

RESSALVA

Atendendo solicitação do autor, o texto completo desta dissertação será disponibilizado somente a partir de 06/01/2022.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Paulo Israel Rico

Polinômios Multiortogonais

São José do Rio Preto
2021

Paulo Israel Rico

Polinômios Multiortogonais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga

São José do Rio Preto
2021

R541p Rico, Paulo Israel
Polinômios Multiortogonais / Paulo Israel Rico. -- São José do Rio Preto, 2021
84 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Alagacone Sri Ranga

1. Matemática. 2. Análise Matemática. 3. Funções Especiais. 4. Polinômios Ortogonais. 5. Polinômios Multiortogonais. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Paulo Israel Rico

Polinômios Multiortogonais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto
Orientador

Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Daniel Oliveira Veronese
Instituto de Ciências Tecnológicas e Exatas - UFTM

São José do Rio Preto
06 de julho de 2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Alagacone Sri Ranga, meu orientador, pelo incentivo, pela paciência, pelos ensinamentos valiosos e pela dedicação durante o período que me orientou.

À professora Cleonice Fátima Bracciali pela ajuda e pelos conselhos e ensinamentos no Estágio em Docência.

A todos os professores da graduação e da pós-graduação pelos ensinamentos, ajuda e incentivo, em especial, aos professores Silvio Alexandre de Araujo e Sônia Cristina Poltroniere Silva.

Aos meus pais, Israel e Gabriela, e a minha família por serem minha base e meu horizonte e aos meus afilhados de coração Benício, Caio e Laura, por me alegrarem nos meus momentos de tristeza.

Alessandra e Raphaella, pela grande amizade, por terem me apresentado outra forma de ver e entender a vida, por serem meu grande apoio, incentivadoras e confiantes durante esses anos.

Adriano, Diego, Edmar, Kaiser e Sérgio, pelo respeito, pela generosidade e pela boa conexão que temos, e que sempre estão presentes no meu dia-a-dia, compartilhando bons momentos, trocando ideias e me apoiando sempre.

Aos meus amigos que conheci no curso técnico e que espero levar para o resto de minha vida, em especial, Isabela Esteves, que sempre alegrava minhas noites, a Izabella Capucci, companheira, com quem dividi boas lembranças e conversas e o Thiago, um amigo com quem troco ideias sempre.

Aos amigos que passaram durante esses anos de estudos que de certa forma me ajudaram, mesmo que por um curto período de tempo, em especial, ao Matheus, meu amigo de vida acadêmica e de bons momentos e a Mariele, uma grande amiga.

Finalmente, e mais importante, agradeço a Deus, inteligência suprema e causa primária de tudo, em todas as suas diferentes manifestações, por sua infinita bondade e por me permitir evoluir sem cessar, acadêmica, profissional, pessoal e espiritualmente.

RESUMO

O objetivo principal desta dissertação é estudar a existência dos Polinômios Multiortogonais do Tipo II e também a equivalência das relações de ortogonalidade dos Polinômios Multiortogonais do Tipo II com as Aproximações de Hermite-Padé do Tipo II, através das Funções de Markov e do Sistema de Nikishin. Para alcançar esse objetivo, introduzimos os conceitos de Polinômios Multiortogonais e Aproximações de Hermite-Padé, Funções de Markov e Sistema de Nikishin Geral, além de resultados sobre a equivalência das relações de ortogonalidade dos Polinômios Multiortogonais do Tipo II com as Aproximações de Hermite-Padé do Tipo II, através das Funções de Markov e do Sistema de Nikishin Geral.

Palavras-chave: Polinômios Ortogonais, Polinômios Multiortogonais, Aproximações de Hermite-Padé, Sistema de Nikishin.

ABSTRACT

The main goal this dissertation is to study the existence of the Type II Multiple Orthogonal Polynomials and the equivalency of the orthogonality relations of the Type II Multiple Orthogonal Polynomials with the Type II Hermite-Padé Approximation, through Markov Functions and Nikishin System. For this purpose, we introduce the idea of Multiple Orthogonal Polynomials and Hermite-Padé Approximation, Markov Functions and Nikishin System, beyond results about the equivalency of the orthogonality relations Type II Multiple Orthogonal Polynomials with Type II Hermite-Padé Approximation, through Markov Functions and general Nikishin System.

Keywords: Orthogonal Polynomials, Multiple Orthogonal Polynomials, Hermite-Padé Approximation, Nikishin Systems.

Sumário

1	Introducao	13
2	Conceitos Preliminares	15
2.1	Polinômios Ortogonais na Reta Real	15
2.2	Polinômios Ortogonais Clássicos	16
2.3	Função de Markov	19
2.4	Polinômios Ortogonais e Aproximantes de Padé	19
2.5	Análise Complexa	20
3	Polinômios Multiortogonais e Aproximações de Hermite-Padé	25
3.1	Polinômios Multiortogonais	25
3.2	Aproximações de Hermite-Padé	26
3.3	Caso Particular para $r = 2$	29
3.4	Exemplo Numérico	38
4	Sistemas Associados às Aproximações de Hermite-Padé	43
4.1	Sistema de Angelesco	43
4.2	Sistema AT	44
4.3	Sistema de Nikishin	46
4.3.1	Exemplo Numérico de um Sistema Nikishin, para $r = 2$	46
4.3.2	Resultados envolvendo os Sistemas de Nikishin	52
4.4	Polinômios de Hermite-Padé Tipo I e Tipo II	59
5	Considerações Finais	81
	Referências	83

1 Introducao

Segundo [1], a teoria de números transcendentos surge com a demonstração de que $\sqrt{2}$ não é um número racional, fato este atribuído à Escola Pitagórica e, depois a Aristóteles (384 a.C.-324 a.C.). Porém, esses números só são mencionados por Goettfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716), sendo nomeados primeiramente de números intercedentais, e o primeiro número descoberto com esta propriedade, ou seja, que não podem ser números algébricos, é $2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Em 1761, Lambert, usando a técnica de desenvolver a tangente em frações continuadas, mostra a irracionalidade dos números π e e . Essa técnica de frações continuadas foi, até meados do século XIX, a melhor ferramenta matemática para solucionar os problemas de aproximações por racionais e de irracionalidades.

O número transcendente adentra no estudo matemático somente em 1844 através de Liouville, com a apresentação de regras para classificar se um número irracional é transcendente. Em 1873, o matemático francês Charles Hermite demonstrou a transcendência do número e , em uma série de notas publicadas no *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, cuja ideia utilizada foi a que resultou na fórmula funcional para aproximação simultânea, mais conhecida como Aproximações de Hermite, e em 1882, Lindemann mostra também que o número π é um número transcendente. Dessa forma, Liouville e Hermite criaram a área dos números transcendentos, através de ideias e ferramentas que tinham na época.

Em meados dos anos 1900, havia um problema que necessitava da utilização das Aproximações de Hermite e das de Padé, que era o problema da aproximação simultânea, ou seja, aproximar as somas parciais de séries de potências por funções racionais.

Utilizando as técnicas das Aproximações de Hermite-Padé, Roger Apéry (1916-1994), provou, em 1977, que o número $\zeta(3)$ é um número irracional, de modo que a função zeta, válida para todo número complexo com a parte real maior que um, é dado por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Note que a função zeta de Riemann deu origem à Hipótese de Riemann, que diz que os zeros não triviais da função zeta de Riemann pertencem todos à "linha crítica", ou seja, pertencem à reta cuja parte real é igual a meio, publicada em 1859, que até hoje é um problema matemático não resolvido.

Aproximações de Hermite-Padé são classificadas em Aproximações de Hermite-Padé do Tipo I e Aproximações de Hermite-Padé do Tipo II e suas aplicações são diversas: na Teoria dos Números, para provar a irracionalidade e a transcendência de alguns números reais importantes, na Teoria das Funções Especiais, principalmente para os Polinômios Ortogonais Semiclássicos, na Teoria Espectral de Operadores Não-Simétricos, entre outras.

Nesta dissertação estudamos os Polinômios Multiortogonais, cujo conteúdo teórico encontra-se no Capítulo 2, que são polinômios de uma variável, e que possuem uma certa relação de ortogonalidade, em relação a $r \geq 1$ diferentes medidas $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$, com $r \in \mathbb{N}$. Eles são classificados em dois tipos Polinômios Multiortogonais do Tipo I e Polinômios Multiortogonais do Tipo II e têm aplicabilidade nos estudos dos Osciladores Hamiltonianos, das Equações Multidimensional de Schrödinger, Toda Lattice Multidimensional, entre outras. Além deste assunto, no Capítulo 2 será tratado também as Aproximações de Hermite-Padé, que constituem uma técnica alternativa para estudar os Polinômios Multiortogonais.

No Capítulo 3, apresentamos os três sistemas bem conhecidos de Polinômios Multiortogonais, a saber, o Sistema de Angelesco, o Sistema AT e o Sistema de Nikishin, e alguns resultados que envolvam esses sistemas.

O objetivo principal desta dissertação é estudar as condições de existência dos Polinômios Multiortogonais do Tipo II associado a um Sistema de Nikishin.

5 Considerações Finais

Nesta dissertação estudamos os Polinômios Multiortogonais do Tipo II e as Aproximações de Hermite-Padé do Tipo II, através de um exemplo numérico mostramos que obtemos um mesmo polinômio das relações de ortogonalidade dos Polinômios Multiortogonais do Tipo II e das Aproximações de Hermite-Padé do Tipo II nas funções de Markov. Além de exibir a condição de existência de tais polinômios.

Ademais mostramos a formalização desse resultado, com as funções de Nikishin e também que todos os multi-índices pertencentes ao conjunto N_r^* são normais para todos os polinômios obtidos das relações de ortogonalidade dos Polinômios Multiortogonais do Tipo II e das Aproximações de Hermite-Padé do Tipo II.

Bibliografias complementares sobre o assunto, [2], [4], [6], [7], [9] e [16].

Referências

- [1] N. S. Allan. Números transcendentos. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 3:75–106, 2003.
- [2] A. I. Aptekarev. Multiple orthogonal polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 99:423–447, 1998.
- [3] T. S. Chihara. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, 1978.
- [4] E. J. C. dos Santos. *Zeros de Polinômios Ortogonais e de Polinômios Ortogonais Múltiplos*. PhD thesis, UNICAMP, 2016.
- [5] K. Driver and H. Stahl. Normality in Nikishin systems. *Indagationes Mathematicae*, 5:161–187, 1994.
- [6] U. Fidalgo Prieto and G. López Lagomasino. Nikishin systems are perfect. *Constructive Approximation*, 34:297–356, 2011.
- [7] U. Fidalgo Prieto and G. López Lagomasino. Nikishin systems are perfect. The case of unbounded and touching supports. *Journal of Approximation Theory*, 163:779–811, 2011.
- [8] G. G. Lorentz. *Approximation of Functions*. Holt and Rinehart and Winston, 1966.
- [9] G. López Lagomasino. An introduction to multiple orthogonal polynomials and Hermite-Padé approximation. *arXiv*, page 1910.08548v1, 2019.
- [10] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw Hill, 1996.
- [11] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton Lectures in Analysis, 2007.
- [12] W. C. Torres. Polinomios multiortogonales clásicos. Master’s thesis, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, 2007.
- [13] W. Van Assche. Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence. *Contemporary Mathematics*, 236:325–342, 1999.
- [14] W. Van Assche. Orthogonal and multiple orthogonal polynomials, random matrices, and Painlevé equations. In *Orthogonal Polynomials*, pages 629–683. Tutorials, Schools and Workshops in the Mathematical Sciences, 2000.

- [15] W. Van Assche. Padé and Hermite-Padé approximation and orthogonality. *Surveys in Approximation Theory*, 2:61–91, 2006.
- [16] W. Van Assche and E. Coussement. Some classical multiple orthogonal polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 127:317–347, 2001.