de quadrados e retângulos com tamanhos variados, cujo uso está relacionado ao ensino de expressões algébricas, monômios, polinômios[20] e fatoração de trinômios do segundo grau.

[20] Mais detalhes sobre o uso do Algeplan no estudo de monômios e polinômios podem ser encontrados no trabalho de conclusão de curso de mestrado profissional de Alcione A. de Oliveira Moura, disponível em http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/176. Acesso em: 22 maio 2016.

Lopes e Araújo (2007), relatando sobre uma pesquisa no âmbito do Laboratório de Ensino de Matemática da PUC-Campinas - onde se investigava as possibilidades metodológicas para o ensino da Álgebra Escolar - contam a experiência no trabalho com o *Algeplan* em turmas de Ensino Fundamental e comentam que, inicialmente, foram introduzidos os conceitos de áreas e perímetros por meio do *Geoplano*.

Figura 2 – Geoplano.



Fonte: http://www.elo7.com.br/geoplano/dp/4DE143. Acesso em: 05 dez. 2016

Ou seja, nota-se no âmbito do LEM uma aproximação entre o algébrico e o geométrico, aliás, o próprio *Algeplan* é formado por elementos geométricos. Lembre-se que, anteriormente, na presente Dissertação de Mestrado, a inter-relação entre Álgebra e Geometria foi, diversas vezes, citada.

Quanto ao trabalho descrito por Lopes e Araújo (2007), um momento foi destinado à familiarização com as peças do material, para posterior inserção das atividades. Foram dadas denominações às peças por meio de letras e de expressões matemáticas e, em seguida, apresentadas algumas atividades baseadas em figuras, das quais se solicitava o cálculo das respectivas áreas. Como resultados dessa experiência, os autores afirmam que "[...] a compreensão de conceitos algébricos por meio da Geometria, transpostos posteriormente para situações abstratas próprias da Álgebra, propiciou uma aprendizagem prazerosa e significativa, rompendo obstáculos à compreensão dos conteúdos da série que cursavam" (p. 64).

Então, pensando-se a partir do uso do *Algeplan*, pode-se entender que o LEM fornece meios de promover melhora na compreensão de conteúdos algébricos utilizando-se dos conhecimentos de Geometria que os alunos já possuem. Muitas vezes os alunos deparam-se com materiais destinados a estudar as formas geométricas e os elementos geométricos desde cedo, portanto, essas formas e esses elementos são o que os alunos têm de conhecido, de concreto.

Dessa forma, torna-se viável aliar Álgebra e Geometria no LEM. Além do mais, elementos geométricos podem contribuir, dando significado às letras tão utilizadas na Álgebra.

No entanto, apesar de verdadeiros, esses não são motivos suficientes para justificar o estudo de conceitos algébricos por meio da Geometria. Nesse sentido, Lorenzato (2009) contribui para o esclarecimento sobre o papel da Geometria na compreensão da Álgebra quando traz a seguinte afirmação:

> A aritmética e a álgebra escolares podem tornar-se mais fáceis aos alunos se ilustradas com o apoio das formas, pois é a geometria que, por possibilitar as representações visuais, intermedeia as sensações iniciais do mundo físico com as abstrações exigidas pelo processo de formação dos conceitos matemáticos. (LORENZATO, 2009, p. 36)

Ou seja, o LEM, por meio da Geometria, pode contribuir para o estudo da Álgebra, na medida em que os elementos geométricos auxiliem no processo de abstração dos alunos.

Usando o *Algeplan* para exemplificar esse fato, observa-se que suas peças, em formato de quadrados e retângulos, possibilitam que o aluno realize operações com monômios e polinômios, como a fatoração, a adição, a subtração e a multiplicação e, até mesmo, que ele resolva equações de 1º grau, por meio das representações concretas[21].

As representações visuais e as representações concretas fornecidas pela Geometria são responsáveis pela possibilidade de resolver, no meio concreto, operações e problemas que seriam essencialmente algébricos. Inicialmente, compreendidas no meio concreto, as questões algébricas poderão ser mais facilmente compreendidas no meio abstrato, conforme comentado por Lopes e Araújo (2007), ao relatarem os resultados de sua experiência.

Por essa razão, acredita-se que a Geometria é um dos motivos da existência de um elo entre o LEM e Álgebra.

[21] Alguns exemplos sobre resolver concreta/fisicamente uma questão algébrica estão disponíveis no seguinte endereço: http://editoradobrasil.com.br/portal_educacional/fundamental2/projeto_apoema/pdf/textos_complementares/matematica/8_ano/pam8_texto_complementar03_resolvendo_fisicamente.pdf. Acesso em: 20 mar. 2017.

4.2 Inferências Conclusivas sobre o LEM

Sem dúvida, as considerações feitas até o momento levam a refletir sobre as conexões entre a Álgebra e o LEM. A Álgebra precisa, sim, de meios auxiliares ao seu ensino porque as suas necessidades são muitas. Referindo-se ao ensino de Matemática, Lorenzato (2009, p. 6) considera o laboratório de ensino como uma grata alternativa metodológica porque, mais do que nunca, o ensino da Matemática apresenta-se com necessidades especiais e o LEM pode e deve prover a escola para atender essas necessidades.

Mas, para que o LEM constitua-se em uma alternativa metodológica para o ensino de Álgebra, ele e os materiais que o constituem não devem ser usados somente como fator de motivação. Tais materiais não devem ser usados apenas no momento de introduzir uma noção matemática, sendo descartados no decorrer da aula. É preciso preparação do professor para que, tanto o recurso metodológico quanto a abordagem metodológica, sejam fonte para a aquisição do conhecimento matemático.

Matos e Serrazina (1996, apud PASSOS, 2009, p. 82) dizem que, muitas vezes, os materiais ou representações concretas são utilizados no momento de introduzir uma noção, como apoio ao discurso do professor. Uma vez chegado ao cálculo, já não interessa o contexto que lhe deu significado.

Refletindo-se sobre essa colocação, enfatize-se, mais uma vez, o pensamento de que a função de um recurso metodológico na aula de Matemática não é restrita ao momento inicial de explanação de um conteúdo feito pelo professor. Porém, também não se pretende referir ao LEM e aos seus recursos como uma utopia, estando obrigatoriamente presentes em todos os momentos da aula.

Talvez, por não compreender as operações matemáticas como parte de uma aula que segue o LEM como abordagem metodológica, os professores de Matemática e profissionais da área de Educação estejam contribuindo para que os procedimentos algébricos e a própria Álgebra sofra alguma resistência de ser contemplada pela alternativa metodológica do LEM. Isto explicaria porque não é comum encontrar a expressão “Laboratório de Ensino de Álgebra”.

Diante disso e, acreditando-se nas conexões entre LEM e Álgebra, considera-se necessário esclarecer que o LEM destinado à Álgebra deve constituir-se em cenário para fazer com que o estudante estabeleça contato e aprenda a lidar com as diferentes concepções de Álgebra. Sendo assim, o LEM deve propiciar exercícios de formulação de leis, pois isso envolveria a observação e o estudo de regularidades, bem como a consequente expressão escrita como resultado de uma formalização dos aspectos matemáticos observados.

Considerando-se ainda que uma das concepções de Álgebra leva em conta seu uso como instrumento para a resolução de problemas ou situações-problema que buscam estabelecer relação entre a Matemática formal e sua aplicabilidade, acredita que, no LEM

> Deve-se incentivar a **Resolução de Problemas Algébricos (caráter pragmático)**. Usa-se a linguagem da Álgebra para obter a solução de um problema. As letras são consideradas incógnitas, valores desconhecidos, mas particulares. Para resolver problemas algébricos é necessário que o aluno desenvolva habilidade para extrair dos dados do enunciado do problema a sentença Matemática, isto é, a estrutura formal. Há necessidade também de desenvolver habilidade de operar com os símbolos (KRUTETSKII, 1976, apud ARAÚJO, 2004, p. 6, grifo do autor).

Através da resolução de problemas, um LEM seria um espaço para o aluno reconhecer a necessidade do uso de símbolos e aprender a lidar com eles, aprendendo o que as letras podem representar numa notação algébrica. Também é uma oportunidade de fazer com que os alunos façam a diferenciação entre incógnita e variável e verifiquem os diferentes usos da variável.

Em um LEM, uma das maneiras de inserir a resolução de problemas é através da utilização de jogos, pois, durante as jogadas, os alunos são levados a levantar métodos de ganhar e comprovar as técnicas utilizadas. São feitas tentativas, certas e erradas, utilizando recursos da Matemática em busca da solução para a situação descrita no jogo. Procedimentos bastante parecidos com os métodos de resolução de problemas são utilizados. Sem dúvida, essas situações são envolventes e motivadoras, sendo consideradas, por vezes, como um desafio.

De fato, "[...] os estudantes gostam de jogar. Quer a matemática por trás seja simples ou complicada, as oportunidades para interação social e competição controlada vão ajudar a quebrar quaisquer padrões de rotina que existam na vida escolar e no círculo matemático" (FOMIM, GENKIN, ITENBERG, 2012, p. 61).

Contudo, além de promover a diversificação das aulas de Matemática, deve-se, sobretudo, considerar e buscar quais conteúdos podem ser abordados e explorados com um jogo. Para os mesmos autores, motivação e conteúdos matemáticos surgem concomitantemente, além de ajudar no entendimento de como se resolve um problema, conforme se verifica no trecho a seguir:

> Ao mesmo tempo, esses problemas têm muito conteúdo e os estudantes, frequentemente, acham suas soluções bastante difíceis. As dificuldades maiores consistem primeiro na articulação da estratégia vencedora e depois na demonstração de que a estratégia considerada sempre leva à vitória. Ao vencer essas dificuldades, os estudantes vão aprender mais sobre os padrões aceitáveis de um argumento matemático e refinarão sua compreensão do que significa resolver um problema. (FOMIM, GENKIN, ITENBERG, 2012, p. 61)

Motivar, propor desafios, apresentar conceitos e regras da Matemática, trabalhar estratégias de resolução de problemas e desenvolver o raciocínio lógico são alguns dos objetivos que se deve ter em mente ao inserir um jogo na escola. Porém, Marco e Ferreira (2009) lembram que, além disso, o trabalho com jogos deve também propiciar o desenvolvimento da linguagem matemática. Nesse sentido, eles ainda destacam que um dos momentos do jogo cabe à intervenção escrita. E esse é mais um indício de que o LEM pode constituir um recurso que contempla a linguagem algébrica e, consequentemente, a simbolização presente nela.

Outro objetivo de um LEM algébrico deve ser promover o entendimento da Álgebra como generalização da Aritmética, ou seja, realizar experiências com números e operações e conseguir transportar os resultados observados para situações mais gerais, enfim, difundir e tornar as ideias da Aritmética mais gerais, comuns a diversas situações, conhecendo-se os números ou não, realizando operações ou apenas indicando-as.

Além disso, ressalte-se que, nesta pesquisa, já foi abordado o exemplo do *Algeplan*, mostrando que, em um LEM, é possível estar presente a geometrização da Álgebra, indicando uma concepção deste ramo da Matemática com necessidade das representações visuais e concretas.

A visualização propiciada pela Geometria ou por softwares computacionais que permitem a construção de gráficos de Funções é um auxílio importante. Contudo, como as principais dificuldades dos alunos são quanto à simbologia e à manipulação algébrica, as representações geométricas e gráficas devem ser inseridas com objetivos mais amplos. Entende-se que elas necessitam ser aliadas à notação algébrica, conceitos e procedimentos próprios da Matemática, para que possam efetivamente auxiliar o estudo da Álgebra no Ensino Médio.

Até o momento teve-se a intenção de mostrar que um LEM tem potencialidades algébricas, no entanto, ressalte-se que, apesar de demonstrar tal convicção, compreende-se, como afirma Lorenzato (2009), que não se trata de uma panaceia. Entende-se que uma das limitações do LEM é a impossibilidade dessa metodologia abranger todos os assuntos matemáticos, consequentemente, não abrange tudo o que é preciso ensinar e aprender sobre Álgebra.

Contudo, a ideia de ter um LEM focado em Álgebra é uma possibilidade para se trabalhar com o rigor matemático no Ensino Básico, visto que, "para consegui-lo, com seus vocábulos, expressões, símbolos e raciocínios, é preciso começar pelo conhecimento dos alunos, que é um ponto distante e oposto ao rigor matemático, porque é empírico e baseado no concreto" (LORENZATO, 2009, p. 23), ideia totalmente compatível com a proposta do LEM.

Observando-se a discussão colocada até o momento, nas citações e expressões destacadas, pode-se considerar que um Laboratório de Ensino de Álgebra nada mais seria que um lugar que viabilizaria a realização de atividades de diversas naturezas, que contemplem a construção e a formalização dos conhecimentos algébricos envolvidos.

A partir da segunda concepção de Lorenzato (2006) sobre o LEM, passa-se a considerar que ele é um lugar para fazer abstrações e generalizações, o que é de fundamental importância também para o processo de aprendizagem dos conceitos e procedimentos da Álgebra.

Analisando-se o que diz Lopes e Araújo (2007), pode-se considerar que um laboratório para o ensino de Álgebra pode ser encarado como um *processo* de investigação que possibilita que o aluno realize uma sucessão de ações que o conduzam à abstração e à formalização. Nesse sentido, o LEM seria mais que um ambiente físico, pois representaria uma forma de ensinar e de aprender Matemática por meio da investigação.

Para finalizar, afirma-se que é preciso passar a acreditar em um LEM como uma alternativa metodológica ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, pois ele "é composto de diferentes formas de pensamento e de compreensão do simbolismo. É um ramo independente do currículo, mas também deve ser incorporado em todas as áreas da Matemática" (VAN DE WALLE, 2009, p. 288).

O recorte acima mostra que o pensamento algébrico está envolvido em toda a atividade matemática escolar, além de incentivar o pensar matematicamente, o pensamento algébrico favorece a leitura e escrita em Matemática, afinal, lê e escreve bem em Matemática aquele que compreende seu simbolismo.

> O *Pensamento algébrico* ou *Raciocínio algébrico* envolve formar generalizações a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativo e explorar os conceitos de padrão e de função. Longe de ser um tópico de pouco uso no mundo real, o pensamento algébrico penetra toda a matemática e é essencial

> para torná-la útil na vida cotidiana. (VAN DE WALLE, 2009, p. 287, grifos do autor)

Por essas colocações, percebe-se que o pensamento algébrico deve ser a ideia-chave para que seja repensada a educação algébrica. Além disso, tal pensamento merece atenção na abordagem metodológica do LEM, estando na base das atividades nele desenvolvidas.

4.3 O Laboratório de Ensino de Matemática: do Ensino Fundamental ao Ensino Superior

Conforme exposto e relatado por professores do Ensino Médio e também da Educação Superior, as dificuldades em Matemática, devido à falta de compreensão e bom uso da Álgebra na vida escolar, são frequentes. No Ensino Médio, quando todos os alunos deveriam aprofundar e consolidar os conhecimentos obtidos anteriormente, há aqueles que ainda estão apresentando a necessidade de reestudar alguns tópicos e, até mesmo, aprender outros pela primeira vez.

“Carregando” algumas necessidades quanto à aprendizagem, os estudantes, ao chegarem ao Ensino Médio, somam novos problemas aos já existentes e, em alguns casos, ingressam no Nível Superior levando consigo esse acúmulo de necessidades.

Acredita-se que, devido a todas as potencialidades do LEM aqui apresentadas - como a possibilidade de aliar teoria e prática, buscar aplicabilidade para tópicos de Matemática, promover o “aprender fazendo” e o “aprender investigando”, observar, explorar, registrar, pensar matematicamente, realizar ações que levam à abstração, generalização e formalização, reconhecer a necessidade de usar símbolos, desenvolver a notação matemática, dentre outras, tem-se como um equívoco o não reconhecimento do papel de destaque que um LEM pode ter no Ensino Médio, aliás, os seus propósitos são compatíveis com as habilidades que se deseja desenvolver nos estudantes desse nível.

No Ensino Médio, além de os problemas quanto à aprendizagem em Álgebra se agravarem, os alunos são expostos às exigências de provas, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Este exame envolve fortemente conceitos e procedimentos algébricos nos problemas propostos, então, não se vislumbra motivo para não explorar as potencialidades do LEM em relação à Álgebra, pois ele pode contribuir para o alcance das habilidades e competências esperadas do aluno no referido exame, tais como as descritas a seguir, presentes na Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias:

> **Competência de área 5 – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.**
>
> **H19 -** Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
>
> **H20 -** Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
>
> **H21 -** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
>
> **H22 -** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
>
> **H23 –** Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos. (BRASIL, 2012, p.6)

Além disso, o trabalho com Matemática partindo do concreto não é uma necessidade apenas de estudantes mais jovens. Conforme afirma Serrazina (1990, p. 1), “diferentes teorias psicopedagógicas asseguram-nos que as crianças e os jovens, e mesmo muitos adultos, precisam de modelos concretos para compreender conceitos matemáticos”.

Dessa forma, assim como o LEM não abrange apenas um dos ramos da Matemática, também não é restrito a um só nível educacional. Embora seja mais comum encontrar um LEM destinado ao Ensino Fundamental, precisa-se buscar conhecer suas contribuições para o Ensino Médio, uma vez que, segundo Lopes e Araújo (2007, p. 67), “é possível vislumbrar grandes avanços para conseguir, por meio de atividades desenvolvidas no Laboratório de Ensino, competências de níveis mais elevados relativas ao saber matemático”.

Conforme discutido anteriormente, uma dessas “competências” a serem desenvolvidas em um ambiente denominado Laboratório de Ensino de Matemática é a abstração.

Turrioni (2004), ao fazer as reflexões finais de seu trabalho de Mestrado, no qual tratou da criação de um LEM em uma Universidade e avaliou sua utilização no curso de graduação em Matemática, traz a seguinte afirmação, que muito contribui para os argumentos aqui lançados:

> Os licenciandos perceberam que é imprescindível primeiro passar pelo concreto e depois chegar à abstração. O LEM se baseia nos preceitos da Psicologia a respeito de como se dá a aprendizagem: tato (pegar) e a visão (ver) que são primordiais no início da aprendizagem, mesmo para os adultos, até chegar à verbalização e ao registro (sem rigor), e ao objetivo final, a abstração. (TURRIONI, 2004, p. 82)

Por meio dessa afirmação, pode-se verificar o quanto o LEM é também importante para o aprendizado dos adultos em Álgebra. Portanto, defende-se que, se o LEM é reconhecido por sua importância na Universidade e no Ensino Fundamental, deve também ter ser seu papel reconhecido no Ensino Médio.

Acredita-se que o LEM é de fundamental importância em todos os níveis de ensino, sobretudo porque ele “constitui-se em verdadeiro cenário interativo de aprendizagem colaborativa e conhecimento compartilhado” (MISKULIN, 2009, p. 160).

CAPÍTULO 5: A PESQUISA

5.1 Aspectos principais da pesquisa

No presente capítulo apresenta-se um levantamento de trabalhos acadêmicos, tendo como fonte o evento: “XI Encontro Nacional de Educação Matemática”, realizado no ano de 2013, na cidade de Curitiba, Paraná, com o tema “Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas”. Esse levantamento foi realizado em duas etapas, sendo a primeira destinada aos trabalhos da modalidade Comunicação Científica (CC) e a segunda destinada à modalidade Relato de Experiência (RE).

A busca deu-se pelo endereço eletrônico que contém os Anais do evento[22]. A seleção da amostra de trabalhos não contou com o auxílio de ferramentas de busca por palavras específicas, previamente definidas, sendo os trabalhos escolhidos por meio de palavras contidas nos títulos que pudessem remeter aos objetos Álgebra e LEM.

A seleção da amostra foi realizada dessa forma porque a tentativa de realizar a busca por algumas palavras e termos, como o LEM, não forneceu resultados satisfatórios, devido a sua baixa frequência nos títulos dos trabalhos contidos nos Anais.

Essa etapa da pesquisa tem como finalidade identificar propostas de ensino que tratem do ensino de Álgebra do Ensino Médio e exemplifiquem o LEM como abordagem metodológica. Assim, um dos objetivos do levantamento, apresentado a seguir, consiste em verificar se há a inserção de novas metodologias, com atividades baseadas na concepção de LEM, tendo em vista a superação de dificuldades referentes à Álgebra do Ensino Médio. Além disso, a busca é realizada na perspectiva de conhecer quais são os recursos didáticos mais utilizados nas propostas apresentadas, assim como identificar quais são os conteúdos algébricos contemplados.

5.2 Panorama geral de trabalhos algébricos no âmbito do LEM: Comunicações Científicas

Devido ao tipo de busca realizada nos Anais do evento, selecionou-se, em etapa inicial, 27 (vinte e sete) trabalhos na modalidade Comunicação Científica. Realizou-se a leitura de cada um a fim de identificar quais deles contemplam os objetivos na realização do

[22] Endereço: http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM. Acesso em: 10 maio 2014

levantamento. Percebeu-se que nem todos cumpriam os objetivos do presente trabalho, ou seja, não tratavam de conteúdos algébricos do Ensino Médio ou não continham atividades referentes à concepção do LEM, sendo, portanto, excluídos. Assim, a amostra de Comunicações Científicas ficou composta por 16 (dezesseis) trabalhos, os quais constam no quadro a seguir[23].

Quadro 1 – Primeira fase do levantamento: Comunicações Científicas.

Título	**Modalidade/ Eixo Temático**	**Conteúdo abordado**
Atividades práticas integradas ao componente curricular: o software GeoGebra no ensino de funções trigonométricas	Comunicação Científica/ Formação de Professores	Funções Seno, Cosseno e Tangente
Funções trigonométricas em videoaulas: possível contribuição para a aprendizagem	Comunicação Científica/ Formação de Professores	Funções Trigonométricas
O ensino da função afim com o auxílio do software GeoGebra	Comunicação Científica/ Formação de Professores	Função Afim
Alguns aspectos do ensino de Matemática por meio de materiais concretos	Comunicação Científica/Pesquisa em Educação Matemática	Sequência e Função Exponencial
A régua de cálculo: uma aplicação das propriedades dos logaritmos	Comunicação Científica/Práticas Escolares	Logaritmos
Análise da etapa tarefa de uma webquest de Álgebra, que caminho seguir?	Comunicação Científica/Práticas Escolares	Progressões Geométricas
Análise e representação de progressão aritmética e geométrica com o uso do	Comunicação Científica/Práticas Escolares	Progressões Aritmética e Geométrica

[23] Além dos 16 trabalhos mostrados no quadro, apresenta-se no Anexo A, a descrição de duas Comunicações Científicas, que, apesar de não contemplarem conteúdos do Ensino Médio, podem trazer contribuições ao ensino da Álgebra.

Microsoft/Excel		
Explorando a parábola da função polinomial do 2º grau em um ambiente informático	Comunicação Científica/Práticas Escolares	Funções
Função quadrática e progressões aritméticas – uma abordagem com auxílio de softwares	Comunicação Científica/Práticas Escolares	Funções e Progressão Aritmética
Funções exponenciais e logarítmicas: um estudo por meio de uma sequência didática	Comunicação Científica/Práticas Escolares	Funções
Progressões geométricas em fractais: um estudo de caso no Ensino Médio	Comunicação Científica/Práticas Escolares	Progressões Geométricas
Registros de representação semiótica em uma atividade de modelagem matemática desenvolvida no 1º ano do Ensino Médio	Comunicação Científica/Práticas Escolares	Função linear
Registros de representações semióticas no estudo das funções polinomiais de segundo grau	Comunicação Científica/Práticas Escolares	Funções
Representações de funções usando o Winplot	Comunicação Científica/Práticas Escolares	Funções
Torre de Hanói: o jogo como recurso metodológico nas aulas de Matemática	Comunicação Científica/Práticas Escolares	Funções e Progressões
Um caminho para o ensino e aprendizagem de Determinantes	Comunicação Científica/Práticas Escolares	Determinantes

Fonte: elaborada pela autora

A seção seguinte apresenta a etapa da análise dos trabalhos do quadro acima.

5.2.1 Descrição dos trabalhos selecionados na modalidade Comunicações Científicas - CCs

CC 1: Atividades práticas integradas ao componente curricular: o software GeoGebra no ensino de Funções Trigonométricas

Autor: Sonner Arfux de Figueiredo

O objetivo desse trabalho foi analisar as potencialidades e limitações do software GeoGebra em atividades investigativas na formação dos conceitos básicos da Trigonometria. Consistiu na aplicação de uma atividade relacionada ao conteúdo Funções Trigonométricas aos acadêmicos da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul.

Em um primeiro momento, os alunos receberam um applet[24] previamente construído, cuja intenção era a visualização da variação do Seno, Cosseno e Tangente no ciclo trigonométrico, movimentando um ponto(P) fixado. Ao mesmo tempo em que o aluno observava o ciclo trigonométrico, ele visualizava as Funções nos gráficos que eram gerados.

Em um segundo applet, os alunos puderam visualizar a construção de diferentes gráficos envolvendo a Função Seno. Para esta parte da atividade foram disponibilizados o eixo cartesiano e as equações $f(x) = a.sen(x)$, $g(x) = b.sen(x)$, $p(x) = sen(x.m)$ e $q(x) = sen(x + m)$. As atividades destinavam-se a construções de gráficos a partir da substituição das constantes a, b, m, n por valores numéricos.

De forma análoga, efetuando a troca da palavra Seno por Cosseno ou Tangente foram analisadas as variações observadas nas construções dos gráficos desses tipos de Funções. Nesta fase, foi utilizado um applet destinado à Função Tangente.

Nas Considerações Finais, o autor aponta que o uso do software auxiliou os acadêmicos a relacionar os conceitos já vistos no triângulo retângulo com o ciclo trigonométrico. O autor considera também que o acadêmico, mesmo em virtude do pouco contato com o software, associou o processo de abstração da Matemática ao confrontar o aspecto operacional e estrutural.

---

[24] Applet é um pequeno software que executa uma atividade específica dentro (do contexto) de outro programa maior (como, por exemplo, um web browser), geralmente como um plugin. O termo foi introduzido pelo AppleScript em 1993. https://pt.wikipedia.org/wiki/Applet. Acesso em: 15 out. 2015

Esse trabalho foi realizado com base na ideia de articulação entre teoria e prática nas disciplinas da Licenciatura em Matemática, tomando a prática como componente curricular. Dessa forma, vê-se nele a preocupação em promover a articulação da prática no ensino da Álgebra Escolar. Além disso, consiste em integrar e relacionar conceitos com a simbologia específica presente nas Funções Trigonométricas, utilizando simultaneamente as formas algébrica e gráfica.

CC 2: Funções Trigonométricas em vídeoaulas: possível contribuição para a aprendizagem

Autores: Helen Maria Pedrosa de Oliveira; Andréa Cardoso e José Carlos de Souza Júnior

O trabalho em tela trata da criação de videoaulas sobre Funções Trigonométricas realizadas pela parceria entre professores pesquisadores e acadêmicos. As videoaulas têm como público principal estudantes universitários em início de curso, mas também podem ser direcionadas a estudantes do Ensino Médio.

As atividades propostas têm como base a utilização da tecnologia e a proposição de situações contextualizadas ao assunto. Em alguns momentos, recorre-se ainda à Modelagem Matemática para a definição da Função que melhor se adequa à situação.

Em suas fundamentações teóricas, os autores trazem crenças sobre a relação entre concreto e abstrato, considerando que a ascensão do concreto para o abstrato é alcançada pelas ações de aprendizado. Informa-se que, nesse trabalho, o concreto é entendido com as situações concretas (contextualizadas).

Percebe-se, devido a algumas críticas apresentadas, que as atividades são formuladas visando à superação dos problemas relativos ao ensino de Funções Trigonométricas. Os autores apontam que o estudo dessas Funções tem sido feito, na quase totalidade das escolas, através de construções de gráficos com o uso de tabelas e os professores não propõem que os alunos entendam a influência dos coeficientes dessas Funções.

Por esse motivo, há nas atividades propostas nos momentos destinados a verificar os impactos da variação dos coeficientes no gráfico. Além disso, percebe-se que o GeoGebra ganha destaque por estimular as múltiplas representações de uma Função: algébrica, numérica e gráfica.

Embora não sejam apresentados os roteiros das atividades aplicadas aos alunos e se tratar da apresentação de resultados parciais de um trabalho que ainda estava em andamento, é possível notar a possibilidade de essas atividades contribuírem para a superação de dificuldades em relação ao uso da linguagem algébrica, uma vez que está clara no trabalho a preocupação em tornar significativo ao aluno o sistema de símbolos presentes nas Funções Trigonométricas.

Apesar de não ficar claro no trabalho, crê-se que o estudo dos impactos da variação dos coeficientes no gráfico tem o intuito de abordar alguns conceitos, como a periodicidade, a amplitude e a translação. Esse fato é verificado no recorte abaixo que mostra a estrutura didática na elaboração das atividades.

- Questionando: utilizou-se para esta etapa a animação de uma pista de corrida circular, com o intuito de trabalhar a conversão das unidades grau para radianos e vice-versa, além da localização das mesmas no ciclo trigonométrico, de forma interativa.
- Analisando: neste momento os alunos utilizaram os conhecimentos adquiridos no jogo para estudar o conteúdo de arcos e ângulos.
- Modelando: a partir de situações concretas, foi feita a definição das funções trigonométricas, utilizando para isto, a modelagem da função que se ajusta ao trajeto do carrinho na pista circular durante determinado tempo, construindo assim a representação gráfica.
- Examinado o modelo: nesta etapa foi feita a observação de algumas regularidades na construção do gráfico modelado na etapa anterior, como por exemplo, *a identificação da periodicidade* e o estudo do sinal das funções.
- Refletindo sobre o processo: são propostas considerações sobre *o comportamento gráfico das funções*, ora crescente, ora decrescente, dependendo do quadrante.
- Implementando o novo modelo: este momento foi destinado à análise do impacto causado pela variação dos coeficientes no gráfico da função, estabelecendo a relação entre representação gráfica e algébrica das funções.
- Considerando nova prática: após o estudo são propostas novas situações que podem ser modeladas por funções trigonométricas como forma de consolidar os conhecimentos adquiridos.

CC 3: O ensino da Função Afim com o auxílio do software GeoGebra

Autores: Conceição Brandão de Lourdes Faria e Evanilson Landim Alves

O artigo apresenta uma possibilidade didática para o ensino da Função Afim com o auxílio do GeoGebra. Assim como no trabalho anterior, os autores salientam o uso do GeoGebra para permitir, simultaneamente, análise gráfica e algébrica.

Os autores defendem que, com o GeoGebra, pode-se facilmente ilustrar as propriedades das Funções, como, por exemplo, as que se referem aos coeficientes angular e linear de uma Função Afim. Consideram que, ao apresentar uma Função Afim no GeoGebra, pode-se, ao mesmo tempo, observar o comportamento do gráfico a partir da variação dos coeficientes da mesma.

A atividade apresentada consiste na construção do gráfico de uma Função Afim $y = ax + b$ e utilização dos seletores (também conhecidos por controles deslizantes) para variar os valores de a e b. A atividade tem a finalidade de levar o aluno a tirar conclusões sobre o efeito da variação do coeficiente angular (a) e do coeficiente linear (b) sobre o gráfico.

CC 4: Alguns aspectos do ensino de Matemática por meio de materiais concretos

Autores: Stephany Glaucia de Oliveira Paulo e Carlos Alberto de Miranda Pinheiro

O trabalho busca articular a metodologia da Resolução de Problemas e a prática de manipulação de material concreto. Os materiais concretos presentes nesse trabalho são a Torre de Hanói, o Tangram e o Geoplano, porém, apenas a Torre de Hanói é destinada ao estudo de conteúdos algébricos, sendo apresentada uma atividade que remete ao estudo de sequência numérica e da Função Exponencial.

Os autores apresentam a Torre de Hanói como um tipo de quebra-cabeça, com três colunas e discos de diâmetros diferentes, que devem ser movimentados, um de cada vez, da primeira à última coluna, sendo proibida a colocação de discos maiores sobre os menores. Pode ser usado em séries iniciais e em séries mais adiantadas.

No trabalho, após breve apresentação da história e das regras do jogo, foi proposto que a seguinte pergunta fosse feita aos alunos: Qual a relação entre o número de discos com o número de movimentos mínimos? Em seguida, pediu-se que fosse apresentado um modelo matemático para a situação.

A ideia foi fazer com que os alunos observassem e percebessem que o número de movimentos é a potência de base 2, elevada ao número de discos, menos um. Esperava-se que, chegando à relação entre o número de discos e o número de movimentos, o aluno se aproximasse do modelo matemático que é uma Função Exponencial. Porém, como a proposta não foi implementada, não há considerações sobre possíveis resultados e implicações na aprendizagem sobre o conteúdo de Função Exponencial.

Aliás, cabe dizer que a proposta não coloca como objetivo a realização de um estudo amplo sobre Função Exponencial, apenas visa levar os alunos à descoberta de um modelo matemático, que é exponencial, para uma situação dada a partir de um material concreto. Apesar disso, é possível considerar que a atividade trata do uso de símbolos de forma significativa. Embora seja simples, procura usar a notação matemática para expressar um resultado geral, formalizando o que foi observado na prática.

Além disso, observa-se que a atividade visa à descoberta de um modelo matemático de forma empírica, porém, não utiliza os itens observados na prática para realizar a demonstração do modelo exponencial encontrado.

A abordagem dada ao conteúdo matemático nesse trabalho está atrelada aos pressupostos quanto ao uso do material concreto. Seus autores consideram o material concreto como ferramenta didática para um ensino significativo e estimulante, sem os traumas do insucesso e a cansativa formalidade, sendo um dos motivos para que a investigação e a descoberta se sobressaiam em relação à atenção dada à escrita algébrica.

O material é tido pelos autores como parte da realização de um processo de investigação, onde o aluno pode observar, relacionar, comparar hipóteses e argumentações e, assim, chegar ao resultado de um determinado conteúdo.

No entanto, na proposta apresentada, nota-se que são estimuladas a observação e as argumentações sobre a relação existente, chegando-se à generalização, mas não há o intuito de trabalhar com resultados de um conteúdo. Para os autores, o uso do material concreto é de grande valia, tanto por permitir aplicar o conhecimento obtido como para adquirir novos conhecimentos.

CC 5: A régua de cálculo: uma aplicação das propriedades dos Logaritmos

Autor: Flávio do Sacramento Maia

O objetivo do trabalho é restaurar o conhecimento acerca da Régua de Cálculo, um dispositivo amplamente utilizado para a realização de cálculos numéricos até meados da década de 1970. São apresentadas duas atividades, tendo a primeira a intenção de relacionar o funcionamento da régua com as propriedades dos Logaritmos estudadas pelos alunos do primeiro ano do Ensino Médio, sendo, então, destinada à aplicação dos Logaritmos em cálculos aritméticos. A segunda atividade é uma proposta de elaboração e uso de uma Régua de Cálculo artesanal.

A proposta não tem como base o estudo algébrico dos Logaritmos, mas, sim, seu uso como ferramenta de cálculo aritmético. É esperado que o aluno tenha contato com uma aplicação direta das propriedades dos Logaritmos de forma concreta. A ideia central é estimular o aluno a repensar alguns algoritmos de cálculo aritmético.

Os autores propõem que as atividades sejam aplicadas como uma atividade de aprofundamento após o estudo completo dos Logaritmos no primeiro ano do Ensino Médio e isso comprova que eles não pretendem ensinar o conteúdo de Logaritmos com a Régua de Cálculo. Os autores salientam que a Régua de Cálculo exige do operador o conhecimento do conceito de Logaritmo e treina suas habilidades com as propriedades dos Logaritmos.

Não é um trabalho de natureza algébrica, não trata do uso de símbolos, mas pode levar a um reestudo dos Logaritmos do ponto de vista algébrico. Além disso, mostra preocupação com o aprendizado por meio de atividades práticas, contempla a metodologia de um LEM, porém, não especificamente com abordagem algébrica.

CC 6: Análise da etapa tarefa de uma webQuest de álgebra, que caminho seguir?

Autora: Suely Scherer

Esse trabalho apresenta resultados de uma investigação que trata da identificação de possibilidades de interação e pesquisa na etapa tarefa de uma webQuest de Álgebra. WebQuest é uma metodologia de investigação que utiliza, preferencialmente, recursos da internet. As etapas de uma webQuest são: introdução, tarefa, processo, avaliação e conclusões. Nesse trabalho, a etapa a ser analisada é a tarefa, por ser o “coração da webQuest”.

O objeto de estudo é a webQuest intitulada “Aplicação da Matemática Financeira no cotidiano”, cujo conteúdo matemático é “Progressões Geométricas: Matemática Financeira”. Produzida com o intuito de ser utilizada com alunos do primeiro ano do Ensino Médio, nela a autora traz a preocupação de relacionar as questões matemáticas com o cotidiano do aluno. Trata da aplicação de conteúdos a situações concretas, apresentando-se subdividida em cinco tarefas distintas a serem realizadas em ordem crescente.

Essa webQuest foi selecionada dentre várias outras disponíveis na Comunidade Virtual EscolaBR, de onde foi selecionado um total de 13 webQuests relacionadas a Álgebra, onde a primeira a ser analisada é a referida aqui.

Foram estabelecidas categorias para a análise da webQuest, todavia, o trabalho realça a análise realizada na categoria Álgebra, buscando identificar a concepção deste ramo da Matemática presente na etapa tarefa. A análise é feita dando enfoque ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

A investigadora entende Álgebra não apenas como resolução de problemas de aritmética generalizada e/ou como aplicação de regras de manipulação algébrica. Ela a entende como forma específica de pensamento, que possui uma linguagem vinculada. Por isso, na análise, buscou-se verificar se a tarefa leva: (1) ao pensar algebricamente; (2) à construção de regularidades; (3) à constituição de relações entre as grandezas; e (4) à expressão de ideias em linguagem algébrica durante a resolução de problemas.

A autora afirma que, desses requisitos, apenas a expressão de ideias em linguagem algébrica não foi contemplada pelas tarefas propostas, isso se for considerada essa representação em uma perspectiva letrista. Porém, afirma também que os resultados apresentados em linguagem algébrica não são apenas resultantes de um algoritmo, mas de uma análise de situações baseadas em um contexto concreto que simula o real.

Verificou-se, ainda nas tarefas, que estas contemplam aspectos como generalização de padrões aritméticos, o estabelecimento de relação entre duas grandezas, a resolução de problemas que levam à diferenciação de parâmetros, variáveis e incógnitas.

Além disso, a abordagem dada ao conteúdo indica que os alunos podem construir o conceito de Progressão Geométrica sem ter que, necessariamente, partir de uma representação algébrica.

CC 7: Análise e representação de Progressão Aritmética e Geométrica com o uso do Microsoft Excel

Autores: Angela Maria Pacini Schu e Anderson Adilson Pacini

Tal trabalho conta sobre um estudo de caso realizado com uma turma de 3° ano do Ensino Médio, onde os autores procuram relacionar o uso do Microsoft Excel com o ensino da Progressão Aritmética (P.A.) ligada à Função Afim e o ensino da Progressão Geométrica (P.G.) ligada à Função Exponencial.

O objetivo é levar o aluno a construir conceitos a partir da ferramenta. Os autores tiveram como foco a integração de informações proporcionadas pelo Excel ao conteúdo, utilizando a investigação matemática para buscar explicação matemática para os fatos observados, pois, segundo eles, quando o aluno parte de uma P.G. e encontra um gráfico e uma fórmula de Função Exponencial, é preciso investigar, ir à busca de explicação.

Para os autores, a investigação envolve visualização, generalização, observação, organização, cálculos algébricos, manipulação de fórmulas e mudanças de variáveis. Diante dessa visão, pode-se dizer que os referidos autores consideram a investigação matemática uma alternativa importante para o trabalho com conteúdos algébricos.

No desenvolvimento da atividade com os alunos, além da plotagem de gráficos com o auxílio do Excel a partir de Progressões Aritméticas e Geométricas, foi realizada uma sequência de atividades com o objetivo de levar o aluno a visualizar a P.A. como um tipo particular de Função Afim e a P.G. como um tipo particular de Função Exponencial.

Para que essas relações fossem percebidas, foi necessário dar enfoque algébrico à atividade, trabalhando com as fórmulas do termo geral da P.A. e da P.G. e as equações que representam as Funções Afim e exponencial.

Buscou-se relacionar os símbolos das Progressões com os símbolos das Funções. Foi necessário relacionar as formas algébricas entre si (aquelas já conhecidas pelos alunos e aquelas presentes no Excel) e relacioná-las, respectivamente, às representações gráficas dadas pelo Excel. Considera-se que, até o momento, esse é um dos trabalhos que mais ressaltam a preocupação com a simbologia algébrica, buscando tornar os sistemas de símbolos, tanto das Progressões como das Funções, significativos.

Segundo os autores, nessa proposta foi possível propor cálculos algébricos e promover a comunicação do que se está aprendendo com argumentação e representação, o que demonstra interesse em relação ao desenvolvimento e uso da escrita algébrica. Relataram que os alunos apresentaram dificuldade ao trabalharem algebricamente, sendo a etapa mais difícil aquela que envolveu mudança de variáveis, por necessitar da capacidade de abstração.

Como conclusão, os autores consideraram o uso do Excel eficaz na visualização de gráficos e também na aproximação da P.A. com a Função Afim e da P.G. com a Função Exponencial.

CC 8: Explorando a parábola da Função Polinomial do 2º grau em um ambiente informático

Autores: Neomar Lacerda da Silva; Renato Pereira de Figueiredo; Maria Elizabete Souza Couto; Wagner Ribeiro Aguiar.

O trabalho objetivou avaliar a potencialidade do software Winplot no estudo da Função Quadrática, tendo em vista as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação à sua representação gráfica.

Foi aplicada uma sequência didática a alunos do 1º ano do Ensino Médio, formulada a partir de estudos anteriores sobre a articulação entre registro gráfico e algébrico. O intuito principal foi investigar se o software Winplot pode favorecer os alunos no processo de construção e na interpretação de gráficos das Funções Polinomiais do 2º grau.

A justificativa para tal abordagem baseia-se no fato de que as dificuldades referentes à construção e interpretação de gráficos são apontadas por autores que tratam do assunto Funções. Além disso, as dificuldades no assunto foram constatadas pelos autores desse trabalho por meio da aplicação de um questionário diagnóstico aplicado aos sujeitos da pesquisa.

Também em análise a priori, os autores observaram a predominância de cálculos algébricos e aritméticos, mesmo quando a questão propunha a construção gráfica, evidenciando que os alunos não têm total compreensão do trabalho com gráficos de Funções Quadráticas. Outra constatação importante foi a de que os alunos não estabelecem relação entre a mudança dos parâmetros e o traçado do gráfico.

Devido a tais constatações, as atividades aplicadas foram construídas de modo a proporcionar aos alunos reflexões a respeito dos gráficos das Funções Quadráticas e suas respectivas representações algébricas. Os alunos foram levados a realizar construções dos elementos gráficos e a observá-las para, em seguida, responder, pelo registro escrito, as perguntas propostas em cada atividade.

Dessa forma, embora o software utilizado tenha como função principal a plotagem gráfica, as atividades criadas com sua mediação têm grande enfoque algébrico, preocupação com o registro algébrico e o significado dos parâmetros que constituem a forma algébrica da Função Quadrática.

Por isso, parte das atividades foi destinada a fazer os alunos perceberem que modificações na escrita algébrica da Função acarretam mudanças na representação gráfica e vice-versa. Ainda se destinou parte das atividades para relacionar a soma ou subtração de uma constante à Função com a translação vertical.

Segundo os autores, os resultados da pesquisa mostraram que o uso do software Winplot pode favorecer a leitura, a interpretação e a construção gráfica, contudo, observa-se que, pelo fato de as atividades terem também enfoque algébrico, elas contribuem, mesmo que indiretamente, para a superação de dificuldades em relação ao uso da linguagem simbólica.

Embora os autores não tenham observado, apesar de serem elaboradas com simplicidade, as atividades envolveram os alunos num processo de investigação e pesquisa, levando à abstração, generalização e formalização das ideias do conteúdo. Os trechos a seguir mostram o que foi pedido aos alunos na Sequência Didática/análise a posteriori e ilustra tal constatação:

Cada atividade da SD, realizada utilizando o Winplot, se constituiu de uma descrição dos procedimentos no software, destinada à construção dos elementos gráficos. A partir destas construções, os alunos deveriam observá-las para em seguida responder, pelo registro escrito, as perguntas propostas em cada atividade. As ações constituídas pelos alunos para desenvolver a SD tiveram registros na própria SD, nos arquivos salvos no Winplot e na captura da tela do computador no momento da efetivação da atividade, conforme já descrito.

O objetivo da SD II é fazer com que o aluno perceba que modificações na escrita algébrica da função acarretam mudanças na representação gráfica e vice-versa.[...] Partimos da função quadrática descrita algebricamente por $f(x) = x^2$ *, por ser a representação mais "simples" da função do 2º grau e por permitir que o aluno perceba quais* *modificações ocorrem em seu gráfico quando alteramos o sinal (positivo/negativo) do valor do coeficiente a quando consideramos somente representações na forma* $f(x) = ax^2$.

Para esta atividade era esperado que os alunos observassem os gráficos obtidos, que todos são curvas, que se denominam parábolas. Verificassem também que, conforme o coeficiente de a positivo/negativo, a concavidade da parábola muda de posição, concavidade voltada para cima para $a > 0$ *e voltada para baixo para* $a < 0$*, e que essa característica possibilita à função um valor de máximo ou um valor de mínimo.*

Como a leitura do trabalho leva a crer que o foco de interesse é a representação gráfica, acredita-se que essas constatações não foram feitas pelos autores porque não tinham a intenção de aprofundar o trabalho em questões algébricas. No entanto, como foi dito e ilustrado, trata-se de um trabalho com contribuições ao enfoque algébrico da Função Quadrática.

CC 9: Função Quadrática e Progressões Aritméticas - uma abordagem com auxílio de softwares

Autores: César Thiago José da Silva e Verônica Gitirana

Esse trabalho teve como objetivo elaborar, experimentar e analisar uma abordagem de Função Quadrática a partir de uma contextualização com Progressões Aritméticas. A abordagem apoiou-se no uso do software de simulação Modellus e no Microsoft Excel, visando à criação de um ambiente que proporcionasse uma validação empírica das propriedades da Função Quadrática.

Com as atividades propostas, os autores pretenderam buscar a compreensão das características peculiares da Função Quadrática, acreditando que o conceito de Progressão Aritmética é essencial para essa caracterização.

As simulações permitiram ao usuário alterar variáveis da situação e observar o feedback em outras representações e/ou no outro conceito, relacionando os dois temas. Para os autores, essa conexão é obrigatória, pois os dois conteúdos são indissociáveis para a compreensão da validação do teorema de caracterização da Função Quadrática, composto por duas proposições, a saber:

a) Se f é quadrática e x_1,x_2 , x_3,x_4 ,..., é uma progressão aritmética qualquer, então a sequência: f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4),… tem a propriedade de que as diferenças sucessivas entre seus termos formam uma progressão aritmética;

b) Se f é contínua e transforma progressões aritméticas em progressões aritméticas de segunda ordem, então f é da forma f(x) = ax^2+bx+c.

As atividades apresentadas tomam por base a Proposição 1 do teorema. Foram realizadas três atividades, duas no Modellus e uma no Excel, sendo as duas primeiras simulações que representam situações contextualizadas, enquanto a última visa à exploração da representação algébrica com o objetivo de levantar conjecturas em torno das características intrínsecas à Função Quadrática aplicada a Progressões Aritméticas.

Na terceira atividade explorou-se a articulação entre a Equação que representa a Função, as tabelas e o gráfico da Função, como também entre os coeficientes e a Progressão Aritmética de segunda ordem gerada. Junto a essas atividades computacionais foram distribuídas fichas de atividades, nas quais os alunos deveriam escrever os cálculos e as conclusões obtidas.

Quanto aos resultados da análise das respostas dos alunos, os autores explicam que, na atividade 1, foi observado que alguns alunos revelaram pouca habilidade em interpretar expressões literais e comunicar, através delas, os resultados obtidos. Enfatizaram os autores que a maior dificuldade é a expressão de resultados através de um modelo algébrico.

Colocam ainda os referidos autores que, na atividade 2, foi observado algo parecido. Diante da necessidade de obter uma expressão geral, os alunos revelaram extrema dificuldade ao utilizarem a linguagem formal para comunicar tal generalização, embora tenham compreendido as conclusões da atividade.

De fato, o problema está na falta de habilidade em expressar resultados em linguagem algébrica, e não no fato de observar e tirar conclusões. Aliás, os autores observam que os alunos não apresentam dificuldade ao fazer afirmações diante do observado, no entanto, acabam por realizar uma generalização precipitada, o que indica a necessidade de se pensar na inclusão da demonstração matemática no momento de finalização de determinadas atividades.

Em geral, as conclusões desse trabalho afirmam que o uso dos softwares permitiu a exploração, simulação e o teste das hipóteses levantadas pelos alunos, o que leva a caracterizar a atividade ora discutida como uma atividade investigativa.

Os autores consideraram que houve boa compreensão quando se relacionaram os dois conteúdos. As observações levaram à compreensão de fatos, porém, percebeu-se que uma abordagem para a passagem da situação observada para a expressão algébrica ainda necessita de novos esforços e da criação de sistemas de ensino, o que parece indicar e confirmar a necessidade de realização de atividades que caracterizem um laboratório de ensino de Álgebra.

Esse trabalho constitui-se em um exemplo do que se considera laboratório de ensino de Álgebra, pois, através dos softwares, as atividades levam a um processo de investigação, aliam teoria e prática por meio das simulações, buscam relação intradisciplinar utilizando-se da contextualização, trazem preocupação com a significação dos parâmetros da Função, com o registro escrito, com a abstração e, especialmente, com a generalização e a formalização dos resultados observados. Em suma, é um trabalho que contribui para que os alunos possam superar dificuldades em relação à linguagem simbólica.

É interessante também destacar que esse trabalho apresenta as atividades criadas em detalhes, mostra as questões como foram aplicadas aos alunos do Ensino Médio, sujeitos da pesquisa.

CC 10: Funções Exponenciais e Logarítmicas: um estudo por meio de uma sequência didática

Autora: Adriana Tiago Castro dos Santos

O artigo apresenta resultados de uma pesquisa de mestrado realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio cujo objetivo foi ensinar Funções Exponenciais e Logarítmicas utilizando o software GeoGebra. A intenção da autora foi analisar quais processos do Pensamento Matemático Avançado poderiam estar presentes nas respostas das atividades dos alunos e verificar se o uso do GeoGebra contribui para facilitar o processo de abstração das Funções Exponencial e Logarítmica.

A autora explica em seu trabalho que são processos do Pensamento Matemático Avançado a representação, a visualização, a indução, a análise, a observação, a classificação e a síntese, assim como a abstração e a generalização.

Fazem parte das ações que constituem o aludido pensamento a realização de experimentos, teste de hipóteses, criação de conjecturas e estratégias para resolver problemas. Para a autora, o uso das tecnologias pode contribuir para o desenvolvimento desses processos e facilitar a compreensão de um conceito.

O trabalho com os alunos desenvolveu-se em quatro seções. A primeira tinha o objetivo de resgatar o estudo da Potenciação e suas propriedades. A segunda pretendeu explorar as características da Função Exponencial, seu domínio e a representação de seu gráfico utilizando o GeoGebra. A terceira seção envolveu o conceito de Logaritmos e a quarta seção levou em conta o estudo da Função Logarítmica com o GeoGebra.

A autora realizou a análise por seções, onde se destacam alguns pontos relevantes:

Na seção I, ela percebeu a presença do processo de generalização. Os alunos conseguiram partir de um caso particular e chegaram a um caso geral, no entanto, houve dificuldade em se expressar no registro da língua natural, conforme menciona a autora.

Na seção II foi percebida pela autora a dificuldade quanto ao uso das propriedades das Potências, no entanto, alguns processos do Pensamento Matemático Avançado foram constatados, como a observação, a mudança de representação algébrica para a representação gráfica e a generalização (quanto ao fato da Função Exponencial ser crescente ou decrescente).

Na seção III foi observada a dificuldade em relação à mudança de variável. Faltou compreender qual letra correspondia ao valor procurado. Foram observadas inúmeras dificuldades na mudança de representação necessária em uma das atividades, sendo relatado que os alunos não perceberam com facilidade a relação do registro numérico na escrita em forma de Potência com a escrita em Logaritmos.

Além disso, os alunos apresentaram dificuldade nos procedimentos numéricos e algébricos. Os processos do Pensamento Matemático Avançado presentes foram a observação, a visualização e a generalização.

Na seção IV não foi constatada dificuldade. Os alunos concluíram com facilidade que a Função Exponencial é a inversa da Função Logarítmica.

Esse trabalho propôs atividades, apresentando aos estudantes conteúdos matemáticos, de modo a possibilitar o desenvolvimento de processos extremamente necessários no campo da Álgebra Escolar, como a abstração, a generalização e a formalização. O uso do computador favoreceu a realização da investigação matemática.

Embora não tenham sido usadas situações contextualizadas, crê-se que a prática esteve presente no desenvolvimento da aprendizagem dos alunos. No supramencionado trabalho, é perceptível que a prática na Matemática é entendida como a possibilidade de realização de ações matemáticas, nesse caso, destacam-se, especialmente, o uso correto da simbologia específica da Matemática e o rigor necessário na comunicação por escrito de ideias matemáticas.

CC 11: Progressões Geométricas em fractais: um estudo de caso no Ensino Médio

Autoras: Claudia Márcia Ribeiro de Azeredo; Michelle Dinelli de Souza; Sílvia Cristina Freitas Batista; Gilmara Teixeira Barcelos

O artigo descreve um estudo de caso envolvendo Progressões Geométricas e Fractais, desenvolvido em uma turma do 2º ano do Ensino Médio. A pesquisa aborda a Geometria Fractal e o relacionamento desta com as Progressões Geométricas (P.G). Um dos objetivos desse trabalho foi levar os alunos a descobrir as propriedades e o comportamento das Progressões Geométricas em cada Fractal analisado.

Estabeleceu-se uma sequência didática que inclui: aula expositiva e uso de vídeo; material concreto e o simulador de Fractais "Progressões Geométricas em Fractais".

No decorrer do artigo, as autoras abordam a Geometria Fractal e o relacionamento deste tema com as Progressões Geométricas; caracterizam os recursos utilizados no estudo de caso; relatam a metodologia; analisam os resultados e tecem considerações sobre a experiência. Contudo, mesmo apresentando a metodologia com descrição detalhada, não foi possível perceber de que forma as atividades realizadas integraram Geometria Fractal e P.G, isso porque as autoras explicam as atividades, mas não as inserem no trabalho.

Apesar de apresentar considerações sobre essa articulação, trazendo os apontamentos de outras pesquisas realizadas sobre o tema e enfatizando a importância do estudo dos Fractais e a construção de conceitos matemáticos relacionados à P.G, não ficou claro, no trabalho, quais foram os conceitos relativos à P.G abordados nas atividades.

Foram enfatizados os objetivos dos recursos utilizados, porém, com exceção do vídeo, não se percebeu, de fato, como tais recursos foram usados no desenvolvimento da pesquisa. Por exemplo, o material concreto foi construído para que os alunos pudessem ter uma visão efetiva do Fractal, mostrando as características deste, contudo, entende-se que não ficou claro como os materiais concretos fizeram parte das atividades, se como fonte de hipóteses para se chegar a algumas conclusões (relacionando as características do Fractal a uma P.G), ou se eles foram utilizados como estratégia ilustrativa.

O simulador foi o último recurso a ser usado, com a finalidade de levar os estudantes a aplicar os conceitos adquiridos até o momento, por isso, entende-se o uso do simulador como forma de consolidação de conhecimentos, de ir em busca da formalização.

Como conclusões das atividades, considerou-se que os alunos reconheceram as propriedades dos Fractais, bem como o comportamento da P.G. nas iterações dos Fractais. As autoras supracitadas perceberam que, por meio do apelo lúdico dos fractais, os alunos puderam investigar e explorar um conteúdo desconhecido pela maioria, descobrindo como trabalhar com iterações, generalizações de fórmulas, cálculo de área e perímetro de figuras de complexidade elevada e a aplicação da P.G..

De fato, foi uma atividade de cunho investigativo subsidiada por recursos que auxiliaram na compreensão, tanto da Geometria Fractal quanto das Progressões Geométricas. Embora sem acesso às atividades (conforme aplicadas), acredita-se que foram atividades práticas que levaram ao trabalho com a simbologia própria da Matemática.

CC 12: Registros de Representação Semiótica em uma atividade de Modelagem Matemática desenvolvida no 1º ano do Ensino Médio.

Autoras: Gislaine Ferreira Gomes e Karina Alessandra Pessoa da Silva

Nesse trabalho, as autoras apresentam um estudo dos diferentes Registros de Representação Semiótica – segundo a teoria de Raymond Duval – que emergem em uma atividade de Modelagem Matemática desenvolvida com alunos do 1º ano do Ensino Médio. A atividade desenvolvida teve como tema “Planos telefônicos de fixo para fixo” e o objeto matemático abordado corresponde à Função definida por duas sentenças.

Considera-se esse trabalho no âmbito do LEM, por se tratar da metodologia pedagógica Modelagem Matemática, que se assemelha à abordagem da investigação matemática, pois apresenta uma situação a ser analisada, procurando as possibilidades para, então, decidir qual a melhor “resposta”.

Além disso, pode ser compreendida como uma metodologia que alia teoria e prática, porque, geralmente, parte de uma situação real. Entende-se que a presença da Modelagem Matemática no LEM é ideal, principalmente no LEM voltado para a Álgebra, porque, conforme afirmam as autoras acima indicadas, na Modelagem parte-se de um fato real e cria-se, por meio da coleta, análise e organização dos dados, uma expressão em linguagem matemática para representar a realidade, o que remete não apenas à semiótica, mas a uma das concepções a respeito da Álgebra discutidas no decorrer do presente texto.

Quanto ao desenvolvimento da atividade, aquelas autoras explicam que os alunos receberam informações referentes a planos de telefone fixo para fixo coletadas no site de uma empresa de telefonia. Verificaram-se no site três opções de planos, A, B e C, cujas informações foram apresentadas aos alunos por meio de uma tabela. A partir daí, questionou-se qual seria o melhor plano entre as opções e conduziu-se toda a pesquisa a partir dessa pergunta, criando-se diferentes representações da situação, a fim de analisar cada caso e compará-los.

Depois de algumas intervenções e discussões, a professora questionou sobre como determinar o valor a ser pago em relação ao tempo gasto, considerando uma quantidade qualquer de minutos que excedesse a franquia dos planos. Nesse momento, os dados da tabela (do enunciado) foram convertidos em língua natural, para, em seguida, chegar ao registro algébrico que generaliza a situação.

Posteriormente, foi feito o registro gráfico, após a conclusão de que o modelo se tratava de uma Função linear crescente, utilizando, nesse momento, o Excel. No entanto, embora tenham sido feitas representações gráficas, as autoras observam que não se trata de uma forma adequada de representar o objeto matemático em questão (as Funções), mas não justificam tal afirmação.

Não se identificou qual seria a necessidade de construir gráficos, pois o foco da atividade está no registro algébrico. Além disso, já que foram construídos, por que não utilizá-los na discussão? Viu-se que foi um registro não explorado, não foram analisadas as possibilidades de os gráficos contribuírem para uma discussão em torno da pergunta inicial (aliás, essa discussão não foi feita ao término da atividade). Não ficou claro o motivo da conversão de dados tabulados em gráfico, uma vez que já havia uma representação algébrica.

As autoras inferiram que a atividade proporcionou a compreensão do objeto matemático através da coordenação dos diferentes Registros de Representação Semiótica, apesar de se ter detectado a dificuldade dos alunos para representar o tempo que excedia da franquia. Elas consideraram que a Modelagem Matemática permitiu a conversão desses registros e isso contribuiu para a aprendizagem dos alunos.

CC 13: Registros de representações semióticas no estudo das Funções Polinomiais de segundo grau

Autora: Sandra Pereira Lopes

Nesse trabalho, em especial, chamou atenção o motivo pelo qual se deu a pesquisa. O trabalho desenvolveu-se em torno de uma inquietação pessoal da autora em relação ao ensino de um dos conteúdos algébricos mais comuns no Ensino Médio, as Funções Quadráticas.

A autora, ao analisar atividades distintas de dois autores de livros didáticos sobre introdução à Função Polinomial do 2º grau (sendo um deles um livro do Ensino Fundamental e o outro do Ensino Médio), observou que, nas atividades, os registros gráficos e algébricos são descritos, mas a conversão entre eles não ocorre nos dois sentidos, ou seja, não há ênfase na passagem do registro algébrico para o gráfico e na passagem do registro gráfico para o algébrico numa mesma situação.

A partir dessa constatação, a autora passou a ter, como objetivo principal, a proposição de atividades destinadas à conversão bidirecional entre os registros, utilizando como auxílio o software Winplot. Nesse caso, o Winplot teve a finalidade, tanto de estabelecer os dois sentidos da conversão entre os registros gráficos e algébricos, quanto para dinamizar o esboço do gráfico.

Como fundamentação teórica, a autora baseia-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, onde se considera que a diversidade de registros não garante a compreensão de um objeto matemático, mas é atividade de conversão que conduz à compreensão em Matemática.

Nesse sentido, a crítica da autora aponta para os procedimentos de construção de gráficos em desprendimento do registro algébrico, conforme ela afirma ter observado nos livros analisados. Ela observa que o procedimento mais frequente é aquele em se utiliza uma tabela com pares ordenados a serem marcados no plano cartesiano, onde não há relação entre o gráfico obtido e a expressão algébrica da Função.

Percebe-se que ela defende, segundo Duval apresenta em sua teoria, um procedimento de construção de gráficos onde se dê ênfase às propriedades e possíveis interpretações decorrentes da figura, permitindo-se a visualização da relação entre as modificações nas expressões algébricas das Funções e as modificações nos respectivos gráficos e vice-versa.

Dessa forma, a autora propõe formas alternativas para a realização de algumas das atividades encontradas nos livros didáticos analisados, utilizando o Winplot para promover o estudo de famílias de Funções e obter conclusões ao observar alterações nos parâmetros da Função.

Considera-se interessante a ideia da autora, pois ela mostra que nem sempre é preciso preocupar-se em elaborar novas atividades, podendo-se mantê-las realizando-as de uma nova forma, de modo que atividades simples podem ser transformadas em uma atividade de cunho investigativo e ser inseridas no âmbito do LEM.

Observa-se que os trabalhos relacionados à semiótica (esse e o anterior) visam ao desenvolvimento da capacidade de comunicar raciocínios e ideias por escrito, sobretudo, objetivam o uso correto da simbologia das Funções. Contudo, embora tenham a mesma base teórica, os trabalhos desenvolveram-se com significativas distinções.

Nesse trabalho, houve atenção especial aos significados "embutidos" na forma algébrica em estreita ligação com o gráfico, enquanto no trabalho anterior a ênfase é dada à conversão da língua natural para a linguagem algébrica.

CC 14: Representações de Funções usando o Winplot

Autores: Bruno Marcondes Umbezeiro e Sérgio Carrazedo Dantas

Nesse trabalho, os autores defendem a ideia de mostrar que o software Winplot pode ser usado para dinamizar os processos de tratamento e conversão das representações de Funções. O trabalho trata do uso do Winplot para explorar representações de Funções com foco na Matemática do Ensino Médio, com o intuito de realizar a articulação entre as representações.

O estudo tem fundamentação teórica em pesquisas sobre Registros de Representação Semiótica, com foco especial nas relações intrínsecas entre representações e objetos matemáticos, seguindo a teoria de Raymond Duval.

Os autores abordam a semiótica como a área do conhecimento que se ocupa do estudo das representações dos objetos. Estudando sobre o tema, eles perceberam o quanto as representações são importantes para a formulação e a compreensão de um conceito por parte do sujeito, por isso o foco do trabalho são as representações de Funções e a articulação entre elas.

São apresentadas duas atividades de prática investigativa utilizando o Winplot, sendo elas:

a) Atividade 1: Função Exponencial

Seja a função $f(x) = b^x$, em que b é um número real e $b > 0$ e $b \neq 1$.

- Atribua os seguintes valores 50,5; 0,5; 0,05 e descubra o comportamento da função.
- Alguma das funções obtidas no item a possui imagem com valores negativos? Por quê?

b) Atividade 2: Função Trigonométrica

Seja a função $g(x) = a.sen(bx + c) + d$ em que a, b, c e d são coeficientes reais. Estude o efeito de cada um deles na função g.

As atividades não foram aplicadas, mas, após cada atividade, são apresentadas reflexões sobre como o Winplot pode e deve ser usado para a articulação entre as possíveis representações das Funções. Dessa forma, os autores apresentam orientações para o desenvolvimento das investigações, de modo que a utilização do software Winplot contribua para a compreensão dos objetos matemáticos Função Exponencial e Função Trigonométrica.

As reflexões foram apresentadas em detalhes, de modo que podem configurar-se num roteiro para aulas sobre os temas.

Durante a leitura do trabalho, percebeu-se grande entusiasmo quanto ao uso de softwares matemáticos no ensino por parte dos autores, por considerarem que este recurso tornaria o processo de ensino mais dinâmico. Todavia, a tarefa dos autores não se resume a tratar do dinamismo do software em construções gráficas, mas defender que a apreensão seria promovida mais facilmente pela união entre o uso do Winplot e as recomendações da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

<u>CC 15: Torre de Hanói: o jogo como recurso metodológico nas aulas de Matemática</u>

Autora: Adriane Eleutério Souza

O artigo trata de uma proposta pedagógica para o ensino e a aprendizagem de Funções e Progressões no 1º ano do Ensino Médio, com o objetivo de apresentar os conteúdos de forma lúdica, desafiar e motivar o aluno na construção de seu conhecimento a partir do jogo Torre de Hanói. Assim, o objetivo da proposta contempla a exploração da Torre de Hanói como recurso metodológico, tanto no estudo de Funções quanto de Progressões.

Embora a proposta seja destinada a dois conteúdos algébricos, não há, de modo explícito, abordagem algébrica no trabalho, sendo a Torre de Hanói usada como fonte de exemplos de duas Progressões, sendo uma Progressão Aritmética e uma Progressão Geométrica. O jogo foi usado para exemplificar uma situação que retrata uma Função, sendo o número de jogadas (para mudar os discos de pinos) colocado em função do número de discos.

Assim, apenas a definição de Função e os conceitos de domínio e imagem são explorados nas atividades propostas, não identificando o tipo de Função que melhor descreve a situação e nem a lei que a representa. Quanto a isso, encontra-se no trabalho a afirmação de que o "o número mínimo de movimentos necessários para resolver o problema depende do número de discos e, a partir dessa dependência, o objetivo é descobrir, de forma dedutiva, a relação matemática existente entre eles".

Com a abordagem descrita, o jogo é usado para explorar a relação de dependência entre dois conjuntos, mas não leva à dedução da relação matemática existente, ou seja, não leva à forma algébrica da Função que descreve a situação e nem a uma fórmula de recorrência.

A autora considera que um estudo a partir da Torre de Hanói pode levar os estudantes a estabelecer generalizações e apropriarem-se da linguagem matemática para descrever e interpretar situações relativas à definição de Função, conjunto domínio, conjunto imagem e as sequências numéricas, em particular, as Progressões.

Entretanto, nos dois estudos propostos, não se apresenta o uso da linguagem algébrica, como também não são dadas orientações com vistas a levar os alunos a utilizar a notação matemática. Em geral, não se identifica enfoque algébrico nas atividades. Também se acredita que não ficaram claros, no texto, quais são os conhecimentos/conceitos matemáticos que deveriam ser construídos pelos alunos a partir do jogo.

Supõe-se que, dessa forma, o material didático Torre de Hanói não foi usado de modo a contribuir efetivamente para o estudo de Funções e Progressões, estando presente na proposta como forma de introduzir e ilustrar dois conteúdos algébricos, sem proporcionar a compreensão necessária sobre tópicos dos conteúdos, conforme devem ser estudados no Ensino Médio.

Percebe-se pela leitura do trabalho que grande ênfase se dá à relevância do jogo por seu caráter lúdico, o que, aparentemente, impediu que o potencial do jogo na abordagem de assuntos matemáticos fosse mais bem explorado.

Apesar disso, concorda-se com a posição da autora frente à presença do lúdico no ensino de Matemática. Assim como ela, acredita-se que as atividades lúdicas são essenciais e que se necessita delas, inclusive por serem prazerosas, além de que essa necessidade não é minimizada ou modificada em função da idade do indivíduo. Apenas se acrescenta que é preciso cautela e estudo ao inserir um material didático em atividades de Matemática, para garantir que o estudo de determinados assuntos não seja superficial.

Observa-se no aludido artigo o objetivo de trabalhar com Progressão Aritmética e Progressão Geométrica. Inicialmente, é apresentada a sequência dada pela quantidade de discos, que é uma Progressão Aritmética. Em seguida, apresenta-se a sequência dos movimentos, 1, 3, 7, 15, 31, 63, a partir da qual se diz que é identificada a Progressão Geométrica: 1, 2, 8, 16, 32, 64, obtida quando, a partir do primeiro valor, multiplica-se por dois (razão) para encontrar o sucessor.

Porém, não se identificou, com clareza, como ocorreu a formação da referida Progressão Geométrica, estando presente em outros trabalhos com a Torre de Hanói uma outra sequência, 2, 4, 8, 16, 32, 64, que é uma Progressão Geométrica de razão dois.

CC 16: Um caminho para o ensino e aprendizagem de Determinantes

Autores: João Batista Regis da Silva; Maria da Conceição Vieira Fernandes; Maria Betânia Fernandes Vasconcelos.

O artigo descreve um estudo sobre Determinantes realizado com alunos do 2º ano do Ensino Médio, com o objetivo de proporcionar novas formas de aprendizado e também de resolver problemas inseridos no ambiente social. O estudo realiza-se com vistas à compreensão do conteúdo a partir de sua história e da importância do tema para a Álgebra.

A escolha do tema deu-se por sua importância. Os Determinantes são considerados como uma ferramenta prática para a resolução de Sistemas Lineares, para a apresentação de dados em tabelas, além de estarem presentes em questões ligadas à Geometria Analítica e em aplicações na computação. Também a constatação de que esse conteúdo é pouco explorado em pesquisas científicas reforçou a escolha do tema.

É um trabalho que objetiva contemplar a investigação e a contextualização, tendo como metodologia a utilização de jogos. Os autores defendem que, com a utilização do lúdico, a aprendizagem ocorre pela manipulação do material e pela participação, pois promovem a aquisição de conceitos e habilidades matemáticas. Além disso, defendem o lúdico como instrumento de motivação.

Pela descrição feita percebe-se que o jogo foi usado como forma de proporcionar o levantamento e teste de conjecturas e as generalizações, sendo, então, adotado para assimilação, abstração e generalização do conteúdo.

Os autores também têm preocupação com a formalização, pois apresentam como objetivo específico a padronização do conceito de cofator através do jogo e do conceito de Regra de Sarrus tendo como instrumento uma planilha eletrônica. Dessa forma, as atividades lúdicas não aparecem nesse trabalho apenas como instrumento motivacional.

Durante o estudo, antes de utilizar jogos e a planilha eletrônica, os alunos realizaram pesquisas sobre a história do tema na biblioteca e na internet, utilizando o laboratório de informática. Depois disso, o jogo foi realizado em grupos, com o objetivo de aprender a calcular Determinantes de terceira ordem.

Para isso, foram usadas no jogo matrizes obtidas em tabelas de valores nutricionais contidas em embalagens de alimentos. Então, os autores apresentaram o conceito da regra de Sarrus e conduziram os alunos ao laboratório de informática, onde eles usaram o aplicativo online no portal "Só Matemática" e construíram uma tabela em planilha eletrônica para calcular o Determinante de uma matriz de terceira ordem (essa construção teve o objetivo de compreender e formalizar a regra de Sarrus). Para finalizar, os alunos fizeram um relatório das atividades realizadas.

Considera-se que as atividades realizadas caracterizam-se como atividades de LEM, principalmente porque se buscou a construção de um jogo de fixação para o cofator e também porque foi utilizado um aplicativo, em planilha eletrônica, capaz de calcular um Determinante de terceira ordem.

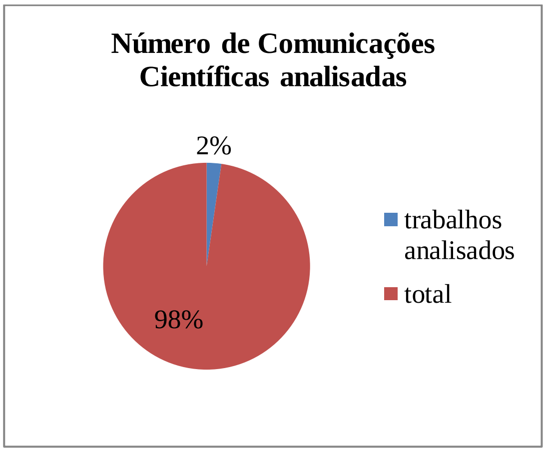
No entanto, apesar de ser um trabalho descritivo, não mostra o que foi desenvolvido pelos alunos, apenas explica como se deu o estudo, sem mostrar as atividades. Afirma-se que a metodologia foi dinâmica e o aprendizado significativo, porém, não há como identificar o que foi abstraído, generalizado e formalizado. Em geral, a descrição foi vaga, embora apresente detalhes.

5.2.2 Quantificando e interpretando (parte 1: Comunicações Científicas)

Nos Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática encontram-se 769 Comunicações Científicas, das quais, após seleção e primeira análise, foram escolhidas 16, representando, aproximadamente, 2% do total das citadas Comunicações.

Não foram selecionados e analisados trabalhos do Eixo 4: *História da Educação Matemática*.

Figura 3 - Percentual de CC analisadas.



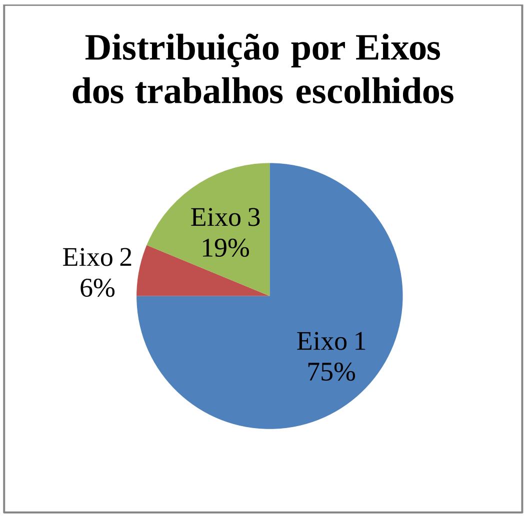
Fonte: elaborada pela autora.

Nesse evento, tanto as Comunicações Científicas como os Relatos de Experiência encontram-se subdivididos em quatro Eixos Temáticos:

a) Eixo 1: Práticas Escolares;
b) Eixo 2: Pesquisa em Educação Matemática;
c) Eixo 3: Formação de Professores;
d) Eixo 4: História da Educação Matemática.

Quanto à modalidade Comunicações Científicas, os 16 trabalhos selecionados estão distribuídos por Eixos Temáticos da seguinte forma:

Figura 4 - Percentual dos Eixos Temáticos dentre as CC analisadas.



Fonte: elaborada pela autora.

Verifica-se que o Eixo 1, dedicado às *Práticas Escolares*, é o que se destaca quando se procura por atividades algébricas no âmbito do LEM. Isso já era esperado. No entanto, pode-se verificar que, apesar de estarem incluídas no eixo dedicado às práticas, não é fácil para quem lê essas Comunicações Científicas utilizá-las como uma possível estratégia metodológica em sala de aula, pois nem sempre são descritas as formas de realização em detalhes.

Observa-se que não foram selecionados e analisados trabalhos do Eixo 4: *História da Educação Matemática*.

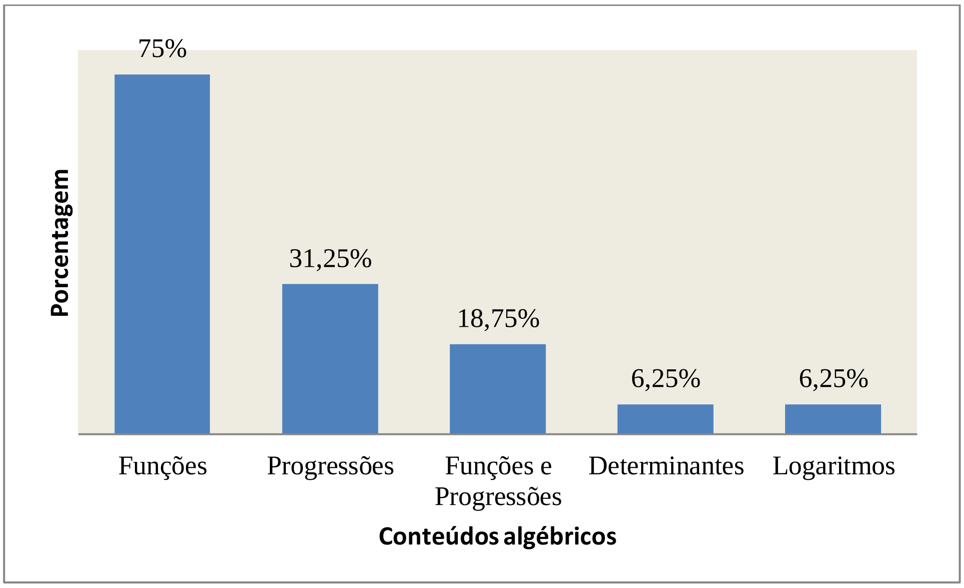
A seguir, apresentam-se os conteúdos algébricos abordados nesses trabalhos.

Tabela 1 - Conteúdos Algébricos Abordados nas Comunicações Científicas escolhidas para análise

Tema	Quantidade	%
Funções	12	75%
Progressões	5	31,25%
Funções e Progressões	3	18,75%
Determinantes	1	6,25%
Logaritmos	1	6,25%

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 5 - Percentual dos conteúdos algébricos nas CC analisadas.



Fonte: elaborada pela autora.

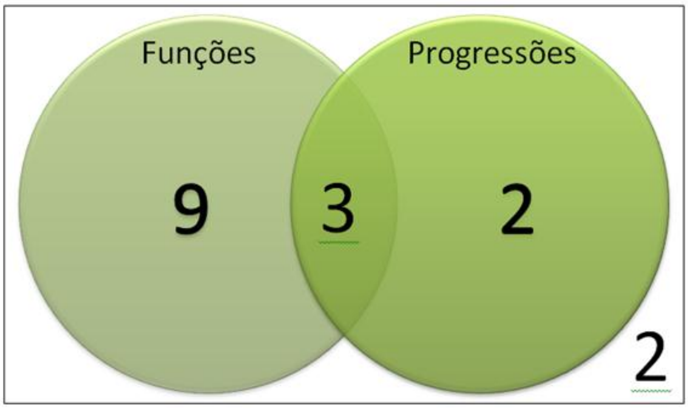
Como se nota, as porcentagens somam mais de 100%, isso ocorre porque há um grupo de trabalhos que une Funções e Progressões. Esse grupo foi inserido com a intenção de mostrar que há trabalhos que tratam esses temas de forma interligada, geralmente colocando as Progressões como casos particulares de Funções.

Dentre esses trabalhos, percebe-se que um deles tem foco no estudo das Progressões, tomando por base os conhecimentos já adquiridos sobre as Funções Afim e Exponencial. Nesse caso, o estudo algébrico das Progressões é inter-relacionado ao estudo algébrico das Funções, de modo que a simbologia da forma algébrica das Progressões toma sentido a partir do estudo das formas algébricas das Funções Afim e Exponencial.

Por outro lado, também é possível perceber que em outro trabalho o foco dos autores não está no estudo algébrico das Progressões, sendo estas inseridas como exemplo de relações que representam Funções.

Em outro caso, o conceito de Progressão Aritmética figura como apoio essencial para a caracterização da Função Quadrática, ou seja, tem foco no estudo das características da Função Quadrática, e não no estudo algébrico da Progressão Aritmética (P.A), o que não se trata de uma abordagem errônea quanto a conteúdos algébricos, mas mostra que as Progressões, embora presentes nas Comunicações Científicas do XI ENEM, nem sempre ocupam papel principal nos trabalhos, estando ali inseridas no âmbito das Funções. Ilustrando tal fato com dados numéricos, tem-se o diagrama a seguir:

Figura 6 - Relação entre Funções e Progressões nas CC analisadas.



Fonte: elaborada pela autora.

Aliás, conforme se pode verificar pelos dados numéricos, as Funções detêm a maior parte dos trabalhos algébricos referentes ao Ensino Médio aqui escolhidos, evidenciando que elas também ocupam lugar central nos trabalhos acadêmicos, do mesmo modo com que figuram como tema central da estrutura curricular para o Ensino Médio, conforme mencionado anteriormente, em análise de documentos educacionais oficiais.

A seguir, apresenta-se um detalhamento dos conteúdos algébricos encontrados.

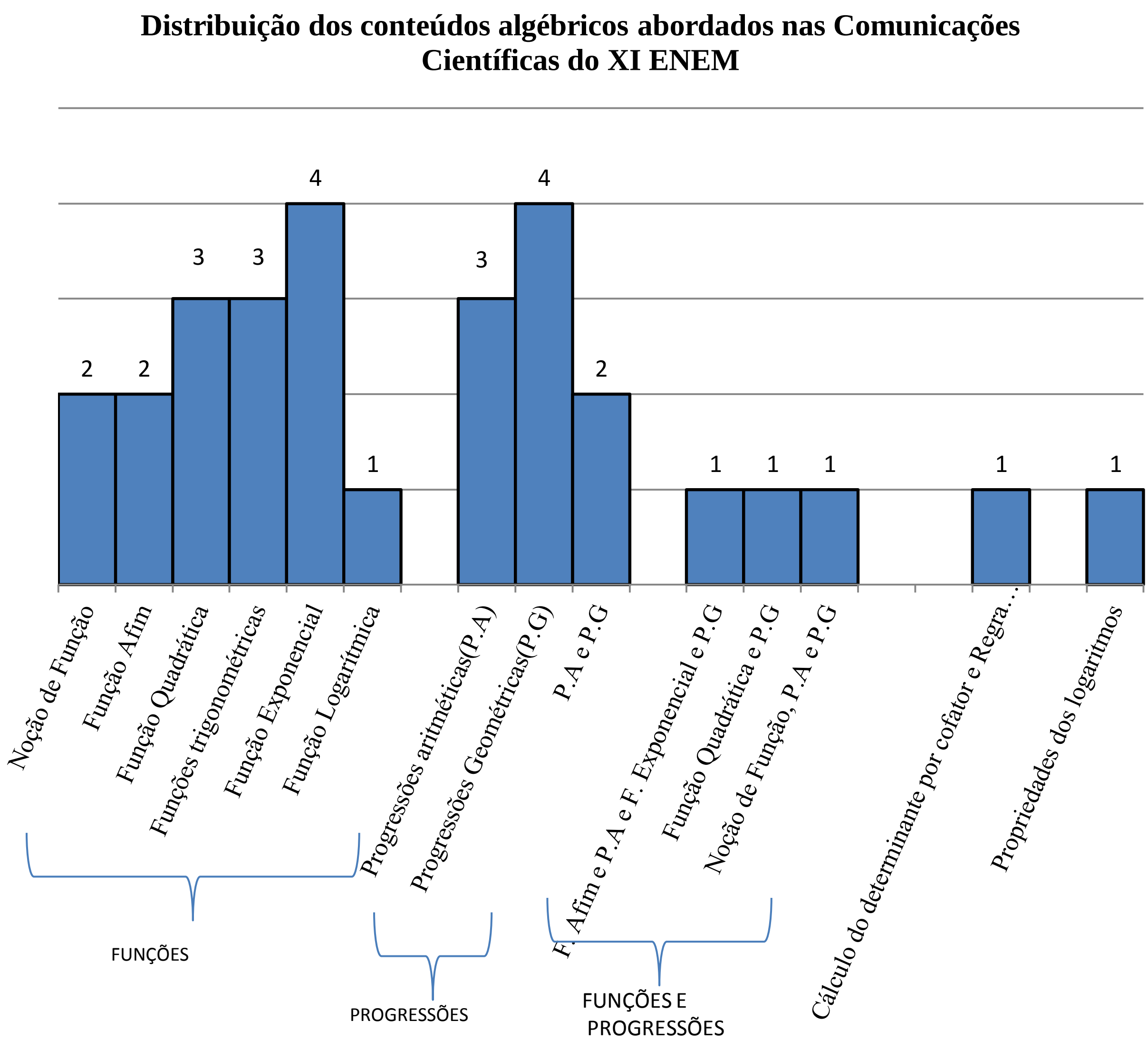
Tabela 2 - Distribuição dos conteúdos algébricos abordados nas Comunicações Científicas do XI ENEM

Tema	Conteúdo Específico	Quantidade	%
Funções	Noção de Função	2	12,5%
	Função Afim	2	12,5%
	Função Quadrática	3	18,75%
	Funções trigonométricas	3	18,75%
	Função Exponencial	4	25%
	Função Logarítmica	1	6,25%
Total		**15**	
Progressões	Progressões Aritméticas(P.A)	3	18,75%
	Progressões Geométricas(P.G)	4	25%
	P.A e P.G.	2	12,5%
Total		**9**	
	Função Afim e P.A e, Função	1	6,25%

Funções e Progressões	Exponencial e P.G.		
	Função Quadrática e P.G.	1	6,25%
	Noção de Função, P.A e P.G.	1	6,25%
Total		**3**	
Determinantes	Cálculo do determinante por cofator e Regra de Sarrus	1	6,25%
Logaritmos	Propriedades dos Logaritmos	1	6,25%

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 7 - Comparação entre os conteúdos algébricos específicos abordados nas CC analisadas.



Fonte: elaborada pela autora.

Assim como demonstrado nos dados numéricos, os conteúdos algébricos mais frequentes são as Funções e as Progressões, sendo, geralmente, as Funções mais exploradas do que as Progressões. No entanto, no grupo Funções observa-se que é dada maior ênfase à Função Exponencial e, no grupo Progressões, o destaque é atribuído às Progressões Geométricas.

Nesse caso, considera-se que não se trata de uma simples coincidência, pois nos trabalhos escolhidos aqui, esses assuntos encontram-se, muitas vezes, entrelaçados. Também se pode dizer que a Função Exponencial é um conteúdo comum em situações contextualizadas, além de ser o mais abordado através da exploração da Torre de Hanói nas aulas de Matemática. Como a Torre de Hanói foi o recurso concreto mais usado, por consequência, a Função Exponencial também ganha destaque.

Embora as Funções sejam o tema mais comum em trabalhos algébricos no âmbito do LEM, dentre as Comunicações Científicas do XI ENEM nem todos os tipos de Funções são abordadas. Por exemplo, não se encontra nos trabalhos o conteúdo “Função Modular”. Além disso, a abordagem da Função Logarítmica, em um único trabalho, aparece de forma bastante tímida, provavelmente deixando de obter o destaque necessário.

Quanto a outros conteúdos algébricos presentes nos currículos do Ensino Médio, cuja relação com a linguagem algébrica e o uso de notações simbólicas são bastante usuais - como os Números Complexos, Polinômios, Equações algébricas, Sistemas Lineares e Binômio de Newton - não aparecem nas Comunicações Científicas do XI ENEM, aqui caracterizadas pela metodologia do LEM. Os Determinantes também são abordados em apenas um trabalho, restrito ao caso das Matrizes de Ordem 3, enquanto, especificamente, ao tema Matrizes não foram selecionados trabalhos.

Presume-se que esses fatos observados ocorreram porque a intenção de quem propõe trabalhos voltados para o ensino de Álgebra é privilegiar questões operatórias simples, não sobressaindo questões operatórias de Matemática mais trabalhosas. À primeira vista, isso faz com que a manipulação algébrica não seja abordada com frequência em novas propostas para o ensino da Álgebra.

Compreende-se ainda que os autores de propostas de ensino, como as que foram aqui descritas, não tratam com frequência de regras e procedimentos, tanto algébricos quanto numéricos, porque tentam “fugir” das regras desprovidas de explicação, dos exercícios repetitivos e também das aplicações diretas de fórmulas, conforme se orienta não destacar nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio.

Contudo, mais uma vez, salienta-se que é preciso cuidado ao tratar de regras e procedimentos, pois a intenção não é simplesmente descartá-los, afinal o estudo de conteúdos matemáticos, juntamente com suas propriedades e regras, é importante, inclusive para a Resolução de Problemas.

Comprovando-se que as propriedades, regras e procedimentos têm sua importância, destacam-se alguns dos trabalhos analisados onde são mencionados e inseridos (às vezes, de forma implícita): O trabalho número 5 (A régua de cálculo: uma aplicação das propriedades dos Logaritmos) mostra um estudo dos Logaritmos, com foco em suas propriedades.

Apesar de ser um conteúdo algébrico, seu estudo mantém-se centrado no cálculo aritmético, usando como ferramenta a régua de cálculo, porém, isso não diminui a importância desse trabalho no campo algébrico, aliás, ele vem mostrar que atividades práticas, por meio de materiais didáticos concretos ou virtuais podem, sim, tratar dos cálculos envolvidos na Matemática escolar.

O trabalho 7 (Análise e representação de Progressão Aritmética e Geométrica com o uso do Microsoft Excel) é um pouco diferente, pois dá mais abertura para os cálculos algébricos, proporcionando momentos para os alunos realizarem manipulação de fórmulas e mudança de variáveis.

Também o trabalho 10 (Funções Exponenciais e Logarítmicas: um estudo por meio de uma sequência didática) cita os procedimentos algébricos e também os procedimentos numéricos, como as propriedades de potenciação, pois são necessários ao estudo das Funções Exponenciais e Logarítmicas.

Já o trabalho 11 (Progressões Geométricas em Fractais: um estudo de caso no Ensino Médio) possui, dentre seus objetivos, a observação e o estudo das propriedades da Progressão Geométrica, além de buscar analisar o seu comportamento.

Em respeito a essa discussão, aquele que mais chamou atenção foi o trabalho 16 (Um caminho para o ensino e aprendizagem de Determinantes), porque, embora nele não esteja explicitado o objetivo de abordar procedimentos em referência ao conteúdo estudado, ele envolve com mais profundidade o uso de métodos de resolução.

O referido trabalho não trata de manipulações exclusivamente algébricas, mas aborda a noção de Cofator e a Regra de Sarrus para o cálculo de Determinantes de matrizes de terceira ordem. Não se reduz a aplicação de regras para calcular Determinantes, pois, além da realização do cálculo, a proposta visa à compreensão e à formalização da regra aplicada.

Além de todas as considerações feitas em relação aos conteúdos abordados nas Comunicações Científicas, vale destacar que alguns conteúdos algébricos foram encontrados em outros trabalhos, os quais não constam na lista das dezesseis Comunicações Científicas detalhadas em seção anterior, porque, ou são estudos destinados ao Ensino Fundamental, ou, em alguns casos, apesar de tratarem de temas do Ensino Médio, não possuem características que os classifiquem como atividade de LEM.

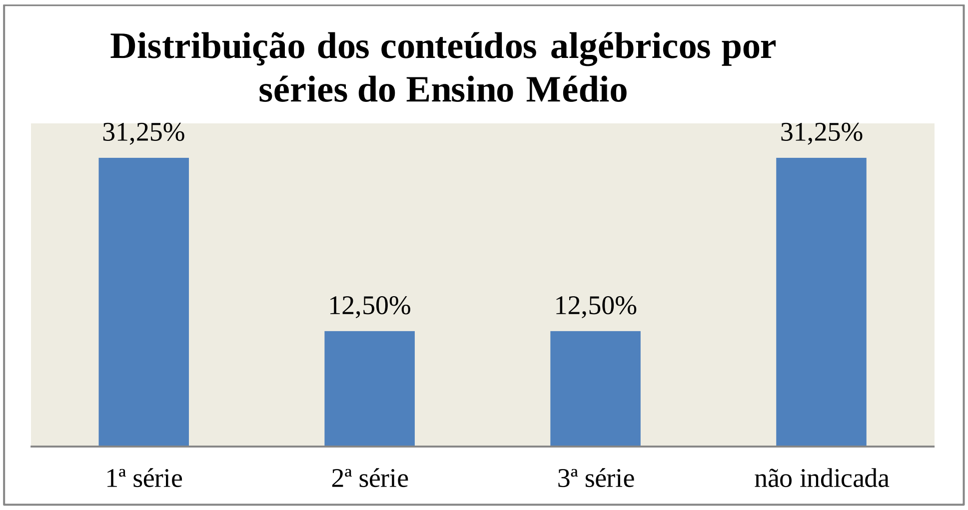
Ainda em referência aos conteúdos, nota-se que, como as Funções são o tema mais frequente nos trabalhos e seu estudo concentra-se na 1ª série do Ensino Médio, é natural que esta seja a série que mais concentra trabalhos algébricos no XI ENEM. Em relação ao levantamento feito, tem-se a seguinte distribuição dos trabalhos nas três séries do Ensino Médio:

Tabela 3 – Número de CC distribuídas por série do Ensino Médio.

Série	Quantidade de trabalhos encontrados
1ª série EM	5
2ª série EM	2
3ª série EM	2
Não indicada	5
Total	**14**

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 8 - Comparação entre as séries contempladas pelos trabalhos analisados.



Fonte: elaborada pela autora.

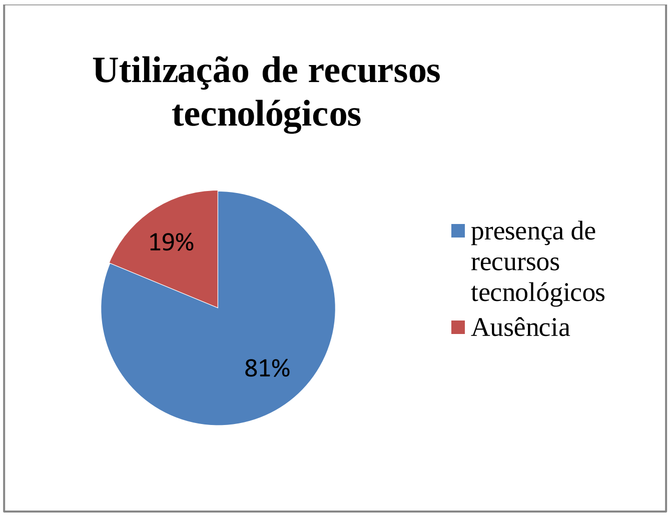
Como se verifica nos dados, não se tem um total de 100%, visto que dois (12,5%) dos trabalhos são estudos voltados a estudantes universitários, sendo um deles aplicado a alunos de Licenciatura e o outro recomendado, tanto para alunos universitários quanto para alunos do Ensino Médio. Apesar disso, os conteúdos abordados fazem parte do currículo do Ensino Médio e os objetivos das atividades cumprem as necessidades desse nível de ensino.

Dos dezesseis trabalhos, cinco (31,25%) não indicam a série a que se destinam ou a série do Ensino Médio em que a atividade foi aplicada. Verifica-se que quase todos esses trabalhos tratam de conteúdos algébricos da 1ª série (pois abordam o tema Funções), um deles citando o assunto Progressão Aritmética. Dentre os cinco trabalhos que não indicam a série, um deles faz um estudo de Funções Trigonométricas com cunho mais algébrico, geralmente como recomendado que seja feito na 3ª série do Ensino Médio.

Além das observações feitas até o momento, há outras questões que merecem destaque quanto ao ensino de Álgebra na metodologia do LEM e uma das que têm sido bastante discutidas ultimamente na Educação Matemática trata da utilização da tecnologia no ambiente escolar.

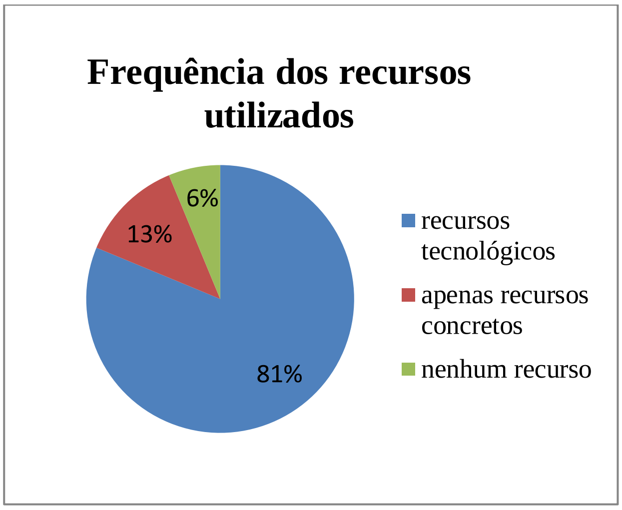
Analisando-se o contexto dessa pesquisa, verifica-se que os recursos tecnológicos foram frequentemente mencionados nos trabalhos, atingindo 13 das 16 Comunicações Científicas. Das três que não utilizam ou citam a possibilidade de utilização de recurso tecnológico, duas apoiam-se no uso do material concreto e uma não utiliza recurso tecnológico nem material concreto. Essa situação é ilustrada nos gráficos a seguir:

Figura 9 - Presença de recursos tecnológicos na amostra.



Fonte: elaborada pela autora.

Figura 10 - Percentual dos tipos de recursos utilizados nas CC.



Fonte: elaborada pela autora.

A seguir, apresentam-se os tipos de recursos presentes nas Comunicações Científicas analisadas.

Tabela 4 – Detalhamento dos tipos de recursos utilizados na amostra (CC)

Materiais concretos		
Torre de Hanói	2	12,5%
Fractais	1	6,25%
Total	**3**	
Softwares		
GeoGebra	4	25%
Winplot	3	18,75%
Simulador Modellus	1	6,25%
Simulador de Fractais	1	6.25%
Microsoft Excel	3	18,75%
Total	**12**	
Outros recursos tecnológicos		
Videoaula/ vídeo	2	12,5%
Webquest	1	6,25%
Aplicativo online	2	12,5%
Total	**4**	

Fonte: elaborada pela autora.

Conforme já esperado, constata-se que, quando se trata do estudo de conteúdos algébricos referentes ao Nível Médio, o uso de materiais concretos, manipulativos ou não, não é frequente. Como mostrado no quadro acima, apenas dois tipos de materiais concretos foram usados: a Torre de Hanói e os Fractais (construídos com papel). Percebe-se, pela leitura dos trabalhos, que, mesmo quando não mencionado, o uso do recurso poderia ter o propósito de levar o aluno à abstração, pois em todos os casos era esperado que os alunos tirassem conclusões de suas observações.

Contudo, apesar do uso de algum material fazer com que a atividade envolva abstração, não é garantido que, onde esta existir, haja também generalização e que tal generalização leve à simbolização – uso da linguagem algébrica para expressar a generalidade.

Portanto, nem sempre é possível afirmar que uma atividade com material concreto implique a utilização da linguagem algébrica. Na verdade, isso depende do desenvolvimento da atividade e da mediação do professor. No entanto, é preciso lembrar que em um dos trabalhos com a Torre de Hanói, ao que tudo indica, possibilitou-se, tanto a abstração quanto a generalização, com a respectiva expressão algébrica que representa aquilo que foi generalizado.

Ainda em relação aos recursos usados, ao contrário do que ocorreu com os materiais concretos, percebe-se fortemente a presença de softwares no ensino de conteúdos algébricos. O mais usado foi o software GeoGebra, seguido pelo Winplot e pelo Microsoft Excel. Juntos, GeoGebra e Winplot estão presentes em 43,75% dos trabalhos. Esses softwares estão ligados, principalmente, ao estudo de Funções, sendo utilizados não apenas para dinamizar a construção de gráficos, mas também por proporcionarem o trabalho simultâneo com as representações algébrica e gráfica.

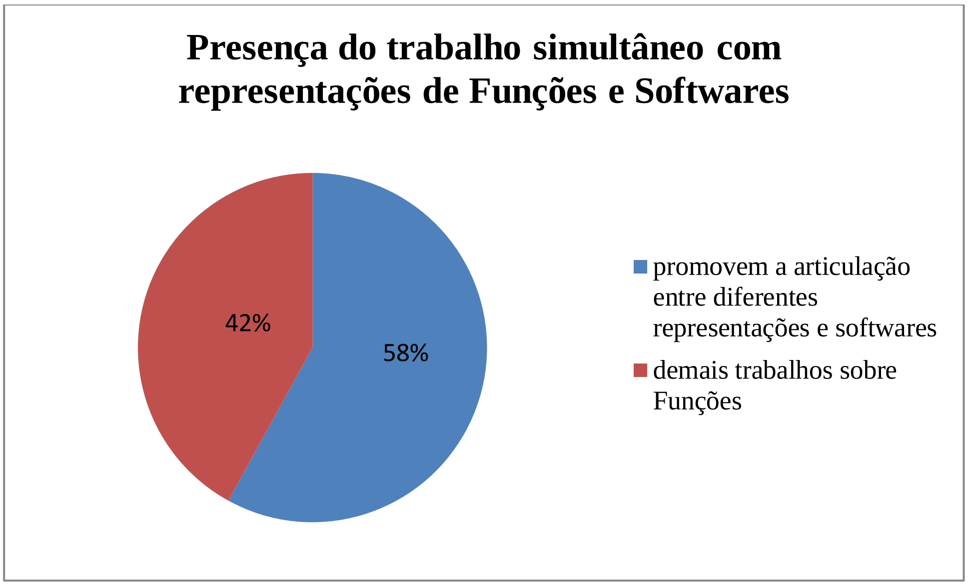
Nesse sentido, é importante dizer que é possível perceber em alguns trabalhos que a forma algébrica da Função aparece como aporte/suporte para o estudo gráfico das Funções, ou seja, o foco do estudo está no comportamento do gráfico, cujas mudanças ocorrem por influência dos coeficientes das Funções, a partir da sua variação.

Entretanto, é interessante observar que o uso desses softwares também favoreceu a construção e observação de gráficos visando à compreensão dos conceitos envolvidos na forma algébrica, ou seja, os gráficos constituíram-se como suporte ao estudo algébrico das Funções, promovendo a análise das substituições das constantes por valores numéricos.

Dessa forma, a articulação entre as representações algébrica e gráfica, promovida por softwares como GeoGebra e Winplot, é necessária ao estudo das Funções, especialmente porque pode contribuir para que as representações algébricas não sejam vistas como um amontoado de letras, na medida em que sejam usadas para possibilitar aos alunos a identificação dos significados e conceitos “embutidos” na expressão algébrica da Função.

Dentre as 12 Comunicações Científicas que tratam de Funções (do total de 16 trabalhos), sete delas (correspondendo a, aproximadamente, 58,3% do total) citam o trabalho simultâneo das representações algébrica e gráfica com o auxílio de softwares, como mostra o gráfico a seguir:

Figura 11 - Softwares e diferentes representações de Funções (CC).



Fonte: elaborada pela autora.

Com essas informações, fica fácil perceber que os softwares têm trazido contribuições para o estudo algébrico, mesmo que este não tenha sido apresentado como objetivo principal dos autores dos trabalhos. Pode-se notar que, implicitamente, os softwares possibilitam fazer uma conexão com a notação matemática presente nos conteúdos abordados e esse vínculo entre softwares e simbolismo é extremamente importante para que os gráficos e a notação algébrica não tomem “vida própria” no estudo de Funções, ou seja, não sejam considerados e estudados separadamente.

De fato, a intenção principal do uso de softwares é dinamizar a plotagem de gráficos, muitas vezes, sendo inseridos no estudo de Matemática justamente por essa contribuição. Quando se trata do estudo de Funções, quase sempre se recorre à construção de gráficos.

Pelos dados numéricos, tem-se que, das 12 Comunicações referentes às Funções, apenas duas não utilizam um software no estudo e não realizam a construção de gráficos. Os dois trabalhos mencionados são aqueles que utilizam a Torre de Hanói para abordar Funções Exponenciais.

Nessa perspectiva de discussão vale observar que os objetivos de uso do Microsoft Excel, presente em três trabalhos sobre Funções, foram os mesmos dos softwares GeoGebra e Winplot: plotar gráficos de forma mais dinâmica e estabelecer relação entre diferentes tipos de representações das funções.

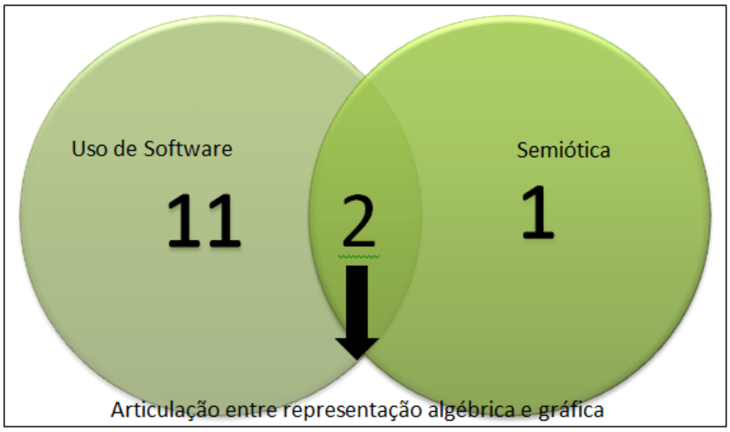
No entanto, embora esses sejam os principais motivos para a frequente presença de softwares no estudo de conteúdos algébricos, considera-se que tal uso pode trazer outras contribuições. Além de possibilitar a representação e a visualização, o uso de softwares pode favorecer a análise e o teste de hipóteses, a criação de conjecturas e, portanto, podem favorecer os processos de abstração e generalização.

O documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio indica que há softwares destinados a explorar e construir conceitos matemáticos, contudo, diante da leitura e análise das 16 Comunicações Científicas aqui mencionadas, não se pode afirmar que o uso de softwares e outros recursos tecnológicos tenha promovido a construção de conceitos, mas, com certeza, facilitou a compreensão de alguns conceitos algébricos. E, para garantir a sua contribuição ao ensino e à aprendizagem da Matemática, as recomendações de sua inserção em sala de aula não se encontram desvinculadas de estudos teóricos da Educação Matemática.

Nesse sentido, lendo-se as Comunicações Científicas do XI Enem percebe-se que, além da forte presença da contextualização e do enfoque na Resolução de Problemas e na Modelagem Matemática, há outro referencial teórico subsidiando trabalhos algébricos, especialmente sobre as Funções: a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Essa teoria foi citada nos trabalhos mantendo estreita ligação com o uso dos softwares, fornecendo sustentação teórica para as atividades que buscavam a articulação entre os registros gráfico e algébrico. O diagrama abaixo ilustra a presença de ligação entre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e o uso de softwares nos trabalhos analisados.

Figura 12 - Relação entre uso de softwares e a Teoria das Representações Semióticas.



Fonte: elaborada pela autora.

Antes de evidenciar alguns pontos importantes da teoria de Duval, considerados pelos autores dos trabalhos supracitados, reputa-se necessário esclarecer brevemente de que trata a Semiótica para, então, compreender a sua relação com o estudo da Álgebra escolar, que pode ser observada na aludida teoria.

Santaella (2004, p. 1) diz que a "Semiótica é a ciência geral de todas as linguagens", esclarecendo que ela tem como objeto todas as expressões possíveis. Desse modo, fica evidente que seu campo de abrangência é vasto.

Estendendo-se as leituras a respeito dessa ampla ciência, passou-se a considerá-la como presente na leitura do mundo, abrangendo fenômenos diversificados da vida, afinal, "o mundo aparece e se traduz como linguagem, fundamento de toda a Semiótica" (SANTAELLA, p. 9).

No que concerne à presença dessa teoria nos trabalhos lidos, os autores abordam a Semiótica como a área do conhecimento que se ocupa das representações dos objetos, trazendo o ponto de vista de Duval (2003), de que, em Matemática, toda comunicação é estabelecida com base em representações.

Observa-se que tal teoria foi inserida no estudo de tópicos algébricos porque, dentre as diversas representações dos objetos matemáticos, está a representação algébrica, que, juntamente com outros registros semióticos, leva à aprendizagem, pois permite a produção de significação e de sentido aos objetos matemáticos tidos como abstratos.

Nessa teoria são exemplos de registros semióticos: as imagens, os gráficos, as escrituras algébricas, os símbolos, a linguagem natural, entre outros. Nos trabalhos lidos, os autores mantiveram foco na existência e articulação entre diferentes registros de representação, evidenciando a conversão entre os registros em linguagem natural e linguagem simbólica e entre os registros algébrico e gráfico. Tal enfoque foi dado porque a teoria difunde a ideia de que a atividade de conversão conduz à compreensão em Matemática.

A primeira conversão citada dá-se em apenas um sentido, enquanto a outra demonstra ocorrer em dois sentidos, porém, nem todos os autores dos trabalhos atentam para essa necessidade. Uma das autoras observa que, embora sejam realizados os registros gráficos e algébricos, nem sempre a conversão entre eles ocorre nos dois sentidos.

Crê-se que essa preocupação ocorre no sentido de garantir a compreensão de que dois registros representam um mesmo objeto, de modo que as representações não se confundam com o objeto representado e nem sejam colocadas em destaque em detrimento dos objetos.

Diante disso, entende-se que é necessário ter cautela ao trabalhar com essa teoria, para que não somente a diversidade de registros ganhe destaque. Em relação aos trabalhos aqui analisados, observa-se que grande destaque foi dado à conversão do registro algébrico para o gráfico, já o sentido inverso não obteve tanto destaque. Também se percebe que o conceito de Função não foi tão evidenciado quanto as suas diferentes representações.

5.2.3 Conclusões gerais sobre as Comunicações Científicas selecionadas na pesquisa

Em referência às Comunicações Científicas, as observações feitas permitem concluir que:

a) O fato de a maior parte das Comunicações Científicas analisadas (75%) pertencer ao Eixo Temático 1 (*Práticas Escolares*) comprova que a Álgebra do Ensino Médio tem sido contemplada por propostas de ensino que abrangem o LEM como alternativa metodológica. Ou seja, o LEM tem sido um auxílio para o estudo de conteúdos algébricos do Ensino Médio;

b) O conteúdo algébrico abordado nas Comunicações Científicas com maior frequência são as Funções. O tema está presente em 75% das Comunicações Científicas analisadas;

c) Há uma significativa quantidade de trabalhos (18,75%) que tratam as Funções e as Progressões de forma interligada, geralmente, tomando as Progressões como casos particulares de Funções;

d) As Comunicações Científicas não abordam todos os tipos de Função;

e) A Função Exponencial foi a mais frequente na amostra de Comunicações Científicas, devido à sua ligação com as Progressões Geométricas e devido à exploração da Torre de Hanói em dois trabalhos;

f) Devido à forte presença do tema Funções nas Comunicações Científicas, a série do Ensino Médio mais contemplada pelas propostas foi a 1ª série. No entanto, também se verificou que houve propostas envolvendo assuntos algébricos do Ensino Médio sendo destinadas a estudantes universitários;

g) Conteúdos de caráter mais algébrico, como Números Complexos; Polinômios e Equações Polinomiais; Sistemas Lineares e Binômio de Newton não foram abordados na amostra de Comunicações Científicas;

h) As propostas analisadas não tratam, com frequência, de regras e procedimentos algébricos. Contudo, alguns dos trabalhos mencionam e inserem o uso dos procedimentos algébricos e o estudo de propriedades de alguns conteúdos algébricos;

i) Uma das Comunicações Científicas comprova que atividades laboratoriais podem ser auxiliares à compreensão e à formalização de regras;

j) Dentre os recursos didáticos utilizados nas Comunicações Científicas, os mais frequentes foram os tecnológicos, atingindo 81% da amostra;

k) Houve forte presença de softwares no ensino de conteúdos algébricos. Os mais usados foram o GeoGebra, o Winplot e o Microsoft Excel, sobressaindo-se o GeoGebra, presente em 25% da amostra;

l) Os softwares mencionados foram usados, principalmente, no estudo de Funções. Foram inseridos por dinamizarem a construção de gráficos e por proporcionarem o trabalho simultâneo com as representações algébrica e gráfica das Funções;

m) Mesmo que de modo implícito, os softwares possibilitaram o contato dos alunos com a notação matemática;

n) Seu uso facilitou a compreensão de alguns conceitos algébricos, porém, não se afirma que isso tenha promovido a construção de conceitos;

o) Das Comunicações Científicas que abordam Funções, apenas duas não utilizam software, mas sim a Torre de Hanói;

p) O uso de materiais concretos, manipulativos ou não, não foi frequente na amostra analisada. Houve a presença de apenas dois deles;

q) A observação do uso de materiais concretos nas Comunicações Científicas não permite afirmar que uma atividade com os aludidos materiais, necessariamente, implica a utilização da linguagem algébrica, porém, o referido material pode possibilitar a abstração, a generalização e o registro escrito;

r) A presença da Contextualização, da Resolução de Problemas e da Modelagem Matemática nas Comunicações Científicas analisadas evidencia que as propostas de atividades visam à articulação da prática no ensino da Álgebra do Ensino Médio;

s) A teoria dos Registros de Representação Semiótica subsidiou trabalhos sobre as Funções com a utilização de softwares, demonstrando as conversões entre os registros algébrico e gráfico e entre os registros em linguagem natural e em linguagem simbólica.

5.3 Panorama geral de trabalhos algébricos no âmbito do LEM: Relatos de Experiência

No quadro a seguir, encontram-se os trabalhos selecionados na modalidade "Relato de Experiência", escolhidos por meio de palavras contidas nos títulos que pudessem remeter aos objetos Álgebra e LEM.

A amostra de Relatos de Experiência é composta por vinte e cinco trabalhos, dispostos de acordo com o quadro abaixo.

Quadro 2 – Segunda fase do levantamento: Relatos de Experiência.

Título	Modalidade/Eixo Temático	Conteúdo abordado
Calculadoras gráficas na formação inicial de professores de Matemática: sistematizando propriedades dos Determinantes	Relato de Experiência/ Formação de Professores	Determinantes
Diferentes ferramentas para o ensino de Matrizes	Relato de Experiência/ Formação de Professores	Matrizes
Excursão de férias: uma investigação focada em funções de 1º grau	Relato de Experiência/ Formação de Professores	Função do 1º grau

Experiências de formação para o uso do GeoGebra nas aulas de Matemática em escolas públicas do Ensino Médio	Relato de Experiência/ Formação de Professores	Função Afim
O estudo das funções e suas relações com o cotidiano e a tecnologia.	Relato de Experiência/ Formação de Professores	Função Afim; Equações e Inequações de 1º grau
Prática docente e jogos matemáticos: uma experiência do PIBID no Colégio Estadual Governador Djenal Tavares Queiroz	Relato de Experiência/ Formação de Professores	Regras de potenciação; Conceitos de Equação e Inequação; Logaritmos.
Reativação e uso de um Laboratório de Ensino de Matemática: um relato de experiência no contexto do PIBID	Relato de Experiência/ Formação de Professores	Conceito de Função; Função Exponencial; Gráfico de Função; Produtos Notáveis.
Modelagem Matemática no ensino de Funções: analisando a teoria dos Registros de Representação Semiótica	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Conceito de Função;
Alunos do Ensino Médio utilizam o Laboratório de Ensino de Matemática para rever os conteúdos do Ensino Fundamental: relato de uma experiência	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Polinômios
Análise de conteúdo: uma proposta para avaliação do conceito de função seno utilizando o software GeoGebra.	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Função Seno
Baralho trigonométrico e a	Relato de Experiência/	

escrita na aprendizagem da Matemática	Práticas Escolares	Relações Trigonométricas
Desafios e possibilidades de integrar o ensino de números complexos ao uso do software GeoGebra	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Números Complexos - conceitos, propriedades e operações
Função quadrática por meio da perspectiva metodológica de tecnologias da informação e comunicação	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Função Quadrática
Introduzindo o estudo da função exponencial através da Torre de Hanói	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Função Exponencial
Jogos lógicos e o ensino de funções exponenciais	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Função Exponencial
O auxílio dos jogos matemáticos na aprendizagem de funções algébricas: uma experiência com alunos do Ensino Médio	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Funções
O GeoGebra como estratégia para o ensino de função de segundo grau: relato de uma experiência	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Função Quadrática
O uso do GeoGebra como recurso didático no ensino de “equações da reta”	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Equações da reta/Função de primeiro grau
Progressão aritmética utilizando o jogo corrida ao CEM	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Progressão Aritmética
Quadro trigonométrico: uma ferramenta para o estudo das	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Funções Trigonométricas

funções trigonométricas		
Reelaborando conceitos de matemática através de atividades computacionais	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Função de 1º grau
Representações matemáticas nos processos de ensino e de aprendizagem de função logarítmica com o uso do software Winplot	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Função Logarítmica
Um olhar lançado ao objeto de aprendizagem "Matrizes"	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Matrizes
Uma diversificação no ensino de função exponencial	Relato de Experiência/ Práticas Escolares	Função Exponencial

Fonte: elaborado pela autora.

5.3.1 Descrição dos trabalhos selecionados na modalidade Relato de Experiência - RE

RE 1: Calculadoras gráficas na formação inicial de professores de Matemática: sistematizando propriedades dos Determinantes

Autores: Bruno Rodrigo Teixeira; Loreni Aparecida Ferreira Baldini; Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino.

Nesse trabalho, os autores relatam sua experiência ao participarem de uma intervenção na qual utilizaram calculadoras gráficas do modelo TI 84 Plus na resolução de tarefas referentes às propriedades dos Determinantes. O uso desse tipo de calculadora deu-se com a intenção de possibilitar a percepção de regularidades e sistematizar as referidas propriedades.

Embora essa intervenção tenha sido realizada por estudantes de graduação, é notório que um dos seus objetivos é montar um roteiro que sirva como exemplo de prática de ensino para o assunto "propriedades dos Determinantes".

Portanto, entende-se que um de seus propósitos é atingir os alunos do Ensino Médio no que tange à necessidade de abordar o supracitado assunto também nesse nível de escolarização.

Nesse sentido, percebeu-se que os autores evidenciam a importância do conteúdo no Ensino Médio, pois afirmam que “além de ser utilizado na resolução de Sistemas Lineares por meio da Regra de Cramer, o cálculo de Determinantes também é utilizado pelos alunos no Ensino Médio no estudo de outros conteúdos matemáticos, por exemplo, na Geometria Analítica para determinar a área de uma região triangular do plano cartesiano”.

Por esse motivo, considera-se esse trabalho importante, não só por utilizar tecnologia, mas, principalmente, por trazer o reconhecimento do estudo das propriedades dos Determinantes, evidenciando que a compreensão de tais propriedades pode trazer agilidade no cálculo dos Determinantes.

Além de importantes considerações sobre o assunto abordado, o relato apresenta o enunciado e as discussões de cinco tarefas exploratório-investigativas, bem como as resoluções e as sistematizações oportunizadas. Desse modo, é possível reaplicá-las, tanto com acadêmicos de Matemática quanto com alunos do Ensino Médio.

As atividades foram aplicadas com o objetivo de que os futuros professores tivessem a oportunidade de participar da sistematização dessas propriedades por meio da observação de regularidades na resolução das tarefas propostas. Como as atividades visam à sistematização, os alunos são levados a justificar suas afirmações utilizando os métodos já conhecidos. Então, como as justificativas devem ser genéricas, vê-se que esse é um trabalho que busca o desenvolvimento da linguagem simbólica. Apesar do uso da calculadora como ferramenta didática, a ênfase foi dada à justificação, à validação das conjecturas.

Ao final da experiência, os alunos haviam sistematizado quatro propriedades dos determinantes, o que fornece condições para que outras propriedades sejam sistematizadas a partir de uma abordagem análoga.

RE 2: Diferentes ferramentas para o ensino de Matrizes

Autores: Raquel Silveira da Silva; Márcia Lorena Saurin Martinez.

As atividades foram desenvolvidas por acadêmicas do curso de Licenciatura em Matemática, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio. As ferramentas utilizadas foram o quadro negro e giz; o jogo *Bingo de Matrizes* e situações-problema. As autoras defendem a necessidade de variar as metodologias de ensino por acreditarem que a dificuldade na Matemática está diretamente relacionada ao método de ensino utilizado.

Pelo fato de elas possuírem essa crença, inicialmente utilizaram o quadro negro e giz, acompanhado de um material impresso. A seguir, fizeram uso do jogo *Bingo de Matrizes* e aplicaram situações-problema, de modo que as últimas atividades eram contextualizadas.

Quanto à aplicação do supracitado jogo, primeiramente, foram explicadas algumas regras e a turma foi subdividida em grupos de quatro e cinco alunos. Posteriormente, cada aluno recebeu uma cartela contendo dez números, juntamente com dez quadradinhos de EVA. Havia uma caixa contendo 30 exercícios sobre Matrizes, onde uma questão era escolhida ao acaso e exposta no quadro. Então, os alunos resolviam no caderno a questão sorteada e marcavam a resposta em sua cartela com o quadradinho em EVA.

As autoras observam que a realização desse jogo requer o conhecimento prévio do conceito de Matriz e explicam que o jogo foi usado com a intenção de explorar os conceitos. Além disso, afirmam que o jogo auxilia na compreensão e resgate dos conceitos estudados. No entanto, não foi possível compreender a que conceitos as autoras se referem quando citam sua exploração e resgate, apenas foi compreendido que alguns conceitos foram abordados em fase anterior ao jogo.

Também é observado pelas autoras que o jogo desenvolve a capacidade de abstrair, todavia, não restou claro como ele contribui para a abstração, pois a descrição dada, além de não mostrar os enunciados dos exercícios, não permite relacioná-los à metodologia utilizada, pois o jogo não parece se "entrelaçar" ao conteúdo.

Dessa forma, nesse trabalho a contextualização aparece com o intuito de fazer "ponte" entre teoria e prática, entretanto, não seria considerada a mesma visão a respeito do jogo *Bingo de Matrizes*.

<u>*RE 3: Excursão de férias: uma investigação focada em Funções de 1º grau*</u>

Autores: Fábio Bordignon; Danillo Agripino Petronillio dos Santos e Wanderson da Silva Maciel.

O trabalho apresenta uma experiência de Investigação Matemática com alunos do 1º ano do Ensino Médio que nunca haviam tido contato com a abordagem investigativa.

O problema base para a atividade investigativa trata de duas agências de viagem que têm propostas distintas de preço, cabendo aos alunos decidir qual empresa oferece o melhor preço para determinada quilometragem e tomar a decisão sobre qual empresa deve ser contratada.

Pela natureza do problema, verificou-se que a proposta tem a intenção de trabalhar com a linguagem simbólica, pois busca definir os modelos matemáticos que representam as propostas das duas companhias de viagem. Além desse objetivo, a proposta indica a representação gráfica das leis de formação obtidas.

Na análise dos resultados os autores observam que os alunos identificavam a relação de dependência entre custo e quilometragem, porém, apresentavam dificuldade na construção e representação de um modelo matemático. Houve também dificuldade diante da inserção da incógnita x para representar a quilometragem.

Esse trabalho é bastante semelhante a uma comunicação científica que traz um problema base para a investigação referente a tarifas telefônicas. Como as informações contidas nele seguem a mesma direção, os apontamentos feitos quanto à referida Comunicação devem ser também considerados quanto ao trabalho ora destacado.

RE 4: Experiências de formação para o uso do GeoGebra nas aulas de Matemática em escolas públicas do Ensino Médio

Autores: Cosmo Matias Gomes e Cibelle de Fátima Castro de Assis.

O relato apresenta reflexões de atividades desenvolvidas no projeto “Informática Educativa na Escola: Utilização do GeoGebra no desenvolvimento de conteúdos matemáticos do Ensino Médio”.

As atividades da proposta de intervenção são voltadas para o conteúdo de Função Afim com a utilização do GeoGebra, elaboradas com o objetivo de sanar as dificuldades de aprendizagem dos alunos do 1º ano do Ensino Médio. Já o projeto em que essa intervenção está inserida também teve como objetivo desenvolver ações que contribuam para a formação inicial do professor de Matemática para atuar no Ensino Médio, capacitando-o para utilizar o GeoGebra associado a conteúdos específicos desse nível escolar.

Para atingir as finalidades traçadas, os autores elaboraram uma atividade voltada para a conceituação da Função do 1º grau com a os seguintes objetivos:

a) Perceber de maneira visual a relação dos coeficientes da Função;

b) Compreender a interferência dos coeficientes lineares e angulares no gráfico da Função;

c) Atribuir valores aos coeficientes;

d) Obter a relação das Funções crescentes, decrescentes e constantes de acordo com os valores atribuídos ao coeficiente angular.

Além disso, nota-se que a atividade também pretende relacionar as formas algébrica e gráfica da função e possibilitar a compreensão dos conceitos nelas envolvidos. Mesmo que de forma implícita, ela visa à compreensão da notação matemática abrangida pela linguagem funcional.

Não é uma proposta que busca trabalhar com a contextualização, Resolução de Problemas e Modelagem Matemática, contudo, é interessante avaliá-la por seu estilo investigativo.

A atividade foi construída e, posteriormente, aplicada a alunos de Matemática em uma oficina, onde seu desenvolvimento foi orientado por um roteiro impresso entregue aos estudantes. Ao final, foram discutidas as potencialidades do software.

Embora a atividade não tenha sido aplicada na escola básica, o respectivo professor a avaliou, pois a ideia é que ela seja um apoio ao estudo da Função Afim no 1º ano do Ensino Médio.

Como resultado da proposta criada, afirmou-se que a utilização do GeoGebra no trabalho com Função Afim possibilita a exploração do conteúdo, além da realização de associações e generalizações. Apesar de ser uma proposta simples, acredita-se que ela traz essas contribuições.

RE 5: O estudo das Funções e suas relações com o cotidiano e a tecnologia

Autores: Cristiam Wallao Rosa; Adriano Torri Souza e Tiele Aquio Schunemann

Esse relato conta as ações promovidas junto ao projeto PIBID, desenvolvidas no 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública, com foco, especialmente, no conteúdo de

Funções. O projeto é norteado pela temática “A Matemática e o mundo à nossa volta”, portanto, visa ao aprendizado em sintonia com o contexto em que vivem os alunos.

Inicialmente, foi realizada uma sondagem sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação a conteúdos do Ensino Fundamental que são pré-requisitos para o estudo da Matemática do Ensino Médio. Através dos resultados dessa sondagem, buscou-se elaborar estratégias inovadoras para recuperar alguns conteúdos nos quais os alunos têm mais dificuldade.

Foram realizadas oficinas semanais de, aproximadamente, duas horas cada uma, utilizando ferramentas didáticas como jogos, vídeos, softwares matemáticos livres, atividades de investigação e atividades fora da sala de aula, buscando aliar tais recursos à sua aplicação na vida prática e aos objetivos de alfabetização matemática e tecnológica.

O computador foi usado nas oficinas pela facilidade de realizar cálculos e desenhar gráficos, permitindo que o aluno focasse mais nas relações entre aspectos geométricos e algébricos existentes nos conteúdos.

No relato são citados dois exemplos de atividades aplicadas, uma sobre Função Afim e Função inversa, intitulada “Codificando e decifrando mensagens”, onde se trabalhou com a Função Afim e sua inversa através da escrita de mensagens codificadas. Através de uma associação entre números e letras encontra-se uma transformação (Função) entre um conjunto de mensagens codificadas e, através da Função inversa, obtém-se a mensagem original decodificada.

Apesar dessa descrição, não se compreendeu como surgem as Funções na atividade, pois não consta no aludido relato o trabalho dos alunos na realização da tarefa. Não é possível saber quais foram as respostas e conclusões dos alunos nem julgar como eles relacionaram-se com a linguagem algébrica do conteúdo.

O segundo exemplo, chamado “Trilha das Inequações”, trata de Equações e Inequações do 1º grau, com o objetivo de amenizar as dificuldades dos alunos e apresentar uma forma de estudo em que não prevaleça a mecanização excessiva de procedimentos, mas que reconheça a sua importância e preocupe-se com as resoluções. Fato confirmado ao observar-se a inserção de um jogo, cujo principal objetivo foi resolver Inequações.

Desse modo, mesmo sem muitas evidências e sem constar claramente nos objetivos dos autores, entende-se que as atividades realizadas puderam, de alguma forma, contribuir para a superação de dificuldades em relação ao uso da linguagem simbólica, especialmente por tratar do registro escrito decorrente do uso de procedimentos algébricos.

<u>*RE 6: Prática docente e jogos matemáticos: uma experiência do PIBID no Colégio Estadual Djenal Tavares Queiroz*</u>

Autores: Rodrigo Oliveira Souza Santos; Jacyara Quintela Vieira Silva; Jonison Lucas dos Santos Carvalho e Diego Alves da Costa.

No trabalho, os autores compartilham experiências ocorridas nas turmas de 1º ano do Ensino Médio da referida instituição. As atividades foram desenvolvidas com aplicações de jogos matemáticos que favoreceram o processo de ensino-aprendizagem.

Os jogos utilizados e os respectivos conteúdos estão dispostos no quadro a seguir:

Quadro 3 – Relação entre jogos e conteúdos matemáticos do RE 6.

Jogos	Conteúdo relacionado
Trilha das charadas	Resolução de problemas
Bobeou Dançou	Geometria
Mat Rabisco	Livre
Cartelas Mágicas	Potenciação
Avançando com o resto	Divisão, Resto, Cálculo Mental
Corrida das potências	Potenciação
Corrida Pitagórica	Teorema de Pitágoras
Pentaminós	Área, isometria, Princípio Fundamental da Contagem
Desafios aritméticos	Operações, Cálculo Mental.

Fonte: RE 6.

Esses jogos abordam assuntos diversificados e, pelo que se nota da leitura do relato, nenhum deles tem foco especial em assuntos algébricos, mas são inseridos de forma a contribuir ao estudo de alguns tópicos algébricos.

Dentre os jogos descritos no relato, o intitulado “Corrida das Potências”, relacionado às regras de Potenciação, foi aplicado antes do estudo da Função Exponencial. De seu turno, o jogo “Mat Rabisco” aborda diversos assuntos da Matemática, mas, quanto à Álgebra, apenas foi relatado que surgiram os termos “Equação” e “Inequação”, diante dos quais os alunos demonstraram não saber diferenciá-los.

O jogo “Desafios Aritméticos”, destinado a estimular o raciocínio e à utilização de operações aritméticas, foi aplicado durante a exposição sobre Função Logarítmica. O desafio proposto nesse jogo correspondia aos procedimentos necessários à resolução dos Logaritmos. Os alunos eram desafiados a representar os números de diversas maneiras, misturando operações, o que os auxiliou a visualizar com mais rapidez e clareza quais transformações eram necessárias para calcular o Logaritmo e quais propriedades poderiam ser usadas.

O último jogo descrito, “Trilha das Charadas”, envolve problemas a serem solucionados pelos alunos e, como os enunciados não aparecem no texto, não há como afirmar se assuntos algébricos são abordados.

Apesar de não conter muitos detalhes sobre como se deu a aplicação dos jogos, é possível considerar, de forma indireta e simples, que esse trabalho contribui para a compreensão de alguns conceitos e procedimentos importantes no campo da Álgebra Escolar.

RE 7: Reativação e uso de um Laboratório de Ensino de Matemática: um relato de experiência no contexto do PIBID

Autores: Amanda do Nascimento Rosa e Felipe Silva de Lima

O trabalho socializa a experiência de reativação e uso de um LEM onde foram realizadas práticas pedagógicas com alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública.

Os autores desse trabalho defendem o LEM como um espaço de experimentação para professores e alunos. Dentre as suas principais contribuições, cita-se também a possibilidade de estimular a amplificação da linguagem.

A ideia dos autores foi promover algumas práticas de ensino naquele espaço, aproveitando os materiais nele encontrados. O quadro a seguir mostra os materiais utilizados em algumas intervenções e os respectivos conteúdos matemáticos abordados.

Quadro 4 – Relação entre conteúdos matemáticos e recursos utilizados no RE 7.

Conceito de função	Cordão e clips
Função exponencial	Torre de Hanói e jogo de Xadrez
Gráfico da função	Folha milimetrada
Produtos notáveis	Papel A4 colorido e régua

Fonte: RE 7.

No estudo destinado ao tópico Função, os alunos foram expostos ao respectivo conceito e levados a encontrar a relação existente em cada exemplo citado, visando à descoberta da lei de formação presente em cada caso. Para o conceito de Função Exponencial foram usados a Torre de Hanói e o jogo de Xadrez. A ideia é que, por meio do jogo, os alunos sejam desafiados a encontrar a lei de formação da Função.

Foram necessárias algumas intervenções para que houvesse a compreensão da lei de formação $f(n) = 2^n - 1$, obtida através da Torre de Hanói. Quanto ao jogo de Xadrez, foi contada a sua lenda, envolvendo a colocação de grãos de trigo no tabuleiro, sendo um grão na 1ª casa, dois na 2ª, quatro na 3ª e assim por diante. A partir daí foi solicitado o cálculo de grãos na 64ª casa do tabuleiro, quando se percebeu a necessidade de encontrar a lei de formação da Função, que é $f(x) = 2^x$.

O cálculo de Produtos Notáveis foi feito com abordagem geométrica, utilizando-se o conceito de área para se chegar à verificação dos Produtos Notáveis quadrado da soma e da diferença. A folha quadriculada foi usada para o esboço dos gráficos de algumas Funções trabalhadas anteriormente.

Observa-se nesse trabalho a presença do estilo investigativo, a preocupação de que o registro escrito (formalização) seja obtido pelas observações das ações desenvolvidas junto aos materiais didáticos. Dessa forma, tais materiais foram usados objetivando a abstração e a generalização, além de contribuírem para o entendimento do simbolismo contido nos conteúdos, pois, nas atividades, as letras estão inseridas em um contexto que justifica seu uso e dá significado a elas.

RE 8: Modelagem Matemática no ensino de Funções: analisando a teoria dos Registros de Representação Semiótica

Autora: Neila de Toledo e Toledo

No trabalho a autora apresenta uma atividade de Modelagem Matemática desenvolvida com estudantes do 1º ano do curso técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio, sobre o objeto matemático Função. O objetivo foi analisar a atividade de conversão e o tratamento entre registros em situações-problema elaboradas e resolvidas por alunos, a partir de dados sobre tarifas de energia elétrica e de água, além de faturas de produção leiteira.

Na apresentação do material coletado pelos alunos para a elaboração das situações-problema foi trabalhado o conceito intuitivo de Função. A seguir, foram elaboradas as situações-problema e estas foram representadas nas seguintes formas: representação analítica (lei de formação); representação geométrica (gráfico) e representação com Diagrama de Venn.

A maneira com que esse trabalho foi realizado é amparada em pressupostos teóricos a respeito de Modelagem Matemática e das Representações Semióticas, como, por exemplo, a consideração de Duval (2003), na qual se acredita que, para alcançar o entendimento de um conceito e, então, poder aplicá-lo, torna-se necessária uma coordenação por parte do sujeito que aprende, de, ao menos, dois registros de representação de um mesmo objeto matemático e essa coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão.

Justificando o uso da Modelagem, a autora apoia-se na afirmação de que com a Modelagem Matemática é possível viabilizar o uso de diferentes registros associados ao mesmo objeto matemático, bem como colocar ao aluno a necessidade de realizar a conversão entre os diferentes registros.

Analisando o desenvolvimento dos alunos na elaboração e resolução das situações-problema, a autora aponta que, na maior parte das situações modeladas, eles apresentaram, inicialmente, uma representação tabular. Os registros gráfico e algébrico não foram utilizados como representação inicial, vindo a surgir no decorrer da atividade como forma complementar ou como meio de melhor interpretar a situação.

A partir disso, conclui-se que o registro algébrico era considerado necessário e suficiente pelos alunos, pois, obtida essa expressão, muitos alunos consideravam o problema resolvido. Crê-se que esse seja o motivo de a conversão entre registro verbal e algébrico ter sido a mais encontrada nas situações de modelagem.

No entanto, observa-se um fato curioso na análise desse trabalho: a autora conta que em todos os casos deu-se a conversão no sentido algébrico para o gráfico, e nunca no sentido contrário. Ou seja, constata-se que os alunos necessitavam de outra representação depois de conseguirem chegar ao registro algébrico, o que não indica que tal registro seja entendido como suficiente pelos alunos.

Pela leitura desse trabalho observou-se que a Modelagem Matemática junto às Funções foram usadas como meio de integração entre teoria e prática, visto que o conceito de Função foi explorado de modo que se verificasse a relação entre as variáveis de uma situação real. É um trabalho que visa à generalização dos fenômenos estudados, pois, na Modelagem, faz-se necessário encontrar a expressão matemática que representa uma dada situação, a fim, não só de representá-la, mas de compreendê-la.

Dessa forma, a Modelagem ressalta o papel instrumental da Matemática, conforme aponta a autora, todavia, não usa o termo instrumental apenas no sentido de fornecer métodos de resolução, mas, sobretudo, porque as atividades necessitam que os alunos desenvolvam a notação matemática, especialmente o uso da linguagem matemática das Funções aplicada às situações reais.

RE 9: Alunos do Ensino Médio utilizam o Laboratório de Ensino de Matemática para rever os conteúdos do Ensino Fundamental: relato de uma experiência

Autores: Jânio Elpídio de Medeiros

Nesse trabalho são relatadas experiências de trabalho com oficinas ministradas a alunos do 1º ano e do 2º ano do Ensino Médio realizadas no Laboratório de Estudos e Pesquisas em Ensino de Matemática (LEPEM) da UFPB.

O LEPEM é uma iniciativa do projeto "Integrando a Escola e a Universidade por meio do Laboratório de Ensino de Matemática". Nesse local são desenvolvidas pesquisas com materiais didáticos e jogos no ensino de Matemática, o que permite trabalhar com esses materiais de forma mais íntima e segura.

As oficinas têm o propósito de minimizar algumas dificuldades dos alunos referentes a conteúdos e competências básicas do Ensino Fundamental. Nessas oficinas foram utilizados materiais manipulativos, vislumbrando uma aprendizagem significativa. Foram abordados dois conteúdos: "operações com Frações" e "Polinômios", utilizando, respectivamente, as Réguas de Frações e o Algeplan.

O Algeplan foi usado com o intuito de trabalhar áreas de quadrados e retângulos e suas representações algébricas. As atividades versavam sobre áreas de quadrados e retângulos, efetuando soma e multiplicação de monômios e polinômios, iniciando com o reconhecimento das peças, depois escrevendo as expressões algébricas a partir de figuras dadas e, por fim, montando figuras a partir de expressões algébricas dadas.

Considera-se que esse trabalho mostra uma das potencialidades do Laboratório de Ensino de Matemática como auxiliar no desenvolvimento e uso da linguagem algébrica no

Ensino Médio, uma vez que ele está sendo usado como alternativa de resgate aos sentidos de símbolos e de variáveis, além de possibilitar o reestudo das operações envolvendo monômios e polinômios através de um recurso que dá significado a estas operações.

RE 10: Análise de conteúdo: uma proposta para avaliação do conceito de Função Seno utilizando o software GeoGebra

Autores: Rudolph dos Santos Gomes Pereira; Armando Paulo da Silva; William Vieira Gonçalves e Wilson Massahiro Yonezawa

No trabalho em análise, os autores têm como objetivo principal verificar a contribuição do uso do computador para examinar a modificação e a aquisição de novos conhecimentos. A atividade de intervenção foi feita com alunos do curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal do Paraná.

A proposta aplicada teve como objetivo a análise do comportamento da Função Seno na medida em que se alteram os parâmetros, relacionando-os às características da Função: período, amplitude e translação. Por isso, a fim de contribuir para o estudo, foi apresentada aos alunos a forma algébrica da referida Função dada por $A + Bsen(Cx + D)$. Os alunos, divididos em grupos, deveriam utilizar o software GeoGebra para verificar o comportamento da Função Seno em relação aos seus parâmetros e registrar, por meio da escrita (linguagem corrente, textual), as suas percepções.

Os autores desse trabalho acreditam proporcionar aos alunos a possibilidade de realizar abstrações com o uso do computador e através do seu registro escrito promover a aprendizagem de conceitos matemáticos. Nesse caso, a proposta visa à aquisição do conceito de Função Seno a partir da compreensão dos seus parâmetros, explorados com o GeoGebra.

Os registros textuais são utilizados para expor as percepções e abstrações feitas, analisando o comportamento da Função construída no GeoGebra, sendo um meio auxiliar para a compreensão da forma algébrica da Função Seno. Com o texto escrito, os alunos podem mostrar como relacionaram os parâmetros A, B, C e D aos conceitos de período, amplitude e translação, além de poderem também verificar possíveis relações com a imagem da Função.

Na análise, buscou-se interpretar esses registros escritos. Foram analisadas atividades de quatro grupos de alunos, de acordo com quatro categorias previamente definidas: amplitude, translação vertical, translação horizontal e período.

Verificando-se os textos criados pelos grupos, observou-se que em alguns momentos a visualização gráfica não foi suficiente para relacionar corretamente o parâmetro às suas implicações na Função. Por exemplo, não foi identificada a associação da alteração do parâmetro A com a imagem da função.

O ponto mais interessante da análise foi quanto à linguagem. Os autores observaram que nem todos os grupos utilizaram a linguagem adequada para exprimir sua compreensão, demonstrando falta de familiaridade ao usar a língua portuguesa em atividades que envolvem conceitos matemáticos. Por outro lado, houve um grupo que expressou sua compreensão na linguagem matemática de modo a se aproximar do modelo matemático apresentado em livros didáticos para o cálculo do valor do período. O mesmo não ocorreu nos registros sobre amplitude, nos quais não se expressou algebricamente uma maneira para encontrar aquele valor.

RE 11: Baralho Trigonométrico e a escrita na aprendizagem da Matemática

Autores: Ramon Japiassu Tavares de Lima e Maria Teresa Menezes Freitas

O artigo trata do relato de uma aplicação de atividade lúdica envolvendo Relações Trigonométricas para alunos do 2º ano do Ensino Médio. A atividade desenvolveu-se pelo uso do jogo “Baralho Trigonométrico”.

Inicialmente, houve a apresentação para os alunos da nomenclatura adequada e das relações trigonométricas do triângulo retângulo. Portanto, a dinâmica usada não tinha a intenção de inserir esse assunto aos alunos, uma vez que já era conteúdo conhecido por eles. A ideia era estabelecer relação entre pares de expressões equivalentes, encontrando algumas das equações conhecidas por “Identidades Trigonométricas”.

A atividade foi desenvolvida em grupos de cinco alunos, recebendo cada grupo 30 cartas. Destas cartas, 15 possuíam as relações trigonométricas e as outras 15 ilustravam as relações. O aluno, ao selecionar uma carta, teria que associá-la a outra carta que ilustrasse a razão ou formasse a identidade. O grupo vencedor seria aquele que encontrasse primeiro todos os pares de forma correta.

É um jogo de memória, onde o aluno necessita lembrar as relações apresentadas em sala para encontrar os pares corretos. Também se acredita que, após o jogo, as relações fiquem na memória e os alunos não necessitem mais de consulta para obtê-las.

Como parte do planejamento, solicitou-se aos alunos que anotassem em seus cadernos as fórmulas trigonométricas, pois, ao escreverem, reafirmariam o conteúdo em questão. À primeira vista, essa atitude não deixa de ser tradicional, mas tem como vantagem o propósito de fazer o aluno familiarizar-se com a notação algébrica presente na Trigonometria.

Ocorre que essa não é a única forma de utilizar a escrita para a aprendizagem de Matemática explorada nesse trabalho. Ao final da atividade solicitou-se aos alunos o registro da aula, para que avaliassem a contribuição da proposta e, principalmente, para que tivessem a oportunidade de repensar e reorganizar os pensamentos, de modo que identifiquem o que foi aprendido e percebam que a proposta da atividade vai além de levá-los a brincar.

Apesar de ter como intenção principal a promoção da memorização, foi uma dinâmica diferente de trabalhar com fórmulas algébricas, visando a sua memorização, mas não de forma tão mecânica e cansativa. Mais que promover a memorização, a dinâmica realizada promoveu a socialização, o trabalho em grupo e a discussão.

Observa-se ainda que, embora seja um trabalho que aborda o papel da escrita na aprendizagem matemática, não possui foco na notação matemática, ou seja, o foco não está em dar significado às expressões trigonométricas. No entanto, entende-se que, ao instigar os alunos a lembrar-se das relações, o trabalho os faça também recordar como elas foram anteriormente estudadas e como são obtidas (deduzidas).

Mesmo o jogo Baralho Trigonométrico não tendo sido usado com a intenção de promover a abstração, a generalização e a formalização, crê-se que ele tem características positivas e que sua inserção nas aulas pode ser mais explorada.

RE 12: Desafios e possibilidades de integrar o ensino de Números Complexos ao uso do software GeoGebra

Autora: Gisele Barbosa

O artigo relata a experiência da autora ao realizar o estágio de docência de Matemática em duas turmas do 3º ano dos cursos técnicos de Metalurgia e Informática integrados ao Ensino Médio.

O principal objetivo foi verificar se os alunos associariam seus conhecimentos de Números Complexos numa tarefa de mesma temática, porém, através do software GeoGebra. Ademais, buscou-se entender como os discentes conseguiriam obter novas conclusões e inferências sobre o tema, ou seja, verificar se o GeoGebra permite aos alunos a aplicação dos conceitos, propriedades e operações dos Números Complexos estudados, bem como ampliar os conhecimentos adquiridos nas aulas tradicionais.

Buscando uma tarefa sobre a temática, a autora esperava encontrar algo pronto na Web, porém, as buscas não deram resultados satisfatórios. Diante disso, a tarefa foi elaborada pela autora com base em ideias próprias e em propostas de ensino de dois livros didáticos. Nomeada como "Números Complexos e o GeoGebra – Roteiro de Atividade", a tarefa estava dividida em partes e propunha a exploração do software e a adaptação às suas ferramentas, além da parte principal, que era a abstração de conceitos ligados a Números Complexos na forma algébrica.

Apesar de ter verificado que as buscas por propostas de ensino na internet não satisfaziam seu interesse, além de, possivelmente, ter observado que o número de propostas de ensino ou de trabalhos acadêmicos a respeito do tema não é extenso, a autora não inseriu no seu relato o roteiro de atividade elaborado e aplicado por ela.

Supõe-se que os roteiros utilizados em sala por pesquisadores em Educação Matemática deveriam também ser incluídos no corpo do trabalho publicado nos anais do ENEM, pois, assim, o trabalho publicado realmente poderia ser fonte de auxílio para as práticas escolares.

Como resultado positivo da aplicação do roteiro, observou-se que os alunos falavam de Número Complexo não mais como um número acompanhado de "i", mas como um par ordenado, um ponto no plano, o qual eles poderiam manipular, medir seu ângulo e calcular distâncias.

Tem-se a ideia de que foi uma atividade em que o estudo dos Números Complexos tornou-se menos abstrato através da visualização promovida pelo software. Não foi um estudo exclusivamente centrado na forma algébrica do Número Complexo, porém, serviu para compreender conceitos ligados a ela.

A representação algébrica não precisa ganhar todo o espaço de uma aula, ela necessita ganhar sentido e isso foi feito no trabalho em questão.

RE 13: Função Quadrática por meio da perspectiva metodológica de tecnologias da informação e comunicação

Autores: Dayani Quero da Silva; Iara de Souza Doneze e Joselene Marques.

O trabalho descreve uma proposta pedagógica aplicada por alunos do curso de Licenciatura em Matemática em uma turma de 1º ano do Ensino Médio profissionalizante. A proposta abordou o conteúdo Função Quadrática, empregando vários recursos, como animações online descrevendo parábolas e o software GeoGebra.

Escolheu-se trabalhar com esse tema dando-se ênfase à superação de dificuldades em relação aos conceitos formais que ainda não haviam sido compreendidos, pois, apesar de ser um conteúdo estudado anteriormente, os alunos ainda demonstravam algumas incompreensões.

Por essa razão, a aula teve o intuito de revisar o conteúdo e fazer com que os estudantes realmente compreendessem os dados extraídos do gráfico da Função Quadrática a partir da manipulação dos parâmetros. Portanto, foi realizado de forma expositiva e dialogada o estudo da variação dos coeficientes a, b e c nas funções, considerando variações negativas e positivas.

Como resultados da abordagem feita, os autores apontaram algumas das conclusões relatadas pelos alunos, tais como:

> a) O parâmetro *a* influencia na concavidade da parábola. Quanto maior o valor assumido por este parâmetro, menor fica a abertura da concavidade;
> b) O parâmetro *b* influencia na translação da parábola sobre o eixo x, dependendo dos valores, positivos ou negativos, assumidos pelo parâmetro;
> c) O parâmetro *c* influencia na translação vertical, também dependendo dos valores positivos ou negativos. Porém, não observaram que o parâmetro c é o valor em que a parábola intersecta o eixo y.

Durante a atividade, além da observação, os alunos tiveram que demonstrar que eram capazes de comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, mostrando que, nesse trabalho, a linguagem corrente (escrita) pode ter sido um auxílio para a posterior compreensão da forma algébrica.

RE 14: Introduzindo o estudo da Função Exponencial através da Torre de Hanói

Autora: Jussara Gomes Araújo Cunha

No artigo ora analisado, a autora relata o desenvolvimento de atividades realizadas em uma turma de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública, com o objetivo de introduzir o estudo de Função Exponencial por meio da exploração do jogo Torre de Hanói.

A metodologia aplicada foi a Investigação Matemática, por isso, no relato há trechos do diálogo estabelecido entre professora e alunos por meio de perguntas e respostas.

A atividade foi realizada em quatro etapas, onde os alunos puderam revisar as propriedades da potência, fazer a leitura sobre a lenda da Torre de Brahama, confeccionar a Torre de Hanói, realizar o jogo, socializar as descobertas feitas a partir das tabelas construídas no jogo e construir e analisar gráficos.

Lendo-se o trabalho, teve-se a ideia de adotar um jogo com a intenção de ser usado em atividades para desenvolver habilidades que possibilitem adotar atitudes de respeito mútuo, solidariedade, compreensão da convivência com o coletivo, regras e valores que essas envolvem. No entanto, o jogo Torre e Hanói, apesar de, nesse caso, poder ter sido confeccionado em grupo, é um jogo de participação individual. O que acontece no coletivo são as discussões sobre o jogo e não o jogo em si.

Observando-se a forma como o jogo foi inserido na aula, notou-se que ele não foi visto com grande importância durante todo o desenvolvimento da aula, parecendo que foi usado para a introdução do conteúdo e, posteriormente, passou-se a discutir Matemática de forma isolada do jogo.

Um fato observado nesse trabalho e que leva a refletir é o modo como a relação entre o número de peças e o número de jogadas, $2^n - 1$, é obtida. Fazem-se as jogadas sem observar como elas ocorrem e sem observar como o número de jogadas aumenta devido ao aumento do número de peças, então, anota-se o número de peças e o número de jogadas numa tabela e observa-se a sequência obtida quanto ao número de jogadas, relacionando-a a potências de base 2. Ou seja, uma Função é encontrada a partir de uma tabela, exatamente como é feito no estudo de Funções, sem o auxílio de qualquer metodologia e material diferenciados.

Sendo assim, não seria melhor pensar numa proposta com a Torre de Hanói onde a forma como se dão as jogadas, principalmente quando se aumenta o número de peças, seja o princípio para a descoberta da lei que expressa a relação?

Geralmente, a potência de base 2 não é associada à ideia de repetição do número de jogadas anteriores conforme o número de peças aumenta e, muito provavelmente, essa pode ser a causa da dificuldade dos alunos em escrever a sequência no número de jogadas (7, 15, 31, 63) usando potências. Por isso, acredita-se que é necessário acrescentar aos estudos que utilizam a Torre de Hanói reflexões sobre o motivo pelo qual a potência é usada.

Além disso, outro fato que merece atenção e reflexão é a construção do gráfico da função $f(n) = 2^n$ e sua falta de relação com o jogo. Aparentemente, faria mais sentido construir o gráfico da função $f(n) = 2^n - 1$, usando-o para mostrar como o número de jogadas cresce "rapidamente", devido ao aumento do número de uma peça de cada vez no jogo. Isso justificaria o fato de o jogo ficar cada vez mais difícil tão rapidamente.

<u>*RE 15: Jogos lógicos e o ensino de Funções Exponenciais*</u>

Autores: Ana Paula Scheeren; Angélica Schossler; Jane Heber; Cristiane Antônia Hauschild

O artigo relata a experiência de aplicação de cinco jogos pedagógicos a alunos do Ensino Médio. Os jogos selecionados foram: Travessia do Rio; Jogo do Sapo; Torre de Hanói, Montando um quadrado e Jogos Boole, os quais já existem em softwares, três deles readaptados com materiais concretos.

Os jogos foram selecionados mediante a observação de que eles deveriam ter regras simples, considerando que se tinha como objetivo desenvolver o raciocínio lógico matemático e utilizar um deles, a Torre de Hanói, para introduzir o conteúdo de Funções Exponenciais de forma diferenciada.

O trabalho mostra a descrição de todos os jogos, porém, o foco está na descrição e análise da oficina sobre Funções Exponenciais.

Até o momento, o melhor uso da Torre está nesse trabalho. De início, os alunos foram questionados sobre o número de movimentos necessários para mover 1, 2 e 3 discos, e, rapidamente, perceberam que a dificuldade aumentava consideravelmente quando aumentava o número de discos.

A partir daí, construiu-se uma tabela com o número de discos e o número mínimo de jogadas possíveis para mover os discos de uma torre para a outra. Após essa construção, os alunos foram incentivados a descobrir qual a relação entre aqueles números. Para isso, continuavam sendo instigados por perguntas, tais como: Qual o número de movimentos necessários para mover 5 discos? E 15 discos?

Com essas e outras perguntas os alunos foram levados a estabelecer um raciocínio para definir o número de jogadas, quando um grupo percebeu que, se fosse considerado o número mínimo de jogadas com um determinado número de discos, ao se acrescentar um disco, o número mínimo de jogadas seria duas vezes o número de jogadas anterior mais um.

O raciocínio em questão é válido, contudo, os alunos foram instigados a definir o número mínimo de jogadas apenas utilizando o número de discos, sendo lembrados de que estavam em busca de uma Função Exponencial.

Com a generalização feita (encontrada a função $f(n) = 2^n - 1$), os alunos esboçaram o gráfico da Função, encontrando, mais uma vez, o aumento repentino do número de jogadas.

RE 16: O auxílio dos jogos matemáticos na aprendizagem de Funções Algébricas: uma experiência com alunos do Ensino Médio

Autores: Andréa Aparecida Vieira; Leonardo Florêncio dos Santos; Silvana Lucas Bomtempo Matos.

No artigo, os autores discorrem sobre uma atividade envolvendo jogos matemáticos, realizada em uma turma do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública. A atividade envolveu o ensino de Funções Algébricas por meio do jogo "Recordando Funções de Maneira Divertida", elaborado pelos autores do relato.

A aludida atividade teve como objetivos proporcionar um ambiente agradável para que os alunos possam exercitar suas habilidades de leitura e interpretação de Funções e contribuir para a compreensão do conteúdo de maneira mais significativa. No entanto, pela leitura do trabalho, percebe-se que a intenção principal foi relembrar conceitos estudados anteriormente.

Para a aplicação da atividade, cada grupo recebeu 16 fichas contendo exemplos de Funções, uma ficha para identificação do grupo e outra contendo as instruções do jogo.

Também foi utilizado um dado cujas faces apresentavam as cores verde, vermelho, amarelo, roxo, marrom e azul, no qual cada cor representava uma pergunta relacionada à Função que estava na ficha a ser escolhida pelos pesquisadores. As perguntas referentes às cores verde, vermelho e roxo valiam um ponto cada, já as concernentes às cores amarela, marrom e azul valiam dois pontos cada, devido ao seu nível de complexidade.

As perguntas relativas às cores do dado foram as seguintes:

a) Verde: Onde a função intercepta o eixo Y?
b) Vermelho: Onde a função intercepta o eixo X?
c) Roxo: O gráfico da função é uma reta ou é uma parábola? Caso seja uma reta, diga se ela é crescente ou decrescente.
d) Amarelo: Faça o cálculo solicitado pelo pesquisador.
e) Marrom: Quantas e quais são as raízes reais da função?
f) Azul: Qual o grau da função?

Conforme as perguntas eram feitas, as equipes acumulavam pontos que foram anotados no quadro negro. Em cada rodada um grupo era responsável por jogar o dado.

As observações feitas nesse relato lembram muito os comentários do professor Paulo Ramos (p.57) a respeito de seus alunos de 3º ano do Ensino Médio, que se encontram no decorrer do presente trabalho. Assim como o professor Paulo, os autores desse relato, durante a atividade, logo observaram que alguns alunos, quando questionados sobre quais são as raízes de uma Função, apenas igualavam a função a zero, tentando encontrar o valor de x sem conhecer o real sentido de tal cálculo.

Os referidos autores também observaram, assim como o professor Paulo Ramos, que muitos alunos não conseguiam, inicialmente, identificar o grau de uma Função.

Com o decorrer das jogadas percebe-se que os alunos tornaram-se mais atentos, observando que o número de raízes dependia do grau da função e, assim, pensando mais antes de partir para o cálculo algébrico.

Comprovando que os alunos não compreendiam o porquê de realizar o cálculo das raízes destaca-se a incompreensão da pergunta: “onde a função intercepta o eixo x?”. Esse fato evidencia que a interpretação geométrica das raízes foi esquecida.

Em geral, o uso do jogo foi importante, tanto para recordar alguns conceitos referentes às Funções como para melhorar a compreensão e aplicação dos procedimentos algébricos necessários para se responder às perguntas. Considera-se que isso levou os alunos a ficarem mais atentos quanto aos cálculos algébricos, pois deles também dependia a obtenção de pontos no jogo.

Esse relato é um bom exemplo para mostrar que o trabalho com conceitos matemáticos e manipulações algébricas pode ser feito de forma integrada.

<u>RE 17: O GeoGebra como estratégia para o ensino de Função de Segundo Grau: relato de uma experiência</u>

Autores: Lucas Ferreira Gomes; Luiz marcos Fedrigo Júnior e Milton Kist.

O objetivo do trabalho foi fazer uma reflexão sobre uma intervenção didática baseada no uso do software GeoGebra como estratégia para abordar o conteúdo de Funções Quadráticas. A atividade de intervenção foi aplicada em uma turma de 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública.

Para os autores, o uso do software possibilita que os alunos façam inferência, construam conceitos e verifiquem propriedades, por isso, ao realizar, no software, as atividades referentes à Função Quadrática, esses itens tornaram-se os objetivos dos autores.

Inicialmente, teve-se a impressão de que a ideia era explorar a relação entre os parâmetros da Função e sua influência na representação gráfica, no entanto, as atividades descritas limitaram-se à análise da variação do coeficiente a, provavelmente devido à intenção de relacioná-lo ao conceito de concavidade, observando a propriedade que relaciona o valor do coeficiente ao tamanho da abertura da concavidade.

Nas demais atividades o foco não estava mais nos coeficientes, mas em outras propriedades. Foram formalizadas as ideias de eixo de simetria e a interpretação geométrica das raízes.

Embora seja um trabalho em que, inicialmente, aparece a preocupação com o estudo dos parâmetros da Função, não há uma abordagem satisfatória da forma algébrica da Função Quadrática. Parece que o foco dos autores está nas conclusões obtidas da observação dos gráficos construídos com o software, porém, estes gráficos, ao serem construídos, não levaram em consideração todos os parâmetros. Portanto, é um estudo que merece ser ampliado.

Contudo, mesmo não abordando satisfatoriamente a forma algébrica, as questões algébricas (como o cálculo das raízes) não foram abandonadas, apenas deixam de ser inseridas sem sentido. Nesse trabalho, a ideia não é centrar-se em questões algorítmicas, mas, em determinado momento, é proposto aos alunos que encontrem as raízes de algumas Funções, para que, com a construção do gráfico, elas ganhem significado.

Além disso, é um tipo de estudo que propicia e incentiva o uso da linguagem corrente escrita como forma de os alunos formalizarem os conceitos e as propriedades observadas. Sendo assim, apesar de não ter a intenção explícita de auxiliar na melhoria do uso da linguagem algébrica, possui fatores positivos para o alcance dessa melhoria.

RE 18: O uso do GeoGebra como recurso didático no ensino de "Equações da Reta"

Autores: Jefferson Cavalcante; Edcarlos Macena; Fábio Santos; Jhennyfe Passos e Thays Santos.

O trabalho, cujo objetivo principal era de analisar as vantagens do uso do GeoGebra no processo de ensino-aprendizagem de Equação da Reta foi realizado em turmas de 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública.

O foco do trabalho está no estudo algébrico da reta, trazendo relações existentes entre a Geometria e a Álgebra, por isso a escolha do software GeoGebra.

Como o laboratório de informática da escola estava desativado, os alunos não puderam realizar as atividades, apenas acompanharam a explicação pelo quadro e projetor multimídia, colocado ao lado do quadro. Por esta razão, a participação dos alunos foi ainda mais incentivada.

A exposição do conteúdo foi feita em dez passos, sendo a intenção principal utilizar a representação gráfica para o estudo algébrico da reta. Desse modo, a construção de gráficos foi realizada, na maioria dos casos, considerando variações nos coeficientes *a* e *b*. Diferentes retas eram mostradas, para que, a partir das alterações ocasionadas no gráfico pela mudança dos valores de *a* ou de *b*, os alunos pudessem perceber o que cada coeficiente representa.

Além da preocupação com os coeficientes, foi dada atenção aos casos das retas paralelas aos eixos coordenados, comparando gráficos e Equações.

Quanto à construção da reta, dada a sua Equação, esta foi realizada no quadro, inicialmente, da forma tradicional, marcando pontos e unindo-os. Posteriormente, o procedimento foi repetido no GeoGebra. Mas por que utilizar o GeoGebra para abordar um conteúdo tal e qual se faz sem ele?

Também a busca pela Equação da Reta a partir de dois de seus pontos foi feita da forma convencional, determinando os valores dos coeficientes *a* e *b*.

Talvez o tipo de abordagem usada seja um dos motivos pelos quais os autores observaram que a participação dos alunos não foi muito satisfatória. Outro motivo seria o fato dos alunos apenas observarem o uso do software e não poderem manipulá-lo. No entanto, ainda assim, eles conseguiram entender e utilizar o assunto na resolução dos exercícios propostos posteriormente.

Então, pode-se considerar que o modo como se desenvolveu esse trabalho levou à abstração por meio da observação? Afinal, qual o papel da prática neste trabalho?

Embora esse e outros trabalhos, que buscam mostrar as influências da variação dos coeficientes das Funções nas respectivas representações gráficas, tenham contribuição, principalmente, para a notação funcional, seus autores parecem não reconhecer suas propostas de intervenção como incentivadoras do uso correto da simbologia matemática. Embora seus objetivos sejam outros, é preciso identificar que, mesmo implicitamente, estão contribuindo para o desenvolvimento da notação matemática.

RE 19: Progressão Aritmética utilizando o jogo Corrida ao CEM

Autores: Maurício Barbosa da Silva; Guilherme Francisco Ferreira

É um relato de uma aula ministrada no 2º ano do Ensino Médio com o auxílio do jogo *Corrida ao CEM*, projetado para ser jogado por duas pessoas. O objetivo da aula foi apresentar o conceito formal de Progressão Aritmética utilizando o citado jogo.

Para os autores, ao se usar o jogo como recurso ao ensino da Matemática, seu objetivo não deve se limitar em apenas promover diversão. Para eles, o jogo deve expressar aspectos-chave do tópico matemático que se deseja estudar.

Antes de dar início à aula, são apresentadas explicações sobre o jogo: a dupla recebe uma cartela numerada de um a cem, com o objetivo de percorrer todas as casas fazendo marcações, como um X ou O, com um limite P de jogadas por vez. Cada jogador identifica-se com uma marcação diferente e quem marcar a casa de número cem é o vencedor. O primeiro jogador escolhe um número de casas, entre um e P, e marca um círculo por onde passar, dando continuidade à sequência, enquanto o segundo jogador coloca um X em suas casas.

Durante a aula foram feitas duas rodadas do jogo, uma com P = 8 e outra com P = 6. Na primeira rodada, discutiu-se sobre a possibilidade de vitória precisa, concluindo-se que, se o jogador marcar a casa 82, conseguirá marcar a casa 91 e a 100, porque terá 9 casas para marcar a cada jogada.

Após isso, debateu-se sobre quais deveriam ser as casas anteriores a serem marcadas para se alcançar a vitória, obtendo a ordem das casas anteriores que levavam à casa de número cem. A sequência que ordena as casas marcadas para se atingir a vitória foi denominada "sequência vencedora". Os autores usaram o jogo com o intuito de apresentar o conceito de Progressão Aritmética porque a estratégia para vencer o jogo, que é encontrar a sequência vencedora, é uma progressão desse tipo.

Nas rodadas com P = 6 e P = 8, as sequências vencedoras foram, respectivamente:

a) 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, 58, 65, 72, 79, 86,93, 100;
b) 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100.

A partir dessas sequências, os alunos perceberam que elas continham algum tipo de padrão, mas não souberam dizer uma forma algébrica para representar os termos das sequências de forma generalizada. Então, foi necessário introduzir a notação usada para representar os termos $(a_{1,}a_2, a_3, ...)$ e a razão *r*, bem como a definição formal de Progressão Aritmética.

Particularmente, o jogo causou desconfiança, principalmente com o raciocínio realizado para obter a sequência vencedora, pois não foi vista garantia em ganhar o jogo marcando uma das casas daquela sequência. Por exemplo, foi possível ganhar marcando a casa 82 e não marcando a casa 91, quando P = 8.

Com isso, verificou-se que a sequência vencedora é uma estratégia válida, porém, é necessário pensar em valores fixos para as jogadas, garantindo, assim, a marcação fixa de valores específicos.

Embora os alunos conseguissem encontrar o raciocínio ideal para chegar à sequência vencedora e observassem a existência de um padrão, considera-se que a forma pela qual se conduziu a aula não foi suficiente para a obtenção de generalizações e a sua respectiva formalização.

Esse trabalho mostrou que fazer com que os alunos observem padrões não significa, necessariamente, que eles conseguirão usar formas algébricas para fazer representações generalizadas. É preciso utilizar jogos e outros materiais didáticos, de modo que os alunos sejam conduzidos à criação de representações formais daquilo que é observado.

RE 20: Projeto de trabalho utilizando Funções e animação computacional

Autora: Roselice Parmegiani

A proposta apresentada alia o uso do software livre Geonext à construção de cenários animados computacionalmente. O Geonext é um software que permite explorar construções geométricas e Funções.

A ideia utilizada nessa prática alia o conhecimento sobre Funções, movimentos dos gráficos e um pouco de habilidade computacional para animar objetos que serão inseridos sobre as linhas gráficas e deslocados computacionalmente. Como conhecimento sobre Funções entende-se o reconhecimento de seus tipos e respectivas leis de formação, assim como o traçado de seus gráficos.

Inicialmente, os alunos podem não ter noção específica das leis das Funções que correspondem aos seus propósitos, então, torna-se necessário reestudar as ideias básicas do conteúdo Funções, tanto na forma gráfica quanto algébrica. Além disso, a realização desse tipo de atividade contribui para a aprendizagem das propriedades gerais das Funções, das translações e das simetrias.

Entende-se que, nesse caso, o estudo de Funções deixa de ser superficial por dois motivos: primeiro, porque o estudo é feito com motivação diante do objetivo de dar vida a uma cena previamente escolhida; segundo, porque o nível de conhecimento sobre Funções pode ser elevado, dependendo do projeto almejado. Além de compreender as Funções básicas é necessário construir novas Funções a partir delas.

É um trabalho que exige, não apenas conhecimento teórico, mas, sobretudo, criatividade para pôr em prática uma ideia. Trata de aplicar o que se sabe e buscar saber mais para melhor realizar o seu projeto. Dessa forma, tem-se a teoria subsidiando a prática e esta incentivando o domínio da teoria, tudo ocorrendo num cenário de investigação, o que exemplifica muito bem a metodologia de um Laboratório de Ensino de Matemática.

Embora sua autora não tenha apontado em sua escrita, crê-se que a realização dessa atividade é um incentivo ao uso da linguagem simbólica, mesmo ela não estando explicitamente presente no resultado final de cada projeto (que é a criação de uma imagem), uma vez que não há criação de imagem sem a definição de várias leis de formação de Funções. Certamente, encontram-se interiorizadas nesse trabalho as possibilidades (e necessidades) de abstrair, generalizar e formalizar.

No aludido trabalho, a autora não indica o nível estudantil a que se destina a proposta, mas apresenta exemplos de projetos desenvolvidos por estudantes de graduação. Apesar disso, acredita-se que a aplicação da ideia é totalmente viável a estudantes do Ensino Médio, pois cumpre as necessidades e exigências desse nível de ensino.

RE 21: Quadro Trigonométrico: uma ferramenta para o estudo das Funções Trigonométricas

Autor: André Luiz Mognol Drabach

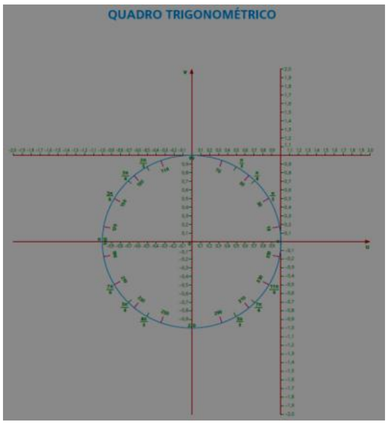
Nesse artigo o autor relata sobre o desenvolvimento de atividades aplicadas para alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola particular. O objetivo das atividades é dar significado à construção dos gráficos das Funções Trigonométricas, ou seja, a ideia é aprender durante a construção e não apenas com a observação de gráficos após sua construção.

Esse foi um dos motivos que incentivaram a elaboração e o uso do *Quadro Trigonométrico*. Tal material, além de fornecer a possibilidade de obtenção de grande quantidade de valores das razões trigonométricas (Seno, Cosseno e demais Funções) - sendo um passo facilitador para a construção de gráficos - foi utilizado como meio de auxiliar na compreensão dos principais conceitos de Funções Trigonométricas. Ele foi usado também no estudo das Funções Inversas, Cossecante, Secante e Cotangente.

Em resumo, o trabalho mostra que o *Quadro Trigonométrico* é um material manipulável importante, tanto na construção quanto na interpretação dos gráficos.

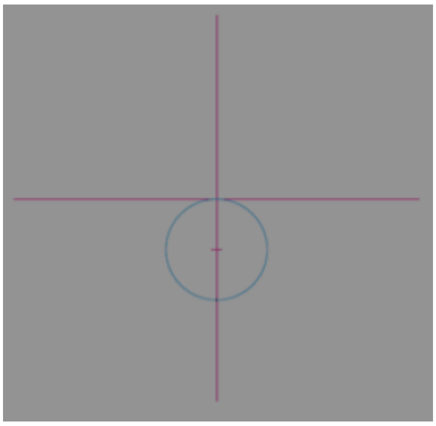
O trabalho foi realizado em três etapas, em uma das quais ocorreu a elaboração do material, conforme conta o professor e autor do artigo. Utilizando o laboratório de Matemática da escola, ele entregou uma prancheta de madeira (tipo Eucatex) com furo no centro, uma folha tamanho A4 com uma circunferência de diâmetro igual a 2 unidades e quatro retas paralelas, duas a duas, com escalas definidas (figura 13), e outra folha transparência com duas retas perpendiculares e uma circunferência de diâmetro 1 unidade (figura 14).

Figura 13 - Parte 1 da construção do Quadro Trigonométrico.



Fonte: RE 21.

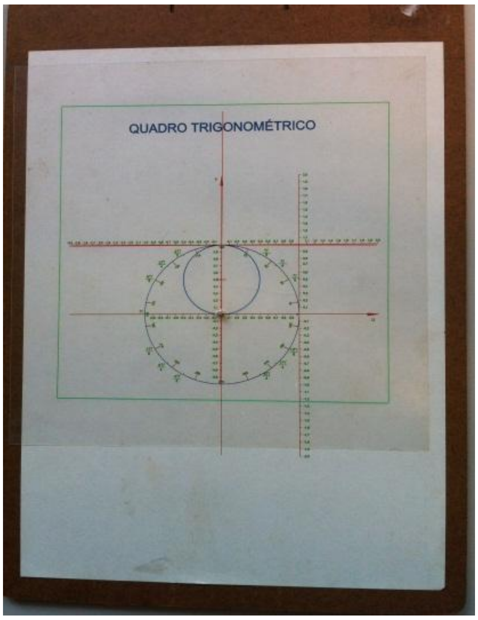
Figura 14 - Parte 2 da construção do Quadro Trigonométrico.



Fonte: RE 21.

A montagem do *Quadro Trigonométrico*, dispondo dos materiais fornecidos, é relativamente simples, pois basta o aluno colar a folha-base A4 na prancheta e, em seguida, fixar, com o percevejo, o ponto em destaque da folha transparência no centro da circunferência da folha A4. As figuras abaixo representam o esquema de como deveria ficar o *Quadro Trigonométrico* montado.

Figura 15 - Quadro Trigonométrico montado.



Fonte: RE 21.

Tendo feito a construção, todo o decorrer da aula deu-se por meio do material manipulável, explorando todo o seu potencial no estudo das Funções Trigonométricas.

O material deu significado à construção dos gráficos, pois, com o seu manuseio, os alunos identificaram as formas e movimentos dos gráficos, por exemplo, processos como crescimento e decrescimento da curva ficam evidentes com o uso do *Quadro Trigonométrico*. Essa observação e análise do comportamento de cada Função possibilita a compreensão dos elementos básicos das Funções Trigonométricas, como período, imagem, dentre outros. Por isso, a sua importância na interpretação de Funções Trigonométricas.

Esse trabalho tem um diferencial que chamou atenção (apesar de não estar ligado ao objeto desta pesquisa, a linguagem algébrica), pelo fato de ser um dos poucos trabalhos sobre o tema que conseguiram lidar com os elementos principais das Funções Trigonométricas sem centrar-se na representação algébrica.

Embora a etapa 2, onde foi inicializado o processo de construção do gráfico e estudo de elementos essenciais da Função Trigonométrica $y = a + bsenc$, indique que o trabalho tem algum enfoque algébrico, os elementos estudados não foram associados à forma algébrica. Os referidos elementos foram: crescimento e decrescimento, conjunto imagem, domínio, período, pontos de máximo e de mínimo e zeros da função.

Como resultado positivo do uso do *Quadro Trigonométrico*, o autor aponta que, com a realização das atividades, constatou-se que o citado quadro contribui para a superação de dificuldades sobre definições e conceitos referentes às Funções Trigonométricas. No entanto, vale também considerar o ambiente de investigação e pesquisa proporcionado pela atitude do professor no desenvolvimento das atividades, uma vez que a compreensão de conceitos não deve ser vista como item exclusivamente propiciado pelo material manipulável.

Mesmo não sendo uma proposta destinada ao trabalho com a linguagem algébrica presente na representação algébrica das Funções Trigonométricas, é um trabalho importante para o desenvolvimento de ideias essenciais da Álgebra. Além disso, é um bom exemplo de promoção de aliança entre teoria e prática decorrente do uso de um LEM.

RE 22: Reelaborando conceitos de matemática através de atividades computacionais

Autores: Lecir Dalabrida Dornelis; Claudia Piva; Patrícia Spilimbergo; Viviane Roncaglio.

As ações relatadas nesse artigo dizem respeito a um projeto de extensão que visa intervir na formação inicial ou continuada de professores, portanto, as reflexões apresentadas são voltadas ao desenvolvimento dos acadêmicos aplicadores da proposta, e não na aprendizagem daqueles que acolheram as ações do projeto. Contudo, considerando a natureza das ações, é interessante relatar uma das atividades que tratam do assunto Funções de 1º grau.

Foi uma oficina realizada no laboratório de informática de uma das escolas envolvidas no projeto, através do software Kmplot, que faz parte do sistema Linux Educacional. A intenção da oficina foi ampliar a compreensão do conceito de Função de 1º grau, sendo desenvolvida através de duas atividades: *Relacionando Variáveis* e *Analisando gráficos de Funções de 1º grau*.

A primeira atividade consiste em relacionar variáveis, completando uma tabela (com valores de x, y, e pontos coordenados), quando dado o valor de *x*, a partir do gráfico ou da representação algébrica. E também encontrar o valor de *y* quando os alunos escolhem valores quaisquer para x. A intenção principal dessa atividade é reconstruir o conceito de Função, porém, relacionar variáveis também é uma forma de compreender a representação algébrica. Observando-se a variação é possível verificar-se que a representação algébrica está diretamente ligada ao formato do gráfico.

A segunda atividade envolveu o conceito de coeficiente angular e linear da Função de 1º grau. A primeira parte foi destinada à determinação dos coeficientes angular e linear.

Para isso, foi introduzida na tabela a ser completada a fórmula $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, porém, no decorrer do trabalho não se faz nenhuma menção a ela, de modo que seu uso se resume à substituição de valores. Já quanto ao coeficiente b, não há menção.

Tanto essa atividade quanto a anterior são complementadas com perguntas dissertativas sobre a relação entre x e y e sobre as relações entre coeficientes e gráficos, no entanto, as etapas de completar tabelas não foram suficientes para que os alunos respondessem corretamente as perguntas feitas posteriormente. Por isso, os autores discutiam constantemente com os alunos no decorrer das atividades, muitas vezes, pedindo que fizessem a construção de outros gráficos com o uso do Kmplot. Essa discussão levou a um processo de investigação que possibilitou a abstração quanto ao significado do coeficiente linear.

Aliás, nesse trabalho o software foi usado basicamente para construir gráficos, dando maior ênfase à visualização. E, quanto a isso, os autores comentam que o uso do Kmplot possibilitou a visualização rápida do gráfico, o que auxiliou na análise da variação dos coeficientes no respectivo gráfico.

De modo geral, percebe-se que os autores tiveram duas preocupações ao realizar esse trabalho: dar significado aos coeficientes presentes na representação algébrica das Funções de 1º grau e inserir procedimentos algébricos para a determinação do coeficiente angular. Entretanto, parece que esses objetivos não foram bem articulados entre si e também com o uso do software Kmplot.

RE 23: Representações matemáticas nos processos de ensino e de aprendizagem de Função Logarítmica com uso do software Winplot

Autores: Dionara Freire de Almeida; Andrea Cristina Vieira

O trabalho discorre sobre representações matemáticas nos processos de ensino e de aprendizagem de Função Logarítmica com o uso do software Winplot e tem como objetivos: reconhecer Função Logarítmica nos registros de linguagem natural, algébrica, tabular e gráfica; compreender os procedimentos de tratamento nos diferentes registros e realizar o procedimento de conversão entre os diferentes registros.

É um trabalho baseado em crenças sobre o uso de novas tecnologias como ferramenta pedagógica e também em reflexões sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Os autores apontam uma aliança entre esses temas e essa interligação salienta a possibilidade e a necessidade de trabalhar com diferentes representações de um mesmo objeto, no caso, das Funções, sendo as principais representações a algébrica e a gráfica.

O software Winplot foi escolhido para esse trabalho por proporcionar articulação entre os registros algébrico e gráfico da Função Logarítmica. Os autores ainda justificam a escolha explicando que as interfaces do Winplot proporcionam a manipulação do objeto matemático Função de maneira diferente, possibilitam agir sobre o objeto num contexto abstrato. Propiciam ainda uma reunião dos recursos de Geometria, Álgebra e Cálculo. Contudo, foi utilizado principalmente para construção de gráficos. Foi útil para fazer a comparação com o gráfico da Função Exponencial.

No desenvolvimento das atividades no laboratório de informática, os alunos começaram explorando, primeiramente, o registro algébrico, depois realizaram a conversão da representação algébrica para a representação no registro gráfico. As atividades foram elaboradas apresentando os registros na forma de linguagem natural, algébrica, gráfica e tabular, pensando na possibilidade de conversão e tratamento entre os diferentes registros de representação.

Constataram os autores que os registros de representação matemática com o uso do software Winplot nas atividades desenvolvidas contribuíram significativamente para a compreensão do comportamento dos gráficos de Funções.

Apesar de haver curiosidade sobre mais informações da intervenção realizada, os autores não apresentam muitos detalhes sobre suas observações e também não apresentam as atividades conforme foram aplicadas. Por isso, não é possível saber como foi feita a discussão em torno da representação algébrica e quais foram os avanços dos alunos em relação a ela.

RE 24: Um olhar lançado ao objeto de aprendizagem "Matrizes"

Autores: Carine Girardi Manfio; Carmen Vieira Mathias

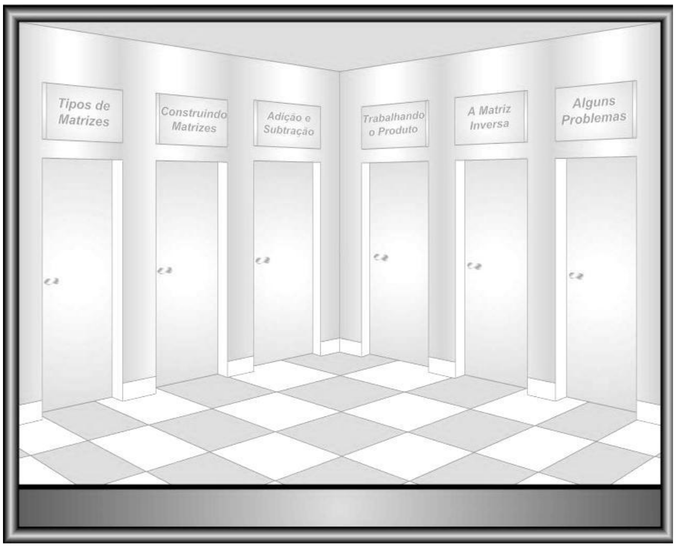
No artigo as autoras relatam a experiência de análise e aplicação do Objeto de Aprendizagem (OA) "Matrizes". A análise e aplicação do recurso digital iterativo foram realizadas por alunos de um curso de Especialização em Educação Matemática. Após a análise, foi elaborado um plano de aula que foi aplicado em uma turma de Educação Profissionalizante de Jovens e Adultos (Proeja) de um Instituto Federal.

O Objeto de Aprendizagem tem por objetivo trabalhar o conteúdo Matrizes de uma forma mais dinâmica e interessante. As autoras contam que ele é de acesso livre através da internet, no entanto, não foi possível encontrá-lo na web.

Tal objeto não tem como finalidade introduzir o conteúdo, uma vez que é composto de atividades que exigem conceitos matemáticos já estabelecidos. As atividades podem ser trabalhadas de forma progressiva, cuja ordem é sugerida pelo ambiente ou o professor pode escolher o campo a ser explorado.

É um recurso que pode ser classificado como tutorial. Funciona como um livro animado, conforme se observa na tela inicial do OA disponibilizado na figura a seguir.

Figura 16 - Tela inicial do OA “Matrizes”.



Fonte: RE 24.

Para navegar no ambiente, basta clicar na maçaneta das portas, escolher os tópicos que deseja e desenvolver as atividades.

Não há a apresentação do conteúdo formal e a interação entre aluno e computador não passa da leitura na tela e cliques no mouse para escolher a informação. Na realização das atividades, o aluno pode não estar refletindo sobre o conteúdo e, por cliques de sorte, efetuar o que o computador deseja.

O Objeto de Aprendizagem fecha-se em seu contexto de trabalhar apenas o conteúdo de Matrizes e algumas aplicações a problemas do dia a dia, porém, pode ser utilizado tanto no

Ensino Básico como no Ensino Superior. Ele incentiva muito pouco a autonomia do usuário, pois as informações são apenas aquelas contidas no enunciado, não havendo clareza quanto aos objetivos de cada seção de atividades.

Diante dessas observações foi elaborada uma proposta de aula para alunos do 2º ano do Ensino Médio, com vistas a: reforçar os conceitos de Matrizes; motivar os estudantes; mostrar a aplicabilidade de Matrizes em situações do cotidiano; desafiar os alunos a resolver problemas utilizando-se das Matrizes e suas propriedades e levar os alunos à compreensão e à reflexão do conteúdo trabalhado.

Durante a aplicação foram verificadas as falhas observadas durante a análise do objeto, contudo, foram relatados pontos positivos de seu uso, como a participação satisfatória da turma, a interação do grupo para resolver a atividade e a reflexão e compreensão dos conteúdos.

Como na análise do OA apresentada nesse relato não foram mencionados aspectos específicos quanto aos itens algébricos do conteúdo, buscaram-se informações em outras fontes para entender como os assuntos são abordados, já que não foi possível encontrar o OA na web.

Observando-se o relato, percebeu-se que, em alguns momentos, as atividades valorizam a memorização e não a compreensão, visando apenas à associação de nomes e ao desenvolvimento de cálculos. Contudo, tem importante destaque para reforçar conceitos e explorar características.

Lendo-se mais sobre o OA, notou-se também que ele ressalva a notação algébrica, usando a notação matricial algébrica em algumas atividades. Também, por vezes, usam-se incógnitas e formam-se Equações do Primeiro Grau em atividades que objetivam encontrar elementos desconhecidos.

Em alguns casos, também para encontrar elementos, utilizam-se Equações de Primeiro Grau, obtendo um sistema, que não é equacionado com incógnitas, adotando-se símbolos como círculo, triângulo e quadrado. Dessa forma, apesar de as autoras do relato não terem feito referência, o OA em questão pode ser associado ao estudo algébrico das Matrizes, além de contribuir para o desenvolvimento do sentido de símbolo.

RE 25: Uma diversificação no ensino de Função Exponencial

Autores: John Lenon Ribeiro; Rita de Cássia Amaral Vieira, Alzenir Virgínia Ferreira Soistak; Bianca Cristina Motyl; Marcela dos Santos.

Esse relato apresenta uma intervenção realizada no ensino da Função Exponencial através do uso da Modelagem Matemática no Ensino Médio de um colégio agrícola estadual. O estudo deu-se com o objetivo de introduzir noções de Função Exponencial na 1ª série.

Os alunos coletaram dados do crescimento do diâmetro da cabeça da alface, desde a sementeira até a colheita. Os dados foram trabalhados para a percepção da forma gráfica e posterior lei de formação da Função. A alface foi escolhida por ter um crescimento lento no início, enquanto está na sementeira, e rápido após ser transplantada para o canteiro.

Dando início à realização da Modelagem Matemática, a professora da turma realizou o estudo, inicialmente, junto aos demais autores desse trabalho, sem envolver, ainda, os alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Para o desenvolvimento da atividade foi medida a altura e o diâmetro em cinco estágios de desenvolvimento da alface. Em seguida, esses dados deram origem a dois gráficos, considerando, no eixo x, os valores correspondentes ao número de dias e, no eixo y, em uma altura e em outro o diâmetro, para ver qual seria a melhor aproximação a uma Função Exponencial.

Os pontos que mais se aproximaram à Função Exponencial foram os que representaram o diâmetro em relação ao número de dias, então, a partir daí, decide-se encontrar a Função geradora da mesma, para isso, recorrendo-se a dois métodos do Cálculo Numérico, o Método dos Mínimos Quadrados com ajuste de curva e o Método do Ajuste Parabólico. Constatou-se que o método mais adequado é o dos Mínimos Quadrados e encontrou-se a lei de formação da função que melhor representa o crescimento exponencial da cabeça da alface.

Terminada essa investigação por parte dos autores desse trabalho, inicia-se a tarefa com os alunos da 1ª série do Ensino Médio, aplicando-se a fase inicial da coleta de dados. Os alunos coletaram os dados, organizaram uma tabela e fizeram a representação gráfica em papel milimetrado. Observando o gráfico, confirmaram que o crescimento da alface aproxima-se de uma Função Exponencial. Para finalizar, eles fizeram o gráfico através do software Graphmatica, utilizando os dados coletados.

Enquanto desenvolviam suas atividades, os alunos receberam da professora a lei de formação da função, não sendo necessário realizar sua dedução. Sendo assim, considera-se que os alunos estiveram diante de uma situação de Modelagem Matemática, porém, não se dedicaram a encontrar o modelo que melhor descreve a situação.

Acredita-se que, por esse motivo, o trabalho não pôde dar enfoque algébrico ao estudo da Função Exponencial. Além disso, não se percebeu que importância teve a lei de formação para os estudantes de Ensino Médio nesse estudo, pois não se constatou o que os alunos fizeram com ela, como a utilizaram.

Vê-se que, nesse caso, a Modelagem Matemática foi inserida como forma de relacionar o conceito de Função Exponencial à área de estudo dos estudantes, o setor agrícola. Ao que parece, ela teve um papel mais significativo para aqueles que estiveram envolvidos no planejamento das atividades, pois puderam fazer a dedução do modelo matemático exponencial e estudar melhor suas características, o que não foi feito com a turma do Ensino Médio.

Apesar de envolver um modelo matemático descrito por uma função, não possui uma abordagem que possibilite o desenvolvimento de uma notação matemática, sendo quase exclusivamente dedicado à representação gráfica, ademais, o software utilizado teve a única função de plotar gráfico.

Considerou-se esse trabalho no âmbito do LEM porque ele traz um problema contextualizado como apoio ao estudo da Função Exponencial e porque, inicialmente, deveria inserir os alunos em um ambiente de investigação e pesquisa, por se tratar de uma Modelagem Matemática.

5.3.2 Quantificando e interpretando (parte 2: Relatos de Experiência)

Nos anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática encontram-se 509 Relatos de Experiência, dos quais vinte e cinco foram escolhidos para análise, representando aproximadamente 5% do total de Relatos.

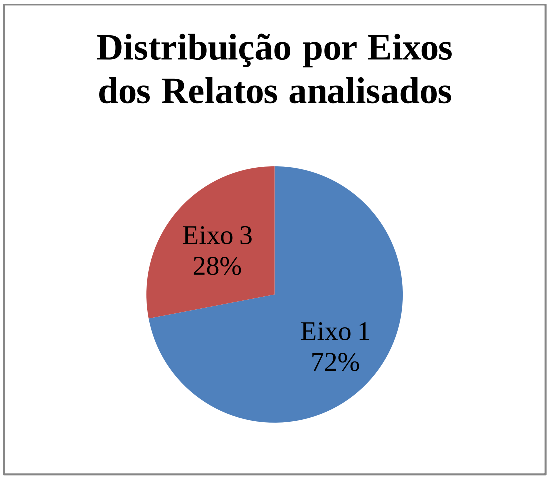
Figura 17 - Percentual de RE analisados.

Fonte: elaborada pela autora.

Assim como constatado pelos dados quantitativos referentes às Comunicações Científicas, aqui se encontra também uma porcentagem pequena diante do total. Apesar disso, é importante frisar que os 25 trabalhos analisados trazem contribuições significativas ao ensino da Álgebra Escolar e, portanto, merecem ser reconhecidos. Contudo, admite-se que essa baixa porcentagem serve de alerta, indicando a necessidade de aumentar o número de trabalhos que apresentam práticas de ensino para conteúdos algébricos do Ensino Médio.

Foram selecionados trabalhos de apenas dois eixos temáticos: *Práticas Escolares* e *Formação de Professores*, sendo 18 do Eixo *Práticas Escolares* (Eixo 1) e sete do Eixo *Formação de Professores* (Eixo 3), conforme dados indicados no gráfico abaixo:

Figura 18 - Percentual dos Eixos Temáticos dentre os RE analisados.



Fonte: elaborada pela autora.

Como ocorreu na análise das Comunicações Científicas, o Eixo 1 teve destaque, ressaltando que o ENEM tem como um de seus objetivos buscar e apresentar possibilidades para o trabalho em sala de aula. Além disso, as porcentagens relativas às *Práticas Escolares* aqui mencionadas, apesar de representarem um número pequeno de trabalhos (em comparação ao total de trabalhos divulgados nos Anais do evento), indicam que as possibilidades para o trabalho em sala de aula também pretendem promover a articulação da prática de ensino da Álgebra Escolar do Ensino Médio, o que é uma contribuição para o quadro de deficiências deste nível de ensino.

A seguir, a tabela mostra quais os conteúdos algébricos encontram-se nos Relatos de Experiência analisados.

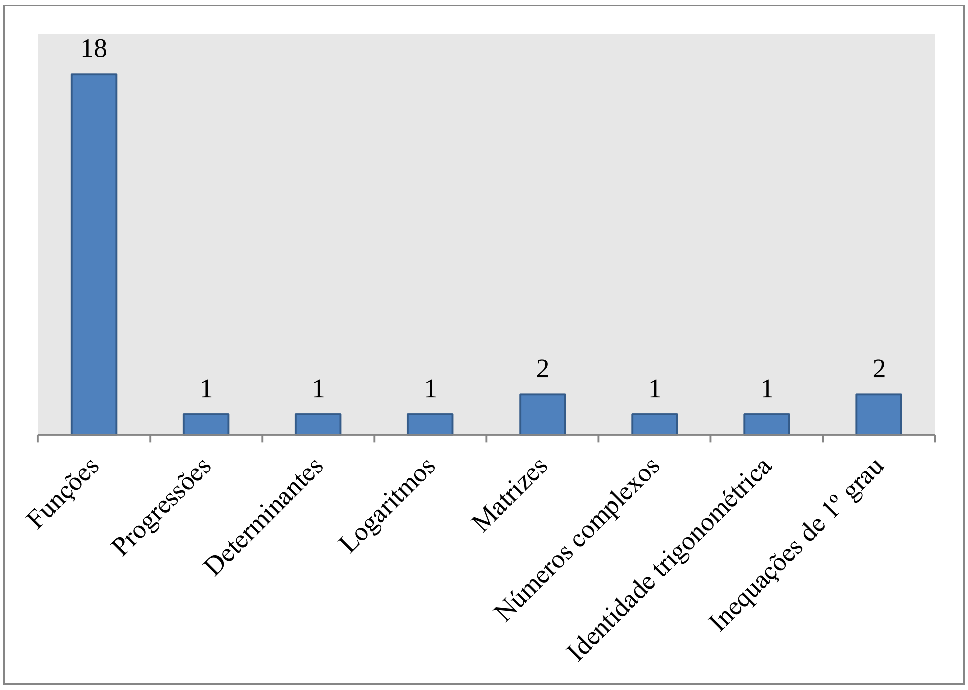
Tabela 5 - Conteúdos Algébricos abordados nos Relatos de Experiência escolhidos para análise

Tema	Quantidade	%
Funções	18	72%
Progressões	1	4%
Determinantes	1	4%
Logaritmos	1	4%
Matrizes	2	8%
Números Complexos	1	4%
Identidades trigonométricas	1	4%
Inequações de 1º grau	2	8%

Fonte: elaborada pela autora.

Já o gráfico a seguir mostra, claramente, como a distribuição do número de trabalhos por conteúdo é desigual.

Figura 19 - Distribuição dos conteúdos algébricos nos RE analisados.



Fonte: elaborada pela autora.

Conforme se verifica pelos dados, no que concerne aos conteúdos abordados a situação é, a princípio, semelhante ao que se constata quanto às Comunicações Científicas. As Funções ainda são os objetos de estudo de maior frequência, visivelmente mais exploradas que qualquer outro assunto, confirmando seu papel central, tanto nos trabalhos acadêmicos (quando o tema é Álgebra), quanto nas propostas de intervenção.

Uma das diferenças é que no grupo de Relatos de Experiência não foram encontrados trabalhos que tratam os temas Funções e Progressões de forma interligada, conforme verificado na análise do grupo anterior.

Outra diferença, ainda quanto aos conteúdos algébricos, foi o encontro de três trabalhos relacionados ao tema Matrizes, um sobre Números Complexos, e dois que citam o tema Inequações do 1º grau, o que não houve anteriormente.

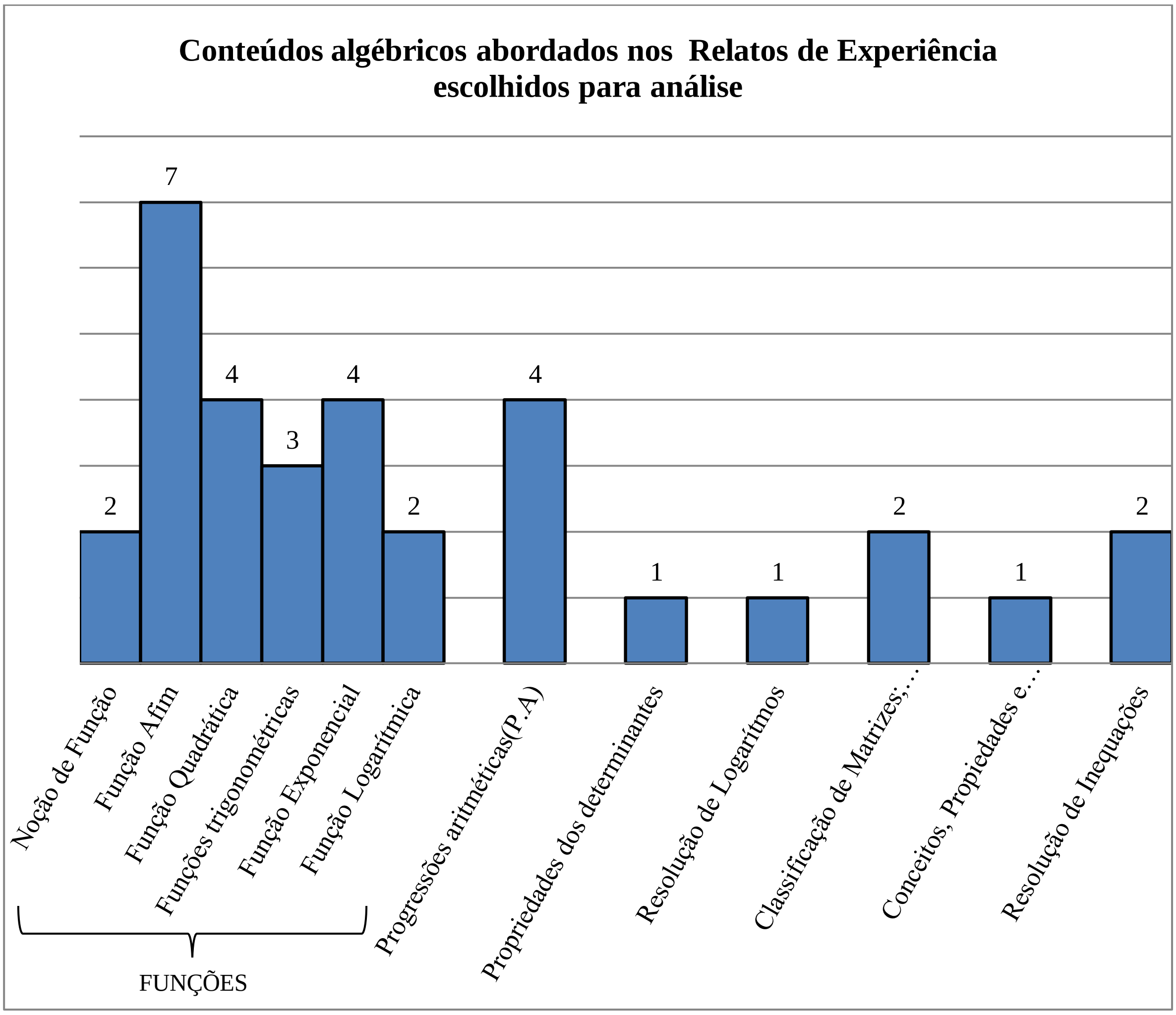
Um detalhamento desses conteúdos é apresentado no quadro a seguir:

Tabela 6 - Distribuição dos conteúdos algébricos abordados nos Relatos de Experiência do XI ENEM

Tema	**Conteúdo Específico**	**Quantidade**	**%**
Funções	Noção de Função	2	8%
	Função Afim	7	28%
	Função Quadrática	4	16%
	Funções trigonométricas	3	12%
	Função Exponencial	4	16%
	Função Logarítmica	2	8%
Total		**22**	
Progressões	Progressões Aritméticas(P.A)	4	16%
Determinantes	Propriedades dos determinantes	1	4%
Logaritmos	Resolução de logaritmos	1	4%
Matrizes	Classificação de Matrizes; Operações com Matrizes	2	8%
Números Complexos	Conceitos, propriedades e operações.	1	4%
Inequações de 1º grau	Resolução de inequações	2	8%

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 20 - Comparação entre os conteúdos específicos abordados nos RE analisados.



Fonte: elaborada pela autora.

Através do quadro anterior e do gráfico acima pode-se verificar mais algumas diferenças, como, por exemplo, no grupo Funções, a maior ênfase não se deu à Função Exponencial, mas o que ganhou destaque foi a Função de 1º grau, frequente em 28% dos trabalhos. Em seguida, temos as Funções Quadrática e Exponencial, ambas atingindo 16% dos trabalhos. Aqui, também foi frequente a abordagem da Função Exponencial através da exploração da Torre de Hanói.

Talvez a porcentagem de trabalhos relativos à Função Exponencial tenha diminuído porque os temas Funções e Progressões não apareceram de forma interligada. Também, como o assunto Progressão Geométrica não foi tratado em nenhum relato, a diminuição da abordagem da Função Exponencial já era esperada.

Cabe ressaltar que o único relato que abordou o assunto Progressão Aritmética não fez nenhuma referência à Função Afim, pois, ao que parece, sua única intenção foi reconhecer uma Progressão Aritmética em uma dada situação (aquela criada pelo jogo Corrida ao CEM). Aliás, esse relato aborda o tema de forma superficial, centrando-se no conceito de Progressão Aritmética, não fazendo uma abordagem algébrica satisfatória.

Do mesmo modo, constata-se no grupo dos Relatos de Experiência que, embora as Funções sejam o assunto mais frequente, nem todos os tipos de Funções são abordados, além de nem sempre indicar o estudo aprofundado de alguns tipos delas, de modo a contemplar os objetivos de seu ensino, no Ensino Médio, como ocorre novamente com a abordagem da Função Logarítmica.

Além de abordagens superficiais e o não aparecimento do conteúdo Progressão Geométrica, os temas Sistemas Lineares e Binômio de Newton também não são citados. Contudo, observa-se que, no referido grupo de Relatos, outros assuntos algébricos surgem quando o Laboratório de Ensino de Matemática é tido como alternativa metodológica destinada a rever conteúdos e superar dificuldades decorrentes do Ensino Fundamental. Nesse contexto, são citadas as Equações de 1º grau, os Polinômios, as Expressões algébricas e os Produtos Notáveis.

Outra surpresa foi o Relato número 21 (Quadro trigonométrico: uma ferramenta para o estudo das Funções Trigonométricas), que trata de Funções Trigonométricas e não se restringe às funções elementares (seno, cosseno e tangente), abordando também as Funções Inversas, apesar de as *Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio* indicarem a desnecessidade de seu ensino.

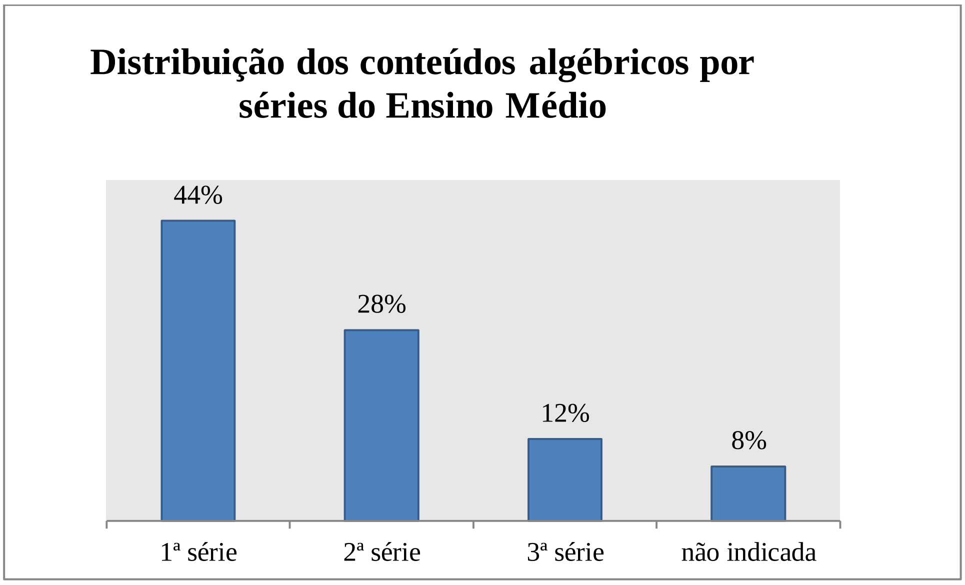
Novamente, como o tema principal dos Relatos de Experiência são as Funções, a série do Ensino Médio que mais concentra trabalhos algébricos é o 1º ano, conforme é destacado nas próximas ilustrações:

Tabela 7 – Número de RE distribuídos por série do Ensino Médio

Série	**Quantidade de trabalhos encontrados**
1ª série EM	11
2ª série EM	7
3ª série EM	3
Não indicada	2
Total	**23**

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 21 - Comparação entre as séries contempladas pelos RE analisados.



Fonte: elaborada pela autora.

Como se pode observar, as porcentagens apresentadas não atingem 100%. Tal fato decorre de haver três trabalhos (12%) que relatam intervenções aplicadas a estudantes da graduação, tratando de conteúdos do Ensino Médio conforme as orientações para este nível de ensino.

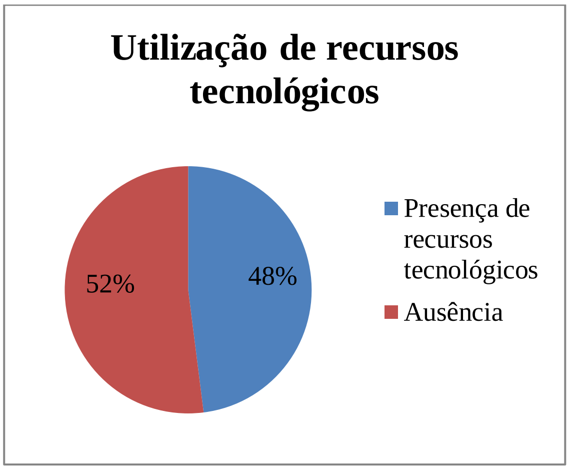
Assim como constatado anteriormente, os trabalhos que não indicam a série abordam o tema Funções e parecem ser destinados à 1ª série, devido à abordagem realizada.

Embora os dados analisados nesta pesquisa analisados apontem muitas semelhanças entre os grupos Relatos de Experiência e Comunicações Científicas, percebem-se algumas diferenças, como o aumento considerável da quantidade de trabalhos destinados a conteúdos da 2ª série do Ensino Médio em comparação ao grupo de Comunicações Científicas analisadas.

Interessante notar que isso ocorre apesar de o número de trabalhos destinados às Progressões (assunto atribuído à 2ª série pelo currículo de Matemática) ter reduzido drasticamente. Acredita-se que os motivos pelos quais há o aumento de trabalhos da 2ª série são o surgimento do tema Matrizes, não abordado nas Comunicações Científicas e, o fato do estudo de Funções não ser centrado na 1ª série.

Quanto à presença da tecnologia no ambiente escolar, verifica-se uma diferença quanto ao grupo das Comunicações Científicas. Enquanto no primeiro grupo a presença da tecnologia abrangeu 81% dos trabalhos, no grupo de Relatos de Experiência esse número diminuiu consideravelmente, sem chegar a atingir metade dos trabalhos. Dos 25 Relatos, encontramos o uso dos recursos tecnológicos em 12 deles, o que corresponde a 48%.

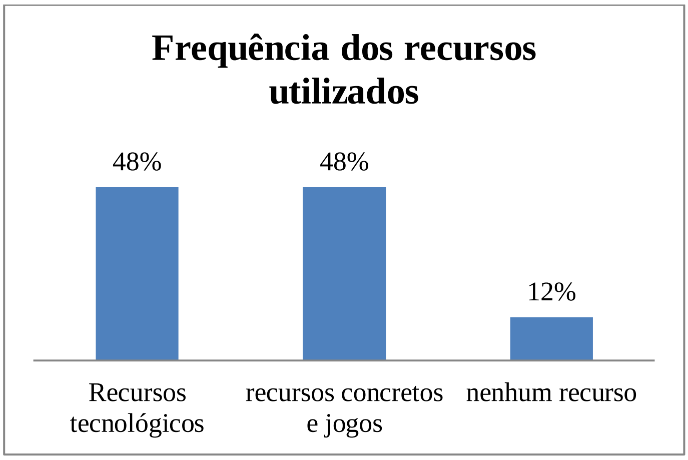
Figura 22 - Presença de recursos tecnológicos nos RE.



Fonte: elaborada pela autora.

Dos 52% de trabalhos que não recorrem à tecnologia, a maior parte deles (48% do total) têm sua metodologia de ensino centrada em jogos e em materiais concretos, conforme ilustra o próximo gráfico.

Figura 23 - Percentual dos tipos de recursos utilizados nos RE.



Fonte: elaborada pela autora.

Conforme se verifica, houve aumento do número de trabalhos cuja metodologia está pautada no uso de jogos, porém, é necessário observar como os jogos estão inseridos nas propostas. Por exemplo, o jogo *Bingo de Matrizes*, descrito no Relato 2 (Diferentes ferramentas para o ensino de Matrizes), está muito próximo da metodologia tradicional, pois a ação do sujeito não está centrada no ato de jogar, de buscar estratégias para vencer o jogo, estimulando o raciocínio lógico, mas sim na resolução de exercícios. As autoras dizem que têm a intenção de explorar conceitos, mas se constata. claramente, o objetivo de inserir exercícios.

Já no relato 11 (Baralho Trigonométrico e a escrita na aprendizagem da Matemática), o jogo *Baralho Trigonométrico* é inserido visando à memorização, indicando que esta, mesmo sendo um item da criticada metodologia tradicional, pode ser trabalhada de forma significativa em sala de aula com o auxílio de jogos.

Então, há duas considerações a fazer: por um lado, pode-se pensar que a maneira como os jogos estão sendo usados mostra que, tanto a resolução de exercícios quanto a memorização, como ainda o estudo de propriedades e procedimentos, podem ser favorecidos, recebendo um tratamento menos técnico e cansativo quando contam com o auxílio do LEM enquanto alternativa metodológica.

Por outro lado, é possível achar que, dependendo da forma de utilização dos jogos, corre-se o risco de deixar de lado todo o seu potencial pedagógico, repetindo o mesmo tratamento técnico e cansativo. Ou seja, a aula com o apoio de um jogo pode não ser muito diferente de uma aula na metodologia tradicional de ensino.

O quadro a seguir tem a intenção de apresentar um resumo dos tipos e materiais usados nas propostas apresentadas nos Relatos de Experiência.

Tabela 8 - Detalhamento dos tipos de recursos utilizados nos Relatos

Materiais concretos		
Torre de Hanói	3	12%
Quadro trigonométrico	1	4%
Algeplan	1	4%
Total	**5**	
Jogos		
Corrida ao CEM	1	4%
Bingo de Matrizes	1	4%
Baralho trigonométrico	1	4%
Recordando Funções de Maneira Divertida	1	4%

Xadrez	1	4%
Corrida das potências	1	4%
Desafio das potências	1	4%
Total	**7**	
Softwares		
GeoGebra	6	24%
Winplot	1	4%
Geonext	1	4%
Kmplot	1	4%
Total	**12**	
Outros recursos tecnológicos		
Calculadora gráfica	1	4%
Objeto de aprendizagem (OA)	1	4%
Aplicativo online	2	4%
Total	**4**	

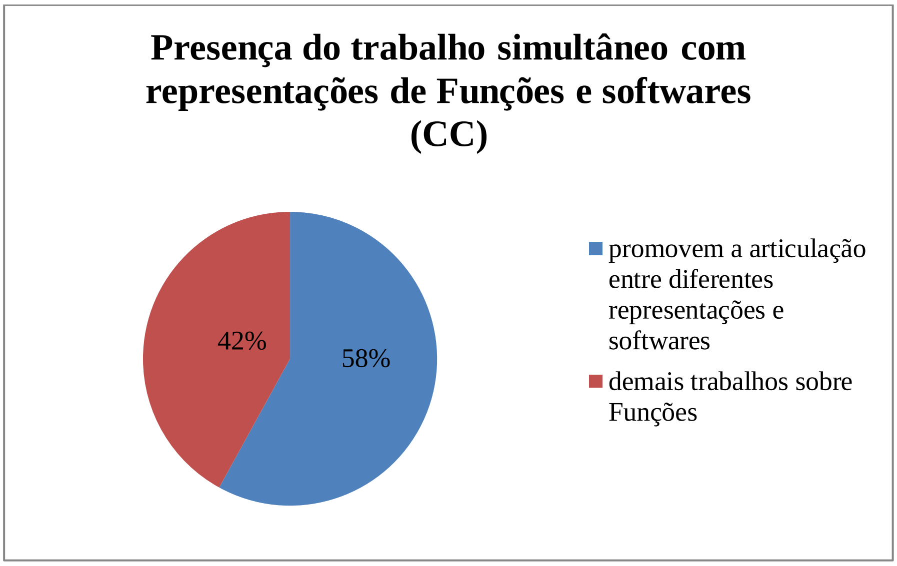
Fonte: elaborada pela autora.

Nota-se que a lista de jogos apresenta vários nomes, no entanto, apesar da significativa quantidade, não se pode concluir, com certeza absoluta, que todos eles trouxeram contribuições significativas ao estudo de conteúdos algébricos do Ensino Médio, uma vez que não é fácil (pelas narrativas dos autores) encontrar vínculo entre o uso de um jogo e um conteúdo algébrico. Um exemplo dessa constatação é o relato 19 (Progressão Aritmética utilizando o jogo Corrida ao Cem), que traz o conteúdo Progressão Aritmética e o jogo Corrida ao CEM, porém, sem muita ligação.

Quanto ao uso de recursos tecnológicos, assim como ocorreu nas Comunicações Científicas, os softwares matemáticos estão presentes nos trabalhos destinados ao estudo de Funções, sendo inseridos para agilizar a plotagem de gráficos e promover a articulação entre as representações gráfica e algébrica.

Dos 18 Relatos de Experiência que tratam de Funções (do total de 25), 8 deles, correspondendo a 32% do total, realizaram o trabalho simultâneo com as representações algébrica e gráfica, por meio de softwares, como ilustrado a seguir:

Figura 24 - Softwares e diferentes representações de Funções (RE).



Fonte: elaborada pela autora.

No entanto, vale observar, tanto no grupo de Relatos de Experiência quanto no grupo de Comunicações Científicas, que a articulação entre as representações não é restrita aos casos onde os softwares são inseridos, sendo verificada em outros trabalhos sobre Funções, não subsidiados pela tecnologia, mas permeados por outras teorias, como, por exemplo, a Modelagem Matemática e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Aliás, no caso dos Relatos, a teoria de Duval aparece apenas em dois trabalhos, um com a utilização do software Winplot e outro apoiado também na Modelagem Matemática. Assim como constatado anteriormente, esses trabalhos focam as conversões entre os registros algébrico e gráfico e entre os registros verbal e algébrico, porém, não surge a conversão entre o registro gráfico e algébrico.

É ainda interessante relatar que o registro escrito é, frequentemente, citado nos Relatos de Experiência, independentemente de o trabalho basear-se na Teoria das Representações de Duval, evidenciando o reconhecimento de que ele pode contribuir para o domínio da linguagem algébrica mesmo quando baseado apenas na linguagem verbal.

Nota-se em alguns trabalhos a preocupação com o registro e, consequentemente, com a formalização do que foi apreendido pelos alunos.

Outra constatação observável no gráfico da Figura 23 foi a existência de três trabalhos, dentre os 25, que não utilizam recurso tecnológico nem material concreto (Relato 3: Excursão de férias: uma investigação focada em Funções de 1º grau; Relato 8: Modelagem

Matemática no ensino de Funções: analisando a teoria dos Registros de Representação Semiótica; Relato 25: Uma diversificação no ensino de Função Exponencial).

Essas propostas são baseadas na Investigação e na Modelagem Matemática, porém, tais tendências não são exclusivas dos trabalhos que não se apoiam em materiais concretos, jogos e tecnologia. Em Educação Matemática, as aludidas tendências estão presentes também em trabalhos cuja metodologia principal é a utilização de jogos.

5.3.3 Conclusões gerais sobre os Relatos de Experiência selecionados na pesquisa

Em referência aos Relatos de Experiência, as observações feitas permitem concluir que:

a) A amostra selecionada, composta por 5% do total de Relatos contidos nos Anais do evento, é maior em relação à amostra de Comunicações Científicas, indicando que no grupo Relatos de Experiência destaca-se o objetivo de apresentar possibilidades para o trabalho em sala de aula, nesse caso, em relação à Álgebra do Ensino Médio;
b) Assim como no grupo das Comunicações Científicas, na amostra de Relatos de Experiência as Funções também são visivelmente mais exploradas do que outros assuntos algébricos;
c) Os temas Funções e Progressões não se apresentaram de forma interligada, conforme ocorreu nas Comunicações Científicas;
d) O tipo de Função mais frequente nos Relatos foi a Função Afim, atingindo 28% da amostra, diferentemente do ocorrido nas Comunicações Científicas;
e) Quanto ao tema Progressões, apenas a Progressão Aritmética foi abordada;
f) A abordagem da Função Exponencial também esteve associada à exploração da Torre de Hanói;
g) Sistemas Lineares e Binômio de Newton também não foram mencionados nos Relatos;
h) Dois trabalhos abordaram o tema Matrizes e um tratou dos Números Complexos;
i) A abordagem de Funções Trigonométricas não foi restrita às Funções Elementares (Seno, Cosseno e Tangente), estudando também as Funções Inversas;
j) Na amostra de Relatos de Experiência, o LEM foi destinado à revisão de conteúdos e superação de dificuldades decorrentes do Ensino Fundamental, por isso,

os temas Equações de 1º grau, Polinômios, Expressões Algébricas e Produtos Notáveis foram alvo de estudo;

k) Também houve propostas interventivas referentes a conteúdos do Ensino Médio aplicadas a estudantes universitários;

l) Os recursos tecnológicos estiveram presentes em 48% dos trabalhos, assim como os recursos concretos e jogos. O uso dos recursos concretos e dos jogos foi, consideravelmente, mais frequente na amostra de Relatos de Experiência do que na amostra de Comunicações Científicas;

m) Consequentemente, o estudo de Funções esteve menos atrelado ao uso de softwares, em comparação com o grupo das Comunicações Científicas;

n) Os jogos estiveram presentes em 28% da amostra. Em alguns casos, o uso do jogo esteve associado ao estudo de propriedades e procedimentos algébricos e à memorização;

o) Jogos e conteúdos algébricos não se mostraram visivelmente vinculados;

p) Quanto ao uso de softwares, as conclusões são semelhantes àquelas citadas quanto às Comunicações Científicas. Eles estiveram associados, sobretudo, ao estudo das Funções, sendo inseridos pelos mesmos motivos anteriormente mencionados. O GeoGebra foi o software mais usado;

q) O reconhecimento da contribuição da linguagem verbal para o registro em linguagem algébrica foi mais frequente do que no grupo anterior;

r) Nos Relatos de Experiência, o registro escrito ganhou destaque devido ao incentivo dado à formalização;

s) As teorias mencionadas nos Relatos são as mesmas das Comunicações Científicas (Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Teoria dos Registros de Representação Semiótica). Portanto, as conclusões são semelhantes às anteriores;

t) A Modelagem Matemática foi uma teoria importante para o desenvolvimento da linguagem algébrica através de situações contextualizadas.

5.4 Algumas interseções entre os resultados encontrados nas Comunicações Científicas e Relatos de Experiência selecionados na pesquisa, a Álgebra e o LEM

Nessa Seção busca-se relacionar os principais resultados encontrados nas análises das Comunicações Científicas e Relatos de Experiência às considerações lançadas anteriormente acerca da Álgebra, suas concepções e recomendações à sua instrução no Ensino Médio e acerca do Laboratório de Ensino de Matemática.

O primeiro resultado que chamou atenção foi a frequência com que o tema Funções esteve presente nas duas amostras analisadas, atingindo 75% na amostra de Comunicações Científicas (Tabela 1, p. 118) e 72% na amostra de Relatos de Experiência (Tabela 5, p. 172). Acredita-se que esse resultado está relacionado ao fato de as Funções, atualmente, ocuparem lugar de destaque nos documentos oficiais curriculares do Ensino Médio, conforme mencionado e discutido nas seções 2.2.1(p.30), 2.2.2 (p.36) e 2.2.3(p.45).

Nos dois documentos encontra-se uma quantidade significativa de orientações em relação ao estudo de Funções e o CBC justifica esse fato afirmando que o conceito de Função é um dos temas centrais e unificadores da Matemática (citado na p. 36 do documento e na p. 38 deste trabalho).

Nas seções 2.2.1 e 2.2.2 observa-se que, com o papel de destaque dado às Funções, esperava-se que os documentos curriculares indicassem uma abordagem das Funções de forma mais aprofundada, porém, não foi o que se encontrou, conforme ilustrado na p. 31.

Constatou-se algo bem semelhante ao analisar-se as amostras de Comunicações Científicas e Relatos de Experiência. Como mencionado nas páginas 122 e 176, a abordagem da Função Logarítmica deu-se de forma bastante tímida e, até mesmo, pouco satisfatória diante as necessidades do Ensino Médio.

Ainda nas seções 2.2.1 e 2.2.2 indicou-se que fica implícita, nos documentos, a ideia de que é suficiente trabalhar com as Funções Afim, Polinomial (especialmente a quadrática), Exponencial e Trigonométrica.

Os dados da tabela 2 (p. 120) e também os da tabela 6 (p. 174) mostram que as amostras de Comunicações Científicas e Relatos de Experiência levam à mesma consideração, pois citam quase os mesmos tipos de Função, acrescentando somente a Função Logarítmica, que, como foi dito, é apresentada de forma pouco abrangente. Talvez isso tenha acontecido porque as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio não recomendam um estudo aprofundado dos Logaritmos (citado na p. 75 do documento e na p. 31 deste trabalho).

Contudo, ao analisar-se o CBC percebe-se que este difere, em parte, das Orientações Curriculares para o Ensino Médio e uma dessas diferenças está na atenção dada ao estudo da Função Logarítmica (ver p. 43 do CBC). O CBC coloca como uma das habilidades a serem desenvolvidas no estudo desse conteúdo o reconhecimento da Função Logarítmica como a inversa da Função Exponencial e este foi um dos objetivos encontrados na Comunicação Científica 10, intitulada “Funções Exponenciais e Logarítmicas: um estudo por meio de uma sequência didática”.

Ainda sobre Função Logarítmica e Logaritmos, é importante destacar a Comunicação Científica 5, intitulada “A régua de cálculo: uma aplicação das propriedades dos Logaritmos”, pois ela mostra que, apesar do estudo abrangente dos Logaritmos não ser recomendado pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, há propostas de ensino para este nível, levando em consideração, tanto a necessidade do trabalho com as propriedades dos Logaritmos, quanto seu conceito.

Destaca-se essa Comunicação Científica também porque o seu autor faz refletir sobre o uso do material concreto nas aulas sobre temas algébricos. Ao mostrar a possibilidade de abordar as propriedades dos Logaritmos de forma concreta, ele remete a importantes considerações feitas na seção 4.2 (p. 85) deste trabalho, sobretudo, indo ao encontro do que dizem Matos e Serrazina (1996, apud PASSOS, 2009, p. 82), quando não defendem o uso do material concreto apenas em momentos destinados à introdução de novos conceitos, não devendo ser deixados de lado quando chegamos aos cálculos.

Aliás, percebe-se que as propostas analisadas não tratam com frequência do estudo de propriedades e de procedimentos algébricos, mas isso não ocorre apenas por não “enxergar-se” relação entre materiais didáticos e cálculos. Acredita-se que isso acontece também porque as Orientações Curriculares nacionais para o Ensino Médio preocupam-se em não centrar o estudo de Matemática em regras sem explicação, exercícios repetitivos e aplicação direta de fórmulas, conforme citou-se na seção 2.2.1.

Ainda em relação a abordagens de assuntos algébricos, uma interessante aproximação entre os resultados da análise das Comunicações Científicas e as recomendações ao ensino de Álgebra refere-se ao assunto Progressões.

Conforme citado em seções anteriores, no grupo das Comunicações Científicas há uma significativa quantidade de trabalhos que abordaram as Funções e as Progressões de forma interligada, geralmente tomando as Progressões como casos particulares de Funções.

A abordagem vai ao encontro do que o CBC indica, pois o documento menciona como uma das habilidades no estudo da Função de Primeiro Grau “reconhecer uma progressão aritmética como uma função do primeiro grau definida no conjunto dos números inteiros positivos” (p. 41 deste trabalho) e, como uma das habilidades no estudo da Função Exponencial, o referido documento mostra ser necessário “reconhecer uma progressão geométrica como uma função da forma $y = k.a^x$, definida no conjunto dos números inteiros positivos" (p. 42 deste trabalho).

Considera-se que essa interligação mostra que, tanto nas recomendações para o ensino de Álgebra quanto nos trabalhos analisados, estudar Funções não exclui o estudo de outros temas algébricos. Pelo contrário, estudar Funções implica estudar outros conteúdos, como, por exemplo, a Matemática Financeira, pois esta pode ser relacionada ao estudo da Progressão Geométrica, como pode ser exemplificado pela Comunicação Científica 6 (Análise da etapa tarefa de uma webQuest de Álgebra, que caminho seguir?) .

De igual modo, alguns assuntos algébricos são tidos como pré-requisitos, como as potências e as equações, conforme exemplificado pelo Relato de Experiência 6 (Prática docente e jogos matemáticos: uma experiência do PIBID no Colégio Estadual Djenal Tavares Queiroz).

Como se pode notar, as abordagens e, até mesmo, a importância dada aos conteúdos algébricos nas Comunicações Científicas e nos Relatos de Experiência analisados estão bem próximas às considerações dos documentos curriculares analisados no Capítulo 2.

Verifica-se que os conteúdos tratados com pouca frequência nas amostras de Comunicações Científicas e Relatos de Experiência, como as Matrizes (presente apenas nos Relatos), os Determinantes e os Números Complexos (presente apenas nos Relatos) também não são temas evidenciados nos documentos curriculares. Aliás, as Orientações Curriculares nacionais para o Ensino Médio desconsideram a necessidade do estudo dos Determinantes, conforme mostramos na p. 35 desta pesquisa.

Considera-se aceitável a ideia de dar destaque às Funções no estudo da Álgebra do Ensino Médio, por ser um tema unificador do currículo e por ser um incentivo ao estudo de um tema que, conforme citado por Ribeiro e Cury (2015), tem apresentado problemas de aprendizagem por ser compreendido, simplesmente, como um amontoado de símbolos e de regras.

O que incomoda é a maneira ríspida usada ao se remeter a alguns assuntos algébricos, como os Determinantes e a Regra de Cramer, e, em alguns momentos, até mesmo às Funções, como a recomendação de que o estudo das demais Funções Trigonométricas (a não ser seno, cosseno e tangente) pode e deve ser colocado em segundo plano (p. 74 do documento e p. 31 desta pesquisa). Talvez por isso encontra-se apenas um trabalho, o Relato 21 (Quadro trigonométrico: uma ferramenta para o estudo das Funções Trigonométricas) que aborda o assunto Funções Trigonométricas, fazendo um estudo também das Funções Inversas.

Quanto ao modo de trabalhar com os assuntos algébricos, o que ganhou destaque no grupo das Comunicações foi o uso de recursos tecnológicos, presente em 81% da amostra, conforme Figura 9, p. 125. Como apresentado em discussão na p. 127, os softwares estiveram presentes em grande parte dos trabalhos que versam sobre Funções. A Figura 11 (p. 128) ilustra que a maior parte dos trabalhos sobre Funções (58,3%) utilizou esses softwares para o trabalho simultâneo das representações algébrica e gráfica. Essas informações são compatíveis com as recomendações das Orientações Curriculares, pois, como apontado nas páginas 25 e 34, esse documento indica a necessidade do trabalho simultâneo com as diferentes representações.

Além disso, as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, como mostramos na p. 34 da seção 2.2.1, relacionam o uso de softwares à possibilidade de manipular objetos na tela do computador, indicando a necessidade de compreensão dos significados dos coeficientes presentes em expressões gerais de algumas Funções a partir da análise dos gráficos que são obtidos por meio da variação dos valores dos coeficientes.

Identificou-se esse modo de utilizar os softwares em vários trabalhos analisados nas duas amostras, citando-se, como exemplos: Relato 10 (Análise de conteúdo: uma proposta para variação do conceito de Função Seno utilizando o software GeoGebra); Relato 13 (Função Quadrática por meio da perspectiva metodológica de tecnologias da informação e comunicação); Comunicação Científica 2 (Funções Trigonométricas em videoaulas: possível contribuição para a aprendizagem) e Comunicação Científica 8 (Explorando a parábola da Função Polinomial do 2º grau em um ambiente informático).

Também quanto ao modo de abordar temas algébricos em sala de aula, existe outra aproximação interessante entre os resultados encontrados nas amostras analisadas e os documentos curriculares. Tanto as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio quanto o CBC destacam a importância da interpretação geométrica no estudo de alguns conteúdos algébricos (discussões nas páginas 33 e 39), defendendo, assim, a articulação entre Geometria e Álgebra.

As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (p. 35) e o CBC (p. 43) enfatizam essa articulação no estudo dos Sistemas Lineares, relacionando o estudo de Equações às retas. Esse modo de estudar os Sistemas Lineares e as Equações das retas esteve presente em dois trabalhos mencionados nesta pesquisa: o Relato 18 (O uso do GeoGebra como recurso didático no ensino de "Equações da reta") e uma Comunicação Científica que encontra-se no Anexo A desta pesquisa, intitulada Sistemas Lineares: proposta de uma entrada experimental desenvolvida em ambiente computacional.

Ainda em referência a esse assunto, ressalte-se que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, ao indicarem que cabe ao professor trabalhar, tanto o entendimento de figuras geométricas (via Equações) quanto o entendimento das Equações (via figuras geométricas (p. 77 do documento e p. 35 deste trabalho)), vão ao encontro da discussão feita em relação à ligação entre Geometria e Álgebra, levando em conta o LEM como alternativa metodológica, na seção 4.1 do Capítulo 4 (p. 83 e 84).

O material didático citado como exemplo nessa seção, o Algeplan, esteve presente no Relato 9 (Alunos do Ensino Médio utilizam o Laboratório de Ensino de Matemática para rever os conteúdos do Ensino Fundamental: relato de uma experiência), com o objetivo de trabalhar com representações algébricas por meio do cálculo de áreas de quadrados e retângulos. Assim, a abordagem realizada nesse Relato é um exemplo de que os pressupostos discutidos no Capítulo 4 estão presentes nos trabalhos selecionados.

Ilustrando tal fato, tem-se mais alguns pontos de encontro mais facilmente perceptíveis, como a presença de 19% de propostas de ensino de Álgebra pertencentes ao Eixo Temático *Formação de Professores* (Eixo 3) no grupo das Comunicações Científicas (Figura 4, p. 117) e 28% pertencentes ao mesmo Eixo Temático no grupo dos Relatos de Experiência (Figura 18, p. 172). Esses dados remetem às considerações feitas no Capítulo 4, p. 81, quanto ao papel do LEM enquanto espaço de formação.

Nas p. 81 e 82 do referido capítulo, chega-se à constatação de que discutir o LEM na perspectiva da formação de professores é importante porque ele também pode favorecer a busca de alternativas de ensino que possam contribuir ao trabalho com o currículo do Ensino Básico.

Esse modo de pensar é exatamente o que se encontra no Relato 4 (Experiências de formação para o uso do GeoGebra nas aulas de Matemática em escolas públicas do Ensino Médio), em que os seus autores, além de terem o objetivo de contribuir para a superação de dificuldades quanto à Função Afim, também visavam ao desenvolvimento de ações que contribuam para a formação inicial do professor para atuar no Ensino Médio.

Dessa forma, pode-se dizer que, nas propostas encontradas, o LEM é compreendido como alternativa metodológica voltado ao Ensino Básico, como também é entendido como espaço de formação, estando ambas as concepções interligadas.

Assim como o Relato 4, outros trabalhos, como, por exemplo, a Comunicação Científica 8 (Explorando a parábola da Função Polinomial do 2º grau em um ambiente informático), expõe, como justificativa para a escolha da abordagem realizada, as dificuldades dos alunos quanto aos assuntos algébricos. Lendo-se os trabalhos, percebe-se que os problemas relatados quanto à Álgebra pelos autores das propostas são condizentes com a discussão realizada na Seção 2.3 (p. 49).

O fato de se ter encontrado trabalhos nos quais as propostas de ensino na perspectiva do LEM são lançadas com a intenção de rever tópicos do Ensino Fundamental, como ocorre nos Relatos 5 e 9, confirma que a deficiência apresentada pelos alunos do Ensino Médio nem sempre é exclusiva desse nível de ensino. Assim, ao se refletir sobre os motivos que levaram os autores das propostas de ensino analisadas a elaborar suas ações interventivas, pode-se constatar que os contextos educacionais em que tais autores estão inseridos são bastante parecidos com as situações e fatos relatados pelos professores da cidade de Montes Claros/MG, no Capítulo 3 (p.54 a 74).

Além do mais, o fato de terem sido encontrados 12,5% de estudos sobre temas algébricos do Ensino Médio, voltados a estudantes universitários na amostra de Comunicações Científicas (p. 124) e 12% na amostra de Relatos de Experiência (p. 177), não só vai ao encontro da discussão colocada ao final da Seção 2.3 (em relação aos problemas encontrados no Ensino Superior poderem vincular-se às defasagens apresentadas no Ensino Médio) como remete aos apontamentos feitos na Seção 4.3 (p. 89), referentes à importância e à necessidade de inserir atividades laboratoriais também para os adultos.

Como se percebe, muitos são os “pontos de encontro” entre os resultados encontrados nas amostras e os pressupostos anteriormente abordados. Por isso, não se pretende discutir nessa Seção todos os detalhes relativos ao LEM encontrados nos trabalhos analisados em comparação ao discutido no Capítulo 4.

Espera-se que, como os artigos acadêmicos foram selecionados com o propósito preestabelecido de identificar propostas de ensino de Álgebra do Ensino Médio concebendo o LEM como alternativa metodológica, tenha ficado evidente para o leitor que nas propostas analisadas encontram-se: a visão de LEM além de um ambiente físico, representando uma forma de aprender e ensinar Matemática por meio da investigação; a crença no aprender fazendo; as atividades práticas e a possibilidade de presença de recursos didáticos; e a aliança entre teoria e prática. Sobretudo, os artigos foram selecionadas de modo a contemplar o entendimento de LEM voltado à Álgebra: um processo de investigação que possibilite ao aluno realizar uma sucessão de ações que o conduzam à abstração e à formalização (p. 88).

Contudo, ainda há algumas observações relevantes a serem feitas em relação ao desenvolvimento das propostas lançadas nas Comunicações Científicas e nos Relatos de Experiência, principalmente quanto à inserção de materiais concretos, manipuláveis ou não, e à participação do professor.

A inserção de materiais concretos e de outros recursos leva, inicialmente, a importantes observações feitas no Capítulo 4, tais como a necessidade de superar a ideia de utilizar os materiais para tornar as aulas mais agradáveis e o fato de que a sua função não é meramente ilustrativa (p.80).

Observando-se o Relato 24 (Um olhar lançado ao objeto de aprendizagem "Matrizes") e o Relato 16 (O auxílio dos jogos matemáticos na aprendizagem de Funções Algébricas: uma experiência com alunos do Ensino Médio), conclui-se que ainda se encontra atrelado ao uso de recursos didáticos o propósito de utilizá-los para criar ambientes agradáveis e interessantes ao estudo de determinado conteúdo.

Alguns trabalhos que utilizam a Torre de Hanói no estudo da Função Exponencial, como a Comunicação Científica 4 (Alguns aspectos do ensino de Matemática por meio de materiais concretos) e a Comunicação Científica 15 (Torre de Hanói: o jogo como recurso metodológico nas aulas de Matemática) indicam que, apesar de o referido material poder propiciar a abstração e a formalização necessárias no estudo de Função Exponencial, ainda tem sido visto como forma de aplicar/ilustrar um conteúdo matemático, sendo usado, preferencialmente, para a introdução do conteúdo.

Considera-se que esses ainda são assuntos para reflexão, principalmente porque levam também à consideração colocada no Capítulo 4 (p. 77), de que o foco das atividades a serem realizadas em um LEM não está na manipulação em si de materiais, mas na forma como é explorado.

Tal fato remete ao papel do professor no desenvolvimento da atividade. Citou-se no capítulo 4 (p. 77) a afirmação de Miskulin (2009), de que um dos aspectos fundamentais consiste na mediação do professor, ou seja, a forma pela qual se conduz uma aula no âmbito do LEM influencia diretamente os resultados alcançados, sobretudo aqueles dependentes da manipulação de um material didático. Exemplificando esse fato, tem-se a Comunicação Científica 15, já mencionada, e o Relato de Experiência 19 (Progressão Aritmética utilizando o jogo Corrida ao CEM).

Outro ponto de reflexão, também observado no Relato 24 e notório no Relato 11 (Baralho trigonométrico e a escrita na aprendizagem da Matemática), consiste na valorização da memorização no uso de jogos. Não que haja oposição aos jogos de memória, apenas acredita-se que, perante os propósitos de um LEM, não seja viável que o objetivo de um jogo restrinja-se à memorização. Conforme discutido na Seção 4.2 (p. 87), os jogos devem visar também ao desenvolvimento do raciocínio lógico e da linguagem matemática.

Também na Seção 4.2 (p. 85) observa-se que, ao que parece, um LEM destinado à Álgebra deve estabelecer contato com diferentes concepções deste ramo da Matemática. Acredita-se que as análises realizadas nas duas amostras possibilitam inferir que as propostas de intervenção em Álgebra do Ensino Médio selecionadas, além de irem ao encontro dos pressupostos teóricos sobre o Laboratório de Ensino de Matemática, abrangeram as três visões de Álgebra mencionadas nesta pesquisa: a Álgebra como ferramenta/meio para a resolução de problemas; a Álgebra como aritmética generalizada e a Álgebra como estudo de relações.

Os trabalhos que trouxeram problemas (na maioria dos casos, através da contextualização e da Modelagem Matemática) a serem solucionados permitiram o contato dos alunos com a tradução em linguagem algébrica, remetendo à ideia de Álgebra como generalizadora de modelos. Também possibilitaram envolver os alunos em situações onde os conteúdos e os procedimentos necessitavam ser tomados como meio auxiliar para se encontrar a solução.

Os Relatos de Experiência e as Comunicações Científicas em que a observação e o estudo de regularidades e padrões numéricos estiveram presentes possibilitou o contato dos alunos com a descrição algébrica a partir de fatos conhecidos da Aritmética. O foco em tirar propriedades gerais a partir dos números aproxima-se da concepção de Álgebra como Aritmética generalizada.

A frequente presença do estudo de Funções aliada à representação gráfica permitiu que se verificasse a visão de Álgebra como o estudo das relações entre quantidades como aquela que obteve maior importância quando se considera um LEM voltado para a Álgebra.

Em suma, o estudo da Álgebra verificado nas propostas de ensino no âmbito do LEM mostra que os professores (os autores das propostas) permanecem compreendendo-a como um importante auxílio na resolução de problemas, mas, sobretudo, demonstra que eles a entendem como forma de descrever modelos gerais em linguagem matemática e de estudar relações entre quantidades.

CAPÍTULO 6: APONTAMENTOS FINAIS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1 Reflexões e comentários sobre os objetivos da pesquisa

O primeiro objetivo deste trabalho consistiu em evidenciar que há propostas de atividades voltadas para o ensino de Álgebra que possam ser realizadas em um LEM. Comprovando que essa finalidade foi alcançada e que o levantamento realizado com base nos anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, realizado em 2013, surtiu efeito, tem-se, de acordo com os dados levantados, a maior concentração dos trabalhos selecionados no Eixo Temático 1, dedicado às *Práticas Escolares*, atingindo 75% no grupo das Comunicações Científicas (Figura 4, p. 117) e 72% no grupo dos Relatos de Experiência (Figura 18, p. 172), do referido evento.

Embora esses trabalhos não tragam roteiros de aplicação prontos e disponíveis para serem reaplicados, comprovam que se tem pensado e realizado atividades significativas para a Álgebra usando o LEM.

O fato de se ter selecionado dezesseis Comunicações Científicas e vinte e cinco Relatos de Experiência que abordaram a proposição ou realização de atividades laboratoriais no campo da Álgebra - apesar de ser uma quantidade baixa entre a fonte consultada - é um indício de haver aproximação entre as diferentes concepções de LEM e a Álgebra.

Os trabalhos selecionados mostram diferentes formas de se compreender as atividades de Laboratório de Ensino, pois nota-se que há atividades baseadas em problemas contextualizados, em situações mais simples de Modelagem Matemática, especificamente na teoria da Investigação Matemática - compreendidas como Laboratório Livre e, em vários outros recursos, concretos e tecnológicos, sobressaindo-se os tecnológicos, quando analisadas as Comunicações Científicas.

O fato de ter sido encontrada uma presença significativa de softwares matemáticos, principalmente o GeoGebra, e de outros recursos didáticos disponibilizados via internet/computador, indica que a concepção de Laboratório de Ensino de Matemática mediado pelo computador tem ganhado espaço, tanto na pesquisa em Educação Matemática como, em específico, no campo da Álgebra escolar do Ensino Médio.

Nos dois grupos analisados, as atividades centradas na ideia de Laboratório com computador têm sido destinadas, quase que exclusivamente, para que os alunos explorem alguns tipos de Funções, isso porque estão seguindo a indicação de que elas podem ser mais facilmente compreendidas se as interpretações, geométrica e algébrica, complementarem-se, o que é favorecido pela dinâmica dos principais softwares citados.

A forma de utilizá-los vai ao encontro das recomendações contidas nas *Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*, pois, muitas vezes, ressalta o trabalho simultâneo com diferentes representações e estão usando ferramentas dos softwares para realizar a variação dos parâmetros, estudando o comportamento da Função e as características de sua forma algébrica, exatamente como discutido na Seção 2.2.1 (p. 30 a 35).

Dessa forma, o uso de softwares na concepção de LEM mediado pelo computador surte efeito em relação às recomendações para o ensino de Álgebra, sendo importante para a superação de dificuldades referentes ao uso da linguagem algébrica, especialmente porque trata da interpretação da notação algébrica das Funções.

Quanto às atividades envolvidas na concepção de Laboratório Livre, estas são colocadas como forma de estudar a notação algébrica, dando sentido a ela. Além disso, certamente, auxiliam a linguagem algébrica, pois estão em estreita ligação com a linguagem verbal. Aliás, pela análise realizada, apesar de ser a concepção menos frequente, é a que mais favorece o uso da linguagem algébrica, tendo como ponto de partida a linguagem verbal. As tendências usadas estimulam os alunos a explicar e registrar por escrito suas conclusões, sendo etapa fundamental para posterior registro em notação algébrica.

Essas observações levam a crer que uma das principais razões para a possibilidade do LEM desenvolver a linguagem algébrica é o fato de a atitude investigativa estar imbuída na ideia de LEM, como apontado no capítulo 4.

Quanto à ideia de Laboratório com material concreto visando ao estudo da Álgebra do Ensino Médio, esta não aparece como tendência muito difundida no grupo das Comunicações Científicas, envolvendo 13% do total (Figura 10, p.126). Já no segundo grupo a porcentagem é maior, 48% (Figura 23, p.178). Apesar desse aumento, pode-se concluir que a introdução de materiais concretos, manipuláveis ou não, em propostas de ensino para aquele nível tem ocorrido de forma lenta e bastante tímida.

De fato, existe uma aproximação entre material concreto e Álgebra e isso merece ser estudado com mais detalhes, pois indica a proximidade entre o material concreto e elementos abstratos da Álgebra. É a prova de que almejar o abstrato não necessariamente implica o afastamento dos alunos dos elementos concretos.

Portanto, o Laboratório de Ensino com material concreto merece ser bem compreendido quanto a sua função de auxiliar no ensino de Álgebra, principalmente porque este ramo da Matemática é também considerado como formas de pensamento, como a abstração (p.24), e há a recomendação de que os materiais concretos devem favorecê-lo (p.79).

Então, quanto ao primeiro objetivo, conclui-se que há atividades voltadas para o ensino da Álgebra do Ensino Médio contempladas dentre as três principais concepções de LEM: O Laboratório Livre; o Laboratório mediado pelo computador e o Laboratório com material concreto.

Além do mais, conforme citado no capítulo 4 (p.80), a função do material concreto não é meramente ilustrativa; ele é estrutura de apoio para melhorar o raciocínio. No entanto, nota-se que aquele material não teve o destaque merecido nas atividades analisadas. Talvez, a razão disso seja a precaução dos autores em evitar a formalização precoce, afinal, quando em contato com o material didático os alunos são levados a aceitar como verdadeiras as propriedades propiciadas pelo aludido material.

Essa característica não deve ser tomada como discriminação ao material concreto. Pelo contrário, ela indica que tal material é um aliado do professor de Matemática, no que concerne à obtenção do progressivo rigor lógico e formal por parte dos alunos. Esse fato, mesmo não sendo muito reconhecido pelos autores das propostas, é confirmado e identificado em seus trabalhos, por exemplo, quando lê-se e identifica-se o propósito de levar o aluno a encontrar um modelo matemático, baseado em observações feitas a partir da manipulação de um material concreto, como visto em todos os trabalhos que usam a Torre de Hanói.

Em geral, refletindo-se sobre os usos dos materiais encontrados nos trabalhos, chega-se à conclusão de que os seus autores precisam tomar consciência quanto ao papel desses materiais para o desenvolvimento e uso correto da linguagem simbólica, uma vez que a análise realizada permite verificar que os materiais empregados nos trabalhos proporcionam a inserção da aplicação de símbolos de forma mais significativa e não excluem o formalismo da Matemática, apenas atribuem ao simbolismo e àquele formalismo um papel menor no desenvolvimento das atividades.

Dessa forma, as atividades algébricas realizadas na concepção de LEM com material concreto foram utilizadas (mesmo que implicitamente) como auxiliares para a superação de dificuldades em relação ao uso da linguagem simbólica, pois se dispuseram a introduzir os alunos na familiarização com a notação matemática. Aliás, tal notação é um dos fatores que justificam a necessidade de atividades laboratoriais, conforme citado por Rêgo e Rêgo, no capítulo 4 (p. 79).

Com base nessas observações, pode-se concluir que há propostas para a Álgebra do Ensino Médio envolvendo o LEM, as quais são auxiliares para a superação de obstáculos quanto à linguagem simbólica. Todavia, ainda não se finalizou essas reflexões, pois há outras considerações importantes a fazer em torno dos temas Álgebra e LEM, a partir da análise realizada com base no XI ENEM, 2013.

Coloca-se como uma das inferências conclusivas do capítulo 4 que o pensamento algébrico deve ser a ideia-chave para repensar a educação algébrica e, portanto, deve ser o fio condutor do LEM voltado para a Álgebra (p.89 deste trabalho). Então, defende-se que a utilização de materiais concretos deve ocorrer de forma alinhada ao desenvolvimento do pensamento algébrico e do conteúdo, e não de forma desvinculada, como aconteceu em alguns trabalhos analisados.

O pensamento algébrico envolve generalização, formalização e manipulação simbólica, dentre outros itens essenciais para o Ensino Médio, no entanto, o fato de a abstração ter sido tratada em vários trabalhos não garantiu a presença da generalização e da formalização, o que impede o contato com a linguagem algébrica. Contudo, ressalta-se que essa não é uma constatação geral, tendo sido observado o uso da linguagem simbólica após situações em que houve a presença da abstração, da generalização e da formalização.

Também, é interessante, observar que, apesar do fato da abstração favorecer a generalização e, ainda, a formalização ser muito importante no estudo de Matemática em geral, muitas vezes percebe-se que os autores das ações de intervenção analisadas não inserem tais conceitos entre os objetivos de suas propostas. Porém, acredita-se que os autores deveriam inseri-los, pois os resultados apontados após algumas das aplicações de atividades mostram que eles estão sendo alcançados por meio da observação e da prática.

Entretanto, o levantamento realizado demonstra que nem sempre uma atividade de LEM voltada para Álgebra necessita ter como finalidades exclusivas a abstração e a generalização, podendo ter a manipulação simbólica como objetivo. Observa-se que os jogos nem sempre foram aliados a situações de abstração e generalização, sendo inseridos para o estudo de propriedades, resolução de exercícios e memorização, o que não deve ser considerado com um fator negativo, afinal, em Álgebra, conteúdos e métodos encontram-se vinculados, como aludido na pág. 24 deste trabalho.

Enfim, esse fato demonstra que o LEM ainda é uma alternativa para o ensino de Álgebra quando o termo é associado ao seu caráter procedimental, pois, como se verifica no decorrer da análise, há propostas de ensino comprovando que métodos de resolução e exercícios de manipulação algébrica não são estratégias excluídas de um LEM, indo ao encontro da consideração de Rêgo e Rêgo (2009, p. 43-44), mencionada na página 79 deste trabalho, de que o LEM é necessário para estimular a compreensão de regras por parte dos alunos.

Os diversos resultados apontados, a partir das ações de intervenção realizadas, levam a crer que o LEM tem potencialidades implícitas no campo da Álgebra escolar e merecem ser cada vez mais investigadas, pois, às vezes, conforme constatado ao realizar a análise desta pesquisa, nem mesmo os seus autores perceberam algumas das contribuições que suas propostas fornecem quanto à compreensão das ideias e dos procedimentos da Álgebra.

Em outras palavras, os autores não perceberam os pontos fortes de seus trabalhos como, muitas vezes, não notaram que estão utilizando uma ou outra concepção de LEM, pois não citam o termo em suas obras.

Além do mais, quando se realizou a busca na página eletrônica do XI ENEM (2013) não se pôde realizá-la por palavras e termos, justamente porque o termo Laboratório de Ensino de Matemática não tem sido usado com frequência. Esse fato indica a necessidade de professores e futuros professores compreenderem que um LEM não se resume a um local, sendo também uma abordagem permeada, sobretudo, pela atividade investigativa, conforme discutido no Capítulo 4, desta pesquisa.

Os dados numéricos mostram, claramente, que o tema LEM, quando relacionado ao objeto de ensino Álgebra do Ensino Médio, não é comum nas pesquisas do XI ENEM, 2013. Além disso, mediante leitura atenta dos trabalhos, constatou-se que o conceito de LEM é ainda menos comum no contexto escolar, pois a maioria dos trabalhos analisados, nesta pesquisa, foi elaborada e desenvolvida por acadêmicos de cursos de Licenciatura em Matemática, em parceria com professores da Educação Básica, ou seja, a iniciativa não está partindo dos professores da Escola Básica.

Logo, para haver um possível aumento de intervenções didáticas na escola, no âmbito do LEM, é necessário, antes, ampliar a participação dos futuros professores na utilização do LEM em seus cursos. Além disso, é fundamental incentivar os professores em exercício a criar atividades diferentes das convencionais.

Na verdade, o LEM deve ser assunto de interesse, tanto de professores em exercício quanto de professores em formação, e a preocupação em ampliar o contato de futuros professores com o LEM é perceptível, quando, na leitura dos trabalhos, verificou-se que muitas propostas são de iniciativa do PIBID (Programa de incentivo a bolsas de iniciação à docência) e de outros Projetos de Extensão Universitária, assim justificando as porcentagens relativas ao Eixo Temático 3, destinado à Formação de Professores (19% no primeiro grupo, p.117, e 28% no segundo, p.172).

Como se pode constatar, a busca por trabalhos que concebem o LEM como uma metodologia de ensino evidenciou muitas questões problemáticas, bem como confirmou tais questões também quanto à Álgebra, mostrando, inclusive, que a busca por novas alternativas de ensino processa-se pelo reconhecimento da existência da defasagem de aprendizagem dos assuntos algébricos pelos alunos.

O fato de a investigação ter encontrado 12,5% (p.124, item 5.2.2) de intervenções aplicadas a estudantes de graduação no primeiro grupo e 12% (p.177, item 5.3.2) no segundo indica o reconhecimento de que os impactos das deficiências em torno da Álgebra básica manifestam-se no Nível Superior, exatamente como consta nos depoimentos de alguns professores do referido nível expostos no capítulo 3 desta pesquisa.

A investigação também evidenciou o reconhecimento da defasagem em tópicos anteriormente estudados no Ensino Fundamental. Algumas vezes, leem-se comentários bem semelhantes aos do professor Paulo Ramos em sua exposição sobre o trabalho de lecionar na 3ª série do Ensino Médio. (p. 57 a 60)

Com o objetivo de ilustrar esse fato, cita-se o Relato de Experiência 6 (Prática docente e jogos matemáticos: uma experiência do PIBID no Colégio Estadual Djenal Tavares Queiroz), onde os seus autores fazem comentários bem próximos ao do professor Paulo, ao afirmar que seus alunos demonstram não saber diferenciar os termos equação e inequação, enquanto o professor Paulo (p. 60) diz que alguns de seus alunos não fazem distinção entre equação, função e expressão.

O Relato de Experiência 7 (Reativação e uso de um Laboratório de Ensino de Matemática: um relato de experiência no contexto do PIBID) também serve como exemplo, relatando a respeito dos problemas com os produtos notáveis, quadrado da soma e da diferença, cujos comentários lembram muito as falas do professor James (p. 61)

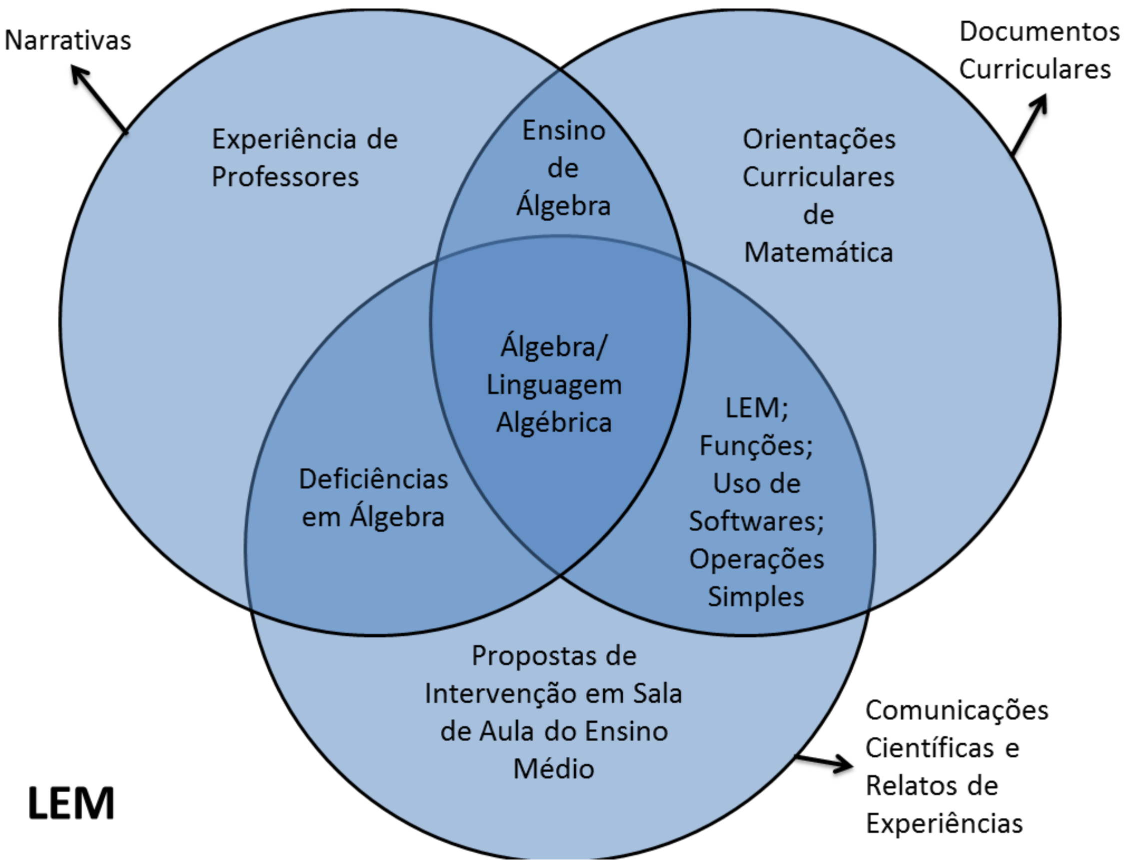
Por fim, cita-se o Relato 8 (Modelagem Matemática no ensino de Funções: analisando a teoria dos Registros de Representação Semiótica), que vai ao encontro da fala de Diogo (p.66-67) , quanto à recorrência frequente e, às vezes, desnecessária ao registro gráfico, demonstrando incompreensão do registro algébrico de Funções.

Muitas são as aproximações entre os trabalhos analisados e discutidos nesta pesquisa e os depoimentos constantes no Capítulo 3 (p.56-67), porém, essas comparações não serão estendidas, pois, para cumprir os propósitos de análise de inserção de atividades laboratoriais, basta a indicação de que tais atividades estão sendo inseridas com o intuito de contribuir para uma situação educacional problemática, amplamente conhecida pelos professores de Matemática.

Em resumo, têm-se, nesta pesquisa, três contextos práticos entrelaçados: as narrativas de professores, as análises de documentos educacionais oficiais destinados ao Ensino Médio e, a fase bibliográfica da pesquisa, a qual consta da descrição de Comunicações Científicas e Relatos de Experiência oriundos do XI ENEM.

A figura a seguir apresenta-se com o intuito de evidenciar as interseções e articulações entre esses três contextos.

Figura 25 – As Relações entre o LEM e Álgebra por meio dos três contextos práticos da pesquisa.



Fonte: elaborada pela autora

6.2 Conclusões

Os dados obtidos na pesquisa bibliográfica – coletados e produzidos – permitem dialogar com as discussões teóricas inicialmente levantadas e com os depoimentos de professores, checando as informações mais difundidas no universo da Álgebra e de seu ensino. Os mesmos dados, quando analisados na perspectiva do Laboratório de Ensino de Matemática, ampliam as constatações alcançadas, dentre as quais são citadas as principais no resumo a seguir:

a) Há propostas de ensino voltadas para a Álgebra do Ensino Médio nas diferentes concepções de Laboratório de Ensino de Matemática, contudo, não se encontrou a denominação Laboratório de Ensino de Matemática ou o termo LEM com frequência dentre a amostra analisada. Ou seja, os trabalhos que adotam atividades ditas (por nós) como laboratoriais não são assim compreendidas por seus autores, na maioria dos casos não havendo referência alguma à literatura referente ao LEM.

b) Esse fato nos permite inferir que as atividades laboratoriais não são devidamente reconhecidas pelos professores no que concerne ao caso da Álgebra de Ensino Médio;

c) Além disso, essas propostas não são encontradas em expressiva quantidade e os estudos encontrados não são diversificados, ou seja, não abordam vários conteúdos do Ensino Médio;

d) Apesar disso, o levantamento realizado por meio dos Anais do XI ENEM, 2013, indica haver aproximação entre LEM e Álgebra;

e) A maior parte das intervenções é centrada no tema Funções e dedicada à 1ª série do Ensino Médio, evidenciando que o principal propósito do uso do LEM na Álgebra desse nível tem sido promover ações de melhoria para a compreensão de conceitos relacionados à Função;

f) Vários desses estudos têm desenvolvimento bastante semelhante e não possibilitam um estudo aprofundado do conteúdo abordado;

g) A iniciativa de criação dessas propostas não tem sido de professores da Educação Básica, mas sim oriundos de projetos universitários desenvolvidos por acadêmicos e professores universitários. Isso demonstra que a participação de futuros professores na utilização do Laboratório de Ensino de Matemática, enquanto local ou processo, tem sido ampliada, porém, a participação de professores da Educação Básica ainda necessita ser fortemente incentivada;

h) O uso de materiais e jogos nem sempre ocorreu de modo satisfatório, por não serem exploradas todas as suas potencialidades em vinculação ao conteúdo abordado;

i) O uso de jogos mostrou aproximação entre o LEM e a realização de operações algébricas, contudo, isso não implica em restringir o LEM a essa finalidade;

j) O LEM mediado pelo computador é fortemente usado no estudo das Funções favorecendo as construções gráficas. Por abordar, quase que exclusivamente deste tema, o LEM mediado pelo computador favorece especialmente a notação algébrica das Funções;

k) As atividades laboratoriais dentre as três concepções de LEM encontradas favorecem e promovem o uso da linguagem simbólica, na medida em que estimulam a generalização verbal, como ponto de partida para a generalização simbólica[25].

l) Favorecem a linguagem simbólica também quando proporcionam a abstração[26] por meio de atividades experimentais (com materiais concretos ou recursos computacionais) ou a abstração por meio da observação (por exemplo, nas Investigações Matemáticas);

---

[25] Nesta Dissertação de Mestrado assumimos o termo generalização conforme o entendimento de Ponte, Branco e Matos (2009, p.10). Para estes autores a generalização trata de “descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos”. Para estes autores, quando abordam o tema Álgebra, um dos papeis dos símbolos é mostrar a generalidade (p.72). Diante disso, esclarecemos que, neste trabalho, o termo “generalização simbólica” indica que a generalização é expressa sob a forma simbólica, especialmente pelos símbolos matemáticos e algébricos, enquanto o termo “generalização verbal” indica generalidades expressas em palavras.

Na mesma obra, Ponte, Branco e Matos (p.10) afirmam ser a generalização um dos elementos constituintes do pensamento algébrico, acrescentando que “no pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objetos mas principalmente às relações entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato” (p.10). Como a linguagem algébrica está entrelaçada ao pensamento algébrico, esta é favorecida em situações que envolvem generalização.

Obra disponível em <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf>. Acesso em: 22. Mar. 2016.

[26] O termo abstrair indica o reconhecimento de características comuns a objetos, depreendendo (isolando) do objeto uma determinada característica ou propriedade. Em seus estudos, Piaget considera três tipos de abstrações, uma delas é abstração reflexiva, a qual relaciona-se diretamente com a estrutura do pensamento lógico matemático. Nesse tipo de abstração, é necessário que o sujeito coordene ações sobre objetos. É nesse tipo de abstração que se estabelece relações entre objetos. Entendemos que a manipulação simbólica exige a coordenação de ações, portanto a abstração reflexiva pode favorecer a linguagem simbólica. No entanto, não é objetivo, neste trabalho, estender a abordagem sobre abstração. Um melhor entendimento do assunto pode ser encontrado no trabalho intitulado Processos de conhecimento- Tipos de abstração e tomada de consciência, disponível em http://www.nied.unicamp.br/ojs/index.php/memos/article/download/83/82. Acesso em 13. Fev. 2018.

m) As propostas também favorecem o domínio da linguagem algébrica quando reconhecem e incentivam o registro em linguagem verbal. O LEM, ao incentivar o registro escrito em linguagem corrente, leva à necessidade de compreender e usar uma notação, o que facilita o domínio de escritas matemáticas;

n) Contribuem para a superação de dificuldades quanto à linguagem simbólica porque as tendências nelas envolvidas, como a Modelagem Matemática, a Resolução de Problemas e a Investigação Matemática, assim como os recursos concretos e também softwares, promovem situações em que a notação matemática aproxima-se da notação usada nos livros didáticos;

o) O LEM tem potencial para contribuir para o ensino de Álgebra do Ensino Médio, pois as ações desenvolvidas contemplam as recomendações para seu ensino contidas nos principais documentos educacionais;

p) Também o LEM é um auxiliar para a superação de dificuldades em Álgebra do Ensino Médio, pois traz ações visando ao enfrentamento de deficiências de conhecimentos matemáticos de níveis anteriores.

Pelas análises realizadas no Capítulo 5 e, a partir das considerações e reflexões levantadas no capítulo 6, identifica-se que, em geral, o presente trabalho indica dois pontos centrais de importância para a Educação Matemática: o reconhecimento do entrelaçamento entre o LEM e a Álgebra, especialmente a presença de linguagem algébrica em atividades laboratoriais, e o fato de tais atividades não serem devidamente reconhecidas pelos professores no que concerne ao caso da Álgebra do Ensino Médio, inferindo-se a necessidade de ampliação da participação de professores de Matemática da Educação Básica na criação de propostas de ensino no campo da Álgebra.

6.3 Sugestões para trabalhos futuros

Compreendendo que a temática em torno da aproximação entre LEM e Álgebra necessita de ampla atenção, este trabalho possui como objetivo levantar evidências, a partir de uma seleção de trabalhos acadêmicos oriundos do XI ENEM, que contribuam para a discussão. Assim, lançam-se algumas questões merecedoras de destaque, observadas durante a realização deste trabalho e que podem ser foco de estudo de trabalhos futuros.

a) A necessidade de ampliar a discussão a respeito da inserção de recursos tecnológicos em atividades laboratoriais voltadas para a Álgebra;

b) A necessidade de ampliar a discussão a respeito da inserção de materiais concretos e jogos em atividades laboratoriais voltadas para a Álgebra. Quais as potencialidades dos jogos para a compreensão de assuntos algébricos? Por que inserir atividades lúdicas no Ensino Médio?;

c) O estudo do Laboratório de Ensino de Matemática para o desenvolvimento do pensamento algébrico;

d) Ampliação da busca por maneiras de explorar conteúdos algébricos, além de Funções, nas variadas concepções de LEM;

e) Discutir o fato de o tema Funções ter sido tomado como central no currículo de Matemática do Ensino Médio e nas ações de intervenção didática produzidas;

f) O papel da Modelagem Matemática, da Resolução de Problemas e da Investigação Matemática para o desenvolvimento e uso correto da linguagem simbólica por estudantes da Educação Básica;

g) Explorar como as tendências acima citadas são abordadas em vinculação ao LEM.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S, G; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G; NOGUTI, F. C. H; JUSTULIN, A. M. (orgs.). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

ARAÚJO, E. A. **O jogo "O teu e o meu" para auxiliar a formação do pensamento algébrico**. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, PE, 2004. Disponível em: < http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/02/CC86843931804.pdf>. Acesso em: 15 maio 2016.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (orgs.). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2012, p. 111-124.

BOOTH, L.R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (orgs.). **As idéias da álgebra.** São Paulo: Atual, 1995. p. 23-37.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (orgs.). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BOYER, C. B.. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. 5 ed. São Paulo: Blücher, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **BNCC:** Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC/SEB, 2015. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/BNCC-APRESENTACAO.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Matriz de Referência ENEM**. Brasília: MEC/SEB, 2012. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf>. Acesso em: 16 abr. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio.** Brasília: MEC/SEB, 2006. V. 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2015.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. S. (orgs.). **As idéias da álgebra.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

DA ROCHA FALCÃO, J. T.. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: SCHILLIEMAN, A.D; CARRAHER, D.W.; SPINILLO, A.G.; MEIRA, L.L.; DA ROCHA FALCÃO, J.T. (orgs.). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993.

DICIONÁRIO DO AURÉLIO**: Dicionário de Português**: significado de Álgebra, 2017. Disponível em: <http://dicionariodoaurelio.com/algebra>. Acesso em: 09 nov. 2015.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In: MACHADO, Sílvia Dias de Alcântara (org**). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, Papirus, 2003.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Educação Matemática:** Retrospectivas e Perspectivas. Curitiba: SBEM, 2013. Disponível em: <http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/comunicacoes_10.html>. Acesso em: 16 abr. 2016.

EWBANK, W.A. **The Mathematics laboratory: what? why? when? how?** Alberta, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 1977)

FOMIM, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I.. **Círculos Matemáticos.** Tradução de Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

GARNICA, A. V. M.; BICUDO, M. A. V. Um estudo hermenêutico do texto de matemática. In: BICUDO, M.A.V.; ESPOSITO, V.H.C. (orgs). **Pesquisa qualitativa em educação:** um enfoque fenomenológico. Piracicaba: UNIMEP, 1994, v., p. 95-102. Disponível em < http://mariabicudo.com.br/resources/CAPITULOS_DE_LIVROS/Um%20estudo%20hermen%C3%AAutico%20do%20texto%20de%20matem%C3%A1tica.pdf>. Acesso em 28. Nov. 2016.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. **Matemática: volume único**. São Paulo: Atual, 2002.

KRUTETSKII, V. A. (1976). **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren** (5th ed). Chicago: University of Chicago Press.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

LOCHHEAD, J.; MESTRE, J. P.. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P.(orgs.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 144-154.

LOPES, J. A; ARAÚJO, E. A. O laboratório de ensino de matemática: implicações para a formação de professores. **Zetetiké**, Campinas, v. 15, p. 57-70, jan/jun 2007. Disponível em <ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/download/2420/2182>. Acesso em 10. nov. 2015.

LORENZATO, S. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2009.

MARCO, F. F.; FERREIRA, F. N.. **Laboratório de Ensino de Matemática**. São João del-Rei: UFSJ, 2009.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. de L. **Didáctica da matemática**. Lisboa, Universidade Aberta, 1996.

MICHAELIS. **Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa.** 2017. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra;=álgebra>. Acesso em: 22 abr. 2016.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado da Educação. CBC: Currículo Básico Comum – Ensino Fundamental e Médio. Belo Horizonte, 2008. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/CURRICULOS/Minas_Gerais_Matematica_Final_Curriculo_Basico_Comum_Ensino_Fundamental_e_Medio_Edicao_2008.pdf>. Acesso em: 14 nov.2015.

MISKULIN, R. G. S.. As potencialidades didático-pedagógicas de um laboratório em educação matemática mediado pelas TICs na formação de professores. In: LORENZATO, S. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2009.

MOTA, T. B.; JUCÁ, R. S.; VOGADO, G. E. R.. Um Estudo da Produção Escrita dos Alunos em Limite e Derivada. In: ENEM, 11., 2013, Curitiba. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática.** Curitiba: Sbem, 2013. p. 1 - 14. Disponível em: <http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/984_947_ID.pdf>. Acesso em: 22 marc. 2017.

OLIVEIRA, A. M. N.. **Laboratório de Ensino e aprendizagem em Matemática:** As razões de sua necessidade. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1983.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G; NOGUTI, F. C. H; JUSTULIN, A. M. (orgs.). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

PAIS, L. C. **"Intuição, experiência e teoria geométrica"**. Zetetiké, Campinas, Unicamp, vol. 4, n. 6, 1996.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores associados, 2009. p. 39-56.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: Ministério da educação, 2009. Disponível em <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf>. Acesso em: 22. Mar. 2016.

PONTE J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H.. **Investigações matemáticas na sala de aula.** 2 Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. In: VALE, I.; PIMENTEL, T; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. (Ed.), Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores. **Actas do XIV EIEM.** Lisboa: SEM-SPCE, 2006. p. 5-27. Disponível em <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4525/1/06-Ponte%28Caminha%29.pdf.>. Acesso em: 22. mar. 2016.

RÊGO, R. M.; RÊGO, R. G.. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de Matemática. In: LORENZATO, S. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores associados, 2009. p. 39-56.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H.N. **Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função.** Coleção Tendências em Educação Matemática. 1. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

PONTE, J. P., ROCHA, A. Aprender matemática investigando. **Zetetiké**- Cempem - FE-Unicamp, v. 14 - n.26-jul/dez-2006, p. 29-54. Disponível em <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/viewFile/2428/2190>. Acesso em 10 set. 2012.

SANTAELLA, Lúcia. **O que é semiótica**. São Paulo, Brasiliense, 2004.

SCHOEN, H. Ensinar a álgebra elementar focalizando problemas. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P.(Orgs.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 135-143.

SERRAZINA, M. de L. **Os materiais e o ensino da matemática**. Revista Educação e Matemática, Lisboa, APM, n. 13, 1990.

SIMON, M. A.; STIMPSON, V. C . Desenvolvimento da representação algébrica através de diagramas. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P.(orgs.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 155-177.

SOUZA, L. A.; SILVA, C. R. M.. **Narrativas e história oral: possibilidades de investigação em educação matemática.** v. 7. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

SOUZA, M. A.; SANTOS, M. L. F. B.. **Especialização em Educação Matemática: dimensões teórico-metodológicas.** Ponta Grossa: UEPG/NUTEAD, 2009.

TINOCO, L. A. A. et al. Educação Algébrica**.** In: **Encontro Nacional de Educação Matemática – IX ENEM.** Belo Horizonte. Anais. Disponível em <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC02128926734T.doc>. Acesso em: 26 de set. 2007.

TURRIONI, A. M. S. **O Laboratório de Educação Matemática na Formação Inicial de Professores.** Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática. Rio Claro: UNESP, 2004.

TURRIONI, A. M. S.; PEREZ, G.. Implementando um laboratório de educação matemática para o apoio na formação de professores. In: LORENZATO, S. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2009.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ANEXOS

ANEXO A – Comunicação Científica

1) Sistemas Lineares: proposta de uma entrada experimental desenvolvida em ambiente computacional.

Autores: Jeferson da Silva Gonçalves e Mônica Karrer

Esse também é um trabalho com fundamentação teórica nas Representações Semióticas, porém, diferentemente dos anteriores, ele trata do conteúdo Sistemas Lineares. O artigo apresenta resultados de um estudo sobre Sistemas Lineares que explorou relações entre representações dos registros algébrico, gráfico e da língua natural, integrando o Winplot e usando ainda o lápis e o papel.

O estudo, realizado com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, refere-se aos sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas, contudo, pode ser um recurso também utilizado com alunos do Ensino Médio, uma vez que o tópico pode ser retomado neste nível de ensino. Trata-se de um experimento elaborado para a investigação da existência ou não da proporcionalidade entre coeficientes da representação algébrica e suas consequências na classificação e na representação gráfica de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas.

Abaixo estão alguns exemplos das observações esperadas com o estudo:

1º) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$, onde $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$

Conclusão: é um sistema possível e indeterminado, onde as retas que representam as equações são coincidentes.

2º) $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$, onde $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{9}{12}$

Conclusão: é um sistema impossível, onde as retas são paralelas.

3º) $\begin{cases} 4x + 6y = 12 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$, onde $\frac{4}{2} \neq \frac{6}{4}$

Conclusão: é um sistema possível e determinado, onde as retas são concorrentes.

No desenvolvimento do trabalho, após uma revisão do conteúdo, foram aplicadas cinco atividades a serem realizadas com o auxílio do Winplot, onde foram requisitadas justificativas na língua natural escrita usando lápis e papel.

Como o estudo realizado foi amplo, optou-se por apresentar com mais detalhes no artigo resultados do estudo relativo aos sistemas impossíveis, quando os alunos deveriam observar que, para obter retas paralelas distintas, deveria existir uma proporção entre coeficientes de x e y, e não entre os termos independentes.

Em uma das tarefas o objetivo era constatar que um sistema que gera duas retas paralelas é impossível, tem solução vazia e sua resolução algébrica recairia em uma contradição, o que mostra que, tanto a representação algébrica quanto os procedimentos algébricos, tiveram espaço nesse estudo.

Para finalizar, houve uma tarefa com o objetivo de avaliar se os alunos conseguiram generalizar suas conclusões, apresentando a condição de obtenção de duas retas paralelas distintas. Observou-se se as conclusões obtidas no software eram transferidas para situações quaisquer sem o uso do software, pois, para os autores, o trabalho exclusivo no software não é suficiente. Por esse motivo, no desenvolvimento do estudo foram propostas atividades complementares com e sem o uso do Winplot.

Como conclusões, foi apontado que os estudantes demonstraram habilidade, tanto no reconhecimento de um sistema impossível por meio de diversas representações quanto na atividade de conversão entre representações. Também foi apontado o dinamismo do Winplot na obtenção das representações gráficas a partir das representações algébricas.

2) Aulas de Matemática e o uso do Laptop educacional no ensino da álgebra

Autoras: Suely Scherer e Fernanda Elisbão Silva de Souza

O objetivo desse trabalho foi a análise das possibilidades de integração do Laptop educacional na prática pedagógica de professores de Matemática no ensino de Álgebra do 8º ano do Ensino Fundamental. O artigo apresenta duas aulas em que foram utilizados os laptops para o ensino do conteúdo de fatoração de expressões algébricas e duas aulas sobre resolução de equação de 1º grau. Em todas as aulas houve a utilização de applets.

Nas duas primeiras aulas, a proposta baseia-se na ideia de fazer a representação na forma de produto através da representação geométrica das expressões algébricas no applet, onde a representação algébrica era obtida pelo conceito de área. Ao final dessa etapa, os alunos copiam no caderno as construções geométricas e a representação algébrica na forma fatorada.

Nas aulas seguintes, sobre equação do 1º grau, foram resolvidas as equações trazidas pelo próprio applet. Durante a resolução, o applet anunciava se havia erro ou acerto. A ideia não era aplicar técnicas de resolução de forma mecânica, mas sim compreender o porquê das ações que são realizadas nesse processo. Percebe-se que as atividades apresentadas têm preocupação com a utilização dos procedimentos, porém, de modo que não sejam apresentadas aos alunos sem significado.

Durante as atividades, há dedicação ao registro escrito, especialmente ao uso correto de procedimentos operatórios, o que, consequentemente, levou ao trabalho com a linguagem simbólica presente nos conteúdos abordados.

ANEXO B – Roteiros de Entrevistas

Roteiro 1:

Esta entrevista tem como objetivo conhecer aspectos do ensino e aprendizagem da Matemática, mais especificamente sobre o tema álgebra, por meio de narrativas de experiências de professores que atuam no Ensino Médio. Para tanto, abordará questões voltadas, primeiramente, a conhecer um pouco o(a) professor(a) que contará sobre suas práticas e experiências de sala de aula e, em seguida, mais especificamente ao tema em questão.

1) Seu nome completo.
2) Fale sobre sua formação acadêmica (graduação, cursos de aperfeiçoamento profissional): quando, onde e como foi.
3) Fale um pouco sobre sua prática de sala de aula hoje: onde trabalha e como trabalha (por exemplo, como preparar aulas de álgebra).

Sobre Álgebra:

4) O que acha desse conteúdo? Acha importante seu ensino? Por quê?
5) Quais são as ideias essenciais desse conteúdo para você? Na sua opinião, os procedimentos são importantes?
6) Quais materiais utiliza para ensinar esse conteúdo (seja para preparar aula ou em sala de aula)?
7) O que ensina (quais os conteúdos abordados) desse assunto e como ensina? Fale um pouco sobre como são suas aulas. Como você trabalha com a linguagem algébrica e com os símbolos dos conteúdos algébricos?
8) Fale sobre dúvidas comuns dos alunos com relação a esse assunto. Aponte as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos e quais são os tipos de erros mais comuns.
9) Fale sobre a relação dos alunos com a linguagem algébrica e os símbolos (as letras, principalmente). Como lidam com a manipulação algébrica (uso de propriedades e regras operacionais)?

Roteiro 2:

Esta entrevista tem como objetivo conhecer aspectos do ensino e aprendizagem da Matemática, mais especificamente sobre o tema álgebra, por meio de narrativas de experiências de professores que atuam no Ensino Médio ou professores de Graduação que lecionam disciplinas afins com Matemática. Para tanto, abordará questões voltadas, primeiramente, a conhecer um pouco o(a) professor(a) que contará sobre suas práticas e experiências de sala de aula e, em seguida, mais especificamente ao tema em questão.

1) Seu nome completo.
2) Fale sobre sua formação acadêmica (graduação, cursos de aperfeiçoamento profissional): quando, onde e como foi.
3) Fale um pouco sobre sua prática de sala de aula hoje: onde trabalha e como trabalha (por exemplo, como preparar aulas sobre novos conceitos destinadas a alunos ingressantes na graduação).

Sobre Álgebra:

4) O que acha desse conteúdo? Acha importante seu ensino? Por quê? A álgebra é importante para trabalhar com os conteúdos que leciona? Seus alunos necessitam de conhecimento algébrico para desenvolver-se nos conteúdos que leciona?
5) Quais são as ideias essenciais da álgebra e/ou da matemática em geral para os conteúdos que você leciona? Na sua opinião, os procedimentos são importantes?
6) Fale um pouco sobre como são suas aulas. Como você trabalha com a linguagem algébrica e com os símbolos dos conteúdos que você leciona?
7) Fale sobre dúvidas comuns dos alunos com relação a esse assunto (álgebra, linguagem e escrita algébricas, simbologia, procedimentos operacionais, etc). Fale sobre a relação dos alunos com a linguagem algébrica e os símbolos (as letras, principalmente). Aponte as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos e quais são os tipos de erros mais comuns. Como lidam com a manipulação algébrica (uso de propriedades e regras operacionais)?
8) Quais seriam as origens das dificuldades e erros apresentados?

ANEXO C – Cartas de Cessão

CARTA DE CESSÃO

Eu, EMERSON BATISTA FERREIRA MOTA,

RG M-9.141.842, declaro para devidos fins ceder a Mariana de Avelar Galvino Lima, RG 14 538 660, sem quaisquer restrições, plenos direitos sobre o depoimento, que lhe concedi, em 30 / 03 / 2016. O texto foi por mim redigido a partir de um roteiro fornecido pela pesquisadora Mariana. Portanto, foi por mim conferido e legitimado. Ficando vinculado o controle do texto que eu redigi a Mariana de Avelar Galvino Lima, e somente a ela, que tem a sua guarda.

Montes Claros, 30 de NOVEMBRO de 2016.

Emerson Batista Ferreira mota

Assinatura

CARTA DE CESSÃO

Eu, PAULO DE TARSO RAMOS, RG 014952133-8, declaro para devidos fins ceder a Mariana de Avelar Galvino Lima, RG 14 538 660, sem quaisquer restrições, plenos direitos sobre a gravação da entrevista que lhe concedi em 30/março/2016, sobre a textualização do registro oral que me foi apresentada, conferida e por mim. Ficando vinculado o controle a Mariana de Avelar Galvino Lima, e somente a ela, que tem a sua guarda.

Montes Claros, MG, 30 de novembro de 2016.

Assinatura

CARTA DE CESSÃO

Eu, James Crawford Fernandes Júnior, RG MG-12.610.271, declaro para devidos fins ceder a Mariana de Avelar Galvino Lima, RG 14 538 660, sem quaisquer restrições, plenos direitos sobre o depoimento, que lhe concedi, em 06/04/2016. O texto foi por mim redigido a partir de um roteiro fornecido pela pesquisadora Mariana. Portanto, foi por mim conferido e legitimado. Ficando vinculado o controle do texto que eu redigi a Mariana de Avelar Galvino Lima, e somente a ela, que tem a sua guarda.

Montes Claros, 06 de abril de 2016.

Assinatura

CARTA DE CESSÃO

Eu, Maximiano Maicon Batista Lopes, RG MG 12 586 591, declaro para devidos fins ceder a Mariana de Avelar Galvino Lima, RG 14 538 660, sem quaisquer restrições, plenos direitos sobre o depoimento, que lhe concedi em 09 de março de 2016. O texto é de minha própria autoria e, portanto, foi por mim conferido e legitimado. Ficando vinculado o controle a Mariana de Avelar Galvino Lima, e somente a ela, que tem a sua guarda.

Montes Claros, 15 de dezembro de 2016.

Maximiano Maicon Batista Lopes

Assinatura

CARTA DE CESSÃO

Eu, Diogo Daniel Bandeira de Albuquerque, RG 8098999 declaro para devidos fins ceder a Mariana de Avelar Galvino Lima, RG 14 538 660, o depoimento, que lhe concedi, em 19/05/2016. O texto foi por mim redigido a partir de um roteiro fornecido pela pesquisadora Mariana. Portanto, foi por mim conferido e legitimado. Ficando vinculado o texto que eu redigi a Mariana de Avelar Galvino Lima, e somente a ela, que tem a sua guarda.

Montes Claros, 20 de fevereiro de 2016.

Assinatura

CARTA DE CESSÃO

Eu, Lívia de Fátima Silva Mendes, RG MG-12.261.909, declaro para devidos fins ceder a Mariana de Avelar Galvino Lima, RG 14 538 660, sem quaisquer restrições, plenos direitos sobre o depoimento, que lhe concedi em 20/05/2016. O texto é de minha própria autoria e, portanto, foi por mim conferido e legitimado. Ficando vinculado o controle a Mariana de Avelar Galvino Lima, e somente a ela, que tem a sua guarda.

Montes Claros, 20 de maio de 2016.

Assinatura