



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de São José do Rio Preto

---

Adimar Moretti Junior

ESTUDO DE CICLOS LIMITES  
EM SISTEMAS DIFERENCIAIS  
LINEARES POR PARTES

Dissertação de Mestrado

São José do Rio Preto

Fevereiro/2012

---

ADIMAR MORETTI JUNIOR

ESTUDO DE CICLOS LIMITES EM SISTEMAS  
DIFERENCIAIS LINEARES POR PARTES

Orientadora:  
Profa. Dra. Luci Any Francisco Roberto

Co-orientador:  
Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS

São José do Rio Preto  
Fevereiro/2012

Moretti Junior, Adimar.

Estudo de ciclos limites em sistemas diferenciais lineares por partes /  
Adimar Moretti Junior. - São José do Rio Preto: [s.n.], 2012.  
125 f. : il. ; 30cm.

Orientador: Luci Any Francisco Roberto

Co-orientador: Claudio Aguinaldo Buzzi

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto  
de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Equações diferenciais.  
4. Sistemas lineares por partes. 5. Ciclos limites. I. Roberto, Luci Any  
Francisco. II. Buzzi, Claudio Aguinaldo. III. Universidade Estadual  
Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. IV. Título.

CDU - 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

ADIMAR MORETTI JUNIOR

ESTUDO DE CICLOS LIMITES EM SISTEMAS  
DIFERENCIAIS LINEARES POR PARTES

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

---

Profa. Dra. Luci Any Francisco Roberto  
Professor Assistente Doutor  
UNESP - São José do Rio Preto  
Orientadora

---

Profa. Dra. Ana Cristina Mereu  
Professor Adjunto  
UFSCAR - Sorocaba

---

Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa  
Professor Assistente Doutor  
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 28 de fevereiro de 2012

Aos meus pais,  
Adimar e Marisa Moretti  
e meus irmãos,  
Renan, Thainá e Lara  
*dedico.*

# Agradecimentos

Neste momento, gostaria de agradecer a todos que, diretamente ou não, contribuíram para que eu chegasse até aqui e para que este trabalho fosse realizado. Em especial, agradeço:

À DEUS, pela minha vida, saúde, sabedoria, por tudo.

Aos meus pais: Adimar Moretti e Marisa Ione Gomes Moretti. O primeiro por ser meu maior exemplo de superação, de pessoa batalhadora, e minha mãe por mesmo distante se fazer presente com palavras de apoio nos momentos difíceis. Agradeço pela educação, por todos os sacrifícios que fizeram para que nada faltasse nessa minha caminhada, pelo apoio e por todo o carinho em todas as vezes em que eu estive em Jales, o que quase sempre era motivo para um churrasco! Agradeço também aos meus irmãos Renan Gomes Moretti, Thainá Aparecida Moretti e Lara Gomes Moretti pelos vários momentos descontraídos, ou como diria nossa avó Ercelina, pelas várias “furrupas”. Muito obrigado, vocês são o meu pilar central, sem o qual eu desabaria em um instante. Amo vocês!

Aos meus avós Ercelina e Horácio (*in memoriam*) por disporem de sua casa no momento em que necessitei, e por toda a atenção e carinho que ambos tiveram comigo por todo o tempo em que moramos juntos.

A todos os meus familiares que, de alguma forma, me ajudaram durante o período de graduação e mestrado.

À minha namorada Nayara de Novaes Rezende Villani, pelo amor, carinho, incentivo, compreensão e paciência nos vários momentos em que o stress e o mau-humor me dominaram, pelo ombro amigo nas horas difíceis e de alegria. Agradeço também a sua família, sua mãe Gláucia, seus irmãos Vinícius (vulgo Batata) e Bianca, e sua avó Ângela Maria (Vózinha), pelas inúmeras ajudas que me deram e pelos vários momentos de diversão nos churrascos e festinhas. Particularmente, agradeço à Vózinha por também me acolher em sua casa quando precisei, e pelas boas conversas durante o período que estive em sua companhia.

A todos os meus amigos da turma de graduação e pós-graduação pela agradável convivência, pelas muitas risadas e todas as ajudas com a matemática. Em especial, agradeço à: Daiana Gomes (Daia), Danilo Caprio, Everton Artuso, Gilberto Santos (Rodríguez), Jaime Rezende, Leandro Tavares (Leandrão), Naelson Matheus Junior (Burbs), Rodrigo Andrade e Rodrigo Euzébio. Agradeço também à Éder Fazolli, pelos vários risos e causos em Jales nesses 16 anos de amizade e por toda a consideração mesmo com a distância. Por último, mas não menos importante, agradeço à todos os meus amigos das repúblicas em que morei, pela convivência e pelas inúmeras horas de descontração. Desejo que todos tenham muito sucesso.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNESP/IBILCE. Em especial, agradeço à Profa. Dra. Luci Any Francisco Roberto, por ter aceito o desafio de me orientar, pelo empenho e paciência com minhas dificuldades durante a elaboração deste trabalho. E também agradeço ao Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi, não só pela imensa ajuda como co-orientador, mas pela confiança e todo o conteúdo matemático transmitido a mim durante o período de iniciação científica, me dando a base para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

*“Fé e razão são como a dualidade  
onda-partícula: pode-se ter as duas  
coisas, mas nunca ao mesmo tempo.”*

*Alberto Präss*



# Resumo

Neste trabalho temos como objetivo estudar o número e a distribuição de ciclos limites em sistemas diferenciais lineares por partes. Em particular estudamos o número de ciclos limites do sistema diferencial linear por partes planar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - \varepsilon\phi(x), \\ \dot{y} &= x,\end{aligned}$$

onde  $\varepsilon \neq 0$  é um parâmetro pequeno e  $\phi$  é uma função periódica linear por partes ímpar de período 4. Provamos que dado um inteiro arbitrário positivo  $n$ , o sistema acima possui exatamente  $n$  ciclos limites na faixa  $|x| \leq 2(n+1)$ . Consequentemente, existem sistemas diferenciais lineares por partes contendo uma infinidade de ciclos limites no plano real. Inicialmente obtemos uma quota inferior para o número destes ciclos limites na faixa  $|x| \leq 2(n+1)$  via Teoria do *Averaging*. Em seguida, utilizando a Teoria de Campos de Vetores Rodados, verificamos que o sistema acima tem exatamente  $n$  ciclos limites na faixa  $|x| \leq 2(n+1)$ .

**Palavras-chave:** Ciclos limites, campos de vetores planares, sistemas lineares por partes.

# Abstract

The main goal of this work aim to study the number and distribution of limit cycles in piecewise linear differential systems. In particular we consider the planar piecewise linear differential system

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - \varepsilon\phi(x), \\ \dot{y} &= x,\end{aligned}$$

where  $\varepsilon \neq 0$  is a small parameter and  $\phi$  is an odd piecewise linear periodic function of period 4. We prove that given an arbitrary positive integer  $n$ , the system above has exactly  $n$  limit cycles in the strip  $|x| \leq 2(n+1)$ . Consequently, there are piecewise differential systems containing an infinite number of limit cycles in the real plane. First we get a lower bound on the number of limit cycles in the strip  $|x| \leq 2(n+1)$  via Averaging Theory. In the following, using the Theory of Rotated Vector Fields, we see that above system has exactly  $n$  limit cycles in the strip  $|x| \leq 2(n+1)$ .

**Key words:** Limit cycles, planar vector fields, piecewise linear systems.

# Sumário

Lista de Figuras	xi
Introdução	1
<b>1 Conceitos e resultados preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Conceitos fundamentais e estabilidade de ciclos limites . . . . .	4
1.1.1 Aplicação de Poincaré para uma órbita periódica . . . . .	9
1.1.2 Estudo da estabilidade de um ciclo limite . . . . .	10
1.2 O Método do Averaging . . . . .	13
1.2.1 Demonstração do Teorema do Averaging . . . . .	16
1.3 Teoria de Campos de Vetores Rodados . . . . .	21
1.4 Função de Bessel do primeiro tipo . . . . .	26
1.5 Regra de Leibnitz . . . . .	28
<b>2 Uma quota inferior para o número de ciclos limites</b>	<b>30</b>
2.1 Aplicação do Método do Averaging com $\phi(x) = \sin x$ . . . . .	31
2.2 Demonstração do Teorema 2.0.1 . . . . .	33
2.3 Demonstração dos Lemas 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3 . . . . .	45
2.3.1 Demonstração do Lema 2.2.1 . . . . .	45
2.3.2 Demonstração do Lema 2.2.2 . . . . .	48
2.3.3 Demonstração do Lema 2.2.3 . . . . .	51
<b>3 Existência de exatamente <math>n</math> ciclos limites para todo <math>n \in \mathbb{N}</math></b>	<b>53</b>
3.1 Demonstração do Teorema 3.0.1 . . . . .	54
3.1.1 Existência de um ciclo limite . . . . .	55
3.1.1.1 Demonstração da Afirmação 3.1.2 . . . . .	60
3.1.1.2 Demonstração da Afirmação 3.1.3 . . . . .	62
3.1.1.3 Demonstração da Afirmação 3.1.4 . . . . .	74
3.1.2 Unicidade do ciclo limite encontrado em 3.1.1 . . . . .	75
3.1.2.1 Demonstração do Lema 3.1.1 . . . . .	81
3.1.2.2 Demonstração do Lema 3.1.2 . . . . .	86
3.1.2.3 Demonstração do Lema 3.1.3 . . . . .	97
3.2 Sistemas com número particular de ciclos limites . . . . .	109
Apêndice	112
Referências Bibliográficas	113

# Lista de Figuras

1.1	Gráfico da função $\varphi(t)$ do Exemplo 1.1.1. . . . .	6
1.2	Uma órbita $\gamma$ do sistema (1.1). . . . .	7
1.3	O fluxo $\varphi_t$ do sistema (1.1). . . . .	7
1.4	Ciclo limite estável $\Gamma$ do sistema (1.3) do Exemplo 1.1.2. . . . .	9
1.5	Reta $\Sigma$ normal à $\gamma$ em $x_0$ . . . . .	10
1.6	Aplicação de Poincaré para o sistema no Exemplo 1.1.3. . . . .	12
1.7	Representação geométrica do sinal da função $J_1(z)$ . . . . .	27
1.8	Gráficos das funções $J_0(z)$ , $J_1(z)$ e $J_2(z)$ . . . . .	27
2.1	Gráfico parcial da função linear por partes periódica $\phi$ . . . . .	31
2.2	Gráfico do integrando em (2.10) para $r = 18.5$ , tal que $2m - 1 < r < 2m + 1$ com $m = 9$ . . . . .	38
2.3	Gráficos das funções $F(r)$ , $F'(r)$ e $F''(r)$ para $2m - 1 < r < 2m + 1$ com $m$ ímpar. . . . .	44
2.4	Gráficos das funções $F(r)$ , $F'(r)$ e $F''(r)$ para $2m - 1 < r < 2m + 1$ com $m$ par. . . . .	44
3.1	Gráfico da função $y = \phi(x)$ no plano $xy$ . . . . .	54
3.2	Possibilidades de interseção da órbita $\gamma_{-2m}$ para $m$ par. . . . .	57
3.3	Possibilidades de interseção da órbita $\gamma_{-2m}$ para $m$ ímpar. . . . .	57
3.4	Possibilidades de interseção da órbita $\gamma_{2m}$ para $m$ par. . . . .	57
3.5	Possibilidades de interseção da órbita $\gamma_{2m}$ para $m$ ímpar. . . . .	57
3.6	Representação de duas regiões anelares de Poincaré-Bendixson consecuti- vas definidas pelas curvas fechadas $S_{m-1}$ , $S_m$ e $S_{m+1}$ para $m$ par. . . . .	59
3.7	Representação de duas regiões anelares de Poincaré-Bendixson consecuti- vas definidas pelas curvas fechadas $S_{m-1}$ , $S_m$ e $S_{m+1}$ para $m$ ímpar. . . . .	59
3.8	Situações que a órbita $\gamma_{-2m}$ não satisfaz. . . . .	74
3.9	Arco de órbita intersectando o eixo- $x$ no ponto $(2m, 0)$ para $m$ par. . . . .	75
3.10	Gráficos das funções $\phi(x)$ e $\sigma(x)$ . . . . .	78
3.11	Aplicação primeiro retorno de Poincaré induzida pelas trajetórias próximas do ciclo limite $\Gamma$ . . . . .	81
3.12	Notação usada no cálculo da integral do divergente ao longo das duas órbitas periódicas tais que seus pontos mais a direita estão localizados na faixa $2m + 1 \leq x < 2m + 2$ . . . . .	97
3.13	Comportamento das órbitas do sistema $(3.1)_k$ na faixa $ x  > 2k + 2$ para $k$ ímpar. . . . .	110

---

3.14 Comportamento das órbitas do sistema $(3.1)_k$ na faixa $ x  > 2k + 2$ para $k$ par. . . . .	111
---	-----

# Introdução

Um marco de referência fundamental na evolução dos estudos de equações diferenciais é o artigo *Integral curves defined by differential equations*, publicado por Henry Poincaré em 1881, onde são lançadas as bases da então *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias* e surge pela primeira vez a noção de *ciclo limite*. Esta teoria visa a descrição da configuração global das soluções e o efeito de pequenas perturbações das condições iniciais (estabilidade) de uma equação diferencial, sendo a pesquisa de ciclos limites, que são soluções (órbitas) periódicas isoladas, umas das partes mais interessantes e difíceis.

Após Poincaré, muitos pesquisadores como por exemplo Van der Pol, Lienard, Andronov, Dulac, Bendixson entre outros, produziram vários resultados significativos sobre ciclos limites. Desde então, o estudo sobre as propriedades de ciclos limites, principalmente sobre a existência ou não, a unicidade ou o número máximo de ciclos limites, tem se tornado extensivo entre matemáticos, físicos e até biólogos e engenheiros, devido à presença em tais áreas.

O desenvolvimento da teoria matemática é muitas vezes guiado por problemas práticos. Para o campo das equações diferenciais, esta situação é praticamente clara. O estudo da teoria de ciclos limites tem como motivação, em sua maior parte, problemas de ordem prática em várias áreas da ciência e tecnologia, como por exemplo biologia, meteorologia e engenharias.

Sistemas diferenciais lineares por partes são de grande importância na engenharia e aparecem na teoria de controle (veja [1, 4]), na maioria das vezes na forma de sistemas mecânicos ou de circuitos elétricos. Há a sensação de que sistemas diferenciais lineares por partes podem apresentar todas as dinâmicas complexas que pode-se ver nos sistemas diferenciais não-lineares. Por exemplo, ciclos limites, órbitas heteroclínicas e homoclínicas, que são os principais ingredientes para a descrição qualitativa dos retratos de fase de sistemas diferenciais planares, também estão presentes em sistemas diferenciais lineares por partes planares. Em dimensões maiores, até mesmo atratores estranhos aparecem na classe de sistemas diferenciais lineares por partes.

Um dos principais problemas no estudo qualitativo das equações diferenciais planares é conhecer o número e a distribuição de seus ciclos limites. Dentre eles, destacamos o mais famoso problema relacionado aos ciclos limites, conhecido como o 16º *Problema de Hilbert*. Tal problema foi apresentado por Hilbert em 1900 no Congresso Internacional de Matemáticos, e está dividido em duas partes, cuja segunda parte consiste da seguinte indagação: Qual é o número máximo de ciclos limites para o campo de vetores polinomial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P_n(x, y), \\ \dot{y} &= Q_n(x, y),\end{aligned}$$

onde  $P_n$  e  $Q_n$  são polinômios nas variáveis  $x$  e  $y$  e possuem grau menor ou igual a  $n$ , e quais suas posições relativas no plano? Tal problema ainda se encontra em aberto e sua solução é motivo de vários estudos. No que diz respeito ao número e distribuição de ciclos limites em sistemas diferenciais lineares por partes, existem apenas resultados analíticos sobre sistemas com um número baixo de ciclos limites, veja por exemplo [5, 6, 8].

Neste trabalho estudamos sistemas de equações diferenciais contendo um parâmetro. Duas ferramentas importantes para o estudo destes sistemas são Teoria do Averaging [14] e a Teoria de Campos de Vetores Rodados [2, 16]. De um modo geral, a Teoria do Averaging reduz o problema de encontrar órbitas periódicas de um sistema de equações diferenciais, sob condições convenientes, para encontrar zeros simples de alguma função de dimensão finita. Já com a Teoria de Campos de Vetores Rodados é possível obter informações sobre o comportamento dos ciclos limites quando campos de vetores seguindo a variação do parâmetro sempre giram na mesma direção.

O problema proposto é estudar o sistema de equações diferenciais linear por partes

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - \varepsilon\phi(x), \\ \dot{y} &= x,\end{aligned}\tag{1}$$

onde  $\varepsilon \neq 0$  é um parâmetro e  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função periódica linear por partes ímpar e de período 4, definida em toda a reta e satisfazendo

$$\phi(x) = \begin{cases} x & , \text{ se } x \in [0, 1], \\ -x + 2 & , \text{ se } x \in [1, 2]. \end{cases}\tag{2}$$

Na teoria de controle este sistema é conhecido também como sistema de controle feedback linear por partes.

No ano de 1980, Z. Zhang publicou um trabalho (veja [17]) no qual obteve o seguinte resultado particular

**Teorema 1** *Para  $\varepsilon \neq 0$ . O sistema diferencial (1) com  $\phi(x) = \text{sen } x$  tem exatamente  $n$  ciclos limites na faixa  $|x| \leq (n + 1)\pi$  para  $n = 1, 2, \dots$ . Além disso, os ciclos limites alternam entre estáveis e instáveis.*

Em 2003, motivados por esse estudo, J. Llibre e E. Ponce mostraram em [9] que

**Teorema 2** *Seja  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por (2). Então para um inteiro positivo arbitrário  $n$ , o sistema diferencial linear por partes (1) tem pelo menos  $n$  ciclos limites hiperbólicos na faixa  $|x| \leq 2n + 2$ , para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeno.*

Em [9], Llibre e Ponce conjecturaram que a quantidade de ciclos limites em cada faixa  $|x| \leq 2n + 2$  é exatamente  $n$ . Este resultado, apresentado a seguir, foi provado com a colaboração de X. Zhang em [10]. As idéias principais utilizadas na prova seguem a demonstração do Teorema 1.

**Teorema 3** *Seja  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como em (2). Para  $\varepsilon \neq 0$  e para um inteiro positivo arbitrário  $n$ , o sistema diferencial linear por partes (1) tem exatamente  $n$  ciclos limites na faixa  $|x| \leq 2n + 2$ , alternando entre estáveis e instáveis. Consequentemente, o sistema (1) tem uma infinidade de ciclos limites no plano real.*

Organizamos este trabalho da seguinte forma. No Capítulo 1 abordamos os pré-requisitos necessários para o estudo proposto: fundamentos da teoria qualitativa das equações diferenciais, Teoria do Averaging e Teoria de Campos de Vetores Rodados.

No Capítulo 2 apresentamos a prova do Teorema 2, que nos dá uma quota inferior para a quantidade de ciclos limites do sistema (1) em cada faixa  $|x| \leq 2n + 2$ . Para obtenção de tal resultado, é utilizado o método do *Averaging*. Como exemplo da aplicação do método, fazemos um estudo dos ciclos limites de um sistema diferencial não-linear qualitativamente semelhante ao (1).

Por último é apresentada a prova do Teorema 3, que nos garante em (1) a existência de exatamente  $n$  ciclos limites na faixa  $|x| \leq 2n + 2$ . Ao contrário da prova do Teorema 2, esta parte do estudo é mais trabalhosa, por se tratar de uma prova construtiva e utilizar vários resultados e teorias. A prova é dividida em dois passos. No primeiro passo utilizamos o Teorema da Região Anelar de Poincaré-Bendixson para garantir a existência dos ciclos limites, e no segundo, por meio da aplicação de Poincaré e a Teoria de Campos de Vetores Rodados, concluimos a unicidade dos mesmos. Seguindo esta linha de pensamento, apresentamos no final deste trabalho que é possível obtermos um sistema diferencial linear por partes planar com tantos ciclos limites quanto quisermos.



# Capítulo 1

## Conceitos e resultados preliminares

A ideia principal deste trabalho é estudar os ciclos limites de campos de vetores lineares por partes. Nesse capítulo apresentamos um resumo dos conceitos e resultados utilizados no desenvolvimento deste trabalho, com o intuito de esclarecer e facilitar o entendimento dos raciocínios aplicados para a obtenção dos principais resultados estudados. Inicialmente apresentamos conceitos fundamentais de ciclos limite e de estabilidade. Na sequência, é feito um resumo sobre o Método do *Averaging* (também conhecido como Método da Média), a Teoria de Campos de Vetores Rodados e finalmente apresentamos a função de Bessel de primeiro tipo e a regra de Leibnitz para a derivação de integrais. Ressaltamos que não apresentamos a demonstração de alguns resultados, apesar de todos terem sido estudados com detalhes. Porém são indicadas referências de onde encontrá-las.

### 1.1 Conceitos fundamentais e estabilidade de ciclos limites

Levando em conta que o sistema estudado neste trabalho é um sistema diferencial planar, o estudo dos conceitos e resultados realizado nesta seção é feito sobre o plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ .

Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$ . Definimos um *campo de vetores de classe  $C^r$* ,  $1 \leq r \leq \infty$ , como uma aplicação  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^r$  em  $\Omega$ . Associamos ao campo de vetores  $X$  a equação diferencial

$$\dot{x} = X(x), \tag{1.1}$$

onde  $\dot{x} = dx/dt$ . As variáveis  $x$  e  $t$  são chamadas *variável dependente* (ou *espacial*) e *variável independente* (ou *temporal*) da equação diferencial (1.1), respectivamente. Visto que  $X = X(x)$  não depende da variável  $t$ , dizemos que a equação diferencial (1.1) é *autônoma*. Observamos que a equação diferencial planar (1.1) é equivalente

ao sistema de equações diferenciáveis

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= P(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= Q(x_1, x_2),\end{aligned}$$

onde  $P$  e  $Q$  são funções de classe  $C^r$  e  $x_1$ ,  $x_2$  e  $t$  são variáveis reais.

**Definição 1.1.1** *As soluções da equação diferenciável (1.1) em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  são aplicações  $\varphi : I \rightarrow \Omega$  tal que  $\varphi$  é diferenciável em  $I$  e*

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)),$$

para todo  $t \in I$ . Além disso, se dado  $x_0 \in \Omega$  a aplicação  $\varphi$  é uma solução da equação diferencial (1.1) satisfazendo  $\varphi(t_0) = x_0$  para um certo  $t_0 \in I$ , então  $\varphi$  é uma solução do problema valor inicial (PVI)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X(x), \\ x(t_0) &= x_0,\end{aligned}\tag{1.2}$$

em  $I$ . Tais soluções são chamadas de **trajetórias**, **curvas soluções** ou **órbitas** de (1.1).

Sob certas condições sobre a aplicação  $X$ , garantimos que o sistema (1.1) possui uma única solução passando por cada ponto  $x_0 \in \Omega$  definida em um certo intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

**Teorema 1.1.1 (Teorema de Existência e Unicidade de Soluções)** *Seja  $\Omega$  um aberto do  $\mathbb{R}^2$  contendo  $x_0$ , e assumamos que  $X \in C^1(\Omega)$ . Então existe um real positivo  $a > 0$  tal que o PVI (1.2) possui uma única solução  $\varphi(t)$  no intervalo  $[t_0 - a, t_0 + a]$ .*

**Demonstração:** Veja [12], pág. 73, juntamente com a observação da pág. 76. ■

O Teorema 1.1.1 nos garante que o sistema (1.1) possui uma única solução  $\varphi$  definida em um intervalo  $[t_0 - a, t_0 + a]$  satisfazendo a condição inicial  $\varphi(t_0) = x_0$ . Porém, existe um intervalo  $(\alpha, \beta) \supset [t_0 - a, t_0 + a]$  tal que a solução permanece definida e única, conforme nos diz o teorema a seguir.

**Teorema 1.1.2** *Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$  e assumamos que  $X \in C^1(\Omega)$ . Então, para cada  $x_0 \in \Omega$ , existe um intervalo  $(\alpha, \beta)$  no qual o PVI (1.2) possui uma única solução  $\varphi(t)$ , isto é, se (1.2) possui uma solução  $\varphi^*(t)$  definida em um intervalo  $I$ , então  $I \subset (\alpha, \beta)$  e  $\varphi^*(t) = \varphi(t)$  para todo  $t \in I$ .*

**Demonstração:** Veja [12], página 88. ■

O intervalo  $(\alpha, \beta)$  é chamado *intervalo maximal de existência* da solução do PVI (1.2), e o denotamos por  $I_{x_0}$  visto que  $\alpha$  e  $\beta$  geralmente dependem da condição inicial  $x_0$ , como nos mostra o exemplo abaixo.

**Exemplo 1.1.1** O problema valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2, \\ x(0) &= 1,\end{aligned}$$

possui a única solução  $\varphi(t) = (1 - t)^{-1}$  definida no intervalo maximal de existência  $I_1 = (-\infty, 1)$ . De fato, o gráfico da solução  $\varphi(t)$  é dado pela Figura 1.1. Notamos que a função  $\varphi(t)$  possui outro ramo definido sobre o intervalo  $(1, \infty)$ , porém esse ramo não é considerado como parte da solução do PVI, já que  $t_0 = 0 \notin (1, \infty)$ .

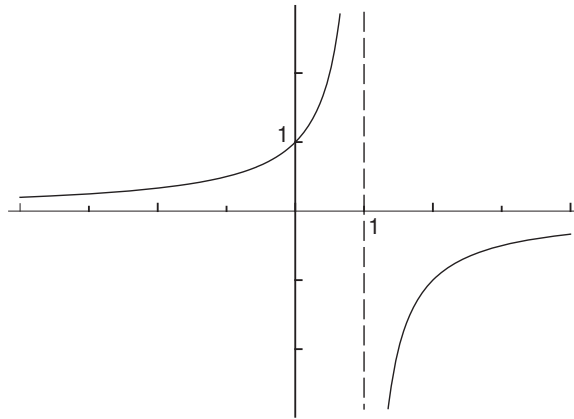


Figura 1.1: Gráfico da função  $\varphi(t)$  do Exemplo 1.1.1.

**Definição 1.1.2** Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$  e  $X \in C^1(\Omega)$ . Para  $x_0 \in \Omega$ , considere a solução  $\varphi(t, x_0)$  do PVI (1.2) definida sobre seu intervalo maximal de existência  $I = I_{x_0}$ . Então para  $t \in I_{x_0}$ , a aplicação  $\varphi_t : \Omega \rightarrow \Omega$  definida por  $\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$  é chamada **fluxo da equação diferencial** (1.1) ou **fluxo gerado pelo campo de vetores**  $X(x)$ .

**Teorema 1.1.3** Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$  e  $X \in C^1(\Omega)$ . Então o conjunto  $\Lambda = \{(t, x) : x \in \Omega, t \in I_x\}$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R} \times \Omega$  e  $\varphi_t \in C^1(\Lambda)$ .

**Demonstração:** Veja [12], página 96. ■

Se consideramos o ponto inicial  $x_0$  fixado e  $I = I_{x_0}$ , então a aplicação  $\varphi(\cdot, x_0) : I \rightarrow \Omega$  define uma órbita do sistema (1.1) através do ponto  $x_0 \in \Omega$ . Usualmente, identificamos a aplicação  $\varphi(\cdot, x_0)$  como um gráfico em  $I \times \Omega$ , e uma órbita é visualizada como um deslocamento ao longo de uma curva  $\gamma$  através do ponto  $x_0$  no subconjunto  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^2$ , veja Figura 1.2. Por outro lado, se consideramos o ponto  $x_0$  variando em todo  $K \subset \Omega$ , então o fluxo do sistema (1.1),  $\varphi_t : K \rightarrow \Omega$ , pode ser visto como o movimento de todos os pontos no conjunto  $K$ , veja Figura 1.3. Fazendo uma analogia, se tomamos o sistema (1.1) descrevendo o deslocamento de um fluido, então uma órbita de (1.1) descreve o deslocamento de uma partícula individual do fluido, enquanto que o fluxo de (1.1) descreve o deslocamento do fluido

por inteiro. Conseqüentemente, se  $x_0$  é uma condição inicial e  $I_{x_0} = \mathbb{R}$ , a órbita de  $x_0$  é a curva dada por

$$\gamma_{x_0} = \{x \in \Omega \mid x = \varphi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\},$$

definida por (1.1). Nos referimos a  $\gamma_{x_0}$  como a órbita passando pelo ponto  $x_0$  no tempo  $t = 0$ . Logo, definimos a semi-órbita positiva por

$$\gamma_{x_0}^+ = \{x \in \Omega \mid x = \varphi(t, x_0), t \geq 0\},$$

e a semi-órbita negativa por

$$\gamma_{x_0}^- = \{x \in \Omega \mid x = \varphi(t, x_0), t \leq 0\},$$

de forma que qualquer órbita  $\gamma_{x_0} = \gamma_{x_0}^+ \cup \gamma_{x_0}^-$ .

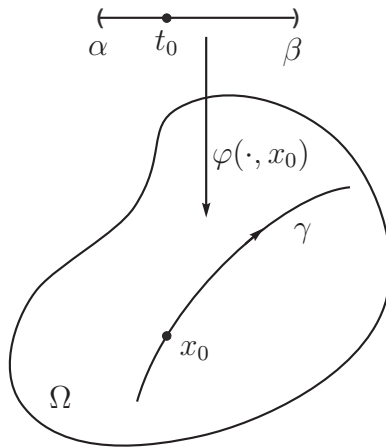


Figura 1.2: Uma órbita  $\gamma$  do sistema (1.1).

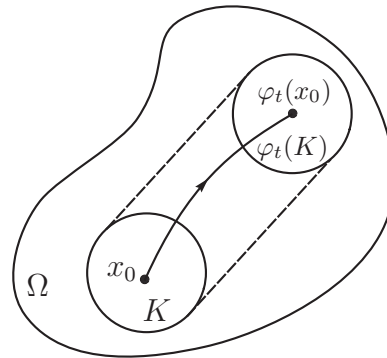


Figura 1.3: O fluxo  $\varphi_t$  do sistema (1.1).

**Definição 1.1.3** Um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  é dito um **ponto singular** ou **ponto de equilíbrio** do campo de vetores  $X$  (ou do sistema (1.1)) se  $X(x_0) = 0$  e **ponto regular** se  $X(x_0) \neq 0$ . Um ponto singular  $x_0$  é dito **isolado** se existe uma vizinhança  $U$  de  $x_0$ , tal que  $X(x) \neq 0$  para todo  $x \in U - \{x_0\}$ , isto é,  $x_0$  é o único ponto singular em  $U$ .

**Definição 1.1.4** Um ponto singular  $x_0$  de um campo vetorial  $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , é dito **hiperbólico** se todos os autovalores da matriz jacobiana de  $X$  em  $x_0$ ,  $DX(x_0)$ , possuem parte real diferente de zero.

**Definição 1.1.5** Uma **órbita periódica** do sistema (1.1) é qualquer curva solução fechada de (1.1) que não é um ponto singular de (1.1). Uma órbita periódica é dita **estável** se para cada  $\varepsilon > 0$  existe uma vizinhança  $V$  de  $\gamma$  tal que para todo  $x \in V$ ,  $d(\gamma_x^+, \gamma) < \varepsilon$ , isto é, se para todo  $x \in V$  e  $t \geq 0$ ,  $d(\varphi(t, x), \gamma) < \varepsilon$ . Uma órbita periódica é dita **instável** se ela não é estável.

Órbitas periódicas do sistema (1.1) correspondem às soluções periódicas de (1.1), pois  $\varphi(\cdot, x_0)$  define uma curva solução fechada de (1.1) se e somente se para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(t + T, x_0) = \varphi(t, x_0)$  para algum  $T > 0$ . O menor tempo  $T$  o qual vale a última igualdade, é chamado *período* da órbita periódica  $\varphi(\cdot, x_0)$ .

**Definição 1.1.6** *Um ciclo limite do sistema (1.1) é uma órbita periódica isolada de (1.1), ou seja, se existe uma vizinhança  $V \subseteq \Omega$  de  $\gamma$  tal que  $\gamma$  é a única órbita periódica contida em  $V$ .*

Seja  $\Gamma$  um ciclo limite. Denotamos por  $ext(\Gamma)$  e  $int(\Gamma)$  os conjuntos dos pontos pertencentes ao exterior e interior, respectivamente, de  $\Gamma$ .

**Definição 1.1.7** *Dizemos que  $\Gamma$  é um ciclo limite **estável** se existe uma vizinhança  $V \subseteq \Omega$  de  $\Gamma$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \Gamma) = 0$ , para todo  $q \in V$ ;  $\Gamma$  é um ciclo limite **instável** se existe uma vizinhança  $V \subseteq \Omega$  de  $\Gamma$  tal que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \Gamma) = 0$ , para todo  $q \in V$ ;  $\Gamma$  é um ciclo limite **semi-estável** se existe uma vizinhança  $V \subseteq \Omega$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \Gamma) = 0$ , para todo  $q \in V \cap ext(\Gamma)$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \Gamma) = 0$ , para todo  $q \in V \cap int(\Gamma)$ , ou  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \Gamma) = 0$ , para todo  $q \in V \cap int(\Gamma)$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \Gamma) = 0$ , para todo  $q \in V \cap ext(\Gamma)$ .*

A interpretação geométrica para um ciclo limite estável (instável)  $\Gamma$ , é que dado qualquer ponto  $x_0$  próximo à  $\Gamma$ , a solução  $\varphi(\cdot, x_0)$  passando por  $x_0$  se aproxima de (afasta de)  $\Gamma$  conforme o tempo cresce.

**Exemplo 1.1.2** Consideramos o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Aplicamos a mudança de coordenadas polares  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Observamos que

- $\dot{\theta} = 1 > 0$ , ou seja, a componente angular é crescente;
- $\dot{r} = r(1 - r^2)$  e então a componente radial é crescente para  $0 < r < 1$  e decrescente para  $r > 1$ ;
- $(r, \theta) = (1, t)$  e  $(r, \theta) = (0, t)$  são soluções de (1.4), as quais correspondem em coordenadas cartesianas a um ciclo limite estável  $\Gamma$  representado por  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  e a um ponto singular (origem), respectivamente.

A representação geométrica das soluções do sistema (1.3), que denominamos *retrato de fase*, é esboçada na Figura 1.4.

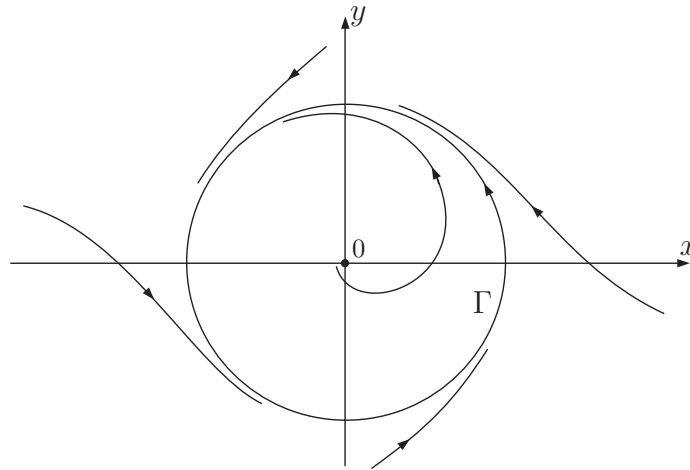


Figura 1.4: Ciclo limite estável  $\Gamma$  do sistema (1.3) do Exemplo 1.1.2.

### 1.1.1 Aplicação de Poincaré para uma órbita periódica

Provavelmente a ferramenta mais básica para se estudar a estabilidade de uma órbita periódica é a *aplicação de Poincaré*, também conhecida como *aplicação primeiro retorno*, definida por Henry Poincaré em 1881. A idéia dada por Poincaré é bem simples: Sejam  $\gamma = \{\varphi(t, x_0) : t \in \mathbb{R}\}$  uma órbita periódica de período  $T$  do sistema (1.1) passando pelo ponto  $x_0$  e  $\Sigma$  uma seção transversal a  $\gamma$  em  $x_0$ . Então, em virtude da continuidade do fluxo  $\varphi_t$  do sistema (1.1), para todo  $x \in \Sigma$  suficientemente próximo de  $x_0$ , a órbita  $\varphi(t, x)$  passando por  $x$  em  $t = 0$  permanece próxima de  $\gamma$  e cruza novamente  $\Sigma$  no ponto  $P(x)$  conforme o tempo cresce. Esta aplicação  $x \mapsto P(x)$  é denominada *aplicação de Poincaré*.

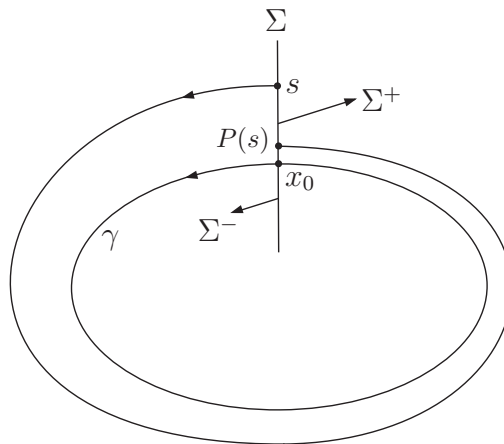
Notamos que para  $x_0 \in \Sigma \cap \gamma$  temos  $P(x_0) = x_0$ , ou seja,  $x_0$  é um ponto fixo da aplicação de Poincaré  $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$  e respectivamente, todo ponto fixo de  $P$  corresponde a uma órbita periódica de (1.1). Além disso, se consideramos  $\Sigma$  como sendo uma reta normal à  $\gamma$ , então o ponto  $x_0 \in \Sigma \cap \gamma$  divide  $\Sigma$  em dois segmentos  $\Sigma^-$  e  $\Sigma^+$ , representando os pontos de  $\Sigma$  contidos no interior e exterior de  $\gamma$ , respectivamente, conforme mostra a Figura 1.5.

Basicamente, a aplicação de Poincaré se resume a tomar um ponto  $x_s$  no segmento de reta  $\Sigma$ , sendo  $s$  a sua distância em relação a  $x_0$  (ponto fixo de  $P$ ) com  $s > 0$  (respectivamente  $s < 0$ ) para  $x_s$  pertencente a  $\Sigma^+$  (respectivamente  $\Sigma^-$ ), e observar onde a órbita a partir do ponto  $x_s$  cruza  $\Sigma$  após um período  $T_{x_s}$ , ou seja, analisar se a órbita se aproxima ou se afasta da órbita periódica  $\gamma$ .

Dado  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, seja  $\Sigma_0 = \{x \in \Sigma : |x - x_0| < \delta\}$  o domínio da aplicação  $P$  com  $x_0 \in \Sigma_0$  tal que  $P$  está definida em todos os pontos de  $\Sigma_0$ .

**Proposição 1.1.1** *Seja  $\varphi_t$  um fluxo de classe  $C^r$  com  $1 \leq r \leq \infty$ . Então a aplicação de Poincaré  $P : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  é um difeomorfismo de classe  $C^r$  sobre sua imagem  $\Sigma_1 = P(\Sigma_0)$ .*

**Demonstração:** Veja [13], página 227. ■

Figura 1.5: Reta  $\Sigma$  normal à  $\gamma$  em  $x_0$ .

### 1.1.2 Estudo da estabilidade de um ciclo limite

Seja  $\Gamma$  um ciclo limite do sistema (1.1). Na sequência mostramos que estabilidade do ciclo limite  $\Gamma$  é determinada pela derivada da aplicação de Poincaré  $P'(x)$ . Para isso, definimos a *função deslocamento*

$$d(x) = P(x) - x. \quad (1.5)$$

Consideramos  $x_0 \in \Gamma \cap \Sigma_0$ . Então  $d(x_0) = 0$ ,  $d'(x) = P'(x) - 1$  e pelo Teorema do Valor Médio segue que para  $|x - x_0| < \delta$

$$d(x) = d'(x^*)(x - x_0),$$

para algum  $x^*$  pertencente ao segmento que liga  $x$  a  $x_0$ . Visto que  $d'(x)$  é contínua (pois  $P'(x)$  é contínua), o sinal de  $d'(x)$  será o mesmo que o sinal de  $d'(x_0)$  para  $|x - x_0|$  suficientemente pequeno de modo que  $d'(x_0) \neq 0$ . Assim, se  $d'(x_0) < 0$  segue que  $d(x) < 0$  para  $x > x_0$  ( $x \in \Sigma_0^+$ ) e que  $d(x) > 0$  para  $x < x_0$  ( $x \in \Sigma_0^-$ ), ou seja, as órbitas que passam pelos pontos no exterior e interior de  $\Gamma$ , respectivamente, se aproximam de  $\Gamma$ , o que nos garante que  $\Gamma$  é um *ciclo limite estável*, conforme ilustra a Figura 1.5. Analogamente, se  $d'(x_0) > 0$  então as órbitas se afastam de  $\Gamma$ , ou seja,  $\Gamma$  é um *ciclo limite instável*. Em particular, por (1.5) temos que para  $x \in \Sigma_0^+$ , se  $P(x) < x$  (respectivamente  $P(x) > x$ ) então o ciclo limite  $\Gamma$  é dito *exteriormente estável* (respectivamente *exteriormente instável*), e para  $x \in \Sigma_0^-$ , se  $P(x) < x$  (respectivamente  $P(x) > x$ ) dizemos que  $\Gamma$  é *interiormente instável* (respectivamente *interiormente estável*).

Equivalentemente, segue de (1.5) que se  $P(x_0) = x_0$  e  $P'(x_0) < 1$  então  $\Gamma$  é um ciclo limite estável e se  $P(x_0) = x_0$  e  $P'(x_0) > 1$  então  $\Gamma$  é um ciclo limite instável. Portanto, a estabilidade do ciclo limite  $\Gamma$  é determinada pela derivada da aplicação de Poincaré.

Consideramos o sistema planar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{1.6}$$

onde  $x, y, t$  são variáveis reais,  $P$  e  $Q$  são de classe  $C^1$  em  $x$  e  $y$ . Seja  $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  o campo vetorial correspondente ao sistema (1.6). Denotamos por  $\operatorname{div}X(x, y)$  o *divergente* do campo  $X$  em  $(x, y)$ , ou seja,  $\operatorname{div}X(x, y) = \partial P(x, y)/\partial x + \partial Q(x, y)/\partial y$ . O resultado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [13], nos dá a expressão para  $P'(x_0)$ .

**Teorema 1.1.4** *Sejam  $\Omega$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$  e  $X = (P, Q) \in C^1(\Omega)$  um campo de vetores. Sejam  $\gamma$  uma órbita periódica de (1.6) de período  $T$  e  $P : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  a aplicação de Poincaré em uma seção transversal  $\Sigma$  em  $x_0 \in \gamma$ . Então*

$$P'(x_0) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{div}X(\gamma(t)) dt\right).$$

Em particular, se

$$\int_0^T \operatorname{div}X(\gamma(t)) dt < 0,\tag{1.7}$$

então  $\gamma$  é um ciclo limite estável e se

$$\int_0^T \operatorname{div}X(\gamma(t)) dt > 0,\tag{1.8}$$

então  $\gamma$  é um ciclo limite instável. No caso do valor da integral ser zero, podemos ter um ciclo limite estável, instável ou semi-estável, ou pertencer a uma faixa contínua de ciclos.

**Definição 1.1.8** *Seja  $\Gamma$  um ciclo limite. O valor  $\lambda = P'(x_0)$  é chamado de **multiplicador característico** de  $\Gamma$ . Além disso, se  $\lambda \neq 1$ , o que implica a condição (1.7) ou (1.8), dizemos que  $\Gamma$  é um ciclo limite **hiperbólico**.*

**Exemplo 1.1.3** No exemplo anterior foi verificado que o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2),\end{aligned}$$

que em coordenadas polares é equivalente à

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}\tag{1.9}$$

possui um ciclo limite  $\Gamma$  representado por  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ . Analisamos então a aplicação de Poincaré de (1.9). Consideramos que no tempo inicial  $t_0 = 0$  temos a condição inicial  $r(0) = r_0$  e  $\theta(0) = \theta_0$ . Resolvendo o sistema (1.9) obtemos

$$r(t, r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right) e^{-2t}\right]^{-1/2},$$

$$\theta(t, \theta_0) = t + \theta_0.$$



Se  $\Sigma$  é o raio que passa pela origem com o ângulo  $\theta = \theta_0$ , então  $\Sigma$  é perpendicular à  $\Gamma$  e a órbita passando pelo ponto  $(r_0, \theta_0)$  em  $t = 0$ , cruza o raio novamente em  $t = 2\pi$ , conforme a Figura 1.6. Portanto, a aplicação de Poincaré é dada por

$$P(r_0) = \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-1/2}.$$

Claramente  $P(1) = 1$  corresponde ao ciclo  $\Gamma$  e segue que

$$P'(r_0) = e^{-4\pi} r_0^{-3} \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} e^{-4\pi} \right) \right]^{-3/2},$$

com  $P'(1) = e^{-4\pi} < 1$ , o que comprova que o ciclo limite  $\Gamma$  é estável.

Por outro lado, em coordenadas cartesianas, como  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ , segue que  $\operatorname{div} X(\gamma(t)) = 2 - 4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t$  e

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt = \int_0^{2\pi} (2 - 4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t) dt = -4\pi.$$

Assim, pelo Teorema 1.1.4 temos

$$P'(x_0) = e^{-4\pi},$$

o que confere com o resultado obtido acima pelo cálculo direto.

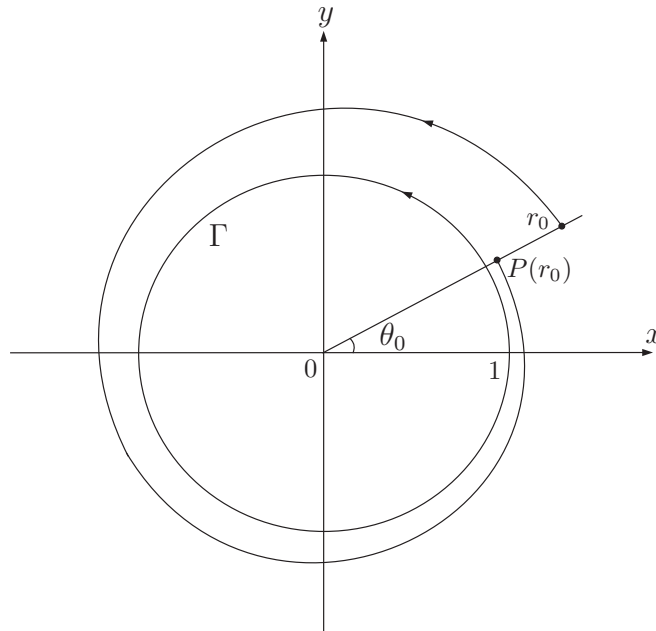


Figura 1.6: Aplicação de Poincaré para o sistema no Exemplo 1.1.3.

Com os conceitos de estabilidade fixados, apresentamos a seguir um resultado que nos dá condições para a existência de um ciclo limite, e que será de fundamental importância no estudo abordado no Capítulo 3 deste trabalho. A demonstração do mesmo pode ser vista em [18], Teorema 4.7.

**Teorema 1.1.5 (Região Anelar de Poincaré-Bendixson)** *Seja  $A$  uma região anelar não contendo pontos singulares de (1.6) tal que  $\partial A$  não contém órbitas periódicas e toda órbita cruzando a fronteira de  $A$  move-se do exterior para o interior (interior para o exterior). Então existe pelo menos um ciclo limite exteriormente estável (instável) em  $A$ , e existe pelo menos um ciclo limite interiormente estável (instável) em  $A$ , e é possível que ambos coincidam, de modo a existir um único ciclo limite estável (instável).*

## 1.2 O Método do Averaging

Consideramos o sistema diferencial da forma

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon), \quad (1.10)$$

com  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  um domínio aberto limitado,  $\varepsilon$  é um parâmetro real e  $t \geq 0$ . Além disso, assumimos que  $f(t, x)$  e  $g(t, x, \varepsilon)$  são funções  $T$ -periódicas em  $t$ . Denominamos por *sistema médio* de (1.10), o sistema definido por

$$\dot{y} = \varepsilon F(y), \quad (1.11)$$

com

$$F(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt. \quad (1.12)$$

O Método do Averaging se resume em estudar a existência de órbitas periódicas de um sistema do tipo (1.10), analisando os pontos singulares de seu sistema médio (1.11), ou seja, investigando os zeros simples de  $F$ . Em outras palavras, o método garante que sob certas condições, os pontos singulares do sistema médio correspondem às soluções  $T$ -periódicas do sistema (1.10), mais precisamente temos o seguinte resultado.

**Teorema 1.2.1 (Averaging)** *Consideramos o sistema (1.10) e suponhamos que as funções  $f$ ,  $g$ ,  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial^2 f/\partial x^2$  e  $\partial g/\partial x$  estão definidas, são contínuas e limitadas por uma certa constante  $M$  (independente de  $\varepsilon$ ) em  $[0, \infty) \times D$  e  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ , com  $\varepsilon_0$  uma constante fixa. Além disso, assumimos que  $f$  e  $g$  são  $T$ -periódicas na variável  $t$ , com  $T$  independente de  $\varepsilon$ . Então valem as seguintes afirmações.*

(a) *Se  $p$  é um ponto singular do sistema (1.11) tal que*

$$\det \left( \frac{\partial F(y)}{\partial y} \right) \Big|_{y=p} \neq 0, \quad (1.13)$$

então existe uma solução  $T$ -periódica  $\phi(t, \varepsilon)$  do sistema (1.10) próxima de  $p$  tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(t, \varepsilon) = p.$$

- (b) Se o ponto singular  $p$  do sistema (1.11) é hiperbólico então, para um  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, a solução periódica correspondente  $\phi(t, \varepsilon)$  do sistema (1.10) é hiperbólica e do mesmo tipo de estabilidade que  $p$ .

Notamos que as condições sobre  $f, g$  e suas derivadas, nos garantem a existência e unicidade de soluções satisfazendo (1.10) e (1.11) com condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $y(0) = y_0$ , respectivamente. Além disso, a  $T$ -periodicidade da  $f$  na variável  $t$  nos permite trabalhar apenas com valores de  $t \in [0, T]$ .

Antes de realizar a prova do Teorema 1.2.1, apresentamos a seguir alguns conceitos e resultados necessários e de grande importância para o entendimento da prova.

Consideramos agora o sistema linear não autônomo

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1.14}$$

com  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A(t)$  uma matriz  $n \times n$   $T$ -periódica contínua, isto é,  $A(t+T) = A(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Tomamos  $n$  soluções linearmente independentes  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  do sistema (1.14). A matriz  $\Phi(t)$  cujas colunas são as soluções  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ ,

$$\Phi(t) = (x_1(t)x_2(t) \dots x_n(t)),$$

é chamada *matriz fundamental* do sistema (1.14). Mais precisamente, temos a seguinte definição.

**Definição 1.2.1** Uma **matriz fundamental** para o sistema (1.14) é qualquer matriz  $n \times n$  não-singular  $\Phi(t)$ , isto é,  $\det \Phi(t) \neq 0$ , tal que para todo  $t \in \mathbb{R}$ , satisfaz

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t).$$

Notamos que adicionando a condição inicial  $x(t_0) = x_0$  ao sistema (1.14), as soluções do PVI são dadas por  $x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$ . A seguir, apresentamos um importante resultado para sistemas com coeficientes periódicos como (1.14), que nos diz que a matriz fundamental de (1.14) pode ser escrita como o produto de uma matriz  $T$ -periódica e uma matriz (geralmente) não-periódica.

**Teorema 1.2.2 (Floquet)** Consideramos o sistema (1.14) com  $A(t)$  uma matriz  $n \times n$   $T$ -periódica contínua. Cada matriz fundamental  $\Phi(t)$  desse sistema pode ser escrita como o produto

$$\Phi(t) = Q(t)e^{Bt}$$

com  $Q(t)$  uma matriz  $n \times n$   $T$ -periódica e  $B$  uma matriz constante.

**Demonstração:** A matriz fundamental  $\Phi(t)$  de (1.14) é composta de  $n$  soluções independentes satisfazendo  $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ . Como  $A(t)$  é  $T$ -periódica temos

$$\dot{\Phi}(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Phi(t+T).$$

Assim,  $Z(t) = \Phi(t+T)$  também é matriz fundamental de (1.14). Além disso

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T), \quad (1.15)$$

onde  $\Phi(T)$  é chamada *matriz monodromia* do sistema (1.14). De fato, verificamos que  $Y(t) = \Phi(t)\Phi(T)$  é solução do sistema (1.14)

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= \dot{\Phi}(t)\Phi(T) \\ &= A(t)\Phi(t)\Phi(T) \\ &= A(t)Y(t). \end{aligned}$$

Logo, assumindo que na condição inicial  $t = 0$  temos  $\Phi(0) = I$ , como  $Z(0) = \Phi(T) = Y(0)$  segue pela unicidade das soluções que  $Z(t) = Y(t)$ . Portanto, segue de (1.15) que existe uma matriz constante  $B$  tal que

$$\Phi(T) = e^{BT}.$$

Tomando  $Q(t) = \Phi(t)e^{-Bt}$ , para completar a prova basta provar que a matriz  $Q(t)$  é  $T$ -periódica

$$\begin{aligned} Q(t+T) &= \Phi(t+T)e^{-B(t+T)} \\ &= \Phi(t)\Phi(T)e^{-BT}e^{-Bt} \\ &= \Phi(t)e^{-Bt} \\ &= Q(t). \end{aligned}$$

■

Observamos que os autovalores da matriz monodromia  $C = e^{BT}$  são chamados *multiplicadores característicos* (ou de Floquet) de  $C$  e denotamos por  $\rho = e^{\lambda T}$ . Cada número complexo  $\lambda$  é chamado de *expoentes característicos* (ou de Floquet). É possível escolher os expoentes  $\lambda$  tal que eles coincidem com os autovalores de  $B$ .

**Teorema 1.2.3** *Consideramos o sistema em  $\mathbb{R}^n$*

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x) \quad (1.16)$$

com  $A(t)$  uma matriz contínua  $T$ -periódica e a função  $f(t, x)$  contínua em  $t$  e em  $x$  e Lipschitz-contínua em  $x$  para  $t \in \mathbb{R}$ , com  $x$  numa vizinhança de  $x = 0$ . Além disso, temos

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0 \quad \text{uniformemente em } t.$$

(esta última condição implica também que  $x = 0$  é uma solução da equação (1.16)). Se as partes reais dos expoentes característicos do sistema periódico linear

$$\dot{y} = A(t)y$$

são negativas, a solução  $x = 0$  do sistema (1.16) é estável e a atração é exponencial numa  $\delta$ -vizinhança de  $x = 0$ .

**Demonstração:** Veja [14], Teorema 7.2, página 86.

**Teorema 1.2.4** Consideramos o sistema em  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = Ax + B(t)x + f(t, x) \quad (1.17)$$

onde  $t \geq t_0$ ,  $A$  é uma matriz  $n \times n$  constante com pelo menos um autovalor com parte real positiva,  $B(t)$  é uma matriz  $n \times n$  contínua com a propriedade

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$$

e a função vetor  $f(t, x)$  é contínua em  $t$  e em  $x$  e Lipschitz-contínua em  $x$  numa vizinhança de  $x = 0$ . Se além disso, tivermos

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0 \quad \text{uniformemente em } t$$

então a solução  $x = 0$  do sistema (1.17) é instável.

**Demonstração:** Veja [14], Teorema 7.3, página 88.

### 1.2.1 Demonstração do Teorema 1.2.1

(a) Consideramos

$$u(t, x) = \int_0^t [f(s, x) - F(x)] ds, \quad (1.18)$$

onde  $F(x)$  é a função média de  $f(t, x)$  dada por (1.12). Como  $f(t, x)$  é limitada, então

$$\begin{aligned} \|u(t, x)\| &= \left\| \int_0^t f(s, x) - F(x) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|f(s, x)\| ds - \int_0^t \|F(x)\| ds \\ &\leq Mt + \|F(x)\|t \\ &\leq 2MT, \end{aligned}$$

para  $t \in [0, T]$  e  $x \in D$ . Introduzimos agora a seguinte *perturbação da identidade*<sup>1</sup>

$$x(t) = z(t) + \varepsilon u(t, z(t)), \quad (1.19)$$

com  $z \in D$ . Derivamos (1.19) e substituímos em (1.10) e temos

$$\dot{z} + \varepsilon \frac{\partial u(t, z)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} \dot{z} = \varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t, z)) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon).$$

<sup>1</sup>Entende-se uma família de transformações dependendo de  $\varepsilon$  que se reduz à identidade quando  $\varepsilon = 0$ .

Usando (1.18), reescrevemos essa equação na forma

$$\begin{aligned}
\left(I + \varepsilon \frac{\partial u(t, z)}{\partial z}\right) \dot{z} &= -\varepsilon \frac{\partial u(t, z)}{\partial t} + \varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t, z)) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) \\
&= \varepsilon F(z) - \varepsilon f(t, z) + \varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t, z)) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) \\
&:= \varepsilon F(z) + R(t, z, \varepsilon),
\end{aligned} \tag{1.20}$$

com  $I$  sendo a matriz identidade  $n \times n$ . Denotamos por  $S(\varepsilon) = \left(I + \varepsilon \frac{\partial u(t, z)}{\partial z}\right)^{-1}$ . A expansão em série de Taylor de  $S(\varepsilon)$  em torno de  $\varepsilon = 0$  é dada por

$$\begin{aligned}
S(\varepsilon) &= S(0) + \frac{dS(0)}{d\varepsilon} \varepsilon + \frac{d^2 S(0)}{d\varepsilon^2} \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \\
&= I - \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{1.21}$$

onde  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  representa os termos de ordem  $\varepsilon^2$ . Como  $\partial f / \partial z$  é contínua e limitada

$$\|f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)\| \leq L\varepsilon \|u(t, z)\| \leq L\varepsilon 2MT,$$

onde  $L$  é a constante de Lipschitz. Além disso,  $g$  também é limitada para  $t \geq 0$  e  $z \in D$ . Assim temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|R(t, z, \varepsilon)\| &= \|\varepsilon [f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)] + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon)\| \\
&\leq \varepsilon \|f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)\| + \varepsilon^2 \|g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon)\| \\
&\leq \varepsilon^2 2MTL + \varepsilon^2 M \\
&:= \varepsilon^2 C.
\end{aligned}$$

A estimativa acima nos garante que  $R = R(t, z, \varepsilon)$  é de ordem  $\varepsilon^2$ . Assim, por (1.20) e (1.21) obtemos o seguinte sistema em  $z$

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= [\varepsilon F(z) + R] S(\varepsilon) \\
&= \varepsilon F(z) + R - \varepsilon^2 F(z) \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} - R \varepsilon \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} + \varepsilon F(t, z) \mathcal{O}(\varepsilon^2) + R \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \varepsilon F(z) + R - \varepsilon^2 F(z) \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
&= \varepsilon F(z) + (\varepsilon [f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)] + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon)) - \\
&\quad \varepsilon^2 F(z) \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} + \mathcal{O}(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Denotamos por  $f^0(\varepsilon) = f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)$  e  $G(\varepsilon) = g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon)$ . Suas respectivas séries de Taylor em torno de  $\varepsilon = 0$  são dadas por:

$$\begin{aligned}
f^0(\varepsilon) &= f^0(0) + \frac{df^0(0)}{d\varepsilon} \varepsilon + \frac{d^2 f^0(0)}{d\varepsilon^2} \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \\
&= \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} u(t, z) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{1.23}$$

e

$$\begin{aligned} G(\varepsilon) &= G(0) + \frac{\partial G(0)}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \frac{\partial^2 G(0)}{\partial \varepsilon^2} \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \\ &= g(t, z, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Substituímos (1.23) e (1.24) em (1.22) e o sistema em  $z$  pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \varepsilon F(z) + \varepsilon^2 \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} u(t, z) + \varepsilon^2 g(t, z, 0) - \varepsilon^2 F(z) \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &= \varepsilon F(z) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} u(t, z) - F(z) \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} + g(t, z, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\ &:= \varepsilon F(z) + \varepsilon^2 R^*(t, z, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.25)$$

com  $R^*(t, z, \varepsilon)$  continuamente diferenciável com respeito a  $z$  e  $T$ -periódica em  $t$ , já que por hipótese  $f$  e  $g$  são  $T$ -periódicas e temos  $u(t, z)$   $T$ -periódica, pois

$$\begin{aligned} u(t+T, z) &= \int_0^{t+T} [f(s, z) - F(z)] ds \\ &= \int_0^t [f(s, z) - F(z)] ds + \int_t^{t+T} [f(s, z) - F(z)] ds \\ &= \int_0^t [f(s, z) - F(z)] ds + \left( \int_0^T f(s, z) ds - \int_0^T F(z) ds \right) \\ &= \int_0^t [f(s, z) - F(z)] ds + [F(z)T - F(z)T] \\ &= u(t, z). \end{aligned}$$

Portanto, uma solução  $T$ -periódica  $z(t)$  de (1.25) produz uma solução  $T$ -periódica  $x(t)$  de (1.10). Integramos o sistema (1.25) e obtemos a seguinte solução integral

$$z(t) = z(0) + \varepsilon \int_0^t F(z(s)) ds + \varepsilon^2 \int_0^t R^*(s, z(s), \varepsilon) ds. \quad (1.26)$$

Como para uma solução  $T$ -periódica  $z(t)$  vale  $z(t+T) = z(t)$ , para todo  $t \geq 0$ , temos  $z(T) = z(0)$  e pela equação (1.26) vale

$$z(T) = z(0) + \varepsilon \int_0^T F(z(s)) ds + \varepsilon^2 \int_0^T R^*(s, z(s), \varepsilon) ds,$$

donde concluímos que

$$h(z(0), \varepsilon) = \int_0^T F(z(s)) ds + \varepsilon \int_0^T R^*(s, z(s), \varepsilon) ds = 0. \quad (1.27)$$

Por hipótese, sendo  $p$  um ponto singular do sistema (1.11) satisfazendo (1.13), segue de (1.27) que  $h(p, 0) = 0$  e

$$\det \left( \frac{\partial h(z, 0)}{\partial z} \right) \Big|_{z=p} \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita, para cada  $\varepsilon$  numa vizinhança de  $\varepsilon = 0$ , existe uma única solução  $z_\varepsilon$  tal que  $h(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$ . Segue de (1.27) que  $z_\varepsilon = z(0)$  e  $z(0) \rightarrow p$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , visto que  $h(p, 0) = 0$ . Daí, por (1.26) temos que  $z(t) \rightarrow p$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Portanto, considerando  $z(t)$  uma solução  $T$ -periódica de (1.25) temos que a solução  $x(t)$  de (1.10) é  $T$ -periódica e pela perturbação (1.19), conclui-se que  $x(t) \rightarrow p$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o que prova o item (a).

(b) Suponhamos inicialmente que todos autovalores do ponto singular  $y = p$  do sistema médio (1.11) possuem parte real negativa. Sendo  $\phi(t, \varepsilon)$  uma solução periódica do sistema (1.10), aplicamos a mudança de variável

$$x = z + \phi(t, \varepsilon), \quad (1.28)$$

e obtemos que

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \varepsilon f(t, z + \phi(t, \varepsilon)) + \varepsilon^2 g(t, z + \phi(t, z + \varepsilon), \varepsilon) - \dot{\phi}(t, \varepsilon) \\ &= \varepsilon [f(t, z + \phi(t, \varepsilon)) - f(t, \phi(t, \varepsilon))] + \\ &\quad \varepsilon^2 [g(t, z + \phi(t, \varepsilon), \varepsilon) - g(t, \phi(t, \varepsilon), \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Denotamos por  $f_1(z) = f(t, z + \phi(t, \varepsilon)) - f(t, \phi(t, \varepsilon))$  e  $g_1(z) = g(t, z + \phi(t, \varepsilon), \varepsilon) - g(t, \phi(t, \varepsilon), \varepsilon)$ . Daí, expandindo  $f_1$  e  $g_1$  em série de Taylor com respeito a  $z$  em torno de  $z = 0$ , e omitindo os termos não-lineares, segue que

$$f_1(z) = f_1(0) + \frac{df_1(0)}{dz} z + \frac{d^2 f_1(0)}{dz^2} \frac{z^2}{2} + \dots = \frac{\partial f(t, \phi(t, \varepsilon))}{\partial z} z,$$

e

$$g_1(z) = g_1(0) + \frac{dg_1(0)}{dz} z + \frac{d^2 g_1(0)}{dz^2} \frac{z^2}{2} + \dots = \frac{\partial g(t, \phi(t, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z} z.$$

Logo, substituímos em (1.29) e obtemos o seguinte sistema

$$\dot{z} = \varepsilon A(t, \varepsilon) z, \quad (1.30)$$

com  $A(t, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial z} [f(t, \phi(t, \varepsilon)) - \varepsilon g(t, \phi(t, \varepsilon), \varepsilon)]$  uma matriz  $T$ -periódica, pois  $f$  e  $g$  o são por hipótese. O sistema obtido acima é uma linearização, com coeficientes  $T$ -periódicos, do sistema (1.10) numa vizinhança da solução periódica  $\phi(t, \varepsilon)$ . Consideramos a seguinte matriz

$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial z}(t, p).$$

Como  $f$  é  $T$ -periódica em  $t$ , segue também que  $B(t)$  é  $T$ -periódica. Pelo item (a) temos que  $\phi(t, \varepsilon) \rightarrow p$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , conseqüentemente  $A(t, \varepsilon) \rightarrow B(t)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Utilizamos também as matrizes

$$B^0 = \frac{1}{T} \int_0^T B(t) dt \quad \text{e} \quad C(t) = \int_0^t [B(s) - B^0] ds.$$

Notamos que  $B^0$  é a matriz constante do sistema médio (1.11) linearizado. De fato, expandimos a função  $F(y)$  de (1.11) em série de Taylor em torno de seu ponto



singular  $y = p$  e consideramos a parte linear da expansão

$$\begin{aligned}
 F(y) &= F(p) + \frac{dF(p)}{dy} (y - p) + \cdots \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f(t, p)}{\partial y} dt (y - p) \\
 &= B^0(y - p).
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Assim, considerando a translação  $w = y - p$  para a origem, o sistema médio (1.11) linearizado é da forma

$$\dot{w} = \varepsilon F(w + p) = \varepsilon B^0 w.$$

Por (1.31) temos  $B^0 = dF(p)/dy$ , segue por hipótese que todos autovalores de  $B^0$  possuem parte real negativa. Além disso, a matriz  $C(t)$  é  $T$ -periódica e possui média zero pois

$$\begin{aligned}
 C(t + T) &= \int_0^{t+T} B(s) ds - \int_0^{t+T} B^0 ds \\
 &= \left( \int_0^t B(s) ds + \int_t^{t+T} B(s) ds \right) - \left( \int_0^t B^0 ds + \int_t^{t+T} B^0 ds \right) \\
 &= \int_0^t [B(s) - B^0] ds + \int_0^T B(s) ds - \int_0^T B^0 ds \\
 &= \int_0^t [B(s) - B^0] ds + B^0 T - B^0 T \\
 &= C(t),
 \end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{T} \int_0^T [B(s) - B^0] ds = \frac{1}{T} \int_0^T B(s) ds - \frac{1}{T} \int_0^T B^0 ds = B^0 - B^0 = 0,$$

o que garante, respectivamente, a  $T$ -periodicidade e a média zero da matriz  $C(t)$ . Agora, aplicando no sistema (1.30) a seguinte perturbação da identidade  $z \mapsto y$  com

$$y = (I - \varepsilon C(t))z, \tag{1.32}$$

e o fato de  $(I - \varepsilon C(t))^{-1} = I + \varepsilon C(t) + \cdots$  em torno de  $\varepsilon = 0$  temos o sistema na variável  $y$

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= -\varepsilon \dot{C}(t)z + (I - \varepsilon C(t))\dot{z} \\
 &= -\varepsilon(B(t) - B^0)z + (I - \varepsilon C(t))\varepsilon A(t, \varepsilon)z \\
 &= [\varepsilon B^0 + \varepsilon(A(t, \varepsilon) - B(t)) - \varepsilon^2 C(t)A(t, \varepsilon)](I - \varepsilon C(t))^{-1}y \\
 &= \varepsilon B^0 y + \varepsilon(A(t, \varepsilon) - B(t))y + \varepsilon^2 R(t, \varepsilon)y,
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

onde  $R(t, \varepsilon) = B^0 C(t) + (A(t, \varepsilon) - B(t))C(t) - C(t)A(t, \varepsilon) - \varepsilon C(t)A(t, \varepsilon)C(t)$  é  $T$ -periódica e limitada, visto que as matrizes  $C(t)$ ,  $B(t)$  e  $A(t, \varepsilon)$  são  $T$ -periódicas e contínuas. Então, como  $(A(t, \varepsilon) - B(t)) \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e os expoentes característicos da parte linear do sistema (1.33) dependem continuamente do parâmetro  $\varepsilon$ . Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, o sinal da parte real dos expoentes característicos da parte linear de (1.33) é igual o sinal da parte real dos autovalores da matriz  $B^0$ . Do mesmo modo, os expoentes característicos do sistema (1.30) dependem continuamente de  $\varepsilon$ , e pela perturbação da identidade (1.32), para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, o sistema (1.33) está próximo do sistema (1.30), e conseqüentemente o sinal da parte real dos expoentes característicos de (1.30) é igual o sinal da parte real dos autovalores da matriz  $B^0$ , ou seja, parte real negativa. Logo, aplicamos o Teorema 1.2.3 no sistema (1.30) com  $f(t, x) \equiv 0$  e obtemos que a solução trivial  $z = 0$  é estável, ou seja,  $z(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Portanto, pela mudança de variável (1.28), segue que  $x(t) \rightarrow \phi(t, \varepsilon)$  quando  $t \rightarrow \infty$ , o que implica que a solução periódica  $\phi(t, \varepsilon)$  do sistema (1.10) é estável.

Suponhamos agora que pelo menos um dos autovalores do ponto singular  $y = p$  do sistema médio (1.11) possui parte real positiva. Logo, a matriz  $B^0$  tem pelo menos um autovalor com parte real positiva. Como para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, temos que a matriz  $(A(t, \varepsilon) - B(t))$  está próxima da matriz nula e o limite de  $\|\varepsilon^2 R(t, \varepsilon)y\|/\|y\|$  está próximo de zero. Aplicamos o Teorema 1.2.4 no sistema (1.33) e obtemos que a solução trivial  $y = 0$  é instável, ou seja,  $y(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Daí, pela perturbação (1.32) e visto que a matriz  $C(t)$  é  $T$ -periódica, segue que  $z(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$  e conseqüentemente, pela mudança de variável (1.28), temos que  $x(t) \rightarrow \phi(t, \varepsilon)$  quando  $t \rightarrow -\infty$ , o que implica que a solução periódica  $\phi(t, \varepsilon)$  de (1.10) é instável. Com isso, está completa a prova da parte (b) e concluímos a demonstração. ■

### 1.3 Teoria de Campos de Vetores Rodados

A teoria de campos de vetores rodados foi inicialmente estabelecida por Duff em 1953 [2]. Apresentamos a seguir alguns conceitos e resultados da Teoria de Campos de Vetores Rodados seguindo como referência o trabalho de Duff [2] e [3].

Consideramos o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, \alpha), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, \alpha), \quad (1.34)$$

com o parâmetro  $\alpha$ . Suponhamos que quando o parâmetro  $\alpha$  é perturbado por valores próximos de  $\alpha_0$ , a estrutura topológica do sistema  $(1.34)_{\alpha_0}$  não se altera. Então,  $\alpha_0$  é chamado *valor regular* de  $\alpha$ , e o sistema  $(1.34)_{\alpha_0}$  é dito *estruturalmente estável com respeito a perturbação de  $\alpha$* . Se para uma perturbação pequena arbitrária  $\alpha_1$  próximo de  $\alpha_0$ , a estrutura topológica do retrato de fase do sistema  $(1.34)_{\alpha_1}$  se modifica, então dizemos que  $\alpha_0$  é um *valor de bifurcação* e a mudança ocorrida na estrutura topológica é chamada *bifurcação*. Como exemplos de bifurcações, temos

que quando o parâmetro  $\alpha$  varia, um ciclo limite pode surgir ou desaparecer próximo de um ponto singular, ou então dividir-se em vários outros ciclos limites.

Nesta seção estudamos equações diferenciais com um parâmetro e o que ocorre com ciclos limites quando tal parâmetro varia. É nesta linha que surge a teoria de campos de vetores rodados.

Assumimos que o campo de vetores (1.34) possui somente pontos singulares isolados e que  $P(x, y, \alpha)$  e  $Q(x, y, \alpha)$  são funções de classe  $C^1$  em  $\Omega \times I$ , onde  $I = [0, T]$  ou  $I = \mathbb{R}$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é uma região aberta.

**Definição 1.3.1** *Suponhamos que quando  $\alpha$  varia em  $[0, T]$ , os pontos singulares de (1.34) permanecem inalterados e em todos os pontos regulares temos*

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial P}{\partial \alpha} & \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \end{vmatrix} > 0 \quad (1.35)$$

e além disso

$$\begin{aligned} P(x, y, \alpha + T) &= -P(x, y, \alpha), \\ Q(x, y, \alpha + T) &= -Q(x, y, \alpha). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Então dizemos que o sistema (1.34) forma uma **família completa de campos de vetores rodados** para  $0 \leq \alpha \leq T$ .

Observamos por (1.36) que  $P(x, y, \alpha)$  e  $Q(x, y, \alpha)$  também são funções periódicas de  $\alpha$  com período  $2T$ . Para uma melhor interpretação desta definição fazemos a seguinte análise. Seja  $\theta = \theta(x, y, \alpha)$  o ângulo entre o campo  $(P, Q)$  e o eixo- $x$ , isto é

$$\theta = \arctan\left(\frac{Q}{P}\right). \quad (1.37)$$

Então temos

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \arctan\left(\frac{Q}{P}\right) \right] = \frac{1}{P^2 + Q^2} \begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial P}{\partial \alpha} & \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \end{vmatrix}. \quad (1.38)$$

Logo, segue pelas condições (1.35) e (1.36) que

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} > 0 \quad \text{e} \quad \theta(x, y, \alpha + \pi) = \theta(x, y, \alpha) + \pi.$$

Isto implica que em todos os pontos regulares  $p = (x, y)$ , quando o parâmetro  $\alpha$  aumenta, o campo de vetores (1.34) gira no sentido anti-horário no ponto  $p$ , e pela condição (1.36), quando o parâmetro muda de  $\alpha$  para  $\alpha + T$ , o vetor  $(P, Q)$  gira exatamente  $\pi$  radianos no sentido anti-horário no ponto  $p$ , e o comprimento do vetor permanece o mesmo. Assim, quando  $\alpha$  muda para  $\alpha + 2T$ , o campo de vetores  $(P, Q)$  gira  $2\pi$  radianos no sentido anti-horário e volta a sua posição inicial. Este é o significado geométrico do termo “rodado e completo” apresentado na definição acima e introduzido por Duff.

Como o parâmetro  $\alpha$  varia, a mudança dos ciclos limites em campos de vetores rodados é relativamente sistemática, porém as restrições na definição da família completa de campos de vetores rodados são bastante fortes. Tais restrições podem ser substancialmente reduzidas se retermos somente os requisitos fundamentais. Um exemplo disso é o conceito de campos de vetores rodados generalizados, onde os ciclos limites variam da mesma forma conforme o parâmetro varia. Fazemos agora uma abordagem sobre este conceito.

**Definição 1.3.2** *Suponhamos que quando  $\alpha$  varia no intervalo  $(a, b)$  (limitado ou ilimitado), os pontos singulares do campo de vetores (1.34) permanecem inalterados, e para qualquer ponto regular  $p = (x, y)$  e quaisquer parâmetros  $\alpha_1 < \alpha_2$  em  $(a, b)$  temos*

$$\left| \begin{array}{cc} P(x, y, \alpha_1) & Q(x, y, \alpha_1) \\ P(x, y, \alpha_2) & Q(x, y, \alpha_2) \end{array} \right| \geq 0 \quad (\text{ou } \leq 0), \quad (1.39)$$

onde a igualdade não ocorre sobre uma órbita periódica inteira de  $(1.34)_{\alpha_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Então dizemos que (1.34) é um campo de vetores rodados generalizado.

Se para um ponto regular  $(x_0, y_0)$  e parâmetro  $\alpha_0$ , existir um valor  $\delta = \delta(x_0, y_0, \alpha_0)$  positivo tal que para todo  $\alpha \in [\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]$  vale a igualdade em (1.39), então  $\alpha_0$  é chamado *ponto de parada* para  $(x_0, y_0)$ . Caso contrário,  $\alpha_0$  é chamado *ponto de rotação*.

O significado geométrico da condição (1.39) é que em qualquer ponto  $p = (x, y)$ , o ângulo orientado entre  $(P(x, y, \alpha_1), Q(x, y, \alpha_1))$  e  $(P(x, y, \alpha_2), Q(x, y, \alpha_2))$  tem o mesmo (ou oposto) sinal conforme o  $\text{sign}(\alpha_2 - \alpha_1)$ . Isto é, em qualquer ponto  $p = (x, y)$ , conforme o parâmetro  $\alpha$  aumenta, o vetor  $(P(x, y, \alpha), Q(x, y, \alpha))$  só pode girar em uma direção. Além disso, o ângulo de rotação não pode exceder  $\pi$  radianos.

**Observação 1.3.1** Notamos que se o sistema (1.34) forma uma família de campos de vetores rodados completo então ele também forma uma família de campos de vetores rodados generalizados. De fato, se o sistema (1.34) satisfaz a Definição 1.3.1 então por (1.38) temos  $\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} > 0$ . Portanto, a função  $\theta = \theta(x, y, \alpha)$  é crescente em relação a variável  $\alpha$ . Nesse caso, dados quaisquer parâmetros  $\alpha_1, \alpha_2$  com  $\alpha_1 < \alpha_2$  temos  $\theta(x, y, \alpha_1) < \theta(x, y, \alpha_2)$ . Logo, por (1.37) obtemos

$$\arctan \left( \frac{Q(x, y, \alpha_1)}{P(x, y, \alpha_1)} \right) < \arctan \left( \frac{Q(x, y, \alpha_2)}{P(x, y, \alpha_2)} \right).$$

Usando que a função arctangente é crescente, segue que

$$\frac{Q(x, y, \alpha_1)}{P(x, y, \alpha_1)} < \frac{Q(x, y, \alpha_2)}{P(x, y, \alpha_2)}.$$

Ao multiplicar esta última desigualdade por  $P(x, y, \alpha_1)P(x, y, \alpha_2)$  temos dois casos:

- Se  $P(x, y, \alpha_1)P(x, y, \alpha_2) > 0$  então

$$P(x, y, \alpha_2)Q(x, y, \alpha_1) < P(x, y, \alpha_1)Q(x, y, \alpha_2),$$

o que implica

$$\begin{vmatrix} P(x, y, \alpha_1) & Q(x, y, \alpha_1) \\ P(x, y, \alpha_2) & Q(x, y, \alpha_2) \end{vmatrix} > 0.$$

- Se  $P(x, y, \alpha_1)P(x, y, \alpha_2) < 0$  então

$$P(x, y, \alpha_2)Q(x, y, \alpha_1) > P(x, y, \alpha_1)Q(x, y, \alpha_2),$$

o que implica

$$\begin{vmatrix} P(x, y, \alpha_1) & Q(x, y, \alpha_1) \\ P(x, y, \alpha_2) & Q(x, y, \alpha_2) \end{vmatrix} < 0.$$

Ou seja, toda família de campos de vetores que satisfaz a Definição 1.3.1, também satisfaz a Definição 1.3.2. A recíproca porém não é verdadeira, conforme mostra o exemplo à seguir.

**Exemplo 1.3.1** Consideramos o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha y, \quad \frac{dy}{dt} = \alpha x - \alpha y f(\alpha x), \quad (1.40)$$

onde  $0 < \alpha < \infty$  e  $f$  é  $C^1$  monótona crescente conforme  $|x|$  aumenta. Temos que a origem é o único ponto singular do sistema. Suponhamos que  $\alpha_1 < \alpha_2$  com  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \infty)$ . Pela condição (1.39) temos que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} P(x, y, \alpha_1) & Q(x, y, \alpha_1) \\ P(x, y, \alpha_2) & Q(x, y, \alpha_2) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -\alpha_1 y & \alpha_1 x - \alpha_1 y f(\alpha_1 x) \\ -\alpha_2 y & \alpha_2 x - \alpha_2 y f(\alpha_2 x) \end{vmatrix} \\ &= \alpha_1 \alpha_2 y^2 [f(\alpha_2 x) - f(\alpha_1 x)] \geq 0. \end{aligned}$$

Assim, segue que o sistema (1.40) forma uma família de campos de vetores rodados generalizados. Porém, não é uma família completa de campos de vetores rodados, pois dado  $0 < \alpha \leq T$  temos

$$P(x, y, \alpha + T) = -(\alpha + T)y = -\alpha y - Ty \neq -\alpha y = -P(x, y, \alpha).$$

Na sequência, apresentamos alguns resultados importantes sobre bifurcação de ciclos limites em campos de vetores rodados generalizados, e que também se aplicam naturalmente às famílias completas de campos de vetores rodados. O próximo teorema estabelece uma relação entre as órbitas periódicas de dois sistemas distintos. Na demonstração desse teorema utilizamos o seguinte lema.

**Lema 1.3.1** Consideramos o sistema

$$\frac{dx}{dt} = X_i(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y_i(x, y), \quad (1.41)$$

onde  $X_i$  e  $Y_i$  com  $i = 1, 2$  são funções contínuas num aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , e satisfazem as condições de unicidade de soluções. Suponhamos que para  $(x, y) \in \Omega$

$$\begin{vmatrix} X_1(x, y) & Y_1(x, y) \\ X_2(x, y) & Y_2(x, y) \end{vmatrix}$$

não muda de sinal. Então as órbitas fechadas de  $(1.41)_1$  e  $(1.41)_2$  ou coincidem ou não se cruzam.

**Demonstração:** Veja [18], página 207.

**Teorema 1.3.1** *Suponhamos que (1.34) são campos de vetores rodados generalizados. Então para parâmetros distintos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , as órbitas periódicas dos sistemas  $(1.34)_{\alpha_1}$  e  $(1.34)_{\alpha_2}$  não se interceptam.*

**Demonstração:** Sejam  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . Pela definição de campos de vetores rodados generalizados temos que

$$\begin{vmatrix} P(x, y, \alpha_1) & Q(x, y, \alpha_1) \\ P(x, y, \alpha_2) & Q(x, y, \alpha_2) \end{vmatrix}$$

nunca muda de sinal. Pelo Lema 1.3.1, as órbitas fechadas de  $(1.34)_{\alpha_1}$  e  $(1.34)_{\alpha_2}$  ou coincidem ou não se interceptam entre si. O determinante acima não é identicamente nulo ao longo de uma órbita fechada inteira de  $(1.34)_{\alpha_i}$  para  $i = 1, 2$ . Portanto as órbitas fechadas de  $(1.34)_{\alpha_1}$  e  $(1.34)_{\alpha_2}$  não coincidem, o que completa a demonstração do teorema. ■

Por último, apresentamos duas propriedades em relação a mudança nos ciclos limites conforme o parâmetro  $\alpha$  varia no sistema (1.34). As demonstrações de tais propriedades e outros detalhes podem ser encontrados em [16].

**Propriedades 1.3.1** *Consideramos  $(P(x, y, \alpha), Q(x, y, \alpha))$  um campo de vetores rodados generalizado.*

- (i) *Seja  $\gamma_{\alpha_0}$  um ciclo limite estável ou instável do sistema  $(1.34)_{\alpha_0}$ . Segue que, conforme o parâmetro muda monotonicamente, o ciclo limite  $\gamma_{\alpha_0}$  não desaparece, ele se expande ou se contrai monotonicamente. Quando o campo de vetores rodado generalizado satisfaz a condição (1.39) com o determinante  $\geq 0$ , a evolução de um ciclo limite  $\gamma_\alpha$  conforme  $\alpha$  aumenta é dada pela Tabela 1.1.*
- (ii) *Seja  $\gamma_{\alpha_0}$  um ciclo limite semi-estável. Quando o parâmetro varia, o ciclo limite  $\gamma_{\alpha_0}$  se bifurca em pelo menos um ciclo limite estável e um instável. Além disso, tais ciclos estão em lados distintos de  $\gamma_{\alpha_0}$ , um no interior e outro no exterior. Quando o parâmetro varia na direção oposta o ciclo limite semi-estável  $\gamma_{\alpha_0}$  desaparece. As possíveis mudanças de um ciclo limite  $\gamma_\alpha$ , de acordo com a direção de seu movimento quando o parâmetro varia, é dada pela Tabela 1.2.*

Direção	Anti-horário	Anti-horário	Horário	Horário
Estabilidade	Estável	Instável	Estável	Instável
Evolução	Contraí	Expande	Expande	Contraí

Tabela 1.1: Comportamento do ciclo limite  $\gamma_\alpha$  conforme  $\alpha$  varia.

Direção	Anti-horário	Anti-horário	Horário	Horário
Estabilidade	Externamente estável, internamente instável	Externamente instável, internamente estável	Externamente estável, internamente instável	Externamente instável, internamente estável
$\alpha$ aumenta	Desaparece	Divide em dois ou mais ciclos	Divide em dois ou mais ciclos	Desaparece
$\alpha$ diminui	Divide em dois ou mais ciclos	Desaparece	Desaparece	Divide em dois ou mais ciclos

Tabela 1.2: Comportamento do ciclo limite semi-estável  $\gamma_\alpha$  conforme  $\alpha$  varia.

## 1.4 Função de Bessel do primeiro tipo

Funções de Bessel são de grande importância na física matemática e aparecem em uma ampla variedade de problemas físicos. Exemplos que envolvem tais funções são: problemas em eletricidade, hidrodinâmica, elasticidade, propagação de ondas, etc. A função de Bessel é usualmente definida como uma solução particular  $y = y(z)$  da equação

$$z^2 \ddot{y} + z \dot{y} + (z^2 - n^2)y = 0, \quad (1.42)$$

com  $n \in \mathbb{Z}$ . Tal equação é chamada *equação de Bessel de ordem  $n$* ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Denominamos por *função de Bessel do primeiro tipo de ordem  $n$* , e denotamos por  $J_n(z)$ , a solução de (1.42) representada pela série

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+n}}{k!(n+k)! 2^{2k+n}}. \quad (1.43)$$

Para mais detalhes sobre a obtenção de (1.43), veja [13] página 186. A função de Bessel do primeiro tipo satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$
- (ii)  $\frac{d}{dz}[z^n J_n(z)] = z^n J_{n-1}(z)$
- (iii)  $J'_n(z) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)]$

Por outro lado, a expressão de  $J_n(z)$  pode ser representada também na forma de integral, veja [7] página 912, dada por

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \operatorname{sen} \theta) d\theta, \quad (1.44)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Os zeros das funções de Bessel também tem sido bastante investigados, devido as várias classes de problemas os quais estão associados. Um exemplo destes problemas envolvendo tais zeros será visto na Seção 2.1.

**Proposição 1.4.1** Para todo  $n \geq 0$ ,  $J_n(z)$  tem um número infinito de zeros na reta positiva.

**Demonstração:** Veja [13], página 187.

Estes zeros são calculados numericamente e tabulados, porém é possível obter uma interpretação geométrica da localização destes valores. Em particular, analisamos na sequência a localização geométrica dos zeros da função de Bessel do primeiro tipo de ordem um,  $J_1(z)$ . Em 1908, C. Moore provou em [11] que

$$\text{sign}[J_1(z)] = (-1)^n, \quad (1.45)$$

para  $z \in [(n + \frac{1}{2})\pi, (n + 1)\pi]$ . Assim, segue de (1.44) e (1.45) que  $J_1(0) = 0$  e a localização dos zeros de  $J_1(z)$  é observada na Figura 1.7. Mais precisamente, o gráfico da função  $J_1(z)$  é dado pela Figura 1.8.

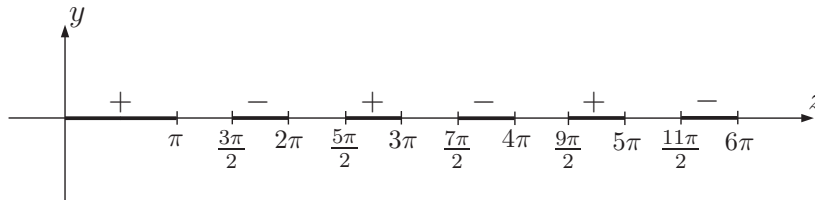


Figura 1.7: Representação geométrica do sinal da função  $J_1(z)$ .

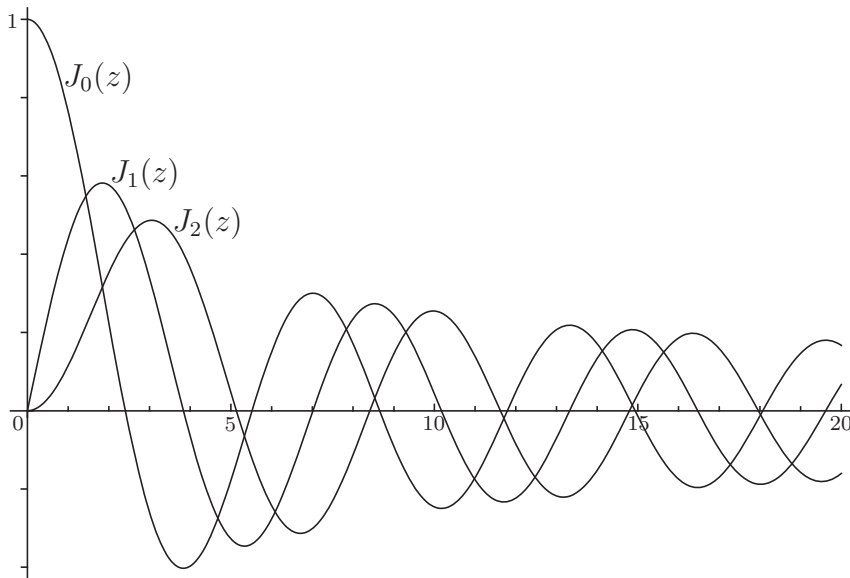


Figura 1.8: Gráficos das funções  $J_0(z)$ ,  $J_1(z)$  e  $J_2(z)$ .

Particularmente, é possível verificar que  $J_1(z)$  possui exatamente  $n$  zeros simples no intervalo  $[0, (n+1)\pi]$ . A simplicidade dos zeros da função  $J_1(z)$  segue do seguinte fato: Se  $z_0 \neq 0$  é um zero de  $J_1(z)$  então  $J_1(z_0) = 0$ . Para  $z_0$  ser simples devemos



ter  $J_1'(z_0) \neq 0$ . Suponhamos que  $J_1'(z_0) = 0$ . Sabemos que a função  $J_1(z)$  é solução da equação (1.42). Logo, segue que

$$J_1''(z_0) = 0. \quad (1.46)$$

Derivando a equação (1.42) e usando (1.46) obtemos que  $J_1'''(z_0) = 0$ . Prosseguindo com o mesmo raciocínio temos que  $J_1^{(4)}(z_0) = 0$ ,  $J_1^{(5)}(z_0) = 0$ ,  $\dots$ . Por outro lado segue de (1.43) segue que  $J_1(z)$  é analítica. Portanto, para todo  $z_0$  zero da função de Bessel temos  $J_1'(z_0) \neq 0$ , ou seja, todos os zeros de  $J_1(z)$  são simples. O leitor interessado em uma leitura mais precisa e ampla, pode obter em [15] mais detalhes sobre as funções de Bessel, bem como suas particularidades, propriedades e a obtenção das expressões (1.43) e (1.44) apresentadas acima.

Por último apresentamos uma tabela com os dez primeiros zeros da função de Bessel do primeiro tipo de ordem um. Por meio do software *Mathematica*<sup>2</sup> e usando a propriedade (iii) da função  $J_n(z)$  é possível obter tais valores.

$k$	Zeros $z_k$ de $J_1(z)$	$J_1'(z_k)$
1	3.831706	-0.402759
2	7.015588	0.300115
3	10.173468	-0.249705
4	13.323692	0.218359
5	16.470630	-0.196465
6	19.615859	0.180063
7	22.760085	-0.167184
8	25.903672	0.156725
9	29.046829	-0.148011
10	32.189680	0.140606

Tabela 1.3: Os dez primeiros zeros simples da função  $J_1(z)$ .

## 1.5 Regra de Leibnitz

Sejam  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a, b \in \mathbb{R}$  constantes. Consideramos a integral como função de um parâmetro  $t \in \mathbb{R}$

$$I(t) = \int_a^b f(x, t) dx.$$

A derivada de  $I(t)$  é baseada no seguinte resultado.

<sup>2</sup>Para obter os zeros da função de Bessel, basta utilizar o comando “N[BesselJZero[n, k], m]”, onde  $n$  é a ordem da função,  $k$  é o seu  $k$ -ésimo zero e  $m$  é o número de algarismo em que será apresentado o valor. Os valores de  $J_n'(z)$  são dados por “ $\frac{1}{2}(\text{BesselJ}[n-1, z] - \text{BesselJ}[n+1, z])$ ” e o gráfico de  $J_n(z)$  pode ser obtido usando “Plot[BesselJ[n, z], {z, z1, z2}”.

**Proposição 1.5.1 (Regra de Leibnitz)** *Seja  $f(x, t)$  uma função real definida num retângulo  $R = [a, b] \times [c, d] \in \mathbb{R}^2$ , integrável em  $x$  para cada valor de  $t$  e com  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$  contínua em  $x, t \in \mathbb{R}$ . Consideramos a função integral*

$$I(t) = \int_a^b f(x, t) dx.$$

A derivada de  $I$  em relação a  $t$  é dada por

$$I'(t) = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx.$$

Observamos que no enunciado acima os limites de integração são constantes. No caso em que os limites são funções  $u = u(t)$  e  $v = v(t)$

$$I(t) = L(u, v, t) = \int_{u(t)}^{v(t)} f(x, t) dx, \quad (1.47)$$

segue pela regra da cadeia

$$I'(t) = \frac{dI}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial L}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial L}{\partial u} \frac{du}{dt}. \quad (1.48)$$

Como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\frac{d}{dw} \int_a^w f(z) dz = f(w) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dw} \int_w^b f(z) dz = -\frac{d}{dw} \int_b^w f(z) dz = -f(w). \quad (1.49)$$

Portanto, segue de (1.48) e (1.49) que

$$\begin{aligned} I'(t) &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_u^v f(x, t) dx \right) \frac{dt}{dt} + \left( \frac{\partial}{\partial v} \int_u^v f(x, t) dx \right) \frac{dv(t)}{dt} + \left( \frac{\partial}{\partial u} \int_u^v f(x, t) dx \right) \frac{du(t)}{dt} \\ &= \int_{u(t)}^{v(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(v(t), t)v'(t) - f(u(t), t)u'(t). \end{aligned} \quad (1.50)$$

## Capítulo 2

# Uma quota inferior para o número de ciclos limites

Um dos principais problemas no estudo qualitativo de equações diferenciais planares é saber o número e a distribuição de seus ciclos limites. O principal sistema abordado não somente neste capítulo mas no trabalho todo é o sistema diferencial linear por partes

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \phi(x) \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

onde  $\varepsilon \neq 0$  e  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função periódica linear por partes ímpar e de período 4, satisfazendo

$$\phi(x) = \begin{cases} x & , \text{ se } x \in [0, 1], \\ -x + 2 & , \text{ se } x \in [1, 2]. \end{cases} \quad (2.2)$$

Na sequência do nosso estudo, consideramos  $\phi$  definida em toda a reta, considerando sua periodicidade 4 e o fato de ser ímpar. O gráfico da função  $\phi$  é então dado pela Figura 2.1.

Embora no Capítulo 3 é verificado que o sistema (2.1) pode ter exatamente tantos ciclos limites quanto quisermos, utilizando a Teoria do Averaging é possível obter uma quota inferior para o número destes ciclos limites na faixa  $|x| \leq 2n + 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Neste capítulo fazemos uma prova analítica, apresentada inicialmente por Llibre e Ponce em [9], de que o sistema (2.1) possui pelo menos  $n$  ciclos limites na faixa  $|x| \leq 2n + 2$ . Mais especificamente, é feita a prova do seguinte resultado

**Teorema 2.0.1** *Seja  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por (2.2). Então para um inteiro positivo arbitrário  $n$ , o sistema diferencial linear por partes (2.1) tem pelo menos  $n$  ciclos limites hiperbólicos na faixa  $|x| \leq 2n + 2$ , para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeno.*

Notamos que o sistema (2.1) é o centro linear ( $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = x$ ) quando  $\varepsilon = 0$ . Além disso, o sistema é invariante sob a simetria  $(x, y, t, \varepsilon) \mapsto (-x, y, -t, -\varepsilon)$ . Usando esta simetria e o Teorema 2.0.1 segue o resultado a seguir, que nos mostra uma bifurcação pouco usual de infinitos ciclos limites para o sistema (2.1) em  $\varepsilon = 0$ .

**Corolário 2.0.1** *Todos os ciclos limites do sistema (2.1) para  $\varepsilon < 0$  suficientemente pequeno, se tornam órbitas periódicas do centro linear para  $\varepsilon = 0$ , e novamente passam a ciclos limites para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, invertendo a estabilidade com a mudança do sinal de  $\varepsilon$ .*

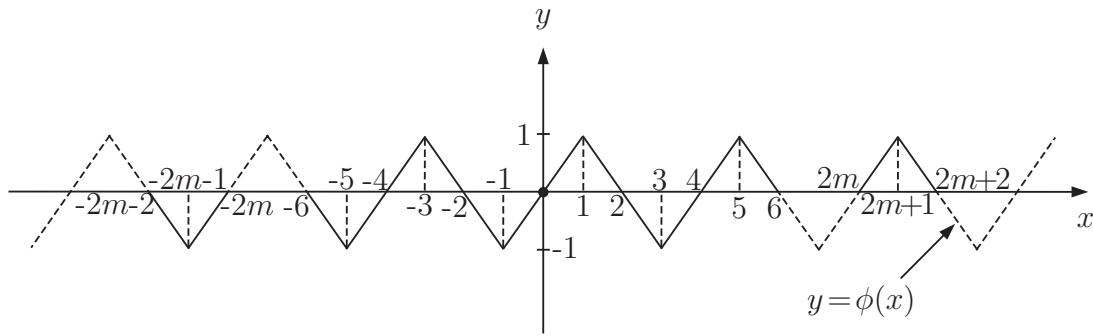


Figura 2.1: Gráfico parcial da função linear por partes periódica  $\phi$ .

## 2.1 Aplicação do Método do Averaging com

$$\phi(x) = \text{sen } x$$

Reescrevemos o sistema diferencial linear por partes (2.1) como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - \varepsilon\phi(x), \\ \dot{y} &= x.\end{aligned}\tag{2.3}$$

A demonstração do Teorema 2.0.1 se baseia na aplicação do *Método do Averaging*. Como exemplo da aplicação de tal método, antes de realizar a prova do Teorema 2.0.1, provamos o caso onde o sistema em questão é um sistema diferencial não-linear qualitativamente semelhante ao sistema (2.3).

**Proposição 2.1.1** *Seja o sistema diferencial analítico*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - \varepsilon \text{sen } x, \\ \dot{y} &= x.\end{aligned}\tag{2.4}$$

*Para um número inteiro positivo arbitrário  $n$ , tal sistema possui pelo menos  $n$  ciclos limites hiperbólicos na faixa  $|x| \leq (n+1)\pi$  para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeno.*

**Demonstração:** Tomamos um disco fechado  $D$  centrado na origem e de raio  $R > (n+1)\pi$ . Passando o sistema (2.4) para coordenadas polares  $(r, \theta)$  dadas por  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \text{sen } \theta$ , obtemos

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -\varepsilon \cos \theta \text{sen}(r \cos \theta), \\ \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon \frac{\text{sen } \theta \text{sen}(r \cos \theta)}{r}.\end{aligned}$$

Denotando por

$$T(\varepsilon) = \frac{dr}{d\theta} = \frac{-\varepsilon r \cos \theta \text{sen}(r \cos \theta)}{r + \varepsilon \text{sen } \theta \text{sen}(r \cos \theta)},$$

a expansão em série de Taylor em torno de  $\varepsilon = 0$  é dada por

$$\begin{aligned} T(\varepsilon) &= T(0) + \frac{dT(0)}{d\varepsilon} \varepsilon + \frac{d^2T(0)}{d\varepsilon^2} \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \\ &= -\varepsilon \cos \theta \text{sen}(r \cos \theta) + \frac{\varepsilon^2 \cos \theta \text{sen } \theta \text{sen}^2(r \cos \theta)}{r} + \dots \end{aligned}$$

Assim, o sistema obtido em coordenadas polares é equivalente à equação diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon \cos \theta \text{sen}(r \cos \theta) + \varepsilon^2 g(\theta, r, \varepsilon). \quad (2.5)$$

Observamos que o sistema (2.5) com  $f(\theta, r) = \cos \theta \text{sen}(r \cos \theta)$  satisfaz todas as hipóteses do Teorema 1.2.1. Além disso, visto que a função  $f$  é  $2\pi$ -periódica, o sistema médio de (2.5) é definido por

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon F(r),$$

com

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \text{sen}(r \cos \theta) d\theta \\ &\stackrel{(\theta \mapsto \theta+\pi)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \text{sen}(r \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} \cos \theta \text{sen}(r \cos \theta) d\theta + \int_{-\pi}^0 \cos \theta \text{sen}(r \cos \theta) d\theta \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta \text{sen}(r \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \text{sen}(r \cos \theta) d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos \theta \text{sen}(r \cos \theta) d\theta \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \text{sen } \theta \text{sen}(r \text{sen } \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Observamos que a última igualdade de (2.6) é obtida pelas mudanças de variável  $\theta \mapsto \pi/2 + \theta$  e  $\theta \mapsto \pi/2 - \theta$  nas integrais  $\int_{\pi/2}^{\pi}$  e  $\int_0^{\pi/2}$ , respectivamente. Notamos que  $F(r)$  coincide com a função de Bessel do primeiro tipo  $J_1(r)$ . De fato, por (1.44)

$$\begin{aligned} J_1(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\theta - r \text{sen } \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos \theta \cos(r \text{sen } \theta) + \text{sen } \theta \text{sen}(r \text{sen } \theta)] d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen } \theta \text{sen}(r \text{sen } \theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \text{sen } \theta \text{sen}(r \text{sen } \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (2.7)$$

e segue de (2.6) e (2.7) que a equação média associada à (2.5) é

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon J_1(r). \quad (2.8)$$

Vimos na Seção 1.4 que a função de Bessel  $J_1(r)$  possui exatamente  $n$  zeros simples no intervalo  $[0, (n+1)\pi]$ , pelo Teorema 1.2.1 obtemos que para cada zero da função  $J_1(r)$  existe um ciclo limite do sistema (2.4), ou seja, o sistema (2.4) possui pelo menos  $n$  ciclos limites hiperbólicos em  $D$  para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

O caso  $\varepsilon < 0$  suficientemente pequeno segue usando o fato que o sistema (2.4) é invariante sob a simetria  $(x, y, t, \varepsilon) \mapsto (-x, y, -t, -\varepsilon)$ . Com isso, completamos a prova do teorema. ■

Notamos que se omitimos a hiperbolicidade dos ciclos limites na Proposição 2.1.1, então a mesma pode ser considerada como um caso particular do seguinte resultado provado por Z. Zhang em [17].

**Teorema 2.1.1** *Para  $\varepsilon \neq 0$ . O sistema diferencial (2.4) tem exatamente  $n$  ciclos limites na faixa  $|x| \leq (n+1)\pi$  para  $n = 1, 2, \dots$ . Além disso, os ciclos limites alternam entre estáveis e instáveis.*

Na seção a seguir demonstramos o Teorema 2.0.1 utilizando um raciocínio análogo à demonstração da Proposição 2.1.1.

## 2.2 Demonstração do Teorema 2.0.1

Seja  $D$  um disco fechado centrado na origem e de raio  $R > 2n + 2$ . Consideramos o sistema (2.3) em coordenadas polares e obtemos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon \cos \theta \phi(r \cos \theta), \\ \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon \frac{\sin \theta \phi(r \cos \theta)}{r}. \end{aligned}$$

Tomando  $\theta$  a variável independente temos

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon \cos \theta \phi(r \cos \theta) + \varepsilon^2 g(\theta, r, \varepsilon). \quad (2.9)$$

Observamos que as funções  $f(\theta, r) = \cos \theta \phi(r \cos \theta)$  e  $g(\theta, r, \varepsilon)$  satisfazem as hipóteses do Teorema 1.2.1 exceto quando  $r \cos \theta$  assume um valor inteiro ímpar, pois notamos que em tais valores o campo não é diferenciável. Porém, vemos na demonstração do Teorema 1.2.1 que as descontinuidades na derivada de  $f$  e  $g$  nestes valores inteiros isolados não são um obstáculo para que o teorema continue a ser válido para o sistema (2.9)(veja apêndice). Calculamos agora o sistema médio de

(2.9). Como  $f$  é  $2\pi$ -periódica e  $\phi(x)$  é uma função ímpar, a função média associada à equação diferencial (2.9) é dada por:

$$\begin{aligned}
F(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \phi(r \cos \theta) d\theta \\
&\stackrel{(\theta \mapsto \theta+\pi)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \phi(r \cos \theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} \cos \theta \phi(r \cos \theta) d\theta + \int_{-\pi}^0 \cos \theta \phi(r \cos \theta) d\theta \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta \phi(r \cos \theta) d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \phi(r \cos \theta) d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos \theta \phi(r \cos \theta) d\theta \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta \phi(r \operatorname{sen} \theta) d\theta. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Notamos que a última igualdade de (2.10) é obtida pelas mudanças de variável  $\theta \mapsto \pi/2 + \theta$  e  $\theta \mapsto \pi/2 - \theta$  nas integrais  $\int_{\pi/2}^{\pi}$  e  $\int_0^{\pi/2}$ , respectivamente. Observamos que  $F(r)$  é  $C^1$  mas não é  $C^2$ . Suponhamos, inicialmente, que  $0 \leq r \leq 1$ . Então, para  $\theta \in [0, \pi/2]$  temos  $0 \leq r \operatorname{sen} \theta \leq 1$  e como  $\phi(x) = x$  para  $x \in [0, 1]$ , segue de (2.10) que

$$F(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} r \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \frac{2r}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{r}{2}. \tag{2.11}$$

Consideramos agora  $2m - 1 \leq r \leq 2m + 1$  com  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Para  $k = 1, 2, \dots, 2m + 1$ , seja

$$\beta_k = \beta_k(r) = \frac{k}{r}. \tag{2.12}$$

Consequentemente, sempre que  $\beta_k(r) \leq 1$  definimos por

$$\alpha_k = \alpha_k(r) = \operatorname{arcsen} \beta_k(r). \tag{2.13}$$

Tomamos  $l = 1, 2, \dots, m - 1$  e notamos que

$$\phi(x) = (-1)^l (x - 2l) \quad \text{para } x \in [2l - 1, 2l + 1],$$

sendo positiva(negativa) para  $x \in (2l - 2, 2l)$  quando  $l$  é ímpar(par), veja Figura 2.1.

Com isso, temos

$$\phi(r \operatorname{sen} \theta) = \begin{cases} r \operatorname{sen} \theta & , \text{ para } \theta \in [0, \alpha_1], \\ (-1)^l (r \operatorname{sen} \theta - 2l) & , \text{ para } \theta \in [\alpha_{2l-1}, \alpha_{2l+1}], \\ (-1)^m (r \operatorname{sen} \theta - 2m) & , \text{ para } \theta \in [\alpha_{2m-1}, \pi/2]. \end{cases} \tag{2.14}$$

Segue de (2.10), (2.12) e (2.14) que

$$\begin{aligned}
F(r) &= \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\alpha_1} r \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \int_{\alpha_{2l-1}}^{\alpha_{2l+1}} \operatorname{sen} \theta (r \operatorname{sen} \theta - 2l) \, d\theta + \right. \\
&\quad \left. (-1)^m \int_{\alpha_{2m-1}}^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta (r \operatorname{sen} \theta - 2m) \, d\theta \right) \\
&= \frac{r}{\pi} \left( \int_0^{\alpha_1} 2 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \int_{\alpha_{2l-1}}^{\alpha_{2l+1}} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2l}) \, d\theta + \right. \\
&\quad \left. (-1)^m \int_{\alpha_{2m-1}}^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2m}) \, d\theta \right). \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Calculamos as integrais obtidas em (2.15). Na primeira integral, usando (2.12) e (2.13) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\alpha_1} 2 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta &= \int_0^{\alpha_1} (1 - \cos(2\theta)) \, d\theta \\
&= \alpha_1 - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha_1)}{2} \\
&= \alpha_1 - \frac{\cos \alpha_1}{r} \\
&= \alpha_1 - \beta_1 \sqrt{1 - \beta_1^2}. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Reescrevemos a integral do somatório em (2.15) como

$$\int_{\alpha_{2l-1}}^{\alpha_{2l+1}} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2l}) \, d\theta = \int_{\alpha_{2l-1}}^{\alpha_{2l+1}} 2 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta - \int_{\alpha_{2l-1}}^{\alpha_{2l+1}} 2\beta_{2l} \operatorname{sen} \theta \, d\theta. \tag{2.17}$$

Denotamos por

$$\mathcal{A} = \int_{\alpha_{2l-1}}^{\alpha_{2l+1}} 2 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \int_{\alpha_{2l-1}}^{\alpha_{2l+1}} 2\beta_{2l} \operatorname{sen} \theta \, d\theta.$$

Calculamos primeiro  $\mathcal{A}$ . Assim como feito em (2.16), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{\alpha_{2l-1}}^{\alpha_{2l+1}} (1 - \cos(2\theta)) \, d\theta \\
&= (\alpha_{2l+1} - \alpha_{2l-1}) - \left( \frac{\operatorname{sen}(2\alpha_{2l+1})}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha_{2l-1})}{2} \right) \\
&= (\alpha_{2l+1} - \alpha_{2l-1}) - \beta_{2l+1} \sqrt{1 - \beta_{2l+1}^2} + \beta_{2l-1} \sqrt{1 - \beta_{2l-1}^2}. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Continuamos com o cálculo de  $\mathcal{B}$ . Temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= 2\beta_{2l} (-\cos(\alpha_{2l+1}) + \cos(\alpha_{2l-1})) \\
&= 2\beta_{2l} \left( -\sqrt{1 - \beta_{2l+1}^2} + \sqrt{1 - \beta_{2l-1}^2} \right). \tag{2.19}
\end{aligned}$$



Logo, por (2.18) e (2.19) a integral de (2.17) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_{2l-1}}^{\alpha_{2l+1}} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2l}) d\theta &= \alpha_{2l+1} + (2\beta_{2l} - \beta_{2l+1})\sqrt{1 - \beta_{2l+1}^2} - \\
&\quad \alpha_{2l-1} - (2\beta_{2l} - \beta_{2l-1})\sqrt{1 - \beta_{2l-1}^2} \\
&\stackrel{(2.12)}{=} \alpha_{2l+1} + \beta_{2l-1}\sqrt{1 - \beta_{2l+1}^2} - \\
&\quad \alpha_{2l-1} - \beta_{2l+1}\sqrt{1 - \beta_{2l-1}^2}. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Reescrevemos a última integral de (2.15) como

$$\int_{\alpha_{2m-1}}^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2m}) d\theta = \int_{\alpha_{2m-1}}^{\pi/2} 2 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta - \int_{\alpha_{2m-1}}^{\pi/2} 2\beta_{2m} \operatorname{sen} \theta d\theta, \tag{2.21}$$

e de maneira análoga às equações (2.18) e (2.19) obtemos

$$\int_{\alpha_{2m-1}}^{\pi/2} 2 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{2m-1}\right) + \beta_{2m-1}\sqrt{1 - \beta_{2m-1}^2} \tag{2.22}$$

e

$$\int_{\alpha_{2m-1}}^{\pi/2} 2\beta_{2m} \operatorname{sen} \theta d\theta = 2\beta_{2m}\sqrt{1 - \beta_{2m-1}^2}. \tag{2.23}$$

Daí, por (2.22) e (2.23) a integral em (2.21) é dada por

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_{2m-1}}^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2m}) d\theta &= \frac{\pi}{2} - \alpha_{2m-1} - (2\beta_{2m} - \beta_{2m-1})\sqrt{1 - \beta_{2m-1}^2} \\
&\stackrel{(2.12)}{=} \frac{\pi}{2} - \alpha_{2m-1} - \beta_{2m+1}\sqrt{1 - \beta_{2m-1}^2}. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Utilizando (2.16), (2.20) e (2.24) reescrevemos o lado direito da igualdade (2.15) como

$$\begin{aligned}
F(r) &= \frac{r}{\pi} \left[ \alpha_1 - \beta_1\sqrt{1 - \beta_1^2} + \right. \\
&\quad \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \left( \alpha_{2l+1} + \beta_{2l-1}\sqrt{1 - \beta_{2l+1}^2} - \alpha_{2l-1} - \beta_{2l+1}\sqrt{1 - \beta_{2l-1}^2} \right) + \\
&\quad \left. (-1)^m \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_{2m-1} - \beta_{2m+1}\sqrt{1 - \beta_{2m-1}^2} \right) \right]. \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Para  $l = 1, 2, \dots, m - 1$  denotamos por

$$\begin{aligned}
\mu_l^* &= \alpha_{2l+1} + \beta_{2l-1}\sqrt{1 - \beta_{2l+1}^2}, & \mu_l^{**} &= -\alpha_{2l-1} - \beta_{2l+1}\sqrt{1 - \beta_{2l-1}^2}, \\
\mu_1 &= \alpha_1 - \beta_1\sqrt{1 - \beta_1^2}, & \mu_m &= -\alpha_{2m-1} - \beta_{2m+1}\sqrt{1 - \beta_{2m-1}^2}.
\end{aligned}$$

Assim, agrupando os pares de termos similares em (2.25) obtemos

$$\begin{aligned}
F(r) &= \frac{r}{\pi} \left[ \alpha_1 - \beta_1 \sqrt{1 - \beta_1^2} + \right. \\
&\quad \left. \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \left( \alpha_{2l+1} + \beta_{2l-1} \sqrt{1 - \beta_{2l+1}^2} - \alpha_{2l-1} - \beta_{2l+1} \sqrt{1 - \beta_{2l-1}^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. (-1)^m \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_{2m-1} - \beta_{2m+1} \sqrt{1 - \beta_{2m-1}^2} \right) \right] \\
&= \frac{r}{\pi} \left[ \mu_1 + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l (\mu_l^* + \mu_l^{**}) + (-1)^m \frac{\pi}{2} + (-1)^m \mu_m \right] \\
&= \frac{r}{\pi} \left[ (\mu_1 - \mu_1^{**}) + (-\mu_1^* + \mu_2^{**}) + (\mu_2^* - \mu_3^{**}) + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + ((-1)^{m-2} \mu_{m-2}^* + (-1)^{m-1} \mu_{m-1}^{**}) + \right. \\
&\quad \left. ((-1)^{m-1} \mu_{m-1}^* + (-1)^m \mu_m) + (-1)^m \frac{\pi}{2} \right] \\
&= \frac{r}{\pi} \left[ (\mu_1 - \mu_1^{**}) + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l (\mu_l^* - \mu_{l+1}^{**}) + (-1)^m \frac{\pi}{2} \right] \\
&= \frac{r}{\pi} \left[ 2\alpha_1 + (\beta_3 - \beta_1) \sqrt{1 - \beta_1^2} + \right. \\
&\quad \left. \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \left( 2\alpha_{2l+1} + (\beta_{2l+3} + \beta_{2l-1}) \sqrt{1 - \beta_{2l+1}^2} \right) + (-1)^m \frac{\pi}{2} \right] \\
&\stackrel{(2.12)}{=} \frac{r}{\pi} \left[ 2\alpha_1 + 2\beta_1 \sqrt{1 - \beta_1^2} + \right. \\
&\quad \left. \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \left( 2\alpha_{2l+1} + 2\beta_{2l+1} \sqrt{1 - \beta_{2l+1}^2} \right) + (-1)^m \frac{\pi}{2} \right]. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Consideramos a função auxiliar

$$g(x) = \arcsen x + x\sqrt{1 - x^2},$$

para  $x \in [0, 1]$ . Quando  $2m - 1 \leq r \leq 2m + 1$  com  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ , usamos a função  $g$  e obtemos de (2.26) uma expressão mais concisa para  $F(r)$  dada por

$$F(r) = \frac{r}{\pi} \left[ 2g\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l g\left(\frac{2l+1}{r}\right) + (-1)^m g(1) \right], \tag{2.27}$$

uma vez que  $g(1) = \pi/2$ .

Numericamente, temos evidências de que  $F$  possui um zero simples em cada um dos intervalos  $[2m - 1, 2m + 1]$  para  $m = 1, 2, \dots, n$ . Além disso, estes zeros parecem ter propriedades semelhantes aos zeros da função de Bessel  $J_1$ , veja Tabela 2.1 juntamente com a Tabela 1.3.

$m$	Zeros $r^*$ de $F$	$F'(r^*)$
1	2.475414	-0.470516
2	4.503811	0.356924
3	6.514715	-0.299112
4	8.520468	0.262579
5	10.524033	-0.236825
6	12.526457	0.217415
7	14.528211	-0.202109
8	16.529540	0.189638
9	18.530581	-0.179224
10	20.531419	0.170356

Tabela 2.1: Os dez primeiros zeros simples de  $F(r)$  com  $2m - 1 < r < 2m + 1$ .

Para mostrar rigorosamente que todos os zeros da função  $F(r)$  são simples, analisamos cada região triangular formada pelo gráfico do integrando da  $F$  em (2.10), veja Figura 2.2.

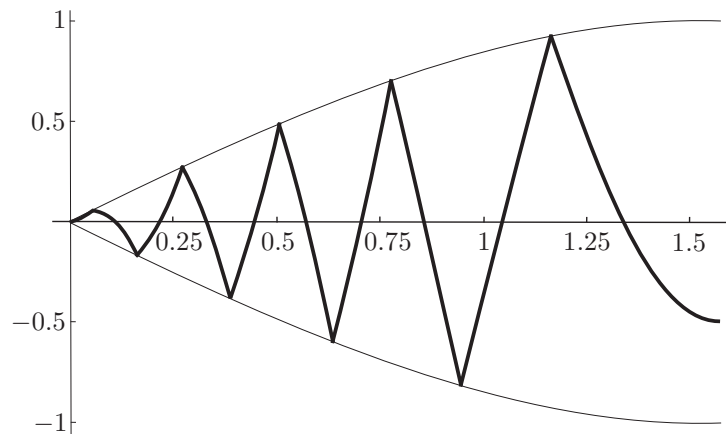


Figura 2.2: Gráfico do integrando em (2.10) para  $r = 18.5$ , tal que  $2m - 1 < r < 2m + 1$  com  $m = 9$ .

Assumimos novamente que  $2m - 1 \leq r \leq 2m + 1$  com  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Para  $l = 1, 2, \dots, m - 1$ , denotamos

$$\begin{aligned}\eta_i^* &= \int_{\alpha_{2l-1}}^{\alpha_{2l}} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2l}) d\theta, & \eta_i^{**} &= \int_{\alpha_{2l}}^{\alpha_{2l+1}} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2l}) d\theta, \\ \eta_1 &= \int_0^{\alpha_1} 2 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta, & \eta_m &= \int_{\alpha_{2m-1}}^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2m}) d\theta.\end{aligned}$$

Por (2.15) reescrevemos  $F(r)$  da seguinte maneira

$$\begin{aligned}F(r) &= \frac{r}{\pi} \left[ \int_0^{\alpha_1} 2 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \left( \int_{\alpha_{2l-1}}^{\alpha_{2l}} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2l}) d\theta + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int_{\alpha_{2l}}^{\alpha_{2l+1}} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2l}) d\theta \right) + (-1)^m \int_{\alpha_{2m-1}}^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2m}) d\theta \right] \\ &= \frac{r}{\pi} \left[ \eta_1 + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l (\eta_l^* + \eta_l^{**}) + (-1)^m \eta_m \right] \\ &= \frac{r}{\pi} \left[ (\eta_1 - \eta_1^*) + (-\eta_1^{**} + \eta_2^*) + (\eta_2^{**} - \eta_3^*) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + ((-1)^{m-2} \eta_{m-2}^{**} + (-1)^{m-1} \eta_{m-1}^*) + ((-1)^{m-1} \eta_{m-1}^{**} + (-1)^m \eta_m) \right] \\ &= \frac{r}{\pi} \left[ (\eta_1 - \eta_1^*) + \sum_{l=1}^{m-2} (-1)^l (\eta_l^{**} - \eta_{l+1}^*) + (-1)^{m-1} (\eta_{m-1}^{**} - \eta_m) \right] \\ &= \frac{r}{\pi} \left[ \left( \int_0^{\alpha_1} 2 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_2) d\theta \right) + \right. \\ &\quad \sum_{l=1}^{m-2} (-1)^l \left( \int_{\alpha_{2l}}^{\alpha_{2l+1}} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2l}) d\theta - \int_{\alpha_{2l+1}}^{\alpha_{2l+2}} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2l+2}) d\theta \right) + \\ &\quad \left. (-1)^{m-1} \left( \int_{\alpha_{2m-2}}^{\alpha_{2m-1}} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2m-2}) d\theta - \int_{\alpha_{2m-1}}^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2m}) d\theta \right) \right].\end{aligned}\tag{2.28}$$

Identificamos por

$$\begin{aligned}T_0(r) &= \int_0^{\alpha_1} 2 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_2) d\theta, \\ T_l(r) &= \int_{\alpha_{2l}}^{\alpha_{2l+1}} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2l}) d\theta - \int_{\alpha_{2l+1}}^{\alpha_{2l+2}} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2l+2}) d\theta, \\ T_{m-1}(r) &= \int_{\alpha_{2m-2}}^{\alpha_{2m-1}} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2m-2}) d\theta - \int_{\alpha_{2m-1}}^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \beta_{2m}) d\theta,\end{aligned}$$

onde  $T_{m-1}(r)$  corresponde à última região triangular (incompleta) se  $r < 2m$ , à última região triangular completa quando  $r = 2m$ , e à última região triangular completa mais uma região triangular incompleta no caso de  $2m < r < 2m + 1$  (este é o caso da Figura 2.2). Utilizamos a função auxiliar  $g$  e com raciocínio análogo ao utilizado no cálculo das integrais (2.16), (2.20) e (2.24), segue que  $T_0(r)$  é dada por

$$\begin{aligned} T_0(r) &= \alpha_1 - \beta_1 \sqrt{1 - \beta_1^2} - \left[ \alpha_2 + \beta_2 \sqrt{1 - \beta_2^2} - \alpha_1 - \beta_3 \sqrt{1 - \beta_1^2} \right] \\ &= 2\alpha_1 + 2\beta_1 \sqrt{1 - \beta_1^2} - \left( \alpha_2 + \beta_2 \sqrt{1 - \beta_2^2} \right) \\ &= 2g\left(\frac{1}{r}\right) - g\left(\frac{2}{r}\right). \end{aligned}$$

Para  $l = 1, 2, \dots, m - 2$ , a função  $T_l(r)$ , associada à  $(l + 1)$ -ésima região triangular da Figura 2.2, é igual a  $(-1)^l$  vezes

$$\begin{aligned} T_l(r) &= \left[ \alpha_{2l+1} + \beta_{2l-1} \sqrt{1 - \beta_{2l+1}^2} - \alpha_{2l} - \beta_{2l} \sqrt{1 - \beta_{2l}^2} \right] - \\ &\quad \left[ \alpha_{2l+2} + \beta_{2l+2} \sqrt{1 - \beta_{2l+2}^2} - \alpha_{2l+1} - \beta_{2l+3} \sqrt{1 - \beta_{2l+1}^2} \right]. \\ &= -\left( \alpha_{2l} + \beta_{2l} \sqrt{1 - \beta_{2l}^2} \right) + 2\left( \alpha_{2l+1} + \beta_{2l+1} \sqrt{1 - \beta_{2l+1}^2} \right) - \\ &\quad \left( \alpha_{2l+2} + \beta_{2l+2} \sqrt{1 - \beta_{2l+2}^2} \right) \\ &= -g\left(\frac{2l}{r}\right) + 2g\left(\frac{2l+1}{r}\right) - g\left(\frac{2l+2}{r}\right), \end{aligned}$$

e a última contribuição a considerar de (2.28) é igual à  $(-1)^{m-1}$  vezes

$$\begin{aligned} T_{m-1}(r) &= \left[ \alpha_{2m-1} + \beta_{2m-3} \sqrt{1 - \beta_{2m-1}^2} - \alpha_{2m-2} - \beta_{2m-2} \sqrt{1 - \beta_{2m-2}^2} \right] - \\ &\quad \left[ \frac{\pi}{2} - \alpha_{2m-1} - \beta_{2m+1} \sqrt{1 - \beta_{2m-1}^2} \right] \\ &= -\left( \alpha_{2m-2} + \beta_{2m-2} \sqrt{1 - \beta_{2m-2}^2} \right) + 2\left( \alpha_{2m-1} + \beta_{2m-1} \sqrt{1 - \beta_{2m-1}^2} \right) - \frac{\pi}{2} \\ &= -g\left(\frac{2m-2}{r}\right) + 2g\left(\frac{2m-1}{r}\right) - g(1). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Logo, de acordo com (2.28) temos

$$F(r) = \frac{r}{\pi} \left[ T_0(r) + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l T_l(r) \right], \tag{2.30}$$

que é equivalente à (2.27).

Consideramos a mudança de variável  $\theta \mapsto z = \sin \theta$  em (2.28) e introduzimos a função  $h : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h(z) = \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}}. \quad (2.31)$$

Como

$$d\theta = \frac{1}{\cos \theta} dz = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz, \quad (2.32)$$

usando (2.13) segue que

$$\begin{aligned} T_0(r) &= \int_0^{\beta_1} 2z^2 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz - \int_{\beta_1}^{\beta_2} 2z(z-\beta_2) \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz \\ &= \int_0^{\beta_1} zh(z) dz - \int_{\beta_1}^{\beta_2} (z-\beta_2)h(z) dz. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Da mesma forma obtemos

$$T_l(r) = \int_{\beta_{2l}}^{\beta_{2l+1}} (z-\beta_{2l})h(z) dz - \int_{\beta_{2l+1}}^{\beta_{2l+2}} (z-\beta_{2l+2})h(z) dz, \quad (2.34)$$

para  $l = 1, 2, \dots, m-2$ , e

$$T_{m-1}(r) = \int_{\beta_{2m-2}}^{\beta_{2m-1}} (z-\beta_{2m-2})h(z) dz - \int_{\beta_{2m-1}}^1 (z-\beta_{2m})h(z) dz. \quad (2.35)$$

Com as expressões de  $T_0(r)$ ,  $T_l(r)$  e  $T_{m-1}(r)$  dadas por (2.33), (2.34) e (2.35), respectivamente, obtemos o seguinte resultado que nos dá os zeros da  $F$ .

**Lema 2.2.1** *Para a função  $F$  dada em (2.10) e  $m = 1, 2, \dots, n$  valem as seguintes afirmações.*

- (a)  $\text{sign}[F(2m)] = (-1)^{m-1}$ .
- (b)  $\text{sign}[F(2m+1)] = (-1)^m$ .

Segue desse lema que  $F$  possui sinais opostos em  $2m$  e  $2m+1$ . Portanto existe  $r^* \in (2m, 2m+1)$  tal que  $F(r^*) = 0$ .

Na sequência, mostramos que  $r^*$  é o único zero de  $F$  em  $[2m-1, 2m+1]$  e que este zero é simples, isto é,  $F'(r^*) \neq 0$ . Inicialmente estudamos o sinal da primeira derivada da  $F$ . Sabemos por (2.11) que para  $0 \leq r \leq 1$  a derivada é constante, ou seja,  $F'(r) = 1/2$ . Consideramos  $2m-1 \leq r \leq 2m+1$  com  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$  e aplicamos a mudança de variável  $\theta \mapsto z = \sin \theta$  na equação (2.15). Usando (2.12), (2.13), (2.31) e (2.32) segue que

$$\begin{aligned}
F(r) &= \frac{r}{\pi} \left[ \int_0^{\beta_1} zh(z) dz + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \int_{\beta_{2l-1}}^{\beta_{2l+1}} (z - \beta_{2l})h(z) dz + \right. \\
&\quad \left. (-1)^m \int_{\beta_{2m-1}}^1 (z - \beta_{2m})h(z) dz \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\beta_1} rzh(z) dz + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \int_{\beta_{2l-1}}^{\beta_{2l+1}} (rz - 2l)h(z) dz + \right. \\
&\quad \left. (-1)^m \int_{\beta_{2m-1}}^1 (rz - 2m)h(z) dz \right]. \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Para calcular  $F'(r)$  aplicamos a regra de Leibnitz em cada integral da equação (2.36) e obtemos

$$\begin{aligned}
F'(r) &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\beta_1} zh(z) dz + \beta_1'(r)r\beta_1 h(\beta_1) + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \int_{\beta_{2l-1}}^{\beta_{2l+1}} zh(z) dz + \right. \\
&\quad \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l [\beta_{2l+1}'(r)(r\beta_{2l+1} - 2l)h(\beta_{2l+1})] - \\
&\quad \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l [\beta_{2l-1}'(r)(r\beta_{2l-1} - 2l)h(\beta_{2l-1})] + \\
&\quad \left. (-1)^m \left( \int_{\beta_{2m-1}}^1 zh(z) dz - \beta_{2m-1}'(r)(r\beta_{2m-1} - 2m)h(\beta_{2m-1}) \right) \right]. \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Por (2.12) temos que  $r\beta_k = k$  e a soma dos termos não-integrais em (2.37) se cancelam. Para  $0 \leq z < 1$ , definimos a função

$$u(z) = zh(z) = \frac{2z^2}{\sqrt{1-z^2}}, \tag{2.38}$$

e então a igualdade (2.37) pode ser reescrita por

$$F'(r) = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\beta_1} u(z) dz + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \int_{\beta_{2l-1}}^{\beta_{2l+1}} u(z) dz + (-1)^m \int_{\beta_{2m-1}}^1 u(z) dz \right]. \tag{2.39}$$

De maneira análoga à demonstração Lema 2.2.1, apresentamos o seguinte resultado.

**Lema 2.2.2** *Para a função  $F$  dada em (2.10) e  $m = 1, 2, \dots, n$  valem as seguintes afirmações.*

- (a)  $\text{sign}[F'(2m)] = (-1)^m$ .
- (b)  $\text{sign}[F'(2m + 1)] = (-1)^m$ .

Para verificar que os zeros da função  $F(r)$  são simples, também precisamos saber o sinal de sua segunda derivada. Por (2.11) temos que

$$F''(r) = 0, \quad (2.40)$$

para  $0 \leq r < 1$ . Quando  $r \geq 1$ , consideramos que  $2m - 1 \leq r \leq 2m + 1$  para um certo inteiro positivo  $m$ . Assumimos primeiramente que  $2m - 1 < r < 2m + 1$ . Aplicamos a regra de Leibnitz em cada integral de (2.39) e obtemos

$$F''(r) = \frac{1}{\pi} \left[ \beta'_1(r)u(\beta_1) + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l [\beta'_{2l+1}(r)u(\beta_{2l+1}) - \beta'_{2l-1}(r)u(\beta_{2l-1})] - (-1)^m \beta'_{2m-1}(r)u(\beta_{2m-1}) \right]. \quad (2.41)$$

Identificamos por

$$\begin{aligned} \zeta_l^* &= \beta'_{2l+1}(r)u(\beta_{2l+1}), & \zeta_l^{**} &= -\beta'_{2l-1}(r)u(\beta_{2l-1}), \\ \zeta_1 &= \beta'_1(r)u(\beta_1), & \zeta_m &= -\beta'_{2m-1}(r)u(\beta_{2m-1}). \end{aligned}$$

Assim, a igualdade (2.41) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} F''(r) &= \frac{1}{\pi} \left[ \zeta_1 + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l [\zeta_l^* + \zeta_l^{**}] - (-1)^m \zeta_m \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ (\zeta_1 - \zeta_1^{**}) + (-\zeta_1^* + \zeta_2^{**}) + (\zeta_2^* - \zeta_3^{**}) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + ((-1)^{m-2} \zeta_{m-2}^* + (-1)^{m-1} \zeta_{m-1}^{**}) + \right. \\ &\quad \left. ((-1)^{m-1} \zeta_{m-1}^* + (-1)^m \zeta_m) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ 2\beta'_1(r)u(\beta_1) + 2 \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \beta'_{2l+1}(r)u(\beta_{2l+1}) \right]. \quad (2.42) \end{aligned}$$

Definimos a função

$$v(z) = zu(z) = \frac{2z^3}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (2.43)$$

para  $0 \leq z < 1$ . Segue de (2.12) que  $\beta'_k(r) = -\beta_k(r)/r$  e então reescrevemos (2.42) como

$$\begin{aligned} F''(r) &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\beta_1(r)}{r} u(\beta_1) + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \left( -\frac{\beta_{2l+1}(r)}{r} \right) u(\beta_{2l+1}) \right] \\ &= \frac{2}{\pi r} \left[ -v(\beta_1) + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^{l+1} v(\beta_{2l+1}) \right] \\ &= \frac{2}{\pi r} \sum_{l=1}^m (-1)^l v(\beta_{2l-1}). \quad (2.44) \end{aligned}$$



Utilizamos a expressão (2.44) de  $F''(r)$  para obter o seguinte resultado.

**Lema 2.2.3** *A função  $F$  dada em (2.10) é de classe  $C^2$  exceto nos inteiros positivos ímpares. Para os valores  $2m - 1 < r < 2m + 1$  com  $m = 1, 2, \dots, n$ , temos*

$$\text{sign}[F''(r)] = (-1)^m.$$

Pelos Lemas 2.2.1–2.2.3, temos que os gráficos qualitativos das funções  $F, F'$  e  $F''$  no intervalo  $(2m - 1, 2m + 1)$  são dados pelas Figuras 2.3 e 2.4, de acordo com a paridade de  $m$ . Com isso, é quase imediata a prova do seguinte resultado

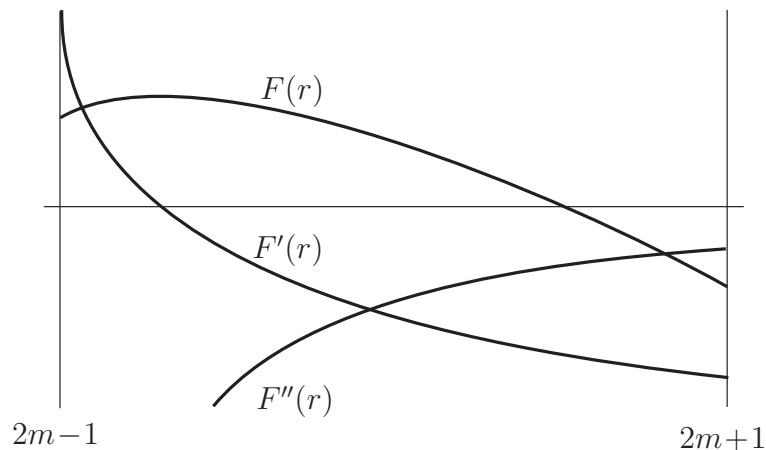


Figura 2.3: Gráficos das funções  $F(r)$ ,  $F'(r)$  e  $F''(r)$  para  $2m - 1 < r < 2m + 1$  com  $m$  ímpar.

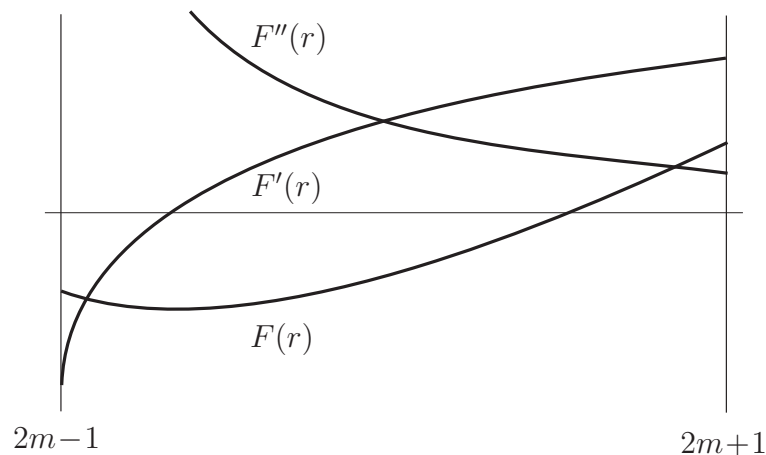


Figura 2.4: Gráficos das funções  $F(r)$ ,  $F'(r)$  e  $F''(r)$  para  $2m - 1 < r < 2m + 1$  com  $m$  par.

**Proposição 2.2.1** *Para  $2m - 1 \leq r \leq 2m + 1$  com  $m = 1, 2, \dots, n$ , a função  $F$  dada em (2.10) possui um único zero  $r^*$ . Além disso, esse zero satisfaz  $2m < r^* < 2m + 1$ , e é simples.*

**Demonstração:** Consideramos  $m$  ímpar, o caso  $m$  par é análogo. Pelo Lema 2.2.1, temos que

$$F(2m-1) > 0, \quad F(2m) > 0 \quad \text{e} \quad F(2m+1) < 0. \quad (2.45)$$

Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, concluímos a existência de pelo menos um valor  $r^* \in (2m, 2m+1)$  tal que  $F(r^*) = 0$ . Segue do Lema 2.2.2 que

$$F'(2m-1) > 0, \quad F'(2m) < 0 \quad \text{e} \quad F'(2m+1) < 0, \quad (2.46)$$

enquanto que pelo Lema 2.2.3 temos  $F''(r) < 0$  para  $2m-1 < r < 2m+1$ . Portanto, temos que  $F'$  é estritamente decrescente para  $2m-1 < r < 2m+1$ , o que implica  $F'(r^*) < 0$ . Ou seja,  $r^*$  é um zero simples da função  $F$ .

A unicidade segue de um argumento usual. Assumimos que  $F$  possui um outro zero simples  $r^{**}$  com  $2m-1 < r^{**} < 2m+1$ . Então, visto que  $F(r)$  é  $C^2$  em  $(2m-1, 2m+1)$ , pelo Teorema de Rolle temos que existe  $\bar{r} \in (r^*, r^{**})$  tal que  $F'(\bar{r}) = 0$ . Como  $F'(r)$  é sempre negativa para  $2m < r < 2m+1$ , temos

$$2m-1 < r^{**} < \bar{r} < 2m. \quad (2.47)$$

Observamos que necessariamente devemos ter  $r^{**} < 2m$ , pois caso contrário, se  $r^{**} = 2m$  segue de (2.45) que  $F(r^{**}) > 0$ , o que contradiz a hipótese de  $r^{**}$  ser um zero da função  $F$ . Por outro lado, se  $r^{**} > 2m$ , segue do Teorema de Rolle que para algum valor entre  $r^{**}$  e  $r^*$  a derivada de  $F$  se anula, contrariando o fato de  $F'(r)$  ser sempre negativa em  $2m < r < 2m+1$ .

Por (2.47), sendo  $F'$  monótona decrescente, segue que  $F'(r^{**}) > F'(\bar{r}) = 0$  e além disso, por (2.46) e (2.47) temos também que  $F'(r) > 0$  para  $2m-1 \leq r \leq r^{**}$ , ou seja,  $F(r)$  é crescente para  $2m-1 \leq r \leq r^{**}$ . Portanto, concluímos que

$$F(r^{**}) > F(2m-1) > 0,$$

o que é uma contradição. Com isso, segue que  $r^*$  é único. □

Finalmente, pela Proposição 2.2.1 temos que para cada intervalo  $(2m-1, 2m+1)$  com  $m = 1, 2, \dots, n$ , existe um único  $r^m$  tal que  $F(r^m) = 0$  e  $F'(r^m) \neq 0$ . Daí, aplicamos o Teorema 1.2.1 e concluímos que o sistema (2.1) possui pelo menos  $n$  ciclos limites hiperbólicos na faixa  $|x| \leq 2n+2$ , o que finaliza a prova do Teorema 2.0.1. ■

## 2.3 Demonstração dos Lemas 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3

### 2.3.1 Demonstração do Lema 2.2.1

(a) Por (2.30) temos que para  $r > 0$

$$\text{sign}[F(r)] = \text{sign} \left[ T_0(r) + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l T_l(r) \right]. \quad (2.48)$$

Para  $r = 2m$ , por (2.12) e (2.33) temos

$$T_0(2m) = \int_0^{\frac{1}{2m}} zh(z)dz + \int_{\frac{1}{2m}}^{\frac{1}{m}} \left(\frac{1}{m} - z\right) h(z)dz > 0,$$

pois ambos integrandos são positivos. Analogamente, por (2.34) e (2.35) segue que

$$T_l(2m) = \int_{\frac{l}{m}}^{\frac{l}{m} + \frac{1}{2m}} \left(z - \frac{l}{m}\right) h(z)dz + \int_{\frac{l}{m} + \frac{1}{2m}}^{\frac{l+1}{m}} \left(\frac{l+1}{m} - z\right) h(z)dz > 0,$$

para  $l = 1, 2, \dots, m-1$ . Além disso, a função  $h$  é estritamente crescente em  $(0, 1)$ . Visto que os intervalos de integração nas integrais de  $T_0(2m)$  e  $T_l(2m)$  têm sempre o mesmo comprimento,  $1/2m$ , segue que

$$0 < T_0(2m) < T_1(2m) < T_2(2m) < \dots < T_{m-2}(2m) < T_{m-1}(2m),$$

e então, por propriedade elementar de soma alternada de sequência monótona, segue de (2.48) que o sinal de  $F(2m)$  é dado pelo sinal do último termo da soma, ou seja,  $(-1)^{m-1}$ .

(b) A prova deste item é um pouco mais trabalhosa. Consideramos primeiro  $m \geq 2$ . Assim como no item (a), por (2.33) e (2.34), temos que

$$T_0(2m+1) = \int_0^{\frac{1}{2m+1}} zh(z)dz + \int_{\frac{1}{2m+1}}^{\frac{2}{2m+1}} \left(\frac{2}{2m+1} - z\right) h(z)dz > 0,$$

e

$$T_l(2m+1) = \int_{\frac{2l}{2m+1}}^{\frac{2l+1}{2m+1}} \left(z - \frac{2l}{2m+1}\right) h(z)dz + \int_{\frac{2l+1}{2m+1}}^{\frac{2l+2}{2m+1}} \left(\frac{2l+2}{2m+1} - z\right) h(z)dz > 0,$$

para  $l = 1, 2, \dots, m-2$ . Porém, o sinal de

$$T_{m-1}(2m+1) = \int_{\frac{2m-2}{2m+1}}^{\frac{2m-1}{2m+1}} \left(z - \frac{2m-2}{2m+1}\right) h(z)dz + \int_{\frac{2m-1}{2m+1}}^1 \left(\frac{2m}{2m+1} - z\right) h(z)dz,$$

não é tão claro, pois na segunda integral a função passa de valores positivos a valores negativos. Mesmo assim, como estamos considerando  $m \geq 2$ , podemos assegurar novamente que

$$0 < T_0(2m+1) < T_1(2m+1) < T_2(2m+1) < \dots < T_{m-2}(2m+1),$$

pois os intervalos de integração possuem o mesmo comprimento,  $1/(2m+1)$ , e a função  $h$  é estritamente crescente em  $(0, 1)$ .

Consideramos a seguinte afirmação

**Afirmação 2.3.1**  $T_{m-1}(2m+1) < 0$  para  $m = 1, 2, \dots, n$ .

Antes de provar a Afirmação 2.3.1 notamos que para  $m = 1$ ,  $T_0(3) < 0$  o que implica por (2.48) que  $F(3) < 0$ . Assim, pelo mesmo argumento do item (a), para  $m \geq 2$  segue por (2.48) e pela Afirmação 2.3.1 que

$$\begin{aligned} \text{sign}[F(2m+1)] &= \text{sign}[T_0(2m+1) - T_1(2m+1) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{m-2}T_{m-2}(2m+1) + (-1)^{m-1}T_{m-1}(2m+1)] \\ &= \text{sign}[T_0(2m+1) - T_1(2m+1) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{m-2}(T_{m-2}(2m+1) - T_{m-1}(2m+1))] \\ &= (-1)^{m-2} = (-1)^m, \end{aligned}$$

o que prova o item (b).

Provamos agora a Afirmação 2.3.1. Sabemos por (2.29) que

$$\begin{aligned} T_{m-1}(2m+1) &= -g\left(\frac{2m-2}{2m+1}\right) + 2g\left(\frac{2m-1}{2m+1}\right) - g(1) \\ &= \left(-g\left(\frac{2m-2}{2m+1}\right) + g\left(\frac{2m-1}{2m+1}\right)\right) + \left(g\left(\frac{2m-1}{2m+1}\right) - g(1)\right). \end{aligned}$$

Então, a desigualdade a ser provada é equivalente à

$$g(1) - g\left(\frac{2m-1}{2m+1}\right) > g\left(\frac{2m-1}{2m+1}\right) - g\left(\frac{2m-2}{2m+1}\right). \quad (2.49)$$

Fixamos  $\delta = 1/(2m+1)$  e reescrevemos a desigualdade (2.49) como

$$g(1) - g(1-2\delta) > g(1-2\delta) - g(1-3\delta).$$

Como  $g'(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ , pelo Teorema Fundamental do Cálculo basta mostrar que

$$\int_{1-2\delta}^1 \sqrt{1-x^2} dx > \int_{1-3\delta}^{1-2\delta} \sqrt{1-x^2} dx. \quad (2.50)$$

Como o valor máximo de  $\delta$  é  $1/3$ , é suficiente provar que a desigualdade (2.50) vale para  $0 < \delta \leq 1/3$ , mas sem custo adicional mostramos que a desigualdade vale para  $0 < \delta \leq 2/3$ , pois isso facilita a interpretação geométrica em termos de área. Consideramos para  $0 \leq \delta \leq 2/3$  a função

$$\rho(\delta) = \int_{1-2\delta}^1 \sqrt{1-x^2} dx - \int_{1-3\delta}^{1-2\delta} \sqrt{1-x^2} dx. \quad (2.51)$$

Denotamos por

$$\rho_1(\delta) = \int_{1-2\delta}^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{e} \quad \rho_2(\delta) = \int_{1-3\delta}^{1-2\delta} \sqrt{1-x^2} dx.$$

Notamos que  $\rho(0) = 0$ . Para calcular  $\rho'_2(\delta)$  aplicamos a regra de Leibnitz em

$$\rho_2(\delta) = \int_{u(\delta)}^{v(\delta)} f(x, \delta) dx,$$

onde  $u(\delta) = 1 - 3\delta$ ,  $v(\delta) = 1 - 2\delta$ ,  $f(x, \delta) = \sqrt{1 - x^2}$  e por (1.47) e (1.50) obtemos

$$\begin{aligned} \rho'_2(\delta) &= \int_{u(\delta)}^{v(\delta)} \frac{\partial f(x, \delta)}{\partial \delta} dx + f(v(\delta), \delta)v'(\delta) - f(u(\delta), \delta)u'(\delta) \\ &= -2\sqrt{1 - (1 - 2\delta)^2} + 3\sqrt{1 - (1 - 3\delta)^2} \\ &= -4\sqrt{\delta - \delta^2} + 3\sqrt{6\delta - 9\delta^2}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Analogamente, obtemos

$$\rho'_1(\delta) = 4\sqrt{\delta - \delta^2}. \tag{2.53}$$

Assim, para  $0 < \delta < 2/3$  segue de (2.51), (2.52) e (2.53) que

$$\begin{aligned} \rho'(\delta) &= 8\sqrt{\delta - \delta^2} - 3\sqrt{6\delta - 9\delta^2} \\ &= 3\sqrt{3\delta - 9\delta^2} \left( \frac{4\sqrt{6}\sqrt{1 - \delta}}{9\sqrt{1 - 3\delta/2}} - 1 \right) > 0. \end{aligned}$$

Logo, temos que  $\rho(\delta)$  é crescente e como  $\rho(0) = 0$ , segue que  $\rho(\delta) > 0$  para  $0 < \delta \leq 2/3$ . Daí, a desigualdade (2.49) é válida e concluímos que  $T_{m-1}(2m+1) < 0$ , já que

$$0 < \rho(1/(2m+1)) < \dots < \rho(1/7) < \rho(1/5) < \rho(1/3),$$

o que implica

$$T_0(3) < T_1(5) < T_2(7) < \dots < T_{m-1}(2m+1) < 0,$$

para  $m = 1, 2, \dots, n$ . Com isso, está completa a prova do Lema 2.2.1. □

### 2.3.2 Demonstração do Lema 2.2.2

Provamos inicialmente o item (b). Por (2.39) e usando (2.12) temos

$$F'(2m+1) = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{1}{2m+1}} u(z) dz + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \int_{\frac{2l-1}{2m+1}}^{\frac{2l+1}{2m+1}} u(z) dz + (-1)^m \int_{\frac{2m-1}{2m+1}}^1 u(z) dz \right]. \tag{2.54}$$

Denotamos por

$$T_0^*(2m+1) = \int_0^{\frac{1}{2m+1}} u(z) dz, \quad T_m^*(2m+1) = \int_{\frac{2m-1}{2m+1}}^1 u(z) dz,$$

e para  $l = 1, 2, \dots, m - 1$

$$T_l^*(2m + 1) = \int_{\frac{2l-1}{2m+1}}^{\frac{2l+1}{2m+1}} u(z) dz.$$

Reescrevemos então a igualdade (2.54) como

$$F'(2m + 1) = \frac{1}{\pi} \left[ T_0^*(2m + 1) + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l T_l^*(2m + 1) + (-1)^m T_m^*(2m + 1) \right]. \quad (2.55)$$

Notamos que a função  $u(z)$  é positiva e monótona crescente em  $(0, 1)$ . Além disso, todas as integrais de (2.54), exceto  $\int_0^{1/(2m+1)}$ , possuem o mesmo comprimento de intervalo:  $2/(2m + 1)$ . Logo

$$0 < T_0^*(2m + 1) < T_1^*(2m + 1) < \dots < T_{m-1}^*(2m + 1) < T_m^*(2m + 1).$$

Portanto, em (2.55) obtemos uma soma alternada de termos que aumentam em magnitude, de modo que o seu sinal coincide com o sinal do último termo, ou seja

$$\begin{aligned} \text{sign}[F'(2m + 1)] &= \text{sign}[T_0^*(2m + 1) - T_1^*(2m + 1) + T_2^*(2m + 1) \dots \\ &\dots + (-1)^{m-1} T_{m-1}^*(2m + 1) + (-1)^m T_m^*(2m + 1)] = (-1)^m, \end{aligned}$$

o que prova o item (b).

Provamos agora o item (a). Denotamos por

$$\begin{aligned} \xi_l^* &= \int_{\beta_{2l-1}}^{\beta_{2l}} u(z) dz, & \xi_l^{**} &= \int_{\beta_{2l}}^{\beta_{2l+1}} u(z) dz, \\ \xi_1 &= \int_0^{\beta_1} u(z) dz, & \xi_m &= \int_{\beta_{2m-1}}^1 u(z) dz, \end{aligned}$$

e reescrevemos a equação (2.39) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} F'(r) &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\beta_1} u(z) dz + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \left( \int_{\beta_{2l-1}}^{\beta_{2l}} u(z) dz + \int_{\beta_{2l}}^{\beta_{2l+1}} u(z) dz \right) + \right. \\ &\quad \left. (-1)^m \int_{\beta_{2m-1}}^1 u(z) dz \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \xi_1 + \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l (\xi_l^* + \xi_l^{**}) + (-1)^m \xi_m \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \left[ (\xi_1 - \xi_1^*) + (\xi_2^* - \xi_1^{**}) + (-\xi_3^* + \xi_2^{**}) + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + (-1)^{m-1} (\xi_{m-1}^* - \xi_{m-2}^{**}) + (-1)^m (\xi_m - \xi_{m-1}^{**}) \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ -(\xi_1^* - \xi_1) + \sum_{l=2}^{m-1} (-1)^l (\xi_l^* - \xi_{l-1}^{**}) + (-1)^m (\xi_m - \xi_{m-1}^{**}) \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ (-1) \left( \int_{\beta_1}^{\beta_2} u(z) dz - \int_0^{\beta_1} u(z) dz \right) + \right. \\
 &\quad \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \left( \int_{\beta_{2l-1}}^{\beta_{2l}} u(z) dz - \int_{\beta_{2l-2}}^{\beta_{2l-1}} u(z) dz \right) + \\
 &\quad \left. (-1)^m \left( \int_{\beta_{2m-1}}^1 u(z) dz - \int_{\beta_{2m-2}}^{\beta_{2m-1}} u(z) dz \right) \right]. \tag{2.56}
 \end{aligned}$$

Logo, segue de (2.56) e (2.12) que

$$\begin{aligned}
 F'(2m) &= \frac{1}{\pi} \left[ (-1) \left( \int_{\frac{1}{2m}}^{\frac{2}{2m}} u(z) dz - \int_0^{\frac{1}{2m}} u(z) dz \right) + \right. \\
 &\quad \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \left( \int_{\frac{2l-1}{2m}}^{\frac{2l}{2m}} u(z) dz - \int_{\frac{2l-2}{2m}}^{\frac{2l-1}{2m}} u(z) dz \right) + \\
 &\quad \left. (-1)^m \left( \int_{\frac{2m-1}{2m}}^1 u(z) dz - \int_{\frac{2m-2}{2m}}^{\frac{2m-1}{2m}} u(z) dz \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^m (-1)^l a_l(m), \tag{2.57}
 \end{aligned}$$

onde

$$a_l(m) = \int_{\frac{2l-1}{2m}}^{\frac{2l}{2m}} u(z) dz - \int_{\frac{2l-2}{2m}}^{\frac{2l-1}{2m}} u(z) dz > 0, \tag{2.58}$$

para  $l = 1, 2, \dots, m$ , pois temos que a função  $u(z)$  é positiva, monótona crescente em  $(0, 1)$  e as duas integrais possuem o mesmo comprimento de intervalo  $1/(2m)$ . Por (2.57) e (2.58) temos que  $F'(2) < 0$ . Assim pelo mesmo argumento usado no item anterior, para encerrar a prova de (a), é suficiente mostrar que para  $m \geq 2$

$$a_1(m) < a_2(m) < \dots < a_{m-1}(m) < a_m(m). \tag{2.59}$$

Fixamos  $\delta = 1/(2m)$  e consideramos a função

$$G(x) = \int_x^{x+\delta} u(z) dz - \int_{x-\delta}^x u(z) dz,$$

para  $\delta \leq x \leq 1 - \delta$ . Observamos que para  $l = 1, 2, \dots, m$

$$a_l(m) = G\left(\frac{2l-1}{2m}\right), \quad (2.60)$$

e que se a função  $G$  é crescente, então (2.59) é válida. Calculamos a primeira derivada de  $G$  utilizando a regra de Leibnitz e obtemos

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left( \int_x^{x+\delta} \frac{\partial u(z)}{\partial x} dz + u(x+\delta) - u(x) \right) - \\ &\quad \left( \int_{x-\delta}^x \frac{\partial u(z)}{\partial x} dz + u(x) - u(x-\delta) \right) \\ &= u(x+\delta) - 2u(x) + u(x-\delta), \end{aligned} \quad (2.61)$$

para  $\delta \leq x < 1 - \delta$ . Notamos que

$$\lim_{x \rightarrow (1-\delta)^-} G'(x) = +\infty,$$

pois quando  $x \rightarrow (1-\delta)^-$  temos que  $(x+\delta) \rightarrow 1^-$  e por (2.38)  $u(x+\delta) \rightarrow +\infty$ , o que implica que  $G$  não possui derivada contínua em  $x = 1 - \delta$ . Precisamos apenas mostrar que  $G'(x) > 0$  para  $\delta < x < 1 - \delta$ , mas por (2.61) é equivalente verificar que

$$u(x+\delta) - u(x) > u(x) - u(x-\delta),$$

ou seja, basta verificar que a função  $u(z)$  é côncava para cima em  $(0, 1)$ . Logo, por (2.38) temos

$$u'(z) = \frac{4z - 2z^3}{\sqrt{(1-z^2)^3}} \quad \text{e} \quad u''(z) = \frac{4 + 2z^2}{\sqrt{(1-z^2)^5}} > 0,$$

para  $z \in (0, 1)$ . Portanto, concluímos que a função  $G$  é crescente e por (2.60) segue que (2.59) é válida. Então, por (2.57) obtemos que

$$\begin{aligned} \text{sign}[F'(2m)] &= \text{sign}[-a_1(2m) + a_2(2m) - a_3(2m) \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^{m-1}a_{m-1}(2m) + (-1)^m a_m(2m)] = (-1)^m. \end{aligned}$$

□

### 2.3.3 Demonstração do Lema 2.2.3

Por (2.40) e (2.44) obtemos a diferenciabilidade de  $F$  quando  $r$  não é um inteiro positivo ímpar. Analisamos então a continuidade de  $F''$  nestes inteiros positivos ímpares. Consideramos primeiro  $r = 1$ . Segue de (2.11) que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} F''(r) = 0.$$



Como  $\beta_1(r) \rightarrow 1$  quando  $r \rightarrow 1$ , para  $m = 1$  segue de (2.43) e (2.44) que

$$\lim_{r \rightarrow 1^+} F''(r) = - \lim_{r \rightarrow 1^+} \frac{2}{\pi r} v[\beta_1(r)] = -\infty.$$

Logo, os limites laterais de  $F''$  não coincidem, o que implica que  $F''$  não é contínua em  $r = 1$ . Com um argumento similar analisamos  $F''(r)$  para  $r = 2m + 1$  com  $m = 1, 2, \dots$ . Por (2.44) temos

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow (2m+1)^-} F''(r) &= \lim_{r \rightarrow (2m+1)^-} \frac{2}{\pi r} \sum_{l=1}^m (-1)^l v[\beta_{2l-1}(r)] \\ &= \frac{2}{\pi(2m+1)} \sum_{l=1}^m (-1)^l v\left(\frac{2l-1}{2m+1}\right), \end{aligned}$$

que é finito. Por outro lado, usamos novamente (2.44) mas agora para  $2m + 1 < r < 2m + 3$ , e obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow (2m+1)^+} F''(r) &= \lim_{r \rightarrow (2m+1)^+} \frac{2}{\pi r} \sum_{l=1}^{m+1} (-1)^l v[\beta_{2l-1}(r)] \\ &= \lim_{r \rightarrow (2m+1)^+} \frac{2}{\pi r} \left( -v[\beta_1(r)] + v[\beta_3(r)] + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^m v[\beta_{2m-1}(r)] + (-1)^{m+1} v[\beta_{2m+1}(r)] \right) \\ &= (-1)^{m+1} \infty, \end{aligned}$$

pois por (2.12) temos que  $\beta_{2m+1}(r) \rightarrow 1$  quando  $r \rightarrow (2m + 1)$ , o que por (2.43) implica  $v(\beta_{2m+1}) \rightarrow +\infty$ . Logo,  $F''$  não é contínua em  $r = 2m + 1$  e portanto concluímos que  $F$  não é de classe  $C^2$  nos inteiros positivos ímpares.

Estudamos agora o sinal de  $F''$  para  $2m - 1 < r < 2m + 1$  com  $m = 1, 2, \dots$ . Aplicamos raciocínios análogos às provas dos lemas anteriores. Notamos que (2.44) é uma soma alternada. Visto que

$$v'(z) = \frac{2z^2(3 - 2z^2)}{\sqrt{(1 - z^2)^3}} > 0,$$

para  $0 < z < 1$ , segue que  $v(z)$  é monótona crescente. Como por hipótese consideramos  $2m - 1 < r < 2m + 1$  para  $m = 1, 2, \dots, n$ , segue de (2.12) que  $0 < \beta_{2l-1} < 1$  para  $l = 1, 2, \dots, m$  e então

$$v(\beta_1) < v(\beta_3) < v(\beta_5) < \dots < v(\beta_{2m-3}) < v(\beta_{2m-1}).$$

Portanto, por (2.44) obtemos

$$\begin{aligned} \text{sign}[F''(r)] &= \text{sign}[-v(\beta_1) + v(\beta_3) - v(\beta_5) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{m-1} v(\beta_{2m-3}) + (-1)^m v(\beta_{2m-1})] = (-1)^m. \end{aligned}$$

□

## Capítulo 3

# Existência de exatamente $n$ ciclos limites para todo $n \in \mathbb{N}$

Neste capítulo verificamos que o sistema diferencial linear por partes (2.1) o qual nos propomos estudar, e que no capítulo anterior apresentamos uma quota inferior para o número de ciclos limites existentes, possui exatamente  $n$  ciclos limites na faixa  $|x| \leq 2n + 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Para facilitar a leitura reescrevemos o sistema (2.1) dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - \varepsilon\phi(x), \\ \dot{y} &= x,\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde  $\varepsilon \neq 0$  e  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função periódica linear por partes ímpar e de período 4, satisfazendo

$$\phi(x) = \begin{cases} x & , \text{ se } x \in [0, 1], \\ -x + 2 & , \text{ se } x \in [1, 2]. \end{cases}\tag{3.2}$$

Lembramos que o gráfico da função  $\phi$  é dado pela Figura 3.1.

Em resumo nosso objetivo neste capítulo é apresentar a prova do teorema a seguir, demonstrado por Llibre, Ponce e Zhang em [10], que garante a existência de um número exato de ciclos limites para o sistema (3.1) numa determinada região e uma infinidade de ciclos limites no plano.

**Teorema 3.0.1** *Seja  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como em (3.2). Para  $\varepsilon \neq 0$  e para um inteiro positivo arbitrário  $n$ , o sistema diferencial linear por partes (3.1) tem exatamente  $n$  ciclos limites na faixa  $|x| \leq 2(n + 1)$ , alternando entre estáveis e instáveis. Consequentemente, o sistema (3.1) tem uma infinidade de ciclos limites no plano real.*

Para um melhor entendimento, interpretamos um sistema diferencial linear por partes como um sistema possuindo uma reta a qual lhe divide em duas regiões, cada uma com um sistema linear correspondente. Sabemos que sistemas lineares não possuem ciclos limites, assim em sistemas lineares por partes para a existência de um ciclo limite é necessário que este passe pelas duas regiões, cruzando assim a reta que divide o sistema.

Observamos que no caso do sistema em estudo, a reta que divide o sistema linear por partes citada anteriormente, corresponde às retas  $x = 2m + 1$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , pois o

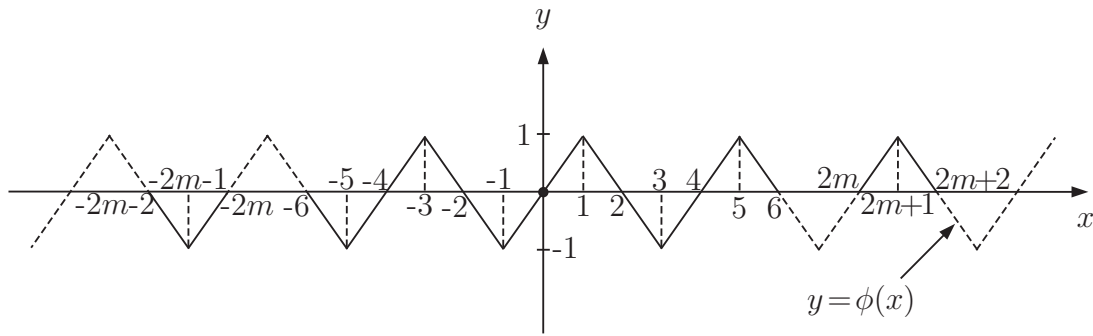


Figura 3.1: Gráfico da função  $y = \phi(x)$  no plano  $xy$ .

sistema (3.1) não é diferenciável nos pontos  $(2m + 1, y)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Além disso, note que o sistema é um centro quando  $\varepsilon = 0$  e a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema.

### 3.1 Demonstração do Teorema 3.0.1

A demonstração é dividida em dois passos. No primeiro passo, provamos que o sistema (3.1) tem pelo menos um ciclo limite tal que seu ponto mais a direita está localizado na faixa  $2m < x < 2(m + 1)$  para  $m \in \mathbb{N}$ , e nenhum ciclo limite em  $-2 \leq x \leq 2$ . E no segundo passo provamos que o ciclo limite encontrado no primeiro passo é único.

A estrutura desta seção é a seguinte: na Subseção 3.1.1 demonstramos o primeiro passo. Para isto, assumimos três afirmações cujas demonstrações estão no final da subseção. Na Subseção 3.1.2 demonstramos o segundo passo e concluimos o Teorema 3.0.1. Os lemas enunciados durante este passo estão demonstrados no final desta subseção.

Sem perda de generalidade, assumimos  $\varepsilon > 0$  e para simplificar a notação denotamos  $\Phi(x) = \varepsilon\phi(x)$ .

**Afirmção 3.1.1** Para  $m \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned}\Phi(-x) &= -\Phi(x), \\ \Phi(2m + x) &= (-1)^m \Phi(x).\end{aligned}\tag{3.3}$$

De fato, sendo  $\phi(x)$  uma função ímpar segue que  $\Phi(-x) = \varepsilon\phi(-x) = -\varepsilon\phi(x) = -\Phi(x)$ . Para provar a segunda igualdade utilizamos indução em  $m$ . Antes, verificamos que vale a igualdade  $\Phi(2 + x) = -\Phi(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Seja  $x \in [2n - 1, 2n]$  ou  $x \in [2n, 2n + 1]$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$ . Observe que o gráfico de  $\phi$  nesses intervalos é dado por

$$\phi(x) = (-1)^n x + (-1)^{n+1} 2n.\tag{3.4}$$

Logo,  $2 + x \in [2n + 1, 2n + 2]$  ou  $2 + x \in [2n + 2, 2n + 3]$ . Ou seja,  $2 + x \in [2(n + 1) - 1, 2(n + 1)]$  ou  $2 + x \in [2(n + 1), 2(n + 1) + 1]$ , e o gráfico da  $\phi$  nesses intervalos é dado por  $\phi(x) = (-1)^{n+1} x + (-1)^{n+2} 2(n + 1)$ .

Assim, para todo  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$\begin{aligned}
 \Phi(2+x) &= \varepsilon\phi(2+x) \\
 &= \varepsilon [(-1)^{n+1}(2+x) + (-1)^{n+2}2(n+1)] \\
 &= \varepsilon [(-1)^{n+1}2 + (-1)^{n+1}x + (-1)^{n+2}2n + (-1)^{n+2}2] \\
 &= \varepsilon [(-1)(-1)^n x + (-1)(-1)^{n+1}2n] \\
 &= -\varepsilon [(-1)^n x + (-1)^{n+1}2n] \\
 &= -\varepsilon\phi(x) \\
 &= -\Phi(x).
 \end{aligned}$$

Mostramos agora que  $\Phi(2m+x) = (-1)^m\Phi(x)$  para  $m \in \mathbb{N}$ . Visto que para  $m = 1$  a igualdade é verdadeira, assumimos a hipótese de que para  $m = n$  a mesma também se satisfaz, isto é,  $\Phi(2n+x) = (-1)^n\Phi(x)$ . Portanto, para  $m = n+1$  temos

$$\begin{aligned}
 \Phi(2(n+1)+x) &= \Phi(2+y) \\
 &= -\Phi(y) \\
 &= -\Phi(2n+x) \\
 &= -(-1)^n\Phi(x) \\
 &= (-1)^{n+1}\Phi(x).
 \end{aligned}$$

E com isso está provada a afirmação.

Consideramos a mudança de variável  $(x, y) \mapsto (-x, y)$  em (3.1) e obtemos

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y - \Phi(x), \\
 \dot{y} &= -x,
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

que é equivalente à equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y(x) - \Phi(x)}. \tag{3.6}$$

O sistema (3.5) é um caso particular da equação de Liénard  $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$  tomando-se  $f(x) = \dot{\Phi}(x) = \varepsilon\phi'(x)$  e  $g(x) = x$ . Basta considerar a equação na variável  $s$  ao invés de  $x$  e aplicar a mudança de coordenadas  $x = s$  e  $y = \dot{s} + \Phi(s)$ .

### 3.1.1 Existência de um ciclo limite com seu ponto mais a direita localizado na faixa $2m < x < 2m + 2$

O objetivo nesta subseção é garantir a existência de um ciclo limite com seu ponto mais a direita localizado na faixa  $2m < x < 2m + 2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Durante a demonstração desta subseção apresentamos três afirmações que serão demonstradas no final da mesma em 3.1.1.1, 3.1.1.2 e 3.1.1.3.

Assumimos que  $y = y(x)$  é uma solução do sistema (3.5) localizada acima do gráfico da  $\Phi(x)$ . Vale a seguinte afirmação.

**Afirmação 3.1.2**  $y(2+x) < y(-x)$  e  $y(x) > y(-2-x)$ , para  $x \geq 0$ .

Consideramos a função  $\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Calculando  $\frac{d\lambda}{dt}$  sobre as soluções do sistema (3.5) temos

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{dy}{dt} = x\dot{x} + y\dot{y} = x(y - \Phi(x)) + y(-x) = -x\Phi(x).$$

Seja  $y(x)$  uma solução de (3.5). Denotamos  $\lambda(x) = \lambda(x, y(x))$  e assim

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\lambda}{dx} \frac{dx}{dt} \implies \frac{d\lambda}{dx} = \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)}. \quad (3.7)$$

**Afirmção 3.1.3** *Se  $y(x)$  é uma solução do sistema (3.5) e a parte da curva solução acima de  $y = \Phi(x)$  intercepta as retas  $x = \pm 2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , então*

$$(-1)^{m+1}[\lambda(2m) - \lambda(-2m)] < 0. \quad (3.8)$$

Segue de (3.8) que para  $m$  par  $\lambda(2m) - \lambda(-2m) > 0$ . Como  $\lambda(x) = \lambda(x, y(x)) = \frac{1}{2}[x^2 + (y(x))^2]$  onde  $y(x)$  é uma solução do sistema (3.5), temos que  $y(2m) > y(-2m)$ . Geometricamente, isto significa que no plano  $(x, y)$  o ponto onde a solução  $y(x)$  cruza a reta  $x = 2m$  está mais alto, com relação ao eixo- $x$ , do que o ponto onde a solução  $y(x)$  cruza a reta  $x = -2m$ . Como o sistema (3.5) é invariante pela mudança de variável  $(x, y) \longmapsto (-x, -y)$ , obtemos que a curva solução é simétrica com relação a origem. Logo se  $y(x)$  é uma solução do sistema (3.5) e a parte da curva solução abaixo do gráfico da  $\Phi(x)$  cruza as retas  $x = \pm 2m$ , então vale a desigualdade

$$(-1)^{m+1}[\lambda(-2m) - \lambda(2m)] < 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

Seja  $y(x)$  uma solução de (3.5) com ponto inicial em  $A_m = (-2m, 0)$  para  $m \in \mathbb{N}$  e denotamos por  $\gamma_{-2m}$  a órbita definida por essa solução.

**Afirmção 3.1.4** *A órbita  $\gamma_{-2m}$  está acima do eixo- $x$  e cruza o gráfico da  $\Phi(x)$  em um único ponto  $I_m = (x_{I_m}, y_{I_m})$  antes de cruzar o eixo- $x$  pela primeira vez no ponto  $B_m = (x_{-2m}, 0)$ . Além disso, para  $m$  par temos*

$$2m < x_{-2m} < x_{I_m} < 2m + 2, \quad x_{-2m} < x_{-2m-2} < x_{I_{m+1}} < 2m + 2 \quad e \quad y_{I_m}, y_{I_{m+1}} > 0$$

e para  $m$  ímpar temos

$$2m - 2 < x_{-2m} < x_{I_m} < 2m, \quad 2m - 2 < x_{-2m+2} < x_{-2m} \quad e \quad y_{I_{m-1}}, y_{I_m} > 0.$$

Observe que, como o sistema (3.5) não é diferenciável sobre a reta  $x = 2m + 1$  com  $m \in \mathbb{Z}$ , obtemos que a órbita  $\gamma_{-2m}$  para  $m$  par ou ímpar, não cruza o gráfico da  $\Phi(x)$  nos respectivos “bicos”. Logo, as possibilidades são dadas pelas Figuras 3.2 e 3.3.

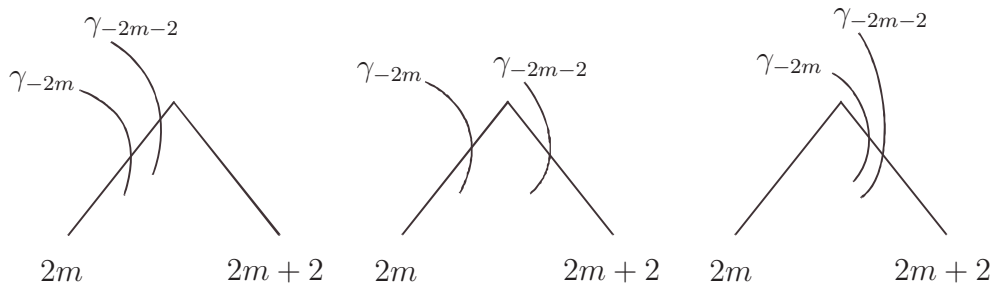


Figura 3.2: Possibilidades de interseção da órbita  $\gamma_{-2m}$  para  $m$  par.

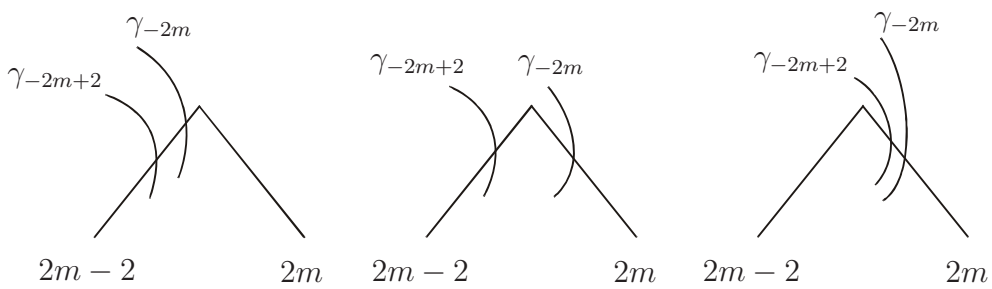


Figura 3.3: Possibilidades de interseção da órbita  $\gamma_{-2m}$  para  $m$  ímpar.

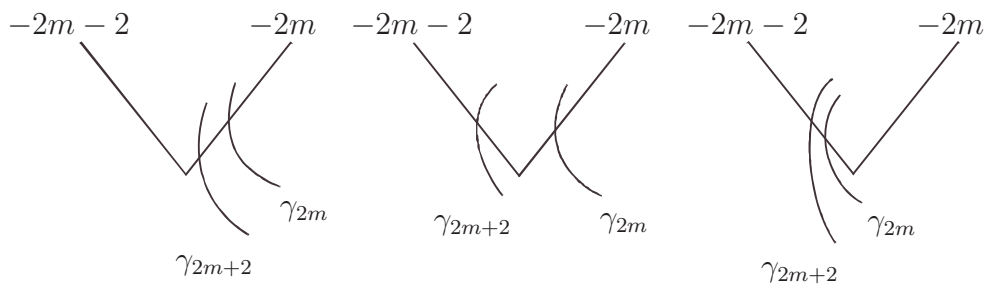


Figura 3.4: Possibilidades de interseção da órbita  $\gamma_{2m}$  para  $m$  par.

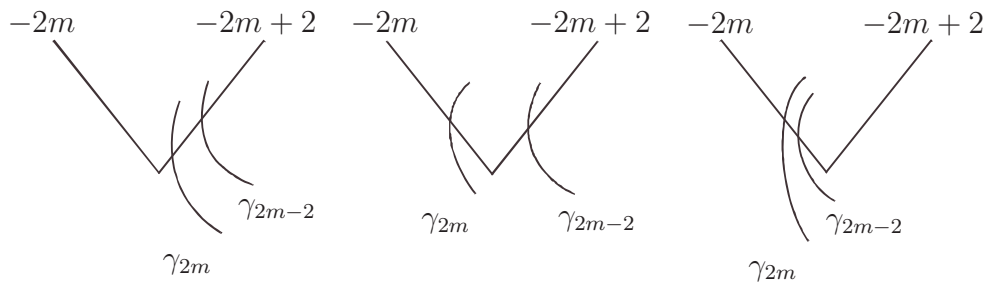


Figura 3.5: Possibilidades de interseção da órbita  $\gamma_{2m}$  para  $m$  ímpar.

Denotamos por  $\gamma_{2m}$  a órbita que inicia no ponto  $\overline{A}_m = (2m, 0)$  com  $m \in \mathbb{N}$ . Como na demonstração da Afirmação 3.1.4, sendo o campo vertical sobre o gráfico da  $\Phi(x)$  e simétrico em relação à origem, visto que em  $x = 2m$  o campo vetorial é dado por  $\dot{x} = 0$  e  $\dot{y} = -2m$ , temos que  $\gamma_{2m}$  está abaixo do eixo- $x$  e cruza o gráfico da  $\Phi(x)$  em um único ponto  $J_m = (x_{J_m}, y_{J_m})$  antes de chegar em  $\overline{B}_m = (x_{2m}, 0)$ . Por (3.9) obtemos que  $x_{2m} < -2m$  para  $m$  par. De fato, se  $x_{2m} > -2m$  há um arco de órbita cruzando o eixo- $x$  no ponto  $(-2m, 0)$  que está abaixo de  $\gamma_{2m}$  pela unicidade de soluções. Então esta órbita cruza a reta  $x = 2m$  num ponto  $J'_m = (x_{J'_m}, y_{J'_m})$  com  $y_{J'_m} < 0$ . Logo,  $\lambda(-2m) = \lambda(-2m, 0) < \lambda(2m, y_{J'_m}) = \lambda(2m)$ , e como  $m$  é par temos que  $(-1)^{m+1}[\lambda(-2m) - \lambda(2m)] > 0$ , contrariando (3.9). Notamos que se  $x_{2m} = -2m$  temos  $\lambda(-2m) = \lambda(\overline{B}_m) = \lambda(\overline{A}_m) = \lambda(2m)$ , o que também contraria a expressão (3.9). Analogamente, temos que  $x_{2m} > -2m$  para  $m$  ímpar. Para  $m$  par, a unicidade de soluções garante que  $-2(m+1) < x_{2(m+1)} < x_{2m} < -2m$ , e segue que  $x_{J_m} < x_{2m} < -2m$  e  $-2m - 2 < x_{J_{m+1}} < x_{2m+2} < x_{2m}$ , e para  $m$  ímpar, como  $-2m < x_{2m} < x_{2(m-1)} < -2(m-1)$ , segue que  $-2m < x_{J_m} < x_{2m}$  e  $x_{2m} < x_{2m-2} < -2m + 2$ . Portanto, a órbita  $\gamma_{2m}$  para  $m$  par ou ímpar, cruza o gráfico da  $\Phi(x)$  com uma das possibilidades dadas pelas Figuras 3.4 e 3.5.

Seja  $\widetilde{A_m B_m}$  (respectivamente  $\widetilde{\overline{A}_m \overline{B}_m}$ ) o arco de órbita que vai de  $A_m$  ao  $B_m$  (respectivamente  $\overline{A}_m$  ao  $\overline{B}_m$ ) e seja  $\overline{B_m A_m}$  (respectivamente  $\overline{\overline{B}_m \overline{A}_m}$ ) o segmento de reta conectando os pontos  $B_m$  e  $\overline{A}_m$  (respectivamente  $\overline{B}_m$  e  $A_m$ ). Tome

$$S_m = \widetilde{A_m B_m} \cup \overline{B_m \overline{A}_m} \cup \widetilde{\overline{A}_m \overline{B}_m} \cup \overline{\overline{B}_m A_m}$$

para  $m \in \mathbb{N}$ . Então  $\{S_m\}_{m=1}^{n+1}$  é uma sequência finita de curvas fechadas simples na faixa  $|x| \leq 2n + 4$ . Assim, quaisquer duas curvas consecutivas formam os limites de uma região anelar de Poincaré-Bendixson (veja Figuras 3.6 e 3.7). Então, pelo Teorema da Região Anelar de Poincaré-Bendixson, temos pelo menos um ciclo limite dentro de tal região.

Portanto, com os resultados obtidos até aqui, segue facilmente a seguinte proposição.

**Proposição 3.1.1** *Considere o sistema (3.5). Valem as seguintes afirmações:*

- (a) *Existe pelo menos um ciclo limite cruzando o intervalo  $(2m, 2m + 2)$  sobre o eixo- $x$ , para  $m = 1, 2, \dots, n$ .*
- (b) *Cada um dos ciclos limites do item (a) não cruzam  $y = \Phi(x)$  para  $-2m \leq x \leq 2m$ . Além disso, se o ponto mais à direita de tal ciclo limite está localizado na faixa  $2m + 1 \leq x < 2m + 2$ , este ciclo limite não cruza  $y = \Phi(x)$  para  $-2m - 1 < x < 2m + 1$ .*
- (c) *O ciclo limite mais próximo do ponto  $\overline{A}_m = (2m, 0)$  pelo lado direito (respectivamente, do lado esquerdo) é interiormente estável para  $m$  par e interiormente instável para  $m$  ímpar (respectivamente, é exteriormente instável para  $m$  par e exteriormente estável para  $m$  ímpar).*
- (d) *O sistema (3.5) não possui ciclos limites cruzando o intervalo  $(0, 2)$  sobre o eixo- $x$ , nem passando através do pontos  $(2m, 0)$  para  $m \in \mathbb{N}$ .*

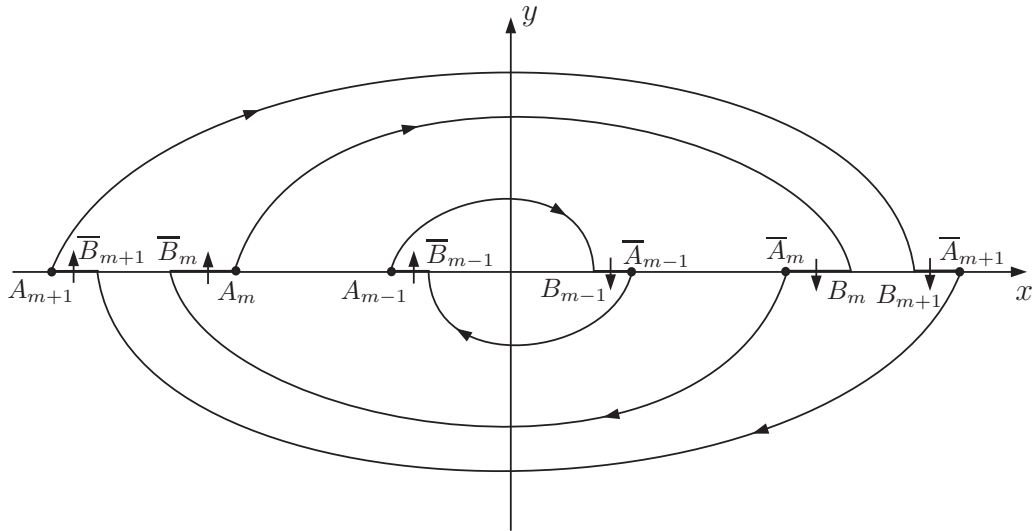


Figura 3.6: Representação de duas regiões anelares de Poincaré-Bendixson consecutivas definidas pelas curvas fechadas  $S_{m-1}$ ,  $S_m$  e  $S_{m+1}$  para  $m$  par.

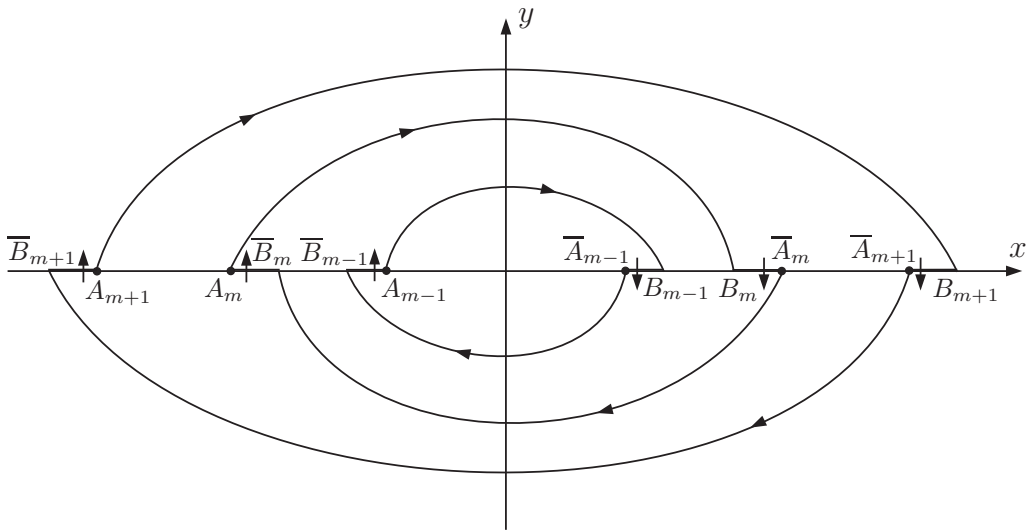


Figura 3.7: Representação de duas regiões anelares de Poincaré-Bendixson consecutivas definidas pelas curvas fechadas  $S_{m-1}$ ,  $S_m$  e  $S_{m+1}$  para  $m$  ímpar.

O item (a) da proposição segue pelo Teorema da Região Anelar de Poincaré-Bendixson, uma vez que  $S_m$  e  $S_{m+1}$  formam os limites pra tal região. Pelo mesmo teorema obtemos também o item (c). Visto que o sistema (3.5) é simétrico em relação à origem, pela Afirmação 3.1.4 e a unicidade de soluções segue o item (b). Do mesmo modo, utilizando a simetria, a unicidade de soluções e o fato do sistema (3.5) ser linear na faixa  $-1 \leq x \leq 1$ , segue-se o item (d). Assim, pelos itens (a) e (d) temos que o sistema (3.5) possui pelo menos um ciclo limite com o ponto mais



a direita localizado na faixa  $2m < x < 2m + 2$ . Com isso, completamos a prova do primeiro passo.

A seguir apresentamos as demonstrações das afirmações enunciadas nesta subseção.

### 3.1.1.1 Demonstração da Afirmação 3.1.2

De fato, sendo  $y = y(x)$  a solução de (3.5), segue de (3.6) e do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\begin{aligned} y(2+x) - y(-x) &= \int_{-x}^{2+x} \frac{-s}{y(s) - \Phi(s)} ds \\ &= \int_{-x}^0 \frac{-s}{y(s) - \Phi(s)} ds + \int_0^2 \frac{-s}{y(s) - \Phi(s)} ds + \int_2^{2+x} \frac{-s}{y(s) - \Phi(s)} ds. \end{aligned}$$

Considerando as mudanças de variável  $s \mapsto -s$  e  $s \mapsto 2+s$  na primeira e terceira integral, respectivamente, e usando (3.3) obtemos

$$\begin{aligned} y(2+x) - y(-x) &= \\ &= \int_0^x \frac{s}{y(-s) + \Phi(s)} ds - \int_0^2 \frac{s}{y(s) - \Phi(s)} ds + \int_0^x \frac{-(2+s)}{y(2+s) + \Phi(s)} ds \\ &= \int_0^x \frac{s}{y(-s) + \Phi(s)} ds - \int_0^2 \frac{s}{y(s) - \Phi(s)} ds + \int_0^x \frac{-s}{y(2+s) + \Phi(s)} ds + \\ &\quad \int_0^x \frac{-2}{y(2+s) + \Phi(s)} ds \\ &= \int_0^x \frac{s [y(2+s) - y(-s)]}{[y(-s) + \Phi(s)][y(2+s) + \Phi(s)]} ds - \int_0^2 \frac{s}{y(s) - \Phi(s)} ds + \\ &\quad \int_0^x \frac{-2}{y(2+s) + \Phi(s)} ds. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Como  $\Phi(2+x) = -\Phi(x)$  e  $y(x)$  é a solução do sistema (3.5) que está acima de  $y = \Phi(x)$ , isto é,  $y(x) > \Phi(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , segue que

$$y(2+x) + \Phi(x) = y(2+x) - \Phi(2+x) > 0. \tag{3.11}$$

Derivando a equação (3.10) com relação a  $x$  temos

$$\frac{d}{dx}[y(2+x) - y(-x)] = \frac{x [y(2+x) - y(-x)]}{[y(-x) + \Phi(x)][y(2+x) + \Phi(x)]} - \frac{2}{y(2+x) + \Phi(x)}. \tag{3.12}$$

Por (3.11) e (3.12)

$$\frac{d}{dx}[y(2+x) - y(-x)] < \frac{x [y(2+x) - y(-x)]}{[y(-x) + \Phi(x)][y(2+x) + \Phi(x)]}. \tag{3.13}$$

Utilizando a função auxiliar

$$E(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{-s}{[y(-s) + \Phi(s)][y(2+s) + \Phi(s)]} ds\right)$$

e (3.13) temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [(y(2+x) - y(-x))E(x)] &= \\ &= \left(\frac{d}{dx}[y(2+x) - y(-x)]\right) E(x) - \frac{x [y(2+x) - y(-x)]}{[y(-x) + \Phi(x)][y(2+x) + \Phi(x)]} E(x) < 0. \end{aligned}$$

Assim  $(y(2+x) - y(-x))E(x)$  é decrescente. Como a função exponencial  $E(x)$  é crescente, então  $y(2+x) - y(-x)$  é decrescente. Além disso,

$$y(2) - y(0) = -\int_0^2 \frac{s}{y(s) - \Phi(s)} ds < 0.$$

Logo,  $y(2+x) - y(-x) < 0$  para todo  $x \geq 0$ .

Para verificar a segunda desigualdade utilizamos um raciocínio análogo ao anterior, temos

$$\begin{aligned} y(x) - y(-2-x) &= \int_{-2-x}^x \frac{-s}{y(s) - \Phi(s)} ds \\ &= \int_{-2-x}^{-2} \frac{-s}{y(s) - \Phi(s)} ds + \int_{-2}^0 \frac{-s}{y(s) - \Phi(s)} ds + \int_0^x \frac{-s}{y(s) - \Phi(s)} ds. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Aplicando as mudanças  $s \mapsto -2-s$  e  $s \mapsto -s$  na primeira e segunda integral de (3.14), respectivamente, temos

$$\begin{aligned} y(x) - y(-2-x) &= \\ &= \int_0^x \frac{2+s}{y(-2-s) - \Phi(s)} ds + \int_0^2 \frac{s}{y(-s) - \Phi(-s)} ds + \int_0^x \frac{-s}{y(s) - \Phi(s)} ds \\ &= \int_0^x \frac{2}{y(-2-s) - \Phi(s)} ds + \int_0^2 \frac{s}{y(-s) - \Phi(-s)} ds + \\ &\quad \int_0^x \frac{s [y(s) - y(-2-s)]}{[y(-2-s) - \Phi(s)][y(s) - \Phi(s)]} ds. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sendo  $\Phi(-2-x) = \Phi(x)$  e  $y(x)$  a solução de (3.5) acima do gráfico de  $y = \Phi(x)$ , segue que

$$y(-2-x) - \Phi(x) = y(-2-x) - \Phi(-2-x) > 0. \quad (3.16)$$

Derivando (3.15) com relação a  $x$  temos

$$\frac{d}{dx} [y(x) - y(-2-x)] = \frac{x [y(x) - y(-2-x)]}{[y(-2-x) - \Phi(x)][y(x) - \Phi(x)]} + \frac{2}{y(-2-x) - \Phi(x)}. \quad (3.17)$$

Por (3.16), o segundo termo do lado direito da igualdade (3.17) é positivo, assim

$$\frac{d}{dx}[y(2+x) - y(-x)] > \frac{x [y(x) - y(-2-x)]}{[y(-2-x) - \Phi(x)][y(x) - \Phi(x)]}.$$

Analogamente ao caso anterior, utilizando a função auxiliar  $E(x)$  temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [(y(x) - y(-2-x))E(x)] &= \\ &= \left( \frac{d}{dx} [y(x) - y(-2-x)] \right) E(x) - \frac{x [y(x) - y(-2-x)]}{[y(-2-x) - \Phi(x)][y(x) - \Phi(x)]} E(x) > 0. \end{aligned}$$

Como

$$y(0) - y(-2) = \int_0^2 \frac{s}{y(-s) - \Phi(-s)} ds > 0$$

segue que  $y(x) - y(-2-x) > 0$  para  $x \geq 0$ , o que completa a prova da Afirmação 3.1.2.

### 3.1.1.2 Demonstração da Afirmação 3.1.3

Para verificar esta afirmação consideramos separadamente os casos  $m$  ímpar e  $m$  par. Em ambos os casos, utilizamos indução em  $m$  para verificar tal desigualdade. Ressaltamos que no texto original [10] esta afirmação é demonstrada sem utilizar indução. Para  $y = y(x)$  solução de (3.5) temos que

$$\lambda(x) = \lambda(x, y(x)) = \frac{x^2 + y(x)^2}{2},$$

e por (3.7) temos a expressão de  $\frac{d\lambda}{dx}$ . Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, o estudo da desigualdade (3.8) se reduz a estudar a desigualdade

$$(-1)^{m+1} [\lambda(2m) - \lambda(-2m)] = (-1)^{m+1} \left[ \int_{-2m}^{2m} \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx \right] < 0. \quad (3.18)$$

**(1º Caso):** Consideramos  $m$  ímpar e seja  $\bar{m} \in \{1, 3, 5, \dots, m\}$ . Reescrevemos a desigualdade (3.18) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} (-1)^{\bar{m}+1} \left[ \int_{-2\bar{m}}^{2\bar{m}} \Psi(x) dx \right] &= \\ &= (-1)^{\bar{m}+1} \left[ \int_{-2}^2 \Psi(x) dx + \sum_{k=1}^{(\bar{m}-1)/2} \left( \int_{-4k-2}^{-4k+2} \Psi(x) dx + \int_{4k-2}^{4k+2} \Psi(x) dx \right) \right] < 0, \end{aligned}$$

onde  $\Psi(x) = -x\Phi(x)/(y(x) - \Phi(x))$ . Para  $\bar{m} = 1$  temos  $(-1)^{\bar{m}+1} = 1$ , então basta provar que

$$\int_{-2}^2 \Psi(x)dx = \int_0^2 \Psi(x)dx + \int_{-2}^0 \Psi(x)dx < 0. \quad (3.19)$$

Analisamos inicialmente o sinal de  $\mathcal{A} = \int_0^2 \Psi(x)dx$ . Como  $\Phi(x)$  possui expressões diferentes para  $x \in [0, 1]$  e  $x \in [1, 2]$ , escrevemos

$$\int_0^2 \Psi(x)dx = \int_1^2 \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx + \int_0^1 \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx.$$

Para  $x \in (0, 1)$  e  $x \in (1, 2)$  temos que  $\Phi(x) > 0$  e por hipótese  $y(x) - \Phi(x) > 0$ , assim

$$\int_1^2 \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx < 0, \quad \int_0^1 \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx < 0$$

e

$$\int_0^2 \Psi(x)dx < 0. \quad (3.20)$$

Para analisar o sinal do segundo termo da soma de (3.19),  $\mathcal{B} = \int_{-2}^0 \Psi(x)dx$ , consideramos a mudança de variável  $x \mapsto -x$ . Pela propriedade (3.3) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \Psi(x)dx &= \int_0^2 \frac{-x\Phi(x)}{y(-x) - \Phi(-x)} dx \\ &= \int_1^2 \frac{-x\Phi(x)}{y(-x) - \Phi(-x)} dx + \int_0^1 \frac{-x\Phi(x)}{y(-x) - \Phi(-x)} dx. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por hipótese  $y(-x) - \Phi(-x) > 0$ , daí

$$\int_1^2 \frac{-x\Phi(x)}{y(-x) - \Phi(-x)} dx < 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{-x\Phi(x)}{y(-x) - \Phi(-x)} dx < 0.$$

Concluimos assim que

$$\int_{-2}^0 \Psi(x)dx < 0. \quad (3.22)$$

Segue de (3.20) e (3.22) que

$$\int_{-2}^2 \Psi(x)dx = \int_{-2}^2 \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx < 0,$$

o que prova a desigualdade (3.18) para  $\bar{m} = 1$ .

Por indução, suponhamos que a desigualdade é válida para  $\bar{m} = m$ , ou seja,

$$\begin{aligned} (-1)^{\bar{m}+1} \left[ \int_{-2\bar{m}}^{2\bar{m}} \Psi(x)dx \right] &= \\ &= \int_{-2}^2 \Psi(x)dx + \sum_{k=1}^{(m-1)/2} \left( \int_{-4k-2}^{-4k+2} \Psi(x)dx + \int_{4k-2}^{4k+2} \Psi(x)dx \right) < 0. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que tal desigualdade vale para o próximo ímpar,  $\bar{m} = m + 2$ . Como  $(-1)^{m+3} = 1$ , partimos de

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{-2}^2 \Psi(x) dx + \sum_{k=1}^{(m+1)/2} \left( \int_{-4k-2}^{-4k+2} \Psi(x) dx + \int_{4k-2}^{4k+2} \Psi(x) dx \right) \right] = \\ & = \int_{-2}^2 \Psi(x) dx + \sum_{k=1}^{(m-1)/2} \left( \int_{-4k-2}^{-4k+2} \Psi(x) dx + \int_{4k-2}^{4k+2} \Psi(x) dx \right) + \\ & \quad \left( \int_{-2m-4}^{-2m} \Psi(x) dx + \int_{2m}^{2m+4} \Psi(x) dx \right). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução basta provar que

$$\int_{-2m-4}^{-2m} \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx + \int_{2m}^{2m+4} \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx < 0. \quad (3.23)$$

Pela propriedade (3.3) temos que

$$\Phi(-2m - 2 + x) = \Phi(2m + 2 + x) = \Phi(x).$$

Considerando as mudanças de variável  $x \mapsto -2m - 2 + x$  e  $x \mapsto 2m + 2 + x$  na primeira e segunda integral de (3.23), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^2 \frac{(2m + 2 - x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) - \Phi(x)} dx + \int_{-2}^0 \frac{(2m + 2 - x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) - \Phi(x)} dx \right) + \\ & \left( \int_0^2 \frac{-(2m + 2 + x)\Phi(x)}{y(2m + 2 + x) - \Phi(x)} dx + \int_{-2}^0 \frac{-(2m + 2 + x)\Phi(x)}{y(2m + 2 + x) - \Phi(x)} dx \right). \end{aligned}$$

Denotamos por

$$\mathcal{I} = \left( \int_0^2 \frac{(2m + 2 - x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) - \Phi(x)} dx + \int_0^2 \frac{-(2m + 2 + x)\Phi(x)}{y(2m + 2 + x) - \Phi(x)} dx \right)$$

e

$$\mathcal{J} = \left( \int_{-2}^0 \frac{(2m + 2 - x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) - \Phi(x)} dx + \int_{-2}^0 \frac{-(2m + 2 + x)\Phi(x)}{y(2m + 2 + x) - \Phi(x)} dx \right).$$

Para provarmos (3.23) basta verificar que  $\mathcal{I} + \mathcal{J} < 0$ . Na verdade verificamos que  $\mathcal{I} < 0$  e  $\mathcal{J} < 0$ . Reescrevemos a primeira integral de  $\mathcal{I}$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{(2m + 2 - x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) - \Phi(x)} dx &= \int_1^2 \frac{(2m + 2 - x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) - \Phi(x)} dx + \\ & \int_0^1 \frac{(2m + 2 - x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) - \Phi(x)} dx. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto 2 - x$  na integral  $\int_1^2$  em (3.24) e usamos que  $\Phi(2 - x) \stackrel{(3.3)}{=} \Phi(x)$ . Daí, o lado direito da igualdade (3.24) equivale à

$$\int_0^1 \frac{(2m+x)\Phi(x)}{y(-2m-x) - \Phi(x)} dx + \int_0^1 \frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(-2m-2+x) - \Phi(x)} dx. \quad (3.25)$$

Identificamos

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \frac{(2m+x)\Phi(x)}{y(-2m-x) - \Phi(x)} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_2 = \int_0^1 \frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(-2m-2+x) - \Phi(x)} dx.$$

Do mesmo modo, reescrevemos a segunda integral de  $\mathcal{I}$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{-(2m+2+x)\Phi(x)}{y(2m+2+x) - \Phi(x)} dx &= \int_1^2 \frac{-(2m+2+x)\Phi(x)}{y(2m+2+x) - \Phi(x)} dx + \\ &\int_0^1 \frac{-(2m+2+x)\Phi(x)}{y(2m+2+x) - \Phi(x)} dx. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Novamente, pela mudança de variável  $x \mapsto 2 - x$  na integral  $\int_1^2$  em (3.26), temos que o lado direito da igualdade (3.26) é equivalente à

$$\int_0^1 \frac{-(2m+4-x)\Phi(x)}{y(2m+4-x) - \Phi(x)} dx + \int_0^1 \frac{-(2m+2+x)\Phi(x)}{y(2m+2+x) - \Phi(x)} dx. \quad (3.27)$$

Identificamos

$$\mathcal{I}_3 = \int_0^1 \frac{-(2m+4-x)\Phi(x)}{y(2m+4-x) - \Phi(x)} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_4 = \int_0^1 \frac{-(2m+2+x)\Phi(x)}{y(2m+2+x) - \Phi(x)} dx.$$

Logo, por (3.25) e (3.27) a integral  $\mathcal{I}$  pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_4) + (\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3) \\ &= \int_0^1 \left( \frac{(2m+x)\Phi(x)}{y(-2m-x) - \Phi(x)} - \frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(2m+2+x) - \Phi(x)} \right) dx + \\ &\int_0^1 \left( \frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(-2m-2+x) - \Phi(x)} - \frac{(2m+4-x)\Phi(x)}{y(2m+4-x) - \Phi(x)} \right) dx, \end{aligned}$$

onde denotamos por  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_4$  e  $\mathcal{D}_{\mathcal{I}} = \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3$ . Pela Afirmação 3.1.2 temos

$$y(-2m-x) = y(-\underbrace{(2m+x)}_{(>0)}) > y(2m+2+x)$$

e

$$y(-2m-2+x) = y(-\underbrace{(2m+2-x)}_{(>0)}) > y(2m+4-x),$$

e como  $\Phi(x) > 0$  para  $0 < x < 1$ , segue que

$$\frac{(2m+x)\Phi(x)}{y(-2m-x)-\Phi(x)} < \frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(2m+2+x)-\Phi(x)}$$

e

$$\frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(-2m-2+x)-\Phi(x)} < \frac{(2m+4-x)\Phi(x)}{y(2m+4-x)-\Phi(x)}.$$

Portanto, concluímos que  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}} < 0$  e  $\mathcal{D}_{\mathcal{I}} < 0$ , e então

$$\mathcal{I} < 0. \quad (3.28)$$

Para analisar a integral  $\mathcal{J}$  utilizamos o mesmo raciocínio que na análise da integral  $\mathcal{I}$ . Efetuamos a mudança de variável  $x \mapsto -x$  em  $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J} = \int_0^2 \frac{-(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x)+\Phi(x)} dx + \int_0^2 \frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(2m+2-x)+\Phi(x)} dx. \quad (3.29)$$

Reescrevemos a primeira integral de  $\mathcal{J}$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{-(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x)+\Phi(x)} dx &= \int_1^2 \frac{-(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x)+\Phi(x)} dx + \\ &\int_0^1 \frac{-(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x)+\Phi(x)} dx, \end{aligned} \quad (3.30)$$

e aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto 2-x$  na integral  $\int_1^2$ . O lado direito da igualdade (3.30) equivale à

$$\int_0^1 \frac{-(2m+4-x)\Phi(x)}{y(-2m-4+x)+\Phi(x)} dx + \int_0^1 \frac{-(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x)+\Phi(x)} dx. \quad (3.31)$$

Identificamos

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^1 \frac{-(2m+4-x)\Phi(x)}{y(-2m-4+x)+\Phi(x)} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_2 = \int_0^1 \frac{-(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x)+\Phi(x)} dx.$$

Reescrevemos a segunda integral de (3.29) como

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(2m+2-x)+\Phi(x)} dx &= \int_1^2 \frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(2m+2-x)+\Phi(x)} dx + \\ &\int_0^1 \frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(2m+2-x)+\Phi(x)} dx, \end{aligned} \quad (3.32)$$

e com a mudança de variável  $x \mapsto 2-x$  em  $\int_1^2$ , o lado direito da igualdade (3.32) equivale à

$$\int_0^1 \frac{(2m+x)\Phi(x)}{y(2m+x)+\Phi(x)} dx + \int_0^1 \frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(2m+2-x)+\Phi(x)} dx. \quad (3.33)$$

Identificamos

$$\mathcal{J}_3 = \int_0^1 \frac{(2m+x)\Phi(x)}{y(2m+x)+\Phi(x)} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_4 = \int_0^1 \frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(2m+2-x)+\Phi(x)} dx.$$

Segue de (3.31) e (3.33) que a igualdade (3.29) pode ser reescrita da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= (\mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_2) + (\mathcal{J}_4 + \mathcal{J}_1) \\ &= \int_0^1 \left( \frac{(2m+x)\Phi(x)}{y(2m+x)+\Phi(x)} - \frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x)+\Phi(x)} \right) dx \quad + \\ &\quad \int_0^1 \left( \frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(2m+2-x)+\Phi(x)} - \frac{(2m+4-x)\Phi(x)}{y(-2m-4+x)+\Phi(x)} \right) dx, \end{aligned}$$

onde denotamos  $\mathcal{C}_{\mathcal{J}} = \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_2$  e  $\mathcal{D}_{\mathcal{J}} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_4$ . Pela Afirmação 3.1.2 temos

$$y(2m+x) > y(-2m-2-x) \quad \text{e} \quad y(2m+2-x) > y(-2m-4+x),$$

e como  $\Phi(x) > 0$  para  $0 < x < 1$ , segue que

$$\frac{(2m+x)\Phi(x)}{y(2m+x)+\Phi(x)} < \frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x)+\Phi(x)}$$

e

$$\frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(2m+2-x)+\Phi(x)} < \frac{(2m+4-x)\Phi(x)}{y(-2m-4+x)+\Phi(x)}.$$

Donde concluímos que  $\mathcal{C}_{\mathcal{J}} < 0$  e  $\mathcal{D}_{\mathcal{J}} < 0$ , e então

$$\mathcal{J} < 0. \tag{3.34}$$

Portanto, a desigualdade (3.23) segue de (3.28) e (3.34). E com isso, por indução, está provada a desigualdade (3.18) para  $m$  ímpar.

Agora, analisamos o caso para  $m$  par. Seguimos o mesmo raciocínio do caso  $m$  ímpar. Pequenas diferenças surgem na forma de reescrever a desigualdade a ser provada.

**(2º Caso):** Consideramos  $m$  par e seja  $\overline{m} \in \{2, 4, 6, \dots, m\}$ . Daí, a desigualdade (3.18) pode ser reescrita da forma

$$\begin{aligned} (-1)^{\overline{m}+1} \left[ \int_{-2\overline{m}}^{2\overline{m}} \Psi(x) dx \right] &= (-1)^{\overline{m}+1} \left[ \int_{-4}^{-2} \Psi(x) dx + \int_{-2}^2 \Psi(x) dx + \int_2^4 \Psi(x) dx + \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^{(\overline{m}-2)/2} \left( \int_{-4k-4}^{-4k} \Psi(x) dx + \int_{4k}^{4k+4} \Psi(x) dx \right) \right] < 0, \end{aligned} \tag{3.35}$$



com  $\Psi(x) = -x\Phi(x)/(y(x) - \Phi(x))$ . Suponhamos  $\overline{m} = 2$ . Neste caso,  $(-1)^{\overline{m}+1} = -1$  e a desigualdade (3.18) é válida se

$$\left[ \int_{-4}^{-2} \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx + \int_{-2}^2 \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx + \int_2^4 \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx \right] > 0. \quad (3.36)$$

Aplicamos as mudanças de variável  $x \mapsto -4 + x$  e  $x \mapsto 4 + x$  na primeira e na terceira integral de (3.36), respectivamente. Por (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} & \left[ \int_0^2 \frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(x-4) - \Phi(x)} dx + \int_{-2}^2 \Psi(x) dx + \int_{-2}^0 \frac{(-x-4)\Phi(x)}{y(x+4) - \Phi(x)} dx \right] = \\ & = \left( \int_0^2 \frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(x-4) - \Phi(x)} dx + \int_0^2 \Psi(x) dx \right) + \left( \int_{-2}^0 \Psi(x) dx + \int_{-2}^0 \frac{(-x-4)\Phi(x)}{y(x+4) - \Phi(x)} dx \right). \end{aligned}$$

Denotamos por

$$\mathcal{K} = \left( \int_0^2 \frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(x-4) - \Phi(x)} dx + \int_0^2 \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx \right)$$

e

$$\mathcal{L} = \left( \int_{-2}^0 \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx + \int_{-2}^0 \frac{(-x-4)\Phi(x)}{y(x+4) - \Phi(x)} dx \right).$$

Inicialmente analisamos o sinal de  $\mathcal{K}$ . Reescrevemos a primeira integral de  $\mathcal{K}$

$$\int_0^2 \frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(x-4) - \Phi(x)} dx = \int_1^2 \frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(x-4) - \Phi(x)} dx + \int_0^1 \frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(x-4) - \Phi(x)} dx. \quad (3.37)$$

Pela mudança de variável  $x \mapsto 2 - x$  na primeira integral e por  $\Phi(2 - x) \stackrel{(3.3)}{=} \Phi(x)$ , o lado direito da igualdade (3.37) equivale à

$$\int_0^1 \frac{(x+2)\Phi(x)}{y(-x-2) - \Phi(x)} dx + \int_0^1 \frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(x-4) - \Phi(x)} dx. \quad (3.38)$$

Identificamos

$$\mathcal{K}_1 = \int_0^1 \frac{(x+2)\Phi(x)}{y(-x-2) - \Phi(x)} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{K}_2 = \int_0^1 \frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(x-4) - \Phi(x)} dx.$$

Na segunda integral de  $\mathcal{K}$  consideramos  $\int_0^2 = \int_1^2 + \int_0^1$  e aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto 2 - x$  na integral  $\int_1^2$ . Assim

$$\int_0^2 \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx = \int_0^1 \frac{-(-x+2)\Phi(x)}{y(-x+2) - \Phi(x)} dx + \int_0^1 \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx. \quad (3.39)$$

Identificamos

$$\mathcal{K}_3 = \int_0^1 \frac{-(-x+2)\Phi(x)}{y(-x+2) - \Phi(x)} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{K}_4 = \int_0^1 \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx.$$

Por (3.38) e (3.39) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_4) + (\mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3) &= \int_0^1 \left( \frac{(x+2)\Phi(x)}{y(-x-2) - \Phi(x)} - \frac{x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} \right) dx + \\ &\int_0^1 \left( \frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(x-4) - \Phi(x)} - \frac{(-x+2)\Phi(x)}{y(-x+2) - \Phi(x)} \right) dx, \end{aligned}$$

onde denotamos por  $\mathcal{C}_\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_4$  e  $\mathcal{D}_\mathcal{K} = \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3$ . Logo, como para  $0 < x < 1$  temos  $\Phi(x) > 0$  e  $1 < -x+2 < 2$ , pela Afirmação 3.1.2 temos que

$$y(x) > y(-x-2) \quad \text{e} \quad y(-x+2) > y(x-4).$$

Daí,

$$\frac{(x+2)\Phi(x)}{y(-x-2) - \Phi(x)} > \frac{x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)}$$

e

$$\frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(x-4) - \Phi(x)} > \frac{(-x+2)\Phi(x)}{y(-x+2) - \Phi(x)}.$$

Portanto,  $\mathcal{C}_\mathcal{K} > 0$  e  $\mathcal{D}_\mathcal{K} > 0$ . Assim

$$\mathcal{K} > 0. \quad (3.40)$$

Analisamos a integral  $\mathcal{L}$ . Inicialmente aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto -x$  em  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \int_0^2 \frac{-x\Phi(x)}{y(-x) + \Phi(x)} dx + \int_0^2 \frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(-x+4) + \Phi(x)} dx. \quad (3.41)$$

Reescrevemos a primeira integral de  $\mathcal{L}$  como

$$\int_0^2 \frac{-x\Phi(x)}{y(-x) + \Phi(x)} dx = \int_1^2 \frac{-x\Phi(x)}{y(-x) + \Phi(x)} dx + \int_0^1 \frac{-x\Phi(x)}{y(-x) + \Phi(x)} dx, \quad (3.42)$$

e fazemos a mudança de variável  $x \mapsto 2-x$  na integral  $\int_1^2$ . Logo, o lado direito da igualdade (3.42) equivale à

$$\int_0^1 \frac{-(2-x)\Phi(x)}{y(x+2) + \Phi(x)} dx + \int_0^1 \frac{-x\Phi(x)}{y(-x) + \Phi(x)} dx. \quad (3.43)$$

Identificamos

$$\mathcal{L}_1 = \int_0^1 \frac{-(2-x)\Phi(x)}{y(x+2) + \Phi(x)} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_2 = \int_0^1 \frac{-x\Phi(x)}{y(-x) + \Phi(x)} dx.$$

Do mesmo modo, na segunda integral de (3.41) consideramos  $\int_0^2 = \int_1^2 + \int_0^1$  e aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto 2-x$  na integral  $\int_1^2$ . Assim

$$\int_0^2 \frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(-x+4) + \Phi(x)} dx = \int_0^1 \frac{(x+2)\Phi(x)}{y(x+2) + \Phi(x)} dx + \int_0^1 \frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(-x+4) + \Phi(x)} dx. \quad (3.44)$$

Identificamos

$$\mathcal{L}_3 = \int_0^1 \frac{(x+2)\Phi(x)}{y(x+2) + \Phi(x)} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_4 = \int_0^1 \frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(-x+4) + \Phi(x)} dx.$$

Por (3.43) e (3.44) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = (\mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_2) + (\mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_1) &= \int_0^1 \left( \frac{(x+2)\Phi(x)}{y(x+2) + \Phi(x)} - \frac{x\Phi(x)}{y(-x) + \Phi(x)} \right) dx + \\ &\int_0^1 \left( \frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(-x+4) + \Phi(x)} - \frac{(2-x)\Phi(x)}{y(x+2) + \Phi(x)} \right) dx, \end{aligned}$$

onde denotamos por  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_2$  e  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_1$ . Como para  $0 < x < 1$  temos  $\Phi(x) > 0$  e  $1 < -x+2 < 2$ , pela Afirmação 3.1.2 temos

$$y(-x) > y(2+x) \quad \text{e} \quad y(x-2) > y(-x+4).$$

Daí,

$$\frac{(x+2)\Phi(x)}{y(x+2) + \Phi(x)} > \frac{x\Phi(x)}{y(-x) + \Phi(x)}$$

e

$$\frac{(-x+4)\Phi(x)}{y(-x+4) + \Phi(x)} > \frac{(2-x)\Phi(x)}{y(x+2) + \Phi(x)}.$$

Donde concluímos que  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} > 0$  e  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} > 0$ . Assim

$$\mathcal{L} > 0. \tag{3.45}$$

Portanto, segue de (3.40) e (3.45) que a desigualdade (3.36) é satisfeita para  $\overline{m} = 2$ .

Por indução, suponhamos que a desigualdade (3.35) é válida para  $\overline{m} = m$ , ou seja, visto que  $(-1)^{m+1} = -1$  temos

$$\int_{-4}^{-2} \Psi(x) dx + \int_{-2}^2 \Psi(x) dx + \int_2^4 \Psi(x) dx + \sum_{k=1}^{(m-2)/2} \left( \int_{-4k-4}^{-4k} \Psi(x) dx + \int_{4k}^{4k+4} \Psi(x) dx \right) > 0,$$

onde  $\Psi(x) = -x\Phi(x)/(y(x) - \Phi(x))$ . Vamos mostrar que a desigualdade (3.35) vale para o próximo par,  $\overline{m} = m+2$ . Como  $(-1)^{m+3} = -1$ , temos que verificar a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} &\left[ \int_{-4}^{-2} \Psi(x) dx + \int_{-2}^2 \Psi(x) dx + \int_2^4 \Psi(x) dx + \sum_{k=1}^{m/2} \left( \int_{-4k-4}^{-4k} \Psi(x) dx + \int_{4k}^{4k+4} \Psi(x) dx \right) \right] = \\ &= \int_{-4}^{-2} \Psi(x) dx + \int_{-2}^2 \Psi(x) dx + \int_2^4 \Psi(x) dx + \sum_{k=1}^{(m-2)/2} \left( \int_{-4k-2}^{-4k+2} \Psi(x) dx + \int_{4k-2}^{4k+2} \Psi(x) dx \right) + \\ &\quad \left( \int_{-2m-4}^{-2m} \Psi(x) dx + \int_{2m}^{2m+4} \Psi(x) dx \right) > 0. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução basta provar que

$$\int_{-2m-4}^{-2m} \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx + \int_{2m}^{2m+4} \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx > 0. \quad (3.46)$$

Pela propriedade (3.3) temos que para  $m$  par vale

$$\Phi(-2m - 2 + x) = \Phi(2m + 2 + x) = -\Phi(x).$$

Considerando as mudanças de variável  $x \mapsto -2m - 2 + x$  e  $x \mapsto 2m + 2 + x$  na primeira e segunda integral de (3.46), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^2 \frac{(-2m - 2 + x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) + \Phi(x)} dx + \int_{-2}^0 \frac{(-2m - 2 + x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) + \Phi(x)} dx \right) + \\ & \left( \int_0^2 \frac{(2m + 2 + x)\Phi(x)}{y(2m + 2 + x) + \Phi(x)} dx + \int_{-2}^0 \frac{(2m + 2 + x)\Phi(x)}{y(2m + 2 + x) + \Phi(x)} dx \right). \end{aligned}$$

Denotamos por

$$\mathcal{M} = \left( \int_0^2 \frac{(-2m - 2 + x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) + \Phi(x)} dx + \int_0^2 \frac{(2m + 2 + x)\Phi(x)}{y(2m + 2 + x) + \Phi(x)} dx \right)$$

e

$$\mathcal{N} = \left( \int_{-2}^0 \frac{(-2m - 2 + x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) + \Phi(x)} dx + \int_{-2}^0 \frac{(2m + 2 + x)\Phi(x)}{y(2m + 2 + x) + \Phi(x)} dx \right).$$

Para provarmos (3.46) basta verificar que  $\mathcal{M} + \mathcal{N} > 0$ . Verificamos que  $\mathcal{M} > 0$  e  $\mathcal{N} > 0$ . Reescrevemos a primeira integral de  $\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{(-2m - 2 + x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) + \Phi(x)} dx &= \int_1^2 \frac{(-2m - 2 + x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) + \Phi(x)} dx + \\ & \int_0^1 \frac{(-2m - 2 + x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) + \Phi(x)} dx. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto 2 - x$  na integral  $\int_1^2$  em (3.47). Daí, o lado direito da igualdade (3.47) equivale à

$$\int_0^1 \frac{(-2m - x)\Phi(x)}{y(-2m - x) + \Phi(x)} dx + \int_0^1 \frac{(-2m - 2 + x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) + \Phi(x)} dx. \quad (3.48)$$

Identificamos

$$\mathcal{M}_1 = \int_0^1 \frac{(-2m - x)\Phi(x)}{y(-2m - x) + \Phi(x)} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_2 = \int_0^1 \frac{(-2m - 2 + x)\Phi(x)}{y(-2m - 2 + x) + \Phi(x)} dx.$$

Na segunda integral de  $\mathcal{M}$  consideramos  $\int_0^2 = \int_1^2 + \int_0^1$  e aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto 2 - x$  na integral  $\int_1^2$ . Assim

$$\int_0^2 \frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(2m+2+x)+\Phi(x)} dx = \int_0^1 \frac{(2m+4-x)\Phi(x)}{y(2m+4-x)+\Phi(x)} dx + \int_0^1 \frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(2m+2+x)+\Phi(x)} dx. \quad (3.49)$$

Identificamos

$$\mathcal{M}_3 = \int_0^1 \frac{(2m+4-x)\Phi(x)}{y(2m+4-x)+\Phi(x)} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_4 = \int_0^1 \frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(2m+2+x)+\Phi(x)} dx.$$

Logo, por (3.48) e (3.49) a integral  $\mathcal{M}$  pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (\mathcal{M}_4 + \mathcal{M}_1) + (\mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_2) \\ &= \int_0^1 \left( \frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(2m+2+x)+\Phi(x)} - \frac{(2m+x)\Phi(x)}{y(-2m-x)+\Phi(x)} \right) dx + \\ &\quad \int_0^1 \left( \frac{(2m+4-x)\Phi(x)}{y(2m+4-x)+\Phi(x)} - \frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(-2m-2+x)+\Phi(x)} \right) dx, \end{aligned}$$

onde denotamos por  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_4 + \mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_2$ . Pela Afirmação 3.1.2 temos

$$y(-2m-x) > y(2m+2+x) \quad \text{e} \quad y(-2m-2+x) > y(2m+4-x),$$

e como  $\Phi(x) > 0$  para  $0 < x < 1$ , segue que

$$\frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(2m+2+x)+\Phi(x)} > \frac{(2m+x)\Phi(x)}{y(-2m-x)+\Phi(x)}$$

e

$$\frac{(2m+4-x)\Phi(x)}{y(2m+4-x)+\Phi(x)} > \frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(-2m-2+x)+\Phi(x)}.$$

Portanto, concluímos que  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}} > 0$  e  $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} > 0$ , e então

$$\mathcal{M} > 0. \quad (3.50)$$

Analisamos a integral  $\mathcal{N}$ . Inicialmente aplicamos a mudança  $x \mapsto -x$  em  $\mathcal{N}$

$$\mathcal{N} = \int_0^2 \frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x)-\Phi(x)} dx + \int_0^2 \frac{(-2m-2+x)\Phi(x)}{y(2m+2-x)-\Phi(x)} dx. \quad (3.51)$$

Reescrevendo a primeira integral de  $\mathcal{N}$  como

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x)-\Phi(x)} dx &= \int_1^2 \frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x)-\Phi(x)} dx + \\ &\quad \int_0^1 \frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x)-\Phi(x)} dx, \end{aligned} \quad (3.52)$$

e fazemos a mudança de variável  $x \mapsto 2 - x$  na integral  $\int_1^2$ . Logo, o lado direito da igualdade (3.52) equivale à

$$\int_0^1 \frac{(2m+4-x)\Phi(x)}{y(-2m-4+x) - \Phi(x)} dx + \int_0^1 \frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x) - \Phi(x)} dx. \quad (3.53)$$

Identificamos

$$\mathcal{N}_1 = \int_0^1 \frac{(2m+4-x)\Phi(x)}{y(-2m-4+x) - \Phi(x)} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_2 = \int_0^1 \frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x) - \Phi(x)} dx.$$

Do mesmo modo, na segunda integral de (3.51) consideramos  $\int_0^2 = \int_1^2 + \int_0^1$  e aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto 2 - x$  na integral  $\int_1^2$ . Assim

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{(-2m-2+x)\Phi(x)}{y(2m+2-x) - \Phi(x)} dx &= \int_0^1 \frac{(-2m-x)\Phi(x)}{y(2m+x) - \Phi(x)} dx + \\ &\int_0^1 \frac{(-2m-2+x)\Phi(x)}{y(2m+2-x) - \Phi(x)} dx. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Identificamos

$$\mathcal{N}_3 = \int_0^1 \frac{(-2m-x)\Phi(x)}{y(2m+x) - \Phi(x)} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_4 = \int_0^1 \frac{(-2m-2+x)\Phi(x)}{y(2m+2-x) - \Phi(x)} dx.$$

Segue de (3.53) e (3.54) que a igualdade (3.51) pode ser reescrita da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= (\mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_3) + (\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_4) \\ &= \int_0^1 \left( \frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x) - \Phi(x)} - \frac{(2m+x)\Phi(x)}{y(2m+x) - \Phi(x)} \right) dx + \\ &\int_0^1 \left( \frac{(2m+4-x)\Phi(x)}{y(-2m-4+x) - \Phi(x)} - \frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(2m+2-x) - \Phi(x)} \right) dx, \end{aligned}$$

onde denotamos  $\mathcal{C}_{\mathcal{N}} = \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_3$  e  $\mathcal{D}_{\mathcal{N}} = \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_4$ . Pela Afirmação 3.1.2 temos

$$y(2m+x) > y(-2m-2-x) \quad \text{e} \quad y(2m+2-x) > y(-2m-4+x),$$

e como  $\Phi(x) > 0$  para  $0 < x < 1$ , segue que

$$\frac{(2m+2+x)\Phi(x)}{y(-2m-2-x) - \Phi(x)} > \frac{(2m+x)\Phi(x)}{y(2m+x) - \Phi(x)}$$

e

$$\frac{(2m+4-x)\Phi(x)}{y(-2m-4+x) - \Phi(x)} > \frac{(2m+2-x)\Phi(x)}{y(2m+2-x) - \Phi(x)}.$$

Donde concluímos que  $\mathcal{C}_{\mathcal{N}} > 0$  e  $\mathcal{D}_{\mathcal{N}} > 0$ , e então

$$\mathcal{N} > 0. \quad (3.55)$$

Portanto, a desigualdade (3.46) segue de (3.50) e (3.55). E com isso, por indução, está provada a desigualdade (3.18) para  $m$  par. Assim, completamos a demonstração da Afirmação 3.1.3.

## 3.1.1.3 Demonstração da Afirmação 3.1.4

De fato, verificamos que cada arco de uma órbita do sistema (3.5) que está localizado no semiplano  $x > 0$  ou  $x < 0$ , cruza o gráfico da função  $\Phi(x)$  ou o eixo- $x$  no máximo uma vez. Notamos que o campo de vetores de (3.5) é vertical sobre o gráfico da função  $\Phi(x)$  pois

$$\begin{array}{l} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -x < 0 \text{ para } x > 0 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -x > 0 \text{ para } x < 0. \end{array}$$

Ou seja, as situações dadas pela Figura 3.8 não podem ocorrer, pois em (a) existe um outro ponto no qual a campo é vertical, porém temos que o mesmo é vertical somente sobre o gráfico da  $\Phi(x)$ , e em (b), visto que o campo é vertical sobre  $\Phi(x)$ , a órbita forma um “bico” e contraria o fluxo.

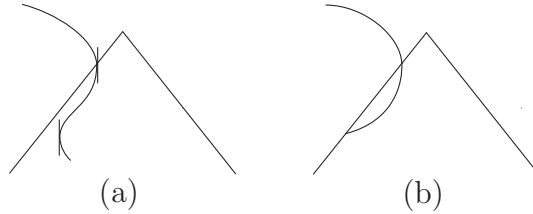


Figura 3.8: Situações que a órbita  $\gamma_{-2m}$  não satisfaz.

Como a órbita  $\gamma_{-2m}$  não pode tender ao infinito, pois pela Afirmação 3.1.2 para  $x = 0$  vale  $y(0) > y(2)$  (notamos que para  $x = 0$  o campo é horizontal com  $\dot{x} = y, \dot{y} = 0$ ), temos que  $0 < x_{-2m}$  e  $\gamma_{-2m}$  está acima do eixo- $x$  antes de chegar a  $B_m$ . Além disso, a Afirmação 3.1.3 garante que  $x_{-2m} > 2m$  para  $m$  par. De fato, se  $x_{-2m} < 2m$  existe uma órbita que cruza o eixo- $x$  no ponto  $(2m, 0)$ . Pela existência e unicidade de soluções, esta órbita está acima da órbita  $\gamma_{-2m}$  e cruza a reta  $x = -2m$  em  $I'_m = (-2m, y_{I'_m})$  com  $y_{I'_m} > 0$ , veja Figura 3.9. Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \lambda(2m) &= \lambda(2m, y(2m)) \\ &= \lambda(2m, 0) \\ &< \lambda(-2m, y_{I'_m}) \\ &= \lambda(-2m, y(-2m)) \\ &= \lambda(-2m) \end{aligned}$$

implica que, para  $m$  par,  $(-1)^{m+1}[\lambda(2m) - \lambda(-2m)] > 0$ , o que contradiz a Afirmação 3.1.3.

Notamos que se  $x_{-2m} = 2m$ , então

$$\lambda(2m) = \lambda(B_m) = \lambda(2m, 0) = \lambda(-2m, 0) = \lambda(A_m) = \lambda(-2m)$$

o que também contradiz a Afirmação 3.1.3. De modo análogo temos que  $x_{-2m} < 2m$  para  $m$  ímpar, pois caso contrário, a órbita  $\gamma_{-2m}$  cruza a reta  $x = 2m$  num ponto  $I''_m = (2m, y_{I''_m})$  com  $y_{I''_m} > 0$  e então temos  $\lambda(2m) > \lambda(-2m)$ . Consequentemente  $(-1)^{m+1}[\lambda(2m) - \lambda(-2m)] > 0$ , o que contradiz a Afirmação 3.1.3.

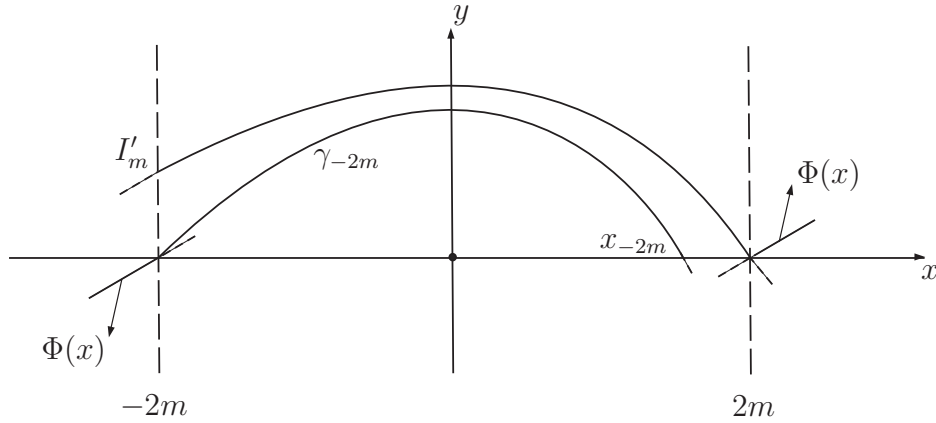


Figura 3.9: Arco de órbita intersectando o eixo- $x$  no ponto  $(2m, 0)$  para  $m$  par.

Para  $m$  par a unicidade de soluções garante que  $2m < x_{-2m} < x_{-2(m+1)} < 2(m+1)$ . Como  $\dot{x} > 0$  (respectivamente  $\dot{x} < 0$ ) para  $y > \Phi(x)$  (respectivamente  $y < \Phi(x)$ ) segue que  $2m < x_{-2m} < x_{I_m} < 2m+2$  e  $2m < x_{-2m} < x_{-2(m+1)} < x_{I_{m+1}} < 2m+2$ . Além disso,  $y_{I_m} > 0$  e  $y_{I_{m+1}} > 0$  já que  $\Phi(x) > 0$  para  $2m < x < 2m+2$ . Agora, para  $m$  ímpar temos que  $2m-2 < x_{-2m} < x_{I_m} < 2m$  e  $2m-2 < x_{-2m+2} < x_{-2m} < 2m$  pois a unicidade de soluções garante que  $2(m-1) < x_{-2(m-1)} < x_{-2m} < 2m$ . Para  $2m-2 < x < 2m$ ,  $\Phi(x) > 0$ , e assim  $y_{I_{m-1}} > 0$  e  $y_{I_m} > 0$ . Com isso, provamos a Afirmação 3.1.4.

### 3.1.2 Unicidade do ciclo limite encontrado em 3.1.1

Nesta subseção verificamos que o sistema (3.5) possui um único ciclo limite tal que seu ponto mais a direita está localizado na faixa  $2m < x < 2m+2$  para  $m \in \mathbb{N}$ .

Durante esta etapa são enunciados três lemas cujas demonstrações são apresentadas em 3.1.2.1, 3.1.2.2 e 3.1.2.3.

Seja  $\Gamma$  um ciclo limite com seu ponto mais a direita na faixa  $2m < x < 2m+2$  para algum  $m \in \mathbb{N}$ , e seja  $\lambda$  o multiplicador de  $\Gamma$ , isto é, o autovalor da aplicação primeiro retorno de Poincaré associada ao ciclo limite  $\Gamma$ .

Lembramos que a derivada de  $\Phi(x)$  não está definida sobre  $x = 2m+1$  para  $m \in \mathbb{Z}$ . Assim, denotamos por  $\Phi_x(x)$ , a derivada pela esquerda (respec. direita) se consideramos  $x$  no intervalo  $(2m, 2m+1]$  (respec.  $[2m+1, 2m+2)$ ). Segue de (3.4) que  $\Phi_x(x) = \pm\varepsilon$ . Decompomos o ciclo limite  $\Gamma = \bigcup_{k=0}^M \gamma_k$  onde  $\gamma_k$  são os arcos de órbita consecutivos de  $\Gamma$  separados pelas retas  $x = 2m+1$  para  $m \in \mathbb{Z}$ . Com abuso de notação, denotamos por  $\int_{\gamma_k}$  a integral sobre o intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$  onde está definido o arco de órbita  $\gamma_k$ . Para este ciclo limite  $\Gamma$  vale o seguinte lema.

**Lema 3.1.1** *O multiplicador do ciclo limite  $\Gamma$  para o sistema (3.5) é*

$$\lambda = \exp\left(-\sum_{k=0}^M \int_{\gamma_k} \Phi_x(x(t)) dt\right),$$



onde o somatório percorre todos  $\gamma'_k$ s.

Com os lemas a seguir demonstramos a unicidade do ciclo limite com seu ponto mais a direita localizado na faixa  $2m < x < 2m + 2$  para  $m \in \mathbb{N}$ .

Assim como no Lema 3.1.1, decomponemos uma órbita periódica  $\Gamma_m$  com seu ponto mais a direita na faixa  $2m < x \leq 2m + 1$  para algum  $m \in \mathbb{N}$  por

$$\Gamma_m = \cup \gamma_m.$$

Daqui por diante, dado uma órbita periódica  $\Gamma$ , abusamos da notação e consideramos a integral  $\int_{\Gamma}$  como a integral sobre o intervalo em que está definida a órbita periódica  $\Gamma$ .

**Lema 3.1.2** *Seja  $\Gamma_m$  uma órbita periódica do sistema (3.5) tal que seu ponto mais a direita está localizado na faixa  $2m < x \leq 2m + 1$  para  $m \in \mathbb{N}$ . Então*

$$(-1)^m \sum_{k=0}^{M_m} \int_{\gamma_{m_k}} \Phi_x(x(t)) dt = (-1)^m \int_{\Gamma_m} \Phi_x(x(t)) dt > 0.$$

Com este lema obtemos uma outra maneira de escrever o expoente característico associado a uma órbita periódica tal que seu ponto mais a direita está localizado na faixa  $2m < x \leq 2m + 1$ . O próximo resultado nos dá uma relação entre o expoente característico para órbitas periódicas tal que seus respectivos pontos mais a direita estão localizados na faixa  $2m + 1 \leq x < 2m + 2$ . Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  duas órbitas periódicas. Para tais órbitas, dizemos que  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$  se a órbita  $\Gamma_1$  estiver completamente contida na região delimitada por  $\Gamma_2$ .

**Lema 3.1.3** *Se o sistema (3.5) possui duas órbitas periódicas  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$  tal que ambas têm seu ponto mais a direita localizado na faixa  $2m + 1 \leq x < 2m + 2$  com  $m \in \mathbb{N}$ , então seus expoentes satisfazem*

$$(-1)^m \left[ \int_{\Gamma_2} \Phi_x(x(t)) dt - \int_{\Gamma_1} \Phi_x(x(t)) dt \right] < 0. \quad (3.56)$$

Finalmente, com os resultados obtidos nos Lemas 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3 mostramos que o sistema (3.5) possui um único ciclo limite tal que seu ponto mais a direita está localizado na faixa  $2m < x < 2m + 2$  para  $m \in \mathbb{N}$ . Para isto, dividimos a prova em dois casos. Analisamos a unicidade do ciclo limite tal que seu ponto mais a direita está localizado na faixa  $2m < x < 2m + 2$ .

**(Caso 1):** Assumimos que o sistema (3.5) possua uma órbita periódica  $\Gamma_m$  tal que seu ponto mais a direita está localizado na faixa  $2m < x \leq 2m + 1$ . Vamos verificar que neste caso o sistema (3.5) não pode ter uma ou mais órbitas periódicas tais que seus respectivos pontos mais a direita estão na faixa  $2m + 1 < x < 2m + 2$ .

Pelos Lemas 3.1.1 e 3.1.2, para  $m$  ímpar (par), a órbita periódica  $\Gamma_m$  é o único ciclo limite hiperbólico instável (estável) do sistema (3.5), tal que seu ponto mais a direita está localizado na faixa  $2m < x \leq 2m + 1$ . De fato, pelo Lema 3.1.1 temos que o multiplicador da órbita periódica  $\Gamma_m$  é dado por

$$\lambda = \exp \left( - \sum_{k=0}^{M_m} \int_{\gamma_{m_k}} \Phi_x(x(t)) dt \right). \quad (3.57)$$

E pelo Lema 3.1.2, dado  $\Gamma_m$  como acima, obtemos que para todo  $m \in \mathbb{N}$  vale

$$(-1)^m \sum_{k=0}^{M_m} \int_{\gamma_{m_k}} \Phi_x(x(t)) dt > 0. \quad (3.58)$$

Assim, para  $m$  ímpar (par) o somatório de (3.58) necessariamente é negativo (positivo), conseqüentemente por (3.57) temos que  $\lambda > 1$  ( $\lambda < 1$ ), ou seja,  $\Gamma_m$  é um ciclo limite hiperbólico instável (estável). A unicidade segue do fato que, dado um ciclo limite hiperbólico  $\Gamma_m$  (instável ou estável) com seu ponto mais a direita localizado na faixa  $2m < x \leq 2m + 1$ , se existir um outro ciclo limite hiperbólico  $\Gamma'_m$  com seu ponto mais a direita localizado na mesma faixa, então o Lema 3.1.2 garante que o ciclo limite  $\Gamma'_m$  tem a mesma estabilidade de  $\Gamma_m$ , o que leva a uma descontinuidade no campo. A seguir analisamos somente o caso  $m$  ímpar. Para  $m$  par a prova é análoga.

Sendo  $\Gamma_m$  a órbita periódica com seu ponto mais a direita na faixa  $2m < x \leq 2m + 1$ , assumimos que o sistema (3.5) possui uma outra órbita periódica  $\Gamma_m^*$  tal que seu ponto mais a direita está localizado na faixa  $2m + 1 < x < 2m + 2$ . Se  $\Gamma_m^*$  é a única órbita periódica com seu ponto mais a direita localizado na faixa  $2m + 1 < x < 2m + 2$ , então  $\Gamma_m^*$  é a órbita periódica mais próxima do ponto  $\bar{A}_{m+1} = (2m + 2, 0)$  pelo lado esquerdo. Assim, sendo  $\Gamma_m$  instável para  $m$  ímpar, segue do item (c) da Proposição 3.1.1 que  $\Gamma_m^*$  é interiormente estável e exteriormente instável. Notamos que para o caso  $m$  par, temos  $\Gamma_m^*$  interiormente instável e exteriormente estável.

Consideramos o sistema  $X_\alpha(x, y) = (P(x, y, \alpha), Q(x, y, \alpha))$  dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \Phi(x) - \alpha F_m(x), \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro real e

$$F_m(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ para } |x| \leq 2m + 1 \text{ e } |x| \geq 2m + 2, \\ \Phi(x) - \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & , \text{ para } 2m + 1 < |x| < 2m + 2. \end{cases}$$

A relação entre o gráfico de  $\sigma(x) = \sin(\pi x/2)$  e o gráfico da  $\phi(x)$  é dada pela Figura 3.10.

O sistema (3.59) forma uma família de campos de vetores rodados generalizados com respeito a  $\alpha$ , veja Observação 1.3.1. De fato, a origem é o único ponto singular do sistema que permanece inalterado quando  $\alpha$  varia. Além disso, temos que

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial P}{\partial \alpha} & \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y - \Phi(x) - \alpha F_m(x) & -x \\ -F_m(x) & 0 \end{vmatrix} = -x F_m(x) = \begin{cases} \leq 0 & \text{para } m \text{ ímpar,} \\ \geq 0 & \text{para } m \text{ par.} \end{cases}$$

Como consideramos  $m$  ímpar, segue da teoria de campos de vetores rodados generalizados, mais precisamente de (1.38), que o sistema (3.59) gira no sentido horário. Logo, quando  $0 < \alpha \ll 1$  tende a zero, temos pela Propriedade 1(ii) (veja Tabela 1.2) que a órbita periódica  $\Gamma_m^*$  se divide em pelo menos duas órbitas periódicas  $\Gamma_{m,1}^*$

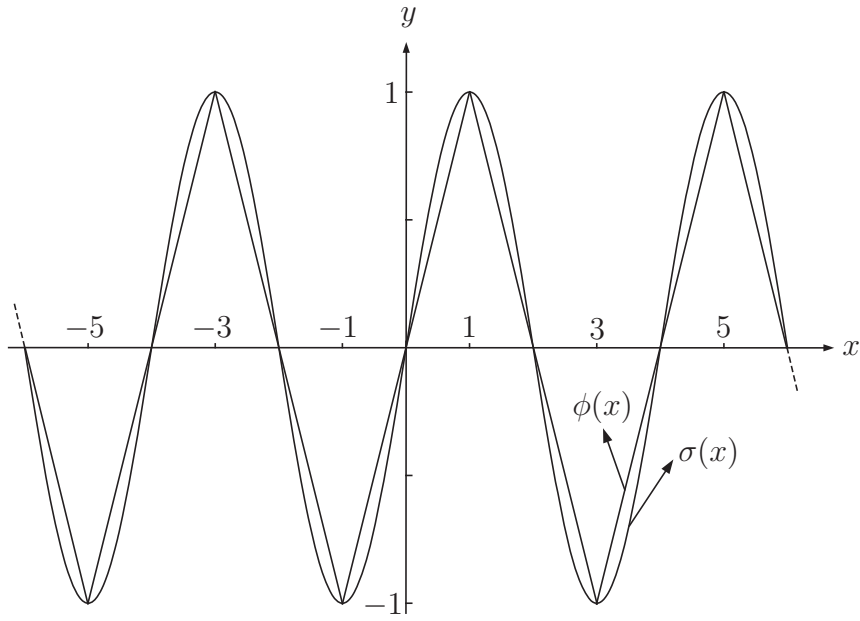


Figura 3.10: Gráficos das funções  $\phi(x)$  e  $\sigma(x)$ .

e  $\Gamma_{m2}^*$  com  $\Gamma_{m1}^* \subset \Gamma_{m2}^*$ , sendo  $\Gamma_{m1}^*$  estável e  $\Gamma_{m2}^*$  instável. Visto que a estabilidade de uma órbita periódica  $\Gamma$  no sistema (3.59) é dada por

$$\lambda = \exp \left( \int_{\Gamma} \operatorname{div}(X_{\alpha}) dt \right) = \exp \left( \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dt \right) = \exp \left( \int_{\Gamma} -(\Phi_x + \alpha F_x) dt \right),$$

temos

$$\int_{\Gamma_{m1}^*} (\Phi_x + \alpha F_x) dt \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_{m2}^*} (\Phi_x + \alpha F_x) dt \leq 0. \quad (3.60)$$

Por outro lado, de maneira análoga à prova do Lema 3.1.3, obtemos

$$(-1)^m \left[ \int_{\Gamma_{m2}^*} (\Phi_x + \alpha F_x) dt - \int_{\Gamma_{m1}^*} (\Phi_x + \alpha F_x) dt \right] < 0, \quad (3.61)$$

ou seja, para  $m$  ímpar vale

$$\left( \int_{\Gamma_{m2}^*} (\Phi_x + \alpha F_x) dt - \int_{\Gamma_{m1}^*} (\Phi_x + \alpha F_x) dt \right) > 0,$$

o que contraria a condição (3.60). Portanto, o sistema (3.5) não pode ter uma única órbita periódica com seu ponto mais a direita localizado na faixa  $2m + 1 < x < 2m + 2$ . Para  $m$  par temos que o sistema (3.59) gira no sentido anti-horário e quando o parâmetro diminui, a órbita periódica  $\Gamma_m^*$  se divide em  $\Gamma_{m1}^*$  instável e  $\Gamma_{m2}^*$  estável e então

$$\int_{\Gamma_{m1}^*} (\Phi_x + \alpha F_x) dt \leq 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_{m2}^*} (\Phi_x + \alpha F_x) dt \geq 0.$$

Como para  $m$  ímpar, obtemos por (3.61) que para  $m$  par

$$\left( \int_{\Gamma_{m2}^*} (\Phi_x + \alpha F_x) dt - \int_{\Gamma_{m1}^*} (\Phi_x + \alpha F_x) dt \right) < 0,$$

o que também é uma contradição.

Assumimos então que o sistema (3.5) possui pelo menos duas órbitas periódicas tais que seus respectivos pontos mais a direita estão localizados na faixa  $2m + 1 < x < 2m + 2$ . Denotamos por  $\Gamma_m^*$  a órbita periódica mais próxima da órbita periódica  $\Gamma_m$ , e denotamos por  $\Gamma_m^{**} \supset \Gamma_m^*$  a órbita periódica próxima a  $\Gamma_m^*$ . Logo  $\Gamma_m^*$  é interiormente estável (instável), visto que  $\Gamma_m$  é instável (estável) para  $m$  ímpar (par). Se  $\Gamma_m^*$  não é exteriormente estável (instável), segue pela teoria de campos de vetores rodados generalizados que  $\Gamma_m^*$  se divide em duas órbitas periódicas, e do mesmo modo que no parágrafo acima chegamos a uma contradição. Se  $\Gamma_m^*$  é exteriormente estável (instável), então  $\Gamma_m^*$  é estável (instável) e  $\Gamma_m^{**}$  é interiormente instável (estável). Assim, se  $\Gamma_m^{**}$  é exteriormente instável (estável), o Lema 3.1.1 garante que

$$\int_{\Gamma_m^*} -\Phi_x(x(t)) dt \leq 0 \ (\geq 0) \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_m^{**}} -\Phi_x(x(t)) dt \geq 0 \ (\leq 0). \quad (3.62)$$

Por outro lado, para  $m$  ímpar (par), temos pelo Lema 3.1.3 que

$$\left( \int_{\Gamma_m^{**}} \Phi(x(t)) dt - \int_{\Gamma_m^*} \Phi(x(t)) dt \right) > 0 \ (< 0), \quad (3.63)$$

o que contraria a condição (3.62). Consequentemente, se  $\Gamma_m^{**}$  não é exteriormente instável (estável) continuamos com a análise da estabilidade exterior da órbita periódica seguinte, onde no caso de ser instável (estável), aplicamos o Lema 3.1.3 a esta órbita e a órbita periódica  $\Gamma_m^*$  e obtemos a mesma contradição como acima. Porém, como a órbita periódica mais próxima do ponto  $\bar{A}_{m+1} = (2m + 2, 0)$  pelo lado esquerdo é exteriormente instável (estável) para  $m$  ímpar (par), pelo Lema 3.1.3 chegamos a uma contradição. Isto implica que dada a órbita periódica  $\Gamma_m$ , o sistema (3.5) não possui órbitas periódicas tais que seus pontos mais a direita estão localizados na faixa  $2m + 1 < x < 2m + 2$ .

**(Caso 2):** Suponhamos que o sistema (3.5) não possua órbitas periódicas tais que seus pontos mais a direita estão localizados na faixa  $2m < x \leq 2m + 1$ . Então pela Subseção 3.1.1, o sistema (3.5) possui pelo menos uma órbita periódica tal que seu ponto mais a direita está localizado na faixa  $2m + 1 < x < 2m + 2$ . Suponhamos que o sistema (3.5) possui pelo menos duas dessas órbitas periódicas na faixa  $2m + 1 < x < 2m + 2$ . Para  $m$  ímpar (par) assumimos que o sistema (3.5) possua a órbita periódica  $\Gamma_{m+1}$  tal que seu ponto mais a direita está localizado na faixa  $2m + 2 < x \leq 2m + 3$ . Segue do Caso 1 que  $\Gamma_{m+1}$  é estável (instável) e única no intervalo  $(2m + 2, 2m + 4)$ . Denotamos por  $\Gamma_m^*$  a órbita periódica mais próxima de  $\Gamma_{m+1}$ , e denotamos por  $\Gamma_m^* \subset \Gamma_m^{**}$  a órbita periódica mais próxima a  $\Gamma_m^*$ . Logo,  $\Gamma_m^{**}$  é exteriormente instável (estável). Se  $\Gamma_m^{**}$  não é interiormente instável (estável), assim como feito no Caso 1 aplicamos a teoria de campos de vetores rodados generalizados,

e obtemos que quando o parâmetro diminui a órbita periódica  $\Gamma_m^{**}$  se divide em duas órbitas periódicas  $\Gamma_{m1}^{**}$  e  $\Gamma_{m2}^{**}$ , estável e instável respectivamente (instável e estável respectivamente) e então

$$\int_{\Gamma_{m1}^{**}} (\Phi_x + \alpha F_x) dt \geq 0 \quad (\leq 0) \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_{m2}^{**}} (\Phi_x + \alpha F_x) dt \leq 0 \quad (\geq 0). \quad (3.64)$$

Como  $\Gamma_{m1}^{**} \subset \Gamma_m^{**}$ , para  $m$  ímpar (par) temos por (3.61) que

$$\left( \int_{\Gamma_{m2}^{**}} (\Phi_x + \alpha F_x) dt - \int_{\Gamma_{m1}^{**}} (\Phi_x + \alpha F_x) dt \right) > 0 \quad (< 0),$$

o que contraria (3.64). Se  $\Gamma_m^{**}$  é interiormente instável (estável), então  $\Gamma_m^{**}$  é instável (estável) e  $\Gamma_m^*$  é exteriormente estável (instável). Daí, se  $\Gamma_m^*$  é interiormente estável (instável), por (3.62) e (3.63) chegamos a uma contradição. Porém, se  $\Gamma_m^*$  não é interiormente estável (instável) então aplicamos novamente a teoria de campos de vetores rodados generalizados, e para  $m$  ímpar (par) temos que o sistema gira no sentido horário (anti-horário). Neste caso, quando o parâmetro aumenta (diminui) a órbita periódica  $\Gamma_m^*$  se divide em duas órbitas periódicas  $\Gamma_{m1}^*$  e  $\Gamma_{m2}^*$ , instável e estável respectivamente (estável e instável respectivamente), veja Tabela 1.2. Temos que

$$\int_{\Gamma_{m2}^*} (\Phi_x + \alpha F_x) dt \geq 0 \quad (\leq 0) \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_m^{**}} (\Phi_x + \alpha F_x) dt \leq 0 \quad (\geq 0),$$

e que  $\Gamma_{m2}^* \subset \Gamma_m^{**}$ . Assim, segue de (3.61) que para  $m$  ímpar (par) vale

$$\left( \int_{\Gamma_m^{**}} (\Phi_x + \alpha F_x) dt - \int_{\Gamma_{m2}^*} (\Phi_x + \alpha F_x) dt \right) > 0 \quad (< 0),$$

e então chegamos também a uma contradição do Lema 3.1.3. Logo, o sistema (3.5) possui uma única órbita periódica tal que seu ponto mais a direita está localizado na faixa  $2m + 1 < x < 2m + 2$ .

Portanto, pelos Casos 1 e 2, concluímos que o sistema (3.5) possui um único ciclo limite interceptando o intervalo  $(2m, 2m + 2)$ . Com isso completamos a prova do Teorema 3.0.1. ■

Observamos que se estamos no Caso 1, o único ciclo limite considerado é hiperbólico, e se estamos no Caso 2, o único ciclo limite é estável ou instável. No segundo caso, Llibre, Ponce e Zhang em [10] não provaram que o único ciclo limite é hiperbólico, mas conjecturaram que todos os ciclos limites do sistema (3.1) são hiperbólicos. Essa conjectura é natural pois para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, provamos que o sistema (3.1) possui pelo menos  $n$  ciclos limites hiperbólicos na faixa  $|x| \leq 2n + 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (veja Teorema 2.0.1), e eles persistem hiperbólicos para todo  $\varepsilon > 0$  segundo o Teorema 3.0.1.

A seguir apresentamos as demonstrações dos lemas enunciados nesta subseção.

3.1.2.1 Demonstração do Lema 3.1.1

Tomamos  $P(x, y) = y - \Phi(x)$  e  $Q(x, y) = -x$ . Seja  $p_0$  um ponto sobre  $\Gamma$  e  $\mathbf{n}_{p_0}$  o vetor normal de  $\Gamma$  em  $p_0$  apontando para o exterior de  $\Gamma$ . A órbita periódica  $\Gamma$  tem o fluxo no sentido horário conforme o tempo cresce, dizemos que  $\Gamma$  é negativamente orientada.

Seja  $p$  um ponto sobre  $\mathbf{n}_{p_0}$  tal que a distância  $d(p_0, p) = n_0$ , com  $n_0$  suficientemente pequeno. Logo, a órbita que inicia em  $p$  cruza novamente o vetor  $\mathbf{n}_{p_0}$  no ponto  $p^*$  com  $d(p_0, p^*) = n_1$ . Assim, em  $\mathbf{n}_{p_0}$  temos uma aplicação primeiro retorno de Poincaré  $n_0 \mapsto g(n_0) = n_1$ , veja Figura 3.11. A aplicação  $g$  possui um ponto fixo  $n_0 = 0$ , o qual corresponde ao ciclo limite  $\Gamma$ . Além disso, para  $n_0 > 0$  suficientemente pequeno, se  $g(n_0) < n_0$  (respectivamente  $g(n_0) > n_0$ ) então a órbita periódica  $\Gamma$  é dita *exteriormente estável* (respectivamente *exteriormente instável*). Para  $n_0 < 0$ , se  $g(n_0) < n_0$  (respectivamente  $g(n_0) > n_0$ ) dizemos que  $\Gamma$  é *interiormente instável* (respectivamente *interiormente estável*), porém neste caso  $\mathbf{n}_{p_0}$  é considerado o vetor normal à  $\Gamma$  em  $p_0$  apontando para o interior de  $\Gamma$ . A prova neste caso é semelhante à seguinte prova e será omitida.

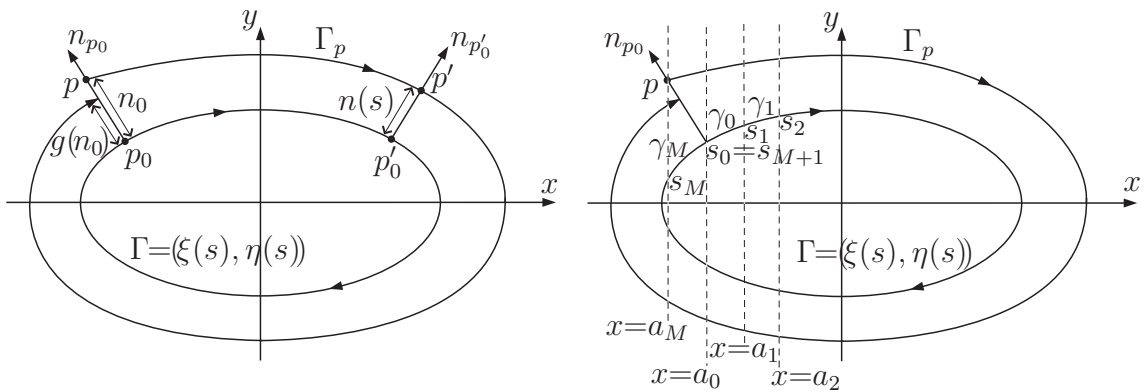


Figura 3.11: Aplicação primeiro retorno de Poincaré induzida pelas trajetórias próximas do ciclo limite  $\Gamma$ .

Assumimos que a curva  $\Gamma$  está parametrizada por comprimento de arco a partir de  $p_0$  no sentido horário. Denotamos por  $x = \xi(s)$  e  $y = \eta(s)$  a parametrização por comprimento de arco de  $\Gamma$  para  $s \in [0, l]$  onde  $l$  é o comprimento de  $\Gamma$ . Daí,  $\|(\xi'(s), \eta'(s))\| = 1$  para todo  $s \in [0, l]$ . Notamos que  $\xi(s)$  e  $\eta(s)$  são suaves para  $s \in [0, l]$  e são analíticas entre as retas  $x = a_k$  e  $x = a_{k+1}$ , onde  $a_k$  e  $a_{k+1}$  são as abscissas dos pontos extremos do arco de órbita  $\gamma_k$  (veja Figura 3.11). Seja  $\Gamma_p$  a órbita que inicia no ponto  $p$ . Para cada ponto  $p' \in \Gamma_p$  existe um único vetor normal exterior de  $\Gamma$ ,  $\mathbf{n}_{p'}$ , em algum ponto  $p'_0 \in \Gamma$  tal que  $p' \in \mathbf{n}_{p'_0}$ . A distância  $d(p'_0, p')$  é uma função de  $s$  que denotamos por  $n(s)$ . Como  $(\xi'(s), \eta'(s))$  é o vetor tangente a  $\Gamma$  em  $p'_0$ , então o vetor normal à  $\Gamma$  em  $p'_0$  é  $(-\eta'(s), \xi'(s))$  e a relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas parametrizadas do ponto  $p'$  é dada por

$$\begin{aligned} x &= \xi(s) - n(s)\eta'(s), \\ y &= \eta(s) + n(s)\xi'(s), \end{aligned} \tag{3.65}$$

onde

$$\xi'(s) = \frac{dx}{ds} = \frac{P_s}{\sqrt{P_s^2 + Q_s^2}}, \quad \eta'(s) = \frac{dy}{ds} = \frac{Q_s}{\sqrt{P_s^2 + Q_s^2}},$$

$$P_s = P(\xi(s), \eta(s)) = \eta(s) - \Phi(\xi(s)) \quad \text{e} \quad Q_s = Q(\xi(s), \eta(s)) = -\xi(s),$$

com  $\|(\xi'(s), \eta'(s))\| = 1$  para todo  $s$ . Para o caso em que  $\mathbf{n}_{p_0}$  é considerado o vetor normal à  $\Gamma$  em  $p_0$  apontando para o interior de  $\Gamma$ , a relação (3.65) para o ponto  $p'$  é dada por  $(x, y) = (\xi(s) + n(s)\eta'(s), \eta(s) - n(s)\xi'(s))$ .

Visto que a estabilidade de  $\Gamma$  e sua hiperbolicidade não dependem de  $p_0$ , tomamos  $p_0$  o ponto de interseção de  $\Gamma$  com a reta  $x = 2m + 1$  para algum  $m \in \mathbb{Z}$ . Os arcos de órbita  $\gamma_k$  são enumerados da seguinte forma:  $\gamma_0$  é o arco iniciando em  $p_0$  e assim por diante no sentido horário, de modo que o último arco corresponda a  $k = M$  (veja Figura 3.11). Denotamos por  $s_k$  e  $s_{k+1}$  os valores do parâmetro  $s$  para os pontos inicial e final de  $\gamma_k$ , respectivamente. Observamos que  $(\xi(s_{M+1}), \eta(s_{M+1})) = (\xi(s_0), \eta(s_0)) = p_0$ . Em cada intervalo  $s_k \leq s \leq s_{k+1}$ , substituímos (3.65) na solução  $y = y(x)$  do sistema (3.5) e temos

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds},$$

o que implica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta'(s) + n'(s)\xi'(s) + n(s)\xi''(s)}{\xi'(s) - n'(s)\eta'(s) - n(s)\eta''(s)}. \quad (3.66)$$

Por outro lado, como  $P(x, y) = y - \Phi(x)$  e  $Q(x, y) = -x$ , temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(\xi(s) - n(s)\eta'(s), \eta(s) + n(s)\xi'(s))}{P(\xi(s) - n(s)\eta'(s), \eta(s) + n(s)\xi'(s))}. \quad (3.67)$$

Denotamos

$$P = P(\xi(s) - n(s)\eta'(s), \eta(s) + n(s)\xi'(s)) = (\eta(s) + n(s)\xi'(s)) - \Phi(\xi(s) - n(s)\eta'(s)),$$

$$Q = Q(\xi(s) - n(s)\eta'(s), \eta(s) + n(s)\xi'(s)) = -(\xi(s) - n(s)\eta'(s)),$$

segue de (3.66) = (3.67) que

$$\eta'(s)P + n'(s)\xi'(s)P + n(s)\xi''(s)P = \xi'(s)Q - n'(s)\eta'(s)Q - n(s)\eta''(s)Q,$$

$$n'(s)(P\xi'(s) + Q\eta'(s)) = Q\xi'(s) - P\eta'(s) - n(s)(P\xi''(s) + Q\eta''(s)).$$

Considerando  $\xi = \xi(s)$ ,  $\eta = \eta(s)$  e  $n = n(s)$ , temos

$$\frac{dn}{ds} = n'(s) = \frac{Q\xi' - P\eta' - n(P\xi'' + Q\eta'')}{P\xi' + Q\eta'} := W(s, n), \quad (3.68)$$

onde

$$\xi'' = \frac{Q_s}{(P_s^2 + Q_s^2)^2} [P_s^2 - P_s Q_s \Phi_x(\xi(s)) + Q_s^2],$$

e

$$\eta'' = \frac{-P_s}{(P_s^2 + Q_s^2)^2} [P_s^2 - P_s Q_s \Phi_x(\xi(s)) + Q_s^2].$$

No caso da órbita  $\Gamma_p$  estar contida no interior do ciclo limite  $\Gamma$ , a expressão (3.68) é dada por  $W(s, n) = [-(Q\xi' - P\eta') - n(P\xi'' + Q\eta'')]/(P\xi' + Q\eta')$ . Relembramos que nos pontos de interseção de  $\Gamma$  com as retas  $x = 2m + 1$ , isto é, em  $s = s_k$  para  $k = 0, 1, \dots, M$ , a derivada  $\Phi_x(\xi(s))$  não está definida. Porém, nos intervalos  $(s_k, s_{k+1})$  temos  $\Phi_x(\xi(s)) = \pm\varepsilon$ .

Como para  $n = 0$  temos  $P = P_s$  e  $Q = Q_s$ , então

$$W(s, 0) = \frac{Q_s \xi' - P_s \eta'}{P_s \xi' + Q_s \eta'} = 0.$$

Além disso temos  $P_s \xi'' + Q_s \eta'' = 0$ . Segue por (3.68) que

$$\begin{aligned} \left. \frac{dW}{dn} \right|_{n=0} &= \left. \frac{d}{dn} \left[ \left( \frac{Q\xi' - P\eta'}{P\xi' + Q\eta'} \right) - n \left( \frac{P\xi'' + Q\eta''}{P\xi' + Q\eta'} \right) \right] \right|_{n=0} \\ &= \left. \frac{d}{dn} \left( \frac{Q\xi' - P\eta'}{P\xi' + Q\eta'} \right) \right|_{n=0} - \left. \left( \frac{P\xi'' + Q\eta''}{P\xi' + Q\eta'} \right) \right|_{n=0} - \left[ n \frac{d}{dn} \left( \frac{P\xi'' + Q\eta''}{P\xi' + Q\eta'} \right) \right] \Big|_{n=0} \\ &= \left. \frac{d}{dn} \left( \frac{Q\xi' - P\eta'}{P\xi' + Q\eta'} \right) \right|_{n=0} \\ &= \frac{-(\xi(s))^2 \Phi_x(\xi(s))}{[(\eta(s) - \Phi(\xi(s)))^2 + (\xi(s))^2]^{3/2}} := H(s). \end{aligned}$$

Ressaltamos que para obter a última igualdade acima foram feitas algumas contas envolvendo basicamente derivadas que omitimos aqui. Segue que  $W(s, n) = H(s)n + \mathcal{O}(n)$ , onde  $\mathcal{O}(n)$  representa os termos de ordem superior em  $n$ . Lembramos que  $n = n(s)$ , para  $s \in [0, l]$ , representa a função distância entre  $p'_0 \in \Gamma$  e  $p' \in \Gamma_p$  a partir de  $n_0 = d(p_0, p) = n(0)$ . Notamos que  $g(n_0) = n(l)$ . Como

$$\int_{n(0)}^{n(l)} \frac{1}{n} dn = \ln(n(l)) - \ln(n(0)),$$

temos que

$$\exp \left( \int_{n(0)}^{n(l)} \frac{1}{n} dn \right) = \frac{n(l)}{n_0},$$

e utilizando (3.68) obtemos portanto a expressão da função primeiro retorno de



Poincaré

$$\begin{aligned}
g(n_0) = n(l) &= n_0 \exp \left( \int_{n(0)}^{n(l)} \frac{1}{n} dn \right) \\
&= n_0 \exp \left( \sum_{k=0}^M \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{n} \frac{dn}{ds} ds \right) \\
&= n_0 \exp \left( \sum_{k=0}^M \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{n} W(s, n) ds \right) \\
&= n_0 \exp \left( \sum_{k=0}^M \int_{s_k}^{s_{k+1}} \left( H(s) + \frac{\mathcal{O}(n)}{n} \right) ds \right). \quad (3.69)
\end{aligned}$$

Considerando a parametrização por comprimento de arco de  $\Gamma$ ,  $(x, y) = (\xi(s), \eta(s))$ , segue de

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = y(t) - \Phi(x(t)),$$

que

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \frac{y(t) - \Phi(x(t))}{\xi'(s)} \\
&= (y(t) - \Phi(x(t))) \frac{\sqrt{P_s^2 + Q_s^2}}{P_s} \\
&= [(y(t) - \Phi(x(t)))^2 + (x(t))^2]^{1/2}. \quad (3.70)
\end{aligned}$$

De (3.5) temos  $(y - \Phi(x)) \frac{dy}{dt} + x \frac{dx}{dt} = 0$  e assim

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [(y - \Phi(x))^2 + x^2] &= 2(y - \Phi(x)) \left( \frac{dy}{dt} - \Phi_x(x) \frac{dx}{dt} \right) + 2x \frac{dx}{dt} \\
&= 2(y - \Phi(x)) \frac{dy}{dt} - 2(y - \Phi(x)) \Phi_x(x) \frac{dx}{dt} + 2x \frac{dx}{dt} \\
&= -2(y - \Phi(x)) \Phi_x(x) \frac{dx}{dt} + 2 \left[ (y - \Phi(x)) \frac{dy}{dt} + x \frac{dx}{dt} \right] \\
&= -2(y - \Phi(x)) \Phi_x(x) \frac{dx}{dt} \\
&= -2(y(t) - \Phi(x(t)))^2 \Phi_x(x(t)). \quad (3.71)
\end{aligned}$$

Utilizando (3.70) e (3.71) obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^M \int_{s_k}^{s_{k+1}} H(s) ds &= \sum_{k=0}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} H(s(t)) \frac{ds}{dt} dt \\
&= \sum_{k=0}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{-(x(t))^2 \Phi_x(x(t))}{(y(t) - \Phi(x(t)))^2 + (x(t))^2} dt \\
&= \sum_{k=0}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( \frac{(y(t) - \Phi(x(t)))^2 \Phi_x(x(t))}{(y(t) - \Phi(x(t)))^2 + (x(t))^2} - \Phi_x(x(t)) \right) dt \\
&= \sum_{k=0}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( \frac{-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(y(t) - \Phi(x(t)))^2 + (x(t))^2]}{(y(t) - \Phi(x(t)))^2 + (x(t))^2} - \Phi_x(x(t)) \right) dt \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^M \int_{\gamma_k} \frac{d[(y - \Phi(x))^2 + x^2]}{(y - \Phi(x))^2 + x^2} - \sum_{k=0}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi_x(x(t)) dt,
\end{aligned} \tag{3.72}$$

onde  $t_k$  é o tempo que a órbita periódica  $\Gamma$  leva para chegar à  $s_k$ , a partir de  $s_0 = 0$  no tempo  $t_0 = 0$ . Visto que  $(\xi(s_{M+1}), \eta(s_{M+1})) = (\xi(s_0), \eta(s_0))$ , como

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^M \int_{\gamma_k} \frac{d[(y - \Phi(x))^2 + x^2]}{(y - \Phi(x))^2 + x^2} &= \\
&= \sum_{k=0}^M \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{(\eta(s) - \Phi(\xi(s)))^2 + \xi(s)^2} \cdot \frac{d}{ds} [(\eta(s) - \Phi(\xi(s)))^2 + \xi(s)^2] \cdot ds \\
&= \sum_{k=0}^M \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{d}{ds} \log [(\eta(s) - \Phi(\xi(s)))^2 + \xi(s)^2] \cdot ds \\
&= \sum_{k=0}^M \left[ \log ((\eta(s_{k+1}) - \Phi(\xi(s_{k+1})))^2 + (\xi(s_{k+1}))^2) - \right. \\
&\quad \left. \log ((\eta(s_k) - \Phi(\xi(s_k)))^2 + (\xi(s_k))^2) \right] = 0,
\end{aligned}$$

temos

$$\sum_{k=0}^M \int_{s_k}^{s_{k+1}} H(s) ds = - \sum_{k=0}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi_x(x(t)) dt.$$

Portanto, sendo  $n_0 = 0$  o ponto fixo da aplicação primeiro retorno correspondente ao ciclo limite  $\Gamma$ , segue que  $g(0) = 0$  e por (3.69) temos que o multiplicador da órbita periódica  $\Gamma$  é

$$\begin{aligned}
\lambda = g'(0) &= \lim_{n_0 \rightarrow 0} \frac{g(n_0) - g(0)}{n_0} = \lim_{n_0 \rightarrow 0} \exp \left( \sum_{k=0}^M \int_{s_k}^{s_{k+1}} \left( H(s) + \frac{\mathcal{O}(n)}{n} \right) ds \right) \\
&= \exp \left( \sum_{k=0}^M \int_{s_k}^{s_{k+1}} H(s) ds \right) \\
&= \exp \left( - \sum_{k=0}^M \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi_x(x(t)) dt \right).
\end{aligned}$$

E isso completa a prova do Lema 3.1.1. □

### 3.1.2.2 Demonstração do Lema 3.1.2

Consideramos  $\Gamma_m = C_m^1 \cup L_m^1 \cup C_m^2 \cup L_m^2$ , onde  $C_m^1$  e  $C_m^2$  são os arcos de órbita de  $\Gamma_m$  localizados nas faixas  $-2m - 1 \leq x < -2m$  e  $2m < x \leq 2m + 1$ , respectivamente, e  $L_m^1$  e  $L_m^2$  são os arcos de  $\Gamma_m$  entre as retas  $x = \pm 2m$  para  $y > 0$  e  $y < 0$ , respectivamente. Pelo item (d) da Proposição 3.1.1, a órbita periódica  $\Gamma_m$  não intercepta o intervalo  $(0, 2)$  e não cruza o eixo- $x$  através dos pontos  $(2m, 0)$  para  $m \in \mathbb{N}$ . Além disso, o item (b) desta proposição garante que  $L_m^1$  e  $L_m^2$  estão localizados acima e abaixo do gráfico da  $\Phi(x)$  para  $x \in [-2m, 2m]$ , respectivamente. Assim, devemos provar que

$$\begin{aligned}
(-1)^m \int_{\Gamma_m} \Phi_x(x(t)) dt &= (-1)^m \int_{C_m^1} \Phi_x(x(t)) dt + (-1)^m \int_{L_m^1} \Phi_x(x(t)) dt + \\
&\quad (-1)^m \int_{C_m^2} \Phi_x(x(t)) dt + (-1)^m \int_{L_m^2} \Phi_x(x(t)) dt > 0.
\end{aligned}$$

Segue de (3.4) que para  $x \in [-2m - 1, -2m] \cup [2m, 2m + 1]$

$$\Phi_x(x) = \begin{cases} \varepsilon & , \text{ se } m \text{ é par,} \\ -\varepsilon & , \text{ se } m \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Assim  $(-1)^m \Phi_x(x) = \varepsilon > 0$  nesses intervalos. Portanto, resta provar que

$$(-1)^m \int_{L_m^1} \Phi_x(x(t)) dt > 0 \quad \text{e} \quad (-1)^m \int_{L_m^2} \Phi_x(x(t)) dt > 0. \quad (3.73)$$

Para verificar (3.73) seguimos o mesmo raciocínio aplicado à Afirmação 3.1.3. Analisamos separadamente os casos  $m$  ímpar e  $m$  par. Em ambos casos utilizamos indução sobre  $m$ . Visto que o sistema (3.5) é simétrico em relação à origem (pois o mesmo é invariante pela mudança  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ ), analisamos apenas os cálculos sobre  $L_m^1$ . Como

$$(-1)^m \int_{L_m^1} \Phi_x(x(t)) dt = (-1)^m \int_{-2m}^{2m} \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx, \quad (3.74)$$

vamos mostrar que

$$(-1)^m \int_{-2m}^{2m} \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx > 0. \quad (3.75)$$

Para  $x \in [-2m, 2m]$  temos que  $y(x) - \Phi(x) > 0$  e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y(x) - \Phi(x)} \begin{cases} < 0 & , \text{ se } x > 0, \\ > 0 & , \text{ se } x < 0, \end{cases}$$

ou seja, a trajetória  $L_m^1$  é crescente se  $x \in [-2m, 0]$  e decrescente se  $x \in [0, 2m]$ .

Para o arco de órbita  $L_m^2$  que está abaixo do gráfico da  $\Phi(x)$ , temos

$$\begin{aligned} (-1)^m \int_{L_m^2} \Phi_x(x(t)) dt &= (-1)^m \int_{2m}^{-2m} \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx \\ &= (-1)^{m+1} \int_{-2m}^{2m} \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx, \end{aligned} \quad (3.76)$$

Para  $x \in [-2m, 2m]$  temos que  $y(x) - \Phi(x) < 0$  e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y(x) - \Phi(x)} \begin{cases} > 0 & , \text{ se } x > 0, \\ < 0 & , \text{ se } x < 0, \end{cases}$$

ou seja, a trajetória  $L_m^2$  é crescente se  $x \in [0, 2m]$  e decrescente se  $x \in [-2m, 0]$ . A análise para os casos  $m$  ímpar e  $m$  par na expressão (3.76) seguem o mesmo raciocínio feito a seguir.

**(1º Caso):** Consideramos  $m$  ímpar e seja  $\bar{m} \in \{1, 3, 5, \dots, m\}$ . Consideramos  $\mathcal{X}(x) = \Phi_x(x)/(y(x) - \Phi(x))$  e reescrevemos a expressão (3.74) da seguinte maneira

$$(-1)^{\bar{m}} \left[ \int_{-2\bar{m}}^{2\bar{m}} \mathcal{X}(x) dx \right] = (-1)^{\bar{m}} \left[ \int_{-2}^2 \mathcal{X}(x) dx + \sum_{k=1}^{(\bar{m}-1)/2} \left( \int_{-4k-2}^{-4k+2} \mathcal{X}(x) dx + \int_{4k-2}^{4k+2} \mathcal{X}(x) dx \right) \right].$$

Para  $\bar{m} = 1$  temos  $(-1)^{\bar{m}} = -1$  e então basta provarmos que

$$\int_{-2}^2 \mathcal{X}(x) dx = \int_0^2 \mathcal{X}(x) dx + \int_{-2}^0 \mathcal{X}(x) dx < 0. \quad (3.77)$$

Analisamos o sinal da primeira integral de (3.77). Como  $\Phi_x(x)$  assume os valores  $\varepsilon$  para  $x \in [0, 1]$  e  $-\varepsilon$  para  $x \in [1, 2]$ , escrevemos

$$\int_0^2 \mathcal{X}(x) dx = \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(x) - \Phi(x)} dx - \varepsilon \int_1^2 \frac{1}{y(x) - \Phi(x)} dx. \quad (3.78)$$

Aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto 2 - x$  na integral  $\int_1^2$  em (3.78) e usamos que  $\Phi(2 - x) \stackrel{(3.3)}{=} \Phi(x)$ . Daí, o lado direito da igualdade (3.78) equivale à

$$\varepsilon \int_0^1 \left( \frac{1}{y(x) - \Phi(x)} - \frac{1}{y(2 - x) - \Phi(x)} \right) dx.$$

Observamos que para  $0 < x < 1$  temos  $1 < 2 - x < 2$ . Visto que  $y(x)$  é decrescente para  $x > 0$  segue que

$$y(2 - x) < y(x) \quad \text{e} \quad y(2 - x) - \Phi(x) < y(x) - \Phi(x).$$

Logo,

$$\frac{1}{y(x) - \Phi(x)} < \frac{1}{y(2 - x) - \Phi(x)}.$$

Portanto,

$$\int_0^2 \mathcal{X}(x) dx < 0. \quad (3.79)$$

Por (3.4) temos que  $\Phi_x(x) = -\varepsilon$  para  $x \in [-2, -1]$  e  $\Phi_x(x) = \varepsilon$  para  $x \in [-1, 0]$ . Assim, reescrevemos a segunda integral de (3.77) como

$$\int_{-2}^0 \mathcal{X}(x) dx = \varepsilon \int_{-1}^0 \frac{1}{y(x) - \Phi(x)} dx - \varepsilon \int_{-2}^{-1} \frac{1}{y(x) - \Phi(x)} dx. \quad (3.80)$$

Consideramos a mudança de variável  $x \mapsto -2 - x$  na integral  $\int_{-2}^{-1}$  em (3.80). Como  $\Phi(-2 - x) \stackrel{(3.3)}{=} \Phi(x)$ , o lado direito da igualdade (3.80) é equivalente à

$$\varepsilon \int_{-1}^0 \left( \frac{1}{y(x) - \Phi(x)} - \frac{1}{y(-2 - x) - \Phi(x)} \right) dx.$$

Para  $-1 < x < 0$  temos  $-2 < -2 - x < -1$  e como  $y(x)$  é crescente para  $x < 0$  segue que

$$y(-2 - x) < y(x) \quad \text{e} \quad y(-2 - x) - \Phi(x) < y(x) - \Phi(x).$$

Logo,

$$\frac{1}{y(x) - \Phi(x)} < \frac{1}{y(-2 - x) - \Phi(x)}.$$

Portanto,

$$\int_{-2}^0 \mathcal{X}(x) dx < 0. \quad (3.81)$$

Assim, por (3.79) e (3.81) temos

$$\int_{-2}^2 \mathcal{X}(x) dx < 0,$$

o que prova a desigualdade (3.75) para  $\bar{m} = 1$ .

Por indução, suponhamos que a desigualdade é válida para  $\bar{m} = m$ , ou seja, visto que  $(-1)^m = -1$  temos

$$\int_{-2}^2 \mathcal{X}(x) dx + \sum_{k=1}^{(m-1)/2} \left( \int_{-4k-2}^{-4k+2} \mathcal{X}(x) dx + \int_{4k-2}^{4k+2} \mathcal{X}(x) dx \right) < 0.$$

Vamos mostrar que tal desigualdade vale para o próximo ímpar,  $\bar{m} = m + 2$ . Como temos  $(-1)^{m+2} = -1$ , partimos de

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{-2}^2 \mathcal{X}(x) dx + \sum_{k=1}^{(m+1)/2} \left( \int_{-4k-2}^{-4k+2} \mathcal{X}(x) dx + \int_{4k-2}^{4k+2} \mathcal{X}(x) dx \right) \right] = \\ & = \int_{-2}^2 \mathcal{X}(x) dx + \sum_{k=1}^{(m-1)/2} \left( \int_{-4k-2}^{-4k+2} \mathcal{X}(x) dx + \int_{4k-2}^{4k+2} \mathcal{X}(x) dx \right) + \\ & \quad \left( \int_{-2m-4}^{-2m} \mathcal{X}(x) dx + \int_{2m}^{2m+4} \mathcal{X}(x) dx \right). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução basta provar que

$$\int_{-2m-4}^{-2m} \mathcal{X}(x) dx + \int_{2m}^{2m+4} \mathcal{X}(x) dx < 0. \quad (3.82)$$

Reescrevemos a expressão de (3.82) como

$$\left( \int_{2m+2}^{2m+4} \mathcal{X}(x) dx + \int_{-2m-2}^{-2m} \mathcal{X}(x) dx \right) + \left( \int_{2m}^{2m+2} \mathcal{X}(x) dx + \int_{-2m-4}^{-2m-2} \mathcal{X}(x) dx \right).$$

Denotamos por

$$\mathcal{I} = \left( \int_{2m+2}^{2m+4} \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx + \int_{-2m-2}^{-2m} \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx \right)$$

e

$$\mathcal{J} = \left( \int_{2m}^{2m+2} \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx + \int_{-2m-4}^{-2m-2} \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx \right).$$

Assim, para provarmos (3.82) basta verificar que  $\mathcal{I} < 0$  e  $\mathcal{J} < 0$ . Pela propriedade (3.3) temos que

$$\begin{aligned} \Phi(2m+2+x) &= \Phi(x), & \Phi_x(2m+2+x) &= \Phi_x(x), \\ \Phi(-2m-x) &= \Phi(x), & \Phi_x(-2m-x) &= -\Phi_x(x). \end{aligned}$$

Considerando as mudanças de variável  $x \mapsto 2m+2+x$  e  $x \mapsto -2m-x$  na primeira e segunda integral de  $\mathcal{I}$ , respectivamente, obtemos

$$\int_0^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(2m+2+x) - \Phi(x)} dx - \int_0^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(-2m-x) - \Phi(x)} dx. \quad (3.83)$$

Identificamos

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(2m+2+x) - \Phi(x)} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_2 = \int_0^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(-2m-x) - \Phi(x)} dx.$$

Reescrevemos  $\mathcal{I}_1$  como

$$\mathcal{I}_1 = -\varepsilon \int_1^2 \frac{1}{y(2m+2+x) - \Phi(x)} dx + \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(2m+2+x) - \Phi(x)} dx. \quad (3.84)$$

Aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto 2-x$  na integral  $\int_1^2$  em (3.84) e usamos que  $\Phi(2-x) = \Phi(x)$ . Daí, o lado direito da igualdade (3.84) equivale à

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(2m+4-x) - \Phi(x)} dx + \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(2m+2+x) - \Phi(x)} dx = \\
& = \varepsilon \int_0^1 \frac{y(2m+4-x) - y(2m+2+x)}{[y(2m+2+x) - \Phi(x)][y(2m+4-x) - \Phi(x)]} dx. \quad (3.85)
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, reescrevemos  $\mathcal{I}_2$  como

$$\mathcal{I}_2 = -\varepsilon \int_1^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(-2m-x) - \Phi(x)} dx + \varepsilon \int_0^1 \frac{\Phi_x(x)}{y(-2m-x) - \Phi(x)} dx. \quad (3.86)$$

Pela mudança de variável  $x \mapsto 2-x$  na integral  $\int_1^2$  em (3.86), temos que o lado direito da igualdade (3.86) é equivalente à

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(-2m-2+x) - \Phi(x)} dx + \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(-2m-x) - \Phi(x)} dx = \\
& = \varepsilon \int_0^1 \frac{y(-2m-2+x) - y(-2m-x)}{[y(-2m-x) - \Phi(x)][y(-2m-2+x) - \Phi(x)]} dx. \quad (3.87)
\end{aligned}$$

Logo, por (3.83), (3.85) e (3.87) a integral  $\mathcal{I}$  pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} & = \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 \\
& = \varepsilon \left[ \int_0^1 \frac{y(2m+4-x) - y(2m+2+x)}{[y(2m+2+x) - \Phi(x)][y(2m+4-x) - \Phi(x)]} dx - \right. \\
& \quad \left. \int_0^1 \frac{y(-2m-2+x) - y(-2m-x)}{[y(-2m-x) - \Phi(x)][y(-2m-2+x) - \Phi(x)]} dx \right]. \quad (3.88)
\end{aligned}$$

Visto que  $y(x)$  é considerada a expressão do arco de órbita acima do gráfico da  $\Phi(x)$  para  $x \in [-2\bar{m}, 2\bar{m}]$ , considerando  $\bar{m} = m+2$  temos  $y(x) > 0$  para  $x \in [-2m-4, 2m+4]$ . Daí, para  $0 < x < 1$ , pela Afirmação 3.1.2 obtemos

$$\begin{aligned}
y(-2m-x) & > y(2m+2+x) > 0, \\
y(-2m-2+x) & > y(2m+4-x) > 0. \quad (3.89)
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{[y(2m+2+x) - \Phi(x)][y(2m+4-x) - \Phi(x)]} > \\
& > \frac{1}{[y(-2m-x) - \Phi(x)][y(-2m-2+x) - \Phi(x)]} > 0. \quad (3.90)
\end{aligned}$$

Usando (3.3), (3.6) e o Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$\begin{aligned}
y(2m+4-x) - y(2m+2+x) &= \int_{2m+2+x}^{2m+4-x} \frac{-s}{y(s) - \Phi(s)} ds \\
&\stackrel{(s \mapsto s+2)}{=} \int_{2m+x}^{2m+2-x} \frac{-s-2}{y(s+2) + \Phi(s)} ds \\
&< \int_{2m+x}^{2m+2-x} \frac{-s}{y(-s) + \Phi(s)} ds \\
&\stackrel{(s \mapsto -s)}{=} \int_{-2m-x}^{-2m-2+x} \frac{-s}{y(s) - \Phi(s)} ds \\
&= y(-2m-2+x) - y(-2m-x).
\end{aligned} \tag{3.91}$$

A desigualdade obtida em (3.91) segue do fato que para  $0 < x < 1$  temos  $2m < s < 2m+2$  e então

$$-s-2 < -s < 0 \quad \text{e} \quad 0 < y(s+2) < y(-s).$$

Além disso, temos que

$$-2m-2+x < -2m-x < 0$$

para  $0 < x < 1$ . Daí,  $y(-2m-2+x) < y(-2m-x)$  já que  $y(x)$  é crescente para  $x < 0$ . Segue de (3.91) que

$$y(2m+4-x) - y(2m+2+x) < y(-2m-2+x) - y(-2m-x) < 0. \tag{3.92}$$

Por (3.90) e (3.92) temos

$$\begin{aligned}
\frac{y(2m+4-x) - y(2m+2+x)}{[y(2m+2+x) - \Phi(x)][y(2m+4-x) - \Phi(x)]} &< \\
&< \frac{y(-2m-2+x) - y(-2m-x)}{[y(-2m-x) - \Phi(x)][y(-2m-2+x) - \Phi(x)]},
\end{aligned}$$

para  $0 < x < 1$ . Portanto, segue de (3.88) que

$$\mathcal{I} < 0.$$

Para verificar a desigualdade

$$\mathcal{J} < 0$$

utilizamos um raciocínio análogo à desigualdade  $\mathcal{I} < 0$ . Tais contas serão omitidas. Assim, a desigualdade (3.82) segue de  $\mathcal{I} < 0$  e  $\mathcal{J} < 0$ . Com isso, por indução, está provada a desigualdade (3.75) para  $m$  ímpar.

Agora, analisamos o caso para  $m$  par. Seguimos o mesmo raciocínio do caso ímpar, porém usamos outra forma de reescrever a desigualdade a ser provada.



(2º Caso): Consideramos  $m$  par e seja  $\overline{m} \in \{2, 4, 6, \dots, m\}$ . Daí, a integral do lado direito da igualdade (3.74) pode ser reescrita da forma

$$(-1)^{\overline{m}} \left[ \int_{-2\overline{m}}^{2\overline{m}} \mathcal{X}(x) dx \right] = (-1)^{\overline{m}} \left[ \int_{-4}^{-2} \mathcal{X}(x) dx + \int_{-2}^2 \mathcal{X}(x) dx + \int_2^4 \mathcal{X}(x) dx + \sum_{k=1}^{(\overline{m}-2)/2} \left( \int_{-4k-4}^{-4k} \mathcal{X}(x) dx + \int_{4k}^{4k+4} \mathcal{X}(x) dx \right) \right] \quad (3.93)$$

com  $\mathcal{X}(x) = \Phi_x(x)/(y(x) - \Phi(x))$ . Suponhamos  $\overline{m} = 2$ . Neste caso,  $(-1)^{\overline{m}} = 1$  e a desigualdade (3.75) é válida se

$$\left[ \int_{-4}^{-2} \mathcal{X}(x) dx + \int_{-2}^2 \mathcal{X}(x) dx + \int_2^4 \mathcal{X}(x) dx \right] > 0. \quad (3.94)$$

Reescrevemos a expressão de (3.94) como

$$\left( \int_2^4 \mathcal{X}(x) dx + \int_{-2}^0 \mathcal{X}(x) dx \right) + \left( \int_0^2 \mathcal{X}(x) dx + \int_{-4}^{-2} \mathcal{X}(x) dx \right).$$

Denotamos por

$$\mathcal{K} = \left( \int_2^4 \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx + \int_{-2}^0 \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx \right)$$

e

$$\mathcal{L} = \left( \int_0^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx + \int_{-4}^{-2} \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx \right).$$

Então, para provar (3.94) basta verificar que  $\mathcal{K} > 0$  e  $\mathcal{L} > 0$ . Pela propriedade (3.3) temos que

$$\begin{aligned} \Phi(2+x) &= -\Phi(x), & \Phi_x(2+x) &= -\Phi_x(x), \\ \Phi(-x) &= -\Phi(x), & \Phi_x(-x) &= \Phi_x(x). \end{aligned}$$

Considerando as mudanças de variável  $x \mapsto 2+x$  e  $x \mapsto -x$  na primeira e segunda integral de  $\mathcal{K}$ , respectivamente, obtemos

$$\int_0^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(-x) + \Phi(x)} dx - \int_0^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(2+x) + \Phi(x)} dx. \quad (3.95)$$

Identificamos

$$\mathcal{K}_1 = \int_0^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(-x) + \Phi(x)} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{K}_2 = \int_0^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(2+x) + \Phi(x)} dx.$$

Reescrevemos  $\mathcal{K}_1$  como

$$\mathcal{K}_1 = -\varepsilon \int_1^2 \frac{1}{y(-x) + \Phi(x)} dx + \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(-x) + \Phi(x)} dx. \quad (3.96)$$

Aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto 2-x$  na integral  $\int_1^2$  em (3.96) e usamos que  $\Phi(2-x) = \Phi(x)$ . Daí, o lado direito da igualdade (3.96) equivale a

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(-2+x) + \Phi(x)} dx + \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(-x) + \Phi(x)} dx = \\
& = \varepsilon \int_0^1 \frac{y(-2+x) - y(-x)}{[y(-x) + \Phi(x)][y(-2+x) + \Phi(x)]} dx. \tag{3.97}
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, reescrevemos  $\mathcal{K}_2$  como

$$\mathcal{K}_2 = -\varepsilon \int_1^2 \frac{1}{y(2+x) + \Phi(x)} dx + \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(2+x) + \Phi(x)} dx. \tag{3.98}$$

Pela mudança de variável  $x \mapsto 2-x$  na integral  $\int_1^2$  em (3.98), temos que o lado direito da igualdade (3.98) é equivalente à

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(4-x) + \Phi(x)} dx + \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(2+x) + \Phi(x)} dx = \\
& = \varepsilon \int_0^1 \frac{y(4-x) - y(2+x)}{[y(2+x) + \Phi(x)][y(4-x) + \Phi(x)]} dx. \tag{3.99}
\end{aligned}$$

Logo, por (3.95), (3.97) e (3.99) a integral  $\mathcal{K}$  pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} & = \mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2 \\
& = \varepsilon \left[ \int_0^1 \frac{y(-2+x) - y(-x)}{[y(-x) + \Phi(x)][y(-2+x) + \Phi(x)]} dx - \right. \\
& \quad \left. \int_0^1 \frac{y(4-x) - y(2+x)}{[y(2+x) + \Phi(x)][y(4-x) + \Phi(x)]} dx \right]. \tag{3.100}
\end{aligned}$$

Visto que  $y(x)$  é a expressão do arco de órbita acima do gráfico da  $\Phi(x)$ , temos  $y(x) > 0$  para  $x \in [-4, 4]$ . Para  $0 < x < 1$ , pela Afirmação 3.1.2 temos

$$y(-x) > y(2+x) > 0,$$

e

$$y(-2+x) > y(4-x) > 0.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{[y(2+x) + \Phi(x)][y(4-x) + \Phi(x)]} > \\
& > \frac{1}{[y(-x) + \Phi(x)][y(-2+x) + \Phi(x)]} > 0. \tag{3.101}
\end{aligned}$$

Usando (3.3), (3.6) e o Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\begin{aligned}
y(4-x) - y(2+x) &= \int_{2+x}^{4-x} \frac{-s}{y(s) - \Phi(s)} ds \\
&\stackrel{(s \mapsto s+2)}{=} \int_x^{2-x} \frac{-s-2}{y(s+2) + \Phi(s)} ds \\
&< \int_x^{2-x} \frac{-s}{y(-s) + \Phi(s)} ds \\
&\stackrel{(s \mapsto -s)}{=} \int_{-x}^{-2+x} \frac{-s}{y(s) - \Phi(s)} ds \\
&= y(-2+x) - y(-x). \tag{3.102}
\end{aligned}$$

A desigualdade obtida em (3.102) segue do fato que para  $0 < x < 1$  temos  $0 < s < 2$  e então

$$-s-2 < -s < 0 \quad \text{e} \quad 0 < y(s+2) < y(-s).$$

Como  $y(x)$  é crescente para  $x < 0$  e  $-2+x < -x$  quando  $0 < x < 1$ , temos  $y(-2+x) < y(-x)$  e assim segue de (3.102) que

$$y(4-x) - y(2+x) < y(-2+x) - y(-x) < 0. \tag{3.103}$$

Por (3.101) e (3.103) temos

$$\frac{y(4-x) - y(2+x)}{[y(2+x) + \Phi(x)][y(4-x) + \Phi(x)]} < \frac{y(-2+x) - y(-x)}{[y(-x) + \Phi(x)][y(-2+x) + \Phi(x)]}.$$

Portanto, segue de (3.100) que

$$\mathcal{K} > 0. \tag{3.104}$$

Seguindo um procedimento análogo à análise de  $\mathcal{K} > 0$ , é possível verificar que  $\mathcal{L} > 0$ . Tais contas serão omitidas. Tendo  $\mathcal{K} > 0$  e  $\mathcal{L} > 0$  verificamos que a desigualdade (3.75) está satisfeita para  $\overline{\overline{m}} = 2$ .

Por indução, suponhamos que a desigualdade (3.93) é válida para  $\overline{\overline{m}} = m$ , ou seja,

$$\int_{-4}^{-2} \mathcal{X}(x) dx + \int_{-2}^2 \mathcal{X}(x) dx + \int_2^4 \mathcal{X}(x) dx + \sum_{k=1}^{(m-2)/2} \left( \int_{-4k-4}^{-4k} \mathcal{X}(x) dx + \int_{4k}^{4k+4} \mathcal{X}(x) dx \right) > 0,$$

onde  $\mathcal{X}(x) = \Phi_x(x)/(y(x) - \Phi(x))$ . Vamos mostrar que a desigualdade (3.93) vale para o próximo par,  $\overline{\overline{m}} = m+2$ . Como  $(-1)^{m+2} = 1$ , partimos de

$$\left[ \int_{-4}^{-2} \mathcal{X}(x) dx + \int_{-2}^2 \mathcal{X}(x) dx + \int_2^4 \mathcal{X}(x) dx + \sum_{k=1}^{m/2} \left( \int_{-4k-4}^{-4k} \mathcal{X}(x) dx + \int_{4k}^{4k+4} \mathcal{X}(x) dx \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-4}^{-2} \mathcal{X}(x) dx + \int_{-2}^2 \mathcal{X}(x) dx + \int_2^4 \mathcal{X}(x) dx + \sum_{k=1}^{(m-2)/2} \left( \int_{-4k-2}^{-4k+2} \mathcal{X}(x) dx + \int_{4k-2}^{4k+2} \mathcal{X}(x) dx \right) + \\
&\quad \left( \int_{-2m-4}^{-2m} \mathcal{X}(x) dx + \int_{2m}^{2m+4} \mathcal{X}(x) dx \right) > 0.
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução basta provar que

$$\int_{-2m-4}^{-2m} \mathcal{X}(x) dx + \int_{2m}^{2m+4} \mathcal{X}(x) dx > 0. \quad (3.105)$$

Reescrevemos a desigualdade (3.105) como

$$\left( \int_{2m+2}^{2m+4} \mathcal{X}(x) dx + \int_{-2m-2}^{-2m} \mathcal{X}(x) dx \right) + \left( \int_{2m}^{2m+2} \mathcal{X}(x) dx + \int_{-2m-4}^{-2m-2} \mathcal{X}(x) dx \right) > 0.$$

Denotamos por

$$\mathcal{M} = \left( \int_{2m+2}^{2m+4} \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx + \int_{-2m-2}^{-2m} \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx \right)$$

e

$$\mathcal{N} = \left( \int_{2m}^{2m+2} \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx + \int_{-2m-4}^{-2m-2} \frac{\Phi_x(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx \right).$$

Assim, para provarmos (3.105) basta verificar que  $\mathcal{M} > 0$  e  $\mathcal{N} > 0$ . Pela propriedade (3.3) temos que para  $m$  par vale

$$\begin{aligned}
\Phi(2m+2+x) &= -\Phi(x), & \Phi_x(2m+2+x) &= -\Phi_x(x), \\
\Phi(-2m-x) &= -\Phi(x), & \Phi_x(-2m-x) &= \Phi_x(x).
\end{aligned}$$

Considerando as mudanças de variável  $x \mapsto 2m+2+x$  e  $x \mapsto -2m-x$  na primeira e segunda integral de  $\mathcal{M}$ , respectivamente, obtemos

$$-\int_0^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(2m+2+x) + \Phi(x)} dx + \int_0^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(-2m-x) + \Phi(x)} dx. \quad (3.106)$$

Denotamos

$$\mathcal{M}_1 = \int_0^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(2m+2+x) + \Phi(x)} dx \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_2 = \int_0^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(-2m-x) + \Phi(x)} dx.$$

Reescrevemos  $\mathcal{M}_1$  como

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(2m+2+x) + \Phi(x)} dx &= -\varepsilon \int_1^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(2m+2+x) + \Phi(x)} dx + \\
&\quad \varepsilon \int_0^1 \frac{\Phi_x(x)}{y(2m+2+x) + \Phi(x)} dx. \quad (3.107)
\end{aligned}$$

Aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto 2-x$  na integral  $\int_1^2$  em (3.107) e usamos que  $\Phi(2-x) = \Phi(x)$ . Daí, o lado direito da igualdade (3.107) é equivalente à

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(2m+4-x) + \Phi(x)} dx + \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(2m+2+x) + \Phi(x)} dx = \\
& = \varepsilon \int_0^1 \frac{y(2m+4-x) - y(2m+2+x)}{[y(2m+2+x) + \Phi(x)][y(2m+4-x) + \Phi(x)]} dx. \quad (3.108)
\end{aligned}$$

De modo análogo, reescrevemos  $\mathcal{M}_2$  como

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(-2m-x) + \Phi(x)} dx & = -\varepsilon \int_1^2 \frac{\Phi_x(x)}{y(-2m-x) + \Phi(x)} dx + \\
& \varepsilon \int_0^1 \frac{\Phi_x(x)}{y(-2m-x) + \Phi(x)} dx. \quad (3.109)
\end{aligned}$$

Pela mudança de variável  $x \mapsto 2-x$  na integral  $\int_1^2$  em (3.109), temos que o lado direito da igualdade (3.109) é equivalente à

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(-2m-2+x) + \Phi(x)} dx + \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{y(-2m-x) + \Phi(x)} dx = \\
& = \varepsilon \int_0^1 \frac{y(-2m-2+x) - y(-2m-x)}{[y(-2m-x) + \Phi(x)][y(-2m-2+x) + \Phi(x)]} dx. \quad (3.110)
\end{aligned}$$

Logo, por (3.106), (3.108) e (3.110) a integral  $\mathcal{M}$  pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} & = -\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \\
& = \varepsilon \left[ \int_0^1 \frac{y(-2m-2+x) - y(-2m-x)}{[y(-2m-x) + \Phi(x)][y(-2m-2+x) + \Phi(x)]} dx - \right. \\
& \quad \left. \int_0^1 \frac{y(2m+4-x) - y(2m+2+x)}{[y(2m+2+x) + \Phi(x)][y(2m+4-x) + \Phi(x)]} dx \right]. \quad (3.111)
\end{aligned}$$

Segue de (3.89) que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{[y(2m+2+x) + \Phi(x)][y(2m+4-x) + \Phi(x)]} > \\
& > \frac{1}{[y(-2m-x) + \Phi(x)][y(-2m-2+x) + \Phi(x)]} > 0. \quad (3.112)
\end{aligned}$$

Por (3.112) e (3.92) temos

$$\begin{aligned}
& \frac{y(2m+4-x) - y(2m+2+x)}{[y(2m+2+x) + \Phi(x)][y(2m+4-x) + \Phi(x)]} < \\
& < \frac{y(-2m-2+x) - y(-2m-x)}{[y(-2m-x) + \Phi(x)][y(-2m-2+x) + \Phi(x)]}.
\end{aligned}$$

Portanto, segue de (3.111) que  $\mathcal{M} > 0$ .

Analisamos a integral  $\mathcal{N}$ . Pela propriedade (3.3) para  $m$  par vale

$$\begin{aligned} \Phi(2m+x) &= \Phi(x), & \Phi_x(2m+x) &= \Phi_x(x), \\ \Phi(-2m-2-x) &= \Phi(x), & \Phi_x(-2m-2-x) &= -\Phi_x(x). \end{aligned}$$

Para verificar que  $\mathcal{N} > 0$  seguimos os mesmos passos para analisar  $\mathcal{M} > 0$ , considerando as mudanças de variáveis convenientes. Sendo assim, omitimos o desenvolvimento das contas. Tendo  $\mathcal{M} > 0$  e  $\mathcal{N} > 0$ , a desigualdade (3.105) esta verificada. Com isso, por indução, está provada a desigualdade (3.75) para  $m$  par, o que completa a prova do Lema 3.1.2. □

### 3.1.2.3 Demonstração do Lema 3.1.3

Sejam  $L_i$  e  $L_i^*$  para  $i = 1, 2$  os arcos de órbita de  $\Gamma_i$  acima e abaixo do gráfico da  $\Phi(x)$ , respectivamente, ambos entre as retas  $x = \pm(2m + 1)$ . Pelo item (b) da Proposição 3.1.1, os arcos  $L_i$  e  $L_i^*$  não interceptam o gráfico da  $\Phi(x)$  entre tais retas. Assumimos que os pontos de interseção de  $\Gamma_i$  com a reta  $x = 2m + 1$  são  $C_i = (x_m, y_i^1)$  e  $D_i = (x_m, y_i^2)$  com  $x_m = 2m + 1$ , e  $y_i^1 \geq y_i^2$ . Notamos que para  $i = 2$  a igualdade  $y_2^1 = y_2^2$  não é verdadeira, pois neste caso  $C_2 = D_2$  implica que  $\Gamma_2$  cruza o eixo- $x$  em  $2m + 1$ , sendo assim o ponto mais a direita de  $\Gamma_1$  estaria antes de  $2m + 1$ , já que  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ , o que contraria a hipótese, veja Figura 3.12. Os pontos de interseção com a reta  $x = -2m - 1$  são  $C_i^* = (\bar{x}_m, \bar{y}_i^1)$  e  $D_i^* = (\bar{x}_m, \bar{y}_i^2)$  com  $\bar{x}_m = -2m - 2$ , e  $\bar{y}_i^1 \leq \bar{y}_i^2$  (analogamente,  $\bar{y}_i^1 < \bar{y}_i^2$  para  $i = 2$ ). Assim, temos que  $\Gamma_i = L_i \cup \widetilde{C_i D_i} \cup L_i^* \cup \widetilde{C_i^* D_i^*}$  onde  $\widetilde{C_i D_i}$  e  $\widetilde{C_i^* D_i^*}$  são os arcos da órbita  $\Gamma_i$  indo de  $C_i$  a  $D_i$  e de  $C_i^*$  a  $D_i^*$ , respectivamente.

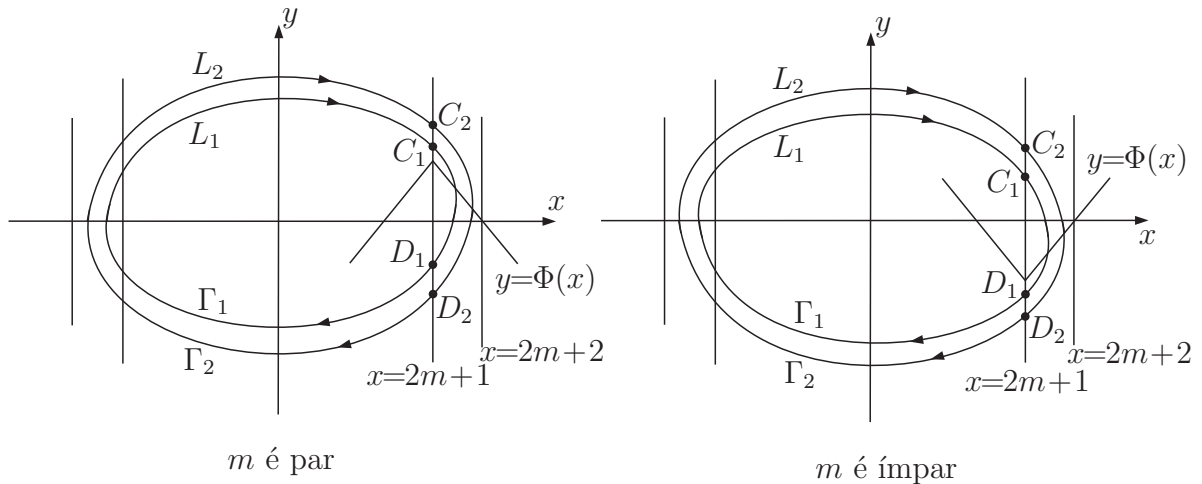


Figura 3.12: Notação usada no cálculo da integral do divergente ao longo das duas órbitas periódicas tais que seus pontos mais a direita estão localizados na faixa  $2m + 1 \leq x < 2m + 2$ .

Visto que as soluções de (3.5) são simétricas em relação a origem (lembramos que tal sistema é invariante pela mudança de variável  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ ), basta provar a desigualdade (3.56) no arco  $L_i \cup \widetilde{C_i D_i}$  para  $i = 1, 2$ .

Inicialmente provamos a desigualdade ao longo dos arcos  $\widetilde{C_1 D_1}$  e  $\widetilde{C_2 D_2}$ . Transladamos a origem do sistema para o ponto  $(2m + 1, (-1)^m \varepsilon)$  tomando as variáveis

$$\begin{aligned} X &= x - (2m + 1), \\ Y &= y - (-1)^m \varepsilon. \end{aligned}$$

Em seguida, passamos o sistema nas variáveis  $(X, Y)$  para coordenadas polares

$$\begin{aligned} X &= r \cos \theta, \\ Y &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

Utilizando que  $\dot{X} = \dot{x}$  e  $\dot{Y} = \dot{y}$ , o sistema (3.5) nas coordenadas polares é dado por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{X\dot{X} + Y\dot{Y}}{r} \\ &= \frac{r \cos \theta [y - \Phi(x)] + r \sin \theta [-x]}{r} \\ &= \frac{r \cos \theta [\varepsilon(-1)^m + r \sin \theta - \Phi(2m + 1 + r \cos \theta)] + r \sin \theta [-(2m + 1) - r \cos \theta]}{r} \\ &= \varepsilon(-1)^m \cos \theta - (2m + 1) \sin \theta - \cos \theta \Phi(2m + 1 + r \cos \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r\dot{\theta} &= r \frac{d\theta}{dt} = \frac{X\dot{Y} - \dot{X}Y}{r} \\ &= \frac{r \cos \theta [-x] - [y - \Phi(x)] r \sin \theta}{r} \\ &= \frac{r \cos \theta [-(2m + 1) - r \cos \theta] - [\varepsilon(-1)^m + r \sin \theta - \Phi(2m + 1 + r \cos \theta)] r \sin \theta}{r} \\ &= -r - \varepsilon(-1)^m \sin \theta - (2m + 1) \cos \theta + \sin \theta \Phi(2m + 1 + r \cos \theta). \end{aligned}$$

Como os arcos  $\widetilde{C_1 D_1}$  e  $\widetilde{C_2 D_2}$  estão na faixa  $2m + 1 \leq x < 2m + 2$ , temos que  $0 \leq r < 1$  e  $1 \leq 1 + r \cos \theta < 2$  para  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Para  $x \in [1, 2]$ ,  $\Phi(x) = \varepsilon\phi(x) = \varepsilon(-x + 2)$  e segue de (3.3) que  $\Phi(2m + (1 + r \cos \theta)) = (-1)^m \Phi(1 + r \cos \theta) = (-1)^m \varepsilon(1 - r \cos \theta)$ . Assim, o sistema obtido acima pode ser simplificado por

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \varepsilon r (-1)^m \cos^2 \theta - (2m + 1) \sin \theta, \\ r \frac{d\theta}{dt} &= -r - (2m + 1) \cos \theta - \varepsilon r (-1)^m \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \tag{3.113}$$

Sejam  $r_1 = r_1(\theta)$  e  $r_2 = r_2(\theta)$  para  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  as expressões dos arcos de órbita  $\widetilde{C_1D_1}$  e  $\widetilde{C_2D_2}$  em coordenadas polares, respectivamente. Para  $x \in [-2m-2, -2m-1] \cup [2m+1, 2m+2]$  temos por (3.4) que

$$\Phi_x(x) = \begin{cases} -\varepsilon & , \text{ para } m \text{ par,} \\ \varepsilon & , \text{ para } m \text{ ímpar,} \end{cases}$$

e então  $(-1)^m \Phi_x(x) = -\varepsilon$ . Por (3.113) obtemos

$$\begin{aligned} & (-1)^m \left( \int_{\widetilde{C_2D_2}} \Phi_x(x(t)) dt - \int_{\widetilde{C_1D_1}} \Phi_x(x(t)) dt \right) = \\ & = -\varepsilon \left( \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{r_2}{-r_2 - (2m+1) \cos \theta - \varepsilon r_2 (-1)^m \sin \theta \cos \theta} d\theta - \right. \\ & \quad \left. \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{r_1}{-r_1 - (2m+1) \cos \theta - \varepsilon r_1 (-1)^m \sin \theta \cos \theta} d\theta \right) \\ & = -\varepsilon \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r_2}{r_2 + (2m+1) \cos \theta + \varepsilon r_2 (-1)^m \sin \theta \cos \theta} d\theta - \right. \\ & \quad \left. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r_1}{r_1 + (2m+1) \cos \theta + \varepsilon r_1 (-1)^m \sin \theta \cos \theta} d\theta \right) \\ & = -\varepsilon \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(r_2 - r_1)(2m+1) \cos \theta}{[r_2 + (2m+1) \cos \theta + \Phi_2^*][r_1 + (2m+1) \cos \theta + \Phi_1^*]} d\theta, \quad (3.114) \end{aligned}$$

onde  $\Phi_i^* = \varepsilon r_i (-1)^m \sin \theta \cos \theta$  para  $i = 1, 2$ . Analisamos o sinal da integral (3.114) para os casos  $m$  par e  $m$  ímpar separadamente. Notamos que  $0 < r_1 < r_2 < 1$  já que  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ . Assim,  $r_2 - r_1 > 0$ . Para  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$  temos  $0 < \cos \theta < 1$  e  $-1 < \sin \theta < 1$ . Como  $\varepsilon > 0$  é pequeno, então

$$\begin{aligned} (r_2 - r_1)(2m+1) & > 0, \\ r_i + \cos \theta (2m+1 - \varepsilon r_i \sin \theta) & > 0, \quad i = 1, 2, \\ r_i + \cos \theta (2m+1 + \varepsilon r_i \sin \theta) & > 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Portanto, para  $m$  ímpar

$$-\varepsilon \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(r_2 - r_1)(2m+1) \cos \theta}{[r_2 + \cos \theta (2m+1 - \varepsilon r_2 \sin \theta)][r_1 + \cos \theta (2m+1 - \varepsilon r_1 \sin \theta)]} d\theta < 0, \quad (3.115)$$

e para  $m$  par

$$-\varepsilon \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(r_2 - r_1)(2m+1) \cos \theta}{[r_2 + \cos \theta (2m+1 + \varepsilon r_2 \sin \theta)][r_1 + \cos \theta (2m+1 + \varepsilon r_1 \sin \theta)]} d\theta < 0. \quad (3.116)$$

Portanto, segue de (3.114), (3.115) e (3.116) que

$$(-1)^m \left( \int_{\widetilde{C_2D_2}} \Phi_x(x(t)) dt - \int_{\widetilde{C_1D_1}} \Phi_x(x(t)) dt \right) < 0. \quad (3.117)$$



Notamos que para provar a desigualdade (3.56) ao longo dos arcos  $\widetilde{C_1^*D_1^*}$  e  $\widetilde{C_2^*D_2^*}$  localizados na faixa  $-2m-2 < x \leq -2m-1$ , a mudança de variável a ser utilizada é

$$\begin{aligned} x &= -2m-1 + r \cos \theta, \\ y &= \varepsilon(-1)^m + r \sin \theta, \end{aligned}$$

e como as órbitas estão orientadas no sentido horário, usando o mesmo raciocínio aplicado ao caso acima obtemos

$$\begin{aligned} (-1)^m \left( \int_{\widetilde{C_2^*D_2^*}} \Phi_x(x(t)) dt - \int_{\widetilde{C_1^*D_1^*}} \Phi_x(x(t)) dt \right) &= \\ &= -\varepsilon \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(r_2 - r_1)(-2m-1) \cos \theta}{[r_2 + (-2m-1) \cos \theta + \Phi_2^*][r_1 + (-2m-1) \cos \theta + \Phi_1^*]} d\theta < 0, \end{aligned}$$

onde  $\Phi_i^* = \varepsilon(-1)^m(2 + r_i \sin \theta \cos \theta)$  para  $i = 1, 2$ .

Analisamos agora a desigualdade (3.56) nos arcos de órbita  $L_1$  e  $L_2$  acima do gráfico da  $\Phi(x)$ . Seja  $y = y_i(x)$  com  $x \in [-2m-1, 2m+1]$  para  $i = 1, 2$  a expressão do arco de órbita  $L_i$ . Por (3.5) temos que  $dx/dt = y(x) - \Phi(x)$  e então

$$\begin{aligned} (-1)^m \left( \int_{L_2} \Phi_x(x(t)) dt - \int_{L_1} \Phi_x(x(t)) dt \right) &= \\ &= (-1)^m \left( \int_{-2m-1}^{2m+1} \frac{\Phi_x(x)}{y_2(x) - \Phi(x)} dx - \int_{-2m-1}^{2m+1} \frac{\Phi_x(x)}{y_1(x) - \Phi(x)} dx \right) \\ &= (-1)^m \int_{-2m-1}^{2m+1} \frac{[y_1(x) - y_2(x)]\Phi_x(x)}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]} dx. \end{aligned}$$

Identificamos

$$\Delta(x) = \frac{[y_1(x) - y_2(x)]\Phi_x(x)}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]}.$$

Verificamos que

$$(-1)^m \int_{-2m-1}^{2m+1} \Delta(x) dx < 0. \quad (3.118)$$

Antes de verificar tal desigualdade, notamos que como  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$  temos  $y_1(x) < y_2(x)$  para todo  $x \in [-2m-1, 2m+1]$ . Além disso, para  $x > 0$ , por (3.6) segue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y(x) - \Phi(x)} < 0 \quad (3.119)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[y_2(x) - y_1(x)] &= \frac{dy_2(x)}{dx} - \frac{dy_1(x)}{dx} \\ &= \frac{-x}{y_2(x) - \Phi(x)} + \frac{x}{y_1(x) - \Phi(x)} \\ &= \frac{x[y_2(x) - y_1(x)]}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]} > 0, \end{aligned} \quad (3.120)$$

ou seja, para  $x > 0$  (respectivamente  $x < 0$ ) a trajetória de cada arco é decrescente (respectivamente crescente) e a diferença (distância) entre os arcos  $L_1$  e  $L_2$  é crescente (respectivamente decrescente).

Notamos que para os arcos  $L_1^*$  das órbitas  $L_2^*$  abaixo do gráfico da  $\Phi(x)$ , temos  $y_1(x) > y_2(x)$  para todo  $x \in [-2m-1, 2m+1]$  e por (3.3) obtemos

$$\begin{aligned} & (-1)^m \left( \int_{L_2^*} \Phi_x(x(t)) dt - \int_{L_1^*} \Phi_x(x(t)) dt \right) = \\ & = (-1)^m \left( \int_{2m+1}^{-2m-1} \frac{\Phi_x(x)}{y_2(x) - \Phi(x)} dx - \int_{2m+1}^{-2m-1} \frac{\Phi_x(x)}{y_1(x) - \Phi(x)} dx \right) \\ & = (-1)^m \int_{-2m-1}^{2m+1} \frac{[y_2(-x) - y_1(-x)]\Phi_x(x)}{[y_1(-x) + \Phi(x)][y_2(-x) + \Phi(x)]} dx. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Além disso, para  $x > 0$  temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y(x) - \Phi(x)} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}[y_1(x) - y_2(x)] = -\frac{d}{dx}[y_2(x) - y_1(x)] < 0,$$

ou seja, para  $x > 0$  (respectivamente  $x < 0$ ) a trajetória de cada arco é crescente (respectivamente decrescente) e a diferença entre os arcos  $L_1^*$  e  $L_2^*$  é decrescente (respectivamente crescente). Para verificar a desigualdade (3.118) analisamos separadamente 1º caso:  $m$  ímpar e 2º caso:  $m$  par. Para verificar que a integral (3.121) é negativa, o raciocínio é análogo aos casos a seguir e serão omitidos.

**(1º Caso):** Dado  $m$  ímpar, para provar a desigualdade (3.118) basta verificar que  $\int_{-2m-1}^{2m+1} \Delta(x) dx > 0$ . Reescrevemos a integral como

$$\begin{aligned} \int_{-2m-1}^{2m+1} \Delta(x) dx & = \int_{-3}^{-2} \Delta(x) dx + \int_{-2}^2 \Delta(x) dx + \int_2^3 \Delta(x) dx + \\ & \quad \sum_{k=1}^{(m-1)/2} \left( \int_{4k-1}^{4k+3} \Delta(x) dx + \int_{-4k-3}^{-4k+1} \Delta(x) dx \right). \end{aligned} \quad (3.122)$$

Analisamos o sinal da segunda integral de (3.122). Consideramos

$$\int_{-2}^2 \Delta(x) dx = \int_0^2 \Delta(x) dx + \int_{-2}^0 \Delta(x) dx. \quad (3.123)$$

Visto que

$$\Phi_x(x) = \begin{cases} \varepsilon & , \text{ para } x \in [0, 1], \\ -\varepsilon & , \text{ para } x \in [1, 2], \end{cases}$$

reescrevemos a primeira integral de (3.123) como

$$\begin{aligned} \int_0^2 \Delta(x) dx & = \varepsilon \int_1^2 \frac{y_2(x) - y_1(x)}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]} dx - \\ & \quad \varepsilon \int_0^1 \frac{y_2(x) - y_1(x)}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]} dx. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Em (3.124) fazemos a mudança de variável  $x \mapsto 2 - x$  na primeira integral e por  $\Phi(2 - x) \stackrel{(3.3)}{=} \Phi(x)$ , o lado direito da igualdade equivale a

$$\varepsilon \int_0^1 \left( \frac{y_2(2-x) - y_1(2-x)}{[y_2(2-x) - \Phi(x)][y_1(2-x) - \Phi(x)]} - \frac{y_2(x) - y_1(x)}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]} \right) dx.$$

Observamos que para  $0 < x < 1$  temos  $1 < 2-x < 2$ . Como a diferença  $y_2(x) - y_1(x)$  é crescente para  $x > 0$  segue que  $y_2(2-x) - y_1(2-x) > y_2(x) - y_1(x)$ . Além disso,  $y_1(x)$  é decrescente e então

$$y_1(2-x) < y_1(x) \quad \text{e} \quad y_1(2-x) - \Phi(x) < y_1(x) - \Phi(x).$$

Analogamente, para  $y_2(x)$  temos

$$y_2(2-x) < y_2(x) \quad \text{e} \quad y_2(2-x) - \Phi(x) < y_2(x) - \Phi(x).$$

Logo,

$$\frac{y_2(2-x) - y_1(2-x)}{[y_2(2-x) - \Phi(x)][y_1(2-x) - \Phi(x)]} > \frac{y_2(x) - y_1(x)}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]},$$

e, portanto,

$$\int_0^2 \Delta(x) dx > 0. \quad (3.125)$$

Por (3.4) temos que  $\Phi_x(x) = -\varepsilon$  para  $x \in [-2, -1]$  e  $\Phi_x(x) = \varepsilon$  para  $x \in [-1, 0]$ . Assim, reescrevemos a segunda integral de (3.123) como

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \Delta(x) dx &= \varepsilon \int_{-1}^0 \frac{y_1(x) - y_2(x)}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]} dx + \\ &\varepsilon \int_{-2}^{-1} \frac{y_2(x) - y_1(x)}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]} dx. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Consideramos a mudança de variável  $x \mapsto -2 - x$  na integral  $\int_{-2}^{-1}$ . Como  $\Phi(-2-x) \stackrel{(3.3)}{=} \Phi(x)$ , o lado direito da igualdade (3.126) é equivalente à

$$\varepsilon \int_{-1}^0 \left( \frac{y_2(-2-x) - y_1(-2-x)}{[y_2(-2-x) - \Phi(x)][y_1(-2-x) - \Phi(x)]} - \frac{y_2(x) - y_1(x)}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]} \right) dx.$$

Visto que para  $-1 < x < 0$  temos  $-2 < -2-x < -1$  e por (3.120) a diferença  $y_2(x) - y_1(x)$  é decrescente, segue que  $y_2(-2-x) - y_1(-2-x) > y_2(x) - y_1(x)$ . Como para  $x < 0$ ,  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são crescentes, então

$$y_1(-2-x) < y_1(x) \quad , \quad y_1(-2-x) - \Phi(x) < y_1(x) - \Phi(x),$$

$$y_2(-2-x) < y_2(x) \quad \text{e} \quad y_2(-2-x) - \Phi(x) < y_2(x) - \Phi(x).$$

Daí,

$$\frac{y_2(-2-x) - y_1(-2-x)}{[y_2(-2-x) - \Phi(x)][y_1(-2-x) - \Phi(x)]} > \frac{y_2(x) - y_1(x)}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]},$$

e

$$\int_{-2}^0 \Delta(x) dx > 0. \quad (3.127)$$

Por (3.125) e (3.127), segue que

$$\int_{-2}^2 \Delta(x) dx > 0. \quad (3.128)$$

Analizamos o sinal da integral  $\int_{-3}^{-2}$  em (3.122). Pela mudança de variável  $x \mapsto -2 - x$  e visto que por (3.4) temos  $\Phi_x(x) = -\varepsilon$  para  $x \in [-3, -2]$ , obtemos

$$\int_{-3}^{-2} \Delta(x) dx = \varepsilon \int_0^1 \frac{y_2(-2-x) - y_1(-2-x)}{[y_2(-2-x) - \Phi(-2-x)][y_1(-2-x) - \Phi(-2-x)]} dx > 0, \quad (3.129)$$

pois por hipótese, para todo  $x \in [-2m-1, 2m+1]$  temos que  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  estão acima do gráfico da  $\Phi(x)$  com  $y_1(x) < y_2(x)$ . Do mesmo modo, consideramos a mudança de variável  $x \mapsto 2+x$  na integral  $\int_2^3$  em (3.122) e como  $\Phi_x(x) = -\varepsilon$  para  $x \in [2, 3]$ , segue que

$$\int_2^3 \Delta(x) dx = \varepsilon \int_0^1 \frac{y_2(2+x) - y_1(2+x)}{[y_2(2+x) - \Phi(2+x)][y_1(2+x) - \Phi(2+x)]} dx > 0. \quad (3.130)$$

Continuamos com o estudo do sinal das integrais contidas no somatório em (3.122).

Pela mudança de variável  $x \mapsto 4k-2+x$  e por  $\Phi(4k-2+x) \stackrel{(3.3)}{=} (-1)^{2k-1} \Phi(x) = -\Phi(x)$  e  $\Phi_x(4k-2+x) = -\Phi_x(x)$ , reescrevemos a primeira integral do somatório como

$$\begin{aligned} & \int_{4k-1}^{4k+3} \frac{[y_1(x) - y_2(x)] \Phi_x(x)}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]} dx = \\ & = \int_1^5 \frac{[y_2(4k-2+x) - y_1(4k-2+x)] \Phi_x(x)}{[y_2(4k-2+x) + \Phi(x)][y_1(4k-2+x) + \Phi(x)]} dx \\ & = \int_3^5 \frac{[y_2(4k-2+x) - y_1(4k-2+x)] \Phi_x(x)}{[y_2(4k-2+x) + \Phi(x)][y_1(4k-2+x) + \Phi(x)]} dx + \\ & \quad \int_1^3 \frac{[y_2(4k-2+x) - y_1(4k-2+x)] \Phi_x(x)}{[y_2(4k-2+x) + \Phi(x)][y_1(4k-2+x) + \Phi(x)]} dx, \quad (3.131) \end{aligned}$$

para  $k = 1, \dots, (m-1)/2$  com  $m \geq 3$ . Aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto 6-x$  na integral  $\int_3^5$  de (3.131). Por (3.4) temos que  $\Phi_x(x) = -\varepsilon$  para  $x \in [1, 3]$  e  $\Phi_x(x) = \varepsilon$  para  $x \in [3, 5]$ , e como  $\Phi(6-x) = \Phi(x)$  segue que o lado direito da última igualdade em (3.131) é equivalente à

$$\varepsilon \left( \int_1^3 \frac{y_2(4k+4-x) - y_1(4k+4-x)}{[y_2(4k+4-x) + \Phi(x)][y_1(4k+4-x) + \Phi(x)]} dx - \int_1^3 \frac{y_2(4k-2+x) - y_1(4k-2+x)}{[y_2(4k-2+x) + \Phi(x)][y_1(4k-2+x) + \Phi(x)]} dx \right). \quad (3.132)$$

Para  $1 < x < 3$  temos  $1+4k < 4k+4-x < 3+4k$  e  $-1+4k < 4k-2+x < 1+4k$ . Consideramos  $k = (m-1)/2$ . Daí, segue que

$$4k+4-x = 2m+2-x \quad \text{e} \quad 2m-1 < 2m+2-x < 2m+1,$$

$$4k-2+x = 2m-4+x \quad \text{e} \quad 2m-3 < 2m-4+x < 2m-1.$$

Como  $m \geq 3$ , por (3.119) e (3.120) temos

$$y_i(2m+2-x) < y_i(2m-4+x) \quad \text{e} \quad y_i(2m+2-x) + \Phi(x) < y_i(2m-4+x) + \Phi(x)$$

para  $i = 1, 2$  e

$$y_2(2m+2-x) - y_1(2m+2-x) > y_2(2m-4+x) - y_1(2m-4+x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \frac{y_2(2m+2-x) - y_1(2m+2-x)}{[y_2(2m+2-x) + \Phi(x)][y_1(2m+2-x) + \Phi(x)]} > \\ & > \frac{y_2(2m-4+x) - y_1(2m-4+x)}{[y_2(2m-4+x) + \Phi(x)][y_1(2m-4+x) + \Phi(x)]}. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Substituímos  $k = (m-1)/2$  em (3.132) e reescrevemos da seguinte maneira

$$\varepsilon \int_1^3 \left( \frac{y_2(2m+2-x) - y_1(2m+2-x)}{[y_2(2m+2-x) + \Phi(x)][y_1(2m+2-x) + \Phi(x)]} - \frac{y_2(2m-4+x) - y_1(2m-4+x)}{[y_2(2m-4+x) + \Phi(x)][y_1(2m-4+x) + \Phi(x)]} \right) dx.$$

Portanto, por (3.133) obtemos que

$$\int_{4k-1}^{4k+3} \Delta(x) dx > 0. \quad (3.134)$$

Na segunda integral do somatório de (3.122) consideramos a mudança de variável  $x \mapsto -4k-4+x$ . Como  $\Phi(-4k-4+x) \stackrel{(3.3)}{=} (-1)^{-2k-2} \Phi(x) = \Phi(x)$  e  $\Phi_x(-4k-4+x) = \Phi_x(x)$  temos que

$$\begin{aligned}
& \int_{-4k+1}^{-4k-3} \frac{[y_1(x) - y_2(x)]\Phi_x(x)}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]} dx = \\
& = \int_1^5 \frac{[y_1(-4k-4+x) - y_2(-4k-4+x)]\Phi_x(x)}{[y_2(-4k-4+x) - \Phi(x)][y_1(-4k-4+x) - \Phi(x)]} dx \\
& = \int_3^5 \frac{[y_1(-4k-4+x) - y_2(-4k-4+x)]\Phi_x(x)}{[y_2(-4k-4+x) - \Phi(x)][y_1(-4k-4+x) - \Phi(x)]} dx + \\
& \quad \int_1^3 \frac{[y_1(-4k-4+x) - y_2(-4k-4+x)]\Phi_x(x)}{[y_2(-4k-4+x) - \Phi(x)][y_1(-4k-4+x) - \Phi(x)]} dx, \quad (3.135)
\end{aligned}$$

para  $k = 1, \dots, (m-1)/2$  com  $m \geq 3$ . Aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto 6-x$  na integral  $\int_3^5$  de (3.135) e considerando  $\Phi(6-x) = \Phi(x)$  e os valores que  $\Phi_x(x)$  assume nos intervalos de integração, reescrevemos o lado direito da última igualdade em (3.135) como

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \left( \int_1^3 \frac{y_2(-4k-4+x) - y_1(-4k-4+x)}{[y_2(-4k-4+x) - \Phi(x)][y_1(-4k-4+x) - \Phi(x)]} dx - \right. \\
& \quad \left. \int_1^3 \frac{y_2(-4k+2-x) - y_1(-4k+2-x)}{[y_2(-4k+2-x) - \Phi(x)][y_1(-4k+2-x) - \Phi(x)]} dx \right). \quad (3.136)
\end{aligned}$$

Para  $1 < x < 3$  temos  $-3-4k < -4k-4+x < -1-4k$  e  $-1-4k < -4k+2-x < 1-4k$ . Consideramos  $k = (m-1)/2$ . Daí,

$$-4k-4+x = -2m-2+x \quad \text{e} \quad -2m-1 < -2m-2+x < -2m+1,$$

$$-4k+2-x = -2m+4-x \quad \text{e} \quad -2m+1 < -2m+4-x < -2m+3.$$

Como  $m \geq 3$ , por (3.119) e (3.120) temos

$$y_i(-2m-2+x) < y_i(-2m+4-x) \quad \text{e} \quad y_i(-2m-2+x) - \Phi(x) < y_i(-2m+4-x) - \Phi(x)$$

para  $i = 1, 2$  e

$$y_2(-2m-2+x) - y_1(-2m-2+x) > y_2(-2m+4-x) - y_1(-2m+4-x).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \frac{y_2(-2m-2+x) - y_1(-2m-2+x)}{[y_2(-2m-2+x) - \Phi(x)][y_1(-2m-2+x) - \Phi(x)]} > \\
& > \frac{y_2(-2m+4-x) - y_1(-2m+4-x)}{[y_2(-2m+4-x) - \Phi(x)][y_1(-2m+4-x) - \Phi(x)]}. \quad (3.137)
\end{aligned}$$

Substituímos  $k = (m-1)/2$  em (3.136) e reescrevemos como

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \int_1^3 \left( \frac{y_2(-2m-2+x) - y_1(-2m-2+x)}{[y_2(-2m-2+x) - \Phi(x)][y_1(-2m-2+x) - \Phi(x)]} - \right. \\
& \quad \left. \frac{y_2(-2m+4-x) - y_1(-2m+4-x)}{[y_2(-2m+4-x) - \Phi(x)][y_1(-2m+4-x) - \Phi(x)]} \right) dx.
\end{aligned}$$

Portanto, por (3.137) obtemos que

$$\int_{-4k-3}^{-4k+1} \Delta(x) dx > 0. \quad (3.138)$$

Assim, por (3.128)–(3.130), (3.134), (3.138) e (3.122) temos que a desigualdade (3.118) é válida para  $m$  ímpar.

O próximo passo é considerar o caso  $m$  par. Seguimos um raciocínio análogo ao do caso  $m$  ímpar, porém verificamos que a integral em (3.118) é negativa, já que  $(-1)^m > 0$ .

(2º Caso): Dado  $m$  par reescrevemos a integral em (3.118) como

$$\int_{-2m-1}^{2m+1} \Delta(x) dx = \int_{-1}^1 \Delta(x) dx + \sum_{k=1}^{m/2} \left( \int_{4k-3}^{4k+1} \Delta(x) dx + \int_{-4k-1}^{-4k+3} \Delta(x) dx \right), \quad (3.139)$$

onde

$$\Delta(x) = \frac{[y_1(x) - y_2(x)]\Phi_x(x)}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]}.$$

Analisamos o sinal da primeira integral de (3.139). Considerando a mudança de variável  $x \mapsto 2 - x$  e por (3.4) temos que  $\Phi_x(x) = \varepsilon$  para  $x \in [-1, 1]$ , assim

$$\int_{-1}^1 \Delta(x) dx = -\varepsilon \int_1^3 \frac{y_2(2-x) - y_1(2-x)}{[y_2(2-x) - \Phi(2-x)][y_1(2-x) - \Phi(2-x)]} dx < 0, \quad (3.140)$$

pois lembramos que por hipótese para todo  $x \in [-2m-1, 2m+1]$ , as soluções  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  estão acima do gráfico da  $\Phi(x)$  e  $y_1(x) < y_2(x)$ . Fazemos agora o estudo do sinal da integrais contidas no somatório de (3.139). Aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto 4k - 4 + x$  e como  $\Phi(4k - 4 + x) \stackrel{(3.3)}{=} (-1)^{2k-2}\Phi(x) = \Phi(x)$  e  $\Phi_x(4k - 4 + x) = \Phi_x(x)$ , reescrevemos a primeira integral do somatório como

$$\begin{aligned} & \int_{4k-3}^{4k+1} \frac{[y_1(x) - y_2(x)]\Phi_x(x)}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]} dx = \\ &= \int_1^5 \frac{[y_1(4k-4+x) - y_2(4k-4+x)]\Phi_x(x)}{[y_2(4k-4+x) - \Phi(x)][y_1(4k-4+x) - \Phi(x)]} dx \\ &= \int_3^5 \frac{[y_1(4k-4+x) - y_2(4k-4+x)]\Phi_x(x)}{[y_2(4k-4+x) - \Phi(x)][y_1(4k-4+x) - \Phi(x)]} dx + \\ & \quad \int_1^3 \frac{[y_1(4k-4+x) - y_2(4k-4+x)]\Phi_x(x)}{[y_2(4k-4+x) - \Phi(x)][y_1(4k-4+x) - \Phi(x)]} dx, \end{aligned} \quad (3.141)$$

para  $k = 1, \dots, m/2$ . Pela mudança de variável  $x \mapsto 6 - x$  na integral  $\int_3^5$  de (3.141), como  $\Phi(6-x) = \Phi(x)$  e  $\Phi_x(x)$  assume os valores  $-\varepsilon$  para  $x \in [1, 3]$  e  $\varepsilon$  para  $x \in [3, 5]$ , temos que o lado direito da última igualdade em (3.141) equivale à

$$-\varepsilon \left( \int_1^3 \frac{y_2(4k+2-x) - y_1(4k+2-x)}{[y_2(4k+2-x) - \Phi(x)][y_1(4k+2-x) - \Phi(x)]} dx - \int_1^3 \frac{y_2(4k-4+x) - y_1(4k-4+x)}{[y_2(4k-4+x) - \Phi(x)][y_1(4k-4+x) - \Phi(x)]} dx \right). \quad (3.142)$$

Para  $1 < x < 3$  temos  $-1+4k < 4k+2-x < 1+4k$  e  $-3+4k < 4k-4+x < -1+4k$ . Consideramos  $k = m/2$ . Daí, segue que

$$4k+2-x = 2m+2-x \quad \text{e} \quad 2m-1 < 2m+2-x < 2m+1,$$

$$4k-4+x = 2m-4+x \quad \text{e} \quad 2m-3 < 2m-4+x < 2m-1.$$

Como  $m \geq 2$ , por (3.119) e (3.120) temos

$$y_i(2m+2-x) < y_i(2m-4+x) \quad \text{e} \quad y_i(2m+2-x) - \Phi(x) < y_i(2m-4+x) - \Phi(x)$$

para  $i = 1, 2$  e

$$y_2(2m+2-x) - y_1(2m+2-x) > y_2(2m-4+x) - y_1(2m-4+x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \frac{y_2(2m+2-x) - y_1(2m+2-x)}{[y_2(2m+2-x) - \Phi(x)][y_1(2m+2-x) - \Phi(x)]} > \\ & > \frac{y_2(2m-4+x) - y_1(2m-4+x)}{[y_2(2m-4+x) - \Phi(x)][y_1(2m-4+x) - \Phi(x)]}. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Substituímos  $k = m/2$  em (3.142) e reescrevemos como

$$-\varepsilon \int_1^3 \left( \frac{y_2(2m+2-x) - y_1(2m+2-x)}{[y_2(2m+2-x) - \Phi(x)][y_1(2m+2-x) - \Phi(x)]} - \frac{y_2(2m-4+x) - y_1(2m-4+x)}{[y_2(2m-4+x) - \Phi(x)][y_1(2m-4+x) - \Phi(x)]} \right) dx.$$

Portanto, por (3.143) obtemos que

$$\int_{4k-3}^{4k+1} \Delta(x) dx < 0. \quad (3.144)$$

Na segunda integral do somatório em (3.139) consideramos a mudança de variável  $x \mapsto -4k-2+x$ . Como  $\Phi(-4k-2+x) \stackrel{(3.3)}{=} (-1)^{-2k-1} \Phi(x) = -\Phi(x)$  e  $\Phi_x(-4k-2+x) = -\Phi_x(x)$  temos que



$$\begin{aligned}
& \int_{-4k-1}^{-4k+3} \frac{[y_1(x) - y_2(x)]\Phi_x(x)}{[y_2(x) - \Phi(x)][y_1(x) - \Phi(x)]} dx = \\
& = \int_1^5 \frac{[y_2(-4k-2+x) - y_1(-4k-2+x)]\Phi_x(x)}{[y_2(-4k-2+x) + \Phi(x)][y_1(-4k-2+x) + \Phi(x)]} dx \\
& = \int_3^5 \frac{[y_2(-4k-2+x) - y_1(-4k-2+x)]\Phi_x(x)}{[y_2(-4k-2+x) + \Phi(x)][y_1(-4k-2+x) + \Phi(x)]} dx + \\
& \quad \int_1^3 \frac{[y_2(-4k-2+x) - y_1(-4k-2+x)]\Phi_x(x)}{[y_2(-4k-2+x) + \Phi(x)][y_1(-4k-2+x) + \Phi(x)]} dx, \quad (3.145)
\end{aligned}$$

para  $k = 1, \dots, m/2$ . Aplicamos a mudança de variável  $x \mapsto 6 - x$  na integral  $\int_3^5$  de (3.145) e considerando  $\Phi(6 - x) = \Phi(x)$  e os valores que  $\Phi_x(x)$  assume nos intervalos de integração, reescrevemos o lado direito da última igualdade em (3.145) como

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \left( \int_1^3 \frac{y_2(-4k-2+x) - y_1(-4k-2+x)}{[y_2(-4k-2+x) + \Phi(x)][y_1(-4k-2+x) + \Phi(x)]} dx - \right. \\
& \quad \left. \int_1^3 \frac{y_2(-4k+4-x) - y_1(-4k+4-x)}{[y_2(-4k+4-x) + \Phi(x)][y_1(-4k+4-x) + \Phi(x)]} dx \right). \quad (3.146)
\end{aligned}$$

Para  $1 < x < 3$  temos  $-1-4k < -4k-2+x < 1-4k$  e  $1-4k < -4k+4-x < 3-4k$ . Consideramos  $k = m/2$ . Daí

$$\begin{aligned}
-4k-2+x & = -2m-2+x & \text{e} & \quad -2m-1 < -2m-2+x < -2m+1, \\
-4k+4-x & = -2m+4-x & \text{e} & \quad -2m+1 < -2m+4-x < -2m+3.
\end{aligned}$$

Como  $m \geq 2$ , por (3.119) e (3.120) temos

$$y_i(-2m-2+x) < y_i(-2m+4-x) \quad \text{e} \quad y_i(-2m-2+x) + \Phi(x) < y_i(-2m+4-x) + \Phi(x)$$

para  $i = 1, 2$  e

$$y_2(-2m-2+x) - y_1(-2m-2+x) > y_2(-2m+4-x) - y_1(-2m+4-x).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \frac{y_2(-2m-2+x) - y_1(-2m-2+x)}{[y_2(-2m-2+x) + \Phi(x)][y_1(-2m-2+x) + \Phi(x)]} > \\
& > \frac{y_2(-2m+4-x) - y_1(-2m+4-x)}{[y_2(-2m+4-x) + \Phi(x)][y_1(-2m+4-x) + \Phi(x)]}. \quad (3.147)
\end{aligned}$$

Substituímos  $k = m/2$  em (3.146) e reescrevemos como

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \int_1^3 \left( \frac{y_2(-2m-2+x) - y_1(-2m-2+x)}{[y_2(-2m-2+x) + \Phi(x)][y_1(-2m-2+x) + \Phi(x)]} - \right. \\
& \quad \left. \frac{y_2(-2m+4-x) - y_1(-2m+4-x)}{[y_2(-2m+4-x) + \Phi(x)][y_1(-2m+4-x) + \Phi(x)]} \right) dx.
\end{aligned}$$

Portanto, por (3.147) obtemos que

$$\int_{-4k-1}^{-4k+3} \Delta(x) dx < 0. \quad (3.148)$$

Assim, segue de (3.140), (3.144), (3.148) e (3.139) que a desigualdade (3.118) é válida para  $m$  par. Com isso, concluímos que

$$(-1)^m \left( \int_{L_2} \Phi_x(x(t)) dt - \int_{L_1} \Phi_x(x(t)) dt \right) < 0. \quad (3.149)$$

Portanto, visto que o sistema é simétrico em relação a origem, por (3.117) e (3.149) obtemos a desigualdade (3.56). Com isso, completamos a prova do Lema 3.1.3.  $\square$

## 3.2 Sistemas com número particular de ciclos limites

Uma consequência do Teorema 3.0.1 é o resultado apresentado a seguir, que mostra a existência de sistemas lineares por partes com exatamente  $k$  ciclos limites no plano, onde  $k$  é qualquer inteiro positivo. Consideramos

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \phi(x) & , \text{ para } |x| \leq 2k + 2, \\ 0 & , \text{ para } |x| > 2k + 2. \end{cases} \quad (3.150)$$

No que segue denotamos por  $(3.1)_k$  o sistema (3.1) substituindo a função  $\phi(x)$  por  $\phi_k(x)$ .

**Teorema 3.2.1** *Para  $\varepsilon \neq 0$ , o sistema (3.1) com  $\phi_k(x)$  ao invés de  $\phi(x)$ , tem exatamente  $k$  ciclos limites em  $\mathbb{R}^2$  alternados entre estáveis e instáveis.*

**Demonstração:** Pelo Teorema 2.0.1 e sua demonstração, obtemos que o sistema (3.1) possui exatamente  $k$  ciclos limites na faixa  $|x| \leq 2k + 2$ , alternados entre estáveis e instáveis. Resta-nos então provar que o sistema  $(3.1)_k$  não possui ciclos limites na região  $|x| > 2k + 2$ . Seja  $x_0$  um número real positivo qualquer. Para todo  $m$ ,  $(-1)^{m+1} = (-1)^{m-1}$ . Segue do Teorema Fundamental do Cálculo e da Afirmação 3.1.3 que

$$\begin{aligned} & (-1)^k [\lambda(2k + 2 + x_0) - \lambda(-2k - 2 - x_0)] = \\ & = (-1)^k \left[ \int_{-2k-2-x_0}^{2k+2+x_0} \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx \right] \\ & = (-1)^k \left[ \int_{2k+2}^{2k+2+x_0} \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx + \int_{-2k-2}^{2k+2} \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx + \int_{-2k-2-x_0}^{-2k-2} \frac{-x\Phi(x)}{y(x) - \Phi(x)} dx \right] \end{aligned}$$

$$\stackrel{(3.150)}{=} (-1)^k [\lambda(2k+2) - \lambda(-2k-2)] \stackrel{(k=m-1)}{=} (-1)^{m-1} [\lambda(2m) - \lambda(-2m)] < 0. \quad (3.151)$$

Assim como feito acima, usando (3.9) obtemos que para  $y(x)$  solução de  $(3.1)_k$  tal que a parte da curva solução abaixo de  $y = \Phi(x)$  cruza as retas  $x = \pm(2k+2+x_0)$ , vale

$$\begin{aligned} (-1)^k [\lambda(-2k-2-x_0) - \lambda(2k+2+x_0)] &= (-1)^k (-1) [\lambda(2k+2+x_0) - \lambda(-2k-2-x_0)] \\ &= (-1)^k [\lambda(-2k-2) - \lambda(2k+2)] \\ &= (-1)^{m-1} [\lambda(-2m) - \lambda(2m)] < 0. \end{aligned} \quad (3.152)$$

Considerando  $k$  ímpar, afirmamos que qualquer órbita do sistema  $(3.1)_k$  que inicia em um ponto  $(x_-, 0)$  com  $x_- < -2k-2$  (ou seja,  $x_- = -2k-2-x_0$ ), cruza o eixo- $x$  em um ponto  $(x_+, 0)$  com  $x_+ > -x_-$ . De fato, se tal órbita cruza o eixo- $x$  em  $(-x_-, 0)$  temos  $\lambda(-x_-) - \lambda(x_-) = 0$ , o que contraria (3.151). Recordamos que  $\lambda(x) = \lambda(x, y(x))$  com  $y(x)$  solução do sistema, e  $\lambda(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . Por outro lado, se a órbita cruza o eixo- $x$  em  $(x_+, 0)$  com  $x_+ < -x_-$ , há uma outra curva solução localizada acima desta que cruza o eixo- $x$  no ponto  $(-x_-, 0)$  e que também, devido à unicidade das soluções, cruza a reta  $x = x_-$  em um ponto  $(x_-, y)$  com  $y > 0$ , o que implica  $\lambda(-x_-) - \lambda(x_-) < 0$  e contradiz a condição (3.151). Lembramos que o sistema  $(3.1)_k$  é invariante sob a mudança de variável  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ . Do mesmo modo, a órbita que inicia no ponto  $(-x_-, 0)$  cruza o eixo- $x$  no ponto  $(-x_+, 0)$  com  $-x_+ < x_-$ , pois caso contrário temos as mesmas contradições acima em relação a (3.152), veja Figura 3.13.

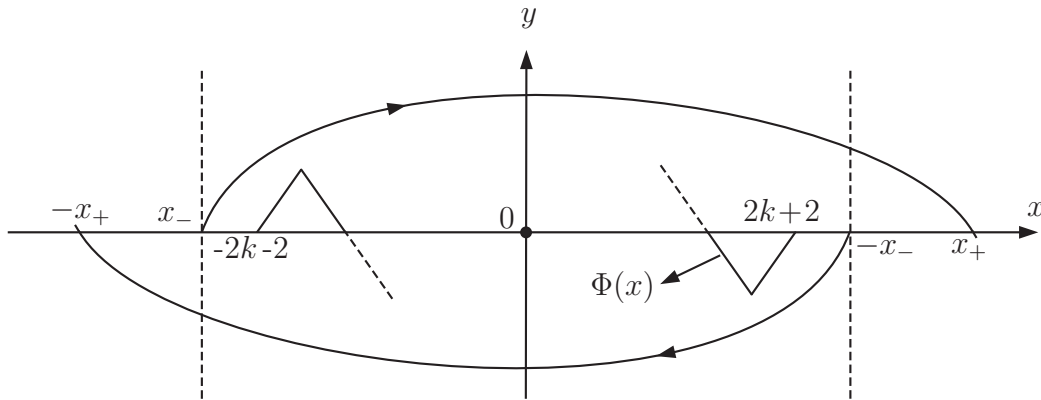


Figura 3.13: Comportamento das órbitas do sistema  $(3.1)_k$  na faixa  $|x| > 2k+2$  para  $k$  ímpar.

Portanto, para  $k$  ímpar, devido à unicidade das soluções não é possível que uma órbita que inicia em um ponto  $(x_-, 0)$  e cruza o eixo- $x$  num ponto  $(x_+, 0)$ , volte ao seu ponto de origem. O que garante que o sistema  $(3.1)_k$  não possui ciclos limites na região do plano com  $|x| > 2k+2$ .

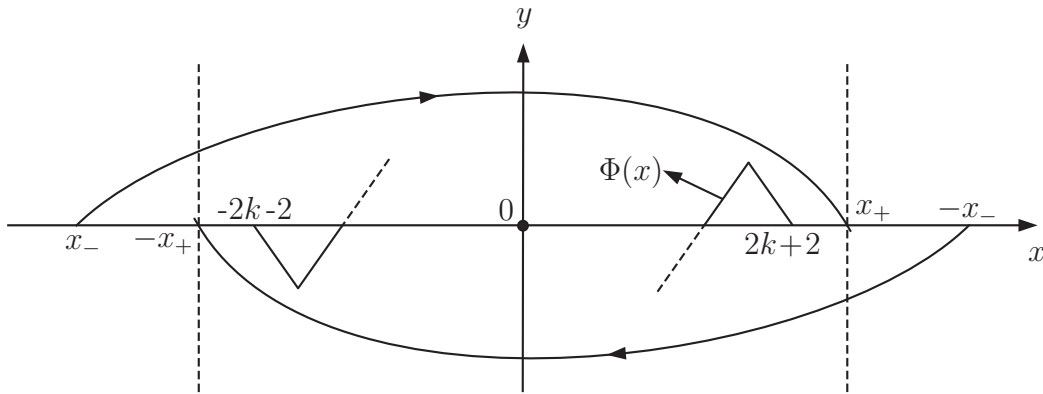


Figura 3.14: Comportamento das órbitas do sistema  $(3.1)_k$  na faixa  $|x| > 2k + 2$  para  $k$  par.

Consideramos agora  $k$  par. Temos que qualquer órbita do sistema  $(3.1)_k$  que cruza o eixo- $x$  em um ponto  $(x_+, 0)$  com  $x_+ > 2k + 2$  (ou seja,  $x_+ = 2k + 2 + x_0$ ), necessariamente se inicia em um ponto  $(x_-, 0)$  com  $x_- < -x_+$ . De fato, se tal órbita inicia em  $(-x_+, 0)$  temos  $\lambda(x_+) - \lambda(-x_+) = 0$ , o que contradiz (3.151). Por outro lado, se a órbita inicia em  $(x_-, 0)$  com  $x_- > -x_+$ , há uma outra órbita acima que inicia em  $(-x_+, 0)$  e cruza a reta  $x = x_+$  num ponto  $(x_+, y)$  com  $y > 0$ , devido a unicidade das soluções. Logo, temos  $\lambda(x_+) - \lambda(-x_+) > 0$ , o que contradiz (3.151). Analogamente, a órbita do sistema  $(3.1)_k$  que cruza o eixo- $x$  em um ponto  $(-x_+, 0)$ , necessariamente começa no ponto  $(-x_-, 0)$  com  $-x_- > x_+$ , pois caso contrário temos as mesmas contradições acima em relação a condição (3.152), veja Figura 3.14. Portanto, o sistema  $(3.1)_k$  não possui ciclos limites na região do plano com  $|x| > 2k + 2$  para  $k$  par. Com isso completamos a prova do Teorema 3.2.1

■

# Apêndice

## Teorema do Averaging para $f(\theta, r) = \cos \theta \phi(r \cos \theta)$

Embora a derivada da  $f(\theta, r) = \cos \theta \phi(r \cos \theta)$  não seja contínua sobre os valores inteiros ímpares, na demonstração do Teorema do Averaging isso não nos impede de obter uma estimativa para  $R(\theta, r, \varepsilon)$ . De fato,

$$\begin{aligned} \|f(\theta, r + \varepsilon u(\theta, r)) - f(\theta, r)\| &= \|\cos \theta \phi([r + \varepsilon u(\theta, r)] \cos \theta) - \cos \theta \phi(r \cos \theta)\| \\ &= \|\cos \theta [\phi(r \cos \theta + \varepsilon u(\theta, r) \cos \theta) - \phi(r \cos \theta)]\| \\ &\leq \|\phi(r \cos \theta + \varepsilon u(\theta, r) \cos \theta) - \phi(r \cos \theta)\|. \end{aligned}$$

Sendo  $\phi$  uma função periódica definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} x & , \text{ se } x \in [0, 1], \\ -x + 2 & , \text{ se } x \in [1, 2], \end{cases}$$

segue que se consideramos  $\phi(x) = x$ , pela última inequação obtida acima temos

$$\begin{aligned} \|\phi(r \cos \theta + \varepsilon u(\theta, r) \cos \theta) - \phi(r \cos \theta)\| &= \|r \cos \theta + \varepsilon u(\theta, r) \cos \theta - r \cos \theta\| \\ &\leq \|\varepsilon u(\theta, r)\| \leq \varepsilon N_1. \end{aligned}$$

Por outro lado, se consideramos  $\phi(x) = -x + 2$ , temos

$$\begin{aligned} \|\phi(r \cos \theta + \varepsilon u(\theta, r) \cos \theta) - \phi(r \cos \theta)\| &= \|-r \cos \theta - \varepsilon u(\theta, r) \cos \theta + 2 + r \cos \theta - 2\| \\ &\leq \|\varepsilon u(\theta, r)\| \leq \varepsilon N_2. \end{aligned}$$

Portanto, tomando  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , concluímos que

$$\|f(\theta, r + \varepsilon u(\theta, r)) - f(\theta, r)\| \leq \varepsilon N,$$

e então na sequência do teorema obtemos uma estimativa para  $R(\theta, r, \varepsilon)$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] BAUTIN, A.N. *Qualitative investigation of a piecewise linear system*. J. Appl. Math. Mech. 38, 691-700. (1974).
- [2] DUFF, G.F.D. *Limit cycles and rotated vector fields*. Annals of Mathematics 57, 15-31. (1953).
- [3] DUMORTIER, F.; LLIBRE, J. & ARTÉS, J. C. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Universitex, Springer. (2006).
- [4] FLEISHMAN, B.A. *Forced oscillations and convex superposition in piecewise linear system*. SIAM Rev. 7, 205-222. (1965).
- [5] FREIRE, E.; PONCE, E.; RODRIGO, F. & TORRES, F. *Bifurcation sets for continuous piecewise linear systems with two zones*. Int. J. Bifurcation and Chaos 8, 2073-2097. (1998).
- [6] FREIRE, E.; PONCE, E.; RODRIGO, F. & TORRES, F. *Bifurcation sets for symmetrical continuous piecewise linear systems with three zones*. Int. J. Bifurcation and Chaos 12, 1675-1702. (2002).
- [7] GRADSHTEYN, I. S. & RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press. (1979).
- [8] LLIBRE, J. & PONCE, E. *Bifurcation of a periodic orbit from infinity in planar piecewise linear vector fields*. Nonlinear Analysis TMA 36, 623-653. (1999).
- [9] LLIBRE, J. & PONCE, E. *Piecewise linear feedback systems with arbitrary number of limit cycles*. Int. J. Bifurcation and Chaos, v. 13, n. 4, 895-904. (2003).
- [10] LLIBRE, J., PONCE, E. & ZHANG, X. *Existence of piecewise linear differential systems with exactly  $n$  limit cycles for all  $n \in \mathbb{N}$* . Nonlinear Analysis 54, 977-994. (2003).
- [11] MOORE, C. N. *Note on the roots of Bessel functions*. Annals of Mathematics 9, 156-162. (1908).
- [12] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics 7, Springer-Verlag, New York. (1991).

- 
- [13] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro. (1979).
- [14] VERHULST, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. 2nd ed. Universitext, Springer-Verlag. (1991).
- [15] WATSON, G. N. *A Treatise on the Theory of Bessel functions*. 2nd ed. Cambridge University Press. (1952).
- [16] YANQIAN, Y. *Theory of Limit Cycles*. Translations of Math. Monog. 66, AMS, Providence. (1984).
- [17] ZHANG, Z. *Theorem of existence of exact  $n$  limit cycles in  $|x| \leq (n + 1)\pi$  for the differential equation  $\ddot{x} + \mu \sin \dot{x} + x = 0$* . Sci. Sinica 23, 1502-1510. (1980).
- [18] ZHANG, Z., DING, T. , HUANG W. & DONG, Z. *Qualitative Theory of Differential Equations*. Translations of Math. Monog. 101, AMS, Providence. (1992).

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 14 / 03 / 12

A handwritten signature in blue ink, consisting of a series of loops and a long horizontal stroke at the end.

---

Assinatura