

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

**Leis de escala e expoentes críticos
em mapeamentos Hamiltonianos
bidimensionais**

Pedro Vinícius Fernandes Martins

Rio Claro (SP)

2015

Pedro Vinícius Fernandes Martins

Leis de escala e expoentes críticos em mapeamentos Hamiltonianos bidimensionais

Trabalho de Conclusão de Curso - TCC - apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista - Campus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

UNESP - Rio Claro

Prof. Dr. Ricardo Pauptiz B. dos Santos

UNESP - Rio Claro

Prof. Dr. Alexandre Mesquita

UNESP - Rio Claro

Rio Claro (SP)

2015

517.39 Martins, Pedro Vinícius Fernandes
M386L Leis de escala e expoentes críticos em mapeamentos hamiltonianos bidimensionais / Pedro Vinícius Fernandes Martins. - Rio Claro, 2015
24 f. : il., figs., gráfs.

Trabalho de conclusão de curso (bacharelado - Física) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências de Rio Claro

Orientador: Edson Denis Leonel

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Caos. 3. Mapeamentos discretos. 4. Sistemas Hamiltonianos. I. Título.

Pedro Vinícius Fernandes Martins

Leis de escala e expoentes críticos em mapeamentos
hamiltonianos bidimensionais

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

Edson Denis Leonel (orientador)

Ricardo Pauptiz Barbosa Dos Santos

Alexandre Mesquita

Rio Claro, 21 de dezembro de 2015.

PEDRO VINÍCIUS F. MARTINS
Pedro Vinícius Fernandes Martins


Edson Denis Leonel

RESUMO

Sistemas dinâmicos descritos por mapeamentos discretos tem sido estudados amplamente durante vários anos. A descrição de sistemas Hamiltonianos conduz muitas vezes a mapeamentos discretos bidimensionais e que preservam a área no espaço de fases. Neste projeto, consideraremos como objeto de estudo uma classe de sistemas que podem ser descritos por um Hamiltoniano composto por uma parte integrável e uma parte não integrável. O objetivo principal desse trabalho de conclusão de curso é investigar algumas propriedades de escala, localização de curvas invariantes, obtenção de expoentes críticos em uma família de mapeamentos bidimensionais, e fazer uma comparação com os resultados esperados pela teoria e os resultados obtidos experimentalmente, usando um formalismo essencialmente fenomenológico.

ABSTRACT

Dynamical systems described by nonlinear mappings have received much attention in the last decades. The description of Hamiltonian systems often leads to area preserving discrete mappings. In this project we investigate a class of systems that can be described by a Hamiltonian which is composed by an integrable as well as a non integrable part. The main goal of this work is to investigate some scaling properties, localization of invariant spanning curves, and characterization of critical exponents for a family of discrete, nonlinear and area preserving mappings. Moreover we aim to compare our numerical findings - obtained from a set of scaling hypotheses - with a theoretical approach.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha família que sempre esteve presente comigo e me dando força todas as vezes que necessitei. Em especial, agradeço à minha mãe Leila Vangeri Fernandes de Oliveira, que me apoiou desde o começo e que batalhou muito por todos da nossa família, tanto para nos dar educação quanto para nos proporcionar um ambiente familiar e agradável. Agradeço também às minhas irmãs Janaína Helena Fernandes Martins e Aline Fernandes Martins, por estarem presentes em minha vida e me darem amor e carinho quando eu mais precisei.

Agradeço ao meu orientador Edson Denis Leonel pela confiança que teve em mim desde o início do projeto. As inúmeras discussões, tanto na área de pesquisa quanto nas outras áreas da física, que me proporcionaram, cada vez mais, uma visão mais abrangente sobre essa área tão fascinante.

Agradeço à Moradia Estudantil que me proporcionou um local não apenas para morar, mas para viver. Nesses anos todos de graduação foi ela quem me forneceu um ambiente agradável onde eu pude estudar, morar, viver e me relacionar com as pessoas.

Agradeço a todas as pessoas que me ajudaram nesse longo período de graduação, em especial, aquela família que não possui o mesmo sangue, mas que os laços são tão fortes quanto. Meus amigos Lucas C. G. Squillante, Matheus Rossi, Matheus H. Quadros, toda a república Boate Azul e vários outros que sempre proporcionaram várias discussões filosóficas sobre a vida e a ciência.

Gostaria de agradecer em especial aquele que não é, mas que tenho orgulho de chamá-lo de irmão, André K. F. Ferrazo, por todas as vezes em que esteve ao meu lado desde o primeiro ano de graduação. Ao longo da vida encontramos vários amigos mas apenas alguns podem ser chamados de irmão.

Agradeço ao Departamento de Física, da UNESP de Rio Claro, pelo uso dos computadores e instalações.

Agradeço também pela experiência vivida nos projetos de extensão Show de Física e cursinho ATHO.

Sou eternamente grato a todos vocês.

Conteúdo

1	Estudo fenomenológico das leis de escala em mapas 2-D	11
1.1	Propriedades dinâmicas do mapeamento e hipóteses de escala	11
1.2	Resultados numéricos	15
2	Estudo analítico das leis de escalas em mapas 2-D	19
2.1	Uma abordagem teórica sobre as leis de escala	19
3	Conclusões	23

Introdução

Consideramos Galileu Galilei (1564 - 1642) como o pai da ciência moderna por sua tentativa de compreender os fenômenos ocorridos na natureza de uma forma diferente da física aristotélica que ainda era ensinada em sua época. Assim, o desenvolvimento da mecânica clássica começa a dar seus passos mais importantes. No entanto, é com o inglês Isaac Newton (1642 - 1727) que verificamos um ponto crucial no rumo da ciência. Com o desenvolvimento do cálculo diferencial, foi possível, posteriormente, uma descrição detalhada de todas as áreas envolvendo a mecânica clássica, em especial a Lei da Gravitação Universal. Essa lei nos proporcionou uma compreensão muito mais detalhada, complexa e precisa da mecânica planetária, no nosso caso, o sistema solar. A mecânica newtoniana é chamada de determinística justamente por haver total previsibilidade de todo e qualquer movimento que um dado corpo possa vir a executar. A dinâmica celeste era e é muito estudada até hoje. O físico e matemático francês, Henry Poincaré (1854 - 1912), estudou o problema de três corpos e publicou uma série de trabalhos chamada *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, que foi publicada nos anos de 1881, 1882, 1885 e 1886. Nesses trabalhos ele apresentou um conjunto de equações diferenciais e quais eram os comportamentos de suas soluções. A partir dessas soluções, Poincaré mostrou que o comportamento dessas órbitas não era regular e possível de se determinar, ou seja, quando eram dadas condições iniciais, escolhidas arbitrariamente próximas, para quaisquer duas órbitas, elas resultariam, no futuro, em órbitas muito distintas. Nas palavras de Poincaré [1]:

"Além disso, esse estudo qualitativo tem em si mesmo um interesse de primeira ordem. Várias questões importantes da análise e da mecânica são reduzidas a ele. Tomemos por exemplo o problema dos três corpos: não podemos nos perguntar se um dos corpos irá sempre permanecer dentro de certa região do céu ou mesmo se ele irá se mover indefinidamente; se a distância entre dois corpos irá crescer ou decrescer indefinidamente, ou mesmo se essa distância irá permanecer dentro de certos limites. Não podemos fazer mil questões desse tipo, que serão todas resolvidas quando construirmos qualitativamente as trajetórias dos três corpos? E se consideramos um número maior de corpos, o que é a questão da invariabilidade dos elementos dos planetas, senão uma verdadeira questão

da Geometria qualitativa desde que, ver que o eixo maior não tem variações seculares, é mostrar que ele oscila constantemente entre certos limites?”.

É com os estudos de Poincaré sobre a mecânica celeste que a dinâmica não-linear começa a dar seus primeiros passos. Ele introduziu dois conceitos importantes em dinâmica não linear; são eles a *seção de Poincaré* e o *mapa de Poincaré*. A *seção de Poincaré* é entendida como uma forma de reduzir o estudo de um fluxo de soluções num espaço de fase com n dimensões para $n - 1$ dimensões. Ou seja, se um determinado sistema dinâmico é descrito por um conjunto de equações diferenciais ele fornecerá um fluxo de soluções que interceptará um plano, que é a seção de Poincaré. No entanto, a *seção de Poincaré* utiliza o *mapa de Poincaré* para fazer essa redução. Esse mapa é interpretado como uma sequência de pontos que interceptam a *seção de Poincaré*. Essa sequência é determinada pelo fluxo das soluções e para esse conjunto se dá o nome de mapa. A Figura 1 ilustra uma seção de Poincaré

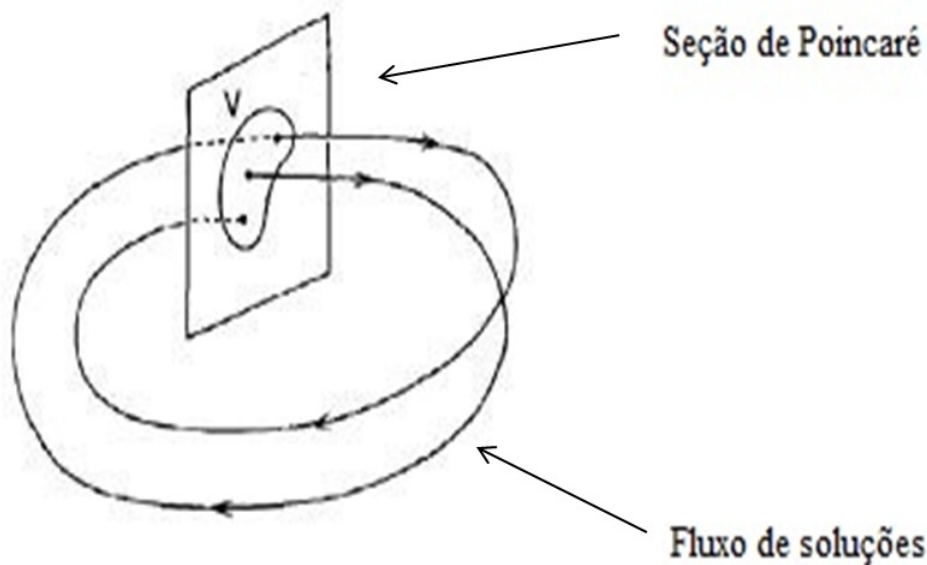


Figura 1: Fluxo de soluções interceptando a seção de Poincaré.

Foi somente por volta de 1960 com o meteorologista do M.I.T (Massachusetts Institute of Technology), Edward Lorenz (1917 - 2008), que a dinâmica não linear ganha força[2]. Lorenz tentou fazer previsões do tempo climático que eram baseadas em um conjunto de equações diferenciais parciais que levavam em conta vários fatores. Ao observar os resultados, Lorenz verificou que pequenas variações proporcionavam resultados completamente diferentes ao se fazer a evolução temporal do problema. Na Figura 2 pode-se ver um exemplo de um atrator. Diz-se que atrator é um conjunto invariante para o qual as órbitas próximas convergem depois de um tempo suficientemente longo [3].

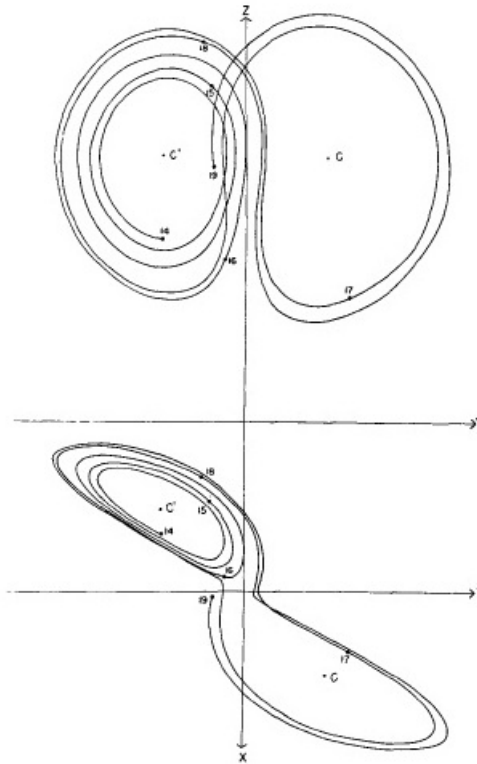


Figura 2: atrator de Lorenz [2].

Com isso, pode-se perceber claramente a dificuldade de se ter precisão em prever a evolução temporal de um fluido turbulento. Assim surgiram os atratores, que são amplamente estudados na dinâmica não-linear e se apresentam nos mais variados sistemas dinâmicos.

Em meados dos anos 70, Robert May desenvolveu um mapa logístico que se propunha a descrever o comportamento do crescimento de populações [4]. Esse mapa é descrito pela equação abaixo

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (1)$$

onde r é a taxa de crescimento da população e também o parâmetro de controle e x_n representa as gerações seguintes. Esse mapa logístico não apresenta estabilidade estrutural o que gera as chamadas *bifurcações* que são representadas pela Figura 3.

No mapa logístico representado pela Figura 3, verifica-se a presença de bifurcações. Quando um determinado sistema dinâmico perde a estabilidade estrutural diz-se que ele sofreu uma bifurcação [3]. Outro resultado interessante foi obtido por Armand Feigenbaum (1922 - 2014). Ele notou que à medida em que se aproxima do caos, cada região periódica é menor do que a anterior por um fator $\cong 4,66$, ou seja, essa constante caracteriza a transição para o caos na aproximação geométrica do parâmetro de bifurcação ao seu valor limite e esse valor independe da função que é iterada [5]. Essa constante ficou conhecida como constante de Feigenbaum.

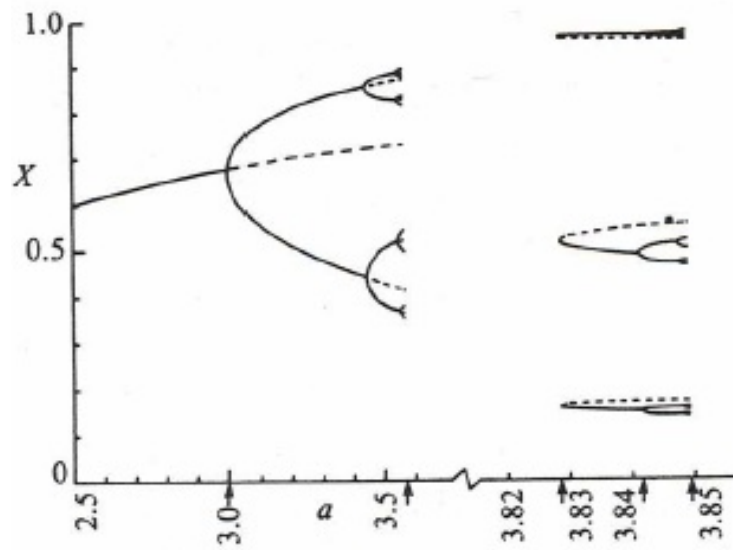


Figura 3: Mapa logístico de Robert May, onde verifica-se a presença de bifurcações [4].

Neste trabalho de conclusão de curso, o objeto de investigação será o comportamento da dinâmica e de algumas propriedades estatísticas de uma família de mapas bidimensionais (2-D). Assim, considere uma classe de sistemas que pode ser descrita por um Hamiltoniano do tipo

$$H(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(J_1, J_2) + \epsilon H_1(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) , \quad (2)$$

onde as variáveis J_i e θ_i , com $i = 1, 2$, correspondem, respectivamente, à ação e o ângulo. O parâmetro ϵ é o que define a integrabilidade ou não integrabilidade do Hamiltoniano.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1 será feito um estudo sobre a fenomenologia dos mapas bidimensionais assim como suas respectivas leis de escala e algumas de suas propriedades. O Capítulo 2 é dedicado ao tratamento analítico dessas leis de escalas e suas implicações. Posteriormente, as conclusões serão apresentadas no Capítulo 3.

Capítulo 1

Estudo fenomenológico das leis de escala em mapas 2-D

Neste capítulo serão descritos alguns conceitos importantes sobre os mapeamentos bidimensionais. Em seguida, serão exploradas as propriedades dinâmicas do mapa assim como as hipóteses de escala e suas respectivas leis. Os resultados numéricos e suas implicações também serão mostrados nas seções subsequentes.

1.1 Propriedades dinâmicas do mapeamento e hipóteses de escala

Considere um sistema dinâmico cujo Hamiltoniano é descrito pela equação (2). Como já foi dito anteriormente, o parâmetro ϵ determina a integrabilidade ou não integrabilidade do Hamiltoniano, ou seja, se $\epsilon = 0$, o Hamiltoniano será integrável e, se $\epsilon \neq 0$, o Hamiltoniano será não integrável. Dessa maneira, esse parâmetro de controle será de suma importância, afinal ele é quem define a transição de fase de integrável para não integrável. Podemos reescrever a equação (2) de outro modo. Como a energia do sistema é constante pode-se reduzir o sistema para três variáveis. Agora, considerando a seção de Poincaré dada pelo plano I_1 vs. θ_1 e sendo o ângulo θ_2 constante (mod 2π) [6], podemos reescrever o mapeamento como

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon h(\theta_n, I_{n+1}) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + K(I_{n+1}) + \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})] \text{ mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (1.1)$$

onde h , K e p são funções não lineares. O índice n nos dá a n -ésima iteração do mapeamento. Neste trabalho, considerou-se um caso específico onde $h(\theta_n, I_{n+1}) = \sin(\theta_n)$, $K = 1/I_{n+1}^\gamma$ com $\gamma > 0$ e $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$. Assim, o mapeamento se apresentará da seguinte forma

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + \frac{1}{I_{n+1}}] \quad \text{mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (1.2)$$

para esse mapeamento, pode-se variar os parâmetros ϵ e γ , no entanto, para este trabalho, foram realizadas variações apenas em ϵ e considerou-se $\gamma = 1$. Escolhido um valor para ϵ , podemos analisar o espaço de fases para o mapeamento (1.2). Para que isso ocorra parte-se de um par de condições iniciais (I_0, θ_0) , que, posteriormente, fornecerá o par (I_1, θ_1) , e assim, sucessivamente, até o par (I_n, θ_n) . A sequência de estados $(I_0, \theta_0) \longrightarrow (I_1, \theta_1) \longrightarrow (I_2, \theta_2) \longrightarrow \dots (I_n, \theta_n)$ recebe o nome de órbita, e o conjunto de todas essas órbitas chama-se espaço de fases ou espaço de estados [7].

A Figura 1.1 mostra como é o espaço de fase do mapa (1.2) ao se considerar $\epsilon = 0,01$ e $\gamma = 1$. Ao analisar esse espaço de fase nota-se um conjunto de ilhas de estabilidade que estão cercadas por um mar de caos. No entanto, o mar de caos também é limitado por várias curvas invariantes do tipo *spanning*. Essas curvas invariantes atuam como um tipo de barreira que impede o avanço do mar de caos, ou seja, o mar de caos só existirá abaixo ou acima dessas curvas.

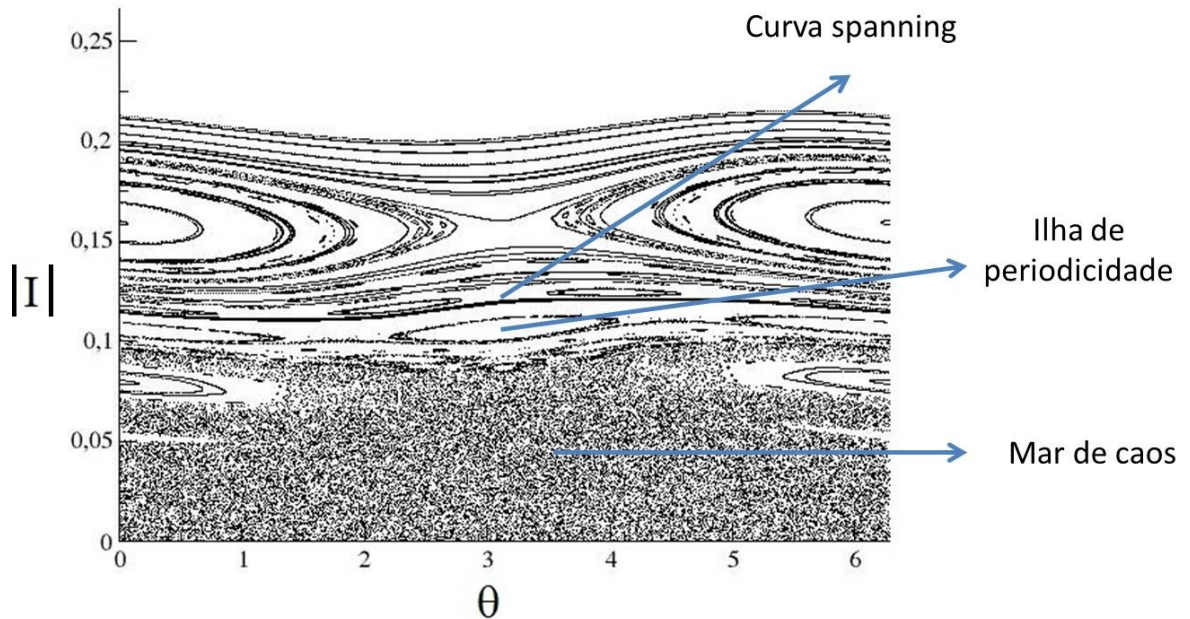


Figura 1.1: Espaço de fase para o mapeamento (1.2) para o caso em que $\epsilon = 0,01$ e $\gamma = 1$.

Aqui, observa-se que a condição inicial está localizada no mar de caos e suficientemente distante das curvas *spanning*, o que permite uma observação do que ocorre com a dinâmica difusiva de I . No entanto, por conta da simetria do problema $\bar{I} = 0$, assim, passaremos a observar o que ocorre com \bar{I}^2 . Consideramos $I_{RMS} = \sqrt{\bar{I}^2}$ por se tratar de um observável que pode ser avaliado no mar de caos. O observável \bar{I}^2 é definido a partir de duas médias

$$\overline{I^2} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{i,j}^2 \right), \quad (1.3)$$

onde n identifica o número de iterações do mapa e M o número de condições iniciais. O somatório em i é uma média ao longo de um ensemble de condições iniciais e o somatório em j é uma média ao longo da órbita [6].

A Figura 1.2(a) apresenta o comportamento de I_{RMS} em função do número n de iterações. Pode-se notar que todas as curvas apresentam um comportamento muito semelhante, ou seja, crescem paralelas umas as outras para n pequeno e saturam para tempos longos. Outro ponto importante que deve ter destaque é o fato de que as curvas apresentam um regime de saturação, onde I_{RMS} passa a ser constante a partir de um determinado valor de n que nomeou-se de n_x . Outra característica que essas curvas mostram é que o regime de saturação aumenta conforme o valor do parâmetro de controle aumenta. Apesar dessas curvas, que se mostram paralelas, partirem de valores diferentes, todas elas crescem com uma lei de potência para $n < n_x$. Para valores maiores ou iguais a n_x as curvas passam a ser caracterizadas por um platô constante. Ao se fazer a transformação de $n \rightarrow n\epsilon^2$ teremos uma reescala para o eixo horizontal. Desse modo, observa-se que as curvas crescem juntas, no entanto, cada uma tem o seu regime de saturação diferente.

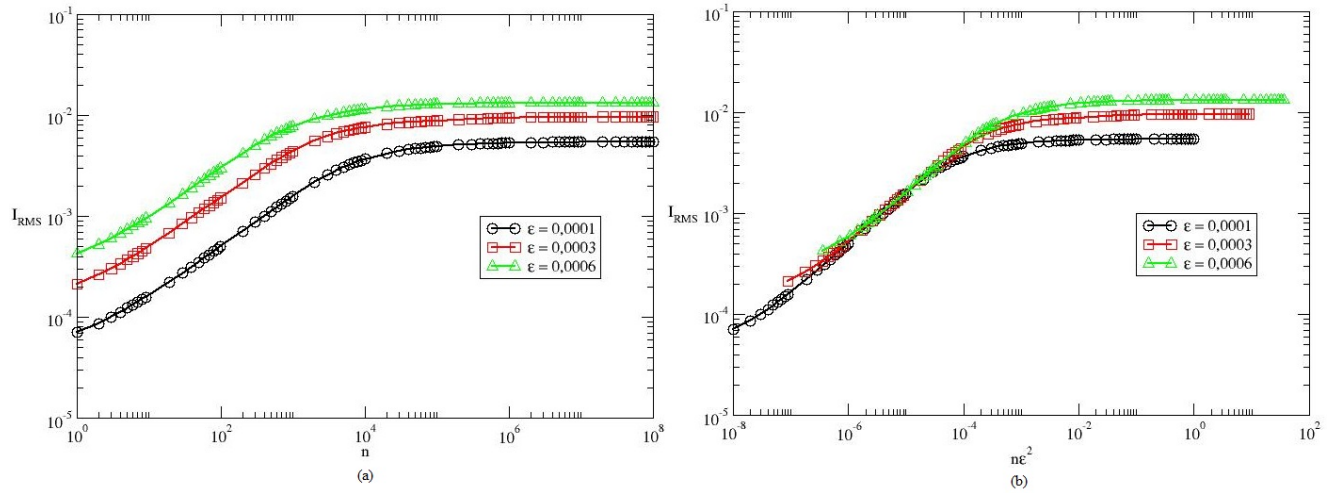


Figura 1.2: Aqui temos I_{RMS} em função de: (a) n , e (b) $n\epsilon^2$ para o caso em que $\gamma = 1$. Para ambos os casos foram atribuídos três valores distintos para ϵ .

A partir da análise desse comportamento podemos fazer as seguintes hipóteses de escala:

1. Para $n \ll n_x$, as curvas de crescimento podem ser descritas da seguinte forma

$$I_{RMS} \propto (n\epsilon^2)^\beta, \quad (1.4)$$

onde β é o expoente crítico, também chamado de expoente de aceleração;

2. Para $n \gg n_x$, observa-se que as curvas se aproximam de um regime de saturação, de tal forma que

$$I_{RMS,SAT} \propto \epsilon^\alpha, \quad (1.5)$$

onde α é chamado de expoente de crescimento;

3. O número de iterações necessárias para se notar a mudança de crescimento para um platô constante é dada por

$$n_x \propto \epsilon^z, \quad (1.6)$$

onde z é um expoente crítico.

Para que seja possível determinar a lei escala para os expoentes críticos devemos, primeiramente, definir o conceito de função homogênea generalizada. Diz-se que uma função homogênea é aquela que, quando passa por transformações em suas variáveis, torna-se uma outra função que é proporcional àquela que lhe deu origem. Para que o comportamento de I_{RMS} seja descrito, partimos das hipóteses de escala e, assim, temos a seguinte função homogênea generalizada

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon) = l I_{RMS}(l^a n\epsilon^2, l^b \epsilon), \quad (1.7)$$

onde l é um fator de escala e os expoentes característicos são representados por a e b . O fator de escala l pode ser escolhido arbitrariamente, de tal forma que pode-se escolhê-lo como $l^a n\epsilon^2 = 1$, o que irá produzir

$$l = (n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}}. \quad (1.8)$$

Agora, substituindo a equação (1.8) em (1.7), temos que

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon) = (n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}} I_{RMS}(1, (n\epsilon^2)^{-\frac{b}{a}} \epsilon). \quad (1.9)$$

Por conveniência, chamaremos $I_{RMS}(1, (n\epsilon^2)^{-\frac{b}{a}} \epsilon) = I_A((n\epsilon^2)^{-\frac{b}{a}} \epsilon)$, dessa maneira

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon) = (n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}} I_A((n\epsilon^2)^{-\frac{b}{a}} \epsilon), \quad (1.10)$$

onde I_A é assumido ser constante. Analisando a primeira hipótese de escala, para o caso em que $n \ll n_x$, e comparando com a equação (1.10), temos que

$$(n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}} = (n\epsilon^2)^\beta, \quad (1.11)$$

isso nos diz que $\beta = -\frac{1}{a}$. Escolhendo, agora, $l^b \epsilon = 1$, implica em

$$l = \epsilon^{-\frac{1}{b}}, \quad (1.12)$$

substituindo a equação (1.12) em (1.7)

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon) = \epsilon^{-\frac{1}{b}} I_B(\epsilon^{-\frac{a}{b}} n\epsilon^2), \quad (1.13)$$

de tal forma que $I_B(\epsilon^{-\frac{a}{b}} n\epsilon^2) = I_{RMS}(\epsilon^{-\frac{a}{b}} n\epsilon^2, 1)$. Assumindo que I_B é constante para $n \gg n_x$ e comparando a equação (1.13) com a segunda hipótese de escala, para o caso em que $n \gg n_x$, tem-se a seguinte relação para o segundo expoente crítico

$$\epsilon^\alpha = \epsilon^{-\frac{1}{b}}, \quad (1.14)$$

para esse caso, nota-se que $\alpha = -\frac{1}{b}$.

A determinação do expoente crítico z surge quando compara-se as expressões (1.8) e (1.12). Esse expoente vem a partir da terceira hipótese de escala, mostrada em (1.6), para o caso em que há uma mudança de crescimento para saturação, assim

$$(n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}} = \epsilon^{-\frac{1}{b}}, \quad (1.15)$$

Agora, isolando n temos

$$n_x = \epsilon^{\frac{a}{\beta} - 2}. \quad (1.16)$$

Ao comparar a expressão (1.16) com a hipótese de escala (1.6) tem-se a seguinte representação para o expoente crítico z

$$z = \frac{\alpha}{\beta} - 2. \quad (1.17)$$

Assim, pode-se notar que a equação (1.17) fornece uma lei de escala para os expoentes críticos. É válido ressaltar que essa lei de escala também pode ser escrita em função apenas dos expoentes característicos fornecidos pela função homogênea generalizada. Assim, podemos notar que ao saber quaisquer dois expoentes críticos, é possível determinar o terceiro, ou seja, é uma lei complementar. Esses expoentes podem ser encontrados de diferentes maneiras. Mostraremos na próxima seção uma maneira de encontrar numericamente esses expoentes.

1.2 Resultados numéricos

Para mostrar os resultados obtidos nas simulações numéricas retornamos aos gráficos representados pela Figura 1.2. A partir da Figura 1.2(b) pode-se notar que o crescimento

das três curvas, para diferentes valores do parâmetro de controle ϵ , é semelhante. É o expoente crítico β que fornece o crescimentos dessas curvas. Os resultados numéricos indicam que $\beta = 0,481(1)$. Fazendo uma aproximação para $\beta \cong 1/2$, e admitindo a comparação mostrada em (1.11) que $\beta = -1/a$, conclui-se que, $a = -2$. O expoente crítico α será obtido a partir da Figura 1.3 que mostra I_{RMS} vs. ϵ para o caso em que $n \gg n_x$. Esse expoente descreve o comportamento assintótico de I_{RMS} . Para tal, foi considerado γ fixo e igual a um ($\gamma = 1$) ao passo que o parâmetro ϵ foi variado para pequenos valores, assim, foi considerado $\epsilon \in [10^{-4}, 10^{-3}]$.

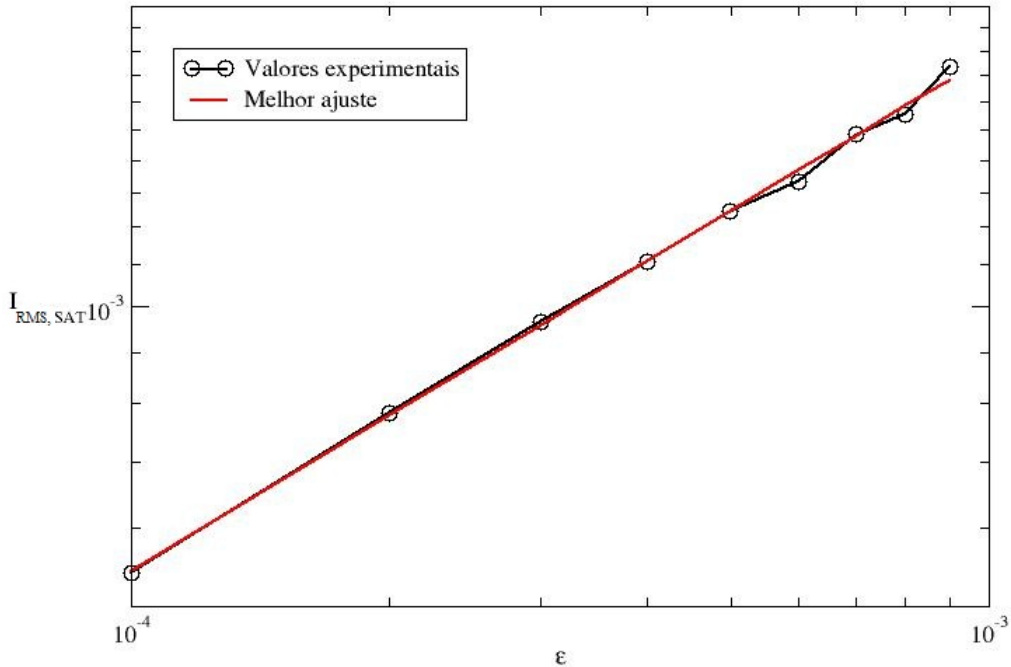


Figura 1.3: Comportamento de $I_{RMS,SAT}$ vs. ϵ para o caso em que $\gamma = 1$.

O expoente crítico α foi determinado a partir do ajuste em lei de potência como mostrado na Figura 1.3. Esse ajuste em lei de potência forneceu um valor para $\alpha = 0,514(8)$, considerando $\alpha \cong 1/2$ pode-se determinar o fator de escala que é obtido para $\alpha = -1/b$, assim, $b = 2$. O expoente z pode ser obtido a partir de um ajuste em lei de potência a partir do comportamento de n_x vs. ϵ , como mostrado na figura (1.4).

O mesmo procedimento para determinar o expoente crítico α foi utilizado para que se obtivesse o expoente z . De tal forma que o ajuste linear forneceu um valor para $z = -0,90(1)$. Esse valor encontrado a partir do ajuste da curva oferece um resultado muito próximo daquele previsto pela equação (1.17).

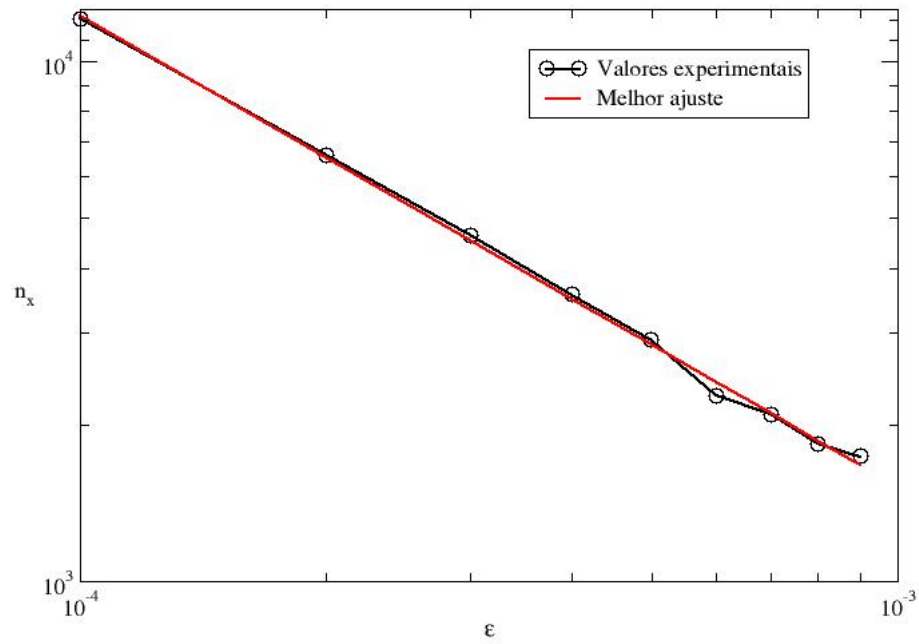


Figura 1.4: Comportamento de n_x vs. ϵ para o caso em que $\gamma = 1$.

A partir da função homogênea generalizada da descrição do mar de caos foi encontrada uma relação entre os expoentes críticos. A região caótica é invariante frente a ϵ . Isso pode ser mostrado quando se faz as transformações $I_{RMS} \rightarrow I_{RMS}/\epsilon^\alpha$ e $n \rightarrow n/\epsilon^z$. Nesse caso, para diferentes curvas de I_{RMS} obtidas para diferentes parâmetros, as curvas sempre irão se sobrepor em uma curva universal, como mostrado na Figura 1.5.

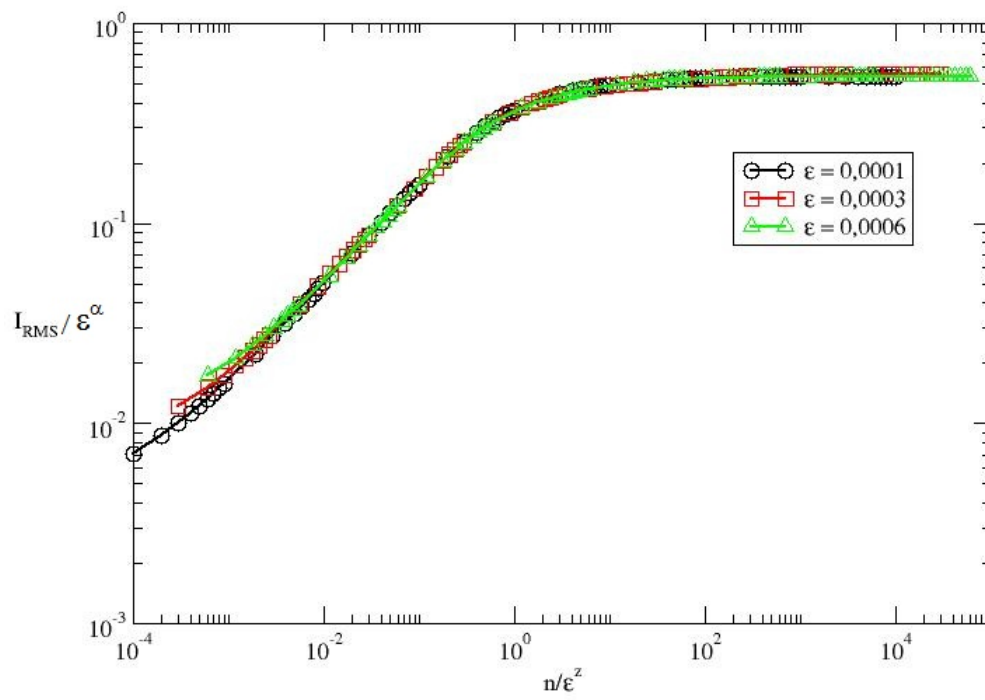


Figura 1.5: Comportamento de I_{rms}/ϵ^α vs n/ϵ^z .

Capítulo 2

Estudo analítico das leis de escalas em mapas 2-D

No capítulo anterior foi mostrada uma análise numérico-computacional que descrevia o comportamento do mapeamento (1.2). Neste capítulo será dado um enfoque puramente teórico para este mapeamento, ou seja, será feita uma descrição analítica dos expoentes críticos e para seus respectivos valores numéricos utilizando algumas de suas propriedades do espaço de fases conjuntamente com o mapa padrão.

2.1 Uma abordagem teórica sobre as leis de escala

Ao observar o espaço de fase podemos notar que uma de suas características é a presença de regiões regulares, assim como também há a presença de curvas invariantes *spanning*, ilhas de periodicidade e algumas regiões de caos. A característica mais importante do espaço de fase tem relação com a primeira curva invariante *spanning*. Ela separa o espaço de fase em duas regiões distintas. A região acima dessa primeira curva mostra um comportamento caótico local, enquanto a região abaixo dessa curva tem um comportamento caótico global. Um exemplo de sistema dinâmico que possui as características citadas, é descrito como

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + K \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \text{mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde K é um parâmetro de controle. Vale ressaltar que para $K = 0$, o mapa é integrável e que, para $K \neq 0$ o mapa é não integrável. Para discutir o mapeamento descrito por (1.2), considere que a variável I , nas imediações da curva invariante, ou seja, entre 0, 1 e 0, 15 possa ser escrita como

$$I_n = \tilde{I} + \Delta I_n, \quad (2.2)$$

onde \tilde{I} corresponde a um determinado valor característico da curva invariante e que, ΔI_n , é uma pequena perturbação de \tilde{I} . A primeira equação do mapeamento (1.2), terá a seguinte forma

$$\Delta I_{n+1} = \Delta I_n + \epsilon \sin(\theta_n). \quad (2.3)$$

Enquanto isso, a segunda equação do mapeamento, será dada por

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{(\tilde{I} + \Delta I_{n+1})^\gamma}. \quad (2.4)$$

Para que se faça as transformações necessárias, isolaremos o termo $1/\tilde{I}^\gamma$, assim a equação (2.4), poderá ser escrita como

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} \left(1 + \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}} \right)^{-\gamma}. \quad (2.5)$$

Agora, expandindo a equação (2.5) em série de Taylor e utilizando apenas o primeiro termo da expansão, a segunda equação do mapeamento (1.2), será

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} - \gamma \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}^{\gamma+1}}. \quad (2.6)$$

Agora, multiplicando a equação (2.3) por $-\gamma/\tilde{I}^{\gamma+1}$ e depois adicionando o termo $1/\tilde{I}^\gamma$. Então, podemos estabelecer uma relação com duas novas variáveis, da forma

$$J_n = \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} - \gamma \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}^{\gamma+1}}, \quad (2.7)$$

$$\phi_n = \theta_n + \pi. \quad (2.8)$$

Com essas novas variáveis estabelecidas, o mapeamento (1.2) para o caso de pequenas perturbações na região da curva invariante, assumirá a seguinte forma

$$T : \begin{cases} J_{n+1} = J_n + \frac{\gamma\epsilon}{\tilde{I}^{\gamma+1}} \sin(\theta_n) \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + J_{n+1}] \text{mod}(2\pi) \end{cases}. \quad (2.9)$$

Comparando o mapeamento (2.1) com o novo mapeamento (2.9), nota-se uma relação entre os parâmetro de controle, que podem ser organizados como

$$K = \frac{\gamma\epsilon}{\tilde{I}^{\gamma+1}}. \quad (2.10)$$

Dessa forma, sabe-se que nas imediações da curva invariante $K \cong 0,9716\dots$ [7], de tal forma que podemos determinar a posição da primeira curva curva invariante *spanning* como

$$\tilde{I} = \left(\frac{\gamma}{K}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \epsilon^{\frac{1}{\gamma+1}}. \quad (2.11)$$

Vale ressaltar que a posição dessa primeira curva é de extrema importância, afinal, ela é quem delimita da regiões de caos, assim como o comportamento de I_{RMS} . Comparando a equação (2.11) e (1.5) podemos determinar analiticamente o primeiro expoente crítico α em função do parâmetro de controle γ , assim, temos que

$$\alpha = \frac{1}{\gamma + 1}. \quad (2.12)$$

Agora, para que se faça a determinação do expoente crítico β , será utilizada a primeira equação do mapeamento (1.2). Dessa forma, ao elevar ambos os lados ao quadrado verifica-se que

$$I_{n+1}^2 = I_n^2 + 2\epsilon I_n \sin(\theta_n) + \epsilon^2 \sin^2(\theta_n). \quad (2.13)$$

Ao fazer uma média da equação (4.13) em um ensemble de $\theta \in [0, 2\pi]$ temos a seguinte equação

$$\overline{I_{n+1}^2} = \overline{I_n^2} + 2\epsilon \overline{I_n \sin(\theta_n)} + \epsilon^2 \overline{\sin^2(\theta_n)}. \quad (2.14)$$

Observando esta equação temos alguns valores médios que podem ser facilmente calculados, são eles, respectivamente

$$\overline{\sin(\theta_n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\theta_n) d\theta, \quad (2.15)$$

$$\overline{\sin^2(\theta_n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(\theta_n) d\theta. \quad (2.16)$$

Lembrando que os limites de integração estão no intervalo $[0, 2\pi]$ e resolvendo as equações (2.15) e (2.16), verifica-se que $\overline{\sin(\theta_n)} = 0$ e $\overline{\sin^2(\theta_n)} = 1/2$. De tal forma que a equação (2.14), pode ser reescrita como

$$\overline{I_{n+1}^2} = \overline{I_n^2} + \frac{\epsilon^2}{2}. \quad (2.17)$$

Para o caso em que ϵ é suficientemente pequeno, a grandeza $\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2}$ também será suficientemente pequena. Desta forma é válida a aproximação

$$\frac{d\overline{I^2}}{dn} = \frac{\epsilon^2}{2}. \quad (2.18)$$

Integrando a equação diferencial de primeira ordem dada por (2.18), temos que

$$\int_{I_0}^{I(n)} d\bar{I}^2 = \int_0^n \frac{\epsilon^2}{2} dn, \quad (2.19)$$

Assim,

$$\bar{I}^2(n) = I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2}n. \quad (2.20)$$

Como já dito anteriormente $I_{RMS} = \sqrt{\bar{I}^2}$, o resultado produzido será

$$I_{RMS} = \sqrt{I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2}n}. \quad (2.21)$$

Agora, considerando I_0 suficientemente pequeno, teremos I_{RMS} dado por

$$I_{RMS} \cong \frac{1}{\sqrt{2}}(n\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.22)$$

Comparando a equação (2.22) com a hipótese de escala (1.4) conclui-se que $\beta = 1/2$, o que valida os resultados numéricos mostrados no capítulo anterior. Para que se possa determinar o expoente crítico z , basta utilizar a equação (2.19), porém, com outros limites de integração, ou seja, fazendo a transformação $I_0 \rightarrow 0$ e $I(n) \rightarrow \tilde{I}$. Aplicando esses novos limites de integração e resolvendo a equação, temos que

$$\left(\frac{\gamma\epsilon}{K}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}} = \left(\frac{n_x\epsilon^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.23)$$

Isolando n_x obtém-se o seguinte resultado

$$n_x = 2\frac{\gamma}{K} \frac{\epsilon^{\frac{2}{\gamma+1}}}{\epsilon^{\frac{-2}{\gamma+1}}}. \quad (2.24)$$

Comparando (2.24) com a hipótese de escala (1.6) conclui-se que

$$z = -\frac{2\gamma}{\gamma+1}. \quad (2.25)$$

Podemos determinar o expoente crítico z apenas conhecendo o parâmetro γ .

Capítulo 3

Conclusões

Nesta monografia foi apresentada uma descrição detalhada sobre como obter expoentes críticos para um mapa bidimensional quando o sistema passa de integrável para não integrável. Para tal, foram propostas hipóteses de escala que se mostraram compatíveis com as simulações numéricas. A determinação das curvas *spanning*, se mostrou muito útil, sendo que essas delimitam as ilhas de periodicidade assim como a região do mar do caos.

A abordagem teórica das hipóteses de escalas e a determinação de expoentes críticos foi contemplada com os resultados numéricos obtidos. Esses resultados mostraram que ao se fazer as devidas transformações há uma invariância de escala no sistema. Os resultados obtidos também conduziram a uma lei de escala

$$z = \frac{\alpha}{\beta} - 2, \quad (3.1)$$

de modo que o conhecimento de quaisquer dois expoentes fornece o terceiro.

Temos como perspectiva continuar o estudo sobre as leis de escala e mapeamento de sistemas não integráveis. A ideia central agora é variar os parâmetros de controle e verificar o que ocorre com o mar de caos, as curvas *spanning*, ilhas de periodicidade e se os expoentes críticos continuam a obedecer as leis de escala.

Bibliografia

- [1] Poincaré,H. *Sur les courbes définies par une équation différentielle*. 376. (1881).
- [2] Lorenz, E.N. *Deterministic Nonperiodic Flow*. Journal of the Atmospheric Sciences. (1963).
- [3] Prado, C.P.C. e Fiedler-Ferrari, N. *Caos: Uma introdução*. (1995).
- [4] May, R.M. *Simple mathematical models with very complicated Dynamics*. Nature. 86. (1976).
- [5] Feigenbaum, Armand V.. *Controle da qualidade total*. Editora Makron Books, (1994).
- [6] Leonel,E.D. *Fundamentos da física estatística*. Editora Edgard Blücher LTDA. (2015)
- [7] Lichtenberg, A.J. e Lieberman, M.A. *Regular and chaotic dynamics* Editora Spring. New York. (2010)