

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

13

O Espalhamento Píon Píon a Baixas Energias *

Fábio Luís Braghin

Dissertação realizada sob a orientação do Dr. Manoel Roberto Robilotta e apresentada no Instituto de Física Teórica, em preenchimento final dos requisitos para a obtenção do título de mestre em Física.



São Paulo, Agosto 1992

*Trabalho Financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo-FAPESP.

Agradecimentos

Ao Mané pelo apoio, disposição , incentivo, paciência...

Pela orientação .

Aos meus amigos do IFT e da USP que estiveram presentes, muito companheiros.

Nessa atribulada fase final, em particular à Leca, ao Marcelo, ao Orildo, ao Dimiter, ao Kokubun, ao Thut ,à Claudinha.

Enfim à todos que, de algum modo, contribuíram para a realização deste trabalho, no plano técnico e no humano.

Muito Obrigado

Resumo

Neste trabalho estudamos as interações pión-pión a baixas energias, com o objetivo de determinar como os vários efeitos dinâmicos associados à simetria quiral e à presença de ressonâncias em diferentes canais influenciam a forma da amplitude.

Inicialmente, fazemos um breve relato cronológico de fatos e idéias que marcaram o desenvolvimento das interações fortes. Em seguida analisamos o espalhamento pión-pión no contexto dos modelos lagrangianos efetivos construídos com simetria quiral, processo este que voltou a ficar em evidência com o recente estudo do modelo de skyrmions, e fazemos um estudo semi-quantitativo da influência da quebra de simetria. Finalmente consideramos os efeitos da introdução de um méson escalar ($\chi(850)$) e um méson vetorial ($\rho(780)$) como ressonâncias nos canais de onda S ($I=0$) e onda P ($I=1$), que produzem um bom ajuste para os dados experimentais.

Abstract

In this work we study pion-pion interactions at low energies, with the purposes of determining how various dynamical effects related to chiral symmetry and resonances in different channels do influence the form of the amplitude.

We begin by making a brief report about facts and ideas that have been important for the development of the strong interactions. Next we analyse the pion-pion scattering in the framework of effective lagrangian models constructed with chiral symmetry and we make a semi-quantitative study of the influence of symmetry breaking terms. Finally, we consider effects due to the introduction of a scalar meson ($\chi(850)$) and a vector meson ($\rho(780)$) as resonances in the S ($I=0$) wave and P ($I=1$) wave channels, which yield a good fit to the experimental data.

Índice

I Os Píons	5
I.1 Introdução	5
I.2 Da Previsão à Observação	5
I.3 O Período Posterior	13
I.4 Os Primeiros Resultados Teóricos	15
II Cinemática e Propriedades Gerais	18
II.1 Introdução	18
II.2 Parâmetros Cinemáticos	18
II.3 Convenções	20
II.4 A Estrutura da Amplitude: Isospin	21
II.5 A Estrutura da Amplitude: Momento Angular	24
II.6 A Estrutura da Amplitude: Unitariedade e Analiticidade	25
II.7 Unitarização de Amplitudes Reais	28
III Medidas Experimentais da Interação Píon Píon	31
III.1 Introdução	31
III.2 Resultados Experimentais	35
IV Modelos da Simetria Quiral	49
IV.1 Introdução	49
IV.2 Álgebra de correntes e PCAC	50
IV.3 As Lagrangianas Efetivas	53
IV.4 As Funções Arbitrárias	56

IV.5 Quebra de Simetria	58
IV.6 Expansão da matriz S e Regras de Feynmann	60
IV.7 Amplitude de Espalhamento na Aproximação de Árvore	64
IV.8 O Méson Vetorial ρ	79
IV.9 O Méson Escalar χ	86
IV.10 Comprimento de Espalhamento	92
IV.11 Correções de Segunda Ordem ao Diagrama de Árvore	94
Conclusão	103
Bibliografia	108

Capítulo I

Os Píons

I.1 Introdução

Iniciamos este trabalho com um relato, mais ou menos cronológico, de fatos e idéias que marcaram o desenvolvimento das interações fortes no período compreendido entre a previsão de seu intermediador por Yukawa em 1935 [Yuk35] até o desenvolvimento da simetria quiral na década de 60. Colocamos os píons como protagonistas da história.

Este relato está dividido em tres etapas: a primeira corresponde aos anos compreendidos entre a previsão do méson π até sua descoberta por Lattes, Occhialini e Powell em 1947 [Lat47a,Lat47b]. O segundo período cobre os anos subsequentes a 1947 até o fim dos anos 50, quando houve um grande esforço no sentido de se clarificar quem eram os píons, entender suas propriedades, o que, realizado de maneira satisfatória, possibilitou uma mudança do caráter da pesquisa em interações fortes. O período seguinte é caracterizado pela busca de uma teoria que permitisse cálculos de processos envolvendo píons; nesta etapa abordamos o desenvolvimento da simetria quiral.

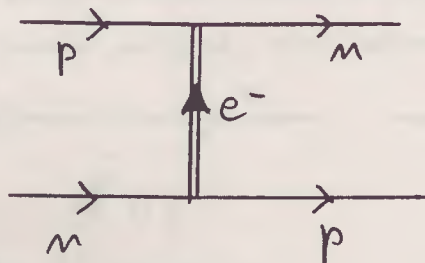
I.2 Da Previsão à Observação

No início da década de 30 J. Chadwick descobriu o nêutron, o que resolveu sérios problemas provenientes da suposição de que no núcleo atômico deveria haver prótons e elétrons, as partículas conhecidas até então. Nesse contexto o conceito de interações nucleares foi introduzido como algo diferente das interações eletromagnéticas. Em 1932, Heisenberg

[Hei32], observando que as forças nucleares deveriam ter curto alcance para justificar a saturação da energia de ligação dos núcleos mais pesados, propôs que a interação fosse intermediada por um elétron sendo descrita por um potencial da forma ("Platzweschel", que significa troca de lugar):

$$\frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

Fig 1: O elétron como intermediador da força forte (Heisenberg-32).



onde λ é uma medida do alcance da interação. Ainda em 1932, Heisenberg [Hei32] lançou a idéia de spin isotópico atribuindo ao próton e ao nêutron o mesmo "status" de partículas do núcleo (nucleons). Wigner [Wig33] em 1933 fez a estimativa de que para este potencial dar conta da saturação da interação, deveria ter um alcance da ordem de $\frac{1}{\lambda} \sim 10^{-13}$ cm.

Logo após, em 1934, utilizando a hipótese do neutrino de Pauli, Fermi [Fer34] desenvolveu sua teoria do decaimento β , segundo a qual o nêutron decai em um próton, um elétron e um neutrino através de correntes. Como na época não era clara a distinção entre fenômenos fortes e fracos, surgiu a expectativa de que as forças nucleares poderiam ser reduzidas à troca de um elétron e um neutrino entre os dois nucleons, analogamente ao caso do fóton no eletromagnetismo. No entanto, a força resultante deste processo era muito pequena, conforme verificado por Tamm e Ivanenko [Tam34] no mesmo ano.

Nessa época, Yukawa [Yuk35] percebeu que, se ao invés de um elétron e de um neutrino, houvesse uma partícula carregada de massa maior responsável pela interação de troca entre o próton e o nêutron a energia de ligação seria maior. Tomando o eletromagnetismo como modelo, supôs que um campo escalar carregado ("heavy quantum", hq) obedeceria uma equação de onda modificada de tal forma a produzir um po-

tencial do tipo "Platzweschel". A equação adotada era da forma:

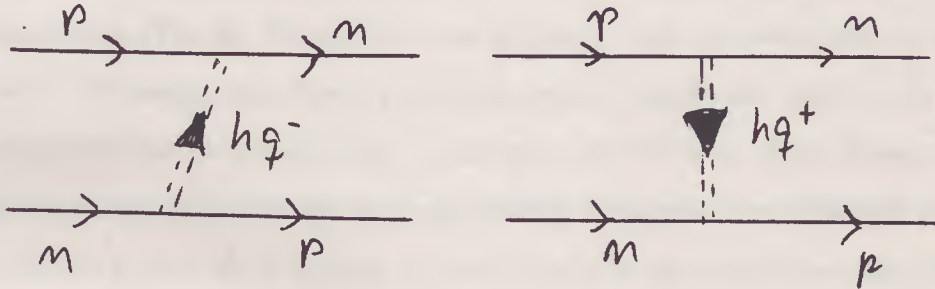
$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \lambda^2 U(\mathbf{r}) = 0$$

cuja solução genérica é dada por :

$$U(\mathbf{r}) = \pm g \frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

onde g é uma constante com dimensão da carga elétrica, λ tem dimensão de $1/cm$, e seria responsável pelos processos esquematizados na fig 2.

Fig.2: "Heavy quanta" carregados como intermediadores da força nuclear.



Considerando o caso do dêuteron, através da equação de Schrödinger não homogênea, Yukawa escolheu o sinal negativo do potencial U de tal forma que o estado fundamental tenha spin 1, que é observado experimentalmente. A constante λ tomada como o alcance da interação ($\lambda \sim 5 \cdot 10^{12} cm^{-1}$) estaria relacionada, por argumentos dimensionais, com a massa do quantum por $m_{uc} = \lambda \hbar$ que foi estimada em cerca de duzentas vezes a massa do elétron. A carga elétrica deveria ser $+\epsilon$ ou $-e$ para que fosse conservada na interação ; o spin deveria ser inteiro para haver conservação do momento angular. A energia disponível em experimentos de laboratório daquela época não era suficiente para produção desses "quanta" que, por isso, deveriam ser procurados nos raios cósmicos.

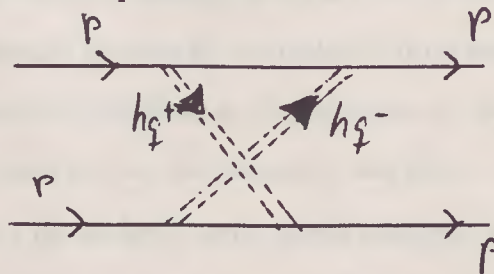
Desde 1934 Anderson e Neddermeyer passaram a encontrar nos raios cósmicos, componentes de mesma carga que o elétron, de energias muito altas, mas que ionizavam mais e perdiam mais energia por radiação do que um elétron. Chegou-se a cogitar que, a altas energias, as interações eletromagnéticas seriam diferentes por uma potência no número atômico do material absorvedor. No entanto, quando publicaram seus dados [Ned37], outros grupos concordaram com a possibilidade de estarem observando uma partícula nova e apareceram as primeiras medidas de sua massa: entre 150 e 200 vezes a massa do elétron

[Opp37,Str37]. Uma certa euforia tomou conta da comunidade dando confiabilidade à teoria de Yukawa para a interação nuclear.

Wick [Wic38], baseado no princípio da incerteza, notou que a energia do quantum pesado deveria estar diretamente relacionada ao alcance da interação, através da mesma relação derivada por Yukawa.

À luz dos novos fatos, Yukawa, já mais convicto de suas idéias, e Sakata em 1937 [Yuk37], quantizaram um campo escalar carregado e calcularam perturbativamente os efeitos do quantum emitido e absorvido na interação nêutron-próton em segunda ordem. Fizeram cálculos de até quarta ordem na interação n-n e p-p, para evitar a introdução de um quantum neutro (Fig 3). No entanto, no primeiro caso, ao considerarem a partícula com spin zero, obtiveram uma força repulsiva para o estado de tripleto da onda S do deuteron, enquanto que os experimentos indicavam ser atrativa. Além disso, este campo escalar não dava conta da saturação da força nuclear. O termo de quarta ordem, associado à interação devido à troca de 2 quanta, era muito maior para distâncias pequenas do que a troca de apenas um [Fro38]¹.

Fig 3: Interação p-p sem os quanta neutros



Este resultado já era uma evidência da impossibilidade de se utilizar teoria de perturbação para as interações fortes devido ao fato de o acoplamento ser muito grande, o que só foi aceito e entendido de maneira clara a partir de meados da década de 40.

Kemmer [Kem38a], em 1938, considerou uma teoria geral para bosons de spin 0 e 1, com diferentes paridades, isto é, quatro casos para o campo do “heavy quantum” na interação p-n : escalar, pseudo-escalar, vetorial e pseudo-vetorial.

¹As experiências de espalhamento p-p já indicavam que os nucleons interagem entre si de maneira semelhante. Na realidade, a interação é a mesma para estados dentro de um multipletto de determinado isospin total.

O único caso que produzia um comportamento para o potencial p-n , no estado fundamental tripleto do dêuteron, próximo do observado experimentalmente era o campo vetorial . Durante alguns anos esta proposta foi considerada como correta.

O campo vetorial também produzia a saturação da interação bem como resultados qualitativamente bons para os momentos magnéticos anômalos do próton e do nêutron [Fro38] associados à emissão e absorção contínua destes quanta pelos nucleons.

Bhabha [Bha38] sugeriu que estas partículas carregadas deveriam decair em um elétron e um neutrino o que justificaria a presença dos elétrons menos energéticos do que os “heavy quanta”, muitas vezes chamados de “heavy electrons”, ou mésons, nos raios cósmicos. No entanto Yukawa, Sakata e Taketani [Yuk38], num artigo onde modelaram uma teoria para os “heavy quanta” com spin 1, a partir de equações de Maxwell modificadas, fizeram a estimativa de que, apesar da dilatação do tempo permitir o méson percorrer um grande caminho, seu tempo de vida média não seria suficiente para que ele atravessasse a atmosfera. E este foi um argumento decisivo, mais tarde, para o aparecimento de teorias com uma outra partícula além daquela sugerida por Yukawa.

Kemmer [Kem38b], com o intuito de obter resultados teóricos compatíveis com a “hipótese da independência da carga”, introduziu um campo real neutro através do formalismo de isospin (teoria simétrica) analogamente ao que havia sido feito pouco antes por Cassen e Condon para o caso de momento angular.

Surgiu então a idéia de se fazer uma teoria somente com mésons neutros [Bet39], o que satisfazia as observações de que as interações np e pp são aproximadamente iguais. Havia ainda a vantagem de produzir um momento quadrupolar correto para o estado fundamental do dêuteron, o que não ocorria na teoria simétrica. No entanto o momento magnético anômalo dos nucleons deixava muito a desejar .

Apareceram ainda teorias com um méson escalar e um vetorial [Mol39] sendo que um dos mésons era responsável pelos fenômenos observados nos decaimentos beta e o outro nos raios cósmicos. Marshak [Mar40] propôs que os mésons fossem “elétrons pesados”, com spin 1/2, e obteve um potencial parecido com o de Bethe. Uma vantagem da sua abordagem era que a massa dessa partícula seria mais próxima daquela observada nos raios cósmicos do que aquela que a teoria de Bethe exigiria para obter o alcance da

interação correto.

Corben e Schwinger [Cor40] notaram que os experimentos em raios cósmicos indicavam uma seção de choque para o espalhamento entre o méson, como era também chamado a partícula de Yukawa, e o elétron independente da energia do méson, que poderia ser obtido teoricamente se esta partícula tivesse spin $1/2$, e momento magnético zero, ou spin 1 com momento magnético 1 , em unidades de magnetos de méson $(\frac{e\hbar}{2Mc})$.

Nessa mesma época Rarita e Schwinger [Rar41] procuravam o spin do meson e o acoplamento que reproduzisse os resultados experimentais do espalhamento n-p e da fotodesintegração do dêuteron. Com o aperfeiçoamento das medidas percebeu-se que tratava-se de um acoplamento pseudo-escalar [Hul45a]. Além disso um méson pseudo-escalar poderia explicar o momento elétrico de quadrupolo do dêuteron.

Nesse contexto, começaram a aparecer sérias dúvidas quanto à identificação da partícula descoberta por Anderson e Neddermeyer com a prevista por Yukawa, principalmente porque as partículas dos raios cósmicos interagiam muito menos com o núcleo do que o previsto teoricamente. Surgiram outras teorias supondo a existência de duas partículas. Por exemplo, Tanikawa [Tan47] e também Sakata e Inouye [Sak46,Nob64] propuseram que os mésons dos raios cósmicos poderiam ser produtos do decaimento de um outro mais pesado, que interagiria fortemente com os nucleons.

Era uma época de confusão, as teorias de mésons propostas até então não davam conta dos dados experimentais disponíveis, levando os pesquisadores à desconfiança da possibilidade de existir tal teoria. Afinal, se nem as propriedades do méson eram estabelecidas, como produzir uma teoria que o envolvesse? No entanto haviam alguns resultados que serviram como guia no propósito de construí-la.

Em 1946 a situação era mais ou menos a seguinte [Wen47,Hul45b]:

A teoria quântica de campos mostrava-se como a teoria fundamental, trazendo resultados muito bons para o eletromagnetismo (o que culminou cerca de 3 anos mais tarde com as formulações de Feynmann, Schwinger e Tomonaga). Tal teoria não aparentava ter soluções razoáveis para as interações fortes posto que o acoplamento é muito grande não permitindo a convergência para cálculos perturbativos.

Os resultados experimentais com raios cósmicos indicavam que a partícula prevista por

Yukawa deveria ter spin 0 ou $1/2$, enquanto que os resultados extraídos nos laboratórios com o dêuteron (fotodesintegração e energia de ligação) e espalhamento p-n indicavam spin 0 ou 1. Ou seja, nem o spin nem a paridade da partícula sob transformação de reflexão espacial eram conhecidos. Havia muita desconfiança sobre a identidade do méson descoberto em 1936 e o previsto por Yukawa, também sobre a possibilidade de se construir alguma teoria para estas partículas.

Alguns anos antes, em 1939, Yukawa e Okayama [Yuk39] haviam mostrado que a maioria dos mésons ao penetrar na matéria poderia ser capturado pelos núcleos após perder quase toda sua energia por ionização e, se o material fosse denso, essa captura aconteceria antes de sua desintegração espontânea. Supondo isto, Tomonaga e Araki [Tom40] consideraram a força coulombiana entre os mésons e o núcleo e mostraram que os mésons negativos deveriam ter uma probabilidade maior de serem absorvidos do que os positivos, já que estes são repelidos eletromagneticamente pelo núcleo. Assim deveriam ser observados muito mais decaimentos de mésons positivos.

Nessa época os dados experimentais ou eram não muito confiáveis ou contraditórios. Esta situação perdurou até 1946, meses antes da descoberta do "verdadeiro méson" das interações fortes, quando os italianos Conversi, Pancini e Piccioni [Con47] fizeram um experimento decisivo. Utilizando ferro e carbono como materiais para testar a absorção dos mésons, eles encontraram uma taxa de decaimento de mésons negativos bem maior do que a esperada. Eles não estavam convencidos de que a partícula que detectaram não era a mesma de Yukawa ².

Esta experiência dos italianos foi um dos temas principais da I Shelter Island Conference, em junho de 1947, onde houve muita polêmica pois as primeiras notícias acerca da existência de novos elementos nos raios cósmicos (os píons) ainda não haviam chegado aos seus participantes. Weisskopf, por exemplo, sugeriu que um próton de raios cósmicos primários converteria um nucleon, de algum núcleo, em um núcleo excitado, que emitiria

²Com a descoberta do pión este efeito é explicado da seguinte forma: o muon, a partícula observada naquelas experiências de raios cósmicos, tem tempo de absorção diferente no ferro e no carbono, o que justifica o fato de no carbono, mesmo os muons negativos, decaírem antes de serem absorvidos, e não no ferro.

mésons, sendo esse tempo de vida médio escolhido de tal maneira para dar conta das observações de decaimento e absorção realizadas até essa época [Bro86].

A história da detecção do pión remonta a 1939. Desde esse período, C.F. Powell, de Bristol, empenhava-se em um projeto extenso de aperfeiçoamento dos métodos de emulsões fotográficas, que já era usado nas pesquisas em raios cósmicos, para que fosse também aplicado em estudos de física nuclear.

Em 1946/47, Powell, Lattes, Occhialini e Muirhead [Lat47a, Lat47b] investigavam reações nucleares no acelerador de Cockroft-Walton em Cambridge, quando resolveram expor algumas emulsões fotográficas recém desenvolvidas nos Pirineus, no monte Pic-du-Midi de La Bigorre. Esta medida produziu dados muito promissores sobre a existência do pión. Nesta experiência e na seguinte, no monte Chacaltaya em La Paz, um número considerável de eventos, com duas partículas de massas diferentes menores que a do próton e maiores que a do elétron, foram registrados. Essas partículas, supostamente de mesma carga, criaram padrões de ionização diferentes nas emulsões. O primeiro méson, que foi chamado de pión, logo decaía em outras partículas secundárias, um neutrino e no segundo méson, chamado de múon, sendo esta identificada com aquela encontrada ao nível do mar nas experiências anteriores (Fig 4). O pión deveria ser a partícula de Yukawa, pois decaía mais depressa que o observado a nível do mar conforme previsões anteriores e interagia com os núcleos.

A razão entre as massas foi estimada em cerca de $\frac{m_\pi}{m_\mu} \sim 1,30 - 1,40$, o que resultava aproximadamente $m_\pi \sim 260m_e$ e $m_\mu \sim 200m_e$.

Fig 4: A observação do pión

NATURE No. 4047 May 24, 1947 695

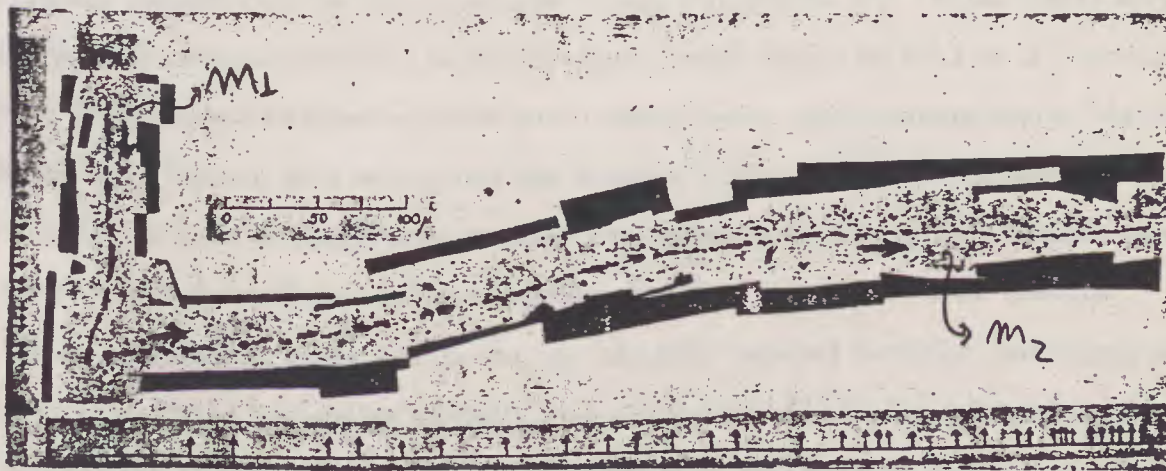


Fig. 1. OBSERVATION BY MRS. I. ROBERTS. PHOTOMICROGRAPH WITH COOKE $\times 45$ 'FLUORITE' OBJECTIVE. ILFORD 'NUCLEAR RESEARCH', BORON-LOADED C2 EMULSION. m_1 IS THE PRIMARY AND m_2 THE SECONDARY MESON. THE ARROWS, IN THIS AND THE FOLLOWING PHOTOGRAPHS, INDICATE POINTS WHERE CHANGES IN DIRECTION GREATER THAN 2° OCCUR, AS OBSERVED UNDER THE MICROSCOPE. ALL THE PHOTOGRAPHS ARE COMPLETELY UNRETOUCHED

Pouco tempo depois (1948) Gardner e Lattes [Gar48] observaram os mésons π carregados produzidos artificialmente no recém instalado ciclotron de Berkeley.

O Nome: Anderson [Mil47], em 1939, após a descoberta dos muons, sugeriu que o “heavy quantum”, como Yukawa chamava a partícula, fosse chamado de $\mu\epsilon\sigma\upsilon$ –meson, por ser uma partícula de massa intermediária entre a do próton e a do elétron. Muitos o chamavam de “heavy electron”, embora logo se tenha percebido que o termo não seria adequado, pois o elétron não interage fortemente como se esperava desta nova partícula. Um outro nome muito usado foi “mesotron”, que, segundo Bhabha, exhibe uma certa redundância etimológica com o “tr”, pois este não pertence à raiz grega (“meso”), o que acontece nos casos de nêutron e do elétron.

Entre estes e outros nomes menos usados (baryton, yukon, mesoton) foi o termo méson que se estabeleceu. Houve até uma votação com relação a este “problema” numa conferência na Universidade de Chicago em 1939.

E por um bom tempo este termo foi usado tanto para o muon quanto para o méson pi (a partir de 1947), o que foi alterado mais tarde, designando genericamente os hádrons de spin inteiro.

I.3 O Período Posterior

Como já dissemos, em 1942, alguns japoneses-Sakata, Inouye e Tanikawa- haviam proposto uma teoria com dois mésons, um escalar outro espinorial, para dar conta dos resultados obtidos com os raios cósmicos e com a interação n-p. Estas idéias apenas alcançaram a comunidade física ocidental algum tempo depois do final da II Guerra, em 1946 e 1947, quando os píons estavam sendo identificados. Independentemente, Marshak e Bethe introduziram uma teoria com dois mésons, sendo também um escalar e outro de spin 1/2, que, à luz de dados experimentais que os japoneses não tinham naquela época, fornecia resultados melhores para os experimentos com os raios cósmicos [Bro86].

Após a II Guerra, já era fato aceito que não seria possível formular uma teoria para as interações fortes nos moldes da QED, pois a constante de acoplamento pión-nucleon é muito grande, não permitindo cálculos perturbativos. Isto levou os físicos a se voltarem

ao estudo da fenomenologia para, antes de mais nada, entenderem melhor as propriedades dos mésons.

A Guerra havia levado um número extremamente elevado de físicos europeus aos EUA, que emergia como grande potência econômica. Essa situação resultou num apoio muito grande à ciência básica, permitindo a construção de aceleradores. Depois do ciclotron de Berkeley, dois grandes aceleradores para os padrões da época foram construídos em Rochester, 1949, e em Columbia, 1950, contribuindo para a formação de um campo de conhecimento na área.

O pión neutro foi detectado pela primeira vez em 1950 (Berkeley) [OCe50,Nis64] na reação $\pi^- + p \rightarrow n + \pi^0$, observando-se o espectro de energia de dois fótons provenientes do decaimento do π^0 , cujo tempo de vida média seria menor do que o dos píons carregados³, pois a interação fraca ocorre num tempo característico maior que a eletromagnética.

A medida do spin dos píons foi proposta e realizada em 1951 [Mar51,Che51,Nis64] através das reações relacionadas por reversão temporal:

$$\pi^+ + d \rightarrow p + p \quad (1)$$

$$p + p \rightarrow \pi^+ + d \quad (2)$$

Através do cálculo das seções de choque para esses dois processos e do princípio do balanço detalhado, obtém-se :

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega} = \left(\frac{3(2s+1)q^2}{2p^2} \right) \frac{d\sigma_1}{d\Omega}$$

onde s é o spin do méson π , p é o momento de um dos prótons e q o momento do pión. Os resultados experimentais foram obtidos em duas experiências, que indicaram tratar-se de um partícula de spin zero.

A paridade foi finalmente determinada em Berkeley em 1951 [Pan51,Nis64], por meio das reações :

$$\pi^- + d \rightarrow 2n(a)$$

$$\pi^- + d \rightarrow 2n + \gamma(b)$$

³Que são respectivamente: $\tau(\pi^0) \sim (0.9 \pm 0.3)10^{-16}$
 $\tau(\pi^\pm) \sim (2.55 \pm 0.03)10^{-8}$.

Supondo-se que o pión seja capturado num orbital atômico S pelo dêuteron, o estado inicial terá momento angular total 1 e paridade total igual ao produto das paridades do pión e do dêuteron ($J^P = 1^+$): \pm . O estado final é determinado pelo princípio de exclusão, segundo o qual os dois férmions (nêutrons) devem estar num estado antissimétrico. Mas o único estado antissimétrico que conserva o momento angular é P_1^3 , cuja paridade é negativa obrigando o pión a ser pseudoescalar.

I.4 Os Primeiros Resultados Teóricos

Por causa dos motivos já expostos, o desenvolvimento teórico das interações fortes desviou-se dos rumos da teoria de campos, que havia sido muito bem sucedida no caso do eletromagnetismo. Nas décadas de 50 e 60 enfatizou-se muito a obtenção de conhecimentos acerca das propriedades gerais da matriz S, a partir das idéias de Heisenberg de 1943, abandonando-se o formalismo da teoria de campos [Hei43]. Por outro lado o próprio conceito de partícula elementar tornou-se ambíguo face ao número crescente de partículas descobertas naquele período e à aparente impossibilidade de se construir uma teoria com os respectivos campos.

A observação de ressonâncias no espectro hadrônico levou à consideração de que muitos processos seriam dominados por esses estados na região de sua massa, o que pode ser traduzido matematicamente pela introdução ad hoc do propagador da partícula correspondente na expressão da amplitude. As propriedades analíticas das amplitudes foram muito estudadas, o que não levou, no entanto, à sua determinação total, por falta de informações de caráter dinâmico.

Essa situação perdurou mesmo alguns anos após Gell-Mann e Zweig [Gel64,Zwe64], em 1964, terem proposto os quarks como os componentes dos hádrons. A partir daí, os mésons passam a ser encarados como elementos de um noneto de estados pseudo-escalares, formados por um quark e um anti-quark, através do produto $3 \otimes \bar{3}$ da representação do grupo SU(3). Uma teoria fundamental para os quarks, que respeite a simetria associada a transformações desse grupo, deve ser capaz de ter como sub-produto partículas com as características observadas a nível hadrônico.

Paralelamente ao desenvolvimento da teoria da matriz S , entre o final da década de 50 e meados dos anos 60, percebeu-se que as correntes utilizadas no estudo das interações fracas e eletromagnéticas podiam trazer informações sobre os processos fortes, exemplificado na fig.5, o que desencadeou o surgimento da chamada álgebra de correntes [Lyt70,Rob91b,Zim91a,Gas60]. Nessa abordagem do problema é feita a hipótese de que as correntes hadrônicas axiais e vetoriais, construídas em analogia com a interação fraca, fecham a álgebra $SU(2) \times SU(2)$ com as seguintes relações de comutação :

$$[V_i(x), V_j(y)]_{x_0=y_0} = i\delta(x-y)f_{ijk}V_k(x)$$

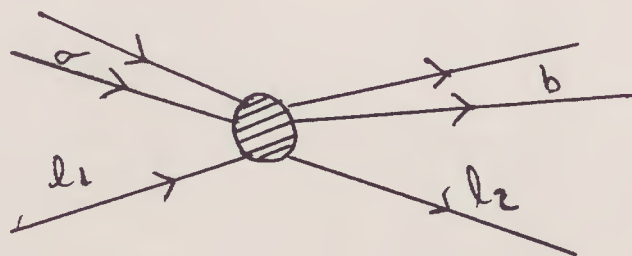
$$[V_i(x), A_j(y)]_{x_0=y_0} = i\delta(x-y)f_{ijk}A_k(x)$$

$$[A_i(x), A_j(y)]_{x_0=y_0} = i\delta(x-y)f_{ijk}V_k(x)$$

A simetria associada a essas transformações é conhecida como simetria quiral.

Essa hipótese foi posteriormente testada através de cálculos envolvendo estas relações e que possibilitassem fazer previsões que pudessem ser verificadas experimentalmente [Wei68b].

Fig 5: a e b são hádrons, l_1 e l_2 são léptons. Conhecendo-se as interações fraca e eletromagnética dadas por correntes, pode-se inferir algo sobre a interação forte.



Uma outra suposição importante nesta abordagem era a de que as amplitudes deveriam ter um comportamento suave, variando lentamente com a energia, a não ser quando da formação de ressonâncias, onde a matriz de espalhamento varia rapidamente (hipótese da "smoothness" das amplitudes). A grande dificuldade de se obter resultados exatos, foi contornada através da formulação de resultados para limites de baixas energias dos processos hadrônicos, assim como eletromagnéticos e fracos. As hipóteses da álgebra

de correntes e de suavidade da variação das amplitudes, juntamente com as fórmulas de redução de LSZ (Lehmann, Symanzik e Zimmermann) [Gas60,Zim91a]. permitiram o cálculo de amplitudes de espalhamento de processos fortes envolvendo píons a baixas energias [Wei66].

No contexto das lagrangianas, existem duas maneiras de se implementar a simetria quirial. A primeira delas foi introduzida no início dos anos 60 por GellMann, Levy e Schwinger [Sch57,Gel60] que criaram o modelo σ linear, invariante por transformações quirais, com a suposição da existência de uma partícula escalar, o méson sigma. No entanto este méson nunca foi observado. A sua eliminação da teoria levou aos modelos dinâmicos não lineares desenvolvidos por Weinberg [Wei68a], implementados por meio de lagrangianas efetivas capazes de reproduzir os resultados da álgebra de correntes na aproximação de árvore. Em 1979 Weinberg [Wei79] generalizou estes resultados para processos envolvendo “loops”.

Capítulo II

Cinemática e Propriedades Gerais

II.1 Introdução

Nesta seção vamos apresentar os elementos de cinemática necessários ao estudo fenomenológico e teórico do espalhamento $\pi\pi$, independentemente de modelos.

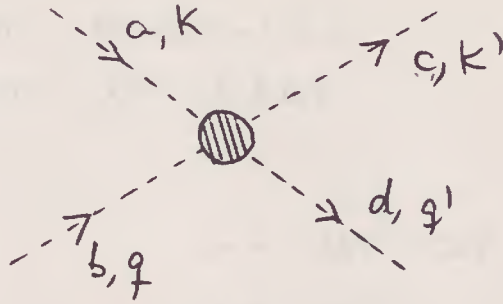
Fazemos a decomposição em ondas parciais de momentos angulares bem definidos da amplitude de espalhamento e analisamos as restrições impostas a ela pela simetria de cruzamento (“crossing”) e pela condição de unitariedade da matriz S. Esta última condição vincula as partes real e imaginária da amplitude, o que torna conveniente o uso da parametrização em termos da defasagem δ_l , para cada onda parcial de momento angular l , comumente empregada no tratamento dos resultados experimentais.

II.2 Parâmetros Cinemáticos

Consideramos o espalhamento pión pión genérico dado pelo diagrama da figura 1, que representa a reação:

$$\pi_a(k) + \pi_b(q) \rightarrow \pi_c(k') + \pi_d(q') \quad (\text{II.1})$$

Figura II.1: O espalhamento $\pi\pi$. sendo a, b, c, d índices de isospin e k, k', q, q' os quadrimomentos.



sendo que a, b, c, d são os índices de isospin e k, q, k', q' os quadrimomentos, satisfazendo a relação de conservação: $k + q = k' + q'$. Existem, portanto, apenas três variáveis independentes que, por conveniência, são tomadas na forma proposta por Mandelstam [Man84]:

$$\begin{aligned} s &= (k + q)^2 = (k' + q')^2 \\ t &= (k - k')^2 = (q' - q)^2 \\ u &= (k - q')^2 = (k' - q)^2 \end{aligned} \tag{II.2}$$

Estas obedecem o vínculo: $s + t + u = k^2 + q^2 + k'^2 + q'^2$. Para pions na camada de massa: $k^2 = q^2 = k'^2 = q'^2 = m_\pi^2$ onde μ é a massa do pión.

Existem referenciais especialmente importantes para o estudo de processos de espalhamento, que são: o do centro de massa (CM), do laboratório e o de Breit.

No CM, onde o momento das duas partículas têm o mesmo módulo, os quadrimomentos são dados por:

$$\begin{aligned} K^\mu &= (E, k, 0, 0) & K'^\mu &= (E, k \cos \theta, k \sin \theta, 0) \\ Q^\mu &= (E, -k, 0, 0) & Q'^\mu &= (E, -k \cos \theta, -k \sin \theta, 0) \end{aligned}$$

onde θ é o ângulo de espalhamento. Para as variáveis de Mandelstam, obtemos:

$$\begin{aligned} s &= W^2 \\ t &= -2k^2(1 - \cos \theta) \\ u &= -2k^2(1 + \cos \theta) \end{aligned} \tag{II.3}$$

onde $W=2E$ é a energia total no CM, θ é o ângulo de espalhamento.

No referencial de Breit, o módulo do momento transferido é igual a zero ($\theta = \pi$).

Temos:

$$K^\mu = (E, k, 0, 0) \quad K'^\mu = (E, -k, 0, 0)$$

$$Q^\mu = (E, -k, 0, 0) \quad Q'^\mu = (E, k, 0, 0)$$

de onde:

$$\begin{aligned} s &= (2E)^2 - (2k)^2 \\ t &= -4k^2 \\ u &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

No referencial de laboratório usual há uma partícula incidente que é espalhada por uma outra em repouso (alvo). Os píons têm spin zero tornando o processo simétrico por rotações com relação ao eixo de incidência da partícula a ser espalhada, restando um único ângulo para parametrizar s, t e u : θ_{lab} . Escreve-se:

$$K^\mu = (E, k, 0, 0) \quad K'^\mu = (E', k' \cos \theta_{lab}, k' \sin \theta_{lab}, 0)$$

$$Q^\mu = (\mu, 0, 0, 0) \quad Q'^\mu = (\varepsilon', k - k' \cos \theta_{lab}, -k' \sin \theta_{lab}, 0)$$

Resultando:

$$\begin{aligned} s &= (E + \mu)^2 - k^2 \\ t &= (E - E')^2 - (k - k' \cos \theta_{lab})^2 - k'^2 \sin^2 \theta_{lab} \\ u &= (E - \varepsilon')^2 - (k' \cos \theta_{lab})^2 - (k' \sin \theta_{lab})^2 \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Neste trabalho, utilizaremos o referencial do CM.

II.3 Convenções

A amplitude de probabilidade de transição de um estado inicial i a outro final f é dada pelo elemento da matriz S_{fi} :

$$S_{fi} = \langle f | i \rangle,$$

que pode ser escrito da seguinte maneira:

$$S_{fi} = I_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(k + q - k' - q') T_{fi} \quad (\text{II.6})$$

onde I_{fi} representa os processos onde não há interação entre as partículas e T_{fi} a amplitude de transição de um estado inicial a um estado final causada pela interação [Lan72].

A seção do choque diferencial elástica é a razão entre o número de partículas espalhadas num ângulo sólido $d\Omega$ por unidade de tempo e o número de partículas incidentes numa unidade de área por unidade de tempo. Considerando os estados de momento e isospin normalizados covariantemente [Rob91a] :

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle = 2E\delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \quad (\text{II.7})$$

onde $E = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_\pi^2}$. Obtém-se no referencial do CM a seguinte expressão para a seção de choque:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\epsilon}{64\pi^2 W^2} |T|^2 \quad (\text{II.8})$$

Sendo que ϵ é um fator igual a $\frac{1}{n!}$, onde n é o número de partículas idênticas envolvidas no espalhamento.

Para a região bem próxima ao limiar, no CM onde $t \rightarrow 0$ e $s \rightarrow 4m_\pi^2$ definimos o comprimento de espalhamento a , de modo análogo ao definido na mecânica quântica não relativística [Sak85] :

$$\sigma_{tot} \Big|_{\text{limiar}} = 4\pi a^2 \quad (\text{II.9})$$

II.4 A Estrutura da Amplitude : Isospin

O pión tem spin zero e, por isso, as amplitudes têm elementos apenas no espaço de isospin e de configuração. Seu isospin é 1 (sendo os estados físicos π^+ , π^- , π^0), o que faz com que no espalhamento $\pi\pi$ possam haver isospins totais 0, 1 ou 2. Deste modo no espaço de isospin, a amplitude mais geral pode ser escrita como:

$$T(s, t, u) = T^0(s, t, u)P_0 + T^1(s, t, u)P_1 + T^2(s, t, u)P_2 \quad (\text{II.10})$$

onde P_0, P_1, P_2 são operadores de projeção de isospin, ortogonais entre si, para auto estados de isospin total 0, 1 e 2 respectivamente. Eles têm a seguinte forma:

$$P_0 = \frac{1}{3}\delta_{ab}\delta_{cd}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{2} (\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}) \\
P_2 &= \frac{1}{2} (\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) - \frac{1}{3} \delta_{ab}\delta_{cd}
\end{aligned} \tag{II.11}$$

A amplitude T pode também ser escrita enfatizando os estados de carga físicos, isto é, estados correspondentes às situações experimentais. Escrevendo os estados de isospin em coordenadas cartesianas, temos:

$$\begin{aligned}
|\pi^+ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1 \rangle + i|2 \rangle) \\
|\pi^- \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1 \rangle - i|2 \rangle) \\
|\pi^0 \rangle &= |3 \rangle
\end{aligned} \tag{II.12}$$

Calculando os sanduíches da amplitude acima para a reação

$\langle c | \langle d | T(s, t, u) | a \rangle | b \rangle$; obtemos [Mar76] :

$$T(00, +-) = \frac{T^2}{3} - \frac{T^0}{3} \tag{II.13}$$

$$T(--, --) = T^2 \tag{II.14}$$

$$T(++ , ++) = T^2 \tag{II.15}$$

$$T(+-, +-) = \frac{T^0}{3} + \frac{T^1}{2} + \frac{T^2}{6} \tag{II.16}$$

$$T(+0, +0) = \frac{T^1}{2} + \frac{T^2}{2} \tag{II.17}$$

$$T(00, 00) = \frac{T^0}{3} + \frac{2T^2}{3} \tag{II.18}$$

A hipótese da “independência da carga” corresponde à idéia de que a interação entre partículas depende apenas do multipletto de isospin a que pertencem. Assim existem três estados $\pi\pi$ que têm isospin total $I = 1$ e que interagem de modo único, o mesmo acontecendo para os cinco estados do multipletto $I = 2$. Dessa maneira, fica claro em II.13-18 que todos os estados físicos são superposições de apenas três estados de isospin total.

Alternativamente, enfatizando a simetria de Bose-Einstein e de cruzamento, podemos

escrever a amplitude T como:

$$T(s, t, u) = \delta_{ab}\delta_{cd}A(s, t, u) + \delta_{ac}\delta_{bd}B(s, t, u) + \delta_{ad}\delta_{bc}C(s, t, u) \quad (\text{II.19})$$

onde A , B e C são funções escalares dos invariantes s , t , u e relacionados com as amplitudes de isospin bem definido por :

$$\begin{aligned} A &= \frac{T^0 - T^2}{3}; \\ B &= \frac{T^1 + T^2}{2}; \\ C &= \frac{T^2 - T^1}{2} \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

A simetria de Bose-Einstein faz com que a amplitude deva ser simétrica pela troca entre píons iniciais ou finais entre si. A permutação dos píons iniciais ou finais é representada por:

$$|a, k \rangle \leftrightarrow |b, q \rangle \text{ ou } |c, k' \rangle \leftrightarrow |d, q' \rangle$$

Estas duas transformações correspondem às seguintes trocas para as variáveis de Mandelstan: $s \leftrightarrow s, t \leftrightarrow u$

Usando a condição de simetria sob essas transformações na amplitude (II.19) obtemos:

$$A(s, t, u) = A(s, u, t); B(s, t, u) = C(s, u, t) \quad (\text{II.20a})$$

A simetria de cruzamento no canal t , por outro lado, corresponde à invariância de amplitude pelas transformações:

$$|a, k \rangle \leftrightarrow |c, -k' \rangle \text{ ou } |b, q \rangle \leftrightarrow |d, -q' \rangle \text{ que estão associadas às trocas } s \leftrightarrow u; t \leftrightarrow t.$$

Assim, a simetria para essa troca impõe que:

$$A(s, t, u) = C(u, t, s); B(s, t, u) = B(u, t, s) \quad (\text{II.20b})$$

Por fim, o cruzamento no canal u , cujas transformações correspondem a $|a, k \rangle \leftrightarrow |d, -q' \rangle$ ou $|b, q \rangle \leftrightarrow |c, -k' \rangle$, o que equivale à permutação $s \leftrightarrow t, u \leftrightarrow u$, produz as relações:

$$A(s, t, u) = B(t, s, u); C(s, t, u) = C(t, s, u) \quad (\text{II.20c})$$

II.5 A Estrutura da Amplitude: Momento Angular

Em geral, a amplitude de espalhamento T é função das tres variáveis de Mandelstam, das quais apenas duas são independentes. No caso do referencial de centro do massa, é muitas vezes conveniente escrevermos a amplitude em termos de outras variáveis, a energia total W e o ângulo de espalhamento θ . Podemos ainda, decompô-la numa superposição de ondas esféricas, o que corresponde a escrever a amplitude $T^I(W, \theta)$ em termos das amplitudes parciais $T_l^I(W, \theta)$, que têm momentos angulares bem definidos:

$$T_{cm}^I(s, t, u) = \sum_l (2l + 1) P_l(\cos\theta) T_l^I(W) \quad (\text{II.21})$$

onde $P_l(\cos\theta)$ são polinômios de Legendre.

Podemos notar que a simetria de Bose-Einstein vincula os valores possíveis de I e de l na somatória, ou seja, pela simetria na troca de t com u no canal s , observamos que $B(s, t, u)$ deve depender de u da mesma maneira que $C(s, t, u)$ depende de t , assim ao determinar T^1 por II.20, notamos que haverá um cancelamento das potências pares de $\cos\theta$, restando apenas contribuições de potências ímpares de l . Analogamente para o caso de T^0 e T^2 haverá apenas dependência de potências pares.

Assim para a amplitude ser simétrica, a soma na equação (II.21) está restrita a valores pares de l para $I = 0$ ou 2 e valores ímpares para $I = 1$.

Para obter a relação inversa, podemos multiplicar a expressão (II.21) por $P_l(\cos\theta)$ e aplicar relações de ortogonalidade dos polinômios de Legendre:

$$T_l^I(W) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) P_l(\cos\theta) T^I(W, \theta) \quad (\text{II.22})$$

Assim, para uma dada amplitude de espalhamento $T(W, \theta)$ podemos achar quais as contribuições de cada onda parcial com momento angular bem definido no processo.

Usando a equação (II.21) na expressão da seção de choque diferencial(II.8), obtemos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\epsilon}{\pi^2 64 W^2} \left| \sum_l (2l + 1) P_l(\cos\theta) T_l^I(W) \right|^2 \quad (\text{II.23})$$

A seção de choque total é obtida integrado-se no ângulo sólido $d\Omega = d(\cos\theta)d\phi$ e aplicando-se a relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre:

$$\sigma^I = \frac{4\pi\epsilon}{4\pi^2 W^2 64} \sum_l (2l + 1) |T_l^I|^2 = \sum_l \sigma_l^I \quad (\text{II.24})$$

Ou seja, a seção de choque total é a soma das seções de choque para todos os estados de momento angular, analogamente à expressão obtida na mecânica quântica não relativística:

$$\sigma = \epsilon 4\pi \sum_l (2l + 1) |f_l^I|^2 \quad (\text{II.25})$$

A comparação entre essas duas expressões permite escrever, a menos de uma fase imaginária, que não contribui na seção de choque:

$$f_l^I(W) = \frac{1}{16\pi W} T_l^I \quad (\text{II.26})$$

Esta relação é útil porque permite relacionar a amplitude relativística proveniente dos cálculos teóricos à não relativística, empregada para expressar os resultados experimentais em termos de defasagens.

II.6 A Estrutura da Amplitude: Unitariedade e Analiticidade

Para haver conservação de probabilidade nos canais elásticos, o fluxo de partículas incidentes deve ser igual ao de partículas espalhadas. Este fato é descrito matematicamente pela unitariedade da matriz S , que impõe uma importante restrição à amplitude representada pelo Teorema Óptico.

A matriz S pode ser escrita como II.6, para o sanduíche de $|S|^2$, entre os estados $|i\rangle$ e $|f\rangle$, com a normalização covariante dada em (II.7) e com a relação de completeza para estados intermediários $|\mathbf{p}_n\rangle = |\mathbf{p}_{n1}\mathbf{p}_{n2}\rangle$, resulta:

$$\sum_{n1,n2} \int \frac{d^3 p_{n1} d^3 p_{n2}}{(2\pi)^6 2E_1 2E_2} |\mathbf{p}_{n1}\mathbf{p}_{n2}\rangle \langle \mathbf{p}_{n1}\mathbf{p}_{n2}| = 1 \quad (\text{II.27})$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \langle f|SS^\dagger|i\rangle &= \delta_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) (T_{fi} - T_{fi}^\dagger) \\ &+ (2\pi)^8 \sum_{n1,n2} \int \frac{d^3 p_{n1}}{(2\pi)^3 2E_{n1}} \frac{d^3 p_{n2}}{(2\pi)^3 2E_{n2}} \delta^4(p_f - p_n) \delta^4(p_n - p_i) T_{fn} T_{ni}^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

onde \mathbf{p}_{n1} e \mathbf{p}_{n2} representam os momentos de estados intermediários de duas partículas.

Deste modo:

$$T_{fi} - T_{if}^\dagger = 2i \text{Im} T_{fi} = i \int d^3 p_{n1} d^3 p_{n2} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \delta^4(p_i - p_n) \frac{T_{fn} T_{ni}^\dagger}{4E_{n1} E_{n2}} \quad (\text{II.29})$$

A função δ nesta expressão pode ser escrita como:

$\delta^4(P_f - P_n) = \delta^3(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_n)\delta(E_f - E_n)$, o que permite a integração em p_{n2} , produzindo o seguinte resultado:

$$T_{fi} - T_{if}^\dagger = \frac{i|\mathbf{k}|}{(4\pi)^2} \int d\Omega \frac{T_{ni}^\dagger T_{fn}}{2E_{n2}} \delta(E_n - E_f) dp_{n1} p_{n1}^2 \quad (\text{II.30})$$

Para efetuar a integração da função δ da energia, é conveniente escrever: $E_{n1} = 2\sqrt{p_{n1}^2 + m_\pi^2}$, de onde resulta:

$$dE_{n1} = \frac{2p_{n1} dp_{n1}}{E_{n1}}$$

Assim :

$$T_{fi} - T_{fi}^\dagger = \frac{i}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{k}|}{W} \int d\Omega T_{fi} T_{fi}^\dagger$$

Especializando este resultado para o espalhamento para frente $|k_f\rangle = |k_i\rangle$, e comparando esta expressão com II.8, obtemos:

$$\text{Im}T_{ii} = 4W|\mathbf{k}|\sigma_{tot} \quad (\text{II.31})$$

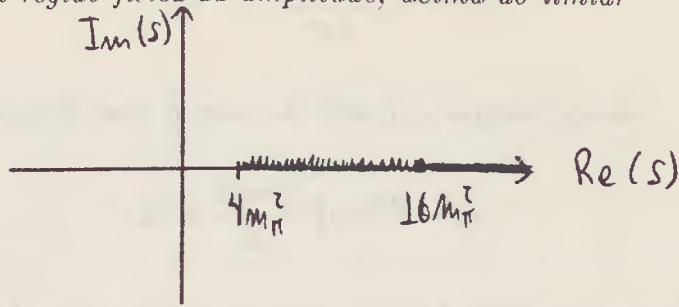
Usando-se a expressão II.26 obtemos a expressão correspondente para a amplitude não relativística:

$$\text{Im}f_{ii} = \frac{|\mathbf{k}|}{4\pi} \sigma_{tot} \quad (\text{II.32})$$

Esta expressão representa o Teorema Óptico para a amplitude T definida em (II.6). Portanto, a unitariedade da matriz S , na região física requer que a amplitude tenha uma parte imaginária para os valores reais de energia, isto é, que ela seja não analítica na região física. O limiar para que isso ocorra é a energia do sistema correspondente a dois píons em repouso no CM, ou seja $s > 4m_\pi^2$ e $t \leq 0$.

O canal inelástico tem seu limiar quando a energia do sistema é suficiente para produzir dois píons a mais - não pode ser apenas um porque não conservaria a paridade G . No CM esta energia será $W = 4m_\pi$, correspondendo a um momento no CM igual a $\sqrt{3}m_\pi$ [Bjo65]. Podemos observar esta região do plano complexo da variável s na Fig2.

Fig 2: O corte na região física da amplitude, acima do limiar

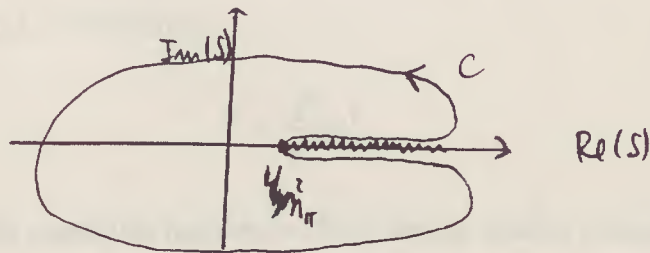


A não analiticidade na região física permite representar a amplitude T através do Teorema de Cauchy, por exemplo:

$$\begin{aligned}
 T(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C dS' \frac{T(S')}{S' - S} = \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} dS' \frac{2i\Im T(S')}{S' - S - i\epsilon} + C_\infty
 \end{aligned}
 \tag{II.33}$$

onde C é contorno no plano complexo conforme mostra a Figura 3.

Fig 3: O plano complexo, C é o contorno de integração para a representação da amplitude dada por II.33



Quando a amplitude é decomposta em canais de isospin e momento angular bem definidos, a condição de unitariedade vale para cada canal. Assim, parametrizando-se o elemento de matriz da amplitude de transição S por uma fase:

$$S_l = e^{2i\delta_l^I}
 \tag{II.34}$$

com $\delta_l = \delta_l(s,t,u)$ real; e identificando com a forma proveniente da mecânica quântica não relativística:

$$f_l^I = \frac{1}{k} e^{i\delta_l^I} \sin \delta_l^I
 \tag{II.35}$$

obtemos para amplitude T, através de II.26:

$$T_l^I = \frac{16\pi W}{k} e^{i\delta_l^I} \sin \delta_l^I$$

$$T_l^I = \frac{16\pi W}{2ik} (\epsilon^{2i\delta_l^I} - 1) \quad (\text{II.36})$$

que pode ser generalizada para o caso não elástico, escrevendo-se:

$$T_l^I = \frac{16\pi W}{2ik} (\eta_l e^{2i\delta_l^I} - 1) \quad (\text{II.37})$$

sendo $0 \leq \eta_l^I(k^2) \leq 1$ uma medida de inelasticidade da reação, que apenas contribuirá quando a energia do sistema \sqrt{s} for maior do que o limiar do primeiro canal inelástico.

No caso do limiar elástico, escrevemos o comprimento de espalhamento como (para o limite :

$$a_l^I = \frac{T_l^I}{16\pi W} |_{k \rightarrow 0} \quad (\text{II.38})$$

Rigorosamente, no limiar só há a contribuição da onda s . No entanto, costuma-se também generalizar o conceito de comprimento de espalhamento de modo a abarcar as outras ondas parciais no limiar, escrevemos:

$$f_l^I = \frac{q^{2l}}{\mu^{2l}} a_l^I \quad (\text{II.39})$$

onde q é o momento da partícula incidente. Esta forma traduz o fato de só haver onda s da amplitude no limiar ($q \rightarrow 0$).

Observamos na expressão (II.36) da amplitude em função da defasagem que, quando $\delta_l^I = \frac{\pi}{2}$, a amplitude atinge o valor máximo tornando-se um número imaginário puro. Este ponto caracteriza uma ressonância. Do formalismo não relativístico define-se a largura Γ da ressonância por

$$\frac{d(\cot \delta_l^I)}{dE} |_{\text{ress}} = -\frac{2}{\Gamma}$$

ou seja, quanto mais rápida a variação da amplitude, e da defasagem, menor a largura.

As propriedades discutidas até aqui fornecem alguns subsídios, não suficientes, para o cálculo da amplitude de espalhamento sem auxílio de nenhum embasamento dinâmico, como foi largamente estudado nas décadas de 50 e 60. No entanto, elas são muito gerais e devem ser obedecidas por qualquer teoria ou modelo dinâmicos.

II.7 Unitarização de Amplitudes Reais

Como veremos no capítulo quatro, as amplitudes derivadas de modelos com simetria quiral em ordem mais baixa de aproximação são reais. Isto significa que, a princípio, são válidas apenas para o limiar, onde a parte imaginária da amplitude é zero. No entanto em energias maiores a parte imaginária torna-se importante.

Um método de unitarização bastante utilizado consiste em identificar a parte real da amplitude teórica com a parte real da amplitude parametrizada em termos das defasagens. Estas fornecem automaticamente a parte imaginária.

Vimos na seção anterior que as amplitudes de onda parcial l de isospin I podem ser escritas como:

$$f_l^I = \frac{e^{i\delta_l^I} \sin(\delta_l^I)}{k} \quad (\text{II.40})$$

de onde extraímos a parte real que pode ser identificada à amplitude encontrada através dos modelos:

$$\Re f_l^I = \frac{\sin 2\delta_l^I}{2k} = m_l^I \quad (\text{II.41})$$

o que equivale a escrever:

$$\delta_l^I = \frac{1}{2} \arcsin(2km_l^I) \quad (\text{II.42})$$

Dessa maneira, as amplitudes unitarizadas podem ser escritas como:

$$k f_l^I = km_l^I + i \frac{1 - \sqrt{1 - 4k^2(m_l^I)^2}}{2} \quad (\text{II.43})$$

sendo que definimos $m_l^I = \frac{\Re(T_l^I)}{16\pi W}$ conforme (II.41). Se expandirmos o termo imaginário em série, obtemos:

$$k f = km + i \left\{ (km)^2 - (km)^4 + 2(km)^6 + 5(km)^8 + \dots \right\} \quad (\text{II.44})$$

No entanto ao considerarmos a parametrização II.42, veremos que sua validade é limitada pelo valor que o argumento da função $\arcsen()$ pode ter.

Um outro método para se unitarizar a amplitude teórica consiste em adicionar à amplitude original todas as suas iterações possíveis com as partículas intermediárias na camada de massa, tal como indicado na figura II.4.

Fig.II.4: *Unitarização dinâmica: soma de todas as iterações com as partículas intermediárias na camada de massa.*



Escrevendo as amplitudes :

$$ikf = ikm + (ikm)^2 + (ikm)^3 + .. \quad (II.45)$$

cuja soma para cada canal de isospin e momento angular é:

$$f_l^I = \frac{m_l^I}{1 - ikm_l^I} \quad (II.46)$$

Explicita-se a dependência da amplitude m_l^I com relação à defasagem invertendo-se a relação anterior e escrevendo f em termos de δ , obtendo-se:

$$m_l^I = \frac{tg\delta_l^I}{k} \quad (II.47)$$

A amplitude m é real e faz com que a defasagem também o seja. Esta parametrização não impõe restrição ao valor que a amplitude do modelo pode assumir, o que não ocorre na parametrização anterior. Este método é chamado de unitarização dinâmica. Escreve-se a amplitude unitarizada τ_l^I como:

$$\tau_l^I = 16\pi W \frac{f_l^I}{1 - ikf_l^I} \quad (II.48)$$

Neste procedimento, a parte real da amplitude também é corrigida, já que ela é dada por $\Re\tau_l^I$

Capítulo III

Medidas Experimentais da Interação Píon Píon

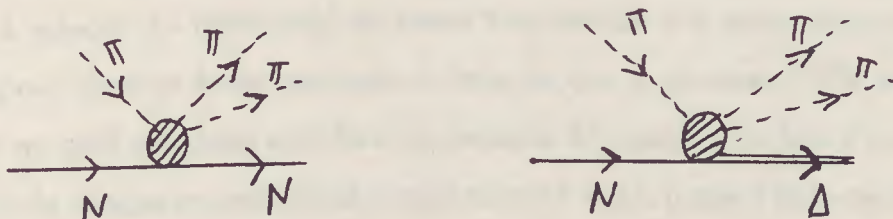
III.1 Introdução

Um fator importante na determinação experimental das seções de choque $\pi\pi$ é a impossibilidade de se fazer um alvo de píons, posto que eles decaem rapidamente; as vidas médias dos píons neutros e carregados são respectivamente da ordem de 10^{-16} e 10^{-8} s.

Isto fez com que fossem desenvolvidos métodos indiretos de obtenção de resultados experimentais a partir de outras reações envolvendo a interação $\pi\pi$. Em princípio, qualquer reação em que isto ocorra pode ser fonte potencial de informação, mas, na prática é necessário estudar as possibilidades de experimentação e análise de dados de maneira que estes possam ser confiáveis [Mar76].

Os processos mais utilizados são as produções periféricas de píons na reação: $\pi N \rightarrow \pi\pi B$, onde B é um bárion (N, Δ), a altas energias e pequena transferência de momento, esquematizados na Figura III.1.

Fig III. 1: *Produção periférica de píons.*



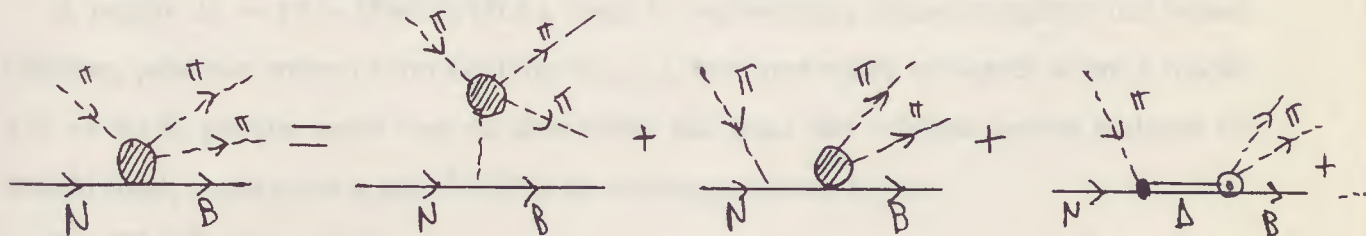
Além do estudo do espalhamento $\pi\pi$, esta reação permite também, investigar a fenomenologia de ressonâncias. Através de reações do tipo $PN \rightarrow M^*B$, onde P é

um méson pseudo escalar ($\pi;K$), M^* representa estados com vários mésons ($\pi\pi$, KK , $\pi\pi\pi, K\pi$).

Centralizamos nossa discussão na reação $\pi N \rightarrow \pi\pi B$, na região de energia onde o canal elástico não tem contribuição significativa.

Esta reação está associada a uma série de processos, alguns dos quais, mostrados na Figura III.2. O único diagrama relevante para o espalhamento $\pi\pi$ é o que envolve a troca de um píon (OPE = "one pion exchange"), o primeiro do lado direito na figura III.2.

Fig III.2: Diagramas que contribuem para a reação $\pi N \rightarrow \pi\pi B$



Para se obter informações sobre a interação $\pi\pi$, portanto, é necessário fazer uma separação da contribuição deste processo da dos outros, que constituem o fundo ("background"), o que é fonte de incerteza nos resultados. A importância dos vários diagramas varia com a energia do píon incidente e o momento transferido. Em particular a influência dos estados ressonantes (por exemplo, o terceiro diagrama da Figura III.2) pode diminuir com o aumento da energia. Para o momento do píon incidente no referencial do LAB acima de $1,5 \frac{GeV}{c}$, e momentos transferidos pequenos a contribuição do OPE torna-se importante.

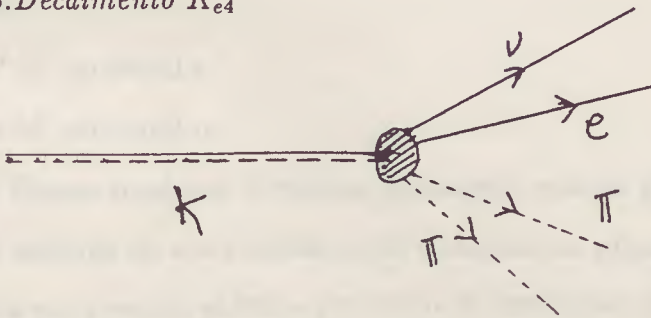
A análise dos dados experimentais é feita em três estágios. Primeiramente é preciso entender quais as características do processo de troca de um píon (OPE) em comparação com os outros. A adoção do referencial do canal t da reação é a mais adequada para essa análise. Depois, deve-se levar em conta o fato de que o processo OPE envolve o espalhamento $\pi\pi$ no qual um deles está fora da camada de massa. Por isso é necessário extrapolar a seção de choque experimental para o ponto $t \sim \mu^2$, o que é feito escolhendo-se uma curva para alguns pontos na região experimental. Dessa maneira, quanto mais dados houver para baixos momentos transferidos, melhor a extrapolação. A última etapa consiste em relacionar os resultados das seções de choque a defasagens com momentos

angulares e isospin bem definidos . Os resultados de análise deste tipo para algumas experiências são apresentados na próxima seção.

Um outro processo importante para se obter resultados experimentais para o espalhamento $\pi\pi$ é o decaimento K_{e4} , cuja análise não depende de modelos, e permite a determinação das defasagens a baixas energias, perto do limiar. Nesta região de energia, o processo de produção de dipíons não leva a resultados precisos, o que torna o decaimento do kaon extremamente importante para o teste dos modelos teóricos existentes para baixas energias.

A reação $K \rightarrow \pi\pi l\nu$ (Figura III.3), onde $l\nu$ representam respectivamente um lépton (elétron, pósitron, muon) e um neutrino (ν_e, ν_μ), tem uma outra vantagem sobre a reação $\pi N \rightarrow \pi\pi B$, porque neste caso os dois píons são reais não existem outros hádrons no estado final, o que evita a interferência de outros processos fortes.

Fig III.3:Decaimento K_{e4}



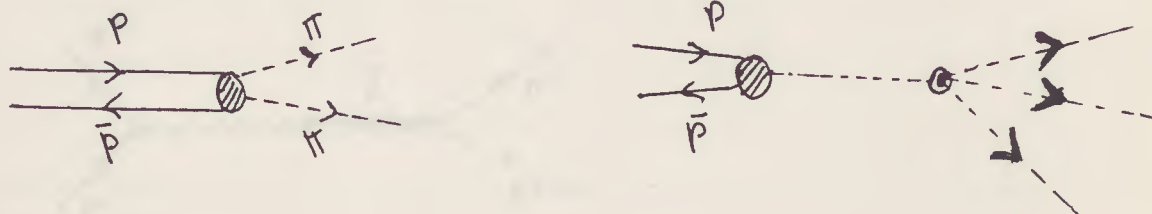
A extração dos dados das defasagens do espalhamento $\pi\pi$ é feita com base na parametrização da distribuição do decaimento em fatores de forma que levam em conta as interações forte e fraca presentes através das correntes vetorial e axial.

Os dois processos anteriores, produção periférica de píons e decaimento K_{l4} , são os mais utilizados. Entretanto, existem mais algumas experiências utilizadas, mas que não fornecem dados muito confiáveis ou porque as análises dos dados dependem de modelos ou por serem imprecisas. Ainda há experiências utilizadas para verificar se os resultados das defasagens $\pi\pi$ por alguma experiência são compatíveis com outros dados.

Por exemplo, a aniquilação nucleon-antinucleon pode fornecer dados por meio da reação $p\bar{p} \rightarrow \pi\pi$ (Figura III.4a), mas sua análise de dados requer algum modelo para separar este processo dos outros envolvidos na aniquilação tais como $p\bar{p} \rightarrow K\bar{K}, \rightarrow \pi\pi\pi$, etc.). Existe uma quantidade considerável de dados para esta reação, extraídos com base

na formação de ressonâncias com baixo momento angular. Um feixe de antiprótons incide em um alvo de hidrogênio líquido ionizando-o e perdendo energia até ser capturado num orbital $p\bar{p}$, seguido de aniquilação em dois píons. Este compete com o processo $p\bar{p} \rightarrow \pi\pi\pi$ (Figura III.4b), cuja análise de dados também é altamente dependente de modelos, além de ser um processo menos comum que o caso de aniquilação em onda S ($p\bar{p} \rightarrow \pi\pi$).

Fig III4a: Aniquilação $p\bar{p} \rightarrow \pi\pi$ Fig III4b: Aniquilação $p\bar{p} \rightarrow \pi\pi\pi$



Um outro processo relacionado à interação $\pi\pi$ é o espalhamento πN , na qual estudam-se as reações:

$$\pi N \rightarrow \pi' N' \text{ no canal } s,$$

$$\pi' N \rightarrow \pi N' \text{ no canal } u,$$

A partir dessas medidas, espera-se conseguir valores para as amplitudes no canal t: $\pi\pi' \rightarrow NN'$, através de uma continuação analítica no plano s, t, u, e a partir delas obter as defasagens para região elástica por meio de condições de unitariedade generalizadas.

Esta foi uma das primeiras maneiras empregadas para se tentar obter alguma informação sobre a interação $\pi\pi$ por Hamilton e Spearman em 1961 [Mar76], cujas expectativas quantitativas estavam bem acima dos valores encontrados posteriormente nas experiências.

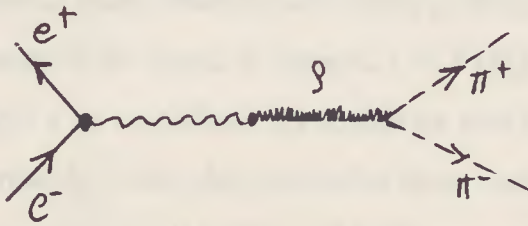
Este método é mais recomendado como teste de consistência para as amplitudes $\pi\pi$ de outros experimentos, porque apenas fornece informações de maneira mais ou menos confiável sobre a defasagem $\delta_{l=0}^{I=0}$.

Os decaimentos dos estados mistos de K_0 e \bar{K}_0 ; de kaons ou etas em três píons, $K, \eta \rightarrow 3\pi$, são muito dependentes de modelos e aproximações que não garantem, por si só, uma confiabilidade aos resultados.

Um outro exemplo de processos mensuráveis é a aniquilação $e^- + e^+ \rightarrow \pi^- + \pi^+$ que permite o estudo da componente da onda p, com a mesma vantagem do decaimento K_{e4} ;

só há dois hádrons no estado final. Para o processo da Figura III.5, a seção de choque fornece uma medida direta do fator de forma do píon, que se relaciona com a defasagem da onda p da região elástica $\pi\pi$ por meio de reversão temporal e de unitariedade. Utilizando-se de relações de dispersão e um modelo para a região de dominância do méson vetorial, é possível extrair informações da defasagem δ_1^1 .

Fig III.5: Processo que permite medir o fator de forma do píon



III.2 Resultados Experimentais

Mostramos agora alguns resultados experimentais das medidas de defasagens do espalhamento píon píon para energias no CM até aproximadamente 1 GeV. Esta apresentação é feita de modo não sistemático e tem por finalidade apenas promover um sentimento dos padrões dos dados experimentais. Nessa região de energia a amplitude é determinada pelas ondas parciais s, p e d , mas a contribuição desta última é pequena.

Para o caso de produção periférica de píons existem dados provenientes de muitas experiências. Bombardeando um alvo, por exemplo, de Tungstênio como na experiência do grupo CERN-MUNICH 1974 [Mar76], com um feixe de prótons, produzem-se os píons que são colimados em feixes através de um espectrômetro, este feixe por sua vez incide em um alvo de prótons (hidrogênio ou dêuterons).

Os dados de Rosselet se referem a uma região de energia um pouco mais baixa sendo mais apropriados para a obtenção dos comprimentos de espalhamento. As defasagens são sempre plotadas como função da energia total dos dois píons finais no centro de massa dessas duas partículas e do momento de um desses píons também nesse CM.

Nas Figuras III.6,7,8 vemos alguns resultados da defasagem da onda S do canal de isospin $I=0$ respectivamente extraídos do livro de Martin et al [Mar76], de Alekseeva

et al [Ale82] e da análise do experimento do decaimento K_{e4} por Rosselet et al [Ros77] comparado com outros resultados.

Observamos que há uma discordância quantitativa entre a maioria dos resultados proveniente de ambiguidades na maneira pela qual é possível fazer a análise de dados. Por volta de 850 MeV no canal $I = 0$ da onda S, observa-se uma ressonância quando a defasagem atinge $\frac{\pi}{2}$ associada a um méson escalar. Dados um pouco mais recentes [Ale82] não alteram essas observações, como podemos ver na Fig III.7.

A onda S do canal de isospin $I = 2$ (δ_0^2) é pequena e cresce pouco mostrando uma tendência a se estabilizar na região de energia considerada e apresenta sinais negativos representando o fato das interações nesse canal de isospin ser repulsiva (Gráficos III.9,10) - apresentados por [Mar76] e [Ale82].

Para a onda P, $I=1$, apresentamos os dados reproduzidos por Martin(76) e por Alekseeva(82) nas Fig III.11,12, onde nota-se claramente a presença da ressonância do ρ . A onda D ainda é muito pequena acarretando um erro maior quando da sua completa determinação .

Alguns resultados para as ondas D são reproduzidos nas Fig.13,14,15, onde se pode notar que eles correspondem a defasagens bastante pequenas.

Reproduzimos ainda o resultado do ajuste apresentado por Höhler [Hoh83] extraídos da análise de Froggatt e Petersen [Fro77], para as defasagens que contribuem na faixa de energia de até 1 GeV, FigIII.16. Eles utilizaram dados da experiência $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+$ na $17 \frac{GeV}{c}$ do grupo CERN-MUNICH [Est74] e de Rosselet [Ros77] do decaimento K_{e4} . Ao decompor os resultados experimentais nos canais de isospin e momento angular, alguns parâmetros são fixados. No caso desta última análise, foram ajustados os valores da onda d (de isospin $I=0,2$) e f (de isospin $I=1$) e dos comprimentos de espalhamento: $a_0^0 = 0.30\mu^{-1}$ e $a_1^1 = 0.031\mu^{-3}$.

Esses dados serão utilizados para a comparação com previsões teóricas, por serem os únicos disponíveis em tabelas numéricas.

Fig III.6- Dados citados em Martin et al (1976) pag.100, onda s, I=0

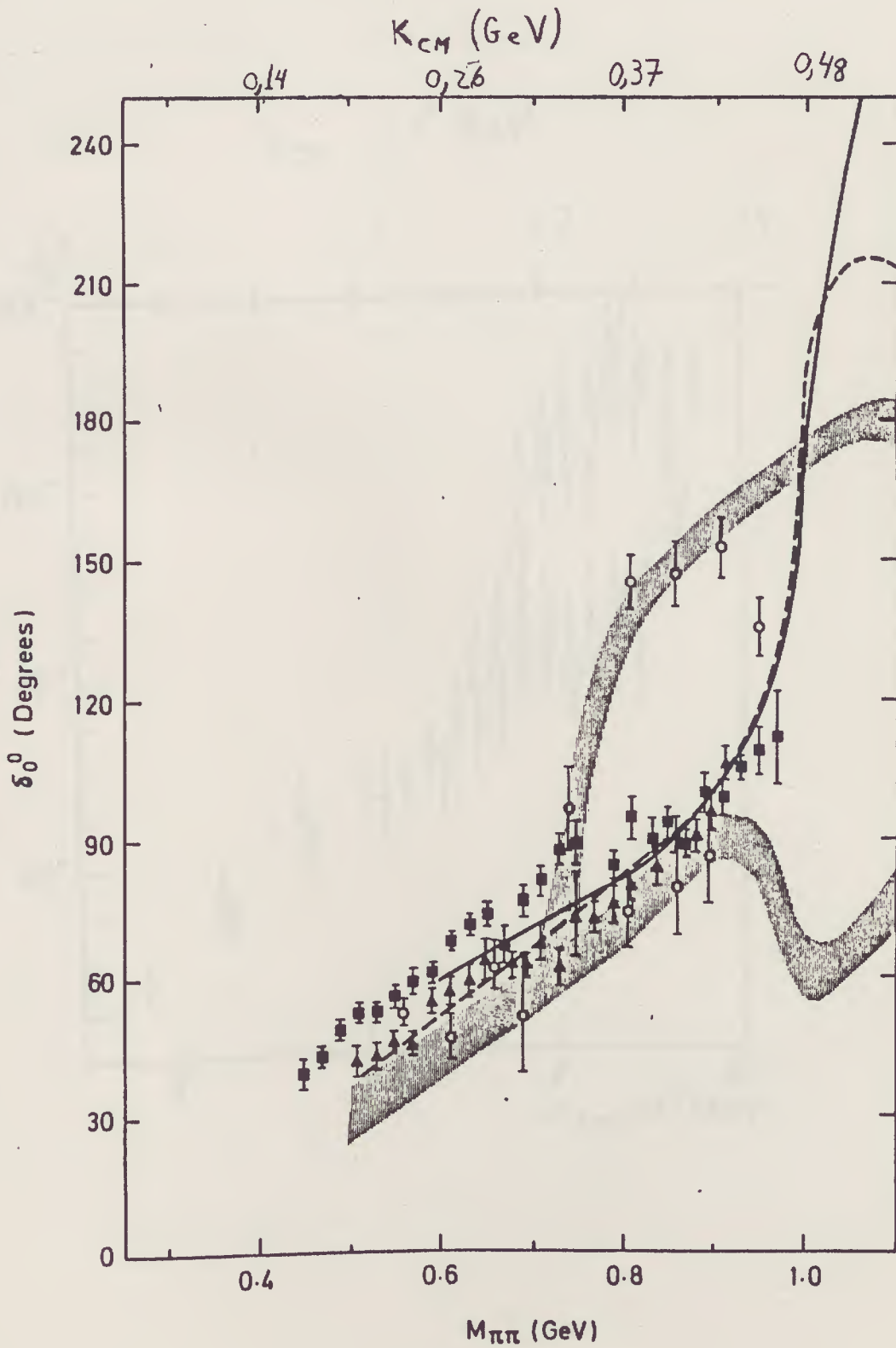


Fig III.7- Dados citados em Alekseeva et al (1982) pag.595, onda s, I=0

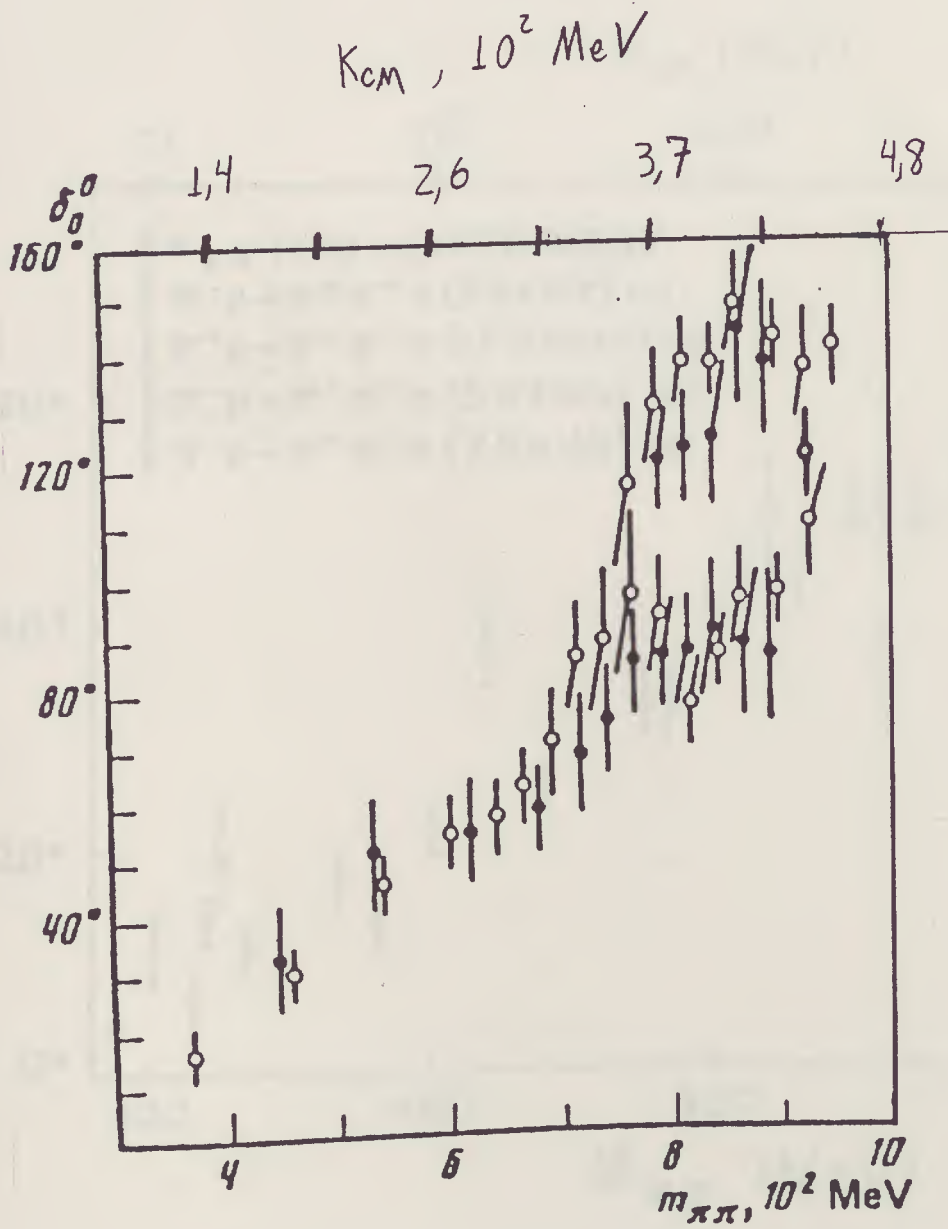


Fig III.8- Dados citados em Rosselet et al (1977) pag.584, onda s, I=0

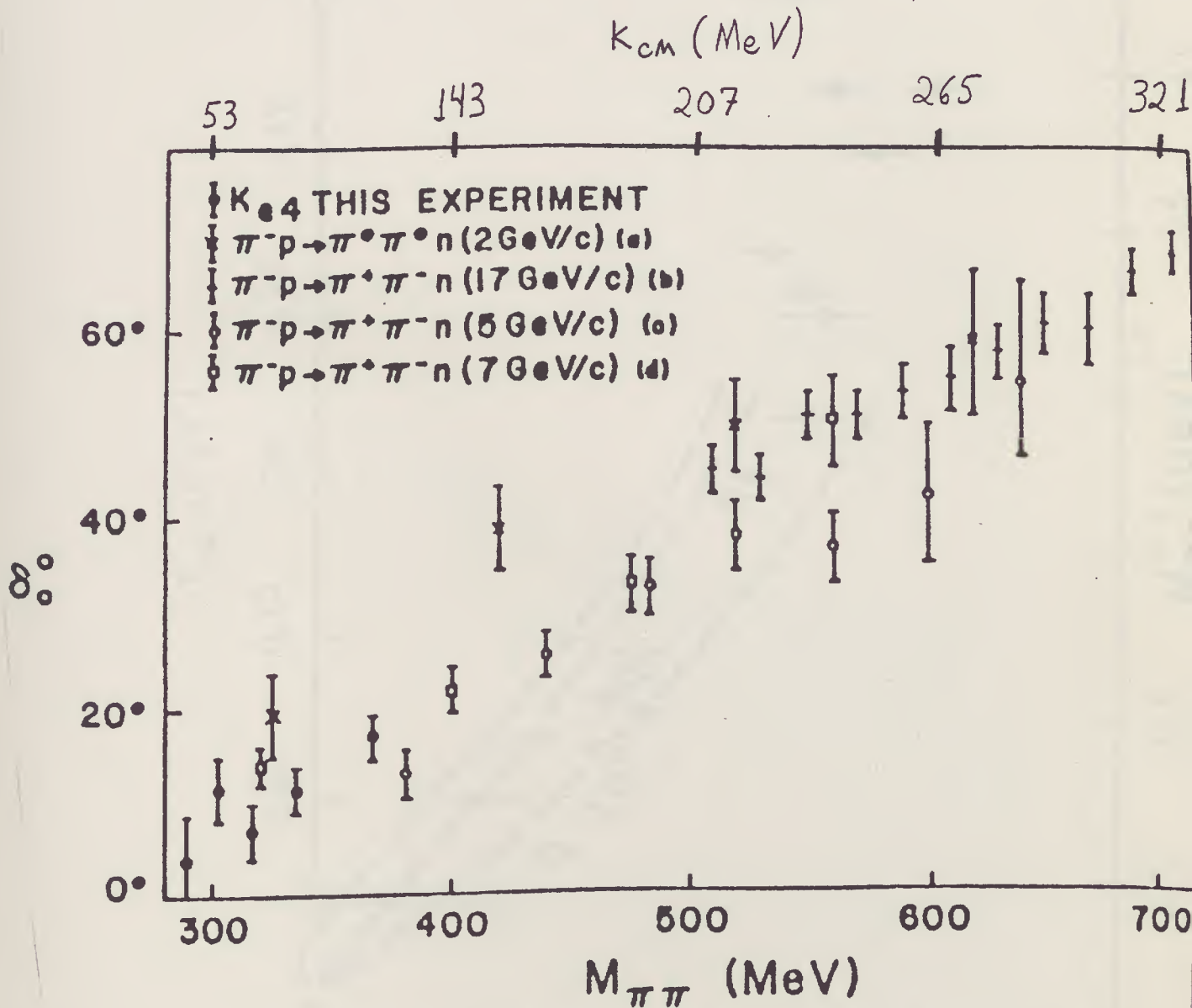


Fig III.9- Dados citados em Martin et al (1976) pag.91, onda s, I=2

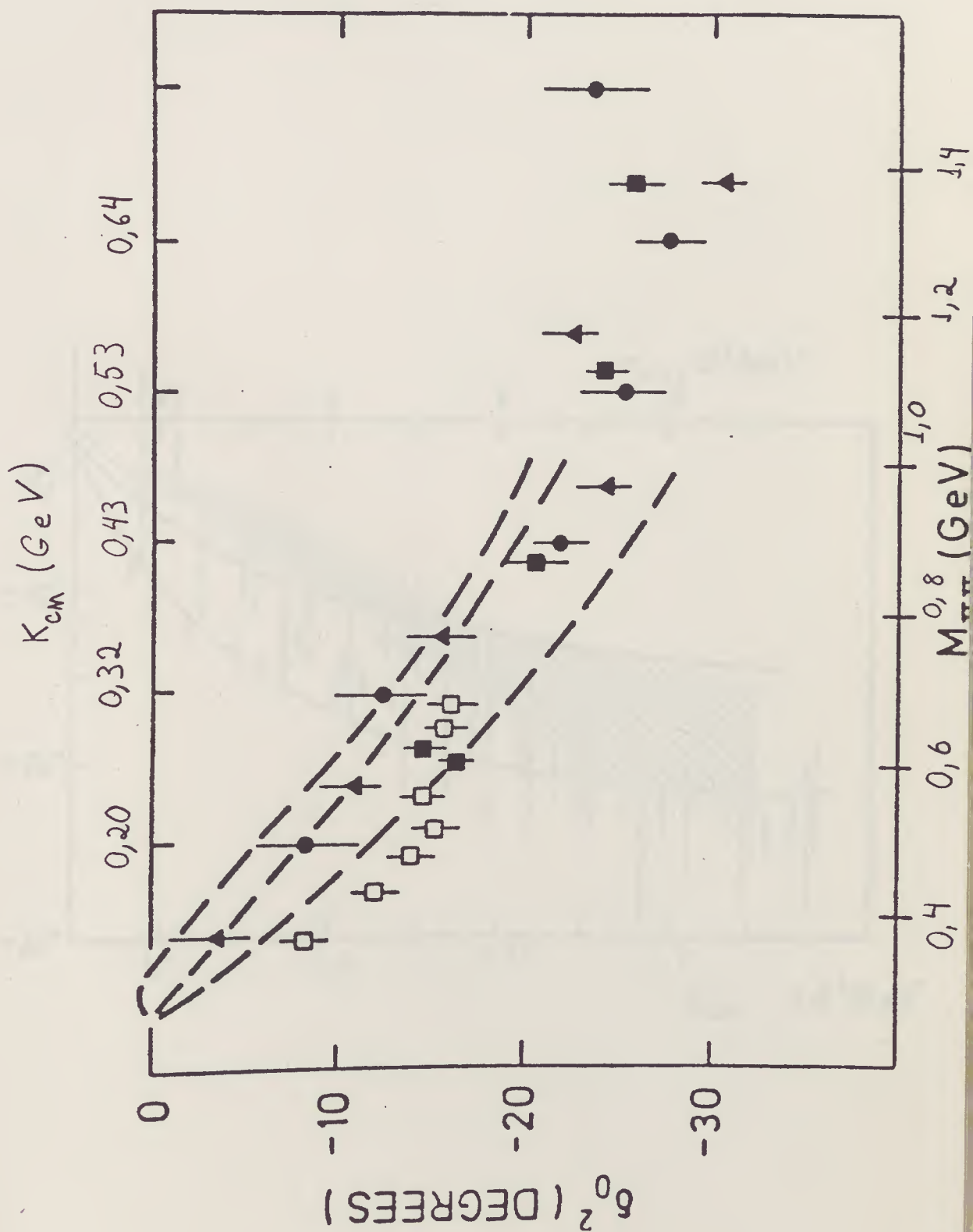


Fig III.10- Dados citados em Alekseeva et al (1982) pag.599, ondas s, I=2

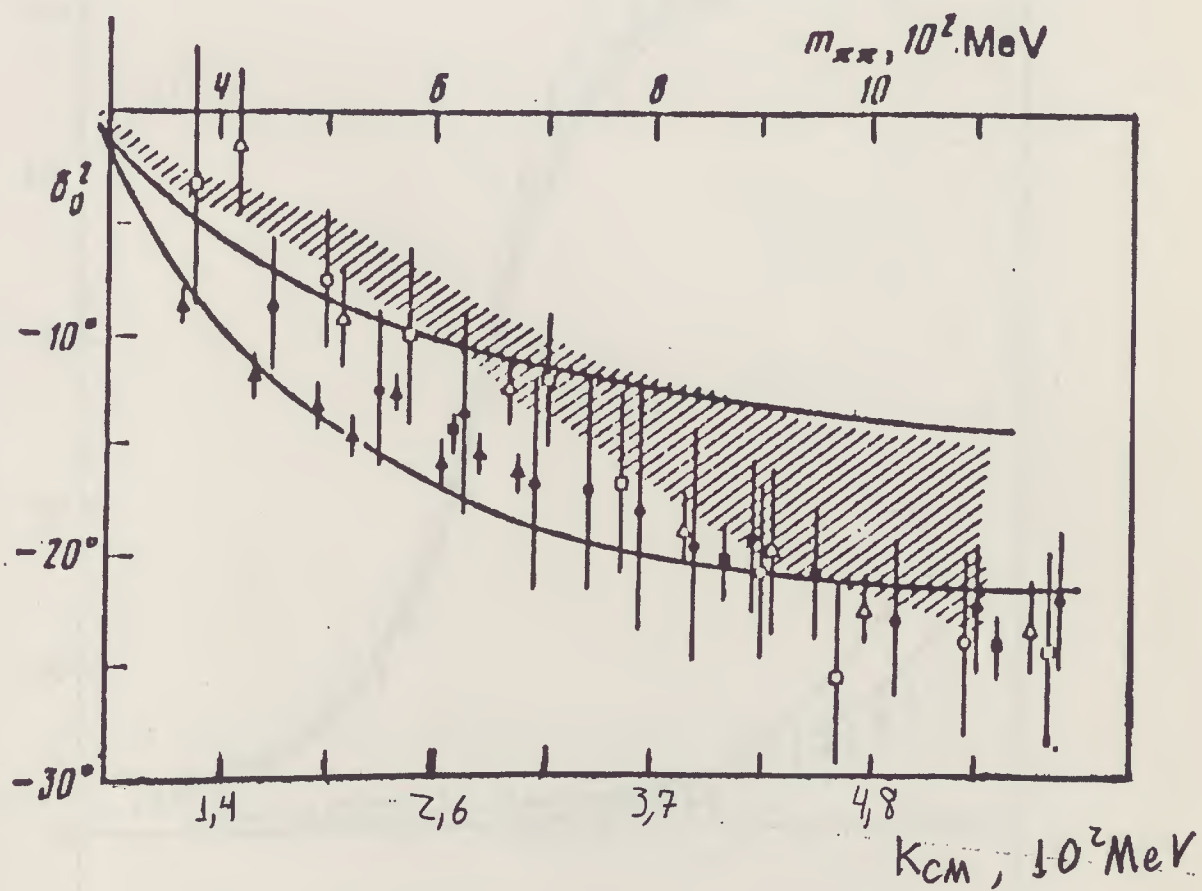


Fig III.11- Dados citados em Martin et al (1976), pag.96, onda p,I=1; onda d,I=0

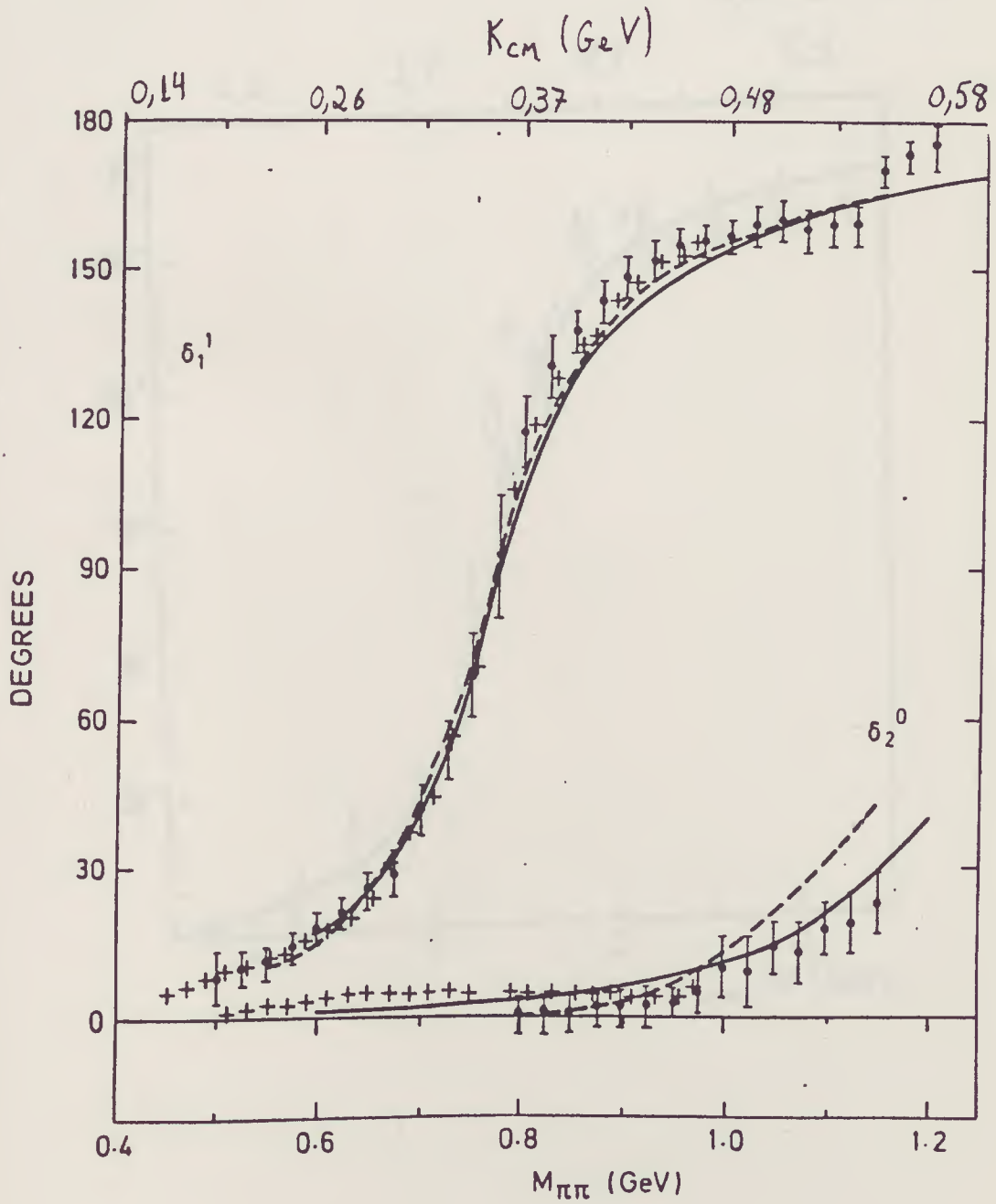


Fig III.12- Dados citados em Alekseeva et al(1982) pag.599, onda p,I=1

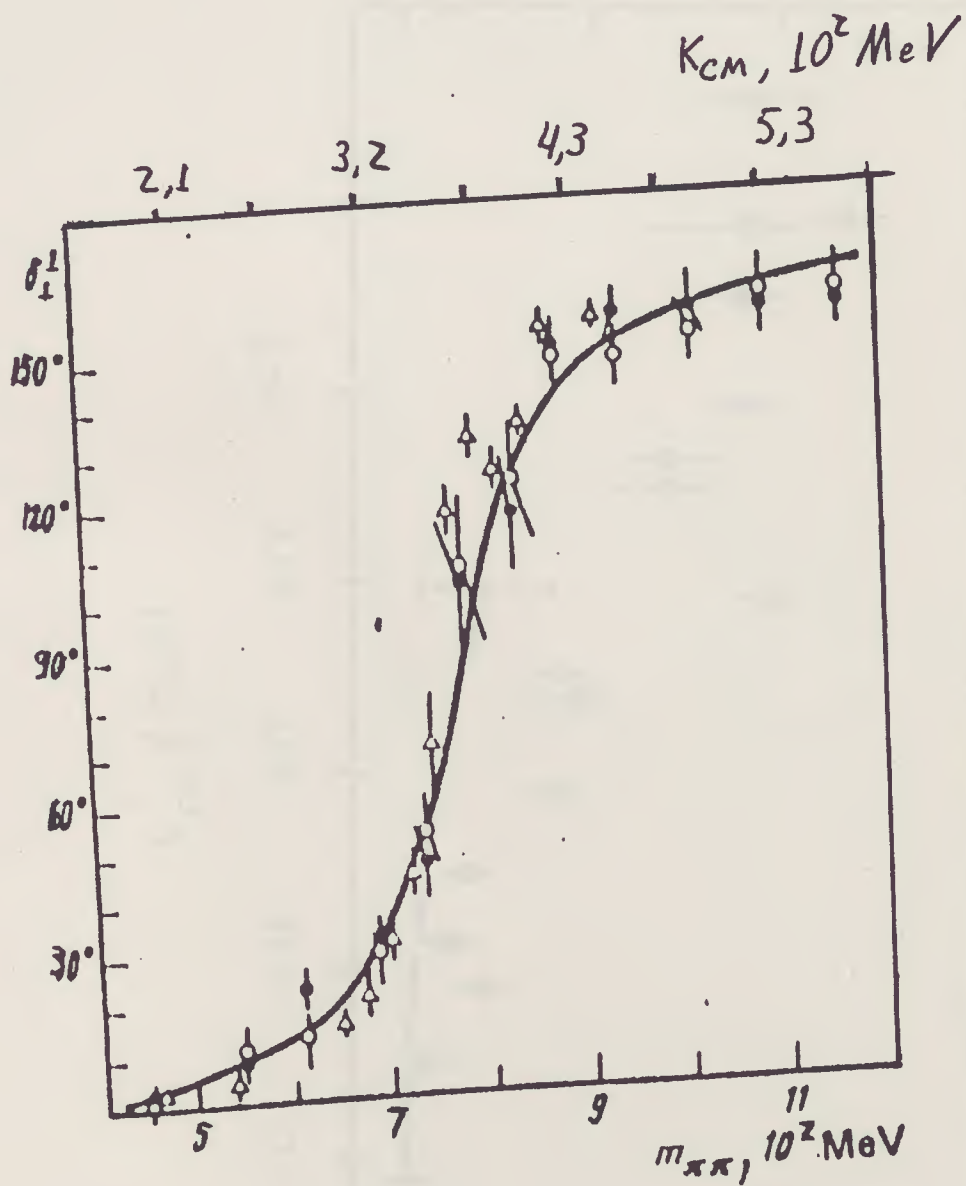


Fig III.13- Dados citados em Martin et al(1976) pag.91, onda d,I=2

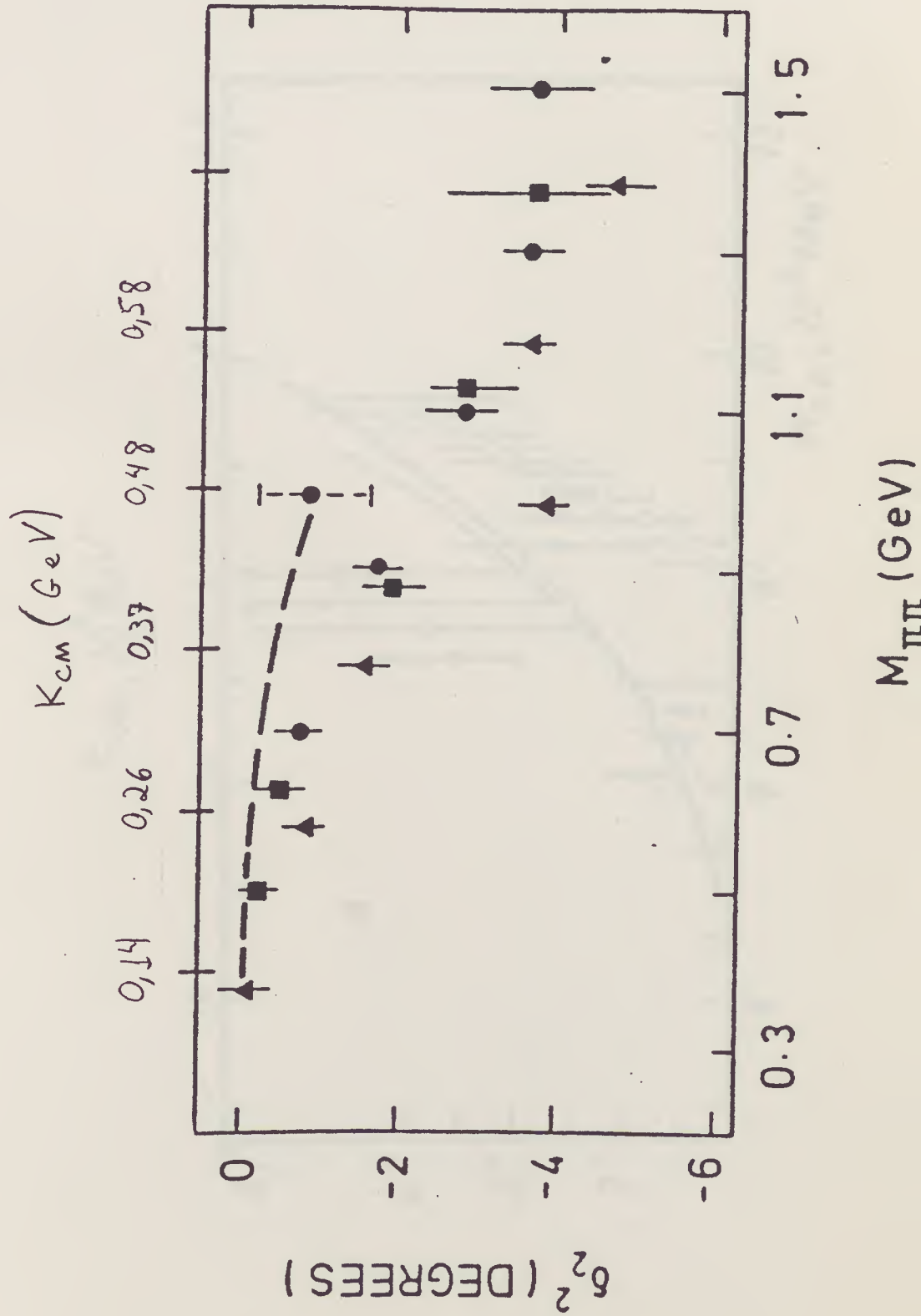


Fig.III.14- Dados citados em Alekseeva et al(1982) pag.599 onda d,I=0

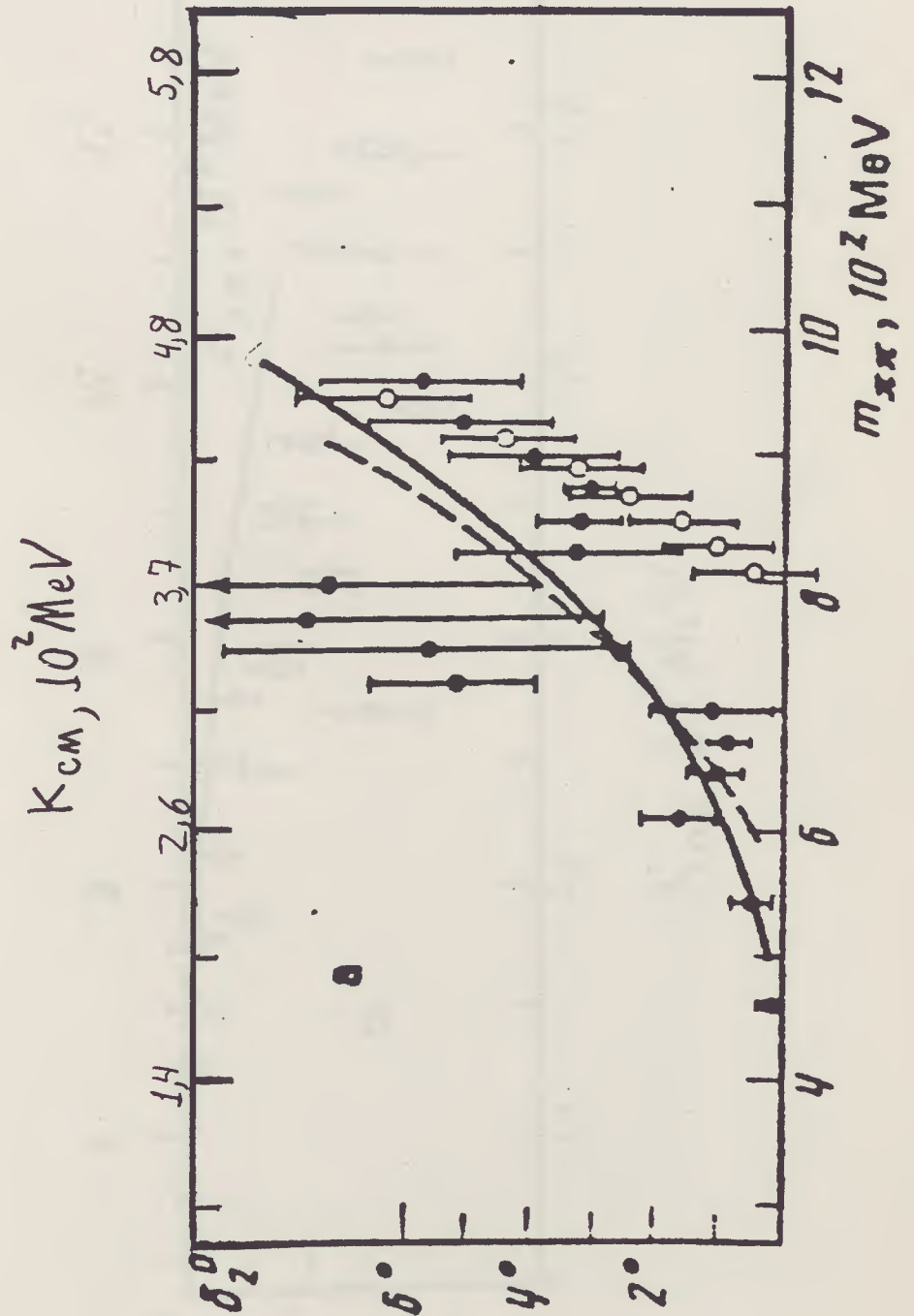
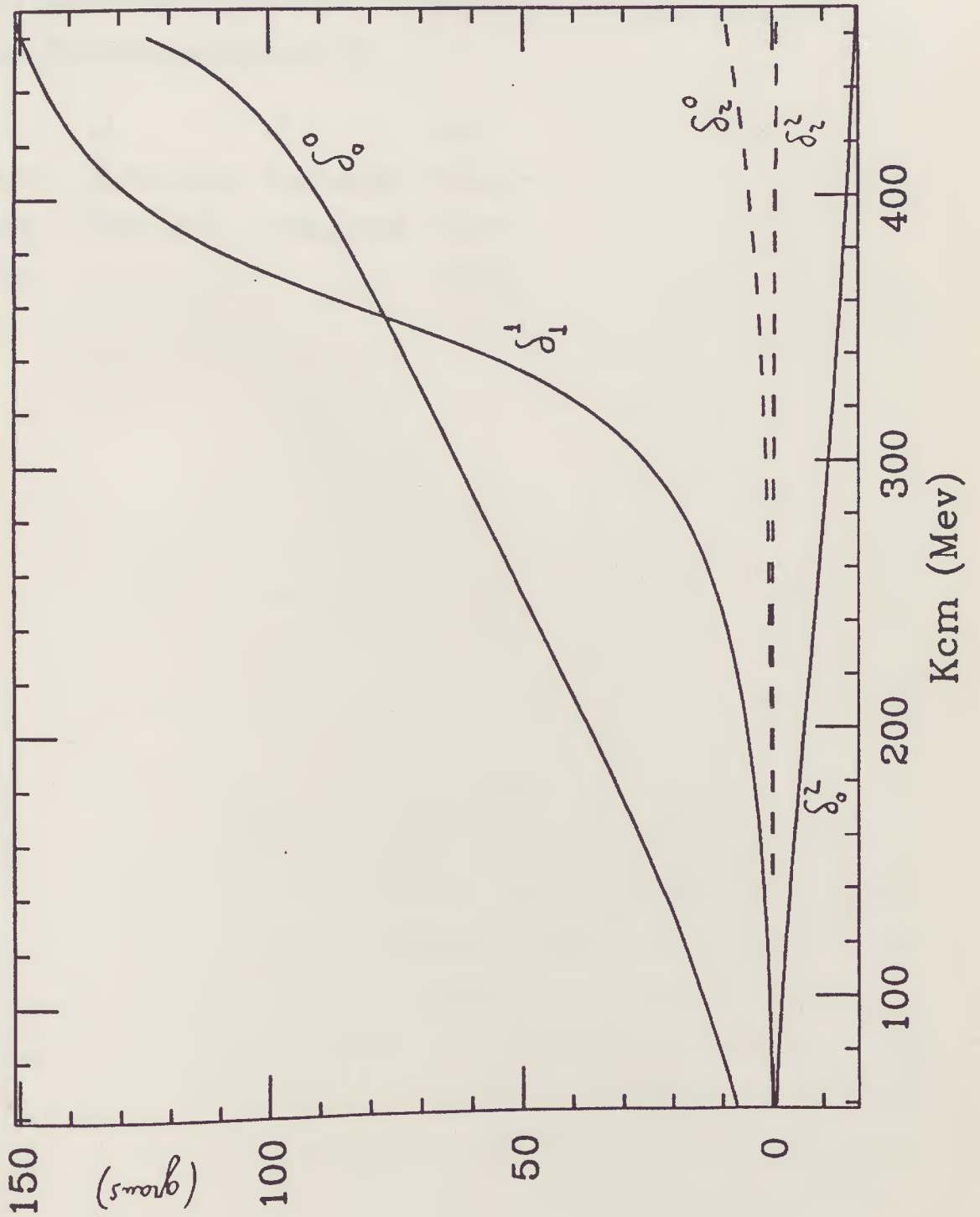


Fig.III.16- Froggatt e Petersen (1979) Ondas s ($I=0,2$); p ($I=0$) ; d ($I=0,2$)



Finalmente, na tabela III.1, apresentamos os comprimentos de espalhamento para as ondas s,p e d, na normalização :

$$T_{k \rightarrow 0} = \left(\frac{m_\pi}{k} \right)^{2l} a_l^l 16\pi W$$

Assim, embora para as ondas parciais $l > 0$, a amplitude correspondente no limiar seja zero, podemos atribuir um valor correspondente a ela naquele limite (a_l^l).

Tabela III.1: a_l^l em unidades de $\frac{1}{m_\pi}$

a_0^0	a_0^2	a_1^1	Exp
0.15 ± 0.07	-0.053 ± 0.028	0.036 ± 0.002	[Pen73]
0.24 ± 0.05	-0.02 ± 0.02	0.034 ± 0.003	[Ale82]
0.28 ± 0.05	---	---	[Ros77]

Capítulo IV

Modelos da Simetria Quiral

IV.1 Introdução

As primeiras previsões de processos fortes no contexto da simetria quiral já envolviam o espalhamento de píons. Por volta de 1966, a amplitude $\pi\pi$ foi calculada utilizando a álgebra de correntes e as fórmulas de redução de LSZ, através de teoremas sobre limites para píons fora da camada de massa [Wei66].

A necessidade de se simplificar a álgebra utilizada para o cálculo de processos piônicos levou ao desenvolvimento das lagrangianas efetivas fenomenológicas, que a princípio eram construídas para que os resultados da álgebra de correntes fossem reproduzidos, e que depois passaram a ser encaradas como tendo uma fundamentação independente [Wei79].

A massa não nula do pión faz com que a simetria quiral seja quebrada. Apesar de não se conhecer o mecanismo reponsável por tal quebra, podemos parametrizá-la, por exemplo, em termos de representações do grupo $SU(2) \times SU(2)$.

Um outro aspecto importante da amplitude pión pión para energias de até 1 GeV é a presença de ressonâncias nos canais S e P das defasagens experimentais que podem ser entendidas pela introdução, respectivamente, dos mésons $\chi(850)$ e $\rho(770)$.

As amplitudes obtidas por meio da simetria quiral são predominantemente reais e por isso precisam ser unitarizadas antes da comparação com dados experimentais. Neste trabalho discutimos duas maneiras de se unitarizar as amplitudes teóricas. Por fim, faremos um breve relato das consequências das correções de ordem superior à amplitude de árvore da álgebra de correntes.

IV.2 Álgebra de correntes e PCAC

Muitos resultados envolvendo processos fortes, e também eletromagnéticos e fracos, foram obtidos através da hipótese da suavidade da amplitude de espalhamento no contexto da simetria quiral [Wei66, Wei68b, Zim91a].

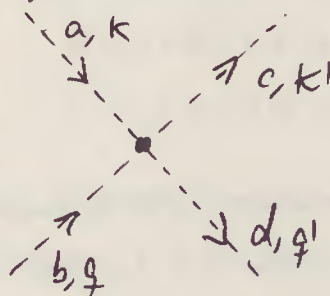
No entanto a simetria é quebrada pela massa não nula dos mésons pseudo escalares, o que pode ser levado em conta nos cálculos baseados no uso de relações de comutação. O decaimento do pión em um elétron e um neutrino motivou a hipótese segundo a qual a corrente axial não se conserva se o pión for massivo [Zim91a, Lyt70]. Como sua massa é pequena na escala hadrônica, espera-se que a quebra da simetria seja também pequena. Essa idéia corresponde à hipótese da conservação parcial da corrente axial (PCAC), onde a massa do pión (m_π) tem um papel de constante de proporcionalidade, juntamente com a constante de decaimento (f_π), entre a divergência da corrente axial e o campo do méson:

$$\partial_\mu A_i^\mu = m_\pi f_\pi \phi_i$$

sendo i o índice de isospin. Esta expressão mostra que existem dois modos diferentes de se obter a restauração da simetria. Fazendo-se $f_\pi = 0$ obtém-se uma simetria realizada no modo de Wigner e Weyl. Fazendo-se $m_\pi = 0$ há uma realização no modo de Nambu e Goldstone, que é o mais compatível com a fenomenologia dos pions.

Em 1966 derivou-se pela primeira vez no formalismo da matriz S a amplitude de espalhamento $\pi\pi$ [Wei66], representada na fig IV.1, para baixas energias utilizando-se álgebra de correntes e PCAC.

Fig IV.1: a, b, c, d são índices de isospin e k, q, k', q' são os respectivos quadrimomentos, com os quais se definem as variáveis de Mandelstam (seção II.2).



Para os elementos de matriz da amplitude de espalhamento parametrizados em termos de isospin e dos momentos separadamente, como no 2 capítulo (II.17), temos:

$$\langle c, d|T|a, b \rangle = T^{ab \rightarrow cd} = A\delta_{ab}\delta_{cd} + B\delta_{ac}\delta_{bd} + C\delta_{ad}\delta_{bc} \quad (IV.1)$$

A hipótese da suavidade da matriz S permite que as funções A,B,C sejam expandidas nas variáveis de Mandelstam:

$$\begin{aligned} A &= a_1 + a_2t + a_3u + a_4s + o(k^4)... \\ B &= b_1 + b_2s + b_3u + b_4t + o(k^4)... \\ C &= c_1 + c_2u + c_3t + c_4s + o(k^4)... \end{aligned} \quad (IV.2)$$

A simetria de cruzamento estabelece relações entre a_i, b_i, c_i . Fazendo-se a permutação $b(q) \leftrightarrow a(k)$, obtemos de acordo com seção (II.4):

$$\begin{aligned} A(s, t, u) &= A(s, u, t) \\ B(s, t, u) &= C(s, u, t) \\ C(s, t, u) &= B(s, u, t) \end{aligned} \quad (IV.3)$$

de onde resulta:

$$a_2 = a_3; \quad b_1 = c_1; \quad b_2 = c_2; \quad b_3 = c_3; \quad b_4 = c_4 \quad (IV.4)$$

Fazendo as outras permutações :

$b(q) \leftrightarrow c(-k')$, e $a(k) \leftrightarrow c(-k')$ obtemos :

$$\begin{aligned} A &= a + b(t + u) + cs + ... \\ B &= a + b(s + u) + ct + ... \\ C &= a + b(s + t) + cu + ... \end{aligned} \quad (IV.5)$$

A dependência com a massa pode estar contida na variável a e na relação $s + t + u = 4m_\pi^2$. Para determinar as amplitudes a, b, c Weinberg utilizou “condições de contorno” dadas por dois teoremas que fornecem resultados em limites de baixas energias: a relação de consistência de Adler para a amplitude com um pión fora da camada de massa, e um

teorema, derivado por ele mesmo para 2 píons fora da camada de massa [Wei66,Adl65, Zim91a].

Considerando-se os píons a e c moles ($k \rightarrow 0, k' \rightarrow 0$), as variáveis de Mandelstam são:

$$s = m_\pi^2 + 2q \cdot k$$

$$t = 0$$

$$u = m_\pi^2 - 2q \cdot k$$

permitindo que a amplitude seja escrita como:

$$\begin{aligned} T^{ab \rightarrow cd} = & \delta_{ab} \delta_{cd} \left[a + b(m_\pi^2 - 2q \cdot k) + c(m_\pi^2 + 2q \cdot k) \right] + \delta_{ac} \delta_{bd} \left[a + 2bm_\pi^2 \right] + \\ & + \delta_{ad} \delta_{bc} \left[a + b(m_\pi^2 + 2q \cdot k) + c(m_\pi^2 - 2q \cdot k) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Esta deve obedecer o teorema derivado por Weinberg(66), segundo o qual a amplitude com dois píons moles deve ser:

$$T = \frac{1}{f_\pi} \left[\langle d | \sigma^{ab}(0) | b \rangle \delta_{ac} \delta_{bd} - 2q \cdot k (\delta_{ad} \delta_{bc} - \delta_{ab} \delta_{cd}) \right] \quad (\text{IV.7})$$

onde $\sigma^{ab}(0) \propto [A_0^a, \partial^\nu A_\nu^b]$, que dá uma medida da quebra de simetria. Comparando esta expressão com a amplitude $T(s,t,u)$ IV.1 nesse limite, resulta relações entre a,b,c.

A relação de consistência de Adler impõe que, quando há um pión mole, as variáveis de Mandelstam assumem os valores: $s = t = u = m_\pi^2$, a amplitude do espalhamento se anula, assim:

$$T_{\pi\pi}(s = t = u = m_\pi^2) = 0 \quad (\text{IV.8})$$

Impondo esta condição na amplitude (IV.1), através da expansão IV.5, obtemos:

$$\delta_{ab} \delta_{cd} [a + 2bm_\pi^2 + m_\pi^2 c] = 0$$

Temos, portanto, quatro incógnitas (a,b,c, σ) e as expressões que as relacionam quando comparamos a amplitude com os limites, das quais se obtém:

$$b=0; \quad a = \frac{-m_\pi^2}{f_\pi^2}; \quad c = \frac{1}{f_\pi^2}$$

A amplitude resultante tem a forma:

$$T^{ab \rightarrow cd} = \frac{1}{f_\pi^2} \left(\delta_{ab} \delta_{cd} (s - m_\pi^2) + \delta_{ac} \delta_{bd} (t - m_\pi^2) + \delta_{ad} \delta_{bc} (u - m_\pi^2) \right) \quad (\text{IV.9})$$

Determina-se também nessa ordem o termo sigma:

$$\sigma^{ac}(0) = \frac{-m_\pi^2}{f_\pi^2} \quad (\text{IV.10})$$

Ao projetar esta amplitude nos canais de isospins 0, 1, 2 como no capítulo 2 temos:

$$T^0 = \frac{1}{f_\pi^2}(2s - m_\pi^2) \quad (\text{IV.11})$$

$$T^1 = \frac{1}{f_\pi^2}(t - u) \quad (\text{IV.12})$$

$$T^2 = \frac{1}{f_\pi^2}(-s + 2m_\pi^2) \quad (\text{IV.13})$$

No limiar, onde $s = 4m_\pi^2$, $t = u = 0$, obtemos:

$$T^0 = \frac{7m_\pi^2}{f_\pi^2} \quad T^1 = 0 \quad T^2 = \frac{-2m_\pi^2}{f_\pi^2} \quad (\text{IV.14})$$

com os comprimentos de espalhamento de forma escrita na seção II.6,

$$a_l^I = \frac{T_l^I}{16\pi W}$$

$$\text{temos: } a_0^0 = \frac{7m_\pi}{32f_\pi^2} \simeq 0.157m_\pi^{-1}$$

$$a_1^1 = 0$$

$$a_0^2 = \frac{-m_\pi}{16\pi f_\pi^2} \simeq -0.045m_\pi^{-1}$$

que são valores de mesma ordem de grandeza para os comprimentos de espalhamento dos canais $I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ do espalhamento elástico pión nucleon.

IV.3 As Lagrangianas Efetivas

O método da álgebra de correntes torna-se bastante complicado quando são estudados processos envolvendo tres ou mais píons. Além disso, a utilização de relações de comutação não explícita as propriedades dinâmicas do processo.

Em 1967 Weinberg [Wei67] sugeriu que os resultados da álgebra de correntes poderiam ser reproduzidos de modo muito mais fácil com o uso de lagrangianas efetivas. Estas, deveriam ser construídas de tal modo que na ordem mais baixa de perturbação (aproximação de árvore) se obtivessem resultados idênticos aos da álgebra de correntes, desenvolvendo um formalismo mais fácil de ser trabalhado.

As lagrangianas efetivas já haviam sido consideradas no início da década de 60 no

modelo sigma linear de GellMann e Levy [Gel60], dado por:

$$L_\sigma = \frac{1}{2} \partial_\mu \pi_i \partial^\mu \pi_i + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + L_v + L_{sb} + L_{massa} \quad (IV.15)$$

onde é o termo de interação, L_{SB} quebra a simetria quiral, permitindo diferenciar as massas do pión e do sigma, reproduzindo o PCAC; π é o campo pseudo escalar do pión e σ um campo escalar, que atua como contrapartida quiral do pión. As transformações axiais deixam a quantidade

$$(\pi^2 + \sigma^2)^n \quad (IV.16)$$

invariante, sugerindo que os campos sejam parametrizados como uma rotação [Zim91b]:

$$\pi' = \pi \cos \theta + \sigma \sin \theta$$

$$\sigma' = -\pi \sin \theta + \sigma \cos \theta$$

No entanto o méson sigma nunca foi encontrado, e Weinberg propôs que ele fosse eliminado como grau de liberdade fazendo com que o campo do sigma seja uma função do campo do pión tornando o modelo não linear. Além disso, no setor do nucleon do modelo linear, a simetria quiral vinculava o valor $\frac{g_a}{g_v} = 1$ enquanto que o valor experimental é aproximadamente 1,24, relação que não é fixada no modelo sigma não linear.

Em 1968 Weinberg [Wei68a] generalizou o modelo σ não linear ao determinar uma lagrangiana de maneira mais geral, em termos de derivadas covariantes dos campos e dos campos não piônicos, sendo a transformação quiral implementada pelo campo do pión. Assim, nesses modelos não lineares um processo envolvendo n pions está relacionado ao processo de $(n+1)$ pions através de uma transformação quiral, todos originários do mesmo termo lagrangiano.

As transformações vetorial e axial do campo do pión ϕ podem ser definidas de maneira geral por:

$$\delta^v \phi_b = -\epsilon_{bcd} \alpha_c \phi_d$$

$$\delta^a \phi_b = \beta_a f_{ab}(\phi)$$

onde α_e e β_a são parâmetros infinitesimais. Equivalentemente, podemos escrever:

$$[T_a, \phi_b] = i \epsilon_{abc} \phi_c$$

$$[X_a, \phi_b] = i f_{ab}(\phi) \quad (IV.17)$$

onde T e X são os geradores das transformações vetorial e axial e $f_{ab}(\phi)$ é uma função arbitrária.

Parametrizando-se $f_{ab}(\phi)$ de maneira covariante com duas funções genéricas $f(\phi^2)$ e $g(\phi^2)$: $f_{ab}(\phi) = \delta_{ab}f(\phi^2) + g(\phi^2)\phi_a\phi_b$ determina-se $g(\phi^2)$ através das identidades de Jacobi dos geradores de $SU(2) \times SU(2)$: $g(\phi^2) = \frac{2f(\phi^2)-f'(\phi^2)+1}{f(\phi^2)-2\phi^2 f'(\phi^2)}$ e $f'(\phi^2) = \frac{\delta f(\phi^2)}{\delta \phi^2}$. A simetria quiral não fixa a forma da função $f(\phi^2)$.

Funções formadas apenas por campos de píons não são invariantes quirais pois, utilizando IV.17:

$$[X_a, \phi^2] = 2i\phi_a f(\phi^2) + 2ig(\phi^2)\phi_a \neq 0 \quad (\text{IV.18})$$

Pode-se construir uma lagrangiana invariante para os píons utilizando-se derivadas covariantes. Definindo-a como:

$$D_\mu \phi_a = d_{ab}(\phi)\partial_\mu \phi_b$$

impõe-se que se transformem de modo que formem termos escalares e isoescalares invariantes quirais.

$$[X_b, D_\mu \phi_c] = -iv_{ba}(\phi)\epsilon_{acd}D_\mu \phi_d$$

$$[T_a, D_\mu \phi_c] = -i\epsilon_{acd}D_\mu \phi_d$$

Determina-se então que:

$$D_\mu \phi_a = f_\pi \left(\frac{1}{\sqrt{f^2 + \phi^2}} \partial_\mu \phi_a - \frac{f' + v/2}{f^2 + \phi^2} \partial_\mu \phi^2 \phi_a \right) \quad (\text{IV.19})$$

onde $f = f(\phi^2)$ é arbitrária, a menos da condição $f(\phi^2 = 0) = f_\pi$, e:

$$v = \frac{1}{f + \sqrt{f^2 + \phi^2}}$$

A lagrangiana dos píons é dada por:

$$L = \frac{1}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi \quad (\text{IV.20})$$

Esta lagrangiana na ordem mais baixa de perturbação deve reproduzir o resultado da álgebra de correntes.

Podemos também escrevê-la como:

$$L_\pi = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^a G_{ab}(\phi)\partial^\mu\phi^b \quad (\text{IV.21})$$

onde:

$$G_{ab} = f_\pi^2 \left(\frac{\delta_{ab}}{f^2 + \phi^2} + \phi_a\phi_b [4\phi^2 f'^2 - 4ff' - 1] \right)$$

A teoria da perturbação aplicada a esse formalismo, corresponde a uma expansão nos quadri-momentos, posto que a existência dos acoplamentos derivativos implica numa dependência nas variáveis de Mandelstam para cada ordem da expansão. A invariância da lagrangiana é respeitada ao incluirmos termos com ordens superiores de derivadas, como por exemplo:

$$L_{(4)} = -g_{(4)}^{(1)} D_\mu\phi D^\mu\phi D_\nu\phi D^\nu\phi - g_{(4)}^{(2)} D_\mu\phi D_\nu\phi D^\mu\phi D^\nu\phi \quad (\text{IV.22})$$

Os acoplamentos derivativos fazem com que a contribuição do diagrama de árvore do termo IV.22 seja da mesma ordem da iteração do diagrama de árvore da álgebra de correntes, envolvendo um “loop”. Isto é consistente com a idéia de se fazerem correções de ordens maiores à medida que se aumenta a energia considerada. Por enquanto não utilizaremos esses termos, pois não contribuem para a ordem mais baixa da expansão (W^2), que reproduz a amplitude da álgebra de correntes.

IV.4 As Funções Arbitrárias

A forma da função $f(\phi^2)$ não é determinada pela simetria quiral. Ou seja, é possível construirmos lagrangianas invariantes por essa simetria para quaisquer forma de $f(\phi^2)$. Isto é devido à liberdade de se definir o campo do pión sem interferir com a simetria quiral, quando se faz: $\phi'_a = \phi_a f(\phi^2)$. De modo geral ela pode ser expandida em termos de ϕ^2 , como por exemplo :

$$f = f_\pi \sum_n a_n \left(\frac{\phi^2}{f_\pi^2} \right)^n \quad (\text{IV.23})$$

sendo que a única restrição imposta é: $a_0 = 1$.

Existem, em particular, tres escolhas bastante utilizadas para a função $f(\phi^2)$. Primeira-mente a empregada por Schwinger e Weinberg em alguns trabalhos [Wei79,Sch67]:

$$f = f_\pi \left(1 - \frac{\phi^2}{4f_\pi} \right) \quad (\text{IV.24})$$

que corresponde a: $a_1 = \frac{-1}{4}$; $a_2 = 0$

Se tomarmos:

$$f = \sqrt{f_\pi^2 - \phi^2} \quad (\text{IV.25})$$

obtemos o modelo sigma não linear, que corresponde aos valores: $a_1 = \frac{-1}{2}$ e $a_2 = \frac{-1}{8}$

A função utilizada por Charap [Cha70], é dada por:

$$f = \sqrt{\phi^2} \cot \frac{y(\phi^2)}{2} \quad (\text{IV.26})$$

onde:

$$y(\phi^2) - \sin(y(\phi^2)) = \frac{4}{3}(\phi^2)^{\frac{1}{3}}$$

que leva a $a_1 = \frac{-2}{5}$ e $a_2 = \frac{-9}{175}$.

Pode-se também escolher a definição do campo do pión a partir de sua transformação sob o grupo $SU(2) \times SU(2)$. Com os geradores das transformações de isospin e axial, T e X , formam-se as cargas direita e esquerda:

$$Q_i^\pm = \frac{1}{2}(T_i \pm X_i)$$

cujas transformações para o tensor genérico ϕ_{ab} são:

$$[Q_i^+, \Phi_{ab}] = -(T_i^-)_{bc} \Phi_{ac}$$

$$[Q_i^-, \Phi_{ab}] = +(T_i^+)_{ca} \Phi_{cb}$$

onde T^\pm são matrizes da representação t^\pm de $SU(2)$, tal que $(T_i^\pm T_i^\pm)_{jk} = t^\pm(t^\pm \pm 1)\delta_{jk}$

Escrevem-se então os duplos comutadores das transformações axial e de isospin:

$$[Q_i^+ \pm Q_i^-, [Q_i^+ \pm Q_i^-, \Phi_{ab}]] = (T_i^+)_{dc}(T_i^+)_{ca} \Phi_{bd} + (T_i^-)_{bc}(T_i^-)_{cd} \Phi_{ad} \mp 2(T_i^+)_{ca}(T_i^-)_{bd} \Phi_{cd}$$

de onde calcula-se, para uma representação $(t^+, t^-) = (\frac{N}{2}, \frac{N}{2})$ de $SU(2) \times SU(2)$, a seguinte forma da transformação axial de um tensor genérico ϕ_{ab} , com isospin t :

$$[X_i, [X_i, \Phi_{ab}]] = (N(N+2) + t(t+1))\Phi_{ab} \quad (\text{IV.27})$$

Com a expressão do duplo comutador do gerador da transformação axial X (IV.27) temos para o campo do pión:

$$[X_i, [X_i, \Phi_{ab}]] = (N(N + 2) + 2)\Phi_{ab} \quad (IV.28)$$

Escreve-se as transformações quirais como uma rotação do ângulo quiral θ que pode ser definido por:

$$\begin{aligned} \pi_a &= \frac{f_\pi \phi_a}{\sqrt{f^2 + \phi^2}} = f_\pi \pi_a \text{sen} \theta \\ \sigma &= \frac{f_\pi f}{\sqrt{f^2 + \phi^2}} = f_\pi \text{cos} \theta \end{aligned} \quad (IV.29)$$

onde π é o campo do pión do modelo sigma não linear. Pode-se escrever o campo do pión para uma representação arbitrária de $SU(2) \times SU(2)$ como [Bat91]:

$$\phi^N = f_\pi \frac{3}{\nu^2 - 1} \left(\frac{\text{cos}(\theta) \text{sin}(\nu\theta)}{\nu \text{sin}^2(\theta)} - \frac{\text{cos}(\nu\theta)}{\text{sin}(\theta)} \right) \quad (IV.30)$$

onde $\nu^2 - 1 = N(N + 2)$. Dessa maneira a função $f(\phi^2)$ pode ser escrita através da equação IV.17 com a seguinte forma:

$$f^N(\phi^2) = \frac{f_\pi 3 \text{cos} \theta}{(\nu^2 - 1) \text{sin} \theta} \left(\frac{\text{cos} \theta \text{sin} \nu\theta}{\nu \text{sin}^2 \theta} - \frac{\text{cos} \nu\theta}{\text{sin} \theta} \right) \quad (IV.31)$$

Para as representações $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $(1, 1)$ temos:

$$f^{N=1} = \sqrt{f_\pi^2 - \phi^2} \quad (IV.32)$$

$$f^{N=2} = \frac{f_\pi}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\phi^2}{f_\pi^2}} \right) \quad (IV.33)$$

Expandindo estas funções, identificamos os parâmetros a_i da expressão IV.23

$$\begin{aligned} N = 1 : a_1 &= \frac{-1}{2} & a_2 &= \frac{-1}{8} \\ N = 2 : a_1 &= -1 & a_2 &= -3 \end{aligned}$$

Sendo que $N=1$ corresponde ao modelo σ não linear (IV.25).

IV.5 Quebra de Simetria

Como vimos na seção 4.2, a massa do pión está associada à quebra da simetria quiral. Do ponto de vista do formalismo lagrangiano não linear os termos que quebram a simetria

podem conter apenas campos piônicos, genericamente agrupados em uma função $h(\phi^2)$, tal que $L_{sb} = h(\phi^2)m_\pi^2$ onde μ é a massa do pión. Dessa maneira deve ser possível obter a corrente axial parcialmente conservada como função do campo do pión (PCAC). Assim, expandindo-a, temos:

$$h(\phi^2) = h(0) + h'(0)\phi^2 + \frac{h''(0)}{2}\phi^4 + \frac{h'''(0)}{6}\phi^6 + ..$$

Como um termo constante não tem efeito dinâmico, podemos tomar $h(0)=0$ e escrever:

$$h(\phi^2) = \gamma_1\phi^2 + \gamma_2\phi^4 + \gamma_3\phi^6 + .. \tag{IV.34}$$

O único vínculo desta expansão é : $\gamma_1 = -\frac{1}{2}$ para obtermos o fator usual de massa na lagrangiana. A transformação axial faz com que a variação deste termo seja:

$$\delta^A L = m_\pi^2 \left\{ 2f(\phi^2)\gamma_1\beta\phi + \phi^2 \left(2\gamma_1g(\phi^2) + 2f + 2\gamma_2 \right) \beta\phi + \right\}$$

A divergência da corrente axial pode ser calculada através da variação da lagrangiana por :

$$\partial_\mu j_i^{\mu A} = -\frac{\delta L}{\delta \beta_i}$$

que comparada ao PCAC, determina:

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2}.$$

Do ponto de vista dinâmico não se sabe de maneira precisa como a quebra de simetria ocorre, e por isso não há uma função $h(\phi^2)$ determinada.

Um modo usual de se obter a quebra de simetria é impor à L_{sb} propriedades sob transformações do grupo $SU(2) \times SU(2)$. O termo de quebra de simetria é isoescalar ($t=0$), resultando:

$$[X_i, [X_i, L_{sb}]] = N(N + 2)L_{sb} \tag{IV.35}$$

Para esta equação Turner e Olsson [Tur72] encontraram a seguinte solução :

$$L_{sb} = \frac{c \sin(\nu\theta)}{\nu \sin(\theta)} \tag{IV.36}$$

sendo: $c = \frac{3f_\pi m_\pi^2}{\nu^2 - 1}$ fixada ao impor que haja o termo de massa usual na lagrangiana: $-\frac{1}{2}m_\pi^2\phi^2$.

Assim para as representações $N=1,2$, teremos os seguintes termos:

$$\begin{aligned} L_{sb}^{N=1} &\simeq f_\pi^2 m_\pi^2 - \frac{m_\pi^2 \phi^2}{2} - \frac{m_\pi^2 \phi^4}{8f_\pi^2} + \frac{m_\pi^2 \phi^6}{16f_\pi^4} \\ L_{sb}^{N=2} &\simeq \frac{3m_\pi^2 f_\pi^2}{8} - \frac{m_\pi^2 \phi^2}{2} - \frac{m_\pi^2 \phi^4}{4f_\pi^2} - \frac{15\phi^6 m_\pi^2}{10f_\pi^4} \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

Weinberg [Wei79] sugeriu ainda que termos contendo, além dos campos piônicos, derivadas destes fossem incluídos na parte de quebra de simetria, de forma a obter uma expressão mais geral para esta.

IV.6 Expansão da matriz S e Regras de Feynman

Os diagramas de Feynmann dos processos de interesse são calculados a partir das regras correspondentes. Usualmente estas são extraídas diretamente da lagrangiana de interação o que é correto quando não há acopamentos derivativos e vale a relação $L_i = -H_i$, onde H_i é a hamiltoniana de interação [Ger71, Man84]. No caso do qual tratamos esta condição não é satisfeita, requerendo um tratamento mais exato da expansão da matriz S.

Primeiramente calcula-se a hamiltoniana. Sendo π_a o momento canonicamente conjugado a ϕ_a , H será dada por: $H = \pi_a \partial_0 \phi_a - L$, o que permite escrever a hamiltoniana H_i como:

$$H_i = H - H_0 = -\frac{1}{2} \partial_0 \phi_a \bar{G}_{ab}(\phi) \partial^0 \phi_b - L_i$$

onde H_0 é a hamiltoniana da partícula livre, e as funções L_i e G_{ab} são dadas por

$$L_i = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \bar{G}_{ab} \partial^\mu \phi_b$$

e

$$G_{ab}(\phi) = \delta_{ab} + \bar{G}_{ab}(\phi)$$

Na representação de interação, a hamiltoniana de interação pode ser escrita como¹:

$$H_i = -\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_a \bar{G}_{ab} \partial^\mu \varphi_b + \frac{1}{2} \partial_0 \varphi_a \left\{ \bar{G}^2 (1 + \bar{G})^{-1} \right\}_{ab} \partial^0 \varphi_b \quad (\text{IV.38})$$

¹A mudança de representação é feita por uma transformação unitária do operador na representação de Heisenberg: $\varphi^{Int} = U^\dagger \phi^{Heis} U$ o que equivale a identificar: $\phi_a^{Heis} \rightarrow \varphi_a^{Int}$

$\partial_i \phi_a^{Heis} \rightarrow \partial_i \varphi_a^{Int}$

$\pi_a^{Heis} \rightarrow \partial_0 \varphi_a^{Int}$, sendo i os índices das componentes espaciais

Os elementos da matriz S são dados por:

$$\langle 0|S|0 \rangle_H = \langle 0|T e^{\{-i \int d^4y H_I^{int}(y)\}}|0 \rangle_{Int}$$

onde T é o operador de ordenamento temporal, que para um campo φ pode ser escrito como:

$$T \{\varphi(x)\varphi(x')\} = \theta(x_0 - x'_0)\varphi(x_0)\varphi(x'_0) + \theta(x'_0 - x_0)\varphi(x_0)\varphi(x'_0)$$

e representa a propagação do campo entre pontos x e x'.

Após termos levado em conta as modificações nos cálculos devidas à presença dos acoplamentos derivativos, podemos obter as regras de Feynmann necessárias aos cálculos dos processos de interesse. Apesar de estarmos lidando com a representação de interação continuaremos usando o símbolo ϕ para o campo do pión.

Na hamiltoniana existem campos piônicos e derivadas que, quando da expansão da matriz S, resultam nos seguintes propagadores:

$$\begin{aligned} \langle 0|T \{\phi(x)\phi(x')\}|0 \rangle &= i\Delta_F(x - x') \\ \langle 0|T \{\partial^\mu \phi(x)\phi(x')\}|0 \rangle &= i\Delta_F^\mu(x - x') \\ \langle 0|T \{\partial^\mu \phi(x)\partial^\nu \phi(x')\}|0 \rangle &= i\Delta_F^{\mu\nu}(x - x') \end{aligned} \tag{IV.39}$$

sendo o segundo e terceiro obtidos a partir por derivações sucessivas do primeiro no espaço de configuração, podendo ser representados, no espaço de momentos por:

$$\begin{array}{l} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \text{---} \end{array} \begin{array}{l} \\ \mu \\ \nu \quad \mu \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{i}{k^2 - m^2} = i\Delta_F \\ \frac{-ik^\mu}{k^2 - m^2} = i\Delta_F^\mu \\ \frac{ik^\mu k^\nu - g^{\mu 0} g^{\nu 0} (k^2 - m^2)}{k^2 - m^2} = i\Delta_F^{\mu\nu} \end{array} \tag{IV.40}$$

As linhas externas correspondentes aos campos e às derivadas dos campos, são respectivamente 1 e $\pm ik_\mu$ onde k é o momento do campo sendo o sinal relativo ao fluxo de energia da partícula que entra (+) ou sai (-) do vértice. Diagramaticamente:

$$\begin{array}{l} \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \\ \mu \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ +ik_\mu \end{array} \tag{IV.41}$$

O vértice de n pernas é obtido através da n -ésima derivada funcional dos termos de H_i com relação às pernas externas:

$$\frac{\delta^n H_i}{\delta\phi_1\delta\phi_2\dots\delta\partial_\mu\phi_{n-k}\partial_\mu\phi_n}$$

Para H_i com a função $f(\phi^2)$ parametrizada em (IV.27a) por a_i , obtemos:

$$\begin{aligned} H_I = & \frac{-1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_b\left\{\delta_{ab}\left(\frac{\phi^2}{f_\pi^2}\alpha_1 + \frac{\phi^4}{f_\pi^4}\alpha_2\right) + \phi_a\phi_b\left(\frac{\beta_1}{f_\pi^2} + \frac{\phi^2}{f_\pi^4}\beta_2\right)\right\} + \\ & + \frac{1}{2}\partial_0\phi_a\partial^0\phi_b\left\{\delta_{ab}\frac{\phi^4}{f_\pi^4}\alpha_2^{NC} + \phi_a\phi_b\frac{\phi^2}{f_\pi^4}\beta_2^{NC}\right\} + L_{sb} \end{aligned} \quad (IV.42)$$

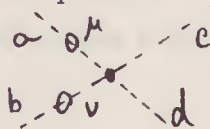
onde os coeficientes α_i e β_i podem ser expressos em termos da expansão da função $f(\phi^2)$, em IV.23:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -(1 + 2a_1) & \beta_1 &= -(1 + 4a_1) \\ \alpha_2 &= (1 + 4a_1 + 3a_1^2 - 2a_2) & \beta_2 &= (2 + 12a_1 - 8a_2 + 16a_1^2) \\ \alpha_2^{NC} &= (1 + 2a_1)^2 & \beta_2^{NC} &= (32a_1^2 + 20a_1 + 3) \end{aligned} \quad (IV.43)$$

Observamos o aparecimento de partes não covariantes tanto no propagador $\Delta_{\mu\nu}$ como nos termos de interação com 6 ou mais campos (associados aos parâmetros indicados por NC). Apesar disto, a matriz S permanece covariante [Ger71], graças a cancelamentos das contribuições não covariantes.

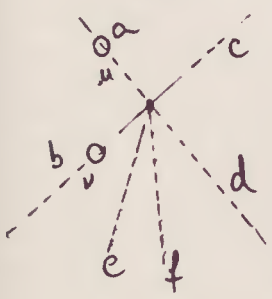
Os vértices de ordem mais baixa, segundo procedimento de Gerstein et al (1971), no caso de píons sem massa são:

a) quatro pernas:



$$ig_{\mu\nu}\left\{\frac{2\alpha_1}{f_\pi^2}\delta_{ab}\delta_{cd} + \frac{\beta_1}{f_\pi^2}(\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc})\right\} \quad (IV.44)$$

b) seis pernas:



$$\begin{aligned} & (-i)\left(\frac{-8\alpha_2}{f_\pi^4}g_{\mu\nu} + \frac{8\alpha_2^{NC}}{f_\pi^4}g_{0\mu}g_{0\nu}\right)\delta_{ab}(\delta_{cd}\delta_{ef} + \delta_{ce}\delta_{df} + \delta_{cf}\delta_{de}) + \\ & -2i\left(-\frac{\beta_2}{f_\pi^4}g_{\mu\nu} + \frac{\beta_2^{NC}}{f_\pi^4}g_{0\mu}g_{0\nu}\right)\{\delta_{ac}(\delta_{be}\delta_{df} + \delta_{de}\delta_{bf} + \delta_{bd}\delta_{ef}) + \\ & + \delta_{ad}(\delta_{be}\delta_{cf} + \delta_{bf}\delta_{bc} + \delta_{bc}\delta_{ef}) + \delta_{ae}(\delta_{bd}\delta_{cf} + \delta_{bc}\delta_{df} + \delta_{bf}\delta_{cd}) + \\ & \delta_{af}(\delta_{bc}\delta_{de} + \delta_{bd}\delta_{ce} + \delta_{cd}\delta_{be})\} \end{aligned} \quad (IV.45)$$

sendo que podemos usar uma notação covariante $:g^{0\mu} = \eta^\mu$, onde $\eta^\mu = (1, 0, 0, 0)$.

Notamos que os termos não covariantes contribuem apenas para processos que envolvem diagramas com vértices de 6 ou mais pernas ou que tenham propagadores de píons. Dessa maneira o diagrama de árvore, que deverá reproduzir o resultado da álgebra de correntes pode ser obtido via derivação “ingênua” das regras da lagrangiana.

Analogamente, podemos considerar as contribuições dos termos de quebra de simetria, através dos vértices correspondentes a serem somados aos derivados anteriormente. Obtemos:

a) quatro pernas



$$i4\gamma_2 \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2} (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) \quad (IV.46)$$

b) seis pernas:



$$\begin{aligned} (8i) \frac{m_\pi^2 \gamma_3}{f_\pi^4} \{ & \delta_{ab} (\delta_{cd}\delta_{ef} + \delta_{ce}\delta_{df} + \delta_{cf}\delta_{de}) + \delta_{ac} (\delta_{be}\delta_{df} + \delta_{de}\delta_{bf} + \delta_{bd}\delta_{ef}) + \\ & + \delta_{ad} (\delta_{be}\delta_{cf} + \delta_{bf}\delta_{bc} + \delta_{bc}\delta_{ef}) + \delta_{ae} (\delta_{bd}\delta_{cf} + \delta_{bc}\delta_{df} + \delta_{bf}\delta_{cd}) + \\ & + \delta_{af} (\delta_{bc}\delta_{de} + \delta_{bd}\delta_{ce} + \delta_{cd}\delta_{be}) \} \end{aligned} \quad (IV.47)$$

onde γ_2, γ_3 assumem os seguintes valores para as representações rotuladas por $N = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \gamma_2^{N=1} &= \frac{-1}{8} & \gamma_2^{N=2} &= \frac{-1}{4} \\ \gamma_3^{N=1} &= \frac{1}{16} & \gamma_3^{N=2} &= \frac{-15}{16} \end{aligned} \quad (IV.48)$$

A seguir apresentamos uma tabela dos parâmetros associados tanto aos valores mais utilizados para a função arbitrária $f(\phi^2)$, quanto para os termos de quebra de simetria γ_i^N .

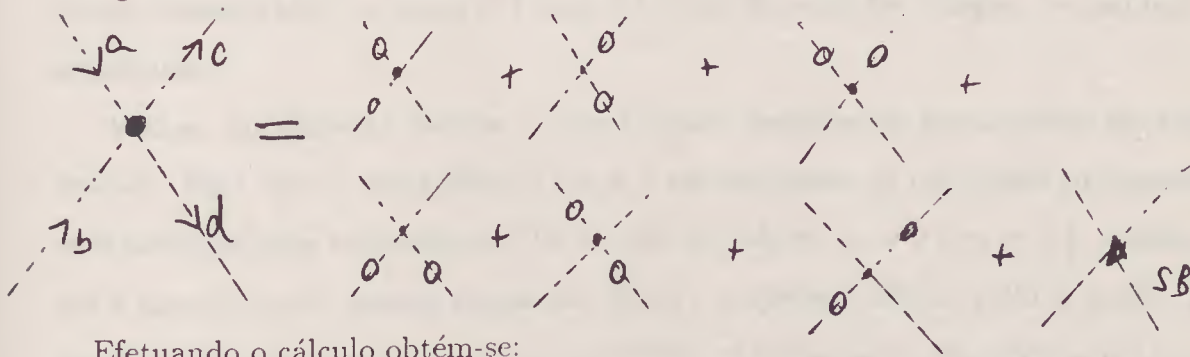
TABELA IV.1: Valores de diversos modelos para a função $f(\phi^2)$ e quebra de simetria:

parâmetro	repres.N=1	repres.N=2	modelo Schwinger	modelo Charap
a_1	$\frac{-1}{2}$	-1	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-2}{5}$
a_2	$\frac{-1}{8}$	-2	0	$\frac{-9}{175}$
α_1	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{5}$
α_2	0	4	$\frac{3}{16}$	$\frac{-3}{175}$
β_1	1	3	0	$\frac{3}{5}$
β_2	-1	22	0	$\frac{30}{175}$
α_2^{NC}	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{25}$
β_2^{NC}	1	15	0	$\frac{3}{25}$
γ_2	$\frac{-1}{8}$	$\frac{-1}{4}$	arbitrario	arbitrario
γ_3	$\frac{1}{16}$	$\frac{-15}{16}$	arbitrario	arbitrario

IV.7 Amplitude de Espalhamento na Aproximação de Árvore

A amplitude de espalhamento $\pi\pi$ em ordem mais baixa é dada pelo diagrama de árvore (figIV.2), onde as pernas com a bolinha representam a ação das derivadas e "sb" a parte responsável pela quebra de simetria.

figIV.2: Contribuição do diagrama de árvore da lagrangiana efetiva



Efetutando o cálculo obtém-se:

$$\begin{aligned}
 T^{ab \rightarrow cd} &= \frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{f_\pi^2} (s + (4\alpha_1 + 4\gamma_2)m_\pi^2) + \frac{\delta_{ac}\delta_{bd}}{f_\pi^2} (t + m_\pi^2(4\alpha_1 + 4\gamma_2)) + \\
 &+ \frac{\delta_{ad}\delta_{bc}}{f_\pi^2} (u + m_\pi^2(4\alpha_1 + 4\gamma_2))
 \end{aligned}
 \tag{IV.49}$$

No limite quiral todos os modelos reproduzem automaticamente o resultado da álgebra de correntes e tornam-se independentes da forma da função arbitrária $f(\phi^2)$.

De maneira genérica, obtemos para os canais de isospin:

$$\begin{aligned} T^0 &= \frac{1}{f_\pi^2} (2s + 4m_\pi^2(5\gamma_2 + 1 + 5\alpha_1)) \\ T^1 &= \frac{t - u}{f_\pi^2} \\ T^2 &= \frac{1}{f_\pi^2} (-s + 4m_\pi^2(1 + 2\alpha_1 + 2\gamma_2)) \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

No CM as variáveis de Mandelstam são dadas por II.3, em termos do momento k , da energia total W e do ângulo de espalhamento θ , o que permite extrair as amplitudes de ondas parciais S e P como coeficiente dos polinômios de legendre (seção II.5):

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{1}{f_\pi^2} (2s + 4m_\pi^2(5\gamma_2 + 1 + 5\alpha_1)) \\ T_1^1 &= \frac{4k^2}{3f_\pi^2} \\ T_0^2 &= \frac{1}{f_\pi^2} (-s + 4m_\pi^2(1 + 2\alpha_1 + 2\gamma_2)) \end{aligned} \quad (\text{IV.51})$$

Não existe contribuição de ondas parciais maiores nos canais $I=0$ e 2 que só aparecem quando do cálculo de correções de ordens maiores às amplitudes. O termo de massa não contribui para a onda P ($l=1$).

Estas amplitudes não são unitárias na região física mas, próximo ao limiar, podemos esperar que a parte imaginária seja muito pequena. Dois métodos de unitarização foram apresentados na seção II.7 com o intuito de estender a região de validade dessas amplitudes.

Vamos, inicialmente estudar o papel desses métodos de unitarização da amplitude teórica. Para tanto, nos gráficos I.a,b e c apresentamos os resultados provenientes dos dois métodos para as amplitudes IV.51 com os valores $\alpha_1 = 0$ e $\gamma_2 = -\frac{1}{8}$, correspondentes à amplitude do modelo sigma não linear. Inspeccionando os gráficos I.a,b,c pode-se notar que os dois métodos produzem resultados razoavelmente coincidentes até momentos da ordem de $K_{cm} \simeq 300 \text{ MeV}$. Entretanto, para valores maiores as previsões passam a divergir significativamente. Na tabela II são apresentados os valores dos argumentos da função arcsen das amplitudes do primeiro método de unitarização para os canais de isospin $I=0$ e 2 da onda S e $I=1$ da onda P. É interessante notar que para os tres valores de I existe uma energia para a qual o argumento da função arcsen da expressão II.42

torna-se maior do que 1. A amplitude do canal $I=0$ da onda S é maior e portanto o argumento atinge o valor 1 mais rapidamente limitando a validade dessa parametrização. Isso significa que este método de unitarização só é apropriado para energias baixas. O problema é devido ao fato de termos identificado a parte real total da amplitude com a calculada a partir do modelo. Por isso, daqui em diante só consideraremos o método de unitarização dinâmica.

Gráfico I.a: Defasagens para onda S do canal $I=0$ com a representação $N=1$ para o campo do pión e de L_{sb} . Alinha cheia corresponde à amplitude dinamicamente unitarizada, enquanto que a tracejada foi obtida identificando-se a amplitude teórica à parte real daquela parametrizada em termos de defasagens.

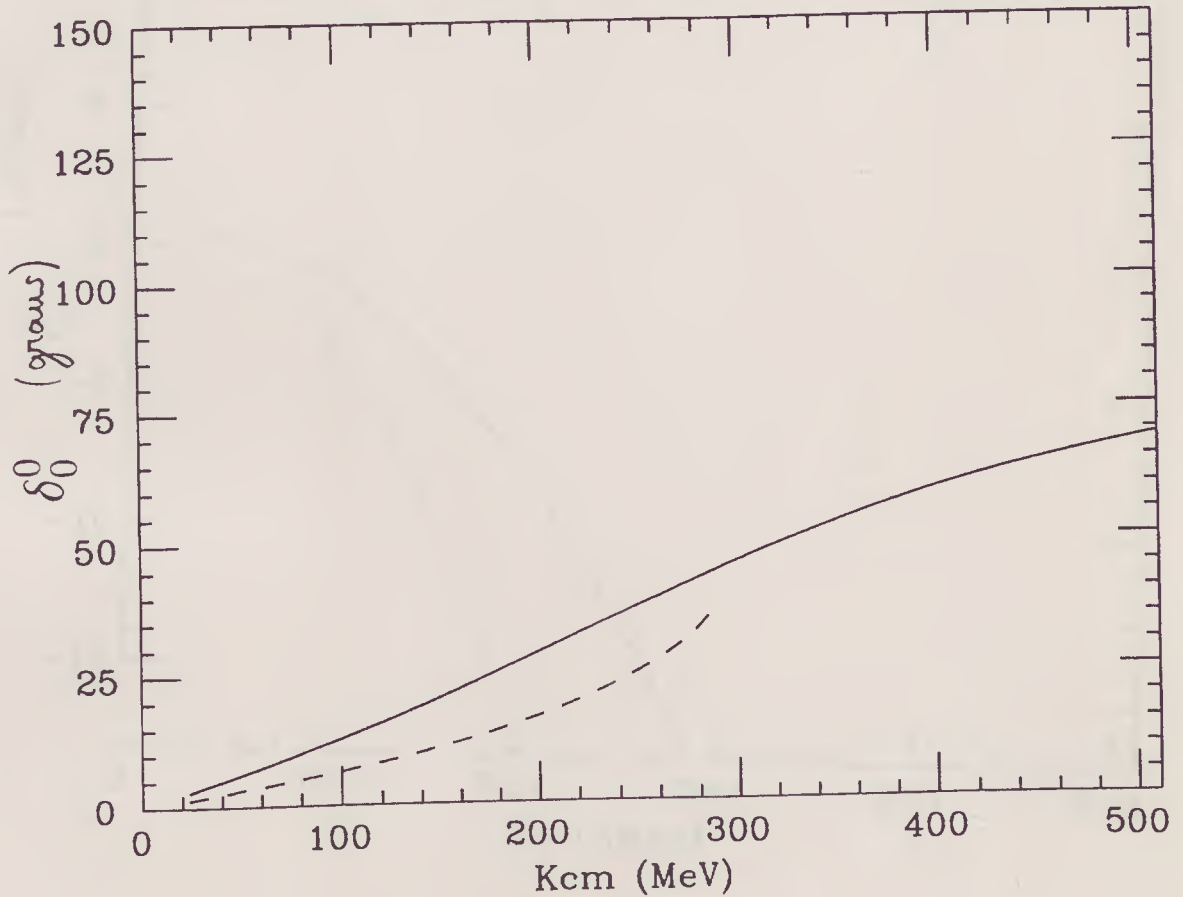


Gráfico I.b: Defasagens para onda S no canal I=2; mesmas convenções do gráfico I.a.

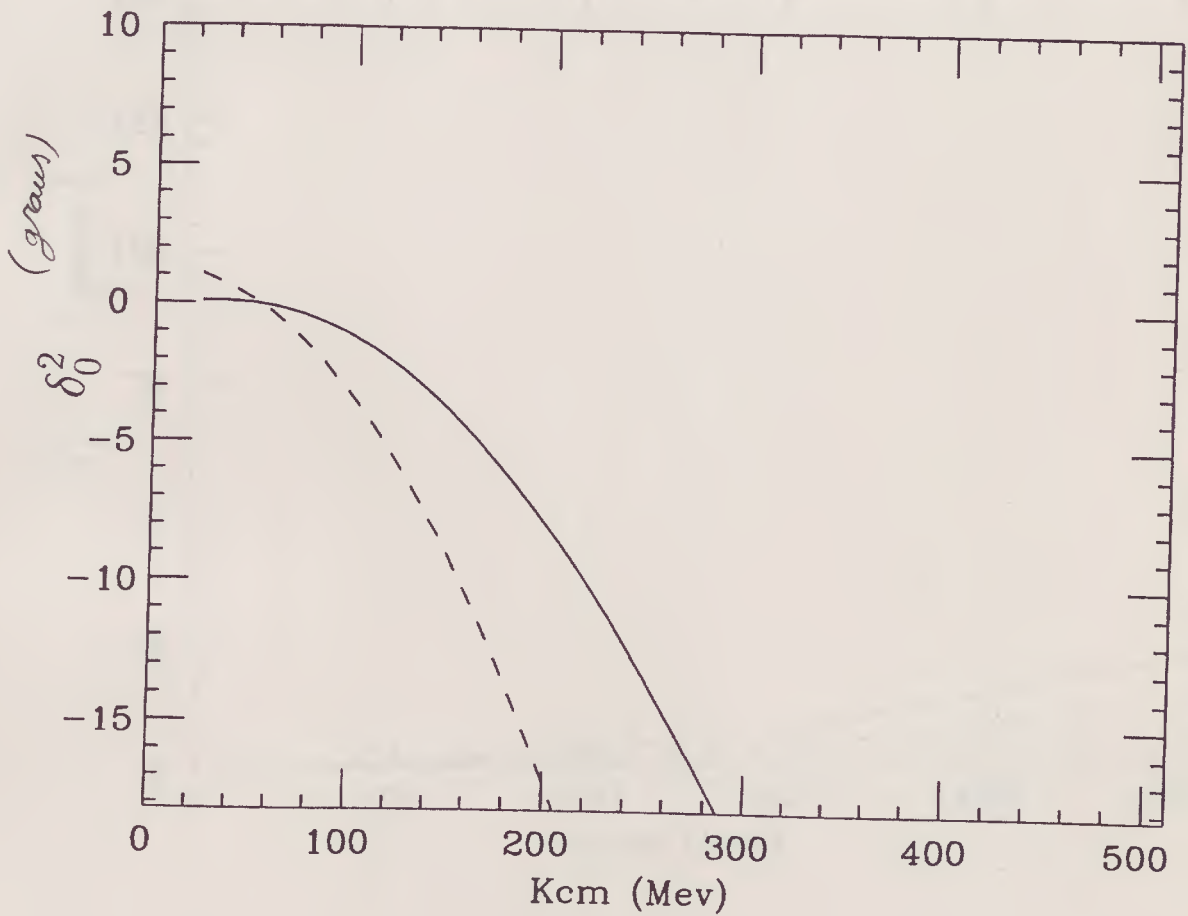


Gráfico I.c: Defasagens para onda P do canal $I=1$. As convenções para as linhas são as mesmas do gráfico I.a

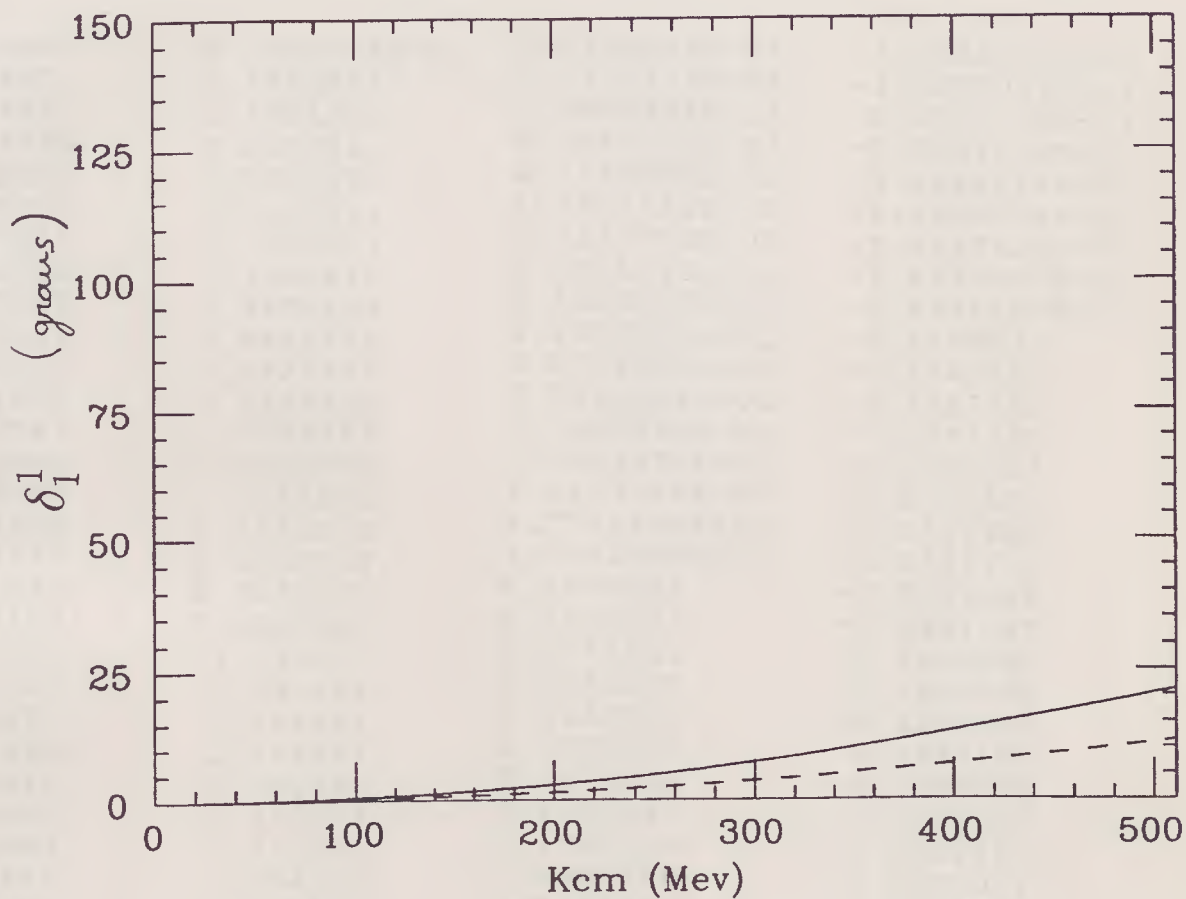


Tabela II.a : Valores do argumento da função $\arcsen()$ da expressão que vincula a amplitude teórica e a parte real daquela parametrizada em termos das defasagens: $\delta_i^f = \frac{1}{2}\arcsen(2km_i^f)$.

K_{CM}	$2 k m_0^0$	$2 k m_1^1$	$2 k m_0^2$
23.57965	5.0662316E-02	1.4360089E-04	1.7825619E-03
58.78775	0.1283457	2.0770279E-03	-1.0807042E-03
80.96913	0.1801579	5.0875824E-03	-8.6124176E-03
99.27739	0.2256316	8.8262269E-03	-1.8804273E-02
115.5682	0.2687398	1.3149677E-02	-3.1011619E-02
130.5986	0.3111074	1.7977739E-02	-4.4900294E-02
144.7619	0.3535767	2.3259778E-02	-6.0267422E-02
158.2909	0.3966448	2.8961519E-02	-7.6978967E-02
171.3359	0.4406298	3.5058685E-02	-9.4941482E-02
184.0000	0.4857473	4.1533507E-02	-0.1140873
196.3568	0.5321497	4.8372623E-02	-0.1343662
208.4610	0.5799482	5.5565804E-02	-0.1557395
220.3543	0.6292263	6.3105039E-02	-0.1781775
232.0690	0.6800476	7.0983976E-02	-0.2016567
243.6309	0.7324621	7.9197578E-02	-0.2261582
255.0608	0.7865091	8.7741695E-02	-0.2516669
266.3757	0.8422202	9.6612960E-02	-0.2781703
277.5896	0.8996210	0.1058086	-0.3056583
288.7144	0.9587324	0.1153263	-0.3341222
299.7599	1.019572	0.1251641	-0.3635550
310.7346	1.082154	0.1353203	-0.3939506
321.6458	1.146491	0.1457936	-0.4253039
332.4996	1.212592	0.1565828	-0.4576107
343.3016	1.280468	0.1676868	-0.4908670
354.0565	1.350124	0.1791047	-0.5250698
364.7684	1.421569	0.1908359	-0.5602164
375.4411	1.494806	0.2028796	-0.5963041
386.0777	1.569842	0.2152352	-0.6333310
396.6812	1.646680	0.2279023	-0.6712950
407.2542	1.725324	0.2408803	-0.7101946
417.7990	1.805777	0.2541689	-0.7500284
428.3176	1.888043	0.2677678	-0.7907951
438.8120	1.972123	0.2816766	-0.8324935
449.2839	2.058020	0.2958950	-0.8751227
459.7347	2.145736	0.3104228	-0.9186818
470.1659	2.235273	0.3252598	-0.963169.
480.5788	2.326632	0.3404057	-1.008586
490.9745	2.419815	0.3558605	-1.054930
501.3542	2.514823	0.3716238	-1.102201
511.7187	2.611658	0.3876956	-1.150399

Passamos, agora, a comparar os resultados associados às várias combinações de parâmetros mostradas na tabela IV.1, utilizando os ajustes de dados de Froggatt e Petersen como representativos da situação experimental. Nos gráficos eles são sempre representados por linhas pontilhadas.

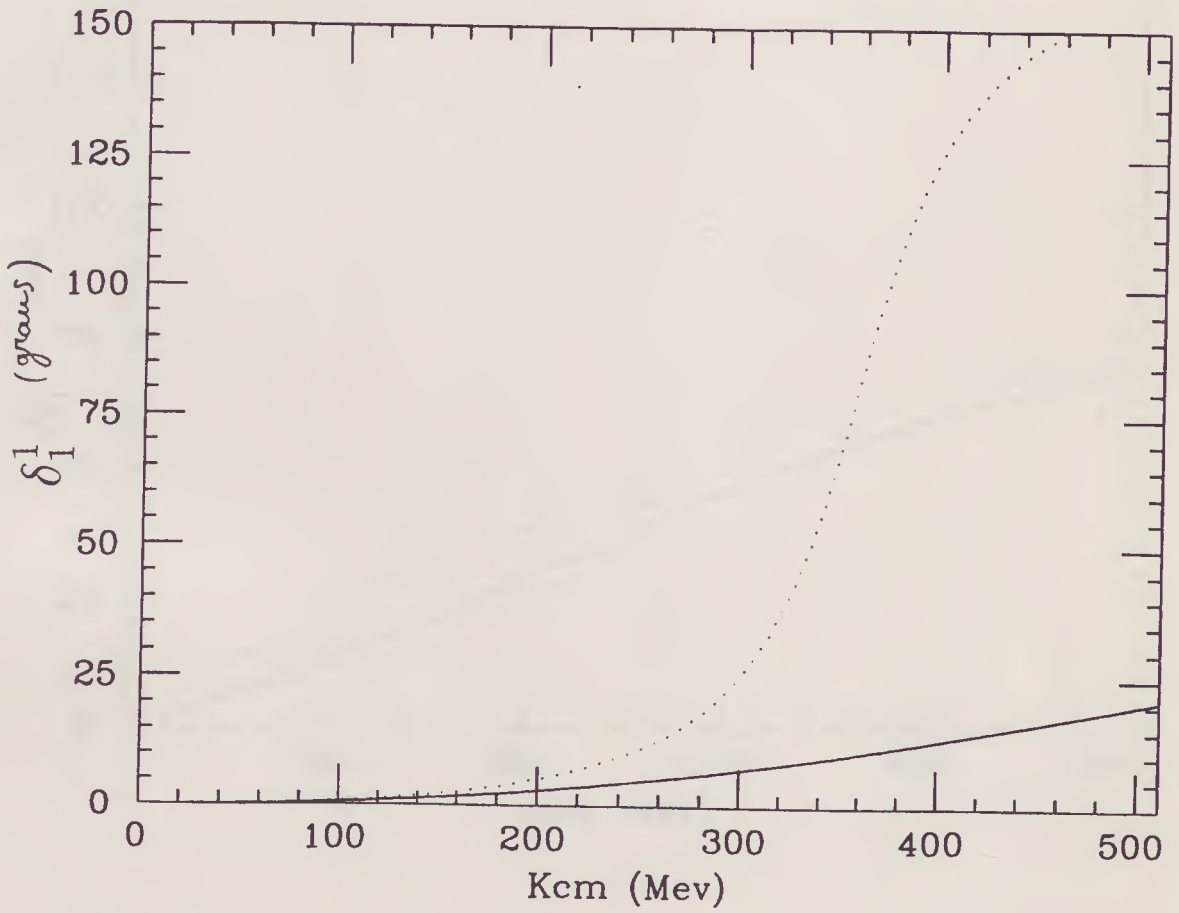
Iniciamos tal estudo com a onda P, já que ela não depende das funções $f(\phi^2)$ e $L_{sb}(\phi^2)$. A defasagem correspondente está mostrada no gráfico II, onde vemos que para momentos de até $k_{CM} \simeq 240 \text{ MeV}$ a amplitude teórica reproduz bem os dados. A partir daí as curvas se separam rapidamente, havendo a indicação experimental da existência de um ressonância por volta de 780 MeV.

No caso das ondas S, com $I=0$ e 2, tomamos o modelo σ não linear com o termo lagrangiano de quebra de simetria pertencente à representação $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ como padrão para estudar as influências dos vários efeitos. Nos gráficos, os resultados associados a esse padrão são sempre representados por linhas cheias.

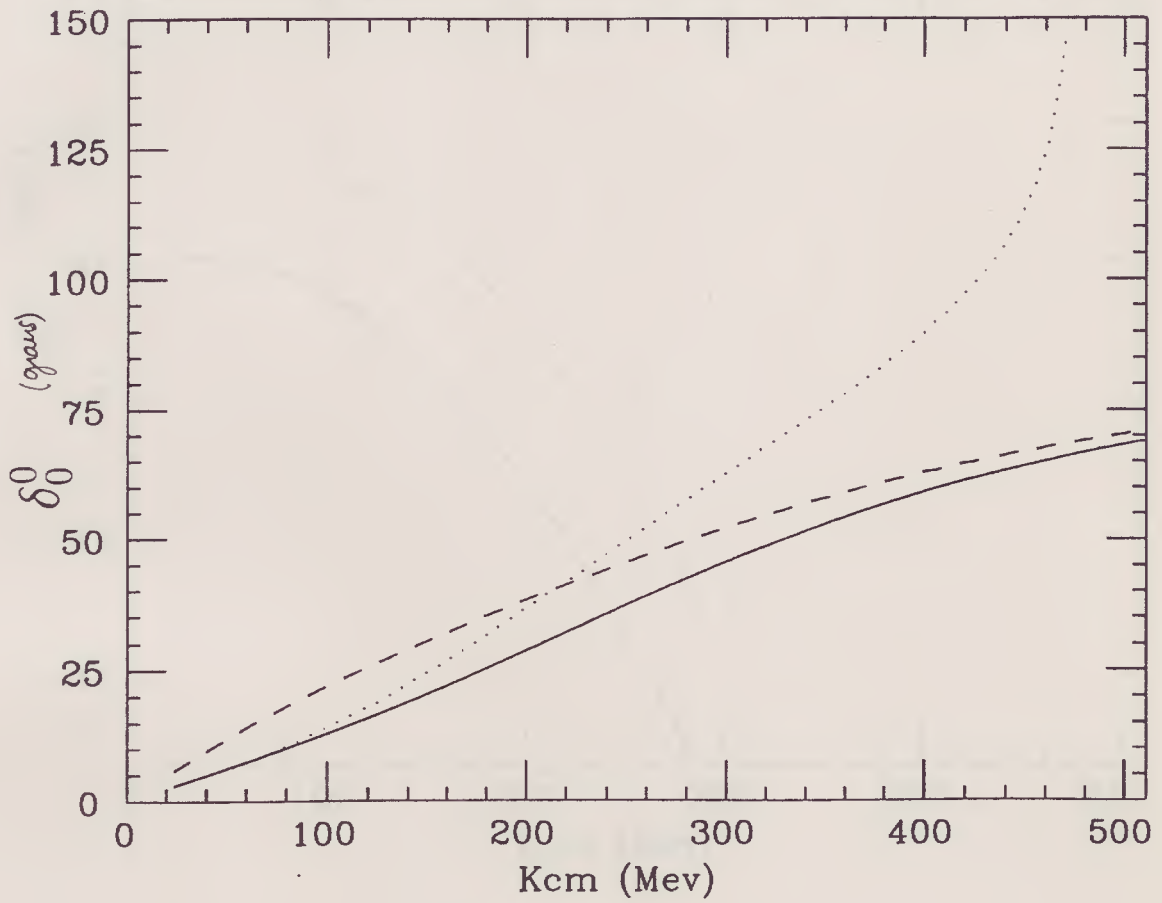
Nos gráficos III.a e III.b temos as ondas S para $I=0$ e 2, respectivamente, o termo de quebra de simetria e também o campo do pión estão definidos em termos da representação $(\frac{N}{2}, \frac{N}{2})$ com $N = 1$ (linha contínua) e $N = 2$ (linha tracejada). Para altas energias as duas representações tendem ao mesmo valor, pois a parte que as diferencia depende da massa do pión e esta se torna menos importante do que a dependência em s,t,u à medida que a energia aumenta. Nos gráficos IV.a e IV.b, temos a linha padrão, da representação $N=1$, e o limite quiral correspondente à linha tracejada. A massa é responsável por uma pequena correção, o que é compatível com a hipótese de simetria parcial, PCAC.

Em V.a e V.b curvas de outros modelos são desenhadas para as ondas S, sendo que L_{sb} é fixado como representação (1,1) e o campo do pión definido pelos coeficientes α e β . As linhas a, b, c, d, e correspondem respectivamente aos valores de α_1 iguais a 0 (modelo sigma não linear, $N=1$), 1 (representação $N=2$), 0 (resultado de Weinberg de 66), $\frac{-2}{5}$ (definição de Charap), $\frac{-1}{2}$ (definição de Schwinger). Os modelos apresentam valores bem diferentes a baixas energias devido à diferença dos termos de quebra de simetria, mas quando a se torna pequena com relação à energia total, os modelos convergem para os mesmos pontos.

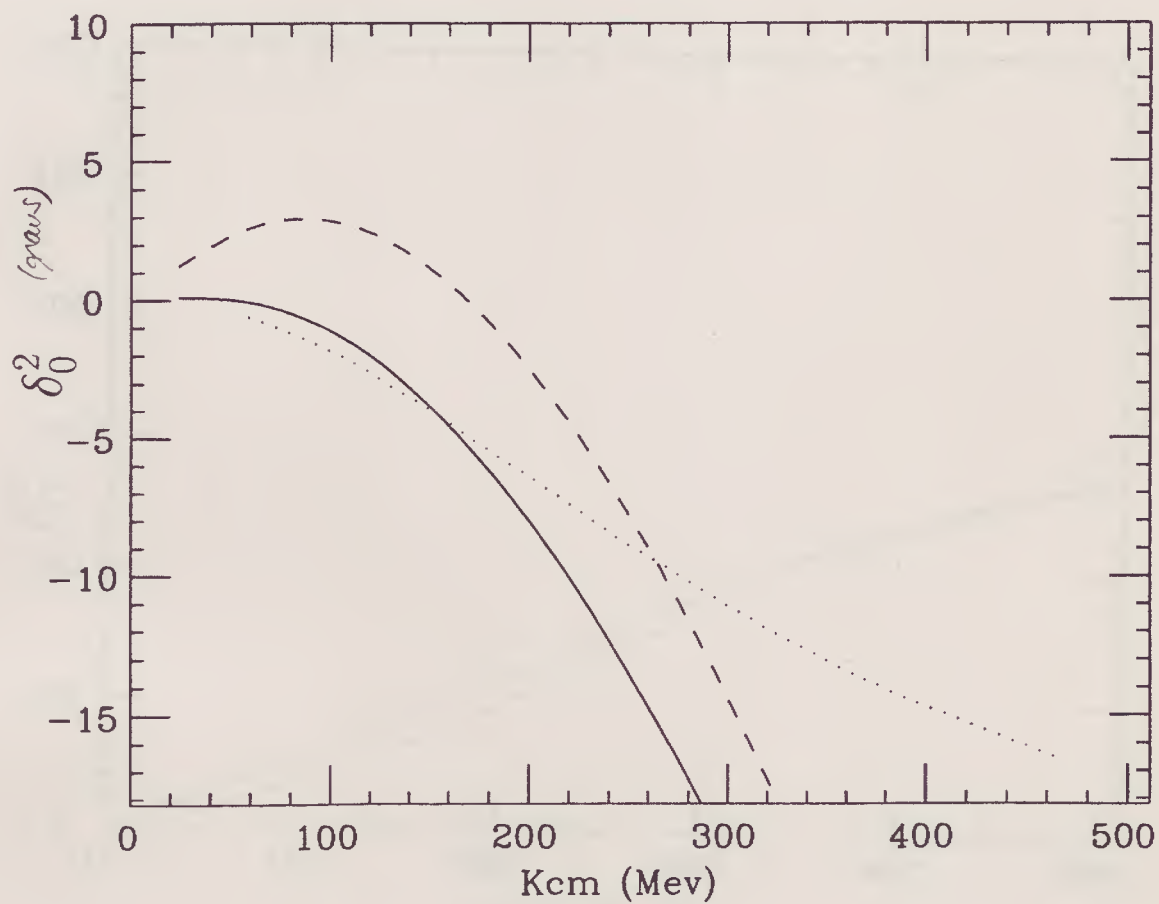
Gráf.II Defasagem para onda P, canal I=1. A linha pontilhada representa os dados experimentais de [Fro77] e a cheia a amplitude teórica obtida a partir do modelo σ -não linear.



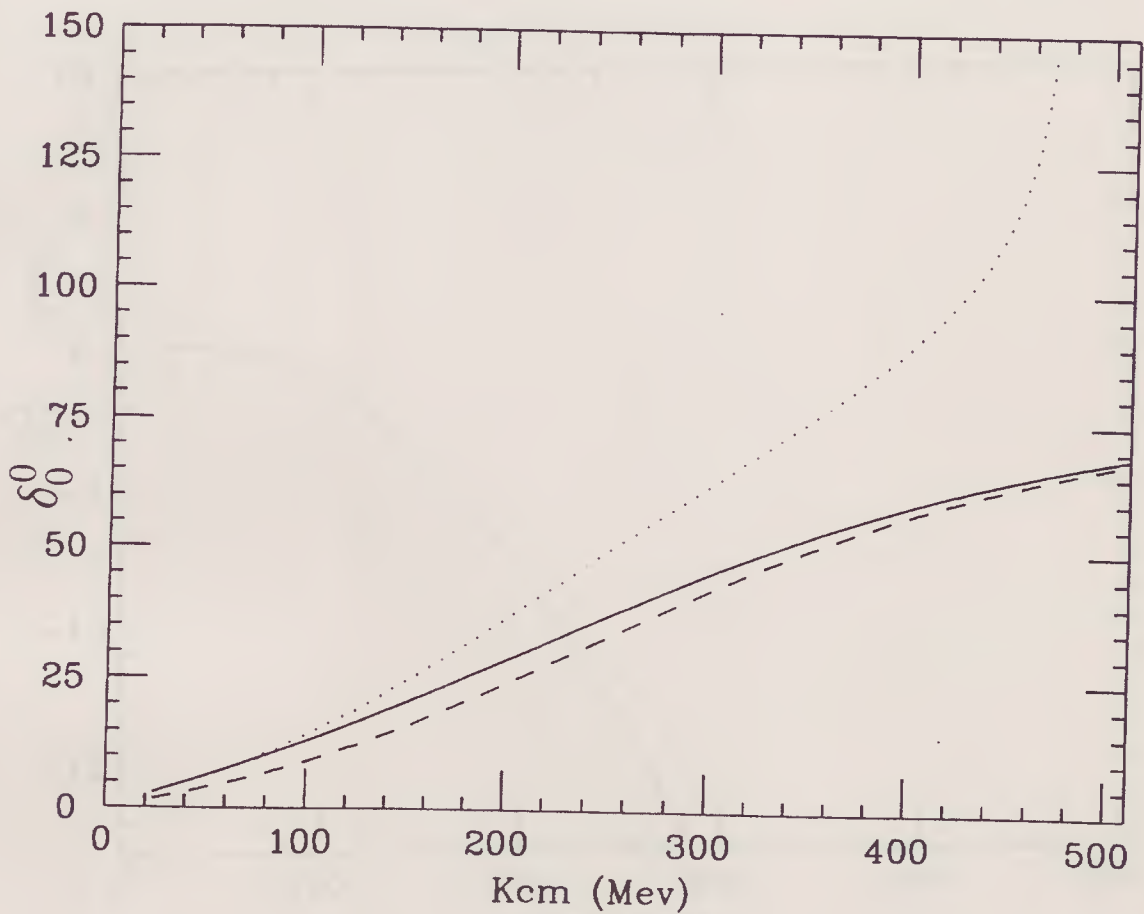
Gráf.IIIa; Influência da representação de $SU(2) \times SU(2)$ sobre a defasagem da onda S, $I=0$. A linha tracejada corresponde à representação (1,1); as demais convenções são as do gráfico II.



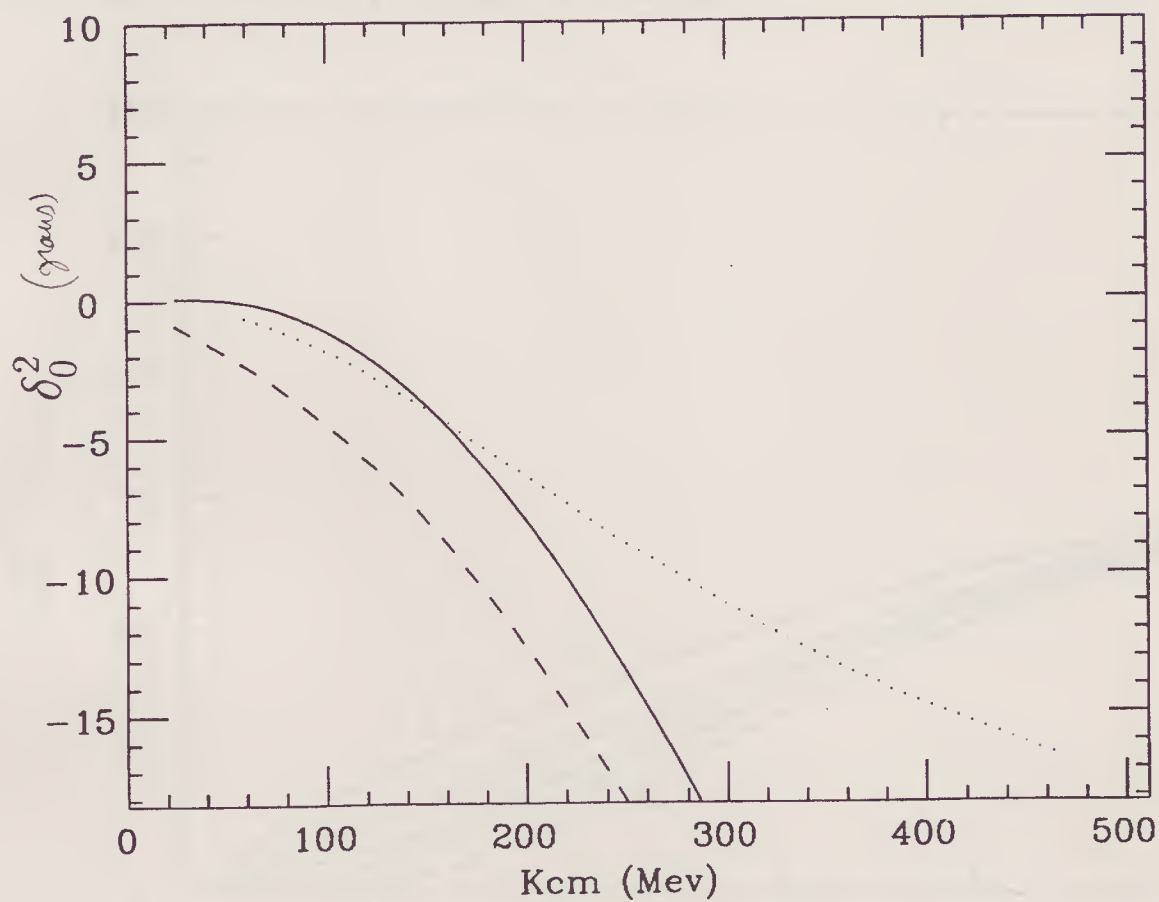
Gráf.IIIb; Influência da representação de $SU(2) \times SU(2)$ sobre a defasagem da onda S, $I=2$. As convenções são as do gráfico III.a.



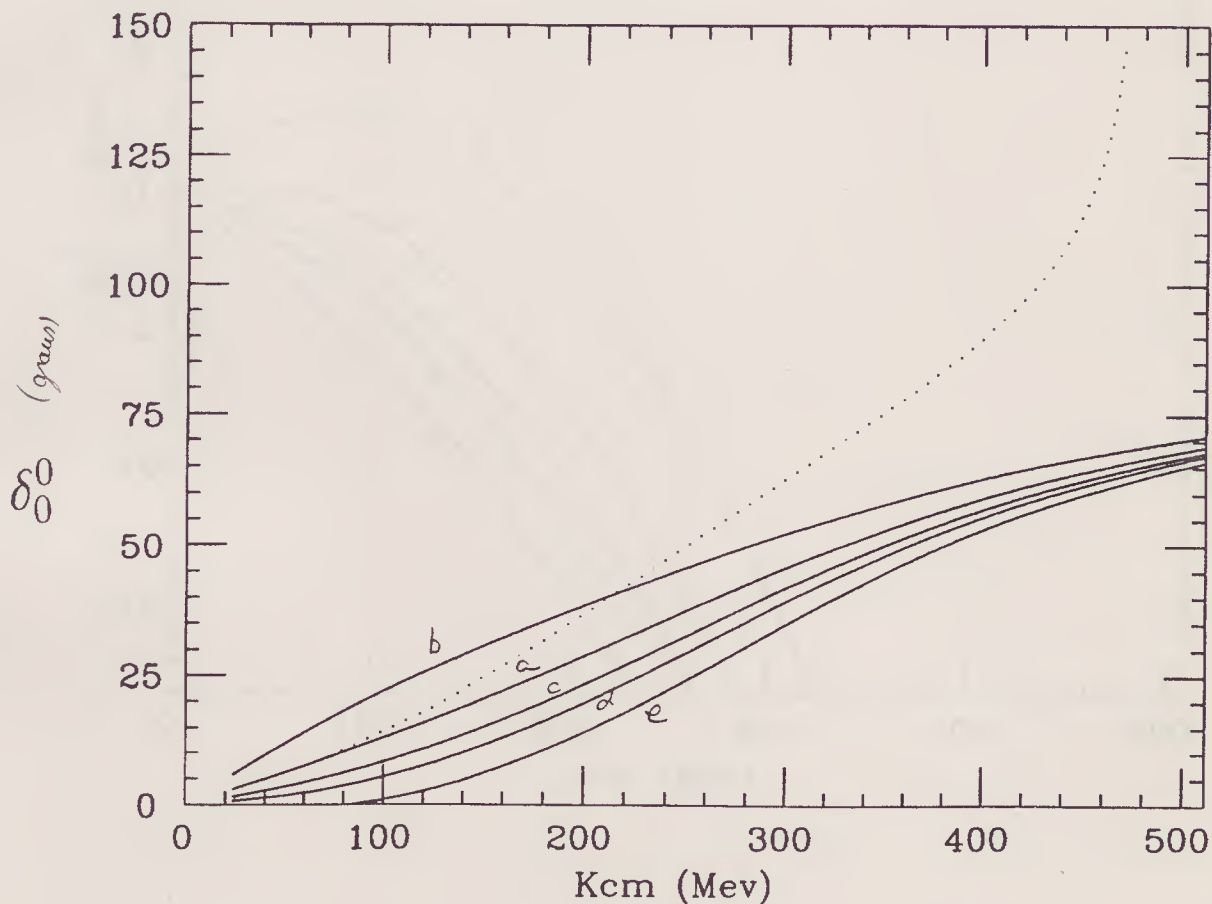
Gráf.IV.a; Influência da massa do pión sobre a defasagem da onda S,I=0. A linha tracejada corresponde a $m_\pi = 0$, e as demais convenções são as do gráfico II.



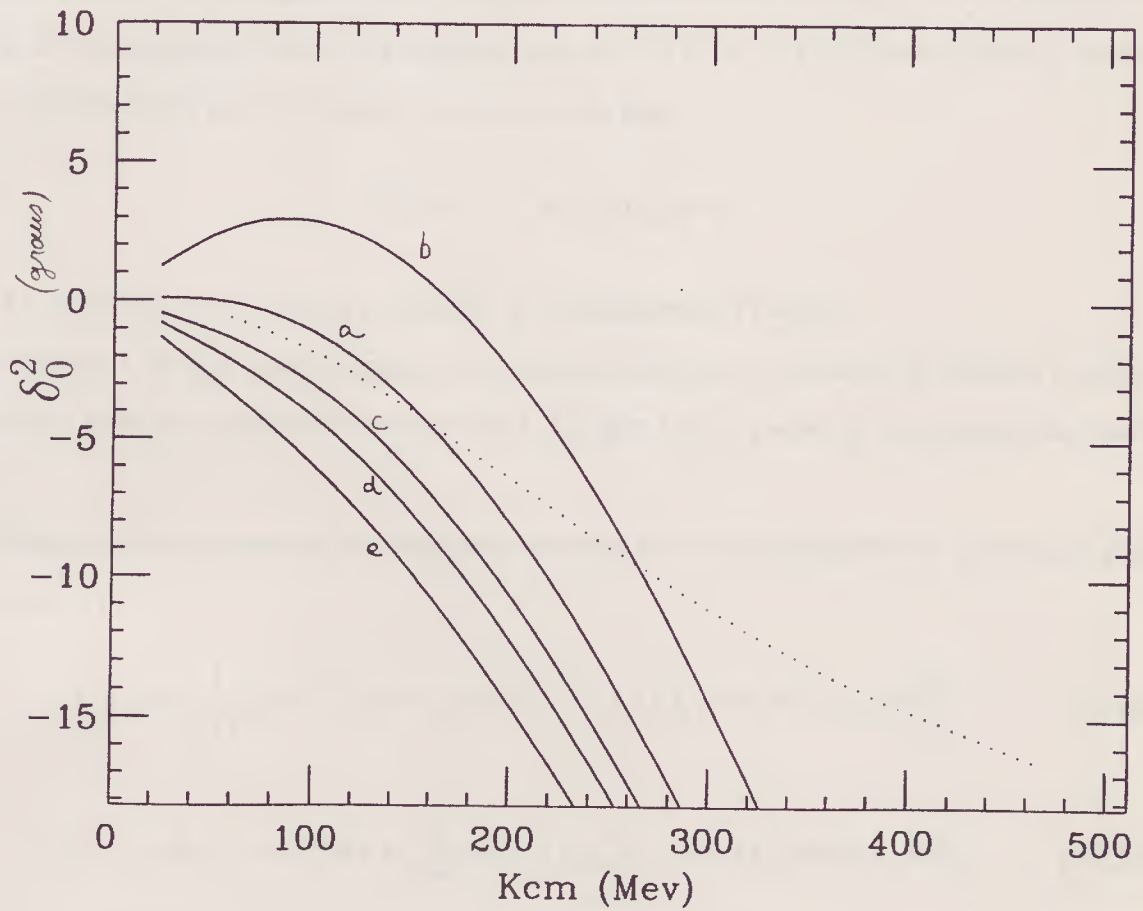
Gráf.IV.b; Influência da massa do pión sobre a defasagem da onda S, $I=2$. As convenções são as do gráfico IV.a.



Gráf.V.a; Influência da forma da função $f(\phi^2)$ sobre a defasagem da onda S, $I=0$. L_{sb} é fixado como representação (1,1) e o campo do pión definido pelos coeficientes α e β . As linhas a, b, c, d, e correspondem respectivamente aos valores de α_1 iguais a 0 (modelo sigma não linear, $N=1$), 1 (representação $N=2$), 0 (resultado de Weinberg de 66), $\frac{-2}{5}$ (definição de Charap), $\frac{-1}{2}$ (definição de Schwinger).



Gráf.V.b; Influência da forma da função $f(\phi^2)$ sobre a defasagem da onda S, $I=2$. As convenções são as do gráfico V.a.



IV.8 O Méson Vetorial ρ

No capítulo III vimos que há uma ressonância na onda p na região de energia de 780 MeV associada ao méson vetorial ρ , que pode ser introduzido neste modelo. Os mésons vetoriais podem ser encarados como campos de calibre não abelianos a nível hadrônico, devido à não comutatividade da álgebra quiral $SU(2) \times SU(2)$ [Wes67, Bha88], sendo, então, introduzidos por derivadas covariantes do tipo

$$\mathcal{D}_\mu(\phi) = D_\mu\phi + g\mathbf{U}_\mu \times \phi$$

onde \mathbf{U}_μ é campo do ρ e g é a constante de acoplamento [Yan54].

A exigência de que a lagrangiana seja simultaneamente invariante de calibre e quiral, é satisfeita pela introdução do méson axial A_1 , que tem o papel de contrapartida quiral do ρ .

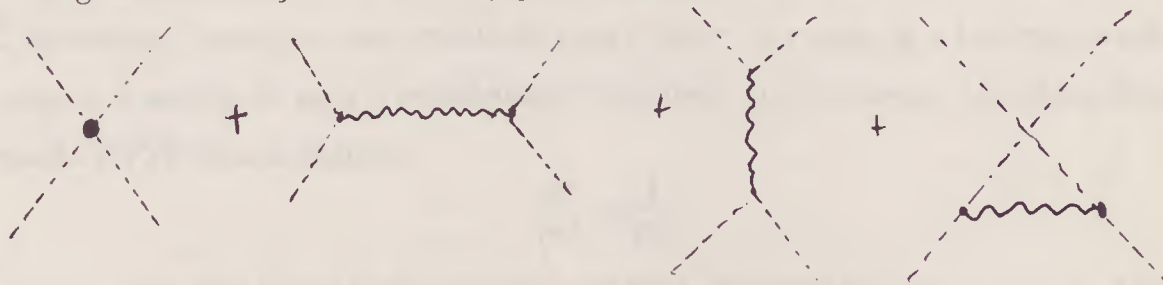
Obtém-se, desse maneira, os seguintes termos para a lagrangiana de interação para os píons e o ρ :

$$L_{\pi\pi\pi\pi} = \frac{1}{8f_\pi^2} \left\{ 2(1 - \xi)\phi^2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \left(\frac{1}{2} - \xi\right)\partial_\mu\phi^2\partial^\mu\phi^2 \right\} + \gamma_2\phi^4\frac{m_\pi^2}{f_\pi^2} \quad (IV.52)$$

$$L_{\pi\pi\rho} = g\mathbf{U}_\mu(\phi \times \partial^\mu\phi) + \frac{g}{4m_\rho^2}(\delta - 1)(\partial_\mu\mathbf{U}_\nu - \partial_\nu\mathbf{U}_\mu)(\partial^\mu\phi \times \partial^\nu\phi) \quad (IV.53)$$

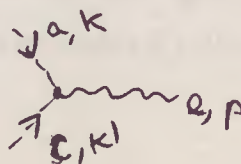
onde $\xi = 4a_1 + 2$ [Ols68], e δ é um parâmetro medido no decaimento $\rho \rightarrow \pi\pi$. A partir desta lagrangiana pode-se calcular os diagramas representados na Figura 3.

Fig. 3: Contribuições do méson ρ para o espalhamento $\pi\pi$



Derivamos os seguintes vértices:

Fig.4: Vértice correspondente à IV.53



dado por:

$$-ig\epsilon_{acc} \left\{ (k^\mu + k'^\mu) + \frac{\delta}{m_\rho^2} (p \cdot k k'^\mu + p \cdot k' k^\mu) \right\} \quad (IV.54)$$

Fig.5: Vértice correspondente à IV.52



dado pelas expressões IV.44 e IV.46, com os índices α_1, β_1 substituídos respectivamente por : $(1 - \xi)$ e $(\frac{1}{2} - \xi)$.

O propagador do ρ tem a forma:

$$-i \frac{g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m_\rho^2}}{p^2 - m_\rho^2} \quad (IV.55)$$

Usando a informação fenomenológica que δ é muito pequeno, e as regras de Feynmann, obtemos a amplitude genérica, com as variáveis de Mandelstam definidas anteriormente, sendo $m = m_\rho$:

$$\begin{aligned} T = & -\delta_{ab}\delta_{cd} \left\{ \frac{-g^2(s-u)}{t-m^2} - \frac{g^2(s-t)}{u-m^2} + \frac{s}{2f_\pi^2} + \frac{m_\pi^2}{2}(4a_1+1) - 4\gamma_2 \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2} \right\} + \\ & -\delta_{ac}\delta_{bd} \left\{ -\frac{g^2(u-t)}{s-m^2} - \frac{g^2(t-s)}{u-m^2} + \frac{t}{2f_\pi^2} + \frac{m_\pi^2}{2}(4a_1+1) - 4\gamma_2 \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2} \right\} + \\ & -\delta_{ad}\delta_{bc} \left\{ \frac{-g^2(u-s)}{t-m^2} - \frac{g^2(u-t)}{s-m^2} + \frac{u}{2f_\pi^2} + \frac{m_\pi^2}{2}(4a_1+1) - 4\gamma_2 \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2} \right\} \quad (IV.56) \end{aligned}$$

É interessante notar que este resultado, para o limite de massa do ρ tendendo a infinito, reduz-se à amplitude para o espalhamento calculada anteriormente, quando se utiliza a relação KFSR [Sca81,Rob84]:

$$\frac{g^2}{m^2} = \frac{1}{2f_\pi^2}$$

Com as expressões acima, podemos obter as várias projeções em ondas parciais. Convém ressaltar que ao contrário do que acontecia anteriormente, agora podemos ter ondas com momento angular orbital maior do que 1. Para as ondas S e P, obtemos:

$$T_0^0 = 2g^2 \left\{ \left(\frac{4k^2 + W^2 + m^2}{2k^2} \right) \ln \left(\frac{m^2}{4k^2 + m^2} \right) - 2 \right\} + \frac{1}{f_\pi^2} \left\{ -W^2 + m_\pi^2 \left(20\gamma_2 - 2 - \frac{5m_\pi^2}{2}(4a_1 + 1) \right) \right\} \quad (\text{IV.57})$$

$$T_1^1 = \frac{-g^2}{2} \left\{ \frac{16k^2}{3(s - m^2)} + \frac{2(2k^2 + W^2)}{k^2} + \frac{2(2k^2 + m^2)}{k^2} + \frac{1}{2k^4} (2k^2 + m^2)(4k^2 + m^2 + W^2) \ln \left(\frac{m^2}{4k^2 + m^2} \right) \right\} - \frac{2k^2}{3f_\pi^2} \quad (\text{IV.58})$$

$$T_0^2 = -g^2 \left\{ \frac{(W^2 + m^2 + 4k^2)}{2k^2} \ln \left(\frac{4k^2 + m^2}{m^2} \right) - 2 \right\} + \frac{1}{f_\pi^2} \left\{ \frac{W^2}{2} + m_\pi^2 (8\gamma_2 - 2 - (4a_1 - 1)) \right\} \quad (\text{IV.59})$$

A amplitude IV.58 do canal I=1 contém um polo na região física, no ponto $s = m^2$, o que corresponde à formação da ressonância.

As funções dadas em IV.57,58,59 dependem de dois parâmetros livres, m e g . O primeiro deles pode ser obtido a partir do ajuste dos dados experimentais, no ponto onde a defasagem atinge o valor $\frac{\pi}{2}$. Com os dados adotados neste trabalho, encontramos $m_\rho = 780 \text{ MeV}$. A constante de acoplamento, por outro lado, determina a inclinação da curva no ponto $s = m_\rho^2$. No gráfico VI mostramos o efeito deste parâmetro. O valor $g=6,0$ (linha cheia) produz um ajuste bastante razoável dos dados experimentais utilizados. Vemos ainda as curvas para os valores $g=6,5$ e $5,5$ em linhas tracejadas.

Para completar nossa discussão sobre o méson ρ , convém notar que a unitarização dinâmica quando da presença de polos de ressonância, equivale ao acréscimo de uma parte imaginária na massa, que corresponde à introdução de uma largura. Isto pode ser visto da seguinte maneira. Se uma amplitude contém um polo no canal físico, tal como T_1^1 de IV.58, então podemos escrever a correspondente função não relativística como:

$$m_1^1 = \frac{T_1^1}{16\pi W}$$

onde:

$$m_1^1 = \frac{a}{s - m^2} + b \quad (\text{IV.60})$$

sendo a o numerador do polo e b a parte regular. A unitarização dinâmica desta expressão nos leva a :

$$\begin{aligned} f_1^1 &= \frac{m_1^1}{1 - im_1^1} = \frac{\frac{a}{s-m^2} + b}{1 - i\left(\frac{a}{s-m^2} + b\right)k} \\ &= \frac{a + b(s - m^2)}{s - m^2 - i(a + b(s - m^2))k} = \frac{a + b(s - m^2)}{s - \left(-m + \frac{i\Gamma}{2}\right)^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.61})$$

Na última igualdade usamos as definições :

$$\begin{aligned} \bar{m}^2 &= \frac{m^2 + \sqrt{m^4 + c^2}}{2} \\ \Gamma^2 &= 2\left(-m^2 + \sqrt{m^4 + c^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{IV.62})$$

Para $c = (a + b(s - m^2))k$. Deste modo, a unitarização acaba por deslocar a parte real da massa do ρ e gerar uma componente imaginária. Observamos que ao ajustar a constante de acoplamento estamos na realidade ajustando a largura, que é responsável pela inclinação da curva da defasagem na região da ressonância (seção II.6).

Usando IV.61, e supondo que $m^2 \gg c^2$, obtemos no ponto $s = m^2$: $\Gamma = a$. Extraíndo a das equações IV.60 e IV.58, temos:

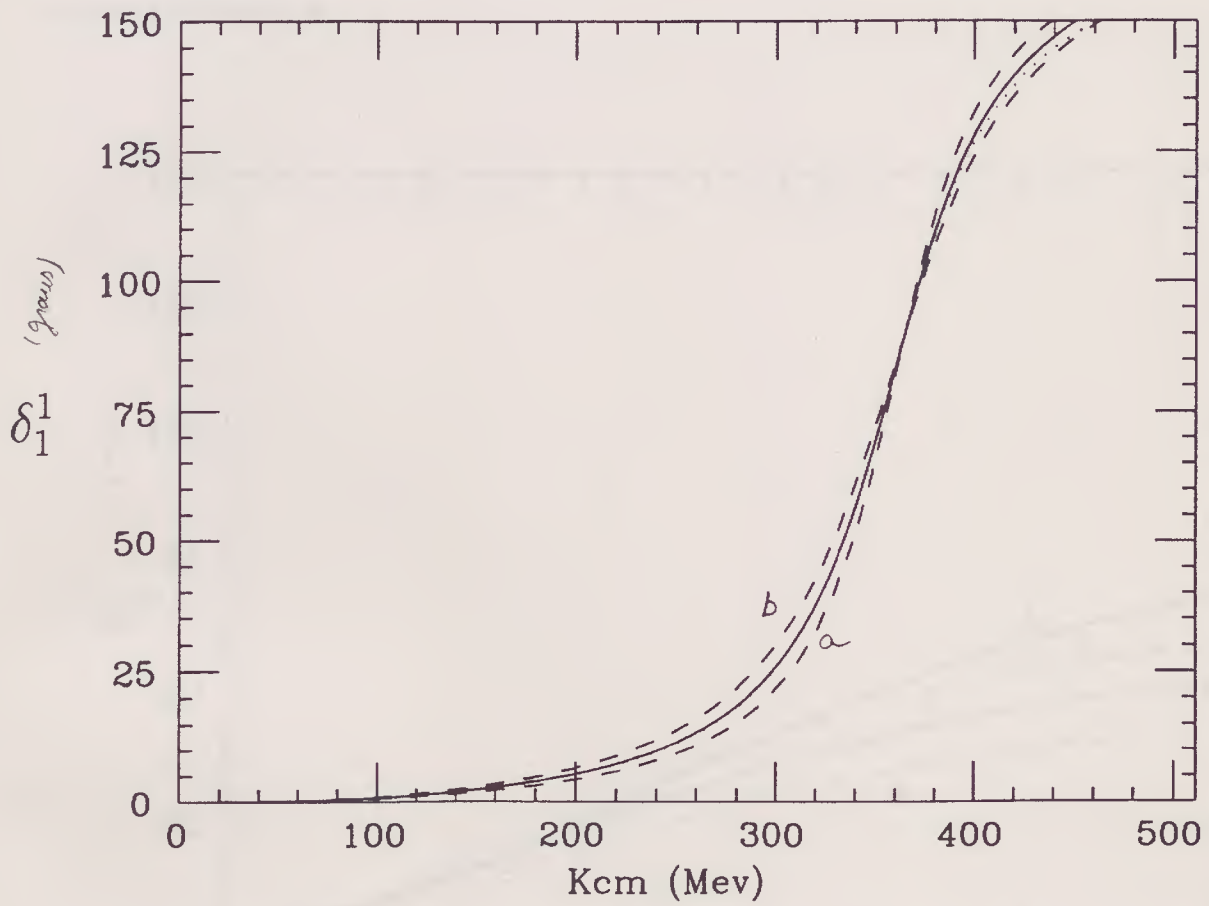
$$\Gamma = \frac{g^2}{6\pi m^2} \left(\frac{m^2}{4} - m_\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{IV.63})$$

Que é a mesma largura que poderia ser diretamente calculada a partir do vértice $\rho - \pi\pi$, da figura IV.4.

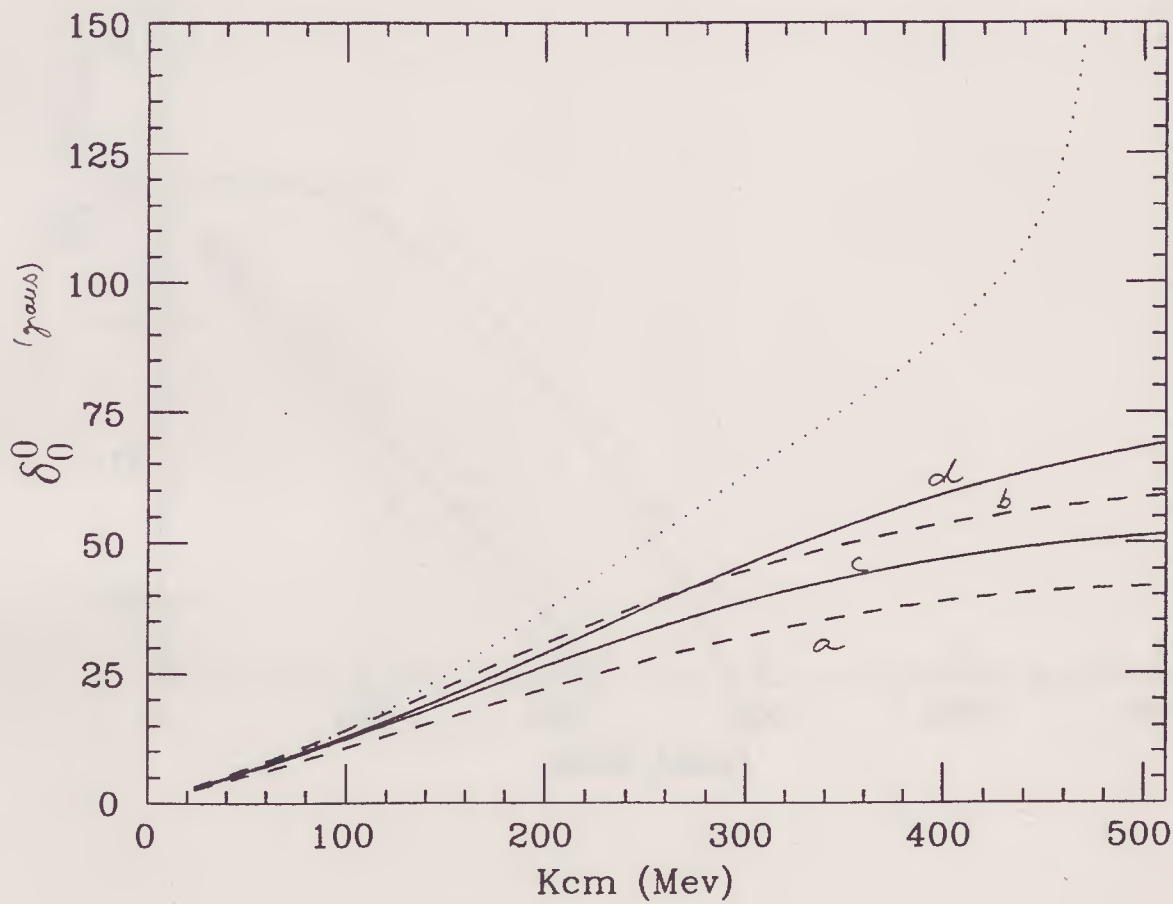
Usando o valor determinado pelo acoplamento ajustado ($g=6,0$) obtemos Γ aproximadamente igual a 152MeV. Estando bem de acordo com a largura experimental mais citada [Par92]. Podemos observar (nas figuras do capítulo 3 que os dados experimentais da onda P, isospin total 1, são os resultados que apresentam menor ambiguidade .

As ondas S para os canais $I=0, 2$, mostradas nos gráficos VI.b,c, relativas aos valores ajustados de $g=6,0$, $m = 780MeV$, sofrem uma pequena correção não tendo seu comportamento significativamente alterado. Comparamos as curvas das ondas S para tres valores de g (5,5;6,5 e 6,0) estando os dois primeiros em linhas tracejadas(a e b) e o terceiro em linha cheia(c), com a curva padrão (representação $N=1$ do campo do pión) dos processos vistos na fig IV.2 envolvendo apenas pions, correspondendo à linha cheia d.

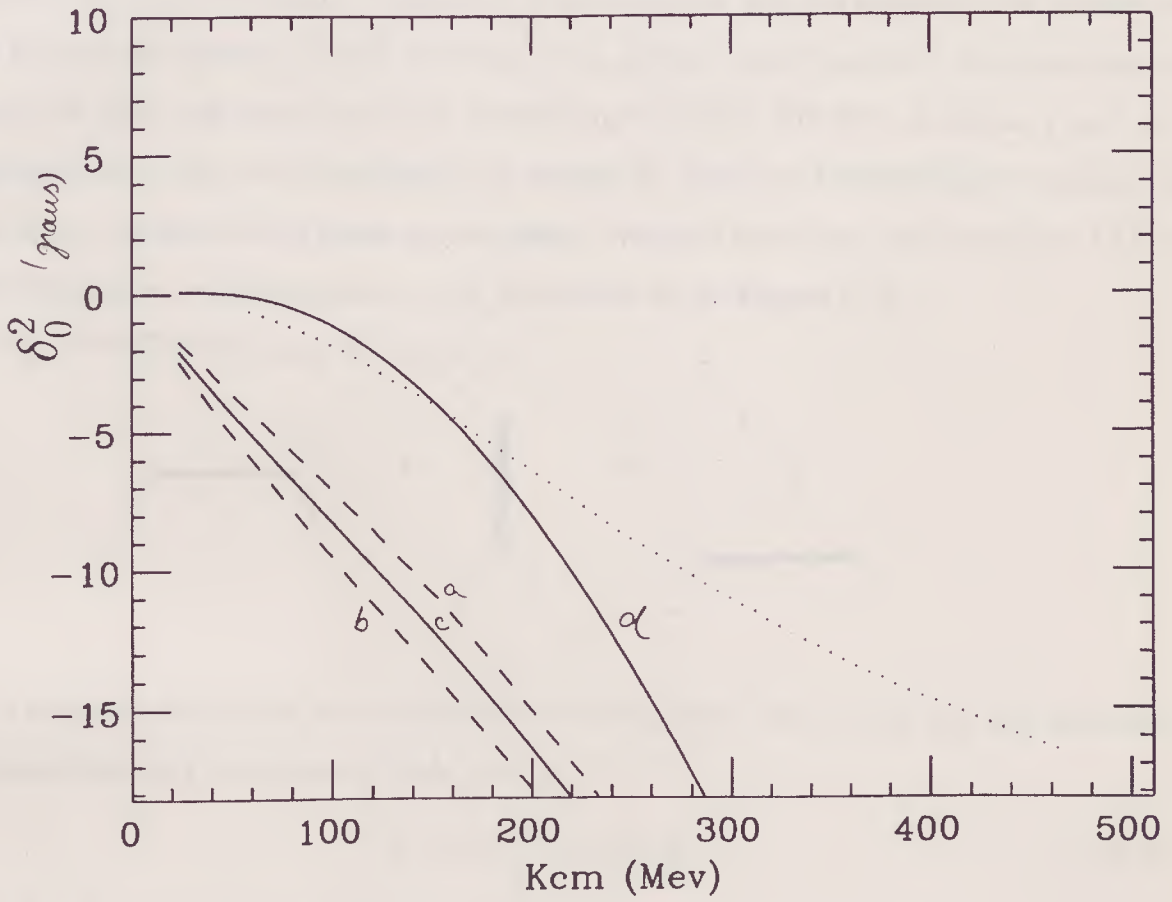
Gráf. VI.a; Influência do méson ρ sobre as defasagens da onda p, $I=1$, A curva cheia (a) corresponde ao valor $g=6.0$, enquanto que as tracejadas são relativas aos valores $g=5,5$ e $6,5$ (b, c).



Gráf. VI.b Influência do méson ρ sobre as defasagens da onda s, $I=0$. As convenções são as mesmas do gráfico IV.a, sendo que utilizamos o campo do pión e o termo de quebra de simetria do modelo sigma não linear. A curva cheia (d) representa a curva sem a contribuição do ρ .



Gráf. VIc Influência do méson ρ sobre as defasagens da onda s, $I=2$. As convenções são as mesmas do gráfico VI.b.



IV.9 O Méson Escalar χ

As defasagens da onda S com $I=0$ exibem uma ressonância para valores do momento no CM da ordem de 400 MeV. Por isso introduzimos agora um méson escalar, que estaria relacionado com esse estado ressonante. Convém notar que, no contexto das realizações não lineares da simetria quiral, não existe um méson escalar que seja contrapartida do campo do pión, tal como ocorre no modelo sigma linear. Por isso, o méson χ que consideramos aqui não está relacionado ao campo do pión por transformações quirais; de fato, o seu campo comuta tanto com as cargas vetoriais como com cargas axiais. As suas contribuições ao espalhamento $\pi\pi$ são mostradas na da Figura IV.6.

Fig. IV.6: Contribuições do méson χ



O termo mais simples de acoplamento entre os pions e esse méson que seja isoescalar invariante quiral e covariante é dado por:

$$L_{\pi\pi\chi} = \frac{g_\chi}{2} \chi D_\mu \phi D^\mu \phi \tag{IV.64}$$

onde g_χ é a constante de acoplamento e χ é o campo do méson isoescalar.

Os termos cinético e de massa são dados por :

$$L_\chi = \frac{1}{2} D_\mu \chi D^\mu \chi - \frac{1}{2} M_\chi^2 \chi^2 \tag{IV.65}$$

O termo de interação corresponde ao diagrama de Feynmann dado na Fig.IV.7.

Fig. IV.7: Vértice correspondente à IV.64



O termo: $\frac{g_\chi}{2} \chi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ da lagrangiana, corresponde ao vértice: $ig_\chi \delta_{ab} g^{\mu\nu}$, lembrando que as pernas externas são 1 para o χ e ik para o pión, cujo campo sofre ação de derivada na lagrangiana. O propagador do χ derivado da maneira usual é :

$$\frac{i}{p^2 - M^2}$$

A amplitude dos processos acima, em termos das variáveis de Mandelstam é:

$$T_\lambda = g_\lambda^2 \left\{ -\delta_{ab}\delta_{cd} \frac{\left(\frac{s}{2} - m_\pi^2\right)^2}{s - M^2} + \delta_{ac}\delta_{bd} \frac{\left(\frac{t}{2} - m_\pi^2\right)^2}{t - M^2} + \delta_{ad}\delta_{bc} \frac{\left(\frac{u}{2} - m_\pi^2\right)^2}{u - M^2} \right\} \quad (\text{IV.66})$$

Os canais de isospin bem definido, a serem somados com os calculados para o processo envolvendo o vértice de quatro pions, são:

$$T_\lambda^0 = g_\lambda^2 \left\{ -3 \frac{\left(\frac{s}{2} - m_\pi^2\right)^2}{s - M^2} + \frac{\left(\frac{t}{2} - m_\pi^2\right)^2}{t - M^2} + \frac{\left(\frac{u}{2} - m_\pi^2\right)^2}{u - M^2} \right\} \quad (\text{IV.67})$$

$$T_\lambda^1 = g_\lambda^2 \left\{ \frac{\left(\frac{t}{2} - m_\pi^2\right)^2}{t - M^2} - \frac{\left(\frac{u}{2} - m_\pi^2\right)^2}{u - M^2} \right\} \quad (\text{IV.68})$$

$$T_\lambda^2 = g_\lambda^2 \left\{ \frac{\left(\frac{t}{2} - m_\pi^2\right)^2}{t - M^2} + \frac{\left(\frac{u}{2} - m_\pi^2\right)^2}{u - M^2} \right\} \quad (\text{IV.69})$$

As ondas parciais correspondentes a estes termos dos canais s e p, que devem ser somadas às ondas parciais dos gráficos de pions das expressões IV.50, são:

$$T_{0\lambda}^0 = -3g_\lambda^2 \frac{\left(\frac{s}{2} - m_\pi^2\right)^2}{s - M^2} - \frac{g_\lambda^2}{2} \left\{ -4m_\pi^2 - 2k^2 + M^2 + \frac{(M^2 - 2m_\pi^2)^2}{4k^2} \ln \left(\frac{M^2}{M^2 + 4k^2} \right) \right\} \quad (\text{IV.70})$$

$$T_{1\lambda}^1 = \frac{k^2}{3} + \frac{\left(\frac{M^2}{2} - m_\pi^2\right)^2}{k^2} + \frac{(2k^2 + M^2)}{4k^4} \left(\frac{M^2}{2} - m_\pi^2\right)^2 \ln \left(\frac{M^2}{4k^2 + M^2} \right) \quad (\text{IV.71})$$

$$T_{0\lambda}^2 = \frac{-g_\lambda^2}{2} \left\{ -2k^2 - \frac{(2k^2 + m_\pi^2)^2}{2k^2} + M^2 - 2m_\pi^2 + \frac{(M^2 - 2m_\pi^2)^2}{4k^2} \ln \left(\frac{M^2 + 4k^2}{M^2} \right) \right\} \quad (\text{IV.72})$$

A defasagem experimental da onda s, no canal $I = 0$ atinge o valor $\frac{\pi}{2}$, quando a energia do sistema no CM é 850 MeV que é ajustada como a massa do méson escalar. Tomando a constante de acoplamento g igual a $1,17\frac{1}{f_\pi}$, obtivemos o melhor ajuste da defasagem na região da ressonância como podemos observar no gráfico VII.a. A curva relativa a este

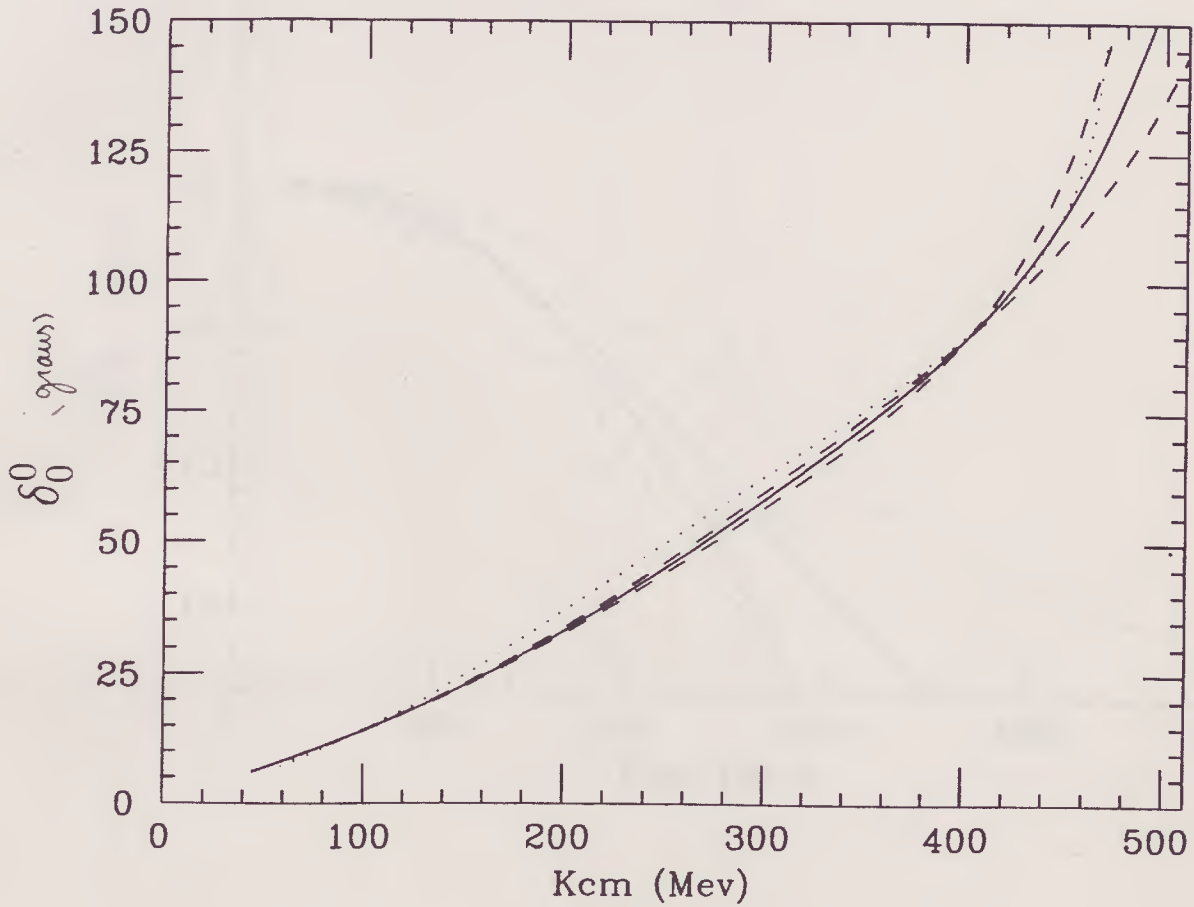
valor está representada por uma linha cheia e para dois outros valores ($g_\chi = 1,02$ e $1,21$, em unidades de $\frac{1}{f_\pi}$) por linhas tracejadas, sendo que a parte referente aos diagramas de quatro pernas de píons foi tomada como sendo a correspondente ao modelo sigma não linear (representação $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ do campo do pión). A largura do χ calculada a partir do vértice $\chi\pi\pi$ é:

$$\Gamma_\chi = \frac{8\pi g_\chi^2}{64M^2\pi^2} \left(\frac{s}{2} - m_\pi^2\right)^2 \sqrt{\frac{M^2}{4} - m_\pi^2}$$

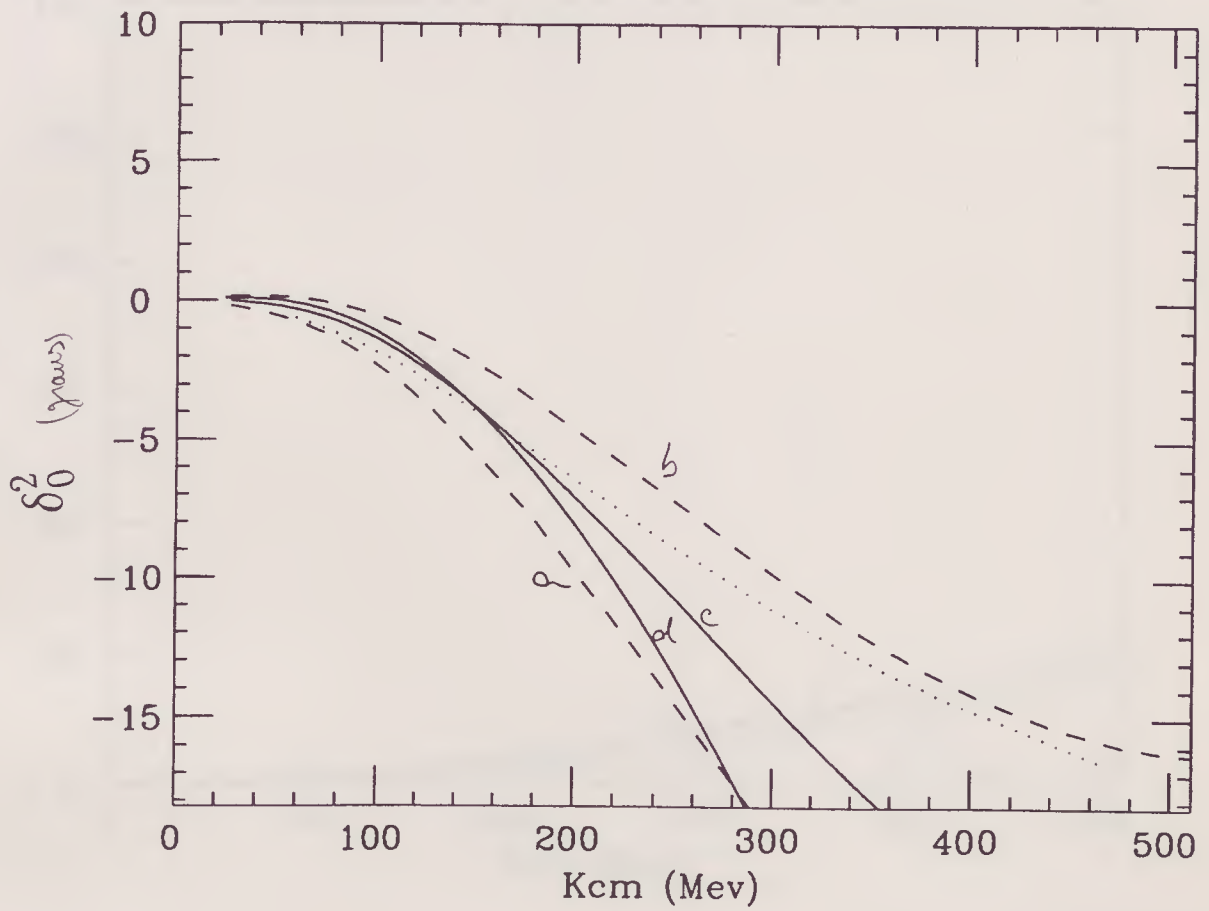
Para o melhor ajuste da constante de acoplamento obtemos uma largura aproximadamente igual a 370 MeV.

Nos gráficos VII.b .c exibimos respectivamente as ondas S com $I=2$, e P com $I=1$, correspondentes ao acréscimo do méson χ . Notamos que o comportamento das curvas não mudam apesar de haver uma contribuição significativa do χ nesses canais.

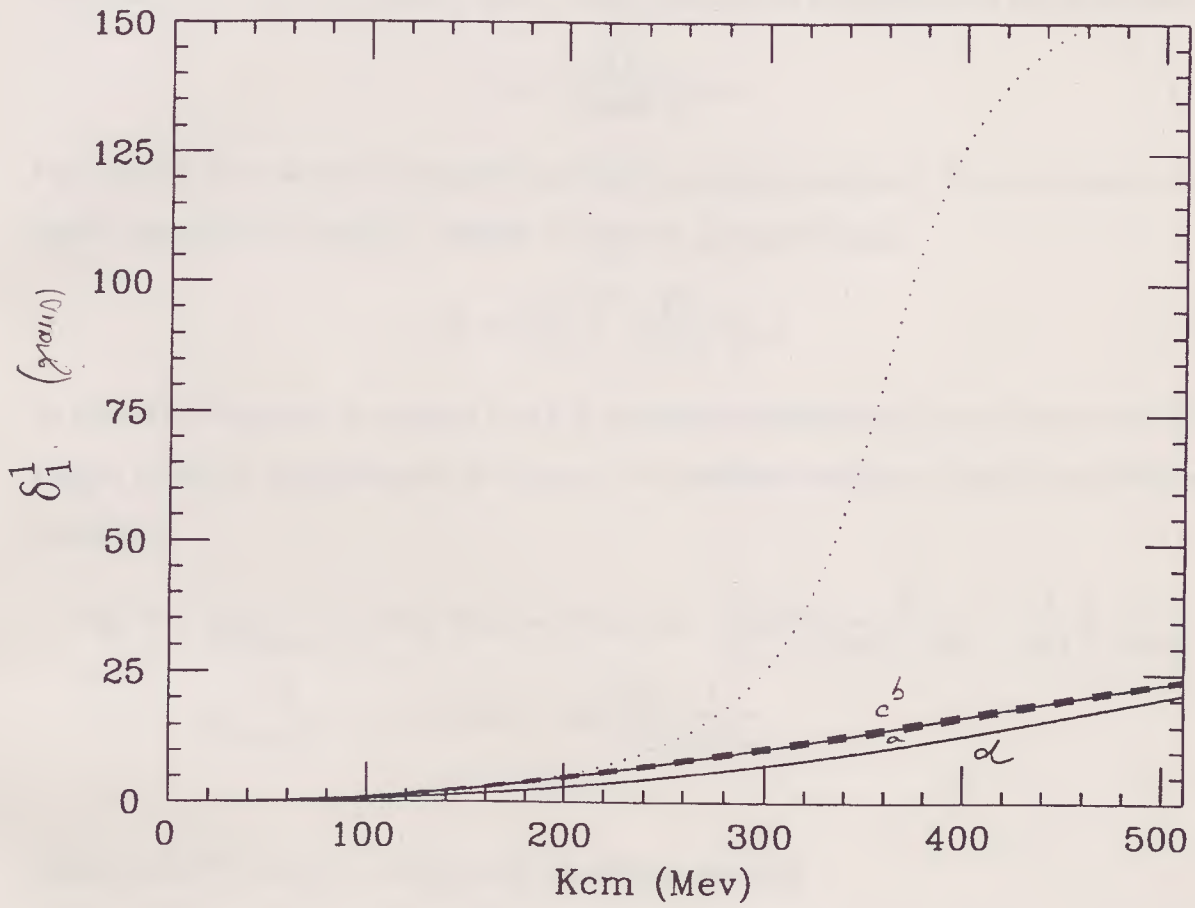
Gráf. VII.a Influência do méson escalar χ sobre as defasagens da onda S, $I=0$. A curva cheia corresponde ao valor $g_\chi = \frac{1.17}{f_\pi}$, enquanto que as tracejadas são relativas aos valores $g_\chi = \frac{1.02}{f_\pi}$ e $\frac{1.21}{f_\pi}$. O termo dependente exclusivamente dos píons é relativo ao modelo sigma não linear.



Gráf. VII.b Influência do méson escalar χ sobre as defasagens da onda S, I=2. As convenções são as do gráfico VII.a, a linha d é relativa ao modelo sigma não linear.



Gráf. VII.c Influência do méson escalar χ sobre as defasagens da onda P, I=1. As convenções são as do gráfico VII.b.



IV.10 Comprimento de Espalhamento

No limiar as amplitudes são reais e podem ser caracterizadas pelos comprimentos de espalhamento. Para as ondas S esses comprimentos de espalhamento são definidos por

$$a_0^I = \frac{T_0^I}{16\pi W} \Big|_{K \rightarrow 0} \quad (\text{IV.73})$$

Para ondas com momento angular orbital l , pode-se analisar o limiar a partir do qual existe alguma contribuição, usando a seguinte parametrização:

$$a_l^I = \left(\frac{m_\pi}{k}\right)^{2l} \frac{T_l^I}{16\pi W} \Big|_{K \rightarrow 0} \quad (\text{IV.74})$$

As ondas S dos canais de isospin $I=0$ e 2 , recebem contribuições dos processos envolvendo apenas píons em aproximação de árvore e dos mésons escalares. Essas contribuições são dadas por:

$$\begin{aligned} a_0^0 &= \frac{1}{32f_\pi^2 \pi m_\pi} m_\pi^2 (8 + 20\alpha_1 + 20\gamma_2 + 4) - \frac{g_\chi^2}{2} m_\pi^4 \left(\frac{6}{4m_\pi^2 - M^2} - \frac{4}{M^2} \right) \frac{1}{32\pi m_\pi} \\ a_0^2 &= \frac{-m_\pi^2}{32\pi m_\pi f_\pi^2} (-8\gamma_2 - 8\alpha_1) + 2g_\chi^2 \frac{m_\pi^4}{M^2} \frac{1}{32\pi m_\pi} \end{aligned} \quad (\text{IV.75})$$

Para a onda P, temos a contribuição do méson vetorial:

$$a_1^1 = \frac{m_\pi^2}{32\pi\mu} \left\{ -\frac{g^2}{2} \left(\frac{16}{3(s-m^2)} - \frac{8}{3m^2} - \frac{8m_\pi^2}{3m^4} \right) - \frac{2}{3f_\pi^2} \right\} \quad (\text{IV.76})$$

Apresentamos na tabela IV.3 os valores dos comprimentos de espalhamento para modelos de quebra de simetria e da definição do campo do pión através da representação $(\frac{N}{2}, \frac{N}{2})$, e para as contribuições dos mésons χ e ρ , sendo as tres últimas linhas referentes às medidas experimentais citadas no capítulo III.

TabelaIV.3: Comprimentos de espalhamento (em unidades de m_π^{-1})

	a_0^0	a_0^2	a_1^1
Limite quiral	0,177	-0,088	0,029
[Wei66]	0,155	-0,045	"
$N=1, g_\chi = 0, g_\rho = 0$	0,211	-0,022	"
$N=2, g_\chi = 0, g_\rho = 0$	0,511	0,133	"
$N=1, g_\chi = \frac{1,21}{f_\pi}, g_\rho = 0$	0,216	-0,020	"
" , $g_\chi = \frac{1,02}{f_\pi}, g_\rho = 0$	0,214	-0,021	"
" , $g_\chi = \frac{1,17}{f_\pi}, g_\rho = 0$	0,215	-0,0205	"
" , $g_\chi = 0, g_\rho = 5,5$	—	—	0,018
" , $g_\chi = 0, g_\rho = 6,0$	—	—	0,024
" , $g_\chi = 0, g_\rho = 6,5$	—	—	0,031
Protopopescu(73)	$0,15 \pm 0,07$	$-(0,053 \pm 0,028)$	$0,036 \pm 0,002$
Alekseeva(88)	$0,24 \pm 0,03$	$-(0,04 \pm 0,04)$	$0,034 \pm 0,003$
Rosselet(76)	$0,28 \pm 0,05$	—	—

onde usamos $m_\pi = \mu = 139,0 MeV$ e $f_\pi = 93,0 MeV$.

A onda P não depende da quebra de simetria e tem seu valor teórico, sem levar em conta a contribuição do ρ , igual a $a_1 = 0.029\mu^{-1}$, que apesar de fora da barra de erro dos dados difere apenas cerca de 17% dos valores experimentais. Ao considerarmos o ρ ocorre uma mudança muito sensível ao valor da constante de acoplamento.

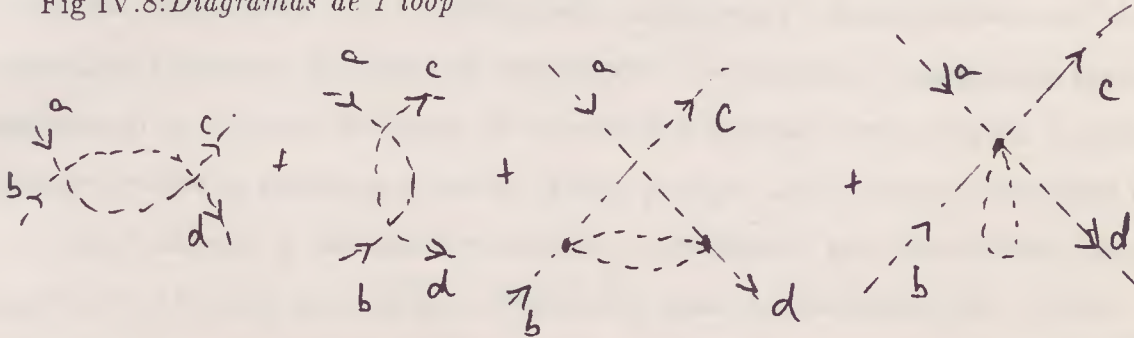
O resultado para a representação (1,1) do campo do pión é muito diferente de qualquer resultado experimental, principalmente devido ao sinal da onda S, I=2, que, experimentalmente, parece ser negativo, sendo responsável por uma interação atrativa, ao contrário das ondas S (I=0) e P (I=1).

Os três primeiros valores de a_0^0 estão bem próximos dos três valores experimentais, que são diferentes e fora das respectivas margens de erro. A grande incerteza na determinação de a_0^2 permite aceitar os dois valores encontrados acima.

IV.11 Correções de Segunda Ordem ao Diagrama de Árvore

Em 1970 Charap[Cha70] fez o cálculo da correção de 1 loop ao diagrama de árvore do espalhamento $\pi\pi$ no limite quiral ($m_\pi = 0$), correspondente aos diagramas desenhados na figura IV.9, que equivalem a termos da ordem de $\frac{1}{f_\pi^4}$ na amplitude.

Fig IV.8: Diagramas de 1 loop



Os três primeiros diagramas são a iteração da aproximação de árvore, e são responsáveis por uma correção unitária conforme requer o teorema óptico através da expressão II.31. Dessa maneira, a cada ordem obtém-se um ordem superior na energia, isto é, o diagrama de árvore é proporcional à $s=W^2$ e esta correção de um “loop” corresponde a amplitudes da ordem de s^2 .

Os momentos dos píons intermediários, fora da camada de massa, podem assumir quaisquer valores e, por isso, devem ser somados (através de uma integração) em todo o espaço de momentos. Isto faz com que apareçam divergências para altos valores dos momentos (divergências ultravioletas), o que requer que as integrais sejam regularizadas, permitindo a renormalização da teoria via redefinição dos acoplamentos que absorverão os infinitos.

No seu cálculo, Charap utilizou as regras de Feynman extraídas diretamente da lagrangiana, não levando em conta os acoplamentos derivativos e, por isso, observou que apenas uma particular definição do campo do pión não requereria o acréscimo de termos lagrangianos de quebra de simetria do tipo $\frac{-m_\pi^2 \phi^4}{2}$, configurando-se uma anomalia no caso de todas as outras definições do campo do pión. Esta definição “privilegiada” do campo do pión corresponde à função $f(\phi^2)$ dada pelos parâmetros: $a_1 = \frac{-2}{5}$; $a_2 = \frac{9}{7.25}$; $a_3 = \frac{184}{7.5^3.3^2.2}$, inseridos na tabela IV.1. Gerstein, Jackiw, Lee e Weinberg [Ger71] observaram que ao fazer os cálculos de loop através do procedimento canônico esquema-

tizado na seção IV.6, levando-se em conta as diferenças provenientes dos acoplamentos derivativos, obtém-se um resultado para a amplitude independente da definição de $f(\phi^2)$. Dessa maneira não é mais necessária a introdução de termos que quebrem a simetria para efetuar a renormalização da teoria.

Weinberg [Wei79] afirma que uma teoria de campos não fornece nada mais além de resultados compatíveis com a analiticidade, unitariedade, decomposição em "clusters" e simetrias impostas. Na teoria de perturbação, ao escrever a lagrangiana mais geral, respeitando as simetrias desejadas, deve-se obter o resultado para a matriz S mais geral, consistente com as simetrias impostas. Assim pode-se incluir termos invariantes quirais com maior número de derivadas covariantes, responsáveis pela dependência de ordens maiores em s, t e u, e que podem, inclusive, dar conta da renormalização, como:

$$L_{(4)} = -g_{(4)}^{(1)} D_\mu \phi D^\mu \phi D_\nu \phi D^\nu \phi - g_{(4)}^{(2)} D_\mu \phi D_\nu \phi D^\mu \phi D^\nu \phi \quad (\text{IV.77})$$

A amplitude na ordem s^2 obtida por ele é :

$$\begin{aligned} T^{(2)} = & \frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{g_2^2} \left\{ -\frac{(u^2 - s^2 + 3t^2)}{12\pi^2} \ln(t) - \frac{(t^2 - s^2 + 3u^2)}{12\pi^2} \ln(u) + \right. \\ & -\frac{s^2}{2\pi^2} \ln(s) - \frac{g_{(4)}^{(1)}}{2} s^2 - \frac{g_{(4)}^{(2)}}{4} (u^2 + t^2) + \\ & \left. + \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{s^2}{3} + \frac{t^2}{3} + \frac{u^2}{3} \right) \ln(\Lambda^2) \right\} + \text{perm.cicl.} \quad (\text{IV.78}) \end{aligned}$$

As divergências (que aparecem no limite de $\Lambda \rightarrow \infty$) são eliminadas redefinindo-se as constantes de acoplamento como função de um fator de escala (μ). Os contratermos são os próprios termos de ordem maior de derivadas que contribuem com diagramas de árvore nessa ordem da expansão. A renormalização deve ser feita, portanto, ordem a ordem nas correções, o que a caracteriza como uma teoria não renormalizável. Os acoplamentos renormalizados em termos dos parâmetros de escala μ e do regulador Λ são escritos como:

$$\begin{aligned} g_4^{(1)}(\mu) &= g_4^{(1)} - \frac{2}{3\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m_\pi^2} \right) \\ g_4^{(2)}(\mu) &= g_4^{(2)} - \frac{4}{3\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m_\pi^2} \right) \quad (\text{IV.79}) \end{aligned}$$

o que produz um resultado finito para a equação IV.77. Donoghue et al [Don88] basearam-se num trabalho de Gasser e Leutwyler [Gas84], que dão um tratamento rigoroso ao

problema de correções de loop para teorias quirais utilizando o formalismo de integrais de trajetória, e analisaram as influências dos resultados da simetria quiral para o espalhamento $\pi\pi$ em comparação com resultados experimentais. Utilizando a representação de Sugawara:

$$\Sigma = \exp\left(\frac{i\vec{\tau}\vec{\phi}}{f_\pi}\right) \quad (\text{IV.80})$$

escreveram uma lagrangiana incluindo termos de quebra de simetria com a massa do pión:

$$\begin{aligned} L = & \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) + \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{4} \text{Tr}(\Sigma + \Sigma^\dagger) + \frac{\alpha_1}{4} \left(\text{Tr}(\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) \right)^2 + \\ & + \frac{\alpha_2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) \text{Tr}(\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) + \frac{\alpha_3}{4} \left(\text{Tr}(m_\pi^2 \Sigma) \right)^2 + \\ & + \frac{\alpha_4}{4} \text{Tr}(\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger m_\pi^2 (\Sigma + \Sigma^\dagger)) + \frac{\alpha_5}{4} m_\pi^4 \left(\text{Tr}(\tau_3 \Sigma) \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.81})$$

Sendo que os dois primeiros termos são os responsáveis pelo diagrama de árvore, os termos em α_1 e α_2 os acrescentados por Weinberg, havendo quatro termos de quebra de simetria. O associado ao coeficiente α_5 é pequeno e acarreta a diferença entre as massas dos píons carregados e neutro.

A amplitude obtida por eles é dada por:

$$\begin{aligned} T^{(2)} = & \delta_{ab} \delta_{cd} \left\{ \frac{1}{2f_\pi^4} \left(4\alpha_1^{ren} (s - 2m_\pi^2)^2 + \alpha_2^{ren} (s^2 - (t - u)^2) \right) + \right. \\ & + \frac{1}{6f_\pi^4} \left\{ 3(s^2 - m_\pi^4) \bar{J}(s) + (t(t - u) - 2m_\pi^2 t + 4m_\pi^2 u - 2m_\pi^4) \bar{J}(t) + \right. \\ & + \left. \left. (u(u - t) - 2m_\pi^2 u + 4m_\pi^2 t - 2m_\pi^4) \bar{J}(u) \right\} - \frac{1}{96\pi^2} \left(21s^2 + 5(t - u)^2 + 8sm_\pi^2 - 26m_\pi^4 \right) \right\} \\ & + \text{perm.cicl.} \end{aligned} \quad (\text{IV.82})$$

Onde :

$$\bar{J}(a) = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{\left(1 - \frac{4m_\pi^2}{a} \right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\left(1 - \frac{4m_\pi^2}{a} \right)^{\frac{1}{2}} + 1} \right) + 2 \right\}$$

e:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{ren} &= \alpha_1 + \frac{1}{96\pi^2} \ln \left(\frac{m_\pi^2}{\mu^2} \right) \\ \alpha_2^{ren} &= \alpha_2 + \frac{1}{48\pi^2} \ln \left(\frac{m_\pi^2}{\mu^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.83})$$

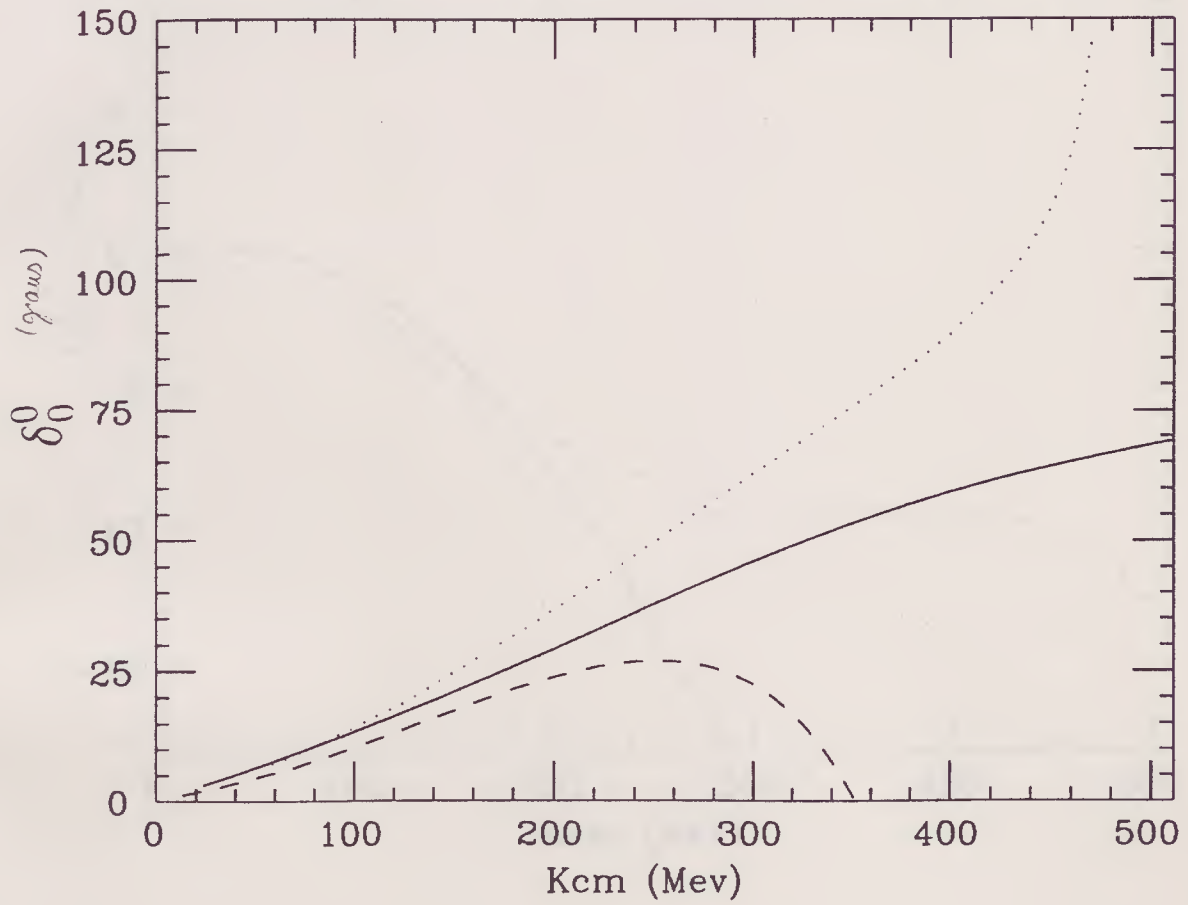
Esta amplitude contém uma parte real e uma imaginária (termos com $\bar{J}(u)\epsilon\bar{J}(t)$), que é responsável pela unitarização da amplitude de árvore. A presença de termos quadráticos em t e u acarreta o aparecimento de ondas parciais de momento angular D , pois, por exemplo, no referencial do CM, estas variáveis são proporcionais a $\cos^2\theta$ que é proporcional ao polinômio de Legendre de ordem $l=2$.

A influência desses termos de segunda ordem nas várias defasagens é mostrada nos gráficos VIII.a,b c,d; onde utilizamos a unitarização dinâmica e as constantes de acoplamentos para as quais eles obtiveram o melhor ajuste:

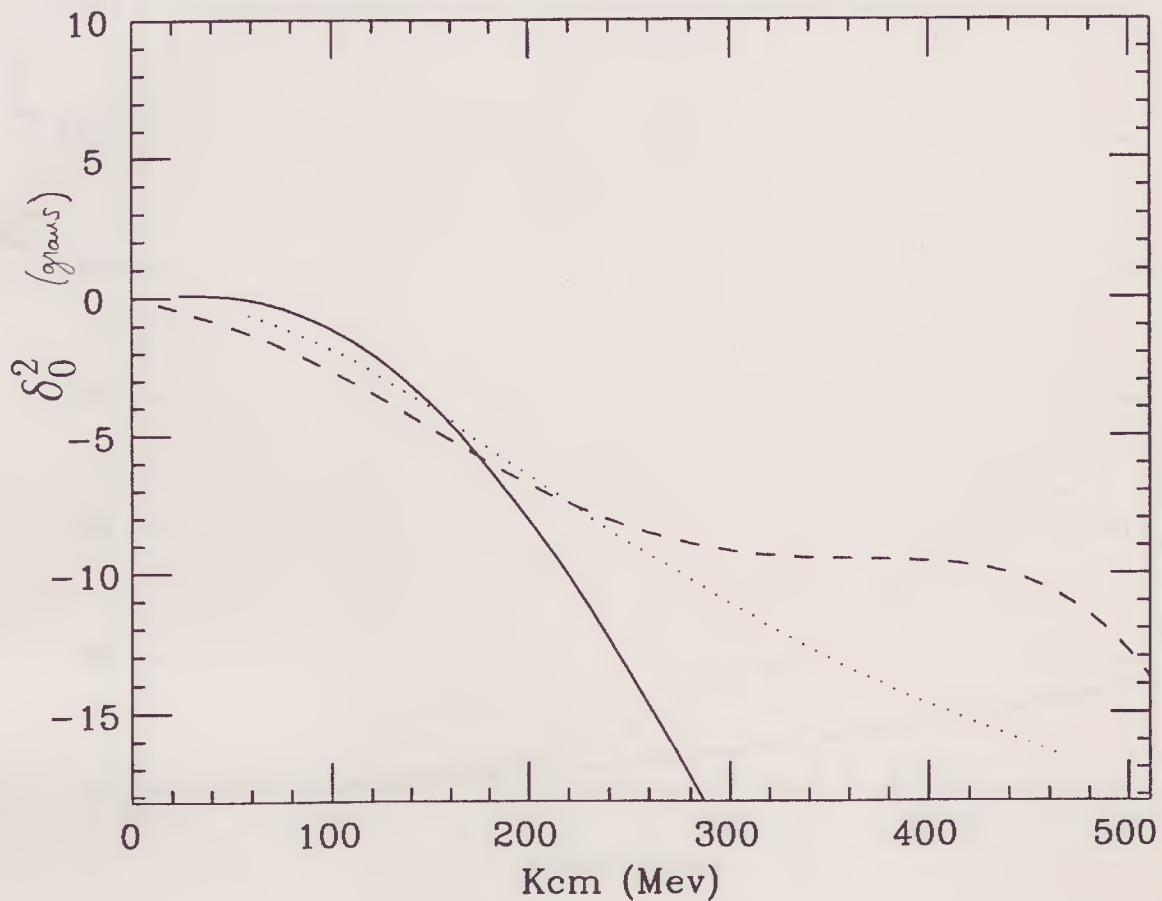
$$\alpha_1^{ren} = -0,007\alpha_2^{ren} = -0,013$$

No entanto, Donoghue et al identificaram a parte real da amplitude unitarizada, em termos das defasagens, com a parte real da amplitude acima, que está unitarizada apenas para o diagrama de árvore de ordem mais baixa, como podemos observar nos termos logarítmicos da expressão de 1 loop. Dessa maneira (equivocada) reproduziram o comportamento da amplitude experimental (inclusive na região da ressonância da onda S), diferentemente do nosso resultado.

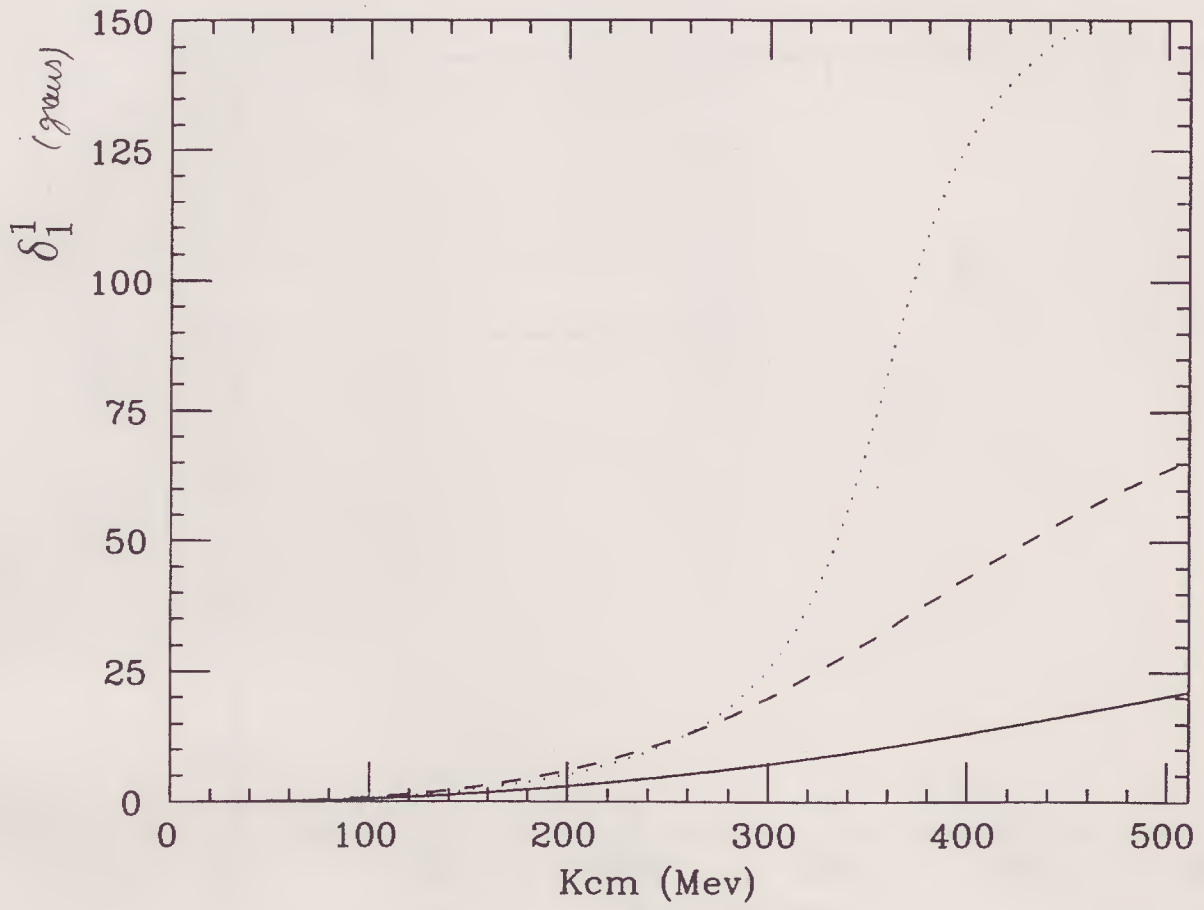
Gráf. VIII.a Correção de segunda ordem na onda S, $I=0$ representada pela linha tracejada, sendo o melhor ajuste de [Don88]: $\alpha_1^{ren} = -0.007$, e $\alpha_2^{ren} = 0.13$. Contribuição do diagrama de árvore em linha cheia.



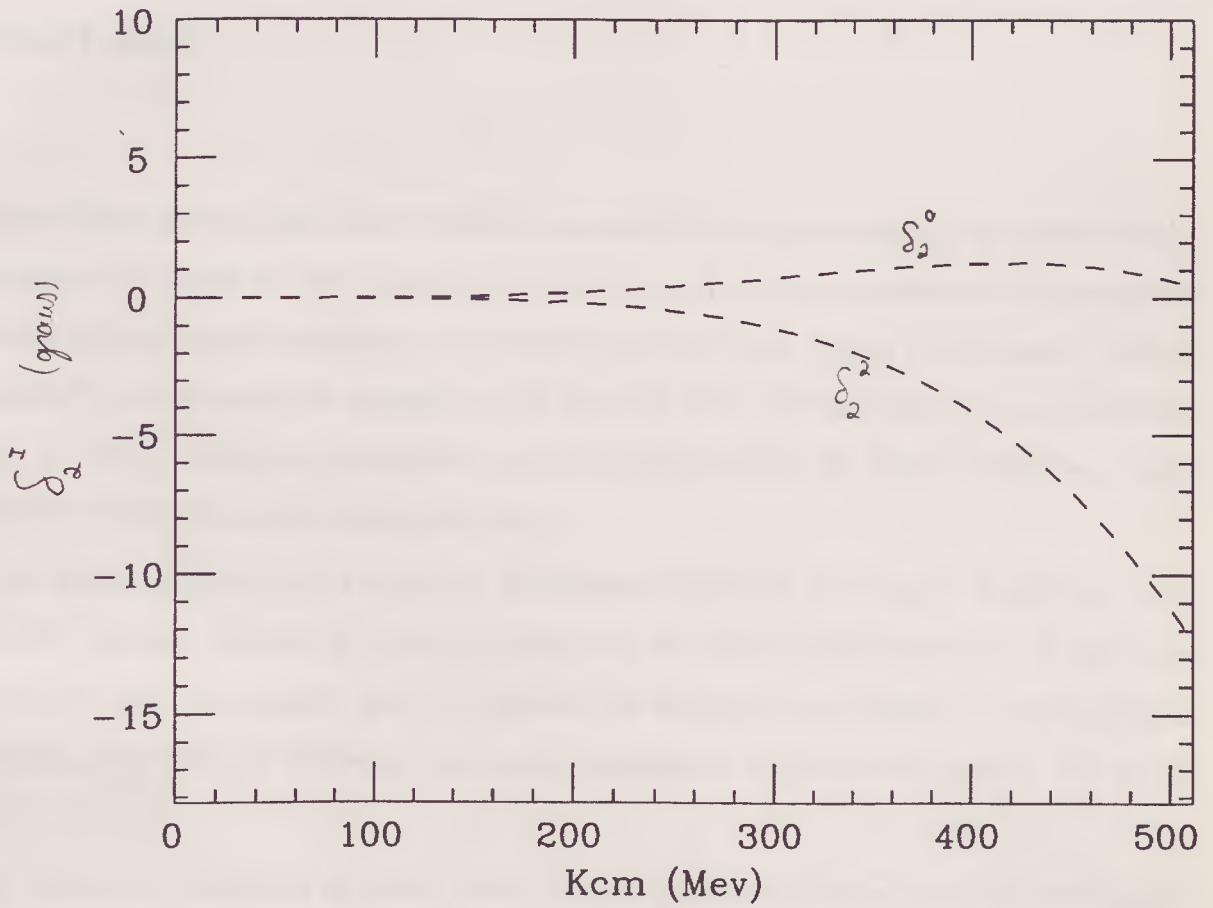
Gráf. VIII.b Correção de segunda ordem na onda S, I=2, mesma convenção do gráfico VIII a.



Gráf. VIII.c Correção de segunda ordem na onda P, I=1, mesma convenção do gráfico VIII a.



Gráf. VIII.d Onda D, proveniente da correção de segunda ordem, para $I=0$ e $2. \alpha$



Conclusão

Os resultados apresentados neste trabalho mostram que a fenomenologia do espalhamento pión-pión é, do ponto de vista qualitativo, muito bem descrita por modelos de lagrangianas efetivas quirais complementadas por mésons ressonantes nos canais $I=0$ da onda S e $I=1$ da onda P para a região de energia no CM de até 1 GeV. Não há uma boa concordância entre os vários dados experimentais, que são muito difíceis de serem extraídos, o que dificulta uma comparação mais quantitativa.

As amplitudes teóricas a nível de diagramas de árvore são reais e devem ser unitarizadas quando efetuamos a comparação com os dados experimentais. Vimos que o método mais conveniente para o espectro de energia considerado é a unitarização dinâmica, que além de fornecer uma parte imaginária à amplitude, corrige sua parte real.

A introdução da massa do pión causa a quebra da simetria quiral e provoca alterações substanciais para a região de mais baixas energias, dependendo também da forma da função $f(\phi^2)$ escolhida. À medida que a energia aumenta, a contribuição dos termos de massa vai se tornando menos importante. Podemos parametrizar esta quebra de simetria por funções que, a princípio são arbitrárias. Essa arbitrariedade pode ser um pouco reduzida quando se impõem propriedades de transformações quirais ao lagrangiano. Dessa maneira pode-se pensar em ajustar a melhor curva para esta região com base nos dados experimentais para se resolver esta ambigüidade.

Para energias mais altas existem outros termos a serem considerados, como as ressonâncias dos canais de isospin $I=0$ da onda S (méson χ) e $I=1$ da onda P (méson ρ) que ocorrem respectivamente, para o ajuste de dados experimentais utilizados, nas energias de 850 MeV e 780 MeV. As ressonâncias dão conta das variações muito rápidas

e grandes das amplitudes; na ausência delas a amplitude tem um comportamento suave. As respectivas larguras são ajustadas a partir da inclinação das curvas das defasagens resultando nos valores: $\Gamma_\rho \simeq 150\text{MeV}$ e $\Gamma_\chi \simeq 370\text{MeV}$. As ambigüidades no ajuste dos dados experimentais da onda S fazem com que haja uma grande dispersão nos dados encontrados sobre este méson escalar.

Estes mésons são responsáveis por contribuições nos comprimentos de espalhamento das ondas parciais de momento angular de mesmo valor que seus spins. Os comprimentos de espalhamento são muito difíceis de se medir, impondo poucas restrições aos valores derivados dos modelos.

As contribuições de segunda ordem introduzem componentes de ondas parciais da onda D, que, apesar de serem pequenas, podem ser medidas. Os diagramas de iteração - 1 loop - são responsáveis pelo aparecimento de uma parte imaginária na amplitude de maneira consistente com o teorema óptico.

Um ajuste fino dos modelos estudados neste trabalho requeriria a soma das contribuições de todos os processos em jogo: envolvendo o termo de quatro píons com as ambigüidades relativas à definição do campo do pión e do termo de quebra de simetria, o méson ρ e o méson χ .

Por fim, é interessante notar que o presente estudo mostra que, no contexto do modelo de Skyrme, seria interessante estudar a influência da introdução do acoplamento do méson escalar χ na parte relativa a estrutura de sóliton, de maneira análoga ao que foi feito no caso do ρ .

æ

Referências Bibliográficas

- [Adl65] S.L.Adler(1965),Phys.Rev.Lett14,p1501
- [Ale82] E.A.Alekseeva et al.(1984) Sov.Phys JETP 55(4),p592
- [Bat91] O.L.Battistel,F.Navarra,M.Nielsen,M.R.Robilotta (1991)Pre-print-IFUSP
- [Bha88] R.K.Bhaduri,(1988)-Models of the Nucleon,Add.Wesley Co.
- [Bet39] H.A.Bethe(1939) Phys.Rev.55,p1261,(1940)Phys.Rev.57,p260,
(1940)Phys.Rev.57,p390.
- [Bha38] H.J.Bhabha(1939) Nature 141,p 117
- [Bjo65] J.Bjorken,S.D.Drell(1965)-Relativistic Quantum Fields
- [Bro86] L.S.Brown,L.Hoddeson(1986)-The Birth of Particle Physics - Cambridge Univ. Press-N.Y
- [Che51] W.B.Cheston(1951),Phys.Rev.83,p1118
- [Con47] M.Conversi,E.Pancini,O.Piccioni(1947), Phys.Rev.71,p209
- [Cor40] H.C.Corben,J.Schwinger(1940),Phys.Rev.57,p1101
- [Cha70] J.M.Charap(1970),Phys.Rev.D2,1554
- [Don88] J.F.Donoghue,C.Ramirez,G.Valencia(1988),Phys.Rev. 38D, p2195.
- [Est74] P.Estabrooks,A.D.Martin(1974)-Nucl.Phys.B74, p301

- [Fer34] E.Fermi(1934).Z.Phys.88,p161,citado por Yukawa(1935)
- [Fro38] H.Fröhlich,W.Heitler,N.Kemmer(1938),Proc.Roy.Soc.A166,p154
- [Fro77] C.D.Froggatt, J.L.Petersen(1977),Nucl.Phys.B129,p89.
- [Gar48] E.Gardner,C.M.G.Lattes(1948),Science107,p270
- [Gas60] S.Gasiorowicz(1960)–Elementary Particle Physics- J.Willey Sons
- [Gas84] J.Gasser,H.Leutwyler(1984),Ann.Phys.(N.Y.)158,p142
- [Gel60] M.Gell-Mann,Levy,(1960).NuovoCimento16,p705
- [Gel64] M.Gell-Mann, Phys.Lett.8,(1964),24
- [Ger71] I.S.Gerstein,R.Jackiw,S.Weinberg,B.W.Lee(1971) Phys.Rev3D,2486
- [Hei32] W.Heisenberg(1932)Z.Phys.77,p1;ibid.78(1932),p156;ibid.80(1933),p587
Citado por Yukawa-Nobel Lectures(1964)
- [Hei43] W.Heisenberg(1943)Z.Phys.120,p513,673 citado por G.Chew-(1960)-
The S Matrix Theory of Strong Interactions,Benj.Inc.
- [Hoh83] G.Hohler,(1983) in Elastic and Charge Exchange Scattering of Ele-
mentary Particles, I/ vol 9, Part2.
- [Hul45a] L.Hulthén(1945)Phys.Rev.67,p193
- [Hul45b] L.Hulthén(1945)Rev.Mod.Phys.17,p263
- [Kem38a] N.Kemmer(1938)Proc.Roy.Soc.A166,p127;Nature141,p116
- [Kem38b] N.Kemmer(1938)Proc.Cambr.Phil.Soc.34,p354
- [Lan72] L.Landau,E.Lifchhitz(1972)–Théorie Quantique Relativiste-Editions
Mir

- [Lat47a] C.M.G.Lattes,H.Muirhead,G.P.S.Occhialini,C.F.Powell(1947)
Nature159,p694
- [Lat47b] C.M.G.Lattes,G.P.S.Occhialini,C.F.Powell(1947)Nature160,p453,p486
- [Lyt70] D.H.Lyth(1970)–An Introduction to Current Algebra-Oxford Univ.
Press,London
- [Man84] F.Mandl,G.Shaw,(1984)Quantum Field Theory, John Wiley Sons
- [Mar40] R.E.Marshak(1940)Phys.Rev.57,p1101
- [Mar51] R.E.Marshak(1951)Phys.Rev.83,p1118
- [Mar76] B.R.Martin,D.Morgan,G.Shaw(1976)–Pion Pion Interaction in Parti-
cle Physics, Academic Press
- [Men85] A.M.M.deMenezes(1985)–Tese de Mestrado–IFUSP
- [Mil47] A.L.Millikan(1947)–Electrons,Protons,Neutrons,Mesotrons, Cosmic
Rays
- [Mol39] C.Möller,L.Rosenfeld(1939)Phys.Rev.144,p476
- [Ned37] S.H.Neddermeyer,C.D.Anderson(1937)Phys.Rev.51,p884
- [Nis64] Nishijima(1964)–Fundamental Particles-W.A.Benjamin,Inc,N.Y.
- [Nob64] Nobel Lectures–PHYSICS-(1942-1962) Elsevier Publishing Co
- [OCe50] C.O’Ceallaigh(1950)Phil.Mag.41,p838
- [Opp37] J.R.Oppenheimer,R.Serber(1937)Phys.Rev.51,p1113
- [Ols68] M.G.Olsson,L.Turner(1968)Phys.Rev.Lett.20,p1127
- [Par92] Review of Particle Properties-Phys.Rev.D45(1992),II.6
- [Pan51] W.K.H.Panofsky,R.L.Aarnodt,J.Hadley(1951)Phys.Rev.81,p565

- [Pen73] M.R.Pennington, S.D.Protopopescu(1973) - Phys Rev D7 p.1429
- [Rar41] W.Rarita,J.Schwinger,Phys.Rev.59,(1941)436,556. citado em Nobel Lectures-1964.
- [Rob84] M.R.Robilotta(1984)PhysRevC31,p974
- [Rob91a] M.R.Robilotta(1991)-Física de Hádrons I-Notas de aula,IFUSP
- [Rob91b] M.R.Robilotta(1991)-Física de HádronsII- Notas de aula,IFUSP
- [Ros77] L.Rosselet et al(1977).Phys.Rev15 D, p.574, 1977.)
- [Sak46] S.Sakata,K.Inouye(1946),Prog.Theor.Phys.Kyoto2,p143, apesar de ter sido publicado em 46, já haviam feito este trabalho por volta de 42-ver Nobel Lectures(64).
- [Sak85] J.J.Sakurai(1985)-Modern Quantum Mechanics,Add.Wesley Pub.Co.
- [Sca81] M.D.Scadron,Rep.Prog.Phys(1981)44,p14
- [Str37] J.C.Street,E.C.Stevenson(1937)Bull.Am.Phys.Soc.12,p2,13
- [Sch57] J.Schwinger, Ann.Phys.(N.Y.).2,(1957),407.
- [Sch67] J.Schwinger(1967)Phys.Lett.24B,p473
- [Tur72] L.Turner,M.G.Olsson(1972)Phys.Rev.6D,p3522
- [Tam34] I.Tamm(1934)Nature133,p981;D.Ivanenko(1934)Nature133,p981
- [Tan47] Y.Tanikawa,S.Sakata(1947)Prog.Theor.Phys.Kyoto2,p220. Apesar de publicarem apenas em 1947, eles já haviam feito este trabalho em 1942,em Yukawa-Nobel Lectures
- [Tom40] S.Tomonaga,G.Araki(1940)Phys.Rev.58,p90
- [Yuk35] H.Yukawa(1935)Proc.Phys.-Math.Soc.Japan17,p48

- [Yuk37] H. Yukawa, S. Sakata (1937) Proc. Phys. Math. Soc. Japan 19, 1084
- [Yuk38] H. Yukawa, S. Sakata, M. Taketani (1938) Proc. Phys. Math. Soc. Japan 20, p319
- [Yuk39] H. Yukawa, T. Okayama (1939) Sci. Pap. Inst. Phys. and Chem. Res. 36, p385
- [Wen47] G. Wentzel (1947) Rev. Mod. Phys. 19, p1
- [Wei66] S. Weinberg (1966), Phys. Rev. Lett. 17, p616
- [Wei67] S. Weinberg (1967) Phys. Rev. Lett. 18, p507
- [Wei68a] S. Weinberg (1968) Phys. Rev. 166, p1568
- [Wei68b] S. Weinberg (1968) –Rapporteur’s Talk, Conference on High Energy Physics-Viena.
- [Wei79] S. Weinberg (1979) Physica 96A, p327
- [Wes67] J. Wess, B. Zumino (1967) Phys. Rev. 163, p1727
- [Yan54] C. N. Yang, F. Mills (1954), Phys. Rev. 96, p191
- [Wig33] E. Wigner (1933) Phys. Rev. 43, p252, citado por Yukawa (1935)
- [Wic38] G. Wick (1938). Nature 141, p993
- [Zim91a] A. H. Zimerman (1991) –Tópicos de Álgebra de Correntes- Notas de aula, IFT-UNESP
- [Zim91b] A. H. Zimerman (1991) –Lagrangianas Efetivas para a Álgebra de Correntes–Notas de aulas– IFT-UNESP
- [Zwe64] G. Zweig (1964), CERN Preprint Th401, 412

